SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ TĨNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH
NĂM HỌC 2021 - 2022
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. *(1,5 điểm)* Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt, rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

Câu 2. *(2,5 điểm)*

a) Giải phương trình: $9x^2=(x^2+x-5)\left(\sqrt{3x+1}-1\right)^2$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+xy^2+2y^3=0\\ \sqrt{2x^3-x}+8y^2+3y=4.\end{cases}$

Câu 3. *(2,5 điểm)*

a) Tìm các số nguyên m,n thỏa mãn: $m(m+1)(m+2)=n^2$.

b) Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $x+y+xy=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-y^2}+\dfrac{x+y}{4}$.

Câu 4. *(2,5 điểm)* Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi I là điểm chính giữa của cung AB. Trên cung lớn AB của đường tròn tâm I, bán kính IA, lấy điểm C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của CA, CB với nửa đường tròn đường kính AB (M khác A, N khác B); J là giao điểm của AN với BM.

a) Chứng minh ΔMBC và ΔNAC là các tam giác cân.

b) Chứng minh I là trực tâm của tam giác CMN.

c) Gọi K là trung điểm của IJ, tính tỉ số $\dfrac{CJ}{OK}$.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Cho tập hợp $X=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, chia tập hợp X thành hai tập hợp khác rỗng và không có phần tử chung. Chứng minh rằng với mọi cách chia thì luôn tồn tại 3 số a,b,c trong một tập hợp thỏa mãn: $a+c=2b$.

----- HẾT -----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ TĨNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH
NĂM HỌC: 2021 – 2022
MÔN: TOÁN CHUYÊN
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt, rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình: $9x^2=\left(x^2+x-5\right)\left(\sqrt{3x+1}-1\right)^2$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+xy^2+2y^3=0 \\ \sqrt{2x^3-x}+8y^2+3y=4 \end{cases}$.

Câu 3. (2,5 điểm)

a) Tìm các số nguyên m, n thỏa mãn $m(m+1)(m+2)=n^2$.

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y+xy=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-y^2}+\frac{x+y}{4}.$$

Câu 4. (2,5 điểm).

Cho nữa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi I là điểm chính giữa cung AB. Trên cung lớn AB của đường tròn tâm I bán kính IA lấy điểm C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của CA, CB với nữa đường tròn đường kính AB $(M$ khác A, N khác $B)$; J là giao điểm của AN với BM.

a) Chứng minh ΔMBC và ΔNAC là các tam giác cân.

b) Chứng minh I là trực tâm của tam giác CMN.

c) Gọi K là trung điểm của IJ, tính tỉ số $\frac{CJ}{OK}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho tập hợp $X=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, chia tập hợp X thành hai tập hợp khác rỗng và không có phần tử chung. Chứng minh rằng với mọi cách chia thì luôn tồn tại 3 số a, b, c trong một tập hợp thỏa mãn $a+c=2b$.

--------------**HẾT**--------------

Họ và tên thí sinh:……………………………………*Số báo danh:* ……………………………………

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt, rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

Lời giải

Ta biết rằng nếu $x+y+z=0$ thì $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$ do đó:

$$x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

Ta có:

$$\begin{aligned}&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(a-b)c^2-(a^2-b^2)c+ab(a-b)\\&=(a-b)\left[c^2-(a+b)c+ab\right]=(a-b)(c-a)(c-b)\\&=-(a-b)(b-c)(c-a).\end{aligned}$$

Đặt $x=a-b,\ y=b-c,\ z=c-a$ khi đó ta có:

$$A=-\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=-3.$$

Vậy $A=-3$.

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình: $9x^2=(x^2+x-5)\left(\sqrt{3x+1}-1\right)^2$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+xy^2+2y^3=0\\ \sqrt{2x^3-x}+8y^2+3y=4\end{cases}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{3}$. Phương trình tương đương:

$$\begin{aligned}&9x^2\left(\sqrt{3x+1}+1\right)^2=(x^2+x-5)\left(\sqrt{3x+1}-1\right)^2\left(\sqrt{3x+1}+1\right)^2\\&\Leftrightarrow 9x^2\left(\sqrt{3x+1}+1\right)^2=(x^2+x-5)\cdot 9x^2\\&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+x-5=\left(\sqrt{3x+1}+1\right)^2\ \ (1)\end{array}\right..\end{aligned}$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 14 = 4\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 15 + \sqrt{3x+1}\left(\sqrt{3x+1} - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(2x+3) + \frac{3(x-5)\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(2x+3+\cdot\frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ 2x+3+\dfrac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0 \end{array}\right..$$

Do $x \geq -\dfrac{1}{3} \Rightarrow 2x+3 > 0 \Rightarrow 2x+3+\cdot\dfrac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0,\ x = 5.$

b) Điều kiện: $2x^3 - x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0 \\ x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right..$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương:

$$x^3 + xy^2 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + y^3\right) + \left(xy^2 + y^3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) + y^2(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^2 - xy + 2y^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -y \\ x^2 - xy + 2y^2 = 0 \end{array}\right..$$

Với $x = -y,$ thay vào phương trình thứ hai ta được: $\sqrt{2x^3 - x} + 8x^2 - 3x - 4 = 0.$

Nếu $\sqrt{2x^3 - x} + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ 2x^3 - x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x(2x+1)(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$

Với $x = 0,$ ta thấy phương trình vô nghiệm và phương trình nhận một nghiệm là $x = -\dfrac{1}{2}.$

Do đó xét $x \neq -\dfrac{1}{2},$ phương trình tương đương:

$$\sqrt{2x^3-x}-x+8x^2-4x-4=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x(2x+1)(x-1)}{\sqrt{2x^3-x}+x}+4(2x+1)(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-1)\left(\frac{x}{\sqrt{2x^3-x}+x}+4\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{x}{\sqrt{2x^3-x}+x}+4=0 \end{array}\right..$$

Ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{2x^3-x}+x}+4=0 \Leftrightarrow 4\sqrt{2x^3-x}=-5x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x>0 \\ 32x^3-16x=25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x\left(32x^2-16x-25\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ 32x^2-16x-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{25-9\sqrt{33}}{64}.$$

Do đó trong trường hợp này hệ cho có ba nghiệm: $(x;y)=(1;-1),\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{25-9\sqrt{33}}{64};-\frac{25+9\sqrt{33}}{64}\right).$

Với $x^2-xy+2y^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{7}{4}y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0.$ Thử lại thấy không thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm: $(x;y)=(1;-1),\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{25-9\sqrt{33}}{64};-\frac{25+9\sqrt{33}}{64}\right).$

Câu 3. (2,5 điểm)

a) Tìm các số nguyên m, n thỏa mãn $m(m+1)(m+2)=n^2$.

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y+xy=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-y^2}+\frac{x+y}{4}.$$

Lời giải

a) Ta có: $m(m+1)(m+2)=n^2 \Rightarrow m(m+1)(m+2)\geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 0 \\ -2\leq m\leq -1 \end{array}\right..$

Với $m\in\{-2;-1;0\}$ ta đều có $n=0$.

Xét $m>0$, ta có: n^2 chia hết cho $m \Rightarrow n$ chia hết cho $m \Rightarrow n=km$ với $k\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó thay vào phương trình ta được:

$$m(m+1)(m+2)=m^2k^2 \Leftrightarrow (m+1)(m+2)=mk^2.$$

Vì $\gcd(m;m+1)\Rightarrow k^2$ chia hết cho $(m+1)\Rightarrow k$ chia hết cho $(m+1)\Rightarrow k=l(m+1)$ với $l\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó thay vào phương trình ta được:

$$(m+1)(m+2)=m(m+1)^2l^2 \Leftrightarrow m+2=m(m+1)l^2 \Leftrightarrow (m+1)(ml^2-1)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=1 \\ ml^2-1=1 \end{cases}.$$

Phương này vô nghiệm vậy do đó $m>0$ thì không tồn tại m, n nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $(m;n)=(-2;0),(-1;0),(0;0)$.

b) Ta có: $\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-y^2}\le\sqrt{2(9-x^2+9-y^2)}=\sqrt{2\left[18-(x^2+y^2)\right]}$.

Mặt khác $2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2\Rightarrow\sqrt{2\left[18-(x^2+y^2)\right]}\le\sqrt{36-(x+y)^2}$.

Đặt $t=x+y\Rightarrow\sqrt{36-(x+y)^2}=\sqrt{36-t^2}$. Suy ra: $P\le\sqrt{36-t^2}+\dfrac{t}{4}$.

Ta lại có: $\sqrt{36-t^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(12-2t)(6+t)}\le\dfrac{12-2t+6+t}{2\sqrt{2}}=\dfrac{18-t}{2\sqrt{2}}$.

Do đó: $P\le\dfrac{18-t}{2\sqrt{2}}+\dfrac{t}{4}=\dfrac{18\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})t}{4}$.

Ta có: $3=x+y+xy\Rightarrow 4=(x+1)(y+1)\Rightarrow 4=2\sqrt{(x+1)(y+1)}\le x+y+2\Rightarrow x+y\ge 2$, hay $t\ge 2$.

Chú ý $1-\sqrt{2}<0$ nên $P\le\dfrac{18\sqrt{2}+2(1-\sqrt{2})}{4}=\dfrac{1+8\sqrt{2}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=2$ hay $x=y=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{1+8\sqrt{2}}{2}$ đạt được khi $x=y=1$.

Câu 4. (2,5 điểm).

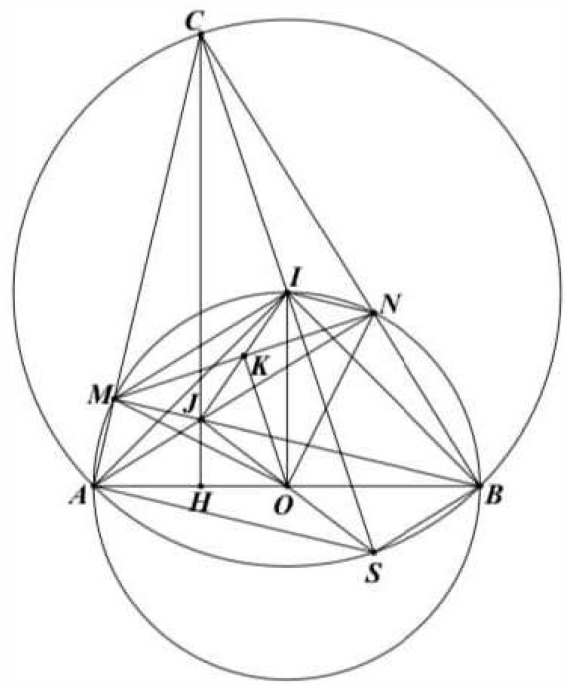
Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi I là điểm chính giữa cung AB. Trên cung lớn AB của đường tròn tâm I bán kính IA lấy điểm C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của CA, CB với nửa đường tròn đường kính AB (M khác A, N khác B); J là giao điểm của AN với BM.

a) Chứng minh ΔMBC và ΔNAC là các tam giác cân.

b) Chứng minh I là trực tâm của tam giác CMN.

c) Gọi K là trung điểm của IJ, tính tỉ số $\dfrac{CJ}{OK}$.

Lời giải



a) Vì I là điểm chính giữa cung AB nên tam giác IAB vuông cân tại I.

Khi đó: $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AIB = \frac{1}{2}\cdot 90^0 = 45^0$, hay $\angle ACN = 45^0$.

Mặt khác $\angle ANC = 180^0 - \angle ANB = 180^0 - 90^0 = 90^0$.

ΔNAC vuông tại N có $\angle ACN = 45^0$ nên ΔNAC vuông cân tại N.

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\angle BCM = 45^0$ và ΔMBC vuông tại M nên ΔMBC vuông cân tại M.

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta có: $\angle INC = \angle IAB = 45^0$ do cùng phụ với $\angle INB$.

Mà $\angle INA = \angle IBA = 45^0$ do đó $\angle INC = \angle INA = 45^0$ hay NI là phân giác của tam giác vuông cân NAC.

Do đó $NI \perp AC$ hay $NI \perp MC$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $MI \perp NC$.

Do đó I là trực tâm của tam giác CMN.

c) Do $\angle ANB = \angle AMB = 90^0$ nên dễ dàng suy ra J là trực tâm tam giác CAB.

Khi đó ta có $MI \parallel JN$ do cùng vuông góc với BC và $MJ \parallel IN$ do cùng vuông góc với AC.

Từ đó tứ giác $MINJ$ là hình bình hành, suy ra K cũng là trung điểm của MN, dẫn đến $OK \perp MN$.

Gọi S là điểm đối xứng của C qua I, khi đó ΔCAB nội tiếp đường tròn đường kính CS có J là trực tâm của ΔCAB nên theo bổ đề quen thuộc thì tứ giác $AJBS$ là hình bình hành, suy ra O, J, S thẳng hàng.

Từ đó OI là đường trung bình của $\Delta CSI \Rightarrow CJ = 2OI = AB$.

Mặt khác ΔCMN đồng dạng với ΔCBA nên: $\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{CN}{CA}=\cos 45^0 \Rightarrow MN=\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}.$

Ta có $OM^2+ON^2=\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2=\dfrac{AB^2}{2}=MN^2$ nên ΔOMN vuông cân tại $O \Rightarrow OK=\dfrac{MN}{2}=\dfrac{AB\sqrt{2}}{4}.$

Do đó $\dfrac{CJ}{OK}=\dfrac{AB}{\dfrac{AB\sqrt{2}}{4}}=2\sqrt{2}.$

Vậy $\dfrac{CJ}{OK}=2\sqrt{2}.$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho tập hợp $X=\{1;\,2;\,3;\,4;\,5;\,6;\,7;\,8;\,9\}$, chia tập hợp X thành hai tập hợp khác rỗng và không có phần tử chung. Chứng minh rằng với mọi cách chia thì luôn tồn tại 3 số $a,\,b,\,c$ trong một tập hợp thỏa mãn $a+c=2b.$

Lời giải

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử không tồn tại tại 3 số $a,\,b,\,c$ trong hai tập hợp thỏa mãn $a+c=2b.$ Đặt hai tập hợp đó lần lượt là A và $B.$

Vì trong mỗi tập hợp không tồn tại ba số $a,\,b,\,c$ thỏa mãn $a+c=2b$ nên bộ số $(1;5;9)$ đều không thể cùng thuộc A hoặc $B.$

Không mất tính tổng quát giả sử $1\in A.$

Ta xét hai trường hợp:

- $9\in A.$ Suy ra $5\in B.$

Nếu $7\in A\Rightarrow 4\in B$ và $8\in B\Rightarrow 3\in A\Rightarrow 2\in B\Rightarrow 6\in A,$ mâu thuẫn do $(2;5;8)$ đều thuộc $B.$

Nếu $7\in B\Rightarrow 6\in A.$ Ta xét tiếp hai trường hợp:

+ $3\in A\Rightarrow 2\in B\Rightarrow 4\in B,$ mâu thuẫn do $(3;6;9)$ đều thuộc $A.$

+ $3\in B,$ mâu thuẫn do $(3;5;7)$ đều thuộc $B.$

- $9\in B.$ Suy ra $5\in A\Rightarrow 3\in B\Rightarrow 6\in A\Rightarrow 4\in B\Rightarrow 7\in B\Rightarrow 2\in A$ và $8\in A$ mâu thuẫn do $(2;5;8)$ đều thuộc $B.$

Vậy trong mọi trường hợp đều tồn tại bộ ba số $a,\,b,\,c$ trong một tập hợp thỏa mãn $a+c=2b.$

--------------Chúc các bạn học tốt!--------------