

Chương II

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

BÀI 1. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó

A, B là những đa thức và B khác 0.

A được gọi là tử thức (hay tử); B được gọi là mẫu thức (hay mẫu).

- Mỗi đa thức cũng được coi như một phân thức với mẫu thức bằng 1.

2. Hai phân thức bằng nhau.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ nếu } AD = BC.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. CHỨNG MINH HAI PHÂN THỨC BẰNG NHAU

Phương pháp giải

Để chứng minh $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ta chứng minh $AD = BC$.

Ví dụ 1. (Bài 1, trang 36 SGK)

Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, chứng tỏ rằng:

$$a) \frac{5y}{7} = \frac{20xy}{28x};$$

$$b) \frac{3x(x+5)}{2(x+5)} = \frac{3x}{2};$$

$$c) \frac{x+2}{x-1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1};$$

$$d) \frac{x^2-x-2}{x+1} = \frac{x^2-3x+2}{x-1};$$

$$e) \frac{x^3+8}{x^2-2x+4} = x+2;$$

Giải

$$a) \text{ Ta có } 5y \cdot 28x = 7 \cdot 20xy \text{ nên } \frac{5y}{7} = \frac{20xy}{28x};$$

$$b) \text{ Vì } 2 \cdot 3x(x+5) = 3x \cdot 2(x+5) \text{ nên } \frac{3x(x+5)}{2(x+5)} = \frac{3x}{2};$$

$$c) \text{ Ta có } (x+2)(x^2-1) = (x+2)(x+1)(x-1) \text{ nên } \frac{x+2}{x-1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1};$$

d) Ta có: $(x^2 - x - 2)(x - 1) = x^3 - 2x^2 - x + 2$;
 $(x + 1)(x^2 - 3x + 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Do đó $(x + 1)(x^2 - 3x + 2) = (x^2 - x - 2)(x - 1)$ suy ra: $\frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

e) Vì $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ nên $\frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4} = x + 2$;

Ví dụ 2. (Bài 2, trang 36 SGK)

Ba phân thức sau có bằng nhau không:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x}; \quad \frac{x - 3}{x}; \quad \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x}.$$

Giải

Ta có: $x^2 - 2x - 3 = x^2 - 1 - 2x - 2 = (x - 1)(x + 1) - 2(x + 1)$
 $= (x + 1)(x - 3)$.

$$x^2 + x = x(x + 1);$$

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 1 - 4x + 4 = (x - 1)(x + 1) - 4(x - 1)$$

 $= (x - 1)(x - 3);$

$$x^2 - x = x(x - 1) .$$

Ba phân thức trở thành:

$$\frac{(x + 1)(x - 3)}{(x + 1)x}; \quad \frac{x - 3}{x}; \quad \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 1)x}.$$

Vì $(x + 1)(x - 3)x = (x - 3)(x + 1)x$ nên $\frac{(x + 1)(x - 3)}{(x + 1)x} = \frac{x - 3}{x}$

Và $(x - 3)(x - 1)x = (x - 1)(x - 3)x$ nên $\frac{x - 3}{x} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 1)x}$;

Vậy ba phân thức đã cho bằng nhau.

Ví dụ 3. (Bài 3, trang 36 SGK)

Cho ba đa thức: $x^2 - 4x$, $x^2 + 4$, $x^2 + 4x$. Hãy chọn một đa thức rồi điền vào chỗ trống trong đẳng thức dưới đây:

$$\frac{\dots}{x^2 - 16} = \frac{x}{x - 4}$$

Giải

Ta có $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$. Gọi chỗ trống là đa thức A, ta có:
 $A(x - 4) = x(x - 4)(x + 4)$.

Vậy $A = x(x + 4) = x^2 + 4x$.

Dạng 2. TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (GTNN), GIÁ TRỊ LỚN NHẤT (GTLN) CỦA PHÂN THỨC

Phương pháp giải

- $T = a + [f(x)]^2 \geq a$: Giá trị nhỏ nhất của T bằng a khi $f(x) = 0$.
- $T = b - [f(x)]^2 \leq b$: Giá trị lớn nhất của T bằng b khi $f(x) = 0$.

Nếu $a > 0, T > 0$ thì $\frac{a}{T}$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) khi T lớn nhất (hoặc nhỏ nhất).

Ví dụ 4. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của phân thức: $\frac{3+|2x-1|}{14}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của phân thức: $\frac{-4x^2+4x}{15}$

$$\frac{-4x^2+4x}{15} \text{ Giải}$$

a) Vì mẫu thức là $14 > 0$ nên phân thức $\frac{3+|2x-1|}{14}$ có GTNN khi $3+|2x-1|$ có GTNN.

Vì nên $|2x-1| \geq 0$ nên $3+|2x-1| \geq 3$, suy ra $3+|2x-1| \geq 3$ có GTNN bằng 3 khi $2x-1=0$, tức là $x = \frac{1}{2}$. Khi đó GTNN của phân thức bằng $\frac{3}{14}$.

b) Mẫu thức dương nên phân thức có GTLN khi $-4x^2+4x$ có GTLN.

Ta có $-4x^2+4x = 1-(2x-1)^2$. Vì $-(2x-1)^2 \leq 0$ nên $1-(2x-1)^2 \leq 1$.

GTLN của phân thức bằng $\frac{1}{15}$ khi $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5. Tìm GTLN của các phân thức:

a) $\frac{5}{x^2+2x+2}$

b) $\frac{3}{2+|2x-5|}$

Giải

a) Ta có tử thức là $5 > 0$ và mẫu thức là:

$$x^2+2x+2 = (x^2+2x+1)+1 = (x+1)^2+1 > 0$$

nên phân thức có GTLN khi $(x+1)^2+1$ có GTNN.

Vì $(x+1)^2 > 0$ nên $(x+1)^2+1 > 1$ có GTNN bằng 1 khi $x = -1$. Vậy GTLN của $\frac{5}{x^2+2x+2}$ bằng 5 khi $x = -1$.

b) GTLN của phân thức $\frac{3}{2+|2x-5|}$ bằng $\frac{3}{2}$ khi $x = \frac{5}{2}$.

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1) Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau để chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{xy^3}{7} = \frac{5x^4y^4}{35x^3y}$;

b) $\frac{x^2(x+3)}{x(x+3)^2} = \frac{x}{x+3}$;

c) $\frac{2-x}{2+x} = \frac{x^2-4x+4}{4-x^2}$;

d) $\frac{x^3-9x}{15-5x} = \frac{-x^2-3x}{5}$

2. (Dạng 1) Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, hãy tìm đa thức A trong đẳng thức sau:

$$a) \frac{A}{2x+1} = \frac{6x^2-3x}{4x^2-1};$$

$$b) \frac{4x^2+3x-7}{A} = \frac{4x+7}{2x-3};$$

$$c) \frac{x^2-1}{4x^2+7x+3} = \frac{x^2-2x+1}{A};$$

$$d) \frac{2x^2+3x-2}{x^2+2x} = \frac{A}{x^2-2x}$$

3. (Dạng 2). Tìm GTNN của các phân thức:

$$a) \frac{x^2+4x+6}{3};$$

$$b) \frac{4+2|1-2x|}{5}$$

4. (Dạng 2). Tìm GTLN của các phân thức:

$$a) \frac{12}{3+|5x+1|+|2y-1|};$$

$$b) \frac{5}{4x^2+4x+2y+y^2+3}$$

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

3. RÚT GỌN PHÂN THỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nếu nhân hoặc chia tử thức và mẫu thức của một phân thức với cùng một đa thức khác 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.

$$\frac{A}{B} = \frac{A.C}{B.C}; \quad (C \neq 0).$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A:C}{B:C}; \quad (C \neq 0).$$

2. Nếu đổi dấu cả tử thức và mẫu thức của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.

$$\frac{-A}{-B} = \frac{A}{B};$$

$$-\frac{-A}{B} = \frac{A}{B}.$$

3. Muốn rút gọn một phân thức đại số ta phải:

- Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử;
- Chia cả tử thức và mẫu thức cho nhân tử chung.

$$\frac{A.C}{B.C} = \frac{A}{B}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. ĐIỀN ĐA THỨC VÀO CHỖ TRỐNG ĐỂ CÓ ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

- Biến đổi từ vế trái hoặc vế phải bằng các tính chất:

$$\frac{A}{B} = \frac{A.C}{B.C} \text{ hoặc } \frac{A}{B} = \frac{A:C}{B:C}; \quad (C \neq 0).$$

- Lưu ý: $\frac{-A}{-B} = -\frac{-A}{B} = \frac{A}{B}$.

Ví dụ 1. (Bài 4, trang 38 SGK)

Cô giáo yêu cầu mỗi bạn cho một ví dụ về hai phân thức bằng nhau. Dưới đây là những ví dụ mà các bạn Lan, Hùng, Giang, Huy đã cho:

$$\frac{x+3}{2x-5} = \frac{x^2+3x}{2x^2-5x} \quad (\text{Lan});$$

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+x} = \frac{x+1}{1} \quad (\text{Hùng});$$

$$\frac{4-x}{-3x} = \frac{x-4}{3x} \quad (\text{Giang});$$

$$\frac{(x-9)^3}{2(9-x)} = \frac{(9-x)^2}{2} \quad (\text{Huy}).$$

Em hãy dùng tính chất cơ bản của phân thức hoặc quy tắc đổi dấu để giải thích ai viết đúng, ai viết sai. Nếu có chỗ nào sai em hãy sửa lại cho đúng.

Giải

Lan cho ví dụ đúng vì: $\frac{x+3}{2x-5} = \frac{(x+3).x}{(2x-5).x} = \frac{x^2+3x}{2x^2-5x}$.

Hùng cho ví dụ sai vì: $\frac{(x+1)^2}{x^2+x} = \frac{(x+1)^2 : (x+1)}{x(x+1) : (x+1)} = \frac{x+1}{x}$.

Giang cho ví dụ đúng vì: $\frac{4-x}{-3x} = \frac{-(4-x)}{-(-3x)} = \frac{x-4}{3x}$.

Huy cho ví dụ sai vì: $\frac{(x-9)^3}{2(9-x)} = \frac{-(9-x)^3}{2(9-x)} = \frac{-(9-x)^2}{2}$.

Ví dụ 2. (Bài 5, trang 38 SGK)

Điền đa thức thích hợp vào mỗi chỗ trống trong đẳng thức sau.

a) $\frac{x^3+x^2}{x^2-1} = \frac{\dots}{x-1}$;

b) $\frac{5(x+y)}{2} = \frac{5x^2-5y^2}{\dots}$

Giải

a) Ta có $\frac{x^3+x^2}{x^2-1} = \frac{x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2(x+1) : (x+1)}{(x-1)(x+1) : (x+1)} = \frac{x^2}{x-1}$

b) Ta có: $\frac{5x^2-5y^2}{2(x-y)} = \frac{5(x-y)(x+y)}{2(x-y)} = \frac{5(x+y)}{2}$

Ví dụ 3: (Bài 6, trang 38 SGK)

Đố: Hãy dùng tính chất cơ bản của phân thức để điền một đa thức vào chỗ trống:

$$\frac{x^5 - 1}{x^2 - 1} = \frac{\dots}{x + 1}$$

Giải

Ta có: $\frac{x^5 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^5 - 1) : (x - 1)}{(x + 1)(x - 1) : (x - 1)} = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1}$

(Thực hiện đa thức $x^5 - 1$ cho đa thức $x - 1$ được đa thức thương là $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$)

Dạng 2. RÚT GỌN PHÂN THỨC

Phương pháp giải.

Các bước rút gọn phân thức:

- Phân tích tử và mẫu của phân thức thành nhân tử.
- Chia cả tử và mẫu của phân thức cho nhân tử chung.

$$\frac{A.C}{B.C} = \frac{A}{B}$$

Ví dụ 4. (Bài 7, trang 39 SGK)

Rút gọn phân thức:

a) $\frac{6x^2y^2}{8xy^5};$

b) $\frac{10xy^2(x+y)}{15xy(x+y)^3};$

c) $\frac{2x^2 + 2x}{x + 1};$

d) $\frac{x^2 - xy - x + y}{x^2 + xy - x - y}.$

Giải

a) $\frac{6x^2y^2}{8xy^5} = \frac{3x}{4y^3};$

b) $\frac{10xy^2(x+y)}{15xy(x+y)^3} = \frac{2y}{3(x+y)^2};$

c) $\frac{2x^2 + 2x}{x + 1} = \frac{2x(x+1)}{x+1} = 2x;$

d) $\frac{x^2 - xy - x + y}{x^2 + xy - x - y} = \frac{x(x-y) - (x-y)}{x(x+y) - (x+y)} = \frac{(x-y)(x-1)}{(x+y)(x-1)} = \frac{(x-y)}{(x+y)}.$

Ví dụ 5. (Bài 8, trang 40 SGK)

Trong tờ giấy nháp của một bạn cso ghi một số phép rút gọn phân thức như sau:

a) $\frac{3xy}{9y} = \frac{x}{3};$

b) $\frac{3xy+3}{9y+3} = \frac{x}{3};$

c) $\frac{3xy+3}{9y+9} = \frac{x+1}{3+3} = \frac{x+1}{6};$

d) $\frac{3xy+3}{9y+9} = \frac{x}{3}.$

Theo em chỗ nào đúng, chỗ nào sai? Em hãy giải thích.

Giải

a) Rút gọn phân $\frac{3xy}{9y} = \frac{x}{3}$ là đúng vì:

$$\frac{3xy}{9y} = \frac{x \cdot 3y}{3 \cdot 3y} = \frac{x}{3}.$$

b) Rút gọn phân thức $\frac{3xy+3}{9y+3} = \frac{x}{3}$ là sai vì:

$$3 \cdot (3xy+3) \neq (9y+3) \cdot x.$$

c) Rút gọn phân thức $\frac{3xy+3}{9y+9} = \frac{x+1}{6}$ là sai vì:

$$(3xy+3) \cdot 6 \neq (9y+9)(x+1).$$

d) Rút gọn phân thức $\frac{3xy+3}{9y+9} = \frac{x}{3}$ là đúng vì:

$$\frac{3xy+3}{9y+9} = \frac{3x(y+1)}{9(y+1)} = \frac{x}{3}.$$

Ví dụ 6. (Bài 9, trang 40 SGK)

Áp dụng quy tắc đổi dấu rồi rút gọn phân thức:

$$a) \frac{36(x-2)^3}{32-16x}; \quad b) \frac{x^2-xy}{5y^2-5xy}.$$

Giải

a) Ta có: $\frac{36(x-2)^3}{32-16x} = \frac{36(x-2)^3}{16(2-x)} = \frac{36(x-2)^3}{-16(x-2)} = \frac{9(x-2)^2}{-4};$

b) Ta có: $\frac{x^2-xy}{5y^2-5xy} = \frac{-x(y-x)}{5y(y-x)} = \frac{-x}{5y}.$

Ví dụ 7. (Bài 10, trang 40 SGK)

Đố. Đố em rút được phân thức:

$$\frac{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2-1}.$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \\ &= x^6(x+1)+x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1) \\ &= (x+1)(x^6+x^4+x^2+1). \end{aligned}$$

Do đó: $\frac{x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x - 1}$.

Ví dụ 8. (Bài 11, trang 40 SGK)

Rút gọn phân thức:

a) $\frac{12x^3y^2}{18xy^5}$;

b) $\frac{15x(x+5)^3}{20x^2(x+5)}$.

Giải

a) $\frac{12x^3y^2}{18xy^5} = \frac{2x^2}{3y^3}$;

b) $\frac{15x(x+5)^3}{20x^2(x+5)} = \frac{3(x+5)^2}{4x}$.

Ví dụ 9. (Bài 12, trang 40 SGK)

Phân tích tử và mẫu thành nhân tử rồi rút gọn phân thức:

a) $\frac{3x^2 - 12x + 12}{x^4 - 8x}$;

b) $\frac{7x^2 + 14x + 7}{3x^2 + 3x}$.

Giải

a) Ta có:

$$3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2;$$

$$x^4 - 8x = x(x^3 - 2^3) = x(x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

Do đó: $\frac{3x^2 - 12x + 12}{x^4 - 8x} = \frac{3(x - 2)^2}{x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{3(x - 2)}{x(x^2 + 2x + 4)}$.

b) Ta có:

$$7x^2 + 14x + 7 = 7(x^2 + 2x + 1) = 7(x + 1)^2;$$

$$3x^2 + 3x = 3x(x + 1).$$

Do đó: $\frac{7x^2 + 14x + 7}{3x^2 + 3x} = \frac{7(x + 1)^2}{3x(x + 1)} = \frac{7(x + 1)}{3x}$.

Ví dụ 10. (Bài 13, trang 40 SGK)

Áp dụng quy tắc đổi dấu rồi rút gọn phân thức:

a) $\frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^3}$;

b) $\frac{y^2 - x^2}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$.

Giải

a) $\frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^3} = \frac{45x(x-3)}{15x(x-3)^3} = \frac{-3}{(x-3)^2}$;

b) $\frac{y^2 - x^2}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3} = \frac{-(x^2 - y^2)}{(x-y)^3} = \frac{-(x-y)(x+y)}{(x-y)^3} = \frac{-x-y}{(x-y)^2}$.

Dạng 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải.

Phân tích tử và mẫu của phân thức ở vế trái (hoặc vế phải) của đẳng thức đã cho thành nhân tử rồi rút gọn phân thức ta được kết quả.

Ví dụ 11. Chứng minh rằng: $\frac{2x^2 + 3xy + y^2}{2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3} = \frac{1}{x - y}$.

Giải

Phân tích tử thức thành nhân tử bằng cách tách hạng tử:

$$2x^2 + 3xy + y^2 = (2x^2 + 2xy) + (xy + y^2) = 2x(x + y) + y(x + y) = (x + y)(2x + y).$$

Phân tích mẫu thức thành nhân tử bằng cách nhóm các hạng tử:

$$2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3 = x^2(2x + y) - y^2(2x + y) = (2x + y)(x^2 - y^2) = (2x + y)(x + y)(x - y).$$

$$\text{Vậy: } \frac{2x^2 + 3xy + y^2}{2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3} = \frac{(x + y)(2x + y)}{(2x + y)(x + y)(x - y)} = \frac{1}{x - y}.$$

Dạng 4. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp giải.

- Trước hết, rút gọn biểu thức bằng cách phân tích tử và mẫu thành nhân tử rồi chia tử và mẫu cho nhân tử chung.
- Thay giá trị của biến đã cho vào biểu thức đã rút gọn.

Ví dụ 12. Tính giá trị của biểu thức:

$$\frac{(x - 2)(2x + 2x^2)}{(x + 1)(4x - x^3)} \text{ với } x = -\frac{1}{2}.$$

Giải

Rút gọn biểu thức đã cho ta có:

$$\frac{(x - 2)(2x + 2x^2)}{(x + 1)(4x - x^3)} = \frac{(x - 2)2x(1 + x)}{(x + 1)x(4 - x^2)} = \frac{(x - 2)2x(1 + x)}{(x + 1)x(2 - x)(2 + x)} = -\frac{2}{x + 2}.$$

Thay $x = -\frac{1}{2}$ vào biểu thức đã rút gọn ta được:

$$\frac{2}{x + 2} = -\frac{2}{-\frac{1}{2} + 2} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}.$$

Ví dụ 13. Tính giá trị của biểu thức:

a) $\frac{a^2b^3}{a^3b^2}$ với $a = 12, b = -36$;

b) $\frac{ax^4 - a^4x}{a^2 + ax + x^2}$ với $a = 3, x = \frac{1}{3}$;

c) $\frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^3 - 4x}$ với $x = 98$.

Giải

a) $\frac{a^2b^3}{a^3b^2} = \frac{b}{a}$. Với $a = 12, b = -36$ ta được: $\frac{b}{a} = -\frac{36}{12} = -3$.

b) $\frac{ax^4 - a^4x}{a^2 + ax + x^2} = ax(x-a)$. Với $a = 3, x = \frac{1}{3}$ ta được:

$$ax(x-a) = 3 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 3 \right) = -\frac{8}{3}$$

c) $\frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^3 - 4x} = \frac{x(x^2 + x - 6)}{x(x^2 - 4)} = \frac{(x^2 - 2x + 3x - 6)}{(x-2)(x+2)}$
 $= \frac{x(x-2) + 3(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$.

Với $x = 98$, ta được: $\frac{x+3}{x+2} = \frac{98+3}{98+2} = \frac{101}{100}$.

Dạng 5. TÌM X THỎA MÃN ĐẲNG THỨC CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

- Đưa đẳng thức đã cho về dạng $a \cdot x = b$.
- Tìm x : $x = \frac{b}{a}$ (với $a \neq 0$)
- Rút gọn biểu thức $\frac{b}{a}$.

Ví dụ 14. Tìm x , biết: $bx - abx = b^2c - ab$, với a và b là những hằng số $a \neq 1, b \neq 0$.

Giải

Ở vế trái của đẳng thức đã cho, đặt x làm nhân tử chung:

$$(b - ab)x = b^2c - ab \text{ hay } b(1 - a)x = b(bc - a).$$

Vì $a \neq 1, b \neq 0$, nên $b(1 - a) \neq 0$, do đó có thể chia hai vế cho $b(1 - a)$ ta được:

$$x = \frac{b(bc - a)}{b(1 - a)} = \frac{(bc - a)}{(1 - a)}.$$

Ví dụ 15. Tìm x , biết: $ax - x + 1 = a^2$ với $a \neq 1$.

Giải

Chuyển số 1 sang vế phải của đẳng thức: $ax - x = a^2 - 1$.

Đặt x làm nhân tử chung ở vế trái: $x(a - 1) = a^2 - 1$.

Vì $a \neq 1$ nên $a - 1 \neq 0$, do đó có thể chia hai vế cho $a - 1$ ta được:

$$x = \frac{a^2 - 1}{a - 1} = \frac{(a - 1)(a + 1)}{a - 1} = a + 1.$$

Dạng 6. CHỨNG MINH BIỂU THỨC KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO BIẾN.

Phương pháp giải

Bằng cách rút gọn các phân thức đại số để phân thức đã rút gọn không còn chứa biến.

Ví dụ 16. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x và y:

a) $\frac{(x+a)^2 - x^2}{2x+a}$;

b) $\frac{x^2 - y^2}{(x+y)(ay-ax)}$;

c) $\frac{2ax - 2x - 3y + 3ay}{4ax + 6x + 9y + 6ay}$.

Giải

a) Ta có $\frac{(x+a)^2 - x^2}{2x+a} = \frac{a(2x+a)}{(2x+a)} = a$ không phụ thuộc vào x.

b) Ta có $\frac{x^2 - y^2}{(x+y)(ay-ax)} = \frac{x^2 - y^2}{(x+y)a(y-x)} = \frac{x^2 - y^2}{-a(x^2 - y^2)} = -\frac{1}{a}$ không phụ thuộc vào x, y.

c) Ta có $\frac{2ax - 2x - 3y + 3ay}{4ax + 6x + 9y + 6ay} = \frac{2x(a-1) + 3y(a-1)}{2x(2a+3) + 3y(2a+3)} = \frac{(a-1)(2x+3y)}{(2a+3)(2x+3y)} = \frac{a-1}{2a+3}$ không phụ thuộc vào x, y.

Dạng 7. RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

Phương pháp giải

- Với điều kiện đã cho trước, phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử.
- Rút gọn các nhân tử chung.

Ví dụ 17. Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \neq 0$. Rút gọn biểu thức: $\frac{(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{(ax + by + cz)^2}$.

Giải

Đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \neq 0$. thì $x = ka, y = kb, z = kz$. Thay vào phân thức đã cho ta được:

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{(ax + by + cz)^2} = \frac{(k^2a^2 + k^2b^2 + k^2c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{(ka^2 + kb^2 + kc^2)^2} = \frac{k^2(a^2 + b^2 + c^2)^2}{k^2(a^2 + b^2 + c^2)^2} = 1.$$

Ví dụ 18. Cho $ax + by + cz = 0$, hãy rút gọn phân thức:

$$A = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ac(x-z)^2 + ab(x-y)^2}.$$

Giải

Áp dụng hằng đẳng thức

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx),$$

Ta bình phương hai vế của đẳng thức đã cho thì được:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(abxy + acxz + bcyz) = 0,$$

Suy ra:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = -2(abxy + acxz + bcyz). \quad (1)$$

Biến đổi mẫu thức:

$$\begin{aligned} & bc(y-z)^2 + ac(x-z)^2 + ab(x-y)^2 \\ &= bcy^2 - 2bcyz + bcz^2 + acx^2 - 2acxz + acz^2 + abx^2 - 2abxy + aby^2 \\ &= bcy^2 + bcz^2 + acx^2 + acz^2 + abx^2 + aby^2 - 2(abxy + bcyz + acxz) \end{aligned} \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) thì mẫu thức của A bằng:

$$\begin{aligned} & (bcy^2 + acx^2 + c^2z^2) + (bcz^2 + abx^2 + b^2y^2) + (acz^2 + aby^2 + a^2x^2) \\ &= c(by^2 + ax^2 + cz^2) + b(cz^2 + ax^2 + by^2) + a(cz^2 + by^2 + ax^2) \\ &= (ax^2 + by^2 + cz^2)(a+b+c). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{a+b+c}.$$

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Dùng tính chất cơ bản của phân thức, hãy biến điền vào các chỗ trống trong mỗi đẳng thức:

$$a) \frac{3x^2 - 3}{x - x^2} = \frac{\dots}{x}; \quad b) \frac{\dots}{x + y} = \frac{5xy + 5x^2}{5(x + y)^2};$$

$$c) \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x + y} = \frac{\dots}{x^2 - y^2}.$$

2. (Dạng 1) Biến đổi mỗi cặp phân thức sau thành một cặp phân thức có cùng mẫu thức:

$$a) \frac{5x}{x-3} \quad \text{và} \quad \frac{2x+7}{6-2x}.$$

$$b) \frac{2}{x^2+6x+9} \quad \text{và} \quad \frac{x-3}{3x+9};$$

$$c) \frac{x}{(x-1)(x+2)} \quad \text{và} \quad \frac{x-1}{(x+2)(x+1)}.$$

3. (Dạng 2). Rút gọn phân thức:

$$a) \frac{17xy^3z^4}{34x^3y^2z};$$

$$b) \frac{y^2 - xy}{4xy - 4y^2};$$

$$c) \frac{x^2 - 25}{5x - x^2};$$

$$d) \frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} \cdot \frac{x^2 + xz - xy - yz}{x^2 + xz + xy + yz}.$$

4. (Dạng 2). Rút gọn các phân thức:

a) $\frac{a-x}{x-a}$;

b) $\frac{(-x)^5 a^2}{x^2(-a)^3}$;

c) $\frac{(x-y)(2x+3)}{y^2-yx}$.

5. (Dạng 3). Hãy chứng minh:

a) $\frac{x^5-1}{x-1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;

b) $\frac{2x^2 + xy - y^2}{2x^2 - 3xy + y^2} = \frac{x+y}{x-y}$.

6. (Dạng 1). Viết phân thức sau dưới dạng một phân thức bằng nó và có tử thức là $x^3 - y^3$:

a) $\frac{x-y}{x+y}$;

b) $\frac{x^2 + xy + y^2}{x-y}$.

7. (Dạng 4). Tính giá trị của biểu thức: $\frac{x-xy-y+y^2}{y^3-3y^2+3y-1}$ với $x = -\frac{3}{4}$; $y = \frac{1}{2}$.8. (Dạng 4). Cho $a > b > 0$ và $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính giá trị $P = \frac{b-a}{b+a}$.9. (Dạng 6). Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y .

$$\frac{9x^2-1}{1-3x} + \frac{3xy-3x+2y-2}{y-1}, x \neq \frac{1}{3} \text{ và } y \neq 1.$$

10. (Dạng 5). Tìm x , biết:

a) $a^2x + x = 2a^2 - 3$;

b) $a^2x + 3ax + 9 = a^2 (a \neq 0; a \neq -3)$.

11. (Dạng 7). Cho $x < 0$. Hãy rút gọn phân thức $A = \frac{|x-1| + |x| + x}{3x^2 - 4x + 1}$.12. (Dạng 7). Cho $a+b+c=3$, rút gọn biểu thức:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}$$

13. (Dạng 7). Cho $b \neq c, a+b \neq c$ và $c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = 0$. Hãy rút gọn phân thức:

$$\frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2}$$

§4. QUY ĐỒNG MẪU THỨC CỦA NHIỀU PHÂN THỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tìm mẫu thức chung (MTC) của nhiều phân thức

Muốn tìm mẫu thức chung của những phân thức đã cho ta phải:

- Phân tích các mẫu thức thành nhân tử;
- Lấy tích của BCNN của các hệ số với các lũy thừa có mặt trong các mẫu thức, số mũ của mỗi lũy thừa là số mũ cao nhất của nó trong các mẫu thức.

2. Cách quy đồng mẫu thức

Muốn quy đồng mẫu thức ta phải:

- Tìm mẫu thức chung; tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức tương ứng.

- Nhân tử thức và mẫu thức của mỗi phân thức với nhân tử phụ.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TÌM MẪU THỨC CHUNG CỦA NHIỀU PHÂN THỨC

Phương pháp giải

- Mẫu thức chung của nhiều phân thức (trùng ứng mẫu số chung của các phân thức). Để có mẫu thức chung ta phải phân tích mỗi mẫu thức thành nhân tử (trùng tự phân tích mẫu số thành thừa số nguyên tố).
- Lấy tích của BCNN các hệ số và các lũy thừa chung và riêng có mặt trong mẫu thức với số mũ cao nhất.
- Nhân tử phụ là thương của mẫu thức chung với từng mẫu thức.

Ví dụ 1. Tìm mẫu thức chung của các phân thức sau:

a) $\frac{2}{15x^3y^2}; \frac{y}{10x^4z^3}; \frac{x}{20y^3z}$.

b) $\frac{x}{y^2-yz}; \frac{z}{y^2+yz}; \frac{y}{y^2-z^2}$.

c) $\frac{5}{2x-4}; \frac{4}{3x-9}; \frac{7}{50-25x}$.

Giải

a) BCNN(15;10;20)=60

Số mũ cao nhất của x là : 4 ; số mũ cao nhất của y là : 3 ; số mũ cao nhất của z là : 3

Vậy MTC cần tìm là : $60x^4y^3z^3$.

b) Phân tích các mẫu thức thành nhân tử, ta có :

$$y^2 - yz = y(y - z); y^2 + yz = y(y + z); y^2 - z^2 = (y - z)(y + z).$$

Vậy MTC cần tìm là : $y(y - z)(y + z)$.

c) $2x - 4 = 2(x - 2); 3x - 9 = 3(x - 3); 50 - 25x = -25(x - 2)$.

BCNN (2;3;25) = 150. Vậy MTC cần tìm là : $-150(x - 2)(x - 3)$

DẠNG 2. QUY ĐỒNG MẪU THỨC

Phương pháp giải

- Trước hết tìm mẫu thức chung (dạng 1).
- Xác định các nhân tử phụ : nhân tử phụ là thương của mẫu thức chung với từng mẫu thức.
- Nhân tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ của nó.

Ví dụ 2. (Bài 14, trang 43 SGK)

Quy đồng mẫu thức của các phân thức sau :

$$\text{a) } \frac{5}{x^5 y^3}; \frac{7}{12x^3 y^4}. \quad \text{b) } \frac{4}{15x^3 y^5}; \frac{11}{12x^4 y^2}.$$

Giải

a) MTC : $12x^5 y^4$.

Nhân tử phụ của mẫu thức $x^5 y^3$ là : $(12x^5 y^4) : (x^5 y^3) = 12y$. Do đó :

$$\frac{5}{x^5 y^3} = \frac{5 \cdot 12y}{x^5 y^3 \cdot 12y} = \frac{60y}{12x^5 y^4}$$

b) MTC : $60x^4 y^5$.

Nhân tử phụ của mẫu thức $15x^3 y^5$ là $4x$; nhân tử phụ của mẫu thức $12x^4 y^2$ là $5y^3$. Do đó :

$$\frac{4}{15x^3 y^5} = \frac{4 \cdot 4x}{15x^3 y^5 \cdot 4x} = \frac{16x}{60x^4 y^5}$$
$$\frac{4}{12x^4 y^2} = \frac{11 \cdot 5y^3}{12x^4 y^2 \cdot 5y^3} = \frac{55y^3}{60x^4 y^5}$$

Ví dụ 3. (Bài 15, trang 43 SGK)

Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

$$\text{a) } \frac{5}{2x+6}; \frac{3}{x^2-9} \quad \text{b) } \frac{2x}{x^2-8x+16}; \frac{x}{3x^2-12x}.$$

Giải

a) $2x+6 = 2(x+3); x^2-9 = (x-3)(x+3)$. MTC $2(x+3)(x-3)$.

Ta có $\frac{5}{2(x+3)} = \frac{5(x-3)}{2(x+3)(x-3)}$; $\frac{3}{(x-3)(x+3)} = \frac{6}{2(x+3)(x-3)}$.

b) $\frac{2x}{x^2-8x+16} = \frac{2x}{(x-4)^2}$; $\frac{x}{3x^2-12x} = \frac{x}{3x(x-4)} = \frac{1}{3(x-4)}$. MTC $3(x-4)^2$. Ta có :

$$\frac{2x}{(x-4)^2} = \frac{6x}{3(x-4)^2}; \frac{1}{3(x-4)} = \frac{x-4}{3(x-4)^2}.$$

Ví dụ 4. (Bài 16, trang 43 SGK)

Quy đồng mẫu các phân thức sau :

$$a) \frac{4x^2 - 3x + 5}{x^3 - 1}; \frac{1 - 2x}{x^2 + x + 1}; -2.$$

$$b) \frac{10}{x+2}; \frac{5}{2x-4}; \frac{1}{6-3x}$$

Giải

a) MTC: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$. Ta có:

$$\frac{4x^2 - 3x + 5}{x^3 - 1} = \frac{4x^2 - 3x + 5}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$\frac{1 - 2x}{x^2 + x + 1} = \frac{(x-1)(1-2x)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{(x^2 + x + 1)}$$

$$-2 = \frac{-2(x^3 - 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

b) Ta có: $2x - 4 = 2(x - 2)$; $6 - 3x = 3(2 - x) = -3(x - 2)$. MTC $6(x - 2)(x + 2)$. Do đó:

$$\frac{10}{x+2} = \frac{60(x-2)}{6(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{5}{2x-4} = \frac{5}{2(x-2)} = \frac{15(x+2)}{6(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{1}{6-3x} = \frac{1}{3(2-x)} = \frac{-1}{3(x-2)} = \frac{-2(x+2)}{6(x-2)(x+2)}$$

Ví dụ 5. (Bài 17, trang 43 SGK)

Đố. Cho hai phân thức: $\frac{5x^2}{x^3 - 6x^2}$; $\frac{3x^2 + 18x}{x^2 - 36}$. Khi quy đồng mẫu thức, bạn

Tuấn đã chọn MTC = $x^2(x-6)(x+6)$, còn bạn Lan bảo rằng "Quá đơn giản! MTC = $x-6$ ". Đố em biết bạn nào chọn đúng?

Giải

Nếu không rút gọn hai phân thức đã cho thì bạn Tuấn đã làm đúng, vì:

$$x^3 - 6x^2 = x^2(x-6); x^2 - 36 = (x-6)(x+6) \text{ nên:}$$

$$MTC = x^2(x-6)(x+6)$$

Nếu rút gọn hai phân thức đã cho thì bạn Lan làm đúng, vì:

$$\frac{5x^2}{x^3 - 6x^2} = \frac{5x^2}{x^2(x-6)} = \frac{5}{x-6}.$$

$$\frac{3x^2 + 18x}{x^2 - 36} = \frac{3x(x+6)}{(x-6)(x+6)} = \frac{3x}{x-6}.$$

Ví dụ 6. (Bài 18, trang 43 SGK)

Quy đồng mẫu thức hai phân thức :

$$\text{a) } \frac{3x}{2x+4} \text{ và } \frac{x+3}{x^2-4}; \quad \text{b) } \frac{x+5}{x^2+4x+4} \text{ và } \frac{x}{3x+6}$$

Giải

$$\text{a) } 2x+4 = 2(x+2); x^2-4 = (x-2)(x+2). \text{ MTC: } 2(x+2)(x-2).$$

$$\text{Ta có: } \frac{3x}{2(x+2)} = \frac{3x(x-2)}{2(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{2(x+3)}{2(x+2)(x-2)}$$

$$\text{b) } x^2+4x+4 = (x+2)^2; 3x+6 = 3(x+2). \text{ MTC: } 3(x+2)^2. \text{ Ta có:}$$

$$\frac{x+5}{x^2+4x+4} = \frac{3(x+5)}{3(x+2)^2}$$

$$\frac{x}{3(x+2)} = \frac{x(x+2)}{3(x+2)^2}$$

Ví dụ 7. (Bài 19, trang 48 SGK)

Quy đồng mẫu thức của các phân thức sau :

$$\text{a) } \frac{1}{x+2}; \frac{8}{2x-x^2}. \quad \text{b) } x^2+1; \frac{x^4}{x^2-1}.$$

$$\text{c) } \frac{x^3}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}; \frac{x}{y^2-xy}.$$

Giải

$$\text{a) Ta có } 2x-x^2 = x(2-x) = -x(x-2). \text{ MTC: } x(x+2)(x-2). \text{ Do đó:}$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{8}{2x-x^2} = \frac{8}{x(2-x)} = \frac{-8}{x(x-2)} = \frac{-8(x+2)}{x(x-2)(x+2)}$$

b) MTC : $x^2 - 1$. Ta có :

$$x^2 + 1 = \frac{x^2 + 1}{1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}.$$

c) Ta có : $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$; $y^2 - xy = y(y - x)$; MTC $y(x - y)^3$. Do đó :

$$\frac{x^3}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3} = \frac{x^3}{(x - y)^3} = \frac{yx^3}{y(x - y)^3}$$

$$\frac{x}{y^2 - xy} = -\frac{x}{y(x - y)} = \frac{-x(x - y)^2}{y(x - y)^3}$$

Ví dụ 8. (Bài 20, trang 47 SGK)

Cho hai phân thức $\frac{1}{x^2 + 3x - 10}$; $\frac{x}{x^2 + 7x + 10}$. Không dùng cách phân tích các mẫu thức thành nhân tử hãy chứng tỏ rằng có thể qui đồng mẫu thức của hai phân thức này với mẫu thức chung là : $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$.

Giải

Thực hiện phép chia đa thức : $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ cho các mẫu thức ta được :

$$x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = (x^2 + 3x - 10)(x + 2)$$

$$x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = (x^2 + 7x + 10)(x - 2)$$

Ta có :

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 10} = \frac{x + 2}{(x^2 + 3x - 10)(x + 2)} = \frac{x + 2}{x^3 + 5x^2 - 4x - 20};$$

$$\frac{x}{x^2 + 7x + 10} = \frac{x(x - 2)}{(x^2 + 7x + 10)(x - 2)} = \frac{x(x - 2)}{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}.$$

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Tìm mẫu chung của các phân thức :

a) $\frac{x+a}{axb^3}$; $\frac{x+b}{a^2xb^2}$; $\frac{a+b}{x^2b^3}$.

b) $\frac{x-y}{x^2(y-z)}$; $\frac{y-z}{y^2(z-x)}$; $\frac{z-x}{z^2(x-y)}$.

c) $\frac{2x}{(x-y)^2}$; $\frac{2y}{x^2-y^2}$.

2. (Dạng 1). Tìm mẫu thức chung :

a) $\frac{x^2}{x^2-1}$; $\frac{3x-1}{x^3+2x^2+x}$; $\frac{2x+1}{x^3}$.

b) $\frac{1}{x-y}$; $\frac{1}{x^3-y^3}$; $\frac{1}{x^2-y^2}$.

3. (Dạng 2). Quy đồng mẫu các phân thức sau :

a) $\frac{a+x}{a^2x}$; $\frac{3x-1}{x^3+2x^2+x}$; $\frac{b+a}{b^2a}$.

b) $\frac{x+y}{x(y-z)^2}$; $\frac{y}{x^2(y-z)^2}$

c) $\frac{x+y}{(x-y)^2}$; $\frac{1}{x^2-y^2}$.

4. (Dạng 2). Quy đồng mẫu của các phân thức sau :

a) $\frac{x}{x^2-2ax+a^2}$; $\frac{3-2x}{x^2-9}$.

b) $\frac{2x-1}{x-x^2}$; $\frac{x+1}{2-4x+2x^2}$.

c) $\frac{x-1}{x^3+1}$; $\frac{2x}{x^2-x+1}$; $\frac{2}{x+1}$.

d) $\frac{7}{5x}$; $\frac{4}{x-2y}$; $\frac{x-y}{8y^2-2x^2}$.

5. Quy đồng mẫu thức các phân thức :

a) $\frac{7x-1}{2x^2+6x}$; $\frac{3-2x}{x^2-9}$.

b) $\frac{2x-1}{x-x^2}$; $\frac{x+1}{2-4x+2x^2}$.

c) $\frac{x-1}{x^3+1}$; $\frac{2x}{x^2-x+1}$; $\frac{2}{x+1}$.

d) $\frac{7}{5x}$; $\frac{4}{x-2y}$; $\frac{x-y}{8y^2-2x^2}$.

6. Cho hai phân thức : $\frac{2}{2x^2+7x-15}$; $\frac{x}{x^2+3x-10}$. Chứng tỏ rằng có thể quy đồng mẫu thức của hai phân thức này với mẫu thức chung là : $2x^3+3x^2-29x+30$.

BÀI 5. PHÉP CỘNG CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

BÀI 6. PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Cộng nhiều phân thức có cùng mẫu thức

Quy tắc. Muốn cộng nhiều phân thức có cùng mẫu thức ta cộng các tử thức với nhau, giữ nguyên mẫu thức, rồi rút gọn phân thức vừa tìm được.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}.$$

2. Cộng nhiều phân thức có mẫu thức khác nhau

Quy tắc. Muốn cộng nhiều phân thức có mẫu thức khác nhau ta phải quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức cùng mẫu vừa tìm được.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} + \frac{BC}{BD} = \frac{AD + BC}{BD}.$$

Ví dụ 1 (Tr 99)

Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \frac{3x-5}{7} + \frac{4x-5}{7}$$

$$b) \frac{5xy-4y}{2x^2y^3} + \frac{3xy+4y}{2x^2y^3}$$

$$c) \frac{x+1}{x-5} + \frac{x-18}{x-5} + \frac{x+2}{x-5}.$$

Ví dụ 2 (Tr 100)

Áp dụng quy tắc đổi dấu để các phân thức có cùng mẫu thức rồi làm tính cộng :

$$a) \frac{2x^2-x}{x-1} + \frac{x+1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x-1}$$

$$b) \frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x-2x^2}{3-x} + \frac{5-4x}{x-3}.$$

Ví dụ 3 (Tr 100).

Theo quy tắc đổi dấu ta có : $\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$ Do đó ta cũng có $-\frac{A}{B} = \frac{A}{-B}$. Chẳng hạn phân thức

đổi dấu của $\frac{4}{5-x}$ là: $-\frac{4}{5-x} = \frac{4}{-(5-x)} = \frac{4}{x-5}$. Áp dụng điều này hãy điền vào dấu chấm

dưới đây những phân thức thích hợp.

$$a) -\frac{x^2+2}{1-5x} = \dots$$

$$b) -\frac{4x+1}{5-x} = \dots$$

Ví dụ 4 (Tr101).

Làm tính trừ các phân thức sau:

$$a) \frac{4x-1}{3x^2y} - \frac{7x-1}{3x^2y}$$

$$b) \frac{4x+5}{2x-1} - \frac{5x-9}{2x-1}$$

$$c) \frac{11x}{2x-3} - \frac{x-18}{3-2x}$$

$$d) \frac{2x-7}{10x-4} - \frac{3x+5}{4-10x}$$

Ví dụ 5(Tr101)

Làm các phép tính sau

$$a) \frac{4xy-5}{10x^3y} - \frac{6y^2-5}{10x^3y}$$

$$b) \frac{7x+6}{2x(x+7)} - \frac{3x+6}{2x^2+14x}$$

Ví dụ 6(Tr102)

Làm các phép tính sau:

$$a) \frac{y}{2x^2-xy} + \frac{4x}{y^2-2xy}$$

$$b) \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2-4} + \frac{x-14}{(x^2+4x+4)(x-2)}$$

$$c) \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)(4x+7)}$$

$$d) \frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+3)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(4x+7)}$$

Ví dụ 7 (Tr 103).

Một con mèo đuổi bắt một con chuột. Lần đầu mèo chạy với vận tốc x m/s. Chạy được 3 m thì mèo bắt được chuột. Mèo vờn chuột 40 giây rồi thả ra cho chuột chạy. Sau đó 15 giây mèo lại đuổi bắt chuột nhưng với vận tốc nhỏ hơn lần đầu là $0,5\text{m/s}$. Chạy được 5m mèo lại bắt được chuột. Lần này mèo cắn chết chuột, cuộc săn kết thúc. Hãy biểu diễn qua x

- Thời gian lần thứ nhất mèo đuổi bắt chuột
- Thời gian lần thứ hai mèo đuổi bắt chuột
- Thời gian kể từ đầu đến khi kết thúc cuộc săn.

Giải

Thời gian lần thứ nhất mèo đuổi bắt được chuột là: $\frac{3}{x}$ giây.

Thời gian lần thứ hai mèo đuổi bắt được chuột là: $\frac{5}{x-0,5}$ giây.

Thời gian kể từ lần đầu đến khi kết thúc cuộc săn là:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{x} + 40 + 15 + \frac{5}{x-0,5} = \frac{3}{x} + 55 + \frac{5}{x-0,5} \\ &= \frac{3(x-0,5)}{x(x-0,5)} + \frac{55(x-0,5)}{x(x-0,5)} + \frac{5x}{x(x-0,5)} \\ &= \frac{3x-1,5+55x^2-27,5x+5x}{x(x-0,5)} \\ &= \frac{55x^2-19,5x-1,5}{x(x-0,5)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 8. (Bài 25, trang 50 SGK)

Làm tính cộng các phân thức sau:

a) $\frac{5}{2x^2y} + \frac{3}{5xy^2} + \frac{x}{y^3}$;

b) $\frac{x+1}{2x+6} + \frac{2x-3}{x(x+3)}$;

c) $\frac{3x+5}{x^2-5x} + \frac{25-x}{25-5x}$;

d) $x^2 + \frac{x^4+1}{1-x^2} + 1$;

e) $\frac{4x^2-3x+17}{x^3-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{6}{1-x}$.

Giải

a) MTC = $10x^2y^3$. Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2x^2y} + \frac{3}{5xy^2} + \frac{x}{y^3} = \frac{25y^2}{10x^2y^3} + \frac{6xy}{10x^2y^3} + \frac{10x^3}{10x^2y^3} \\ &= \frac{25y^2+6xy+10x^3}{10x^2y^3}. \end{aligned}$$

b) MTC = $2x(x+3)$. Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{2x+6} + \frac{2x+3}{x(x+3)} = \frac{x+1}{2(x+3)} + \frac{2x+3}{x(x+3)} = \frac{x(x+1)}{2x(x+3)} + \frac{2(2x+3)}{2x(x+3)} \\ &= \frac{x^2+x+4x+6}{2x(x+3)} = \frac{x^2+5x+6}{2x(x+3)} \\ &= \frac{(x+2)(x+3)}{2x(x+3)} = \frac{x+2}{2x}. \end{aligned}$$

c) Ta có: $x^2-5x = x(x-5)$; $25-5x = 5(5-x) = -5(x-5)$;

MTC = $5x(x-5)$. Do đó:

$$\begin{aligned} \frac{3x+5}{x^2-5x} + \frac{25-x}{25-5x} &= \frac{3x+5}{x(x-5)} + \frac{x-25}{5(x-5)} = \frac{5(3x+5)}{5x(x-5)} + \frac{x(x-25)}{5x(x-5)} \\ &= \frac{15x+25+x^2-25x}{5x(x-5)} = \frac{x^2-10x+25}{5x(x-5)} \\ &= \frac{(x-5)^2}{5x(x-5)} = \frac{x-5}{5x}. \end{aligned}$$

d) MTC = $1-x^2$. Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{x^4+1}{1-x^2} + 1 &= x^2 + 1 + \frac{x^4+1}{1-x^2} = \frac{(x^2+1)(1-x^2)}{1-x^2} + \frac{x^4+1}{1-x^2} \\ &= \frac{1-x^4+x^4+1}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2}. \end{aligned}$$

e) MTC = $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{4x^2-3x+17}{x^3-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{6}{1-x} &= \frac{4x^2-3x+17+(2x-1)(x-1)-6(x^2+x+1)}{x^3-1} \\ &= \frac{4x^2-3x+17+2x^2-2x-x+1-6x^2-6x-6}{x^3-1} \\ &= \frac{-12x+12}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-12(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-12}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

Ví dụ 9. (Bài 26, trang 47 SGK)

Một đội máy xúc trên công trường Hồ Chí Minh nhận nhiệm vụ xúc 11 600 m³ đất. Giai đoạn đầu còn nhiều khó khăn nên máy làm việc với năng suất trung bình x m³/ngày và đội được 5 000 m³. Sau đó công việc ổn định hơn, năng suất của máy tăng 25 m³/ngày.

a) Hãy biểu diễn:

Thời gian xúc 5 000 m³ đất đầu tiên;

Thời gian làm nốt phần việc còn lại;

Thời gian làm việc để hoàn thành công việc với $x = 250$ m³/ngày.

Giải

a) Thời gian xúc 5 000 m³ đất đầu tiên là: $\frac{5\,000}{x}$ (ngày).

Khối lượng công việc còn lại là: $11\,600 - 5\,000 = 6\,600$ (m³).

Thời gian làm nốt phần việc còn lại là: $\frac{6\,600}{x+25}$ (ngày).

b) Thời gian làm việc với $x = 250$ m³/ngày là:

$$\frac{5\,000}{250} + \frac{6\,600}{275} = 20 + 24 = 44 \text{ (ngày)}.$$

Ví dụ 10. (Bài 27, trang 48 SGK)

Đố. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

$$\frac{x^2}{5x+25} + \frac{2(x-5)}{x} + \frac{50+5x}{x(x+5)} \text{ tại } x = -4.$$

Nếu coi tử số của phân số tối giản mà em tìm được là ngày, còn mẫu số là tháng thì đó chính là một ngày lễ trên thế giới. Đố em biết đó là ngày gì?

Giải

Ta có: $5x+25 = 5(x+5)$; MTC = $5x(x+5)$. Do đó:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{5(x+5)} + \frac{2(x-5)}{x} + \frac{50+5x}{x(x+5)} &= \frac{x^3}{5x(x+5)} + \frac{10(x-5)(x+5)}{5x(x+5)} + \frac{5(50+5x)}{5x(x+5)} \\ &= \frac{x^3 + 10x^2 - 250 + 250 + 25x}{5x(x+5)} = \frac{x^3 + 10x^2 + 25x}{5x(x+5)} = \frac{x(x^2 + 10x + 25)}{5x(x+5)} \\ &= \frac{x(x+5)^2}{5x(x+5)} = \frac{x+5}{5}. \end{aligned}$$

Với $x = -4$ ta có: $\frac{x+5}{5} = \frac{1}{5}$.

Vậy ngày lễ trên thế giới là ngày Quốc tế Lao động 1-5.

Ví dụ 11. (Bài 30, trang 50 SGK)

Thực hiện phép tính sau:

a) $\frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x}$; b) $x^2+1 - \frac{x^4-3x^2+2}{x^2-1}$.

Giải

a) MTC = $x(2x+6)$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x} &= \frac{3x}{x(2x+6)} + \frac{-x+6}{x(2x+6)} = \frac{3x-x+6}{x(2x+6)} \\ &= \frac{2x+6}{x(2x+6)} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

b) MTC = x^2-1 . Ta có:

$$\begin{aligned} x^2+1 - \frac{x^4-3x^2+2}{x^2-1} &= \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1} + \frac{-x^4+3x^2-2}{x^2-1} \\ &= \frac{x^4-1-x^4+3x^2-2}{x^2-1} = \frac{3(x^2-1)}{x^2-1} = 3. \end{aligned}$$

Ví dụ 12. (Bài 31, trang 50 SGK)

Chứng tỏ rằng mỗi hiệu sau đây bằng một phân thức có tử bằng 1.

a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$; b) $\frac{1}{xy-x^2} - \frac{z}{y^2-xy}$.

Giải

a) MTC = $x(x+1)$. Ta có:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

b) $xy-x^2 = x(y-x)$; $y^2-x = (y-x)$. MTC: $xy(y-x)$. Ta có:

$$\frac{1}{xy-x^2} - \frac{1}{y^2-xy} = \frac{1}{x(y-x)} - \frac{1}{y(y-x)}$$

$$= \frac{y}{xy(y-x)} - \frac{x}{xy(y-x)} = \frac{y-x}{xy(y-x)} = \frac{1}{xy}.$$

Ví dụ 13. (Bài 32, trang 50 SGK)

Đố. Đố em tính nhanh được tổng sau:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)}.$$

Giải

Ta có: $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{(x+1)-x}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$

Tương tự:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}; \quad \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3};$$

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}; \quad \frac{1}{(x+4)(x+5)} = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5};$$

$$\frac{1}{(x+5)(x+6)} = \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6}.$$

Do đó:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)}$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+6} = \frac{6}{x(x+6)}.$$

Ví dụ 14. (Bài 34, trang 50 SGK)

Dùng quy tắc đổi dấu rồi thực hiện các phép tính:

a) $\frac{4x+13}{5x(x-7)} - \frac{x-48}{5x(7-x)}$; b) $\frac{1}{x-5x^2} - \frac{25x-15}{25x^2-1}$.

Giải

a) $\frac{4x+13}{5x(x-7)} - \frac{x-48}{5x(7-x)} = \frac{4x+13}{5x(x-7)} + \frac{x-48}{5x(x-7)} = \frac{5x-35}{5x(x-7)} = \frac{1}{x}.$

Ta có $x-5x^2 = x(1-5x)$; $25x^2-1 = (5x-1)(5x+1)$ MTC = $x(1-5x)(1+5x)$

Do đó

$$\frac{1}{x-5x^2} - \frac{25x-15}{25x^2-1}$$

$$= \frac{1}{x(1-5x)} + \frac{25x-15}{(1-5x)(1+5x)}$$

$$= \frac{1+5x}{x(1-5x)(1+5x)} + \frac{x(25x-15)}{x(1-5x)(1+5x)}$$

$$= \frac{1+5x+25x^2-15x}{x(1-5x)(1+5x)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{25x^2 - 10x + 1}{x(1-5x)(1+5x)} \\
&= \frac{(1-5x)^2}{x(1-5x)(1+5x)} \\
&= \frac{1-5x}{x(1+5x)}
\end{aligned}$$

Ví dụ 15. (bài 35, trang 50 SGK)

Thực hiện phép tính

$$\begin{aligned}
\text{a)} & \frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - \frac{2x(1-x)}{9-x^2} \\
\text{b)} & \frac{3x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{x+3}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Giải

MTC = $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ Ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - \frac{2x(1-x)}{9-x^2} = \\
&= \frac{(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{(1-x)(x-3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{2x(1-x)}{(x-3)(x+3)} \\
&= \frac{(x+1)(x+3) - (1-x)(x-3) + 2x(1-x)}{(x-3)(x+3)} \\
&= \frac{x^2 + 3x + x + 3 + x^2 - 3x - x + 3 + 2x - 2x^2}{(x-3)(x+3)} \\
&= \frac{2x+6}{(x-3)(x+3)} = \frac{2}{x-3}
\end{aligned}$$

b) MTC = $(x-1)^2(x+1)$ Ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{3x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{x+3}{1-x^2} \\
&= \frac{3x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{-x-3}{(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{(3x+1)(x+1)}{(x-1)^2(x+1)} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} + \frac{(-x-3)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} \\
&= \frac{(3x+1)(x+1) - (x-1)^2 - (x+3)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} \\
&= \frac{(3x+1)(x+1) - (x-1)^2 - (x+3)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} \\
&= \frac{3x^2 + 4x + 1 - x^2 + 2x - 1 - x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x+1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{x+3}{(x-1)^2}$$

Ví dụ 16. Bài 36, trang 51 SGK)

Một công ti may phải sản xuất 10000 sản phẩm trong x ngày. Khi thực hiện không những đã làm xong sớm một ngày mà còn làm thêm được 80 sản phẩm

a) Hãy biểu diễn qua x

Số sản phẩm phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch.

Số sản phẩm thực tế đã làm được trong một ngày.

Số sản phẩm làm thêm trong một ngày.

b) Tính số sản phẩm làm thêm trong một ngày với $x = 25$

Giải

a) Số sản phẩm phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch

$$\frac{10000}{x} \text{ (sản phẩm)}$$

Số sản phẩm thực tế đã làm được trong một ngày.

$$\frac{10080}{x-1} \text{ (sản phẩm)}$$

Số sản phẩm làm thêm trong một ngày.

$$\frac{10080}{x-1} - \frac{10000}{x} = \frac{10080x - 10000(x-1)}{x(x-1)} = \frac{80x + 10000}{x(x-1)} \text{ (sản phẩm)}$$

b) Số sản phẩm làm thêm trong một ngày với $x = 25$ là

$$\frac{80x + 10000}{x(x-1)} = \frac{80 \cdot 25 + 10000}{25(25-1)} = 20 \text{ (sản phẩm)}$$

Ví dụ 17. (Bài 37, trang 51, SGK)

Đố. Cho phân thức $\frac{2x+1}{x^2-3}$. Đố em tìm được một phân thức mà khi lấy phân thức đã cho

trừ đi phân thức phải tìm ta được một phân thức bằng phân thức đối của phân thức đã cho.

Dạng 3. RÚT GỌN VÀ TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp giải

* Sử dụng phép cộng, trừ phân thức để rút gọn biểu thức.

* Thay giá trị của biến đã cho vào biểu thức đã rút gọn.

Ví dụ 18. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức $\frac{x+1}{x^2-x} + \frac{x+2}{1-x^2}$ với $x = -\frac{1}{3}$.

Giải

Rút gọn biểu thức:

$$\frac{x+1}{x^2-x} + \frac{x+2}{1-x^2} = \frac{x+1}{x(x-1)} - \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)^2 - x(x+2)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}.$$

Với $x = -\frac{1}{3}$ ta được: $\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{2}{3}} = \frac{27}{8}.$

Dạng 4: CHỨNG MINH BIỂU THỨC KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO BIẾN

Phương pháp giải

Thực hiện phép cộng, trừ các phân thức để rút gọn biểu thức không còn chứa biến.

Ví dụ 19. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y, z :

a) $A = \frac{y}{(x-y)(y-z)} + \frac{z}{(y-z)(z-x)} + \frac{x}{(z-x)(x-y)};$

b) $B = \frac{x+z}{(x-y)(y-z)} + \frac{x+y}{(x-z)(y-z)} + \frac{y+z}{(x-y)(x-z)}.$

Giải

a) MTC của $A: (x-y)(y-z)(z-x)$. Ta có:

$$A = \frac{y(z-x) + z(x-y) + x(y-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{yz - yx + zx - zy + xy - xz}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0.$$

Vậy biểu thức A đã cho không phụ thuộc vào x, y, z .

b) MTC của $B: (x-y)(y-z)(z-x)$. Ta có:

$$B = \frac{(x+z) + (z-x) + (x+y)(x-y) + (y+z)(y-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0.$$

Vậy biểu thức B đã cho không phụ thuộc vào x, y, z .

Dạng 5. TÌM X THỎA MÃN ĐẲNG THỨC CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

* Chuyển các hạng tử không chứa x về một vế, ta được biểu thức của x :

* Rút gọn biểu thức của x .

Ví dụ 20: Tìm x :

a) $x - \frac{3a+b}{b} = \frac{2a^2-2ab}{b^2-ab},$ (a, b là những hằng số);

b) $x + (a+b)^2 = \frac{a^4+b^4}{(a-b)^2},$ (a, b là những hằng số).

Giải

a) $x - \frac{3a+b}{b} = \frac{2a^2-2ab}{b^2-ab} = \frac{3a+b}{b} + \frac{2a(a-b)}{b(b-a)} = \frac{3a+b}{b} - \frac{2a}{b} = \frac{a+b}{b};$

b) $x + (a+b)^2 = \frac{a^4+b^4}{(a-b)^2} = \frac{a^4+b^4 - (a+b)^2(a-b)^2}{(a-b)^2} = \frac{a^4+b^4 - (a^2-b^2)^2}{(a-b)^2}$

$$= \frac{a^4 + b^4 - a^4 + 2a^2b^2 - b^4}{(a-b)^2} = \frac{2a^2b^2}{(a-b)^2}.$$

Dạng 6. ÁP DỤNG PHÂN THỨC ĐẠI SỐ VÀO BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Phương pháp giải

* Sử dụng công thức về chuyển động đều $s = v.t$, trong đó s : quãng đường; v : vận tốc; t : thời gian.

* Vận tốc canô xuôi dòng = vận tốc thực của canô + Vận tốc dòng nước.

* Vận tốc canô ngược dòng = vận tốc thực của canô - Vận tốc dòng nước.

Ví dụ 21. Một canô đi xuôi từ A đến bến B ngược về A. Khoảng cách từ A đến B là s km. Vận tốc canô trong nước yên lặng là v km/h. vận tốc dòng nước là 4km/h. Hãy biểu diễn thời gian canô đã đi dưới dạng phân thức đại số. Tính thời gian nếu $s = 48$ km, $v = 20$ km/h.

Giải

Thời gian canô xuôi dòng là: $\frac{s}{v+4}$ (h).

Thời gian canô ngược dòng là: $\frac{s}{v-4}$ (h).

Thời gian canô đã đi xuôi và ngược dòng là: $\frac{s}{v+4} + \frac{s}{v-4}$ (h).

Thay số vào ta có:

$$\frac{s}{v+4} + \frac{s}{v-4} = \frac{48}{20+4} + \frac{48}{20-4} = \frac{48}{24} + \frac{48}{16} = 5 \text{ (giờ)}.$$

Vậy thời gian ca nô đi từ A đến B rồi ngược về A là 5 giờ.

Dạng 7. THỰC HIỆN PHÉP TÍNH ĐỂ RÚT GỌN PHÂN THỨC

Phương pháp giải

* Quy đồng mẫu thức để thực hiện phép cộng, trừ hai phân thức không cùng mẫu thức.

* Khi nhân hai đa thức, chú ý đến hằng đẳng thức đáng nhớ.

* Viết một phân thức về dạng tổng, hiệu của hai phân thức:

$$\frac{A+C}{B} = \frac{A}{B} + \frac{C}{B};$$

$$\frac{A-C}{B} = \frac{A}{B} - \frac{C}{B}.$$

Ví dụ 22. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} + \frac{2a}{a^2+b^2} + \frac{4a^3}{a^4+b^4} + \frac{8a^7}{a^8+b^8};$$

$$b) B = \frac{1}{a^2+a} + \frac{1}{a^2+3a+2} + \frac{1}{a^2+5a+6} + \frac{1}{a^2+7a+12} + \frac{1}{a^2+9a+20}.$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} &= \frac{a+b+a-b}{(a-b)(a+b)} = \frac{2a}{a^2-b^2}; \\ \frac{2a}{a^2-b^2} + \frac{2a}{a^2+b^2} &= \frac{2a(a^2+b^2+a^2-b^2)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} = \frac{4a^3}{a^4-b^4}; \\ \frac{4a^3}{a^4-b^4} + \frac{4a^3}{a^4+b^4} &= \frac{4a^3(a^4+b^4+a^4-b^4)}{(a^4-b^4)(a^4+b^4)} = \frac{8a^7}{a^8-b^8}; \\ \frac{8a^7}{a^8-b^8} + \frac{8a^7}{a^8+b^8} &= \frac{8a^7(a^8+b^8+a^8-b^8)}{(a^8-b^8)(a^8+b^8)} = \frac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}} \quad (a \neq \pm b).$$

b) Trước hết ta phân tích các mẫu thức thành nhân tử:

$$a^2 + a = a(a+1);$$

$$a^2 + 3a + 2 = (a^2 + a) + (2a + 2) = (a+1)(a+2);$$

$$a^2 + 5a + 6 = (a+2)(a+3);$$

$$a^2 + 7a + 12 = (a+3)(a+4);$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a^2+a} = \frac{1}{a(a+1)} = \frac{(a+1)-a}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}.$$

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Thực hiện các phép tính:

$$\text{a) } \frac{a^2-b^2}{a^2} \cdot \frac{a^4}{(a+b)^2}$$

$$\text{c) } \frac{ax^2-ay^2}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{6x^3+6y^3}{x^2-2xy+y^2}$$

$$\text{b) } \frac{3x-3y}{2x+2y} \cdot \frac{8x+8y}{15x-15y}$$

$$\text{d) } \frac{2x^2-4xy+2y^2}{5x-5y} \cdot \frac{15x^2-15y^2}{4x^3+4y^3}$$

2. (Dạng 1). Thực hiện các phép tính:

$$\text{a) } \frac{3-3x}{(1+x)^2} : \frac{6x^2-6}{x+1}$$

$$\text{b) } \frac{(a+b)^2}{ab-b^2} : \left[\frac{ab+b^2}{(a-b)^2} \right]$$

$$\text{c) } \frac{a^4-b^4}{a^3-b^3} : \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

$$\text{d) } \frac{x^3+8}{x^2-2x+1} : \frac{x^2+3x+2}{1-x^2}$$

$$\text{e) } \frac{x^4-xy^3}{2xy+y^2} : \frac{x^3+x^2y+xy^2}{2x+y} \quad \text{g) } \frac{-1}{x-1} : \frac{1}{x^3-1}$$

3. (Dạng 3) Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } \frac{x^2-1}{x+10} \cdot \frac{x}{x+2} + \frac{x^2-1}{x+10} \cdot \frac{1-x}{x+2}$$

$$\text{b) } \frac{x^2+y^2}{x+y} \cdot \frac{(x-y)^2}{x^2} - \frac{y^2}{x+y} \cdot \frac{(x-y)^2}{x^2}$$

4. (Dạng 3) Tính giá trị của biểu thức: $(x^2 - y^2 - z^2 + 2yz) : \frac{x+y-z}{x+y+z}$

với $x = 8,6$; $y = 2$; $z = 1,4$

5. (Dạng 4) Tìm x, biết:

$$a) \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^4 - b^4} x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$b) \frac{a^2 + b^2 - ab}{a^2 - b^2} x = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2 - 2ab}$$

$$c) \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2 - ab} x = \frac{a - b}{a^3 + b^3}$$

9. BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Biến đổi một biểu thức thành một phân thức đại số gọi là phép biến đổi đồng nhất
- Thực chất phép biến đổi đồng nhất là việc thực hiện các phép tính về phân thức đại số trong biểu thức hữu tỉ
- Giá trị của một biểu thức phân chỉ được xác định với điều kiện giá trị của mẫu thức khác 0.

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. RÚT GỌN BIỂU THỨC

Phương pháp giải:

Thực hiện các phép cộng, trừ, nhân, chia các phân thức để rút gọn biểu thức.

Ví dụ 1. (Bài 46 trang 57 SGK)

$$a) \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$b) \frac{1 - \frac{2}{x+1}}{1 - \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}}$$

Giải

$$a) \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$b) \frac{1 - \frac{2}{x+1}}{1 - \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}} = \frac{\frac{x+1-2}{x+1}}{\frac{x^2 - 1 - x^2 + 2}{x^2 - 1}} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^2 - 1}{1} = (x-1)^2$$

Ví dụ 2. (Bài 50 trang 58 SGK)

Thực hiện phép tính:

$$a) \left(\frac{x}{x+1} + 1 \right) : \left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2} \right)$$

$$b) (x^2 - 1) \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1 \right)$$

Giải

$$\begin{aligned} a) \left(\frac{x}{x+1} + 1 \right) : \left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2} \right) &= \frac{2x+1}{x+1} : \frac{1-4x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{2x+1}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{4x^2-1} = \frac{(2x+1)(x-1)(x+1)}{(x+1)(2x-1)(2x+1)} \\ &= \frac{x-1}{2x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (x^2 - 1) \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1 \right) &= (x^2 - 1) \cdot \frac{x+1 - (x-1) - (x^2-1)}{x^2-1} \\ &= (x^2 - 1) \cdot \frac{3-x^2}{x^2-1} = 3 - x^2 \end{aligned}$$

Ví dụ 3 (Bài 51 trang 58 SGK)

Làm các phép tính sau:

$$a) \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} \right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)$$

$$b) \left(\frac{1}{x^2+4x+4} - \frac{1}{x^2-4x+4} \right) : \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right)$$

Giải

$$a) \text{Ta có: } \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} = \frac{x^3+y^3}{xy^2}; \quad \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{x^2-xy+y^2}{xy^2} \quad \text{Do đó:}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} \right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) &= \frac{x^3+y^3}{xy^2} : \frac{x^2-xy+y^2}{xy^2} \\ &= \frac{x^3+y^3}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{x^2-xy+y^2} = x+y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \left(\frac{1}{x^2+4x+4} - \frac{1}{x^2-4x+4} \right) : \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) \\ &= \left[\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} \right] : \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} \right) \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) : \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{x-2-x-2}{x^2-4} = \frac{-4}{x^2-4} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: (Bài 52 trang 58 SGK)

Chúng ta chứng tỏ rằng với $x \neq 0$ và $x \neq \pm a$ (a là một số nguyên), giá trị của biểu thức:

$$\left(a - \frac{x^2+a^2}{x+a} \right) \cdot \left(\frac{2a}{x} - \frac{4a}{x-a} \right) \text{ là một số chẵn}$$

Giải

Ta có :

b) Giá trị của phân thức $\frac{x-1}{x^2-1}$ được xác định với điều kiện $x^2-1 \neq 0$, tức là $x \neq \pm 1$

Ví dụ 7 (Bài 48, trang 58 SGK)

Cho phân thức : $\frac{x^2+4x+4}{x+2}$

- Với điều kiện nào của x thì giá trị của phân thức được xác định
- Rút gọn phân thức
- Tìm giá trị của x để giá trị phân thức bằng 1
- Tìm giá trị của x để giá trị phân thức bằng 0 hay không ?

Giải

a) Giá trị của phân thức $\frac{x^2+4x+4}{x+2}$ được xác định với điều kiện $x \neq -2$

b) Rút gọn phân thức, ta có : $\frac{x^2+4x+4}{x+2} = \frac{(x+2)^2}{x+2} = x+2$

c) Giá trị của phân thức bằng 1 khi $x+2 = 1$ suy ra $x = -1$ (nhận)

d) Giá trị của phân thức bằng 0 khi $x+2 = 0$ suy ra $x = -2$ (loại)

Vậy không có giá trị nào của x để giá trị phân thức bằng 0

Ví dụ 8. (Bài 49 trang 58 SGK)

Đố. Đố em tìm được một phân thức (của một biến x) mà giá trị của nó được xác định với mọi giá trị của x khác ước của 2

Giải

Các ước của 2 là -1 ; 1 ; -2 và 2. Chẳng hạn phân thức mà giá trị của nó được xác định với mọi giá trị của x khác ước của 2 là:

$$\frac{1}{(x^2-1)(x^2-4)}$$

Ví dụ 9. (Bài 54 trang 59 SGK)

Tìm các giá trị của x để giá trị của phân thức được xác định:

a) $\frac{3x+2}{2x^2-6x}$;

b) $\frac{5}{x^2-3}$

Đáp số

a) $x \neq 0$ và $x \neq 3$

b) Mọi số hữu tỉ x

Ví dụ 10. (Bài 55, trang 59 SGK)

Cho phân thức:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$$

a) Với giá trị nào của x thì giá trị của phân thức được xác định ?

b) Chứng tỏ phân thức rút gọn của phân thức đã cho là $\frac{x+1}{x-1}$

c) Để tính giá trị của phân thức đã cho tại $x = 2$ và $x = -1$, bạn Thắng làm như sau :

- Với $x = 2$, phân thức đã cho có giá trị là $\frac{2+1}{2-1} = 3$;

- Với $x = -1$, phân thức đã cho có giá trị là $\frac{-1+1}{-1-1} = 0$.

Em có đồng ý không ? Nếu không, em hãy chỉ ra chỗ mà em cho là sai.

Theo em, với những giá trị nào của biến thì có thể tính được giá trị của phân thức đã cho bằng cách tính giá trị của phân thức rút gọn ?

Giải

a) Với $x \neq \pm 1$ thì giá trị của phân thức được xác định

b) Rút gọn phân thức
$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

c) Với $x = 2$ phân thức đã cho có giá trị là $\frac{2+1}{2-1} = 3$. Bạn Thắng đã tính đúng.

Với $x = -1$ phân thức đã cho có giá trị là $\frac{-1+1}{-1-1} = 0$. Bạn Thắng đã tính sai vì với $x = -1$, giá trị của phân thức đã cho không xác định.

Vậy với những giá trị của x mà giá trị phân thức được xác định thì có thể tính được giá trị của phân thức đã cho bằng cách tính giá trị của phân thức rút gọn.

Ví dụ 11. (Bài 56 trang 59 SGK)

Cho phân thức

$$\frac{3x^2 + 6x + 12}{x^3 - 8}$$

a) Với điều kiện nào của x thì giá trị của phân thức được xác định ?

b) Rút gọn phân thức

c) Em có biết trên 1cm^2 bề mặt da của em có bao nhiêu con vi khuẩn ?

Tính giá trị của biểu thức đã cho tại $x = \frac{4001}{2000}$ em sẽ tìm được câu trả lời thật đáng sợ. (Tuy nhiên trong số đó chỉ có 20% là vi khuẩn có hại).

Giải

a) Với $x^3 \neq 8$ hay $x \neq 2$ thì giá trị của phân thức đã cho được xác định

b) Rút gọn phân thức, ta có :

$$\frac{3x^2 + 6x + 12}{x^3 - 8} = \frac{3(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{3}{x-2}$$

Với $x = \frac{4001}{2000}$ giá trị của biểu thức đã cho là :

$$\frac{3}{\frac{4001}{2000} - 2} = \frac{3}{\frac{1}{2000}} = 6000$$

DẠNG 3. CHỨNG MINH BIỂU THỨC KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO BIẾN

Phương pháp giải.

Thực hiện các phép biến đổi đồng nhất các biểu thức hữu tỉ để rút gọn biểu thức không còn chứa biến.

Ví dụ 12. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x và y :

a)
$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{(x+y)^2 - 2} - \frac{2y}{x}$$

b)
$$\frac{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}}{2(x+y)} - \frac{4xy}{x^2 - y^2}$$

Giải

$$\text{a) } \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{(x+y)^2 - 2 - \frac{2y}{x}} = \frac{\frac{x^2 - y^2}{xy}}{(x+y)^2 - 2xy - 2y^2} = \frac{(x^2 - y^2)xy}{(x^2 - y^2)xy} = 1$$

$$\text{b) } \frac{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}}{\frac{2(x+y)}{x-y} - \frac{4xy}{x^2 - y^2}} = \frac{\frac{x^2 - xy + yx + y^2}{(x+y)(x-y)}}{\frac{2(x+y)(x^2 - y^2) - 4xy(x-y)}{(x-y)(x^2 - y^2)}} \\ = \frac{(x^2 + y^2)(x-y)(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y) \cdot 2(x-y)(x^2 + y^2)} = \frac{1}{2}$$

C. LUYỆN TẬP

1/ (Dạng 1) Thực hiện các phép tính :

$$\text{a) } \left(2x + 1 - \frac{1}{1-2x}\right) : \left(2x - \frac{4x^2}{2x-1}\right)$$

$$\text{b) } \left(\frac{5x+y}{x^2-5xy} + \frac{5x-y}{x^2+5xy}\right) \cdot \frac{x^2-25y^2}{x^2+y^2}$$

$$\text{c) } \frac{4xy}{y^2-x^2} : \left(\frac{1}{y^2-x^2} + \frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$$

2/ (Dạng 1) Rút gọn biểu thức :

$$\text{a) } \frac{3x+6}{x^2+4x+4} \cdot \frac{5x-10}{2x^2+8x+8}$$

$$\text{b) } \frac{5x-15}{4x+4} : \frac{9-x^2}{x^2+2x+1}$$

$$\text{c) } \left(-\frac{5x^2-10x}{3x^2}\right) \cdot \frac{15x^3}{8-x^3}$$

$$\text{d) } \frac{25x^2-50}{3x+9} : \frac{-x^2+10x-25}{x^2+6x+9}$$

3/ (Dạng 1) Rút gọn các biểu thức sau :

$$\text{a) } \frac{2 - \frac{a}{x}}{2 + \frac{a}{x}}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{2x-5}{2x+5} - 1}{\frac{y}{y} + 1}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1}}$$

$$\text{d) } \frac{1 - \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a^2}}{a-b}$$

4/ (Dạng 2) Tìm điều kiện của biến để giá trị của phân thức xác định

$$\text{a) } \frac{7x}{2x-5}$$

$$\text{b) } \frac{3}{3x-2x^2}$$

$$\text{c) } \frac{3x}{8x^3-12x^2+6x-1}$$

$$\text{d) } \frac{-2x^2}{16+24x+9x^2}$$

$$\text{e) } \frac{x}{x^2-3x+2}$$

5/ (Dạng 5) Tính giá trị của biểu thức :

a) $\frac{3x^2 - x}{9x^2 - 6x + 1}$ với $x = -8$

b) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$ với $x = 1000001$

6/ (Dạng 2) Cho biểu thức :

$$\frac{x^2 + 2x}{2x + 10} + \frac{x - 5}{x} + \frac{50 - 5x}{2x(x + 5)}$$

a) Tìm điều kiện của biến x để giá trị của biểu thức được xác định .

b) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng 1

c) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng $-\frac{1}{2}$

d) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng -3

(Dạng 3). Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến số :

a) $\left(\frac{2ab}{a^2 - b^2} + \frac{a - b}{2a + 2b}\right) \cdot \frac{2a}{a + b} + \frac{b}{b - a}$;

b) $\frac{x}{x - y} - \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{(x - y)^2} - \frac{y}{x^2 - y^2}\right)$;

c) $\frac{y}{3 - y} + \frac{y^2 + 3y}{2y + 3} \cdot \left(\frac{y + 3}{y^2 - 3y} - \frac{y}{y^2 - 9}\right)$;

d) $\left(\frac{x}{x^2 - 36} - \frac{x - 6}{x^2 + 6x}\right) : \frac{2x - 6}{x^2 + 6x} + \frac{x}{6 - x}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. BÀI TẬP ÔN TRONG SGK

57. Chứng tỏ mỗi cặp phân thức sau bằng nhau:

a) $\frac{3}{2x - 3}$ và $\frac{3x + 6}{2x^2 + x - 6}$

b) $\frac{2}{x + 4}$ và $\frac{2x^2 + 6x}{x^3 + 7x^2 + 12}$

Giải

a) $\frac{3}{2x - 3} = \frac{3(x + 2)}{(2x - 3)(x + 6)} = \frac{3x + 6}{2x^2 + 4x - 3x - 6} = \frac{3x + 6}{2x^2 + x - 6}$;

b) $\frac{2}{x + 4} = \frac{2(x^2 + 3x)}{(x + 4)(x^2 + 3x)} = \frac{2x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 + 4x^2 + 12x} = \frac{2x^2 + 6x}{x^3 + 7x^2 + 12x}$

58. Thực hiện phép tính sau:

a) $\left(\frac{2x + 1}{2x - 1} - \frac{2x - 1}{2x + 1}\right) : \frac{4x}{10x - 5}$;

b) $\left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{2 - x}{x + 1}\right) : \left(\frac{1}{x} + x - 2\right)$;

c) $\frac{1}{x - 1} - \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1 - x^2}\right)$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} \right) : \frac{4x}{10x-5} &= \frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} \cdot \frac{10x-5}{4x} \\ &= \frac{2 \cdot (4x) \cdot 5 \cdot (2x-1)}{(2x-1)(2x+1) \cdot 4x} = \frac{10}{2x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{2-x}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) &= \frac{x-2+x}{x(x+1)} : \frac{1+x^2-2x}{x} \\ &= \frac{2(x-1)}{x(x+1)} \cdot \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{2}{x^2-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{x-1} - \frac{x^3-x}{x^2+1} \cdot \left(\frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{x^3-x}{x^2+1} \cdot \left[\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right] \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{x^3-x}{x^2+1} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{x(x^2-1)}{x^2+1} \cdot \frac{2}{(x^2-1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{x^2+1-2x}{(x^2+1)(x-1)} \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{x-1}{x^2+1} \end{aligned}$$

59.

a) Cho biểu thức $\frac{xP}{x+p} - \frac{yP}{y+P}$. Thay $P = \frac{xy}{x-y}$ rồi rút gọn biểu thức.

b) Cho biểu thức $\frac{P^2Q^2}{P^2-Q^2}$. Thay $P = \frac{2xy}{x^2-y^2}$, $Q = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ rồi rút gọn biểu thức.

Giải

$$\text{a) } \frac{xP}{x+P} - \frac{yP}{y-P} = \frac{\frac{x^2y}{x-y}}{x+\frac{xy}{x-y}} - \frac{\frac{y^2x}{x-y}}{y-\frac{xy}{x-y}} = \frac{x^2y}{x^2} - \frac{y^2x}{-y^2} = y+x$$

$$\text{b) } \frac{P^2Q^2}{P^2-Q^2} = \frac{(PQ)^2}{(P-Q)(P+Q)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{4x^2y^2}{x^4-y^4}\right)^2}{2xy\left(\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot 2xy\left(\frac{1}{x^2-y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}\right)} \\
&= \left(\frac{4x^2y^2}{x^4-y^4}\right)^2 : \frac{4x^2y^2 \cdot 2y^2 \cdot 2x^2}{(x^4-y^4)} = 1.
\end{aligned}$$

60. Cho biểu thức: $\left(\frac{x+1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x+3}{2x+2}\right) \cdot \frac{4x^2-4}{5}$

a) Hãy tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định.

b) Chứng minh rằng khi giá trị của biểu thức xác định thì nó không phụ thuộc vào giá trị của biến x.

Giải

a) Ta có: $2x-2 = 2(x-1)$; $2x+2 = 2(x+1)$; $MTC = 2(x-1)(x+1)$.

Giá trị của biểu thức được xác định khi $x \neq \pm 1$.

b) Rút gọn biểu thức, ta có:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x+3}{2(x+1)}\right] \cdot \frac{4(x^2-1)}{5} = \\
&= \frac{(x+1)^2 + 6 - (x+3)(x-1)}{2(x^2-1)} \cdot \frac{4(x^2-1)}{5} = \frac{10}{2(x^2-1)} \cdot \frac{4(x^2-1)}{5} = 4
\end{aligned}$$

không phụ thuộc vào x với mọi $x \neq \pm 1$.

61. Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức:

$$\left(\frac{5x+2}{x^2-10x} + \frac{5x-2}{x^2+10x}\right) \cdot \frac{x^2-100}{x^2+4}$$

được xác định. Tính giá trị của biểu thức với $x = 20040$.

Giải

Ta có: $x^2-10x = x(x-10)$; $x^2+10x = x(x+10)$; $MTC = x(x-10)(x+10)$

Điều kiện để giá trị biểu thức được xác định là: $x \neq 0$; $x \neq \pm 10$.

$$\text{Ta có: } \frac{5x+2}{x^2-10x} + \frac{5x-2}{x^2+10x} = \frac{(5x+2)(x+10) + (5x-2)(x-10)}{x(x-10)(x+10)} = \frac{10(x^2+4)}{x(x^2-100)}$$

Do đó:

$$\left(\frac{5x+2}{x^2-10x} + \frac{5x-2}{x^2+10x} \right) \cdot \frac{x^2-100}{x^2+4} = \frac{10(x^2+4)}{x(x^2-100)} \cdot \frac{x^2-100}{x^2+4} = \frac{10}{x}$$

Với $x = 20040$ giá trị biểu thức bằng: $\frac{10}{20040} = \frac{1}{2004}$.

62. Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức $\frac{x^2-10x+25}{x^2-5x}$ bằng 0.

Giải

Điều kiện để giá trị của phân thức xác định là: $x \neq 0$ và $x \neq 5$.

Ta có: $\frac{x^2-10x+25}{x^2-5x} = \frac{(x-5)^2}{x(x-5)} = \frac{x-5}{x}$.

Vì $x \neq 5$ nên phân thức không có giá trị bằng 0. Vậy không tìm được x để giá trị của phân thức đã cho bằng 0.

63. Viết mỗi phân thức sau dưới dạng tổng của một đa thức và một phân thức với tử thức là một hằng số, rồi tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của phân thức cũng là số nguyên:

a) $\frac{3x^2-4x-17}{x+2}$; b) $\frac{x^2-x+2}{x-3}$.

Giải

a) Thực hiện phép chia đa thức ta có:

$$\frac{3x^2-4x-17}{x+2} = 3x-10 + \frac{3}{x+2}.$$

Để phân thức có giá trị nguyên thì $x+2$ phải là ước của 3. Ước của 3 gồm các số nguyên âm $\pm 1, \pm 3$. Từ đó ta có $x \in \{-1, -3, 1, -5\}$.

b) Thực hiện phép chia đa thức ta được: $\frac{x^2-x+2}{x-3} = x+2 + \frac{8}{x-3}$.

Phân thức có giá trị nguyên khi $x-3$ là ước của 8. Ước của 8 gồm các số nguyên: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Từ đó ta có:

$$x \in \{4, 5, 7, 11, 2, 1, -1, -5\}.$$

64. Tính giá trị của phân thức trong Bài tập 62 tại $x = 1,12$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba.

Giải

Giá trị của phân thức $\frac{x-5}{x}$ tại $x = 1,12$ là: $\frac{1,12-5}{1,12} = -3,464$.

B. BÀI TẬP BỔ SUNG

1. Thực hiện phép tính:

$$\frac{1}{(b-c)(a^2+ac-b^2-bc)} + \frac{1}{(c-a)(b^2+ab-c^2-ca)} + \frac{1}{(a-b)(c^2+bc-a^2-ab)}.$$

2. Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{a^2+3ab}{a^2-9b^2} + \frac{2a^2-5ab-3b^2}{6ab-a^2-9b^2} = \frac{a^2+ac+ab+bc}{3bc-a^2-ac+3ab}.$$

3. Tìm a và b thỏa đẳng thức với mọi $x \neq -5$ và $x \neq 4$:

$$\frac{5x-2}{x^2+x-20} = \frac{a}{x+5} - \frac{b}{x-4}.$$

4. Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } \left(\frac{a+b}{b} - \frac{2b}{b-a} \right) \cdot \frac{b-a}{a^2+b^2} + \left(\frac{a^2+1}{2a-1} - \frac{a}{2} \right) : \frac{a+2}{1-2a};$$

$$\text{b) } \frac{1}{a-1} - \left(\frac{a-2b}{a-b} - \frac{2}{1-a} - \frac{a-b^2}{a^2-a+b-ab} \right) : \frac{a^2-b^2}{a}.$$

5. Rút gọn và tính giá trị của biểu thức:

$$\left[\left(\frac{x-y}{2y-x} - \frac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2} \right) : \frac{4x^4+4x^2y^2+y^2-4}{x^2+x+xy+y} \right] : \frac{x+1}{2x^2+y+2}$$

$$\text{với } x = -1,76; y = \frac{3}{25}.$$

6. Xác định a để biểu thức sau là số nguyên:

$$\left[\frac{a^2-2a+4}{a-2} : (a^3+8) + \frac{a-2}{a^3+8} \cdot \frac{a^2-2a+4}{a^2-4} \right] \cdot (a^2-4).$$

7. Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

8. Cho $a+b+c=0$ ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$). Tính giá trị biểu thức:

$$\frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}.$$

9. a) Rút gọn biểu thức rồi tìm giá trị của x để biểu thức

$$\frac{x^2}{x-2} \cdot \left(\frac{x^2+4}{x} - 4 \right) + 3$$

có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất ấy.

b) Rút gọn biểu thức rồi tìm giá trị của x để biểu thức

$$\frac{(x+2)^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{x+2} \right) - \frac{x^2+6x+4}{x}$$

có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất ấy.