SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH HẬU GIANG

TRƯỜNG THPT CHUYÊN VỊ THANH

TỔ TOÁN

LÍ THUYẾT SỐ

(Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi)

GV: Trần Quang Thọ

NĂM HỌC 2020 - 2021

CHUYÊN ĐỀ. LÍ THUYẾT SỐ

PHẦN MỞ ĐẦU

Số học hay đa thức đều là các chủ đề thường xuyên xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi cấp quốc gia, các kì thi khu vực cũng như quốc tế với các bài toán khó tới rất khó được các nước cũng như các thầy cô phát triển rất nhiều. Đa thức là mảng mà chứa đựng trong nó các yếu tố về đại số, giải tích, hình học và cả các tính chất về số học. Chính vì thế ta có thể’ xem đa thức có thể’ xem như là các bài toán tổ hợp giữa các mảng khác của Toán học cũng như đóng vai trò liên kết các mảng đó lại với nhau thành một thể’ thống nhất. Điều lí thú là nhiều mệnh đề khó nhất của số học được phát biểu rất đơn giản, ai cũng hiểu được ; nhiều bài toán khó nhưng có thể giải rất sáng tạo với những kiến thức số học phổ’ thông đơn giản. Không ở đâu như trong số học,chúng ta lại có thể’ lần theo được dấu vết của những bài toán cổ xưa để’ đến được với những vấn đề mới đang còn chờ đợi người giải - Trích từ cuốn sách Số học - Bà chúa của toán học - Hoàng Chúng. Chính vì thế sự kết hợp của 2 mảng kiến thức này sẽ mang tới cho chúng ta những bài toán đẹp nhưng vẻ đẹp thì không bao giờ là dễ để chúng ta chinh phục cả, nó luôn ẩn chứa những điều khó khăn và "nguy hiểm". Trong chủ đề của bài viết này, chúng ta sẽ đi khám phá cũng như chinh phục phần nào vẻ đẹp của sự kết hợp đó.

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Số chính phương

- Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên
- Số chính phương n^2 tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Số nguyên tố - Hợp số

- Số nguyên tố là số nguyên lớn hơn 1 và chỉ có 2 ước số là 1 và chính nó.
- Các số nguyên tố 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, ….

Nếu số nguyên a > 1 và không chia hết cho số nguyên tố $\le \sqrt{a}$ thì a nguyên tố

- Số nguyên lớn hơn 1, không phải số nguyên tố gọi là hợp số.
- Phân tích số tự nhiên m lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất $m = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$

- Số các ước nguyên dương của m là $d(m) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$

- Tổng các ước nguyên dương của m là $\sigma(m) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}.\frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1}...\frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$

Số nguyên tố cùng nhau – Số nguyên – Số hữu tỉ

- Nếu hai số nguyên a, b trong đó có ít nhất một khác 0 thì ƯCLN d = (a, b), (a, b) = ax + by với x, y nguyên, (a, b) = (a, a $\pm$ b) và BCNN $m = [a, b]$ thì $(a, b).[a, b] = a.b$, $\left(\frac{m}{a}, \frac{m}{b}\right) = 1$

- Nếu (a, b) = 1 thì a và b nguyên tố cùng nhau. Nếu (a, b) = 1 thì $(a^n, b^n) = 1$.

- Các số nguyên dương a và b nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại các số nguyên x và y sao cho: ax + by = 1.

- Hàm Ơle $\phi(m)$: các số bé hơn số nguyên dương m và nguyên tố cùng nhau với m.

Nếu $m = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ thì $\phi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$

Nếu m = p nguyên tố thì $\phi(p) = p - 1$

Nếu (a, b) = 1 thì $\phi(ab) = \phi(a).\phi(b)$

- Số hữu tỉ có dạng $p = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N^*$

Phần nguyên – phần lẻ

- Phần nguyên của số thực x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, kí hiệu [x], nghĩa là $[x] \le x < [x] + 1$

- Nếu x = m + r với m nguyên và $0 \le r < 1$ thì [x] = m và r gọi là phần lẻ, r = {x}.

- Nếu n nguyên thì [n + x] = n + [x] với mọi x

Chứng minh chia hết

- Phép chia số nguyên a cho số nguyên b $\neq$ 0: a = b.q + r với thương q nguyên và dư r nguyên thỏa $0 \le r < |b|$. Nếu r = 0 thì số nguyên a chia hết cho số nguyên $b \neq 0$ (b chia hết a, a là bội số của b, b là ước của a), kí hiệu a ⋮ b hay $b \mid a$.

- Dấu hiệu chia hết cho 2 là số chẵn; cho 5 là chữ số tận cùng 0, 5; cho 4 (hoặc 25) là hai chữ số tận cùng⋮4 (hoặc 25); cho 8 (hoặc 125) là ba chữ số tận cùng ⋮8 (hoặc 125); cho 3 (hoặc) 9 là tổng các chữ số⋮3 (hoặc 9); cho 11 là hiệu của tổng các chữ số hàng thứ chẵn với hàng thứ lẻ ⋮ 11.

Dư và đồng dư

- Cho số nguyên m > 1. Nếu hai số a, b có cùng dư khi chia cho m thì a đồng dư với b theo modun m, kí hiệu $a \equiv b$ (modm)

Nếu $a \equiv b$ (modm), $c \equiv d$ (modm) thì

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m},\ ac \equiv bd \pmod{m}$$

- Định lý Ơle: với (a, m) = 1 thì $a^{\phi(m)} = 1 \pmod{m}$

- Định lý Fecma: với p nguyên tố thì $a^p \equiv a \pmod{p}$

với (a, p) = 1 thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

- Tập $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ là hệ thăng dư đầy đủ modulo m nếu với mọi i, $0 \le i \le m-1$, tồn tại duy nhất j sao cho $a_j \equiv i \pmod{m}$

- Định lý phần dư Trung Hoa:

Nếu r và s là 2 số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, a và b là 2 số nguyên bất kì, thì hệ 2 phương trình đồng dư: $N \equiv a \pmod{r}$ và $N \equiv b \pmod{s}$ có nghiệm duy nhất N theo modulo (rs).

Tổng quát: Nếu $m_1, m_2, ..., m_k$ là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một và $a_1, a_2, ..., a_k$ là các số nguyên, thì hệ k phương trình đồng dư: $x \equiv a_i \pmod{m_i}$; I = 1, 2 …, k có nghiệm x nguyên duy nhất theo modulo $M = m_1.m_2...m_k$.

Chú ý:

1) Nếu a tận cùng 0, 1, 5, 6 thì a^n cũng tận cùng 0, 1, 5, 6 tương ứng. Vì $\phi(10) = 4$, nếu n = 4k + r và nếu a tận cùng 3, 7 thì chữ số tận cùng của a^n là chữ số tận cùng của a^r, còn nếu a tận cùng 2 thì chữ số tận cùng của a^n là chữ số tận cùng của 6.2^r.

2) Nếu a tận cùng là x thì a^{20} có hai chữ số tận cùng là 2 chữ số tận cùng của x^{20}. Tìm hai chữ số tận cùng của a^n đưa về tìm dư trong phép chia n cho 20.

3) Hệ nhị phân của số tự nhiên $k = a.2^n + a_{n-1}2^{n-1} + ... + a_1 2 + a_0$ là $k = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ (2) với $a_i \in \{0;1\}$, $a_n \ne 0$.

Tổng quát, số tự nhiên s viết trong hệ g – phân nếu:

$s = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + ... + a_1 g + a_0$ là $s = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ (g)

Với $a_i \in \{0, 1, ..., g-1\}$, $a_n \ne 0$

4) Phương trình Pell: Nếu (a, b) là nghiệm nguyên dương bé nhất của phương trình $x^2 - dy^2 = 1$ thì mọi nghiệm nguyên dương đều có dạng:

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(\frac{\left(a+b\sqrt{d}\right)^n + \left(a-b\sqrt{d}\right)^n}{2}, \frac{\left(a+b\sqrt{d}\right)^n - \left(a-b\sqrt{d}\right)^n}{2\sqrt{d}} \right)$$

II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1. Chứng minh

a) $70.27^{1001} + 31.38^{101}$ chia hết cho 13.

b) Nếu ba số a, a + k và a + 2k đồng thời là ba số nguyên tố phân biệt lớn hơn 2 thì $k \vdots 6$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $27 \equiv 1 \bmod (13) \Rightarrow 27^{1001} \equiv 1 \bmod (13)$

Và $38 \equiv -1 \bmod (13) \Rightarrow 38^{101} \equiv -1 \bmod (13)$

$\Rightarrow 27^{1001} = 13n + 1 (n \in N)$ và $38^{101} = 13m - 1 (m \in N)$

$\Rightarrow 70.27^{1001} + 31.38^{101} = 70(13n+1) + 31(13m-1) = (70n + 31m)13 + 39 \Rightarrow$ đpcm.

b) Ta biết rằng các số nguyên tố lớn hơn 3 có thể biểu diễn dưới dạng 6p + 1 hoặc 6p + 5 (p nguyên dương) [(*)] ?

Ba số a, a + k, a + 2k lớn hơn 3 chỉ có thể biểu diễn trong hai dạng nên theo nguyên tắc Đirichlê, nhất định phải có hai số được biểu diễn trong cùng một dạng, chẳng hạn đó là 6p + r và 6s + r với r là 1 hoặc 5. Hiệu của hai số này bằng 6s – 6p = 6 (s – p) $\vdots$ 6. Mặt khác hiệu của hai trong ba số trên hoặc bằng k hoặc bằng 2k nên k $\vdots$ 3, nhưng k là số chẵn nên k $\vdots$ 6.

Bài toán 2. Chứng minh với mọi m, tồn tại số nguyên n để:

$n^3 - 11n^2 - 87n + m$ chia hết cho 191.

Hướng dẫn giải

Đặt $P(x) = x^3 - 11x^2 - 87x + m$

Giả sử: $P(x) \equiv (x+a)^3 + b (\bmod 191)$

$\Leftrightarrow x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 + b \equiv x^3 - 11x^2 - 87x + m(\bmod(191))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a \equiv -11(\bmod 191) & (1) \\ 3a^2 \equiv -87(\bmod 191) & (2) \\ b \equiv m - a^3(\bmod 191) & (3) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow 3a \equiv 180(\bmod 191) \Leftrightarrow a \equiv 90(\bmod 191)$

$\Rightarrow 3a^2 \equiv -87(\bmod 191)$. Vậy $\forall m \in Z$, tồn tại số nguyên a, b để:

$P(x) = (x + a^3) + b \pmod{191}$

Nhận xét: 191 là số nguyên tố dạng 191 = 3k + 2

$P(i) \equiv P(j) \pmod{191} \Rightarrow (i + a)^3 \equiv (j + a)^3 \pmod{191}$

Đặt u = i + a, v = j + a thì $u^3 \equiv v^3 \pmod{191}$

$\Rightarrow u^{3k} \equiv v^{3k} \pmod{191}$

$u^{3k}v^2 \equiv v^{3k+2} \equiv v^{191} \pmod{191} = v \pmod{191}$ (định lý Ferma) (1)

$\Rightarrow v^2 \equiv u^{3k}v^3 \equiv u^{3k+3} \pmod{191}$

$\Rightarrow u^{3k}v^2 \equiv u^{3k}.u^{3k+3} \equiv u^{3k+1}.u^{3k+2} \equiv u^{3k+1}.u^{191} \equiv u^{3k+1}.u \pmod{191}$

$\equiv u^{3k+2} \equiv u^{191} \equiv u \pmod{191}$ (2)

(1) và (2) suy ra: $u \equiv v \pmod{191} \Rightarrow i \equiv j \pmod{191}$

Nếu $\forall i, j \in \{1, 2, ..., 191\}; i \neq j \pmod{191}$ thì $P(i) \neq P(j) \pmod{191}$

Suy ra tồn tại $n \in \{1, 2, ..., 191\}$ sao cho P (n) = 191 (mod 191) tức là:

$P(n) \equiv 0 \pmod{191}$.

Bài toán 3. Cho x, y là các số nguyên, $x \neq -1; y \neq -1$ sao cho $\frac{x^4 - 1}{y + 1} + \frac{y^4 - 1}{x + 1}$ là số nguyên. Chứng minh $x^4y^{44} - 1$ chia hết cho x + 1

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh $y^4 - 1$ chia hết cho x + 1.

Đặt $\frac{x^4 - 1}{y + 1} = \frac{a}{b}; \frac{y^4 - 1}{x + 1} = \frac{c}{d}$

Trong đó $a, b, c, d \in Z$, (a, b) = 1; (c, d) = 1; b > 0, d > 0

Từ giả thiết, ta có $\frac{ad + bc}{bd}$ nguyên, suy ra d | b và b | d. Mặt khác, do $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}$ nguyên; (a, b) = 1 và (c, d) = 1, nến b = d = 1.

Suy ra $y^4 - 1$ chia hết cho x +1. Từ đó $x^4y^{44} - 1 = x^4(y^{44} - 1) + x^4 - 1$ chia hết cho x + 1 (do $y^{44} - 1$ chia hết cho $y^4 - 1$ nên nó chia hết cho x + 1 và $x^4 - 1$ chia hết cho x + 1).

Bài toán 4. Với mọi số tự nhiên n, chứng minh rằng tổng $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k}$ không chia hết cho 5.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\sqrt{8}$, dùng công thức khai triển nhị thức Newton để biến đổi:

$$\left(1+x\right)^{2n+1}=A+Bx\ (*)\ \text{ với } B=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k}$$

Tương tự: $\left(1-x\right)^{2n+1}=A-Bx$ (**)

Nhân vế theo vế (*) và (**) ta được: $7^{2n+1}=8B^2-A^2$

Mặt khác, $7^{2n+1}\equiv\pm2\left(\bmod 5\right)$

Do vậy, nếu B là bội của 5 thì: $A^2\equiv\pm2\left(\bmod 5\right)$: vô lý.

Bài toán 5. Chứng minh phần nguyên của $\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1}$ thì chia hết cho 2^{n+1} và không chia hết cho 2^{n+2} với mọi n là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{11}-3\right)^{2n+1}$ là số tự nhiên

Mà $\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1}\in\left(0;1\right)$ nên

$$\left[\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1}\right]=\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{11}-3\right)^{2n+1}$$

(Vì $a-b=k\in N\Rightarrow a=k+b$ với $b\in\left(0;1\right)$ nên [a] = k = a – b)

Với n = 0; $\left(\sqrt{11}+3\right)^{1}-\left(\sqrt{11}-3\right)^{1}=6$ chia hết cho $2^{0+1}=2$ nhưng không chia hết cho $2^2=4$.

Mà: $\left(\sqrt{11}+3\right)^{2}-\left(\sqrt{11}-3\right)^{2}=40$ nên với n = 1 thì:

$$\left(\sqrt{11}+3\right)^{3}-\left(\sqrt{11}-3\right)^{3}$$

$$=\left[\underbrace{\left(\sqrt{11}+3\right)-\left(\sqrt{11}-3\right)}_{6}\right]\left[\underbrace{\left(\sqrt{11}+3\right)^2+\left(\sqrt{11}-3\right)^2}_{40}+\underbrace{\left(\sqrt{11}+3\right)\left(\sqrt{11}-3\right)}_{2}\right]=6.42=2^2.3^2.7$$ chia hết cho 2^2 nhưng không chia hết cho 2^3.

Giả sử tính chất này đúng với mọi số tự nhiên k < n. Ta chứng minh tính chất này đúng với k= n. Trước hết, nhận xét rằng:

$$\left(\sqrt{11}+3\right)\left(\sqrt{11}-3\right)=2\Rightarrow\left(\sqrt{11}-3\right)=\frac{2}{\left(\sqrt{11}-3\right)};\left(\sqrt{11}+3\right)=\frac{2}{\left(\sqrt{11}-3\right)}$$

Thật vậy: $\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{11}-3\right)^{2n+1}$

$$=\left[\left(\sqrt{11}+3\right)^2+\left(\sqrt{11}-3\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n-1}-\left(\sqrt{11}-3\right)^{2n-1}\right]$$

$$-\left[\left(\sqrt{11}-3\right)^2\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n-1}-\left(\sqrt{11}+3\right)^2\left(\sqrt{11}-3\right)^{2n-1}\right]$$

$$=40\left[\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n-1}-\left(\sqrt{11}-3\right)^{2n-1}\right]-4\left[\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n-3}-\left(\sqrt{11}-3\right)^{2n-3}\right]$$

$$=2^35.\left[\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n-1}-\left(\sqrt{11}-3\right)^{2n-1}\right]-2^2\left[\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n-3}-\left(\sqrt{11}-3\right)^{2n-3}\right]$$

Vậy $\left[\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1}\right]$ chia hết cho 2^{n+1} nhưng không chia hết cho 2^{n+2}.

Bài toán 6. Cho trước a và b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu số (4ab – 1) là ước số của $\left(4a^2-1\right)^2$ thì a = b.

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại cặp hai số nguyên dương (a, b) sao cho (4ab – 1) là ước số của $\left(4a^2-1\right)^2$ và $a\neq b$ thì ta sẽ gọi các cặp số như vậy là cặp xấu và giả sử (a, b) là cặp xấu có tổng 2a + b nhỏ nhất.

Do $\left(4b^2-1\right)^2\equiv\left(4b^2-\left(4ab\right)^2\right)^2\equiv16b^4\left(4a^2-1\right)^2\equiv0\left(\bmod\left(4ab-1\right)\right)$ nên (b, a) cũng là cặp xấu, vậy $2a+b\le2b+a$ suy ra a < b (do $a\neq b$). Do $\left(4a^2-1\right)^2$ chia 4a dư 1, còn $\left(4ab-1\right)$ chia 4a dư 3, nên số $\dfrac{\left(4a^2-1\right)^2}{4ab-1}$ là số chia 4a dư 3, do đó tồn tại số nguyên dương c sao cho $4ac-1=\dfrac{\left(4a^2-1\right)^2}{4ab-1}$. Vậy (a, c) cũng là cặp xấu.

Từ a < b và $4ac-1=\dfrac{\left(4a^2-1\right)^2}{4ab-1}$ ta có c < b, khi đó 2a + c < 2a + b mâu thuẫn với giả thiết (a, b) là cặp xấu có tổng 2a + b nhỏ nhất. (đpcm).

Bài toán 7. Xác định tất cả các cặp nguyên dương (a, b) sao cho a^2b+a+b chia hết cho ab^2+b+7.

Hướng dẫn giải

Xét a < b thì $b\ge a+1$, do đó:

$$ab^2+b+7>ab^2+b\ge(a+1)(ab+1)=a^2b+a+ab\ge a^2b+a+b$$

Như vậy, ta không tìm được (a, b) thỏa điều kiện bài toán trong trường hợp này.

Xét $a \ge b$. Đặt $k = \dfrac{a^2b+a+b}{ab^2+b+7}$, giả sử k nguyên dương

Ta có: $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b}\right)\left(ab^2+b+7\right) = ab^2+a+ab+7\dfrac{a}{b}+\dfrac{7}{b}+1 > ab^2+a+b$

Suy ra $k < \dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b}$, nếu $b \ge 3$ thì $\left(b-\dfrac{7}{b}\right) > 0$

Suy ra: $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{b}\right)\left(ab^2+b+7\right) = ab^2+a-a\left(b-\dfrac{7}{b}\right)-1-\dfrac{7}{b} < ab^2+a < ab^2+a+b$

Từ đó b = 1, hoặc b = 2, hoặc $k > \dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{b}$

- Nếu $\dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{b} < k < \dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b}$ thì a – 1 < kb < a + 1 nên a = kb.

Điều này cho ta tìm được $(a,b) = (7k^2, 7k)$

- Nếu b = 1 thì (a + 8) chia hết $\left(a^2+a+1\right)$, suy ra (a + 8) chia hết $a\left(a+8\right)-\left(a^2+a+1\right) = 7a-1$, do đó, ta cũng có (a + 8) chia hết $7\left(a+8\right)-\left(7a-1\right) = 57$. Nhưng các ước số lớn hơn 8 của 57 chỉ có 19 và 57, do đó a = 11 hoặc a = 49. Dễ dàng kiểm tra rằng các cặp (a, b) = (11, 1) và (a, b) = (49, 1) thỏa điều kiện bài toán.

- Nếu b = 2 thì (4a + 9) chia hết $\left(2a^2+a+2\right)$, do đó suy ra (4a + 9) chia hết $a\left(4a+9\right)-2\left(2a^2+a+2\right) = 7a-4$. Từ đó, ta cũng có (4a + 9) chia hết $7\left(4a+9\right)-4\left(7a-4\right) = 79$. Nhưng ước số lớn hơn 9 của 79 chỉ có 79, từ đó $a = \dfrac{35}{2}$, không phải số nguyên.

Vậy, các cặp (a, b) thỏa điều kiện bài toán là: (11, 1), (49, 1) và $\left(7k^2, 7k\right)$, với k là số nguyên dương.

Bài toán 8. Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho 5^n là ước số của tích các số tự nhiên từ 1 đến 1000.

Hướng dẫn giải

Số n lớn nhất phải tìm là số thừa số 5 khi phân tích 1 x 2 x 3 x …. x 1000 thành thừa số nguyên tố, nghĩa là n bằng tổng của số các bội số của 5, của 5^2, của 5^3, của 5^4 trong dãy 1, 2, 3, …, 1000.

Các bội của 5 trong dãy 1, 2, 3, …, 1000 là 5, 10, 15, …, 1000 gồm 1000 : 5 = 200 số. Trong đó, các bội của 5^2 là 25, 50, …, 1000 gồm 1000 : 25 = 40 số, các bội của 5^3 là 125, 250, …, 1000 gồm 1000 : 125 = 8 số, các bội của 5^4 là 625 gồm 1 số.

Do đó số thừa số 5 khi phân tích 1 x 2 x 3 x … x 1000 ra thừa số nguyên tố là 200 + 40 + 80 + 1 = 249.

Vậy số n lớn nhất là 249.

Bài toán 9. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương m, n sao cho: 3^m+5^m và 3^n+5^n đồng thời chia hết cho tích số mn.

Hướng dẫn giải

Với m = 1, ta cần: $n\,|\,3^n+5 \Leftrightarrow n\in\{1,2,4,8\}$. Tuy nhiên, chỉ có $n\in\{1,2\}$ thỏa mãn điều kiện $n\,|\,3^n+5^n$. Tương tự, với n = 1 ta có: $m\in\{1,2\}$.

Ta sẽ chứng minh rằng không còn cặp số nguyên dương m, n nào khác thỏa mãn yêu cầu bài toán. (1)

Thật vậy, giả sử $m,n\ge 2$ thỏa ycbt. Đầu tiên, cả hai số m và n không thể cùng là số chẵn bởi vì nếu m và n cùng là số chẵn thì ta có $4\,|\,mn$.

Do đó, $3^m+5^m\equiv 0\pmod 4$

Tuy nhiên, vì m chẵn nên $3^m+5^m\equiv(-1)^m+1\equiv 2\pmod 4$, mâu thuẫn.

Vậy, ta có thể coi m là một số lẻ (m > 2).

Gọi p là ước nguyên tố bé nhất của m, dễ thấy $p\notin\{2,3,5\}$ (2)

Đặc biệt, (5, p) = 1; nên tồn tại số nguyên x để $5x\equiv 1\pmod p$.

Từ $p\,|\,m\,|\,3^m+5^m$ suy ra

$$p\,|\,x^m\left(3^m+5^m\right)=(3x)^m+(5x)^m\Rightarrow(3x)^m\equiv -1\pmod p$$

Vì thế, nếu đặt $h=\mathrm{ord}_p(3x)$, thì h | 2m; ta cũng có: h | p – 1 (định lý nhỏ Fermat và tính chất của cấp), nên: h | (p – 1,2m) = 2 (vì $p-1\,\vdots\,2$ và (p – 1, m) = 1 theo cách chọn (2) của p)

$$p\,|\left[(3x)^h-1\right]-\left[(5x)^h-1\right]=\left(3^h-5^h\right)x^h\Rightarrow p\,|\,3^h-5^h \text{ với } h\in\{1,2\}.$$

Nhưng $3^1-5^1=-2$, $3^2-5^2=-2^4$ nên p = 2, mâu thuẫn với (2).

Do đó (1) đúng, đpcm. Vậy $m,n\in\{1;2\}$

Bài toán 10. Chứng minh rằng, với số nguyên dương m bất kì sẽ tồn tại vô số các cặp số nguyên (x, y) sao cho:

1) x và y nguyên tố cùng nhau

2) y chia hết x^2+m

3) x chia hết y^2+m

Hướng dẫn giải

Giả sử (x, y) là cặp số nguyên thỏa mãn 1), 2), 3). Khi đó ta có $\left(x^2+y^2+m\right)\vdots xy$ hay $x^2+y^2-kxy+m=0$ (1) với $k\in Z$. Ngược lại, dễ thấy nếu cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn (1) với k nguyên nào đó và x, y nguyên tố cùng nhau thì cặp (x, y) đó cũng thỏa mãn 1), 2), 3). Như vậy bài đã ra sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được một số nguyên k sao cho có vô số cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn (1) và x, y nguyên tố cùng nhau.

Chọn k = m + 2. Khi đó (1) trở thành:

$$x^2+y^2-\left(m+2\right)xy+m=0 \qquad (2)$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh có vô số cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn (2) và x < y với x, y nguyên tố cùng nhau. Thật vậy, xét dãy các số nguyên $\left\{x_n\right\}$ được xác định như sau:

$x_1=1,\ x_2=m+1,\ x_{n+2}=\left(m+2\right)x_{n+1}-x_n$

$\forall n=1,2,3...$ Bằng quy nạp theo n dễ dàng chứng minh được:

i) $\left\{x_n\right\}$ là dãy tăng

ii) x_n và x_{n+1} nguyên tố cùng nhau $\forall n=1,2,3...$

iii) Cặp số $\left(x_n,x_{n+1}\right)$ thỏa mãn (2) $\forall n=1,2,3...\Rightarrow$ đpcm

Bài toán 11. Từ dãy mọi số nguyên dương lớn hơn 1, ta lập dãy số tăng dần $a_1,a_2,a_3...$ gồm tất cả các số không là bội của 2 và cũng không là bội của 3. Chứng minh rằng $a_n>3n$ với số nguyên dương n bất kì.

Hướng dẫn giải.

Trong 3n số từ 1 đến 3n ta chia ra từng nhóm ba số liên tiếp dạng 3k + 1; 3k + 2; 3k + 3 với k= 0, 1, 2, …, n – 1.

Trong ba số liên tiếp đó có số 3k + k = 3(k + 1) là bội của 3 và một trong hai số 3k + 1, 3k +2 có một số là bội của 2 nhưng không là bội của 3, do đó phải loại đi 2 trong ba số liên tiếp.

Trong nhóm đầu tiên 1, 2, 3 có ba số đều bị loại. Vậy từ 1 đến 3(k + 1) = 3n ta cần phải loại 2(n – 1) + 3 = 2n + 1 số là chỉ còn lại n – 1 số. Các số này mang chỉ số từ a_1 đến a_{n-1} do đó $a_n>3n$.

Bài toán 12. Tìm tất cả các số

a) Tự nhiên n để các số: n – 1; $n^5+n^4+n^3+13n^2+13n+14$ đều là các số chính phương.

b) Số hữu tỉ x sao cho x^2+x+6 là số chính phương.

Hướng dẫn giải

a) Xét số: $A=\left(n-1\right)\left(n^5+n^4+n^3+13n^2+13n+14\right)=\left(n^3+6\right)^2+n-50$

Từ điều kiện của đề bài suy ra A là số chính phương, vì A là tích của hai số chính phương.

Xét $0 \le n \le 2$. Bằng phép thử trực tiếp dễ thấy A là số chính phương khi và chỉ khi n = 1, nhưng lúc đó $n^5 + n^4 + n^3 + 13n^2 + 13n + 14 = 43$ không là số chính phương.

Xét $3 \le n < 50$, ta suy ra A nằm giữa hai số chính phương liên tiếp $\left(n^3+5\right)^2$ và $\left(n^3+6\right)^2$. Vậy A không là số chính phương mâu thuẫn.

Xét nếu n = 50 thì ta có $A = 125006^2 = 7^2.17858^2$

Xét nếu n > 50 suy ra A nằm giữa hai số chính phương liên tiếp $\left(n^3+6\right)^2$ và $\left(n^3+7\right)^2$ nên A không là số chính phương mâu thuẫn.

Vậy chỉ có n = 50 là đáp số của bài toán.

b) Giả sử $x = \frac{p}{q}$ trong đó $p, q \in Z$, q > 0 và (p, q) = 1 thỏa mãn $\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} + 6 = n^2 \left(n \in Z\right)$. Suy ra $p^2 = q\left(-p - 6p + n^2 q\right)$.

Đẳng thức này cho thấy mọi ước của q đều là ước của p. Nhưng (p, q) = 1 nên phải có q = 1, x = p là số nguyên.

Khi đó $p^2 + p + 6 = n^2 \Leftrightarrow \left(2p+1\right)^2 + 23 = 4n^2 \Leftrightarrow 23 = \left(2n-2p-1\right)\left(2n+2p+1\right)$

Vì 23 là số nguyên tố, các thừa số ở vế phải đều là các số nguyên dương và $2n - 2p - 1 < 2n + 2p + 1$, nên đẳng thức xảy ra khi 2n – 2p – 1 = 1 và 2n + 2p + 1 = 23.

Giải hệ phương trình này ta được p = 5, số này thỏa mãn đề bài.

Bài toán 13. Chứng minh rằng số $A = 1 + 19^{19} + 93^{199} + 1993^{1994}$ không phải là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có $1 \equiv 1\left(\bmod 3\right)$, $9 \equiv 0\left(\bmod 3\right)$ nên $9^{19} \equiv 0\left(\bmod 3\right)$, $93 \equiv 0\left(\bmod 3\right)$ nên $93^{199} \equiv 0\left(\bmod 3\right)$; $1993 \equiv 1\left(\bmod 3\right)$ nên $1993^{1994} = 1\left(\bmod 3\right)$.

Vậy $A \equiv 2\left(\bmod 3\right)$ hay A = 3k + 2 $\left(k \in Z\right)$, nhưng một số chính phương không thể có dạng 3k + 2, nên A không phải là số chính phương.

Tổng quát: Có thể chứng minh rằng số $A = 1 + 9^m + 93^n + 1993^p$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương m, n, p.

Bài toán 14. Chứng minh rằng nếu x, y là các số nguyên thỏa mãn hệ thức

$2x^2 + x = 3y^2 + y$ (1) thì x – y; 2x + 2y + 1 và 3x + 3y + 1 đều là các số chính phương.

Hướng dẫn giải

Từ (1) ta có: $\left(x-y\right)\left(2x+2y+1\right) = y^2$ (2)

Mặt khác từ (1) ta lại có: $(x-y)(3x+3y+1)=x^2$ (3)

Từ (2) và (3) ta có: $(x-y)(2x+2y+1)(3x+3y+1)=x^2y^2$

Suy ra $(2x+2y+1)(3x+3y+1)$ là số chính phương (4)

Đặt $(2x+2y+1, 3x+3y+1)=d$ thì d là ước của $(3x+3y+1)-(2x+2y+1)=x+y$ $\Rightarrow$ d là ước của 2(x + y). Từ đó d là ước của (2x + 2y + 1) – 2(x + y) = 1 nên d = 1.

Từ (4) và từ $(2x+2y+1, 3x+3y+1)=1$ suy ra 2x + 2y + 1 và 3x + 3y + 1 đều là số chính phương.

Từ đó căn cứ vào (2) hoặc (3) suy ra x – y cũng là số chính phương.

Bài toán 15. Tìm số có bốn chữ số $\overline{abcd}$, biết rằng $\overline{abd}$ là số chính phương và nếu cộng thêm 72 vào $\overline{abcd}$ thì được một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Các chữ số a, b, c, d trong đó $\overline{abcd}$ chỉ có thể nhận giá trị từ 0 đến 9 và $a \neq 0$.

Nếu một số có tận cùng là chữ số e thì bình phương của số đó có tận cùng là chữ số f tương ứng trong bảng sau:

e	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Vì $\overline{abd}$ là số chính phương nên d chỉ có thể lấy các giá trị 0, 1, 4, 5, 6, 9; mặt khác số $\overline{abcd}+72$ là số chính phương thì d + 2 phải có tận cùng là một trong các chữ số 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Mà d + 2 chỉ có thể có tận cùng là 2, 3, 6, 7, 8, 1 do đó d + 2 chỉ có thể lấy các giá trị 1, 6; nghĩa là d chỉ có thể lấy các giá trị 9, 4.

- Với d = 4 ta có $\overline{ab4}=y^2$ và $\overline{abc4}+72=\overline{abc6}+70=x^2$. Theo bảng trên y^2 có tận cùng 4 thì y chỉ có thể có tận cùng là 2 hoặc 8 còn x^2 có tận cùng 6 thì x chỉ có thể có tận cùng là 4 hoặc 6.

Suy ra $100<y^2<1000$ nên 10 < y < 31 nên y chỉ có thể là 12, 18, 22, 28.

Nếu y = 12 thì $y^2=144$ và $x^2=\overline{14c6}+70$ nên $1400<x^2<1600$, suy ra 37 < x < 40: không thỏa mãn.

Nếu y = 18 thì $y^2=324$ và $x^2=\overline{32c6}+70$ nên $3200<x^2<3500$, suy ra 56 < x < 60: không thỏa mãn.

Nếu y = 22 thì $y^2=484$ và $x^2=\overline{48c6}+70$ nên $4800<x^2<5000$, suy ra 68 < x < 72: không thỏa mãn.

Nếu y = 28 thì $y^2=784$ và $x^2=\overline{78c6}+70$ nên $7800<x^2<8000$, suy ra 86 < x < 90: không thỏa mãn.

- Với d = 9 ta có $\overline{ab9} = y^2$ và $\overline{abc9} + 72 = \overline{abc1} + 80 = x^2$. Theo bảng trên y^2 có tận cùng 9 thì y chỉ có thể có tận cùng là 3 hoặc 7 còn x^2 có tận cùng 1 thì x chỉ có thể có tận cùng là 1 hoặc 9.

Suy ra $100 < y^2 < 1000$ nên 10 < y < 31 do đó y chỉ có thể là 13, 17, 23, 27.

Nếu y = 13 thì $y^2 = 169$ và $x^2 = \overline{16c1} + 80$ nên $1600 < x^2 < 1800$, suy ra 40 < x < 43.

Ta thử với x = 41 có $41^2 = 1681$ thỏa mãn, vậy $\overline{abcd} = 1609$.

Nếu y = 17 thì $y^2 = 289$ và $x^2 = \overline{28c1} + 80$ nên $2800 < x^2 < 3000$, suy ra 52 < x < 56: không thỏa mãn.

Nếu y = 23 thì $y^2 = 529$ và $x^2 = \overline{52c1} + 80$ nên $5200 < x^2 < 5400$, suy ra 72 < x < 75: không thỏa mãn.

Nếu y = 77 thì $y^2 = 729$ và $x^2 = \overline{72c1} + 80$ nên $7200 < x^2 < 7400$, suy ra 82 < x < 87: không thỏa mãn.

Bài toán chỉ có 1 nghiệm là $\overline{abcd} = 1609$.

Bài toán 16. Số $A = n^4 + 4^n$ là số nguyên tố hay hợp số trong đó n là số nguyên dương.

Hướng dẫn giải

Với n = 1 thì A = 5 là số nguyên tố. Với n > 1 xét hai trường hợp

- Nếu n là số chẵn thì $n^4 \vdots 2$ và $4^n \vdots 2$ nên $A \vdots 2$ mà A > 2 do đó A là hợp số.
- Nếu n là số lẻ, đặt n = 2k + 1 (k nguyên dương)

Ta có $A = n^4 + 4^n = n^4 + 4^{2k}.4$

$$= \left(n^2 + 2^{2k+1} + n.2^{k+1}\right)\left(n^2 + 2^{2k+1} - n.2^{k+!}\right)$$

$$= \left[\left(n + 2^k\right)^2 + 2^{2k}\right]\left[\left(n - 2^k\right)^2 + 2^{2k}\right]$$

Rõ ràng mỗi thừa số của tích đều là các số tự nhiên lớn hơn 2. Vậy A là hợp số.

Bài toán 17. Cho các số nguyên dương a, b, c, d với a > b > c > d > 0.

Giả sử ac + bd = (b + d + a – c) (b + d – a + c). Chứng minh rằng ab + cd không phải là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Đẳng thức đã cho tương đương với

$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2 \qquad (1)$$

Xét tứ giác ABCD với AB = a, BC = d, CD = b, AD = c, $BAD = 60^o, BCD = 120^o$ thì $BD^2 = a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$ một tứ giác như thế rõ ràng tồn tại trên cơ sở có (1) là Định lí hàm cosin. Đặt $ABC = \alpha$, suy ra $CDA = 180^o - \alpha$.

Định lí hàm cosin trong các tam giác ABC và ACD cho ta:

$$a^2+d^2-2ad\cos\alpha = AC^2 = b^2+c^2+2bc\cos\alpha$$

Từ đó: $2\cos\alpha = \dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{ad+bc}$ và

$$AC^2 = a^2+d^2-ad\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{ad+bc} = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$$

Vì ABCD nội tiếp nên Định lí Ptolémé cho ta:

$$(AC.BD)^2 = (ab+cd)^2$$

Suy ra $(ac+bd)(a^2-ac+c^2) = (ab+cd)(ad+bc)$ (2)

Ta có (a – d)(b – c) > 0, (a – b)(c – d) > 0

Từ hai bất đẳng thức này dễ dàng suy ra được:

$$ab + cd > ac + bd > ad + bc \qquad (3)$$

Bây giờ, giả sử ngược lại rằng ab + cd là số nguyên tố. Khi đó, từ (3), suy ra rằng ab + cd và ac + bd nguyên tố cùng nhau. Do vậy, (2) cho ta kết luận ad + bc chia hết cho ac + bd, điều này không thể xảy ra vì đã có (3). Ta có đpcm.

Bài toán 18. Với mọi số nguyên dương m và n, chứng minh rằng: $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ là một số nguyên dương.

Hướng dẫn giải

Để giải bài toán, ta chỉ việc chứng tỏ rằng với mọi số nguyên tố p, số các thừa số p chứa trong tích (2m)!(2n)! không nhỏ hơn số các thừa số p chứa trong tích m!n!(m + n)!

Như đã biết, số các thừa số p chứa trong tích (2m)!(2n)! là:

$$S_1 = \left[\frac{2m}{p}\right]+\left[\frac{2m}{p^2}\right]+\left[\frac{2m}{p^3}\right]+...+\left[\frac{2n}{p}\right]+\left[\frac{2n}{p^2}\right]+\left[\frac{2n}{p^3}\right]+...$$

Còn số các thừa số p chứa trong tích m!n!(m + n)! bằng:

$$S_2 = \left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+...+\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+...+\left[\frac{m+n}{p}\right]+\left[\frac{m+n}{p^2}\right]+\left[\frac{m+n}{p^3}\right]$$

Bất đẳng thức $S_1 \geq S_2$ suy ra từ bất đẳng thức:

$$\left[\frac{2m}{p^k}\right]+\left[\frac{2n}{p^k}\right] \geq \left[\frac{m}{p^k}\right]+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\left[\frac{m+n}{p^k}\right] \text{ với mọi k}$$

Bài toán 19. Chứng minh rằng với mọi cặp số tự nhiên m, k, số m có thể được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng:

$$m = C_{a_k}^{k} + C_{a_k-1}^{k-1} + ... + C_{a_t}^{t} \text{ với } a_k > a_{k-1} > ... > a_t \geq t \geq 1.$$

Hướng dẫn giải

Trước tiên ta chứng minh tính duy nhất. Giả sử m được biểu diễn như đề bài với hai dãy $a_k,...,a_t$ và $b_k,...,b_t$. Ta tìm vị trí đầu tiên mà chúng khác nhau, không mất tính tổng quát, ta giả sử vị trí đó là k và $a_k > b_k$.

Lúc đó $m \le C_{b_k}^k + C_{b_k-1}^{k-1} + ... + C_{b_t-k+1}^t < C_{b_k+1}^k \le m$ là điều vô lí.

Để chứng minh sự tồn tại, ta áp dụng thuật toán sau: tìm số a_k lớn nhất thỏa mãn $C_{a_k}^k \le m$, sau đó, cũng làm tương tự như với hai số m và k nhưng thay bằng hai số $m - C_{a_k}^k$ và k – 1. Ta chỉ cần chắc chắn rằng dãy nhận được thực sự tăng, nhưng điều này có được vì theo giả thiết: $m < C_{a_k+1}^m$ và suy ra $m - C_{a_k}^k < C_{a_k}^{k-1}$.

Bài toán 20. Giả sử a, b, n là những số nguyên lớn hơn 1. Các số a, b là cơ số của hai hệ đếm. Các số A_n và B_n có cùng cách biểu diễn $\overline{x_n x_{n-1}...x_1 x_0}$. Trong các hệ đếm với cơ số a và b, ngoài ra $x_n \ne 0$ và $x_{n-1} \ne 0$. Gọi A_{n-1} và B_{n-1} là các số suy ra từ A_n và B_n sau khi xóa x_n. Chứng minh rằng a > b khi và chỉ khi $\dfrac{A_{n-1}}{A_n} < \dfrac{B_{n-1}}{B_n}$.

Hướng dẫn giải

Theo định nghĩa, ta có: $A_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k a^k, \quad A_n = \sum_{k=0}^{n} x_k a^k$

$$B_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k b^k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} x_k b^k$$

Bất đẳng thức trong đề bài tương đương với:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k a^k}{\sum_{k=0}^{n} x_k a^k} < \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k b^k}{\sum_{k=0}^{n} x_k b^k} \Rightarrow \frac{x_n a^n}{\sum_{k=0}^{n} x_k a^k} > \frac{x_n b^n}{\sum_{k=0}^{n} x_k b^k}$$

Nên: $\dfrac{x_n a^n}{x_n b^n} > \dfrac{x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + ... + x_n a^n}{x_0 + x_1 b + x_2 b^2 + ... + x_n b^n}$ (1)

Ta chứng minh rằng với giả thiết $x_{n-1} \ne 0,\ x_n \ne 0$ thì bất đẳng thức (1) tương đương với $a > b$.

Muốn vậy, trước hết ta chứng minh mệnh đề sau: nếu A, B, C, D là 4 số dương thì các bất đẳng thức: $\dfrac{A}{B} < \dfrac{C}{D}$ và $\dfrac{A+C}{B+D} < \dfrac{C}{D}$ tương đương nhau.

Bây giờ ta để ý rằng bất đẳng thức a > b tương đương với

$$\frac{1}{1} < \frac{a}{b} < \frac{a^2}{b^2} < ... < \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} < \frac{a^n}{b^n}$$

hay (nếu có x_i nào bằng 0, thì ta loại tỉ số tương ứng)

$$\frac{x_0}{x_0} < \frac{x_1 a}{x_1 b} < \frac{x_2 a^2}{x_2 b^2} < ... < \frac{x_{n-1} a^{n-1}}{x_{n-1} b^{n-1}} < \frac{x_n a^n}{x_n b^n}$$

Áp dụng mệnh đề trên nhiều lần, thì được bất đẳng thức (1), tức là có điều phải chứng minh.

Bài toán 21. Hãy tìm số dư khi chia

a) 109^{345} cho 14

b) Số $1776^{1492!}$ cho 2000.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $109 \equiv 11 \pmod{14}$ nên $109^{345} \equiv 11^{345} \pmod{14}$

Vì 14 = 7.2 nên $\phi(14) = 14\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 6$

Theo định lí Euler thì $11^6 \equiv 1 \pmod{14}$

Mà 345 = 6.57 + 3 nên $11^{345} \pmod{14} \equiv 11^3 \pmod{14} \equiv 1 \pmod{14}$

Vậy dư là 1.

b) Ta có: $1776^1 \equiv 1776 \pmod{2000}, 1776^2 \equiv 176 \pmod{2000}$,

$1776^3 \equiv 576 \pmod{2000}, 1776^4 \equiv 976 \pmod{2000}$,

$1776^5 \equiv 1376 \pmod{2000}, 1776^6 \equiv 1776 \pmod{2000}$,

$1776^7 \equiv 176 \pmod{2000}$, và tiếp tục như vậy.

Từ: $1776^6 = 1776^1 \pmod{2000}$, ta được $1776^n \equiv 1776^{n-5} \pmod{2000}$, với mọi n >5.

Do vậy ta sẽ xét phần dư của số mũ khi chia cho 5. Dễ thấy 1492! chia hết cho 5 nên:

$1776^{1492} \equiv 1776^5 \equiv 1376 \pmod{2000}$

Cách 2: Theo định lí Euler: $a^{100} \equiv 1 \pmod{125}$, với mọi a thỏa mãn (a, 125) = 1.

Ta có 16 | 1776 nên $1776^{1492!} \equiv 0 \pmod{16}$.

Xét số dư của $1776^{1492!}$ khi chia cho 125, vì: (125, 1776) = 1 và 100 | 1492! Nên theo Định lí Euler: $1776^{1492!} \equiv 1 \pmod{125}$

Bây giờ, Hướng dẫn giải hệ phương trình đồng dư $\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{125} \\ n \equiv 0 \pmod{16} \end{cases}$

Bằng phương pháp thử chọn, ta được nghiệm duy nhất 1376

Vậy: $1776^{1492!} \equiv 1376 \pmod{2000}$

Bài toán 22. Tìm hai chữ số tận cùng của

a) Số $2^{9^{1991}}$

b) Phần nguyên của số $\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^{2000}$

Hướng dẫn giải

a) Ta tìm dư trong phép chia 9^{1991} cho 20 = 4.5

Ta có $9^{1991} = (10-1)^{1991} \equiv -1 \pmod 5 \equiv 4 \pmod 5$,

$9^{1991} = (8+1)^{1991} \equiv 1 \pmod 4$,

Dư là $r_0 = 5t+4$ với t = 0, 1, 2, 3

Với t = 1 thì $r_0 = 9 \equiv 1 \pmod 4$ nên $9^{1991} = 20k+9$

Do đó $2^{9^{1991}} = 2^{20k+9} \equiv 76.2^9 \equiv 12 \pmod{100}$

Vậy hai chữ số tận cùng của $2^{9^{1991}}$ là 12.

b) Đặt $x_1 = \left(\sqrt{29}-\sqrt{21}\right)^2 = 50-2\sqrt{609}$

$x_2 = \left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^2 = 50+2\sqrt{609}$

$S_n = x_1{}^n + x_2{}^n$, với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $x^2 - 100x + 64 = 0$

$\Rightarrow S_{n+1} - 100S_n + 64S_{n-1} = 0$ (1)

Ta có: $S_0 = 2; S_1 = 100$ nên từ (1) suy ra $S_n \in Z$ với mọi $n \in N$.

$0 < x_1 < 1 \Rightarrow 0\ x_1{}^n < 1 \Rightarrow x_2{}^n < S_n < x_2{}^n + 1 \Rightarrow S_n - 1 < x_2{}^n < S_n$

Do $S_n \in Z$ nên $\left[x_2{}^n\right] = S_n - 1$

Vậy $\left[\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^{2000}\right] = \left[x_2{}^{1000}\right] = S_{1000} - 1$

Từ (1) suy ra $S_n = 100S_{n-1} - 64S_{n-2} \equiv 36S_{n-2} \pmod{100}$

$\equiv 6^2 S_{n-2} \equiv 6^4 S_{n-4} \equiv ... \equiv 6^n S_0 \pmod{100}$ (với n chẵn)

$\Rightarrow S_{1000} \equiv 6^{1000}.2 \pmod{100}$

Mà $6^{1000} = \left(6^5\right)^{200} \equiv 76^{200} \equiv 76 \pmod{100} \Rightarrow S_{1000} \equiv 52 \pmod{100}$

Vậy $\left[\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^{2000}\right]$ có hai chữ số tận cùng là 51

Bài toán 23. Hãy tìm phần nguyên của

$B=\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10+3}}}$ trong đó x là số nguyên dương.

Hướng dẫn giải

Với x nguyên dương thì: $\left(4x+1\right)^2<36x^2+10x+3<\left(6x+2\right)^2$

Hay $4x+1<\sqrt{36x^2+10x+3}<6x+2$

Cộng $4x^2$ vào mỗi vế của bất đẳng thức trên, ta có:

$\left(2x+1\right)^2<4x^2+\sqrt{36x^2+10+3}<\left(2x+2\right)^2$

Hay $2x+1<\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}<2x+2$

Lại cộng thêm x^2 vào mỗi vế của bất đẳng thức trên ta có:

$\left(x+1\right)^2<x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}<\left(x+2\right)^2$

Hay $x+1<\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}}<x+2$

Vậy phần nguyên của số B là x + 1.

Bài toán 24. Cho dãy số nguyên dương lẻ tăng $a_1<a_2<...<a_n<...$ Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n $\left(n\ge 1\right)$, giữa hai số $a_1+a_2+...+a_{n-1}$ và $a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}$ bao giờ cũng có ít nhất một số k^2 bằng bình phương của số nguyên dương lớn hơn 1.

Hướng dẫn giải

Trong dãy số chính phương $2^2=4,\ 3^2=9,\ 4^2=16,...$ ta chọn số chính phương nhỏ nhất k^2 mà lớn hơn $a_1+a_2+...+a_n$, nghĩa là:

$$\left(k-1\right)^2<a_1+a_2+...+a_n\le k^2$$

Để chứng minh $k^2<a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}$ ta sử dụng tính chất của tổng các số lẻ liên tiếp đầu tiên:

$$k^2=\left(k-1\right)^2+\left(2k-1\right)=1+3+5+...+\left(2k-3\right)+\left(2k-1\right)$$

Do đó $a_1+a_2+...+a_n>1+3+5+...+\left(2k-3\right)$.

Vì các số hạng trong hai vế đều là số lẻ và ở vế phải chứa tất cả các số lẻ từ 1 đến 2k – 3 suy ra $a_n>2k-3$ hay $a_n\ge 2k-1$, do đó $a_{n+1}>a_n\ge 2k-1$.

Từ $\left(k-1\right)^2<a_1+a_2+...+a_n$ có:

$$k^2=\left(k-1\right)^2+\left(2k-1\right)<a_1+a_2+...+a_n+\left(2k-1\right)<a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 25. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$ thì hai số 1992^n và $1992^n + 3.2^n$ có cùng số các chữ số.

Hướng dẫn giải

Giả sử số 1992^n có k chữ số, tức $10^{k-1} \leq 1992^n < 10^k$.

Do $1992^n > 1000^n = 10^{3n}$, nên k > 3n.

Giả sử số $1992^n + 3.2^n$ chứa ít nhất k + 1 chữ số, như vậy $1992^n + 3.2^n \geq 10^k$, suy ra $996^n + 3 \geq 2^{k-n}.5^k$.

Mặt khác $10^k > 1992^n$ nên $2^{k-n}.5^k > 996^n$. Vì vậy $996^n + a = 2^{k-n}.5^k$ trong đó $1 \leq a \leq 3$.

Do k > 3n nên k – n > 2n và vì $n \geq 2$ nên $k \geq 4$, do đó $2^{k-n}.5^k \equiv 0 \pmod{10}$, trong khi đó $996^n + a = 6 + a$, nhưng vì $1 \leq a \leq 3$ nên $6 + a \equiv 0 \pmod{10}$.

Nghĩa là $996^n + a \not\equiv 0 \pmod{10}$. Đó là điều mâu thuẫn.

Bài toán 26. Chứng minh rằng không thể biểu diễn số 1 thành tổng các bình phương của nghịch đảo các số tự nhiên khác nhau.

Hướng dẫn giải

Giả sử có thể biểu siễn số 1, dưới dạng: $1 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + ... + \frac{1}{a_n^2}$ trong đó:

$$1 < a_1 < a_2 < ... < a_n \text{ và } n \geq 2$$

Từ điều kiện $a_1 \geq 2$ và $a_k \geq k + 1$, ta có:

$$1 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + ... + \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

Vậy 1 không có dạng trên.

Bài 27. Có hay không số tự nhiên khác 0 vừa là tích của hai số tự nhiên liên tiếp vừa là tích của bốn số tự nhiên liên tiếp.

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại số tự nhiên A khác 0, thỏa mãn đề bài.

A = n(n + 1) = m(m + 1)(m + 2)(m + 3) trong đó m, n là số tự nhiên khác 0.

Suy ra $n^2 + n = (m^2 + 3m)(m^2 + 3m + 2)$

Hay $n^2 + n + 1 = (m^2 + 3m)^2 + 2(m^2 + 3m).1 + 1 = (m^2 + 3m + 1)^2$

Mặt khác dễ thấy $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$.

Vì thế $n^2 < (m^2 + 3m + 1)^2 < (n+1)^2$

Điều mâu thuẫn trên chứng tỏ không tồn tại số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 28. Lập dãy số $a_1, a_2, a_3...$ bằng cách sau: $a_1 = 2$ và với mỗi số tự nhiên $n \geq 2$ thì chọn số a_n là ước số nguyên tố lớn nhất của dãy số $a_1a_2...a_{n-1} + 1$. Chứng minh rằng trong dãy số trên không có số 5.

Hướng dẫn giải

Ta có $a_1 = 2, a_2 = 3$. Giả sử với $n \geq 3$ nào đó mà có số 5 là ước số nguyên tố lớn nhất của số $A = 2.3.a_3...a_{n-1} + 1$ thì số A không thể chia hết cho 2, cho 3, do đó chỉ có thể xảy ra $A = 5^m$ với $m \geq 2$ nào đó.

Từ đó số $A - 1 = 5^m - 1 = (5-1)(1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{m-1})$ chia hết cho 4. Mặt khác $A - 1 = 2.3.a_3...a_{n-1}$ trong đó a_i với mọi $i \geq 3$ đều là số lẻ nên A – 1 chỉ có thể chia hết cho 2: mâu thuẫn.

Vậy A không có ước số nguyên tố là 5.

Bài toán 29. Với mọi số nguyên dương n, hãy chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương k sao cho $2k^2 + 2001k + 3 \equiv 0 \pmod{2^n}$.

Hướng dẫn giải

Tổng quát hơn, ta sẽ chứng minh rằng phương trình đồng dư $ak^2 + bk + c \equiv 0 \pmod{2^n}$ có nghiệm với mọi n, ở đây b là số lẻ và a hoặc c là số chẵn.

Khi n = 1, lấy k = 0 nếu c chẵn và k = 1 nếu c là số lẻ.

Tiếp theo, giả sử phát biểu trên đúng với mọi n. Nếu c là số chẵn thì theo giả thiết, phương trình đồng dư $2at^2 + bt + \frac{c}{2} \equiv 0 \pmod{2^n}$ có nghiệm t nào đó.

Đặt k = 2t ta được $ak^2 + bk + c = 2\left(2at^2 + bt + \frac{c}{2}\right) \equiv 0 \pmod{2^{n+1}}$

Nếu c là số lẻ thì a là số chẵn, do đó a + b + c là số chẵn; theo giả thiết ta suy ra phương trình đồng dư $2at^2 + (2a+b)t + \frac{a+b+c}{2} \equiv 0 \pmod{2^n}$ có nghiệm t nào đó. Đặt k = 2t + 1 ta được: $ak^2 + bk + c = 2\left(2at^2 + (2a+b)t + \frac{a+b+c}{2}\right) \equiv 0 \pmod{2^{n+1}}$

Như vậy, dù cho c là số chẵn hay lẻ, phát biểu trên vẫn đúng cho n + 1, và do đó, theo quy nạp, nó đúng với mọi n.

Bài toán 30. Cho $n \ge 2$ số $c_1, c_2, ..., c_n \in R$ thỏa mãn $0 < \sum_{i=1}^{n} c_i \le n$. Chứng minh rằng có thể tìm được n số nguyên $k_1, k_2, ..., k_n$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} k_i = 0$ và $1 - n \le c_i + nk_i \le n$ với mọi $i = 1, ..., n$.

Hướng dẫn giải

Với mọi x, ta kí hiệu $\lfloor x \rfloor$ là phần nguyên của x, và kí hiệu $\lceil x \rceil$ là số nguyên bé nhất lớn hơn hay bằng x.

Điều kiện $c + nk \in [1 - n, n]$, tương đương với

$$k \in l_n(c), \text{ với } l_n(c) = \left[\frac{1-c}{n} - 1, 1 - \frac{c}{n}\right]$$

Mọi $c \in R$ và $n \ge 2$, đoạn này (có độ dài $2 - \frac{1}{n}$) chứa 2 số nguyên (có thể trùng nhau), đó là:

$$p(c) = \left\lceil \frac{1-c}{n} - 1 \right\rceil \le \left\lfloor 1 - \frac{c}{n} \right\rfloor = q(c)$$

Để chứng minh tồn tại $k_i \in l_n(c_i) \cap Z$ nghiệm đúng $\sum_{i=1}^{n} k_i = 0$ thì chỉ cần chứng minh: $\sum_{i=1}^{n} p(c_i) \le 0 \le \sum_{i=1}^{n} q(c_i)$.

Đặt $a_i = \frac{1-c_i}{n}$ với I = 1, 2,…, n thì $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i \in [0,1]$

Vì $\lceil a_i \rceil < a_i + 1$ nên $\sum_{i=1}^{n} \lceil a_i \rceil < \sum_{i=1}^{n} a_i + n \le n + 1$. Từ đó

$$\sum_{i=1}^{n} \lceil a_i \rceil \le n \text{ hay } \sum_{i=1}^{n} p(c_i) = \sum_{i=1}^{n} \lceil a_i \rceil - n \le 0$$

Để chứng minh $\sum_{i=1}^{n} q(c_i) \ge 0$, ta đặt $b_i = 1 - \frac{c_i}{n}$, khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i \ge n - 1 \text{ vì } \lfloor b_i \rfloor > b_i - 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lfloor b_i \rfloor > -1$$

Suy ra: $\sum_{i=1}^{n} \lfloor b_i \rfloor \ge 0$ hay $\sum_{i=1}^{n} q(c_i) \ge 0$ ta có đpcm.

Bài toán 31. Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên k, với $k \geq 2$, luôn tồn tại các số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho với mọi I = 1, 2, …, n ta có:

$$|a_i| \leq k - 1 \text{ và } |a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n| \leq (k-1)\frac{\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

Hướng dẫn giải

Từ bất đẳng thức: $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ và giả thiết $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$ ta dễ dàng chứng minh được $|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \leq \sqrt{n}$

Bây giờ, với các b_i nhận giá trị nguyên thuộc đoạn [0, k – 1], ta xét k^n giá trị có dạng: $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$

Mỗi giá trị đó phải nằm trong đoạn $\left[0, (k-1)\sqrt{n}\right]$. Ta chia đoạn này thành $k^n - 1$ đoạn con có độ dài bằng nhau là: $(k-1)\frac{\sqrt{n}}{k^n - 1}$

Khi đó, theo Nguyên tắc Dirichlet, phải có 2 giá trị nói trên rơi vào cùng một đoạn con. Cụ thể, nếu 2 giá trị đó là $\sum_{i=1}^{n} b'_i x_i$ và $\sum_{i=1}^{n} b''_i x_i$ thì ta phải có:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(b'_i - b''_i)x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leq (k-1)\frac{\sqrt{n}}{k^n - 1} \text{ suy ra đpcm.}$$

Bài toán 32. Cho các số nguyên $n \geq k \geq 0$. Ta định nghĩa các số c(n, k) với k = 0,1,2,…,n như sau: c(n, 0) = c(n, n) = 1 với mọi $n \geq 0$: $c(n+1, k) = 2^k c(n, k) + c(n, k-1)$ với mọi $n \geq k \geq 1$. Chứng minh rằng c(n, k) = c(n, n – k) với mọi $n \geq k \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Khẳng định đúng với n = 0: c(0, 0) = c(0; 0 – 0) = 1

Ta sẽ chứng minh trường hợp tổng quát bằng quy nạp theo n. Giả sử c(m, k) = c(m, m – k) với mọi $n \geq m \geq k \geq 0$. Thế thì, theo hệ thức truy hồi và giả thiết quy nạp, ta có:

$$c(n+1, k) = 2^k c(n, k) + c(n, k-1)$$

$$c(n+1, n+1-k) = 2^{n+1-k} c(n, n+1-k) + c(n, n-k) = 2^{n+1-k} c(n, k-1) + c(n, k)$$

Để hoàn tất chứng minh, ta sẽ chứng minh rằng:

$$\left(2^k - 1\right)c(n, k) = \left(2^{n+1-k} - 1\right)c(n, k-1) \qquad (1)$$

Để ý rằng từ giả thiết quy nạp ta suy ra

$$\left(2^k-1\right)c\left(n-1,k\right)=\left(2^{n-k}-1\right)c\left(n-1,k-1\right)$$

$$\left(2^{k-1}-1\right)c\left(n-1,k-1\right)=\left(2^{n-k+1}-1\right)c\left(n-1,k-2\right)$$

Từ đó ta có: $\left(2^k-1\right)c\left(n,k\right)-\left(2^{n+1-k}-1\right)c\left(n,k-1\right)$

$$=\left(2^k-1\right)\left[2^kc\left(n-1,k\right)+c\left(n-1,k-1\right)\right]-\left(2^{n+1-k}-1\right)\left[2^{k-1}c\left(n-1,k-1\right)+c\left(n-1,k-2\right)\right]$$

$$=\left[2^k\left(2^{n-k}-1\right)c\left(n-1,k-1\right)+\left(2^k-1\right)c\left(n-1,k-1\right)\right]$$

$$-\left(2^{n+1-k}-1\right)\left[2^{k-1}c\left(n-1,k-1\right)+c\left(n-1,k-2\right)\right]$$

$$=\left(2^n-2^k+2^k-1-2^n+2^{k-1}\right)c\left(n-1,k-1\right)-\left(2^{n+1-k}-1\right)c\left(n-1,k-2\right)$$

$$=\left(2^{k-1}-1\right)c\left(n-1,k-1\right)-\left(2^{n+1-k}-1\right)c\left(n-1,k-2\right)=0$$

Vậy (1) đúng, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 33. Giải phương trình

a) $\left[x\right]^2-\left[x\right]-2=0$ b) $\left[\dfrac{8x+19}{7}\right]=\dfrac{16\left(x+1\right)}{11}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt t = [x], t nguyên.

$\left[x\right]^2-\left[x\right]-2=0\Leftrightarrow t^2-t-2=0\Leftrightarrow t=-1$ hoặc t = 2

Do đó [x] = -1 hoặc [x] = 2.

Vậy nghiệm $-1\le x<0,\ 2\le x<3$

b) Đặt $\dfrac{16\left(x+11\right)}{11}=t$ thì $\left[\dfrac{8x+19}{7}\right]=t$ nên t nguyên. Ta có 16(x + 1) = 11t nên $x=\dfrac{11t-16}{16}$. Thế vào phương trình cho thì có

$\left[\dfrac{11t-22}{14}\right]=t$ do đó $0\le\dfrac{11t+22}{14}-t<1$

Nên $\dfrac{8}{3}\le t\le\dfrac{22}{3}$. Chọn số nguyên t = 3; 4; 5; 6; 7

Vậy nghiệm $x=\dfrac{17}{16};\dfrac{7}{4};\dfrac{19}{6};\dfrac{25}{8};\dfrac{45}{16}$

Bài toán 34. Tìm số tự nhiên n biết rằng khi bỏ đi ba chữ số tận cùng bên phải của nó thì được một số mới có giá trị bằng $\sqrt[3]{n}$.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy số phải tìm có từ 4 chữ số trở lên.

Giả sử sau khi bỏ đi ba chữ số tận cùng $\overline{abc}$ của số n ta được số x, thì $n = 10^3 x + \overline{abc}$. Theo đề bài ta có:

$$x = \sqrt[3]{1000x + \overline{abc}} \Leftrightarrow x^3 = 1000x + \overline{abc} \Leftrightarrow x\left(x^2 - 1000\right) = \overline{abc}$$

Nếu $x \geq 33$ thì vế trái sẽ lớn hơn hoặc bằng

$33(1089 - 1000) = 33.89 > 2937 > \overline{abc}$ nên $x < 33$.

Nếu $x \leq 31$ thì $x^2 \leq 961$, nên $x\left(x^2 - 1000\right) < 0 < \overline{abc}$

Do đó x chỉ có thể nhận giá trị 32.

Với x = 32 thì $32(1026 - 1000) = \overline{abc}$ hay $768 = \overline{abc}$

Từ đây ra có $n = 10^3.32 + 768 = 32768$.

Số này thỏa mãn yêu cầu của đề bài nên là số cần tìm.

Bài toán 35. Tìm số có hai chữ số sao cho số đó cộng với tích hai chữ số của nó thì bằng bình phương của tổng hai chữ số của nó.

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{xy}$ (x, y là các số tự nhiên từ 0 đến 9 và $x \neq 0$).

Ta có $10x + y + xy = \left(x + y\right)^2$ hay $10x + y = x^2 + xy + y^2$

Nếu y = 0 thì ta có x = 0, trái giả thiết nên y khác 0.

Biến đổi thành $y^2 + y\left(x - 1\right) = x\left(10 - x\right)$, ta có:

$$y^2 \leq x\left(10 - x\right) \leq \left(\frac{x + 10 - x}{2}\right)^2 = 25 \text{ nên } y \leq 5$$

Thay lần lượt y bằng 1, 2, 3, 4, 5 vào x(10 – x – y) = y(y – 1) và phân tích vế trái thành tích hai số mỗi số nhỏ hơn 10.

Với y = 1 thì x(9 – x) = 0, suy ra x = 9

Với y = 2 thì x(8 – x) = 2 = 1.2, không có x thỏa mãn

Với y = 3 thì x(7 – x) = 6 = 1.6 = 2.3, suy ra x = 1 hoặc x = 6.

Với y = 4 thì x(6 – x) = 12 = 2.6 = 3.4, không có x thỏa mãn

Với y = 5 thì x(5 – x) = 20 = 4.5, không có x thỏa mãn.

Vậy có ba số phải tìm là 91, 63, 13 thỏa mãn đề bài.

Bài toán 36. Tìm hai số tự nhiên, một số có hai chữ số sao cho khi viết số này tiếp sau số kia thì được một số gồm bốn chữ số chia hết cho tích của hai số ban đầu.

Hướng dẫn giải

Gọi các số có hai chữ số phải tìm là x và y trong đó $10 \leq x, y \leq 100$.

Theo đề bài ta có: 100x + y = kxy (k nguyên dương) hay y = kxy – 100x

Do $kxy - 100x \vdots x$ nên $y \vdots x$, đặt y = mx (m nguyên dương).

Khi đó ta lại có $100x + mx = kmx^2$ suy ra 100 = m(kx – 1) suy ra m là ước số của 100. Vì x, y là các số có hai chữ số nên m chỉ là số có một chữ số, do đó m = 1; 2; 4; 5.

Mặt khác $kx - 1 = \frac{100}{m}$ hay $kx = \frac{100}{m} + 1$ đồng thời x là số có hai chữ số.

Nếu m = 1 thì $\frac{100}{1} + 1 = 101$ không chia hết cho một số có hai chữ số x nào: loại

Nếu m = 5 thì $\frac{100}{5} + 1 = 21$, ta có x = 21 khi đó y = m.x = 5.21 = 105 là số có ba chữ số: loại

Nếu m = 2 thì kx = 51, do đó nếu k = 1 thì y = mx có nhiều hơn 2 chữ số, nếu k = 3 ta có x=17; y = 34.

Vậy m = 4 thì kx = 26, do đó nếu k = 1 thì y = mx có nhiều hơn hai chữ số, nếu k = 2 ta có x=13; y = 52. Thử lại đúng.

Bài toán 37. Tìm năm số thực dương sao cho mỗi số bằng bình phương của tổng bốn số còn lại.

Hướng dẫn giải

Sắp thứ tự 5 số phải tìm là: $0 < x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$

Theo đề bài: $x_1 = \left(x_2 + x_3 + x_4 + x_5\right)^2$

Và cũng có các đẳng thức tương tự đối với x_2, x_3, x_4, x_5

Đặt $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ thì $x_1 = \left(S - x_1\right)^2$

Tương tự $x_2 = \left(S - x_2\right)^2$; $x_3 = \left(S - x_3\right)^2$; $x_4 = \left(S - x_4\right)^2$; $x_5 = \left(S - x_5\right)^2$

Ta có thì $x_1 = \left(S - x_1\right)^2 \ge \left(S - x_2\right)^2 \ge \left(S - x_3\right)^2 \ge \left(S - x_4\right)^2 \ge \left(S - x_5\right)^2 = x_5$

Suy ra: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x$ (vì đều bằng x > 0) khi đó S = 5x, do đó $x = \left(4x\right)^2$ hay x(16x – 1) = 0.

Vì x > 0 nên chỉ có nghiệm $x = \frac{1}{16}$. Vậy năm số cần tìm đều là $\frac{1}{16}$.

Bài toán 38. Tìm tất cả các số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng 1994 còn tích của chúng lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Ta cần chọn n số nguyên dương n (n > 1) mà $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1994$ để tích của chúng lớn nhất.

Không có số nào trong các số đã chọn bằng 1.

Thật vậy giả sử $a_1 = 1$, nếu n = 2 và 1 + 1993 = 1994 thì ta thay bằng 2 + 1992 = 1994 có 2.1992 > 1.1993, nếu n > 2 trong tích $a_1 + a_2 + ... + a_n$ khi ta thay $b = a_2 + 1$ thì tổng các số $b + a_3 + ... + a_n = 1994$, còn tích mới là:

$$b x a_3 x ... x a_n = (a_2 + 1) x a_2 x a_3 x ... x a_n = a_2^2 x a_2 x a_3 x ... x a_n + a_2 x a_3 x ... x a_n$$

$$> a_1 x a_2 x a_3 x ... x a_n$$

Nếu các số đã chọn có số 2 thì cũng chỉ có không quá hai số bằng 2. Thật vậy, giả sử có ba số 2 thì 2.2.2 < 3.3, ta thay thế ba số 2 bởi hai số 3 sẽ có tích mới lớn hơn.

Không có số nào trong các số đã chọn lớn hơn 4. Nếu trái lại, giả sử $a_1 \geq 5$ thì thay a_1 bằng hai số 2 và $a_1 - 2$, khi đó $2(a_1 - 1) > a_1$ và tích mới sẽ lớn hơn tích ban đầu.

Vậy tích lớn nhất chỉ gồm toàn số 2 và 3 trong đó không có quá hai số 2, nghĩa là tích lớn nhất bằng 2.3^{664}.

Bài 39. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x,y) = |7x^2 + 13xy - 7y^2|$ trong đó x, y nhận giá trị nguyên và không đồng thời bằng 0.

Hướng dẫn giải

Kí hiệu CP là tập các số chính phương.

Xét $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow g(x,y) = 7x^2 + 13xy - 7y^2 = 0$. Coi g(x, y) là tam thức bậc 2 đối với x, có $\Delta = 365y^2$. Do $365 \neq CP$ nên $\Delta \neq CP\ \forall y \in Z,\ y \neq 0 \Rightarrow g(x,y) \neq 0, \forall x, y \in Z, y \neq 0$. Mà $g(x,0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, nên $g(x,y) \neq 0 \forall x, y \in Z,\ x^2 + y^2 \neq 0$.

Do đó $f(x,y) \neq 0, \forall x, y \in Z,\ x^2 + y^2 \neq 0$. Suy ra, với $a = f(x_0, y_0)$ là giá trị cần tìm $a \in N^*$.

Xét a chẵn thì phải có x_0, y_0 chẵn. Khi đó $\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2} \in Z$ và $f\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right) = \frac{a}{4} < a$, trái với định nghĩa của a. Như vậy, a là số lẻ. Dễ thấy f(1, 2) = 5. Suy ra $a \leq 5$. Vậy $a \in \{1, 3, 5\}$.

- Nếu a = 1 thì $g(x_0, y_0) = \pm 1 \Leftrightarrow 7x_0^2 + 13x_0y_0 - 7y_0^2 \mp 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 365y_0^2 \pm 28 \in CP$ (*). Mặt khác, $365y_0^2 \pm 28$ khác $\pm 3 (\mathrm{mod}\, 5)$ mâu thuẫn với (*) (do b^2 khác $\pm 3 (\mathrm{mod}\, 5) \forall b \in Z$)

- Nếu a = 3 thì:

$$f(x_0, y_0) = \left|(x_0 - y_0)^2 + y_0^2 + (6x_0^2 + 15x_0y_0 - 9y_0^2)\right| \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$$

$$\Rightarrow (x_0 - y_0)^2 + y_0^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$$

$$\Rightarrow x_0 - y_0 \equiv y_0 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3) \Rightarrow x_0 \equiv y_0 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$$

$\Rightarrow f\left(x_0, y_0\right) \equiv 0 \left(\bmod 9\right)$, mâu thuẫn với $f\left(x_0, y_0\right) = 3$

Vậy: a = min f(x, y) = 5.

Bài toán 40. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1 và độ dài các đường cao đều là các số nguyên thì tam giác ABC là tam giác đều.

Hướng dẫn giải

Gọi x, y, z là các đường cao theo thứ tự tương ứng với các cạnh a, b, c của ΔABC (x, y, z nguyên dương).

Do đường tròn ngoại tiếp tam giác có bán kính bằng 1, nên z, y, z đều lớn hơn 2. Thật vậy, ta có: 2S = ax + by = cz = a + b + c nên:

$x = \frac{a+b+c}{a} = 1 + \frac{b+c}{a} > 1 + \frac{a}{a} = 2$ (vì b + c > a)

Tương tự y > 2 và z > 2

Mặt khác $\frac{1}{x} = \frac{a}{a+b+c}$; $\frac{1}{y} = \frac{b}{a+b+c}$ và $\frac{1}{z} = \frac{c}{a+b+c}$

Do đó: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

Giả sử $x \ge y \ge z$ khi đó $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{3}{2}$ suy ra $\frac{3}{z} \ge 1$

Vậy $z \le 3$, mà z > 2 nên z = 3

Với z = 3 thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$, suy ra $\frac{1}{y} \ge \frac{2}{3}$ suy ra $y \le 3$ mà y > 2 nên y = 3, từ đó có x = 3 do đó x = y = z = 3.

Kết hợp với ax = by = cz, ta có a = b = c.

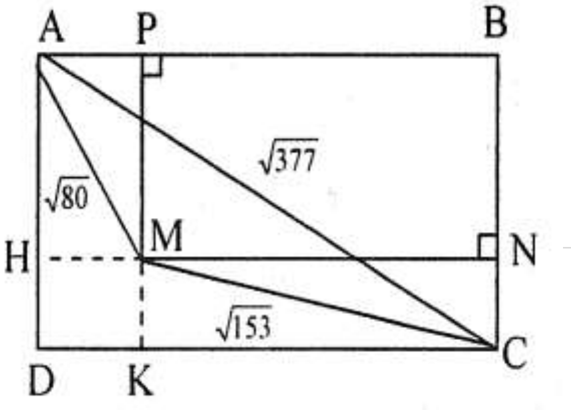
Vậy tam giác ABC là tam giác đều.

Bài toán 41. Các cạnh của một tam giác có số đo là $\sqrt{377}; \sqrt{80}$ và $\sqrt{153}$. Chứng minh rằng có thể đặt tam giác này trong một hình chữ nhật có số đo độ dài các cạnh là các số nguyên sao cho hai đỉnh của tam giác trùng với hai điểm đầu và điểm cuối của một đường chéo và khoảng cách từ đỉnh thứ ba, của tam giác tới các cạnh của hình chữ nhật là một số nguyên. Khi đó hãy chứng tỏ rằng số đo diện tích của tam giác cũng là số nguyên.

Hướng dẫn giải

Dự hình chữ nhật có chiều dài AB = CD = 16, chiều rộng AD = BC = 11.

Trên AB đặt điểm P sao cho AP = 4



Trên BC đặt điểm N sao cho CN = 3

Từ các điểm P và N trên AB và BC kẻ đường vuông góc với AB và BC chúng cắt nhau tại M. Trên hình vẽ ta có PB = MN = 12;

BM = MP = 8.

Trong tam giác vuông MPA theo định lí Pitago thì:

$$MA^2 = AP^2 + MP^2 = 16 + 64 = 80 \Rightarrow AM = \sqrt{80}$$

Trong tam giác vuông MNC, theo định lí Pitago ta có

$$MC^2 = MN^2 + NC^2 = 12^2 + 3^2 = 144 + 9 = 153 \Rightarrow MC = \sqrt{153}$$

Và tam giác vuông ABC, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16^2 + 11^2 = 256 + 121 = 377 \Rightarrow AC = \sqrt{377}$$

Như vậy tam giác MAC có các cạnh bằng $\sqrt{377}$ và $\sqrt{80}$ và $\sqrt{153}$ có hai đỉnh trùng với hai đầu mút của đường chéo AC, còn khoảng cách từ đỉnh M đến đến các cạnh AB và BC lần lượt bằng 8 và 12 là các số nguyên, nên chính là tam giác phải tìm.

Ta có $S_{AMC} = S_{ABCD} - S_{ABC} - S_{AHM} - S_{CKM} - S_{DHMX} = 11.16 - 8.11 - 3.4 - 3.6 - 4.4 = 42$ (đơn vị diện tích) nên là số nguyên.

Bài toán 42. Cho x là một số thực. Chứng minh nếu phần lẻ $\{x\} = \{x^2\} = \{x^{2013}\}$ thì x là số nguyên.

Hướng dẫn giải

Ta có {x} = x – [x], $\{x^2\} = x^2 - [x^2]$ và $\{x^{2013}\} = x^{2013} - [x^{2013}]$

Theo đề bài phần lẻ $\{x\} = \{x^2\} = \{x^{2013}\}$ thì $x^2 = x + a$ và $x^{2013} = x + b$

Với $a = [x^2] - [x]$ và $b = [x^{2013}] - [x]$ là các số nguyên.

Vì $x^2 = x + a$ nên $x^2 - x - a = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$

Xét a = 0 thì $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay x = 1 đều là số nguyên.

Xét a > 0 thì $a \geq 1$, ta chứng minh quy nạp, khi đó tòn tại 2 số nguyên $c_n > 1$ và $d_m > 0$ sao cho $x^n = c_n.x + d_n, \forall n \geq 3$

Thật vậy với n = 3: $x^2 = x + a \Rightarrow x^3 = x^2 + ax = x + a + ax = (1+a)x + a$ khi đó chọn 2 số nguyên $c_3 = 1 + a > 1$ và $d_3 = a > 0$.

Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 3$: tồn tại 2 số nguyên $c_k > 1$ và $d_k > 0$ sao cho $x^k = c_k.x + d_k$.

Khi đó $x^{k+1} = c_k x^2 + d_k x = c_k\left(x+a\right) + d_k x = \left(c_k + d_k\right)x + ck.a = c_k.a$

Ta chọn $c_{k+1} = c_k + d_k$; $d_{k+1} = c_k.a$ thì thỏa mãn.

Áp dụng với n = 2013 thì tồn tại 2 số nguyên $c_{2013} > 1$ và $d_{2013} > 0$ sao cho $x^{2013} = c_{2013}.x + d_{2013}$.

Mà $x^{2013} = x + b$ nên $c_{2013}.x + d_{2013} = x + b$

Do đó $x = \dfrac{b - d_{2013}}{c_{2013} - 1} \in Q$

Suy ra x là nghiệm hữu tỉ của phương trình $x^2 - x - a = 0$ nên x là số nguyên: đpcm

III. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 43. Chứng minh rằng, với bất kì số tự nhiên n > 1, hoặc là tồn tại một lũy thừa của 10 mà khi viết trong hệ cơ số 2 nó sẽ có n chữ số, hoặc là tồn tại một lũy thừa của 10 mà khi viết trong hệ cơ số 5 nó sẽ có n chữ số, nhưng không tồn tại cả hai dạng đó.

Hướng dẫn

Chứng minh qui nạp: Nếu $a_n = 2^k$ thì 10^k có n chữ số khi viết trong hệ cơ số 5. Nếu $a_n = 5^h$ thì 2^h có n chữ số khi viết trong hệ cơ số 2.

Bài tập 44. Cho f(0), f(1) là những số nguyên, f(0) = f(1) = 0 và

$f\left(n+2\right) = 4^{n+2} f\left(n+1\right) - 16^{n+1} f\left(n\right) + n2^{n^2}$, n = 0, 1, 2 …. Chứng tỏ rằng các số f(1989), f(1990), f(1991) chia hết cho 13.

Hướng dẫn

Xét $f\left(n\right) = 2^{n^2} g\left(n\right)$ thì $g\left(n\right) = \dfrac{15n - 32 + \left(15n+1\right)16^{-n+1}}{15^2}$

Từ đí $f\left(n\right) = \dfrac{\left(15n+2\right)\left(15n-32\right).16^{n-1}.2\left(n-2\right)^2}{15^3}$

Bài tập 45. Cho tam thức $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$ với các hệ số nguyên.

a) Chứng minh rằng với a, b, c bất kì thì biệt số Δ của tam thức trên không thể bằng 1994 và cũng không bằng 1995.

b) Khi tam thức có các hệ số nguyên thay đổi, hãy tìm biệt số Δ nguyên dương nhỏ nhất mà không là số chính phương.

Hướng dẫn

a) Dùng phản chứng

b) Kết quả Δ = 5.

Bài tập 46. Có bao nhiêu bộ số nguyên dương (a; b; c) sao cho:

$[a; b] = 1000$ và $[b; c] = [c; a] = 2000$

Hướng dẫn

Số 1000 và 2000 đều có dạng $2^m.5^n$ nên a, b, c cũng có dạng đó.

Kết quả 70 bộ.

Bài tập 47. Tồn tại hay không cặp số thực (x, y) sao cho các số x = y, x^2+y^2, x^3+y^3 đều nguyên nhưng x^4+y^4 không nguyên?

Hướng dẫn

Kết quả tồn tại với x + y = 2, $xy=\frac{1}{2}$.

Bài tập 48. Có tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn:

$$(x+2010)^2+(x+2012)^2=(x+y+z+2008)(y+z-x+2014).$$

Hướng dẫn

Biến đổi

$$(x+2010)^2+(x+2012)^2=(x+y+z+2008)(y+z-x+2014)$$

$$\Leftrightarrow (x+2010)^2+(x+2011)^2+(x+2012)^2=(y+z-3)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+12066x+2010^2+2011^2+2012^2=(y+z-3)^2$$

Kết quả không tồn tại.

Bài tập 49. Tìm phần nguyên của $S=\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+...+\sqrt[2013]{\frac{2013}{2012}}$

Hướng dẫn

Dùng bất đẳng thức AM – GM để chứng minh $\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}}<1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$

Kết quả [S] = 2012.

Bài tập 50. Cho một số nguyên không âm a, b sao cho $ab\ge c^2$, với c là số nguyên. Chứng minh tồn tại một số n và các số nguyên $x_1,x_2,...,x_n$, $y_1,y_2,...,y_n$ thỏa $\sum_{i=1}^{n}x_1^2=a;\sum_{i=1}^{n}y_1^2=b$ và $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=c$.

Hướng dẫn

Xét bộ (a, b, c) với $a\ge b$ và $c\ge 0$. Có 2 trường hợp $c\le b$ và a > c > b. Trong trường hợp sau thì chứng minh qui nạp theo a + b.

Bài tập 51. Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì có:

$$\left[\sqrt{n}\right]+\left[\sqrt[3]{n}\right]+...+\left[\sqrt[n]{n}\right]=\left[\log_2 n\right]+\left[\log_3 n\right]+...+\left[\log_n n\right]$$

Hướng dẫn

Ta có $\left[\sqrt[k]{n}\right]-1=x$ thì $x\ge 2$ và $x^k\le n$

Và có $\left[\log_m n\right]-1=y$ thì $y\ge 2$ và $m^y\le n$

Bài tập 52. Cho a và b là hai số nguyên dương sao cho ab + 1 của hết a^2+b^2. Chứng minh: $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ là một số chính phương.

Hướng dẫn

Dùng phản chứng và đưa về phương trình bậc 2 $a^2-kba+b^2-k=0$. Lập được dãy vô hạn và nghiệm tự nhiên $\left(a_i,b_i\right)$ mà tổng a_i+b_i giảm dần.

Bài tập 53. Với số nguyên dương n bất kì, gọi $\tau\left(n\right)$ là số các ước số dương (kể cả 1 và chính nó) của số ấy. Hãy xác định tất cả các số nguyên dương m sao cho với số này tồn tại một số nguyên dương n để $\frac{\tau\left(n^2\right)}{\tau\left(n\right)}=m$.

Hướng dẫn

Kết quả m là số lẻ

Bài tập 54. Kí hiệu S là tập hợp tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{1}{p}$ có chu kì cơ sở 3r: $\frac{1}{p}=0$, $a_1a_2...a_{3r}a_1a_2...a_{3r}...$ trong đó r = r(p); với mọi $p\in S$ và mọi số nguyên $k\ge 1$ ta định nghĩa: $f\left(k,p\right)=a_k+a_{k+r(p)}+a_{k+2r(p)}$

a) Chứng minh rằng S vô hạn

b) Tìm giá trị lớn nhất của (k, p) với $k\ge 1$ và $p\in S$.

Hướng dẫn

a) Gọi s là một số nguyên tố và $N_s=10^{2s}+10^s+1$ thì $N_s\equiv 3\left(\mod 9\right)$

b) Kết quả f(2, 7) = 19.

MỤC LỤC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. A comprehensive course in number theory - Alan Baker - Cambridge University Press (2012).

[2]. Problem - Solving and Selected Topics in Number Theory_ In the Spirit of the Mathematical Olympiads - Michael Th. Rassias-Springer - Verlag New York (2011).

[3]. Lí thuyết số - Tài liệu bồ dưỡng học sinh giỏi – Lê Hoành Phò (2016).

[4]. Tính chất số học trong các bài toán về đa thức - Phạm Viết Huy - THPT Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi.