

- \* Môn thi: Toán (Chuyên)
- \* Ngày thi: 31/5/2023
- \* Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

ĐỀ

Câu 1: (4,0 điểm)

a) Cho biểu thức  $H = n^2 - n - 5$ . Tìm tất cả các số nguyên dương  $n$  để  $H$  là một số chính phương.

b) Tìm các số nguyên  $x, y$  sao cho:  $x(x + y)^2 = y - 1$ .

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Cho các số thực dương  $a, b$  và  $a \neq b$ . Rút gọn biểu thức sau:

$$P = \frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} + \frac{2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab} - a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{a}}$$

b) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (2x - y)(x^2 + y^2) + 2x^2 + 6x = xy + 3y \\ \sqrt{3(x^2 + y) - 7} + \sqrt{5x^2 - 5y + 14} = 4 - 2x - x^2 \end{cases}$$

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Cho phương trình  $x^2 - 5mx - 4m = 0$  ( $m$  là tham số)

a1) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

a2) Giả sử phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ . Tìm giá trị của  $m$  để

biểu thức  $A = \frac{m^2}{x_1^2 + 5mx_2 + 12m} + \frac{x_2^2 + 5mx_1 + 12m}{m^2}$  đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho biểu thức  $M = \sqrt{\frac{a}{a+bc}} + \sqrt{\frac{b}{b+ac}} + \sqrt{\frac{c}{c+ab}}$  với  $a, b, c > 0$  và

$ab + bc + ca = abc$ . Chứng minh  $M \leq \frac{3}{2}$ .

Câu 4: (4,0 điểm)

Cho  $\Delta ABC$  đều nội tiếp đường tròn ( $O$ ).  $H$  là trung điểm của  $BC$ ;  $M$  là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng  $BH$  ( $M \neq B; M \neq H$ ). Lấy điểm  $N$  thuộc đoạn thẳng  $CA$  sao cho  $CN = BM$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $MN$ .

a) Chứng minh bốn điểm  $O, M, H, I$  cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi  $K$  là giao điểm của  $OI$  và  $AB$ . Chứng minh  $\Delta MNK$  là tam giác đều.

c) Xác định vị trí của điểm  $M$  để  $\Delta IAB$  có chu vi nhỏ nhất.

**Câu 5: (4,0 điểm)**

Cho đường tròn  $(O; R)$  có dây  $BC$  cố định ( $BC < 2R$ ) và điểm  $A$  trên cung lớn  $BC$  ( $A \neq B; A \neq C; A$  không là điểm chính giữa cung lớn  $BC$ ). Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$ ;  $E$  và  $F$  lần lượt là hình chiếu của  $B$  và  $C$  trên đường kính  $AK$ .

a) Chứng minh  $HE \perp AC$ .

b) Chứng minh  $\frac{S_{ABC}}{AB \cdot BC \cdot AC} = \frac{1}{4R}$ .

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta HEF$  là một điểm cố định khi điểm  $A$  di động trên cung lớn  $BC$ .

---HẾT---