**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**
**HẢI PHÒNG**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN**
**Năm học 2020 – 2021**

**ĐỀ THI MÔN TOÁN**

*Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)*
*Lưu ý: Đề thi gồm 01 trang, thí sinh làm bài vào tờ giấy thi*

**Bài 1. (2,0 điểm)**

a) Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$.

Rút gọn $P$. Tìm tất cả các giá trị của $x$ để $P\le -\dfrac{1}{7}$.

b) Cho phương trình ẩn $x$ là $x^2-px+q=0\ \left(1\right)$ (với $p;q$ là các số nguyên tố). Tìm tất cả các giá trị của $p$ và $q$ biết phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm là các số nguyên dương.

**Bài 2. (2,0 điểm)**

a) Giải phương trình $\left(x+1\right)\sqrt{-x^2+2x+6}=3+2x$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2xy^2 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases}$.

**Bài 3. (3,0 điểm)**

Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* (*AB* < *AC*), *M* là trung điểm cạnh *BC*. *P* là một điểm di động trên đoạn *AM* (*P* khác *A* và *M*). Đường tròn đi qua *P*, tiếp xúc với đường thẳng *AB* tại *A*, cắt đường thẳng *BP* tại *K* (*K* khác *P*). Đường tròn đi qua *P*, tiếp xúc với đường thẳng *AC* tại *A*, cắt đường thẳng *CP* tại *L* (*L* khác *P*).

a) Chứng minh $BP.BK+CP.CL=BC^2$.

b) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác *PKC* luôn đi qua hai điểm cố định.

c) Gọi *J* là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *PKC* và *E* là giao điểm thứ hai của đường tròn này với đường thẳng *AC*. Gọi *I* là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *PLB* và *F* là giao điểm thứ hai của đường tròn này với đường thẳng *AB*. Chứng minh *EF* // *IJ*.

**Bài 4. (1,0 điểm)**

Cho ba số dương $x,y,z$ thỏa mãn $xy+yz+zx=5$. Chứng minh

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+5}}+\frac{3z}{\sqrt{6\left(z^2+5\right)}}\le\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

**Bài 5. (2,0 điểm)**

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2y-xy-2x^2+5x=4$.

b) Giả sử rằng $A$ là tập hợp con của tập hợp $\left\{1;\ 2;\ 3;\ldots;\ 1023\right\}$ sao cho $A$ không chứa hai số nào mà số này gấp đôi số kia. Hỏi $A$ có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

----- Hết -----

Họ tên thí sinh:……………………………….Số báo danh: …………...............................
Cán bộ coi thi 1:…………….………...…..................Cán bộ coi thi 2:.....…………..……..…........

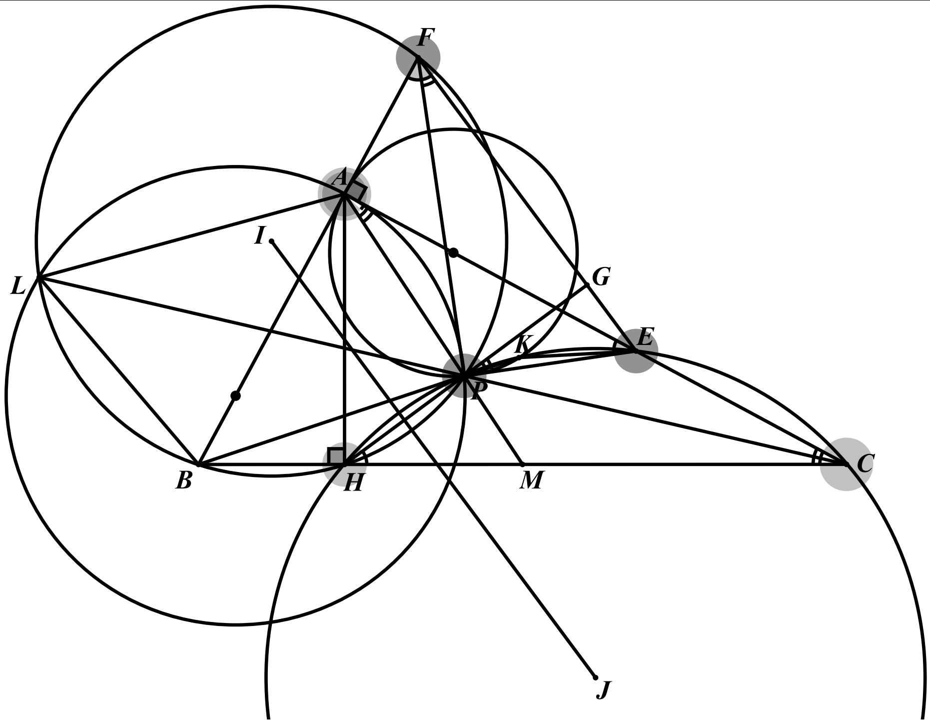
**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**
**HẢI PHÒNG**

**HDC ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN**
**Năm học 2020 – 2021**
**HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN**

**Hướng dẫn gồm 04 trang**

| Bài | Đáp án | Điểm |
|---|---|---|
| | **a) (1,0 điểm)** | |
| | $P=\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x+1}\right)$ ĐK: $x\ge 0, x\ne 1$ | **0,25** |
| | $\Leftrightarrow P=\dfrac{2\sqrt{x}-x-1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\cdot\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow P=\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ | **0,25** |
| | $P\le -\dfrac{1}{7}\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\le -\dfrac{1}{7}\Leftrightarrow 7-7\sqrt{x}\le -x-\sqrt{x}-1\ \left(do\ x+\sqrt{x}+1>0\,\forall x\ge 0\right)$<br>$\Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+8\le 0$ | **0,25** |
| **1 (2,0 điểm)** | $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-4\right)\le 0\Leftrightarrow 2\le\sqrt{x}\le 4\Leftrightarrow 4\le x\le 16.$ | **0,25** |
| | **b) (1,0 điểm)** | |
| | Điều kiện để phương trình $(1)$ có nghiệm là $\Delta=p^2-4q\ge 0\ (*)$<br>Áp dụng định lý Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=p\\x_1x_2=q\end{cases}$ với $x_1;x_2\in\mathbb{Z}^+$. | **0,25** |
| | Vì $q$ là số nguyên tố nên $x_1=1$ hoặc $x_2=1$ | **0,25** |
| | Nếu $x_1=1$ thì $1+x_2=p$ và $x_2$ là các số nguyên tố liên tiếp, suy ra $x_2$ là số nguyên tố chẵn nên $x_2=q=2; p=3$. Tương tự, nếu $x_2=1$ thì $x_1=q=2; p=3$ | **0,25** |
| | Ta thấy $q=2; p=3$ thỏa mãn điều kiện $(*)$ là các giá trị cần tìm. | **0,25** |
| | **a) (1,0 điểm)** | |
| | Đặt $a=x+1; b=\sqrt{-x^2+2x+6};\ b\ge 0$<br>Ta được $\begin{cases}ab=3+2x\\a^2+b^2=4x+7\end{cases}\Rightarrow (a-b)^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=a-1\\b=a+1\end{array}\right.$ | **0,5** |
| | Nếu $b=a-1$, thay vào ta được: $\sqrt{-x^2+2x+6}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^2-x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ | **0,25** |
| **2 (2,0 điểm)** | Nếu $b=a+1$ thay vào ta được: $\sqrt{-x^2+2x+6}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\x^2+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$<br>Vậy nghiệm của phương trình là $x\in\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$ | **0,25** |
| | **b) (1,0 điểm)** | |
| | Với điều kiện $x,y\ne 0$ thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases}x^2+y^2=2xy^2\\xy+3y^2=2xy^2\end{cases}$<br>$\Rightarrow x^2-xy-2y^2=0$ | **0,25** |

| | | |
|---|---|---|
| | $\Rightarrow x^2+xy-2xy-2y^2=0 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=2y \end{array}\right.$ | **0,25** |
| | Nếu $x=-y \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ x^2+x^2=2x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ do $x, y \neq 0.$ | **0,25** |
| | Nếu $x=2y \Rightarrow \begin{cases} x=2y \\ 4y^2+y^2=4y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ y=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{5}{4} \end{cases}$ do $x, y \neq 0.$<br>Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y) \in \left\{(1;-1), \left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{4}\right)\right\}$ | **0,25** |
| **3 (3,0 điểm)** | <br>Đáp án cho trường hợp hình vẽ trên, các trường hợp khác chứng minh tương tự. | |
| | **a) (1,0 điểm)** | |
| | *BA* là tiếp tuyến của đường tròn (*APK*) nên $BA^2=BP.BK$ $(1)$<br>*CA* là tiếp tuyến của đường tròn (*APL*) nên $CA^2=CP.CL$ $(2)$ | **0,5** |
| | Từ (1) và (2) suy ra $BP.BK+CP.CL=BA^2+CA^2=BC^2$ | **0,5** |
| | **b) (1,0 điểm)** | |
| | Gọi $AH$ là đường cao của tam giác $ABC \Rightarrow BA^2=BH.BC$ $(3)$ | **0,5** |
| | Từ (1) và (3) $\Rightarrow BP.BK=BH.BC$. Suy ra tứ giác *HPKC* nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác *PKC* đi qua hai điểm cố định là *C* và *H*. | **0,5** |
| | **c) (1,0 điểm)** | |
| | Theo câu b) đường tròn (*J*) đi qua *H*. Chứng minh tương tự (*I*) đi qua *H*.<br>(*I*) và (*J*) cắt nhau tại *H*, *P* nên $IJ \perp HP$ $(4)$ | **0,25** |
| | $HPEC\ nt \Rightarrow \widehat{AEP}=\widehat{PHC}$ $(5)$<br>$HPFB\ nt \Rightarrow \widehat{AFP}=\widehat{PHC}$ $(6)$<br>Từ (5) và (6) suy ra tứ giác *APEF* nội tiếp nên<br>$\Rightarrow \widehat{EPF}=\widehat{EAF}=90^0 \Rightarrow PE \perp PF$ | **0,25** |

| | | |
|---|---|---|
| | Gọi $G$ là giao điểm của $HP$ và $EF$. Do các tứ giác $HPEC$ và $APEF$ nội tiếp nên<br>$\widehat{GPE}=\widehat{HCE}=\widehat{MCA}=\widehat{MAC}=\widehat{PAE}=\widehat{PFE}$<br>$\Rightarrow \widehat{GPE}+\widehat{GEP}=\widehat{PFE}+\widehat{GEP}=90^0 \Rightarrow PG\perp EF\ \ hay\ \ HP\perp EF\ (7)$<br>Từ (4), (7) suy ra $IJ$ // $EF$. | **0,5** |
| **4 (1,0 điểm)** | $P=\dfrac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\dfrac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\dfrac{3z}{\sqrt{6(z+x)(z+y)}}$ | **0,25** |
| | $=\dfrac{x}{\sqrt{6}}\sqrt{\dfrac{2}{x+y}\cdot\dfrac{3}{x+z}}+\dfrac{y}{\sqrt{6}}\sqrt{\dfrac{3}{y+z}\cdot\dfrac{2}{y+x}}+\dfrac{3z}{\sqrt{6}}\sqrt{\dfrac{1}{z+x}\cdot\dfrac{1}{z+y}}$<br>$\le\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\left(\dfrac{2x}{x+y}+\dfrac{3x}{x+z}+\dfrac{3y}{y+z}+\dfrac{2y}{y+x}+\dfrac{3z}{z+x}+\dfrac{3z}{z+y}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}(2+3+3)=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ | **0,5** |
| | Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{2}{x+y}=\dfrac{3}{y+z}=\dfrac{3}{z+x}\\ xy+yz+zx=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=2x=2y\\ 5x^2=5\end{cases}\Leftrightarrow z=2x=2y=2$ | **0,25** |
| **5 (2,0 điểm)** | **a) (1,0 điểm)** | |
| | Phương trình ban đầu tương đương với $xy(x-1)=2x^2-5x+4$<br>$\Rightarrow y(x-1)=\dfrac{2x^2-5x+4}{x}=2x-5+\dfrac{4}{x}\ \ (do\ x\neq 0)$ | **0,25** |
| | Vì $x,y\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{\pm1;\pm2;\pm4\}$ | **0,25** |
| | Lập bảng các giá trị<br>$x$: $-1$, $1$, $-2$, $2$, $-4$, $4$<br>$y$: $\dfrac{11}{2}$, $\nexists y$, $\dfrac{11}{3}$, $1$, $\dfrac{14}{5}$, $\dfrac{4}{3}$<br>Mà $x,y\in\mathbb{Z}$ nên nghiệm của phương trình là $(x;y)=(2;1)$ | **0,5** |
| | **b) (1,0 điểm)** | |
| | Chia các số từ 1 đến 1023 thành các tập con $A_0=\{1\}, A_1=\{2;3\}, A_2=\{4;5;6;7\}$,<br>$A_3=\{8;9;...;15\}, A_4=\{16;17;...;31\}, A_5=\{32;33;....;63\}$,<br>$A_6=\{64;65;...;127\}, A_7=\{128;129;...;255\}, A_8=\{256;257;...;511\}$<br>$A_9=\{512;513;...;1023\}$<br>Dễ thấy số phần tử của tập $A_k$ là $2^k, k=0,1,...,9$.<br>Nhận thấy $n\in A_k\Leftrightarrow 2n\in A_{k+1}$. | **0,25** |
| | Xét $A=A_9\cup A_7\cup A_5\cup A_3\cup A_1\Rightarrow \lvert A\rvert=512+128+32+8+2=682$, rõ ràng $A$ không chứa số nào gấp đôi số khác. | **0,25** |
| | Ta chỉ ra rằng không thể chọn tập con có nhiều hơn 682 số thỏa mãn bài ra.<br>Thật vậy: Giả sử tập $A$ thỏa mãn yêu cầu bài toán và chứa $a_k$ phần tử thuộc $A_k$, $k=0,1,..,9$.<br>Xét các tập hợp $A_k$ và $A_{k+1}$. Với $m\in A_k$ tùy ý, ta có $2m\in A_{k+1}$. Số các cặp $(m,2m)$ như vậy là $2^k$ và trong mỗi cặp như vậy có nhiều nhất một số thuộc $A$. | **0,25** |
| | Ngoài ra tập $A_{k+1}$ còn chứa $2^k$ số lẻ, tức là có nhiều nhất $2^k+2^k=2^{k+1}$ số thuộc $A$ được lấy từ $A_k$ và $A_{k+1}$.<br>Suy ra $a_0+a_1\le 2^1, a_2+a_3\le 2^3, a_4+a_5\le 2^5, a_6+a_7\le 2^7, a_8+a_9\le 2^9$. Cộng các bất đẳng thức ta được $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9\le 682$. Vậy số phần tử lớn nhất của $A$ là 682. | **0,25** |

**Chú ý:** *- Trên đây chỉ trình bày tóm tắt một cách giải, nếu thí sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó trong biểu điểm.*

*- Thí sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.*

*- Trong một câu, nếu thí sinh làm phần trên sai, dưới đúng thì không chấm điểm.*

*- Bài hình học, thí sinh vẽ hình sai thì không chấm điểm. Thí sinh không vẽ hình mà làm vẫn làm đúng thì cho nửa số điểm của các câu làm được.*

*- Bài có nhiều ý liên quan tới nhau, nếu thí sinh công nhận ý trên để làm ý dưới mà thí sinh làm đúng thì chấm điểm ý đó.*

*- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.*