

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 2$ và $ab + bc + ca = a^2b^2c^2$.

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}$.

b) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b + ab = 1$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}$.

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình $2(3x+1) + \frac{7}{x} = 5\sqrt{2x+7}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}(1-3y) - y + 3 = 0 \\ y(y - \sqrt{x+1}) + x = 0. \end{cases}$

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Tìm số nguyên n để $A = (n^2 + 3n + 2)^2 + (n + 2)^2$ là số chính phương.

b) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $|a - b| + |b - c| + |c - d| + |d - a| = a^{2022} + 2023$.

Tìm số dư khi chia a^{12} cho 16.

Câu 4. (2,5 điểm) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Trên tia đối của tia AB lấy điểm M , kẻ các tiếp tuyến ME, MF với đường tròn (O') , trong đó E và F thuộc đường tròn (O') , F nằm trong đường tròn (O) . Hai đường thẳng AE và AF cắt đường tròn (O) lần lượt tại P và Q (P, Q khác A). Tia EF cắt PQ tại K .

a) Chứng minh tam giác BKP đồng dạng với tam giác BFA .

b) Gọi I và J lần lượt là giao điểm của AB với OO' và EF . Chứng minh $IJE = IFM$.

c) Chứng minh $PQ = 2\sqrt{OA^2 - OK^2}$.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{1+a+2bc} + \frac{1}{1+b+2ac} + \frac{1}{1+c+2ab}$.

Câu 6. (0,5 điểm) Lớp 9A có 34 học sinh, các học sinh lớp này đều tham gia một số câu lạc bộ của trường. Mỗi học sinh của lớp tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kỳ của lớp này thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh rằng có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh lớp 9A tham gia.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

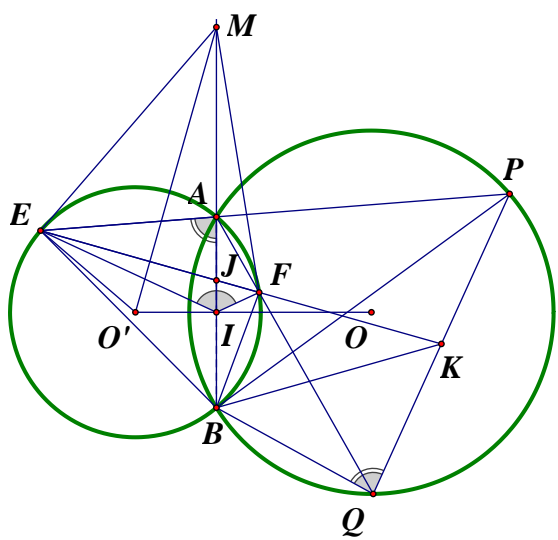
Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:

Chú ý: - Mọi cách giải đúng, ngắn gọn đều cho điểm tương ứng.

- Điểm toàn bài không qui tròn.

- Ban chấm thi có thể thống nhất để chia các ý có điểm lớn hơn 0.25 thành các ý 0.25 điểm.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a 1,0 đ	Ta có $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 2 \Rightarrow \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + 2\left(\frac{1}{ab^2c} + \frac{1}{abc^2} + \frac{1}{a^2bc}\right) = 4$	0,5
	$\Rightarrow \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} = 4 - \frac{2(ab+bc+ca)}{a^2b^2c^2} = 4 - \frac{2a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2} = 2$. Vậy $A = 2$.	0,5
Câu 1b 1,0 đ	$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}} \Leftrightarrow \frac{(a+b)(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}$	0,5
	$\Leftrightarrow \sqrt{2}(a+b) = \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ $\Leftrightarrow 2(a+b)^2 = 1+a^2+b^2+a^2b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+4ab = 1+a^2b^2$ $\Leftrightarrow (a+b)^2 = (ab-1)^2$ đúng (vì $a+b=1-ab$), điều phải chứng minh.	0,5
Câu 2a 1,25 đ	Điều kiện : $x \geq -\frac{7}{2}; x \neq 0$.	0,25
	Phương trình đã cho tương đương $6x^2 + 2x + 7 - 5x\sqrt{2x+7} = 0$	
	$\Leftrightarrow (3x - \sqrt{2x+7})(2x - \sqrt{2x+7}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+7} = 3x & (1) \\ \sqrt{2x+7} = 2x & (2) \end{cases}$	0,5
	Giải phương trình (1): $\sqrt{2x+7} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 - 2x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).	0,25
Giải phương trình (2): $\sqrt{2x+7} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - 2x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{29}}{4}$ (thỏa mãn).	0,25	
	Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 1; x = \frac{1+\sqrt{29}}{4}$.	
Câu 2b 1,25 đ	Điều kiện: $x \geq -1$. Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$. Thay vào hệ phương trình đã cho, ta có $\begin{cases} t(1-3y) - y + 3 = 0 \\ y(y-t) + t^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - y - 3ty + 3 = 0 \\ y^2 - ty + t^2 - 1 = 0 \end{cases}$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} (t-y) - 3ty + 3 = 0 \\ (t-y)^2 + ty - 1 = 0 \end{cases} \text{ suy ra } 3(t-y)^2 + (t-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t-y=0 \\ t-y=-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=t \\ y=t+\frac{1}{3} \end{cases}$	0,25
	Với $y=t$, ta có $3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t=1$, do đó ta có $x=0; y=1$ (thỏa mãn).	0,25
	Với $y=t+\frac{1}{3}$, ta có $9t^2 + 3t - 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1+\sqrt{33}}{6} \Rightarrow x = -\frac{1+\sqrt{33}}{18}; y = \frac{1+\sqrt{33}}{6}$ (thỏa mãn).	0,5
	Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ là $(0; 1), \left(-\frac{1+\sqrt{33}}{18}; \frac{1+\sqrt{33}}{6}\right)$.	
Câu 3a 1,0 đ	Ta có $A = (n+2)^2 \left((n+1)^2 + 1 \right)$ Xét $n+2=0 \Leftrightarrow n=-2$, ta có $A=0$ là số chính phương. Xét $n+2 \neq 0 \Leftrightarrow n \neq -2$, để A là số chính phương khi $(n+1)^2 + 1 = a^2$ ($a \in \mathbb{N}$). Do đó, ta có $(n+1)^2 - a^2 = -1 \Leftrightarrow (n+1-a)(n+1+a) = -1$ xảy ra 2 TH sau: $\begin{cases} n+1-a=-1 \\ n+1+a=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n+1-a=1 \\ n+1+a=-1 \end{cases}$ suy ra $n=-1$ (thỏa mãn). Vậy $n=-2$ hoặc $n=-1$ thì A là số chính phương.	0,5
Câu 3b 0,5 đ	Ta có $ x +x=2x$ nếu $x \geq 0$, $ x +x=0$ nếu $x < 0$, do đó $ x +x:2$ với mọi số nguyên x Ta có $ a-b + b-c + c-d + d-a $ $= (a-b + a-b) + (b-c + b-c) + (c-d + c-d) + (d-a + d-a)$ chia hết cho 2 với mọi số nguyên a, b, c, d . Do đó $ a-b + b-c + c-d + d-a = a^{2022} + 2023$ chia hết cho 2, suy ra a^{2022} lẻ, do đó a lẻ, nên a^2 chia 8 dư 1, suy ra $a^6 - 1$ chia hết cho 8 và $a^6 + 1$ chia hết cho 2. Vậy $a^{12} = (a^6 - 1)(a^6 + 1) + 1$ chia cho 16 dư 1.	0,25
Câu 4a 1,0 đ	 <p>a) Ta có $BPQ = BAQ$ (góc nội tiếp cùng chắn BQ), $BAQ = BEK$ (góc nội tiếp cùng chắn BF), suy ra $BPQ = BEK$, suy ra tứ giác $BKPE$ nội tiếp. Do $AEBF$ và $BKPE$ là các tứ giác nội tiếp nên $AFB = BKP$ (cùng bù với góc AEB), suy ra $\triangle BKP \sim \triangle BFA$ (đpcm).</p>	0,5
Câu 4b 0,75 đ	b) Do $O'IM = O'FM = O'EM = 90^\circ$ nên các điểm O', I, F, M, E cùng nằm trên đường tròn đường kính $O'M$. Suy ra $IEJ = IMF$ (góc nội tiếp cùng chắn IF) và $EIJ = JIF$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung ME và MF bằng nhau) suy ra $\triangle IJE \sim \triangle IFM$, do đó $IJE = IFM$ (đpcm).	0,5
		0,25

Câu 4c 0,75 đ	c) Ta có $BAE = BQP$ (vì tứ giác $ABQP$ nội tiếp) (1)	0,25
	và $AEB = BKQ$ (vì tứ giác $BKPE$ nội tiếp), suy ra $\Delta AEB \sim \Delta QKB \Rightarrow \frac{AB}{BQ} = \frac{AE}{QK}$ (2)	
	Ta có $QBP = QAP = EBF$ và $EBF = EFM$ (góc nội tiếp cùng chắn EF).	
	Mặt khác, ta có $EFM = EIM = EIA$ (vì tứ giác $EIFM$ nội tiếp), suy ra $QBP = EIA$. (3)	
	Từ (1) và (3), ta có $\Delta IAE \sim \Delta BQP \Rightarrow \frac{AI}{BQ} = \frac{AE}{QP} \Leftrightarrow \frac{AB}{2BQ} = \frac{AE}{QP}$ (4)	0,5
	Từ (2) và (4), ta có $\frac{AE}{2QK} = \frac{AE}{QP} \Rightarrow 2QK = QP \Rightarrow K$ là trung điểm $QP \Rightarrow \Delta OKQ$ vuông tại K .	
	Do đó, ta có $QK^2 = OQ^2 - OK^2 \Leftrightarrow \frac{PQ^2}{4} = OQ^2 - OK^2 \Leftrightarrow PQ = 2\sqrt{OA^2 - OK^2}$ (đpcm).	
Câu 5 1,0 đ	Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $3abc = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \geq 1$.	0,25
	Mặt khác, ta có $a + b + c = 3abc \Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 3$.	
	Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có	
	$1 + a + 2bc \geq 2\sqrt{a} + 2bc \geq 2\sqrt{2\sqrt{a} \cdot 2bc} = 4\sqrt{\sqrt{a} \cdot bc} \geq 4\sqrt{\sqrt{bc}}$	0,5
	$\Rightarrow \frac{1}{1 + a + 2bc} \leq \frac{1}{4\sqrt{\sqrt{bc}}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{bc}}} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{bc}}\right) \leq \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{bc}\right)\right) = \frac{1}{16} \left(3 + \frac{1}{bc}\right)$	
	Tương tự, ta có $\frac{1}{1 + b + 2ac} \leq \frac{1}{16} \left(3 + \frac{1}{ac}\right); \frac{1}{1 + c + 2ab} \leq \frac{1}{16} \left(3 + \frac{1}{ab}\right)$.	
	Suy ra $P \leq \frac{1}{16} \left(9 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{3}{4}$, dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$.	0,25
	Lưu ý: Học sinh có thể trình bày $1 + a + 2bc = 1 + a + bc + bc \geq 4\sqrt{ab^2c^2} = 4\sqrt{bc}$.	
Câu 6 0,5 đ	Giả sử các câu lạc bộ đều không có quá 8 học sinh của lớp 9A tham gia. Gọi N là số câu lạc bộ có hơn 1 học sinh của lớp 9A.	0,25
	- Nếu $N > 4$ thì từ 5 trong số các câu lạc bộ này, ta chọn mỗi câu lạc bộ 2 học sinh của lớp 9A, khi đó 10 học sinh này sẽ không thỏa mãn bài toán.	
	- Nếu $N < 4$ thì tổng số học sinh của lớp 9A tham gia các câu lạc bộ này không quá $3 \cdot 8 = 24$, nghĩa là còn có ít nhất $34 - 24 = 10$ học sinh của lớp 9A, mỗi học sinh tham gia một câu lạc bộ mà mỗi câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh của lớp 9A. Chọn 10 học sinh này thì không thỏa mãn điều kiện bài toán.	
	- Nếu $N = 4$ thì số học sinh của lớp 9A tham gia 4 câu lạc bộ này không quá $4 \cdot 8 = 32$, nghĩa là còn có ít nhất 2 học sinh của lớp 9A, mỗi học sinh này tham gia một câu lạc bộ mà mỗi câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh lớp 9A. Chọn 2 học sinh trong số những học sinh còn lại này và 4 câu lạc bộ trên mỗi câu lạc bộ chọn 2 học sinh của lớp 9A, khi đó 10 học sinh của lớp 9A được chọn không thỏa mãn điều kiện.	0,25
	Vậy điều giả sử ở trên sai, nghĩa là tồn tại một câu lạc bộ có ít nhất 9 học sinh của lớp 9A tham gia.	

HẾT.

