

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

LOẠI 1: BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI DIỆN TÍCH, TAM GIÁC, TỨ GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT – PHƯƠNG PHÁP GIẢI

I. Các bước giải:

Bước 1: Lập phương trình hoặc hệ phương trình:

- Chọn ẩn, đơn vị cho ẩn, điều kiện thích hợp cho ẩn.
- Biểu đạt các đại lượng khác theo ẩn (chú ý thống nhất đơn vị).
- Dựa vào các dữ kiện, điều kiện của bài toán để lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 2: Giải phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 3: Nhận định, so sánh kết quả bài toán, dựa vào điều kiện tìm kết quả thích hợp, trả lời, nêu rõ đơn vị của đáp số.

II. Các công thức liên quan:

Diện tích tam giác vuông = nửa tích hai cạnh góc vuông.

Diện tích hình chữ nhật = dài nhân rộng.

Diện tích hình vuông = cạnh nhân cạnh.

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: (Bắc Giang, 2015 – 2016) Nhà bạn Dũng được ông bà nội cho một mảnh đất hình chữ nhật. Khi bạn Nam đến nhà bạn Dũng chơi, Dũng đổ Nam tìm ra kích thước của mảnh đất khi biết: mảnh đất có chiều dài gấp 4 lần chiều rộng và nếu giảm chiều rộng đi 2 m, tăng chiều dài lên gấp đôi thì diện tích mảnh đất đó sẽ tăng thêm 20 m². Các em hãy giúp bạn Nam tìm ra chiều dài và chiều rộng của mảnh đất nhà bạn Dũng đó.

Giải: Gọi chiều rộng của mảnh đất là x (m) (điều kiện: $x > 2$)

Khi đó chiều dài của mảnh đất là: 4x (m)

Diện tích mảnh đất nhà bạn Dũng là: $4x^2$ (m²)

Diện tích mảnh đất sau khi giảm chiều rộng 2m và tăng chiều dài lên gấp đôi là: $8x.(x - 2)$ (m²)

Theo bài ra ta có phương trình: $8x.(x - 2) - 4x^2 = 20$

Giải phương trình ta được $x = 5$ và $x = -1$.

Đối chiếu với điều kiện ta được $x = 5$.

Vậy chiều rộng mảnh đất là 5 m và chiều dài mảnh đất là 20 m.

Ví dụ 2: (Bắc Ninh, 2015 – 2016) Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 m. Đường chéo của hình chữ nhật dài 10 m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật đó.

Giải:

Gọi chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật là a (m) ($0 < a < 28$)

Chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là b (m) ($0 < a < b$)

Chu vi của mảnh đất hình chữ nhật là 28 m nên :

$$(a + b).2 = 28$$

$$\Leftrightarrow a + b = 14 \quad (1)$$

Đường chéo của hình chữ nhật 10 m nên :

$$a^2 + b^2 = 10^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 100 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ PT
$$\begin{cases} a + b = 14 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow b = 14 - a$ thay vào (2) được :

$$a^2 + (14 - a)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 196 - 28a + a^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 28a + 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 14a + 48 = 0$$

$$\Delta' = 49 - 48 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 7 - 1 = 6 \Rightarrow b = 8 \text{ (loại)} \\ a = 7 + 1 = 8 \Rightarrow b = 6 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy chiều dài của HCN là 8 m.

Chiều rộng của HCN là 6 m.

Ví dụ 3: (Yên Bái, 2016 – 2017) Từ những miếng tôn phẳng hình chữ nhật có chiều dài 1,5 dm và chiều rộng 1,4 dm. Người ta tạo nên mặt xung quanh của những chiếc hộp hình trụ. Trong hai cách làm, hỏi cách nào thì được chiếc hộp có thể tích lớn hơn.

Giải:

Cách 1: Chu vi đáy hình trụ là 1,5 dm, chiều cao hình trụ là $h_1 = 1,4$ dm.

Hình trụ này có bán kính đáy $r_1 = \frac{1,5}{2\pi} = \frac{3}{4\pi}$ (dm), diện tích đáy

$$S_1 = \pi r_1^2 = \pi \cdot \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 = \frac{9}{16\pi} \text{ (dm}^2\text{)}$$

$$\text{Thể tích } V_1 = S_1 h_1 = \frac{9}{16\pi} \cdot 1,4 = \frac{63}{80\pi} \text{ (dm}^3\text{)}$$

Cách 2: Chu vi đáy hình trụ là 1,4 dm, chiều cao hình trụ là $h_2 = 1,5$ dm.

Hình trụ này có

$$r_2 = \frac{1,4}{2\pi} = \frac{7}{10\pi} \text{ (dm)}; S_2 = \pi r_2^2 = \pi \cdot \left(\frac{7}{10\pi}\right)^2 = \frac{49}{100\pi} \text{ (dm}^2\text{)}; V_2 = S_2 h_2 = \frac{49}{100\pi} \cdot 1,5 = \frac{147}{200\pi} \text{ (dm}^3\text{)}$$

Ta có $V_1 > V_2$ nên cách 1 sẽ cho hình trụ có thể tích lớn hơn.

Ví dụ 4: (Bình Phước, 2014 – 2015) Cho mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 360 m². Nếu tăng chiều rộng 2 m và giảm chiều dài 6 m thì diện tích không thay đổi. Tính chu vi của mảnh vườn lúc ban đầu.

Giải:

Gọi x (m) là chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật ($x > 0$)

Chiều dài của mảnh vườn hình chữ nhật : $\frac{360}{x}$ (m)

Theo đề bài ta có pt: $(x+2)(\frac{360}{x}-6)=360$

$$\Leftrightarrow -6x^2 - 12x + 720 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 120 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10(TM) \\ x = -12(L) \end{cases}$$

Với $x=10 \Rightarrow \frac{360}{x}=36$. Chu vi của mảnh vườn : $2(10+36) = 92 \text{ (m}^2\text{)}$

Ví dụ 5: (Cà Mau, 2014 – 2015) Một hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Nếu cả chiều dài và chiều rộng cùng tăng thêm 5 cm thì được một hình chữ nhật mới có diện tích bằng 153 cm^2 . Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu.

Giải:

Gọi x là chiều rộng hình chữ nhật lúc đầu ($x > 0$) (cm)

Chiều dài hình chữ nhật lúc đầu: $3x$ (cm)

Chiều rộng hình chữ nhật lúc sau: $x + 5$ (cm)

Chiều dài hình chữ nhật lúc sau: $3x + 5$ (cm)

Theo đề bài ta có phương trình: $(x + 5)(3x + 5) = 153$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 20x - 128 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)} \text{ hay } x = \frac{-32}{3} < 0(L)$$

Vậy chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật ban đầu là: 12 cm và 4 cm.

Ví dụ 6: (Đà Nẵng, 2015 – 2016) Một miếng bìa hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{3}{5}$ chiều dài. Nếu chiều rộng giảm đi 1cm và chiều dài giảm đi 4cm thì diện tích của nó bằng nửa diện tích ban đầu. Tính chu vi miếng bìa đó.

Giải:

Gọi chiều dài của hình chữ nhật đó là x (cm) ($x > 4$)

Vì chiều rộng bằng $\frac{3}{5}$ chiều dài nên chiều rộng của hình chữ nhật là $\frac{3}{5}x$ (cm)

Diện tích của hình chữ nhật ban đầu là $\frac{3}{5}x^2$ (cm²)

Khi giảm chiều rộng 1cm và giảm chiều dài 4cm thì diện tích của hình chữ nhật mới là

$$(\frac{3}{5}x - 1)(x - 4) \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích hình chữ nhật mới bằng một nửa diện tích ban đầu nên ta có phương trình:

$$(\frac{3}{5}x - 1)(x - 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{10}x^2 - \frac{17}{5}x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10(TM) \\ x = \frac{4}{3}(L) \end{cases}$$

Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu lần lượt là 10cm và $\frac{3}{5} \cdot 10 = 6$ cm

Chu vi miếng bìa là $2 \cdot (10 + 6) = 32$ (cm)

Ví dụ 7: (Hà Nội, 2016 – 2017) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
 Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 720 m^2 . Nếu tăng chiều dài thêm 10 m và giảm chiều rộng 6 m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Giải:

Gọi chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật là x ($x > 0$; đơn vị: m)

Vì diện tích của của mảnh vườn hình chữ nhật là 720 m^2 nên chiều dài là: $\frac{720}{x}$ (m)

Sau khi thay đổi kích thước:

Chiều rộng của của mảnh vườn hình chữ nhật là: $x - 6$ (m)

Chiều dài của của mảnh vườn hình chữ nhật là: $\frac{720}{x} + 10$ (m)

Vì diện tích của của mảnh vườn hình chữ nhật không đổi nên ta có phương trình:

$$(x-6) \cdot \left(\frac{720}{x} + 10 \right) = 720$$

$$\Rightarrow (x-6)(72+x) = 72x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 432 = 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 24$ (thỏa mãn điều kiện); $x_2 = -18$ (loại)

Vậy chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật đó là 24 m;

chiều dài mảnh đất hình chữ nhật đó là: $720 : 24 = 30$ (m).

Ví dụ 8: (Hải Phòng, 2013 – 2014) Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 3 m và diện tích bằng 270 m^2 . Tìm chiều dài, chiều rộng của khu vườn.

Giải:

Gọi chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật là x (m) ($x > 0$)

Vì chiều dài lớn hơn chiều rộng 3 m nên chiều dài của hình chữ nhật là $x + 3$ (m)

Lại có diện tích hình chữ nhật là 270 m^2 nên ta có phương trình:

$$x(x+3) = 270$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 270 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-15)(x+18) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \text{ (TMDK } x > 0) \text{ hoặc } x = -18 \text{ (loại vì } x > 0)$$

Vậy chiều rộng của hình chữ nhật là 15 m

chiều dài của hình chữ nhật là $15 + 3 = 18$ (m)

Ví dụ 9: (Hải Phòng, 2016 – 2017) Cho tam giác vuông có cạnh huyền bằng 20 cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 4 cm. Tính độ dài mỗi cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

Giải:

Gọi độ dài cạnh góc vuông nhỏ hơn của tam giác vuông đó là x (cm) ($x > 0$)

Cạnh góc vuông lớn hơn của tam giác vuông đó dài là $x + 4$ (cm)

Theo Pitago, cạnh huyền của tam giác vuông đó dài là $\sqrt{x^2 + (x+4)^2}$ (cm)

Vì cạnh huyền bằng 20cm nên $\sqrt{x^2 + (x+4)^2} = 20$

$$\Leftrightarrow x^2 + (x+4)^2 = 400$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 8x - 384 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 12 \text{ (tm) hoặc } x = -16 \text{ (loại)}$$

Vậy độ dài 2 cạnh góc vuông của tam giác vuông đó lần lượt là 12cm và $12 + 4 = 16$ cm.

Ví dụ 10: (Hung Yên, 2014 – 2015) Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 12 m . Nếu tăng chiều dài thêm 12 m và chiều rộng thêm 2 m thì diện tích mảnh vườn đó tăng gấp đôi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó.

Giải:

1) Gọi chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật là x (m) ĐK : $x > 0$

Thì chiều dài của khu vườn hình chữ nhật là : $x + 12$ (m)

Diện tích của khu vườn khi đó là: $x(x + 12)$ (m^2)

Nếu tăng chiều dài 12m và chiều rộng lên 2m thì :

Chiều dài mới là : $x + 12 + 12 = x + 24$ (m)

Chiều rộng mới là : $x + 2$ (m)

Diện tích của hình chữ nhật mới là : $(x + 2)(x + 24)$ (m^2)

Vì diện tích sau khi thay đổi gấp đôi diện tích ban đầu nên :

$$(x + 2)(x + 24) = 2x(x + 12)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (-1)^2 - 1(-48) = 49 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 7$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

Vậy chiều rộng của khu vườn hình chữ nhật là 8(m), chiều dài của khu vườn là 20m.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Bài toán 1: (Lạng Sơn, 2013 – 2014) Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 5 m. Tính kích thước của mảnh đất, biết rằng diện tích mảnh đất là $150 m^2$

Giải:

Gọi chiều rộng của mảnh đất là a (m), $a > 0$

Khi đó ta có chiều dài của mảnh đất là $a + 5$ (m).

Theo bài ra ta có diện tích của mảnh đất là $150 m^2$ nên:

$$a(a+5)=150 \Rightarrow a=10(\text{tm}) ; a=-15(\text{loại})$$

Vậy chiều rộng là 10m, chiều dài là 15 m.

Bài toán 2: (Nghệ An, 2013 – 2014) Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 100 m. Nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4 m thì diện tích mảnh vườn giảm $2 m^2$. Tính diện tích của mảnh vườn.

Giải:

Gọi x (m) là chiều rộng của mảnh vườn ($0 < x < 25$)

Chiều dài của mảnh vườn là: $50 - x$.

Diện tích của mảnh vườn là: $x(50 - x)$.

Nếu tăng chiều rộng 3m thì chiều rộng mới là $x + 3$; giảm chiều dài 4 m thì chiều dài mới là $46 - x$.

Diện tích mới của mảnh vườn là: $(x + 3)(46 - x)$

Theo bài ra ta có phương trình: $x(50 - x) - (x + 3)(46 - x) = 2$

$$\Leftrightarrow 50x - x^2 - 43x + x^2 - 138 = 2 \Leftrightarrow 7x = 140 \Leftrightarrow x = 20 \text{ (TM)}$$

Vậy diện tích của mảnh vườn là $20(50-20)=600 \text{ m}^2$.

Bài toán 3: (Ninh Bình, 2015 – 2016) Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 8 m. Nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 90 m^2 . Tính diện tích thửa ruộng đã cho ban đầu.

Giải:

Gọi hình chiều của thửa ruộng đã cho ban đầu là x (đơn vị: m, đk: $x > 0$)

Khi đó chiều dài của thửa ruộng đã cho ban đầu là $x + 8$

Diện tích của thửa ruộng đã cho ban đầu là $x(x + 8)$

Chiều rộng của thửa ruộng khi tăng thêm 3m là $x + 3$.

Chiều dài của thửa ruộng khi tăng thêm 2m là $x + 10$.

Diện tích của thửa ruộng sau khi tăng chiều dài và chiều rộng là $(x + 3)(x + 10)$

Theo đề bài ta có phương trình: $(x+3)(x+10) - x(x+8) = 90$

$$\Leftrightarrow x^2 + 13x + 30 - (x^2 + 8x) = 90$$

$$\Leftrightarrow 5x = 60$$

$$\Leftrightarrow x = 12(TM)$$

Vậy diện tích của thửa ruộng ban đầu là $12(12+8)=240 \text{ (m}^2\text{)}$

Bài toán 4: (Sơn La, 2015 – 2016) Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích 100 m^2 . Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5 m thì diện tích của thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 .

Giải:

Gọi chiều dài ban đầu của thửa ruộng là a (m) ($a > 0$)

Chiều rộng ban đầu của thửa ruộng là b (m) ($0 < b < a$)

Diện tích ban đầu của thửa ruộng là 100 m^2 nên ta có : $a.b=100$ (1)

Chiều rộng của thửa ruộng sau khi tăng m là : $b + 2$ (m)

Chiều dài của thửa ruộng sau khi giảm 5m là : $a - 5$ (m)

Diện tích sau của thửa ruộng là : $(b + 2)(a - 5)$

Diện tích sau của thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 là $100 + 5 = 105 \text{ (m}^2\text{)}$

$$\Leftrightarrow (b+2)(a-5)=105 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hpt: } \begin{cases} ab = 100(1) \\ (b+2)(a-5) = 105(2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2) ta có : } ab-5b+2a-10=105$$

$$\Leftrightarrow 100-5b+2a-10=105$$

$$\Leftrightarrow -5b+2a=15(*)$$

$$\text{Từ (1) ta có: } a = \frac{100}{b} \text{ thay vào (*) ta được :}$$

$$2 \cdot \frac{100}{b} - 5b = 15$$

$$\Leftrightarrow 5b^2 + 15b - 200 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 3b - 40 = 0 \Rightarrow a = 20. \text{ Vậy chiều dài là } 20 \text{ m, chiều rộng là } 5 \text{ m.}$$

$$\Leftrightarrow (b+8)(b-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -8(L) \\ b = 5(TM) \end{cases}$$

Bài toán 5: (Thái Bình, 2015 – 2016) Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 168 m^2 . Nếu giảm chiều dài đi 1 m và tăng chiều rộng thêm 1 m thì mảnh vườn trở thành hình vuông. Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.

Giải:

Gọi chiều dài của mảnh vườn là $x \text{ (m)}$. ĐK $x > 1$.

Thì chiều rộng của mảnh vườn là $\frac{168}{x} \text{ (m)}$

Nếu giảm chiều dài đi 1 m và tăng chiều rộng thêm 1 m thì mảnh vườn có:

-chiều dài là $x-1 \text{ (m)}$

-chiều rộng là $\frac{168}{x} + 1 \text{ (m)}$

Vì mảnh vườn trở thành hình vuông lên ra có phương trình $\frac{168}{x} + 1 = x - 1$

$$\Rightarrow 168 + x = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 168 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 14)(x + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 14(TM) \\ x = -12(L) \end{cases}$$

Vậy mảnh vườn có chiều dài là 14 m , chiều rộng là $168:14=12 \text{ m}$

Bài toán 6: (Vĩnh Phúc, 2015 – 2016) Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là 360 m^2 . Nếu tăng chiều dài thêm 1 m và tăng chiều rộng thêm 1 m thì diện tích của mảnh vườn sẽ là 400 m^2 . Xác định chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ban đầu.

Giải:

Gọi chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật là $x \text{ (m)}$;

chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là $y \text{ (m)}$. (điều kiện: $x > y > 0$)

Diện tích mảnh vườn hình chữ nhật ban đầu là 360 m^2 .

Khi tăng chiều dài thêm 1 m , tăng chiều rộng thêm 1 m thì diện tích của mảnh vườn mới là 400 m^2 .

Tức là: Chiều dài: $x + 1 \text{ (m)}$; chiều rộng: $y + 1 \text{ (m)}$

Khi đó diện tích của hình chữ nhật mới là: $(x + 1)(y + 1) = 400$

$$\Leftrightarrow xy + x + y + 1 = 400 \Leftrightarrow x + y = 39 \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ xy = 360 \end{cases}$$

Theo Vi-et x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - 39X + 360 = 0$.

Giải phương trình ta được hai nghiệm: $X_1 = 15$; $X_2 = 24$

Vậy chiều dài hình chữ nhật ban đầu là 24 cm , chiều rộng là 15 cm .

Bài toán 7: (Phổ thông năng khiếu, 2015 – 2016) Cho một tam giác vuông. Nếu ta tăng độ dài mỗi cạnh góc vuông thêm 3 cm thì diện tích tăng thêm 33 cm^2 ; nếu giảm độ dài một cạnh góc vuông đi 2 cm và tăng độ dài cạnh góc còn lại thêm 1 cm thì diện tích giảm 2 cm^2 . Hãy tính độ dài các cạnh của tam giác vuông.

Giải:

Gọi độ dài mỗi cạnh góc vuông của tam giác vuông là x, y (cm) (giả sử bài toán giảm 2cm ở cạnh x) ($x > 2, y > 0$)

Diện tích tam giác vuông ban đầu là $\frac{1}{2}xy \text{ (cm}^2\text{)}$

Khi tăng mỗi cạnh góc vuông thêm 3cm thì diện tích tam giác vuông là $\frac{1}{2}(x+3)(y+3)(\text{cm}^2)$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{1}{2}(x+3)(y+3) - \frac{1}{2}xy = 33 \quad (1)$$

Khi giảm cạnh x đi 2cm, tăng cạnh y thêm 1 cm thì diện tích tam giác vuông là $\frac{1}{2}(x-2)(y+1)(\text{cm}^2)$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}(x-2)(y+1) = 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+3)(y+3) - \frac{1}{2}xy = 33 \\ \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}(x-2)(y+1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=19 \\ -x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=7 \end{cases}$$

(thỏa mãn điều kiện)

Độ dài mỗi cạnh góc vuông của tam giác vuông là 12cm và 7cm

$\Rightarrow$ Độ dài cạnh huyền là $\sqrt{12^2 + 7^2} = \sqrt{193} \text{ (cm)}$.

Bài toán 8: (Đề đề xuất THCS Khánh Hòa, 2013 – 2014) Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng một nửa chiều dài. Biết rằng nếu giảm mỗi chiều đi 2 m thì diện tích hình chữ nhật đã cho giảm đi một nửa. Tính chiều dài hình chữ nhật đã cho.

Giải:

Gọi chiều dài của hình chữ nhật đã cho là x (m), với $x > 4$.

Vì chiều rộng bằng nửa chiều dài nên chiều rộng là: $\frac{x}{2}$ (m)

$\Rightarrow$ diện tích hình chữ nhật đã cho là: $x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} \text{ (m}^2\text{)}$

Nếu giảm mỗi chiều đi 2 m thì chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là:

$x-2$ và $\frac{x}{2}-2$ (m)

khi đó, diện tích hình chữ nhật giảm đi một nửa nên ta có phương trình:

$$(x-2)\left(\frac{x}{2}-2\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - 2x - x + 4 = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2 - 12x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 6 + 2\sqrt{5} \text{ (thỏa mãn } x > 4);$$

$$x_2 = 6 - 2\sqrt{5} \text{ (loại vì không thỏa mãn } x > 4)$$

Vậy chiều dài của hình chữ nhật đã cho là $6 + 2\sqrt{5}$ (m).

Bài toán 9: (Đồng Nai, 2012 – 2013) Một thửa đất hình chữ nhật có chu vi bằng 198 m , diện tích bằng 2430 m² . Tính chiều dài và chiều rộng của thửa đất hình chữ nhật đã cho.

Giải:

Gọi x (m) là chiều dài thửa đất hình chữ nhật ($49,5 < x < 99$)

Chiều rộng của thửa đất hình chữ nhật là : $99 - x$ (m)

Theo đề bài ta có phương trình : $x (x - 99) = 2430$

Giải được : $x_1 = 54$ (nhận) ; $x_2 = 45$ (loại)

Vậy chiều dài thửa đất hình chữ nhật là 54 (m)

Chiều rộng của thửa đất hình chữ nhật là : $99 - 54 = 45$ (m).

Bài toán 9: (Bắc Ninh, 2012 – 2013)

Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34 m. Nếu tăng thêm chiều dài 3m và chiều rộng 2 m thì diện tích tăng thêm 45 m². Hãy tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.

Giải:

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m); chiều rộng là y (m) ($0 < x, y < 17$)

$$\text{Theo bài ra ta có hpt : } \begin{cases} x + y = 34 : 2 = 17 \\ (x + 3)(y + 2) = xy + 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (thỏa mãn đk)}$$

Vậy : chiều dài = 12 m, chiều rộng = 5 m.

Bài toán 10: (Vĩnh Phúc, 2012 – 2013)

Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng một nửa chiều dài. Biết rằng nếu giảm mỗi chiều đi 2 m thì diện tích hình chữ nhật đã cho giảm đi một nửa. Tính chiều dài hình chữ nhật đã cho.

Giải: Gọi chiều dài của hình chữ nhật đã cho là x (m), với $x > 4$.

Vì chiều rộng bằng nửa chiều dài nên chiều rộng là: $\frac{x}{2}$ (m)

$$\Rightarrow \text{diện tích hình chữ nhật đã cho là: } x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} \text{ (m}^2\text{)}$$

Nếu giảm mỗi chiều đi 2 m thì chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là: $x - 2$ và $\frac{x}{2} - 2$ (m)

khí đó, diện tích hình chữ nhật giảm đi một nửa nên ta có phương trình:

$$(x - 2)\left(\frac{x}{2} - 2\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - 2x - x + 4 = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2 - 12x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 6 + 2\sqrt{5} \text{ (thỏa mãn } x > 4);$$

$$x_2 = 6 - 2\sqrt{5} \text{ (loại vì không thỏa mãn } x > 4)$$

Vậy chiều dài của hình chữ nhật đã cho là $6 + 2\sqrt{5}$ (m).

Bài toán 11: (Hải Dương, 2012 – 2013)

Một tam giác vuông có chu vi là 30 cm, độ dài hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 7 cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác vuông đó.

Giải :

Gọi x (cm) là độ dài cạnh góc vuông ngắn. ĐK: $x > 0$

Suy ra độ dài cạnh góc vuông thứ hai $x + 7$ (cm)

Cạnh huyền của tam giác vuông là $\sqrt{x^2 + (x + 7)^2}$ (cm)

Chu vi tam giác vuông là 30 cm nên ta có phương trình:

$$\sqrt{x^2 + (x + 7)^2} + x + x + 7 = 30$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 14x + 49} = 23 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{23}{2} \\ 2x^2 - 106x + 480 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{23}{2} \\ \begin{cases} x = 48 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Vậy độ dài của các cạnh của tam giác vuông lần lượt là 5 (cm) và 12 (cm).

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ:

Bài toán 1: Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là 200 m. Tính diện tích mảnh đất biết chiều dài gấp năm lần chiều rộng.

Đáp số: Chiều dài: 75 cm.

Chiều rộng: 25 cm.

Bài toán 2: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34 m. Nếu tăng chiều dài thêm 3 m và tăng chiều rộng thêm 2 m thì diện tích tăng thêm 45 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Đáp số: Chiều dài: 12 m.

Chiều rộng: 5 m.

Bài toán 3: Cho tam giác vuông, biết rằng tăng mỗi cạnh góc vuông lên 2 cm thì diện tích tăng lên 17 cm^2 . Nếu giảm lần lượt các cạnh góc vuông một cạnh 3 cm, một cạnh 1 cm thì diện tích giảm đi 11 cm^2 . Tìm các cạnh của tam giác vuông đó.

Đáp số: $5; 10; 5\sqrt{2}$ (cm).

Bài toán 4: Một thửa ruộng hình chữ nhật có chu vi là 250 m. Tính diện tích của thửa ruộng ấy biết rằng khi chiều dài giảm 3 lần và chiều rộng tăng 2 lần thì chu vi không đổi.

Đáp số: 3750 m².

Bài toán 5: Nhà ông Nam có một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 100 m. Ông định bán mảnh vườn đó với giá thị trường là 20 triệu đồng cho một mét vuông. Hãy xác định giá của mảnh vườn biết hai lần chiều dài mảnh vườn bằng ba lần chiều rộng,

Đáp số: 12 tỷ

đồng.

Bài toán 6: Gia đình bà Hoa dự định trồng một số cây cao su trên mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 260 m. Cứ hai mét vuông bà Hoa sẽ trồng được 4 cây cao su. Tính số tiền mua cây mà bà Hoa cần phải trả biết giá mỗi cây là 25 nghìn đồng và chiều dài mảnh vườn hơn chiều rộng là 30 m.

Đáp số: 200 triệu đồng.

Bài toán 7: Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 240 m². Nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4 m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính kích thước của mảnh đất.

Đáp số: Chiều dài 20 m.

Chiều rộng 12 m.

Bài toán 8: Từ một miếng tôn hình chữ nhật người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh bằng 5 dm để làm thành một cái thùng hình hộp chữ nhật không nắp có dung tích 1500 dm³. Hãy tính kích thước của miếng tôn lúc đầu, biết rằng chiều dài của nó gấp đôi chiều rộng.

Đáp số: Chiều dài 40 dm.

Chiều rộng 20 dm.

Bài toán 9: Cạnh bé nhất của tam giác vuông có độ dài là 6 cm. cạnh huyền có độ dài lớn cạnh góc vuông còn lại 2 cm. Tính độ dài cạnh huyền của tam giác vuông đó.

Đáp số: 10 cm.

Bài toán 10: Một hình chữ nhật có chu vi 300 cm. Nếu tăng chiều dài thêm 5 cm và giảm chiều rộng 5 cm thì diện tích tăng 275 cm². Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

Đáp số: Chiều dài 100 cm.

Chiều rộng 50 cm.

Bài toán 11: Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{1}{4}$ cạnh đáy tương ứng. Nếu tăng chiều cao 2 m và giảm cạnh đáy 2 m thì diện tích tam giác tăng thêm 2,5 m². Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác lúc ban đầu.

Đáp số: Chiều cao 1,5 m.

Cạnh đáy 6 m.

Bài toán 12: Một miếng đất hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Nếu tăng chiều rộng thêm 4 m và tăng chiều dài thêm 2 m thì diện tích miếng đất tăng thêm 92 m². Tính chu vi miếng đất.

Đáp số: Chu vi 48 m.

Bài toán 13: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 450 m. Nếu giảm chiều dài đi $\frac{1}{5}$ lần chiều dài cũ, tăng chiều rộng lên $\frac{1}{4}$ lần chiều rộng cũ thì chu vi hình chữ nhật không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

Đáp số: Chiều dài 125 m.

Chiều rộng 100 m.

Bài toán 14: Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 20 m, diện tích 3500 m². Tính độ dài hàng rào xung quanh vườn biết rằng người ta chừa ra 1 m để làm cổng ra vào.

Đáp số: 239 m

Bài toán 15: Một sân trường hình chữ nhật có diện tích 720 m². Nếu tăng chiều dài 6 m, giảm chiều rộng 4 m thì diện tích không đổi. Tính các kích thước của sân trường.

Đáp số: Chiều dài 30 m.

Chiều rộng 24 m.

Bài toán 16: Một tấm sắt hình chữ nhật có chu vi 96 cm. Người ta cắt ra ở mỗi góc một hình vuông cạnh 4 cm rồi gấp lên thành một hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích 768 cm^3 . Tính kích thước của tấm sắt.

Đáp số: Chiều dài 32 cm.
Chiều rộng 16cm.

Bài toán 17: (Vĩnh Phúc, 2004-2005) Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 5 m, diện tích bằng 300 m^2 , Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn đó.

Đáp số: Chiều dài 20 m.
Chiều rộng 15m.

Bài toán 18: (Vĩnh Phúc, 1999-2000) Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy. Nếu tăng chiều cao thêm 3 dm, giảm cạnh đáy đi 2 dm thì diện tích của nó tăng thêm 12 dm^2 . Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

Đáp số: Chiều cao 15 dm.
Cạnh đáy 20 dm.

Bài toán 19: (TPHCM, 2005-2006) Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng $\frac{7}{4}$ lần chiều rộng và có diện tích bằng 1792 m^2 . Tính chu vi của khu vườn ấy.

Đáp số: 175 m.

Bài toán 20: Một thửa ruộng hình chữ nhật có chu vi 250 m. Tính diện tích của thửa ruộng biết rằng nếu chiều dài giảm 3 lần và chiều rộng tăng 2 lần thì chu vi thửa ruộng vẫn không đổi.

LOẠI 2: BÀI TOÁN NĂNG SUẤT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT – PHƯƠNG PHÁP GIẢI

I. Các bước giải:

Bước 1: Lập phương trình hoặc hệ phương trình:

- Chọn ẩn, đơn vị cho ẩn, điều kiện thích hợp cho ẩn.
- Biểu đạt các đại lượng khác theo ẩn (chú ý thống nhất đơn vị).
- Dựa vào các dữ kiện, điều kiện của bài toán để lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 2: Giải phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 3: Nhận định, so sánh kết quả bài toán, tìm kết quả thích hợp, trả lời, nêu rõ đơn vị của đáp số.

II. Các công thức liên quan:

$$N = \frac{1}{t}; t = \frac{1}{N}; CV = N.t;$$

Trong đó :

N : là năng suất làm việc

t : là thời gian hoàn thành công việc.

1: là công việc cần thực hiện.

CV : số công việc thực hiện trong thời gian t

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. (Hà Nội, 2012 – 2013) Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi thời gian người thứ nhất hoàn thành một mình xong công việc là x (giờ), ĐK $x > \frac{12}{5}$

Thì thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là $x+2$ (giờ)

Mỗi giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (cv), người thứ hai làm được $\frac{1}{x+2}$ (cv)

Vì cả hai người cùng làm xong công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ nên mỗi giờ cả hai đội làm được $\frac{5}{12}$ (cv)

Do đó ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -\frac{6}{5} \end{cases}$

Vậy người thứ nhất làm xong công việc trong 4 giờ, người thứ hai làm xong công việc trong $4+2=6$ giờ.

Ví dụ 2. Một tổ sản xuất theo kế hoạch, mỗi ngày phải sản xuất 50 sản phẩm. Nhưng khi thực hiện tổ đã sản xuất được 57 sản phẩm một ngày. Do đó đã hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ sản xuất bao nhiêu sản phẩm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (sản phẩm) là số sản phẩm mà tổ sản xuất theo kế hoạch ($x \in N^*$)

Số ngày mà tổ sản xuất theo kế hoạch là: $\frac{x}{50}$ (ngày)

Số sản phẩm thực tế tổ sản xuất được là: $x+13$ (sản phẩm)

Số ngày mà tổ sản xuất theo thực tế là $\frac{x+13}{57}$.

Ta có phương trình: $\frac{x}{50} - \frac{x+13}{57} = 1$

$\Leftrightarrow 57x - 50(x+13) = 2850 \Leftrightarrow x = 500$ (nhận)

Vậy theo kế hoạch tổ sản xuất 500 sản phẩm.

Ví dụ 3. Trong tháng đầu hai tổ công nhân sản xuất được 800 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai, tổ I sản xuất vượt mức 15%, tổ II sản xuất vượt mức 20%. Do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ công nhân sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x là số chi tiết máy của tổ I sản xuất trong tháng đầu ($0 < x < 800, x \in N$)

Số chi tiết máy của tổ II sản xuất trong tháng đầu là: $800 - x$ (chi tiết).

Số chi tiết máy tổ I vượt mức ở tháng thứ hai là: $\frac{15}{100}x$ (chi tiết)

Số chi tiết máy tổ II vượt mức ở tháng thứ hai là: $\frac{20}{100}(800 - x)$ (chi tiết)

Số chi tiết máy cả hai tổ vượt mức trong tháng thứ hai là: $945 - 800 = 145$ (chi tiết)

Ta có phương trình: $\frac{15}{100}x + \frac{20}{100}(800 - x) = 145$

$15x - 20x + 16000 = 14500 \Leftrightarrow x = 300$ (nhận)

Vậy trong tháng đầu tổ I sản xuất được 300 chi tiết máy; Tổ II sản xuất được $800 - 300 = 500$ chi tiết máy.

Ví dụ 4. Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 1 giờ 20 phút đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì được $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đổi $1h20' = 80'$

Gọi x (phút) là thời gian vòi I chảy một mình đầy bể ($x > 80$)

Gọi y (phút) là thời gian vòi II chảy một mình đầy bể ($y > 80$)

Trong 1 phút vòi I chảy được: $\frac{1}{x}$ (bể)

Trong 1 phút vòi II chảy được: $\frac{1}{y}$ (bể)

Trong 1 phút cả hai vòi chảy được: $\frac{1}{80}$ (bể)

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{80}$ (1)

Trong 10 phút vòi I chảy được: $\frac{10}{x}$ (bể)

Trong 12 phút vòi II chảy được: $\frac{12}{y}$ (bể)

Ta có phương trình: $\frac{10}{x} + \frac{12}{y} = \frac{2}{15}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{80} \\ \frac{10}{x} + \frac{12}{y} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$, ta được $\begin{cases} u + v = \frac{1}{80} \\ 10u + 12v = \frac{2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{120} \\ v = \frac{1}{240} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 120 \\ y = 240 \end{cases}$

Vậy vòi I chảy một mình thì sau 120 phút đầy bể.

Vòi II chảy một mình thì sau 240 phút đầy bể.

Ví dụ 5. Một đội công nhân hoàn thành một công việc với mức 420 ngày công thợ. Hãy tính số công nhân của đội, biết rằng nếu đội tăng thêm 5 người thì số ngày hoàn thành công việc được giảm đi 7 ngày.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi số công nhân của đội là x (người) ($x \in \mathbb{N}^*$)

Sau khi tăng 5 người thì đội có $x + 5$ (người).

Số ngày hoàn thành công việc với x người là $\frac{420}{x}$ (ngày)

Số ngày hoàn thành công việc sau khi tăng 5 người là: $\frac{420}{x+5}$ (ngày)

Ta có phương trình: $\frac{420}{x} - \frac{420}{x+5} = 7$

$$\Leftrightarrow 420(x+5) - 420x = 7x(x+5) \Leftrightarrow 7x^2 + 35x - 2100 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \text{ (nhận) hoặc } x = -20 \text{ (loại).}$$

Vậy số công nhân của đội là 15 người.

Ví dụ 6. Một đội xe cần chở 12 tấn hàng. Khi làm việc, do 2 xe cần điều đi nơi khác. Nên mỗi xe phải chở thêm 16 tấn hàng. Hỏi lúc đầu đội có bao nhiêu xe?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi số xe của đội lúc đầu là x (xe) ($x \in \mathbb{N}, x > 12$)

Theo dự định mỗi xe phải chở $\frac{120}{x}$ (tấn hàng)

Số xe trên thực tế là: $x - 2$ (xe).

Thực tế mỗi xe phải chở: $\frac{120}{x-2}$ (tấn hàng)

Ta có phương trình: $\frac{120}{x-2} - \frac{120}{x} = 16$

$$\Leftrightarrow 120x - 120(x-2) = 16x(x-2) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ (nhận) hoặc } x = -3 \text{ (loại)}.$$

Vậy lúc đầu đội có 5 xe.

Ví dụ 7. Một xí nghiệp đóng giấy dự định kế hoạch hoàn thành trong 26 ngày. Do cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày sản xuất vượt mức 6000 đôi giấy, do đó hoàn thành kế hoạch trong vòng 24 ngày và vượt kế hoạch 104000 đôi. Hỏi số giấy đóng theo kế hoạch là bao nhiêu?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (đôi) là số giấy theo kế hoạch sản xuất trong một ngày ($x > 0, x \in N$)

Số giấy thực tế sản xuất trong một ngày là: $x + 6000$ (đôi)

Tổng số giấy xí nghiệp sản xuất theo kế hoạch là: $26x$ (đôi)

Tổng số giấy xí nghiệp sản xuất thực tế là: $24(x + 6000)$ (đôi)

Ta có phương trình: $24(x + 6000) - 26x = 104000 \Leftrightarrow x = 20000$ (đôi).

Vậy số đôi giấy theo kế hoạch sản xuất là: $26 \cdot 2000 = 52000$ đôi.

Ví dụ 8. Hai người thợ Thành và Long cùng làm chung một công việc theo dự định 6 ngày thì xong. Làm chung được 4 ngày thì Thành bị bệnh phải nghỉ, Long phải làm một mình trong 5 ngày nữa thì mới xong. Hỏi nếu làm một mình cả công việc thì mỗi người mất bao nhiêu ngày?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (ngày) là thời gian Thành hoàn thành công việc một mình ($x > 6$)

Gọi y (ngày) là thời gian Long hoàn thành công việc một mình ($y > 6$)

Trong 1 ngày Thành làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

Trong 1 ngày Long làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Trong 1 ngày cả hai người làm được $\frac{1}{6}$ (công việc)

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ (1)

Trong 4 ngày Thành làm được $\frac{4}{x}$ (công việc)

Trong 9 ngày Long làm được $\frac{9}{y}$ (công việc)

Ta có phương trình: $\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 1 \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$ ta được: $\begin{cases} u + v = \frac{1}{6} \\ 4u + 9v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{10} \\ v = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (nhận)}$

Vậy Thành làm một mình trong 10 ngày.

Long làm một mình trong 15 ngày.

Ví dụ 9. Dân số Hà Nội sau hai năm tăng từ 2000000 lên 2048288 người. Hỏi hàng năm trung bình dân số tăng bao nhiêu phần trăm?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi số phần trăm dân số tăng mỗi năm của Hà Nội là $x(\%) (x > 0)$

Số dân năm đầu của Hà Nội tăng lên là $2000000.x\% = 20000x$ (người)

Sau năm đầu dân số của Hà Nội là: $2000000 + 20000x = 2000(x + 100)$ (người)

Năm thứ hai dân số Hà Nội tăng là: $20000(x + 100).x\% = 200x(x + 100)$

Ta có phương trình: $20000(x + 100) + 200x(x + 100) = 2048288$

$\Leftrightarrow 200x^2 + 40000x - 48288 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$ (nhận) hoặc $x = -\frac{1006}{5}$ (loại).

Vậy mỗi năm dân số Hà Nội tăng trung bình là 1,2%

Ví dụ 10. Hợp tác xã Long Khánh có hai kho gạo, kho thứ nhất chứa nhiều hơn kho thứ hai 100 tấn, nếu chuyển từ kho thứ nhất sang kho thứ hai 60 tấn thì số thóc ở kho thứ nhất bằng $\frac{12}{13}$ số gạo ở kho thứ hai. Tính số gạo ở mỗi kho lúc đầu?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (tấn) là số gạo ở kho thứ nhất ($x > 100$).

Số gạo ở kho thứ hai là $x - 100$ (tấn)

Số gạo kho thứ nhất sau khi chuyển 60 tấn là: $x - 60$ (tấn)

Số gạo kho thứ hai sau khi nhận 60 tấn là: $x - 40$ (tấn)

Ta có phương trình: $x - 60 = \frac{12}{13}(x - 40)$

$\Leftrightarrow 13x - 780 = 12x - 480 \Leftrightarrow x = 300$

Vậy lúc đầu kho thứ nhất có 300 tấn gạo, kho thứ hai có 200 tấn gạo.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Bài toán 1. (Lâm Đồng, 2011 – 2012). Hai đội công nhân cùng đào một con mương . Nếu họ cùng làm thì trong 8 giờ xong việc. Nếu họ làm riêng thì đội A hoàn thành công việc nhanh hơn đội B 12 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu giờ mới xong việc.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (giờ) là số giờ đội A làm riêng để xong công việc ($x > 0$)

Nên $x+12$ là số giờ đội B làm riêng để xong công việc.

Mỗi giờ đội A làm $\frac{1}{x}$ (công việc). mỗi giờ đội B làm $\frac{1}{x+12}$ (công việc).

Mỗi giờ cả hai đội làm $\frac{1}{8}$ (công việc).

Ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -8 \end{cases}$

Vậy số giờ đội A làm riêng để xong công việc là 12 giờ. Số giờ đội B làm riêng để xong công việc là 24 giờ.

Bài toán 2. (Chuyên Hà Giang, 2015 – 2016). Hai người thợ làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình trong mấy giờ thì xong?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi số giờ để mỗi người làm một mình hết công việc đó lần lượt là $x(h)$ và $y(h)$, ($x, y > 0$).

Mỗi giờ, người thứ nhất và người thứ hai làm được: $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ (công việc).

Hai người làm hết công việc đó trong 16 giờ nên: $16\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$ (1)

Người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì được $\frac{1}{4}$ công việc nên

$$3 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có hệ:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ 3 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{48} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 48 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để mỗi người làm một mình xong công việc là 24 giờ và 48 giờ.

Bài toán 3. (Phổ Thông Năng Khiếu, 2015 – 2016). Bạn An dự định trong khoảng thời gian từ ngày 1/3 đến ngày 30/4 sẽ giải mỗi ngày 3 bài toán. Thực hiện đúng kế hoạch được một thời gian, vào khoảng cuối tháng 3 (tháng 3 có 31 ngày) thì An bị bệnh, phải nghỉ giải toán nhiều ngày liên tiếp. Khi hồi phục, trong tuần đầu An chỉ giải được 16 bài; sau đó, An cố gắng giải 4 bài mỗi ngày và đến 30/4 thì An cũng hoàn thành kế hoạch đã định. Hỏi An phải nghỉ giải toán bao nhiêu ngày?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Từ 1/3 đến 30/4 có 61 ngày.

Số bài toán theo kế hoạch mà An phải giải là: $61 \cdot 3 = 183$ (bài).

Gọi số ngày An giải toán theo đúng kế hoạch là x (ngày).

Trong thời gian này, An giải $3x$ (bài)

Số ngày An nghỉ giải toán là y (ngày). $(x, y \in \mathbb{N}^*, 1 \leq x \leq 30), (y \text{ bé nhất})$.

Khi đó số ngày An giải mỗi ngày 4 bài là: $61 - 7 - x - y = 54 - x - y$ (ngày)

Trong thời gian này, An giải được: $4(54 - x - y)$ (bài)

Vậy tổng số bài An đã giải là: $3x + 16 + 4(54 - x - y)$ (bài)

Theo bài ra ta có phương trình: $3x + 16 + 4(54 - x - y) = 183$

$$\Leftrightarrow x + 4y = 49$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{49 - x}{4}$$

$$\text{Vì } 1 \leq x \leq 30 \Rightarrow y = \frac{49 - x}{4} \geq \frac{49 - 30}{4} = \frac{19}{4}$$

y là số nguyên, bé nhất $\Rightarrow y = 5$

Vậy An phải nghỉ ít nhất 5 ngày.

Bài toán 4. (Chuyên Trần Hưng Đạo, 2015 – 2016). Một bác nông dân đem trứng ra chợ bán. Tổng số trứng bán ra được tính như sau:

Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

...

Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. nhưng thật thú vị, số trứng bán được trong mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng bán được là bao nhiêu và bán hết trong bao nhiêu ngày?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x là số trứng bán được ($x \in \mathbb{N}^*$) thì:

Số trứng bán được trong ngày thứ nhất là: $8 + \frac{x - 8}{8}$

Số trứng bán được trong ngày thứ hai là : $16 + \frac{x - (16 + 8 + \frac{x-8}{8})}{8}$

Theo đề toán ta có phương trình: $8 + \frac{x-8}{8} = 16 + \frac{x - (16 + 8 + \frac{x-8}{8})}{8}$

$$\Leftrightarrow 64 + x - 8 = 128 + x - 24 - \frac{x-8}{8} \Leftrightarrow x = 392.$$

Vậy tổng số trứng bán được là 392 trứng

Số trứng bán được trong mỗi ngày là $8 + \frac{x-8}{8} = 56$

Số ngày là $\frac{392}{56} = 7$ ngày.

Bài toán 5. (Quảng Ninh, 2015– 2016). Theo kế hoạch, một người công nhân phải hoàn thành 84 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do cải tiến kĩ thuật, nên thực tế mỗi giờ người đó đã làm được nhiều hơn 2 sản phẩm so với số sản phẩm phải làm trong một giờ theo kế hoạch. Vì vậy, người đó hoàn thành công việc sớm hơn dự định 1 giờ. Hỏi theo kế hoạch, mỗi giờ người công nhân phải làm bao nhiêu sản phẩm ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x là số sản phẩm mỗi giờ mà người công nhân phải hoàn thành theo kế hoạch.

$$(x \in N^*, x < 84)$$

Số sản phẩm mỗi giờ mà người công nhân phải hoàn thành theo thực tế: $x + 2$

Thời gian mà công nhân hoàn thành theo kế hoạch: $\frac{84}{x}(h)$

Thời gian mà công nhân hoàn thành theo thực tế: $\frac{84}{x+2}(h)$

Người công nhân đó hoàn thành công việc sớm hơn định $1h$ nên ta có phương trình:

$$\frac{84}{x} - \frac{84}{x+2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 84(x+2) - 84x = x(x+2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 126 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 12 (\text{nhận}) \text{ hoặc } x = -14 (\text{loại})$$

Vậy theo kế hoạch mỗi giờ người công nhân phải làm 12 sản phẩm.

Bài toán 6. (Bình Định, 2014– 2015). Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 12 giờ, nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 7 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì thời gian để mỗi đội hoàn thành công việc là bao nhiêu?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (giờ) là thời gian đội I làm xong công việc ($x > 12$)

Thời gian đội thứ II làm xong công việc là: $x - 7$ (giờ)

Trong một giờ đội I làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Trong một giờ đội II làm được $\frac{1}{x-7}$ (công việc)

Trong một giờ cả hai đội làm được $\frac{1}{12}$ (công việc)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-7} = \frac{1}{12}$

$$\Leftrightarrow 12(x-7) + 12x = x(x-7) \Leftrightarrow x^2 - 31x + 84 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 28 \text{ (nhận) hoặc } x = 3 \text{ (loại)}.$$

Vậy thời gian đội I làm xong công việc là 28 giờ, thời gian đội II làm xong công việc là: $28 - 7 = 21$ (giờ).

Bài toán 7. (Đồng Nai, 2013 – 2014). Một xưởng có kế hoạch in xong 6000 quyển sách giống nhau trong một thời gian quy định, biết số quyển sách in được trong một ngày là bằng nhau. Để hoàn thành sớm kế hoạch, mỗi ngày xưởng đã in nhiều hơn 300 quyển sách so với số quyển sách phải in trong kế hoạch, nên xưởng in xong 6000 quyển sách nói trên sớm hơn kế hoạch 1 ngày. Tính số quyển sách xưởng in được trong 1 ngày theo kế hoạch.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (quyển sách) là số quyển sách xưởng in được trong mỗi ngày theo kế hoạch, ($x \in N^*$)

Số ngày in theo kế hoạch: $\frac{6000}{x}$ (ngày)

Số quyển sách xưởng in được thực tế trong mỗi ngày: $x + 300$ (quyển sách)

Số ngày in thực tế: $\frac{6000}{x+300}$ (ngày)

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{6000}{x} - \frac{6000}{x+300} = 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 300x - 1800000 = 0 \Leftrightarrow x = 1200 \text{ (nhận) hoặc } x = -15000 \text{ (loại)}.$$

Vậy số quyển sách xưởng in được trong mỗi ngày theo kế hoạch là: 1200 (quyển sách).

Bài toán 8. (Hà Nội, 2014 – 2015). Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (sp) là sản phẩm xưởng sản xuất trong 1 ngày theo kế hoạch ($x > 0$)

Số ngày theo kế hoạch là: $\frac{1100}{x}$ (ngày)

Số ngày thực tế là $\frac{1100}{x+5}$ (ngày)

Ta có phương trình: $\frac{1100}{x} - \frac{1100}{x+5} = 2$

$$\Leftrightarrow 1100(x+5) - 1100x = 2x(x+5) \Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 5500 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 50 \text{ (nhận) hoặc } x = -55 \text{ (loại)}.$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất là 55 sản phẩm.

Bài toán 9. (Hải Phòng, 2015 – 2016). Một lâm trường dự định trồng 75 ha rừng trong một số tuần (mỗi tuần trồng được diện tích bằng nhau). Thực tế, mỗi tuần lâm trường trồng vượt mức 5 ha so với dự định nên cuối cùng đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm hơn dự định một tuần. Hỏi mỗi tuần lâm trường dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi diện tích rừng mà mỗi tuần lâm trường dự định trồng là x (ha) (Điều kiện: $x > 0$)

Theo dự định, thời gian trồng hết 75 ha rừng là: $\frac{75}{x}$ (tuần)

Vì mỗi tuần lâm trường trồng vượt mức 5 ha so với dự định nên thực tế mỗi tuần lâm trường trồng được: $x + 5$ (ha)

Do đó thời gian thực tế lâm trường trồng hết 80 ha rừng là: $\frac{80}{x+5}$ (tuần)

Vì thực tế, lâm trường trồng xong sớm so với dự định là 1 tuần nên ta có phương trình:

$$\frac{75}{x} - \frac{80}{x+5} = 1$$

$$\Leftrightarrow 75(x+5) - 80x = x(x+5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 375 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \text{ (nhận) hoặc } x = -25 \text{ (loại)}$$

Vậy mỗi tuần lâm trường dự định trồng 15 ha rừng.

Bài toán 10. (Kiên Giang, 2015 – 2016). Một tổ công nhân phải may xong 420 bộ đồng phục trong khoảng thời gian nhất định. Nếu thêm 3 công nhân vào tổ thì mỗi người sẽ may ít hơn lúc ban đầu là 7 bộ đồng phục. Tính số công nhân có trong tổ lúc đầu.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi số công nhân của tổ lúc đầu là x (công nhân) ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số công nhân của tổ lúc sau là: $x + 3$ (công nhân).

Số bộ đồng phục mỗi người phải may lúc đầu là: $\frac{420}{x}$ (bộ).

Số bộ đồng phục mỗi người phải may lúc sau là $\frac{420}{x+3}$ (bộ).

Ta có phương trình: $\frac{420}{x} = \frac{420}{x+3} + 7$.

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0 \Leftrightarrow x = 12$ (nhận) hoặc $x = -15$ (loại).

Vậy số công nhân của tổ lúc đầu là 12 người.

Bài toán 11. (Quảng Ngãi, 2013 – 2014). Một tổ công nhân dự định làm xong 240 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện, nhờ cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 10 sản phẩm so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi khi thực hiện, mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi số sản phẩm tổ đã thực hiện trong mỗi ngày là x (sản phẩm). ĐK: $(x > 10, x \in \mathbb{Z})$

Số sản phẩm tổ dự định làm trong mỗi ngày là: $x - 10$ (sản phẩm).

Thời gian tổ hoàn thành công việc trong thực tế là: $\frac{240}{x}$ (ngày)

Thời gian tổ hoàn thành công việc theo dự định là: $\frac{240}{x-10}$ (ngày)

Vì tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày, ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{240}{x-10} - \frac{240}{x} &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{120}{x-10} - \frac{120}{x} &= 1 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 1200 = 0 \Leftrightarrow x = 40 \text{ (nhận) hoặc } x = -30 \text{ (loại).} \end{aligned}$$

Vậy số sản phẩm tổ đã thực hiện trong mỗi ngày là 40 sản phẩm.

Bài toán 12. (Quảng Ngãi, 2015 – 2016). Hai đội công nhân cùng làm chung trong 4 giờ thì xong một con đường. Nếu mỗi đội làm riêng để xong con đường thì thời gian đội thứ nhất ít hơn đội thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội làm xong con đường trong thời gian bao lâu?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi đội thứ nhất làm một mình xong công việc trong x (giờ)

Đội thứ hai làm một mình xong công việc y (giờ) $(x, y > 4)$

Ta có phương trình: $y - x = 6$ (1)

1 giờ đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

1 giờ đội thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

1 giờ cả hai đội làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (công việc)

Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} y - x = 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 6 \\ 4x + 4y = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ 4x + 4x + 24 = x^2 + 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ x^2 - 2x - 24 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases} \text{(nhận)} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \text{(loại)}.$$

Vậy đội thứ nhất làm trong 6 giờ, đội thứ hai làm trong 12 giờ.

Bài toán 13. (Quảng Ninh, 2013 – 2014). Hai người thợ cùng làm một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì họ làm được một phần tư công việc. Hỏi mỗi người thợ làm một mình thì trong bao nhiêu giờ mới xong công việc đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi thời gian người thợ thứ nhất làm một mình xong việc là x (giờ) ($x > 16$)

Thời gian người thợ thứ hai làm một mình xong việc là: y (giờ) ($y > 16$)

Trong 1 giờ người thợ thứ nhất làm được: $\frac{1}{x}$ (công việc).

Trong 3 giờ người thợ thứ nhất làm được $\frac{3}{x}$ (công việc)

Trong 1 giờ người thợ thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

Trong 6 giờ người thợ thứ hai làm được $\frac{6}{y}$ (công việc).

Hai người cùng làm trong 16 giờ thì xong việc, Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$ (1)

Người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì được một phần tư công việc, ta có phương trình: $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$, ta được: $\begin{cases} 3u + 6v = \frac{1}{4} \\ u + v = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{24} \\ v = \frac{1}{48} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 48 \end{cases} \text{ (nhận)}$

Vậy thời gian người thợ thứ nhất làm một mình xong việc là 24 (giờ).

Thời gian người thợ thứ hai làm một mình xong việc là 48 (giờ).

Bài toán 14. (Tây Ninh, 2014 – 2015). Lớp 9A dự định trồng 420 cây xanh. Đến ngày thực hiện có 7 bạn không tham gia do được triệu tập học bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi của nhà trường nên mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 3 cây mới đảm bảo kế hoạch đặt ra. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi số học sinh lớp 9A là x (học sinh), ($x \in \mathbb{N}, x > 7$)

Theo kế hoạch, mỗi em phải trồng $\frac{420}{x}$ (cây)

Trên thực tế số học sinh còn lại là: $x - 7$ (học sinh).

Trên thực tế, mỗi em phải trồng $\frac{420}{x-7}$ (cây)

Do lượng cây mỗi em trồng trên thực tế hơn 3 cây so với kế hoạch nên ta có phương trình :

$$\frac{420}{x-7} - \frac{420}{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow 420x - 420(x-7) = 3x(x-7) \Leftrightarrow x^2 - 7x - 980 = 0 \Leftrightarrow x = 35 \text{ (nhận) hoặc } x = -28 \text{ (loại)}.$$

Vậy lớp 9A có 35 học sinh.

Bài toán 15. (Tây Ninh, 2015 – 2016). Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 30 tấn hàng. Khi sắp khởi hành thì được bổ sung thêm 2 xe nên mỗi xe chở ít hơn 0,5 tấn hàng. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc xe?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi số xe trong đoàn xe lúc đầu là x (chiếc), ($x \in \mathbb{N}^*$).

Số xe trong đoàn xe khi bổ sung thêm là: $x + 2$ (chiếc).

Lúc đầu, lượng hàng mỗi xe phải chở là $\frac{30}{x}$ (tấn)

Lúc thêm 2 xe, lượng hàng mỗi xe phải chở là $\frac{30}{x+2}$ (tấn)

Do bổ sung thêm 2 xe thì mỗi xe chở ít hơn $0,5 = \frac{1}{2}$ tấn hàng nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x} - \frac{30}{x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 60(x+2) - 60x = x(x+2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 120 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (nhận) hoặc } x = -12 \text{ (loại)}.$$

Vậy lúc đầu đoàn xe có 10 chiếc.

Bài toán 16. (Hải Dương, 2016 – 2017). Một đội xe cần chở 36 tấn hàng. Trước khi làm việc, đội được bổ sung thêm 3 chiếc nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn hàng so với dự định. Hỏi lúc đầu đội có bao nhiêu xe, biết khối lượng hàng chở trên mỗi xe như nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (chiếc) là số xe ban đầu của đội (ĐK: $x \in \mathbb{N}^*$)

Số xe lúc sau: $x+3$ (chiếc)

Số tấn hàng được chở trên mỗi xe lúc đầu: $\frac{36}{x}$ (tấn)

Số tấn hàng được chở trên mỗi xe lúc sau: $\frac{36}{x+3}$ (tấn)

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{36}{x} - \frac{36}{x+3} = 1$.

$\Leftrightarrow 36(x+3) - 36x = x(x+3) \Leftrightarrow x^2 + 3x - 108 = 0 \Leftrightarrow x = 9$ (nhận) hoặc $x = -12$ (loại)

Vậy lúc đầu đội có 9 chiếc xe.

Bài toán 17. (Bà Rịa – Vũng Tàu, 2014 – 2015). Hưởng ứng phong trào “*Vì biển đảo Trường Sa*” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở thêm hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (chiếc) là số tàu dự định của đội ($x \in \mathbb{N}^*, x < 14$)

Số tàu tham gia vận chuyển là: $x+1$ (chiếc)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định: $\frac{280}{x}$ (tấn)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo thực tế: $\frac{280}{x+1}$ (tấn)

Theo đề bài ta có pt: $\frac{280}{x} - \frac{280}{x+1} = 2$

$\Leftrightarrow 280(x+1) - 286x = 2x(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 140 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (nhận) hoặc $x = -14$ (loại).

Vậy đội tàu lúc đầu là có 10 chiếc

Bài toán 18. (Cần Thơ, 2015 – 2016). Nhân ngày quốc tế thiếu nhi, 13 HS (nam và nữ) tham gia gói 80 phần quà cho các em thiếu nhi. Biết tổng số quà mà HS nam gói được bằng tổng số quà mà HS nữ gói được. Số quà mỗi bạn nam gói nhiều hơn số quà mà mỗi bạn nữ gói là 3 phần. Tính số HS nam và nữ.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (HS) là số HS nam, ($0 < x < 13, x \in \mathbb{N}$)

Số HS nữ là: $13 - x$ (HS)

Số phần quà mà mỗi HS Nam gói được: $\frac{40}{x}$ (phần)

Số phần quà mà mỗi HS nữ gói được: $\frac{40}{13 - x}$ (phần)

Theo bài toán ta có phương trình: $\frac{40}{x} - \frac{40}{13 - x} = 3$

$\Leftrightarrow 40(13 - x) - 40x = 3x(13 - x) \Leftrightarrow 3x^2 - 119x + 520 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (nhận) hoặc $x = \frac{104}{3}$ (loại).

Vậy số HS nam là 5, số HS nữ là 8.

Bài toán 19. (Huế, 2015 – 2016). Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 120 tấn hàng. Hôm làm việc do có 5 xe được điều đi làm nhiệm vụ khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 0,8 tấn hàng so với dự định ban đầu. Biết khối lượng hàng mỗi xe chuyên chở như nhau, hỏi đoàn xe ban đầu có bao nhiêu chiếc?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi số chiếc xe ban đầu của đoàn xe vận tải là x (chiếc) ($x > 5, x \in N$)

Số chiếc xe thực tế của đoàn xe vận tải là: $x - 5$ (chiếc)

Khối lượng hàng mỗi xe phải chở ban đầu là $\frac{120}{x}$ tấn

Khối lượng hàng mỗi xe phải chở thực tế là $\frac{120}{x - 5}$ tấn

Theo giả thiết ta có phương trình: $\frac{120}{x - 5} - \frac{4}{5} = \frac{120}{x}$

$\Leftrightarrow 600x - 4x(x - 5) = 600(x - 5) \Leftrightarrow 4x^2 - 20x - 3000 = 0 \Leftrightarrow x = 30$ (nhận) hoặc $x = -25$ (loại).

Vậy số chiếc xe ban đầu của đoàn xe vận tải là 30 chiếc.

Bài toán 20. (Đồng Nai, 2015 – 2016). Hai công nhân cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ 20 phút và người thứ hai làm trong 10 giờ thì xong công việc. Tính thời gian mỗi công nhân khi làm riêng xong công việc.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (h) là thời gian người thứ nhất làm 1 mình xong công việc ($x > 6$).

Trong 1 h người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (cv)

Gọi y (h) là thời gian người thứ hai làm 1 mình xong công việc ($y > 6$).

Trong 1h người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (cv)

Trong 3 giờ 20 phút người thứ nhất làm được $\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{x}$ (cv)

Trong 10h người thứ hai làm được $10 \cdot \frac{1}{y}$ (cv)

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{x} + 10 \cdot \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$, ta được:
$$\begin{cases} u + v = \frac{1}{6} \\ \frac{10}{3}u + 10v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{10} \\ v = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy người thứ nhất làm một mình trong 10 giờ thì xong công việc.

Người thứ hai làm một mình trong 15 giờ thì xong công việc.

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ:

Bài toán 1. Một xí nghiệp sản xuất được 120 sản phẩm loại *I* và 120 sản phẩm loại *II* trong thời gian 7 giờ. Mỗi giờ sản xuất được số sản phẩm loại *I* ít hơn số sản phẩm loại *II* là 10 sản phẩm. Hỏi mỗi giờ xí nghiệp sản xuất được bao nhiêu sản phẩm mỗi loại.

Đáp số: 30, 40 sản phẩm

Bài toán 2. Một đoàn xe chở 480 tấn hàng. Khi sắp khởi hành có thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 8 tấn. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc, biết rằng các xe chở khối lượng hàng bằng nhau.

Đáp số: 12 chiếc

Bài toán 3. Một đội xe nhận vận chuyển 96 tấn hàng. Nhưng khi sắp khởi hành có thêm 3 xe nữa, nên mỗi xe chở ít hơn lúc đầu 1,6 tấn hàng. Hỏi lúc đầu đội xe có bao nhiêu chiếc.

Đáp số: 12 (chiếc).

Bài toán 4. Tháng giêng hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy; tháng hai do cải tiến kỹ thuật tổ *I* vượt mức 15% và tổ *II* vượt mức 10% so với tháng giêng, vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng giêng mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Đáp số: 400, 500 chi tiết máy

Bài toán 5. Hai người cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 4 giờ. Nếu mỗi người làm riêng, để hoàn thành công việc thì thời gian người thứ nhất ít hơn thời gian người thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người phải làm trong bao lâu để hoàn thành công việc.

Đáp số : 6 giờ và 12 giờ.

Bài toán 6. Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể chứ không có nước thì sau 1 giờ 30 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất trong 15 phút rồi khóa lại và mở vòi thứ hai chảy

tiếp trong 20 phút thì sẽ được $\frac{1}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì sau bao lâu sẽ đầy bể?

Đáp số: 3 giờ 45 phút và 2 giờ 30 phút

Bài toán 7. Một nhóm thợ đặt kế hoạch sản xuất 3000 sản phẩm. Trong 8 ngày đầu học thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại học đã làm vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Đáp số: 100 sản phẩm

Bài toán 8. Một tổ sản xuất dự định làm 72 sản phẩm trong một thời gian đã quy định, nhưng công ty lại giao thêm 8 sản phẩm. Vì vậy, tổ sản xuất phải làm mỗi giờ thêm 1 sản phẩm, nhưng thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm 12 phút so với dự định. Tính năng suất dự định của tổ sản xuất, biết mỗi giờ tổ sản xuất không làm quá 20 sản phẩm.

Đáp số: 15 sản phẩm.

Bài toán 9. Một đội dự định mỗi ngày cày 40 ha. Khi thực hiện mỗi ngày cày được 52 ha, vì vậy đội không những cày xong trước thời hạn 2 ngày mà còn cày thêm được 4 ha nữa. Tính diện tích thửa ruộng mà đội phải cày theo kế hoạch.

Đáp số: 360 ha.

Bài toán 10. Hải và Sơn cùng làm một công việc trong 7 giờ 20 phút thì xong. Nếu Hải làm trong 5 giờ và Sơn làm trong 6 giờ thì cả hai làm được $\frac{3}{4}$ khối lượng công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong?

Đáp số: $\frac{44}{3}$ giờ và $\frac{44}{3}$ giờ

Bài toán 11. Một máy bơm muốn bơm đầy nước vào một bể chứa nước trong một thời gian quy định thì mỗi giờ phải bơm được $10m^3$. Sau khi bơm được $\frac{1}{3}$ dung dịch bể chứa, người công nhân vận hành cho máy bơm công suất hơn mỗi giờ bơm được $15m^3$. Do đó bể được bơm đầy trước 48 phút so với thời gian quy định. Tính dung tích của bể chứa.

Đáp số: $36m^3$

Bài toán 12. Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ II được điều đi làm việc khác, tổ I đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ xong công việc.

Đáp số: 15 giờ và 10 giờ

Bài toán 13. Hai lớp 9A và 9B cùng tham gia lao động vệ sinh sân trường thì công việc hoàn thành sau 1 giờ 20 phút. Nếu mỗi lớp chia nhau làm nửa công việc thì thời gian hoàn thành là 3 giờ. Hỏi nếu mỗi lớp làm một mình thì phải mất bao nhiêu thời gian?

Đáp số: 4 giờ và 2 giờ

Bài toán 14. Ba ô tô chở 100 tấn hàng tổng cộng hết 40 chuyến. Số chuyến thứ nhất chở gấp rưỡi số chuyến xe thứ hai. Mỗi chuyến, xe thứ nhất chở 2 tấn, xe thứ hai chở 2,5 tấn, xe thứ ba chở 3 tấn. Hỏi mỗi xe chở bao nhiêu chuyến?

Đáp số: 15 chuyến, 10 chuyến, 15 chuyến.

Bài toán 15. Người ta dự kiến trồng 300 cây trong một thời gian đã quy định. Do điều kiện thuận lợi nên mỗi ngày trồng được nhiều hơn 5 cây so với dự kiến, vì vậy đã trồng xong 300 cây trước 3 ngày. Hỏi dự kiến ban đầu mỗi ngày trồng bao nhiêu cây?

Đáp số: 20 cây.

Bài toán 16. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao cho mỗi tổ theo kế hoạch là bao nhiêu?

Đáp số: 200 và 400 sản phẩm

Bài toán 17. Nếu mở cả hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút bể đầy nước. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ I làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ II là 2 giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu đầy bể?

Đáp số: 3 giờ 50 phút và 5 giờ 50 phút

Bài toán 18. Nhà trường tổ chức cho 180 học sinh khối 9 đi tham quan di tích lịch sử. Người ta dự tính: nếu dùng loại xe lớn chuyên chở một lượt hết số học sinh thì phải điều ít hơn nếu dùng loại xe nhỏ là hai chiếc. Biết rằng mỗi xe lớn có nhiều hơn mỗi xe nhỏ là 15 chỗ ngồi. Tính số xe lớn phải dùng nếu được huy động.

Đáp số: 6 chiếc

Bài toán 19. Hai máy cày có công suất khác nhau cùng làm việc đã cày được $\frac{1}{6}$ cánh đồng trong 15 giờ. Nếu máy thứ nhất cày 12 giờ, máy thứ hai cày trong 20 giờ thì cả hai máy cày được 20% cánh đồng. Hỏi nếu mỗi máy làm việc riêng thì sẽ cày xong cánh đồng trong bao lâu?

Đáp số: 360 giờ và 120 giờ

Bài toán 20. Hai đội thủy lợi cùng đào một con mương. Nếu mỗi đội làm một mình cả con mương thì thời gian tổng cộng hai đội phải làm là 25 giờ. Nếu hai đội cùng làm

thì công việc hoàn thành trong 6 giờ. Hỏi mỗi đội làm một mình xong cả con mương trong bao lâu?

Đáp số: 15 giờ và 10 giờ

LOẠI 3: BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI CHUYỂN ĐỘNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT – PHƯƠNG PHÁP GIẢI

I. Các bước giải:

Bước 1: Lập phương trình hoặc hệ phương trình :

- Chọn ẩn, đơn vị cho ẩn, điều kiện thích hợp cho ẩn.
- Biểu đạt các đại lượng khác theo ẩn (chú ý thống nhất đơn vị).
- Dựa vào các dữ kiện, điều kiện của bài toán để lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 2: Giải phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 3: Nhận định, so sánh kết quả bài toán tìm kết quả thích hợp, trả lời, nêu rõ đơn vị của đáp số.

II. Các công thức liên quan:

Quãng đường = Vận tốc . Thời gian

$$V_{xuôi} = V_{thực} + V_{nước}$$

$$V_{ngược} = V_{thực} - V_{nước}$$

$$V_{xuôi} - V_{ngược} = 2V_{nước}$$

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: (Thừa Thiên Huế, 2014 – 2015) Một ô tô đi trên quãng đường dài 400 km . Khi đi được 180 km, ô tô tăng vận tốc thêm 10km/h đi trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của ô tô. Biết thời gian đi hết quãng đường là 8 giờ. (Giả thiết ô tô có vận tốc không đổi trên mỗi đoạn đường)

Giải:

Theo bài ra ta có:



$$AC = 180 \text{ km}, CB = 400 - 180 = 220 \text{ km}.$$

Gọi vận tốc ban đầu của ô tô là x (km/h) ($x > 0$).

Vận tốc của ô tô trên quãng đường CB là $x + 10$

Thời gian ô tô đi từ A đến C là: $\frac{180}{x}$ (h)

Thời gian ô tô đi từ C đến B là: $\frac{220}{x + 10}$ (h)

Theo giả thiết ta có phương trình:

$$\frac{180}{x} + \frac{220}{x + 10} = 8$$

$$\Leftrightarrow 180(x + 10) + 220x = 8x(x + 10)$$

$$\Leftrightarrow 180x + 1800 + 220x = 8x^2 + 80x$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 320x - 1800 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 40x - 225 = 0$$

Giải phương trình này ta được $x_1 = 45$ (thỏa mãn), $x_2 = -5$ (loại)

Vậy vận tốc ban đầu của ô tô là 45 km/h

Ví dụ 2: (Nghệ An, 2014 – 2015) Một ô tô và một xe máy ở hai địa điểm A và B cách nhau 180km, khởi hành cùng một lúc đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Biết vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy 10 km/h. Tính vận tốc của mỗi xe

Giải:

Gọi vận tốc của ô tô là x (km/h) x (km/h)

vận tốc của xe máy là y (km/h) (Đk: $x > y > 0$, $x > 10$)

Ta có phương trình : $x - y = 10$ (1)

Sau 2 giờ ô tô đi được quãng đường là $2x$ (km)

Sau 2 giờ xe máy đi được quãng đường là: $2y$ (km)

thì chúng gặp nhau, ta có phương trình: $2x + 2y = 180$ hay $x + y = 90$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x-y=10 \\ x+y=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=50 \\ y=40 \end{cases} \text{(TM)}$$

Vậy vận tốc của ô tô là 50 km/h và vận tốc của xe máy là: 40 km/h

Ví dụ 3: (Hải Phòng, 2014 – 2015) Một ca nô chạy xuôi dòng sông từ A đến B rồi chạy ngược dòng từ B về A hết tất cả 7 giờ 30 phút. Tính vận tốc thực của ca nô biết quãng đường sông AB dài 54 km và vận tốc dòng nước là 3 km/h

Giải:

$$\text{Đổi } 7 \text{ giờ } 30 \text{ phút} = \frac{15}{2} \text{ (h)}$$

Gọi vận tốc thực của ca nô là x (km/h), $x > 3$

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng sông từ A đến B là: $x + 3$ (km/h)

Vận tốc của ca nô khi ngược dòng sông từ B về A là: $x - 3$ (km/h)

Thời gian của ca nô khi xuôi dòng sông từ A đến B là: $\frac{54}{x+3}$ (h)

Thời gian của ca nô khi ngược dòng sông từ B về A là: $\frac{54}{x-3}$ (h)

Do ca nô chạy xuôi dòng sông từ A đến B rồi chạy ngược dòng từ B về A hết tất cả 7 giờ 30 phút

nên ta có phương trình: $\frac{54}{x+3} + \frac{54}{x-3} = \frac{15}{2}$

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{54}{x+3} + \frac{54}{x-3} &= \frac{15}{2} \\ \Leftrightarrow 54\left(\frac{x-3+x+3}{x^2-9}\right) &= \frac{15}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-9} &= \frac{5}{36} \\ \Leftrightarrow 72x &= 5x^2 - 45 \\ \Leftrightarrow 5x^2 - 72x - 45 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ x = -\frac{3}{5} \end{cases}\end{aligned}$$

Ta thấy chỉ có $x = 15$ thỏa mãn điều kiện $x > 3$.

Vậy vận tốc thực của ca nô là 15 (km/h)

Ví dụ 4: Một ô tô tải đi từ A đến B với vận tốc 40km/h. Sau 2 giờ 30 phút thì một ô tô taxi cũng xuất phát đi từ A đến B với vận tốc 60 km/h và đến B cùng lúc với xe ô tô tải. Tính độ dài quãng đường AB.

Gọi độ dài quãng đường AB là x (km); $x > 0$

Thời gian xe tải đi từ A đến B là $\frac{x}{40}$ h

Thời gian xe Taxi đi từ A đến B là : $\frac{x}{60}$ h

Do xe tải xuất phát trước 2h30 phút = $\frac{5}{2}$ nên ta có pt

$$\frac{x}{40} - \frac{x}{60} = \frac{5}{2}$$

Giải phương trình tìm được $x = 300$

Vậy độ dài quãng đường AB là 300 km

Ví dụ 5: Xe máy thứ nhất đi trên quãng đường từ Hà Nội về Thái Bình hết 3 giờ 20 phút. Xe máy thứ hai đi hết 3 giờ 40 phút. Mỗi giờ xe máy thứ nhất đi nhanh hơn xe máy thứ hai 3 km. Tính vận tốc của mỗi xe máy và quãng đường từ Hà Nội đến Thái Bình?

Giải:

Gọi vận tốc x thứ nhất là x (km/h), đk: $x > 3$;

Vận tốc của xe thứ hai là $x - 3$ (km/h).

Trong 3 giờ 20 phút ($=\frac{10}{3}$ giờ) xe máy thứ nhất đi được $\frac{10}{3}x$ (km)

Trong 3 giờ 40 phút ($=\frac{11}{3}$ giờ) xe máy thứ nhất đi được $\frac{11}{3}(x-3)$ (km)

Đó là quãng đường từ Hà nội đến Thái Bình nên ta có phương trình

$$\frac{10}{3}x = \frac{11}{3}(x-3) \Leftrightarrow x = 33 \text{ (thoả mãn điều kiện bài toán).}$$

Vận tốc của xe máy thứ nhất là 33 km/h. Vận tốc của xe máy thứ hai là 30 km/h.

Quãng đường từ Hà Nội đến Thái Bình là 110 km.

Ví dụ 6: (Tiền Giang, 2015 – 2016) Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30 km. Một canô đi xuôi dòng từ A đến B, rồi đi ngược dòng trở về A ngay. Thời gian kể từ lúc đi cho đến lúc về là 5 giờ 20 phút. Tính vận tốc của dòng nước, biết vận tốc thực của canô là 12 km/h

Giải:

Gọi x (km/h) là vận tốc dòng nước (ĐK: $0 < x < 12$)

Vận tốc của cano lúc đi là: $12 + x$ (km/h)

Vận tốc của cano lúc về là: $12 - x$ (km/h)

Tổng thời gian cả đi lẫn về là: $5\text{h}20' = \frac{16}{3}$ (h)

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$\frac{30}{12+x} + \frac{30}{12-x} = \frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \cdot 30(12-x)}{3(12-x)(12+x)} + \frac{3 \cdot 30(12+x)}{3(12-x)(12+x)} = \frac{16(12-x)(12+x)}{3(12-x)(12+x)}$$

$$\Leftrightarrow 90(12-x) + 90(12+x) = 16(144 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow -16x^2 + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$x = -3 \text{ (loại) hoặc } x = 3 \text{ (nhận)}$$

Vậy vận tốc của dòng nước là 3 (km/h)

Ví dụ 7: (Hà Nội, 2013 – 2014) Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B

Giải:

Đặt x (km/h) là vận tốc đi từ A đến B, vậy vận tốc đi từ B đến A là $x+9$ (km/h)

Do giả thiết ta có:

$$\frac{90}{x} + \frac{90}{x+9} = 5 - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{x} + \frac{10}{x+9} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x(x+9) = 20(2x+9)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 31x - 180 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 36 \text{ (Do } x > 0)$$

Vậy vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B là 36 km/h

Ví dụ 8: Đoạn đường AB dài 180 km. Cùng một lúc xe máy đi từ A và ô tô đi từ B xe máy gặp ô tô tại C cách A 80 km. Nếu xe máy khởi hành sau 54 phút thì chúng gặp nhau tại D cách A là 60 km. Tính vận tốc của ô tô và xe máy?

Giải

Gọi vận tốc của ô tô là x (km/h), đk: $x > 0$.

Gọi vận tốc của xe máy là y (km/h), đk: $y > 0$.

Thời gian xe máy đi để gặp ô tô là $\frac{80}{y}$ (giờ)

Quãng đường ô tô đi là 100 km nên thời gian ô tô đi là $\frac{100}{x}$ (giờ)

ta có phương trình $\frac{100}{x} = \frac{80}{y}$ (1)

Quãng đường xe máy đi là 60 km nên thời gian xe máy đi là $\frac{60}{y}$ (giờ)

Quãng đường ô tô đi là 120 km nên thời gian ô tô đi là $\frac{120}{x}$ (giờ)

Vì ô tô đi trước xe máy 54 phút = $\frac{9}{10}$ nên ta có phương trình

$\frac{120}{x} - \frac{60}{y} = \frac{9}{10}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{100}{x} = \frac{80}{y} \\ \frac{120}{x} - \frac{60}{y} = \frac{9}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{100}{x} - \frac{80}{y} = 0 \\ \frac{40}{x} - \frac{20}{y} = \frac{3}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{100}{x} - \frac{80}{y} = 0 \\ \frac{160}{x} - \frac{80}{y} = \frac{12}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{60}{x} = \frac{12}{10} \\ \frac{100}{x} - \frac{80}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases} (TM)$$

Vậy vận tốc của ô tô là 50 km/h. Vận tốc của xe máy là 40 km/h.

Ví dụ 9: (Hưng Yên, 2015 – 2016) Một tàu hỏa đi từ A đến B với quãng đường 40 km. Khi đi đến B, tàu dừng lại 20 phút rồi đi tiếp 30 km nữa để đến C với vận tốc lớn hơn vận tốc khi đi từ A đến B là 5 km/h. Tính vận tốc của tàu hỏa khi đi trên quãng đường AB, biết thời gian kể từ khi tàu hỏa xuất phát từ A đến khi tới C hết tất cả 2 giờ

Giải:

Gọi vận tốc tàu hỏa khi đi trên quãng đường AB là x (km/h; $x > 0$)

Thời gian tàu hỏa đi hết quãng đường AB là $\frac{40}{x}$ (giờ)

Thời gian tàu hỏa đi hết quãng đường BC là $\frac{30}{x+5}$ (giờ)

Theo bài ta có phương trình $\frac{40}{x} + \frac{30}{x+5} + \frac{1}{3} = 2$

Biến đổi pt ta được $x^2 - 37x - 120 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=40(\text{TM}) \\ x=-3(\text{L}) \end{cases}$$

Vận tốc của tàu hỏa khi đi trên quãng đường AB là 40 km/h.

Ví dụ 10: Trên quãng đường AB, một xe máy đi từ A đến B cùng lúc đó một ô tô đi từ B đến A, sau 4 giờ 2 xe gặp nhau và tiếp tục đi thì xe ô tô đến A sớm hơn xe máy đến B là 6 giờ. Tính thời gian mỗi xe đi hết quãng đường AB.

Gọi x (giờ) là thời gian ô tô đi hết AB ($x > 4$)

Thời gian xe máy đi hết AB là $x + 6$ (giờ)

Trong 1 giờ ô tô đi được $\frac{1}{x}$ quãng đường

Trong 1 giờ xe máy đi được $\frac{1}{x+6}$ quãng đường

Trong 1 giờ 2 xe đi được $\frac{1}{4}$ quãng đường

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$$

Giải phương trình được $x = 6$

Vậy thời gian ô tô đi hết AB là 6 giờ, xe máy đi hết AB là $x + 6 = 12$ giờ

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Bài tập 1: (Nghệ An, 2012 – 2013) Quãng đường AB dài 156 km. Một người đi xe máy từ A, một người đi xe đạp từ B. Hai xe xuất phát cùng một lúc và sau 3 giờ gặp nhau. Biết rằng vận tốc của người đi xe máy nhanh hơn vận tốc của người đi xe đạp là 28 km/h. Tính vận tốc của mỗi xe?

Giải:

Gọi vận tốc của xe đạp là x (km/h), điều kiện $x > 0$

Thì vận tốc của xe máy là $x + 28$ (km/h)

Trong 3 giờ:

+ Xe đạp đi được quãng đường $3x$ (km),

+ Xe máy đi được quãng đường $3(x + 28)$ (km), theo bài ra ta có phương trình:

$$3x + 3(x + 28) = 156$$

Giải tìm $x = 12$ (TMĐK)

Trả lời: Vận tốc của xe đạp là 12 km/h và vận tốc của xe máy là $12 + 28 = 40$ (km/h)

Bài tập 2: (Trà Vinh, 2015 – 2016) Một ca nô chạy xuôi dòng với quãng đường 42km, rồi sau đó ngược dòng trở lại 20 km hết tổng cộng 5h. Biết vận tốc của dòng nước chảy là 2 km/h. Tính vận tốc của ca nô lúc dòng nước yên lặng

Giải:

Gọi vận tốc của ca nô lúc dòng nước yên lặng là x (km/h) ($x > 0$)

Vì vận tốc nước là 2 km/h nên vận tốc xuôi dòng và ngược dòng lần lượt là $x + 2$ và $x - 2$ (km/h)

Suy ra $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Thời gian để ca nô đi hết 42 km xuôi dòng là $\frac{42}{x+2}$ (h)

Thời gian để ca nô đi hết 20 km ngược dòng là $\frac{20}{x-2}$ (h)

Tổng thời gian là 5h do đó

$$\frac{42}{x+2} + \frac{20}{x-2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{42(x-2) + 20(x+2)}{(x-2)(x+2)} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{62x - 44}{x^2 - 4} = 5$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 62x + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \text{ (TM)} \\ x = 0,4 \text{ (L)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là 12 km/h

Bài tập 3: (Ninh Bình, 2014 – 2015) Một xe máy đi từ A đến B. Sau đó 1 giờ, một ô tô cũng đi từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 10 km/h. Biết rằng ô tô và xe máy đến B cùng một lúc. Tính vận tốc của mỗi xe, với giả thiết quãng đường AB dài 200km

Giải:

Gọi vận tốc của xe máy và ô tô lần lượt là x và y (km/h) ($x, y > 0$)

Vận tốc ô tô lớn hơn xe máy 10km/h $\Rightarrow y - x = 10$ (1)

Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{AB}{x} = \frac{200}{x}$ (h)

Thời gian ô tô đi từ A đến B là $\frac{AB}{y} = \frac{200}{y}$ (h)

Vì ô tô xuất phát sau xe máy 1h mà 2 xe đến nơi cùng lúc, do đó thời gian đi của ô tô ít hơn xe máy là 1h.

$$\Rightarrow \frac{200}{x} - \frac{200}{y} = 1 \text{ (2)}$$

Từ (1) suy ra $y = x + 10$

Thay vào (2) ta được:

$$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+10} = 1(2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{200(x+10) - 200x}{x(x+10)} = 1 \quad \Leftrightarrow x = 40 \text{ (thỏa mãn) hoặc } x = -50 \text{ (loại)} \Rightarrow y = x + 10 = 50.$$

$$\Leftrightarrow 200x + 2000 - 200x = x^2 + 10x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 2000 = 0$$

Vậy vận tốc của xe máy và ô tô lần lượt là 40km/h và 50km/h .

Bài tập 4: (Tiền Giang, 2014 – 2015) Trên quãng đường AB, một xe máy đi từ A đến B cùng lúc đó một xe ô tô đi từ B đến A, sau 4 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi thì xe ô tô đến A sớm hơn xe máy đến B là 6 giờ. Tính thời gian mỗi xe đi hết quãng đường AB

Giải:

Gọi $x(h)$ là thời gian xe máy đi hết quãng đường AB ($x > 4$)

$y(h)$ là thời gian ô tô đi hết quãng đường AB ($y > 4$)

Trong 1 giờ xe máy đi được: $\frac{1}{x}$ (quãng đường)

Trong 1 giờ xe ô tô đi được: $\frac{1}{y}$ (quãng đường)

Trong 1 giờ hai xe đi được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ (1)

Mà thời gian xe ô tô về đến A sớm hơn xe máy về đến B là 6 giờ nên: $x - y = 6$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{4} \\ y = x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 14x + 24 = 0 \\ y = x - 6 \end{cases} \quad (DK : x \neq 6)$$

Giải hệ phương trình trên được: $x = 12$ (thỏa mãn); hoặc $x = 2$ (loại)

Với $x = 12$, tìm được $y = 6$. Do đó, nghiệm của hệ là (12; 6)

Vậy thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là 12 giờ, ô tô đi hết quãng đường AB là 6 giờ

Bài tập 5: (Cần Thơ, 2012–2013) Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian quy định. Sau khi đi được 1 giờ thì ô tô bị chặn bởi xe cứu hỏa 10 phút. Do đó để đến B đúng hạn xe phải tăng vận tốc thêm 6 km/h. Tính vận tốc lúc đầu của ô tô

Giải:

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định: $x > 0$

Thời gian dự định: $\frac{120}{x}$ (h)

Sau 1 h ô tô đi được x km nên quãng đường còn lại $120 - x$ (km)

Vt lúc sau: $x + 6$ (km/h)

$$Pt \quad 1 + \frac{1}{6} + \frac{120 - x}{x + 6} = \frac{120}{x} \Rightarrow x = 48 \text{ (TMDK)}$$

Vậy vận tốc lúc đầu của ô tô là 48km/h

Bài tập 6: (Hà Nội, 2015 – 2016) Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60km, sau đó chạy xuôi dòng 48km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là 2km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ

Giải:

Gọi t_1 là thời gian tàu tuần tra chạy ngược dòng nước.

Gọi t_2 là thời gian tàu tuần tra chạy xuôi dòng nước.

Gọi V là vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên.

Ta có:

$$V - 2 = \frac{60}{t_1}; V + 2 = \frac{48}{t_2}$$

$$\Rightarrow \frac{60}{t_1} + 2 = \frac{48}{t_2} - 2 \Leftrightarrow \frac{60}{t_1} - \frac{48}{t_2} = -4(1)$$

$$t_1 - t_2 = 1(2)$$

$$(1); (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{60}{t_1} - \frac{48}{t_2} = -4 \\ t_1 - t_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{60}{t_1} - \frac{48}{t_2} = -4 \\ t_1 = 1 + t_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{60}{1+t_2} - \frac{48}{t_2} = -4 \Leftrightarrow 4t_2^2 + 16t_2 - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = -6(L) \\ t_2 = 2(TM) \Rightarrow V = 22(\text{km/h}) \end{cases}$$

Bài tập 7: (Hải Dương, 2015 – 2016) Khoảng cách giữa hai tỉnh A và B là 60km. Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc đi từ A đến B với vận tốc bằng nhau. Sau khi đi được 1 giờ thì xe của người thứ nhất bị hỏng nên phải dừng lại sửa xe 20 phút, còn người thứ hai tiếp tục đi với vận tốc ban đầu. Sau khi xe sửa xong, người thứ nhất đi với vận tốc nhanh hơn trước 4km/h nên đã đến B cùng lúc với người thứ hai. Tính vận tốc hai người đi lúc đầu

Giải:

Gọi vận tốc ban đầu của hai người là x (km/h).

Theo đề bài ta có pt:

$$\frac{60-x}{x} = \frac{1}{3} + \frac{60-x}{x+4}$$

Giải và chọn được $x = 20$

Vậy vận tốc hai người đi lúc đầu là 20 km/h

Bài tập 8: (Hải Dương, 2012–2013) Cho quãng đường từ địa điểm A tới địa điểm B dài 90 km. Lúc 6 giờ một xe máy đi từ A để tới B. Lúc 6 giờ 30 phút cùng ngày, một ô tô cũng đi từ A để tới B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h (Hai xe chạy trên cùng một con đường đã cho). Hai xe nói trên đều đến B cùng lúc. Tính vận tốc mỗi xe

Giải:

Xe máy đi trước ô tô thời gian là : 6 giờ 30 phút – 6 giờ = 30 phút = $\frac{1}{2}$ h.

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h) ($x > 0$)

Vì vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h nên vận tốc của ô tô là $x + 15$ (km/h)

Thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là : $\frac{90}{x}$ (h)

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là : $\frac{90}{x+15}$ (h)

Do xe máy đi trước ô tô $\frac{1}{2}$ giờ và hai xe đều tới B cùng một lúc nên ta có phương trình :

$$\frac{90}{x} - \frac{1}{2} = \frac{90}{x+15}$$

$$\Rightarrow 90.2.(x+15) - x(x+15) = 90.2x$$

$$\Leftrightarrow 180x + 2700 - x^2 - 15x = 180x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 15x - 2700 = 0$$

Ta có :

$$\Delta = 15^2 - 4.(-2700) = 11025 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{11025} = 105$$

$$x_1 = \frac{-15-105}{2} = -60 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

$$x_2 = \frac{-15+105}{2} = 45 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy vận tốc của xe máy là 45 (km/h) , vận tốc của ô tô là $45 + 15 = 60$ (km/h)

Bài tập 9: (Tuyên Quang, 2011 – 2012) Một ca nô chạy xuôi dòng từ A đến B rồi chạy ngược dòng từ B đến A hết tất cả 4 giờ. Tính vận tốc ca nô khi nước yên lặng, biết rằng quãng sông AB dài 30 km và vận tốc dòng nước là 4 km/h

Giải:

Gọi vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là x km/h ($x > 4$)

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $x + 4$ (km/h), khi ngược dòng là $x - 4$ (km/h). Thời gian ca nô xuôi dòng từ A đến B là $\frac{30}{x+4}$ giờ, đi ngược dòng

từ B đến A là $\frac{30}{x-4}$ giờ.

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{30}{x+4} + \frac{30}{x-4} = 4$

$$\Leftrightarrow 30(x-4) + 30(x+4) = 4(x+4)(x-4) \Leftrightarrow x^2 - 15x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

hoặc $x = 16$. Nghiệm $x = -1 < 0$ nên bị loại

Vậy vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là 16km/h .

Bài tập 10: (THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành và THPT Kon Tum, 24–25/06/2014) Một bè gỗ được thả trôi trên sông từ cầu Đắk Bla. Sau khi thả bè gỗ trôi được 3 giờ 20 phút, một người chèo thuyền độc mộc cũng xuất phát từ cầu Đắk Bla đuổi theo và đi được 10km thì gặp bè gỗ. Tính vận tốc của bè gỗ biết rằng vận tốc của người chèo thuyền độc mộc lớn hơn vận tốc của bè gỗ là 4km/h

Giải:

$$3\text{giờ } 20\text{ phút} = \frac{10}{3} \text{ giờ}$$

Gọi x là vận tốc của bè gỗ ($x > 0$) (km/h)

vận tốc của người chèo thuyền độc mộc : $x + 4$

Thời gian người chèo thuyền độc mộc đi được khi gặp bè gỗ: $\frac{10}{x+4}$

Thời gian bè gỗ trôi được 10 km: $\frac{10}{x}$

Theo đề bài ta có PT:

$$\frac{10}{x} - \frac{10}{x+4} = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 12 - 3x = x^2 + 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(TM) \\ x = -6(L) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của bè gỗ là 2 km/h

Bài tập 11: (Yên Bái, 16–17) Hàng ngày, bạn An đi học từ nhà đến trường trên quãng đường dài 8km bằng xe máy điện với vận tốc không đổi. Hôm nay, vẫn trên đoạn đường đó, 2km đầu bạn An đi với vận tốc như mọi khi, sau đó vì xe non hơi nên bạn đã dừng lại 1 phút để bơm. Để đến trường đúng giờ như mọi ngày, bạn An phải tăng vận tốc lên thêm 4km/h. Tính vận tốc xe máy điện của bạn An khi tăng tốc. Với vận tốc đó bạn An có vi phạm luật giao thông hay không? Tại sao? Biết rằng đoạn đường bạn An đi là trong khu vực đông dân cư

Giải:

Gọi vận tốc xe máy điện của An bình thường là x (km/h) ($x > 0$)

Vận tốc xe máy điện của An khi tăng tốc là $x + 4$ (km/h)

Thời gian An đi từ nhà đến trường bình thường là $\frac{8}{x}$ (h)

Đổi 1 phút = $\frac{1}{60}$ h. Thời gian An đi từ nhà đến trường ngày hôm nay là $\frac{2}{x} + \frac{1}{60} + \frac{6}{x+4}$ (h)

$$\text{Ta có: } \frac{8}{x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{60} + \frac{6}{x+4} \Leftrightarrow \frac{6}{x} - \frac{6}{x+4} = \frac{1}{60} \Leftrightarrow \frac{24}{x(x+4)} = \frac{1}{60}$$

$$\Leftrightarrow x(x+4) = 1440 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1440 = 0 \Leftrightarrow x = -40 \text{ (loại) hoặc } x = 36 \text{ (tm)}$$

Vậy vận tốc xe máy điện của An khi tăng tốc là $36 + 4 = 40$ (km/h)

Vận tốc này không vi phạm luật giao thông vì trong khu vực đông dân cư, vận tốc tối đa của xe máy điện là 40 km/h

Bài tập 12: (Quảng Ngãi, 2014–2015) Để chuẩn bị cho một chuyến đi đánh bắt cá ở Hoàng Sa, hai ngư dân đảo Lý Sơn cần chuyển một số lương thực, thực phẩm lên tàu. Nếu người thứ nhất chuyển xong một nửa số lương thực, thực phẩm; sau đó người thứ hai chuyển hết số còn lại lên tàu thì thời gian người thứ hai hoàn thành lâu hơn người thứ nhất 3 giờ. Nếu cả hai cùng làm chung thì thời gian chuyển hết số lương thực, thực phẩm lên tàu là $\frac{20}{7}$ giờ. Hỏi nếu làm riêng một mình thì mỗi người chuyển hết số lương thực, thực phẩm đó lên tàu trong thời gian bao lâu?

Giải:

Gọi x (giờ) là thời gian người thứ I một mình làm xong cả công việc.

và y (giờ) là thời gian người thứ II một mình làm xong cả công việc. (Với $x, y > \frac{20}{7}$)

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{20} \\ \frac{y}{2} - \frac{x}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{20} \quad (1) \\ y - x = 6 \quad (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{7}{20}$

Giải phương trình được $x_1 = 4, x_2 = -\frac{30}{7}$

Chọn $x = 4$.

Vậy thời gian một mình làm xong cả công việc của người thứ I là 4 giờ, của người thứ II là 10 giờ.

Bài tập 13: (Tuyên Quang, 2014 – 2015, Đắk Lắk, 2012–2013) Hai ô tô đi từ A đến B dài 200km. Biết vận tốc xe thứ nhất nhanh hơn vận tốc xe thứ hai là 10km/h nên xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe

Giải:

Gọi vận tốc hai xe lần lượt là x (km/h) và y (km/h) ($x, y > 0$)

Xe thứ nhất nhanh hơn xe thứ hai là 10km/h nên $x - y = 10 \Rightarrow x = y + 10$

Thời gian xe thứ nhất và xe thứ hai đi hết quãng đường AB lần lượt là $\frac{200}{x}$ (h); $\frac{200}{y}$ (h)

Vì xe thứ nhất đến sớm hơn xe thứ hai 1h nên $\frac{200}{y} - \frac{200}{x} = 1 (*)$

Thay $x = y + 10$ vào (*) ta được:

$$\frac{200}{y} - \frac{200}{y+10} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{200(y+10)}{y(y+10)} - \frac{200y}{y(y+10)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{200(y+10) - 200y}{y(y+10)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2000}{y(y+10)} = 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 10y - 2000 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+50)(y-40) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -50 \text{ (loại)} \text{ hoặc } y = 40 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow x = 50$$

Vậy vận tốc mỗi xe lần lượt là 50km/h và 40km/h

Bài tập 14: Quãng đường từ Quy Nhơn đến Bồng Sơn dài 100 km. Cùng một lúc, một xe máy khởi hành từ Quy Nhơn đi Bồng Sơn và một xe ô tô khởi hành từ Bồng Sơn đi Quy Nhơn. Sau khi hai xe gặp nhau, xe máy đi 1 giờ 30 phút nữa mới đến Bồng Sơn. Biết vận tốc hai xe không thay đổi trên suốt quãng đường đi và vận tốc của xe máy kém vận tốc xe ô tô là 20 km/h. Tính vận tốc mỗi xe.

Giải:

Đổi 1h30' = 1,5h



Đặt địa điểm :

- Quy Nhơn là A
- Hai xe gặp nhau là C
- Bồng Sơn là B

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h) . ĐK : $x > 0$.

Suy ra :

Vận tốc của ô tô là $x + 20$ (km/h) .

Quãng đường BC là : $1,5x$ (km)

Quãng đường AC là : $100 - 1,5x$ (km)

Thời gian xe máy đi từ A đến C là : $\frac{100 - 1,5x}{x}$ (h)

Thời gian ô tô đi từ B đến C là : $\frac{1,5x}{x + 20}$ (h)

Vì hai xe khởi hành cùng lúc, nên ta có phương trình : $\frac{100 - 1,5x}{x} = \frac{1,5x}{x + 20}$

Giải pt :

$$\frac{100 - 1,5x}{x} = \frac{1,5x}{x + 20}$$

Vậy vận tốc của xe máy là 40 km/h .

Vận tốc của ô tô là $40 + 20 = 60$ (km/h) .

Cách 2 : Ta có: $2\text{h}30' = \frac{3}{2}\text{h}$

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe máy ($x > 0$) . Vận tốc xe ô tô là: $x + 20$ (km/h)

Thời gian xe máy đi từ BS đến QN là : $\frac{100}{x}$ (h) .

Thời gian ô tô đi từ QN đến BS là $\frac{100}{x + 20}$ (h)

Vậy thời gian hai xe đi từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau là: $\frac{100}{x + (x + 20)}$ (h) .

Ta lập được pt: $\frac{100}{2x + 20} + \frac{3}{2} = \frac{100}{x}$

Vận tốc xe máy là: 40 km/h . Vận tốc ô tô là: $40 + 20 = 60$ (km/h) .

Bài tập 15: Quãng đường AB dài 90 km, có hai ô tô khởi hành cùng một lúc. Ô tô thứ nhất đi từ A đến B, ô tô thứ hai đi từ B đến A. Sau 1 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi. Xe ô tô thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Giải:

Gọi x là vận tốc ô tô thứ nhất ($0 < x < 90$)

Vận tốc ô tô thứ hai là $90 - x$

Thời gian ô tô thứ nhất đi từ A đến B $\frac{90}{x}$

Thời gian ô tô thứ hai đi từ B đến A $\frac{90}{90-x}$

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{90}{x} = \frac{90}{90-x} + \frac{27}{60}$

Giải phương trình nhận nghiệm $x = 40$

Vận tốc xe thứ nhất là 40 km/h ; xe thứ hai là 50 km/h

Bài tập 16: (Hải Dương, 2015 – 2016) Khoảng cách giữa hai tỉnh A và B là 60 km. Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc đi từ A đến B với vận tốc bằng nhau. Sau khi đi được 1 giờ thì xe của người thứ nhất bị hỏng nên phải dừng lại sửa xe 20 phút, còn người thứ hai tiếp tục đi với vận tốc ban đầu. Sau khi sửa xe xong, người thứ nhất đi với vận tốc nhanh hơn trước 4 km/h nên đã đến B cùng lúc với người thứ hai. Tính vận tốc hai người đi lúc đầu

Giải:

Gọi vận tốc hai người đi lúc đầu là x km/h ($x > 0$)

Thời gian đi từ A đến B của người thứ hai là $\frac{60}{x}$ (h)

Quãng đường người thứ nhất đi được trong 1 giờ đầu là x (km)

$\Rightarrow$ Quãng đường còn lại là $60 - x$ (km)

$\Rightarrow$ Thời gian người thứ nhất đi quãng đường còn lại là $\frac{60-x}{x+4}$ (h)

$20' = \frac{1}{3}$ (h)

Theo bài ra ta có:

$$\frac{60}{x} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{60-x}{x+4}$$

$$\Leftrightarrow 60.3(x+4) = 4.x(x+4) + 3.x.(60-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 16x - 720 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -36 \end{cases}$$

Do $x > 0$ nên $x = 20$. Vậy vận tốc hai người đi lúc đầu là 20 km/h

Bài tập 17: Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 108 km . Cùng lúc đó, một ô tô đi từ B đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc xe đạp 18 km/h . Sau khi hai xe gặp nhau, xe đạp phải mất 4h nữa mới đến B. Tính vận tốc mới xe?

Giải:



Gọi x là vận tốc xe đạp. Điều kiện $x > 0$

Vận tốc xe máy là $x + 18$

Gọi C là điểm 2 xe gặp nhau

Thời gian xe đạp đi CB là $4h$.

Suy ra quãng đường CB là $4x$

Nên quãng đường AC là $108 - 4x$

Thời gian xe đạp đi quãng đường AC là $\frac{108-4x}{x}$

Thời gian ô tô đi quãng đường BC là $\frac{4x}{x+18}$

Ta có thời gian xe đạp đi quãng đường AC bằng Thời gian ô tô đi quãng đường BC nên ta có phương trình

$$\frac{108-4x}{x} = \frac{4x}{x+18}$$

Giải tìm được $x = 18$

Vậy vận tốc xe đạp là 18 km/h , xe ô tô là 26 km/h

Bài tập 18: (Khánh Hòa, 2011 – 2012) Quãng đường từ A đến B dài 50km .Một người dự định đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi.Khi đi được 2 giờ,người ấy dừng lại 30 phút để nghỉ.Muốn đến B đúng thời gian đã định,người đó phải tăng vận tốc thêm 2 km/h trên quãng đường còn lại.Tính vận tốc ban đầu của người đi xe đạp

Giải:

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định; $x > 0$

Thời gian dự định : $\frac{50}{x}$ (h)

Quãng đường đi được sau 2h : $2x$ (km)

Quãng đường còn lại : $50 - 2x$ (km)

Vận tốc đi trên quãng đường còn lại : $x + 2$ (km/h)

Thời gian đi quãng đường còn lại : $\frac{50-2x}{x+2}$ (h)

Theo đề bài ta có PT: $2 + \frac{1}{2} + \frac{50-2x}{x+2} = \frac{50}{x}$

Giải ra ta được : $x = 10$ (thỏa ĐK bài toán)

Vậy Vận tốc dự định : 10 km/h

Bài tập 19: (Quảng Ngãi, 2012–2013) Hai xe ô tô cùng đi từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh, xe thứ hai đến sớm hơn xe thứ nhất là 1 giờ. Lúc trở về xe thứ nhất tăng vận tốc thêm 5 km mỗi giờ, xe thứ hai vẫn giữ nguyên vận tốc nhưng dừng lại nghỉ ở một điểm trên đường hết 40 phút, sau đó về đến cảng Dung Quất cùng lúc với xe thứ nhất. Tìm vận tốc ban đầu của mỗi xe, biết chiều dài quãng đường từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh là 120 km và khi đi hay về hai xe đều xuất phát cùng một lúc

Giải:

Gọi vận tốc ban đầu của xe thứ nhất là x (km/h), xe thứ hai là y (km/h). ĐK: $x > 0; y > 0$.

Thời gian xe thứ nhất đi từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh là $\frac{120}{x}$ (h).

Thời gian xe thứ hai đi từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh là $\frac{120}{y}$ (h).

Vì xe thứ hai đến sớm hơn xe thứ nhất là 1 giờ nên ta có phương trình: $\frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 1$ (1)

Vận tốc lúc về của xe thứ nhất là $x + 5$ (km/h).

Thời gian xe thứ nhất về từ khu du lịch Sa Huỳnh đến cảng Dung Quất $\frac{120}{x+5}$ (h).

Thời gian xe thứ hai về từ khu du lịch Sa Huỳnh đến cảng Dung Quất $\frac{120}{y}$ (h).

Vì xe thứ hai dừng lại nghỉ hết 40ph = $\frac{2}{3}$ h, sau đó về đến cảng Dung Quất cùng lúc với xe thứ nhất nên ta có phương trình: $\frac{120}{x+5} - \frac{120}{y} = \frac{2}{3}$ (2).

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hpt: } \begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 1 \\ \frac{120}{x+5} - \frac{120}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Giải hpt:

$$\begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 1 \\ \frac{120}{x+5} - \frac{120}{y} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{120}{x} - \frac{120}{x+5} = \frac{1}{3} \Rightarrow 360(x+5) - 360x = x(x+5)$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 1800 = 0$$

$$\Delta = 25 + 4 \cdot 1800 = 7225 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 85.$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt: } x_1 = \frac{-5+85}{2} = 40 \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

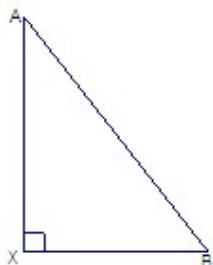
$$x_2 = \frac{-5-85}{2} = -45 \text{ (không thỏa mãn ĐK)}$$

$$\text{Thay } x = 40 \text{ vào pt (1) ta được: } \frac{120}{40} - \frac{120}{y} = 1 \Rightarrow \frac{120}{y} = 2 \Rightarrow y = 60 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy vận tốc ban đầu của xe thứ nhất là 40 km/h, xe thứ hai là 60 km/h

Bài tập 20: (Bình Định, 2015 – 2016) Trên một vùng biển được xem như bằng phẳng và không có chướng ngại vật. Vào lúc 6 giờ có một tàu cá đi thẳng qua tọa độ X theo hướng Từ Nam đến Bắc với vận tốc không đổi. Đến 7 giờ một tàu du lịch cũng đi thẳng qua tọa độ X theo hướng từ Đông sang Tây với vận tốc lớn hơn vận tốc tàu cá 12 km/h. Đến 8 giờ khoảng cách giữa hai tàu là 60 km. Tính vận tốc của mỗi tàu

Giải:



- Gọi vận tốc của tàu cá là: x (km/h), $x > 0$
- Vận tốc của tàu du lịch là: $x + 12$ (km/h)
- Đến 8 giờ thì hai tàu cách nhau khoảng $AB = 60$ km. Lúc đó, thời gian tàu cá đã đi là:
 $8 - 6 = 2$ (giờ)
- Thời gian tàu du lịch đã đi là: $8 - 7 = 1$ (giờ)
- Giả sử tàu cá đến điểm A, tàu du lịch đến điểm B
- Tàu cá đã đi đoạn $XA = 2x$ (km)
- Tàu du lịch đã đi đoạn $XB = x + 12$ (km)
- Vì $XA \perp XB$ (do hai phương Bắc – Nam và Đông – Tây vuông góc nhau)
- Nên theo định lý Pytago, ta có: $XA^2 + XB^2 = AB^2$
 $\Leftrightarrow (2x)^2 + (x+12)^2 = 60^2 \Leftrightarrow 5x^2 + 24x - 3456 = 0$
 $\Leftrightarrow x_1 = -28,8$ (loại) $x_2 = 24$ (nhận)

Vậy vận tốc của tàu cá và tàu du lịch lần lượt là: 24 km/h và 36 km/h

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ:

1) Một người dự định đi ô tô từ A đến B cách nhau 30km với vận tốc đã định. Sau khi đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường do sự cố người đó phải dừng lại mất 15 phút để sửa chữa, do đó người ấy phải tăng vận tốc thêm 10km/h trên quãng đường còn lại, tuy nhiên người ấy vẫn đến B chậm hơn dự định 10 phút. Tính vận tốc dự định ban đầu của xe ô tô.

Đáp số: 30 km/h

2) Hai địa điểm A và B cách nhau 30 km. Cùng lúc, một người đi xe máy khởi hành từ A, một người đi xe đạp khởi hành từ B. Nếu đi ngược chiều thì sau 40 phút họ gặp nhau. Nếu đi cùng chiều theo hướng từ A đến B thì sau 2 giờ họ gặp nhau tại điểm C (B ở giữa A và C). Tính vận tốc mỗi xe

Đáp số: Vận tốc xe máy 30km/h ; xe đạp 15km / h

3) Một ca nô xuôi một khúc sông dài 50km, rồi ngược khúc sông ấy 32km thì hết 4 giờ 30 phút. Tính vận tốc của dòng nước, biết vận tốc của ca nô là 18km / h

Đáp số: 2 km / h

4) Hai bến sông A và B cách nhau 40 km. Cùng một lúc với ca nô đi xuôi từ A có một chiếc bè trôi từ A với vận tốc 3km / h. Sau khi đến B ca nô trở về A ngay và gặp bè khi đã trôi được 8km. Tính vận tốc riêng của ca nô.

Đáp số: Vận tốc thực của ca nô là: 27 km/h

5) Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km , cùng lúc đó cũng từ A về B một bè nửa trôi với vận tốc là 4 km/h . Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè nửa tại địa điểm C cách A là 8 km . Tính vận tốc thực của cano?

Đáp số: 20 km/h

6) Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30 km . Một cano đi xuôi dòng từ A đến B rồi ngược dòng về A ngay. Thời gian đi từ lúc đi đến về là $5\text{ giờ } 20\text{ phút}$. Tính vận tốc của dòng nước, biết vận tốc thực của cano là 12 km/h

Đáp số: 3 km/h

7) Hai tỉnh A và B cách nhau 60 km . Có một xe đạp đi từ A đến B. Khi xe đạp bắt đầu khởi hành thì có một xe gắn máy cách A 40 km đi đến A rồi trở về B ngay. Tìm vận tốc của mỗi xe, biết xe gắn máy về B trước xe đạp 40 phút và vận tốc xe gắn máy hơn vận tốc xe đạp là 15 km/h

Đáp số: 15 km/h

8) Một người đi xe đạp từ A đến B đường dài 78 km . Sau đó 1 giờ , người thứ hai đi xe ô tô từ B đến A. Hai người gặp nhau tại C cách B là 36 km . Tính vận tốc của mỗi xe, biết vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe đạp là 4 km/h

Đáp số: Vận tốc xe đạp là 14 km/h , ô tô là 18 km/h

9) Một ô tô đi quãng đường dài 150 km với thời gian đã định. Sau khi đi được nửa quãng đường ô tô dừng lại 10 phút , do đó để đến B đúng hạn xe phải tăng vận tốc thêm 5 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc dự định của ô tô.

Đáp số: vận tốc dự định là: 45 km/h

10) Hai thành phố A và B cách nhau 120 km . Lúc 7 giờ sáng , một ô tô khởi hành từ A đi đến B. Sau khi đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường thì xe dừng lại nghỉ 20 phút rồi lại tiếp tục đi, nhưng do đường xấu nên vận tốc chậm hơn trước 8 km/h và đến B lúc 10 giờ . Hỏi ô tô dừng lại nghỉ lúc mấy giờ?

Đáp số: vận tốc lúc đầu là 48 km/h ; thời gian ô tô đã đi là $1\text{ h } 40'$

11) Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 33 km với vận tốc định trước. Khi từ B về A, người đó đi bằng đường khác dài hơn đường trước 29 km nhưng với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3 km/h . Tính vận tốc lúc đi, biết thời gian về nhiều hơn thời gian đi là $1\text{ giờ } 30\text{ phút}$.

Đáp số: vận tốc người đi xe máy là: 9 km/h ; hoặc $\frac{22}{3}\text{ km/h}$

12) Một ô tô khởi hành từ A để đến B cách nhau 240 km . Sau $1\text{ h } 240\text{ km}$ giờ, một ô tô thứ hai cũng khởi hành từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc ô tô thứ nhất là 10 km/h , nên đã đuổi kịp ô tô thứ nhất ở chính giữa quãng đường AB. Tính vận tốc của mỗi xe

Đáp số: 30 km/h và 40 km/h

13) Một ô tô đi từ A đến B cách nhau 900 km . Sau đó 1 giờ , một ô tô khác đi từ B đến A với vận tốc lớn hơn xe thứ nhất là 5 km/h . Hai xe gặp nhau tại chính giữa quãng đường. Tìm vận tốc mỗi xe

Đáp số: 45 km/h và 50 km/h

14) Hai tỉnh A và B cách nhau 180 km . Cùng một lúc, một ô tô đi từ A đến B và một xe máy đi từ B về A. Hai xe gặp nhau tại thị trấn C. Từ C đến B ô tô đi hết 2 giờ , còn từ C về A xe máy đi hết $4\text{ giờ } 30\text{ phút}$. Tính vận tốc của mỗi xe biết rằng trên đường AB hai xe đều chạy với vận tốc không đổi

Đáp số: vận tốc ô tô là 36 km/h và xe máy là 24 km/h

15) Một xe tải và một xe con cùng khởi hành từ A đến B. Xe tải đi với vận tốc 30 km/h , xe con đi với vận tốc 45 km/h . Sau khi đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường AB, xe con tăng vận tốc thêm 5 km/h trên quãng đường còn lại. Tính quãng đường AB biết rằng xe con đến B sớm hơn xe tải 2 giờ 20 phút.

Đáp số: Quãng đường AB dài 200 km .

16) Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc 15 km/h . Sau đó một thời gian, một người đi xe máy cũng xuất phát từ A với vận tốc 30 km/h và nếu không có gì thay đổi thì sẽ đuổi kịp người đi xe máy tại B. Nhưng sau khi đi được nửa quãng đường AB, người đi xe đạp giảm bớt vận tốc 3 km/h nên hai người gặp nhau tại C cách B 10 km . Tính quãng đường AB

Đáp số: Quãng đường AB dài 60 km .

17) Một ô tô dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc trung bình là 40 km/h . Lúc đầu ô tô đi với vận tốc đó, khi còn 60 km nữa thì được một nửa quãng đường AB, người lái xe tăng vận tốc thêm 10 km/h trên quãng đường còn lại. Do đó ô tô đến tỉnh B sớm hơn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB.

Đáp số: 280 km/h

18) Một ca nô chạy trên sông trong 7 giờ, xuôi dòng 108 km và ngược dòng 63 km . Một lần khác, ca nô đó cũng chạy trong 7 giờ, xuôi dòng 81 km và ngược dòng 84 km . Tính vận tốc dòng nước chảy và vận tốc riêng (thực) của ca nô.

Đáp số: 24 km/h

19) Một ô tô chuyển động đều với vận tốc đã định để đi hết quãng đường dài 120 km trong một thời gian nhất định. Đi được nửa quãng đường xe nghỉ 3 phút nên để đến nơi đúng giờ, xe phải tăng vận tốc thêm 2 km/h trên nửa quãng đường còn lại. Tính vận tốc dự định của ô tô

Đáp số: 48 km/h

20) Hai ô tô khởi hành cùng một lúc đi từ A đến B cách nhau 300 km . Ô tô thứ nhất mỗi giờ chạy nhanh hơn ô tô thứ hai 10 km nên đến B sớm hơn ô tô thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe ô tô

Đáp số: 60 km/h và 50 km/h

LOẠI 4: BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI CÔNG VIỆC – NƯỚC CHẢY

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT – PHƯƠNG PHÁP GIẢI

I. Các bước giải:

Bước 1: Lập phương trình hoặc hệ phương trình:

- Chọn ẩn, đơn vị cho ẩn, điều kiện thích hợp cho ẩn.
- Biểu đạt các đại lượng khác theo ẩn (chú ý thống nhất đơn vị).
- Dựa vào các dữ kiện, điều kiện của bài toán để lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 2: Giải phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 3: Nhận định, so sánh kết quả bài toán, tìm kết quả thích hợp, trả lời, nêu rõ đơn vị của đáp số.

II. Các công thức liên quan:

Quãng đường = Vận tốc . Thời gian

$$V_{\text{xuôi}} = V_{\text{thực}} + V_{\text{nước}}$$

$$V_{\text{ngược}} = V_{\text{thực}} - V_{\text{nước}}$$

$$V_{\text{xuôi}} - V_{\text{ngược}} = 2V_{\text{nước}}$$

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: (Thừa Thiên Huế, 2015 – 2016) Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 120 tấn hàng. Hôm làm việc do có 5 xe được điều đi làm nhiệm vụ khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 0,8 tấn hàng so với dự định ban đầu. Biết khối lượng hàng mỗi xe chuyên chở như nhau, hỏi đoàn xe ban đầu có bao nhiêu chiếc?

Giải:

Gọi số chiếc xe ban đầu của đoàn xe vận tải là x (chiếc) ($x > 5$, $x \in \mathbb{N}$).

Số chiếc xe thực tế của đoàn xe vận tải là $x - 5$ (chiếc).

Khối lượng hàng mỗi xe phải chở ban đầu là $\frac{120}{x}$ tấn.

Khối lượng hàng mỗi xe phải chở thực tế là $\frac{120}{x-5}$ tấn.

Theo giả thiết ta có phương trình: $\frac{120}{x-5} - \frac{4}{5} = \frac{120}{x} \Leftrightarrow 4x^2 - 20x - 3000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = -25 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện, ta được số chiếc xe ban đầu của đoàn xe vận tải là 30 chiếc.

Ví dụ 2: (Bà Rịa Vũng Tàu, 2014 – 2015) Hướng ứng phong trào “*Vì biển đảo Trường Sa*” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở thêm hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau.

Giải:

Gọi x (chiếc) là số tàu dự định của đội ($x \in \mathbb{N}^*$, $x < 140$).

Số tàu tham gia vận chuyển là $x + 1$ (chiếc).

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định: $\frac{280}{x}$ (tấn).

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo thực tế: $\frac{280}{x+1}$ (tấn).

Theo đề bài ta có pt: $\frac{280}{x} - \frac{280}{x+1} = 2$.

$$\Leftrightarrow 280(x+1) - 286x = 2x(x+1).$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 140 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -14(l) \end{cases}$$

Vậy đội tàu lúc đầu là có 10 chiếc.

Ví dụ 3: (Hà Nội, 2012 – 2013) Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

Giải:

Gọi x (giờ) là thời gian người thứ nhất làm xong công việc ($x > 0$).

Thời gian mà người thứ hai làm riêng xong công việc là $x + 2$ (giờ).

Trong một giờ:

+) Người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

+) Người thứ hai làm được $\frac{1}{x+2}$ (công việc).

+) Cả hai người làm được $\frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ (công việc).

Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy thời gian người thứ nhất làm xong công việc là 4 giờ, thời gian người thứ hai làm xong công việc là 6(giờ).

Ví dụ 4: (Bình Định, 2014 – 2015) Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 12 giờ, nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 7 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì thời gian để mỗi đội hoàn thành công việc là bao nhiêu?

Giải:

Gọi x (giờ) là thời gian đội I làm xong công việc ($x > 12$).

Thời gian đội thứ II làm xong công việc là: $x - 7$ (giờ).

Trong một giờ:

+) Đội I làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

+) Đội II làm được $\frac{1}{x-7}$ (công việc).

+) Cả hai đội làm được $\frac{1}{12}$ (công việc).

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\Leftrightarrow 12(x-7) + 12x = x(x-7) \Leftrightarrow 12x - 84 + 12x = x^2 - 7x \Leftrightarrow x^2 - 31x + 84 = 0 \Rightarrow x = 21.$$

Vậy thời gian đội I làm xong công việc là 28 giờ, thời gian đội II làm xong công việc là: $28 - 7 = 21$ (giờ).

Ví dụ 5: Một tổ công nhân phải may xong 420 bộ đồng phục trong khoảng thời gian nhất định. Nếu thêm 3 công nhân vào tổ thì mỗi người sẽ may ít hơn lúc ban đầu là 7 bộ đồng phục. Tính số công nhân có trong tổ lúc đầu.

Giải:

Gọi số công nhân của tổ lúc đầu là x (công nhân) thì số công nhân của tổ lúc sau là $x + 3$ (công nhân).

Suy ra số bộ đồng phục mỗi người phải may lúc đầu là $\frac{420}{x}$ (bộ) .

Suy ra số bộ đồng phục mỗi người phải may lúc sau là $\frac{420}{x+3}$ (bộ).

Theo đề bài ta có $\frac{420}{x} = \frac{420}{x+3} + 7$.

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0.$$

Vậy số công nhân của tổ lúc đầu là 12 người.

Ví dụ 6: (Quảng Ngãi, 2014 – 2015) Cho hai vòi nước cùng lúc chảy vào một bể cạn. Nếu chảy riêng từng vòi thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 4 giờ. Khi nước đầy bể, người ta khóa vòi thứ nhất và vòi thứ hai lại, đồng thời mở vòi thứ ba cho nước chảy ra thì sau 6 giờ bể cạn nước. Khi nước trong bể đã cạn mở cả ba vòi thì sau 24 giờ bể lại đầy nước. Hỏi nếu chỉ dùng vòi thứ nhất thì sau bao lâu bể đầy nước.

Giải:

Gọi thời gian mà vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là x (giờ), ($x > 0$).

Trong một giờ:

-Vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể).

- Vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x+4}$ (bể).

- Vòi thứ ba chảy được $\frac{1}{6}$ (bể).

Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{24} \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy chỉ dùng vòi thứ nhất thì sau 8 giờ bể đầy nước.

Ví dụ 7: (Hung Yên, 2016 – 2017) Một công ty vận tải dự định điều một số xe tải để vận chuyển 24 tấn hàng. Thực tế khi đến nơi thì công ty bổ sung thêm 2 xe nữa nên mỗi xe chở ít đi 2 tấn so với dự định. Hỏi số xe dự định được điều động là bao nhiêu? Biết số lượng hàng chở ở mỗi xe như nhau và mỗi xe chở một lượt.

Giải:

Gọi số xe ban đầu là x (xe) nên số hàng thực tế mỗi xe chở là $\frac{24}{x}$ (tấn).

Số xe thực tế là $x+2$ (xe) nên số hàng thực tế mỗi xe chở là $\frac{24}{x+2}$ (tấn).

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{x} - \frac{12}{x+2} = 1$$

$$\Rightarrow 12(x+2) - 12x = x(x+2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$\Delta' = 1^2 - 1 \cdot (-24) = 25$$

Từ đó ta tìm được $x_1 = 4$ (thỏa mãn điều kiện) và $x_2 = -6$ (loại).

Vậy số xe ban đầu là 4 xe.

Ví dụ 8: (Hà Nội, 2014 – 2015) Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Giải:

Gọi x là sản phẩm xưởng sản xuất trong 1 ngày theo kế hoạch ($x > 0$).

$\Rightarrow$ Số ngày theo kế hoạch là: $\frac{1100}{x}$.

Số ngày thực tế là $\frac{1100}{x+5}$ Theo giả thiết của bài toán ta có :

$$\Leftrightarrow 1100(x+5) - 1100x = 2x(x+5).$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 5500 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = 50 \text{ hay } x = -55(l).$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất là 50 sản phẩm.

Ví dụ 9: (Hải Phòng, 2015 – 2016) Một lâm trường dự định trồng 75 ha rừng trong một số tuần (mỗi tuần trồng được diện tích bằng nhau). Thực tế mỗi tuần lâm trường trồng vượt mức 5 ha so với dự định nên cuối cùng đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm hơn dự định một tuần. Hỏi mỗi tuần lâm trường dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

Giải:

Gọi diện tích rừng mà mỗi tuần lâm trường dự định trồng là x (ha). (Điều kiện: $x > 0$).

Theo dự định, thời gian trồng hết 75 ha rừng là: $\frac{75}{x}$ (tuần).

Vì mỗi tuần lâm trường trồng vượt mức 5 ha so với dự định nên thực tế mỗi tuần lâm trường trồng được $x + 5$ (ha).

Do đó thời gian thực tế lâm trường trồng hết 80 ha rừng là $\frac{80}{x+5}$ (tuần).

Vì thực tế, lâm trường trồng xong sớm so với dự định là 1 tuần nên ta có phương trình:

$$\frac{75}{x} - \frac{80}{x+5} = 1.$$

Giải ra ta được: $x = 15$ (thỏa mãn điều kiện); $x = -20$ (loại).

Vậy mỗi tuần lâm trường dự định trồng 15 ha rừng.

Ví dụ 10: (Chuyên Trần Hưng Đạo, 2015 – 2016) Một bác nông dân đem trứng ra chợ bán.

Tổng số trứng bán ra được tính như sau:

Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

...

Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. nhưng thật thú vị, số trứng bán được trong mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng bán được là bao nhiêu và bán hết trong bao nhiêu ngày?

Giải:

Gọi x là số trứng bán được ($x \in \mathbb{N}^*$) thì:

Số trứng bán được trong ngày thứ nhất là : $8 + \frac{x-8}{8}$.

Số trứng bán được trong ngày thứ hai là : $16 + \frac{x - \left(16 + 8 + \frac{x-8}{8}\right)}{8}$.

Theo đề toán ta có phương trình:

$$8 + \frac{x-8}{8} = 16 + \frac{x - \left(16 + 8 + \frac{x-8}{8}\right)}{8}.$$

$x = 392$. Giải phương trình ta được

Vậy tổng số trứng bán được là 392 trứng

Số trứng bán được trong mỗi ngày là $8 + \frac{x-8}{8} = 56$.

Số ngày là $392:56=7$ ngày.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài toán 1: Hai máy xúc đất được giao xúc hết một khối lượng đất để đắp đập. Nếu cả hai máy cùng làm việc thì xúc hết khối lượng đất đó trong 4 ngày. Nếu máy thứ nhất xúc xong $\frac{1}{2}$ số đất rồi máy thứ hai xúc hết số đất còn lại thì thời gian xúc của cả hai máy cộng lại là 9 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi máy xúc hết khối lượng đất đó trong mấy ngày?

Giải:

Gọi x (ngày) là thời gian mà máy thứ nhất xúc hết nửa lượng đất. Khi đó, $9 - x$ (ngày) là thời gian máy thứ hai xúc xong khối lượng đất còn lại.

Suy ra $2x; 18 - 2x$ (ngày) lần lượt là số ngày mà máy thứ nhất và máy thứ hai xúc xong khối lượng đất đó.

Trong một ngày:

- Máy thứ nhất xúc được $\frac{1}{2x}$ (lượng đất).

- Máy thứ hai xúc được $\frac{1}{9 - x}$ (lượng đất).

- Cả hai máy xúc được $\frac{1}{4}$ (lượng đất).

Ta có phương trình $\frac{1}{2x} + \frac{1}{18 - 2x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 3 \end{cases}$.

Vậy, số ngày máy thứ nhất và máy thứ hai xúc hết số đất theo thứ tự là 6 ngày, 12 ngày hoặc 12 ngày, 6 ngày.

Bài toán 2: (Bình Dương, 2016 – 2017) Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Giải:

Gọi trọng tải của mỗi xe nhỏ là x (tấn) ($x > 0$).

Trọng tải của mỗi xe lớn là $x + 1$ (tấn).

Số xe (lớn) dự định phải dùng là $\frac{20}{x + 1}$ (xe); số xe (nhỏ) thực tế phải dùng là $\frac{20}{x}$ (xe).

Vì số xe nhỏ thực tế phải dùng nhiều hơn dự định 1 xe nên:

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{x + 1} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{x(x + 1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) = 20$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(TM) \\ x = -5(L) \end{cases}$$

Vậy trọng tải của mỗi xe nhỏ là 4 tấn.

Bài toán 3: (Quảng Ngãi, 2015 – 2016) Hai đội thủy lợi gồm 25 người đào đắp một con mương. Đội I đào được $45 m^3$ đất, đội II đào được $40 m^3$ đất. biết mỗi công nhân đội II đào được nhiều hơn mỗi công nhân đội I là $1 m^3$. Tính số đất mỗi công nhân đội I đào được.

Giải:

Gọi số đất mỗi công nhân đội I đào được là $x(m^3)$, $x > 0$.

Khi đó, số đất mỗi công nhân đội II đào được là $x+1(m^3)$.

Suy ra:

- Số công nhân đội I là $\frac{45}{x}$ (công nhân).

- Số công nhân đội I là $\frac{40}{x+1}$ (công nhân).

$$\text{Ta có phương trình } \frac{45}{x} + \frac{40}{x+1} = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{3}{5} \end{cases}.$$

Vậy số đất mỗi công nhân đội I đào được là $3(m^3)$. .

Bài toán 4: (Chuyên Thái Bình, 2015 – 2016) Bạn An dự định trong khoảng thời gian từ ngày 1/3 đến ngày 30/4 sẽ giải mỗi ngày 3 bài toán. Thực hiện đúng kế hoạch được một thời gian vào khoảng cuối tháng 3 (tháng 3 có 31 ngày) thì An bị bệnh phải nghỉ giải toán nhiều ngày liên tiếp. Khi hồi phục trong tuần đầu An chỉ giải được 16 bài; sau đó An cố gắng giải 4 bài mỗi ngày và đến 30/4 thì An cũng hoàn thành kế hoạch đã định. Hỏi An phải nghỉ giải toán bao nhiêu ngày?

Giải:

Từ 1/3 đến 30/4 có 61 ngày.

Số bài toán theo kế hoạch mà An phải giải là $61.3 = 183$ (bài)

Gọi: số ngày An giải toán theo đúng kế hoạch là x (ngày). Trong thời gian này, An giải $3x$ (bài)
số ngày An nghỉ giải toán là y (ngày). ($x, y \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq x \leq 30$, y bé nhất)

Khi đó số ngày An giải mỗi ngày 4 bài là $61 - 7 - x - y = 54 - x - y$ (ngày).

Trong thời gian này, An giải được (bài).

Vậy tổng số bài An đã giải là $3x + 16 + 4(54 - x - y)$ (bài).

Theo bài ra ta có phương trình:

$$3x + 16 + 4(54 - x - y) = 183$$

$$\Leftrightarrow x + 4y = 49$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{49 - x}{4}$$

$$\text{Vì } 1 \leq x \leq 30 \Rightarrow y = \frac{49 - x}{4} \geq \frac{49 - 30}{4} = \frac{19}{4}$$

y là số nguyên, bé nhất $\Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 29$.

Vậy An phải nghỉ ít nhất 5 ngày.

Bài toán 5: (Hưng Yên, 2016 – 2017) Một xưởng có kế hoạch in xong 6000 quyển sách giống nhau trong một thời gian quy định biết số quyển sách in được trong một ngày là bằng nhau. Để hoàn thành sớm kế hoạch mỗi ngày xưởng đã in nhiều hơn 300 quyển sách so với số quyển sách phải in trong kế hoạch nên xưởng in xong 6000 quyển sách nói trên sớm hơn kế hoạch 1 ngày. Tính số quyển sách xưởng in được trong 1 ngày theo kế hoạch.

Giải:

Gọi x là số quyển sách xưởng in được trong mỗi ngày theo kế hoạch (x nguyên dương)

Số ngày in theo kế hoạch: $\frac{6000}{x}$ (ngày).

Số quyển sách xưởng in được thực tế trong mỗi ngày : $x + 300$ (quyển sách).

Số ngày in thực tế: $\frac{6000}{x+300}$ (ngày).

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{6000}{x} - \frac{6000}{x+300} = 1$,

$$\Leftrightarrow x^2 + 300x - 1800000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1200(n); x_2 = -1500(l)$$

Vậy số quyển sách xưởng in được trong mỗi ngày theo kế hoạch là: 1200 (quyển sách).

Bài toán 6: Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

Giải:

Gọi thời gian người thứ nhất hoàn thành một mình xong công việc là x (giờ), ĐK $x > \frac{12}{5}$.

Thì thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là $x+2$ (giờ).

Mỗi giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (cv), người thứ hai làm được $\frac{1}{x+2}$ (cv).

Vì cả hai người cùng làm xong công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ nên mỗi giờ cả hai đội làm được $1: \frac{12}{5} = \frac{5}{12}$ (cv).

Do đó ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0$.

$\Delta' = 49 + 120 = 169$, $\sqrt{\Delta'} = 13 \Rightarrow x = \frac{7-13}{5} = \frac{-6}{5}$ (loại) và $x = \frac{7+13}{5} = \frac{20}{5} = 4$ (TMDK).

Vậy người thứ nhất làm xong công việc trong 4 giờ, người thứ hai làm xong công việc trong $4+2 = 6$ giờ.

Bài toán 7: Hai người đồng thời đào chung một cái giếng có thể đào xong sau 2 ngày. Hỏi sau bao nhiêu ngày mỗi người đào riêng rẽ có thể xong cái giếng đó biết để đào xong cái giếng đó một mình người thứ hai phải tốn 3 ngày nhiều hơn người thứ nhất đào một mình.

Giải:

Gọi thời gian đào một mình xong cái giếng đó của người thứ nhất là x ($x > 0$, ngày).

thì người thứ hai đào một mình xong cái giếng đó hết $x+3$ (ngày).

Một ngày người thứ nhất đào được $\frac{1}{x}$ giếng, người thứ hai đào được $\frac{1}{x+3}$, cả hai người đào được

$\frac{1}{2}$ giếng. Theo bài ra ta có pt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2.$$

Vậy để đào một mình người thứ nhất cần 3 ngày, người thứ hai cần 6 ngày.

Bài toán 8: Hai người cùng làm chung một công việc thì sau 16 giờ sẽ xong công việc. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ và người thứ hai làm một mình trong 6 giờ thì cả hai làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người làm trong bao lâu thì xong công việc.

Giải:

Gọi thời gian làm một mình xong công việc của người thứ nhất là x ($x > 16$, giờ), một giờ người đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc. trong một giờ cả hai người làm được $\frac{1}{16}$ công việc, người thứ hai làm

được $\frac{1}{16} - \frac{1}{x}$ công việc. Người thứ nhất làm trong 3 giờ được $3 \cdot \frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai trong 6 giờ làm được $6 \cdot \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{x}\right)$ công việc.

Theo bài ra ta có phương trình: $3 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4}$; $x = 24$ (giờ). Người thứ nhất làm một mình xong công việc hết 24 giờ, người thứ hai hết 48 giờ.

Bài toán 9: Nếu hai người cùng làm chung một công việc thì trong $\frac{12}{5}$ giờ xong công việc. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc nhanh hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc.

Giải:

Gọi thời gian làm một mình xong công việc của người thứ nhất là x ($x > \frac{12}{5}$, giờ), người thứ hai làm hết $x + 2$ (giờ). Trong một giờ người đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{1}{x+2}$ công việc, cả hai người trong một giờ làm được $\frac{5}{12}$ công việc. Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12}, \Rightarrow x_1 = 4 \text{ (TM)}, x_2 = -\frac{6}{5} \text{ (L)}.$$

Vậy nếu làm một mình thì người thứ nhất làm hết 4 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ.

Bài toán 10: Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 1h30 phút bể sẽ đầy. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 20 phút rồi khóa lại và mở tiếp vòi thứ hai trong 15 phút thì sẽ đầy một phần năm bể. Hỏi nếu chảy riêng thì sau bao lâu sẽ đầy bể.

Giải:

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x ($x > \frac{3}{2}$, giờ); trong một giờ vòi I chảy được

$\frac{1}{x}$ bể, vòi hai chảy được $\frac{2}{3} - \frac{1}{x}$ phần bể. Sau 20 phút vòi I chảy được $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}$, vòi II chảy trong 15

phút đầy $\frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{x} \right)$ bể. Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{5}$$

Giải ra ta được $x = \frac{5}{2}$ (h)

Kết luận: $\frac{5}{2}; \frac{15}{4}$.

Bài toán 11: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 30 phút sẽ đầy bể. Nếu từng vòi chảy riêng thì vòi I chảy trong 3 giờ bằng lượng nước vòi II chảy trong 2 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi chảy trong bao lâu?

Giải:

Gọi thời gian vòi I chảy đầy bể một mình là x , một giờ chảy được $\frac{1}{x}$ phần bể, vòi II chảy được

$\frac{2}{5} - \frac{1}{x}$ phần bể.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{3}{x} = 2 \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{x} \right)$$

Giải phương trình được $x = \frac{25}{4}$.

Bài toán 12: Nếu mở cả hai vòi chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút bể đầy nước. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là hai giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu thì đầy bể?

Giải:

Gọi thời gian vòi một chảy một mình đầy bể là x (giờ, $x > 0$), thời gian vòi hai chảy một mình đầy bể là $x + 2$ (giờ)

2 giờ 55 phút = $\frac{35}{12}$ giờ. Trong một giờ cả hai vòi chảy được $\frac{12}{35}$ (bể).

Trong một giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể). vòi hai chảy được $\frac{1}{x+2}$ (bể).

Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35}$.

Hay $6x^2 - 23x - 35 = 0$, giải ra ta được $x = 5$ hoặc $x = -\frac{7}{6}$ (loại)

Trả lời: Vòi thứ nhất chảy một mình trong 5 giờ thì đầy bể, còn vòi thứ hai chảy trong 7 giờ thì đầy bể.

Bài toán 13: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 2h 55' thì đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là hai giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Giải:

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x ($x > 2h55'$, giờ), vòi hai chảy một mình hết

$x + 2$ giờ, trong một giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{x+2}$ bể.

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35} \Leftrightarrow 12x^2 - 46x - 70 = 0 \Rightarrow x = 5(tm)$.

Vậy chảy một mình vòi thứ nhất chảy hết 5 giờ, vòi thứ hai chảy hết 7 giờ.

Bài toán 14: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 3 giờ đầy bể. Nếu để vòi một chảy trong 20 phút khóa lại rồi mở tiếp vòi hai trong 30 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{1}{8}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Giải:

Gọi thời gian vòi một chảy một mình đầy bể là x ($x > 3$, giờ) trong một giờ vòi một chảy được $\frac{1}{x}$

bể, cả hai vòi chảy được $\frac{1}{3}$ bể, vòi hai chảy được $\frac{1}{3} - \frac{1}{x}$ (bể). Trong 20 phút vòi một chảy được

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}$ phần bể, trong 30 phút vòi hai chảy được $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x} \right)$ bể. Theo bài ra ta có phương trình:

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{8}$ giải ra $x = 4$. Vậy chảy một mình vòi một chảy trong 4 giờ thì đầy bể, vòi

hai chảy trong 12 giờ thì đầy bể.

Bài toán 15: Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 24 giờ. Nếu đội thứ nhất làm trong 10 giờ đội thứ hai làm trong 15 giờ thì cả hai đội làm được một nửa công việc. Tính thời gian mỗi đội làm một mình để xong công việc.

Giải:

Gọi thời gian đội một hoàn thành công việc một mình là x ($x > 24$, giờ), thì trong một giờ đội một

làm được $\frac{1}{x}$ công việc, cả hai đội làm được $\frac{1}{24}$ công việc, và đội hai làm được $\frac{1}{24} - \frac{1}{x}$ công

việc. Trong 10 giờ đội một làm được $10 \cdot \frac{1}{x}$ công việc, trong 15 giờ đội hai làm được

$15 \cdot \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{x} \right)$ công việc, cả hai đội làm được $\frac{1}{2}$ Công việc, nên theo bài ra ta có phương trình:

$10 \cdot \frac{1}{x} + 15 \cdot \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2}$. Giải ra ta được $x = 40$ (tmđk), vậy để làm một mình đội một hoàn

thành công việc trong 40 giờ, đội hai hoàn thành công việc trong 60 giờ.

Bài toán 16: Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc. Thời gian để đội I hoàn thành công việc ít hơn thời gian để đội II hoàn thành công việc đó là 4 giờ. Tổng hai thời gian này gấp 4 lần thời gian hai đội cùng làm chung để xong công việc đó. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội phải mất bao lâu mới xong.

Giải:

Gọi thời gian đội I hoàn thành công việc một mình là x ($x > 0$, giờ), đội II hoàn thành công việc là $x + 4$ (giờ). Trong một giờ hai đội làm chung được $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}$ công việc (hay $\frac{2x+4}{x(x+4)}$).

Thời gian để hai đội làm chung xong công việc là $\frac{x(x+4)}{2x+4}$ (giờ).

Ta có phương trình:

$$2x + 4 = \frac{9}{2} \cdot \frac{x(x+4)}{2x+4} \text{ hay } x^2 + 4x - 32 = 0 ;$$

Giải phương trình được $x_1 = -8$ (loại); $x_2 = 4$ (thỏa mãn)

Bài toán 17: Hai đội công nhân cùng làm một quãng đường thì 12 ngày xong việc. Nếu một đội làm một mình hết nửa công việc rồi đội thứ hai tiếp tục một mình làm nốt phần việc còn lại thì hết tất cả 25 ngày. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong việc.

Giải:

Gọi thời gian đội thứ nhất làm xong nửa công việc là x (ngày), $2x > 12$ và $x < 25$ hay $6 < x < 25$.
Thời gian đội thứ hai làm xong nửa công việc là $25 - x$ (ngày).

Trong 1 ngày đội thứ nhất làm được $\frac{1}{2x}$ (công việc); đội thứ hai làm được $\frac{1}{2(25-x)}$ (công việc).

Trong 1 ngày cả hai đội làm được $\frac{1}{12}$ (công việc).

Ta có phương trình: $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(25-x)} = \frac{1}{12}$ hay $x^2 - 25x + 150 = 0$.

Giải ra ta được $x_1 = 15$; $x_2 = 10$. Vậy nếu đội I hoàn thành công việc trong 20 ngày thì đội II trong 30 ngày và ngược lại.

Bài toán 18: Hai người cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình công việc ấy thì tổng số thời gian làm việc của hai người là 25 giờ. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc.

Giải:

Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc là x (giờ, $0 < x < 25$). Khi đó thời gian làm một mình xong việc của người thứ hai là $25 - x$ (giờ). Trong một giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$

(công việc). Người thứ hai làm được $\frac{1}{25-x}$ (công việc), hai người làm chung được $\frac{1}{6}$ (công việc).

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{25-x} = \frac{1}{6}$ giải ra ta được $x_1 = 15$; $x_2 = 10$.

Trả lời: Làm một mình người thứ nhất hết 15 giờ thì xong việc, người thứ hai làm một mình xong việc hết 10 giờ. Và ngược lại.

Bài toán 19: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã sản xuất vượt mức kế hoạch là 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ là bao nhiêu.

Giải:

Gọi x là số sản phẩm tổ I hoàn thành theo kế hoạch (sản phẩm), đk $0 < x < 600$.

Số sản phẩm tổ II hoàn thành theo kế hoạch là $600 - x$ (sản phẩm).

Số sản phẩm vượt mức của tổ I là $x \cdot \frac{18}{100}$ (sản phẩm).

Số sản phẩm vượt mức của tổ II là $(600 - x) \cdot \frac{21}{100}$ (sản phẩm).

Vì số sản phẩm vượt mức kế hoạch của hai tổ là 120 sản phẩm ta có pt

$$\frac{18x}{100} + \frac{21(600-x)}{100} = 120 \Leftrightarrow x = 20 \text{ (thỏa mãn yêu cầu của bài toán)}$$

Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ I là 200 (sản phẩm)

Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ II là 400 (sản phẩm)

Bài toán 20: Người ta trộn 8g chất lỏng này với 6g chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn nó là $0,2\text{g/cm}^3$ để được hỗn hợp có khối lượng riêng $0,7\text{g/cm}^3$. Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

Giải:

Gọi khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là x (g/cm^3). Đk $x > 0,2$

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $x - 0,2$ (g/cm^3).

Thể tích của chất lỏng thứ nhất là $\frac{8}{x}(\text{cm}^3)$

Thể tích của chất lỏng thứ hai là $\frac{6}{x - 0,2}(\text{cm}^3)$

Thể tích của hỗn hợp là $\frac{8}{x} + \frac{6}{x + 0,2}(\text{cm}^3)$

Theo bài ra ta có pt $\frac{8}{x} + \frac{6}{x + 0,2} = \frac{14}{0,7} \Leftrightarrow 14x^2 - 12,6x + 1,12 = 0$. Giải pt ta được kết quả

$$x_1 = 0,1 \text{ (loại)} ;$$

$$x_2 = 0,8 \text{ (t/m đk)}$$

Vậy khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là $0,8$ (g/cm^3)

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $0,6$ (g/cm^3).

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài toán 1: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn nước sau 2 giờ 24 phút thì đầy bể. Nếu chảy riêng vòi thứ nhất phải chảy hơn vòi thứ hai 2 giờ mới đầy bể. hỏi nếu chảy riêng mỗi vòi phải mất thời gian bao lâu để chảy vào đầy bể?

Đáp số: 4 giờ; 6 giờ.

Bài toán 2: (Hải Dương, 2016 – 2017) Một đội xe phải chuyên chở 36 tấn hàng. Trước khi làm việc, đội xe đó được bổ sung thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn so với dự định. Hỏi đội xe lúc đầu có bao nhiêu xe? Biết rằng số hàng chở trên tất cả các xe có khối lượng bằng nhau.

Đáp số: 9 xe.

Bài toán 3: (Hà Tĩnh, 2015 – 2016) Một đội xe nhận vận chuyển 72 tấn hàng nhưng khi sắp khởi hành thì có 3 xe bị hỏng, do đó mỗi xe phải chở nhiều hơn 2 tấn so với dự định. Hỏi lúc đầu đội xe có bao nhiêu chiếc, biết khối lượng hàng mỗi xe phải chở là như nhau.

Đáp số: 12 xe.

Bài toán 4: Một công nhân dự định làm 150 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Sau khi làm được 2h với năng suất dự kiến, người đó đã cải tiến các thao tác nên đã tăng năng suất được 2 sản phẩm mỗi giờ và vì vậy đã hoàn thành 150 sản phẩm sớm hơn dự kiến 30 phút. Hãy tính năng suất dự kiến ban đầu.

Đáp số: 20 sản phẩm.

Bài toán 5: (Lâm Đồng, 2012 – 2013) Hai đội công nhân cùng đào một con mương. Nếu họ cùng làm thì trong 8 giờ xong việc. Nếu họ làm riêng thì đội A hoàn thành công việc nhanh hơn đội B là 12 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu giờ mới xong việc.

Đáp số: 12 giờ, 24 giờ.

Bài toán 6: Hai đội công nhân cùng làm một công việc hoàn thành sau 12 ngày. Nếu mỗi đội làm riêng thì đội một sẽ hoàn thành công việc nhanh hơn đội hai là 7 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc đó?

Đáp số: 21 ngày, 28 ngày.

Bài toán 7: Hai công nhân cùng xây một bức tường trong 12 ngày thì xong. Nếu người thứ nhất xây $\frac{1}{2}$ bức tường còn lại người thứ hai xây tiếp bức tường thì tổng cộng hết 25 ngày. Tính thời gian xây xong bức tường nếu họ làm riêng một mình?

Đáp số: 10 ngày; 15

ngày.

Bài toán 8: Hai người đào chung một cái giếng có thể hoàn thành trong 2 ngày. Hỏi sau bao nhiêu ngày mỗi người đào riêng rẽ có thể xong cái giếng đó, biết để đào xong cái giếng đó một mình người thứ hai tốn nhiều hơn 3 ngày so với người thứ nhất.

Đáp số: 3 ngày; 6 ngày.

Bài toán 9: Hai vòi nước cùng chảy đầy một bể không có nước trong 3 giờ 45 phút. Nếu chảy riêng rẽ, mỗi vòi phải chảy trong bao lâu mới đầy bể. Biết rằng vòi chảy sau lâu hơn vòi trước 4 giờ.

Đáp số: 2 giờ; 6 giờ.

Bài toán 10: Một công ti vận tải dự định dùng loại xe lớn để chở 15 tấn rau theo một hợp đồng. Nhưng khi vào việc, công ti không còn xe lớn nên phải thay bằng những xe có tải trọng nhỏ hơn nửa tấn. Để đảm bảo thời gian đã hợp đồng, công ti phải dùng một số lượng xe nhiều hơn số xe dự định là 1 xe. Hỏi trọng tải của mỗi xe nhỏ là bao nhiêu tấn.

Đáp số: 2,5 tấn; 3 tấn.

Bài toán 11: Theo kế hoạch, mỗi tổ công nhân phải sản xuất 360 sản phẩm, Đến khi làm việc, do phải điều 3 công nhân đi làm việc khác nên mỗi công nhân còn lại phải làm nhiều hơn dự định 4 sản phẩm. Hỏi lúc đầu tổ đó có bao nhiêu công nhân? Biết rằng năng suất lao động của mỗi công nhân như nhau.

Đáp số: 20 công nhân.

Bài toán 12: Hai tổ may trong 12 ngày xong 300 chiếc áo. Nếu mỗi tổ may riêng 150 chiếc áo thì tổ I may trước tổ II là 5 ngày. Hỏi tổ I may xong 150 áo trong mấy ngày?

Đáp số: 10 ngày.

Bài toán 13: Một phân xưởng theo kế hoạch phải may 1000 bộ quần áo trong thời gian quy định. Khi thực hiện, mỗi ngày xưởng may nhiều hơn 10 bộ và hoàn thành kế hoạch trước 5 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng phải may bao nhiêu bộ quần áo?

Đáp số: 40 bộ quần áo.

Bài toán 14: Hai tổ cùng làm một công việc trong 15 giờ thì xong. Nếu tổ (I) làm trong 3 giờ, tổ (II) làm trong 5 giờ thì được 25% công việc. Hỏi mỗi tổ làm riêng trong bao lâu thì xong công việc đó?

Đáp số: 40 giờ.

Bài toán 15: Sau 4 ngày làm việc thì cả hai máy cày cày được $\frac{2}{3}$ cánh đồng. Nếu làm riêng từng

máy cày thì máy cày thứ nhất cày xong cánh đồng nhanh hơn máy cày thứ hai 5 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì thời gian cày xong cánh đồng của máy thứ nhất và máy thứ hai là bao nhiêu ngày?

Đáp số: 10 ngày; 15

ngày.

Bài toán 16: Hai vòi cùng chảy vào một bể không có nước thì trong 5 giờ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ 2 chảy trong 4 giờ thì được $\frac{2}{3}$ bể nước. Hỏi chảy riêng mỗi vòi chảy trong bao lâu đầy bể.

Đáp số: 40 giờ.

Bài toán 17: Hai đội công nhân làm một đoạn đường. Đội 1 làm xong một nửa đoạn đường thì đội 2 đến làm tiếp nửa còn lại với thời gian dài hơn thời gian đội 1 đã làm là 30 ngày. Nếu hai đội cùng làm thì trong 72 ngày xong cả đoạn đường. Hỏi mỗi đội đã làm bao nhiêu ngày trên đoạn đường này?

Đáp số: 60 ngày; 90 ngày.

Bài toán 18: Hai người thợ cùng làm một công việc. Nếu làm riêng rẽ, mỗi người nửa việc thì tổng số giờ làm việc là 12 giờ 30 phút. Nếu hai người cùng làm thì hai người chỉ làm việc đó trong 6 giờ. Như vậy, làm việc riêng rẽ cả công việc mỗi người mất bao nhiêu thời gian.

Đáp số: 10 giờ; 5 giờ.

Bài toán 19: Hai đội công nhân cùng làm chung 5 ngày thì được $\frac{5}{6}$ phần công việc được giao. Nếu làm riêng thì mỗi đội phải mất thời gian bao lâu mới hoàn thành công việc? Biết rằng đội thứ hai hoàn thành nhanh hơn đội thứ nhất 5 ngày.

Đáp số: 10 ngày, 15 ngày.

Bài toán 20: Hai tổ thanh niên tình nguyện cùng sửa một con đường vào bản trong 4 giờ thì xong. Nếu làm riêng thì tổ 1 làm nhanh hơn tổ 2 là 6 giờ. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu sẽ xong việc.

Đáp số: 6 ngày, 12 ngày.

LOẠI 5: CÁC BÀI TOÁN KHÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT – PHƯƠNG PHÁP GIẢI

I. Các bước giải:

Bước 1: Lập phương trình hoặc hệ phương trình:

- Chọn ẩn, đơn vị cho ẩn, điều kiện thích hợp cho ẩn.
- Biểu đạt các đại lượng khác theo ẩn (chú ý thống nhất đơn vị).
- Dựa vào các dữ kiện, điều kiện của bài toán để lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 2: Giải phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 3: Nhận định, so sánh kết quả bài toán, tìm kết quả thích hợp, trả lời, nêu rõ đơn vị của đáp số.

II. Các lưu ý thêm :

- Toán nồng độ dung dịch: Biết rằng m lít chất tan trong M lít dung dịch thì nồng độ phần trăm là $\frac{m}{M} \cdot 100\%$
- Toán nhiệt lượng:
 - + m Kg nước giảm $t^{\circ}\text{C}$ thì toả ra một nhiệt lượng $Q = m \cdot t$ (Kcal).
 - + m Kg nước tăng $t^{\circ}\text{C}$ thì thu vào một nhiệt lượng $Q = m \cdot t$ (Kcal).
- Toán lãi suất: $A_n = A(1 + r)^n$ với A_n : vốn sau n chu kỳ (năm, tháng, ...); A : vốn ban đầu; n số chu kỳ (năm, tháng, ...)

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: [Sở GD _ ĐT Ninh Thuận năm 2015 - 2016]

Một phòng học có 10 băng ghế. Học sinh của lớp 9A được sắp xếp chỗ ngồi đều nhau trên mỗi băng ghế. Nếu bớt đi 2 băng ghế, thì mỗi băng ghế phải bố trí thêm một học sinh ngồi nữa mới đảm bảo chỗ ngồi cho tất cả học sinh của lớp. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh.

Giải:

Gọi số học sinh lớp 9A là x (học sinh) ($x \in \mathbb{N}^*$)

Nếu có 10 băng ghế thì mỗi băng có số học sinh là $\frac{x}{10}$ (học sinh)

Nếu bớt đi 2 băng ghế, còn 8 băng thì mỗi băng có số học sinh là $\frac{x}{8}$ (học sinh)

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{x}{8} - \frac{x}{10} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right)x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{40}x = 1 \Leftrightarrow x = 40.$$

Vậy lớp 9A có 40 học sinh.

Ví dụ 2: [Sở GD và ĐT Cần Thơ năm 2015 - 2016]

Nhân ngày quốc tế thiếu nhi, 13 HS (nam và nữ) tham gia gói 80 phần quà cho các em thiếu nhi. Biết tổng số quà mà HS nam gói được bằng tổng số quà mà HS nữ gói được. Số quà mỗi bạn nam gói nhiều hơn số quà mà mỗi bạn nữ gói là 3 phần. Tính số HS nam và nữ.

Giải:

Gọi x (HS) là số HS nam.

ĐK: $0 < x < 13$, x nguyên.

Số HS nữ là: $13 - x$ (HS)

Số phần quà mà mỗi HS Nam gói được: $\frac{40}{x}$ (phần)

Số phần quà mà mỗi HS nữ gói được: $\frac{40}{13 - x}$ (phần)

Theo bài toán ta có phương trình:

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{13 - x} = 3 \Leftrightarrow 40(13 - x) - 40x = 3x(13 - x) \Leftrightarrow 3x^2 - 119x + 520 = 0.$$

Giải phương trình ta được $x = 5$.

Vậy số HS nam là 5, số HS nữ là 8.

Ví dụ 3: [Sở GD - ĐT TP HCM 2016 - 2017] :

Ông Sáu gửi một số tiền vào ngân hàng theo mức lãi suất tiết kiệm với kỳ hạn 1 năm là 6%. Tuy nhiên sau thời hạn một năm ông Sáu không đến nhận tiền lãi mà để thêm một năm nữa mới lãnh. Khi đó số tiền lãi có được sau năm đầu tiên sẽ được ngân hàng cộng dồn vào số tiền gửi ban đầu để thành số tiền gửi cho năm kế tiếp với mức lãi suất cũ. Sau 2 năm ông Sáu nhận được số tiền là 112.360.000 đồng (kể cả gốc lẫn lãi). Hỏi ban đầu ông Sáu đã gửi bao nhiêu tiền ?

Giải:

Gọi số tiền ông Sáu gửi ban đầu là x (đồng, $x > 0$).

Theo đề bài ta có:

Số tiền lãi sau 1 năm ông Sáu nhận được là: $0,06x$ (đồng).

Số tiền có được sau 1 năm của ông Sáu là: $x + 0,06x = 1,06x$ (đồng).

Số tiền lãi năm thứ 2 ông Sáu nhận được là: $1,06x \cdot 0,06 = 0,0636x$ (đồng).

Do vậy số tiền tổng cộng sau 2 năm ông Sáu nhận được là: $1,06x + 0,0636x = 1,1236x$ (đồng).

Mặt khác: $1,1236x = 112360000$ nên $x = 100000000$ (đồng) hay 100 triệu đồng.

Vậy ban đầu ông Sáu đã gửi 100 triệu đồng.

Ví dụ 4: [Chuyên Trần Hưng Đạo, 2015 – 2016]

Một bác nông dân đem trứng ra chợ bán. Tổng số trứng bán ra được tính như sau:

Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

...

Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. nhưng thật thú vị, số trứng bán được trong mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng bán được là bao nhiêu và bán hết trong bao nhiêu ngày?

Giải:

Gọi x là số trứng bán được ($x \in \mathbb{N}^*$) thì:

Số trứng bán được trong ngày thứ nhất là: $8 + \frac{x-8}{8}$.

Số trứng bán được trong ngày thứ hai là: $16 + \frac{x - \left(16 + 8 + \frac{x-8}{8}\right)}{8}$.

Theo đề toán ta có phương trình: $8 + \frac{x-8}{8} = 16 + \frac{x - \left(16 + 8 + \frac{x-8}{8}\right)}{8}$.

Giải phương trình ta được $x = 392$.

Vậy tổng số trứng bán được là 392 trứng.

Số trứng bán được trong mỗi ngày là $8 + \frac{x-8}{8} = 56$.

Số ngày là $392:56=7$ ngày.

Ví dụ 5: [Sở GD _ ĐT Kiên Giang năm 2015 - 2016]

Một tổ công nhân phải may xong 420 bộ đồng phục trong khoảng thời gian nhất định. Nếu thêm 3 công nhân vào tổ thì mỗi người sẽ may ít hơn lúc ban đầu là 7 bộ đồng phục. Tính số công nhân có trong tổ lúc đầu.

Giải:

Gọi số công nhân của tổ lúc đầu là x (công nhân) thì số công nhân của tổ lúc sau là $x+3$ (công nhân).

Suy ra số bộ đồng phục mỗi người phải may lúc đầu là $\frac{420}{x}$ (bộ).

Suy ra số bộ đồng phục mỗi người phải may lúc sau là $\frac{420}{x+3}$ (bộ).

Theo đề bài ta có $\frac{420}{x} = \frac{420}{x+3} + 7$.

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$.

Vậy số công nhân của tổ lúc đầu là 12 người.

Ví dụ 6: [Sở GD _ ĐT Bình Dương 2016 - 2017]

Một công ty vận tải dự định dùng loại xe lớn để chở 20 tấn rau theo một hợp đồng. Nhưng khi vào việc, công ty không còn xe lớn nên phải thay bằng những xe có trọng tải nhỏ hơn 1 tấn. Để đảm bảo thời gian đã hợp đồng, công ty phải dùng một số lượng xe nhiều hơn số xe dự định là 1 xe. Hỏi trọng tải của mỗi xe nhỏ là bao nhiêu tấn?

Giải:

Gọi trọng tải của mỗi xe nhỏ là x (tấn) ($x > 0$).

Trọng tải của mỗi xe lớn là $x+1$ (tấn)

Số xe (lớn) dự định phải dùng là $\frac{20}{x+1}$ (xe); số xe (nhỏ) thực tế phải dùng là $\frac{20}{x}$ (xe)

Vì số xe nhỏ thực tế phải dùng nhiều hơn dự định 1 xe nên:

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{x+1} = 1$$

$$\frac{20}{x(x+1)} = 1 \Leftrightarrow x(x+1) = 20 \Leftrightarrow (x+5)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(TM) \\ x = -5(L) \end{cases}$$

Vậy trọng tải của mỗi xe nhỏ là 4 tấn.

Ví dụ 7: [Chuyên Kiên Giang-2012-2013]

Một phòng họp có 360 chỗ ngồi và được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. Nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì số chỗ ngồi trong phòng không thay đổi. Hỏi ban đầu số chỗ ngồi trong phòng họp được chia thành bao nhiêu dãy?

Giải:

Gọi x (dãy) là số dãy ghế lúc đầu được chia từ số chỗ ngồi trong phòng họp

(Đk: $x \in \mathbb{N}^*$ và $x > 3$).

Số chỗ ngồi ở mỗi dãy lúc đầu: $\frac{360}{x}$ (chỗ)

Do thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy và số chỗ ngồi trong phòng không thay đổi nên ta

$$\text{có phương trình: } \left(\frac{360}{x} + 4\right)(x - 3) = 360 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 270 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ x = -15 (l) \end{cases}$$

Vậy lúc đầu số chỗ ngồi trong phòng họp được chia thành 18 dãy.

Ví dụ 8: [Sở GD _ĐT Nghệ An năm 2015 - 2016]

Số tiền mua 1 quả dừa và một quả thanh long là 25 nghìn đồng. Số tiền mua 5 quả dừa và 4 quả thanh long là 120 nghìn đồng. Hỏi giá mỗi quả dừa và giá mỗi quả thanh long là bao nhiêu ? Biết rằng mỗi quả dừa có giá như nhau và mỗi quả thanh long có giá như nhau.

Giải:

Gọi x, y (nghìn) lần lượt là giá của 1 quả dừa và 1 quả thanh long.

Điều kiện : $0 < x ; y < 25$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 25 \\ 5x + 4y = 120 \end{cases}$

Giải ra ta được : $x = 20, y = 5$ (thỏa mãn điều kiện bài toán).

Vậy : Giá 1 quả dừa 20 nghìn.

Giá 1 quả thanh long 5 nghìn.

Ví dụ 9: [Sở GD _ĐT Hòa Bình năm 2015 - 2016]

Năm học 2014 – 2015 hai trường A và B có tổng số 390 học sinh thi đỗ vào đại học đạt tỉ lệ 78%, biết trường A có tỉ lệ đỗ đại học là 75%, trường B có tỉ lệ đỗ đại học là 80%. Tính số học sinh dự thi đại học năm học 2014 – 2015 ở mỗi trường.

Giải:

Gọi số học sinh dự thi đại học ở trường A và trường B lần lượt là x và y (học sinh) ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

Tổng số học sinh 2 trường thi đỗ là 390 và tỉ lệ đỗ đại học của cả hai trường là 78% $\Rightarrow$ Số học sinh dự thi đại học của cả hai trường là $390 : 78\% = 500$ (em)

Suy ra $x + y = 500$ (1)

Tỉ lệ đỗ đại học của trường A là 75% $\Rightarrow$ Trường A có $0,75x$ học sinh đỗ đại học

Tỉ lệ đỗ đại học của trường B là 80% $\Rightarrow$ Trường B có $0,8x$ học sinh đỗ đại học

Suy ra $0,75x + 0,8y = 390$ (2)

Từ (1) và (2) giải hệ phương trình ta có $x = 200; y = 300$.

Vậy số học sinh dự thi đại học ở trường A và trường B lần lượt là 200 và 300 học sinh.

Ví dụ 10: [Sru tầm]

Khi thêm 200g Axít vào dung dịch Axít thì dung dịch mới có nồng độ A xít là 50%. Lại thêm 300gam nước vào dung dịch mới ,ta được dung dịch A xít có nồng độ là 40%. Tính nồng độ A xít trong dung dịch đầu tiên.

Giải:

Khối lượng nước trong dung dịch đầu tiên là x gam, khối lượng A xít trong dung dịch đầu tiên là y gam Sau khi thêm, 200 gam A xít vào dung dịch A xít ta có lượng A xít là: $(y + 200)$ gam và nồng độ là 50% Do đó ta có: $\frac{y + 200}{y + 200 + x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x - y = 200 \quad (1)$

Sau khi thêm 300 gam nước vào dung dịch thì khối lượng nước là: $(x + 300)$ gam và nồng độ là 40%(=2/5) nên ta có: $\frac{y + 200}{y + 200 + x + 300} = \frac{2}{5} \Rightarrow 2x - 3y = 0 \quad (2)$

Giải hệ (1) và (2) ta được $x = 600$; $y = 400$ Vậy nồng độ A xít là: $\frac{400}{600 + 400} = 40\%$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 1: [Sở GD _ĐT Quảng Ninh năm 2014 - 2015]

Một phòng họp có 360 ghế được xếp thành từng hàng và mỗi hàng có số ghế ngồi Một phòng họp có 360 ghế được xếp thành từng hàng và mỗi hàng có số ghế ngồi thêm một ghế mới đủ chỗ. Tính xem lúc đầu phòng họp có bao nhiêu hàng ghế và mỗi hàng có bao nhiêu ghế? (Biết rằng mỗi hàng ghế không có nhiều hơn 20 ghế)

Giải:

Gọi số hàng ghế là x ($x \in \mathbb{N}^*, x < 360$)

Gọi số ghế trên mỗi hàng ban đầu là y ($y \in \mathbb{N}^*, y \leq 20$)

Vì 360 ghế được xếp thành x hàng và mỗi hàng có y ghế nên ta có phương trình:

$$xy = 360 \quad (1)$$

Phải kê thêm một hàng ghế nên số hàng ghế sau đó là $x + 1$ (hàng)

Mỗi hàng ghế phải kê thêm một ghế nên số ghế mỗi hàng sau đó là $y + 1$ (ghế)

Vì 400 người ngồi đủ $x + 1$ hàng, mỗi hàng $y + 1$ ghế nên ta có phương trình:

$$(x + 1)(y + 1) = 400 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy = 360 \\ (x + 1)(y + 1) = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 360 \\ xy + x + y + 1 = 400 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 39 \\ xy = 360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = (24; 15) (TM) \\ (x; y) = (15; 24) (L) \end{cases}$$

Vậy có 15 hàng, mỗi hàng 24 ghế..

Câu 2: [Sở GD _ĐT Nghệ An 2016 - 2017]

Trong kì thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT tỉnh Nghệ An, tại một phòng có 24 thí sinh dự thi. Các thí sinh đều làm bài trên tờ giấy thi của mình. Sau khi thu bài cán bộ coi thi đếm được 33 tờ giấy thi và bài làm của thí sinh chỉ gồm 1 tờ hoặc 2 tờ giấy thi. Hỏi trong phòng thi đó có bao nhiêu thí sinh bài làm gồm một tờ giấy thi, bao nhiêu thí sinh bài làm gồm hai tờ giấy thi? (Tất cả các thí sinh đều nộp bài thi).

Giải:

Gọi số thí sinh làm bài chỉ gồm 1 tờ giấy thi là x (thí sinh) ($x \in \mathbb{N}^*, x < 24$)

Số học sinh làm bài gồm 2 tờ giấy thi là y (thí sinh) ($y \in \mathbb{N}^*, y < 24$)

1 phòng có 24 thí sinh dự thi do đó ta có: $x + y = 24 \quad (1)$

Sau khi thu bài cán bộ coi thi đếm được 33 tờ giấy thi nên ta có phương trình: $x + 2y = 33$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ
$$\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 2y = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 9 \end{cases} \text{ (TM)}$$

Vậy số học sinh làm 1 tờ và 2 tờ giấy thi lần lượt là 15 và 9 học sinh.

Câu 3: [Sở GD - ĐT Hòa Bình năm 2014 - 2015]

Có hai can đựng dầu, can thứ nhất đang chứa 38 lít và can thứ hai đang chứa 22 lít. Nếu rót từ can thứ nhất sang cho đầy can thứ hai thì lượng dầu trong can thứ nhất chỉ còn lại một nửa thể tích của nó. Nếu rót từ can thứ hai sang cho đầy can thứ nhất thì lượng dầu trong can thứ hai chỉ còn lại một phần ba thể tích của nó. Tính thể tích của mỗi can.

Giải:

Gọi thể tích của can thứ nhất và can thứ hai lần lượt là x và y (lít) ($x > 38, y > 22$).

Rót từ can 1 sang cho đầy can 2, thì lượng rót là $y - 22$ (lít), nên can 1 còn $38 - (y - 22) = 60 - y$ (lít), bằng 1 nửa thể tích can 1 do đó $x = 2(60 - y) \Leftrightarrow x + 2y = 120$ (1)

Rót từ can 2 sang cho đầy can 1, thì lượng rót là $x - 38$ (lít), nên can 2 còn $22 - (x - 38) = 60 - x$ (lít), bằng một phần ba thể tích can 2 do đó $y = 3(60 - x) \Leftrightarrow 3x + y = 180$ (2)

Từ (1) và (2), giải hệ ta có $x = 48; y = 36$ (tm)

Vậy thể tích của can thứ nhất và can thứ hai lần lượt là 48 lít và 36 lít.

Câu 4: [Sở GD - ĐT Bắc Giang năm 2014 - 2015]

Hai lớp 9A và 9B có tổng số 82 học sinh. Trong dịp tết trồng cây năm 2014, mỗi học sinh lớp 9A trồng được 3 cây, mỗi học sinh lớp 9B trồng được 4 cây nên cả hai lớp trồng được tổng số 288 cây. Tính số học sinh mỗi lớp

Giải:

Gọi x, y lần lượt là số học sinh của lớp 9A và lớp 9B ($x, y \in \mathbb{N}, x, y < 82$)

Tổng số học sinh của hai lớp là 82 $\Rightarrow x + y = 82$ (1)

Mỗi học sinh lớp 9A và 9B lần lượt trồng được 3 cây và 4 cây nên tổng số cây hai lớp trồng là $3x + 4y$ (cây). Theo bài ra ta có $3x + 4y = 288$ (2)

Giải hệ hai phương trình (1) và (2) ta có
$$\begin{cases} x = 40 \\ y = 42 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số học sinh lớp 9A và 9B lần lượt là 40 và 42.

Câu 5: [Kiên Giang, 2012-2013]

Trong đợt quyên góp ủng hộ người nghèo, lớp 9A và 9B có 79 học sinh quyên góp được 975000 đồng. Mỗi học sinh lớp 9A đóng góp 10000 đồng, mỗi học sinh lớp 9B đóng góp 15000 đồng. Tính số học sinh mỗi lớp.

Giải:

Gọi x là số học sinh lớp 9A ($x \in \mathbb{N}^*$ và $x < 79$).

$\Rightarrow$ Số học sinh lớp 9B là: $79 - x$ (học sinh)

Lớp 9A quyên góp được: $10000x$ (đồng)

Lớp 9B quyên góp được: $15000(79 - x)$ (đồng)

Do cả hai lớp quyên góp được 975000 đồng nên ta có phương trình:

$$10000x + 15000(79 - x) = 975000 \Leftrightarrow 10x + 15(79 - x) = 975 - 5x = -210x = 42$$

Vậy lớp 9A có 42 học sinh; lớp 9B có: $79 - 42 = 37$ (học sinh).

Câu 6: [Lạng Sơn, 2012-2013]

Trong tháng thanh niên Đoàn trường phát động và giao chỉ tiêu mỗi chi đoàn thu gom 10kg giấy vụn làm kế hoạch nhỏ. Để nâng cao tinh thần thi đua bí thư chi đoàn 10A chia các đoàn viên trong lớp thành hai tổ thi đua thu gom giấy vụn. Cả hai tổ đều rất tích cực. Tổ 1 thu gom vượt chỉ tiêu

30%, tổ hai gom vượt chỉ tiêu 20% nên tổng số giấy chi đoàn 10A thu được là 12,5 kg. Hỏi mỗi tổ được bí thư chi đoàn giao chỉ tiêu thu gom bao nhiêu kg giấy vụn?

Giải:

Gọi số kg giấy vụn tổ 1 được bí thư chi đoàn giao là x (kg) (Đk : $0 < x < 10$)

Số kg giấy vụn tổ 2 được bí thư chi đoàn giao là y (kg) (Đk : $0 < x < 10$)

Theo đầu bài ta có hpt:
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 1,3x + 1,2y = 12,5 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được : $(x; y) = (5; 5)$

Trả lời : số giấy vụn tổ 1 được bí thư chi đoàn giao là 5 kg

Số giấy vụn tổ 2 được bí thư chi đoàn giao là 5 kg.

Câu 7: [Chuyên Hoàng Văn Thụ, 2012-2013]

Tìm một số có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 5 và nếu đem số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 7 và dư là 6.

Giải:

Gọi số cần tìm có 2 chữ số là $\overline{ab}$, với $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $a \neq 0$.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ 10a + b = 7(a + b) + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 5 \\ 3a - 6b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 5 \\ a - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 5 \\ a - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 3 \end{cases}$$

Câu 8: [Sở GD _ĐT Cần Thơ 2016 - 2017]

Anh Bình đến siêu thị để mua một cái bàn ủi và một cái quạt điện với tổng số tiền theo giá niêm yết là 850 ngàn đồng. Tuy nhiên, thực tế khi trả tiền, nhờ siêu thị khuyến mãi để tri ân khách hàng nên giá của bàn ủi và quạt điện đã lần lượt giảm bớt 10% và 20% so với giá niêm yết. Do đó, anh Bình đã trả ít hơn 125 ngàn đồng khi mua hai sản phẩm trên. Hỏi số tiền chênh lệch giữa giá bán niêm yết với giá bán thực tế của từng loại sản phẩm mà anh Bình đã mua là bao nhiêu?

Giải:

Gọi số tiền mua 1 cái bàn ủi với giá niêm yết là x (ngàn đồng) ($0 < x < 850$) .

Số tiền mua 1 cái quạt điện với giá niêm yết là y (ngàn đồng) ($0 < y < 850$) .

Tổng số tiền mua bàn ủi và quạt điện là 850 ngàn đồng nên ta có phương trình:

$$x + y = 850 \quad (1)$$

Số tiền thực tế để mua 1 cái bàn ủi là: $\frac{90}{100}x = \frac{9}{10}x$

Số tiền thực tế để mua 1 cái quạt điện là: $\frac{80}{100}y = \frac{8}{10}y$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{9}{10}x + \frac{8}{10}y = 850 - 125$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 850 \\ \frac{9}{10}x + \frac{8}{10}y = 725 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 450 \\ y = 400 \end{cases}$$

Số tiền thực tế mua 1 cái bàn ủi là: $\frac{9}{10}.450 = 405$ (ngàn đồng)

Số tiền thực tế mua 1 cái quạt điện là: $\frac{8}{10}.400 = 320$. (ngàn đồng)

Vậy số tiền chênh lệch giữa giá bán niêm yết và giá bán thực tế của 1 cái bàn ủi là: $450 - 405 = 45$ (ngàn đồng)

Vậy số tiền chênh lệch giữa giá bán niêm yết và giá bán thực tế của 1 cái quạt điện là:
 $400 - 320 = 80$ (ngàn đồng)
 ĐS. 45 và 80 (ngàn đồng)

Câu 9: [Số GD – ĐT Tây Ninh năm 2014 - 2015]

Lớp 9A dự định trồng 420 cây xanh. Đến ngày thực hiện có 7 bạn không tham gia do được triệu tập học bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi của nhà trường nên mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 3 cây mới đảm bảo kế hoạch đặt ra. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh.

Giải:

Gọi số học sinh lớp 9A là x ($x \in \mathbb{Z}^+$, $x > 7$).

Theo kế hoạch, mỗi em phải trồng $\frac{420}{x}$ (cây)

Trên thực tế số học sinh còn lại là: $x - 7$.

Trên thực tế, mỗi em phải trồng $\frac{420}{x-7}$ (cây)

Do lượng cây mỗi em trồng trên thực tế hơn 3 cây so với kế hoạch nên ta có phương trình:

$$\frac{420}{x-7} - \frac{420}{x} = 3 \quad (x > 7)$$

$$\Leftrightarrow 420x - 420(x-7) = 3x(x-7) \Leftrightarrow 3x^2 - 21x - 2940 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 980 = 0 \Leftrightarrow (x-35)(x+28) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 35(TM) \\ x = -28(L) \end{cases}$$

Vậy lớp 9A có 35 học sinh.

Câu 10: Phải dùng bao nhiêu lít nước sôi 100°C và bao nhiêu lít nước lạnh 20°C để có hỗn hợp 100 lít nước ở nhiệt độ 40°C .

Giải:

Gọi khối lượng nước sôi là x Kg thì khối lượng nước lạnh là: $100 - x$ (kg)

Nhiệt lượng nước sôi tỏa ra khi hạ xuống đến 40°C là: $x(100 - 40) = 60x$ (Kcal)

Nhiệt lượng nước lạnh tăng từ 20°C đến 40°C là: $(100 - x) \cdot 20$ (Kcal)

Vì nhiệt lượng thu vào bằng nhiệt lượng tỏa ra nên ta có: $60x = (100 - x) \cdot 20$.

Giải ra ta có: $x = 25$. Vậy khối lượng nước sôi là 25 Kg; nước lạnh là 75 Kg tương đương với 25 lít và 75 lít.

Câu 11: Hưởng ứng phong trào “*Vì biển đảo Trường Sa*” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở ít hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau?

Giải:

Gọi x (chiếc) số tàu dự định của đội ($x \in \mathbb{N}^*$, $x < 140$).

số tàu tham gia vận chuyển là $x + 1$ (chiếc)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định: $\frac{280}{x}$ (tấn)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc thực tế: $\frac{286}{x+1}$ (tấn)

Theo đề bài ta có pt: $\frac{280}{x} - \frac{286}{x+1} = 2$

$$280(x+1) - 286x = 2x(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 140 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -14(l) \end{cases}$$

Vậy đội tàu lúc đầu là 10 chiếc

Câu 12: Tìm hai số biết tổng bằng 19 và tổng các bình phương của chúng bằng 185

Giải:

Gọi số thứ nhất là x , ($0 < x < 19$).

Ta có số thứ hai là $19 - x$.

Vì tổng các bình phương của chúng bằng 185 do đó ta có phương trình: $x^2 + (19 - x)^2 = 185$

$$\text{Giải phương trình ta được } x^2 + (19 - x)^2 = 185 \Leftrightarrow x^2 - 19x + 88 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = 8 \end{cases}$$

Vậy hai số phải tìm là 11 và 8.

Câu 13: Trong dịp kỷ niệm 57 năm thành lập nước CHXHCNVN, 180 học sinh được điều về tham quan

diễn hành, người ta tính: nếu dùng loại xe lớn chuyên chở một lượt hết số học sinh thì phải điều động ít hơn dùng loại xe nhỏ là 2 chiếc. Biết rằng mỗi ghế ngồi 1 học sinh và mỗi xe lớn nhiều hơn xe nhỏ là 15 chỗ ngồi. Tính số xe lớn, nếu loại xe đó được huy động.

Giải:

Gọi số xe lớn là x (chiếc), x nguyên dương.

Ta có số xe nhỏ là $x + 2$.

Ta có số học sinh xe lớn chở được là $\frac{180}{x}$ (hs).

Ta có số học sinh xe nhỏ chở được là $\frac{180}{x+2}$ (hs).

Vì mỗi xe lớn nhiều hơn xe nhỏ là 15 chỗ ngồi, ta có phương trình: $\frac{180}{x} - \frac{180}{x+2} = 15$.

Giải phương trình ta được $x = 4$. Vậy số xe lớn là 4.

Câu 14: Năm ngoái dân số của hai tỉnh A và B là 4 triệu người. Dân số tỉnh A năm nay tăng 1,2% còn

tỉnh B tăng 1,1%, tổng dân số của hai tỉnh năm nay là 4045000 người. Tính dân số mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay.

Giải:

Gọi dân số năm ngoái của tỉnh A là x (x nguyên dương), $x < 4$ triệu.

Gọi dân số năm ngoái của tỉnh B là y (y nguyên dương), $y < 4$ triệu.

Vì dân số năm ngoái của hai tỉnh là 4 triệu nên ta có phương trình (1): $x + y = 4$.

Vì dân số năm nay của tỉnh A tăng 1,2%, tỉnh B tăng 1,1% do đó ta có phương trình (2) :

$$\frac{1,2x}{100} + \frac{1,1y}{100} = 0,045.$$

Theo đề bài ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{1,2x}{100} + \frac{1,1y}{100} = 0,045 \end{cases} ;$$

Giải hệ phương trình ta được :
$$\begin{cases} x = 1012000 \\ y = 3033000 \end{cases} .$$

Vậy dân số của tỉnh A là 1012000 người, tỉnh B là 3033000 người.

Câu 15: Một phòng họp có 360 Ghế ngồi được xếp thành từng dãy và số Ghế của từng dãy đều như nhau. Nếu số dãy tăng thêm 1 và số Ghế của mỗi dãy tăng thêm 1, thì trong phòng có 400 Ghế. Hỏi trong phòng họp có bao nhiêu dãy Ghế, mỗi dãy có bao nhiêu ghế.

Giải:

Gọi số dãy của ghế của phòng họp là x (dãy), x nguyên dương.

Ta có số người của từng dãy là: $\frac{360}{x}$ người.

Số dãy ghế sau khi tăng thêm 1 dãy là: $(x + 1)$.

Số người sau khi tăng thêm 1 người trên dãy là: $\frac{360}{x} + 1$.

Vì sau khi tăng số dãy tăng thêm 1 và số ghế của mỗi dãy tăng thêm 1, thì trong phòng có 400 Ghế do đó ta có phương trình: $(x + 1)(+1) = 400$; Giải PTBH ta được : $x_1 = 15$, $x_2 = 24$.

Vậy nếu số dãy là 15 thì số ghế trên dãy là 24....

Câu 16: Một đội máy kéo dự định mỗi ngày cày 40 ha. Khi thực hiện mỗi ngày cày được 52 ha, vì vậy đội không những cày xong trước thời hạn 2 ngày mà còn cày thêm được 4 ha nữa. Tính diện tích thửa ruộng mà đội phải cày theo kế hoạch.

Giải:

Gọi diện tích mà đội phải cày theo kế hoạch là x , (ha), $(x > 0)$.

Thời gian đội dự định cày là: $\frac{x}{40}$ (giờ).

Diện tích mà đội thực cày là: $(x + 4)$ (ha).

Thời gian mà đội thực cày là: $\frac{x + 4}{52}$ (giờ).

Vì khi thực hiện đội đã cày xong trước thời hạn 2 ngày do đó ta có phương trình: $\frac{x}{40} - \frac{x + 4}{52} = 2$.

Giải PTBN ta được $x = 360$. Vậy diện tích mà đội dự định cày theo kế hoạch là: 360 ha.

Câu 17: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ

thuật mới nên tổ I đã sản xuất vượt mức kế hoạch là 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ là bao nhiêu.

Giải:

Gọi x là số sản phẩm tổ I hoàn thành theo kế hoạch (sản phẩm), đk $0 < x < 600$.

Số sản phẩm tổ II hoàn thành theo kế hoạch là $600 - x$ (sản phẩm).

Số sản phẩm vượt mức của tổ I là $x \cdot \frac{18}{100}$ (sản phẩm).

Số sản phẩm vượt mức của tổ II là $(600 - x) \cdot \frac{21}{100}$ (sản phẩm).

Vì số sản phẩm vượt mức kế hoạch của hai tổ là 120 sản phẩm ta có pt

$$\frac{18x}{100} + \frac{21(600 - x)}{100} = 120 \Leftrightarrow x = 20 \text{ (thỏa mãn yêu cầu của bài toán)}$$

Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ I là 200 (sản phẩm)

Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ II là 400 (sản phẩm)

Câu 18: Người ta trộn 8g chất lỏng này với 6g chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn nó là $0,2\text{g/cm}^3$ để được hỗn hợp có khối lượng riêng $0,7\text{g/cm}^3$. Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

Giải:

Gọi khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là x (g/cm^3). Đk $x > 0,2$.

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $x - 0,2$ (g/cm^3).

Thể tích của chất lỏng thứ nhất là $\frac{8}{x}$ (cm^3)

Thể tích của chất lỏng thứ hai là $\frac{6}{x - 0,2}$ (cm^3)

Thể tích của hỗn hợp là $\frac{8}{x} + \frac{6}{x - 0,2}$ (cm^3)

Theo bài ra ta có pt $\frac{8}{x} + \frac{6}{x - 0,2} = \frac{14}{0,7} \Leftrightarrow 14x^2 - 12,6x + 1,12 = 0$. Giải pt ta được kết quả

$$x_1 = 0,1 \text{ (loại)}; x_2 = 0,8 \text{ (t/m đk)}$$

Vậy khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là $0,8$ (g/cm^3)

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $0,6$ (g/cm^3).

Câu 19: [THPT Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình năm 2014 - 2015]

Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một phòng họp có 440 ghế (mỗi ghế một chỗ ngồi) được xếp thành từng dãy, mỗi dãy có số ghế bằng nhau. Trong một buổi họp có 529 người tham dự nên ban tổ chức phải kê thêm 3 dãy ghế và mỗi dãy tăng thêm 1 ghế so với ban đầu thì vừa đủ chỗ ngồi. Tính số dãy ghế có trong phòng họp lúc đầu.

Giải:

Gọi số dãy ghế ban đầu là x (dãy) ($x \in \mathbb{N}^*$).

Gọi số ghế trong mỗi dãy ban đầu là y (ghế) ($y \in \mathbb{N}^*$).

Số ghế trong cả phòng họp là $x \cdot y$ (ghế). Theo bài ra ta có phương trình

$$xy = 440 \quad (1)$$

Khi kê thêm 3 dãy ghế và mỗi dãy tăng thêm 1 ghế so với ban đầu thì tổng số ghế trong phòng họp là $(x + 3)(y + 1)$ (ghế). Số ghế này vừa đủ chỗ ngồi cho 529 người nên:

$$(x + 3)(y + 1) = 529 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy = 440 \\ (x+3)(y+1) = 529 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 440 \\ xy + x + 3y + 3 = 529 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 440 \\ x + 3y = 86 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 86 - 3y \\ (86 - 3y)y = 440(*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow 3y^2 - 86y + 440 = 0 \Leftrightarrow (y - 22)(3y - 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 22(TM) \Rightarrow x = 20 \\ y = \frac{20}{3}(L) \end{cases}$$

Vậy lúc đầu có 20 dây ghế, mỗi dây có 20 ghế.

Câu 20: [THPT Năng Khiếu HCM năm 2015 - 2016]

Bạn An dự định trong khoảng thời gian từ ngày 1/3 đến ngày 30/4 sẽ giải mỗi ngày 3 bài toán. Thực hiện đúng kế hoạch được một thời gian, vào khoảng cuối tháng 3 (tháng 3 có 31 ngày) thì An bị bệnh, phải nghỉ giải toán nhiều ngày liên tiếp. Khi hồi phục, trong tuần đầu An chỉ giải được 16 bài; sau đó, An cố gắng giải 4 bài mỗi ngày và đến 30/4 thì An cũng hoàn thành kế hoạch đã định. Hỏi An phải nghỉ giải toán bao nhiêu ngày?

Giải:

Từ 1/3 đến 30/4 có 61 ngày.

Số bài toán theo kế hoạch mà An phải giải là $61 \cdot 3 = 183$ (bài)

Gọi: số ngày An giải toán theo đúng kế hoạch là x (ngày). Trong thời gian này, An giải $3x$ (bài)
số ngày An nghỉ giải toán là y (ngày). ($x, y \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq x \leq 30$, y bé nhất)

Khi đó số ngày An giải mỗi ngày 4 bài là $61 - 7 - x - y = 54 - x - y$ (ngày)

Trong thời gian này, An giải được $4(54 - x - y)$ (bài)

Vậy tổng số bài An đã giải là $3x + 16 + 4(54 - x - y)$ (bài)

Theo bài ra ta có phương trình:

$$3x + 16 + 4(54 - x - y) = 183 \Leftrightarrow x + 4y = 49 \Leftrightarrow y = \frac{49 - x}{4}$$

$$\text{Vì } 1 \leq x \leq 30 \Rightarrow y = \frac{49 - x}{4} \geq \frac{49 - 30}{4} = \frac{19}{4}.$$

$$y \text{ là số nguyên, bé nhất} \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 29.$$

Vậy An phải nghỉ ít nhất 5 ngày.

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài toán 1 : Một phòng họp có 360 Ghế ngồi được xếp thành từng dãy và số Ghế của từng dãy đều như nhau. Nếu số dãy tăng thêm 1 và số Ghế của mỗi dãy tăng thêm 1, thì trong phòng có 400 Ghế. Hỏi trong phòng họp có bao nhiêu dãy Ghế, mỗi dãy có bao nhiêu ghế ?

Đáp số: 15 dãy; 24 ghế .

Bài toán 2 : Cho một số có hai chữ số. Tìm số đó, biết rằng tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần, nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được một số theo thứ tự ngược lại với số đã cho..

Đáp số: 54.

Bài toán 3 : Trong tháng đầu hai tổ công nhân sản xuất được 800 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai tổ vượt mức 15%, tổ II sản xuất vượt mức 20%, do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi rằng trong tháng đầu, mỗi tổ công nhân sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

Đáp số: Tổ I : 300, tổ II : 500.

Bài toán 4 : Tìm tất cả các số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng đơn vị nhỏ hơn chữ số hàng chục là 2 và tích của hai chữ số đó của nó luôn lớn hơn tổng hai chữ số của nó là 34.

Đáp số: 86.

Bài toán 5 : Tìm hai số biết rằng tổng của hai số đó bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

(trích Đề thi tuyển sinh THPT 2003-2004, tỉnh Vĩnh Phúc)

Đáp số: 12 và 5 hoặc 4 và 13.

Bài toán 6 : Một phòng họp có 100 người được sắp xếp ngồi đều trên các ghế. Nếu có thêm 44 người thì phải kê thêm hai dãy ghế và mỗi dãy ghế phải xếp thêm hai người nữa. Hỏi lúc đầu trong phòng họp có bao nhiêu dãy ghế?

Đáp số: 10 dãy.

Bài toán 7 : Người ta trộn 4 kg chất lỏng loại I với 3 kg chất lỏng loại II thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 700kg/m^3 . Biết rằng khối lượng riêng của chất lỏng loại I lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng loại II là 200kg/m^3 . Tính khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

Đáp số: 800kg/m^3 ;
 600kg/m^3 .

Bài toán 8 : Trong một trang sách, nếu tăng thêm 3 dòng, mỗi dòng bớt 2 chữ thì số chữ của trang không đổi; nếu bớt đi 3 dòng, mỗi dòng tăng thêm 3 chữ thì số chữ của trang cũng không đổi. Tính số chữ trong trang sách.

Đáp số: 180 chữ.

Bài toán 9 : Một câu lạc bộ có một số ghế quy định. Nếu thêm 3 hàng ghế thì mỗi hàng bớt được 2 ghế.

Nếu bớt đi ba hàng thì mỗi hàng phải thêm 3 ghế. Tính số ghế của câu lạc bộ.

Đáp số: 180 ghế.

Bài toán 10 : Một phòng họp có một số dãy ghế, tổng cộng 40 chỗ. Do phải xếp 55 chỗ nên người ta kê thêm 1 dãy ghế và mỗi dãy xếp thêm 1 chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế trong phòng ?

Đáp số: 4 hoặc 10.

Bài toán 11 : Một tuyến đường sắt có một số ga, mỗi ga có một loại vé đến từng ga còn lại. Biết rằng có tất cả 210 loại vé. Hỏi tuyến đường ấy có bao nhiêu ga?.

Đáp số: 15 ga.

Bài toán 12 : Hai trường A và B của một thị trấn có 210 học sinh thi đỗ hết lớp 9, đạt tỷ lệ trúng tuyển 84%. Tính riêng thì trường A đỗ 80%, trường B đỗ 90%. Tính xem mỗi trường có bao nhiêu học sinh lớp 9 dự thi ?

Đáp số: 126 và 84.

Bài toán 13 : Một phân xưởng theo kế hoạch phải may 1000 bộ quần áo trong thời gian quy định. Khi thực hiện, mỗi ngày xưởng may nhiều hơn 10 bộ và hoàn thành kế hoạch trước 5 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng phải may bao nhiêu bộ quần áo?

Đáp số: 40 bộ quần áo.

Bài toán 14 : Dân số của một thành phố hiện nay là 408 040 người, hàng năm dân số tăng 1%. Hỏi hai năm trước đây, dân số thành phố là bao nhiêu?

Đáp số: 400000.

Bài toán 15 : Mức sản xuất của một xí nghiệp cách đây hai năm là 75000 dụng cụ một năm, hiện nay là 90750 dụng cụ một năm. Hỏi năm sau xí nghiệp làm tăng hơn năm trước bao nhiêu phần trăm?

Đáp số: 21%.

Bài toán 16 : Có hai loại quặng chứa 75% sắt và 50% sắt. Tính khối lượng của mỗi loại quặng đem trộn để được 25 tấn quặng chứa 66% sắt.

Đáp số: 16 tấn và 9 tấn.

Bài toán 17 : Tuổi hai anh em cộng lại bằng 21. Tuổi anh hiện nay gấp đôi tuổi em lúc anh bằng tuổi em hiện nay. Tính tuổi mỗi người hiện nay.?

Đáp số: 14 và 7.

Bài toán 18 : Tìm hai số biết rằng bốn lần số thứ hai cộng với năm lần số thứ nhất bằng 18040, và ba lần số số thứ nhất hơn hai lần số thứ hai là 2002.

Đáp số: 2004 và 2005.

Bài toán 19 : Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 59, hai lần số này bé hơn ba lần số kia là 7. Tìm hai số đó.

Đáp số: 34 và 25.

Bài toán 20 : Vào thế kỷ thứ III trước Công Nguyên, vua xứ Xiracut giao cho Acsimét kiểm tra xem chiếc mũ bằng vàng của nhà vua có bị pha thêm bạc hay không. Chiếc mũ có trọng lượng 5 Niuton (theo đơn vị hiện nay), nhúng trong nước thì trọng lượng giảm 0,3 Niuton. Biết rằng khi cân trong nước, vàng giảm $\frac{1}{20}$ trọng lượng, bạc giảm $\frac{1}{10}$ trọng lượng. Hỏi chiếc mũ chứa bao nhiêu gam vàng, bao nhiêu gam bạc?

(Vật có khối lượng 100 gam thì có trọng lượng 1 Niuton).

Đáp số: 400g vàng, 100g bạc.