SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

LÀO CAI

THCS.TOANMATH.com

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM HỌC 2022 – 2023

MÔN CHUYÊN: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm 01 trang & 06 câu

Ngày thi: 11/06/2022

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{6x}{x-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)\cdot\left(\dfrac{6\sqrt{x}-2}{9x\sqrt{x}-6x+\sqrt{x}}\right)$, với $x>0, x\neq 1$, $x\neq\dfrac{1}{9}$. Tìm các số nguyên x để P nhận giá trị nguyên.

b) Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=12$. Chứng minh rằng $x\sqrt{\dfrac{(12+y^2)(12+z^2)}{12+x^2}}+y\sqrt{\dfrac{(12+x^2)(12+z^2)}{12+y^2}}+z\sqrt{\dfrac{(12+x^2)(12+y^2)}{12+z^2}}=24$.

Câu 2 (0,5 điểm). Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số. Lấy ngẫu nhiên 1 số từ tập S. Tính xác suất để số lấy được là số chính phương không vượt quá 2022.

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Theo kế hoạch một công nhân phải làm 54 sản phẩm trong một khoảng thời gian dự định. Do yêu cầu đột xuất, người đó phải làm 68 sản phẩm nên mỗi giờ người đó đã làm tăng thêm 3 sản phẩm vì thế công việc hoàn thành sớm hơn so với dự định là 20 phút. Hỏi theo dự định mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm, biết rằng mỗi giờ người đó làm được không quá 12 sản phẩm.

b) Cho phương trình $x^2-(m-1)x+m-3=0\ \ (1)$, (với m là tham số). Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=5x_1x_2+2\sqrt{2-x_1x_2}$.

Câu 4 (3,5 điểm). Cho tam giác nhọn ABC không cân $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O), ba đường cao AD, BE, CF $(D\in BC$, $E\in AC$, $F\in AB)$ của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AH và BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm K (K khác A).

a) Chứng minh rằng tứ giác $DMEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng tứ giác $IOMK$ là hình thang cân.

c) Chứng minh rằng $KF.HE=KE.HF$.

d) Tiếp tuyến tại A và K của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Chứng minh rằng TM, AH, EF đồng quy.

Câu 5 (1,0 điểm).

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c}\le\frac{3}{2}.$$

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\sqrt{\dfrac{a}{a+bc}}+\sqrt{\dfrac{b}{b+ac}}+\sqrt{\dfrac{c}{c+ab}}$.

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì biểu thức $P=n(13n+1)(2n+1)$ chia hết cho 6.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $3x^2+2y^2+x=2(xy+y+2)$.

--------------- **HẾT** ---------------

Pytago EDUCATION

TRUNG TÂM TOÁN HỌC PYTAGO
PYTAGO.EDU.VN

LỜI GIẢI THAM KHẢO
ĐỀ TOÁN CHUYÊN KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TỈNH LÀO CAI
NĂM HỌC 2022 - 2023

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{6x}{x-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)\cdot\left(\dfrac{6\sqrt{x}-2}{9x\sqrt{x}-6x+\sqrt{x}}\right)$, với $x>0, x\neq 1$, $x\neq\dfrac{1}{9}$. Tìm các số nguyên x để P nhận giá trị nguyên.

b) Cho x,y,z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=12$. Chứng minh rằng $x\sqrt{\dfrac{(12+y^2)(12+z^2)}{12+x^2}}+y\sqrt{\dfrac{(12+x^2)(12+z^2)}{12+y^2}}+z\sqrt{\dfrac{(12+x^2)(12+y^2)}{12+z^2}}=24.$

Lời giải.

a) Với $x>0, x\neq 1, x\neq\dfrac{1}{9}$ ta có

$$\begin{aligned}
P&=\left(\frac{6x}{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)\cdot\left(\frac{6\sqrt{x}-2}{9x\sqrt{x}-6x+\sqrt{x}}\right)\\
&=\frac{6x-(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\cdot\frac{2(3\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}.(3\sqrt{x}-1)^2}\\
&=\frac{6x-\sqrt{x}-1-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}.(3\sqrt{x}-1)}\\
&=\frac{6x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}.(3\sqrt{x}-1)}\\
&=\frac{2\sqrt{x}(3\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}.(3\sqrt{x}-1)}\\
&=\frac{4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{4}{x-1}.
\end{aligned}$$

Do $x\in\mathbb{Z}$ nên để $P\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x-1\in\text{Ư}(4)=\{\pm1;\pm2;\pm4\}$.

Do $x>0\Rightarrow x-1>-1\Rightarrow x-1\in\{1;2;4\}\Rightarrow x\in\{2;3;5\}$ (đều thỏa mãn điều kiện).

b) Ta có $xy+yz+zx=12\Leftrightarrow 12+x^2=x^2+xy+yz+zx$

$\Leftrightarrow 12+x^2=x(x+y)+z(x+y)\Leftrightarrow 12+x^2=(x+y)(x+z)$.

Tương tự ta có $12+y^2=(y+x)(y+z)$, $12+z^2=(z+x)(z+y)$.

Khi đó $x\sqrt{\dfrac{(12+y^2)(12+z^2)}{12+x^2}}+y\sqrt{\dfrac{(12+x^2)(12+z^2)}{12+y^2}}+z\sqrt{\dfrac{(12+x^2)(12+y^2)}{12+z^2}}$

$$\begin{aligned}
&=x.\sqrt{(y+z)^2}+y.\sqrt{(z+x)^2}+z.\sqrt{(x+y)^2}\\
&=x(y+z)+y(z+x)+z.(x+y)\\
&=2(xy+yz+zx)=2\cdot12=24.
\end{aligned}$$

□

Câu 2 (0,5 điểm). Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số. Lấy ngẫu nhiên 1 số từ tập S. Tính xác suất để số lấy được là số chính phương không vượt quá 2022.

Lời giải.

Không gian mẫu của phép thử là: $\Omega = \{1000; 1001; \dots; 9999\}$.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \dfrac{9999 - 1000}{1} + 1 = 9000$.

Gọi A là biến cố:"Lấy được một số chính phương không vượt quá 2022".

$A = \{n^2 | n \in \mathbb{N}$ và $1000 \leq n^2 \leq 2022\}$.

Vì n^2 là số chính phương nên $32^2 \leq n^2 \leq 44^2$.

Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \dfrac{44 - 32}{1} + 1 = 13$.

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{13}{9000}$. □

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Theo kế hoạch một công nhân phải làm 54 sản phẩm trong một khoảng thời gian dự định. Do yêu cầu đột xuất, người đó phải làm 68 sản phẩm nên mỗi giờ người đó đã làm tăng thêm 3 sản phẩm vì thế công việc hoàn thành sớm hơn so với dự định là 20 phút. Hỏi theo dự định mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm, biết rằng mỗi giờ người đó làm được không quá 12 sản phẩm.

b) Cho phương trình $x^2 - (m-1)x + m - 3 = 0$ (1), (với m là tham số). Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2 + 2\sqrt{2 - x_1x_2}$.

Lời giải.

a) Đổi 20 phút $= \dfrac{1}{3}$ giờ.

Gọi số sản phẩm mỗi giờ người đó phải làm theo kế hoạch là x (sản phẩm), điều kiện: $x \in \mathbb{N}^*$, $x \leq 12$.

Thời gian dự định người đó hoàn thành công việc là: $\dfrac{54}{x}$ (giờ).

Thực tế mỗi giờ người đó làm được: $x + 3$ (sản phẩm).

Thời gian thực tế người đó hoàn thành công việc là: $\dfrac{68}{x+3}$ (giờ).

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\begin{aligned}
&\frac{54}{x} - \frac{68}{x+3} = \frac{1}{3}\\
\Leftrightarrow\ & 54 \cdot 3 \cdot (x+3) - 68 \cdot 3 \cdot x = x \cdot (x+3)\\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 45x - 486 = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 9 \ \text{(thỏa mãn)} \\ x = -54 \ \text{(không thỏa mãn)} \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi giờ người đó phải làm 9 sản phẩm.

b)
$$x^2 - (m-1)x + m - 3 = 0 \qquad (1)$$
$$\begin{aligned}
\Delta &= (m-1)^2 - 4(m-3)\\
&= m^2 - 6m + 13\\
&= (m-3)^2 + 4 > 0, \forall m.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

Áp dụng định lý Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = m - 3. & (3) \end{cases}$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2 + 2\sqrt{2 - x_1x_2}$ (4)

Để (4) xác định $\Leftrightarrow 2 - x_1x_2 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - (m-3) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 5.$ (5)

$$(4) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5x_1x_2 + 2\sqrt{2 - x_1x_2}$$
$$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 2(m-3) = 5(m-3) + 2\sqrt{2 - (m-3)}$$
$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 - 2m + 6 = 5m - 15 + 2\sqrt{5 - m}$$
$$\Leftrightarrow m^2 - 9m + 22 = 2\sqrt{5 - m}. \quad (6)$$

Đặt $t = \sqrt{5 - m}$, $(t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 5 - m \Rightarrow m = 5 - t^2$.

$$(6) \Leftrightarrow (5 - t^2)^2 - 9(5 - t^2) + 22 = 2t$$
$$\Leftrightarrow t^4 - t^2 - 2t + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)^2 \cdot (t^2 + 2t + 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)^2 \cdot \left[(t+1)^2 + 1\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow t - 1 = 0 \text{ (Vì } (t+1)^2 + 1 > 0, \forall t \geq 0 \text{)}$$
$$\Leftrightarrow t = 1 \quad \text{(thỏa mãn)}.$$

Với $t = 1 \Rightarrow m = 5 - 1^2 = 4$ (thỏa mãn (5)).

Vậy $m = 4$.

□

Câu 4 (3,5 điểm). Cho tam giác nhọn ABC không cân $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), ba đường cao AD, BE, CF $(D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB)$ của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AH và BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm K (K khác A).

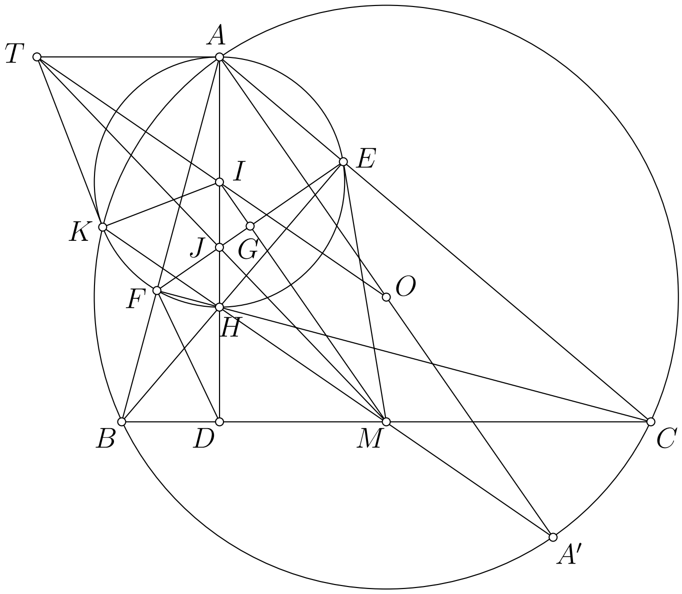
a) Chứng minh rằng tứ giác $DMEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng tứ giác $IOMK$ là hình thang cân.

c) Chứng minh rằng $KF.HE = KE.HF$.

d) Tiếp tuyến tại A và K của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Chứng minh rằng TM, AH, EF đồng quy.

Lời giải.



a) $\triangle MBE$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{EMC} = 2\widehat{MBE}$. (1)

$BFHD, BFEC$ là các tứ giác nội tiếp nên

$\widehat{DFE} = \widehat{DFH} + \widehat{CFE} = \widehat{DBH} + \widehat{CBE} = 2\widehat{DBH}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DMEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ \Rightarrow AH$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$.

$\Rightarrow \widehat{AKH} = 90^\circ$.

Vẽ đường kính AA' của đường tròn (O) ta có $\widehat{AKA'} = 90^\circ$.

Suy ra K, H, A' thẳng hàng.

Dễ chứng minh $BHCA'$ là hình bình hành $\Rightarrow M$ là trung điểm của $A'H$.

Dễ chứng minh $IOMH$ là hình bình hành $\Rightarrow OI \parallel KM$ và $OM = IH = IK$.

Nhận thấy IK cắt IH và $IH \parallel OM \Rightarrow IK$ không song song với OM.

Suy ra $OIKM$ là hình thang cân.

c) Vì $\triangle MBE$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{MBE}$

mà $\widehat{MBE} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$)

và $\widehat{HAE} = \widehat{HKE}$ (do $AEHF$ là tứ giác nội tiếp)

Suy ra $\widehat{MEH} = \widehat{MKE}$. Suy ra $\triangle MEH \backsim \triangle MKE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EH}{EK} = \dfrac{ME}{MK}$.

Tương tự $\dfrac{FH}{FK} = \dfrac{MF}{MK}$, mà $ME = MF$ nên $\dfrac{EH}{EK} = \dfrac{FH}{FK} \Rightarrow EH \cdot FK = EK \cdot FH$.

d) *Cách 1:* **(Khổng Văn Trung Kiên, sinh viên ĐHSP Hà Nội, cựu học sinh chuyên Toán của Chuyên Lào Cai).**

Gọi J, G lần lượt là giao điểm của EF với AH và IM.

Ta có $\widehat{MEF} = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\widehat{EMF} = 90^\circ - \widehat{ECF} = \widehat{EAF}$, suy ra ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Hoàn toàn tương tự, MF cũng là tiếp tuyến của đường tròn đó.

Suy ra $\widehat{IGJ} = 90^\circ = \widehat{IDM}$, kéo theo $\triangle IJG \backsim \triangle IMD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{IJ}{IM} = \frac{IG}{ID} \Leftrightarrow IJ.ID = IG.IM = IE^2 = IH^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{IH}{IJ} = \frac{ID}{IH} \Leftrightarrow \frac{IJ+JH}{IJ} = \frac{IH+HD}{IH}$$

$$\Leftrightarrow \frac{JH}{IJ} = \frac{HD}{IH} = \frac{HD}{IA}. \qquad (6)$$

Do $OI \perp AK$ và $IT \perp AK$ nên T, I, O thẳng hàng. Xét hai tam giác IAT vuông tại A và HDM vuông tại D có $\widehat{TIA} = \widehat{HIO} = \widehat{MHD}$. Suy ra $\triangle IAT \backsim \triangle HDM$. $\Rightarrow \dfrac{IT}{HM} = \dfrac{IA}{HD}$.(7)

Giả sử giao điểm của TM và AH là J'.

Áp dụng định lý Thales cho $IT \parallel HM$ ta có $\dfrac{IT}{HM} = \dfrac{J'I}{J'H}$. (8)

Từ (6), (7) và (8) suy ra $\dfrac{JI}{JH} = \dfrac{J'I}{J'H}$, suy ra $J \equiv J'$.

Vậy TM, AH, EF đồng quy tại J.

Cách 2: **(Nguyễn Sỹ Nhật, sinh viên ĐHSP Hà Nội, cựu học sinh chuyên Toán của Chuyên Lào Cai).**

Gọi P là giao điểm của AK với BC. Ta có $\angle AFK = \angle AHK = \angle APD$, suy ra tứ giác $HKPD$ nội tiếp. Do đó $\angle KFP = \angle KBP = \angle KAC = \angle KAE = 180^\circ - \angle KFE$. Suy ra E, F, P thẳng hàng.

Ta có $\angle TIK = \angle AHK = \angle DPK$, từ đó $\triangle KTI \backsim \triangle KPD$. Sau đó suy ra $\triangle KPI \backsim \triangle KMT$, vậy nên $\angle PIK = \angle MTK$. Mà $IK \perp TK$ nên $PI \perp MT$.

Xét $\triangle IMP$ có $EF \perp IM$, $TM \perp IP$, $ID \perp MP$ nên MT, EF, AD đồng quy.

$\square$

Câu 5 (1,0 điểm).

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \le \frac{3}{2}.$$

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\sqrt{\dfrac{a}{a+bc}} + \sqrt{\dfrac{b}{b+ac}} + \sqrt{\dfrac{c}{c+ab}}$.

Lời giải.

a) **Cách 1:** Áp dụng bất đẳng thức Cô - si ta có: $a+b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \dfrac{ab}{a+b} \le \dfrac{ab}{2\sqrt{ab}}$.

$\Rightarrow \dfrac{ab}{a+b} \le \dfrac{\sqrt{ab}}{2} \le \dfrac{a+b}{4}$

Tương tự ta có: $\dfrac{bc}{b+c} \le \dfrac{b+c}{4}, \dfrac{ac}{a+c} \le \dfrac{a+c}{4}$

Suy ra $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ac}{a+c} \le \dfrac{a+b}{4} + \dfrac{b+c}{4} + \dfrac{a+c}{4} = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy -Schwarz dạng engel ta có:

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b} \Rightarrow \dfrac{ab}{a+b} \le \dfrac{1}{4}ab\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{1}{4}(a+b)$

Tương tự ta có: $\dfrac{bc}{b+c} \leq \dfrac{1}{4}(b+c)$ và $\dfrac{ac}{a+c} \leq \dfrac{1}{4}(a+c)$

Suy ra $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ac}{a+c} \leq \dfrac{1}{4}(a+b+b+c+c+a) = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

b) **Cách 1:** Ta có $P = \sqrt{\dfrac{a^2}{a^2+abc}} + \sqrt{\dfrac{b^2}{b^2+abc}} + \sqrt{\dfrac{c^2}{c^2+abc}}$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+ab+bc+ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô - si ta có $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c} \geq \dfrac{2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\right) \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}\right) \quad (1)$$

Tương tự ta có $\dfrac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{b+a} + \dfrac{b}{b+c}\right)$ (2)

$$\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b}\right). \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $P \leq \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{a}{a+c} + \dfrac{b}{b+a} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a} + \dfrac{c}{c+b}\right)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1+1+1) = \frac{3}{2}.$$

Vậy $\max P = \dfrac{3}{2}$ khi $a=b=c=3$.

Cách 2: Từ $ab+bc+ca = abc \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$.

Đặt $\begin{cases} x = \dfrac{1}{a} \\ y = \dfrac{1}{b} \\ z = \dfrac{1}{c} \end{cases}$ $(x>0, y>0, z>0) \Rightarrow x+y+z=1$.

Ta có: $\sqrt{\dfrac{a}{a+bc}} = \sqrt{\dfrac{yz}{yz+x}} = \sqrt{\dfrac{yz}{yz+x(x+y+z)}} = \sqrt{\dfrac{yz}{(x+y)(x+z)}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x+y} + \dfrac{z}{x+z}\right)$.

Tương tự ta có: $\sqrt{\dfrac{b}{b+ca}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{z}{y+z}\right)$

$$\sqrt{\frac{c}{c+ab}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z}\right)$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z} + \frac{x}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z}\right) = \frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{y}{x+y} = \dfrac{z}{x+z} \\ \dfrac{x}{x+y} = \dfrac{z}{y+z} \\ \dfrac{x}{x+z} = \dfrac{y}{y+z} \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = c = 3.$

Vậy $\max P = \dfrac{3}{2}$ khi $a = b = c = 3$.

□

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì biểu thức $P = n(13n+1)(2n+1)$ chia hết cho 6.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3x^2 + 2y^2 + x = 2(xy + y + 2)$.

Lời giải.

a) Nếu n chẵn $\Rightarrow n \vdots 2$.

Nếu n lẻ $\Rightarrow 13n + 1 \vdots 2$.

Suy ra $P \vdots 2$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Nếu $n \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow P \vdots 3$.

Nếu $n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 2n + 1 \equiv 0 \pmod 3$.

Nếu $n \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 13n + 1 \equiv 0 \pmod 3$.

Suy ra $P \vdots 3$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Mà 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên $P \vdots 6$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$.

b) $3x^2 + 2y^2 + x = 2(xy + y + 2)$

$\Leftrightarrow 2y^2 - 2(x+1)y + 3x^2 + x - 4 = 0. \quad (1)$

Ta coi phương trình (1) là phương trình bậc 2 ẩn y, x là tham số.

Ta có $\Delta' = (x+1)^2 - 2(3x^2 + x - 4) = -5x^2 + 9$.

Để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -5x^2 + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \dfrac{9}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 0 \end{array}\right.$.

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0; 1\}$, thay vào phương trình (1) ta được các nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(-1; 1), (-1; -1), (0; 2), (0; -1), (1; 2), (1; 0)$.

□