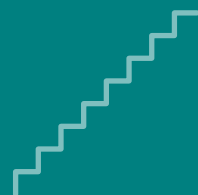




TOÁN THẦY DỪNG
TQB

NGUYỄN NGỌC DỪNG

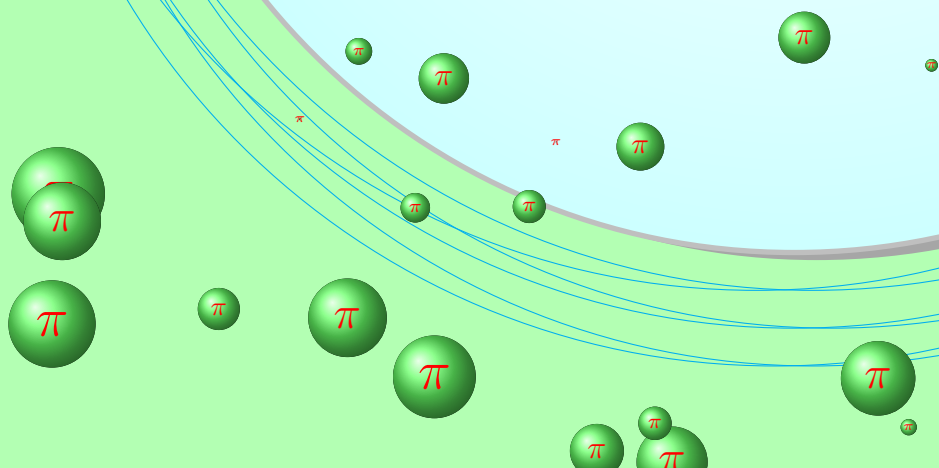
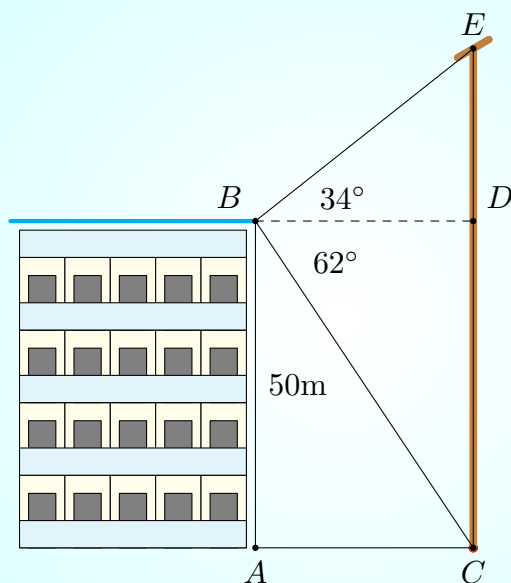


TOÁN

LÝ THUYẾT VÀ PHÂN DẠNG

9

2023 - 2024



MỤC LỤC

I Đại số **1****Chương 1. Căn bậc hai. Căn bậc ba** **2**

Bài số 1. Căn bậc hai..... 2

Bài số 2. Liên hệ giữa phép nhân, phép chia và phép khai phương..... 5

Bài số 3. Biến đổi, rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai..... 5

Bài số 4. Căn bậc ba..... 8

Bài số 5. Ôn tập chương 1..... 9

Chương 2. Hàm số. Hàm số bậc nhất **15**

Bài số 1. Hàm số, hàm số bậc nhất..... 15

Bài số 2. Đường thẳng song song - Đường thẳng cắt nhau..... 16

Bài số 3. Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)..... 18

Bài số 4. Các bài tập tổng hợp..... 20

Bài số 5. Các bài toán thực tế ứng dụng hàm số..... 21

Chương 3. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn **24**

Bài số 1. Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn..... 24

Bài số 2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn..... 25

Bài số 3. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình..... 28

Chương 4. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$). Phương trình bậc hai **29**Bài số 1. Hàm số $y = ax^2$, ($a \neq 0$)..... 29

Bài số 2. Phương trình bậc hai một ẩn..... 34

Bài số 3. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng..... 40

Bài số 4. Phương trình quy về phương trình bậc hai..... 45

Bài số 5. Giải bài toán bằng cách lập phương trình..... 48

II Hình học **52****Chương 1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông** **53**

Bài số 1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông..... 53

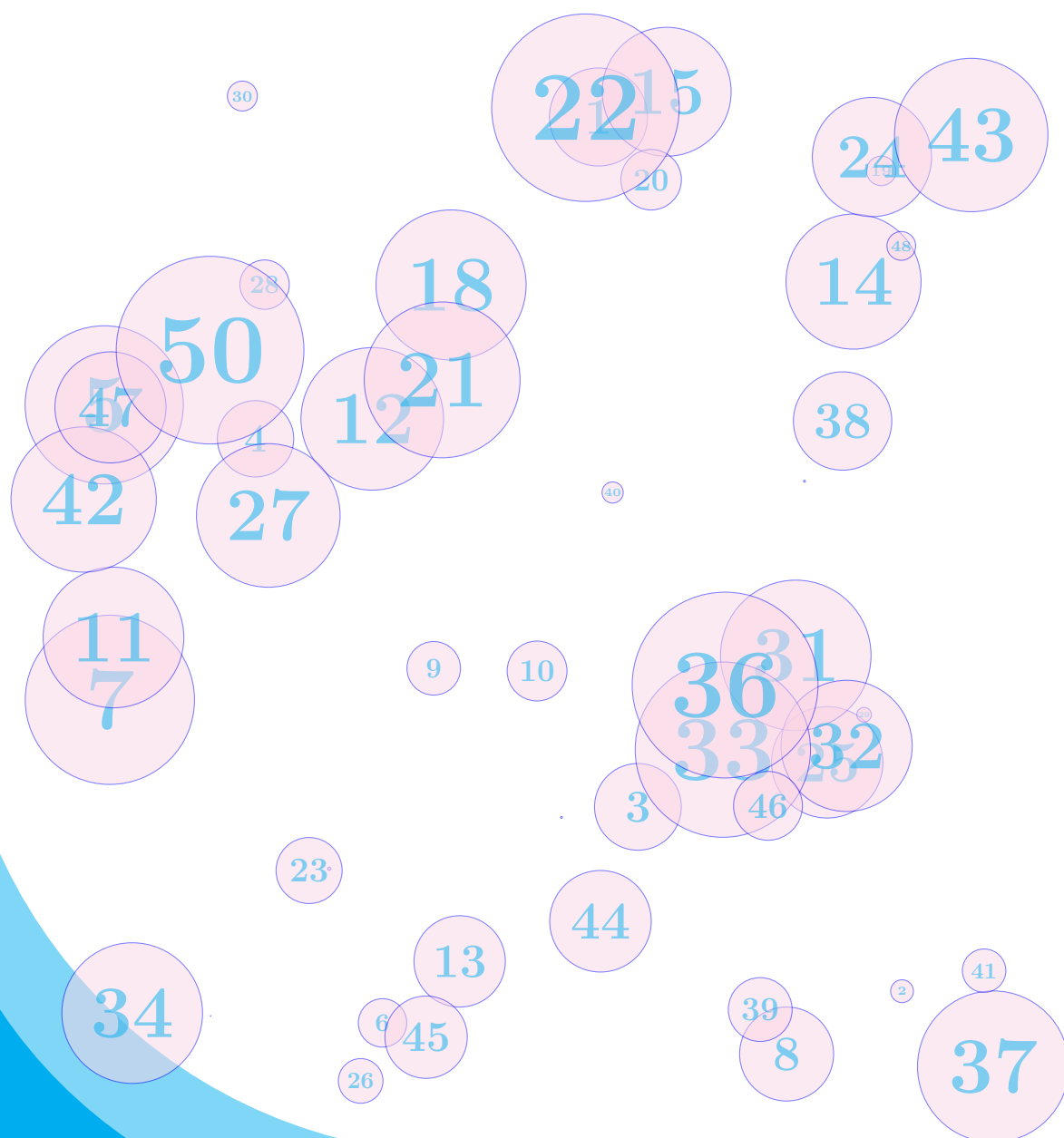
Bài số 2. Tỷ số lượng giác trong tam giác vuông..... 54

Bài số 3. Ứng dụng thực tế..... 56

Chương 2.	Đường tròn	61
Bài số 1.	Sự xác định đường tròn.....	61
Bài số 2.	Đường kính và dây của đường tròn.....	61
Bài số 3.	Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây.....	61
Bài số 4.	Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến	62
Chương 3.	Góc với đường tròn	65
Bài số 1.	Góc ở tâm - Góc nội tiếp - Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung.....	65
Bài số 2.	Góc có đỉnh bên trong - bên ngoài đường tròn.....	67
Bài số 3.	Tứ giác nội tiếp.....	68
Bài số 4.	Độ dài đường tròn, cung tròn. Diện tích hình tròn, hình quạt.....	72
Chương 4.	Hình trụ - Hình nón - Hình cầu	77
Bài số 1.	Diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ.....	77
Bài số 2.	Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón và hình nón cụt.....	80
Bài số 3.	Diện tích và thể tích của hình cầu.....	83

PHẦN ĐẠI SỐ

I



Chương 1

CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

Bài số 1

CĂN BẬC HAI

Bài 1. Tính:

a) $\sqrt{121}$

b) $-\sqrt{144}$

c) $\sqrt{0,25}$

d) $-\sqrt{0,0016}$

e) $\sqrt{3^4}$

f) $-\sqrt{2\frac{7}{9}}$

g) $\sqrt{\frac{25}{49}}$

h) $\sqrt{(-7)^2}$

i) $\sqrt{\sqrt{16}}$

j) $-\sqrt{4\sqrt{81}}$

Bài 2. Tính:

a) $3\sqrt{144} - 5\sqrt{169} + \frac{1}{2}\sqrt{256}$

b) $\sqrt{7\frac{1}{9}} - 0,5\sqrt{144} - \frac{3}{2}\sqrt{169}$

c) $\left(\frac{3}{4}\sqrt{256} - \frac{1}{2}\sqrt{289}\right) : \sqrt{36}$

d) $\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{4}{4}}\right) : \sqrt{\frac{4}{25}}$

e) $2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) + 4\sqrt{3}$

f) $-8\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2\right)$

Bài 3. So sánh các căn bậc hai sau:

a) 6 và $\sqrt{41}$

b) $\sqrt{19}$ và 4

c) $\sqrt{21}$ và 5

d) $5\sqrt{3} - 4$ và $3\sqrt{5}$

e) $\sqrt{26} + \sqrt{17} + \sqrt{10} + \sqrt{5} + 1$ và 15

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 25 = 0$

b) $x^2 - 7 = 0$

c) $x^2 - \sqrt{16} = 0$

d) $4x^2 - 7 = 13$

e) $(x + 3)^2 = 6x + 11$

f) $x^2 + 2x = 15$

Bài 5. Tìm x để các biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{5x}$

b) $\sqrt{3x + 7}$

c) $\sqrt{5 - x}$

d) $\frac{-5}{\sqrt{3 - 2x}}$

e) $\sqrt{\frac{4}{3 - 2x}}$

f) $\sqrt{\frac{-3}{1 + 4x}}$

g) $\sqrt{-7x^2}$

h) $\sqrt{10 + x^2}$

i) $\sqrt{x^2 - 1}$

Bài 6. Rút gọn:

1) $\sqrt{(3 - \sqrt{11})^2}$

2) $\sqrt{(\sqrt{17} - 4)^2}$

3) $\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} - \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2}$

4) $\sqrt{(4 - \sqrt{17})^2} - \sqrt{(\sqrt{17} - 3)^2}$

5) $\sqrt{(5 - \sqrt{6})^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{6})^2}$

6) $\sqrt{(17 + \sqrt{47})^2} - \sqrt{(7 - \sqrt{47})^2}$

Bài 7. Rút gọn:

1) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

2) $\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$

3) $\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} - \sqrt{10 - 4\sqrt{6}}$

4) $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} - \sqrt{32 + 10\sqrt{7}}$

5) $\sqrt{31 - 10\sqrt{6}} - \sqrt{(3 - 2\sqrt{6})^2}$

6) $\sqrt{28 - 16\sqrt{3}} - \sqrt{(4 - 3\sqrt{3})^2}$

Bài 8. Rút gọn các biểu thức sau:

1) $2\sqrt{x^2} + 2x - 5$ với $x \geq 0$

2) $3\sqrt{(x - 2)^2} + 4x - 1$ với $x < 2$

3) $\sqrt{(3 - \sqrt{x})^2} + 2\sqrt{x}$ với $x > 9$

4) $\sqrt{(x - 4)^2} - \sqrt{(x - 3)^2}$ với $x > 4$

Bài 9. Tính:

1) $(3 - \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2) - \sqrt{5}(\sqrt{5} - 5)$

2) $(3 + \sqrt{5})^2 - 8\sqrt{5} - 14$

3) $(5 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) - (1 - 2\sqrt{3})^2$

4) $(2 - 3\sqrt{5})(2 + 3\sqrt{5})$

Bài 10. So sánh các căn bậc hai sau:

1) $2\sqrt{5}$ và $\sqrt{19}$

2) $3\sqrt{10}$ và $4\sqrt{5}$

3) $-3\sqrt{10}$ và $-4\sqrt{5}$

4) $\sqrt{\sqrt{3}}$ và $\sqrt{\sqrt{2}}$

5) $\sqrt{\sqrt{63}}$ và $2\sqrt{2}$

6) $\sqrt{2009} - \sqrt{2007}$ và $\sqrt{2011} - \sqrt{2009}$

7) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$ và 10

Bài 11. Tìm x để các biểu thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{\frac{x}{-3}}$;

b) $\sqrt{7 - 14x}$;

c) $\sqrt{(1 - 2x)^2}$;

d) $\sqrt{\frac{x^2 + 1}{2x^2 - 8}}$;

e) $\frac{\sqrt{6 - 3x}}{x - 3}$;

f) $\frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{2x + 3}}$.

🔴 a) $2x^2 - 3x$ b) $12x^4 - 6x^2$ c) $6x^2y + 15x^3y$ d) $10x^3 - 15x^2 - 5x$ e) $12x^5 + 18x^4 - 6x^3$ f) $4x^3y - 8x^2y^2 + 12xy^3$

Bài 12. Tính (Rút gọn)

a) $\sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2}$;

b) $\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2}$;

c) $\sqrt{(4 + \sqrt{15})^2} + \sqrt{(4 - \sqrt{15})^2}$;

d) $\sqrt{(3\sqrt{2} - \sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2}$;

e) $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} - \sqrt{(2\sqrt{10} - 7)^2}$;

f) $\sqrt{(3\sqrt{5} - \sqrt{17})^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{17})^2}$.

🔴 a) $3 - 2\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ c) 8 d) $2\sqrt{5} - 4\sqrt{2}$ e) $4 - \sqrt{10}$ f) $2\sqrt{5} - 2\sqrt{17}$

Bài 13. Tính (Rút gọn):

a) $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}}$;

b) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$;

c) $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}} + \sqrt{12 + 2\sqrt{35}}$;

d) $\sqrt{11 - 2\sqrt{30}} + \sqrt{13 + 2\sqrt{42}}$;

e) $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{14 + 8\sqrt{3}}$;

f) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$.

🔗 a) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ b) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ c) $2\sqrt{7}$ d) $2\sqrt{7} + \sqrt{6} - \sqrt{5}$ e) $2\sqrt{6} + \sqrt{2}$ f) 6

Bài 14. Tính (Rút gọn):

a) $\sqrt{8 + 3\sqrt{7}}$;

b) $\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$;

c) $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{9 + \sqrt{17}} - \sqrt{9 - \sqrt{17}} - \sqrt{2}$.

🔗 a) $\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{7}{2}}$ b) 0 c) $\sqrt{2}$ d) 0

Bài 15. Tính (Rút gọn):

a) $\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{11})^2} - \sqrt{31 - 4\sqrt{55}}$;

b) $\sqrt{(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})^2} - \sqrt{40 - 8\sqrt{21}}$;

c) $\sqrt{15 - 4\sqrt{14}} + \sqrt{(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})^2}$;

d) $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$;

e) $\sqrt{10 + 2\sqrt{8 - 2(\sqrt{5} + \sqrt{12 - 2\sqrt{35}})}}$;

f) $\sqrt{6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}$.

🔗 a) $-3\sqrt{5}$ b) $-3\sqrt{3}$ c) $-4\sqrt{2} - \sqrt{7} - \sqrt{5}$ d) $x^3 + xy$ e) $-10x^2 + 23x$ f) $x^3 + xy$

Bài 16. Thu gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{x + 1 + 2\sqrt{x}} + 1 - 2\sqrt{x}$ với $x > 0$;

b) $\sqrt{x + 25 + 10\sqrt{x}} + 2(-\sqrt{x})$ với $x > 0$;

c) $\sqrt{x + 9 - 6\sqrt{x}} - 3(\sqrt{x} + 1)$ với $0 < x < 9$;

d) $\sqrt{x + 4 - 4\sqrt{x}} - (1 - \sqrt{x})$ với $0 \leq x \leq 4$;

e) $\sqrt{x^2 + 5 - 2\sqrt{5x}} - \sqrt{5}(x + 1)$ với $x < \sqrt{5}$;

f) $\sqrt{x^2 + 11 - 2x\sqrt{11}} - \sqrt{(x + \sqrt{11})^2}$ với $x > 4$;

g) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$ với $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$;

h) $\sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} - (\sqrt{x - 4} + 1)$ với $4 \leq x \leq 5$;

i) $\sqrt{x - 3 + 2\sqrt{x - 4}} - \sqrt{x - \sqrt{16}}$ với $x > 5$.

🔗 a) $2 - \sqrt{x}$ b) $5 - \sqrt{x}$ c) $-4\sqrt{x}$ d) 1 e) $-x - \sqrt{5x}$ f) $-2\sqrt{11}$ g) $1 - 3x$ h) -3 i) -2

Bài 17. Tìm giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$;

b) $B = \sqrt{4x^2 - 4x + 2}$;

c) $C = \sqrt{2x^2 - 2x + 3}$;

d) $D = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}}$;

e) $E = \sqrt{-x^2 - 3 + 4x}$;

f) $F = \sqrt{-3x^2 - 6x + 2}$.

🔗 a) 2 b) 1 c) $\frac{11}{4}$ d) 0 e) 1 f) 5

Bài số

2

LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

Bài 1. Tính :

a) $2\sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{10}) + 10\sqrt{2}$;

b) $3(9\sqrt{7} - 4\sqrt{28} - 3\sqrt{3}) - \sqrt{21}$;

c) $(2\sqrt{2} - 1)(3 - \sqrt{3}) - \sqrt{3}(1 - \sqrt{3})$;

d) $(3 + \sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5}) - \sqrt{12}\sqrt{13}$.

☞ a) 10 b) $3\sqrt{7} - 9\sqrt{3} - \sqrt{21}$ c) $6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$ d) $8 - 2\sqrt{39}$

Bài 2. Cho x, y là các số dương. Rút gọn

a) $3\sqrt{x} - 5\sqrt{x}(\sqrt{x} - 4) + 5x$;

b) $x(\sqrt{x} - y) + \sqrt{xy}(1 + \sqrt{xy})$;

c) $3x - (3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)$;

d) $(4 - \sqrt{y})^2 - (\sqrt{y} - 3)^2$.

☞ a) $23\sqrt{x}$ b) $x\sqrt{x} + \sqrt{xy}$ c) $2 - 5\sqrt{x}$ d) $7 - 2\sqrt{y}$

Bài 3. Rút gọn:

a) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$;

b) $(2\sqrt{2} - 6) \cdot \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$;

c) $\sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} + 1)$;

d) $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{3})$;

e) $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} : \frac{1}{(\sqrt{2} - 5)^2}$;

f) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3} + 1\right)$.

☞ a) 1 b) -14 c) 2 d) 4 e) $-23 \cdot (\sqrt{2} - 5)$ f) $\frac{4}{3}$

Bài 4. Rút gọn:

a) $5\sqrt{\frac{1}{5}}$;

b) $\frac{12}{5}\sqrt{\frac{5}{4}}$;

c) $\frac{30}{5\sqrt{6}}$;

d) $\frac{20}{2\sqrt{5}}$;

e) $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

f) $\frac{11 + \sqrt{11}}{1 + \sqrt{11}}$;

g) $\frac{\sqrt{21} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{3}}$;

h) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{6}}$;

i) $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - 1}$.

☞ a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ c) $\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{5}$ e) $\sqrt{2} - 1$ f) $\sqrt{11}$ g) $-\sqrt{7}$ h) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ i) $\sqrt{2}$

Bài số

3

BIẾN ĐỔI, RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

Bài 1. Với các biểu thức đã cho có nghĩa. Rút gọn:

1) $\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$.

4) $\frac{a\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} - b\sqrt{a}}$.

7) $\frac{a + 1 + 2\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}$.

2) $\frac{x\sqrt{x} - 2x}{2 - \sqrt{x}}$.

5) $\frac{a - 1}{\sqrt{a} + 1}$.

8) $\frac{3\sqrt{x} - x}{3 + 2\sqrt{x} - x}$.

3) $\frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$.

6) $\frac{4 - x}{2\sqrt{x} - x}$.

9) $\frac{y + 12 - 4\sqrt{3y}}{y - 12}$.

Bài 2. Khử mẫu của các biểu thức lấy căn sau - Rút gọn:

1) $\sqrt{\frac{11}{3}}$.

4) $5\sqrt{\frac{3}{5}}$.

7) $\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}$.

2) $\sqrt{\frac{5}{8}}$.

5) $\sqrt{\frac{(1-\sqrt{5})^2}{75}}$.

8) $xy\sqrt{\frac{x}{y}}$.

3) $\sqrt{\frac{4}{27}}$.

6) $\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{162}}$.

9) $\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Bài 3. Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau:

1) $\frac{5}{\sqrt{7}}$.

4) $\frac{1}{3\sqrt{20}}$.

7) $\frac{a}{2\sqrt{a-1}}$.

2) $\frac{11}{2\sqrt{3}}$.

5) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$.

8) $\frac{9-x}{\sqrt{x+3}}$.

3) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$.

6) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}}$.

9) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}$.

Bài 4. Trục căn thức ở mẫu của các phân thức rồi rút gọn:

1) $\frac{1}{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.

7) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{1-\sqrt{7}}$.

2) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

8) $\frac{7}{3-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}-1}$.

3) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}}$.

9) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \frac{4}{1-\sqrt{3}}$.

4) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$.

10) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

5) $\frac{4}{\sqrt{5}-3} - \frac{1}{\sqrt{5}+2}$.

11) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$.

6) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}}$.

12) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} - \frac{6-2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$.

❖❖❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖❖❖

Bài 1. Tính:

1) $3\sqrt{125} - 2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + 4\sqrt{45}$.

4) $2\sqrt{2} + \sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{450} + \frac{2}{7}\sqrt{392}$.

2) $\sqrt{1100} - 7\sqrt{44} + 2\sqrt{176} - \sqrt{1331}$.

5) $-2\sqrt{50} + \sqrt{18} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125}$.

3) $\sqrt{20} - 2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + 2\sqrt{45}$.

6) $2\sqrt{8\sqrt{3}} + 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{20\sqrt{3}}$.

Bài 2. Khử mẫu các biểu thức lấy căn rồi rút gọn biểu thức:

1) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{15}$.

2) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}$.

$$3) \frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$4) 5\sqrt{x} + 6\sqrt{\frac{x}{4}} - x\sqrt{\frac{4}{x}} \text{ với } x > 0.$$

$$5) \left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x} \right) : \sqrt{6x} \text{ với } x > 0.$$

$$6) \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ với } a, b > 0.$$

Bài 3. Rút gọn

$$1) \frac{3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}}{3 - \sqrt{15}}.$$

$$2) \frac{5\sqrt{6} - 6\sqrt{5}}{2\sqrt{15} - 5\sqrt{2}}.$$

$$3) \frac{14 - 6\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 3}.$$

$$4) \frac{9 - 4\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2}.$$

$$5) \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 + 4\sqrt{15}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

$$6) \frac{8\sqrt{6} - (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^2}{4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}.$$

$$7) \frac{12\sqrt{6} - (\sqrt{6} + 3)^2}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}.$$

$$8) \frac{(\sqrt{5} + 2)^2 - 8\sqrt{5}}{5\sqrt{5} - 8}.$$

Bài 4. Rút gọn

$$1) \frac{-2}{\sqrt{3} - 1}.$$

$$2) \frac{5}{1 - \sqrt{6}}.$$

$$3) \frac{2 + \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}.$$

$$4) \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}.$$

$$5) \frac{x + a\sqrt{x}}{a\sqrt{x}}.$$

$$6) \frac{2x}{4 + \sqrt{x}}.$$

$$7) \frac{6}{1 - \sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 1}.$$

$$8) \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{6}{2 - \sqrt{10}}.$$

$$9) \frac{5 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}.$$

$$10) \frac{7}{3\sqrt{2} - 5} - \frac{\sqrt{18} - 3\sqrt{6}}{\sqrt{3} - 1}.$$

$$11) \frac{6}{\sqrt{5} - 1} + \frac{7}{1 - \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}.$$

$$12) \frac{5}{3 - \sqrt{7}} - \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

$$13) \frac{\sqrt{12} - 6}{\sqrt{8} - \sqrt{24}} - \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{7} - 1}.$$

Bài 5. Với các biểu thức đã cho là có nghĩa. Rút gọn:

$$1) \frac{4\sqrt{x} - x - 4}{x - 4}.$$

$$2) \frac{x + y - 2\sqrt{xy}}{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}.$$

$$3) \frac{x - 9}{x\sqrt{x} - 27}.$$

$$4) \frac{x - \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 2}{x - 1}.$$

$$5) \frac{x - 4}{x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} - 2}.$$

$$6) \frac{\sqrt{xy} - 3\sqrt{y}}{x\sqrt{y} - 5\sqrt{xy} + 6\sqrt{y}}.$$

$$7) \left(2 + \frac{a - 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 2} \right) \left(2 + \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} \right).$$

$$8) \left(\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + 2 \right) \left(2 - \frac{\sqrt{x} + x}{1 + \sqrt{x}} \right).$$

$$9) \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$$

$$10) \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \sqrt{ab}.$$

$$11) \left(\frac{y\sqrt{y} - x\sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} + \sqrt{xy} \right) \left(\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} \right)^2.$$

Bài 6. Với các biểu thức đã cho đã có nghĩa. Hãy rút gọn :

$$1) \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x} - 4} - \frac{4\sqrt{x}}{x - 4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1 \right).$$

$$2) \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{5\sqrt{x} - 3}{x - 1} \right) \cdot \left(2 - \frac{4}{\sqrt{x} + 3} \right).$$

$$3) \left(\frac{2\sqrt{x} - 4}{x - 4\sqrt{x} + 4} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 2\sqrt{x}} \right) \cdot \left(\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right).$$

$$4) \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 4}{6\sqrt{x} - 6x}.$$

$$5) \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} - \frac{1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{2\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}{9 - x}.$$

$$6) \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right).$$

$$7) \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a + 1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a + 1} \right).$$

$$8) \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6}.$$

$$9) \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{x + 5}{x - \sqrt{x} - 2}.$$

$$10) \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{x^3} - 1} - \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{x^3}}{1 + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right).$$

$$11) \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) \frac{x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}.$$

Bài số 4

CĂN BẬC BA

Bài 1. Tính - Rút gọn

$$1) \sqrt[3]{27}.$$

$$6) \sqrt[3]{0,064}.$$

$$10) \frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}.$$

$$2) \sqrt[3]{-8}.$$

$$7) \sqrt[3]{\frac{125}{216}}.$$

$$11) \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}.$$

$$3) \sqrt[3]{512}.$$

$$8) \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}.$$

$$4) \sqrt[3]{-343}.$$

$$9) \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125}.$$

$$12) \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}.$$

$$5) -\sqrt[3]{729}.$$

Bài 2. So sánh

$$1) 5 \text{ và } \sqrt[3]{123}.$$

$$2) \sqrt[3]{210} \text{ và } 3\sqrt[3]{5}.$$

3) $2\sqrt[3]{7}$ và $3\sqrt[3]{2}$.

4) $5\sqrt[3]{6}$ và $6\sqrt[3]{5}$.

Bài số 5

ÔN TẬP CHƯƠNG 1

Dạng 1. Tính - Rút gọn

Bài 1. Tính

1) $2\sqrt{121} - 3\sqrt{36} + \frac{1}{2}\sqrt{25}$.

2) $\frac{3}{2}\sqrt{64} + 2\sqrt{256} - 6\sqrt{400} + \sqrt{4}$.

3) $36\sqrt{\frac{49}{144}} - \frac{2}{5}\sqrt{225} - 3\sqrt{\sqrt{81}}$.

4) $\sqrt{16} - 2\sqrt{8} - 3\sqrt{32} + \sqrt{72}$.

5) $6\sqrt{12} - 2\sqrt{48} + 5\sqrt{75} - 7\sqrt{108}$.

6) $-\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - 6\sqrt{80} - \frac{1}{5}\sqrt{125}$.

7) $2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$.

8) $\sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{25\sqrt{12}} + 4\sqrt{\sqrt{192}}$.

9) $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{3} - \sqrt{60}$.

10) $(\sqrt{99} - \sqrt{18} + \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22}$.

11) $(\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7})\sqrt{7} + 2\sqrt{21}$.

12) $(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\sqrt{5} - \sqrt{250}$.

13) $(\sqrt{6} - \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$.

14) $(2 - \sqrt{2})(-5\sqrt{2}) - (3\sqrt{2} - \sqrt{5})^2$.

15) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} - \sqrt{5}$.

16) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$.

Bài 2. Rút gọn

1) $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{49a}$ với $a > 0$.

2) $\sqrt{160x} + 2\sqrt{40x} - 3\sqrt{90x}$ với $x \geq 0$.

3) $\sqrt{27a} - 2\sqrt{3a} + 2\sqrt{48y} - 3\sqrt{75y}$ với $a, y > 0$.

4) $2\sqrt{20a^3} - \frac{2}{3} \cdot a\sqrt{45a} + \frac{1}{7} \cdot a\sqrt{320a}$ với $a > 0$.

5) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$ với $a, b < 0$.

Bài 3. Rút gọn

1) $\sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{(\sqrt{7} + 2)^2}$.

2) $\sqrt{(5 - 2\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 5)^2}$.

3) $\sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2}$.

4) $\sqrt{(\sqrt{11} - 3\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{11} - \sqrt{2})^2}$.

5) $\sqrt{(4 - \sqrt{7})^2} \sqrt{(4 + \sqrt{7})^2}$.

6) $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})$.

7) $\sqrt{(12\sqrt{2} - 17)^2}(3 + 2\sqrt{2})^2$.

8) $\left(-\sqrt{5} - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\sqrt{27 - \sqrt{560}}$.

9) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$.

10) $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$.

11) $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$

12) $\sqrt{47 + 6\sqrt{10}} - \sqrt{23 - 6\sqrt{10}}.$

13) $\sqrt{46 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}.$

14) $\sqrt{13 - \sqrt{160}} - \sqrt{53 + 4\sqrt{90}}.$

15) $(\sqrt{3} - 2)\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}.$

16) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}(2 + \sqrt{5}).$

17) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}(4 - 3\sqrt{2}).$

18) $(\sqrt{10} - 6)\sqrt{23 + 6\sqrt{10}}.$

19) $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}.$

20) $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}.$

21) $\sqrt{2 + 2\sqrt{5 + \sqrt{13 - \sqrt{48}}}}.$

22) $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}.$

23) $\sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}.$

24) $\sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}}.$

Bài 4. Rút gọn và tính

1) $\sqrt{9x - 12\sqrt{x} + 4} - 9\sqrt{x} + 1$ tại $x = \frac{1}{9}$ và $x > 0$.

2) $\sqrt{4a - 12\sqrt{a} + 9} - 4\sqrt{a} - 1$ tại $x = \frac{1}{4}$ và $a > 0$.

3) $\sqrt{x + 5} - 2\sqrt{5x} - \sqrt{x + 8} - 4\sqrt{2x}$ với $5 < x < 8$.

Bài 5. Rút gọn

1) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{2}).$

2) $\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}} - \sqrt{6}.$

3) $\sqrt{15 + 5\sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}.$

4) $\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}} - 2\sqrt{4 - \sqrt{7}}.$

5) $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6}).$

6) $\sqrt{7 - \sqrt{33}} \cdot (\sqrt{22} + \sqrt{6}).$

7) $(\sqrt{10} + \sqrt{2}) \cdot (6 - 2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}}.$

8) $(\sqrt{10} + \sqrt{6}) \cdot (4 - \sqrt{15}) \cdot \sqrt{4 + \sqrt{15}}.$

9) $\sqrt{7 - 3\sqrt{5}} \cdot (7 + 3\sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{2} + \sqrt{10}).$

10) $2\sqrt{4 + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{2}).$

11) $5 \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{\frac{5}{2}} \right)^2 + \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2.$

12) $21 \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}} \right)^2 - 6(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}})^2 - 15\sqrt{15}.$

Bài 6. Rút gọn

- 1) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$.
- 2) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{18}+2\sqrt{3}}$.
- 3) $\frac{2}{\sqrt{5}-2} + \frac{-2}{\sqrt{5}+2}$.
- 4) $\frac{3}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.
- 5) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.
- 6) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2}$.
- 7) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{2}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.
- 8) $\frac{12}{\sqrt{5}+1} - \frac{4}{\sqrt{5}+2} + \frac{20}{3+\sqrt{5}}$.
- 9) $\frac{15}{\sqrt{12-6\sqrt{3}}} - \frac{2}{1-\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$.
- 10) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1} - \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.
- 11) $\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{20}-3\sqrt{10}}{3-\sqrt{2}}$.
- 12) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2} + \frac{6+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.
- 13) $\frac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} + \frac{6+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$.
- 14) $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.
- 15) $\frac{9+4\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{5\sqrt{5}-8}{2-\sqrt{5}}$.
- 16) $\left(1 + \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} - 1\right)$.
- 17) $\left(1 - \frac{7-\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}\right) \left(1 + \frac{7+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}\right)$.
- 18) $\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} - 2\right) \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + 2\right)$.
- 19) $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} - \frac{3-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.
- 20) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{5}{1+\sqrt{6}}$.
- 21) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}-2}$.
- 22) $\frac{6\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}-3} - \frac{3\sqrt{2}-6}{1-\sqrt{2}}$.
- 23) $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}$.
- 24) $\frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \sqrt{5} - \sqrt{3}$.
- 25) $\frac{8+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} - \frac{2+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.
- 26) $\sqrt{11-4\sqrt{7}} + \frac{3}{2-\sqrt{7}} + \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.
- 27) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.
- 28) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}(3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$.
- 29) $\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$.
- 30) $\frac{5+\sqrt{7}}{9-\sqrt{23+8\sqrt{7}}} + \frac{5-\sqrt{7}}{2-\sqrt{16+6\sqrt{7}}}$.

Bài 7. Với các biểu thức đã cho là có nghĩa. Hãy rút gọn:

- 1) $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.
- 2) $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.
- 3) $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \sqrt{ab}$.
- 4) $\left(2 - \frac{a-3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}\right) \left(2 - \frac{5\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{b}-5}\right)$.
- 5) $\frac{a+4+4\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} - \frac{a-4}{\sqrt{a}-2}$.
- 6) $\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

$$7) \frac{(\sqrt{x} - y)^2 + 4y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + y}.$$

$$9) \left(\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right) \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \right)^2.$$

$$11) \frac{(x - \sqrt{xy})(2\sqrt{xy} + 2\sqrt{y})}{(\sqrt{xy} - y)(x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2x)}.$$

$$8) \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right).$$

$$10) \frac{(a\sqrt{b} - \sqrt{ab})(a\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}(a - \sqrt{a} + 1)(a - 1)}.$$

$$12) \frac{(\sqrt{a} + 1)(a - \sqrt{ab})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(a - b)(\sqrt{a^3} + a)}.$$

Bài 8. Với các biểu thức đã cho là có nghĩa. Hãy rút gọn

$$1) \left(\frac{1}{a - \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 2\sqrt{a} + 1}.$$

$$3) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \right).$$

$$5) \left(\frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} \right).$$

$$7) \left(\frac{1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 1} \right).$$

$$2) \left(\sqrt{x} - \frac{x}{x + \sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}.$$

$$4) \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{a - \sqrt{a}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{2}{a - 1} \right).$$

$$6) \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} \right) \left(\frac{1 - x}{\sqrt{2}} \right)^2.$$

$$8) \frac{x\sqrt{x} - 2x + 28}{x - 3\sqrt{x} - 4} - \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 8}{4 - \sqrt{x}}.$$

Dạng 2. Phương trình

Bài 9. Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1.$$

$$3) \sqrt{1 - 4x + 4x^2} = 5.$$

$$5) \sqrt{9x^2} = 2x + 1.$$

$$7) \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1.$$

$$9) \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 4x + 3.$$

$$11) \sqrt{9x^2 + 6x + 1} = \sqrt{x^2 + 6} - 2\sqrt{6x}.$$

$$2) \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1.$$

$$4) \sqrt{4(1 - 2x + x^2)} - 6 = 0.$$

$$6) \sqrt{9 - 6x + x^2} = x.$$

$$8) \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 2x - 1.$$

$$10) \sqrt{4x^2 + 1 - 4x} = \sqrt{x^2 + 16} + 8x.$$

Bài 10. Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{2x - 5} = 7.$$

$$3) 3 + \sqrt{x - 2} = 4.$$

$$5) 2 - \sqrt{x^2 - 1} = 0.$$

$$7) \sqrt{x(x - 2)} - \sqrt{3} = 0.$$

$$9) \sqrt{2x^2 + 7} = 2 - x.$$

$$11) \sqrt{4x - 3} = x - 2.$$

$$13) \sqrt{2x - 3} = \sqrt{x - 1}.$$

$$15) \sqrt{6 - x} - \sqrt{-3x} = 0.$$

$$17) \sqrt{x^2 - 2x - 4} = \sqrt{2 - x}.$$

$$2) \sqrt{2x - 3} = 13.$$

$$4) \sqrt{x^2 - 7} = 2.$$

$$6) 3 - \sqrt{x^2 + 3} = 0.$$

$$8) 3 - \sqrt{-x(x + 6)} = 0.$$

$$10) \sqrt{3 - x} = 3x - 5.$$

$$12) 3x + \sqrt{5x + 4} = 0.$$

$$14) \sqrt{2x - 3} - \sqrt{x + 3} = 0.$$

$$16) \sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{4x - 9}.$$

$$18) \sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{x + 1}.$$

Bài 11. Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{9x} + \sqrt{4x} - \sqrt{16x} = 3.$$

$$2) 3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} = 8.$$

$$3) \sqrt{3x} - \sqrt{12x} + 1 = \sqrt{27x} - 11.$$

$$4) \sqrt{9x+9} - 2\sqrt{x+1} = 4.$$

$$5) \sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4.$$

$$6) \sqrt{4x+8} - \sqrt{9x+18} - \sqrt{x+2} = -\sqrt{x+7}.$$

$$7) \sqrt{9x+18} - \sqrt{9x+9} = -\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}.$$

$$8) \sqrt{50x+25} + \sqrt{9x+9} = \sqrt{16x+16} + \sqrt{32x+16}.$$

Dạng 3. Toán chứng minh

Bài 12. Chứng minh

$$a) \left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) \div (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 1 \text{ với } x, y > 0;$$

$$b) \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{xy + \sqrt{xy}}{\sqrt{xy} + 1} = x + y \text{ với } x, y > 0;$$

$$c) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) \div \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} + 1 \text{ với } x > 0;$$

$$d) \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + 4\sqrt{x} \right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 4x \text{ với } x > 0 \text{ và } x \neq 1;$$

$$e) \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x - y} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = 1 \text{ với } x, y > 0 \text{ và } x \neq y;$$

$$f) \left(\sqrt{x} + \frac{y - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) \div \frac{x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}(y - x)} = \sqrt{y} - \sqrt{x} \text{ với } x, y > 0 \text{ và } x \neq y;$$

$$g) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{a + \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{ab}} \right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ với } a, b > 0 \text{ và } a \neq b;$$

$$h) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b - a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \text{ với } a, b > 0 \text{ và } a \neq b;$$

Bài 13. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y

$$a) A = \left(\frac{1}{2 + 2\sqrt{x}} + \frac{1}{2 - 2\sqrt{x}} - \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \right) \left(1 + \frac{1}{x} \right) \text{ với } x > 0 \text{ và } x \neq 1;$$

$$b) B = \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x - y} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \text{ với } x, y > 0 \text{ và } x \neq 0;$$

 a) 1 b) 1

Dạng 4. Rút gọn và điều kiện có nghĩa

Bài 14. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x} \right) \div \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1 \right).$

- a) Tìm x để A có nghĩa; b) Rút gọn A ; c) Tính A với $x = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$;
 a) $-1 < x < 1$ b) $\sqrt{1-x}$ c) $\sqrt{3}-1$

Bài 15. Cho biểu thức $B = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{y-x} \right) \div \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

- a) Rút gọn B ; b) Chứng minh $B \geq 0$; c) So sánh B với $\sqrt{B}$;
 a) $\frac{\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}+y}$ b) $B \geq 0$ c) $B \leq \sqrt{B}$

Bài 16. Cho biểu thức $C = \left(\frac{2+\sqrt{a}}{2-\sqrt{a}} - \frac{2-\sqrt{a}}{2+\sqrt{a}} - \frac{4a}{a-4} \right) \div \left(\frac{2}{2-\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}+3}{2\sqrt{a}-a} \right)$.

- a) Rút gọn C ; b) Tính giá trị của a để $C > 0$;
 c) Tìm giá trị của a để $C = -1$;

a) $\frac{4a}{\sqrt{a}-3}$ b) $a > 9$ c) $a = \frac{9}{16}$

Bài 17. Cho biểu thức $D = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$.

- a) Rút gọn D ; b) Tìm x để $D < 1$;
 c) Tìm giá trị nguyên của x để $D \in \mathbb{Z}$;

a) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ b) $\begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$ c) $x \in \{16; 25; 49\}$

Bài 18. Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \div \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$.

- a) Rút gọn P ;
 b) Tính giá trị của P biết $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$.
 c) Tìm giá trị của x thỏa mãn $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$;

a) $\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$ b) $\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$ c) 4

Bài 19. Cho biểu thức $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) \div \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$.

- a) Tìm giá trị của x để P xác định? b) Rút gọn P ;
 c) Tìm x sao cho $P > 1$;

a) $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$ b) $\frac{4x}{\sqrt{x}-3}$ c) $x > 9$.

Bài 20. Cho biểu thức $C = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{9-x} \right) \div \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$.

- a) Tìm giá trị của x để C xác định. b) Tìm x sao cho $C < -1$.

a) $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 9 \end{cases}$ b) $x > 16$.

Bài 21. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+2}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} \right) \div \left(\frac{\sqrt{x}-4}{1-x} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$.

- a) Rút gọn P . b) Tìm x để $P < 1$.
 c) Tìm x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

a) $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ c) $x = 0$.

Chương 2

HÀM SỐ. HÀM SỐ BẬC NHẤT

Bài số 1

HÀM SỐ, HÀM SỐ BẬC NHẤT

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 1$.

- a) Tính $f(-5)$; $f(0)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.
- b) Tìm các giá trị của x ứng với $f(x) = -1$; $f(x) = 0$; $f(x) = \frac{1}{3}$.
- c) Điền các giá trị tương ứng vào bảng sau:

x	-3	-2			2	3
$y = 4x^2 - 1$			3	$\frac{5}{4}$		

Đáp: a) $f(-5) = 99$, $f(0) = -1$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$; b) $x = 0$, $x = \pm\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 2. Chứng minh hàm số $y = f(x) = 3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 3. Chứng minh hàm số $y = f(x) = -2x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x) = (m - 1)x - 2$.

- a) Tìm điều kiện để hàm số trên là hàm số bậc nhất.
- b) Xác định m để hàm số trên nghịch biến.
- c) Biết $f(2) = -3$. Xác định công thức chính xác của $f(x)$.

Đáp: a) $m \neq 1$; b) $m > 1$; c) $y = -\frac{1}{2}x - 2$

Bài 5.

- a) Vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy đồ thị của các hàm số sau

$$(d): y = \frac{3}{2}x - 1 \quad (1); \quad (d'): y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad (2).$$

- b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (d) và có hoành độ là -2 .
- c) Tìm trên (d') điểm N có tung độ là $-\frac{1}{2}$.

Đáp: b) $M(-2; -4)$; c) $N\left(5; -\frac{1}{2}\right)$

Bài 6.

- a) Vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy đồ thị các hàm số sau

$$y = -2x + 5 \quad (1);$$

$$y = x + 2 \quad (2).$$

b) Trong các điểm sau, điểm nào thuộc đồ thị hàm số (1).

$$A(1; 3), B(-1; 3), C\left(\frac{1}{2}; 6\right), D\left(\frac{3}{2}; 2\right).$$

c) Tìm trên đồ thị hàm số (2) điểm E có hoành độ là 0,5 và điểm F có tung độ là -3 .

🔗 b) Điểm A và điểm D ; c) $E(0,5; 2,5)$, $F(-5; -3)$

Bài 7.

a) Vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy đồ thị các hàm số sau:

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \quad (1);$$

$$y = -2x + 3 \quad (2).$$

b) Cho biết $B(a; -0,5)$ thuộc đồ thị hàm số (1). Tìm a .

c) Xác định tọa độ điểm C thuộc đồ thị hàm số (2) và nằm trên trục hoành. Điểm D là giao điểm của đồ thị hàm số (2) và trục tung.

🔗 b) $a = 3$; c) $C(\frac{3}{2}; 0)$, $D(0; 3)$

Bài số

2

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG - ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

Bài 1.

a) Vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy đồ thị các hàm số sau:

$$y = 2x;$$

$$y = 2x + 5;$$

$$y = -\frac{2}{3}x;$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 5.$$

b) Bốn đường thẳng trên cắt nhau tạo thành tứ giác $OABC$. Tứ giác trên có phải hình bình hành không? (O là gốc tọa độ)

🔗 b) $OABC$ là hình bình hành

Bài 2. Cho hàm số bậc nhất $y = 2x + k$ và $y = (2m + 1)x + k - 1$. Tìm m và k để hai đồ thị hàm số trên là

a) Hai đường thẳng cắt nhau.

b) Hai đường thẳng song song.

c) Hai đường thẳng trùng nhau.

Bài 3. Cho hàm số bậc nhất $y = \left(m - \frac{3}{2}\right)x + 2 \quad (1)$ và $y = (2 - m)x - 3 \quad (2)$.

a) Với giá trị nào của m thì đồ thị hai hàm số trên song song với nhau?

b) Vẽ đồ thị hai hàm số trên với giá trị m vừa tìm được.

🔗 a) $m = \frac{7}{4}$

Bài 4. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x$ có đồ thị (D_1) và $y = 2x - 5$ có đồ thị (D_2) .

a) Vẽ (D_1) và (D_2) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm m để đồ thị hàm số $y = (3m^2 - 1)x + 3$ song song với (D_2) .

🔗 b) $m = \pm 1$

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hàm số $y = 4x - 6$ có đồ thị là đường thẳng (d_1) và hàm số $y = -2x$ có đồ thị là đường thẳng (d_2) .

- Vẽ đồ thị (d_1) và (d_2) trên cùng hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) bằng phép tính.
- Cho đường thẳng $(d_3): y = (m^2 - 1)x + m^2 - 5$ với $m \neq \pm 1$. Xác định m để ba đường thẳng (d_1) , (d_2) , (d_3) đồng quy.

🔗 b) $A(1; -2)$, c) $m = \pm\sqrt{2}$

Bài 6. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x$ có đồ thị là (d_1) và hàm số $y = x + 2$ có đồ thị là (d_2) .

- Vẽ (d_1) và (d_2) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .
- Tìm tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2) bằng phép toán.
- Cho đường thẳng $(d_3): y = mx + n$. Tìm m và n biết (d_3) song song với (d_2) và (d_3) qua điểm $B(-3; 1)$.

🔗 b) $A(-4; -2)$, c) $(d_3): y = x + 4$

Bài 7. Cho các đường thẳng

$$(d_1): y = x + 2;$$

$$(d_2): y = 2x + 1;$$

$$(d_3): y = 3x.$$

- Vẽ (d_1) và (d_2) trên cùng một mặt phẳng tọa độ và tìm giao điểm của hai đường thẳng bằng phép toán.
- Chứng tỏ ba đường thẳng (d_1) , (d_2) , (d_3) đồng quy tại một điểm.

Bài 8.

- Vẽ các đồ thị hàm số sau trên cùng một hệ trục tọa độ.
 - $(D): y = x + 1;$
 - $(D'): y = -x + 3.$
- Hai đường thẳng (D) và (D') cắt nhau tại C và cắt Ox theo thứ tự tại A , B . Tìm tọa độ các điểm A , B , C .
- Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC .

🔗 b) $A(1; 2)$, $B(-1; 0)$, $C(3; 0)$; c) Chu vi: $4 + 4\sqrt{2}$, $S_{ABC} = 4$

Bài 9. Cho $(d): y = (k + 1)x + 3$ ($k \neq -1$) và $(d'): y = (3 - 2k)x + 1$ ($k \neq \frac{3}{2}$).

- Tìm k để (d) và (d') là hai đường thẳng song song.
- Hai đường thẳng trên có thể trùng nhau không? Vì sao?

🔗 a) $k = \frac{2}{3}$; b) (d) và (d') không thể trùng nhau.

Bài 10. Cho đường thẳng $(d): y = ax + 2$ ($a \neq 0$) và $(d'): y = a'x - 3$.

- Tìm a biết (d) đi qua điểm $A(2; -6)$.

- b) Tìm a' biết (d') cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -2 .
 c) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (d') với a và a' vừa tìm được.

🔗 a) $a = -4$; b) $a' = -\frac{3}{2}$; c) $(2; -6)$

Bài 11. Cho đường thẳng $(D): y = ax - \frac{1}{2}$ và $(d): y = -3x - b$.

- a) Vẽ đồ thị (D) , biết đường thẳng (D) song song với đường thẳng (d) .
 b) Tìm b biết điểm $B(-3; 1)$ thuộc đồ thị hàm số (d) .
 c) Tìm giao điểm của đường thẳng (D) và trục tung.

🔗 b) $b = 8$; c) $(0; -\frac{1}{2})$

Bài 12. Viết phương trình đường thẳng (d) , biết $(d) \parallel (D): y = 2x - 3$ và (d) cắt $(d'): y = 3x + 1$ tại điểm có tung độ là 2.

🔗 $(d): y = 2x + \frac{4}{3}$

Bài 13. Cho hai hàm số

$$y = (k - 2)x + k \quad (k \neq 2) \quad (1); \quad y = (k + 3)x - k \quad (k \neq -3) \quad (2).$$

Với giá trị nào của k thì

- a) Đồ thị hàm số (1) và (2) cắt nhau tại một điểm trên trục tung.
 b) Đồ thị hàm số (1) và (2) cắt nhau tại một điểm trên trục hoành.

🔗 a) $k = 0$; b) $k = 0, k = -\frac{1}{2}$

Bài số 3 HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Bài 1. Cho hàm số $y = -2x + 3$.

- a) Vẽ đồ thị của hàm số.
 b) Tính góc tạo bởi đường thẳng trên và trục Ox .

🔗 b) $\alpha = 116^\circ 33' 54''$

Bài 2. Cho hai hàm số $y = x - 5$ và $y = -x + 3$ có đồ thị là (d_1) và (d_2) .

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số trên trong cùng một mặt phẳng tọa độ.
 b) Tìm tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) .
 c) Viết phương trình của đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; 3)$ và song song với đường thẳng (d_1) .

🔗 b) $(4; -1)$ c) $y = x + 1$

Bài 3.

- a) Vẽ đồ thị các hàm số sau lên mặt phẳng tọa độ $(d): y = 0,5x + 2$ và $(d'): y = 5 - 2x$.
 b) Tính số đo các góc tạo bởi đường thẳng (d) và (d') .

🔗 b) $116^\circ 33' 54''$

Bài 4. Cho hai hàm số $y = x - 3$ và $y = -2x + 1$ có đồ thị là (d_1) và (d_2) .

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số trên trong cùng một mặt phẳng tọa độ.
- b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng trên bằng phép tính.
- c) Viết phương trình của đường thẳng (d) đi qua điểm $M(2; -5)$ và song song với đường thẳng (d_2) .

 b) $\left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$ c) $y = -2x - 1$

Bài 5. Viết phương trình đường thẳng (d) là đồ thị của một hàm số bậc nhất, biết (d) song song với (d') : $y = -x - 2$ và (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -3 .

 $y = -x - 3$

Bài 6.

- a) Vẽ đồ thị (d) của hàm số $y = 2x - 6$.
- b) Viết phương trình đường thẳng (d') , biết rằng (d') song song với (d) và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 5 .

 b) $y = 2x - 10$

Bài 7. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$ có đồ thị là đường thẳng (d) . Tìm a, b trong các trường hợp sau:

- a) (d) song song với (d') : $y = 2x - 1$ và (d) đi qua điểm $A(2; -5)$.
- b) (d) song song với (d') : $y = \frac{1}{2}x + 3$ và (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ là -1 .
- c) (d) song song với (d') : $y = -3x + 2$ và (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 2 .

 a) $y = 2x - 9$ b) $y = \frac{1}{2}x - 1$ c) $y = -3x + 6$

Bài 8.

- a) Vẽ đồ thị (d_1) của hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
- b) Xác định hàm số $y = ax + b$ có đồ thị (d_2) , biết đồ thị hàm số (d_2) đi qua điểm $A(1; 4)$ và song song với đường thẳng (d_1) .

 b) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

Bài 9. Với giá trị nào của m thì đồ thị các hàm số $y = x + 3 - m$ và $y = 2x + 5 + m$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

 $m = -1$

Bài 10. Cho các đường thẳng $(d): y = ax + b$ ($a \neq 0$); $(d_1): y = -\frac{1}{2}x + 3$ và $(d_2): y = x - 1$. Tìm a, b biết

- a) $(d) \parallel (d_1)$ và cắt (d_2) tại điểm có hoành độ là 1 .
- b) (d) song song với đồ thị hàm số $y = 2x$ và đi qua giao điểm của (d_1) với (d_2) .

 a) $a = -\frac{1}{2}; b = \frac{1}{2}$ b) $a = 2; b = -\frac{11}{3}$

Bài số 4

CÁC BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho hàm số $y = 2x + 1$. (1)

- Vẽ đường thẳng (d) là đồ thị của hàm số trên và tính góc tạo bởi đường thẳng (d) với trục hoành.
- Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số (1) : $A(-2, -3); B(3; -1)$.
- Trên đường thẳng (d) lấy hai điểm C có hoành độ là 3 và D có tung độ là -2 . Tìm tọa độ của điểm C và D .
- Cho $(d_1) : y = ax + b$ ($a \neq 0$). Tìm a, b biết $(d) \parallel (d_1)$ và (d_1) đi qua điểm $E(-1; 2)$.
- Viết phương trình đường thẳng (d_2) có hệ số góc bằng -1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 2.

🔗 a) $63^\circ 26' 9''$ b) $A \in (d)$ và $B \notin (d)$ c) $C(3; 7); D\left(-\frac{3}{2}; -2\right)$ d) $a = 2; b = 4$ e) $(d_2) : y = -x + 2$

Bài 2.

- Trên cùng mặt phẳng tọa độ, vẽ các đường thẳng $(d_1) : y = 2x - 1$ và $(d_2) : y = -x + 5$.
- Tìm tọa độ giao điểm của $(d_1), (d_2)$ bằng phép tính.
- Biết đường thẳng (d) là đồ thị hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Xác định a, b biết $(d) \parallel (d_2)$ và giao với trục tung tại điểm có tung độ là 3.

🔗 b) $(2; 3)$ c) $a = -1; b = 3$

Bài 3. Cho $(d) : y = -\frac{1}{2}x + 3$

- Vẽ (d) trên hệ trục tọa độ.
- Tìm trên (d) điểm M có hoành độ là 4 và điểm N có tung độ là 2.
- Tìm giao điểm của (d) và $(d') : y = 3x - 1$.

🔗 b) $M(4; 1); N(2; 2)$ c) $\left(\frac{8}{7}; \frac{17}{7}\right)$

Bài 4. Cho đường thẳng $(d) : y = (m - 2)x + m + 4$ và $(d') : y = -3x + 2$.

- Tìm m để $(d) \parallel (d')$.
- Tìm m để (d) và (d') cắt nhau.
- Tìm m để (d) và (d') trùng nhau.

🔗 a) $m = -1$ b) $m \neq -1$ c) Không tồn tại m

Bài 5. Cho 2 hàm số $y = (2m - 1)x + n$, (1) và $y = (-5 + m)x + n - 2$, (2)

- Tìm m, n để các đồ thị hàm số (1) và (2) song song.
- Tìm m, n để các đồ thị hàm số (1) và (2) cắt nhau tại một điểm.
- Tìm m, n để các đồ thị hàm số (1) và (2) trùng nhau.

🔗 a) $m = -4, n \in \mathbb{R}$. b) $m \neq -4, n \in \mathbb{R}$. c) Không tồn tại m, n .

Bài 6. Cho hai đường thẳng $(d_1) : y = (2 + m)x + 1$ và $(d_2) : y = (1 + 2m)x + 2$.

- a) Tìm m để (d_1) và (d_2) cắt nhau.
- b) Với $m = -1$, vẽ (d_1) và (d_2) trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy rồi tìm tọa độ điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) bằng phép tính.

🔗 a) $m \neq 1$. b) (d_1) cắt (d_2) tại một điểm có tọa độ $(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.

Bài 7.

- a) Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $y = 2x + 3 + m$ và $y = 3x + 5 - m$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung.
- b) Viết phương trình đường thẳng (d) biết (d) song song với (d') : $y = \frac{-1}{2}x$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 10.

🔗 a) $m = 1$. b) $(d): y = -\frac{1}{2}x + 5$.

Bài 8. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = \frac{1}{2}x + 2$ và $(d_2): y = -x + 2$.

- a) Vẽ (d_1) và (d_2) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .
- b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (d_1) và (d_2) với trục Ox , C là giao điểm của (d_1) và (d_2) . Tính chu vi và diện tích của $\triangle ABC$.

🔗 b) Diện tích $\triangle ABC$ bằng 6.



CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG HÀM SỐ

Bài 1. Cách đây hơn một thế kỷ, nhà khoa học người Hà Lan Hendrich Lorentz (1853 – 1928) đưa ra công thức tính số cân nặng lí tưởng của con người theo chiều cao như sau

$$M = T - 100 - \frac{T - 150}{N} \quad (\text{công thức Lorentz})$$

Trong đó M là số cân nặng lí tưởng tính theo kilogam; T là chiều cao tính theo centimet; $N = 4$ với nam giới và $N = 2$ với nữ giới.

- a) Bạn An là nam giới chiều cao 1,6 m. Hỏi cân nặng của bạn nên là bao nhiêu kg để đạt lí tưởng?
- b) Với chiều cao bằng bao nhiêu thì số cân nặng lí tưởng của nam giới và nữ giới bằng nhau?

🔗 a) 57,5 kg. b) 150 cm.

Bài 2. Điện áp V (đơn vị V) yêu cầu cho 1 mạch điện được cho bởi công thức $V = \sqrt{P \cdot R}$, trong đó P là công suất (đơn vị W) và R là điện trở trong (đơn vị Ω).

- a) Cần điện áp bao nhiêu để thắp sáng 1 bóng đèn A có công suất 100 W và điện trở trong của bóng đèn là 110 Ω ?
- b) Bóng đèn B có điện áp bằng 110 V, điện trở trong là 88 Ω có công suất lớn hơn bóng đèn A không? Giải thích?

🔗 a) $V = 10\sqrt{110}$ V. b) Vậy công suất đèn B lớn hơn.

Bài 3. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức

$$G(x) = 0,024(30 - x)$$

Trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp (x được tính bằng mg). Tính nồng độ giảm huyết áp của bệnh nhân sau khi tiêm 10 mg thuốc? (kết quả làm tròn tới 1 chữ số thập phân).

🔗 $G(x) \approx 0,5$.

Bài 4. Để chuyển đổi liều thuốc dùng theo độ tuổi, các dược sĩ dùng công thức sau

$$c = 0,0417D(a + 1)$$

Trong đó: D là liều dùng cho người lớn (theo đơn vị mg) và a là tuổi của em bé, c là liều dùng cho em bé. Với loại thuốc có liều dùng cho người lớn là $D = 200$ mg thì với em bé 2 tuổi sẽ có liều dùng thích hợp là bao nhiêu?

🔗 $c = 25,02$.

Bài 5. Khi nuôi cá trong hồ, các nhà sinh vật học đã ước tính rằng: Nếu trên mỗi mét vuông hồ cá có n con cá thì khối lượng trung bình của mỗi con cá sau một vụ cân nặng $T = 500 - 200n$ gam. Sau khi nuôi vụ đầu tiên thì cân nặng trung bình mỗi con cá là 200 gam. Biết rằng diện tích của hồ là 150 m^2 . Hãy tính số lượng cá được nuôi trong hồ.

🔗 225 con.

Bài 6. Thời gian t (được tính bằng giây) từ khi một người bắt đầu nhảy bungee trên cao cách mặt nước d (tính bằng m) đến khi chạm mặt nước được cho bởi công thức $t = \sqrt{\frac{3d}{9,8}}$. Tìm thời gian một người nhảy bungee từ vị trí cao cách mặt nước 108 m đến khi chạm mặt nước?

🔗 $t \approx 5,7$ giây.

Bài 7. Một hình chữ nhật có kích thước 30 cm. Người ta tăng kích thước của hình chữ nhật thêm x cm. Khi đó chu vi của hình chữ nhật được cho bởi hàm số bậc nhất $P = 4x + 100$.

- Cho biết hàm số đồng biến hay nghịch biến trên R ? Vì sao?
- Hãy tính chu vi hình chữ nhật khi tăng mỗi kích thước 10 cm.

🔗 a) Hàm số trên đồng biến vì $a = 4 > 0$. b) Chu vi hình chữ nhật $P = 140$ cm.

Bài 8. Ở độ cao h m bạn có thể nhìn thấy đường chân trời cách xa V km, những đại lượng này liên hệ với nhau theo công thức $V = 3,5\sqrt{h}$.

- Một người có thể nhìn thấy đường chân trời cách 392 km từ cửa sổ máy bay, hỏi máy bay đó đang ở độ cao bao nhiêu?
- Một người đang đứng ở trên đỉnh Hoàng Liên Sơn 3143 km (cao nhất Việt Nam) thì có thể nhìn thấy đường chân trời cách đó bao nhiêu km?

🔗 a) 12 544 km. b) 196 km.

Bài 9. Một vật rơi ở độ cao so với mặt đất là 200 m. Quỹ đạo chuyển động (mét) của vật rơi phụ thuộc vào thời gian t giây bởi công thức $S = 4t^2 - 100t + 197$. Hỏi sau bao lâu vật này cách mặt đất 3 m?

🔗 25 m.

Bài 10. Thả một vật nặng từ trên cao xuống, chuyển động của vật được gọi là vật rơi tự do. Biết rằng quãng đường đi của vật được cho bởi công thức $s = 4,9t^2$. Với s là quãng đường rơi của vật tính bằng m; t là thời gian rơi tính bằng giây.

- Nếu thả vật từ độ cao 122,5 m thì sau bao lâu vật chạm đất?
- Hãy tính quãng đường vật rơi trong giây thứ tư?

🔗 a) $t = 5$ giây. b) $s = 78,4$ m.

Bài 11. Công ty đồ chơi Bingbon vừa cho ra đời một đồ chơi tàu điện điều khiển từ xa. Trong điều kiện phòng thí nghiệm, quãng đường centimet đi được của đoàn tàu đồ chơi là một hàm số của thời gian t giây, hàm số đó là $s = 6t + 9$. Trong điều kiện thực tế người ta thấy rằng nếu đoàn tàu đồ chơi đi chuyển quãng đường 12 cm thì mất 2 giây và cứ trong mỗi 10 giây thì nó đi được 52 cm.

- Trong điều kiện phòng thí nghiệm, sau 5 giây đoàn tàu đồ chơi đi chuyển được bao nhiêu centimet?
- Mẹ bé An mua đồ chơi này về cho bé chơi, bé ngồi cách mẹ 1,5 mét. Hỏi cần bao nhiêu giây để đoàn tàu đồ chơi từ chỗ mẹ đến chỗ bé?

 a) 39 cm. b) Khoảng 30 giây.

Bài 12. Công thức $h = 0,4\sqrt[3]{x}$ biểu diễn mối tương quan giữa cân nặng x (tính bằng kg) và chiều cao h (tính bằng m) của một con hươu cao cổ.

- Một con hươu cao cổ có cân nặng 180 kg thì cao bao nhiêu mét?
- Một con hươu cao cổ có chiều cao 2,56 mét thì cân nặng bao nhiêu kg?

 a) Khoảng 2,3 m. b) 262,144 kg.

Bài 13. Sau những vụ va chạm giữa các xe trên đường, cảnh sát thường sử dụng công thức $v = \sqrt{30fd}$ để ước lượng tốc độ v (đơn vị dặm/giờ) của xe từ vết trượt trên mặt đường sau khi thắng đột ngột. Trong đó, d là chiều dài vết trượt của bánh xe trên nền đường tính bằng feet (ft), f là hệ số ma sát giữa bánh xe và mặt đường (là thước đo sự “trơn trượt” của mặt đường).

- Cho biết vận tốc của một chiếc xe hơi là 60 dặm/giờ, và hệ số ma sát $f = 0,8$. Tính chiều dài vết trượt của bánh xe trên nền đường khi xe thắng gấp.
- Đường cao tốc Long Thành - Dầu Giây có tốc độ giới hạn là 100 km/h. Sau một vụ va chạm giữa hai xe, cảnh sát đo được vết trượt của một xe là $d = 172$ ft và hệ số ma sát mặt đường tại thời điểm đó là $f = 0,7$. Chủ xe đó nói xe của ông không chạy quá tốc độ. Hãy áp dụng công thức trên để ước lượng tốc độ chiếc xe đó rồi cho biết lời nói của người chủ xe đó đúng hay sai? (Biết 1 dặm = 1069 m).

 a) 150 ft. b) Người chủ xe nói đúng.

Chương 3

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài số



PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Dạng 1. Viết công thức nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm

❖❖ **Ví dụ 1.** Viết công thức nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm lên mặt phẳng tọa độ của (D): $x - 3y + 6 = 0$.

❖❖ **Ví dụ 2.** Viết công thức nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm lên mặt phẳng tọa độ của phương trình $4x - y = 5$.

❖❖ **Ví dụ 3.** Viết công thức nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm lên mặt phẳng tọa độ của $x - 2y = 6$.

❖❖ **Ví dụ 4.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $2x - y = 3$ và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm đó trên mặt phẳng tọa độ.

❖❖ **Ví dụ 5.** Viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình $3x - y = 7$ và biểu diễn tập nghiệm của chúng trên hệ trục tọa độ Oxy .

❖❖ **Ví dụ 6.** Tìm nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của các phương trình:

a) $0x - 5y = -15$;

b) $3x - 4y = 15$.

Dạng 2. Biện luận nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

❖❖ **Ví dụ 7.** Tìm m để hệ vô nghiệm

$$\begin{cases} mx + 2y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

❖❖ **Ví dụ 8.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 1 \\ my - x = m \end{cases}$. Tìm giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất.

❖ **Ví dụ 9.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx - y = -4 \\ -9x + 8my = 1 \end{cases}$. Tìm điều kiện của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

❖ **Ví dụ 10.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} -2x + my = 4 \\ mx - 4,5y = 6 \end{cases}$. Tìm giá trị của m để hệ phương trình vô nghiệm.

❖ **Ví dụ 11.** Tìm giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} (m + 2018)x + \sqrt{2}y = 6 \\ 2\sqrt{2}x + (m + 2018)y = 9 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

❖ **Ví dụ 12.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} m(x - y) = m^4 + 1 \\ (m^2 - 2m)x + my = m^3 - m^2 - 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình vô nghiệm.

❖ **Ví dụ 13.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m + 1)x - 2y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa điều kiện $x > 0$.

Bài số 2

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Dạng 1. Giải hệ bằng phương pháp thế và cộng đại số

❖ **Ví dụ 1.** Sử dụng phương pháp thế giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1. \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ -4x + y = -2. \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - 3y = 23 \\ 4x + 5y = 7. \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ x + 5y = 16. \end{cases} \\ \text{e)} \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1. \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4. \end{cases} & \text{g)} \begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ -3x + y = -1. \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} x - 3y = 23 \\ 4x + 5y = 7. \end{cases} \end{array}$$

❖ **Ví dụ 2.** Sử dụng phương pháp cộng đại số giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = -1. \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x - y\sqrt{2} = 6 \\ 2\sqrt{2}x - 3y = 8. \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 5x + 3y = 10. \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} 2\sqrt{5}x - y = 4\sqrt{5} \\ x + 6\sqrt{5}y = 2. \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x\sqrt{3} + 2y = \sqrt{3} \\ 3x - y\sqrt{3} = -6. \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + 1 = 0 \\ 3\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}y = 21. \end{cases} \\ \text{g)} \begin{cases} 2x - 5y = -6 \\ 3x + 2y = 10. \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} 3x - y\sqrt{2} = 1 \\ x + 2y\sqrt{2} = 5. \end{cases} & \text{i)} \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 4y = 10. \end{cases} \end{array}$$

❖❖ **Ví dụ 3.** Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{2x+3}{3y-2} = 1 \\ 3(3y+2) - 4(x+2y) = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{3x}{2} + 2y = 0 \\ \frac{x+y}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2(2x+3y) = 3(2x-3y) + 10 \\ 3x-3y = 4(6y-2x) + 3. \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} -x+2y = -4(x-1) \\ 5x+3y = -(x+y) + 8. \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} (x-3)(2y+5) = (2x+7)(y-1) \\ (4x+1)(3y-6) = (6x-1)(2y+3). \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x+y = 2(x-1) \\ 7x+3y = x+y+4. \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{4} = \frac{2(x-y)}{5} \\ \frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y-x. \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} \frac{2x+1}{4} - \frac{y-2}{3} = \frac{1}{12} \\ \frac{x+5}{2} = \frac{y+7}{3} - 4. \end{cases}$$

❖❖ **Ví dụ 4.** Giải các hệ phương trình sau (đặt ẩn phụ)

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-1} = 2 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{y-1} = 1. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{7}{x-y+2} - \frac{5}{x+y-1} = 4,5 \\ \frac{3}{x-y+2} + \frac{2}{x+y-1} = 4. \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x^2 + 3y = 1 \\ 3x^2 - 2y = 2. \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 3x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - 3y^2 = 1. \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5. \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = \frac{13}{36} \\ \frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{10}{\sqrt{y}} = 1. \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} 2\sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2. \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} 3\sqrt{4x+2y} - 5\sqrt{2x-y} = 2 \\ 7\sqrt{4x+2y} + 2\sqrt{2x-y} = 32. \end{cases}$$

❖❖ **Ví dụ 5.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} (a-2)x + 5by = 25 \\ 2ax - (b-2)y = 5. \end{cases}$ (với $a, b \in \mathbb{R}$).

Tìm giá trị của a và b để hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (3; -1)$

❖❖ **Ví dụ 6.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + ay = b + 4 \\ ax + by = 8 + 9a. \end{cases}$ (với $a, b \in \mathbb{R}$).

❖❖ **Ví dụ 7.** Cho đa thức $f(x) = mx^3 + (m-2)x^2 - (3n-5)x - 4n$. Hãy xác định m và n sao cho đa thức đã cho chia hết cho $x+1$ và $x-3$.

Tìm giá trị của a và b để hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (3; -1)$

❖ **Ví dụ 8.** Tìm giá trị của m để nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{4} = \frac{2(x-y)}{5} \\ \frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y-x. \end{cases}$$
 cũng là nghiệm của phương trình $3mx - 5y - 2m + 1 = 0$.

📁 Dạng 2. Giải hệ phương trình đối xứng

❖ **Ví dụ 9.** Giải các hệ phương trình sau (hệ đối xứng loại 1):

a)
$$\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 - 3xy = -1. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 6xy^2 = 9, \\ x^2 + 4y^4 = 5. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 2y^2 + 6xy^2 = 9, \\ x^2 + 4y^4 = 5. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y} = 2, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 4y - 1, \\ x^3 + x^2y + x - 3y = 0. \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x^2 + x = \frac{14}{3}y, \\ x^3 = 5y^2. \end{cases}$$

❖ **Ví dụ 10.** Giải các hệ phương trình sau (hệ đối xứng loại 2):

a)
$$\begin{cases} x^2 - 2018x = 2017y \\ y^2 - 2018y = 2017x. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 + 2 = 3x. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4x - xy = \frac{1}{3}y \\ 4y - xy = \frac{1}{3}x. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2 + x = 2y \\ y^2 + y = 2x. \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 2018\frac{y}{x} \\ y^2 - 2xy = 2018\frac{x}{y}. \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = 2y - 2 \\ y^2 = 2x + \frac{2}{x}. \end{cases}$$

❖ **Ví dụ 11.** Giải các hệ phương trình sau (hệ đẳng cấp):

a)
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + xy - 10y^2 = 0. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ x^2 + xy + 4y^2 = 19. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1 \\ x^2 + xy - y^2 = -5. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 \\ x^3 + x^2y - y^3 = 5. \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ 3x^3 - xy^2 - y^3 = 1. \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x^2 + 3xy = -9 \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = 9. \end{cases}$$

Bài số 3

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Một hình chữ nhật có chu vi 34 m. Nếu tăng chiều dài 3 m và tăng chiều rộng 2 m thì diện tích tăng 45 m. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

Bài 2. Sắp đến ngày tết, anh Nam đang định mua một chiếc Tivi màn hình 65 inch với tỉ lệ chuẩn 16 : 9 để đặt trên kệ với chiều dài và chiều rộng của kệ lần lượt là 140 cm và 80 cm. Theo bạn anh Nam có nên mua chiếc Tivi đó không? (biết 1 inch = 2,54 cm)

Bài 3. Bạn Nam đem 20 tờ tiền giấy gồm hai loại 2 000 đồng và 5 000 đồng đến siêu thị mua một món quà có giá trị 78 000 đồng và được thối lại 1 000 đồng. Hỏi có bao nhiêu tờ tiền mỗi loại?

Bài 4. Bé Na để dành tiền ăn bánh để bỏ heo đất. Hôm nay cần mua sách và dụng cụ học tập nên bé Na quyết định đập heo đất và đếm được có tất cả 38 tờ tiền loại 5 000 đồng và 10 000 đồng. Vì sách và dụng cụ học tập hết 248 000 đồng nên bé Na phải xin mẹ thêm 23 000 đồng. Hỏi bé Na có bao nhiêu tờ tiền mỗi loại?

Bài 5. Dân số của một tỉnh là 420 000 người. Nếu sau một năm, dân số nội thành tăng 0,8% và dân số ngoại thành tăng 1,1% thì sau một năm dân số toàn tỉnh sẽ tăng 1%. Hãy tìm dân số của nội thành và dân số ngoại thành của tỉnh đó vào thời điểm hiện tại?

Bài 6. Tìm hai số nguyên biết tổng của chúng bằng 99 và nếu chia số lớn cho số bé thì được thương là 4 dư 9?

Bài 7. Giải bài toán cổ sau đây bằng cách lập hệ phương trình:

Một đàn em bé tắm bên sông
Lấy ống làm phao, nổi bên bờ
Hai chú một phao, thừa bảy chiếc
Hai phao một chú, bốn người không
Hỡi người thạo tính, cho hỏi thử
Mấy phao, mấy chú, tính cho thông?

Bài 8. Chu vi miếng đất hình chữ nhật là 54 m, nếu giảm chiều dài đi 5 m và tăng chiều rộng thêm 3 m thì miếng đất là một hình vuông. Tính diện tích ban đầu của miếng đất đó.

Bài 9. Ông Hai có một miếng đất trồng rau sạch hình chữ nhật, chi vi là 38 m. Để diện tích miếng đất tăng thêm 6 m² phải tăng chiều dài 3 m và giảm chiều rộng 1 m. Hãy tính kích thước khu vườn lúc đầu?

Bài 10. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 400 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 5 giờ. Nếu vận tốc của mỗi xe vẫn không đổi, nhưng xe đi chậm xuất phát trước xe kia 40 phút thì hai xe gặp nhau sau 5 giờ 22 phút kể từ lúc xe đi chậm khởi hành. Tính vận tốc của mỗi xe.

Bài 11. Một trường trung học cơ sở tổ chức cho học sinh khối 8 và 9 tham quan viện bảo tàng. Nhà trường quyết định mỗi xe ô tô phải chở số học sinh là như nhau. Lúc đầu, Ban giám hiệu định cho mỗi xe ô tô chở 22 học sinh, nhưng nếu như vậy thì dư ra 1 em. Về sau, khi bớt đi một ô tô thì có thể sắp xếp các em học sinh đều lên mỗi ô tô còn lại. Hỏi lúc đầu có bao nhiêu ô tô và tổng số học sinh của hai khối 8 và 9, biết rằng mỗi ô tô chở không vượt quá 32 em.

Bài 12. Hiện nay, tuổi của Nam và chị gái chênh lệch nhau theo tỷ lệ 4 : 5; 6 năm sau, tỷ lệ tuổi của 2 người là 6 : 7. Hỏi số tuổi hiện nay của bạn Nam là bao nhiêu?

Chương 4

HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$). PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài số 1

HÀM SỐ $y = ax^2$, ($a \neq 0$)

A – KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1 Hàm số $y = ax^2$, ($a \neq 0$)

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- b) Tính chất biến thiên của hàm số:
- ☑ Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến khi $x > 0$, nghịch biến khi $x < 0$.
 - ☑ Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$, nghịch biến khi $x > 0$.

2 Đồ thị hàm số $y = ax^2$, ($a \neq 0$)

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$, với $a \neq 0$ là một đường Parabol:

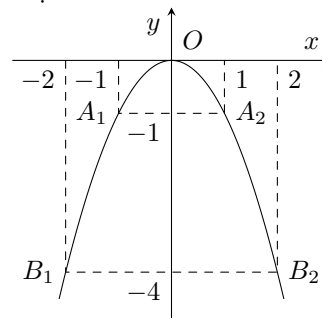
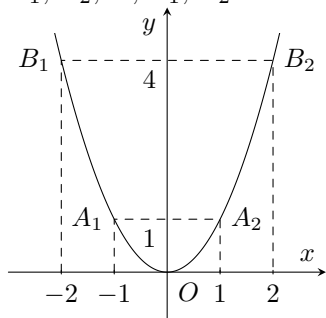
- ☑ Có đỉnh là gốc tọa độ $O(0; 0)$.
- ☑ Có trục đối xứng là Oy .
- ☑ Nếu $a > 0$, đồ thị hàm số nằm phía dưới trục hoành và nhận điểm O là điểm “thấp nhất”.
- ☑ Nếu $a < 0$, đồ thị hàm số nằm phía dưới trục hoành và nhận điểm O là điểm “cao nhất”.

3 Cách vẽ đồ thị

Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$ ta đi lấy 5 điểm:

- ☑ Điểm $O(0; 0)$.
- ☑ Cặp điểm A_1, A_2 có hoành độ đối xứng qua O .
- ☑ Cặp điểm B_1, B_2 có hoành độ đối xứng qua O .

Nối các điểm B_1, B_2, O, A_1, A_2 theo đường cong ta nhận được đồ thị của hàm số



B – DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN**Dạng 1. Tính giá trị của hàm số**

❖ **Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

- a) Hãy lập bảng tính các giá trị $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$.
 b) Tìm x biết $f(x) = 1$, $f(x) = 2 - \sqrt{3}$.

❖❖❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG ❖❖❖

Bài 1. Cho hàm số $y = 2x^2$

- a) Hãy lập bảng tính các giá trị $f(-5)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$.
 b) Tìm x biết $f(x) = 8$, $f(x) = 6 - 4\sqrt{2}$.

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^2$.

- a) Tính $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$.
 b) Tìm các giá trị của x , biết rằng $y = \frac{1}{27}$. Cũng câu hỏi tương tự với $y = 5$.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$. Biết $x = -2$ thì $y = -\frac{4}{3}$

- a) Tìm hệ số a .
 b) Tính $f(-1, 5)$, $f(0, 5)$.

Dạng 2. Tính chất đồng biến, nghịch biến

Tính chất biến thiên của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$):

- ☑ Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến khi $x > 0$, nghịch biến khi $x < 0$.
 ☑ Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$, nghịch biến khi $x > 0$.

❖ **Ví dụ 2.** Hãy nêu tính chất biến thiên của các hàm số sau:

- a) $y = 8x^2$.
 b) $y = -\frac{1}{2}x^2$.

❖ **Ví dụ 3.** Cho hàm số $y = (2m - 4)x^2$ với $a = 2m - 4 \neq 0$. Tìm giá trị của m để

- a) Hàm số nghịch biến.
 b) Có giá trị $y = 9$ khi $x = 3$.
 c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.
 d) Hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

❖❖❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG ❖❖❖

Bài 1. Hãy nêu tính chất biến thiên của các hàm số sau

- a) $y = 3x^2$.
 b) $y = -\frac{9}{2}x^2$.
 c) $y = (4 - 2\sqrt{3})x^2$.
 d) $y = (m^2 + 1)x^2$.
 e) $y = (m - 1)x^2$.

Bài 2. Cho hàm số $y = (m^2 - 3m + 2)x^2$. Tìm giá trị m để

- a) Hàm số đồng biến với $x > 0$.
 b) Có giá trị $y = 8$ khi $x = 2$.
 c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.
 d) Hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$. Biết rằng khi $x = 5$ thì $y = \frac{75}{2}$.

- a) Tính giá trị của y khi $x = -3$.
 b) Tìm các giá trị của x khi $y = 15$.
 c) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y khi x biến đổi thỏa mãn điều kiện $-4 \leq x \leq 2$.

Dạng 3. Các bài toán thực tế

-  Xác định kỹ xem từng biến trong công thức (hàm số) có ý nghĩa gì.
-  Trả lời câu hỏi của bài toán.

❖ Ví dụ 4. Một vật rơi ở độ cao so với mặt đất là 100 m. Quãng đường vật chuyển động s (mét) của vật rơi phụ thuộc vào thời gian t (giây) bởi công thức $S = 4t^2$.

- a) Sau 1 giây, vật này cách mặt đất bao nhiêu mét? Tương tự sau 2 giây?
 b) Hỏi sau bao lâu vật này tiếp đất?

❖ Ví dụ 5. Lực F của gió khi thổi vuông góc với cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương của vận tốc v của gió, tức là $F = av^2$ (a là hằng số). Biết rằng khi vận tốc gió bằng 2 m/s thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền bằng 120 N.

- a) Tính hằng số a .
 b) Hỏi khi $v = 10$ m/s thì lực F bằng bao nhiêu? Cùng câu hỏi khi $v = 20$ m/s?
 c) Biết rằng cánh buồm đó chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là 12000 N, hỏi con thuyền có thể đi trong gió bão với vận tốc gió 90 km/h hay không?

Dạng 4. Đồ thị hàm số $y = ax^2$

- a) Các bước vẽ đồ thị hàm số
-  Lập bảng giá trị, lấy 5 điểm.
 -  Nối 5 điểm lại, ta được đồ thị là đường Parabol.
- b) Lưu ý quan trọng:

☑ Một điểm thuộc đồ thị khi và chỉ khi **tọa độ** của nó **thỏa công thức** của đồ thị đó.

💡**Ví dụ 6.** Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.

- Vẽ đồ thị hàm số.
- Các điểm $A(0;0)$, $B(2;1)$, $C\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{16}\right)$, $D(3;4)$ có thuộc đồ thị hàm số không?

💡**Ví dụ 7.** Cho hàm số $y = f(x) = x^2$

- Vẽ đồ thị của hàm số đó.
- Tính các giá trị $f(-8)$, $f(-1,3)$, $f(-0,75)$, $f(1,5)$.

💡**Ví dụ 8.** Cho hàm số $y = -0,75x^2$. Vẽ đồ thị của hàm số, từ đó hãy cho biết x tăng từ -2 đến 4 thì giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y là bao nhiêu?

💡**Ví dụ 9.** Cho hàm số $y = (m-1)x^2$

- Xác định m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; -1)$. Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.
- Tìm điểm thuộc parabol nói trên có hoành độ bằng 5 .
- Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ bằng -4 .
- Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ gấp đôi hoành độ.

💡💡💡BÀI TẬP VẬN DỤNG💡💡💡

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

- Vẽ đồ thị của hàm số.
- Những điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số đã cho:

$$A(5;10), B(-2;4), C(11;100), D\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right), E(2\sqrt{3};12)?$$

- Tìm GTLN và GTNN của hàm số trên đoạn $[-2;1]$.

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$. Biết rằng điểm $A(1;2)$ thuộc đồ thị hàm số

- Xác định hệ số a .
- Điểm $B\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$ có thuộc đồ thị của hàm số đã cho hay không?
- Vẽ đồ thị hàm số đã cho.
- Tìm GTLN và GTNN của hàm số trên đoạn $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2$

- a) Tính $f(1), f\left(\frac{1}{3}\right)$.
- b) Vẽ đồ thị hàm số.
- c) Tìm các điểm thuộc đồ thị có hoành độ bằng 4.
- d) Chứng minh rằng hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

Bài 4. Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^2$

- a) Vẽ đồ thị hàm số.
- b) Các điểm $A(0; 0), B(3; 6), C\left(1; \frac{3}{2}\right), D(3; 1)$ có thuộc đồ thị hàm số không?

Bài 5. Cho hàm số $y = -125x^2$

- a) Khảo sát tính đơn điệu của hàm số.
- b) Tìm giá trị của m, n để các điểm $A(1; m)$ và $B(n; 125)$ thuộc đồ thị hàm số trên.

Bài 6. Cho hàm số $y = (m + 1)x^2$

- a) Xác định m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 2)$.
- b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.
- c) Tìm điểm thuộc parabol nói trên có hoành độ bằng -2 .
- d) Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ bằng -8 .
- e) Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ gấp ba lần hoành độ.

Bài 7. Cho hàm số $y = (2m - 1)x^2$

- a) Xác định m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; 2)$.
- b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.
- c) Tìm điểm thuộc parabol nói trên có hoành độ bằng 5.
- d) Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ bằng -7 .

Bài 8.

- a) Vẽ $(P): y = x^2$.
- b) Biết các điểm $A, B \in (P)$ và lần lượt có hoành độ bằng 1 và $-\frac{3}{2}$. Tính tung độ của chúng.
- c) Viết phương trình đường thẳng AB .
- d) Viết phương trình đường thẳng (D) song song với AB cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -2 .

Bài số 2

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A – KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1 Phương trình bậc hai một ẩn

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

trong đó x là ẩn số, a, b, c là những số cho trước (hệ số) và $a \neq 0$.

2 Công thức nghiệm

Tính $\Delta = b^2 - 4ac$.

☑ Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

☑ Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

☑ Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

3 Công thức nghiệm thu gọn

Nếu $b = 2b'$, đặt $\Delta' = b'^2 - ac$.

☑ Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

☑ Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$

☑ Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

B – CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1. Giải phương trình bậc hai

Sử dụng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn để giải phương trình bậc hai.

❖ **Ví dụ 1.** Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c , tính biệt thức Δ và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $7x^2 - 2x + 3 = 0$.

b) $5x^2 + 2\sqrt{10}x + 2 = 0$.

c) $\frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{2}{3} = 0$.

d) $1,7x^2 - 1,2x - 2,1 = 0$.

❖ **Ví dụ 2.** Giải phương trình $-6x^2 + 7x - 2 = 0$.

❖ **Ví dụ 3.** Giải phương trình $x^2 + 2x - 3 = 0$ theo nhiều cách.

❖ **Ví dụ 4.** Giải các phương trình:

a) $\frac{4}{3}x^2 - 5x + 3 = 0$.

b) $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x - 12\sqrt{2} = 0$.

❖ **Ví dụ 5.** Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{2}-1}x^2 + (\sqrt{2}-1)x - 2 = 0$.

❖❖❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG ❖❖❖

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $4x^2 - 6x + 7 = 0$.

b) $9x^2 - 6x + 26 = 0$.

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$.

d) $x^2 + 8x - 10 = 0$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$.

b) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$.

c) $5x^2 - x + \frac{5}{49} = 0$.

d) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{15} = 0$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - (2 + \sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0$.

b) $x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}x + \sqrt{6} = 0$.

c) $\sqrt{2}x^2 - 5x + 3\sqrt{2} = 0$.

d) $\sqrt{6}x^2 + 2(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})x + 24 = 0$.

📁 Dạng 2. Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai

a) Tìm điều kiện của Δ (hoặc Δ') sao cho thỏa yêu cầu bài toán.

b) Một số trường hợp quan trọng:

☑ Phương trình có nghiệm hoặc vô nghiệm thì chia hai trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$ (nếu a chứa tham số).

☑ Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$.

☑ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

☑ Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$.



Khi làm bài phải thật chú ý xem hệ số a có chứa tham số hay không.

a) Giải phương trình với $m = 1$. b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

- Giải phương trình với $m = 1$.
- Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

- Giải phương trình với $m = 2$.
- Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- Tìm giá trị của m để phương trình có một nghiệm.

a) Có hai nghiệm phân biệt; b) Có nghiệm kép;

c) Vô nghiệm; d) Có đúng một nghiệm.

có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.

a) Giải phương trình với $m = 1$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 5. Cho phương trình $x^2 - (m - 1)x - m^2 + m - 1 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = 3$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 6. Cho phương trình $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 7. Cho phương trình $mx^2 + (m + 1)x - 2m = 0$.

a) Giải phương trình với $m = -\frac{1}{2}$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm.

Bài 8. Tìm giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm kép:

a) $mx^2 - 2x + 6m = 0$.

b) $m^2x^2 + 10x + 1 = 0$.

Bài 9. Tìm giá trị của m để các phương trình sau vô nghiệm:

a) $mx^2 + 2(m - 3)x + m = 0$.

b) $(m - 2)x^2 - 2(m - 2)x - m = 0$.

Bài 10. Cho phương trình $mx^2 - (m + 1)x + 1 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = 2$.

b) Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài 11. Cho phương trình $mx^2 - (3m + 1)x + 3 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = 2$.

b) Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài 12. Cho phương trình $mx^2 + 2(m - 1)x - 2 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = \sqrt{3}$.

b) Tìm m để phương trình có một nghiệm.

Bài 13. Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có nghiệm

$$mx^2 - (3m + 1)x + 2m + 2 = 0.$$

Bài 14. Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có nghiệm

$$m(m - 1)x^2 - (2m - 1)x + 1 = 0.$$

Bài 15. Xác định hệ số a, b, c tính biệt thức Δ rồi tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;

b) $x^2 + 10x + 38 = 0$;

c) $3x^2 + 8x - 2 = 0$;

d) $-4x^2 + 9x + 13 = 0$.

Bài 16. Xác định các hệ số a, b, c rồi giải phương trình:

a) $3x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$;

b) $\sqrt{3}x^2 - (5 + \sqrt{3})x + 5 = 0$;

c) $\sqrt{3}x^2 + 2(\sqrt{3} - 3)x - 6 + 4\sqrt{3} = 0$.

Bài 17. Với giá trị nào của m thì phương trình

$$mx^2 - 4(m - 1)x + 4m + 8 = 0.$$

a) Có nghiệm;

b) Có nghiệm kép;

c) Có đúng một nghiệm.

Dạng 3. Sự tương giao của hai đồ thị

- ☑ Nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm chính là hoành độ giao điểm của hai đồ thị.
- ☑ Một điểm thuộc đồ thị khi và chỉ khi tọa độ của nó thỏa công thức của đồ thị.

💠 Ví dụ 12.

- a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.
- b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tính tọa độ hai điểm này khi $m = \frac{3}{2}$.

💠 Ví dụ 13.

- a) Vẽ $(P): y = x^2$.
- b) Biết các điểm $A, B \in (P)$ và lần lượt có hoành độ bằng 1 và $-\frac{3}{2}$. Tính tung độ của chúng.
- c) Viết phương trình đường thẳng AB .
- d) Viết phương trình đường thẳng (D) song song với AB và cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -2 .

💠 Ví dụ 14. Cho parabol $(P): y = ax^2$ và đường thẳng $d: y = kx + 3$.

- a) Xác định các hệ số a và k , biết parabol và đường thẳng có một điểm chung là $A(3; 18)$.
- b) Từ kết quả câu a) hãy tìm giao điểm thứ hai (nếu có) của (P) và d .

💠 Ví dụ 15. Cho hàm số $y = f(x) = (m - 2)x^2, (m \neq 2)$.

- a) Xác định m để hàm số nghịch biến $\forall x > 0$.
- b) Xác định m để hàm số đi qua điểm $M(-2; -4)$.
- c) Xác định m để đường thẳng $y = 2x + 1$.
 - ☑ Không cắt đồ thị hàm số;
 - ☑ Tiếp xúc với đồ thị của hàm số. Tìm tọa độ tiếp điểm.

💠💠💠 BÀI TẬP VẬN DỤNG 💠💠💠

Bài 1. Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: y = -\frac{1}{2}x + 2$.

- a) Vẽ (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b) Gọi A, B là hai giao điểm của (P) và d . Tính diện tích tam giác OAB .

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có đồ thị là parabol (P) .

- a) Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm A và B thuộc (P) , biết $x_A = -2; x_B = 4$.
- b) Xác định tọa độ điểm $M \in (P)$, biết đường thẳng tiếp xúc với (P) tại M song song với đường thẳng AB .

Bài 3. Cho parabol $(P) : y = mx^2$ và đường thẳng $d : y = nx + 4$. Xác định m, n để (P) và d tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $x = -2$.

Bài 4. Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = mx + n$. Xác định các hệ số m, n để đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 0)$ và tiếp xúc với parabol. Tìm tọa độ của tiếp điểm.

Dạng 4. Các bài toán nâng cao khác

Vận dụng linh hoạt các tính chất về dấu của đa thức, bất đẳng thức, ...

❖ Ví dụ 16. Cho ba số dương a, b, c và phương trình

$$x^2 - 2x - \frac{a}{b+c} - \frac{b}{c+a} - \frac{c}{a+b} + \frac{5}{2} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm, từ đó xác định điều kiện của a, b, c để phương trình có nghiệm kép.

❖ Ví dụ 17. Cho hai phương trình:

$$x^2 - mx - 2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - x + 6m = 0 \quad (2).$$

Tìm giá trị của m để phương trình (1) và phương trình (2) có ít nhất một nghiệm chung biết m là một số nguyên.

❖ Ví dụ 18. Chứng minh rằng:

a) Nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ cũng là nghiệm của phương trình $-ax^2 - bx - c = 0$.

b) Hai phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ và phương trình $ax^2 - bx + c = 0$ cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm.

❖ Ví dụ 19. Cho hai phương trình:

$$x^2 + ax + b = 0,$$

$$x^2 + cx + d = 0.$$

Biết rằng $ac \geq 2(b+d)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm.

❖ Ví dụ 20. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có hai nghiệm phân biệt.

$$x^2 + mx + 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 4x + m = 0 \quad (2).$$

❖❖ **Ví dụ 21.** Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau vô nghiệm.

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 6m &= 0 & (1) \\x^2 + 4x + m^2 + 15 &= 0 & (2).\end{aligned}$$

❖❖❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG ❖❖❖

Bài 1. Cho hai số dương a, b và phương trình $x^2 - 2x - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + 3 = 0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm, từ đó xác định điều kiện của a, b để phương trình có nghiệm kép.

Bài 2. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm:

$$x^2 - 2x - ab(a + b - 2c) - bc(b + c - 2a) - ca(c + a - 2b) + 1 = 0.$$

Khi đó, tìm điều kiện của a, b, c để phương trình có nghiệm kép.

Bài 3. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình sau vô nghiệm

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0.$$

Bài 4. Cho hai phương trình: $x^2 - mx + 2 = 0$ và $x^2 - 4x + m = 0$. Tìm m để hai phương trình có ít nhất một nghiệm chung.

Bài 5. Cho hai phương trình: $x^2 + x + a = 0$ và $x^2 + ax + 1 = 0$.

- Với giá trị nào của a thì hai phương trình có nghiệm chung?
- Với giá trị nào của a thì hai phương trình tương đương?

Bài số 3

HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

A – KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1 Hệ thức Vi-ét

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

Áp dụng

- ☑ Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$.
- ☑ Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$.
- ☑ Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $a \cdot c < 0$.

2 Tìm hai số khi biết tổng và tích

Nếu hai số có tổng là A và tích là P thì hai số đó là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

B – CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1. Tìm giá trị của biểu thức nghiệm đối xứng

Cần nhớ các hằng đẳng thức sau

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$

- $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2.$

- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2).$

❖ **Ví dụ 1.** Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích hai nghiệm của các phương trình (nếu có).

a) $4x^2 + 7x + 2 = 0$;

b) $-3x^2 + x + 1 = 0$;

c) $3x^2 - x + 1 = 0$;

d) $x^2 + (m - 2)x - m = 0$.

🔗 **Ví dụ 2.** Cho phương trình $\sqrt{3}x^2 - 15x + 3 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 .

b) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

❖ **Ví dụ 3 (Bài 62/tr 64 - Sgk).** Cho phương trình: $7x^2 + 2(m - 1)x - m^2 = 0$.

a) Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm?

b) Trong trường hợp phương trình có nghiệm, dùng hệ thức Viét, hãy tính tổng bình phương hai nghiệm của phương trình đó theo m .

❖ **Ví dụ 4.** Cho phương trình: $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$4(x_1 + x_2) = 7x_1 \cdot x_2.$$

❖ **Ví dụ 5.** Xác định m để phương trình: $mx^2 - 2(m+1)x + m+1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

❖ **Ví dụ 6.** Cho phương trình: $x^2 - 2kx - (k - 1)(k - 3) = 0$. Chứng minh rằng với mọi k , phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 + x_1.x_2 - 2(x_1 + x_2) + 3 = 0.$$

❖❖❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG ❖❖❖

Bài 1. Không giải phương trình, hãy tìm tổng và tích hai nghiệm của mỗi phương trình sau (nếu có)

a) $17x^2 - 2x - 3 = 0$;

b) $8x^2 + 6x + 1 = 0$;

c) $9x^2 - 2x + 5 = 0$.

Bài 2. Cho phương trình: $\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 .

b) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Bài 3. Cho phương trình: $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{6}x - 8 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 .

b) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

Bài 4. Tìm m để phương trình $x^2 + 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó

a) Tính theo m giá trị các biểu thức $E = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ và $F = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$.

b) Tìm m sao cho $x_1^4 + x_2^4 = 32$.

c) Tìm m sao cho $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 47$.

Bài 5. Cho phương trình $x^2 - (2m + 3)x + m = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Dạng 2. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng là A và tích là P thì hai số đó là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

❖❖ **Ví dụ 7.** Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau

a) $u + v = 32, uv = 231$. b) $u + v = -8, uv = -105$. c) $u + v = 2, uv = 9$.

❖❖ **Ví dụ 8.** Tìm các cạnh của hình chữ nhật, biết chu vi bằng 30 m và diện tích bằng 54 m².

❖❖ **Ví dụ 9.** Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$.

❖❖ **Ví dụ 10.** Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ xy = -4 \end{cases}$.

❖❖ **Ví dụ 11.** Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ xy = 27 \end{cases}$.

❖❖❖❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG ❖❖❖❖

Bài 1. Tìm hai cạnh của hình chữ nhật biết chu vi bằng 24m và diện tích bằng 27 m².

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x + y = 20 \\ x \cdot y = 99 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} x + y = -21 \\ x \cdot y = 54 \end{cases}.$$

Bài 3. Giải hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x + y = 4 \\ x \cdot y = -\frac{9}{4} \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 3(x + y) = 2 \\ x \cdot y = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Bài 4. Giải hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x + y = 4 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x + y + xy = 3 \end{cases}.$$

Bài 5. Tìm m để phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó hãy lập phương trình có nghiệm như sau:

$$a) -2x_1 \text{ và } -2x_2.$$

$$b) 3x_1 \text{ và } 3x_2.$$

$$c) -x_1^2 \text{ và } -x_2^2.$$

$$d) \frac{1}{x_1} \text{ và } \frac{1}{x_2}.$$

$$e) x_1 + x_2 \text{ và } -x_1 \cdot x_2.$$

Bài 6. Xét tổng $a + b + c$ hoặc $a - b + c$ rồi nhằm các nghiệm của các phương trình

$$a) 15x^2 - 17x + 2 = 0;$$

$$b) 30x^2 - 4x - 34 = 0;$$

$$c) 2\sqrt{3}x^2 + 2(5 - \sqrt{3})x - 10 = 0.$$

Bài 7.

a) Chứng tỏ rằng 5 là một nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x - 35 = 0$. Hãy tìm nghiệm kia.

b) Chứng tỏ rằng -4 là một nghiệm của phương trình $x^2 + 8x + 16 = 0$. Hãy tìm nghiệm kia.

Bài 8.

a) Tìm giá trị của m để phương trình $x^2 + 3mx - 108 = 0$ có một nghiệm là 6. Tìm nghiệm kia.

b) Tìm giá trị của m để phương trình $mx^2 - 3(m + 1)x + m^2 - 13m - 4 = 0$ có một nghiệm là -2. Tìm nghiệm kia.

Dạng 3. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào m

Ta thực hiện theo các bước sau

☑ Bước 1. Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}.$$

☑ Bước 2. Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta được

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1 \cdot x_2 = g(m) \end{cases}. \quad (1)$$

☑ Bước 3. Khử m từ hệ (1) ta được hệ thức cần tìm.

❖❖ **Ví dụ 12.** Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 2 = 0$.

- Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 .
- Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m .

❖❖ **Ví dụ 13.** Cho phương trình $x^2 - 2mx - m^2 = 0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m .

❖❖ **Ví dụ 14.** Cho phương trình $(m - 1)x^2 - 2(m - 4)x + m - 5 = 0$.

- Xác định m để phương trình có hai nghiệm.
- Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào m .

❖❖❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG ❖❖❖

Bài 1. Cho phương trình $mx^2 - 2mx + 3 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m .

Bài 2. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x - m + 1 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m .

📁 Dạng 4. Xét dấu các nghiệm

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow a \cdot c < 0$.

b) Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

c) Phương trình có hai nghiệm dương $0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

d) Phương trình có hai nghiệm âm $x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

❖❖ **Ví dụ 15.** Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x - m + 1 = 0$. Xác định m để phương trình:

- Có hai nghiệm trái dấu.
- Có hai nghiệm dương phân biệt.

❖❖ **Ví dụ 16.** Cho phương trình: $(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 1 = 0$. Xác định m để phương trình:

- Có một nghiệm.
- Có hai nghiệm cùng dấu.

❖❖ **Ví dụ 17.** Cho phương trình: $mx^2 - 2(3 - m)x + m - 4 = 0$. Xác định m để phương trình:

- Có hai nghiệm đối nhau.
- Có đúng một nghiệm âm.

❖ **Ví dụ 18.** Tìm giá trị của m để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt trái dấu:

a) $x^2 - 3mx - 3m - 1 = 0$;

b) $x^2 - 7x + m^2 - 8 = 0$.

❖❖❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG ❖❖❖

Bài 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m+7)x + m^2 - 4 = 0$. Xác định m để phương trình

a) Có hai nghiệm trái dấu.

b) Có hai nghiệm cùng dấu.

Bài 2. Cho phương trình $(m-1)x^2 + 2(m+2)x + m-1 = 0$. Xác định m để phương trình

a) Có hai nghiệm âm phân biệt.

b) Có hai nghiệm dương phân biệt.

Bài 3. Cho phương trình $(m-1)x^2 + 2mx + m+1 = 0$. Xác định m để phương trình

a) Có hai nghiệm âm phân biệt.

b) Có hai nghiệm đối nhau.

Bài số



PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A – KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1 Phương trình trùng phương

Phương trình trùng phương có dạng

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad (a \neq 0).$$

☑ Đặt $x^2 = t, (t \geq 0)$.

☑ Phương trình đã cho trở thành $at^2 + bt + c = 0$;

☑ Giải tìm t , từ đó tìm x .

2 Phương trình chứa ẩn ở mẫu

Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta làm như sau:

☑ Đặt điều kiện cho ẩn để các mẫu thức khác 0;

☑ Quy đồng mẫu, khử mẫu;

☑ Giải phương trình vừa tìm được;

☑ So điều kiện để nhận hoặc loại.

B – CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

 **Dạng 1.** Phương trình trùng phương, phương trình chứa ẩn ở mẫu và phương trình tích

❖❖ **Ví dụ 1.** Giải các phương trình:

a) $2x^4 + 7x^2 + 5 = 0;$

b) $3x^4 - 5x^2 - 28 = 0;$

c) $4x^4 - 25x^2 + 6 = 0.$

❖❖ **Ví dụ 2 (Bài 56 trang 63 SGK).** Giải các phương trình sau

a) $3x^4 - 12x^2 + 9 = 0;$

b) $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0;$

c) $x^4 + 5x^2 + 1 = 0.$

❖❖ **Ví dụ 3 (Bài 57.c, 57.d/tr 63 - Sgk).** Giải các phương trình sau

a) $\frac{x}{x-2} = \frac{10-2x}{x^2-2x};$

b) $\frac{x+0,5}{3x+1} = \frac{7x+2}{9x^2-1}.$

❖❖ **Ví dụ 4 (Bài 35.b, 35.c/tr 56 - Sgk).** Giải các phương trình sau

a) $\frac{x+2}{x-5} + 3 = \frac{6}{2-x}.$

b) $\frac{4}{x+1} = \frac{-x^2-x+2}{(x+1)(x+2)}.$

❖❖ **Ví dụ 5.** Giải các phương trình sau

a) $(3x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 0.$

b) $(3x^2 - 7x - 10) [2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3] = 0.$

❖❖ **Ví dụ 6.** Giải các phương trình sau

a) $(2x^2 + x - 4)^2 - (2x - 1)^2 = 0.$

b) $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2.$

❖❖❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG ❖❖❖

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0;$

b) $5x^4 - 9x^2 = 0;$

c) $3x^4 - x^2 - 234 = 0;$

d) $11x^4 + 3x - 2 = 3x - 15x^2 - 6.$

Bài 2. Giải phương trình $\frac{x^2 - 3x + 5}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}.$

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $\frac{x}{1-x} = \frac{2x+3}{(x-1)(x+2)};$

b) $\frac{2x+22}{(x-1)(x+2)} = \frac{x-4}{x+2};$

c) $\frac{3x^2 - 15x}{x^2 - 9} = x - \frac{x}{x-3}.$

Bài 4. Giải các phương trình sau

a) $(x-1)^3 + 3x - 2 = x^3 - x^2 + x - 1;$

b) $(x+2)^2 + (x-2)^2 = 3x + 2;$

c) $(x^2 + x)^2 + (x+1)^2 = 2(x+1)^3 - 4x + 4.$

Bài 5. Đưa về phương trình tích rồi giải phương trình:

a) $(2x+3)^2 - 10x - 15 = 0;$

b) $x^2(x+1) - 3x = 3x^2 - 2x - 2;$

c) $(x^2 - x - 1)^2 = (2x+1)^2.$

Dạng 2. Phương trình trị tuyệt đối và phương trình căn

a) Phương trình trị tuyệt đối:

$$\textcircled{✓} |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}.$$

$$\textcircled{✓} |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases}.$$

b) Phương trình căn thức:

$$\textcircled{✓} \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \geq 0.$$

$$\textcircled{✓} \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}.$$

❖ **Ví dụ 7.** Giải phương trình $|x^2 - 2x - 2| = |x^2 + 2x|$.

❖ **Ví dụ 8.** Giải phương trình $|x^2 + x| = -x^2 + x + 2$.

❖ **Ví dụ 9.** Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{x + 1};$

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = \sqrt{2x^2 - 7x + 9}.$

❖ **Ví dụ 10.** Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + x - 3} = x - 1$.

Dạng 3. Phương pháp đặt ẩn phụ và cách khác

❖ **Ví dụ 11.** Giải phương trình $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4$.

❖ **Ví dụ 12.** Giải phương trình $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24 = 0$.

❖ **Ví dụ 13.** Giải phương trình $3x^2 - 14|x| - 5 = 0$. (1)

❖ **Ví dụ 14.** Giải phương trình $3x^2 + 2x - 34 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = 0$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải phương trình $(2x - 1)(x - 1)(x - 3)(2x + 3) = -9$.

Bài 2. Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ:

a) $(x^2 - 2x)^2 + 4x^2 - 8x + 3 = 0;$

b) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x + 1) = 6;$

c) $\left(x^2 - \frac{6}{x^2}\right)^2 + 6\left(x^2 - \frac{6}{x^2}\right) = -5;$

d) $x^2 - 2x + 3\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 6.$

Bài 3. Giải phương trình

a) $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4;$

b) $\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{5}{2}.$

Bài 4. Giải các phương trình

a) $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16;$

b) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 8.$



GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A – KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Các bước giải toán bằng cách lập phương trình:

- Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn;
- Lập phương trình:
 - ☑ Biểu diễn các đại lượng chưa biết qua ẩn và các đại lượng đã biết.
 - ☑ Dựa vào mối quan hệ giữa các đại lượng đã biết để lập phương trình.
- Giải phương trình;
- Kết luận.

B – CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1. Bài toán chuyển động

❖ **Ví dụ 1.** Một đoàn xe vận tải dự định điều số xe cùng loại để vận chuyển 40 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành, đoàn xe được giao thêm 14 tấn nữa. Do đó phải điều thêm 2 xe cùng loại và mỗi xe ban đầu phải chở thêm nửa tấn nữa. Tính số xe phải điều theo dự định.

❖ **Ví dụ 2 (Bài 65/tr65-SGK).** Một xe lửa đi từ Hà Nội vào Bình Sơn (Quảng Ngãi). Sau 1 giờ, một xe lửa khác đi từ Bình Sơn ra Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe lửa thứ nhất là 5 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga chính giữa quãng đường. Tìm vận tốc mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường Hà Nội - Bình Sơn dài 900 km.

❖ **Ví dụ 3 (Bài 52/tr60 - SGK).** Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30 km. Một canô đi từ bến A đến bến B, nghỉ 40 phút ở bến B rồi quay lại bến A. Kể từ lúc khởi hành đến khi về lại bến A hết tất cả 6 giờ. Hãy tìm vận tốc của canô trong nước yên lặng, biết rằng vận tốc của nước chảy là 3 km/h.

❖ **Ví dụ 4 (Bài 43/tr58-GGK).** Một xuồng du lịch đi từ thành phố Cà Mau đến Đất Mũi theo một đường sông dài 120 km. Trên đường đi, xuồng nghỉ lại 1 giờ tại thị trấn Năm Căn. Khi về, xuồng đi theo đường khác dài hơn đường lúc đi là 5 km với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đi là 5 km/h. Tính vận tốc của xuồng lúc đi, biết rằng thời gian về bằng thời gian đi.

❖ **Ví dụ 5.** Hai bến sông A và B cách nhau 40 km. Cùng một lúc với canô đi xuôi từ A có một chiếc bè trôi từ A với vận tốc 3 km/h. Sau khi đi đến B canô trở về bến A ngay và gặp bè khi đã trôi được 8 km. Tính vận tốc riêng của canô. Biết vận tốc của canô không thay đổi.

❖ **Ví dụ 6.** Một người đi xe máy trên quãng đường AB dài 120 km với vận tốc định trước. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc đó, người lái xe tăng vận tốc thêm 10 km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường, biết người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

📁 Dạng 2. Bài toán về số và chữ số

❖ **Ví dụ 7 (Bài 41/tr58-SGK).** Trong lúc học nhóm, bạn Hùng yêu cầu bạn Minh và bạn Lan mỗi người chọn một số sao cho hai số này hơn kém nhau là 5 và tích của chúng phải bằng 150. Vậy hai bạn Minh và Lan phải chọn những số nào?

❖ **Ví dụ 8.** Tìm hai số biết hiệu của chúng bằng 8 và tổng các bình phương của chúng bằng 424.

❖ **Ví dụ 9 (Bài 64/tr64-SGK).** Bài toán yêu cầu tìm tích của một số dương với một số lớn hơn nó 2 đơn vị nhưng bạn Quân nhầm đầu bài lại tính tích của một số dương với một số bé hơn nó 2 đơn vị. Kết quả của bạn Quân là 120. Hỏi nếu làm đúng đầu bài đã cho thì kết quả phải là bao nhiêu?

❖ **Ví dụ 10 (Bài 44/tr59-SGK).** Đồ em tìm được một số mà một nửa của nó trừ đi một nửa đơn vị rồi nhân với một nửa của nó bằng một nửa đơn vị.

❖ **Ví dụ 11 (Bài 45/tr59-SGK).** Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

❖ **Ví dụ 12.** Một lớp học được nhà trường phát phần thưởng ba lần và chia đều cho các em học sinh. Lần thứ nhất chia hết 66 quyển vở nhưng vắng 5 em, lần thứ hai chia hết 125 quyển vở nhưng vắng 2 em, còn lần thứ ba thì không vắng em nào và chia hết 216 quyển vở. Biết một học sinh có mặt cả ba lần đã nhận được số vở (trong lần ba) bằng tổng số vở đã nhận trong hai lần đầu. Tính số học sinh.

📁 Dạng 3. Bài toán vòi nước

❖**Ví dụ 13.** Có hai vòi nước. Người ta mở vòi thứ nhất cho vòi chảy đầy một bể nước cạn rồi khóa lại. Sau đó mở vòi thứ hai cho nước chảy ra hết với thời gian lâu hơn so với thời gian vòi một chảy là 4 giờ. Nếu cùng mở cả hai vòi thì bể đầy sau 19 giờ 15 phút. Hỏi vòi thứ nhất chảy trong bao lâu mới đầy bể khi vòi thứ hai khóa lại.

Dạng 4. Bài toán có nội dung hình học

❖**Ví dụ 14 (Bài 46/tr59-SGK).** Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 240 m^2 . Nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4 m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính kích thước của mảnh đất.

❖**Ví dụ 15.** Tính chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật. Biết hình chữ nhật có chu vi bằng 340 m và diện tích bằng 7200 m^2 .

❖**Ví dụ 16 (Bài 66/tr64-SGK).** Cho tam giác ABC có $BC = 16 \text{ cm}$, đường cao $AH = 12 \text{ cm}$. Một hình chữ nhật $MNPQ$ có đỉnh M thuộc cạnh AB , đỉnh N thuộc cạnh AC còn hai đỉnh P và Q thuộc cạnh BC . Xác định vị trí của điểm M trên cạnh AB sao cho diện tích của hình chữ nhật đó bằng 36 cm^2 .

❖**Ví dụ 17.** Một thửa ruộng hình chữ nhật, một người đi theo chiều dài hết 1 phút 5 giây, đi theo chiều rộng hết 39 giây. Người ta làm một lối đi xung quanh thửa ruộng rộng 1,5 m thì diện tích còn lại là 5529 m^2 . Tính kích thước của thửa đất.

Dạng 5. Bài toán về phần trăm - năng suất

❖**Ví dụ 1 (Bài 63/tr64-SGK).** Sau hai năm, số dân của một thành phố tăng từ 2000000 người lên 2020050 người. Hỏi trung bình mỗi năm dân số của thành phố đó tăng bao nhiêu phần trăm?

❖**Ví dụ 2 (Bài 49/tr59-SGK).** Hai đội thợ quét sơn một ngôi nhà. Nếu họ cùng làm thì trong 4 ngày xong công việc. Nếu họ làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong công việc?

❖**Ví dụ 3.** Muốn làm xong công việc cần 480 công thợ. Người ta có thể thuê một trong hai nhóm thợ A hoặc B . Biết nhóm A ít hơn nhóm B là 4 người và nếu giao cho nhóm B thì công việc hoàn thành sớm hơn 10 ngày so với nhóm A . Hỏi số người của mỗi nhóm.

❖**Ví dụ 4 (Bài 42/tr58-SGK).** Bác Thời vay 2000000 đồng để làm kinh tế gia đình trong thời hạn 1 năm. Lẽ ra cuối năm bác phải trả cả vốn lẫn lãi. Song bác đã được ngân hàng cho kéo dài thời hạn thêm một năm nữa, số lãi của năm đầu được gộp vào với vốn để tính lãi năm sau và lãi suất vẫn như cũ. Hết hai năm phải trả tất cả là 2420000 đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm?

❖ **Ví dụ 5.** Một tổ sản xuất theo kế hoạch phải làm được 720 sản phẩm. Nếu tăng năng suất lên 10 sản phẩm mỗi ngày thì so với giảm năng suất đi 20 sản phẩm mỗi ngày thời gian hoàn thành ngắn hơn 4 ngày. Tính năng suất dự định

❖❖❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG ❖❖❖

Bài 1. Tìm hai số biết hiệu của chúng bằng 5 và tổng các bình phương của chúng bằng 125.

Bài 2. Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 25 và hiệu các bình phương của chúng cũng bằng 25.

Bài 3. Lúc 7 giờ sáng một ô tô khởi hành từ A để đến B cách A 120 km. Sau khi đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường ô tô dừng lại 20 phút để nghỉ rồi đi chậm hơn trước 8 km/h. Ô tô đến B lúc 10 giờ. Hỏi ô tô nghỉ lúc mấy giờ?

Bài 4. Một người đi từ A đến B rồi lại trở về A . Lúc về đi được 30 km người đó nghỉ 20 phút. Sau khi nghỉ xong, người đó đi với vận tốc nhanh hơn trước 6 km/h. Tính vận tốc lúc đi. Biết quãng đường AB dài 90 km và thời gian đi bằng thời gian về kể cả nghỉ.

Bài 5. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 33 km với vận tốc xác định. Khi từ B về A người đó đi bằng đường khác dài hơn đường trước 29 km nhưng với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi 3 km/h. Tính vận tốc lúc đi. Biết thời gian về nhiều hơn thời gian đi là 1 giờ 30 phút.

Bài 6. Một ô tô đi từ A đến B rồi quay về A ngay. Sau khi ô tô đi được 15 km thì một người đi xe đạp từ B về A . Tính vận tốc mỗi xe. Biết:

- ☑ Quãng đường AB dài 24 km.
- ☑ Vận tốc ô tô nhanh hơn xe đạp 37 km/h.
- ☑ Ô tô quay trở về A sớm hơn xe đạp đến B là 44 phút.

Bài 7. Một ô tô dự định đi quãng đường AB dài 60 km. Trong thời gian nhất định, trên nửa quãng đường AB do đường xấu nên ô tô chỉ đi với vận tốc ít hơn dự định 6 km/h. Để đến B đúng dự định, ô tô phải đi quãng đường còn lại với vận tốc nhanh hơn vận tốc dự định 10 km/h. Tính thời gian dự định đi hết quãng đường.

Bài 8. Một tổ lao động hoàn thành đào đắp 8000 m³ đất trong một thời gian nhất định. Nếu mỗi ngày vượt mức 50 m³ thì tổ lao động hoàn thành kế hoạch sớm 8 ngày. Tính thời gian dự định.

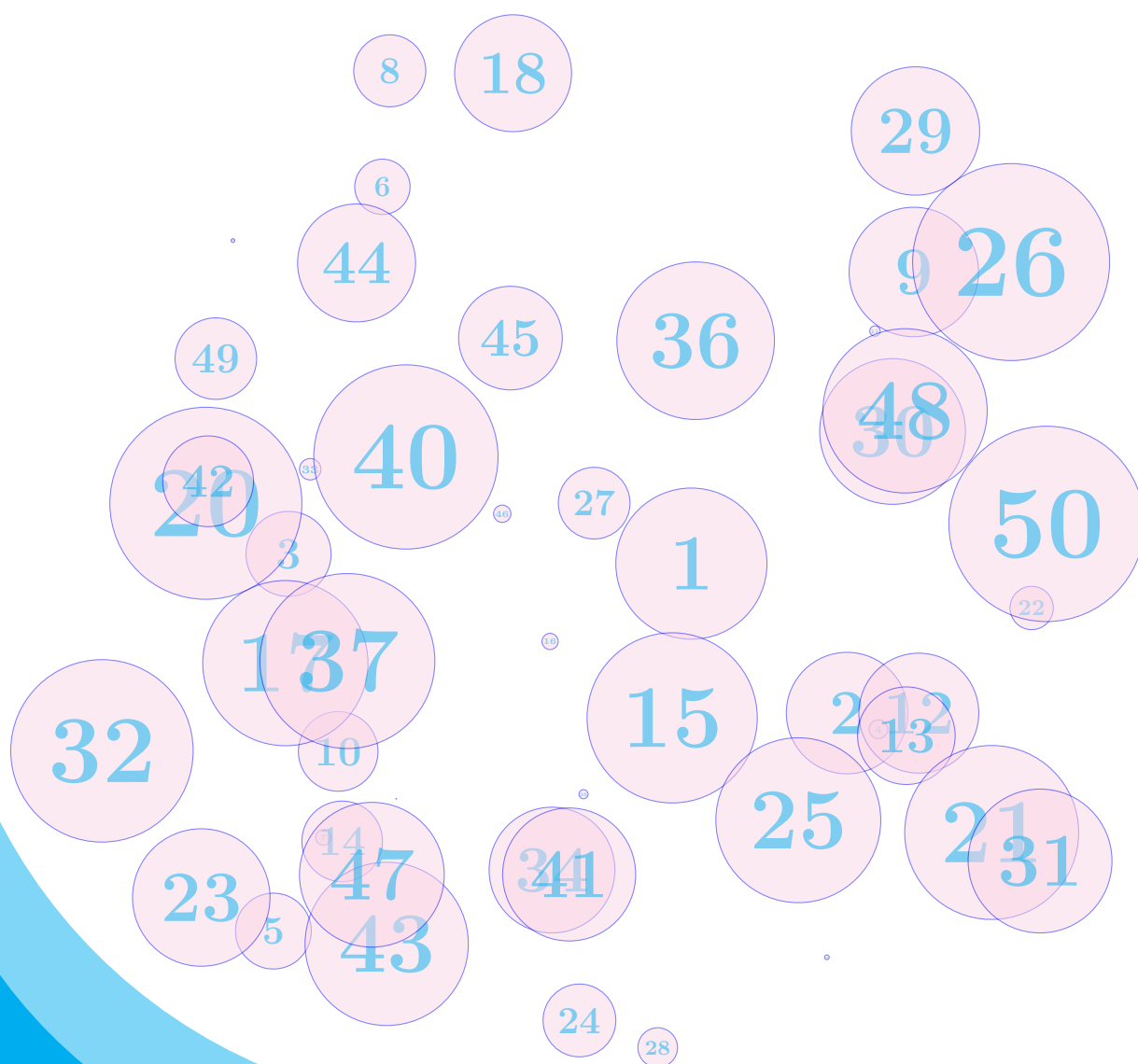
Bài 9. Một nông trường phải trồng 75 ha rừng với năng suất đã định từ trước. Nhưng trong thực tế, khi bắt tay vào trồng rừng thì mỗi tuần nông trường trồng thêm được 5 ha so với kế hoạch nên đã trồng được 80 ha. Do vậy, họ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 1 tuần. Tính năng suất dự định của nông trường.

Bài 10. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280 m. Người ta làm một lối đi xung quanh khu vườn rộng 2 m. Diện tích còn lại là 4256. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

Bài 11. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn nếu cả hai vòi cùng chảy một lúc thì sau 4 giờ mới đầy bể. Nếu từng vòi chảy một thì thời gian vòi I chảy nhanh hơn vòi II là 6 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể.

Bài 12. Hai vòi nước cùng chảy vào bể trong 6 giờ 40 phút thì đầy. Nếu chảy riêng từng vòi một thì mỗi vòi phải chảy trong bao lâu mới đầy bể. Biết rằng vòi thứ hai chảy lâu hơn vòi thứ nhất 3 giờ.

PHẦN HÌNH HỌC



Chương 1

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài số 1

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Trong các đoạn thẳng sau: AB , AC , BC , AH , HB , HC ; hãy tính các đoạn thẳng còn lại nếu biết:

- a) $AB = 6$ cm; $AC = 8$ cm b) $AB = 15$ cm; $HB = 9$ cm c) $AC = 44$ cm; $BC = 55$ cm
 d) $AC = 40$ cm; $AH = 24$ cm e) $AH = 9,6$ cm; $HC = 12,8$ cm f) $HB = 12,5$ cm; $HC = 7,2$ cm

Bài 2. Cho tam giác ABC có góc A bằng 90° và đường cao AH (H thuộc BC). Kẻ HE và HF lần lượt vuông góc với AB và AC tại E ; F .

- a) Chứng minh $AEHF$ là hình chữ nhật và tính EF ; CF .
 b) Tính diện tích tứ giác $AEHF$.
 c) Tính diện tích tứ giác $BEFC$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB = 15$ cm; $AC = 20$ cm và $BC = 25$ cm. Từ B , vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC kéo dài tại H . Đường thẳng qua H và song song với BC cắt AB tại K .

- a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .
 b) Tính độ dài các đoạn thẳng HC ; HB ; HK .
 c) Tính diện tích tứ giác $BHCK$ bằng 2 cách.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $AC = b$. Kẻ AH vuông góc với BC tại H . Gọi M , N lần lượt là trung điểm các cạnh AB , AC và I là giao điểm AH với MN .

- a) Chứng minh MN là đường trung trực của AH .
 b) Tính theo a và b độ dài các đoạn thẳng AH , HM và AI .
 c) Tính theo a và b diện tích tam giác HMN .

Bài 5. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và góc $A = 90^\circ$, M là trung điểm cạnh BC . Gọi H là hình chiếu của A trên BC . Cho biết $AM = 13$ cm và $AH = 12$ cm.

- a) Tính MH , AB và AC .
 b) Đường thẳng qua B và vuông góc với AM cắt AC tại F . Tính AF và BF .

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Kẻ đường cao AH và phân giác AD của tam giác ABC (H , D thuộc cạnh BC).

- a) Tính độ dài đoạn thẳng DB và DC .
 b) Tính độ dài đoạn thẳng HD và AD .

c) Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC . Gọi S là diện tích tứ giác $BIKC$. Tính S .

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH .

a) Chứng minh $\frac{HB}{HC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

b) Gọi I và J lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB . Chứng minh $AI \cdot AC = AH^2$.

c) Chứng minh tam giác AJI và tam giác ACB đồng dạng. Từ đó chứng minh $AJI = ACB$.



TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1. Tính các tỉ số lượng giác (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

a) $\sin 35^\circ$.

b) $\cos 39^\circ 13'$.

c) $\tan 80^\circ$.

d) $\cot 45^\circ$.

e) $\cos 52^\circ 18'$.

f) $\cot 10^\circ 17'$.

g) $\sin 42^\circ 28'$.

Bài 2. Tính các tỉ số lượng giác (làm tròn đến chữ số hàng phần nghìn):

a) $\sin 23^\circ$.

b) $\tan 30^\circ$.

c) $\cos 15^\circ 25'$.

d) $\cot 65^\circ$.

e) $\cos 75^\circ$.

Bài 3. Tìm số đo các góc sau, biết tỉ số lượng giác của chúng là:

a) $\sin A = 0,6$.

b) $\sin B = 0,5446$.

c) $\tan C = 2$.

d) $\cot D = 0,33333$.

e) $\cos \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Kẻ đường cao AH của tam giác ABC ($H \in BC$). Tính các tỉ số lượng giác của góc ABC và số đo của nó nếu biết:

a) $AB = 10$ cm; $BC = 26$ cm.

b) $AB = 12$ cm; $BC = 16$ cm.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 21$ cm; $AC = 72$ cm và AH là đường cao.

a) Tính các tỉ số lượng giác của góc BAH và số đo của nó.

b) Suy ra các tỉ số lượng giác của góc CAH .

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông có hai cạnh góc vuông là $AB = 16$ mm; $AC = 3$ cm.

a) Tính các tỉ số lượng giác của góc nhọn và số đo các góc đó.

b) Tính $\sin^2 B + \cos^2 C$.

Bài 7. Tính giá trị biểu thức (Không sử dụng máy tính bỏ túi):

a) $A = \frac{\sin 34^\circ}{\cos 56^\circ}$.

b) $B = \cos 19^\circ - \sin 71^\circ$.

c) $C = \tan 53^\circ - \cot 37^\circ$.

d) $D = \sin 15^\circ + \sin 20^\circ - \cos 70^\circ - \cos 75^\circ$.

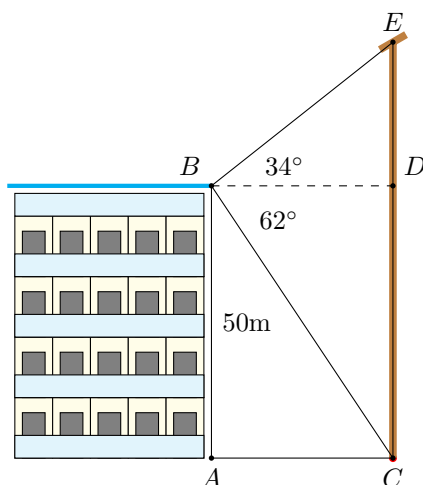
e) $E = \frac{\tan 31^\circ \cdot \tan 59^\circ}{\cot 16^\circ \cdot \cot 74^\circ}$.

f) $F = \cos^2 15^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 55^\circ + \cos^2 75^\circ$.

Bài số 3

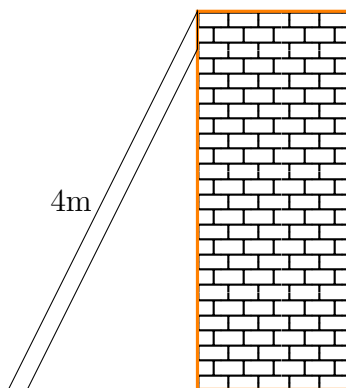
ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Bài 1. Từ nóc một tòa cao ốc 50m người ta nhìn thấy chân và đỉnh một ăng-ten với các góc hạ và nâng lần lượt là 62° và 34° . Tính chiều cao của cột ăng-ten.



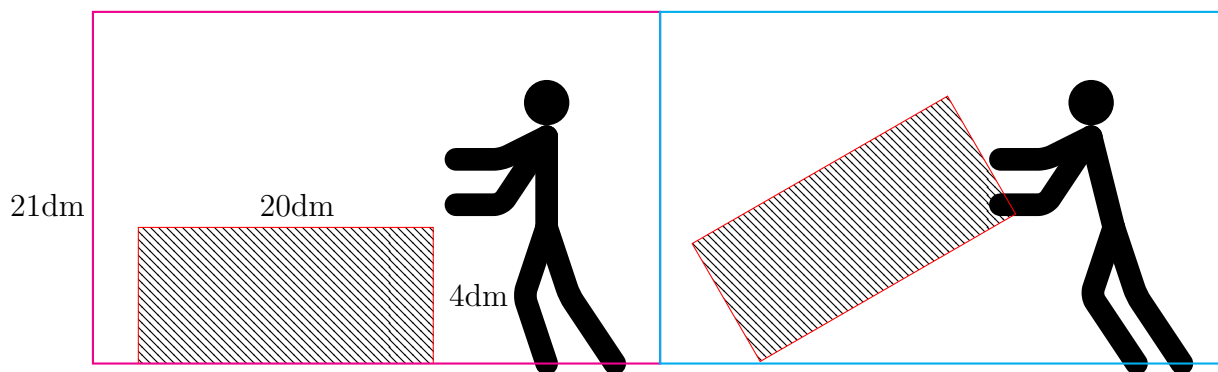
🔗 67,93 m

Bài 2. Một chiếc thang dài 4 m. Cần đặt chân thang cách chân tường bao nhiêu mét để nó tạo với mặt đất một góc “an toàn” là 65° (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



🔗 Cần đặt cách tường khoảng 1,69 m

Bài 3. Trong lúc bạn Nam dựng tủ cho đứng thẳng, tủ có bị vướng vào trần nhà cao 21 dm không



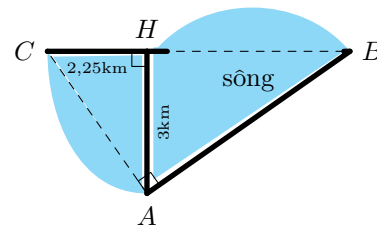
🔗 Nam đẩy tủ đứng thẳng không bị vướng vào trần nhà.

Bài 4. Hai trụ điện cùng chiều cao được dựng thẳng đứng hai bên lề đối diện một đại lộ 80 m ($AC = 80$ m). Từ một điểm M trên mặt đường giữa hai trụ người ta nhìn thấy đỉnh hai trụ điện với các góc nâng lần lượt là 60° và 30° . Tính chiều cao của trụ điện và khoảng cách từ điểm M đến gốc mỗi trụ điện.

🔗 $MA = 20\text{m}; MC = 60\text{m}; AB = 20\sqrt{3}\text{m}.$

Bài 5.

Hằng ngày bạn Trúc phải đi học từ nhà (vị trí C) rồi đi theo đường đê (vị trí H), sau đó lên theo đường mòn ra đến đầu đường (vị trí B) theo hình vẽ sau:



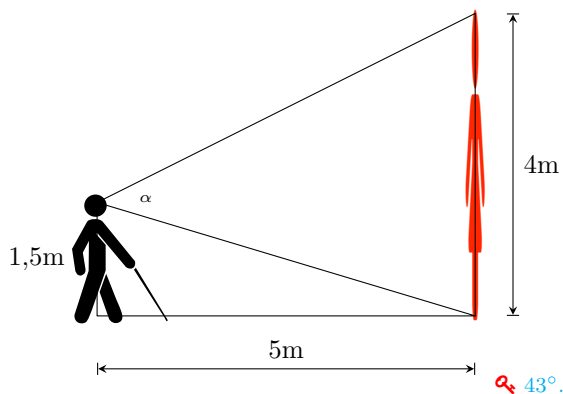
a) Hãy tính quãng đường từ nhà đến trường mà bạn Trúc đã đi.

b) Người ta đã xây dựng cây cầu HB để giúp đỡ cho các bạn đi học dễ dàng hơn. Vậy bạn Trúc đã tiết kiệm bao nhiêu thời gian biết rằng bạn luôn đi với vận tốc 4 km/h? (Làm tròn đến phút).

Đ: a) 10,25km. b) 1 giờ.

Bài 6.

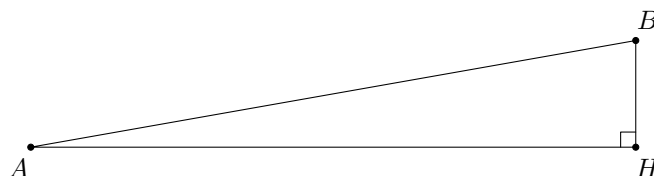
Một bức tượng mỹ thuật có chiều cao 4m. Một người đang đứng cách chân tượng 5m và mắt người ấy cách mặt đất 1,5m (hình bên). Hỏi người đó nhìn toàn bộ bức tượng dưới góc bao nhiêu? (“góc nhìn”, làm tròn đến độ).



Đ: 43°.

Bài 7.

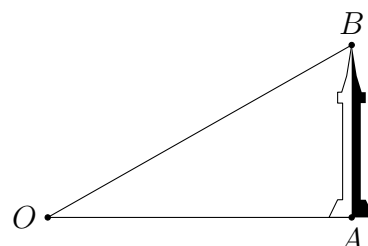
Một người đi xe đạp lên một dốc có độ nghiêng 10° so với phương nằm ngang với vận tốc trung bình 8 km/h, biết đỉnh dốc cao khoảng 34,8m so với phương nằm ngang. Hỏi người đó phải mất bao lâu để tới đỉnh?



Đ: 1, 503 phút

Bài 8.

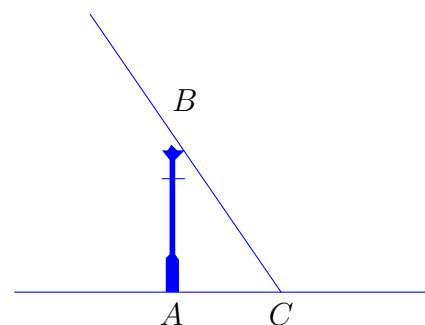
Tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 34° và bóng tháp dài 86 m. Tính chiều cao của ngọn tháp?



Đ: 58 m.

Bài 9.

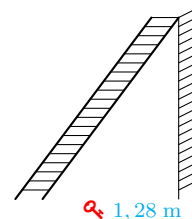
Một cột đèn cao 7 m có bóng trên mặt đất dài 4 m. Hãy tính góc mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất?



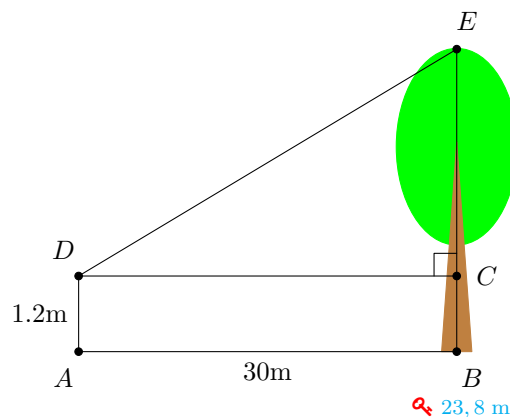
Đ: 60°

Bài 10.

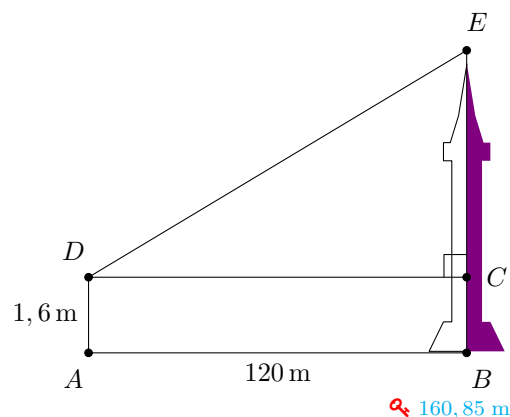
Một chiếc thang dài 3 m. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng cách bằng bao nhiêu để nó tạo với mặt đất một góc “an toàn” là 65° (tức là đảm bảo thang không bị đổ khi sử dụng)?

**Bài 11.**

Bạn An đứng ở mặt đất dùng giác kế nhìn thấy ngọn cây dưới góc 37° so với phương ngang song song với mặt đất. Khoảng cách từ bạn An đến cái cây là 30 m. Tính chiều cao của cây đó? Biết giác kế cao 1,2 m.

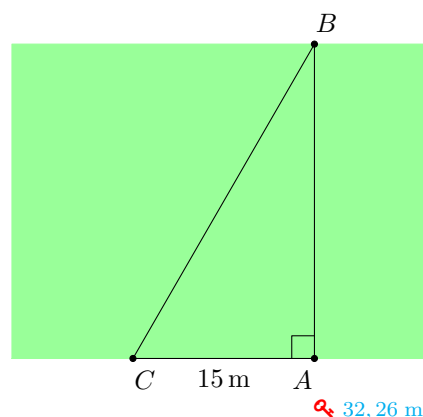
**Bài 12.**

Bạn An đứng ở mặt đất cách một tòa tháp một khoảng 120 m dùng giác kế nhìn thấy đỉnh tháp ở góc 53° so với đường nằm ngang song song với mặt đất. Tính chiều cao của tháp? Biết giác kế có chiều cao 1,6 m.

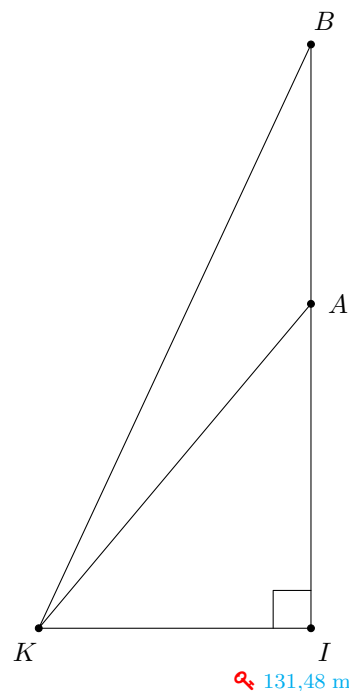
**Bài 13.**

Để đo khoảng cách giữa hai bờ của một con sông, bạn An đã làm cách như sau:

- Trước tiên bạn An sẽ đứng ở vị trí điểm A nhắm một vị trí điểm B bên kia bờ sông và dựng cây cột làm mốc.
- Sau đó An di chuyển 15 m vuông góc với hướng nhắm lúc nãy đến vị trí điểm C rồi dùng giác kế nhắm vị trí điểm A và vị trí điểm B thì đó được góc 60° . Hãy tính khoảng cách giữa hai bờ sông?

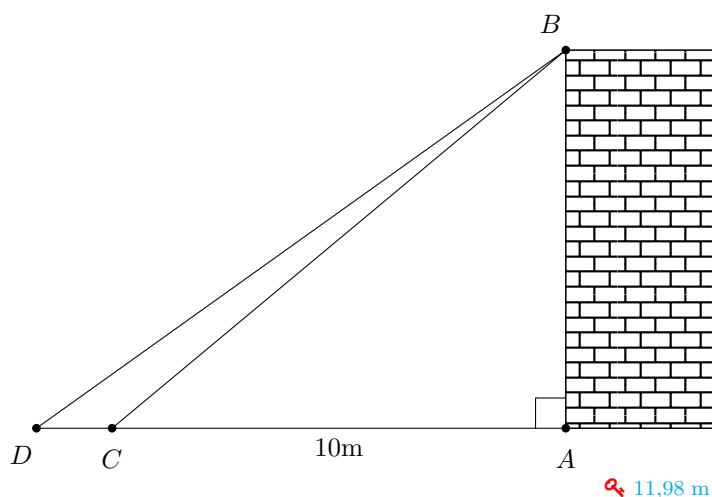
**Bài 14.**

Từ một vị trí trên bờ, bạn An có thể tính được khoảng cách giữa 2 chiếc thuyền ở vị trí A và B bằng cách như sau. Trước tiên bạn chọn một vị trí trên bờ (điểm I) sao cho I, A, B thẳng hàng. Sau đó bạn di chuyển theo hướng vuông góc với IA đến vị trí điểm K cách điểm I một khoảng 380 m rồi dùng giác kế nhắm đến vị trí điểm A , điểm B thì đo được góc 15° và nhắm vị trí điểm A , điểm I thì được góc 50° . Tính khoảng cách 2 chiếc thuyền?



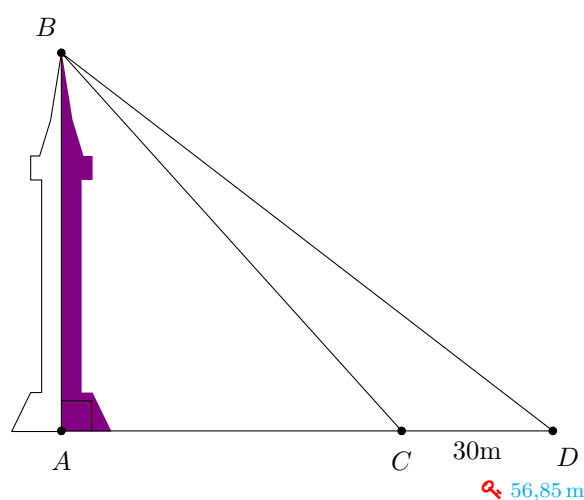
Bài 15.

Một người trinh sát đứng cách tòa nhà một khoảng 10 m. Góc “nâng” từ chỗ anh ta đứng đến nóc nhà là 40° . Nếu anh ta dịch chuyển ra xa sao cho góc “nâng” là 35° thì lúc đó anh ta cách tòa nhà bao nhiêu mét?



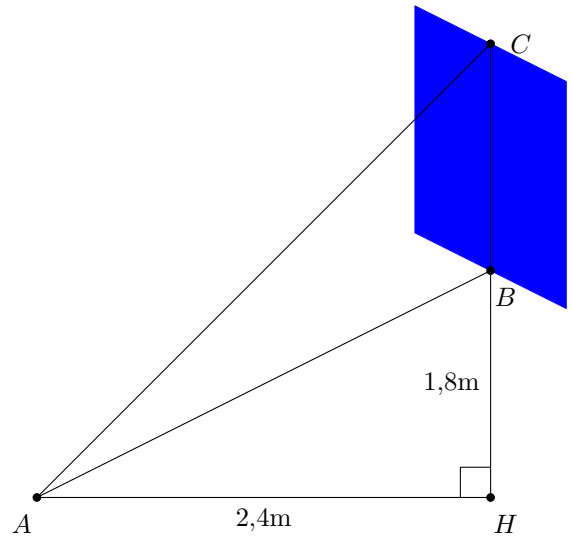
Bài 16.

Từ đỉnh một ngọn tháp, bạn An dùng kính viễn vọng thấy được hai vị trí C và D cách nhau 30 m với góc đo lần lượt là 35° và 48° theo phương ngang. Hỏi ngọn tháp cao bao nhiêu?



Bài 17.

Màn ảnh rộng hình chữ nhật được đặt ở độ cao 1,8 m so với tầm mắt (tính từ mép màn hình). Để nhìn rõ, bạn An ngồi cách màn hình 2,4 m. Hỏi chiều cao màn hình? Biết góc nhìn của bạn An là 16° .

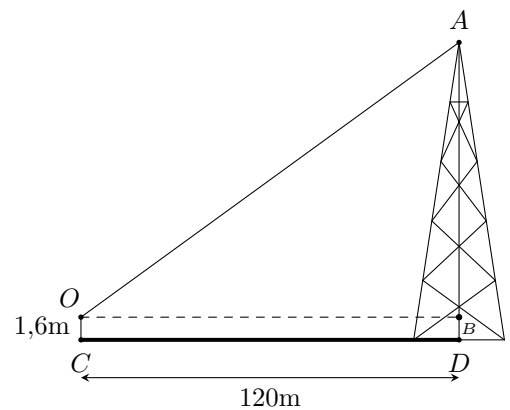


$$3,17 - 1,8 = 2,07\text{m}$$

Bài 18.

Một người đứng ở vị trí điểm C trên mặt đất cách tháp ăng-ten một khoảng $CD = 120$ m (như hình vẽ). Biết rằng người ấy nhìn thấy đỉnh tháp với $\widehat{AOB} = 36^\circ$ so với đường nằm ngang; khoảng cách từ mắt đến mặt đất $OC = 1,6$ m.

- Tính chiều cao AD của tháp (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).
- Giả sử người ấy đứng trên mặt đất cách chân tháp ăng-ten một khoảng bằng chiều cao của tháp ăng-ten ($CD = AD$) và không thay đổi khoảng cách từ mắt đến mặt đất thì người ấy nhìn thấy đỉnh tháp với góc $\widehat{AOB}$ bằng bao nhiêu? (sử dụng kết quả đã làm tròn ở câu trên và làm tròn kết quả câu này đến độ).



$$\text{a) } 8,9 \text{ m, b) } 44^\circ$$

Chương 2

ĐƯỜNG TRÒN

Bài số 1

SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN

Bài số 2

ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Bài số 3

LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

Bài 1. Cho tam giác ABC và M là trung điểm cạnh BC . Vẽ MD vuông góc với AB tại D và ME vuông góc với AC tại E . Trên các tia BD và CE lần lượt lấy các điểm I ; K sao cho D là trung điểm BI và E là trung điểm CK . Chứng minh rằng bốn điểm B, I, K, C cùng thuộc một đường tròn.

Bài 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Chứng minh:

- Bốn điểm A, E, H, F cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm K .
- Bốn điểm B, E, F, C cùng thuộc một đường tròn có tâm là I .
- $\widehat{KEI} = 90^\circ$.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Chứng minh:

- Bốn điểm B, D, H, F cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm I .
- Bốn điểm A, F, D, C cùng thuộc một đường tròn có tâm là K .
- IK đi qua trung điểm của FD .

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại D, E .

- Chứng minh $CD \perp AB$ và BE là đường cao của $\triangle ABC$.
- Gọi K là giao điểm của BE và CD . Chứng minh $AK \perp BC$ tại M .
- Chứng minh bốn điểm A, E, M, B cùng thuộc một đường tròn.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Đường tròn tâm I đường kính AC cắt BC tại H . Trên đoạn HC lấy D sao cho $HD = HB$. Tia AD cắt đường tròn tâm I tại E .

- Chứng minh AH là đường cao của $\triangle ABC$.
- Chứng minh $DA \cdot DE = DC \cdot DH$.
- Gọi K là trung điểm AB . Tính số đo góc IHK .

d) Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AKH$.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Gọi K là trung điểm AH . Đường tròn tâm K bán kính AK cắt đường tròn (O) đường kính BC tại I và cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E, F . AI cắt BC tại M . Chứng minh:

a) $AEHF$ là hình chữ nhật và $EF^2 = AI \cdot AM$.

b) $MK \perp OA$.

Bài 7. Cho đường tròn (O) bán kính R và hai điểm A, B thuộc (O) sao cho $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Tính độ dài dây cung AB và khoảng cách từ tâm đến dây cung theo R .

Bài 8. Cho $(O; R)$, dây cung AB sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Tính độ dài dây cung AB và khoảng cách từ tâm đến dây cung theo R .

Bài 9. Cho $(O; R)$, dây cung BC sao cho $\widehat{BOC} = 120^\circ$. Tính độ dài dây cung BC và khoảng cách từ tâm đến dây cung theo R .

Bài 10. Cho đường tròn tâm O , bán kính $R = 10$ cm và dây cung $AB = 16$ cm.

a) Tính khoảng cách từ tâm đến dây AB .

b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 2$ cm. Kẻ dây cung CD đi qua I và vuông góc với AB . Chứng minh $CD = AB$.

Bài 11. Cho (O) trong đó hai dây AB và CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I . Biết $IC = 2$ cm và $ID = 14$ cm. Tính khoảng cách từ tâm đến mỗi dây.

Bài 12. Cho (O) có bán kính $R = 25$ cm. Hai dây AB và CD song song với nhau và có độ dài theo thứ tự là 40 cm, 48 cm. Tính khoảng cách giữa hai dây đó.

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN

Bài số



Bài 1. Cho $(O; R)$ có M nằm ngoài đường tròn sao cho $OM = 2R$. Vẽ tiếp tuyến MA , cát tuyến MBC có B nằm giữa M và C . K là trung điểm BC .

a) Chứng minh OK là trung trực của BC .

b) Chứng minh bốn điểm M, A, K, O cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm I và tính bán kính của đường tròn đó theo R .

Bài 2. Cho đường tròn O có điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B, C là các tiếp điểm) và cát tuyến ADE (D nằm giữa A và E).

a) Cho $OA = 3R$. Tính các cạnh còn lại của tam giác OAB theo R .

b) Gọi M là trung điểm DE . Chứng minh O, A, B, C, M cùng thuộc một đường tròn.

Bài 3. Cho (O) có bán kính $OA = R$. Vẽ dây CD là trung trực của OA cắt OA tại H .

a) Chứng minh $OCAD$ là hình thoi.

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại C , tiếp tuyến này cắt đường OA tại I . Tính tích $OH \cdot OI$ và độ dài đoạn CI theo R .

c) Tính số đo $\widehat{ODI}$.

Bài 4. Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Qua C thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến d của đường tròn. Gọi E, F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến d . Gọi H là hình chiếu của C trên AB . Chứng minh:

- $CE = CF$.
- AC là phân giác góc $\widehat{BAE}$.
- $CH^2 = AE \cdot BF$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm M thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M với (O) cắt tiếp tuyến Ax tại A và tiếp tuyến By tại B của (O) lần lượt tại D, E . Chứng minh bốn điểm O, A, D, M cùng thuộc một đường tròn.

Bài 6. Cho đường tròn (O) có bán kính $OA = R$. Dây cung BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA .

- Tứ giác $OCAB$ là hình gì? Vì sao?
- Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B , tiếp tuyến này cắt đường thẳng AO tại E . Chứng minh CE là tiếp tuyến của đường tròn (O) và tính CE theo R .

Bài 7. Cho đường tròn ($O; R$) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O) với $OA = 2R$, đường tròn tâm I có đường kính OA cắt (O) tại B, C .

- Chứng minh AB, AC là các tiếp tuyến của (O).
- Chứng minh tứ giác $OBIC$ là hình thoi.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Đường tròn tâm I đường kính AC cắt BC tại H . Trên đoạn HC lấy D sao cho $HD = HB$. Tia AD cắt (I) tại E .

- Chứng minh $AH \perp BC$.
- Chứng minh $DA \cdot DE = DC \cdot DH$.
- Gọi K là trung điểm AB . Chứng minh KH là tiếp tuyến của (I).

Bài 9. Cho đường tròn ($O; R$) đường kính AB . Trên tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) lấy điểm M sao cho $AM = 2R$; BM cắt (O) tại C . Vẽ OD vuông góc với BC (D thuộc BC).

- Chứng minh D là trung điểm BC .
- Gọi E là trung điểm MA . Chứng minh EC là tiếp tuyến của (O).

Bài 10. Cho đường tròn ($O; R$) đường kính AB . Trên đường thẳng vuông góc với AB tại O lấy điểm K sao cho K nằm ngoài (O). Gọi C và D lần lượt là giao điểm của AK và BK với (O) (C, D khác A, B).

- Chứng minh $AD \perp BK$ và $BC \perp AK$.
- Gọi H là giao điểm của AD và BC . Chứng minh K, H, O thẳng hàng và bốn điểm K, C, H, D thuộc cùng một đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn qua bốn điểm trên.
- Chứng minh OD là tiếp tuyến của (I) và ID là tiếp tuyến của (O).

Bài 11. Cho đường tròn ($O; R$) và một điểm S nằm ngoài đường tròn. Kẻ SA, SB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (A, B thuộc (O)). Gọi H là giao điểm của AB và OS .

- Chứng minh OS là đường trung trực của AB .

b) Chứng minh rằng tích $OH \cdot OS$ không đổi với mọi vị trí của S ở ngoài (O) .

Bài 12. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung AB với $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Hai tiếp tuyến tại A, B của (O) cắt nhau tại C .

- Chứng minh OC vuông góc với AB và bốn điểm A, C, B, O cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh tam giác ABC đều và tính diện tích tam giác ABC theo R .
- Lấy M là một điểm thuộc cung nhỏ AB của đường tròn. Vẽ tiếp tuyến tại M cắt AC và BC tại D và E . Chứng minh $AD + BE = DE$.
- Chứng minh $\widehat{DCE} = \widehat{DOE}$.

Bài 13. Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB . Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa đường tròn). Qua một điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A, B); kẻ tiếp tuyến với (O) cắt Ax, By lần lượt tại C và D . Chứng minh rằng

- $\widehat{COD} = 90^\circ$.
- $CD = AC + BD$.
- Tích $AC \cdot BD$ không đổi khi M thay đổi trên nửa đường tròn.

Bài 14. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi M là điểm tùy ý thuộc (O) , tiếp tuyến tại M của (O) cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) theo thứ tự ở C và D .

- Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD .
- Tìm vị trí của M để tứ giác $ABDC$ có chu vi nhỏ nhất.
- Tìm vị trí của C và D để tứ giác $ABDC$ có chu vi bằng 14 cm, biết $AB = 4$ cm.

Chương 3

GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Bài số

1

GÓC Ở TÂM - GÓC NỘI TIẾP - GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Các loại góc

- ☑ Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

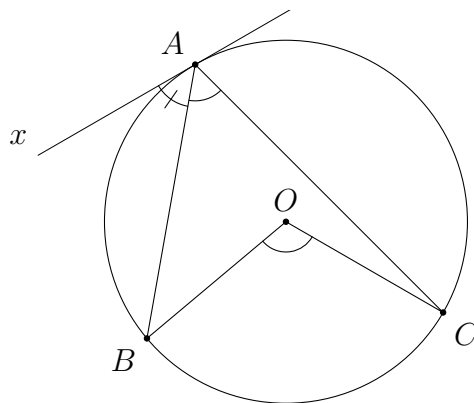
$$\widehat{BOC} = \text{sđ}\widehat{BC}$$

- ☑ Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn.

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BC}$$

- ☑ Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung là góc gồm một tiếp tuyến và một dây cung của đường tròn.

$$\widehat{xAB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AB}$$



⚠ Đối với góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung: **dây căng cung nào thì góc chắn cung đó.**

2 Một số tính chất

- ☑ Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- ☑ Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B – BÀI TẬP

Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm K nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến KE với (O) ; Tia OK cắt đường tròn tại F . Cho biết $OK = R\sqrt{2}$.

- a) Tính số đo cung nhỏ EF .
- b) Đường thẳng qua E vuông góc với OK và cắt (O) tại điểm thứ hai là M . Chứng minh KM là tiếp tuyến của (O) .
- c) Tứ giác $OEKM$ là hình gì? Tính diện tích của hình đó theo R .

Bài 2. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB, AC tùy ý (O nằm trong góc $\widehat{BAC}$). Kẻ đường kính AD .

- Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ và $BD \perp AB$.
- Lấy E thuộc (O) sao cho E là điểm chính giữa cung nhỏ BD . Chứng minh CE là đường phân giác của $\widehat{BCD}$.
- Kẻ đường thẳng qua D song song với AB cắt (O) tại F . Chứng minh B, O, F thẳng hàng và tính $\widehat{BCF}$.
- Chứng minh $\widehat{ACB}$ phụ với $\widehat{ADF}$.

Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = R$.

- Tính số đo $\widehat{BOC}$ và suy ra số đo cung nhỏ BC , số đo cung lớn BC .
- Kẻ tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại A và đường kính BOD . Chứng minh $OA \parallel CD$.
- Gọi E là giao điểm của AD và (O) . Chứng minh $\triangle AEC \sim \triangle ACD$, từ đó suy ra $\widehat{ACE} = \widehat{OAE}$.

Bài 4. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B . Vẽ cát tuyến CAD vuông góc với AB . Tia CB cắt (O') tại E , tia BD cắt (O) tại F . Chứng minh rằng:

- a) $\widehat{CAF} = \widehat{DAE}$; b) AB là tia phân giác của $\widehat{EAF}$;
c) $CA \cdot CD = CB \cdot CE$; d) $CD^2 = CB \cdot CE + BD \cdot DF$.

Bài 5 (VD). Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm S ở ngoài (O) . Kẻ SA là tiếp tuyến của đường tròn (O) (A thuộc (O)) và AK là đường kính. SK cắt (O) tại điểm thứ hai là I .

- Chứng minh $KI \cdot KS = 4R^2$.
- Đường thẳng qua K song song với OS cắt (O) tại B . Chứng minh SB là tiếp tuyến của (O) .
- Chứng minh rằng $\widehat{BIK} = \widehat{BSO}$ và $\widehat{BIK} - \widehat{BKI} = \widehat{ISB}$.
- BI cắt SO tại M . Chứng minh $MS^2 = MI \cdot MB$.

Bài 6 (VD). Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm S nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến SA với (O) (A là tiếp điểm) và cát tuyến SCD ($SD > SC$).

- Chứng minh $SA^2 = SC \cdot SD$.
- Đường thẳng qua A và vuông góc với OS tại I cắt (O) tại B . Chứng minh $SC \cdot SD = SI \cdot SO$ và SB là tiếp tuyến của (O) .
- Gọi F là trung điểm của CD ; OF cắt AB tại T . Chứng minh bốn điểm T ; F ; I ; S cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $TC^2 = TF \cdot TO$ và TC là tiếp tuyến của (O) .

Bài 7. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với A, B là hai tiếp điểm. Qua A vẽ đường thẳng song song với MB cắt (O) tại C . Nối C với M cắt đường tròn (O) tại D . Nối A với D cắt MB tại E . Chứng minh rằng:

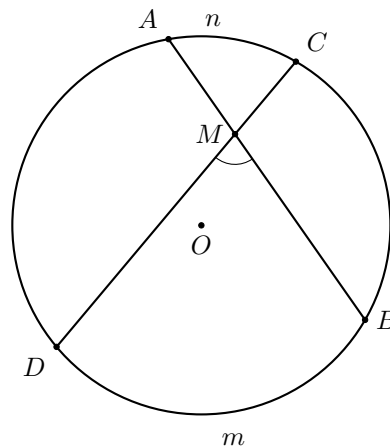
- a) $\triangle ABE \sim \triangle BDE$; b) $\triangle MEA \sim \triangle DEM$; c) E là trung điểm của MB .

Bài số 2 GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG - BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

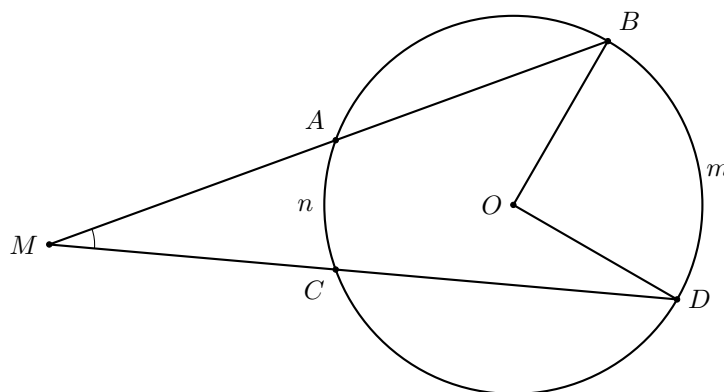
1 Góc có đỉnh bên trong đường tròn

- ☑ $\widehat{BMD}$ có đỉnh bên **trong** đường tròn.
- ☑ $\widehat{BMD}$ chắn hai cung $\widehat{AnC}$ và $\widehat{DmB}$.
- ☑ $\widehat{BMD} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{BmD} + \text{sđ}\widehat{AnC})$.



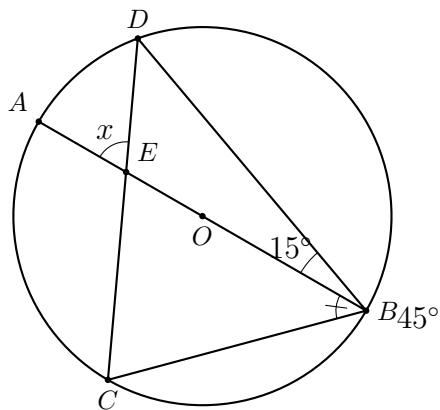
2 Góc có đỉnh bên ngoài đường tròn

- ☑ $\widehat{BMD}$ có đỉnh bên **ngoài** đường tròn.
- ☑ $\widehat{BMD}$ chắn hai cung $\widehat{AnC}$ và $\widehat{BmD}$.
- ☑ $\widehat{BMD} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{BmD} - \text{sđ}\widehat{AnC})$.

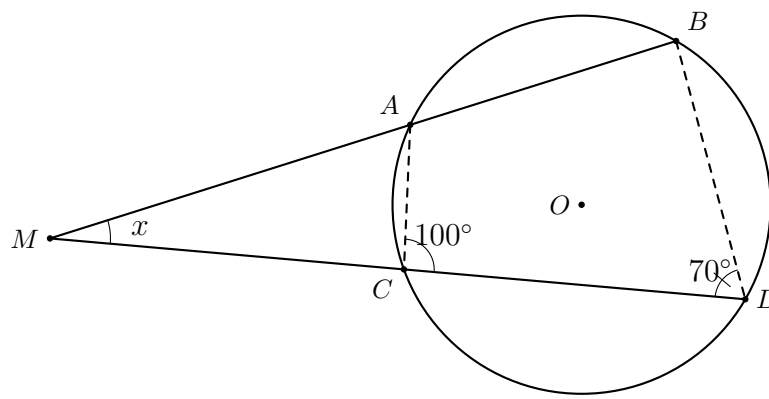


B – BÀI TẬP

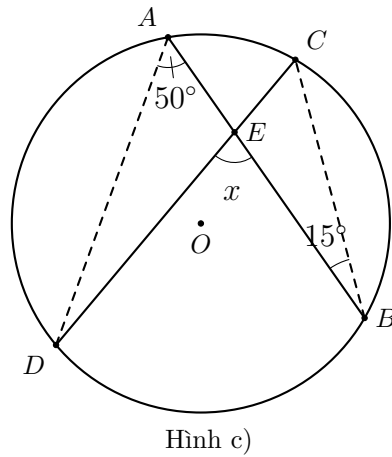
Bài 1. Tính số đo x trong các hình vẽ sau:



Hình a)



Hình b)



Hình c)

Bài 2. Cho (O) và dây AB , C là điểm chính giữa cung nhỏ AB . Vẽ dây CD cắt dây AB tại E , lấy F thuộc cung nhỏ BD . Gọi K là giao điểm của DC và BF , I là giao điểm của DA và CF . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{DIF} = \widehat{DKF}$;

b) $\widehat{AED} = \widehat{DFC}$.

Bài 3. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Qua điểm M thuộc cung nhỏ AD , kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt CD tại I . Gọi E là giao điểm của BM và CD .

a) Chứng minh rằng $IM = IE$.

b) Gọi F là giao điểm của AM và CD . Chứng minh rằng $\widehat{AFC} = \widehat{ABM}$.

Bài số 3

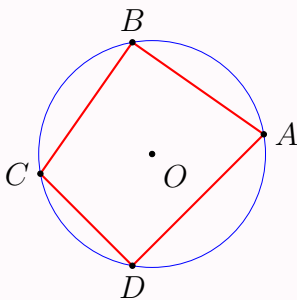
TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

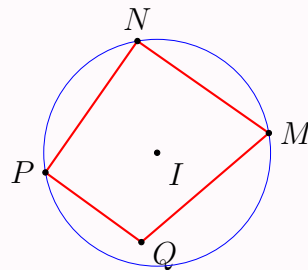
1 Định nghĩa

Tứ giác nội tiếp là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn.

❖ Ví dụ 1.



$ABCD$ là tứ giác nội tiếp

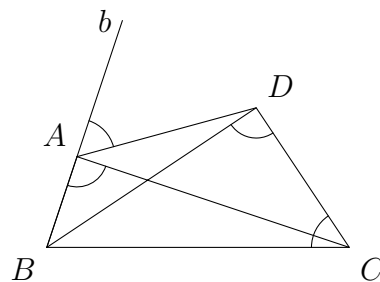


$MNPQ$ không là tứ giác nội tiếp

2 Tính chất

Nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp thì

- Hai góc đối bù nhau: $\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = 180^\circ$
- Góc ngoài bằng góc đối trong: $\widehat{DAb} = \widehat{BCD}$
- Hai góc cùng nhìn một cạnh bằng nhau: $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$



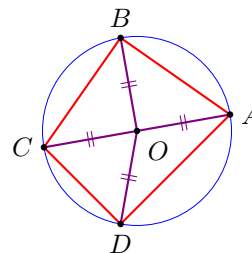
3 Bốn phương pháp chứng minh tứ giác nội tiếp

1. Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm.

Xét tứ giác $ABCD$ có

$$OA = OB = OC = OD$$

Suy ra $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) .



❖ Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{D} = \widehat{B} = 90^\circ$. Chứng minh $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

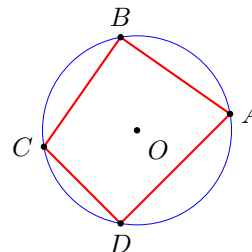
 Lời giải.

2. Tứ giác có hai góc đối bù nhau (tổng = 180°).

Xét tứ giác $ABCD$ có

$$\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$$

Suy ra $ABCD$ nội tiếp đường tròn.



❖ Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{D} = \widehat{B} = 90^\circ$. Chứng minh $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

 Lời giải.

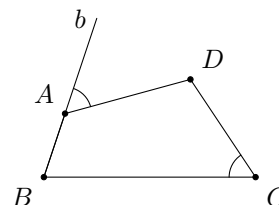


3. Tứ giác có góc ngoài bằng góc đối trong.

Xét tứ giác $ABCD$ có

$$\widehat{DCB} = \widehat{DAb}$$

Suy ra $ABCD$ nội tiếp đường tròn.

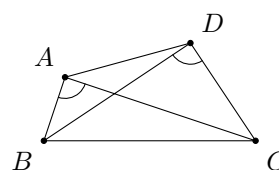


4. Tứ giác có hai góc cùng nhìn một cạnh bằng nhau.

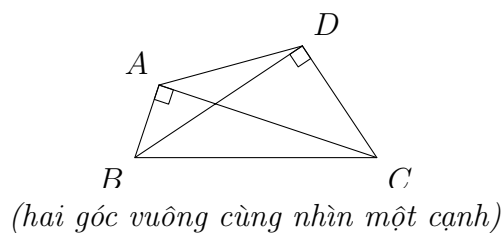
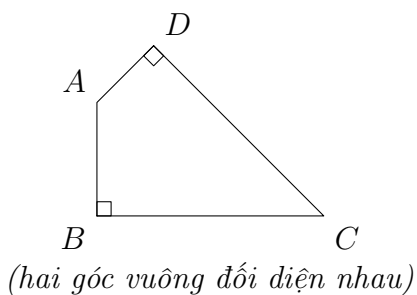
Xét tứ giác $ABCD$ có

$$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$$

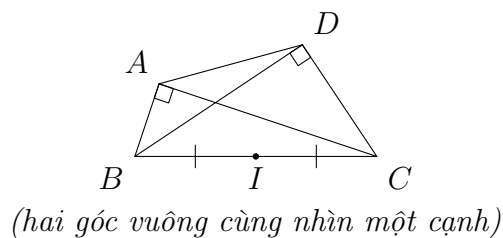
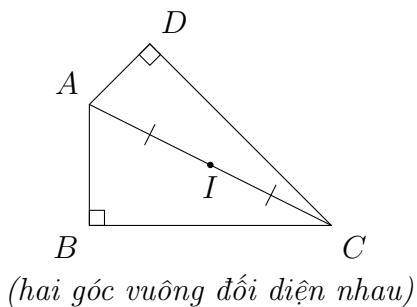
Suy ra $ABCD$ nội tiếp đường tròn.



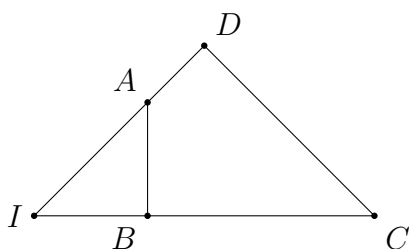
4 Hai mô hình quen thuộc



5 Cách xác định tâm của hai mô hình



6 Sử dụng phương tích để chứng minh tứ giác nội tiếp



Dựa vào tam giác đồng dạng, ta chứng minh được

- ☑ Nếu $IA \cdot ID = IB \cdot IC$ thì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.
- ☑ Nếu $ABCD$ là tứ giác nội tiếp thì $IA \cdot ID = IB \cdot IC$.

B – CÁC DẠNG BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh hình chữ nhật, hình thang cân là các tứ giác nội tiếp.

Bài 2. Cho tam giác đều ABC . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa đỉnh A , lấy điểm D sao cho $DB = DC$ và $\widehat{DCB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$.

- Chứng minh $ABDC$ là tứ giác nội tiếp.
- Xác định tâm của đường tròn đi qua bốn điểm A, B, D, C .

Bài 3. Cho tam giác ABC . Các đường phân giác trong của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại S , các đường phân giác ngoài của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại E . Chứng minh $BSCE$ là một tứ giác nội tiếp.

Bài 4. Cho tam giác cân ABC có đáy BC và $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm D sao cho $DA = DB$ và $\widehat{DAB} = 40^\circ$. Gọi E là giao điểm của AB và CD .

- Chứng minh $ACBD$ là tứ giác nội tiếp.
- Tính $\widehat{AED}$.

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao BD và CE . Chứng minh rằng:

- $BEDC$ là tứ giác nội tiếp.
- $AD \cdot AC = AE \cdot AB$.
- $OA \perp DE$.

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C cắt đường thẳng CD tại P khác C . Chứng minh $AP = AD$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường tròn đường kính AB cắt cạnh BC tại M . Trên cung nhỏ AM lấy điểm E (E khác A, M). Kéo dài BE cắt AC tại F .

- Chứng minh $\widehat{BEM} = \widehat{ACB}$, từ đó suy ra tứ giác $MEFC$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi K là giao điểm của ME và AC . Chứng minh $AK^2 = KE \cdot KM$.

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) , hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Gọi D là giao điểm của AH và BC .

- Chứng minh: Tứ giác $BFEC$ nội tiếp và $OA \perp EF$.
- Vẽ đường kính AK của (O) . Chứng minh: $AB \cdot KC = AK \cdot BD$ suy ra $AB \cdot KC + AC \cdot KB = AK \cdot BC$.
- Vẽ $CI \perp AK$ tại I . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh $MI = MD$.

Bài 9. Từ điểm A ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC . Gọi I trung điểm của AB . Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với OI tại K đường thẳng này cắt đường tròn (O) tại D (D khác B).

- Chứng minh: tứ giác $ABOC$ nội tiếp và $OK \cdot OI = OH \cdot OA$.
- Đường tròn (I) đường kính AB cắt AC tại E . Gọi F là giao điểm của BE và OA . Chứng minh: F đối xứng với O qua H .
- Chứng minh rằng: Đường tròn ngoại tiếp $\triangle AFB$ đi qua điểm K .

Bài 10. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến ME, MF và cát tuyến MAB với (O) (cát tuyến MAB không đi qua O). Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với OE cắt EF và EB lần lượt tại C và D . Gọi N là trung điểm của AB .

- Chứng minh $OFMN$ và $ONEM$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó suy ra năm điểm O, F, M, E, N cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $ME \parallel AD$.
- Chứng minh $ACNF$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $AC = CD$.

Bài 11 (HK2 Quận 8 năm 2018 - 2019). Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

- Chứng minh $BDHF$ và $BCEF$ là các tứ giác nội tiếp.
- Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCEF$. Chứng minh $FDIE$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi N là giao điểm của AD và EF . Gọi M là giao điểm của EF và BC . Chứng minh $NF \cdot ME = NE \cdot MF$.

Bài 12 (HK2 Quận 10 năm 2018 - 2019). Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , M là một điểm trên đường tròn (O) (M khác A, B và không trùng với điểm chính giữa cung AB). Các tiếp tuyến của (O) tại A và M cắt nhau tại P .

- Chứng minh $PAOM$ là tứ giác nội tiếp và $PO \perp AM$.
- Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt BM tại N . Chứng minh $\widehat{PAN} = \widehat{PON}$ và suy ra tứ giác $POBN$ là hình bình hành.
- Gọi Q, R, S lần lượt là giao điểm của PO và AN , PM và ON , PN và OM . Chứng minh ba điểm Q, R, S thẳng hàng.

Bài số

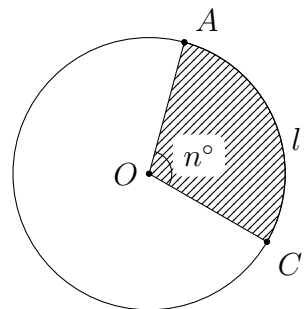


ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Chu vi hình tròn - Độ dài cung tròn - Diện tích hình tròn - Diện tích hình quạt

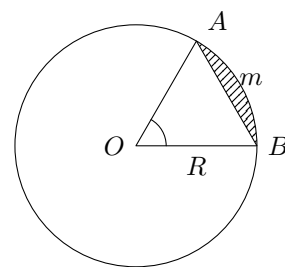
- ☑ Chu vi hình tròn: $C = 2\pi R$.
- ☑ Diện tích hình tròn: $S = \pi R^2$.
- ☑ Độ dài cung tròn: $l = \frac{\pi R n}{180}$.
- ☑ Diện tích hình quạt: $S_{\text{quạt}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$.



2 Diện tích hình viên phân - Diện tích hình vành khăn

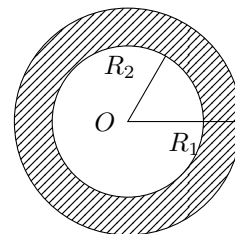
- ☑ Hình viên phân là phần được gạch chéo, có diện tích được tính bởi công thức

$$S_{\text{viên phân}} = S_{\text{quạt } AOB} - S_{\triangle AOB}.$$



- ☑ Hình vành khăn là phần gạch chéo, có diện tích được tính bởi công thức

$$S_{\text{vành khăn}} = \pi (R_1^2 - R_2^2).$$



B – CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Tính độ dài đường tròn, cung tròn

Cho đường tròn bán kính R . Khi đó:

- ☑ Độ dài C của đường tròn là

$$C = 2\pi R$$

- ☑ Độ dài l của một cung là

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

❖ Ví dụ 1.

- Tính độ dài cung 60° của một đường tròn có bán kính 2 dm.
- Tính chu vi của một vành xe đạp có đường kính 650 mm.

☞ a) $\frac{2\pi}{3}$; b) 650π .

❖ Ví dụ 2. Tính chu vi của đường tròn, biết:

- Đường tròn có bán kính bằng 6 cm.
- Đường tròn có đường kính bằng 8 cm.
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$ cm.

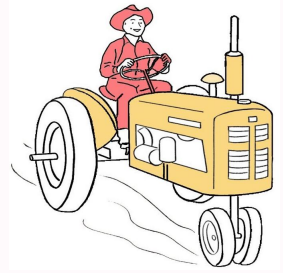
☞ a) 12π ; b) 8π ; c) 2π .

❖ Ví dụ 3. Cho đường tròn $(O; R)$, độ dài cung $\widehat{AB}$ là $\frac{\pi R}{4}$. Tính số đo $\widehat{AB}$.

☞ số đo $\widehat{AB} = 45^\circ$.

❖ Ví dụ 4 (Đề HKII Quận 12, năm 2018 - 2019).

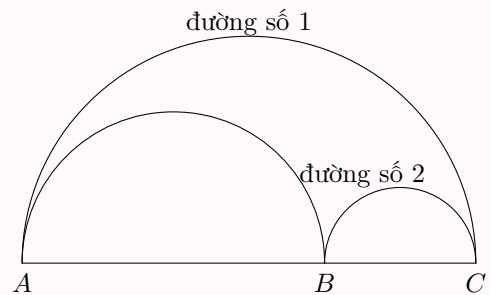
Máy kéo công nghiệp có hai bánh sau to hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, bánh xe sau có đường kính là 189 cm và bánh xe trước có đường kính là 90 cm. Hỏi khi xe chạy trên đoạn đường thẳng, bánh xe sau lăn được 10 vòng thì xe đi được bao xa và bánh xe trước lăn được mấy vòng?



📌 Quãng đường xe đi được là 890π cm và bánh xe trước lăn được 21 vòng.

❖ Ví dụ 5 (Đề HKII Quận 1, năm 2017 - 2018).

Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB vẽ các nửa đường tròn có đường kính lần lượt là AB, BC, CA (xem hình vẽ). Hai con robot chạy từ A đến C , con robot thứ nhất chạy theo đường số 1 (nửa đường tròn đường kính AC), con robot thứ hai chạy theo đường số 2 (hai nửa đường tròn



đường kính AB, BC). Biết chúng xuất phát cùng một thời điểm tại A và chạy cùng vận tốc không đổi. Cả hai con robot cùng đến C một lúc. Em hãy giải thích vì sao?

📁 Dạng 2. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn, hình viên phân, hình vành khăn

Cho đường tròn bán kính R . Khi đó:

- ☑ Diện tích hình tròn là

$$S = \pi R^2$$

- ☑ Diện tích hình quạt cung n° là

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

- ☑ Để tính diện tích hình viên phân, ta lấy diện tích hình quạt trừ đi diện tích hình tam giác.
- ☑ Để tính diện tích hình vành khăn, ta lấy diện tích hình tròn lớn trừ đi diện tích hình tròn nhỏ.

❖ Ví dụ 1. Tính diện tích hình tròn, biết:

- Bán kính bằng 8 cm.
- Đường kính bằng 12 cm.
- Chu vi đường tròn đó bằng 18π cm.

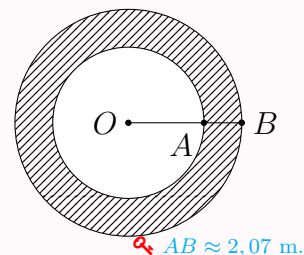
📌 a) $64\pi \text{ cm}^2$; b) $36\pi \text{ cm}^2$; c) $81\pi \text{ cm}^2$.

❖ Ví dụ 2. Cho đường tròn ($O; 6 \text{ cm}$), trên đường tròn lấy cung $\widehat{AB}$ có số đo 60° . Tính diện tích hình quạt AOB và diện tích hình viên phân cung AB .

📌 $S_{\text{quạt } AOB} = 6\pi \text{ cm}^2$ và diện tích hình viên phân cung $AB \approx 3,26 \text{ cm}^2$.

❖ Ví dụ 3.

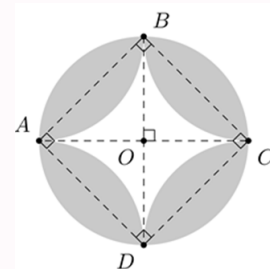
Một vườn hoa hình tròn có bán kính $OA = 5$ m. Ở ngoài vườn, người ta làm một lối đi chung quanh, diện tích lối đi bằng diện tích vườn hoa. Tính chiều rộng AB của lối đi.



❖ $AB \approx 2,07$ m.

❖ Ví dụ 4 (Đề HKII Quận Bình Thạnh năm 2017 - 2018).

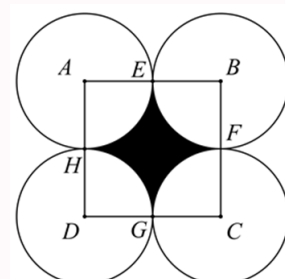
Trong hình vẽ bên, $ABCD$ là hình vuông nội tiếp đường tròn tâm O có bán kính bằng 4 cm. Hãy tính độ dài cạnh hình vuông và diện tích phần được tô đậm trong hình vẽ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



❖ $AB = 4\sqrt{2}$ cm và diện tích phần tô đậm $\approx 36,53$ cm².

❖ Ví dụ 5 (Đề HKII Quận 8 năm 2017 - 2018).

Hoa văn trên một nền gạch bông là bốn đường tròn tiếp xúc nhau như hình vẽ. Biết bán kính của các đường tròn đều bằng 0,3 mét và tâm của bốn đường tròn này lần lượt là A, B, C, D . Tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Hãy tính diện tích phần in đậm được giới hạn bởi các cung tròn EF, FG, GH và HE theo đơn vị centimet. (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



❖ Diện tích phần tô đậm $\approx 772,57$ cm².

C – BÀI TẬP TỰ LUYỆN**Bài 1.**

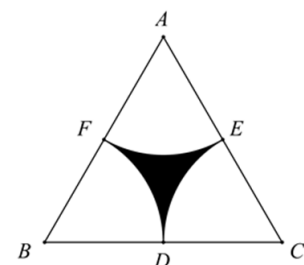
- Tính diện tích hình tròn bán kính 5 cm.
- Tính diện tích hình quạt tròn bán kính 6 cm và có số đo cung là 60° .

Bài 2. Tính diện tích hình vành khăn giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác đều có cạnh 4 cm.

Bài 3. Cho đường tròn $(O; 3$ cm) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M kẻ tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn. Biết $\widehat{AMB} = 60^\circ$, tính diện tích hình giới hạn bởi MA, MB và cung nhỏ $\widehat{AB}$.

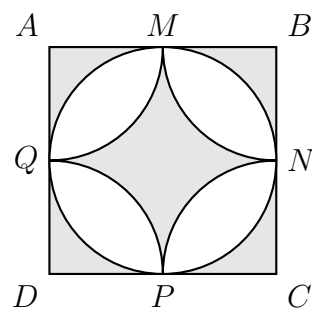
Bài 4.

Tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng 4 cm, các cung DE, EF, FD thuộc ba đường tròn có bán kính 2 cm và có tâm lần lượt là ba điểm C, A, B . Tính diện tích phần tô đen trên hình vẽ.

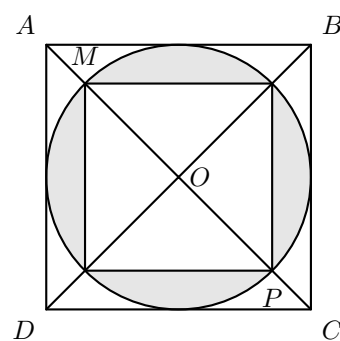


Bài 5.

Một viên gạch hình vuông cạnh a (cm) có hoa văn như hình vẽ. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AD, AB, BC, CD . Tính độ dài a biết diện tích phần tô đậm là $200(4 - \pi)$ (cm²).

**Bài 6.**

Cho đường tròn $(O; R \text{ cm})$ nội tiếp hình vuông $ABCD$ và ngoại tiếp hình vuông $MNPQ$ (như hình vẽ bên). Biết rằng $BD = 12$ cm, tính diện tích phần tô đen.



Chương 4

HÌNH TRỤ - HÌNH NÓN - HÌNH CẦU

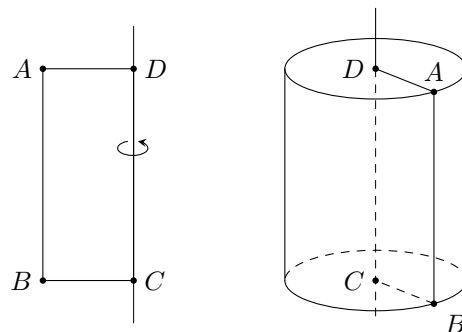
Bài số 1 DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

A – KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1 Định nghĩa

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ một vòng quanh cạnh CD cố định, ta được một hình trụ có:

- ☑ CD là trục;
- ☑ AB là một đường sinh;
- ☑ Hai đáy là hai đường tròn bằng nhau.



2 Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ

- ☑ Diện tích xung quanh

$$S_{xq} = 2\pi rh$$

- ☑ Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{hai đáy}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

- ☑ Thể tích hình trụ

$$V = Sh = \pi r^2 h$$

B – CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. Các bài tập tính toán liên quan hình trụ

Sử dụng công thức ở phần kiến thức trọng tâm.

☞ **Ví dụ 1 (Bài 10/tr 112 - Sgk).** Hãy tính:

- a) Diện tích xung quanh của một hình trụ có chu vi hình tròn đáy là 13 cm và chiều cao là 3 cm.
- b) Thể tích của hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 5 mm và chiều cao là 8 mm.

☞ **Ví dụ 2 (Bài 4/tr 110 - Sgk).** Một hình trụ có bán kính đáy là 7 cm, diện tích xung quanh bằng 352 cm^2 . Tính chiều cao của hình trụ.

❖❖**Ví dụ 3 (Bài 6/tr 111 - Sgk).** Chiều cao của một hình trụ bằng bán kính đường tròn đáy. Diện tích xung quanh của hình trụ là 314 cm^2 . Hãy tính bán kính đường tròn đáy và thể tích hình trụ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

❖❖**Ví dụ 4.** Mặt cắt qua trục của một hình trụ là một hình vuông có diện tích là 100 cm^2 . Hãy tính

- a) Diện tích xung quanh của hình trụ; b) Thể tích của hình trụ.

❖❖**Ví dụ 5.** Một hình chữ nhật chu vi 50 cm và diện tích 150 cm^2 . Cho hình chữ nhật này quay quanh một vòng tròn quanh một cạnh cố định. Tính thể tích lớn nhất của hình trụ được tạo thành.

❖❖**Ví dụ 6.** Một thùng đựng nước hình trụ có chu vi đáy là $94,2 \text{ cm}$ và thể tích bằng 18369 cm^3 . Tính bán kính đáy và chiều cao của thùng.

❖❖**Ví dụ 7.** Một hộp bánh kẹo hình trụ có chiều cao 6 cm và diện tích toàn phần bằng 3 lần diện tích xung quanh. Tính bán kính đáy của hộp này.

❖❖**Ví dụ 8.** Một hộp sữa bột có dạng hình trụ, bán kính đáy bằng $\frac{2}{5}$ chiều cao. Biết thể tích của hộp sữa là $540\pi \text{ cm}^3$. Tính diện tích vỏ hộp (kể cả nắp).

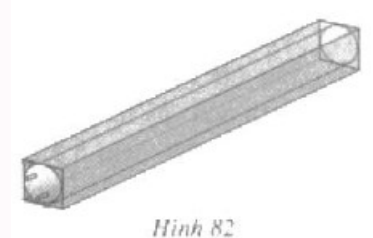
📁 Dạng 2. Các bài toán thực tế

Sử dụng các công thức phần kiến thức trọng tâm. Đôi khi, hình tạo thành là hỗn hợp của nhiều hình, khi đó ta cần tách hình hỗn hợp thành các bộ phận riêng biệt, tính thể tích của những bộ phận ấy rồi cộng hoặc trừ các số đo đó.

❖❖**Ví dụ 9.** Một cây nến hình trụ cao 20 cm và có đường kính đáy 24 mm . Hỏi cây nến này có thể thấp sáng được bao lâu nếu mỗi phút cháy hết $3,0144 \text{ cm}^3$ nến?

❖❖**Ví dụ 10 (Bài 7/tr 111 - Sgk).**

Một bóng đèn huỳnh quang dài $1,2 \text{ m}$, đường kính của đường tròn đáy là 4 cm , được đặt khít vào một ống giấy cứng dạng hình hộp (hình bên). Tính diện tích phần giấy cứng dùng để làm hộp. (Hộp hở hai đầu, không tính lề và mép dán).

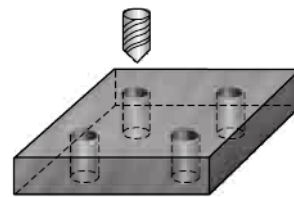


Hình 82

❖❖**Ví dụ 11 (Bài 11/tr 112 - Sgk - Bài toán Ác-si-mét).** Người ta nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thủy tinh có nước dạng hình trụ. Diện tích đáy lọ thủy tinh là $12,8 \text{ cm}^2$. Nước trong lọ dâng lên thêm $8,5 \text{ mm}$. Hỏi thể tích của tượng đá là bao nhiêu.

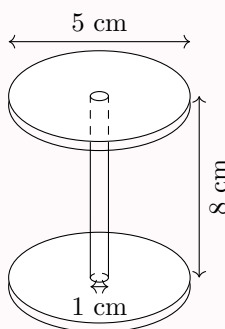
❖ Ví dụ 12 (Bài 13/tr 113 - Sgk).

Một tấm kim loại được khoan thủng bốn lỗ như hình bên (lỗ khoan dạng hình trụ), tấm kim loại dày 2 cm, đáy của nó là hình vuông có cạnh là 5 cm. Đường kính của mũi khoan là 8 mm. Hỏi thể tích còn lại của tấm kim loại là bao nhiêu?



Hình 85

❖ Ví dụ 13. Lõi của một cuộn chỉ có kích thước như hình vẽ bên. Tính thể tích của chỉ sau khi chỉ được cuộn đầy vào lõi (làm tròn đến số thập phân thứ 2).



❖ Ví dụ 14. Một viên than “tổ ong” hình trụ, có bán kính đáy là 6 cm, chiều cao 10 cm. Trên mỗi mặt đáy có 12 lỗ “tổ ong” ở vòng ngoài, có 6 lỗ “tổ ong” ở vòng trong và một lỗ ở chính tâm của đáy. Chiều cao của lỗ đúng bằng chiều cao của viên than, đường kính mỗi lỗ là 1 cm. Tính thể tích nhiên liệu của mỗi viên than.

❖ Ví dụ 15. Trong xây dựng người ta thường dùng gạch lỗ để xây tường cho nhẹ. Mỗi viên gạch dài 20 cm, rộng 10 cm và cao 5,5 cm. Dọc theo chiều dài mỗi viên, có hai lỗ hình trụ, mỗi lỗ có đường kính 3,6 cm. Tính thể tích đất để làm mỗi viên gạch (không kể đến độ co của đất khi nung).

❖❖❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG ❖❖❖

Bài 1. Một hình trụ có diện tích xung quanh là $80\pi \text{ cm}^2$ và thể tích là $160\pi \text{ cm}^3$. Tính bán kính đáy và chiều cao của hình trụ này.

Bài 2. Một hình trụ có chiều cao là 15 cm và diện tích toàn phần là $252\pi \text{ cm}^2$. Tính bán kính đáy của hình trụ.

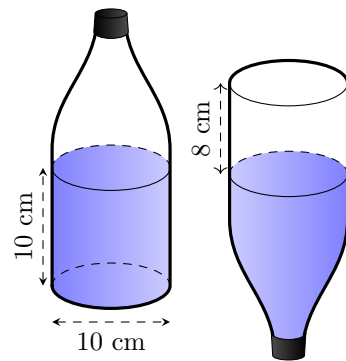
Bài 3. Một bình đựng nước hình trụ có bán kính đáy là 12 cm, chiều cao cột nước trong bình là 18 cm. Người ta cho một hòn đá vào trong bình và ngập hoàn toàn trong nước, chiều cao của cột nước bây giờ là 20 cm. Tính thể tích của hòn đá.

Bài 4. Một chậu hình trụ có chiều cao 7 cm. Biết diện tích đáy của chậu bằng diện tích xung quanh. Hỏi chậu này có thể chứa được bao nhiêu lít nước?

Bài 5. Một lọ thuốc hình trụ đặt khít trong một hộp giấy hình hộp chữ nhật có thể tích là 200 cm^3 . Tính thể tích của lọ thuốc hình trụ.

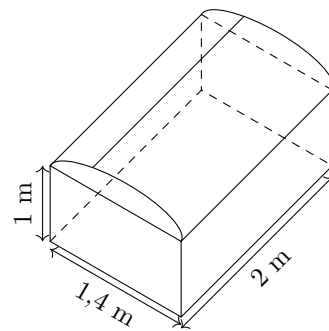
Bài 6.

Một cái chai phía dưới là hình trụ chứa lượng nước có chiều cao 10 cm. Người ta lật ngược chai lại thì phần chai không chứa nước là một hình trụ có chiều cao 8 cm như hình vẽ bên. Tính thể tích của chai, biết rằng đường kính của đáy chai bằng 10 cm.

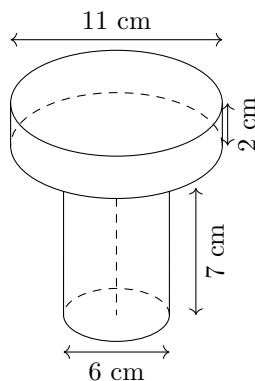


Bài 7.

Một cái hòm bi-ô-ga như hình vẽ bên. Phần trên là nửa hình trụ, phần dưới là một hình hộp chữ nhật với các kích thước cho trên hình vẽ. Tính thể tích hòm bi-ô-ga (lấy $\pi = \frac{22}{7}$).



Bài 8. Hãy tính thể tích, diện tích bề mặt một chi tiết máy theo kích thước đã cho trên hình vẽ bên.



Bài số 2

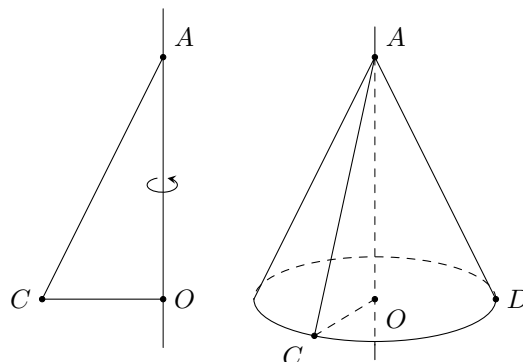
DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN VÀ HÌNH NÓN CỤT

A – KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1 Định nghĩa

Khi quay $\triangle AOC$ vuông tại O một vòng quanh cạnh OA cố định ta được một hình nón có:

- ☑ AO là đường cao;
- ☑ AC là một đường sinh;
- ☑ Đáy là đường tròn tâm O .



2 Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình nón

- ☑ Diện tích xung quanh

$$S_{xq} = \pi r l$$

- ☑ Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi r l + \pi r^2$$

- ☑ Thể tích hình nón

$$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

3 Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình nón cụt

- ☑ Diện tích xung quanh

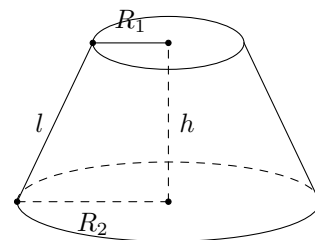
$$S_{xq} = \pi (R_1 + R_2) l$$

- ☑ Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{hai đáy}} = \pi (R_1 + R_2) l + \pi (R_1^2 + R_2^2)$$

- ☑ Thể tích hình nón cụt

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$$



B – CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. Các bài tập liên quan hình nón

Sử dụng công thức ở phần kiến thức trọng tâm.

❖ **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 15$ cm; $AC = 8$ cm. Quay tam giác này một vòng quay cạnh AB cố định. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình tạo thành.

❖ **Ví dụ 2.** Một hình nón có bán kính đáy là 5 cm và thể tích là 100π cm³. Tính diện tích toàn phần của hình nón này.

Dạng 2. Các bài tập liên quan hình nón cụt

Sử dụng công thức ở phần kiến thức trọng tâm.

❖ **Ví dụ 3.** Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn có bán kính đường tròn miệng xô là 14 cm, bán kính đáy xô là 9 cm và đường sinh là 25 cm.

- Hỏi xô này có thể chứa được 10 lít nước không?
- Tính diện tích tôn để làm chiếc xô này.

❖ **Ví dụ 4.** Hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = 30$ cm; $CD = 54$ cm và đường cao $AH = 9$ cm. Cho hình thang này quay một vòng quanh cạnh đáy CD . Hãy tính

- a) Thể tích của hình tạo thành; b) Diện tích mặt ngoài của hình tạo thành.

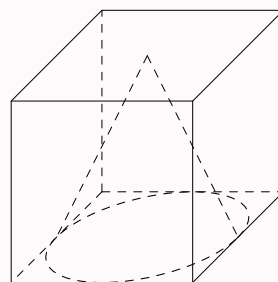
📁 Dạng 3. Các bài toán thực tế

Sử dụng các công thức phần kiến thức trọng tâm. Đôi khi, hình tạo thành là hỗn hợp của nhiều hình, khi đó ta cần tách hình hỗn hợp thành các bộ phận riêng biệt, tính thể tích của những bộ phận ấy rồi cộng hoặc trừ các số đo đó.

❖ **Ví dụ 5 (bài 15 sgk - tr117).**

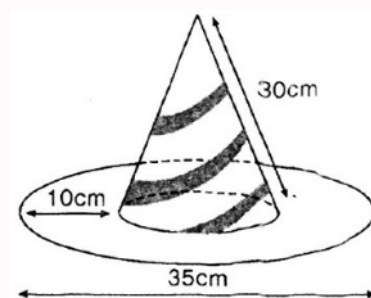
Một hình nón được đặt vào bên trong một hình lập phương như hình vẽ, cạnh của hình lập phương bằng 1. Hãy tính:

- a) Bán kính đáy của hình nón;
b) Độ dài đường sinh.



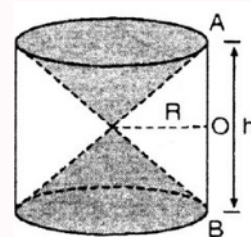
❖ **Ví dụ 6 (bài 21 sgk - tr118).**

Cái mũ của chú hề với các kích thước cho theo hình vẽ bên. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ (không kể riềm, mép, phần thừa).



❖ **Ví dụ 7 (bài 21 sgk - tr118).**

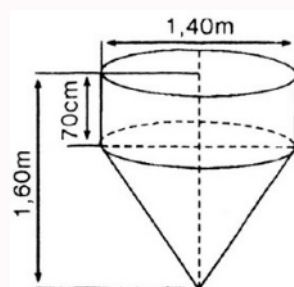
Hình bên cho ta hình ảnh của một cái đồng hồ cát với các kích thước kèm theo ($OA = OB$). Hãy so sánh tổng các thể tích của hai hình nón và thể tích của hình trụ.



❖ **Ví dụ 8 (bài 27 sgk - tr119).**

Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón. Các kích thước cho trên hình bên. Hãy tính:

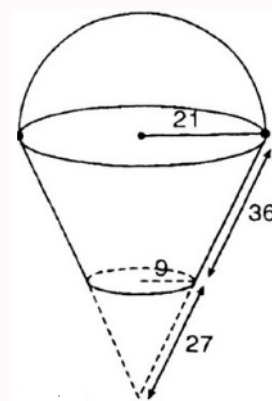
- a) Thể tích của dụng cụ này;
b) Diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính nắp).



❖ Ví dụ 9 (bài 28 sgk - tr120).

Một cái xô bằng inox có dạng hình nón cụt đựng hóa chất, có các kích thước cho ở hình bên (đơn vị: cm).

- Hãy tính diện tích xung quanh của xô;
- Khi xô chứa đầy hóa chất thì dung tích của nó là bao nhiêu?

**❖❖❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG ❖❖❖**

Bài 1. Người ta cuộn một tấm bìa hình quạt có bán kính 24 cm và số đo cung tròn là 270° được một hình nón rồi dán hai mép lại với nhau. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

Bài 2. Một hình nón có bán kính đáy là 40 cm. Cắt hình nón này bằng một mặt phẳng song song với đáy ta được được một hình nón cụt có bán kính đáy nhỏ là 24 cm và đường cao là 30 cm. Hãy tính:

- Độ dài đường sinh của hình nón cụt.
- Diện tích xung quanh của hình nón cụt.
- Thể tích của hình nón cụt bị cắt ra.

Bài 3. Một hình nón có thể tích là 24 cm^3 . Cắt hình nón này bằng một mặt phẳng song song với đáy, đi qua trung điểm của đường cao. Tính thể tích của hình nón cụt được tạo thành.

Bài 4. Một hình nón có số đo nửa góc ở đỉnh là 30° . Chứng minh rằng hình nón này có diện tích xung quanh bằng hai lần diện tích đáy.

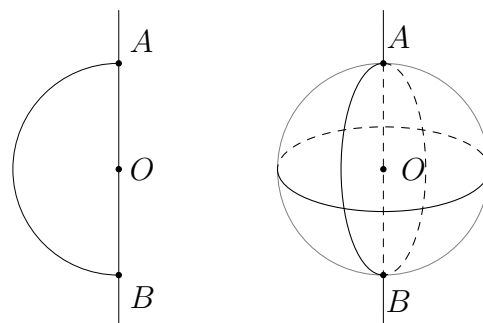
Bài 5. Một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy là 15 cm, chiều cao là 16 cm. Từ khúc gỗ này người ta tiện bỏ đi một hình nón có đáy là đáy của hình trụ và đỉnh là trung điểm của trục hình trụ.

- Tính thể tích của phần còn lại của hình trụ.
- Tính diện tích mặt ngoài của phần còn lại của hình trụ.

Bài số 3**DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH CẦU****A – KIẾN THỨC TRỌNG TÂM****1 Định nghĩa**

- ☑ Khi quay nửa hình tròn $(O; R)$ một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một hình cầu.

- Điểm O gọi là tâm, R là bán kính của hình cầu hay mặt cầu.



2 Diện tích - Thể tích hình cầu

- ☑ Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$ (R là bán kính; d là đường kính).
- ☑ Thể tích hình cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

B – CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI