SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

THÁI BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT

NĂM HỌC 2019-2020

Môn: TOÁN

Thời gian làm bài 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho $A=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ và $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$, $x\ne 1$.

a).Tính giá trị của biểu thức A khi $x=2$.

b).Rút gọn biểu thức B.

c).Tìm x sao cho $C=-A.B$ nhận giá trị là số nguyên.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a).Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x+y=3\\2x-y=1\end{cases}$ (không sử dụng máy tính cầm tay).

b).Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $150\,\text{m}^2$. Biết rằng, chiều dài mảnh vườn hơn chiều rộng mảnh vườn là $5\,\text{m}$. Tính chiều rộng mảnh vườn.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Cho hàm số $y=(m-4)x+m+4$ (m là tham số)

a).Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b).Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đồ thị hàm số đã cho luôn cắt parabol $(P): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm, tìm m sao cho
$x_1(x_1-1)+x_2(x_2-1)=18$.

c).Gọi đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng (d). Chứng minh khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến (d) không lớn hơn $\sqrt{65}$.

Câu 4. *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Kẻ dây cung CD vuông góc với AB tại H (H nằm giữa A và O, H khác A và O). Lấy điểm G thuộc CH (G khác C và H), tia AG cắt đường tròn tại E khác A.

a).Chứng minh tứ giác $BEGH$ là tứ giác nội tiếp.

b).Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BE và CD. Chứng minh: $KC.KD=KE.KB$.

c).Đoạn thẳng AK cắt đường tròn O tại F khác A. Chứng minh G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HEF.

d).Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên đường thẳng EF. Chứng minh $HE+HF=MN$.

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ac=6$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge 3$.

Hướng dẫn giải

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho $A=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ và $B=\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$, $x\ne 1$.

a).Tính giá trị của biểu thức A khi $x=2$.

b).Rút gọn biểu thức B.

c).Tìm x sao cho $C=-A.B$ nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

Cho $A=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ ***và*** $B=\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ ***với*** $x\ge 0$, $x\ne 1$.

a).Tính giá trị của biểu thức A ***khi*** $x=2$.

Có $A=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\frac{\sqrt{x^3}-1}{x-1}$

Khi $x=2\Rightarrow A=2\sqrt{2}-1$.

b).Rút gọn biểu thức B.

c).Tìm x ***sao cho*** $C=-A.B$ ***nhận giá trị là số nguyên.***

Có $B=\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$

$$B=\frac{x+\sqrt{x}+1-(x+2)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}=\frac{-x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}=\frac{-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

Có $C=-A.B=-\frac{\sqrt{x^3}-1}{x-1}.\left(\frac{-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

Có $\sqrt{x}+1\ge 1$, $x\ge 0$, $x\ne 1$.

C nhận giá trị là số nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=1\Leftrightarrow x=0$ (nhận).

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a).Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x+y=3\\2x-y=1\end{cases}$ (không sử dụng máy tính cầm tay).

b).Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $150\,\text{m}^2$. Biết rằng, chiều dài mảnh vườn hơn chiều rộng mảnh vườn là $5\,\text{m}$. Tính chiều rộng mảnh vườn.

Lời giải

a).Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x+y=3\\2x-y=1\end{cases}$ ***(không sử dụng máy tính cầm tay).***

Có $\begin{cases}4x+y=3\\2x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x=4\\2x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

b).Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $150\,\text{m}^2$***. Biết rằng, chiều dài mảnh vườn hơn chiều rộng mảnh vườn là*** $5\,\text{m}$***. Tính chiều rộng mảnh vườn.***

Gọi x, y lần lượt là chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn, điều kiện $x>0$ $y>0$, $x>y$.

Có $\begin{cases}x-y=5\\xy=150\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+5\\y(y+5)=150\ (1)\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow y^2+5y-150=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=10\quad(\text{nhận})\\y=-15\ (\text{loại})\end{array}\right.$.

Vậy chiều rộng mảnh vườn là $10(\text{m})$

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Cho hàm số $y=(m-4)x+m+4$ (m là tham số)

a).Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b).Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đồ thị hàm số đã cho luôn cắt parabol $(P): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm, tìm m sao cho $x_1(x_1-1)+x_2(x_2-1)=18$.

c).Gọi đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng (d). Chứng minh khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến (d) không lớn hơn $\sqrt{65}$.

Lời giải

a).Tìm m ***để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất đồng biến trên*** $\mathbb{R}$***.***

$y=(m-4)x+m+4$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow m-4>0\Leftrightarrow m>4$.

Vậy $m>4$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b).Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đồ thị hàm số đã cho luôn cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm, tìm m sao cho $x_1(x_1-1)+x_2(x_2-1)=18$.

$(d): y=(m-4)x+m+4$, $(P): y=x^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d), (P): $x^2=(m-4)x+m+4$

$\Leftrightarrow x^2-(m-4)x-(m+4)=0\ (1)$, Có $a=1\neq 0$

Có $\Delta=(m-4)^2+4(m+4)=m^2-4m+32=(m-2)^2+28>0, \forall m\in\mathbb{R}$

Do có $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0,\ \forall m\in\mathbb{R} \end{cases}$

Suy ra (d) cắt luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt .

Có $x_1(x_1-1)+x_2(x_2-1)=18 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2-(x_1+x_2)-18=0$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-(x_1+x_2)-18=0$, mà $\begin{cases} x_1+x_2=m-4 \\ x_1x_2=-(m+4) \end{cases}$

$\Leftrightarrow (m-4)^2+2(m+4)-(m-4)-18=0 \Leftrightarrow m^2-7m+10=0 \Leftrightarrow (m-5)(m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Vậy $m=5$, $m=2$ thỏa yêu cầu bài

c).Gọi đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng (d). Chứng minh khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến (d) không lớn hơn $\sqrt{65}$.

$(d): y=(m-4)x+m+4$ cắt trục Ox, Oy lần lượt ở $A\left(-\dfrac{m+4}{m-4};0\right)$ và $B(0;m+4)$.

*Trường hợp 1: Xét $m-4=0 \Leftrightarrow m=4$, thì $(d): y=8$, (d) song song trục Ox, (d) cắt trục Oy tại $B(0;8)$

Có khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) là $OB=8$

Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng (d).

ΔOAB vuông tại O có $OH\perp AB$, Có $OH.AB=OA.OB$

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{(m-4)^2}{(m+4)^2}+\frac{1}{(m+4)^2}=\frac{(m-4)^2+1}{(m+4)^2}$$

$$\Rightarrow OH^2=\frac{(m+4)^2}{(m-4)^2+1}$$

Giả sử

$$OH > \sqrt{65} \Leftrightarrow OH^2 > 65 \Leftrightarrow \frac{(m+4)^2}{(m-4)^2+1} > 65 \Leftrightarrow m^2+8m+16 > 65\left(m^2-8m+17\right)$$

$$\Leftrightarrow 64m^2-528m+1089 < 0 \Leftrightarrow (8m)^2-2.16.8m+33^2 < 0 \Leftrightarrow (8m-33)^2 < 0 \text{ (sai)}$$

Vậy $OH \le \sqrt{65}$.

Câu 4. *(3,5 điểm)*

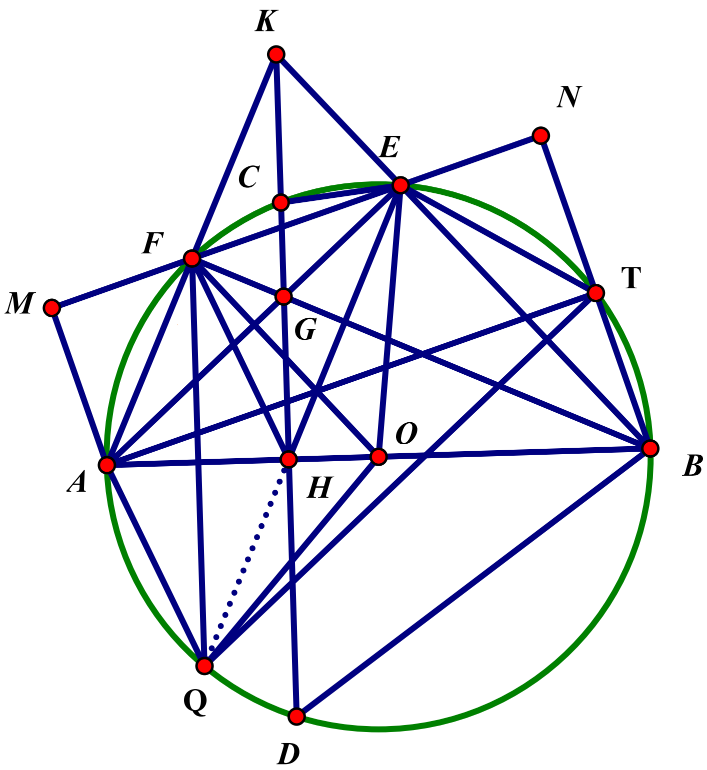
Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Kẻ dây cung CD vuông góc với AB tại H (H nằm giữa A và O, H khác A và O). Lấy điểm G thuộc CH (G khác C và H), tia AG cắt đường tròn tại E khác A.

a).Chứng minh tứ giác $BEGH$ là tứ giác nội tiếp.

b).Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BE và CD. Chứng minh: $KC.KD = KE.KB$.

c).Đoạn thẳng AK cắt đường tròn O tại F khác A. Chứng minh G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HEF.

d).Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên đường thẳng EF. Chứng minh $HE + HF = MN$.



Lời giải

a).Chứng minh tứ giác $BEGH$ là tứ giác nội tiếp.

Có $\widehat{BHG} = \widehat{BEG} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BHG} + \widehat{BEG} = 180^\circ$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BEGH$ nội tiếp đường tròn đường kính BG.

b).Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BE và CD. Chứng minh: $KC.KD = KE.KB$.

Có $\widehat{KEC}=\widehat{KDB}$, $\widehat{EKC}=\widehat{DKB}$ (góc chung) $\Rightarrow \Delta KEC \backsim \Delta KDB \Rightarrow \dfrac{KE}{KD}=\dfrac{KC}{KB} \Rightarrow KC.KD=KE.KB$

c).Đoạn thẳng AK cắt đường tròn O tại F khác A. Chứng minh G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HEF.

ΔKAB có ba đường cao AE, BF, KH đồng qui tại G. Suy ra G là trực tâm của ΔKAB.

Có $\widehat{GHE}=\widehat{GBE}=\dfrac{1}{2}sđ\overparen{GE}$ (trong đường tròn $BEGH$)

Có $\widehat{GBE}=\widehat{GAF}=\dfrac{1}{2}sđ\overparen{EF}$ (trong đường tròn (O))

Có $\widehat{GAF}=\widehat{GHF}=\dfrac{1}{2}sđ\overparen{EG}$ (tứ giác $AFGH$ nội tiếp đường tròn đường kính AG)

Suy ra $\widehat{GHE}=\widehat{GHF} \Rightarrow HG$ là tia phân giác của $\widehat{EHF}$.

Tương tự EG là tia phân giác của $\widehat{FEG}$.

ΔEHF có hai tia phân giác HG và EG cắt nhau tại G. Suy ra G là tâm đường tròn nội tiếp ΔEHF.

d).Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên đường thẳng EF. Chứng minh $HE+HF=MN$.

Gọi Q là giao điểm của tia EH và đường tròn (O).

Có $\widehat{EOB}=2\widehat{EFB}=sđ\overparen{EB}$, $2\widehat{EFB}=\widehat{EFO}$ (do FG là tia phân giác của $\widehat{EFH}$)

$\Rightarrow \widehat{EOB}=\widehat{EFH} \Rightarrow$ Tứ giác $EFHO$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{FOH}=\widehat{FEH}=\dfrac{1}{2}sđ\overparen{EQ}=\dfrac{1}{2}\widehat{FOQ} \Rightarrow \widehat{FOH}=\dfrac{1}{2}\widehat{FOQ}$.

$\Rightarrow OH$ là tia phân giác của $\widehat{FOQ}$

$\Delta OFH, \Delta OQH$ có OH chung, $OF=OQ$, $\widehat{FOH}=\widehat{QOH}$

$\Rightarrow \Delta OFH=\Delta OQH \Rightarrow HF=HQ$

Do đó $HE+HF=HE+HQ=EQ$.

Có $\widehat{AMN}=\widehat{MNT}=\widehat{NTA}=90^\circ$. Suy ra $AMNT$ là hình chữ nhật, nên $AT=MN$.

Suy ra $\overparen{AQ}=\overparen{FA}=\overparen{ET}$ $\Rightarrow AE // QT$, mà $AETQ$ nội tiếp đường tròn (O).

$\Rightarrow AETQ$ là hình thang cân $\Rightarrow EQ=AT=MN$

Vậy $HE+HF=MN$.

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ac=6$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\ge 3$.

Lời giải

Đặt $P=\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}$.

Có a, b, c là các số thực dương, theo bất đẳng thức AM-GM có:

$$\begin{cases}\frac{a^3}{b}+ab\ge 2a^2\\ \frac{b^3}{c}+bc\ge 2b^2\\ \frac{c^3}{a}+ac\ge 2c^2\end{cases}.\Rightarrow P=\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(ab+bc+ac\right)$$, mà

$a+b+c+ab+bc+ac=6$.

$\Rightarrow P\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(a+b+c\right)-6$.

Có

$\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(a-c\right)^2\ge 0\Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 2\left(ab+bc+ca\right)\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2$.

Suy ra $P\ge\frac{2}{3}\left(a+b+c\right)^2+\left(a+b+c\right)-6$.

Có $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2\Rightarrow 3\left(ab+bc+ac\right)\le\left(a+b+c\right)^2$.

Do đó

$6=a+b+c+ab+bc+ac\le a+b+c+\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2\Rightarrow\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2+\left(a+b+c\right)-6\ge 0$.

$\Rightarrow\left(a+b+c\right)\ge 3$, $\left(a+b+c\right)^2\ge 9$.

Suy ra $P\ge\frac{2}{3}.9+3-6=3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Vậy $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge 3$.