

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2,5 điểm).

a) Tính $A = \sqrt{64} + \sqrt{16} - 2\sqrt{36}$.

b) Xác định hệ số a, b của đường thẳng $y = ax + b$, biết đường thẳng này đi qua điểm $M(1; 9)$ và song song với đường thẳng $y = 3x$

c) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{1+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, với $x > 0$ và $x \neq 1$

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình: $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

b) Cho phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$.

Câu 3 (1,5 điểm).

Vào tháng 5 năm 2021, chỉ sau 26 giờ phát hành sản phẩm âm nhạc MV “Trốn tìm” của rapper Đen Vâu đã chính thức dành Top 1 trending của YouTube Việt Nam. Giả sử trong tất cả những người đã xem MV, có 60% số người đã xem 2 lượt và những người còn lại mới chỉ xem 1 lượt. Hỏi đến thời điểm nói trên có bao nhiêu người đã xem MV, biết rằng tổng số lượt xem là 6,4 triệu lượt?

Câu 4 (3,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , các đường cao AD, BE và CF ($D \in BC, E \in AC$ và $F \in AB$) cắt nhau tại H .

a) Chứng minh $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi N là giao điểm của CF và DE . Chứng minh $DN \cdot EF = HF \cdot CN$

c) Gọi M là trung điểm của BC , tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng OM tại P . Chứng minh $\widehat{OAM} = \widehat{DAP}$.

Câu 5 (1,0 điểm).

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 3y + 2\sqrt{xy} = 4(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \\ (x+1)(y + \sqrt{xy} - x^2 + x) = 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

..... **Hết**

Họ và tên thí sinh: SBD:

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{64} + \sqrt{16} - 2\sqrt{36} \\ &= 8 + 4 - 2 \cdot 6 = 0 \end{aligned}$$

b)

Đường thẳng $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 3x$. Suy ra $a = 3; b \neq 0$.

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $M(1;9)$. Suy ra: $9 = a \cdot 1 + b \Rightarrow 9 = 3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 6$ (Thỏa mãn).

Vậy $a = 3; b = 6$.

c) Với $x > 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{1+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \right) \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \\ &= \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x} \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Câu 2.

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

Xét $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = 2 \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là 2 và $\frac{1}{2}$.

b) $x^2 - 12x + 4 = 0$

Xét $\Delta' = b^2 - ac = (-6)^2 - 1 \cdot 4 = 32 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 x_2 = 4 \Rightarrow x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases}$

Ta có:

$$T^2 = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right)^2 = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \frac{[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2}{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{(12^2 - 2 \cdot 4)^2}{12 + 2\sqrt{4}} = 1156$$

Nhận xét $x_1^2 + x_2^2 > 0$ và $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$ với mọi $x_1, x_2 > 0$ suy ra $T > 0$

$$\Rightarrow T = \sqrt{T^2} = \sqrt{1156} = 34$$

Vậy $T = 34$.

Câu 3.

Gọi số người xem MV là x (triệu người) ($x > 0$)

Theo đề bài có 60% số người đã xem 2 lượt, 40% số người đã xem 1 lượt và tổng lượt xem

MV là 6,4 triệu lượt nên ta có phương trình:

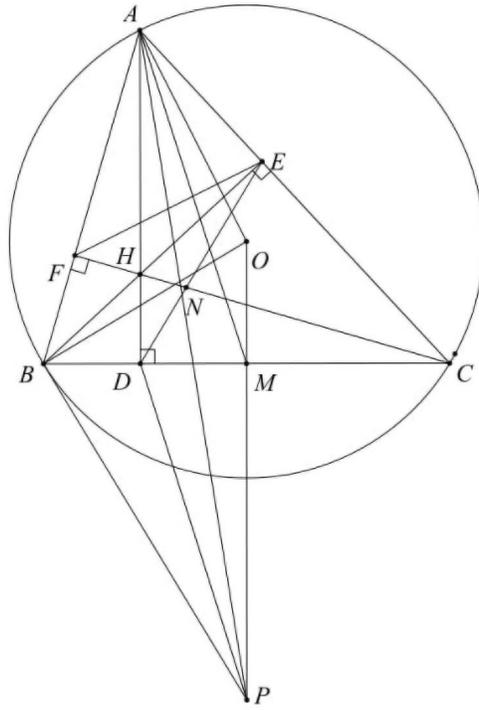
$$2x \cdot 60\% + x \cdot 40\% = 6,4$$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{120}{100} + \frac{40}{100} \right) = 6,4$$

$$\Leftrightarrow x = 4(TM)$$

Vậy số người xem MV "Trốn tìm" của Đen Vâu là 4 triệu người.

Câu 4.



a) Xét tứ giác $BCEF$ ta có:

$$\widehat{BFC} = 90^\circ \text{ (CF là đường cao); } \widehat{BEC} = 90^\circ \text{ (BE là đường cao)} \Rightarrow \widehat{BFC} = \widehat{BEC}$$

$\Rightarrow F$ và E cùng nhìn BC dưới một góc bằng nhau.

\Rightarrow Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn.

b) Xét tứ giác $HECD$ ta có:

$\widehat{ADC} = 90^\circ$ (AD là đường cao); (BE là đường cao) $\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{BEC} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $HECD$ nội tiếp đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{HED} = \widehat{HCD} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } HD) \text{ (1).}$$

Ta có: Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (chứng minh câu a) $\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{FCD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FB). (2).

Từ (1) (2) suy ra $\widehat{FEB} = \widehat{BED}$. Xét tam giác FEN có EH là phân giác của góc E ta có:

$$\frac{HF}{EF} = \frac{HN}{NE} \text{ (tính chất đường phân giác). (3)}$$

Xét ΔHNE và ΔDNC ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{HNE} = \widehat{DNC} \\ \widehat{HEN} = \widehat{DCN} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta HEN \simeq \Delta DCN (g-g)$$

$$\Rightarrow \frac{HN}{NE} = \frac{DN}{CN} \quad (4)$$

Từ (3) (4) suy ra $\frac{HF}{EF} = \frac{DN}{CN} \Rightarrow HF \cdot CN = DN \cdot EF$ (đpcm)

c)

Vì BP là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow OB \perp BP$ hay ΔOBP vuông ở B .

M là trung điểm $BC \Rightarrow OM \perp BC$ hay $BM \perp OP$

Tam giác OBP vuông ở B có $BM \perp OP \Rightarrow OB^2 = OM \cdot OP$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

$$\text{Mà } OA = OB (= R) \Rightarrow OM \cdot OP = OA^2 \Leftrightarrow \frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OP}$$

Xét tam giác OAM và tam giác OPA có:

\widehat{AOM} chung

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OP}$$

$$\Rightarrow \Delta OAM \simeq \Delta OPA (c.g.c) \Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OPA} \quad (5)$$

Vì $AD \parallel OP (\perp BC) \Rightarrow \widehat{OPA} = \widehat{DAP}$ (so le trong) (6).

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{OAM} = \widehat{DAP}$ (đpcm).

Câu 5.

$$\begin{cases} x - 3y + 2\sqrt{xy} = 4(\sqrt{x} - \sqrt{y}) & (1) \\ (x+1)(y + \sqrt{xy} - x^2 + x) = 4 & (2) \end{cases}$$

Đk $x \geq 0; y \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow x + 3\sqrt{xy} - \sqrt{xy} - 3y = 4(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}) - \sqrt{y}(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}) = 4(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 3\sqrt{y} - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = y^{(*)} \\ \sqrt{x} + 3\sqrt{y} - 4 = 0^{(**)} \end{cases}$$

Thay (*) vào (2), ta có:

$$(x+1)(3x-x^2) = 4$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(tm) \\ x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}(tm) \\ x = \frac{1-\sqrt{17}}{2}(ktm) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x; y) \in \left\{ (1; 1); \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right) \right\}$$

Xét (**): $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 - 2\sqrt{y}$

Xét:

$$(x+1)(y + \sqrt{xy} - x^2 + x)$$

$$= (x+1)(-2(y - 2\sqrt{y} + 1) - x^2 + x + 2)$$

$$= (x+1)(-2(\sqrt{y} - 1)^2 - x^2 + x + 2)$$

Xét $x \leq 2$, áp dụng BĐT Cô si cho ba số không âm $x+1; 2(2-x); x+1$ ta có:

$$2(x+1)(2-x)(x+1) \leq \left(\frac{x+1+x+1+2(2-x)}{3} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2-x)(x+1) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+1+x+1+2(2-x)}{3} \right)^3 = 4$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Xét $x > 2$ ta có $(x+1)(2-x)(x+1) < 0 \Rightarrow (x+1)(y + \sqrt{xy} - x^2 + x) < 0 \Leftrightarrow 4 < 0$ (vô lí)

$$\text{Vậy HPT có nghiệm } (x; y) \in \left\{ (1; 1); \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right) \right\}.$$