MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

CHUYÊN ĐỀ 1: HẰNG ĐẲNG THỨC

A. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = (a-b)^2 + 4ab$

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a+b)^2 - 4ab$

3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a+b) \Rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

6. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

7. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Bài 1:

a) Tính $A = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + ... + 2^2 - 1^2$

b) Tính $B = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - .... + (-1)^n.n^2$

Lời giải

a) Ta có:

$$A = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + ... + 2^2 - 1^2 = (100-99)(100+99) + ... + (2-1)(2+1) = 100 + ... + 1 = \frac{101.100}{2} = 5050$$

b) Ta xét hai trường hợp

- TH1: Nếu n chẵn thì

$$B = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + ... + \left[n^2 - (n-1)^2\right] = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- TH1: Nếu n lẻ thì

$$B = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + ... + \left[(n-1)^2 - (n-2)^2\right] - n^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-1) - n^2 = -\frac{n(n+1)}{2}$$

$\Rightarrow$ Hai kết quả trên có thể dùng công thức: $(-1)^n.\frac{n(n+1)}{2}$

Bài 2: So sánh $A = 19999.39999$ và $B = 29999^2$

Lời giải

Ta có: $19999.39999 = (29999 - 10000)(29999 + 10000) = 29999^2 - 10000^2 < 29999^2 \Rightarrow A < B$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau

a. $A = (2+1)(2^2+1)...(2^{64}+1) + 1$

b. $B = (3+1)(3^2+1)...(3^{64}+1) + 1$

c. $C = (a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 - 2(a+b)^2$

Lời giải

a. $A=(2+1)(2^2+1)...(2^{64}+1)+1=(2-1)(2+1)(2^2+1)...(2^{64}+1)+1=2^{128}-1+1=2^{128}$

b. $B=(3+1)(3^2+1)...(3^{64}+1)+1=\frac{1}{2}(3-1)(3+1)(3^2+1)...(3^{64}+1)+1=\frac{1}{2}(3^{128}-1)+1=\frac{3^{128}+1}{2}$

c. Ta có:

$C=(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-2(a+b)^2=(a+b+c)^2-2(a+b+c)(a+b-c)+(a+b-c)^2-2(a+b+c)(a+b-c)$

$-2(a+b)^2=(a+b+c+a+b-c)^2-2\left[\left(a+b\right)^2-c^2\right]-2\left(a+b\right)^2=4(a+b)^2-2(a+b)^2+2c^2-2(a+b)^2=2c^2$

Bài 4: Chứng minh rằng

a. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(bx-ay)^2+\left(ax+by\right)^2$

b. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-\left(ax+by+cz\right)^2=(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2$

Lời giải

a. Ta có: VT = $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2=(bx)^2+(ay)^2+(\mathrm{ax})^2+(by)^2$

$=(bx)^2-2bx.ay+(ay)^2+2bx.ay+(\mathrm{ax})^2+(by)^2=(bx-ay)^2+\left(ax+by\right)^2\ (dpcm)$

b. VT = $(a^2+b^2)(x^2+y^2)+(a^2+b^2)z^2+c^2(x^2+y^2+z^2)-\left[\left(ax+by\right)^2+2\left(ax+by\right)cz+\left(cz\right)^2\right]$

$=\left(ax+by\right)^2+(bx-ay)^2+(az)^2+(bz)^2+(cx)^2+(cy)^2+(cz)^2-\left(ax+by\right)^2-(cz)^2-2ax.cz-2by.cz$

$=(bx-ay)^2+[(\mathrm{cy})^2-2by.cz+(bz)^2]+(\mathrm{az})^2+(cx)^2-2az.cx=(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2$

Nhận xét: Đây là bất đẳng thức Bunhicopski.

Bài 5: Cho $x^2=y^2+z^2$. Chứng minh rằng: $(5x-3y+4z)(5x-3y-4z)=(3x-5y)^2$

Lời giải

VT = $(5x-3y)^2-16z^2=25x^2-30xy+9y^2-16z^2$

Mà: $z^2=x^2-y^2\Rightarrow VT=25x^2-30xy-9y^2-16(x^2-y^2)=9x^2-30xy+25y^2=(3x-5y)^2(dpcm)$

Bài 6: Cho $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$. Chứng minh rằng: ad = bc

Lời giải

VT = $\left[\left(a+d\right)+\left(b+c\right)\right]\left[\left(a+d\right)-\left(b+c\right)\right]=\left(a+d\right)^2-(b+c)^2=a^2+d^2+2ad-b^2-c^2-2bc$

VP =[(a-d)+(c-b)][(a-d)-(c-b)]=(a-d)$^2-(c-b)^2=(a-d)^2-(c-b)^2=a^2+d^2-2ad-c^2-b^2+2bc$

VT = VP $\Rightarrow 2ad-2bc=-2ad+2bc\Leftrightarrow 4ad=4bc\Leftrightarrow ad=bc(dpcm)$

Bài 7: Chứng minh rằng, nếu:

a. a + b + c = 0 thì $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3=0$

b. $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(y+x-2z)^2$ thì x = y = z

Lời giải

a. Ta có :

$$\begin{cases} a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \\ a+b+c \Rightarrow a+b=-c \end{cases} \Rightarrow a^3+b^3=-c(a^2-ab+b^2)=-a^2c+abc-b^2c \Rightarrow a^3+b^3+a^2c-abc+b^2c=0$$

b. Đặt : $y-z=a; z-x=b; x-y=c \Rightarrow a+b+c=0$ và $\begin{cases} y+z-2x=(y-x)+(z-x)=b-c \\ z+x-2y=c-a \\ x+y-2z=a-b \end{cases}$

Từ giả thiết ta có :

$$a^2+b^2+c^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2+a^2-2ab+b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca=0 \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=0 \Leftrightarrow a=b=c \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \\ z=x \end{cases} \Rightarrow x=y=z$$

Bài 8: Chứng minh rằng không tồn tại các số thực x, y, z thỏa mãn:

a. $5x^2+10y^2-6xy-4x-2y+3=0$

b. $x^2+4y^2+z^2-2x-6z+8y+15=0$

Lời giải

a. $VT=(x-3y)^2+(2x-1)^2+(y-1)^2 \ge 1 \quad (dpcm)$

b. $VT=(x-1)^2+4(y+1)^2+(z-3)^2+1 \ge 1 \quad (dpcm)$

Bài 9: Tìm x, y thỏa mãn

a. $x^2+8y^2+9=4y(x+3)$

b. $9x^2-8xy+8y^2-28x+28=0$

c. $x^2+2y^2+5z^2+1=2(xy+2yz+z)$

Lời giải

a. Ta có: $x^2+8y^2+9=4y(x+3) \Leftrightarrow (x-2y)^2+(2y-3)^2=0 \Leftrightarrow x \in \left\{3; \frac{3}{2}\right\}$

b. Ta có:

$$9x^2-8xy+8y^2-28x+28=0 \Leftrightarrow (7x^2-28x+28)+(2x^2-8xy+8y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow 7(x-2)^2+2(x-2y)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

c. Ta có:

$$x^2+2y^2+5z^2+1=2(xy+2yz+z) \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-2z)^2+(z-1)^2=0 \Leftrightarrow x=; y=2; z=1$$

Bài 10: Chứng minh rằng biểu thức sau viết được dưới dạng tổng các bình phương của hai biểu thức: $x^2+2(x+1)^2+3(x+2)^2+4(x+3)^2$

Lời giải

Ta có: $x^2+2(x+1)^2+3(x+2)^2+4(x+3)^2=x^2+2(x^2+2x+1)+3(x^2+4x+4)+4(x^2+6x+9)$

$=10x^2+40x+50=(x+5)^2+(3x+5)^2 \Rightarrow dpcm$

Bài 11: Cho $a=x^2+x+1$. Tính theo a giá trị của biểu thức $A=x^4+2x^3+5x^2+4x+4$

Lời giải

Ta có: $A=x^4+2x^3+5x^2+4x+4=(x^4+x^2+1)+2x^3+2x^2+2x+2x^2+2x+3$

$\Rightarrow A=(x^2+x+1)^2+2(x^2+x+1)+1 \Rightarrow A=a^2+2a+1=(a+1)^2$

Bài 12: Chứng minh $x(x-a)(x+a)(x+2a)+a^4$ là bình phương của một đa thức

Lời giải

Ta có: $A=(x^2+ax)(x^2+ax-2a^2)+a^4$

Đặt $t=x^2+ax \Rightarrow A=t(t-2a^2)+a^4=t^2-2ta^2+a^4=(t-a^2)^2 \Leftrightarrow A=(x^2+ax-a^2)^2 \Rightarrow dpcm$

Bài 13:

a) Cho a, b, c thỏa mãn $a^{2010}+b^{2010}+c^{2010}=a^{1005}b^{1005}+b^{1005}c^{1005}+c^{1005}a^{1005}$. Tính giá trị của biểu thức sau $A=(a-b)^{20}+(b-c)^{11}+(c-a)^{2010}$

b) Cho $a,b,c,d \in Z$ thỏa mãn $a+b=c+d$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+d^2$ luôn là tổng của ba số chính phương

c) Chứng minh rằng: Nếu p và q là hai số nguyên tố thỏa mãn $p^2-q^2=p-3q+2$ thì p^2+q^2 cũng là số nguyên tố

Lời giải

a) Ta có:

$a^{2010}+b^{2010}+c^{2010}=a^{1005}b^{1005}+b^{1005}c^{1005}+c^{1005}a^{1005} \Leftrightarrow 2a^{2010}+2b^{2010}+2c^{2010}-2a^{1005}b^{1005}-2b^{1005}c^{1005}-2c^{1005}a^{1005}=0$

$\Leftrightarrow (a^{1005}-b^{1005})^2+(b^{1005}-c^{1005})^2+(c^{1005}-a^{1005})^2=0 \Leftrightarrow a^{1005}-b^{1005}=b^{1005}-c^{1005}=c^{1005}-a^{1005} \Leftrightarrow a=b=c$

Vậy $A=(a-a)^{20}+(b-b)^{11}+(c-c)^{2010} \Rightarrow A=0$

b) Ta có:

$a+b=c+d \Rightarrow a=c+d-b; a^2+b^2+c^2+d^2=(c+d-b)^2+b^2+c^2+d^2=(c+d)^2-2(c+d)b+b^2+b^2+c^2+d^2$

$=(c+d)^2-2bc-2bd+b^2+b^2+c^2+d^2=(c+d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$

c) Ta có:

$p^2-q^2=p-3q+2 \Rightarrow 4p^2-4q^2=4p-12q+8 \Rightarrow 4p^2-4p+1=4q^2-12q+9 \Rightarrow (2p-1)^2=(2q-3)^2$

mà $2p-1>0$ (p nguyên tố); $2q-3>0$ (q nguyên tố). Do đó $2p-1=2q-3 \Leftrightarrow q=p+1$

Ta có: $q \geq 3(p \geq 2) \Rightarrow q$ lẻ, do đó p chẵn $\Rightarrow p=2 \Rightarrow q=3 \Rightarrow p^2+q^2=13$ là số nguyên tố

Bài 14: [HSG – năm 2015]

Cho a, b, c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=2; a+b+c=2. CMR: M=(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ viết được dưới dạng bình phương của một biểu thức

Lời giải:

Cách 1:

$M=(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=a^2b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+a^2+b^2+c^2+1(*)$

Có: $a^2+b^2+c^2=2=a+b+c \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2=(a+b+c)^2$

Có:

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=4 \Rightarrow ab+bc+ca=1 \Rightarrow a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2(acb^2+a^2bc+c^2ab)=1$

$\Rightarrow a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=1-2(acb^2+a^2bc+abc^2) \Rightarrow M=(abc)^2-2abc(a+b+c)+1+a^2+b^2+c^2+1$

$M=(abc)^2-2abc(a+b+c)+(a+b+c)^2=\left[abc-(a+b+c)^2\right](dpcm)$

Cách 2: Ta có:

$a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c); b^2+1=(a+b)(b+c); c^2+1=(a+c)(c+b) \Rightarrow M=[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$

HẰNG ĐẲNG THỨC BẬC BA

1. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b) \Rightarrow a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

2. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a+b) \Rightarrow a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

Bài 1: Cho $x^2-x=10$. Tính $A=x^6-3x^5+4x^4-3x^3+2x^2-x+1$

Lời giải

$A=x^6-3x^5+4x^4-3x^3+2x^2-x+1=(x^6-3x^5+3x^4-x^3)+(x^4-2x^3+x^2)+(x^2-x+1)$

$=(x^2-x)^3+(x^2-x)^2+(x^2-x)+1=1111$

Bài 2: Tính $A=\dfrac{(2^3+1)(3^3+1)...(100^3+1)}{(2^3-1)(3^3-1)....(100^3-1)}$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{(k+1)^3+1}{k^3-1}=\dfrac{(k+2)[(k+1)^2-(k+1)+1]}{(k-1)(k^2+k+1)}=\dfrac{k+2}{k-1}$

Cho k chạy từ 2 đến 100, ta thu được:

$A=(2^3+1).\dfrac{3^3+1}{2^3-1}.\dfrac{4^3+1}{3^3-1}.....\dfrac{100^3+1}{99^3-1}.\dfrac{1}{100^3-1}=9.\dfrac{4}{1}.\dfrac{5}{2}....\dfrac{101}{98}.\dfrac{1}{99(100^2+100+1)}$

$A=9.\dfrac{99.100.101}{1.2.3...10101}=\dfrac{9.99.100.101}{6.99.10101}=\dfrac{30300}{20202}$

Bài 3: Cho $x^2+y^2=1$. Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y.

$A=2\left(x^6+y^6\right)-3\left(x^4+y^4\right)$

Lời giải

Ta có:

$$A=2\left[\left(x^2\right)^3+\left(y^2\right)^3\right]-3\left(x^4+y^4\right)=2\underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{1}\left(x^4-x^2y^2+y^4\right)-3\left(x^4+y^4\right)=2x^4-2x^2y^2+2y^4-3x^4-3y^4$$

$$=-\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)=-\left(x^2+y^2\right)^2=-1\Rightarrow dpcm$$

Bài 4: Cho $a^3-3ab^2=2;b^3-3a^2b=-11$.. Tính a^2+b^2

Lời giải

Ta có: $\left(a^3-3ab^2\right)^2+\left(b^3-3a^2b\right)^2=2^2+\left(-11\right)^2\Rightarrow a^6-6a^4b^2+9a^2b^4+b^6-6a^2b^4+9a^4b^2=4+121$

$\Rightarrow a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=125\Rightarrow\left(a^2+b^2\right)^3=5^3\Rightarrow a^2+b^2=5$

Bài 5: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A=a^3+b^3+c^3-3abc$

Lời giải

$A=a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$A=\left[\left(a+b\right)^3+c^3\right]$-$3ab\left(a+b+c\right)=\left(a+b+c\right)^3-3(a+b)c.(a+b+c)-3ab(a+b+c)$

$A=(a+b+c)\left[\left(a+b+c\right)^2-3(a+b)c-3ab\right]=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

Bài 6: Cho a + b + c = 0, Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3=3abc$

Áp dụng tính $B=\dfrac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}$

Lời giải

Từ giả thiết $\Rightarrow c=-(a+b)\Rightarrow a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=-3ab(a+b)=3abc$

+) $\begin{cases}a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2=0\\a-b+b-c+c-a=0\end{cases}\Rightarrow B=\dfrac{3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{3(a-b)(b-c)(c-a)}=(a+b)(b+c)(c+a)$

Bài 7: Cho a, b, c thỏa mãn: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$.Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}=\dfrac{3}{abc}$

Lời giải

Ta có:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2\Rightarrow ab+bc+ca=0\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0\Rightarrow\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}=\frac{3}{abc}$$

Bài 8: Cho a, b, c thỏa mãn: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$. Tính $A=\dfrac{bc}{a^2}+\dfrac{ca}{b^2}+\dfrac{ab}{c^2}$

Lời giải

Đặt $x=\dfrac{1}{a};y=\dfrac{1}{b};z=\dfrac{1}{c}\Rightarrow x+y+z=0\Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz\Leftrightarrow\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}=\dfrac{3}{abc}$

$\Rightarrow A=\dfrac{abc}{a^3}+\dfrac{abc}{b^3}+\dfrac{abc}{c^3}=abc(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3})=abc.\dfrac{3}{abc}=3$

Bài 9: Cho $x+y=a+b;x^2+y^2=a^2+b^2$. Chứng minh rằng $x^3+y^3=a^3+b^3$

Lời giải

Ta có:

$x^3+y^3=(x+y)(x^2+xy+y^2); x+y=a+b \Rightarrow (x+y)^2=(a+b)^2 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=a^2+2ab+b^2$

Do $x^2+y^2=a^2+b^2 \Rightarrow 2xy=2ab \Rightarrow xy=ab$

Thay các kết quả vào ta được:

$x^3+y^3=(x+y)(x^2+xy+y^2)=(a+b)(a^2+ab+b^2)=a^3+b^3 \Rightarrow dpcm$

Bài 10: Cho $a+b=m; a-b=n.$ Tính $ab; a^3-b^3$ theo m và n

Lời giải

Cách 1: Từ $a+b=m; a-b=n. \Rightarrow b=\dfrac{m-n}{2}, a=\dfrac{m+n}{2} \Rightarrow ab=\dfrac{m-n}{2}.\dfrac{m+n}{2}=\dfrac{m^2-n^2}{4}$

$$a^3-b^3=\left(\frac{m+n}{2}\right)^3-\left(\frac{m-n}{2}\right)^3=\frac{(m+n)^3-(m-n)^3}{8}=\frac{3m^2n+n^3}{4}$$

Cách 2: Ta có: $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2=m^2-n^2 \Rightarrow ab=\dfrac{m^2-n^2}{4}$

Lại có: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)\left[(a+b)^2-ab\right]=n\left(m^2-\dfrac{m^2-n^2}{4}\right)$

$$=\frac{n(3m^2+n^2)}{4}=\frac{3m^2n+n^3}{4}$$

Bài 11: Cho $a^2+b^2+c^2=m.$ Tính giá trị biểu thức sau theo m

$A=(2a+2b-c)^2+(2b+2c-a)^2+(2c+2a-b)^2$

Lời giải

Ta có: $A=(2a+2b+2c-3c)^2+(2b+2c+2a-3a)^2+(2c+2a+2b-3b)^2$

Đặt $x=a+b+c \Rightarrow A=(2x-3c)^2+(2x-3a)^2+(2x-3b)^2=12x^2-12x(a+b+c)+9(a^2+b^2+c^2)$

$=12x^2-12x^2+9(a^2+b^2+c^2)=9m$

HẰNG ĐẲNG THỨC: $(a + b + c)^3$

Ta có:

$(a+b+c)^3=\left[(a+b)+c\right]^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$

$=3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+abc+abc)$

$=3\left[(a^2b+ab^2)+(a^2c+ac^2)+(ac^2+bc^2)+(b^2c+abc)\right]=3(a+b)(b+c)(c+a)+a^3+b^3+c^3$

$\Rightarrow (a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

Bài 1: Cho a, b, c thỏa mãn: abc =1 . Tính: $A=(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x = b+c-a \\ y = c+a-b \\ z = a+b-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 2c \\ y+z = 2a \\ z+x = 2c \end{cases}; x+y+z = a+b+c$

$\Rightarrow A = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x) = 3.2c.2b.2a = 24abc = 24$

Bài 2: Phân tích thành nhân tử

a. $A = 8(a+b+c)^3 - (2a+b-c)^3 - (2b+c-a)^3 - (2c+a-b)^3$

b. $B = 27(a+b+c)^3 - (2a+3b-2c)^3 - (2b+3c-2a)^3 - (2c+3a-2b)^3$

Lời giải

a. Đặt $\begin{cases} 2a+b-c = x \\ 2b+c-a = y \\ 2c+a-b = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = a+3b \\ y+z = b+3c \\ z+x = c+3a \end{cases} \Rightarrow x+y+z = 2(a+b+c)$

$\Rightarrow A = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x) = 3(a+3b)(b+3c)(c+3a)$

b. Ta có:

$B = 27(a+b+c)^3 - (2a+3b-2c)^3 - (2b+3c-2a)^3 - (2c+3a-2b)^3 = 3(5a+b)(5b+c)(5c+a)$

Bài 3: Cho a, b, c thỏa mãn : a + b + c = $a^3 + b^3 + c^3 = 1$

Tính $A = a^n + b^n + c^n$ (n là số tự nhiên lẻ)

Lời giải

Ta có: $(a+b+c)^3 = 1 = a^3 + b^3 + c^3 \Rightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right.$

+) TH1: $a+b=0 \Rightarrow a=-b \Rightarrow c=1 \Rightarrow a^n + b^n + c^n = 1$

+) Tương tự ta có: A = 1.

Bài 4: Giải các phương trình sau

a. $27x^3 + (x-5)^3 + 64 = (4x-1)^3$

b. $(2x^2-2x-1)^3 + (2x-1)^3 = (x^2-x+1)^3 + (x^2+x-3)^3$

c. $(x^2-2x+2)^3 = x^3 + (x^3-1)(x-2)^3$

d. $\underbrace{(x^2+3x+3)^3}_{a} + \underbrace{(x^2-x-1)^3}_{b} + \underbrace{(-2x^2-2x-1)^3}_{c} = 1$

Lời giải

a. Ta có:

$27x^3 + (x-5)^3 + 64 = (4x-1)^3 \Leftrightarrow (3x)^3 + (x-5)^3 + 64 = \left[3x + (x-5) + 4\right]^3 \Rightarrow 3(3x+x-5)(x-5+4)(4+3x) = 0$

$\Rightarrow x \in \left\{\frac{5}{4}; 1; \frac{-4}{3}\right\}$

b. $(2x^2-2x-1)^3 + (2x-1)^3 = (x^2-x+1)^3 + (x^2+x-3)^3$

$\Leftrightarrow (2x^2-2x-1)^3 + (2x-1)^3 + (x-x^2-1)^3 = (x^2+x-3)^3$

Đặt $2x^2-2x-1=a; 2x-1=b; x-x^2-1=c \Rightarrow \begin{cases} a+b=2x^2-2 \\ b+c=3x-x^2-2 \\ c+a=x^2-x-2 \\ a+b+c=x^2+x-3 \end{cases} \Rightarrow a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$

$$\Leftrightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-2=0 \\ 3x-x^2-2=0 \\ x^2-x=0 \end{array}\right. \Rightarrow x\in\{-1;1;2\}$$

c. $(x^2-2x+2)^3=x^3+(x^3-1)(x-2)^3$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+2)^3=x^3+x^3(x-2)^3+(2-x)^3 \Leftrightarrow 3(x+x^2-2x)(x^2-2x+2-x)(2-x+x^2)=0$
$\Leftrightarrow 6(x^2-x)(x^2-3x+2)=0 \Leftrightarrow x\in\{0;1;2\}$

Bài 5: Cho $x+y+z=0; xyz\neq 0$. Tính $A=\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{y^2}{xz}+\dfrac{z^2}{xy}$

Lời giải

$A=\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{y^2}{xz}+\dfrac{z^2}{xy}=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$

Cách 1: Nếu $x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz \Rightarrow A=3$

Cách 2:

$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x) \to x^3+y^3+z^3=\underbrace{(x+y+z)^3}_{=0}-3(x+y)(y+z)(z+x) \to A=3$

Bài 6: Giải các phương trình sau: $\underbrace{(x^2+3x+3)^3}_{a}+\underbrace{(x^2-x-1)^3}_{b}+\underbrace{(-2x^2-2x-1)^3}_{c}=1(*)$

Lời giải

$(*) \Rightarrow \begin{cases} a+b=2x^2+2x+2 \\ b+c=-x^2-3x-2 \\ c+a=-x^2+x+2 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Rightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a)=0 \Rightarrow x\in\{2;-2;-1\}$

Bài 7: Rút gọn $A=(x+y+z)^3-(x+y-z)^3-(x-y+z)^3-(-x+y+z)^3$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x+y-z=a \\ x-y+z=b \Rightarrow a+b+c=x+y+z \Rightarrow A=24xyz \\ x+y+z=c \end{cases}$

HẰNG ĐẲNG THỨC: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

Nhận xét

- Nếu $a^3+b^3+c^3-3abc=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right.$

- Nếu $\left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right. \Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$

Áp dụng:

Bài 1: Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn: $a^3+b^3+c^3-3abc$. Tính giá trị của biểu thức $M=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

Lời giải

Vì: $a^3+b^3+c^3-3abc=0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right.$

+) Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow M=\frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{c+a}{a}=\frac{-c}{b}.\frac{-a}{c}.\frac{-b}{a}=-1$

+) Nếu $a=b=c \Rightarrow M=(1+1)(1+1)(1+1)=8$

Bài 2: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3+y^3=6xy-8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $x^3+y^3=6xy-8 \Leftrightarrow x^3+y^3+2^3-3.x.y.2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+2=0 \\ x=y=2 \end{array}\right.$

+) Nếu $x+y+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ 2x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases}$

+) Nếu $x=y=2$ (khôn thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) = (3; -5)

Bài 3: Giải phương trình sau: $27(x-3)^3=8(x-2)^3+(x-5)^3$

Lời giải

$27(x-3)^3=8(x-2)^3+(x-5)^3 \Leftrightarrow (3x-9)^3+(4-2x)^3+(5-x)^3=0$ (1)

Ta có: $(3x-9)+(4-2x)+(5-x)=0$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: $3(3x-9)(4-2x)(5-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \\ x=5 \end{array}\right. \Rightarrow S=\{2;3;5\}$

Bài 4: Cho các số thực phân biệt a, b, c khác 0 và thỏa mãn: $a+b+c=0$.

Tính giá trị của biểu thức: $P=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$

Lời giải

Ta đặt

$$M=\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\to M.\frac{a}{b-c}=1+\frac{a}{b-c}\left(\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)=1+\frac{a}{b-c}.\frac{c^2-ca+ba-b^2}{bc}=1+\frac{2a^2}{bc}=1+\frac{2a^3}{bc}$$

Tương tự ta có: $M.\frac{b}{c-a}=1+\frac{2b^3}{abc};M.\frac{c}{a-b}=1+\frac{2c^3}{abc}$

$$\Rightarrow P=3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}=3+\frac{2.abc}{abc}(do:a+b+c=0)=9\Rightarrow P=9$$

Bài 5*: Giả sử bộ ba số $\frac{a}{b-c};\frac{b}{a-c};\frac{c}{a-b}$ là nghiệm của phương trình $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=3$.

Chứng minh rằng bộ ba số $\frac{a}{(b-c)^2};\frac{b}{(c-a)^2};\frac{c}{(a-b)^2}$ cũng là nghiệm của phương trình đó

Lời giải

Ta có: $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}=3\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3-3xyz=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=z\\x+y+z=0\end{array}\right.$

Vì nghiệm của phương trình là bộ ba số khác 0 nên các số a, b, c là ba số khác nhau và khác 0

+) Nếu:

$$\frac{a}{b-c}=\frac{b}{c-a}=\frac{c}{a-b}=k\neq0\Rightarrow a=k(b-c);b=k(c-a);c=k(a-b)\Rightarrow a+b+c=0\Leftrightarrow a+b=-c$$

Từ:

$$\frac{a}{b-c}=\frac{b}{c-a}\Leftrightarrow\frac{a}{b+a+b}=\frac{b}{-a-b-a}\Leftrightarrow(a+b)^2+a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=b=0\Rightarrow a=b=c=0\quad(loai)$$

+) Nếu:

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0\Rightarrow\frac{a}{b-c}=\frac{b}{a-c}+\frac{c}{b-a}=\frac{b(b-a)+c(a-c)}{(c-a)(a-b)}\Rightarrow\frac{a}{(b-c)^2}=\frac{b^2-ba+ca-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}(1)$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{(c-a)^2}=\frac{c^2-cb+ab-a^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ (2); $\frac{c}{(a-b)^2}=\frac{a^2-ac+bc-b^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$

Đặt $m=\frac{a}{(b-c)^2};n=\frac{b}{(c-a)^2};p=\frac{c}{(a-b)^2}$

$$m+n+p=0\Rightarrow m^3+n^3+p^3=3mnp\Rightarrow\frac{m^2}{np}+\frac{n^2}{mp}+\frac{p^2}{mn}=3$$

Vậy bộ ba số $\frac{a}{(b-c)^2};\frac{b}{(c-a)^2};\frac{c}{(a-b)^2}$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức

a) $M=\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3}$ với a, b, c là các số thực thỏa mãn: $\begin{cases} a^3+b^3+c^3-3abc=0 \\ a+b+c\neq 0 \end{cases}$

b) $N=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$ với a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn:

$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=3a^2b^2c^2$

Bài 2: Cho $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{(y+z)(z+x)}{(x+y)^2}+\frac{(x+y)(z+x)}{(y+z)^2}+\frac{(y+x)(y+z)}{(x+z)^2}$$

Bài 3: Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a+b+c=(a-b)(b-c)(c-a)$. Chứng minh rằng $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ chia hết cho 81

Bài 4: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^3+27y^3=27xy-27 \\ x-y=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y^3+z^3=6 \end{cases}$

CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC MỞ RỘNG HAY SỬ DỤNG

1. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

2. $(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

3. $(a_1+a_2+a_3+....+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+2(a_1a_2+a_2a_3+....+a_{n-1}a_n)$

Áp dụng:

Bài 1: Chứng minh rằng: $(2a+2b-c)^2+(2b+2c-a)^2+(2c+2a-b)^2=9(a^2+b^2+c^2)$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} (2a+2b-c)^2=4a^2+4b^2+c^2+8ab-4ac-4bc \\ (2b+2c-a)^2=4b^2+4c^2+a^2+8bc-4ab-4ac \\ (2c+2a-b)^2=4c^2+4a^2+b^2+8ac-4bc-4ab \end{cases}$

Cộng theo vế 3 đẳng thức trên ta được:

$$(2a+2b-c)^2+(2b+2c-a)^2+(2c+2a-b)^2=9(a^2+b^2+c^2)$$

Bài toán được chứng minh.

Bài 2: Cho a, b, c, d thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$A=(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a-b+c-d)^2+(a-b-c+d)^2$

Lời giải

Ta có $(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$

Áp dụng ta được:

$A=\left[(a+b)+(c+d)\right]^2+\left[(a+b)-(c+d)\right]+\left[(a-b)+(c-d)\right]^2+\left[(a-b)-(c-d)\right]^2$

$A=2\left[(a+b)^2+(c+d)^2\right]+2\left[(a-b)^2+(c-d)^2\right]=2\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]+2\left[(c+d)^2+(c-d)^2\right]$

$A=4\left(a^2+b^2\right)+4(c^2+d^2)=4$

Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $a^2+4b^2+5c^2+4ab+12bc+6ac$

b. $a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-2abc(a+b+c)$

c. $a^2+3b^2+4c^2+4ab+8bc+4ac$

Lời giải

a. $a^2+4b^2+5c^2+4ab+12bc+6ac=(a+2b+3c)^2-(2c)^2=(a+2b+c)(a+2b+5c)$

b. $a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-2abc(a+b+c)$

$=(a^2+b^2+c^2)^2-(ab+bc+ca)^2=(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

c. $a^2+3b^2+4c^2+4ab+8bc+4ac=(a+2b+2c)^2-b^2=(a+b+2c)(a+3b+2c)$

Bài 4: Tìm x, y, z thỏa mãn

a. $5x^2+5y^2+z^2+8xy+4yz+4zx+2x-2y+2=0$

b. $x^2+y^2+2z^2+xy+2yz+2zx+x+y+1=0$

c. $2x^2+5y^2+8z^2-6xy-8yz+4zx-4z+1=0$

d. $5x^2+11y^2+28z^2-14xy-16yz+8zx-20z+5=0$

e. $3x^2+8y^2+23z^2+6xy-22yz-12zx-12z+6=0$

Lời giải

a. $5x^2+5y^2+z^2+8xy+4yz+4zx+2x-2y+2=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+(2x+2y+z)^2=0 \Leftrightarrow (x;y;z)=(-1;1;0)$

b. $x^2+y^2+2z^2+xy+2yz+2zx+x+y+1=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+4z^2+2xy+4yz+4zx+2x+2y+2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2+(x+y+2z)^2=0 \Leftrightarrow (-1;-1;1)$

c. $2x^2+5y^2+8z^2-6xy-8yz+4zx-4z+1=0$

$\Leftrightarrow (4z^2-4z+1)+2x^2+5y^2+4z^2-6xy-8yz+4zx=0 \Leftrightarrow (2z-1)^2+(x-y)^2+(x-2y+2z)^2=0$

d. $5x^2+11y^2+28z^2-14xy-16yz+8zx-20z+5=0$

$5(4z^2-4z+1)+5x^2+11y^2+8z^2-14xy-16yz+8zx=0 \Leftrightarrow 5(2z-1)^2+3(x-y)^2+2(x-2y+2z)^2=0 \Leftrightarrow (1;1;1)$

e. $3x^2+8y^2+23z^2+6xy-22yz-12zx-12z+6=0$

$\Leftrightarrow 3(x+y-2z)^2+5(y-z)^2+6(z-1)^2=0 \Leftrightarrow (x;y;z)=(1;1;1)$

Bài 5: Chứng minh rằng không tồn tại số thực x, y, z thỏa mãn:

a. $x^2+26y^2-10xy+14x-76y+59=0$ b. $x^2+5y^2+2x-4xy-10y+14=0$

Lời giải

a. Ta có: $VT=(x^2-10xy+25y^2)+y^2+14x-76y+59=(x-5y)^2+2.7.(x-5y)-6y+y^2+7^2+10$

$=(x-5y)^2+2.7.(x-5y)+7^2+(y-3)^2+1=(x-5y+7)^2+(y-3)^2+1\geq 1 \quad (dpcm)$

b. $VT=(x-2y+1)^2+(y-3)^2+4\geq 4 (dpcm)$

Bài 6: Cho a + b + c = 0 và $a^2+b^2+c^2=2$. Tính $a^4+b^4+c^4$

Lời giải

Ta có:

$(a+b+c)^2=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0 \Leftrightarrow 2+2(ab+bc+ca)=0 \Rightarrow ab+bc+ca=-1 \quad (1)$

Có: $(a^2+b^2+c^2)^2=2 \Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4 \quad (2)$

Từ (1) suy ra: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2=1 \Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=1$

Thay vào (2) ta được: $a^4+b^4+c^4=4-2=2$

Bài 7: Chứng minh rằng, nếu: $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2 & (1) \\ a+b+c=abc & (2) \end{cases}$ thì $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$

Lời giải

Từ (1) suy ra:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=4 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=4 \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)=4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2=4 \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2.$$

HẰNG ĐẲNG THỨC MỞ RỘNG (tiếp)

1. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

2. $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

3. $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-....-ab^{n-2}+b^{n-1})$

4. $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

5. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+....+ab^{n-2}+b^{n-1})$ (với n lẻ)

Áp dụng:

Bài 1: Giải hệ phương trình sau

a. $\begin{cases} x = y(y^4+1) \\ x^4+y^4+xy(x^2+xy+y^2)=31 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x+y=2 \\ x^4+x^2y^2+y^4=x(x^4+x^2y+y^3) \end{cases}$

c. $\begin{cases} x+y=2x^5 \\ x^4+x^2y^2+y^4=xy(x^2+y^2)+1 \end{cases}$

Lời giải

a. Ta có:

$$x=y^5+y \Rightarrow x-y=y^5 \Rightarrow (x-y)(x^4+y^4+x^3y+x^2y^2+xy^3)=31y^5 \Leftrightarrow x^5-y^5=31y^5 \Leftrightarrow x^5=32y^5=(2y)^5$$

$$\Leftrightarrow x=2y \Rightarrow 2y-y=y^5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \\ y=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \quad (loai) \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$$

b. Ta có:

$$x^4+x^2y^2+y^4=x^5+x^3y+xy^3 \Leftrightarrow x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=x^5 \Rightarrow (x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)=2x^5$$

$$\Leftrightarrow x^5+y^5=2x^5 \Leftrightarrow x^5=y^5 \Leftrightarrow x=y \Rightarrow x=y=1$$

c. Ta có: $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=1 \Leftrightarrow 2x^5=x^5+y^5 \Rightarrow x=y=1$

Bài 2: Chứng minh rằng : $2^9+2^{99} \vdots 100 = 4.25$

Lời giải

Ta có:

$$2^9+2^{99}=2^9(1+2^{90})=2^9[(2^{10})^9+1]=2^9(1024^9+1)=\underbrace{2^9}_{\vdots 4}.\underbrace{(1024+1)}_{\vdots 25}(1024^8-1024^7+1024^6-....+1) \Rightarrow A \vdots 100$$

Bài 3: Chứng minh rằng: Ta có: $A=20^n+16^n-3^n-1 \vdots 323 \forall n \in N^*$, n chẵn

Lời giải

Vì n chẵn, đặt n = 2k (k thuộc N*), ta có: 323 = 17.19

$$A=(20^{2k}-3^{2k})+(16^{2k}-1)=\underbrace{(20-3)(20^{2k-1}+20^{2k-2}.3+...+3^{2k})}_{\vdots 17}+\underbrace{(16^2-1)}_{\vdots 17}[(16^2)^{k-1}+...+1] \Rightarrow A \vdots 17 (1)$$

$$A=(20^{2k}-1)+(16^{2k}-3^{2k})=\underbrace{(20-1)}_{\vdots 19}.(20^{2k-1}+...+1)+\underbrace{(16^2-3^2)}_{\vdots 19}[(16^2)^{k-1}+...+(3^2)^{k-1}] \Rightarrow A \vdots 19 (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A \vdots 323$

Bài 4: Tìm n thuộc N* để $A=n^{100}+n^2+1$ là số nguyên tố

Lời giải

Ta có $A=(n^{100}-n)+(n^2-n+1)=n(n^{99}-1)+(n^2+n+1)=n[(n^3)^{33}-1]+(n^2+n+1)$

$$=n(n^3-1)[(n^3)^{32}+(n^3)^{31}+...+1]+(n^2+n+1)=(n^2+n+1)\{n(n-1).[...]+1\} \vdots n^2+n+1$$

+) Nếu n > 1 thì A > n² + n + 1 suy ra A là hợp số

+) Nếu n = 1 thì A = 3 (thỏa mãn). Vậy n = 1

Bài 5: Chứng minh rằng số

a. $A=\underbrace{1000.09}_{100}$ là hợp số

b. $B=10000000099$ là hợp số

Lời giải

a. Ta có: $A=\underbrace{1000......09}_{100}=10^{101}+10-1=(10^{101}+10^2)-(10^2-10+1)=10^2[(10^3)^{33}+1]-(10^2-10+1)$

$=10^2(10^3+1)[(10^3)^{32}-(10^3)^{31}+...+1]-(10^2-10+1)=10^2(10+1)(10^2-10+1)[...]-(10^2-10+1)$

$\Rightarrow A\vdots 10^2-10+1=91=7.13\Rightarrow A\vdots 7, A\vdots 13\Rightarrow$ Là hợp sô

b. $B=10000000099=10^{10}+99=100^5+99=100^5+100-1=100^2(100^3+1)-(100^2-100+1)$

$\Rightarrow B\vdots 100^2-100+1$ và B > $\Rightarrow B\vdots 100^2-100+1$ nên B là hợp số.

Bài 6: Chứng minh rằng $A=10^{n+2}+11^{2n+1}\vdots 111\forall n\in N^*$

Lời giải

Ta có 111 = 37 . 3 = 10² + 10 + 1

$A=(11^{2n+1}+100^{2n+1})-(10^{4n+2}-10^{n+2})=(11^{2n+1}+100^{2n+1})-10^{n+2}(10^{3n}-1)$

$\Rightarrow A=(....)-10^{n+2}.(10^3-1)\left[(10^3)^{n-1}+(10^3)^{n-2}+...+1\right]$

$\Rightarrow A=(11+100)\left[11^{2n}-11^{2n-1}.100+...+100^{2n}\right]\text{-}10^{n+2}(10^3-1).[...]=111\{[...]\text{-}10^{n+2}...[...]\}\vdots 111$

Bài 7: Chứng minh rằng $A=2903^n-803^n-464^n+261^n\vdots 1897\forall n\in N^*$

Lời giải

Ta có:

$\begin{cases}(2903^n-803^n)\vdots(2903-803)=2100=7.300\\(464^n-261^n):(464-261)=203=7.29\end{cases}\Rightarrow A\vdots 7;\begin{cases}2903^n-464^n\vdots 2439=271.9\\803^n-261^n\vdots 542=2.271\end{cases}\Rightarrow A\vdots 271$

Vậy A chia hết cho 7. 271 = 1897.

Bài 8: Chứng minh rằng $A=(11^{n+2}+12^{2n+1})\vdots 133\forall n\in N^*$

Lời giải

Ta có 133 = 11² + 11 +1

$A=(12^{2n+1}+121^{2n+1})-11^{n+2}(11^{3n}-1)=(12+121)(12^{2n}-12^{2n-1}.121+...+121^{2n})-11^{n+2}\underbrace{(11^3-1)}_{\vdots 133}[11^{n-1}+11^{n-2}+...+1]$

Vậy $A\vdots 133\quad (dpcm)$

Bài 9: Cho a, b, c thỏa mãn a² + b² + c² = 1. Tính giá trị của biểu thức

$A=(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$

Lời giải

Khai triển và rút gọn ta được: $A=4(a^2+b^2+c^2)=4$

Bài 10: Phân tích đa thức sau thành tích của 2 đa thức $A=a^2+3b^2+4c^2+4ab+8bc+4ca$

Lời giải

Ta có: $A=a^2+3b^2+4c^2+4ab+8bc+4ca=(a+2b+2c)^2-b^2=(a+b+2c)(a+3b+2c)$

Bài 11: Tìm x, y, z thỏa mãn

a. $5x^2+2y^2+z^2+4xy-2yz-4zx-2x-2y+2=0$

b. $3x^2+8y^2+23z^2+6xy-22yz-12xz-12z+6=0$

Lời giải

a. $5x^2+2y^2+z^2+4xy-2yz-4zx-2x-2y+2=0 \Leftrightarrow (2x+y-z)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=0$

b. $3x^2+8y^2+23z^2+6xy-22yz-12xz-12z+6=0 \Leftrightarrow 3(x+y-2z)^2+5(y-z)^2+6(z-1)^2=0$

CHUYÊN ĐỀ 2: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. PHƯƠNG PHÁP TÁCH HẠNG TỬ

Phương pháp:

- Đa thức f(x) có nghiệm hữu tỉ thì có dạng $\frac{p}{q}$ trong đó p là ước của hệ số tự do, q kà ước dương của hệ số cao nhất

- Nếu f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì f(x) có một nhân tử là: x – 1

- Nếu f(x) có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì f(x) có một nhân tử là: x + 1

- Nếu a là nghiệm nguyên của f(x) và $f(1)\neq 0; f(-1)\neq 0 \Rightarrow \frac{f(1)}{a-1};\frac{f(-1)}{a+1}$ đều là số nguyên. Để nhanh chóng loại trừ nghiệm là ước của hệ số tự do.

1. Đối với đa thức bậc hai : $ax^2 + bx + c$

Cách 1: Tách hạng tử bậc nhất bx

- Tính a.c rồi phân tích a.c ra tích của hai thừa số $ac = a_1c_1 = a_2c_2 = ...$

- Chọn ra hai thừa số có tổng bằng b , chẳng hạn : $ac = a_1c_1$ với $a_1 + c_1 = b$

- Tách $bx = a_1x + c_1x$

- Dùng phương pháp nhóm số hạng để phân tích tiếp

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $3x^2+8x+4$ b. $3x^2-8x+4$ c. $x^2-11x+8$

d. $x^2+5x-24$ e. x^2-5x+4

Lời giải

a) Ta có: 3.4 = 12 = 2.6 , mà 2 + 6 = 8 nên ta được:

$3x^2+8x+4=3x^2+6x+2x+4=(3x+2)(x+2)$

b) Cách 1: Tách hạng tử thứ 2:

$3x^2-8x+4=3x^2-6x-2x+4=3x(x-2)-2(x-2)=(x-2)(3x-2)$

Cách 2: Tách hạng tử thứ nhất: $3x^2-8x+4=(4x^2-8x+4)-x^2=(x-2)(3x-2)$

c) $x^2-11x+28=(x-4)(x-7)$

d) $x^2+5x-24=(x+8)(x-3)$

e) $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$

Cách 2: Tách hạng tử bậc ax^2

- Ta thường làm làm xuất hiện hằng đẳng thức: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Bài 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $3x^2+8x+4$

Lời giải

Ta có: $3x^2+8x+4=(4x^2+8x+4)-x^2=(2x+2)^2-x^2=(x+2)(3x+2)$

Cách 3: Tách hạng tử tự do c

- Ta tách c thành c_1 và c_2 để dùng phương pháp nhóm hạng tử hoặc tạo ra hằng đẳng thức bằng cách c_1 nhóm với ax^2 còn c_2 nhóm với bx

Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $3x^2+8x+4$

b) $4x^2-4x-3$

c) $9x^2+12x-5$

Lời giải

a. $3x^2+8x+16-12=(3x^2-12)+(x+16)=(x+2)(3x+2)$

b. $4x^2-4x-3=(4x^2-4x+1)-4=(2x-1)^2-2^2=(2x+1)(2x-3)$

c. $9x^2+12x-5=(9x^2+12x+4)-9=(3x+2)^2-3^2=(3x+5)(3x-1)$

2. Đối với đa thức bậc ba trở lên (dùng phương pháp nhẩm nghiệm)

Cơ sở để phân tích: Xét đa thức $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0(a_n...a_0\in Z,n\geq 1)$

+) Nếu x = a là nghiệm của P(x) thì P(a) = 0

<u>**Hệ Quả :**</u> Nếu $P_n(x)=0$ có nghiệm nguyên thì nghiệm đó là ước của a_0

+) Định lý Bezut: Nếu $P_n(x)=0$ có nghiệm x = a thì $P_n(x)=(x-a).\ H(x)_{\text{bậc }(n-1)}$

Bài 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: x^3-x^2-4

Lời giải

Ta nhận thấy nghiệm của f(x) nếu có thì $x=\pm1,\pm2\pm4$. Chỉ có f(2) = 0 nên x = 2 là nghiệm của f(x) nên f(x) có một nhận tử là x – 2. Do đó ta tách f(x) thành các nhóm có xuất hiện một nhân tử là x – 2

Cách 1: $x^3-x^2-4=(x^3-2x^2)+(x^2-2x)+(2x-4)=(x-2)(x^2+x+2)$

Cách 2: $x^3-x^2-4=x^3-8-x^2+4=(x^3-8)-(x^2-4)=(x-2)(x^2+x+2)$

Bài 5: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. x^3+x^2+4 b. x^3-5x^2+8x-4

Lời giải

a. Ta có các ước của 4 là: $\pm1;\pm2;\pm4$

Nhận thấy x = -2 là nghiệm của đa thức vậy đa thức có 1 nhân tử là: x – (-2) = x + 2

$\Rightarrow x^3+2x^2-x^2+4=(x+2)\underbrace{(x^2-x+2)}_{>0}$

Hoặc: $=(x^3+8)+(x^2-4)=(x+2)(x^2-x+2)$

b. Nhận thấy x = -1 là nghiệm của đa thức nên có 1 nhân tử là: x + 1

$x^3-5x^2+8x-4=(x^3-x^2)-(4x^2-4x)+(4x-4)=(x-1)(x-2)^2$

***) Chú ý:**

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì f(x) có một nhân tử là x – 1

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì f(x) có một nhân tử là x + 1

Bài 6: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $2x^2+7x+5$ b. x^4+x^3-x-1 c. $x^3-19x-30$ d. $x^3+4x^2-7x-10$ e. $2x^4-5x^3-5x^2+5x+3$

Lời giải

a. Ta có: 2 + 5 = 7 nên đa thức có 1 nhân tử là x + 1. $2x^2+7x+5=(x+1)(6x+5)$

b. Ta có tổng các hệ số bằng 0 và tổng chẵn cũng bằng tổng lẻ nên có nhân tử x^2 -1

$x^4+x^3-x-1=(x^4-1)+(x^3-x)=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$

$x^4+x^3-x-1=(x^4+x^3)-(x-1)=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$

c. Ta có x = -3 là nghiệm nên có nhân tử là x + 3

$x^3-19x-30=x^3+3x^2-3x^2-9x-10x-30=(x+3)(x^2-3x-10)=(x+3)(x+2)(x-5)$

d. Ta có: x = -1 là nghiệm của đa thức nên có nhân tử là: x + 1

$x^3+4x^2-7x-10=x^3+x^2+3x^2+3x-10x-10=(x+1)(x-2)(x+5)$

e. Ta có tổng chẵn bằng tổng lẻ nên có nhân tử: x + 1, sau đó lại tổng chẵn bằng tổng lẻ.

$2x^4-5x^3-5x^2+5x+3=(x-1)(x+1)(x-3)(2x+1)$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3+6x^2+11x+6$

Lời giải

Bấm máy ta thấy đa thức có ba nghiệm nguyên là -1, -2, -3, nên ta phân tích :

$x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x+2)(x+3)$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3+4a^2-29a+24$

Lời giải

Bấm máy nhận thấy đa thức có ba nghiệm là 1,3 và -8, nên sẽ có chứa các nhân tử

(a - 1), (a - 3) và (a + 8),

Ta có: $a^3+4a^2-29a+24=\left(a^3-a^2\right)+\left(5a^2-5a\right)+\left(-24a+24\right)$

$a^2\left(a-1\right)+5a\left(a-1\right)-24\left(a-1\right)=\left(a-1\right)\left(a^2+5a-24\right)=\left(a-1\right)\left(a-3\right)\left(a+8\right)$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử: x^3+5x^2+8x+4

Lời giải

Nhận xét : Tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ nên đa thức có một nhân tử là: x + 1

Như vậy ta có : $x^3+5x^2+8x+4=\left(x^3+x^2\right)+\left(4x^2+4x\right)+\left(4x+4\right)=\left(x+1\right)\left(x+2\right)^2$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $6a^4+7a^3-37a^2-8a+12$

Lời giải

Nhẩm thấy đa thức có nghiệm là x = 2, hay có 1 nhân tử là: x - 2

Ta có: $6a^4+7a^3-37a^2-8a+12=(6a^4-12a^3)+(19a^3-38a^2)+\left(a^2-2a\right)-\left(6a-12\right)$

$6a^3\left(a-2\right)+19a^2\left(a-2\right)+a\left(a-2\right)-6\left(a-2\right)=\left(a-2\right)\left(6a^3+19a^2+a-6\right)=$

$\left(a-2\right)\left(a+3\right)\left(2a-1\right)\left(3a+2\right)$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+6x^3+13x^2+12x+4$

Lời giải

Thấy tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ, nên đa thức có 1 nghiệm bằng -1

Ta có: $x^4+6x^3+13x^2+12x+4=\left(x^4+x^3\right)+\left(5x^3+5x^2\right)+\left(8x^2+8x\right)+\left(4x+4\right)$

$=x^3\left(x+1\right)+5x^2\left(x+1\right)+8x\left(x+1\right)+4\left(x+1\right)=\left(x+1\right)\left(x^3+5x^2+8x+4\right)=\left(x+1\right)^2\left(x+2\right)^2$

***) Trường hợp đặc biệt: Đa thức không có nghiệm nguyên.**

Xét đa thức $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0(a_n...a_0\in Z,n\geq 1)$

+) Nếu $P_n(x)=0$ có nghiệm $x=\dfrac{p}{q}[(p;q)=1]\Rightarrow\begin{cases}a_n\,\vdots\,q\\a_0\,\vdots\,p\end{cases}$

Bài 12: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $3x^3-7x^2+17x-5$

b. $9x^4+15x^3+43x^2+22x-40$

c. $6x^4+x^3+19x^2-31x-30$

Lời giải

a. Các ước của 5 là: $\pm1;\pm5$. Nhận thấy đa thức không có nghiệm nguyên, ta đi tìm nghiệm hữu tỷ của đa thức

$x=\frac{p}{q}\Leftrightarrow\begin{cases}p\in U(-5)\\q\in U(3)\end{cases}$ ta thấy nghiệm của đa thức là $x=\frac{1}{3}$ nên có nhân tử $x-\frac{1}{3}$ hay 3x -1

Vậy: $3x^3-7x^2+17x-5=3x^3-x^2-6x^2+2x+15x-5=(3x-1)(x^2-2x+5)$

b. Ta thấy đa thức có 1 nhân tử là: $x-\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3x-2$

$9x^4+15x^3+43x^2+22x-40=(3x-2)(3x^3+7x^2+19x+20)$

Lại có nhân tử là: 3x + 4 $\Rightarrow(3x-2)(3x^3+7x^2+19x+20)=(3x-2)(3x+4)(x^2+x+5)$

c. $6x^4+x^3+19x^2-31x-30=(2x-3)(3x+2)(x^2+x+5)$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 13: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^5-2x^4+3x^3-4x^2+2$

Lời giải

Nhận xét: Tổng các hệ số bằng 0 nên đa thức có một nhân tử là: x – 1, chia đa thức cho x – 1 ta được: $x^5-2x^4+3x^3-4x^2+2=(x-1)(x^4-x^3+2x^2-2x-2)$

Vì $(x^4-x^3+2x^2-2x-2)$ không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỷ nên không phân tích được nữa

Vậy $x^5-2x^4+3x^3-4x^2+2=(x-1)(x^4-x^3+2x^2-2x-2)$

Bài 14: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4+2017x^2+2016x+2017$

Lời giải

Cách 1:

$x^4+2017x^2+2016x+2017=(x^4+x^2+1)+(2016x^2+2016x+2016)=(x^2+x+1)(x^2-x+2017)$

Cách 2:

$x^4+2017x^2+2016x+2017=(x^4-x)+(2017x^2+2017x+2017)=(x^2+x+1)(x^2-x+2017)$

Bài 15: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2-x+2017.2018$

Lời giải

Ta có: $x^2-x+2017.2018=x^2+2017x-2018x+2017.2018=(x+2017)(x-2018)$

Bài 16: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+6x^3+7x^2-6x+1$

Lời giải

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính

Và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1

Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau:

Nên ta làm như sau:

$x^4+6x^3+7x^2-6x+1=x^2\left(x^2+6x+7+\frac{-6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x-\frac{1}{x}\right)+7\right)$

Đặt $x-\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$

Đa thức trở thành : $x^2\left(t^2+2+6t+7\right)=x^2\left(t^2+6t+9\right)=x^2\left(t+3\right)^2$

Thay t trở lại ta được : $x^2\left(x-\frac{1}{x}+3\right)^2=x^2\left(\frac{x^2-1+3x}{x}\right)^2=(x^2+3x-1)^2$

Vậy $x^4+6x^3+7x^2-6x+1=\left(x^2+3x-1\right)^2$

Bài 17: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3+6x^2+11x+6$

Lời giải

Bấm máy ta thấy đa thức có ba nghiệm nguyên là -1, -2, -3, nên ta phân tích :

$x^3+6x^2+11x+6=\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)$

Bài 18: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)\left(x+7\right)+15$

Lời giải

Với dạng này, ta chỉ việc lấy số nhỏ nhất nhân với số lớn nhất, để tạo ra những số hạng giống nhau : $\left(x+1\right)\left(x+7\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)+15=\left(x^2+8x+7\right)\left(x^2+8x+15\right)+15$

Đặt $x^2+8x=t \Rightarrow \left(t+7\right)\left(t+15\right)+15=t^2+22t+105+15=t^2+22t+120$

$=\left(t+10\right)\left(t+12\right)=\left(x^2+8x+10\right)\left(x^2+8x+12\right)=\left(x^2+8x+10\right)\left(x+6\right)\left(x+2\right)$

Bài 19: Phân tích đa thức thành nhân tử: $3x^3-7x^2+17x-5$

Lời giải

Bấm máy tính cho ta có nghiệm là $x=\frac{1}{3}$, nên có nhân tử là : (3x - 1)

nên ta có : $3x^3-7x^2+17x-5=3x^3-x^2-6x^2+2x+15x-5$

$=x^2\left(3x-1\right)-2x\left(3x-1\right)+5\left(3x-1\right)=\left(3x-1\right)\left(x^2-2x+5\right)$

Bài 20: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^3-5x^2+8x-3$

Lời giải

Bấm máy tính cho ta có nghiệm là $x=\frac{1}{2}$, nên có nhân tử là : (2x - 1)

Nên ta có : $2x^3-5x^2+8x-3=2x^3-x^2-4x^2+2x+6x-3$

$=x^2\left(2x-1\right)-2x\left(2x-1\right)+3\left(2x-1\right)=\left(2x-1\right)\left(x^2-2x+3\right)$

Bài 21: Phân tích đa thức thành nhân tử: $3x^3-14x^2+4x+3$

Lời giải

Bấm máy tính cho ta nghiệm là : $x=\frac{-1}{3}$ nên có 1 nhân tử là : (3x + 1)

Ta có : $3x^3-14x^2+4x+3=3x^3+x^2-15x^2-5x+9x+3$

$x^2(3x+1)-5x(3x+1)+3(3x+1)=(3x+1)(x^2-5x+3)$

Bài 22: Phân tích đa thức thành nhân tử: x^3+5x^2+8x+4

Lời giải

Bấm máy tính cho ta nghiệm là : x= -1 và x= -2

Như vậy ta có : $x^3+5x^2+8x+4=(x+1)(x+2)^2$

Bài 23: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+1997x^2+1996x+1997$

Lời giải

Ta có: $(x^4+x^2+1)+(1996x^2+1996x+1996)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)+1996(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1997)$

Bài 24: Phân tích thành nhân tử: $x^4+2004x^2+2003x+2004$

Lời giải

$=x^4+2004x^2+2004x-x+2004=(x^4-x)+2004(x^2+x+1)$

$=x(x^3-1)+2004(x^2+x+1)=x(x-1)(x^2+x+1)+2004(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+2004)$

Bài 25: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2-x-2001.2002$

Lời giải

Ta có: $x^2-x-2001(2001+1)=x^2-x+2001^2-2001=(x^2-2001^2)-(x+2001)$

$(x-2011)(x+2011)-(x+2011)=(x+2011)(x-2012)$

Bài 26: Phân tích đa thức thành nhân tử: $6a^4+7a^3-37a^2-8a+12$

Lời giải

Nhẩm thấy đa thức có nghiệm là x = 2, hay có 1 nhân tử là x - 2

Ta có : $6a^4+7a^3-37a^2-8a+12=(6a^4-12a^3)+(19a^3-38a^2)+(a^2-2a)-(6a-12)$

$6a^3(a-2)+19a^2(a-2)+a(a-2)-6(a-2)=(a-2)(6a^3+19a^2+a-6)$ =

$(a-2)(a+3)(2a-1)(3a+2)$

Bài 27: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+6x^3+13x^2+12x+4$

Lời giải

Thấy tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ, nên đa thức có 1 nghiệm bằng -1

Ta có : $x^4+6x^3+13x^2+12x+4=\left(x^4+x^3\right)+\left(5x^3+5x^2\right)+\left(8x^2+8x\right)+\left(4x+4\right)$

$= x^3\left(x+1\right)+5x^2\left(x+1\right)+8x\left(x+1\right)+4\left(x+1\right)=\left(x+1\right)\left(x^3+5x^2+8x+4\right)$

$= \left(x+1\right)^2\left(x+2\right)^2$

3. Đối với đa thức nhiều biến

Tương tự như phân tích đa thức dạng: ax^2+bx+c

Bài 28: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $2x^2-5xy+2y^2$

b. $2x^2-5xy-3y^2$

c. $a^2+2ab+b^2-2a-2b+1$

d. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

Lời giải

a. $2x^2-5xy+2y^2=(2x^2-4xy)-(xy-2y^2)=(x-2y)(2x-y)$

b. $2x^2-5xy-3y^2=2x^2-2xy-3xy-3y^2=(x-3y)(2x+y)$

c. $a^2+2ab+b^2-2a-2b+1=(a+b)^2-2(a+b)+1=(a+b-1)^2$

d. Ta có:

$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=z^2(x-y)+x^2y-x^2z+y^2z-y^2x=z^2(x-y)+xy(x-y)-z(x^2-y^2)$
$=(x-y)(y-z)(z-x)$

B. PHƯƠNG PHÁP NHÓM HẠNG TỬ

– Kết hợp các hạng tử thích hợp thành từng nhóm.

– Áp dụng liên tiếp các phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức.

Bài 1: Phân tích thành nhân tử $A=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$

Lời giải:

$A=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc=a(a^2+2ab+b^2)+(ab^2+a^2b)+(ac^2+bc^2)$

$=c(a+b)^2+ab(a+b)+c^2(a+b)=(a+b)(b+c)(c+a)$

Bài 2: Phân tích thành nhân tử: $A=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$

Lời giải:

$A=(ab^2+a^2b+abc)+(ac^2+a^2c+abc)+(bc^2+b^2c+abc)=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Bài 3: Phân tích thành nhân tử: $A=abc-(ab+bc+ca)+a+b+c-1$

Lời giải

$A=(abc-bc)-(ab-b)-(ac-c)+(a-1)=(a-1)(b-1)(c-1)$

Bài 4: Phân tích thành nhân tử: $A=8abc+4(ab+bc+ca)+2(a+b+c)+1$

Lời giải

$A=(8ab+4bc)+(4ab+2b)+(4ac+2c)+(2a+1)=(2a+1)(2b+1)(2c+1)$

Bài 5: Phân tích thành nhân tử: $A=a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+c(a^3+b^3)+abc(a+b+c)$

Lời giải

Ta có: $A=(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)$

C. PHƯƠNG PHÁP DÙNG HẰNG ĐẲNG THỨC

Cần nắm chắc cách biến đổi các hằng đẳng thức sau:

1) $\left(a+b\right)^2=a^2+b^2+2ab=\left(a-b\right)^2+4ab$

2) $\left(a-b\right)^2=a^2+b^2-2ab=\left(a+b\right)^2-4ab$

3) $a^2+b^2=\left(a+b\right)^2-2ab=\left(a-b\right)^2+2ab$

4) $a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)=\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)$

5) $a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)=\left(a-b\right)^3+3ab\left(a-b\right)$

6, $2\left(a^2+b^2\right)=\left(a+b\right)^2+\left(a-b\right)^2$

7) $\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2=4ab$

8) $a^4+b^4=\left(a+b\right)\left(a-b\right)\left[\left(a+b\right)^2-2ab\right]$

9) $a^4+b^4=\left[\left(a+b\right)^2-2ab\right]^2-2\left(ab\right)^2$.

10) $a^3+b^3+c^3-3abc=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$.

11) $a^4+a^2b^2+b^4=\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$.

12) $a^4+a^2+1=\left(a^2+a+1\right)\left(a^2-a+1\right)$.

13) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

Bài 1: Phân tích thành nhân tử

a. $8-27a^3b^6$

b. $x^2-y^2+10x-6y+16$

c. $a^3+b^3+c^3-3abc$

d. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

Lời giải

a. $8-27a^3b^6=2^3-(3ab^2)^3=(2-3ab^2)(4+6ab^2+9a^2b^4)$

b. $x^2-y^2+10x-6y+16=(x+5)^2-(y+3)^2=(x+y+8)(x-y+2)$

c. Ta có:

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=(a+b+c)\left[\left(a+b\right)^2-(a+b)c+c^2\right]$

$-3ab\left(a+b+c\right)=\left(a+b+c\right)\left[\left(a+b\right)^2-(a+b)c+c^2-3ab\right]=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

d. $=\left[(a+b)+c\right]^3-a^3-b^3-c^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3-(a^3+b^3)-c^3$

$=(a+b)\left[a^2+2ab+b^2+3ac+3bc+3c^2-a^2+ab-b^2\right]=3\left(ab+ac+bc+c^2\right)=3(a+b)(b+c)(c+a)$

Bài 2: Phân tích thành nhân tử

a. $x^3+y^3-3xy+1$

b. $4x^2+9y^2-12xy+4x-6y+3$

c. $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$

Lời giải

a. Ta có:

$x^3+y^3+3xy(x+y)-3xy(x+y)-3xy+1=(x+y)^3+1-3xy(x+y+1)=(x+y+1)(x^2-xy+y^2-x-y+1)$

b. Ta có: $4x^2+9y^2-12xy+4x-6y+3$

$=(2x)^2+(3y)^2-2.2x.3y+2(2x-3y)+1-4=(2x-3y)^2-2^2=(2x-3y-1)(2x-3y+3)$

c. Ta có:

$4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2a^2b^2-2c^2a^2)=(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2=(b+c-a)(b+c+a)(a-b+c)(a+b-c)$

Bài 3: Cho biểu thức: $A=\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-4b^2c^2$

a) Phân tích A thành nhân tử

b) Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác thì A< 0

Lời giải

a) Ta có: $A=\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-4b^2c^2=\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-\left(2bc\right)^2$

$=\left(b^2+c^2-a^2-2bc\right)\left(b^2+c^2-a^2+2bc\right)=(b+c-a)(b+c+a)(b-c-a)(b-c+a)$

b) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác nên:

$b+c-a>0, b+c+a>0, b-c-a<0, b-c+a>0 \Rightarrow A<0$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+2010x^2+2009x+2010$

Lời giải

$x^4+x^2+1+2009x^2+2009x+2009=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)+2009\left(x^2+x+1\right)$

$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2010\right)$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử (Sử dụng tách hạng tử)

a. x^3-7x+6

b. x^3+5x^2+8x+4

c. $x^3-9x^2+6x+16$

d. $x^4-30x^2+31x-30$

e. $x^4+2010x^2+2009x+2010$

Lời giải

a. $x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$

b. $x^3+5x^2+8x+4=(x+1)(x+2)^2$

c. $x^3-9x^2+6x+16=(x+1)(x-2)(x-8)$

d. $x^4-30x^2+31x-30=(x-5)(x+6)(x^2-x+1)$

e. $x^4+2010x^2+2009x+2010=(x^4-x)+2010x^2+2010x+2010=(x^2+x+1)(x^2-x+2010)$

Bài 2: Phân tích thành nhân tử: $A=abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8$

Lời giải

$A=abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8=(a-2)(b-2)(c-2)$

Bài 3: Phân tích thành nhân tử: $A=x^3-2x^2y+x^2+x-2xy-2y$

Lời giải

$A=x^3-2x^2y+x^2+x-2xy-2y=(x-2y)(x^2+x+1)$

Bài 4: Phân tích thành nhân tử: $A=ab^3+bc^3+ca^3-a^3b-b^3c-c^3a$

Lời giải

$A=ab^3+bc^3+ca^3-a^3b-b^3c-c^3a=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

Bài 5: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử (dùng hằng đẳng thức)

a. $x^2+4y^2+4xy+6x+12y+5$ **b.** x^8+3x^4+4

Lời giải

a. $x^2+4y^2+4xy+6x+12y+5=(x+2y+1)(x+2y+5)$

b. $x^8+3x^4+4=(x^4+x^2+2)(x^4-x^2+2)$

D. PHƯƠNG PHÁP THÊM, BỚT CÙNG MỘT HẠNG TỬ

- Các đa thức không thể sử dụng các phương pháp như đặt nhân tử chung, nhóm hạng tử và sủ dụng hằng đẳng thức cũng như đoán nghiệm,

- Trong các thành phần của đa thức có chứa các hạng tử bậc 4, ta sẽ thêm bớt để đưa về hằng đẳng thức số 3: $a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$

- Đôi khi thêm, bớt hạng tử để làm xuất hiện nhân tử chung

1. Thêm, bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện hằng đẳng thức: $a^2 - b^2$

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. a^4+4 **b.** $4x^4+81y^4$ **c.** x^8+98x^4+1

d. $216-125x^3$ **e.** x^6-64y^6 **f.** a^4+3a^2+4

Lời giải

a. $a^4+4=a^4+2^2+2.a^2.2-2.2.a^2=(a^2+2)^2-(2a)^2=(a^2-2a+2)(a^2+2a+2)$

b. $=(2x+9y)^2-(6xy)^2=(2x^2+9y^2-6xy)(2x^2+9y^2+6xy)$

c.

$x^8+98x^4+1=(x^8+2x^4+1)+96x^4=(x^4+1)^2+16x^2(x^4+1)+64x^4-16x^2(x^4+1)+32x^4$
$=(x^4+1+8x^2)^2-16x^2(x^4+1-2x^2)=(x^4+8x^2+1)^2-(4x^3-4x)^2=...$

e. $x^6-64y^6=(x^3)^2-(8y^3)^2$

f. $a^4+3a^2+4=(a^2+2)^2-a^2=(a^2-a+2)(a^2+a+2)$

2. Thêm, bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện nhân tử chung

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. x^5+x^4+1 **b.** x^8+x^7+1 **c.** x^8+x^4+1

Lời giải

a. $x^5+x^4+1=x^5+x^4+x^3+1-x^3=x^3(x^2+x+1)-(x-1)(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x+1)$

b. $x^8+x^7+1=x^8+x^7+x^6-x^6+1=(x^2+x+1)[x^6-(x-1(x^3+1)]=(x^2+x+1)(x^6-x^4+x^3-x+1)$

c. $x^8+x^4+1=(x^4+1)^2-(x^2)^2=(x^4-x^2+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. x^8+x+1 **b.** x^5+x-1

c. x^4+x^2+1 **d.** x^7+x^5+1

Lời giải

a. $x^8+x+1=x^8-x^2+x^2+x+1=x^2(x^6-1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)[x^2(x-1)(x^3+1)+(x^2+x+1)]$

b. $x^5+x-1=x^5-x^4+x^3+x^4-x^3+x^2-x^2+x-1=x^3(x^2-x+1)-x^2(x^2-x+1)-(x^2-x+1)$
$=(x^2-x+1)(x^3-x^2-1)$

Hoặc: $x^5+x-1=x^5+x^2-x^2+x-1=x^2(x^3+1)-x^2+x-1=(x^2-x+1)(x^3-x^2-1)$

c) Cách 1: $x^4+x^2+1=\left(x^4+2x^2+1\right)-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

Cách 2: $x^4+x^2+1=x^4-x^3+x^2+x^3+1=x^2\left(x^2-x+1\right)+\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

Cách 3:
$x^4+x^2+1=x^4+x^3+x^2-\left(x^3-1\right)=x^2\left(x^2+x+1\right)+\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x-1\right)$

d) Ta có: $x^7+x^5+1=\left(x^7-x\right)+\left(x^5-x^2\right)+\left(x^2+x+1\right)=x\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)+x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=\left(x^2+x+1\right)\left[\left(x^5-x^4+x^2-x\right)+\left(x^3-x^2\right)+1\right]=\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^2-x+1\right)$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $4x^4+81$ b) $64x^4+y^4$

Lời giải

a) Ta có : $4x^4+81=\left(2x^2\right)^2+9^2+2.2x^2.9-2.2x^2.9=\left(2x^2+9\right)^2-36x^2$

$=\left(2x^2+9\right)^2-(6x)^2=\left(2x^2+6x+9\right)\left(2x^2-6x+9\right)$

b) Ta có : $64x^4+y^4=\left(8x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.8x^2.y^2-2.8x^2.y^2=\left(8x^2+y^2\right)^2-16x^2y^2$

$=\left(8x^2+y^2\right)^2-(4xy)^2=\left(8x^2+4xy+y^2\right)\left(8x^2-4xy+y^2\right)$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $4x^4+y^4$ b) $4x^8+1$ c) x^4y^4+4

Lời giải

a) Ta có : $4x^4+y^4=\left(2x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2=\left(2x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.2x^2.y^2-4x^2y^2$

$=\left(2x^2+y^2\right)^2-(2xy)^2=\left(2x^2+y^2+2xy\right)\left(2x^2+y^2-2xy\right)$

b) Ta có : $4x^8+1=\left(2x^4\right)^2+1+2.2x^4.1-4x^4=\left(2x^4+1\right)^2-\left(2x^2\right)^2=\left(2x^4+2x^2+1\right)\left(2x^4-2x^2+1\right)$

c) Ta có : $x^4y^4+4=\left(x^2y^2\right)^2+2^2=\left(x^2y^2\right)^2+2^2+2.x^2.y^2.2-4x^2y^2$

$=\left(x^2y^2+2\right)^2-(2xy)^2=\left(x^2y^2-2xy+2\right)\left(x^2y^2+2xy+2\right)$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) x^8+x^4+1 b) x^7+x^5+1

Lời giải

a) Ta có: $x^8+x^4+1=x^8+x^4+x^4+1-x^4=x^8+2x^4+1-x^4$

$=\left(x^4+1\right)^2-\left(x^2\right)^2=\left(x^4+x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$

b) Ta có: $x^7+x^5+1=x^7+x^5+(x^2+x)+1-x^2-x=\left(x^7-x\right)+\left(x^5-x^2\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=x\left(x^6-1\right)+x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)=x\left(x^3+1\right)\left(x^3-1\right)+x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=x\left(x^3+1\right)(x-1)\left(x^2+x+1\right)+x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^2-x\right)+\left(x^3-x^2\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^2-x+x^3-x^2+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^3-2x^2-x+1\right)$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) x^7+x^2+1 b) x^5+x-1 c) x^8+x+1

Lời giải

a) Ta có: $x^7+x^2+1=\left(x^7-x\right)+\left(x^2+x+1\right)=x\left(x^6-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=x\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)+\left(x^2+x+1\right)=x(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^3+1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^2-x+1\right)$

b) Ta có: $x^5+x-1=\left(x^5+x^2\right)+\left(-x^2+x-1\right)=x^2\left(x^3+1\right)-\left(x^2-x+1\right)$

$=x^2\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)=\left(x^2-x+1\right)\left(x^3+x^2-1\right)$

c) Ta có: $x^8+x+1=\left(x^8-x^2\right)+\left(x^2+x+1\right)=x^2\left(x^6-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=x^2\left(x^3+1\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^6-x^5+x^3-x^2+1\right)$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $64x^4+y^4$ b) $4x^4+y^4$ c) x^4+324

Lời giải

a) Ta có: $64x^4+y^4=\left(8x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.8x^2y^2-16x^2.y^2=\left(8x^2+y^2\right)^2-\left(4xy\right)^2$

$=\left(8x^2+y^2-4xy\right)\left(8x^2+y^2+4xy\right)$

b) Ta có: $4x^4+y^4=\left(2x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2=\left(2x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.2x^2.y^2-4x^2y^2$

$=\left(2x^2+y^2\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(2x^2+y^2-2xy\right)\left(2x^2+y^2+2xy\right)$

c) Ta có: $x^4+324=\left(x^2\right)^2+\left(18\right)^2=\left(x^2\right)^2+\left(18\right)^2+2.x^2.18-36x^2$

$=\left(x^2+18\right)^2-\left(6x\right)^2=\left(x^2+18+6x\right)\left(x^2+18-6x\right)$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) x^4+64 b) $81x^4+4y^4$ c) x^4+4y^4

Lời giải

a) Ta có: $x^4+64=\left(x^2\right)^2+8^2=\left(x^2\right)^2+8^2+2.x^2.8-16x^2$

$=\left(x^2+8\right)^2-\left(4x\right)^2=\left(x^2+8-4x\right)\left(x^2+8+4x\right)$

b) Ta có: $81x^4+4y^4=\left(9x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2=\left(9x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2+2.9x^2.2y^2-36x^2y^2$

$\left(9x^2+2y^2\right)-\left(6xy\right)^2=\left(9x^2+2y^2-6xy\right)\left(9x^2+2y^2+6xy\right)$

c) Ta có: $x^4+4y^4=\left(x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2=\left(x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2+2.x^2.2y^2-4x^2y^2$

$=\left(x^2+2y^2\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(x^2+2y^2+2xy\right)\left(x^2+2y^2-2xy\right)$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) x^4y^4+4 b) $4x^4y^4+1$ c) $4x^4+81$

Lời giải

a) Ta có: $x^4y^4+4=\left(x^2y^2\right)^2+2^2=\left(x^2y^2\right)^2+2^2+2.x^2y^2.2-4x^2.y^2$

$\left(x^2y^2+2\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(x^2y^2-2xy+2\right)\left(x^2y^2+2xy+2\right)$

b) Ta có: $4x^4y^4+1=\left(2x^2y^2\right)^2+1=\left(2x^2y^2\right)^2+1+2.2x^2y^2-4x^2y^2$

$\left(2x^2y^2+1\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(2x^2y^2+1+2xy\right)\left(2x^2y^2+1-2xy\right)$

c) Ta có: $4x^4+81=\left(2x^2\right)^2+9^2=\left(2x^2\right)^2+9^2+2.2x^2.9-36x^2$

$=\left(2x^2+9\right)^2-\left(6x\right)^2=\left(2x^2+9+6x\right)\left(2x^2+9-6x\right)$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $64x^4+y^4$ b) a^4+64 c) a^4+4b^2

Lời giải

a) Ta có: $64x^4+y^4=\left(8x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2=\left(8x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.8x^2.y^2-16x^2y^2$

$=\left(8x^2+y^2\right)^2-\left(4xy\right)^2=\left(8x^2+y^2+4xy\right)\left(8x^2+y^2-4xy\right)$

b) Ta có: $a^4+64=\left(a^2\right)^2+8^2=\left(a^2\right)^2+8^2+2.a^2.8-16a^2$

$=\left(a^2+8\right)^2-\left(4a\right)^2=\left(a^2+8+4a\right)\left(a^2+8-4a\right)$

c) Ta có: $a^4+4b^4=\left(a^2\right)^2+\left(2b^2\right)^2+2.a^2.2b^2-4a^2.b^2$

$=\left(a^2-2b^2\right)^2-\left(2ab\right)^2=\left(a^2-2b^2+2ab\right)\left(a^2-2b^2-2ab\right)$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) x^4+4 b) $4x^8+1$

Lời giải

a) Ta có: $x^4+4=\left(x^2\right)^2+2^2+2.x^2.2-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-\left(2x\right)^2=\left(x^2+2-2x\right)\left(x^2+2+2x\right)$

b) Ta có: $4x^8+1=\left(2x^4\right)^2+1^2+2.2x^4.1-4x^4=\left(2x^4+1\right)^2-\left(2x^2\right)^2=\left(2x^4+1-2x^2\right)\left(2x^4+1+2x^2\right)$

Bài 13: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^{64}+x^{32}+1$ b) $a^{10}+a^5+1$ c) x^5-x^4-1

Lời giải

a) Ta có: $x^{64}+x^{32}+1=x^{64}+2.x^{32}+1-x^{32}=\left(x^{32}+1\right)^2-x^{32}=\left(x^{32}+1+x^{16}\right)\left(x^{32}+1-x^{16}\right)$

b) Ta có: $a^{10}+a^5+1=\left(a^{10}-a\right)+\left(a^5-a^2\right)+\left(a^2+a+1\right)=a\left(a^9-1\right)+a^2\left(a^3-1\right)+\left(a^2+a+1\right)$

$=a\left((a^3)^3-1\right)+a^2\left(a^3-1\right)+\left(a^2+a+1\right)=a\left(a^3-1\right)\left(a^6+2a^3+1\right)+a^2\left(a^3-1\right)+\left(a^2+a+1\right)$

$=\left(a^7+2a^4+a\right)\left(a-1\right)\left(a^2+a+1\right)+a^2\left(a-1\right)\left(a^2+a+1\right)+\left(a^2+a+1\right)$

$=\left(a^2+a+1\right)\left[\left(a^7+2a^4+a\right)\left(a-1\right)+\left(a^3-a^2\right)+1\right]$

c) Ta có: $x^5-x^4-1=\left(x^5-x^4+x^3\right)-\left(x^3+1\right)=x^3\left(x^2-x+1\right)-\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

$=\left(x^2-x+1\right)\left(x^3-x-1\right)$

E. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

1. Dạng P(x) = ax⁴ + bx² + c (a ≠ 0)

Đặt $t = x^2$, ta được $G(t) = at^2 + bt + c$. Sau đó dùng phương pháp tách hạng tử

Bài 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: x^4-5x^2+4

Lời giải

Đặt $t=x^2$, ta được: $t^2-5t+4=\left(t-1\right)\left(t-4\right)=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)$

2. Dạng *A(x) = (x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + e* mà a + b = c + d

Cách giải: $A(x)=(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+e=[x^2+(a+b)x+ab][x^2+(c+d)x+cd]+e$

Đặt $t=x^2+(a+b)x+ab$ ta có:

$x^2+(c+d)x+cd=t-ab+cd \Rightarrow G(t)=t(t-ab+cd)+e=t^2+(cd-ab)t+e$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(a+1\right)\left(a+2\right)\left(a+3\right)\left(a+4\right)+1$

Lời giải

Ta có : $\left(a+1\right)\left(a+4\right)\left(a+2\right)\left(a+3\right)+1=\left(a^2+5a+4\right)\left(a^2+5a+6\right)+1$

Đặt $a^2+5a+5=t$, Khi đó đa thức trở thành : $\left(t-1\right)\left(t+1\right)+1=t^2=\left(a^2+5a+5\right)^2$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)\left(x+5\right)-24$

Lời giải

Ta có : $\left(x+2\right)\left(x+5\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)-24=\left(x^2+7x+10\right)\left(x^2+7x+12\right)-24$

Đặt : $x^2+7x+11=t$, Khi đó đa thức trở thành

$\left(t-1\right)\left(t+1\right)-24=t^2-25=\left(t-5\right)\left(t+5\right)=\left(x^2+7x+6\right)\left(x^2+7x+16\right)=\left(x+1\right)\left(x+6\right)\left(x^2+7x+16\right)$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x-4\right)\left(x-5\right)\left(x-6\right)\left(x-7\right)-1680$

Lời giải

$\left(x-4\right)\left(x-7\right)\left(x-5\right)\left(x-6\right)-1689=\left(x^2-11x+28\right)\left(x^2-11x+30\right)-1680$

Đặt $x^2-11x+29=t$, Khi đó đa thức trở thành : $\left(t-1\right)\left(t+1\right)-1680=t^2-1681=\left(t-41\right)\left(t+41\right)$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+3x-4\right)\left(x^2+x-6\right)-24$

Lời giải

Ta có : $\left(x^2+3x-4\right)\left(x^2+x-6\right)-24=\left(x-1\right)\left(x+4\right)\left(x-2\right)\left(x+3\right)-24$

$\left(x-2\right)\left(x+4\right)\left(x-1\right)\left(x+3\right)-24=\left(x^2+2x-8\right)\left(x^2+2x-3\right)-24$

Đặt : $x^2+2x=t$, khi đó đa thức trở thành : $(t-8)(t-3)-24=t^2-11t=t(t-11)$

Thay t trở lại ta được : $(x^2+2x)(x^2+2x-11)=x(x+2)(x^2+2x-11)$

Bài 6: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $x(x+4)(x+6)(x+10)+128$

Lời giải

Ta có:

$x(x+4)(x+6)(x+10)+128=[x(x+10)][(x+4)(x+6)]+128=(x^2+10x)(x^2+10x+24)+128$

Đặt $x^2+10x+12=y\Rightarrow(y-12)(y+12)+128=y^2-144+128=y^2-16=(y+4)(y-4)$

$=(x^2+10x+8)(x^2+10x+16)=(x+2)(x+8)(x^2+10x+8)$

Bài 7: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-3$

b. $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$

Lời giải

a) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-3=\underbrace{(x^2-5x+4)}_{t}.\underbrace{(x^2-5x+6)}_{t+2}-3=t^2+2t-3=(t-1)(t+3)$

$=(x^2-5x+3)(x^2-5x+7)$

b) $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4=(x^2+5xy+5y^2)^2$

Bài 8: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $4(x^2+15x+50)(x^2+18x+72)-3x^2$

b) $(2x-1)(x-1)(x-3)(2x+3)+9$

Lời giải

a) $4(x^2+15x+50)(x^2+18x+72)-3x^2=4(x+5)(x+10)(x+6)(x+12)-3x^2$

$=4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60)-3x^2$

Đặt $t=x^2+16x+60\Rightarrow x^2+17x+60=t+x\Rightarrow 4[(t+x).t]\text{-}3x^2=4t^2+4tx-3x^2=(2t+x)^2-(2x)^2$

$=(2t-x)(2t+3x)=(2x^2+31x+120)(2x^2+25x+120)=(x+8)(2x+15)(2x^2+35x+120)$

b) Ta có:

$(2x-1)(x-1)(x-3)(2x+3)+9=(2x^2-3x+1)(2x^2-3x-9)+9=t^2-10t+9=x(2x-3)(2x^2-3x-8)$

3. Dạng: $(x + a)^4 + (x + b)^4$

Đặt $t=x+\dfrac{a+b}{2}$ ta có:

$$x=t-\frac{a+b}{2}\Rightarrow G(t)=\left(t-\frac{a+b}{2}+a\right)^4+\left(t-\frac{a+b}{2}+b\right)^4=\left(t-\frac{b-a}{2}\right)^4+\left(t+\frac{b-a}{2}\right)^4$$

$=....=ct^4+dt^2+e$ (Dạng 1)

Bài 9: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $(x+3)^4+(x+5)^4-2$

b. $(x+3)^4+(x+1)^4-16$

c. $(x+3)^4+(x+5)^4-16$

Lời giải

a. Đặt $t = x+4 \Rightarrow x = t-4 \Rightarrow (t-1)^4 + (t+1)^4 - 2$

$$=\left[(t-1)^2+(t+1)^2\right]^2 - 2 = 2t^4+12t^2 = 2t^2(t^2+6) = 2(x+4)^2\left[(x+4)^2+6\right]$$

b. Đặt $t = x+2 \Rightarrow (t+1)^4+(t-1)^4-16 = 2(t^4+6t^2-7) = 2(y^2+6y-7)(y=t^2) = ...$

c. $(x+3)^4+(x+5)^4-16 = 2(x+3)(x+5)\left[(x+4)^2+7\right]$

4. Dạng $P(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\left[\frac{e}{a}=\left(\frac{d}{b}\right)^2\right](a\neq 0)$

Cách giải: $P(x) = x^2[(ax^2+\frac{e}{x^2})+(bx+\frac{d}{x})+c]=x^2[a(x^2+\frac{e}{a.x^2})+b(x+\frac{d}{bx})+c]$

Đặt $t = x+\frac{d}{bx} \Rightarrow t^2 = x^2+2\frac{d}{b}+\left(\frac{d}{b}\right)^2.\frac{1}{x^2} = ...$

Bài 10: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $P(x) = 2x^4-21x^3-30x^2-105x+50$

b. $x^4-3x^3-6x^2+3x+1$

c. $x^4+6x^3+7x^2-6x+1(x\neq 0)$

Lời giải

a. $P(x) = 2x^4-21x^3-30x^2-105x+50$

$$P(x) = x^2\left(2x^2-30-21x-\frac{105}{x}+\frac{50}{x^2}\right) = x^2\left[2\left(x^2+\frac{25}{x^2}\right)-21\left(x+\frac{5}{x}\right)-30\right]$$

Đặt $t = x+\frac{5}{x} \Rightarrow t^2 = x^2+\frac{25}{x^2}+2.x.\frac{5}{x} \Rightarrow x^2+\frac{25}{x^2} = t^2-10$

$$G(t) = 2(t^2-10)-21t-30 = 2t^2-21t-50 = (t+2)(2t-25)$$

$$P(x) = x^2\left[2\left(x+\frac{5}{x}\right)-25\right]\left[\left(x+\frac{5}{x}\right)+2\right] = (2x^2-25x+10)(2x^2+2x+5)$$

b. $x^4-3x^3-6x^2+3x+1$

Có $\left(\frac{d}{b}\right)^2 = \left(\frac{3}{-3}\right)^2 = 1 = \frac{e}{a}$

$$P(x) = x^2\left(x^2-3x-6+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x-\frac{1}{x}\right)-6\right]$$

Đặt $x-\frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2+\frac{1}{x^2}-2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2} = t^2+2$; $G(t) = t^2+2-3t-6 = t^2-3t-4 = (t+1)(t-4)$

$$P(x) = x^2\left(x-\frac{1}{x}+1\right)\left(x-\frac{1}{x}-4\right) = (x^2+x-1)(x^2-4x-1)$$

c. $x^4+6x^3+7x^2-6x+1 \quad (x\neq 0)$

$$x^4+6x^3+7x^2-6x+1=x^2\left(x^2+6x+7-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x-\frac{1}{x}\right)+7\right]$$

Đặt $y=x-\frac{1}{x}\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2\Rightarrow A=x^2\left(y^2+2+6y+7\right)=x^2\left(y+3\right)^2=\left(xy+3x\right)^2$

$$=\left[x\left(x-\frac{1}{x}\right)+3x\right]^2=\left(x^2+3x-1\right)^2$$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+6x^3-11x^2+6x+1$

Lời giải

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính

và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1

Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau, nên ta làm như sau:

$$x^4+6x^3+7x^2+6x+1=x^2\left(x^2+6x+7+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x+\frac{1}{x}\right)+7\right)$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Đa thức trở thành :

$$x^2\left(t^2-2+6t+7\right)=x^2\left(t^2+6t+5\right)=x^2\left(t+1\right)\left(t+5\right)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)=x^2\left(\frac{x^2+1+x}{x}\right)\left(\frac{x^2+1+5x}{x}\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+5x+1\right)$$

Vậy $x^4+6x^3+7x^2-6x+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+5x+1\right)$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+10x^3+26x^2+10x+1$

Lời giải

$$x^4+10x^3+26x^2+10x+1=x^2\left(x^2+10x+26+\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+10\left(x-\frac{1}{x}\right)+26\right)$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ đa thức trở thành :

$$x^2\left(t^2-2+10t+26\right)=x^2\left(t^2+10t+24\right)=x^2\left(t+4\right)\left(t+6\right)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}+4\right)\left(x+\frac{1}{x}+6\right)=x^2\left(\frac{x^2+4x+1}{x}\right)\left(\frac{x^2+6x+1}{x}\right)=\left(x^2+4x+1\right)\left(x^2+6x+1\right)$$

Vậy $x^4+10x^3+26x^2+10x+1=\left(x^2+4x+1\right)\left(x^2+6x+1\right)$

Bài 13: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4-7x^3+14x^2-7x+1$

Lời giải

$$x^4-7x^3+14x^2-7x+1=x^2\left(x^2-7x+14+\frac{-7}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14\right)$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ đa thức trở thành :

$$x^2\left(t^2-2-7t+14\right)=x^2\left(t^2-7t+12\right)=x^2\left(t-3\right)\left(t-4\right)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}-3\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)=x^2\left(\frac{x^2-3x+1}{x}\right)\left(\frac{x^2-4x+1}{x}\right)=\left(x^2-3x+1\right).\left(x^2-4x+1\right)$$

Vậy $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2-4x+1\right)$

Bài 14: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+x^3-4x^2+x+1$

Lời giải

$$x^4+x^3-4x^2+x+1=x^2\left(x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right)$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ đa thức trở thành :

$$x^2\left(t^2-2+t-4\right)=x^2\left(t^2+t-6\right)=x^2\left(t-2\right)\left(t+3\right)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}+3\right)=x^2\left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right)\left(\frac{x^2+3x+1}{x}\right)=\left(x-1\right)^2.\left(x^2+3x+1\right)$$

Vậy $x^4+x^3-4x^2+x+1=\left(x-1\right)^2\left(x^2+3x+1\right)$

Bài 15: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4\left(x+5\right)\left(x+6\right)\left(x+10\right)\left(x+12\right)-3x^2$

Lời giải

Ta có : $4\left(x+5\right)\left(x+12\right)\left(x+6\right)\left(x+10\right)-3x^2=4\left(x^2+17x+60\right)\left(x^2+16x+60\right)-3x^2$

$x^2\left[4\left(x+17+\frac{60}{x}\right)\left(x+16+\frac{60}{x}\right)-3\right]$, Đặt : $x+\frac{60}{x}=t$, Khi đó đa thức trở thành :

$$x^2\left[4\left(t+17\right)\left(t+16\right)-3\right]=x^2\left(4t^2+132t+1085\right)=x^2\left(2t+31\right)\left(2t+35\right)$$

$$=x^2\left(2x+\frac{120}{x}+31\right)\left(2x+\frac{120}{x}+35\right)=\left(2x^2+31x+120\right)\left(2x^2+35x+120\right)$$

Bài 16: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+6x^3+7x^2-6x+1$

Lời giải

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1. Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau: nên ta làm như sau:

$$x^4+6x^3+7x^2-6x+1=x^2\left(x^2+6x+7+\frac{-6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x-\frac{1}{x}\right)+7\right)$$

Đặt $x-\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$ Đa thức trở thành :

$x^2\left(t^2+2+6t+7\right)=x^2\left(t^2+6t+9\right)=x^2\left(t+3\right)^2$

Thay t trở lại ta được : $x^2\left(x-\frac{1}{x}+3\right)^2=x^2\left(\frac{x^2-1+3x}{x}\right)^2=(x^2+3x-1)^2$

Vậy $x^4+6x^3+7x^2-6x+1=\left(x^2+3x-1\right)^2$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)-12$

Lời giải

Đặt $x^2+x=t$ khi đó đa thức trở thành : $\left(t+1\right)\left(t+2\right)-12=t^2+3t-10=\left(t-2\right)\left(t+5\right)$

Thay t trở lại đa thức ta được : $\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+x+5\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x^2+x+5\right)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2-4\right)\left(x^2-10\right)-72$

Lời giải

Đặt $x^2-4=t$ khi đó đa thức trở thành :

$t\left(t-6\right)-72=t^2-6t-72=\left(t-12\right)\left(t+6\right)=\left(x^2-16\right)\left(x^2+2\right)=\left(x-4\right)\left(x+4\right)\left(x^2+2\right)$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(4x+1\right)\left(12x-1\right)\left(3x+2\right)\left(x+1\right)-4$

Lời giải

$\left(4x+1\right)\left(3x+2\right)\left(12x-1\right)\left(x+1\right)-4=\left(12x^2+11x+2\right)\left(12x^2+11x-1\right)-4$

Đặt $12x^2+11x=t$, Khi đó đa thức trở thành : $\left(t+2\right)\left(t-1\right)-4=t^2+t-6=\left(t-2\right)\left(t+3\right)$

$\left(12x^2+11x-2\right)\left(12x^2+11x+3\right)$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x-3\right)-5$

Lời giải

Đặt : $x^2+3x=t$, Khi đó đa thức trở thành :

$\left(t+1\right)\left(t-3\right)-5=t^2-2t-8=\left(t+2\right)\left(t-4\right)=\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+3x-4\right)=\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x+4\right)$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+4x+8\right)^2+3x^3+14x^2+24x$

Lời giải

$\left(x^2+4x+8\right)^2+3x\left(x^2+4x+8\right)+2x^2$, Đặt: $\left(x^2+4x+8\right)=y \Rightarrow y^2+3xy+2x^2 \Rightarrow \left(y+x\right)\left(y+2x\right)$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+2x+7\right)-\left(x^2+2x+4\right)\left(x^2+2x+3\right)$

Lời giải

Đặt : $x^2+2x=t$, khi đó đa thức trở thành :

$(t+7)-(t+4)(t+3)=t+7-t^2-7t-12=-t^2-6t-5=-(t+1)(t+5)$, thay t trở lại ta được :

$-\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+2x+5\right)=-(x+1)^2\left(x^2+2x+5\right)$

Thay t trở lại đa thức ta được : $\left(x^2-11x-12\right)\left(x^2-11x+70\right)=(x-12)(x+1)\left(x^2-11x+70\right)$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $A=\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$

Lời giải

Ta có :

$$A=\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$$
$$=\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)+2(xy+yz+zx)\right]\left(x^2+y^2+z^2\right)+(xy+yz+zx)^2$$

Đặt $x^2+y^2+z^2=a; xy+yz+zx=b \Rightarrow A=(a+b)^2=\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)^2$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$A=2\left(x^4+y^4+z^4\right)-\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)^2+(x+y+z)^4$

Lời giải

Đặt $x^4+y^4+z^4=a; x^2+y^2+z^2=b; x+y+z=c$ ta được :

$A=2a-b^2-2bc^2+c^4=2a-2b^2+b^2-2bc^2+c^4=2(a-b)^2+\left(b-c^2\right)^2$

Lại có : $a-b^2=-2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right); b-c^2=-2(xy+yz+zx)$

Do đó :

$$A=-4\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+4(xy+yz+zx)^2$$
$$=-4x^2y^2-4y^2z^2-4z^2x^2+4x^2y^2+4y^2z^2+4z^2x^2+8x^2yz+8xy^2z+8xyz^2$$
$$=8xyz(x+y+z)$$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử: $A=(a+b+c)^3-4\left(a^3+b^3+c^3\right)-12abc$

Lời giải

Đặt $a+b=m, a-b=n \Rightarrow 4ab=m^2-n^2; a^3+b^3=(a+b)\left[(a-b)^2+ab\right]=m\left(n^2+\dfrac{m^2-n^2}{4}\right)$

$$\Rightarrow A=(m+c)^3-4.\frac{m^3+3mn^2}{4}-4c^3-3c\left(m^2-n^2\right)=3\left(-c^3+mc^2-mn^2+cn^2\right)$$
$$=3(m-c)(c-n)(c+n)=3(a+b+c)(c+a-b)(c-a+b)$$

F. Đối với đa thức bậc cao có dạng $x^{3m+1}+x^{3m+2}+1$ luôn luôn có nhân tử chung là bình phương thiếu của tổng hoặc hiệu, nên ta thêm bớt để làm cuất hiện bình phương thiếu của tổng hoặc hiệu:

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1$

Lời giải

Ta có: $\left(x^7+x^5+x^3\right)+\left(x^4+x^2+1\right)=x^3\left(x^4+x^2+1\right)+\left(x^4+x^2+1\right)$

$=\left(x^4+x^2+1\right)\left(x^3+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

$=\left(x^2-x+1\right)^2\left(x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^{11}+x^{10}+x^9+...+x^2+x+1$

Lời giải

Ta có: $x^{11}+x^{10}+x^9+...+x^2+x+1=\left(x^{11}+x^{10}+x^9\right)+\left(x^8+x^7+x^6\right)+...+\left(x^2+x+1\right)$

$=x^9\left(x^2+x+1\right)+x^6\left(x^2+x+1\right)+...+\left(x^2+x+1\right)$

$\left(x^2+x+1\right)\left(x^9+x^6+x^3+1\right)=\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: x^8+14x^4+1

Lời giải

Ta có: $x^8+2x^4+1+12x^4=\left(x^4+1\right)^2+12x^4=\left(x^4+1\right)^2+2.\left(x^4+1\right).2x^2+4x^4-4x^2\left(x^4+1\right)+8x^4$

$=\left(x^4+1+2x^2\right)^2-\left(2x^3-2x\right)^2$

$=\left(x^4+1+2x^2-2x^3+2x\right)\left(x^4+1+2x^2+2x^3-2x\right)$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: x^8+98x^4+1

Lời giải

Ta có: $\left(x^4+1\right)^2+2\left(x^4+1\right)^2.8x^2+64x^4-16x^2\left(x^4+1\right)+32x^4$

$=\left(x^4+8x^2+1\right)^2-16x^2\left(x^4+1-2x^2\right)=\left(x^4+8x^2+1\right)^2-\left(4x^3-4x\right)^2$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^5-3x^4+6x^3-8x^2+3$

Lời giải

Ta có: $2x^5-3x^4+6x^3-8x^2+3=2x^5-2x^4-x^4+x^3+5x^3-5x^2-3x^2+3$

$=2x^4\left(x-1\right)-x^3\left(x-1\right)+5x^2\left(x-1\right)-3\left(x^2-1\right)$

$=\left(x-1\right)^2\left(x^2+3\right)\left(2x+1\right)$

G. ĐỐI VỚI ĐA THỨC ĐA ẨN

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2+y^2-z^2+2xy-2z-1$

Lời giải

Ta có: $x^2+y^2-z^2+2xy-2z-1=\left(x^2+2xy+y^2\right)-\left(z^2+2z+1\right)=\left(x+y\right)^2-\left(z+1\right)^2$

$=\left(x+y+z+1\right)\left(x+y-z-1\right)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2-y^2+z^2-2xz+2y-1$

Lời giải

Ta có: $x^2-y^2+z^2-2xz+2y-1=\left(x^2-2xz+z^2\right)-\left(y^2-2y+1\right)=\left(x-z\right)^2-\left(y-1\right)^2$

$\left(x-z+y-1\right)\left(x-z-y+1\right)$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6-2x^4-x^3y^3+2xy^3$

Lời giải

Ta có: $x^6-2x^4-x^3y^3+2xy^3 = x\left(x^5-2x^3-x^2y^3+2y^3\right)$

$= x\left[x^3\left(x^2-2\right)-y^3\left(x^2-2\right)\right]=x\left(x^3-y^3\right)\left(x^2-2\right)= x\left(x-y\right)\left(x^2-2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6-x^4-9x^3+9x^2$

Lời giải

Ta có: $x^6-x^4-9x^3+9x^2 = x^2\left(x^4-x^2-9x+9\right)$

$= x^2\left[x^2\left(x^2-1\right)-9\left(x-1\right)\right]=x^2\left[x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)-9\left(x-1\right)\right]= x^2\left(x-1\right)\left(x^3+x^2-9\right)$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(a+b+c\right)^2+\left(a-b+c\right)^2-4b^2$

Lời giải

Ta có: $\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)+\left(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac\right)-4b^2$

$=\left(2a^2+2c^2-2b^2+4ac\right)=2\left(a^2+2ac+c^2-b^2\right)=2\left[\left(a+c\right)^2-b^2\right] =2\left(a+c+b\right)\left(a+c-b\right)$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a\left(b^2-c^2\right)-b\left(c^2-a^2\right)+c\left(a^2-b^2\right)$

Lời giải

Ta có: $ab^2-ac^2-bc^2+a^2b+a^2c-b^2c=a^2\left(b+c\right)+b^2\left(a-c\right)-c^2\left(a+b\right)$

$= a^2\left(b+c\right)+b^2\left[\left(a+b\right)-\left(b+c\right)\right]-c^2\left(a+b\right) = a^2\left(b+c\right)+b^2\left(a+b\right)-b^2\left(b+c\right)-c^2\left(a+b\right)$

$= \left(b+c\right)\left(a^2-b^2\right)+\left(a+b\right)\left(b^2-c^2\right)=\left(b+c\right)\left(a-b\right)\left(a+b\right)+\left(a+b\right)\left(b-c\right)\left(b+c\right)$

$= \left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(a-b+b-c\right)=\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(a-c\right)$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $xy\left(x+y\right)+yz\left(y+z\right)+zx\left(x+z\right)+3xyz$

Lời giải

Ta có:$=\left[xy\left(x+y\right)+xyz\right]+\left[yz\left(y+z\right)+xyz\right]+\left[zx\left(z+x\right)+xyz\right]$

$= xy(x+y+z)+yz(x+y+z)+zx(x+y+z)=(x+y+z)(xy+yz+zx)$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: $xy(x+y)-yz(y+z)-zx(z-x)$

Lời giải

Ta có: $= xy(x+y)-yz(y+z)-zx[(y+z)-(x+y)]$

$= xy(x+y)-yz(y+z)-zx(y+z)+zx(x+y) =$

$x(x+y)(y+z)-z(y+z)(x+y)=(x+y)(y+z)(x-z)$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$

Lời giải

Ta có: $x^4(y-z)+y^4[-(y-z)-(x-y)]+z^4(x-y)$

$= x^4(y-z)-y^4(y-z)-y^4(x-y)+z^4(x-y) = (y-z)(x^4-y^4)-(x-y)(y^4-z^4)$

$= (y-z)(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)(y-z)(y+z)(y^2+z^2)$

$= (x-y)(y-z)[(x+y)(x^2+y^2)-(y+z)(y^2+z^2)]$

$= (x-y)(y-z)(x^3+xy^2+x^2y+y^3-y^3-yz^2-y^2z-z^3)$

$= (x-y)(y-z)(x^3-z^3+y^2(x-z)+y(x^2-z^2))$

$= (x-y)(y-z)[(x-z)(x^2+xz+z^2)+y^2(x-z)+y(x-z)(x+z)]$

$= (x-y)(y-z)(x-z)(x^2+xz+z^2+y^2+xy+yz)$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

Lời giải

Ta có: $a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+ac^2-abc$

$= (a^2b+ab^2+abc)+(b^2c+bc^2+abc)+a^2c+ca^2 = ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ac(a+c)$

$= b(a+b+c)(a+c)+ac(a+c) = (a+c)(ab+b^2+bc+ac)=(a+c)(b+c)(a+b)$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

Lời giải

Ta có: $(a+b+c)^3-\left[(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3\right]$

$$\begin{cases} x=a+b-c \\ y=b+c-a => x+y+z=a+b+c \\ z=c+a-b \end{cases}$$

$= (x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)-x^3-y^3-z^3$

$= 3(x+y)(y+z)(z+x) = 3.2a.2b.2c = 24abc$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

Lời giải

Ta có: $a^2(b-c)+b^2[-(b-c)-(a-b)]+c^2(a-b)$

$= a^2(b-c)-b^2(b-c)-b^2(a-b)+c^2(a-b) = (b-c)(a-b)(a+b)-(a-b)(b-c)(b+c)$

$= (b-c)(a-b)(a+b-b-c) = (a-b)(b-c)(a-c)$

Bài 13: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)$

Lời giải

Ta có: $xy^3-xz^3+yz^3-x^3y+x^3z-y^3z = x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x)$

$= x^3(z-y)+y^3[-(z-y)-(y-x)]+z^3(y-x) = x^3(z-y)-y^3(z-y)-y^3(y-x)+z^3(y-x)$

$= (z-y)(x^3-y^3)+(y-x)(z^3-y^3) = (z-y)(x-y)(x^2+xy+y^2)+(y-x)(z-y)(z^2+yz+y^2)$

$= (z-y)(x-y)(x^2+xy+y^2-z^2-yz-y^2)$

$= (z-y)(x-y)(x^2-z^2+xy-yz) = (z-y)(x-y)(x-z)(x+y+z)$

Bài 14: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$

Lời giải

Ta có: $(x^2+y^2+z^2)\left[(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)\right]+(xy+yz+zx)^2$

Đặt: $x^2+y^2+z^2=a, xy+yz+zx=b$ khi đó đa thức:

$a(a+2b)+b^2 = a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2 = (x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2$

Bài 15: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$2(x^4+y^4+z^4)-(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(x+y+z)^4$

Lời giải

Đặt: $x^4+y^4+z^4=a, x^2+y^2+z^2=b, x+y+z=c,$

Khi đó ta có: $2a-b^2-2bc^2+c^4 = 2a-2b^2+b^2-2bc^2+c^4 = 2(a-b^2)+(b-c^2)^2,$

Lại có : $a-b^2=-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$ và $b-c^2=-2(xy+yz+zx),$

Thay vào ta được : $-4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+4(xy+yz+zx)^2 = 8xyz(x+y+z)$

Bài 16: Phân tích đa thức thành nhân tử: $-c^2(a-b)+b^2(a-c)-a^2(b-c)$

Lời giải

Ta có : $-c^2(a-b)+b^2\left[(a-b)+(b-c)\right]-a^2(b-c)=$

$-c^2(a-b)+b^2(a-b)+b^2(b-c)-a^2(b-c)$

$=(a-b)(b-c)(b+c)+(b-c)(b-a)(b+a)=(a-b)(b-c)(b+c-a-b)=(a-b)(b-c)(c-a)$

Bài 17: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x-y)z^3+(y-z)x^3+(z-x)y^3$

Lời giải

Ta có : $z^3(x-y)+x^3\left[-(x-y)-(z-x)\right]+y^3(z-x)$

$=z^3(x-y)-x^3(x-y)+y^3(z-x)-x^3(z-x)=(x-y)(z^3-x^3)+(z-x)(y^3-x^3)$

$=(x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2)+(z-x)(y-x)(y^2+xy+x^2)$

$=(x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2-y^2-xy-x^2)=(x-y)(z-x)(z-y)(z+y-x)$

Bài 18: Phân tích đa thức thành nhân tử: $ab(a+b)-bc(b+c)-ac(c-a)$

Lời giải

Ta có : $ab(a+b)-bc\left[(a+b)+(c-a)\right]-ac(c-a)=ab(a+b)-bc(a+b)-bc(c-a)-ac(c-a)$

$=b(a+b)(a-c)-c(c-a)(b+a)=(a+b)(b+c)(a-c)$

Bài 19: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x-y)-x^3(1-y)+y^3(1-x)$

Lời giải

Ta có :$(x-y)-x^3\left[(x-y)+(1-x)\right]+y^3(1-x)=(x-y)-x^3(x-y)-x^3(1-x)+y^3(1-x)$

$=(x-y)(1-x^3)-(1-x)(x^3-y^3)=(x-y)(1-x)(1+x+x^2)-(1-x)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x-y)(1-x)(1+x+x^2-x^2-xy-y^2)=(x-y)(1-x)(1-y)(x+y+1)$

Bài 20: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2(c-b)-4c^2a^2(2a+c)$

Lời giải

Ta có : $4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2\left[(2a+c)-(2a+b)\right]-4c^2a^2(2a+c)$

$=4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2(2a+c)-b^2c^2(2a+b)-4c^2a^2(2a+c)$

$=b^2(2a+b)(4a^2-c^2)+c^2(2a+c)(b^2-4a^2)$

$=b^2(2a+b)(2a-c)(2a+c)-c^2(2a+c)(2a-b)(2a+b)$

$=(2a+c)(2a+b)(2ab^2-b^2c-2ac^2+bc^2)$

$=(2a+c)(2a+b)(b-c)(2ab+2ac-bc)$

Bài 21: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

Lời giải

Ta có : $z^3(x-y)+x^3\left[-(x-y)-(z-x)\right]+y^3(z-x)$

$= z^3(x-y)-x^3(x-y)+y^3(z-x)-x^3(z-x)$

$= (x-y)(z^3-x^3)+(z-x)(y^3-x^3)$

$= (x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2)+(z-x)(y-x)(y^2+xy+x^2)$

$= (x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2-y^2-xy-x^2)=(x-y)(z-x)(z-y)(z+y-x)$

Bài 22: Phân tích đa thức thành nhân tử: $bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)+ab(c+d)(a-b)$

Lời giải

Ta có : $bc(ab-ac+bd-dc)-ac(ab-bc+ad-dc)+ab(ac-bc+ad-bd)$

$= bc(ab-ac+bd-dc)-ac\left[(ab-ac+bd-dc)+(ac-bc+ad-bd)\right]+ab(ac-bc+ad-bd)$

$= (ab-ac+bd-dc)(bc-ac)-(ac-bc+ad-bd)(ac-ab)$

$= (a+d)(b-c)c(b-a)-(c+d)(a-b)a(c-b)$

$= (b-c)(b-a)(ac+dc-ca-ad)=(b-c)(b-a)(c-a).d$

Bài 23: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3$

Lời giải

Ta có : $y^3(a-x)-x^3\left[(a-x)+(x-y)\right]+a^3(x-y)= y^3(a-x)-x^3(a-x)-x^3(x-y)+a^3(x-y)$

$= (a-x)(y^3-x^3)-(x-y)(x^3-a^3)= (x-a)(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x-y)(x-a)(x^2+xa+a^2)$

$= (x-a)(x-y)(x^2+xy+y^2-x^2-xa-a^2)= (x-a)(x-y)(y-a)(y+a+x)$

Bài 24: Phân tích thành nhân tử: $x^2y+xy^2+xz^2+yz^2+x^2z+y^2z+2xyz$

Lời giải

Ta có: $=xy(x+y)+z^2(x+y)+z(x+y)^2=(x+y)(xy+z^2+xz+yz) =(x+y)(y+z)(z+x)$

F. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

- Chú ý: Hai đa thức bằng nhau khi hệ số của mỗi lũy thừa tương ứng trong hai đa thức bằng nhau
- Phương pháp này dùng cho đa thức không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỷ

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-14x+3$

b. $Q(x)=2x^4-3x^3-7x^2+6x+8$

c. $P(x)=2x^4-7x^3+17x^2-20x+14$

d. $R(x)=4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$

e. $H(x,y)=12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3$

f. $T(x,y)=2x^2-7xy+6y^2+9x-13y-5$

Lời giải

a. Ta nhận thấy đa thức không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỷ

Giả sử $f(x)=(x^2+\text{ax+b})(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd$

Đồng nhất các hệ số ta được: $\begin{cases} a+c=-6 \\ ac+b+d=-14 \\ ad+bc=-14 \\ bd=3 \Rightarrow b\in\{\pm1;\pm3\} \end{cases}$

+) $b=3\Rightarrow \begin{cases} a+c=-6 \\ ac=8 \\ a+3c=-14 \end{cases} \Rightarrow c=-4; a=-2(tm) \Rightarrow f(x)=(x^2-2x+3)(x^2-4x+1)$

b. Cách 1: Ta nhận thấy đa thức có 1 nhân tử là x + 1

$Q(x)=2x^4-3x^3-7x^2+6x+8=(x+1)(2x^3+\text{ax}^2+bx+c)=2x^4+(a+2)x^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$

$\begin{cases} a+2=-3 \\ a+b=-7 \\ b+c=6 \\ c=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=-2 \Rightarrow Q(x)=(x+1)(x-2)(2x^2-x-4) \\ c=8 \end{cases}$

Cách 2: Giả sử

$Q(x)=(2x^2+ax\text{+b})(\text{x}^2+cx+d)=2x^4+(2c+a)x^3+(2d+ac+b)x^2+(ad+bc)x+bd$

Đồng nhất các hệ số: $\begin{cases} 2c+a=-3 \\ 2d+ac+b=-7 \\ ad+bc=6 \\ bd=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ d=-4 \\ a=c=-1 \end{cases} \Rightarrow Q(x)=(2x^2-x-4)(x+1)(x-2)$

c. $\begin{cases} 2b+n=-7 \\ 2c+p+bn=17 \\ cn+bp=-20 \\ cp=14 \Rightarrow c=2; p=7(tm) \Rightarrow b=-2; n=-3 \end{cases}$ d. $=(2x^2+x+1)^2$

e. Giả sử

$H(x,y)=\left(ax+by+c\right)\left(dx+ey+f\right)=adx^2+\left(af+cd\right)x+bey^2+(ce+bf)y+cf+(bd+ac)xy$

$\begin{cases} ad=12 \\ af+cd=5 \\ be=-12 \\ ce+bf=12 \\ cf=-3 \Rightarrow c=1; f=-3 \Rightarrow a=-3; d=-4; b=-2; e=6 \end{cases} \Rightarrow H(x;y)=(-3x-2y+1)(-4x+6y-3)$

f. $T(x,y)=\left(2x+by+c\right)\left(x+ny+p\right) \Rightarrow n=-2, b=-3, c=-1, p=5$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+y^2+xy\right)^2-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2$

Lời giải

$\left(x^2+y^2+xy\right)^2-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2=x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2xy^3+2x^3y-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2$

$=x^4+y^4+2x^2y^2+2xy\left(x^2+y^2\right)-z^2\left(x^2+y^2\right)$

$=\left(x^2+y^2\right)^2+2xy\left(x^2+y^2\right)-z^2\left(x^2+y^2\right)$

$=\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+2xy-z^2\right)=\left(x^2+y^2\right)\left[\left(x+y^2\right)-z^2\right]=\left(x^2+y^2\right)(x+y+z)(x+y-z)$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $81x^4\left(z^2-y^2\right)-z^2+y^2$

Lời giải

Ta có: $81x^4\left(z^2-y^2\right)-z^2+y^2=81x^4\left(z^2-y^2\right)-\left(z^2-y^2\right)$

$=\left(z^2-y^2\right)\left(81x^4-1\right)=(z-y)(z+y)\left(9x^2-1\right)\left(9x^2+1\right)$

$=(z-y)(z+y)(3x+1)(3x-1)\left(9x^2+1\right)$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6+x^4+x^2y^2+y^4-y^6$

Lời giải

Ta có: $x^6+x^4+x^2y^2+y^4-y^6$

$=x^6-y^6+x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=\left(x^3\right)^2-\left(y^3\right)^2+\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2$

$=\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)+\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)$

$=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)+\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)$

$=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2-y^2+1\right)$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+8x+63$

Lời giải

Ta có: $x^4+8x+63=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$

Đồng nhất hệ số ta có: $x^4+8x+63=\left(x^2-4x+7\right)\left(x^2+4x+9\right)$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+1)^4+\left(x^2+x+1\right)^2$

Lời giải

Ta có: $(x+1)^4+\left(x^2+x+1\right)^2=(x+1)^4+\left[x(x+1)+1\right]^2$

$=(x+1)^4+x^2(x+1)^2+2x(x+1)+1=(x+1)^2\left[(x+1)^2+x^2\right]+\left(2x^2+2x+1\right)$

$=\left(2x^2+2x+1\right)\left[(x+1)^2+1\right]=\left(x^2+2x+2\right)\left(2x^2+2x+1\right)$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. x^7+x^5+1 b. x^7+x^2+1 c. $x^{4n}+8x^{2n}+15$

Lời giải

a. Ta có:

$x^7+x^5+1=x^7+x^6+x^5-x^6+1=x^5(x^2+x+1)-(x^3-1)(x^3+1)=x^5(x^2+x+1)-(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$
$=(x^2+x+1)\left[x^5-(x-1)(x^3+1)\right]$

b. $x^7+x^2+1=(x^7-x)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x+1)$

c. $x^{4n}+8x^{2n}+15=a^2+8a+15(x^{2n}=a)=(a+3)(a+5)=(x^{2n}+3)(x^{2n}+5)$

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)^2$

b. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

c. $(x^3-y^3)^3+(y^3+z^3)^3-(z^3+x^3)^3$

d. $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3-8(a+b+c)^3$

e. $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

Lời giải

a. Ta có $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

Đặt $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a\\xy+yz+zx=b\end{cases}\Rightarrow A=a(a+2b).3b^2=a^2+2ab-3b^2=(a-b)(a+3b)$

$\Rightarrow A=(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)[(x^2+y^2+z^2++3(xy+yz+zx)]$

b. Ta đã biết: Nếu $a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Đặt $\begin{cases}x-y=a\\y-z=b\\z-x=c\end{cases}\Rightarrow a+b+c=0\Rightarrow B=a^3+b^3+c^3\Rightarrow B=3abc=3(x-y)(y-z)(z-x)$

c. Tương tự câu b.

$\begin{cases}x^3-y^3=a\\y^3+z^3=b\\-x^3-z^3=c\end{cases}\Rightarrow a+b+c=0\Rightarrow B=a^3+b^3+c^3\Rightarrow B=3abc=3(x^3-y^3)(y^3+z^3)(-z^3-x^3)$

d. Đặt $\begin{cases}a+b=x\\b+c=y\\c+a=z\end{cases}\Rightarrow x+y+z=2(a+b+c)\Rightarrow(x+y+z)^3=8(a+b+c)^3$;

$D=x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3$

Ta có: $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) \Rightarrow D = -3(x+y)(y+z)(z+x) = -3....$

e. Đặt $\begin{cases} m = a+b-c \\ n = b+c-a \\ p = c+a-b \end{cases}$ thì:

$a+b+c = m+n+p \Rightarrow E = (m+n+p)^3 - m^3 - n^3 - p^3 = 3(m+n)(n+p)(p+m)$

$\Rightarrow E = 3.2b.2c.2a = 24abc$

Bài 3: Cho x, y, z thuộc Z. Chứng minh rằng: $S = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$ là số chính phương

Lời giải

Ta có: $S = (x+y)(x+4y)(x+2y)(x+3y) + y^4 = (x^2+5xy+4y^2)(x^2+5xy+6y^2) + y^4$

$S_t = t(t+2y^2) + y^4 = (t+y^2)^2 = (x^2+5xy+5y^2)^2 (dpcm)$

Bài 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4$

b. $2x^4 - 15x^3 + 35x^2 - 30x + 8$

c. $2x^3 - 3x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1)^3$

d. $4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4$

Lời giải

a. Ta có:

$4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4 = 4(x^4+1) - 8x(x^2+1) + 3x^2 = 4(x^2+1)^2 - 8x(x^2+1) - 5x^2 = 4y^2 - 8xy - 5x^2$

$= 4y^2 + 2xy - 10xy - 5x^2 = (2y+x)(2y-5x) = (2x^2+x+2)(2x^2-5x+2) = (2x^2+x+2)(x-2)(2x-1)$

b. Ta có:

$2x^4 - 15x^3 + 35x^2 - 30x + 8 = 2(x^4+4) - 15x(x^2+2) + 35x^2 = 2(x^2+x)^2 - 15(x^2+2) + 27x^2 = 2y^2 - 15y + 27x^2$

$= (y-3x)(2y-9x) = (x^2-3x+2)(2x^2-9x+4) = (x-1)(x-2)(x-4)(2x-1)$

c. Ta có:

$2x^3 - 3x^2(x^2-x+1) + (x^2-x+1)^3 = 2x^3 - 3x^2y + y^3 = 2x^2(x-y) - y(x-y)(x+y) = (x-y)(2x^2 - y^2 - xy)$

$= (x-y)(x-y)(2x+y) = (x-y)^2(2x+y)$

d. Ta có: $4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = (x-2)(2x-1)(2x^2+3x+2)$

Bài 5: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $A(x) = 2x^4 - 19x^3 + 2002x^2 - 9779x + 11670$

b. $B(x) = 3x^6 - 10x^5 + 34x^4 - 47x^3 + 52x^2 + 8x - 40$

Lời giải

a. Ta nhận thấy đa thức có hai nhân tử là x - 2 và x - 3

$A(x) = (x-2)(x-3)(ax^2+bx+c) \Rightarrow a = 2; c = 1945; b = -9 \Rightarrow A(x) = (x-2)(x-3)(2x^2-9x+1945)$

b. Nhận thấy đa thức có 2 nhân tử là: x – 1 và 3x + 2

$B(x) = (x-1)(3x+2)(x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 14x + 20) = (x-1)(3x+2)(x^2-2x+4)(x^2-x+5)$

Bài 6: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $A = ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$

b. $B = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

c. $C = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$

d. $D = (a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5$

Lời giải

Đặt $x = a-b; y = b-c \to x+y = a-c$

a. $A = abx + bcy - ca(x+y) = ax(b-c) - cy(a-b) = axy - cxy = xy(a-c) = (a-b)(b-c)(c-a)$

b. $B = x^3 + y^3 - (x+y)^3 = x^3 + y^3 - x^3 - 3xy(x+y) - y^3 = -3xy(x+y) = 3(a-b)(b-c)(c-a)$

c. Ta có:

$C = ay^3 - b(x+y)^3 + cx^3 = ay^3 - b\left[x^3 + y^3 + 3xy(x+y)\right] + cx^3 = y^3(a-b) - x^3(b-c) - 3bxy(x+y)$

$= xy^3 - x^3y - 3bxy(x+y) = xy(y^2 - x^2) - 3bxy(x+y) = xy(x+y)(y-x-3b) = xy(x+y)(b-c-a+b-3b)$

$= -xy(x+y)(a+b+c) = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

d. Ta có:

$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)^4 = (x+y)(x^2 + 2xy + y^2)^2 = (x+y)(x^4 + 4x^2y^2 + y^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 2x^2y^2)$

$= (x+y)(x^4 + y^4) + (x+y)(4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3) = x^5 + y^5 + xy(x^3 + y^3) + xy(x+y)(4x^2 + 6xy + 4y^2)$

$= x^5 + y^5 + xy(x+y)(5x^2 + 5xy + 5y^2) = x^5 + y^5 + 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)$

$\Rightarrow D = x^5 + y^5 - (x+y)^5 = x^5 + y^5 - \left[x^5 + y^5 + 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)\right] = -5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)$

$= 5(a-b)(b-c)(c-a)\left[(a-b)^2 + (a-b)(b-c) + (b-c)^2\right] = 5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

Bài 7: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $A = a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$

b. $B = a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$

Lời giải

a. Đặt $x = a^3 - b^3; y = b^3 - c^3 \Rightarrow x + y = a^3 - c^3 \Rightarrow A = ay - b(x+y) + cx = y(a-b) - x(b-c)$

$= (b^3 - c^3)(a-b) - (a^3 - b^3)(b-c) = (b-c)(a-b)(b^2 + bc + c^2 - a^2 - ab - b^2)$

$= (b-c)(a-b)(bc - ab + c^2 - a^2) = (b-c)(a-b)(c-a)(a+b+c)$

b. Đặt $x = a^2 - b^2; y = b^2 - c^2 \Rightarrow x + y = a^2 - c^2$

$B = a^3y - b^3(x+y) + c^3x = y(a^3 - b^3) - x(b^3 - c^3) = (b^2 - c^2)(a^3 - b^3) - (a^2 - b^2)(b^3 - c^3)$

$= (b-c)(a-b)\left[(b+c)(a^2 + ab + b^2) - (a+b)(b^2 + bc + c^2)\right]$

$= b(a^2 + ab + b^2 - b^2 - bc - c^2) + (a^2c + abc + b^2c - ab^2 - abc - ac^2)$

$= b(a-c)(a+b+c) + \left[ac(a-c) - b^2(a-c)\right] = (a-c)(ab + b^2 + bc + ac - b^2) = (a-c)(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow B = (a-b)(b-c)(a-c)(ab + bc + ca)$

Bài 8: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $A = (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

b. $B = x(x+2y)^3 - y(y+2x)^3$

c. $C = x^4 + (x+y)^4 + y^4$

d. $D = a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

Lời giải

a. Đặt $m = a+b+c$ suy ra:

$$A = m^3 - a^3 - (b^3+c^3) = (m-a)(m^2+ma+a^2) - (b+c)(b^2-bc+c^2)$$
$$= (b+c)(m^2+ma+a^2-b^2+bc-a^2) = (b+c)\left[(m^2-b^2)+(a^2-c^2)+(ma+bc)\right]$$
$$= (b+c)\left[(m-b)(m+b)+(a-c)(a+c)+(a+b)(a+c)\right] = (b+c)(a+c)(m+b+a-c+a+b)$$
$$= 3(b+c)(c+a)(a+b)$$

b. Đặt $m = x+y$

$$B = x(m+y)^3 - y(m+x)^3 = x\left[m^3+3my(m+y)+y^3\right] - y\left[m^3+3mx(m+x)+x^3\right]$$
$$= m^3(x-y) - xy(x^2-y^2) - 3mxy(m+x-m-y) = (x-y)(m^3 - xy(x+y) - 3mxy)$$
$$= m(x-y)(m^2-4xy) = m(x-y)\left[(x+y)^2-4xy\right] = m(x-y)^3 = (x+y)(x-y)^3$$

c. Đặt $m = x+y$

$$C = (m-y)^4 + m^4 + y^4 = m^4 - 4m^3y + 6m^2y^2 - 4my^3 + y^4 + m^4 + y^4 = 2(m^4+2m^2y^2+y^4) - 4my(m^2+y^2) + 2m^2y^2$$
$$= 2(m^2+y^2-my)^2 = 2\left[(x+y)^2+y^2-(x+y)y\right]^2 = 2(x^2+xy+y^2)^2$$

d. Đặt $m = a^2+b^2+c^2$

$$D = (a^2+b^2+c^2)^2 - 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) = m^2 - 4\left[b^2(a^2+c^2)+c^2a^2\right] = m^2 - 4\left[b^2(m-b^2)+c^2a^2\right]$$
$$= (m-2b^2)^2 - (2ca)^2 = (m-2b^2-2ca)(m-2b^2+2ca) = (a^2+b^2+c^2-2b^2-2ca)(a^2+b^2+c^2-2b^2+2ca)$$
$$= \left[(a-c)^2-b^2\right]\left[(a+c)^2-b^2\right] = (a-c-b)(a-c+b)(a+c-b)(a+b+c)$$

Bài 9: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $A = a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

b. $B = (a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$

c. $C = ab(a+b) + b(b+c) + ca(c+a) - a^3 - b^3 - c^3 - 2abc$

Lời giải

a. Đặt $m = x+y+z; a+b-c = x; b+c-a = y; c+a-b = z \Rightarrow 2a = y+z; 2b = z+x; 2c = x+y$

$$2A = (y+z)x^2 + (x+z)y^2 + (y+x)z^2 + 2xyz = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz$$
$$= xy(m-z) + yz(m-x) + zx(m-y) + 2xyz = m(xy+yz+zx) - xyz = (x+y)(y+z)(z+x) = 8abc \Rightarrow A = 4abc$$

b. Đặt $a+b-c = z; b+c-a = x; c+a-b = y \rightarrow x+y+z = a+b+c$

$$B = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x) = 3.2c.2a.2b = 24abc$$

c. Đặt $a+b-c = z; b+c-a = x; c+a-b = y \Rightarrow 2a = y+z; 2b = x+z; 2c = x+y$

Ta có:

$$4C = 4a^2(b+c-a) + 4b^2(c+a-b) + 4c^2(a+b-c) - 8abc$$
$$= (y+z)^2x + (z+x)^2y + (x+y)^2z - (x+y)(y+z)(z+x)$$

$= xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)-(x+y)(y+z)(z+x)+6xyz$

$= xy(x+y)+yz(x+y)+zx(x+y)+z^2(x+y)-(x+y)(y+z)(z+x)+4xyz$

$= (x+y)(xy+yz+zx+z^2)-(x+y)(y+z)(z+x)+4xyz$

$= (x+y)(y+z)(z+x)-(x+y)(y+z)(z+x)+4xyz$

$= 4xyz$

$\Rightarrow C = xyz = (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. Ứng dụng 1: Dùng để rút gọn biểu thức

Bài 1: Cho a + b + c = 0 , Rút gọn $A = a^3+b^3+c(a^2+b^2)-abc$

Lời giải

Ta có:

$$A = a^3+b^3+c(a^2+b^2)-abc = a^3+b^3+a^2c+b^2c-abc$$
$$= (a^3+a^2c)+(b^3+b^2c)-abc = a^2(a+c)+b^2(b+c)-abc$$

Vì $a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a+c=-b \\ b+c=-a \end{cases} \Rightarrow A = a^2(-b)+b^2(-a)-abc = -ab(a+b+c)=0.$

B. Ứng dụng 2: Dùng để chứng minh

Bài 2: Cho $a^2+b^2=1; c^2+d^2=1, ac+bd=0.$ Chứng minh rằng: $ab+cd=0$

Lời giải

Ta có:

$ab+cd = ab.1+cd.1 = ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2) = abc^2+abd^2+a^2cd+b^2cd = (abc^2+a^2cd)+(abd^2+b^2cd)$

$= ac(bc+ad)+bd(ad+bc) = (ad+bc)(ac+bd) = 0(ac+bd=0)$

Bài 3: Chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 là 1 số chính phương.

Lời giải

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là: n ; n + 1 ; n + 2 ; n + 3 (n thuộc N^*)

Theo bài ra ta có:

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (k-1)(k+1)+1 = k^2 = (n^2+3n+1)^2 (dpcm)$

Bài 4: Chứng minh rằng số $A = (n+1)^4+n^4+1$ chia hết cho 1 SCP khác 1 với mọi n nguyên dương.

Lời giải

Ta có:

$A = [(n+1)^2]^2+n^4+1 = (n^2+2n+1)^2-n^2+(n^4+n^2+1) = (n^2+3n+1)(n^2+n+1)+(n^4+n^2+1)$

$= (n^2+3n+1)(n^2+n+1)+(n^2+n+1)(n^2-n+1) = (n^2+n+1)(2n^2+2n+1) = 2(n^2+n+1)^2 (dpcm)$

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, ta có: $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15 \vdots (x+6)$

Lời giải

Dùng phương pháp đặt ẩn phụ ta được:

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15 \vdots (x+6) = (x^2+8x+10)(x+2)(x+6)$

Bài 6: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, biểu thức: $A=\frac{n}{3}+\frac{n^2}{3}+\frac{n^3}{6}$ là số nguyên

Lời giải

Ta có: $A=\frac{n}{3}+\frac{n^2}{3}+\frac{n^3}{6}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\ \forall n\in Z$

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $a^2b^2(a-b)-c^2b^2(c-b)+a^2c^2(c-a)$

b. $2bc(b+2c)+2ac(c-2a)-2ab(a+2b)-7abc$

c. $ab(b-a)-bc(b-c)-ac(c-a)$

d. $3bc(3b-c)-3ac(3c-a)-3ab(3a+b)+28abc$

e*. $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-2abc-a^3-b^3-c^3$

Lời giải

a. Ta nhận thấy nếu b = c thì A = 0. Vậy đa thức có 1 nhân tử là b – c

$a^2b^2(a-b)-c^2b^2(c-b)+a^2c^2(c-a)=a^2b^2(a-c+c-b)-c^2b^2(c-b)+a^2c^2(c-a)$

$=a^2b^2(a-c)+a^2b^2(c-b)-c^2b^2(c-b)+a^2c^2(c-a)=(c-b)b^2(a-c)(a+c)+a^2(a-c)(b^2-c^2)$

$=(a-c)(c-b)\left[b^2(a+c)-a^2(b+c)\right]=(a-c)(c-b)(\text{ab}^2-a^2b+b^2c-a^2c)$

$=(a-b)(c-b)(a-c)(a-b)(-ab-bc-ca)$

b. Nhận thấy nếu c = 2a thì B = 0. Vậy đa thức có nhân tử là c – 2a

$2bc(b+2c)+2ac(c-2a)-2ab(a+2b)-7abc=2ac(c-2a)+2b^2c+4bc^2-2a^2b-4ab^2-7abc$

$=2ac(c-2a)+2b^2(c-2a)+4bc(c-2a)+8abc-2a^2b-7abc$

$=2ac(c-2a)+2b^2(c-2a)+4bc(c-2a)+8abc-2a^2b-7abc$

$=2ac(c-2a)+2b^2(c-2a)+4bc(c-2a)+ab(c-2a)$

$=(c-2a)(2ac+2b^2+4bc+ab)=(c-2a)\left[2a(a+2b)+b(a+2b)\right](c-2a)(a+2b)(b+2c)$

c. Nhận thấy a = b nên có nhân tử a – b

$ab(b-a)-bc(b-c)-ac(c-a)=ab(b-a)-b^2c+bc^2-ac^2+a^2c=ab(b-a)-c(b^2-a^2)+c^2(b-a)$

$=(b-a)(ab-cb-ca+c^2)=(b-a)(a-c)(b-c)$

d. Dự đoán c = 3b, vậy đa thức có nhân tử là 3b – c

$3bc(3b-c)-3ac(3c-a)-3ab(3a+b)+28abc$

$= 3bc(3b-c) - 9ac^2 + 3a^2c - 9a^2b - 3ab^2 + 28abc$

$= 3bc(3b-c) + 9ac(3b-c) - 27abc - 3a^2(3b-c) - 3ab^2 + 28abc$

$= 3bc(3b-c) + 9ac(3b-c) - 3a^2(3b-c) - abc(3b-c) = (3b-c)(3bc + 9ac - 3a^2 - ab)$

$= (3b-c)(3a+b)(3c-a)$

e. Ta không nhẩm được nghiệm của đa thức

$a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) - 2abc - a^3 - b^3 - c^3$

$= a(b^2+c^2-2bc-a^2) + b(c^2+a^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2)$

$= a\left[(b-c)^2 - a^2\right] + \text{b}(c^2+a^2-2ac-b^2) + c(a^2+b^2-c^2+2ab)$

$= a\left[(b-c)^2 - a^2\right] + b\left[(c-a)^2 - b^2\right] + c\left[(a+b)^2 - c^2\right]$

$= a(b-c-a)(b-c+a) + b\left[(c-a-b)(c-a+b) + c(a+b-c)(a+b+c)\right]$

$=(a+b-c)\left[a(b-c-a)(c-a+b) + c(a+b+c)\right] = (a+b+c)\left[-a(c+a-b) - bc + ab - b^2 + ac + bc + c^2\right]$

$= (a+b-c)\left[-a(a+c-b) + b(a+c-b) + c(a+c-b)\right] = (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$

Bài 2: [HSG – BG – 30/03/2013]

$A = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3 = 2(a^3+b^3) + 7ab(a+b) = (a+b)(2a+b)(a+2b)$

Bài 3: [HSG – Long Biên – Hà Nội – 2015]

a. Phân tích: $x^3(x^2-7)^2 - 36x$

b. Dựa vào kết quả hãy chứng minh: $A = n^3(n^2-7)^2 - 36n \vdots 210 \forall n \in N$

Lời giải

a. $x^3(x^2-7)^2 - 36x = x(x^3-7x+6)(x^3-7x-6) = x(x+1)(x+2)(x-3)(x-1)(x-2)(x+3)$

b. A là tích của 7 số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow A \vdots 2,3,5,7 \Rightarrow A \vdots 210$

Bài 4: [Bắc Giang 2013]

a. $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

b. $(x+y)(y+z)(z+x) + xyz$

Lời giải

a. $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 = (x^4 - x) + 2013(x^2+x+1) = (x^2+x+1)(x^2-x+2013)$

b. $= (xy + xz + y^2 + yz)(x+z) + xyz = (xyz + x^2y + x^2z) + (xyz + xz^2 + yz^2) + (xyz + xy^2 + zy^2)$

$= x(xy+yz+zx) + z(xy+yz+zx) + y(xy+yz+zx) = (x+y+z)(xy+yz+zx)$

Bài 5: [Bắc Giang – 2014]

a. $x(x+2)(x^2+2x+2) + 1$

b. $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y - 5$

c. $6x^3 + 13x^2 + 4x - 3$

Lời giải

a. $x(x+2)(x^2+2x+2) + 1 = (x^2+2x)[(x^2+2x)+2] + 1 = (x^2+2x+1)^2 = (x+1)^4$

b. $x^2-2xy+y^2+4x-4y-5=(x-y)^2+4(x-y)+4-9=(x-y+2)^2-9=(x-y+5)(x-y-1)$

c. $6x^3+13x^2+4x-3=6x^3+6x^2+7x^2+7x-3x-3$

$=6x^2(x+1)+7x(x+1)-3(x+1)=(x+1)(6x^2+7x-3)=(x+1)(3x-1)(2x+3)$

CÔNG THỨC KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

A. Công thức

$(a+b)^n=C_n^{\ 0}a^n+C_n^{\ 1}a^{n-1}b+C_n^{\ 2}a^{n-2}b^2+...+C_n^{\ n-1}ab^{n-1}+C_n^{\ n}b^n$

Trong đó: $C_n^{\ k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}(k=0,1,...n\Leftrightarrow k=\overline{0,n});n!=1.2.3...n$

+) Quy ước: 0!=1

+) $C_n^{\ 0}=\dfrac{n!}{0!(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1;C_n^{\ n}=\dfrac{n!}{n!(n-n)!}=1;C_n^{\ 1}=\dfrac{n!}{1!(n-1)!}=n;C_n^{\ n-1}=\dfrac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!}=n$

+) Bảng tam giác Pascal

n = 2	1	2	1			
n = 3	1	3	3	1		
n = 4	1	4	6	4	1	
n = 5	1	5	10	10	5	1
n = 6	1	6	15	20	15	6
n = ...						

B. Bài tập áp dụng

Bài 1: Phân tích thành nhân tử: $A=(a+b)^5-a^5-b^5$

Lời giải

$A=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5-a^5-b^5=5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4=5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)$

$=5ab[(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-(a^2b+ab^2)]=5ab[(a+b)^3-ab(a+b)]$

$=5ab(a+b)[(a+b)^2-ab]=5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$

Bài 2: Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng: $a^5+b^5+c^5=-5abc(ab+bc+ca)$

Lời giải

Từ: $a+b+c=0\Rightarrow c=-(a+b)$

$VP=a^5+b^5-(a+b)^5=-5ab(a+b)[(a+b)^2-ab]=-5ab(-c)[(a+b)c-ab]$

$=-5abc(ab+bc+ca)=VP(dpcm)$

Bài 3: Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}.\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}=\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}$

Lời giải

Ta có:

$$VP=\frac{-5abc(ab+bc+ca)}{5}=-abc(ab+bc+ca)\quad(1);$$

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}=\frac{3abc}{3}=abc$$

Lại có: $(a+b+c)^2=0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)\Rightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=-(ab+bc+ca)$

$$VT=-abc(ab+bc+ca)(2).(1)(2)\Rightarrow VT=VP$$

Bài 4: $CMR:\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}.\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{3}=\frac{(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5}{5}$

Lời giải

Ta có: $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$

Đặt $x=a-b;y=b-c;z=c-a\Rightarrow x+y+z=0$

Ta cần chứng minh: $\frac{x^2+y^2+z^2}{2}.\frac{x^3+y^3+z^3}{3}=\frac{x^5+y^5+z^5}{5}$

Bài 5: Cho a,b là các số nguyên. CMR số sau là số chính phương $A=(a+b)^4+a^4+b^4$

Lời giải

$A=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+a^4+b^4=a^4+b^4+3a^2b^2+2ab(a^2+b^2)=(a^2+b^2)^2+(ab)^2+2ab(a^2+b^2)$
$=(a^2+b^2+ab)^2(dpcm)$

Bài 6: Giải phương trình: $(x+2)^6+(x-2)^6=2x^6+128(*)$

Lời giải

Ta có:

$(x+2)^6=x^6+6x^5.2+15x^4.2^2+20x^3.2^3+15x^2 2^4+6x.2^5+2^6=x^6+12x^5+60x^4+160x^3+240x^2+192x+64$

$(x-2)^6=[x+(-2)]^6=x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64$

$VT=2x^6+120x^4+480x^2+128\Rightarrow(*)\Leftrightarrow120x^4+480x^2=0\Leftrightarrow x=0$

Bài 7: Cho a, b, c là các số nguyên, CMR: $(a+b)^7-a^7-b^7\vdots7$

Lời giải

$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^5+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$$

$$\Rightarrow(a+b)^7-a^7-b^7=7(a^6b+3a^5b^2+5a^4b^3+5a^3b^4+3a^2b^5+ab^6)\vdots7\qquad(dpcm)$$

Bài 8: Chứng minh rằng: $A=16^n-15n-1\vdots225\quad\forall n\in N$

Lời giải

+) $n=0\Rightarrow16^0-15.0-1=0\vdots225=15^2$

+) $n=1\Rightarrow A=0\vdots225=15^2$

+) $n=2\Rightarrow A=225\vdots225=15^2$

+) $n\ge 3\Rightarrow 16^n=(15+1)^n=C_n^{\,0}.1^n+C_n^{\,1}.1^{n-1}...C_n^n+15^n=(1+15n+BS(225)\Rightarrow(16^n-15n-1)=BS(225)\vdots 225\forall n$

Bài 9: Chứng minh rằng: $A=(n^2+1)^2-(n+1)^{n^2}\vdots n^3 \quad \forall n\in N^*$

Lời giải

+) n = 1 ; n = 2 thì thỏa mãn

+) $n\ge 3\Rightarrow(n^2+1)^n=(1+n^2)^n=C_n^0.1^n+C_n^1.n^2+C_n^2.n^4+...+C_n^n.n^{2n}=1+n^3+BS(n^3)$ (1)

Lại có:

$$(1+n)^{n^2}=C_{n^2}^0+C_{n^2}^1.n+C_{n^2}^2.n^2+...C_{n^2}^{n^2}=1+n^3+\frac{n^2(n^2-1)}{2}.n^2+BS(n^3)$$

$$=1+n^3+n^3.\left(\frac{n(n^2-1)}{2}\right)+BS(n^3)=1+BS(n^3) \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có điều phải chứng minh.

CHUYÊN ĐỀ 3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

A. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

Khái niệm: Nếu với mọi giá trị của biến thuộc một khoảng xác định nào đó mà giá trị của biểu thức A luôn luôn lớn hơn hoặc bằng (nhỏ hơn hoặc bằng) một hằng số k và tồn tại một giá trị của biến để A có giá trị bằng k thì k gọi là giá trị nhỏ nhất (giá trị lớn nhất) của biểu thức A ứng với các giá trị của biểu thức thuộc khoảng xác định nói trên

Xét biểu thức $A(x)$

+) Ta nói $A(x)$ có giá trị lớn nhất là M, nếu

$A(x)\le M\,\forall x$ và có giá trị x_0 sao cho $A(x_0)=M$ (Chỉ ra 1 giá trị là được)

+) Ta nói $A(x)$ có giá trị nhỏ nhất là m, nếu

$A(x)\ge m\forall x$ và có giá trị x_0 sao cho $A(x_0)=m$ (Chỉ ra 1 giá trị là được)

Như vậy :

a) Để tìm giá trị nhỏ nhất của A, ta cần :

- Chứng minh $A\ge k$ với k là hằng số
- Chỉ ra dấu " = " có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

b) Để tìm giá trị lớn nhất của A, ta cần :

- Chứng minh $A\le k$ với k là hằng số
- Chỉ ra dấu " = " có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

Ký hiệu: Min A là giá trị nhỏ nhất của A và Max A là giá trị lớn nhất của A

Ví dụ: Sai lầm

$A(x)=2x^2-2x+3=x^2+(x-1)^2+2\geq 2\Rightarrow GTNN=2$ (Không chỉ ra được dấu =)

Đáp án đúng là : $A(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\geq\frac{5}{2}\Rightarrow GTNN=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

B. Các dạng toán

Dạng 1: Tìm GTLN, GTNN của tam thức bậc hai ax^2+bx+c

Phương pháp: Áp dụng hằng đẳng thức số 1 và số 2

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A(x)=x^2-4x+24$ b. $B(x)=2x^2-8x+1$ c. $C(x)=3x^2+x-1$

Lời giải

a. $A(x)=x^2-4x+24=(x-2)^2+20\geq 20\forall x\Rightarrow \min A(x)=20\Leftrightarrow x=2$

b. $B(x)=2x^2-8x+1=2(x^2-4x+4)-7=2(x-2)^2-7\geq -7\Rightarrow \min B=-7\Leftrightarrow x=2$

c. $C(x)=3x^2+x-1=3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{13}{12}\geq\frac{-13}{12}\Leftrightarrow x=\frac{-1}{6}$

Bài 2: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A(x)=-5x^2-4x+1$ b. $B(x)=-3x^2+x+1$

Lời giải

a. $A(x)=-5x^2-4x+1=-5\left(x^2+\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}\right)=-5\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{9}{5}\leq\frac{9}{5}\Leftrightarrow x=\frac{-2}{5}$

b. $B(x)=-3x^2+x+1=-3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{13}{12}\leq\frac{13}{12}\Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$

Dạng 2: Tìm GTLN, GTNN của đa thức có bậc cao hơn 2

Phương pháp: Ta đưa về dạng tổng bình phương

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A(x)=x^4-6x^3+10x^2-6x+9$ b. $B(x)=x^4-10x^3+26x^2-10x+30$

c. $C(x)=x^4-2x^3+3x^2-4x+2017$ d. $D(x)=x^4-x^2+2x+7$

e. $E(x)=x^4-4x^3+9x^2-20x+22$ f. $F(x)=x(x-3)(x-4)(x-7)$

g. $G(x)=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)-2006$

Lời giải

a. $A(x)=x^4-6x^3+10x^2-6x+9=(x^4-6x^3+9x^2)+(x^2-6x+9)=(x^2-3x)^2+(x-3)^2\geq 0\forall x$

$\Rightarrow \min A(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x=0\\x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3$

b. $B(x)=x^4-10x^3+26x^2-10x+30=(x^2-5x)^2+(x-5)^2+5\geq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$

c. $C(x)=x^2(x^2+2)-2x(x^2+2)+(x^2+2)+2015=(x^2+2)(x-1)^2+2015\geq 2015 \Leftrightarrow x=1$

d. $D(x)=x^4-2x^2+1+x^2+2x+1+5=(x^2-1)^2+(x+1)^2+5\geq 5 \Leftrightarrow x=-1$

e. Ta có :

$E(x)=x^4-4x^3+9x^2-20x+22=(x^4-4x^3+4x^2)+5(x^2-4x+4)+2=(x^2-2x)^2+5(x-2)^2+2\geq 2 \Leftrightarrow x=2$

f. $F(x)=x(x-3)(x-4)(x-7)=(x^2-7x)(x^2-7x+12)=y^2-36\geq -36 \Leftrightarrow y=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right.$

g. $G(x)=(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)-2006=(x^2+5x)^2-2042\geq -2042 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Dạng 3 : Đa thức có từ 2 biến trở lên

Phương pháp: Đa số các biểu thức có dạng $F(x;y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+h(a.b.c\neq 0)(1)$

- Ta đưa dần các biến vào trong hằng đẳng thức $(a^2\pm 2ab+b^2)=(a\pm b)^2$ như sau

$F(x;y)=mK[x;y]^2+nG[y]^2+r(2)$ hoặc $F(x;y)=mK[x;y]^2+nH[x]^2+r(3)$

Trong đó $G[y],H[x]$ là biểu thức bậc nhất đối với biến, còn $K[x;y]=px+qy+k$ cũng là biểu thức bậc nhất đối với cả hai biến x và y

Cụ thể:

Ta biến đổi (1) để chuyển về dạng (2) như sau với $a\neq 0; 4ac-b^2\neq 0$

Ta có

$4a.F(x;y)=4a^2x^2+4abxy+4acy^2+4adx+4aey+4ah=4a^2x^2+b^2y^2+d^2+4abxy+4adx+2bdy$

$(4ac-b^2)y^2+2y(2ae-bd)+4ah-d^2$

$$=(2ax+by+d)^2+(4ac-b^2)\left(y+\frac{2ae-bd}{4ac-b^2}\right)+4ah-d^2-\left(\frac{2ae-bd}{4ac-b^2}\right)^2$$

Vậy có (2) với

$$m=\frac{1}{4a}.F(x;y)=2ax+by+d; n=-\frac{b^2-4ac}{4a}; G(y)=y+\frac{2ae-bd}{4ac-b^2}; \text{r}=\text{h}-\frac{d^2}{4a}-\frac{(2ae-bd)^2}{4a(4ac-b^2)}$$

+) Nếu $a>0; 4ac-b^2>0 \Rightarrow m>0, n>0 \Rightarrow (2): F(x;y)\geq r(*)$

+) Nếu $a<0; 4ac-b^2>0 \Rightarrow m<0, n<0 \Rightarrow (2): F(x;y)\leq r(**)$

+) Nếu m > 0, n > 0 thì ta tìm được giá trị nhỏ nhất

+) Nếu m < 0, n <0 thì ta tìm được giá trị lớn nhất

Dễ thấy rằng luôn tồn tại (x; y) để có dấu của đẳng thức, như vậy ta sẽ tìm được cực trị của đa thức đã cho

Trong cả hai trường hợp trên:

- Nếu r = 0 thì phương trình F(x; y) = 0 có nghiệm

- Nếu $F(x;y)\geq r>0$ hoặc $F(x;y)\leq r<0$ thì không có $(x;y)$ nào thảo mãn F(x; y) = 0

+) Nếu $a>0;4ac-b^2<0;r=0\Rightarrow(2):F(x;y)$ phân tích được tích của hai nhân tử, giúp ta giải được các bài toán khác

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a. $A=x^2+2y^2-2xy-4y+5$ b. $B=2x^2-2y^2+5y^2+5$

Lời giải

a) Ta có $A(x)=x^2+2y^2-2xy-4y+5=\left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(y^2-4y+4\right)+1=(x-y)^2+(y-2)^2+1$

$$\Rightarrow A\geq 1\ \forall x,y\in R\Rightarrow "="\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=2$$

Vậy $\min A=1\Leftrightarrow x=y=2$

b) $B=2x^2-2y^2+5y^2+5=\left(x^2-4xy+4y^2\right)+\left(x^2+2xy+y^2\right)+y^2+5=(x-2y)^2+(x+y)^2+5\geq 5$

$$\begin{cases}x-2y=0\\x+y=0\end{cases}\Rightarrow x=y=0$$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a. $A(x)=2x^2+y^2-2xy-2x+3$ b. $B(x)=x^2+xy+y^2-3x-3y$

c. $C(x)=2x^2+3y^2+4xy-8x-2y+18$ d. $D(x)=2x^2+3y^2+4z^2-2(x+y+z)+2$

e. $E(x)=2x^2+8xy+11y^2-4x-2y+6$

f. $F(x)=2x^2+6y^2+5z^2-6xy+8yz-2xz+2y+4z+2$

g. $G(x)=2x^2+2y^2+z^2+2xy-2xz-2yz-2x-4y$

h. $H(x)=x^2+y^2-xy-x+y+1$

Lời giải

a. Ta có :

$$A(x)=2x^2+y^2-2xy-2x+3=(x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+2=(x-y)^2+(x-1)^2+2\geq 2\Leftrightarrow x=y=1$$

b. $B(x)=(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+x(y-1)-(y-1)-3=(x-1)^2+(y-1)^2+(x-1)(y-1)-3$

$$=(x-1)^2+2(x-1).\frac{1}{2}.(y-1)+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2-\left(\frac{y-1}{2}\right)^2+(y-1)^2-3=\left[x-1+\frac{y-1}{2}\right]^2-\frac{y^2-2y+1}{4}+y^2-2y+1-3$$

$$=\left[x-1+\frac{y-1}{2}\right]^2+\frac{3(y-1)^2}{4}-3\geq -3\Leftrightarrow\begin{cases}x-1+\dfrac{y-1}{2}=0\\y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$$

c. $C(x)=2x^2+4xy+2y^2+y^2-8x-2y+18=2\left[(x+y)^2-2(x+y)2+4\right]+(y^2+6y+9)+1$

$= 2(x+y-2)^2+(y+3)^2+1\ge 1 \Rightarrow \min A = 1 \Leftrightarrow y=-3; x=5$

d. $D(x)=2x^2+3y^2+4z^2-2(x+y+z)+2=2(x^2-x)+(3y^2-2y)+(4z^2-2z)+2$

$$=2\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+3\left(y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}\right)+\left[(2z)^2-2z+\frac{1}{4}\right]+2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{2}\ge\frac{11}{2}\Rightarrow (x,y,z)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$$

e. $E(x)=2(x^2+4xy+4y^2)+3y^2-4x-2y+6=\left[2(x+2y)^2-4(x+2y)+2\right]+3y^2+6y+4$

$$=2(x+2y-1)^2+3(y+1)^2+1\ge 1\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-1=0\\ y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-1\end{cases}$$

f. $F(x)=2x^2+6y^2+5z^2-6xy+8yz-2xz+2y+4z+2(kho)$

$$F(x)=2x^2-2x(3y+z)+2\left(\frac{3y+z}{2}\right)^2+6y^2+5z^2+8yz-\left(\frac{3y+z}{2}\right)^2+2y+4z+2$$

$$=2\left(x-\frac{3y+z}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y^2+\frac{10}{3}yz+\frac{25}{9}z^2\right)+\frac{1}{3}z^2+2y+4z+2$$

$$=2\left(x-\frac{3y+z}{2}\right)^2+\left[\frac{3}{2}\left(y+\frac{5}{3}z\right)^2+2\left(y+\frac{5}{3}z\right)+\frac{2}{3}\right]+\left(\frac{1}{3}z^2+\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}\right)+1$$

$$=2\left(x-\frac{3y+z}{2}\right)+\frac{3}{2}\left(y+\frac{5}{3}z+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}(x+1)^2+1\ge 1\Leftrightarrow\begin{cases}x-\dfrac{3y+z}{2}=0\\ y+\dfrac{5}{3}z+\dfrac{2}{3}=0\\ z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=-1\end{cases}\Rightarrow \min A=1$$

g. Ta có :

$G(x)=2x^2+2y^2+z^2+2xy-2xz-2yz-2x-4y=(x-1)^2+(y-2)^2+(x+y-z)^2-5\ge -5\Leftrightarrow x=1; y=2; z=3$

h.Ta có : $H(x)=x^2+y^2-xy-x+y+1\Rightarrow 4H(x)=(2x)^2-2.2x.y+y^2+3y^2-4x+4y+4$

$$=(2x-y)^2-2(2x-y)+3y^2+2y+3+1=(2x-y-1)+3(y^2+\frac{2}{3}y+1)=(2x-y-1)+3(y+\frac{1}{2})^2+\frac{8}{3}\ge\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \min 4A=\frac{8}{3}\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}; y=\frac{-1}{3}\Rightarrow \min A=\frac{2}{3}$$

Bài 3: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A=-4x^2-5y^2+8xy+10y+12$

b. $-x^2-y^2+xy+2x+2y$

Lời giải

a. Ta có:

$A=-4x^2-5y^2+8xy+10y+12=-4x^2+8xy-4y^2-y^2+10y-25+37=-4(x-y)^2-(y-5)^2+37\le 37$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$

b. $A=-x^2-y^2+xy+2x+2y \Rightarrow 4A=-4x^2-4y^2+4xy+8x+8y$

$A=-4x^2+4x(y+2)-(y+2)^2+(y+2)^2-4y^2+8y$

$=-(2x-y-2)^2-3(y^2-4y)+4=-(2x-y-2)^2-3(y-2)^2+16\le 16 \Rightarrow A\le 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Bài 4: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A=5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+82$

b. $B=3x^2+3y^2+z^2+5xy-3yz-3xz-2x-2y+3$

Lời giải

a. $A=5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+82=9y^2-12y(x+4)+4(x+4)^2-4(x+4)^2+5x^2+24x+82$

$=\left[3y-2(x+4)\right]^2+(x-4)^2+2\ge 2\forall x,y\in R \Leftrightarrow x=4; y=\frac{16}{3}$

b. $B=\left[z-\frac{3}{2}(x+y)\right]^2+\frac{3}{4}\left(x+\frac{y}{3}-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}(y-2)^2+1\ge 1$

Bài 5: Tìm GTLN của $A=x+y+z-(x^2+2y^2+4z^2)$

Lời giải

$-A=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(2z-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{-7}{16}\ge\frac{-7}{16}\Rightarrow A\le\frac{7}{16}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}; y=\frac{1}{4}; z=\frac{1}{8}$

Bài 6: [HSG – Yên Dũng – Bắc Giang] .

Tìm GTNN của $A=x^2+2y^2+2xy+2x-4y+2013$

Lời giải

$A=x^2+2y^2+2xy+2x-4y+2013=x^2+2x(y+1)+(y+1)^2+(y-3)^2+2003\ge 2003 \Leftrightarrow x=-4; y=3$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tìm GTNN của: $A=x^2-2xy+2y^2+2x-10y+17$

Hướng dẫn

$A=x^2-2x(y-1)+2y^2-10y+17=x^2-2x(y-1)+(y-1)^2+\left[2y^2-10y+17-(y-1)^2\right]$

$=(x-y+1)^2+(y^2-8y+16)$

Bài 2: Tìm min của: $B=x^2-xy+y^2-2x-2y$

Hướng dẫn

$$B = x^2 - x(y+2) + y^2 - 2y = \left[x^2 - 2.x.\frac{y+2}{2} + \frac{y^2+4y+4}{4}\right] + y^2 - 2y - \frac{y^2}{4} - y - 1$$

$$4B = (x-y-2)^2 + 4y^2 - 8y - y^2 - 4y - 4$$

Bài 3: Tìm min của: $C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$

Hướng dẫn

$$C = x^2 + x(y-3) + y^2 - 3y = \left[x^2 + 2.x.\frac{y-3}{2} + \frac{y^2-6y+9}{4}\right] + y^2 - 3y - \frac{y^2-6y+9}{4}$$

$$4C = (x+y-3)^2 + \left[4y^2 - 12y - y^2 + 6y - 9\right]$$

Bài 4: Tìm min của: $D = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$

Hướng dẫn

$$D = x^2 - 2x(y+6) + 6y^2 + 2y + 45 = x^2 - 2x.(y+6) + (y+6)^2 + 6y^2 + 2y + 45 - (y^2 + 12y + 36)$$

$$= (x-y-6)^2 + 5y^2 - 10y + 9$$

Bài 5: Tìm min của: $E = x^2 - xy + 3y^2 - 2x - 10y + 20$

Hướng dẫn

$$E = x^2 - x(y-2) + 3y^2 - 10y + 20 = x^2 - 2x.\frac{y-2}{2} + \frac{y^2-4y+4}{4} + 3y^2 - 10y + 20 - \frac{y^2-4y+4}{4}$$

$$4E = (x-y+2)^2 + (12y^2 - 40y + 80) - (y^2 - 4y + 4) = (x-y+2)^2 + (11y^2 - 36y + 76)$$

Bài 6: Tìm max của: $F = -x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x + 10y - 3$

Hướng dẫn

$$-F = x^2 - 2xy + 4y^2 - 2x - 10y + 3 = x^2 - 2x(y+1) + 4y^2 - 10y + 3$$

$$-F = x^2 - 2x(y+1) + (y+1)^2 + 4y^2 - 10y + 3 - (y+1)^2$$

Bài 7: Tìm min của: $G = (x-ay)^2 + 6(x-ay) + x^2 + 16y^2 - 8ay + 2x - 8y + 10$

Hướng dẫn

$$G = \left[(x-ay)^2 + 6(x-ay) + 9\right] + (x^2 + 2x + 1) + 16y^2 - 8ay - 8y$$

$$G = (x-ay+3)^2 + (x+1)^2 + 16y^2 - 8y(a+1) + (a+1)^2 - (a+1)^2$$

$$G = (x-ay+3)^2 + (x+1)^2 + (4y-a-1)^2 - (a+1)^2 \ge -(a+1)^2$$

Bài 8: Tìm max của: $H = -x^2 + xy - y^2 - 2x + 4y + 11$

Hướng dẫn

$-H = x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y - 11 = x^2 - x(y-2) + y^2 - 4y - 11$

$-H = x^2 - 2x.\dfrac{y-2}{2} + \dfrac{y^2-4y+4}{4} + y^2 - 4y - 11 - \dfrac{(y-2)^2}{4}$

$\Rightarrow -4H = (x-y+2)^2 + 4y^2 - 16y - 44 - (y^2 - 4y + 4)$

Bài 9: Tìm min của: $I = x^2 + 4xy + 5y^2 - 6y + 11$

Hướng dẫn

$I = (x^2 + 4xy + 4y^2) + y^2 - 6y + 11$

Bài 10: Tìm min của: $K = x^2 + y^2 - xy + 3x + 3y + 20$

Hướng dẫn

$4K = 4x^2 + 4y^2 - 4xy + 12x + 12y + 80 = \left[4x^2 - 4x(y-3) + (y-3)^2\right] + \left[4y^2 + 12y + 80 - (y-3)^2\right]$

$4K = (2x - y + 3)^2 + 3y^2 + 18y + 71$

Bài 11: Tìm min của: $M = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y + 1$

Hướng dẫn

$M = (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2y + 1)$

Bài 12: Tìm min của: $N = x^2 - 2xy + 2y^2 - x$

Hướng dẫn

$N = x^2 - x(2y+1) + 2y^2 = x^2 - 2x.\dfrac{2y+1}{2} + \dfrac{(2y+1)^2}{4} + 2y^2 - \dfrac{(2y+1)^2}{4}$

$4N = (x - 2y - 1)^2 + 8y^2 - (4y^2 + 4y + 1)$

Bài 13: Tìm min của: $A = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 1997$

Hướng dẫn

$A = x^2 - 2x(y+1) + 3y^2 + 1997 = x^2 - 2x(y-1) + (y-1)^2 + 3y^2 + 1997 - (y^2 + 2y + 1)$

Bài 14: Tìm min của: $Q = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 10y$

Hướng dẫn

$Q = x^2 - 2x(y-1) + 2y^2 - 10y = x^2 - 2x(y-1) + (y-1)^2 + 2y^2 - 10y - (y^2 - 2y + 1)$

Bài 15: Tìm min của: $R = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y$

Hướng dẫn

$R = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = (x+y)^2 + (y-1)^2 - 1 \geq -1$

Bài 16: Tìm min của: $A = 4x^2 + 5y^2 - 4xy - 16y + 32$

Hướng dẫn

$$A = 4x^2 + 5y^2 - 4xy - 16y + 32 = \left(4x^2 - 4xy + y^2\right) + \left(4y^2 - 16y + 32\right)$$

Bài 17: Tìm min của: $B = x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 4z + 12$

Hướng dẫn

$$B = \left(x^2 - 4xy + 4y^2\right) + \left(y^2 - 4yz + 4z^2\right) + \left(z^2 - 4z + 4\right) + 8$$

$$= \left(x - 2y\right)^2 + \left(y - 2z\right)^2 + \left(z - 2\right)^2 + 8 \geq 8$$

Bài 18: Tìm min của: $C = 5x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 4$

Hướng dẫn

$$C = \left(4x^2 - 2.2x.3y + 9y^2\right) + \left(x^2 - 4x + 4\right) = \left(2x - 3y\right)^2 + \left(x - 2\right)^2 \geq 0$$

Bài 19: Tìm max của: $D = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

Hướng dẫn

$$-D = x^2 + y^2 - xy - 2x - 2y = x^2 - x\left(y + 2\right) + y^2 - 2y$$

$$-D = x^2 - 2x.\frac{y+2}{2} + \frac{\left(y+2\right)^2}{4} + y^2 - 2y - \frac{y^2 + 4y + 4}{4}$$

Bài 20: Tìm min của: $E = x^2 + 5y^2 - 4xy + 2y - 3$

Hướng dẫn

$$E = x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 + 2y + 1 - 4 = \left(x - 2y\right)^2 + \left(y + 1\right)^2 - 4 \geq -4$$

Bài 21: Tìm GTNN của $A = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3$

Hướng dẫn

Ta có: $4P = a^2 - 2ab + b^2 + 3\left(a^2 + b^2\right) + 4 + 2ab - 4a - 4b = \left(a - b\right)^2 + 3\left(a + b - 2\right)^2 \geq 0$

Bài 22: Tìm min của: $G = x^2 + xy + y^2 - 3\left(x + y\right) + 3$

Hướng dẫn

$$4G = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12x - 12y + 12$$

$$4G = 4x^2 + 4x\left(y - 3\right) + \left(y - 3\right)^2 + \left(4y^2 - 12y + 12\right) - \left(y^2 - 6y + 9\right)$$

$$4G = \left(2x + y - 3\right)^2 + 3y^2 - 6y + 3 = \left(2x + y - 3\right)^2 + 3\left(y - 1\right)^2 \geq 0$$

Bài 23: CMR không có giá trị x, y, z thỏa mãn: $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 8y - 6z + 15 = 0$

Hướng dẫn

$\left(x^2-2x+1\right)+\left(4y^2+8y+4\right)+\left(z^2-6z+9\right)+1\geq 1$

Bài 24: Tìm min của: $A=2x^2+y^2-2xy-2x+3$

Hướng dẫn

$A=x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+2=\left(x-y\right)^2+\left(x-1\right)^2+2\geq 2$

Bài 25: Tìm min của: $B=x^2-2xy+2y^2+2x-10y+17$

Hướng dẫn

$B=x^2-2x\left(y-1\right)+\left(y-1\right)^2+2y^2-10y+17-\left(y^2-2y+1\right)\ =\left(x-y+1\right)^2+\left(y^2-8y+16\right)$

Bài 26: Tìm min của: $D=2x^2+2xy+5y^2-8x-22y$

Hướng dẫn

$2D=4x^2+4xy+10y^2-16x-44y=4x^2+4x\left(y-4\right)+10y^2-44y$

$2D=4x^2+2.2x\left(y-4\right)+\left(y-4\right)^2+10y^2-44y-y^2+8y-16$

Bài 27: Tìm min của: $E=2x^2+9y^2-6xy-6x-12y+2004$

Hướng dẫn

$2E=4x^2+18y^2-12xy-12x-24y+4008$

$2E=4x^2-12x\left(y+1\right)+9\left(y+1\right)^2+18y^2-24y+4008-9\left(y^2+2y+1\right)$

$2E=\left(2x-y-1\right)^2+9y^2-42y+3999$

Bài 28: Tìm min của: $F=x^2-2xy+6y^2-12x+12y+45$

Hướng dẫn

$F=x^2-2x\left(y+6\right)+\left(y+6\right)^2+6y^2+12y+45-\left(y^2+12y+36\right)=\left(x-y-6\right)^2+5y^2+9\geq 9$

Bài 29: Tìm GTNN của biểu thức : $a^2+ab+b^2-3a-3b+3$

Hướng dẫn

$P=a^2+ab+b^2-3a-3b+3 \Rightarrow 4P=\left(a-b\right)^2+3\left(a+b-2\right)^2\geq 0$

Bài 30: Tìm min của: $A=x^2+6y^2+14z^2-8yz+6zx-4xy$

Hướng dẫn

$A=x^2-2x\left(2y+3z\right)+6y^2-14z^2$

$\Rightarrow A=x^2-2x\left(2y+3z\right)+\left(2y+3z\right)^2+6y^2-14z^2-\left(4y^2+12yz+9z^2\right)$

$\Rightarrow A=\left(x-2y-3z\right)^2+2y^2-12yz-23z^2$

Bài 31: Tìm min của: $B=x^2+2y^2+3z^2-2xy+2xz-2x-2y-8z+2000$

Hướng dẫn

$$B = x^2 - 2x(y - z + 1) + 2y^2 + 3z^2 - 2y - 8z + 2000$$

$$= x^2 - 2x(y - z + 1) + (y - z + 1)^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2y - 2z + 2000 - (y^2 + z^2 + 1 - 2yz - 2z + 2y)$$

$$= (x - y + z - 1)^2 + (y^2 + 2z^2 - 4y + 2yz + 1999)$$

$$= (x - y + z - 1)^2 + \left[y^2 - 2y(z + 2) + (z + 2)^2\right] + 2z^2 - (z^2 + 4z + 4) + 1999$$

$$= (x - y + z - 1)^2 + (y - z - 2)^2 + (z^2 - 4z + 1995)$$

Dạng 4: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức có quan hệ ràng buộc giữa các biến

Phương pháp :

- Dồn biến từ điều kiền rồi thay vào biểu thức.
- Biến đổi biểu thức thành các thành phần có chứa điều kiện để thay thế.
- Sử dụng thêm một số bất đẳng thức phụ :

+ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (Dấu = khi a = b, với a, b không âm)

+ $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (Dấu "=" khi a = b)

+ $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$ (Dấu "=" khi a = 1)

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = x^3 + y^3 + xy; x + y = 1$

b. $B = 5x^2 + y^2; x + y = 1$

c. $C = x^2 + 2y^2; x + 2y = 1$

d. $D = 2x^2 + 5y^2; 4x - 3y = 7$

Lời giải

a. $A = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + xy = x^2 + y^2$

Có :

$$x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y \Rightarrow A = (1 - y)^2 + y^2 = 2y^2 - 2y + 1 = 2\left(y^2 - \frac{1}{2}y.2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 1 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $x = \dfrac{1}{2}; y = \dfrac{1}{2}$

b. Có

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \Rightarrow B = 5x^2 + (1 - x)^2 = 6x^2 - 2x + 1 = 6\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right) = 6\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{5}{6} \geq \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}; y = \frac{5}{6}$$

c. $C = x^2 + 2y^2 = 6y^2 - 4y + 1 \Rightarrow \min C = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow y = x = \dfrac{1}{3}$

d. Ta có :

$$4x-3y=7\Rightarrow y=\frac{4x-7}{3}\Rightarrow D=2x^2+5(\frac{4x-7}{3})^2\Rightarrow 9D=98x^2-280x+245=2(7x-10)^2+45\geq 45$$

$$\Rightarrow \min D=5\Leftrightarrow x=\frac{10}{7};y=\frac{-3}{7}$$

Bài 2: [HSG – BG – 2011]

Cho a + b = 1. Tìm GTNN của $A=a(a^2+2b)+b(b^2-a)$

Lời giải

Có a + b = 1

$$\Rightarrow b=1-a\Rightarrow A=a(a^2+2b)+b(b^2-a)=a^3+2ab+b^3-ab=a^3+b^3+ab=a^3+(1-a)^3+a(1-a)=2a^2-2a+1$$

$$=2\left(a^2-a+\frac{1}{2}\right)=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}\forall a\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

Bài 3: [HSG – HN – 2006 - 2007]

Cho các số thực x, y thỏa mãn: x + y = 2. Tìm GTNN của $A=x^3+y^3+2xy$

Lời giải

$$A=x^3+y^3+2xy=(x+y)^3-3xy(x+y)+2xy$$

Theo giả thiết

$$x+y=2\Rightarrow y=2-x\Rightarrow A=2^3-6x(2-x)+2x(2-x)=4x^2-8x+8=4(x-1)^2+4\geq 4\forall\in R\Leftrightarrow x=y=1$$

Bài 4: Cho các số thực x, y thỏa mãn : x + y + 4 = 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$A=2(x^3+y^3)+3(x^2+y^2)+10xy$$

Lời giải

Ta có : $A=2(x^3+y^3)+3(x^2+y^2)+10xy=2(x+y)^3-6xy(x+y)+3(x+y)^2-6xy+10xy$

$$=28xy-80=28x(-4-x)-80=-28(x^2+4x+4)+32\Rightarrow A=-28(x+2)^2+32\leq 32\Leftrightarrow x=-2\Rightarrow y=-2$$

Bài 5: [HSG – HN – 1996 - 1997]

Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x^2+y^2-xy=4$. Tìm GTLN, GTNN của $P=x^2+y^2$

Lời giải

Ta có:

$$x^2+y^2-xy=4\Rightarrow 8=x^2+y^2+x^2+y^2-2xy=x^2+y^2+(x-y)^2\geq x^2+y^2\Rightarrow P\leq 8\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\x^2+y^2-xy=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=\pm 2$$

Vậy GTLN của P = -2 $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=2\\x=y=-2\end{array}\right.$

Mặt khác:

$$8=2(x^2+y^2)-2xy=3(x^2+y^2)-(x-y)^2\le 3(x^2+y^2)\Rightarrow P\ge\frac{8}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\x^2+y^2-xy=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\\x=-y=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$$

Vậy GTNN của P = $\frac{8}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{\sqrt{3}};y=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}\\x=\dfrac{-2}{\sqrt{3}};y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$

Bài 6: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $2x+2y+z=4$. Tìm GTLN của biểu thức

$$A=2xy+yz+zx$$

Lời giải

Từ giả thiết: $2x+2y+z=4\Rightarrow z=4-2x-2y\Rightarrow A=2xy+y(4-2x-2y)+x(4-2x-2y)$

$=-2x^2-2y^2-2xy+4x+4y\Rightarrow 2A=-4x^2-4y^2-4xy+8x+8y=-4x^2-4x(y+2)-(y-2)^2+(y-2)^2-4y^2+8y$

$$=-(2x+y-2)-3\left(y^2-\frac{4}{3}y\right)+4=-(2x+y-2)-3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{16}{3}\le\frac{16}{3}\Rightarrow A\le\frac{16}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow z=\frac{4}{3}$$

Bài 7: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: x + y + z = 6. Tìm GTLN của $A=xy+2yz+3xz$

Lời giải

Từ giả thiết

$\Rightarrow z=6-x-y\Rightarrow A=xy+z(2y+3x)=xy+(6-x-y)(2y+3x)=-3x^2-2y^2-4xy+18x+12y$

$\Rightarrow 3A=-9x^2-6y^2-12xy+54x+36y=-9x^2-6x(2y-9)-6y^2+36y=-(3x+2y-9)^2-2y^2+81\le 81$

$$\Rightarrow A\le 27\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y-9=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}\Rightarrow z=3$$

Bài 8: Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x^2+2xy+7(x+y)+2y^2+10=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A=x+y+3$

Lời giải

Từ giả thiết

$x^2+2xy+7(x+y)+2y^2+10=0\Rightarrow 4x^2+8xy+28x+28y+8y^2+40=0\Leftrightarrow(2x+2y+7)^2+4y^2=9$

$\Rightarrow(2x+2y+7)^2\le 9\Rightarrow|2x+2y+7|\le 3\Rightarrow -3\le 2x+2y+7\le 3\Leftrightarrow -5\le x+y\le -2\Leftrightarrow -2\le A\le 1$

+) $A=1\Leftrightarrow x=-2;y=0$

+) $A=-2\Leftrightarrow x=-5;y=0$

Bài 9: Tìm GTLN, GTNN của $S = ab + 2009$, với a, b, là hai số thực khác 0 và

$2a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{a^2} = 4$

Lời giải

Ta có:

$$4 = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 + a^2 + \frac{b^2}{4} - ab + ab - 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + ab + a \geq ab + 2 \Rightarrow ab \leq 2 \Rightarrow S \leq 2011 \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \\ a - \frac{b}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1; b = -2 \\ a = 1; b = 2 \end{cases}$$

Ta lại có:

$$4 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - ab + 2 \geq -ab + 2 \Rightarrow ab \geq -2 \Rightarrow S \geq 2007 \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1; b = -2 \\ a = -1; b = 2 \end{cases}$$

Vậy GTNN của S = 2007 $\Leftrightarrow (a, b) = (\pm 1; \pm 2)$

Bài 10: [Tuyển sinh vào 10 – TH – 2009 – 2010]

Cho các số thực m, n, p thỏa mãn: $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$. Tìm GTNN, GTLN của

$$A = m + n + p$$

Lời giải

Theo giả thiết có:

$$n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + 2np + 2p^2 + 3m^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2np + 2mp + m^2 - 2mn + n^2 + m^2 - 2np + p^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (m + n + p)^2 + (m - n)^2 + (m - p)^2 = 2$$

$$\Rightarrow (m + n + p)^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m + n + p \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m + n + p \leq \sqrt{2}$$

+) $A = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 0 \\ m - p = 0 \\ m + n + p = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = n = p = \frac{-\sqrt{2}}{3}$

+) $A = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 0 \\ m - p = 0 \\ m + n + p = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = n = p = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Bài 11: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn : $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm GTLN, GTNN $A=x+y+2z$

Lời giải

Từ $x^2+y^2+z^2=3 \Leftrightarrow 6x^2+6y^2+6z^2=18 \Leftrightarrow (x+y+2z)^2+(x-y)^2+(2x-z)^2+(2y-z)^2=18$

$\Rightarrow x+y+2z\le 18 \Rightarrow -3\sqrt{2}\le A\le 3\sqrt{2}$

+) $A=-3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2x-z=0 \\ 2y-z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ z=-\sqrt{2} \end{cases}$

+) $A=3\sqrt{2} \Leftrightarrow x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}; z=\sqrt{2}$

Bài 12: Cho các số thực m, n, p thỏa mãn : $2m^2+2n^2+4p^2+3mn+mp+2np=\dfrac{3}{2}$ (1)

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A=m+n+p$

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow 4m^2+4n^2+8p^2+6mn+2mp+4np=3$$
$$\Leftrightarrow 3(m^2+n^2+p^2+2mn+2np+2pm)+(m^2-4mp+4p^2)+(n^2-2np+p^2)=3$$
$$\Leftrightarrow 3(m+n+p)^2+(m-2p)^2+(n-p)^2=3$$
$$\Rightarrow 3(m+n+p)^2\le 3 \Rightarrow -1\le m+n+p\le 1$$

+) $A=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-2p=0 \\ n-p=0 \\ m+n+p=-1 \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{-1}{2}; n=p=\dfrac{-1}{4}$

+) $A=1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-2p=0 \\ n-p=0 \\ m+n+p=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}; n=p=\dfrac{1}{4}$

Bài 13: Cho x + y = z = 3 ; $A=x^2+y^2+z^2; B=xy+yz+zx$

a. Chứng minh $A\ge B$

b. Tìm GTNN của A

c. Tìm GTLN của B

d. Tìm GTNN của A + B

Lời giải

a. Xét $A-B=\dfrac{1}{2}\left[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right]\ge 0 \Rightarrow A\ge B \Leftrightarrow x=y=z$

b. Ta có :

$(x+y+z)^2=9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0 \\ x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx \end{cases} \Rightarrow 9=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\le 3(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow 9 \le 3A \Rightarrow A \ge 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

c. $9 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) \ge 3(xy + yz + zx) = 3B \Rightarrow B \le 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

d. Có: $\begin{cases} A + 2B = 9 \\ B \le 3 \end{cases} \Rightarrow A + B = 9 - B \ge 6 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Bài 14: Cho $a,b,c \in [-1;2]$ thỏa mãn: $a+b+c=0$. Tìm GTLN của $P = a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải

Với $x \in [-1,2]$, ta có: $x \ge -1; x \le 2 \Rightarrow (x+1)(x-2) \le 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le x + 2$

Áp dụng :

$P = a^2 + b^2 + c^2 \le a + 2 + b + 2 + c + 2 = a + b + c + 6 = 6 \Rightarrow (a,b,c) = (-1,-1,2) \Rightarrow GTLN = 6$

Bài 15: Cho $a,b,c \in [-1;2]$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTLN của $P = a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải

Ta có : $(a+1)(b+1)(c+1) \ge 0 \Rightarrow abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 \ge 0$

$(2-a)(2-b)(2-c) \ge 0 \Rightarrow 8 - 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) - abc \ge 0 \Rightarrow 3(ab+bc+ca) + 9 - 3(a+b+c) \ge 0$

$\Leftrightarrow 3(ab+bc+ca) \ge -6 \Leftrightarrow ab+bc+ca \ge -2 \Rightarrow P = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 1 - 2(ab+bc+ca) \le 5$

Dấu ‘ = ’’ xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c) = (-1,0,2) \Rightarrow \max P = 5$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tìm min của: $A = 3x^2 + y^2$ biết $3x + y = 1$

Hướng dẫn

Từ $3x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 3x \Rightarrow A = 3x^2 + (1-3x)^2 = 12x^2 - 6x^2 + 1$

Bài 2: Tìm min của: $A = xy$ biết $3x + y = 1$

Hướng dẫn

Ta có $3x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 3x \Rightarrow A = x(1-3x) = -3x^2 + x$

Bài 3: Tìm min của: $A = a^3 - b^3 - ab$ biết: a – b =1

Hướng dẫn

Ta có:

$$a = b + 1 \Rightarrow A = (b+1)^3 - b^3 - (b+1)b = 2b^2 + 2b + 1$$

Bài 4: Tìm max của: $B = a.b$ biết: $3a + 5b = 12$

Hướng dẫn

Từ giả thiết ta có: $a = \dfrac{12-5b}{3}$, thay vào $B = b\left(\dfrac{12-5b}{3}\right) = \dfrac{-5}{3}b^2 + \dfrac{12}{3}b$

Bài 5: Tìm min của: $C = x^3 + y^3 + xy$ biết: $x + y = 1$

Hướng dẫn

Từ giả thiết => $y=1-x$ thay vào C ta được: $C=x^3+(1-x)^3+xy=2x^2-2x+1$

Bài 6: Tìm min của: $D=x^2+2y^2$ biết: $x+2y=1$

Hướng dẫn

Từ giả thiết suy ra $x=1-2y$ thay vào $D=(1-2y)^2+2y^2$

Bài 7: Tìm min của: $E=2x^2+5y^2$ biết: $4x-3y=7$

Hướng dẫn

Từ giả thiết suy ra $y=\dfrac{4x-7}{3}$ thay vào E và làm tiếp

Bài 8: Cho a, b>0 và a+b=4, tìm GTLN của $P=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\left(1-\dfrac{1}{b}\right)$

Hướng dẫn

Ta có: $P=1-\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{1}{ab}=1-\dfrac{a+b}{ab}+\dfrac{1}{ab}=1-\dfrac{4}{ab}+\dfrac{1}{ab}=1-\dfrac{3}{ab}$

Do $a,b>0 \Rightarrow a+b=4\geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab}\leq \dfrac{4}{2}=2 \Rightarrow ab\leq 4$

Khi đó: $\dfrac{3}{ab}\geq\dfrac{3}{4} \Rightarrow 1-\dfrac{3}{ab}\leq 1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$, dấu = xảy ra khi $\begin{cases} a+b=4 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2$

Bài 9: Tìm min của: $F=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(1+\dfrac{1}{b}\right)^2$, biết: a + b = 1 và a,b > 0

Hướng dẫn

Cách 1:

Ta có: $\left(1+\dfrac{a+b}{a}\right)^2+\left(1+\dfrac{a+b}{b}\right)^2=\left(2+\dfrac{b}{a}\right)^2+\left(2+\dfrac{a}{b}\right)^2=8+4\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)$

$\geq 8+4.2+2=18$

Cách 2:

Ta có:

$$F=\left(1+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right)+\left(1+\frac{2}{b}+\frac{1}{b^2}\right)=2+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=2+2\left(\frac{a+b}{ab}\right)+\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)$$

$$F=2+\frac{2}{ab}+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \quad (1)$$

Mà $a+b=1 \Rightarrow a^2+b^2=1-2ab$ thay vào (1) ta được: $F=2+\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1-2ab}{a^2b^2}=2+\dfrac{1}{a^2b^2}$

Lại có: $a+b=1\geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab}\leq\dfrac{1}{2} \Rightarrow ab\leq\dfrac{1}{4} \Rightarrow a^2b^2\leq\dfrac{1}{16}$

$$=> \frac{1}{a^2b^2} \geq \frac{16}{} => F = 2 + \frac{1}{a^2b^2} \geq 2 + 16 = 18$$

Dấu = khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=1 \\ a=b \end{cases} <=> a = b = \frac{1}{2}$

Bài 10: Cho x, y thỏa mãn: $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$, tìm Max của: A= x.y

Hướng dẫn

Từ giả thiết ta có : $4 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy + 2 => 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy + 2$

$$=> xy + 2 \leq 4 => xy \leq 2$$

Bài 11: Cho hai số thực a,b $\neq 0$, thỏa mãn: $2a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{a^2} = 4$, Tìm min, max của:

$$S = ab + 2017$$

Hướng dẫn

Từ giả thiết ta có : $4 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 2\right) + \left(a^2 + \frac{b^2}{4} - ab\right) + ab + 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + ab + 2$

$=> ab + 2 \leq 4 => ab + 2017 \leq 2019 => S \leq 2019$

Mặt khác : $4 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 2\right) + \left(a^2 + \frac{b^2}{4} + ab\right) - ab + 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 - ab + 2$

$=> -ab + 2 \leq 4 => ab \geq -2 => ab + 2017 \geq 2015 => S \geq 2015$

Bài 12: Cho hai số x,y khác 0 thỏa mãn: $x^2 + \frac{8}{x^2} + \frac{y^2}{8} = 8$, Tìm min, max của: $A = xy + 2024$

Hướng dẫn

Từ gt ta có : $8 = x^2 + \frac{8}{x^2} + \frac{y^2}{8} => 16 = 2x^2 + \frac{16}{x^2} + \frac{y^2}{4} = \left(x^2 + \frac{16}{x^2} - 8\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + xy\right) - xy + 8$

$$=> 8 = \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - xy + 8 => -xy + 8 \leq 16 => xy \geq -8 => A = xy + 2024 \geq 2016$$

Mặt khác : $16 = \left(x^2 + \frac{16}{x^2} - 8\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy + 8 = \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy - 8$

$$=> xy - 8 \leq 16 => xy \leq 8 => S = xy + 2024 \leq 2032$$

Bài 13: Cho x, y $\in$R khác 0 biết: $8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4$, Tìm x, y để $B = x.y$ đạt min và đạt max

Hướng dẫn

Ta có : $4=8x^2+y^2+\frac{1}{4x^2}=\left(4x^2+\frac{1}{4x^2}-2\right)+\left(4x^2+y^2-4xy\right)+4xy+2$

$4=\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2+\left(2x-y\right)^2+4xy+2 => 4xy+2\le 4 => B=xy\le\frac{1}{2}$

Mặt khác : $4=\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2+\left(2x+y\right)^2-4xy+2 => -4xy+2\le 4 => B=xy\ge\frac{-1}{2}$

Bài 14: Cho x, y >0 thỏa mãn: x + y = 1, Tìm min của: $A=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$

Hướng dẫn

Ta có : $A=16(xy)^2+12x^3+12y^3+9xy+25xy=6x^2y^2+12\left(x^3+y^3\right)+34xy$

Vì x + y = 1 nên $x^3+y^3=\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)=\left(x+y\right)^2-3xy=1-3xy$, thay vào A

$A=6x^2y^2+12\left(1-3xy\right)+34xy$, Đặt xy = t khi đó: $A=6t^2-2t+12$

Bài 15: Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $x+y=1$ Tìm min của biểu thức:

$$C=\left(x^2+4y\right)\left(y^2+4x\right)+8xy$$

Hướng dẫn

Ta có : $C=\left(x^2+4y\right)\left(y^2+4x\right)+8xy=x^2y^2+4x^3+4y^3+16xy+8xy=x^2y^2+4\left(x^3+y^3\right)+24xy$

Do $x+y=1 => x^3+y^3=\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)=1-3xy$ Thay vào C ta được :

$C=x^2y^2+4\left(1-3xy\right)+24xy=x^2y^2+12xy+4=\left(x^2y^2+2xy.6+36\right)-32=\left(xy+6\right)^2-32\ge -32$

$MinC=-32$, Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x+y=1\\xy=-6\end{cases} => \begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$

Bài 16: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: x + 2y = 3 tìm min của: $A=x^2+2y^2$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $x=3-2y$ thay vào $A=\left(3-2y\right)^2+2y^2=6y^2-12y+9$

Bài 17: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $x^2+y^2-xy=4$, Tìm min và max của: $A=x^2+y^2$

Hướng dẫn

Ta có : $x^2+y^2-xy=4 => 2x^2+2y^2-2xy=8 => \left(x-y\right)^2+x^2+y^2=8$

$\Rightarrow x^2+y^2\le 8$ hay $A\le 8$

Mặt khác : $8=2x^2+2y^2-2xy => 2x^2+2y^2=8+2xy => 3x^2+3y^2=8+\left(x+y\right)^2\ge 8$

$=> x^2+y^2\ge\frac{8}{3}$

Hay $A \ge \frac{8}{3}$

Bài 18: Cho x,y thỏa mãn: x+ y =2, Tìm min của: $A = x^3 + y^3 + 2xy$

Hướng dẫn

Từ gt ta có : $y = 2 - x$ thay vào A ta được : $A = x^3 + (2-x)^3 + 2x(2-x)$

Bài 19: Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x + y + 4 = 0$, Tìm max của:

$A = 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy$

Hướng dẫn

Ta có: $x + y = -4$, nên $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = -64 + 12xy$,

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 16 - 2xy$ thay vào $A = 2(-64+12xy) + 3(16-2xy) + 10xy$

Bài 20: Cho x, y, z $\in$ R, thỏa mãn: $2x + 2y + z = 4$, tìm max của: $A = 2xy + yz + zx$

Hướng dẫn

Từ giả thiết $\Rightarrow z = 4 - 2x - 2y$ thay vào A ta được :

$A = 2xy + y(4-2x-2y) + x(4-2x-2y) = -2x^2 - 2y^2 - 2xy + 4x + 4y$

Bài 21: Cho x, y, z $\in$ R thỏa mãn: $x + y + z = 6$. Tìm max của: $A = xy + 2yz + 3zx$

Hướng dẫn

Từ gt => $z = 6 - x - y$ thay vào $A = xy + 2y(6-x-y) + 3x(6-x-y)$

Bài 22: Cho x,y $\in$ R thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x+y) + 2y^2 + 10 = 0$. Tìm min và max của:

$$S = x + y + 3$$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $x^2 + 2xy + 7x + 7y + 2y^2 + 10 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 2x\left(\frac{2y+7}{2}\right) + \frac{(2y+7)^2}{4} + 2y^2 + 7y + 10 - \frac{(2y+7)^2}{4} = 0 \Rightarrow \left(x + y + \frac{7}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \le x + y + \frac{7}{2} \le \frac{3}{2} \Rightarrow -5 \le x + y \le -2 \Rightarrow -2 \le x + y + 3 \le 1$$

Bài 23: Cho các số thực m, n, p thỏa mãn: $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$. Tìm min, max của:

$$A = m + n + p$$

Hướng dẫn

Từ gt ta có : $2n^2 + 2np + 2p^2 = 2 - 3m^2 \Rightarrow 3m^2 + 2n^2 + 2p^2 + 2np = 2$

$\Rightarrow (m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2np + 2mp) + (2m^2 + n^2 + p^2 - 2mn - 2mp) = 2$

$=> (m+n+p)^2 + (m-p)^2 + (m-n)^2 \le 2 => -\sqrt{2} \le m+n+p \le \sqrt{2}$

Bài 24: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=3$, Tìm min, max của:
$P = x+y+2z$

Hướng dẫn

Ta có : $P^2 = (x+y+2z)^2 = x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4xz$, nên ta nhân 6 vào gt :

$18 = 6x^2+6y^2+6z^2 = (x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4zx)+(5x^2+5y^2+2z^2-2xy-4yz-4zx)$

$18 = (x+y+2z)^2+(x-y)^2+(2x-z)^2+(2y-z)^2 => (x+y+2z)^2 \le 18$

$-\sqrt{18} \le x+y+2z \le \sqrt{18}$

Bài 25: Cho các số thực m, n, p thỏa mãn: $2m^2+2n^2+4p^2+3mn+mp+2np = \frac{3}{2}$,

Tìm min max của: $B = m+n+p$

Hướng dẫn

Từ gt ta có : $4m^2+4n^2+8p^2+6mn+2mp+4np=3$

$=> 3(m^2+n^2+p^2+2mn+2mp+2np)+(m^2+n^2+5p^2-4mp-2np)=3$

$=> 3(m+n+p)^2+(2p-m)^2+(n-p)^2=3 => 3(m+n+p)^2 \le 3 => -1 \le m+n+p \le 1$

Bài 26: Cho x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=3$, Tìm min max của: $A = xy+yz+zx$

Hướng dẫn

Từ gt $=> z = 3-x-y$ thay vào $A = xy+y(3-x-y)+x(3-x-y) = x^2-y^2-xy+3x+3y$

Bài 27: Cho x, y, z thỏa mãn: x + y + z = 3, Tìm min max của: $B = -xy+3yz+4zx$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $z = 3-x-y$ $=> B = -xy+3y(3-x-y)+4x(3-x-y)$

$\Rightarrow B = -4x^2-3y^2-16xy+9y+12x$

Bài 28: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn: $2x+3y-z=4$, Tìm min max của $A = -xy+yz+zx$

Hướng dẫn

Từ gt $=> z = 2x+3y-4$ thay vào $A = -xy+y(2x+3y-4)+x(2x+3y-4)$

Bài 29: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn: $2x+3y-z=4$, Tìm min max của:

$$B = 12xy-3yz-4zx$$

Hướng dẫn

Từ gt ta có : $z = 2x+3y-4$ thay vào $B = 12xy-3y(2x+3y-4)-4x(2x+3y-4)$

Bài 30: Cho hai số thực x,y thỏa mãn: $x+y=-2$, tìm min của: $A = 2(x^3+y^3)-15xy+7$

Hướng dẫn

Từ x + y = -2, ta có: $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=-8+6xy$ thay vào

$A=2(-8+6xy)-15xy+7=-3xy-9$ và y = - 2 - x thay vào $A=-3x(-2-x)-9$

Bài 31: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x+y=-2$, Tìm min của

$$B=x^4+y^4-x^3-y^3+2x^2y^2+2xy(x^2+y^2)+13xy$$

Hướng dẫn

$B=x^4+y^4-x^3-y^3+2x^2y^2+2xy(x^2+y^2)+13xy$

Từ x + y = - 2, ta có: $x^4+y^4=\left[(x+y)^2-2xy\right]^2-2x^2y^2=(4-2xy)^2-2x^2y^2$

$x^3+y^3=6xy-8$, $x^2+y^2=4-2xy$, Thay vào b ta được :

$B=(4-2xy)^2-2x^2y^2-(6xy-8)+2x^2y^2+2xy(4-2xy)+13xy$

$B=-xy+24$, thay $y=-2-x \Rightarrow B=x^2+2x$

Bài 32: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x+y=5$, Tìm max của:

$$A=x^3+y^3-8(x^2+y^2)+xy+2$$

Hướng dẫn

Vì $x+y=5$ nên $x^3+y^3=125-15xy$ và $x^2+y^2=25-2xy$ thay vào

$A=125-15xy-8(25-2xy)+xy+2$

Bài 33: Cho hai số x,y thỏa mãn: x + y = 5, Tìm max của:

$$B=x^4+y^4-4(x^3+y^3)-20(x^2+y^2)-2x^2y^2+xy$$

Hướng dẫn

$B=x^4+y^4-4(x^3+y^3)-20(x^2+y^2)-2x^2y^2+xy$

Vì x + y = 5 nên $x^4+y^4=(25-2xy)^2-2x^2y^2$, $x^3+y^3=125-15xy$, $x^2+y^2=25-2xy$

$B=(25-2xy)^2-2x^2y^2-4(125-15xy)-20(25-2xy)-2x^2y^2+xy$

Bài 34: Cho hai số x, y thỏa mãn: $x^4+y^4-7=xy(3-2xy)$, Tìm min max của: $P=xy$

Hướng dẫn

Từ giả thiết suy ra: $x^4+y^4-3xy+2x^2y^2=7$

$\Rightarrow (x^4-2x^2y^2+y^4)+4x^2y^2-3xy=7 \Rightarrow (x^2-y^2)^2+\left(2xy-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{121}{16} \Rightarrow \left(2xy-\frac{3}{4}\right)^2\le\frac{121}{16}$

Bài 35: Cho các số thực x, y thỏa mãn: $7x^2+9y^2+12xy-4x-6y-15=0$, Tìm min max của:

$$A=2x+3y+5$$

Hướng dẫn

Từ giả thiết suy ra: $(2x)^2+(3y)^2+2.2x.3y-2.2x-2.3y+1+3x^2=16$ => $(2x+3y+1)^2+3x^2=16$

Bài 36: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn: $3x^2+2y^2+5z^2+4xy-2xz+2yz=5$, Tìm min max của: $P=x+y$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $(x^2+y^2+2xy)+(2x^2+y^2+5z^2+2xy-2xz+2yz)=5$

$\Rightarrow (x+y)^2+(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)+(4z^2-4xz+x^2)=5$

$\Rightarrow (x+y)^2\le 5 \Rightarrow -\sqrt{5}\le x+y\le\sqrt{5}$

Bài 37: Cho các số x, y, z thỏa mãn: $3x+y+2z=1$. Tìm min max của: $p=x^2+y^2+z^2$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $y=1-3x-2z$ => $y^2=1+9x^2+4z^2-6x+12xz-4z$ khi đó :

$P=10x^2+5z^2+12xz-6x-4z+1$

Bài 38: Cho các số x, y, z thỏa mãn: x + y + z = 1, Tìm max của: $A=2xy+3yz+4zx$

Hướng dẫn

Từ gt => $z=1-x-y$ thay vào $A=2xy+3y(1-x-y)+4x(1-x-y)$

Bài 39: Cho x, y $\in$R, thỏa mãn: x + 2y = 1, Tìm max của: P = x. y

Hướng dẫn

Từ gt => $x=1-2y$ thay vào $P=y(1-2y)$

Bài 40: Cho x, y $\ge$ 0, x + y = 1, Tìm min, max của: $A=x^2+y^2$

Hướng dẫn

Từ gt => $y=1-x$ thay vào $A=x^2+(1-x)^2$

Bài 41: Tìm min max của: $P=x+y+z$, biết: $y^2+z^2+yz=1-\frac{3}{2}x^2$

Hướng dẫn

Từ gt => $2y^2+2z^2+2yz=2-3x^2$ => $3x^2+2y^2+2z^2+2yz=2$

$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)+(2x^2+y^2+z^2-2xy-2zx)=2$

$\Rightarrow (x+y+z)^2+(x-y)^2+(x-z)^2=2 \Rightarrow (x+y+z)^2\le 2$

Bài 42: Cho $x^2+3y^2+2xy-10x-14y+18=0$, Tìm min, max của: $S=x+y$

Hướng dẫn

Từ gt => $x^2+2x(y-5)+(y-5)^2+3y^2-14y+18-y^2+10y-25=0$

$=> (x+y-5)^2 + 2(y^2-2y+1) = 9 => (x+y-5)^2 \le 9 => -3 \le x+y-5 \le 3$

Bài 43: Cho a, b, c không âm thỏa mãn: 3a + 2c = 51 và c + 5b = 21.

Tìm max của A = a + b + c

Hướng dẫn

Cộng theo vế giả thiết ta được : $3a+3c+5b=72 => 3(a+b+c)=72-2b \le 72$

Do $b \ge 0 => a+b+c \le \frac{72}{3} = 24$

Bài 44: Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn: 2a + b = 6 - 3c và 3a + 4b = 3c + 4.

Tìm min $E = 2a+3b-4c$

Hướng dẫn

Cộng theo vế ta được : $a+b=2 => \begin{cases} a = 4-3c \\ b = 3c-2 \end{cases} => \begin{cases} c \le \frac{4}{3} \\ c \ge \frac{2}{3} \end{cases}$ do $\begin{cases} a \ge 0 \\ b \ge 0 \end{cases}$

Khi đó: $E = 2(4-3c)+3(3c-2)-4c = 2-c$

Bài 45: Cho $x, y, z \ge 0, 2x+7y=2014, 3x+5z=3031$, Tìm GTLN của biểu thức $A = x+y+z$

Hướng dẫn

Cộng theo vế của gt ta có: $5x+5y+5z=5045-2y \le 5045$ do $y \ge 0$

nên $5(x+y+z) \le 5045 => x+y+z \le 1009$

Bài 46: Cho $a+b=2$,Tìm max của: $A = ab(a^2+b^2)$

Hướng dẫn

Ta có: $a+b=2 => a^2+b^2 = 4-2ab => A = ab(4-2ab) = -2a^2b^2+4ab$

$A = -(a^2b^2-2ab+1)+2 \le 2$, Max $A=2$

Bài 47: Cho x, y thỏa mãn: $(11x+6y+2015)(x-y+3)=0$, Tìm min của: $P = xy-5x+2016$

Hướng dẫn

Từ gt ta có : $11x+6y+2015=0$ hoặc $x-y+3=0$

TH1: Ta có : $11x+6y+2015=0 => y = \frac{11x+2015}{6}$ thay vào P

TH2: ta có: $x-y+3=0 => y = x+3$ thay vào P

Bài 48: Cho 3 số x,y,z thỏa mãn : $x+y+z=3$, Tìm GTLN của : $B = xy+yz+zx$

Hướng dẫn

Ta có : $B = xy + z(x+y) = xy + [3-(x+y)](x+y)$

$$= xy + 3(x+y) - (x+y)^2 = -x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y = -\left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{-3}{4}(y-1)^2 + 3 \le 3$$

Bài 49: Cho $x^2 + xy + 3y^2 = 5$, tìm Min hoặc max của biểu thức : $P = x^2 - 2xy + 2y^2$

Hướng dẫn

Ta có : $\frac{P}{5} = \frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{x^2 + xy + 3y^2}$

Dạng 5: Phương pháp đổi biến số

Phương pháp:

- Phân tích thành các biểu thức tương đồng để đặt ẩn phụ.
- Sử dụng phương pháp nhóm hợp lý làm xuất hiện nhân tử để đặt ẩn phụ.
- Sử dụng các hằng đẳng thức $(a \pm b)^2, (a+b+c)^2$.

Bài 1: Tìm GTNN của biểu thức $A = (x-1)^2 + (x-3)^2$

Lời giải

Đặt $y = x - 2 \Rightarrow A = (y+1)^2 + (y-1)^2 = 2y^2 + 2 \ge 2 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 2$

Bài 2: Tìm GTNN của $A = (x-1)(x-4)(x-5)(x-8)$

Lời giải

$A = (x-1)(x-4)(x-5)(x-8) = (x^2 - 9x + 8)(x^2 - 9x + 20)$

Đặt

$t = x^2 - 9x + 8 \Rightarrow A = t(t+12) = t^2 + 12t = (t+6)^2 - 36 \ge -36 \Leftrightarrow t = 6 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 7 \end{array}\right.$

Bài 3: Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2} \quad (x \ne 0)$

Lời giải

$$A = 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 - 4y + y^2 \left(y = \frac{1}{x}\right) \Rightarrow A = (y-2)^2 - 3 \ge -3 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bài 4: Tìm GTNN của: $A = x(x-3)(x-4)(x-7)$

Lời giải

$A = x(x-7)(x-3)(x-4) = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12)$, đặt $x^2 - 7x + 6 = t$, khi đó:

$A = (t-6)(t+6) = t^2 - 36 \ge -36$, dấu " = " khi $t^2 = 0 <=> x^2 - 7x + 6 = 0 <=> \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 6 \end{array}\right.$

Vậy Min A = - 36 khi x = 1 hoặc x = 6

Bài 5: Tìm GTNN của: $B = (x-1)(x-3)(x^2 - 4x + 5)$

Lời giải

$B=\left(x^2-4x+5\right)\left(x^2-4x+5\right)$, Đặt $x^2-4x+4=0$. Khi đó:

$B=\left(t-1\right)\left(t+1\right)=t^2-1\ge -1$, Dấu " = " khi $t^2=0 <=> x^2-4x+4=0 <=> t=2$

Bài 6: Tìm min của: $A=x\left(x+2\right)\left(x+4\right)\left(x+6\right)+8$

Lời giải

$A=x\left(x+6\right)\left(x+2\right)\left(x+4\right)+8=\left(x^2+6x\right)\left(x^2+6x+8\right)+8$, Đặt $x^2+6x+4=t$. Khi đó:

$A=\left(t-4\right)\left(t+4\right)+8=t^2-16+8=t^2-8\ge -8$, Dấu " = " Khi đó:

$t^2=0 <=> x^2+6x+4=0 <=> \left[\begin{array}{l} x=-3+\sqrt{5} \\ x=-3-\sqrt{5} \end{array}\right.$

Bài 7: Tìm GTNN của: $B=\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)$

Lời giải

$B=\left(x+1\right)\left(x+4\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)=\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)$, Đặt $x^2+5x+5=t$, Khi đó:

$B=\left(t-1\right)\left(t+1\right)=t^2-1\ge -1$, Dấu " = " khi $t^2=0 <=> x^2+5x+5=0 <=> x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$

Bài 8: Tìm GTNN của: $A=\left(x^2+x-6\right)\left(x^2+x+2\right)$

Lời giải

Đặt $x^2+x-2=t$. Khi đó: $A=\left(t-4\right)\left(t+4\right)=t^2-16\ge -16$

Dấu " = " xảy ra khi: $t=0 <=> x^2+x-2=0 <=> \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bài 9: Tìm GTNN của : $C=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+6\right)$

Lời giải

$C=\left(x-1\right)\left(x+6\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)=\left(x^2+5x-6\right)\left(x^2+5x+6\right)$, Đặt $x^2+5x=t$. Khi đó:

$C=\left(t-6\right)\left(t+6\right)=t^2-36\ge -36$, Dấu " = " khi $t=0 <=> x^2+5x=0 <=> \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Bài 10: Tìm GTNN của: $D=\left(2x-1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(2x+1\right)$

Lời giải

$D=\left(2x-1\right)\left(x+3\right)\left(x+2\right)\left(2x+1\right)=\left(2x^2+5x-3\right)\left(2x^2+5x+2\right)$, Đặt $2x^2+5x=t$, Khi đó:

$D=\left(t-3\right)\left(t+2\right)=t^2-t-6=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}\ge\dfrac{-25}{4}$, Dấu " = " khi:

$t=\frac{1}{2}<=>2x^2+5x=\frac{1}{2}<=>x=\frac{-5\pm\sqrt{29}}{4}$

Bài 11: Tìm min của: $C=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2011$

Lời giải

$C=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+2011=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+2011$, Đặt $x^2+5x+5=t$

Khi đó: $C=(t-1)(t+1)+2011<=>x^2+5x+5=0<=>x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$

Bài 12: Tìm max của: $E=5+(1-x)(x+2)(x+3)(x+6)$

Lời giải

$E=5-(x-1)(x+6)(x+2)(x+3)=-(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)+5$, đặt $x^2+5x=t$.

Khi đó: $E=-(t-6)(t+6)+5=-(t^2-36)+5=-t^2+41\le 41$

Dấu " = " Khi $t^2=0<=>x^2+5x=0<=>\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-5\end{array}\right.$

Bài 13: Tìm GTNN của: $M=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

Lời giải

$M=(x-1)(x+6)(x+2)(x=3)=(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)$, Đặt $x^2+5x=t$.

Khi đó: $M=(t-6)(t+6)=t^2-36\ge -36$, Dấu " = " khi $t=0<=>x^2+5x=0<=>\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-5\end{array}\right.$

Bài 14: Tìm min của: $D=(x+1)(x^2-4)(x+5)+2014$

Lời giải

$D=(x+1)(x+2)(x-2)(x+5)+2014=(x^2+3x-10)(x^2+3x+2)+2014$, Đặt $x^2+3x-4=t$

Khi đó: $D=(t-6)(t+6)+2014=t^2+1978$, Dấu "= " xảy ra khi:

$t^2=0<=>x^2+3x-4=0<=>\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-4\end{array}\right.$

Bài 15: Tìm GTNN của: $C=x^4-6x^3+10x^2-6x+9$

Lời giải

$C=(x^4-2.3x^2.x+9x^2)+(x^2-6x+9)=(x^2-3x)^2+(x-3)^2\ge 0$

Bài 16: Tìm GTNN của: $D=(x+8)^4+(x+6)^4$

Lời giải

Đặt: $x+7=y=>D=(y+1)^4+(y-1)^4=2y^4+12y^2+2\ge 2$

Bài 17: Tìm max của: $F=2-3(x+1)^4-3(x-5)^4$

Lời giải

Đặt $x-2=t \Rightarrow F=2-3(t+3)^4-3(t-3)^4$

$-F=3(t^2+6t+9)^2+3(t^2-6t+9)^2-2=6t^4+324t^2+484=6(t^4+54t^2)+484$

$F=-6(t^2+27)^2+3890\le 3890$

Bài 18: Tìm min của: $G=(x+3)^4+(x-7)^4$

Lời giải

Đặt $x-2=t \Rightarrow G=(t+5)^4+(t-5)^4=(t^2+10t+25)^2+(t^2-10t+25)^2$

$G=2t^4+300t^2+1250=2(t^4+2.75t^2+5625)-10^4=2(t^2+75)^2-10^4\ge -10^4$

Bài 19: Tìm min của: $I=x^4-6x^3+11x^2+12x+20$

Lời giải

$I=x^4-6x^3+11x^2-12x+20=x^2(x^2-6x+9)+2x^2-12x+20$

$I=x^2(x-3)^2+2(x^2-6x+9)+2=x^2(x-3)^2+2(x-3)^2+2\ge 2$

Bài 20: Tìm số nguyên m lớn nhất sao cho BĐT luôn đúng với mọi x:

$$(x+1)(x+2)^2(x+3)\ge m$$

Lời giải

$VT=(x+1)(x+3)(x+2)^2=(x^2+4x+3)(x^2+4x+4)$, Đặt $x^2+4x=t$, Khi đó:

$VT=(t+3)(t+4)=t^2+7t+12=t^2+2.t.\frac{7}{2}+\frac{49}{4}+12-\frac{49}{4}=\left(t+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge\frac{-1}{4}$

Dạng 6 : Sử dụng bất đẳng thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối

a. Định nghĩa: $\begin{cases}|A|=A\Leftrightarrow A\ge 0\\|A|=-A\Leftrightarrow A\le 0\end{cases}$

b. Tính chất

+) $\forall A\in R\Rightarrow |A|\ge 0;|A|\ge A$

+) $\forall x,y\in R\Rightarrow |x+y|\le |x|+|y|\Leftrightarrow xy\ge 0$

+) $\forall x,y\in R\Rightarrow |x-y|\ge |x|-|y|\Leftrightarrow (x-y).y\ge 0$

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A=|x-3|+|x-7|$

b. $B=|x-1|+|x-2|+|x-3|$

c. $C=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$

d. $D=|x+5|+|x+2|+|x-7|+|x-8|$

e. $E=|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|+|x+5|+|x+6|$

Lời giải

a. $A=|x-3|+|x-7|=|x-3|+|7-x|\geq|x-3+7-x|=|4|=4\Rightarrow A\geq 4\Leftrightarrow(x-3)(7-x)\geq 0\Leftrightarrow 3\leq x\leq 7$

b. $B=|x-1|+|x-2|+|x-3|$

Ta có : $B=|x-1|+|x-3|=|x-1|+|3-x|\geq 2(1)\Leftrightarrow(x-1)(3-x)\geq 0\Leftrightarrow 1\leq x\leq 3$

Mà : $|x-2|\geq 0\Leftrightarrow x=2(2)\Rightarrow C\geq 2\Leftrightarrow x=2$

c. $C=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$

Ta có : $|x-1|+|x-3|=|x-1|+|3-x|\geq 2\Leftrightarrow 1\leq x\leq 3;|x-2|+|x-4|=|x-2|+|4-x|\geq 2\Leftrightarrow 2\leq x\leq 4$

$\Rightarrow C\geq 4\Rightarrow \min C=4\Leftrightarrow 2\leq x\leq 4$

d. $D=|x+5|+|x+2|+|x-7|+|x-8|$

Áp dụng bất đẳng thức $|M|\geq M\,\forall M\in R$

Ta có : $D=|x+5|+|x+2|+|7-x|+|8-x|\geq x+5+x+2+7-x+8-x=22\,\forall x\in R$

$$\Rightarrow \min D=22\Leftrightarrow\begin{cases}x+5\geq 0\\x+2\geq 0\\7-x\geq 0\\8-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -5\\x\geq -2\\x\leq 7\\x\leq 8\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq x\leq 7$$

e. Ta có :

$E=|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|+|x+5|+|x+6|=|-x-1|+|-x-2|+|-x-3|+|x+4|+|x+5|+|x+6|$

$\Rightarrow E\geq -x-1-x-2-x-3+x+4+x+5+x+6=9\,\forall x\in R\Rightarrow \min E=9\Leftrightarrow -4\leq x\leq -3$

Bài 2: Cho số thực x. Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A=|x+3|+|x-2|+|x-5|$

b. $B=|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|+|x-6|$

Lời giải

a. $A=|x+3|+|x-2|+|x-5|=|x+3|+|x-2|+|x-5|\geq|x+3|+|5-x|\geq x+3+5-x=8\,\forall x\in R$

$$\text{Dấu } '=' \Leftrightarrow\begin{cases}x+3\geq 0\\x-2=0\\5-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -3\\x=2\\x\leq 5\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

b. $B=|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|+|x-6|=|x-2|+|x-3|+|x-4|+|5-x|+|6-x|$

$\geq|x-2|+|x-3|+|5-x|+|6-x|\geq x-2+x-3+5-x+6-x=6\,\forall x\in R\Leftrightarrow x=4$

Bài 3: Cho số thực x. Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A=|x+5|-|x-2|$ b. $B=|x-2|-3|x-5|-|x-4|$

Lời giải

a. $A=|x+5|-|x-2|$

Áp dụng bất đẳng thức : $|x|-|y|\le|x-y|\forall x,y\in R\Leftrightarrow y(x-y)\ge 0$

$A=|x+5|-|x-2|\le|x+5-(x-2)|=7\forall x\in R\Rightarrow \max A=7\Leftrightarrow (x-2)(x+5-x+2)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$

b. $B=|x-2|-3|x-5|-|x-4|$

Vì

$-|x-5|\le 0\Rightarrow B\le|x-2|-|x-4|\le|x-2-x+4|=2\Leftrightarrow\begin{cases}x-5=0\\(x-4)(x-2-x+4)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\x\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow x=5$

Bài 4:[Chuyên LHP – 2003] Cho số thực x. Tìm GTNN của

$A=\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x+2}}$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x-2}(t\ge 0)\Rightarrow t^2=x-2\Rightarrow x=t^2-2\Rightarrow A=\sqrt{t^2-2t+1}+\sqrt{t^2-6t+9}=\sqrt{(t-1)^2}+\sqrt{(t-3)^2}$

$=|t-1|+|3-t|\ge t-1+3-t=2\Leftrightarrow\begin{cases}t-1\ge 0\\3-t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le t\le 3\Leftrightarrow 1\le\sqrt{x-2}\le 3\Leftrightarrow 3\le x\le 11$

Bài 5: Cho số thực x. Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A=\sqrt{x-4+2\sqrt{x-5}}+\sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}}(x\ge 5)$

b. $B=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+5\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}(x\ge 1)$

Lời giải

a. Đặt

$t=\sqrt{x-5}(t\ge 0)\Rightarrow x=t^2+5\Rightarrow A=\sqrt{(t+1)^2}+\sqrt{(2-t)^2}=|t+1|+|2-t|=t+1+|2-t|\ge t+1+2-t=3$

$A=3\Leftrightarrow 2-t\ge 0\Leftrightarrow t\le 2\Leftrightarrow\sqrt{x-5}\le 2\Leftrightarrow 5\le x\le 9$

b. Đặt $t=\sqrt{x-1}(t\ge 0)\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow A=\sqrt{(t-1)^2}+5\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}=|t-1|+5|t-2|+|3-t|$

$\ge|t-1|+|3-t|\ge t-1+3-t=2\Leftrightarrow\begin{cases}t-1\ge 0\\t=2\\t\le 3\end{cases}\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=5\Rightarrow\min A=2\Leftrightarrow x=5$

Bài 6: (HSG Tỉnh Sóc Trăng năm 2014 – 2015)

Tìm GTNN của $A=|x+3|+|x-2|+2012$

Lời giải

Ta có $A=|x+3|+|x-2|+2012=|x+3|+|2-x|+2012$

Lại có : $|x+3|\ge x+3\Leftrightarrow x\ge -3$

Mà $|2-x|\ge 2-x \Leftrightarrow x\le 2 \Rightarrow A=|x+3|+|2-x|+2012\ge x+3+2-x+2012=2017$

Vậy $MinA=2017 \Leftrightarrow -3\le x\le 2$

Bài 7: (HSG Tỉnh Quảng Ngãi năm 2015 – 2016)

Tìm GTNN của $A=|x+3|+|x-1|+|x-4|-3$

Lời giải

Ta có $A=|x+3|+|x-1|+|x-4|-3=|x+3|+|x-1|+|4-x|-3$

Lại có $|x-1|\ge 0 \Leftrightarrow x=1;|x+3|\ge x+3 \Leftrightarrow x\ge -3;|4-x|\ge 4-x \Leftrightarrow x\le 4 \Rightarrow A\ge x+3+0+4-x-3=4$

Vậy $MinA=4 \Leftrightarrow x=1$

Bài 8: (Tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 420) Tìm GTNN của

$A=|x-a_1|+|x-a_2|+....+|x-a_n|+2017\left(a_1<a_2<...<a_n\right)$

Lời giải

- Trường hợp $n=2k \Rightarrow A=|x-a_1|+|x-a_2|+...+|x-a_k|+|a_{k+1}-x|+|a_{k+2}-x|+...+|a_{2k}-x|+2017$

Ta có $|x-a_i|\ge x-a_i \Leftrightarrow x\ge a_i \forall i=\overline{1,k};|a_{k+1}-x|\ge a_{k+j}-x \Leftrightarrow x\le a_{k+j} \forall j=\overline{1,k}$

$\Rightarrow A\ge x-a_1+x-a_2+...+x-a_k+a_{k+1}-x+a_{k+2}-x+...+a_{2k}-x+2017=\left(a_{k+1}+a_{k+2}+...+a_{2k}\right)-$

$\left(a_1+a_2+...+a_k\right)+2017 \Leftrightarrow a_k\le x\le a_{k+1}$

- Trường hợp

$n=2k+1 \Rightarrow A=|x-a_1|+|x-a_2|+..+|x-a_k|+|x-a_{k+1}|+|a_{k+2}-x|+|a_{k+3}-x|+...+|a_{2k}-x|+2017$

Ta có: $|x-a_{k+1}|\ge 0 \Leftrightarrow x=a_{k+1};|a_{k+j}-x|\ge a_{k+1}-x \Leftrightarrow x\le a_{k+j} \forall j=\overline{1,k}$

Lại có $|x-a_i|\ge x-a_i \Leftrightarrow x\ge a \forall i=\overline{1,k};|a_{k+j}-x|\ge a_{k+j}-x \Leftrightarrow x\le a_{k+j} \forall j=\overline{1,k}$

$\Rightarrow A=x-a_1+x-$

$\left(a_1+a_2+...a_k\right)+2017 \Rightarrow MinB=\left(a_{k+2}+a_{k+3}+...+a_{2k+1}\right)-\left(a_1+a_2+...a_k\right)+2017 \Leftrightarrow x=a_{k+1}$

Bài 9: (HSG Tỉnh Yên Bái năm 2015 – 2016) Tìm GTNN của $A=|5x+3|+|2x-3|-x+1$

Lời giải

Ta có $A=|5x+3|+|2x-3|-x+1=2\left|x+\frac{3}{5}\right|+3\left|x+\frac{3}{5}\right|+|2x-3|-x+1$

Mặt khác $2\left|x+\frac{3}{5}\right|\ge 0 \Leftrightarrow x=\frac{-3}{5};3\left|x+\frac{3}{5}\right|\ge 3\left(x+\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow x\ge \frac{-3}{5}$

Lại có $|3-2x|\ge 3-2x \Leftrightarrow x\le \frac{3}{2} \Rightarrow B\ge 0+3\left(x+\frac{3}{5}\right)+3-2x+1=\frac{29}{5} \Rightarrow MinB=\frac{29}{5} \Leftrightarrow x=\frac{-3}{5}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: (Chuyên Toán Quảng Ngãi năm 2014 – 2015)

Tìm GTNN của $A=|4x+3|+|5x-7|+|2x-9|-15$

Lời giải

Ta có $MinA=\frac{-1}{5}\Leftrightarrow x=\frac{7}{5}$

Bài 2: Tìm GTNN của $A=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$

Lời giải

Ta có $MinA=4\Leftrightarrow 2\le x\le 3$

Bài 3: Tìm GTNN của $A=(2x-1)^2-3|2x-1|+2$

Lời giải

Ta có $Min.A=\frac{-1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$ hay $x=\frac{-1}{4}$

Bài 4: Tìm GTNN của $A=|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-1998|$

Lời giải

Ta có $Min.A=999^2\Leftrightarrow 999\le x\le 1000$ hay $x=\frac{-1}{4}$

Bài 5: (Chuyên Toán Quảng Ngãi năm 2015 – 2016) Tìm GTNN của

$A=\left|x\sqrt{3}+2\right|+\left|x\sqrt{5}-7\right|+\left|x\sqrt{11}-9\right|$

Lời giải

Ta có $Min.A=\frac{9}{\sqrt{11}}\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow x=\frac{9}{\sqrt{11}}$ hay $x=\frac{-1}{4}$

Bài 6: (Chuyên Toán Quảng Trị năm 2015 – 2016) Tìm GTNN của

$A=\left|x\sqrt{5}-6\right|+\left|x\sqrt{2}+1\right|+2x+2017$

Lời giải

Ta có $Min.A=\frac{2018\sqrt{2}+\sqrt{5}-2}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ hay $x=\frac{-1}{4}$

Dạng 7: Dạng phân thức

A. Phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai

Phương pháp: Biểu thức dạng này đạt giá trị nhỏ nhất khi mẫu đạt giá trị lớn nhất

$A=\frac{m}{ax^2+bc+c}\Rightarrow A_{\min}\Leftrightarrow (ax^2+bc+c)_{max}$

Bài 1: Tìm GTLN hoặc GTNN của các biểu thức sau

a) $A=\frac{1}{9x^2-12x+10}$ b) $B=\frac{2}{x^2+x+4}$

c) $C=\dfrac{y^2}{9x^2-12xy+5y^2}(x\neq 0)$

Lời giải

a. $A=\dfrac{1}{9x^2-12x+10}=\dfrac{1}{(3x-2)^2+6}\leq\dfrac{1}{6}\Rightarrow A_{max}=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$

b. $B=\dfrac{2}{x^2+x+4}=\dfrac{2}{(x+\frac{1}{2})^2}\leq\dfrac{2}{\frac{15}{4}}=\dfrac{8}{15}\Rightarrow B_{max}=\dfrac{8}{15}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{2}$

c. $C=\dfrac{y^2}{9x^2-12xy+5y^2}(x\neq 0)$

+) $y=0\Rightarrow A=0$

+) $y\neq 0\Rightarrow A=\dfrac{1}{9\frac{x^2}{y^2}-12\frac{x}{y}+5}=\dfrac{1}{9t^2-12t+5}(t=\dfrac{x}{y})=\dfrac{1}{(3t-2)^2+1}\leq 1\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}y$

Bài 2: Tìm GTNN hoặc GTLN của biểu thức sau

a) $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ b) $y=\dfrac{2}{6x-5-9x^2}$ c) $A=\dfrac{3y^2}{-25x^2+20xy-5y^2}$ $(x\neq 0)$

Lời giải

a) Ta có thể viết: $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

Vì $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}\Rightarrow y\leq\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{2}$

Vậy GTLN của $y=\dfrac{4}{3}$ tại $x=\dfrac{-1}{2}$

b) Ta có:

$y=\dfrac{2}{6x-5-9x^2}=\dfrac{-2}{(3x-1)^2+4};(3x-1)^2+4\geq 4\forall x\Rightarrow\dfrac{1}{(3x-1)^2+4}\leq\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{-2}{(3x-1)^2+4}\geq\dfrac{-2}{4}=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

c) $y=0\Rightarrow A=0$

+) $y\neq 0\Rightarrow A=\dfrac{3}{-25\frac{x^2}{y^2}+20\frac{x}{y}-5}=\dfrac{3}{-25t^2+20t-5}=\dfrac{-3}{(5t-2)^2+1}$

Vì $(5t-2)^2\geq 0\Rightarrow\dfrac{1}{(5t-2)^2+1}\leq 1\Rightarrow A\geq -3\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{5}\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{5}y$

Bài 3: Tìm GTLN của biểu thức sau

a) $A=\dfrac{5}{x^2-2x-5}$

b) $B=\dfrac{1}{x^2-4x+11}$

Lời giải

a) $A=\dfrac{5}{x^2-2x-5}=\dfrac{5}{(x-1)^2-6}\Rightarrow maxA=\dfrac{-5}{6}\Leftrightarrow x=1$

b) $B=\dfrac{1}{x^2-4x+11}\le\dfrac{1}{7}\Leftrightarrow x=2$

Bài 4: Tìm min của: $B=\dfrac{1}{x^2-4x+9}$

Lời giải

Ta có : $x^2-4x+9=(x-2)^2+5\ge 5 \Rightarrow B=\dfrac{1}{x^2-4x+9}=\dfrac{1}{(x-2)^2+5}\le\dfrac{1}{5}$, Dấu " = " khi x=2

Bài 5: Tìm max của: $C=\dfrac{-3}{x^2-5x+1}$

Lời giải

Ta có : $x^2-5x+1=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{21}{4}\ge\dfrac{-21}{4} \Rightarrow C=\dfrac{-3}{x^2-5x+1}\le\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$, dấu " = " khi $x=\dfrac{5}{2}$

Bài 6: Tìm min hoặc max của: $D=\dfrac{6}{-x^2+2x-3}$

Lời giải

Ta có : $-x^2+2x-3=-(x^2-2x+3)=-(x-1)^2-2\le-2 \Rightarrow \dfrac{6}{-x^2+2x-3}\ge\dfrac{6}{-2}=-3$

Bài 7: Tìm min hoặc max của: $K=\dfrac{2}{x^2+8}$

Lời giải

Ta có : $x^2+8\ge 8 \Rightarrow \dfrac{2}{x^2+8}\le\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

Bài 8: Tìm min hoặc max của: $M=\dfrac{4}{x^2+x+1}$

Lời giải

Ta có : $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\ge\dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{4}{x^2+x+1}\le\dfrac{16}{3}$

B. Phân thức có mẫu là bình phương của 1 nhị thức

Cách 1: Tách tử thành các nhóm có nhân tử chung với mẫu

Cách 2: Viết biểu thức A thành tổng của một số với một phân thức không âm

$\Rightarrow$ Ta đưa về dạng: $A = m + \frac{C}{D}$ $\left(\frac{C}{D} \geq 0\right)$

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$ $(x \neq 1)$

b. $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}$ $(x \neq 1)$

c. $C = \frac{4x^2 - 6x + 1}{(x-2)^2}$ $(x \neq 2)$

d. $D = \frac{2x^2 - 16x + 41}{x^2 - 8x + 22}$ $(x \in R)$

e. $E = \frac{4x^4 - x^2 - 1}{(x^2+1)^2}$

f. $F = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 5}$

Lời giải

a. $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$ $(x \neq 1) = \frac{2(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} + \frac{(x^2 - 4x + 4)}{(x-1)^2} = 2 + \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} \geq 2 \Leftrightarrow x = 2$

Cách khác: $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3(x^2 - 2x + 1) - 2(x-1) + 1}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

Đặt $y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow A = 3 - 2y + y^2 = (y-1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

b. $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}(x \neq 1) = \frac{4x^2 - 4x + 4}{4(x-1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{4(x-1)^2} + \frac{3x^2 - 6x + 3}{4(x-1)^2} = \frac{(x+1)^2}{4(x-1)^2} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = -1$

c. Đặt $t = \frac{1}{x-2} \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{t}$ khi đó:

$$A = t^2\left[4\left(2 + \frac{1}{t}\right)^2 - 6\left(2 + \frac{1}{t}\right) + 1\right] = 4(2t+1)^2 - 6t(2t+1) + t^2 = 5(t+1)^2 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow x = 1$$

d. $D = \frac{2x^2 - 16x + 41}{x^2 - 8x + 22}(x \in R) = \frac{2(x^2 - 8x + 22) - 3}{x^2 - 8x + 22} = 2 - \frac{3}{(x-4)^2 + 6}$

Vì $(x-4)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-4)^2 + 6 \geq 6 \Rightarrow \frac{3}{(x-4)^2 + 6} \leq \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$D = 2 - \frac{3}{(x-4)^2 + 6} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow A_{\min} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

e. $E = \frac{4x^4 - x^2 - 1}{(x^2+1)^2} = \frac{4(x^4 + 2x^2 + 1) - 9(x^2+1) + 4}{(x^2+1)^2} = 4 - \frac{9}{x^2+1} + \frac{4}{(x^2+1)^2} = 4t^2 - 9t + 4$ $\left(t = \frac{1}{x^2+1}\right)$

$$E = \left(2t - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{81}{16} + 4$$

Ta có: $t \leq 1 \Rightarrow 2t - \frac{9}{4} \leq 2 - \frac{9}{4} = \frac{-1}{4} \Rightarrow \left(2t - \frac{9}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{16} \Rightarrow A \geq \frac{1}{16} - \frac{17}{16} = -1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Lời giải ngắn gọn hơn

$E+1=\dfrac{5x^4+x^2}{(x^2+1)^2}\ge 0\Rightarrow A\ge -1\Leftrightarrow x=0$

Cách khác: $E=\dfrac{4x^4}{(x^2+1)^2}-\dfrac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\ge 0-1=-1\Leftrightarrow x=0$

f. $F=\dfrac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+5}=3-\dfrac{5}{x^2-4x+5}=3-\dfrac{5}{(x-2)^2+1}\ge 3-5=-2$

Do $(x-2)^2+1\ge 1\Rightarrow \dfrac{-5}{(x-2)^2+1}\ge -5\Leftrightarrow x=2$

Bài 2: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A=\dfrac{3x^2+6x+10}{x^2+2x+3}(x\ne 1)$

b. $B=\dfrac{-x^2+x-11}{x^2-2x+1}(x\ne 1)$

c. $C=\dfrac{x}{x^2+10x+25}(x\ne -5)$

d. $D=\dfrac{x^2+4x-14}{x^2-2x+1}(x\ne 1)$

Lời giải

a. $A=\dfrac{3x^2+6x+10}{x^2+2x+3}=\dfrac{3(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}+\dfrac{1}{(x+1)^2+2}=3+\dfrac{1}{(x+1)^2+2}$

Có: $(x+1)^2\ge 0\Rightarrow (x+1)^2+2\ge 2\Rightarrow \dfrac{1}{(x+1)^2+2}\le \dfrac{1}{2}\Rightarrow A=3+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}\Rightarrow A_{max}=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow x=-1$

b. $B=\dfrac{-x^2+x-11}{x^2-2x+1}=\dfrac{-x^2+2x-1-x+1-11}{(x-1)^2}=\dfrac{-(x-1)^2-(x-1)-11}{(x-1)^2}=-1-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{11}{(x-1)^2}$

Đặt $\dfrac{1}{x-1}=y\Rightarrow A=-1-y-11y^2=-(11y^2+y+1)=-\left[11\left(y^2+2.y.\dfrac{1}{22}+\dfrac{1}{22^2}\right)-\dfrac{1}{22^2}+\dfrac{1}{11}\right]$

$=-\left[11\left(y+\dfrac{1}{22}\right)^2+\dfrac{43}{44}\right]=\dfrac{-43}{44}-11\left(y+\dfrac{1}{22}\right)^2\le \dfrac{-43}{44}\Leftrightarrow y=\dfrac{-1}{22}\Leftrightarrow x=-21$

c. $C=\dfrac{x}{x^2+10x+25}\quad (x\ne -5)=\dfrac{x}{(x+5)^2}=\dfrac{(x+5)-5}{(x+5)^2}=\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{5}{(x+5)^2}=t-5t^2\quad \left(t=\dfrac{1}{x+5}\right)$

$\Rightarrow -A=5t^2-t=5\left(t-\dfrac{1}{10}\right)^2-\dfrac{1}{20}\ge \dfrac{-1}{20}\Rightarrow A\le \dfrac{1}{20}\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow x=5$

d. $D=\dfrac{x^2+4x-14}{x^2-2x+1}(x\ne 1)$. Đặt $t=\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow x=1+\dfrac{1}{t}$

$A=t^2\left[\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^2+4\left(1+\dfrac{1}{t}\right)-14\right]=(t+1)^2+4t(t+1)-14t^2=-(3t-1)^2+2\le 2$

$D=2\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=4$

Bài 3: Tìm GTNN, GTLN của $A=\dfrac{7y^2-4xy}{x^2-2xy+2y^2}$

Lời giải

Điều kiện $(x,y)\neq(0,0)$

+) $A+1=\dfrac{x^2-6xy+9y^2}{(x-y)^2+y^2}=\dfrac{(x-3y)^2}{(x-y)^2+y^2}\geq 0\Rightarrow A\geq -1\Leftrightarrow x=3y\neq 0$

+) $A-4=\dfrac{-(y^2+4xy-4x^2)}{(x-y)^2+y^2}=\dfrac{-(2x-y)^2}{(x-y)^2+y^2}\leq 0\Rightarrow A\leq 4\Leftrightarrow x=1; y=2$

Bài 4: Tìm GTNN của biểu thức $A=\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2}\ (x\neq -1)$; $\quad B=\dfrac{x^2-3x+3}{(x-1)^2}\ (x\neq 1)$

Lời giải

$$A=\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}=\frac{(x^2+2x+1)-x-1+1}{(x+1)^2}=1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}=1-y+y^2\quad\left(y=\frac{1}{x+1}\right)$$

$$A=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}\Rightarrow A_{\min}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=1$$

+) $B=\dfrac{x^2-3x+3}{(x-1)^2}=\dfrac{(x^2-2x+1)-x+1+1}{(x-1)^2}=1-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}=y^2-y+1\quad\left(y=\dfrac{1}{x-1}\right)$

$$B=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=3$$

Bài 5: Tìm GTNN của biểu thức $A=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}$

Lời giải

Ta có: $A=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}=\dfrac{\frac{1}{2}\left[(x+y)^2+(x-y)^2\right]}{(x+y)^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}.\dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^2}\geq\dfrac{1}{2}\Rightarrow minA=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=y$

Bài 6: Tìm GTNN của biểu thức $A=\dfrac{2x^2-10x-1}{x^2-2x+1}\quad (x\neq 1)$

Lời giải

Ta có: $A=\dfrac{2x^2-10x-1}{x^2-2x+1}=\dfrac{2(x^2-2x+1)-6(x-1)-9}{(x-1)^2}=2+\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{9}{(x-1)^2}=-\left(\dfrac{3}{x-1}+1\right)^2+3\leq 3$

Vì $-\left(\dfrac{3}{x-1}+1\right)^2\leq 0\quad\forall x\neq 1\Rightarrow maxA=3\Leftrightarrow\dfrac{3}{x-1}+1=0\Leftrightarrow x=-2$

Bài 7: Tìm min hoặc max của: $G=\dfrac{x^2-4x+1}{x^2}$

Lời giải

$G=1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}$, đặt $\dfrac{1}{x}=t \Rightarrow G=t^2-4t+1=(t-2)^2-3\geq -3$

Bài 8: Tìm min hoặc max của: $E=\frac{3x^2-8x+6}{x^2-2x+1}$

Lời giải

Đặt $x-1=t => x=t+1 => x^2=t^2+2t+1$

$$E=\frac{3\left(t^2+2t+1\right)-8\left(t+1\right)+6}{t^2}=\frac{3t^2-2t+1}{t^2}=3-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2},$$

Đặt : $\frac{1}{t}=a => E=a^2-2a+3=\left(a-1\right)^2+2\geq 2$

Bài 9: Tìm min hoặc max của: $F=\frac{4x^2-6x+1}{\left(2x+1\right)^2}$

Lời giải

Đặt $2x+1=t => x=\frac{t-1}{2} => x^2=\frac{t^2-2t+1}{4}$, khi đó:

$F=\frac{t^2-2t+1-3\left(t-1\right)+1}{t^2}=\frac{t^2-5t+5}{t^2}=1-\frac{5}{t}+\frac{5}{t^2}$, đặt $\frac{1}{t}=a => F=1-5a+5a^2$

Bài 10: Tìm min hoặc max của: $H=\frac{x}{\left(x+10\right)^2}$

Lời giải

Đặt $x+10=t => x=t-10 => H=\frac{t-10}{t^2}=\frac{1}{t}-\frac{10}{t^2}$, đặt $\frac{1}{t}=a => H=-10a^2+a$

Bài 11: Tìm min hoặc max của: $I=\frac{x}{\left(x+2016\right)^2}$

Lời giải

Đặt $x+2016=t => x=t-2016 => I=\frac{t-2016}{t^2}=\frac{1}{t}-\frac{2016}{t^2}$, Đặt $\frac{1}{t}=a => I=a-2016a^2$

Bài 12: Tìm min hoặc max của: $D=\frac{x^2-2x+2000}{x^2}$

Lời giải

Ta có : $D=1-\frac{2}{x}+\frac{2000}{x^2}$, Đặt $\frac{1}{x}=a => D=1-2a+2000a^2$

Bài 13: Tìm min hoặc max của: $E=\frac{x^2-2x+2015}{2015x^2}$

Lời giải

Ta có : $2015E=\frac{x^2-2x+2015}{x^2}=1-\frac{2}{x}+\frac{2015}{x^2}$, đặt $\frac{1}{x}=a => 2015E=1-2a+2015a^2$

$$=> E = a^2 - \frac{2}{2015}.a + \frac{1}{2015}$$

Bài 14: Tìm min hoặc max của: $F = \frac{x}{(x+2000)^2}$

Lời giải

Đặt $x + 2000 = t => F = \frac{t-2000}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{2000}{t^2}$, Đặt $\frac{1}{t} = a => F = a - 2000a^2$

Bài 15: Tìm min hoặc max của: $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + 2x + 1)}$

Lời giải

$B = \frac{x^2 - x + 1}{(x+1)^2}$,Đặt $x + 1 = t => x = t - 1 => x^2 - 2t + 1$

$=> B = \frac{t^2 - 3t + 3}{t^2} = 1 - \frac{3}{t} + \frac{3}{t^2}$, Đặt $\frac{1}{t} = a => B = 3a^2 - 3a + 1$

Bài 16: Tìm min hoặc max của: $A = \frac{2x^2 + 4x + 4}{x^2}$

Lời giải

$A = 2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$, Đặt $\frac{1}{x} = a => A = 4a^2 + 4a + 2$

Bài 17: Tìm min hoặc max của: $B = \frac{x^2 - 2x + 2012}{x^2}$

Lời giải

$B = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2012}{x^2}$, Đặt $\frac{1}{x} = a => B = 2012a^2 - 2a + 1$

C. Tìm GTLN, GTNN của phân thức có dạng khác

Cách 1: Tách tử thành các nhóm có nhân tử chung với mẫu

Cách 2: Viết biểu thức A thành tổng của một số với một phân thức không âm

1. Bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = \frac{8x + 12}{x^2 + 4}$

b. $B = \frac{4x + 2}{x^2 + 2}$

c. $C = \frac{(x+2)(x+8)}{x}$ $(x > 0)$

Lời giải

a. $A=\dfrac{8x+12}{x^2+4}=\dfrac{x^2+8x+16-x^2-4}{x^2+4}=-1+\dfrac{(x+4)^2}{x^2+4}\ge -1\Leftrightarrow x=-4$

b. $B=\dfrac{4x+2}{x^2+2}=\dfrac{(x^2+4x+4)-(x^2+2)}{x^2+2}=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+2}-1\ge -1\Leftrightarrow x=-2$

c. $C=\dfrac{(x+2)(x+8)}{x}(x>0)=\dfrac{(x-4)^2}{x}+18\ge 18\Leftrightarrow x=4$

Bài 2: Tìm GTNN, GTLN của các biểu thức sau

a. [HSG – Thanh Chương – 2011] $A=\dfrac{3-4x}{x^2+1}$

b. $B=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$

c. $C=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$

d. $D=\dfrac{8x+3}{4x^2+1}$

e. $E=\dfrac{4x}{4x^2+1}$

Lời giải

a. [HSG – Thanh Chương – 2011]

$A=\dfrac{3-4x}{x^2+1}=\dfrac{x^2-4x+4-x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{(x-2)^2}{x^2+1}-1\ge -1\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$

+) $A=\dfrac{3-4x}{x^2+1}=\dfrac{4x^2+4-4x^2-4x-1}{x^2+1}=4-\dfrac{(2x+1)^2}{x^2+1}\le 4\Rightarrow A_{max}=4\Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{2}$

Cách khác:

Nháp để nhẩm GTLN và GTNN nếu có :

$a=\dfrac{3-4x}{x^2+1}=ax^2+a=3-4x => a.x^2+4x+a-3=0$,

Xét $\Delta=16-4a^2+12a=0=>\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=4\end{array}\right.$

Khi đó ta có : $K=\left(\dfrac{3-4x}{x^2+1}+1\right)-1=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+1}-1\ge -1$, Dấu = khi $x=-2$

Mặt khác : $K=\left(\dfrac{3-4x}{x^2+1}-4\right)+4=\dfrac{-4x^2-4x-1}{x^2+1}+4\le 4$, Dấu = khí $x=\dfrac{-1}{2}$

b. $B=\dfrac{2x+1}{x^2+2}=\dfrac{4x+2}{2(x^2+2)}$

+) $B=\dfrac{2x+1}{x^2+2}=\dfrac{4x+2}{2(x^2+2)}=\dfrac{(x^2+4x+4)-(x^2+2)}{2(x^2+2)}=\dfrac{(x+2)^2}{2(x^2+2)}-\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{-1}{2}\Rightarrow A_{min}=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow x=-2$

+) $B=\dfrac{2x+1}{x^2+2}=\dfrac{4x+2}{2(x^2+2)}=\dfrac{-x^2+2x-1}{x^2+2}+\dfrac{x^2+2}{x^2+2}=\dfrac{-(x-1)^2}{x^2+2}+1\le 1\Rightarrow A_{max}=1\Leftrightarrow x=1$

c. $C=\dfrac{4x+3}{x^2+1}=\dfrac{x^2+4x+4-x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+1}-1\ge -1\Leftrightarrow x=-2$

+) $C=\dfrac{4x+3}{x^2+1}=\dfrac{-4x^2+4x-1+4x^2+4}{x^2+1}=\dfrac{-(2x-1)^2}{x^2+1}+4\le 4\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

d. $D=\dfrac{8x+3}{4x^2+1}=\dfrac{(4x^2+8x+4)-(4x^2+1)}{4x^2+1}=-1+\dfrac{(2x+2)^2}{4x^2+1}\ge -1\Leftrightarrow x=-1$

+) $D=\dfrac{8x+3}{4x^2+1}=\dfrac{16x^2+4-(16x^2-8x+1)}{4x^2+1}=4-\dfrac{(4x-1)^2}{4x^2+1}\le 4\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$

e. $E=\dfrac{4x}{4x^2+1}=\dfrac{4x^2+1-4x^2-1+4x}{4x^2+1}=1-\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\le 1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

+) $E=\dfrac{4x}{4x^2+1}=\dfrac{-(4x^2+1)+(4x^2+4x+1)}{4x^2+1}=-1+\dfrac{(2x+1)^2}{4x^2+1}\ge -1\Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{2}$

Bài 3: [HSG – Yên Phong – 14/04/2014]

Tìm GTLN của biểu thức $A=\dfrac{3(x+1)}{x^3+x^2+x+1}$

Lời giải

$A=\dfrac{3(x+1)}{x^3+x^2+x+1}=\dfrac{3}{x^2+1}\le 3\Leftrightarrow x=0\Rightarrow A_{max}=3\Leftrightarrow x=0$

Bài 4: [HSG – Yên Phong – 2016 – 2017]

Tìm GTNN của các biểu thức sau $D=\dfrac{2010x+2680}{x^2+1}\quad (x\in R)$

Lời giải

$D=\dfrac{2010x+2680}{x^2+1}(x\in R)=\dfrac{335(6x+8)}{x^2+1}=\dfrac{335(x^2+6x+9-x^2-1)}{x^2+1}=\dfrac{335(x+3)^2}{x^2+1}-335\ge -335\Leftrightarrow x=-3$

Bài 5: Tìm GTNN của biểu thức sau $A=\dfrac{x^2+15x+16}{3x}\quad \left(x\in R^+\right)$

Lời giải

Ta có: $A=\dfrac{x^2+15x+16}{3x}\left(x\in R^+\right)=\dfrac{\left(x-4\right)^2}{3x}+\dfrac{23}{3}\ge\dfrac{23}{3}\Rightarrow minA=\dfrac{23}{3}\Leftrightarrow x=4$

Bài 6: Tìm GTLN của biểu thức sau $A=\dfrac{xy^2+y^2\left(y^2-x\right)+1}{x^2y^4+2y^4+x^2+2}\quad \left(x,y\in R\right)$

Lời giải

Ta có: $A=\dfrac{xy^2+y^2\left(y^2-x\right)+1}{x^2y^4+2y^4+x^2+2}\quad \left(x,y\in R\right)=\dfrac{y^4+1}{\left(y^4+1\right)\left(x^2+2\right)}$

Vì $y^4+1\ne 0\quad \forall x$ nên chia cả tử và mẫu cho y^4+1 ta được: $A=\dfrac{1}{x^2+2}$

Vì $x^2\ge 0\quad \forall x\Rightarrow x^2+2\ge 2\quad \forall x\Rightarrow A=\dfrac{1}{x^2+2}\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=0;y\in R$

Bài 7: Tìm GTLN của biểu thức sau $A=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$

Lời giải

+) Xét $x=0\Rightarrow A=0$ giá trị này không phải giá trị lớn nhất của A vì với $x\neq 0\Rightarrow A>0$

+) Xét $x\neq 0$ đặt $P=\frac{1}{A}\Rightarrow A_{max}\Leftrightarrow P_{min}$

Ta có $P=\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1; x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2\left(Cosi\right)\Rightarrow P\geq 2+1=3\Rightarrow P_{min}=3\Leftrightarrow x=\pm 1$

Bài 8: Tìm min hoặc max của: $M=\frac{27-12x}{x^2+9}$

Lời giải

Nháp : $a=\frac{27-12x}{x^2+9} => a.x^2+9a=27-12x => a.x^2+12x+9a-27=0$

Có $\Delta'=36-a\left(9a-27\right)=0 => \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-1 \end{array}\right.$

Khi đó ta có : $M=\left(\frac{27-12x}{x^2+9}-4\right)+4=\frac{-4x^2-12x-9}{x^2+9}+4=\frac{-\left(2x-3\right)^2}{x^2+9}+4\leq 4$

Mặt khác : $M=\left(\frac{27-12x}{x^2+9}+1\right)-1=\frac{x^2-12x+36}{x^2+9}-1=\frac{\left(x-6\right)^2}{x^2+9}-1\geq -1$

Bài 9: Tìm min hoặc max của: $P=\frac{8x+3}{4x^2+1}$

Lời giải

Nháp : $a=\frac{8x+3}{4x^2+1} => 4a.x^2+a=8x+3 => 4a.x^2-8x+a-3=0$

Có $\Delta'=16-4a\left(a-3\right) => a=4; a=-1$

Khi đó : $P=\left(\frac{8x+3}{4x^2+1}-4\right)+4=\frac{-16x^2+8x-1}{4x^2+1}+4=\frac{-\left(4x-1\right)^2}{4x^2+1}+4\leq 4$

Mặt khác : $P=\left(\frac{8x+3}{4x^2+1}+1\right)-1=\frac{4x^2+8x+4}{4x^2+1}-1=\frac{4\left(x+1\right)^2}{4x^2+1}-1\geq -1$

Bài 10: Tìm min hoặc max của: $D=\frac{2x+1}{x^2+2}$

Lời giải

Nháp : $a=\frac{2x+1}{x^2+2} => a.x^2-2x+2a-1=0$, có $\Delta'=1-a\left(2a-1\right)=0 => a=1; a=\frac{-1}{2}$

Khi đó : $D=\left(\frac{2x+1}{x^2+1}-1\right)+1=\frac{-x^2+2x-1}{x^2+2}+1=\frac{-(x-1)^2}{x^2+2}+1\le 1$

Mặt khác : $D=\left(\frac{2x+1}{x^2+2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{x^2+4x+4}{2(x^2+2)}-\frac{1}{2}\ge\frac{-1}{2}$

Bài 11: Tìm min hoặc max của: $E=\frac{2x+1}{x^2}$

Lời giải

$E=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$, Đặt $\frac{1}{x}=a \Rightarrow E=a^2+2a$

Bài 12: Tìm min hoặc max của: $F=\frac{2x-1}{x^2+2}$

Lời giải

Nháp : $a=\frac{2x-1}{x^2+2} \Rightarrow a.x^2-2x+2a+1=0$, có $\Delta'=1-a(2a+1)=1-2a^2-a \Rightarrow a=\frac{1}{2};a=-1$

Khi đó : $F=\left(\frac{2x-1}{x^2+2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{-x^2+4x-4}{2(x^2+2)}+\frac{1}{2}=\frac{-(x-2)^2}{2(x^2+2)}+\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$

Mặt khác : $F=\left(\frac{2x-1}{x^2+2}+1\right)-1=\frac{x^2+2x+1}{x^2+2}-1=\frac{(x+1)^2}{x^2+2}-1\ge -1$

Bài 13: Tìm min hoặc max của: $G=\frac{6x-8}{x^2+1}$

Lời giải

Nháp : $a=\frac{6x-8}{x^2+1} \Rightarrow a.x^2-6x+a+8=0$, có :

$\Delta'=9-a(a+8)=-a^2-8a+9=0 \Rightarrow a=1;a=-9$

Khi đó : $G=\left(\frac{6x-8}{x^2+1}-1\right)+1=\frac{-x^2+6x-9}{x^2+1}+1=\frac{-(x-3)^2}{x^2+1}+1\le 1$

Mặt khác : $G=\left(\frac{6x-8}{x^2+1}+9\right)-9=\frac{9x^2+6x+1}{x^2+1}-9=\frac{(3x+1)^2}{x^2+1}-9\ge -9$

Bài 14: Tìm min hoặc max của: $A=\frac{x^6+27}{x^4-3x^3+6x^2-9x+9}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được : $A=x^2+3x+3$

Bài 15: Tìm min hoặc max của: $B=\frac{x^6+512}{x^2+8}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được : $B = x^4 - 8x^2 + 64 = \left(x^2 - 4\right)^2 + 48 \geq 48$

Bài 16: Tìm min hoặc max của: $G = \dfrac{4x^4 + 16x^3 + 56x^2 + 80x + 356}{x^2 + 2x + 5}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được: $G = 4\left(x^2 + 2x + 5\right) + \dfrac{256}{x^2 + 2x + 5}$, Đặt $x^2 + 2x + 5 = t \Rightarrow G = 4t + \dfrac{256}{t}$

Sau đó sử dụng co si là ra.

Bài 17: Tìm min hoặc max của: $I = \dfrac{-8}{3x^2 + 2}$

Lời giải

Ta có : $3x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \dfrac{8}{3x^2 + 2} \leq \dfrac{8}{2} = 4$

Bài 18: Tìm min hoặc max của: $B = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2}$

Lời giải

Nháp : $a = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2} \Rightarrow a.x^2 - 2x + 2a - 1 = 0$, có $\Delta' = 1 - a\left(2a - 1\right) = 0 \Rightarrow a = 1; a = \dfrac{-1}{2}$

Khi đó ; $B = \left(\dfrac{2x + 1}{x^2 + 2} - 1\right) + 1 = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2} + 1 = 1 - \dfrac{\left(x - 1\right)^2}{x^2 + 2} \leq 1$

Mặt khác : $B = \left(\dfrac{2x + 1}{x^2 + 2} + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{2\left(x^2 + 2\right)} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\left(x + 2\right)^2}{2\left(x^2 + 2\right)} - \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{-1}{2}$

Bài 19: Tìm min hoặc max của: $G = \dfrac{x^2y + x^2\left(x^2 - y\right) + 1}{2x^4 + x^4y^2 + y^2 + 2}$

Lời giải

Ta có : $G = \dfrac{x^2y + x^4 - x^2y + 1}{2x^4 + x^4y^2 + y^2 + 2} = \dfrac{x^4 + 1}{2\left(x^4 + 1\right) + y^2\left(x^4 + 1\right)} = \dfrac{1}{y^2 + 2}$

Bài 20: Tìm min hoặc max của: $H = \dfrac{x^4 + 1}{\left(x^2 + 1\right)^2}$

Lời giải

Đặt $x^2 + 1 = t \Rightarrow x^2 = t - 1 \Rightarrow x^4 = t^2 - 2t + 1$, khi đó $H = \dfrac{t^2 - 2t + 1 + 1}{t^2} = 1 - \dfrac{2}{t} + \dfrac{2}{t^2}$

Đặt $\dfrac{1}{t} = a \Rightarrow H = 2a^2 - 2a + 1$

Bài 21: Tìm min hoặc max của: $I = \frac{2x^2 - 16x + 71}{x^2 - 8x + 22}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được : $I = 2 + \frac{27}{x^2 - 8x + 22}$, mà $x^2 - 8x + 22 = (x-4)^2 + 6 \geq 6$

Bài 22: Tìm min hoặc max của: $P = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

Lời giải

Nháp : Đặt $x^2 = t \Rightarrow a = \frac{t}{t^2+1} \Rightarrow at^2 - t + a = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$

Khi đó : $P = \left(\frac{x^2}{x^4+1} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{2(x^4+1)} - \frac{1}{2} = \frac{(x^2+1)^2}{2(x^4+1)} - \frac{1}{2} \geq \frac{-1}{2}$, Không xảy ra dấu bằng

Mặt khác : $P = \left(\frac{x^2}{x^4+1} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{-x^4 + 2x^2 - 1}{2(x^4+1)} + \frac{1}{2} = \frac{-(x^2-1)^2}{2(x^4+1)} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

Bài 23: Tìm min hoặc max của: $G = \frac{x^4 + 1}{(x^2+1)^2}$

Lời giải

Đặt $x^2 + 1 = t \Rightarrow x^2 = t - 1 \Rightarrow x^4 = t^2 - 2t + 1$

Khi đó : $G = \frac{t^2 - 2t + 2}{t^2} = 1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}$, đặt $\frac{1}{t} = a \Rightarrow G = 2a^2 - 2a + 1$

Bài 24: Tìm min $P = \frac{2(2x+1)}{x^2+2}$

Lời giải

Nháp : $a = \frac{4x+2}{x^2+2} \Rightarrow a.x^2 - 4x + 2a - 2 = 0$, có $\Delta' = 4 - a(2a-2) = 0 \Rightarrow a = 2; a = -1$

Khi đó : $P = \left(\frac{4x+2}{x^2+2} - 2\right) + 2 = \frac{-2x^2 + 4x - 2}{x^2+2} + 2 = \frac{-2(x-1)^2}{x^2+2} + 2 \leq 2$

Mặt khác : $P = \left(\frac{4x+2}{x^2+2} + 1\right) - 1 = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2+2} - 1 \geq -1$

Bài 25: Tìm min hoặc max của: $K = \frac{x^2+2}{x^2+x+2}$

Lời giải

Ta có : $K = 1 - \frac{x}{x^2 + x + 2}$

Nháp : $a=\dfrac{-x}{x^2+x+2}$ => $a.x^2+a.x+x+2a=0$, có : $\Delta=(a+1)^2-4a.2a=0$ => $a=\dfrac{1\pm2\sqrt{2}}{7}$

Bài 26: Tìm min hoặc max của: $M=\dfrac{4x+1}{x^2+3}$

Lời giải

Nháp : $a=\dfrac{4x+1}{x^2+3}$ => $a.x^2-4x+3a-1=0$, có $\Delta'=4-a(3a-1)=0$ => $a=-1;a=\dfrac{4}{3}$

Bài 27: Tìm min hoặc max của: $P=\dfrac{12x+13}{x^2+2x+3}$

Lời giải

Nháp : $a=\dfrac{12x+13}{x^2+2x+3}$ => $a.x^2+2a.x+3a-12x-13=0$,

Có $\Delta'=(a-6)^2-a(3a-13)=0$ => $a=-4;a=\dfrac{9}{2}$

Bài 28: Tìm GTLN của biểu thức: $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$, GTLN đó đạt được tại giá trị nào của x

Lời giải

Ta có : $P(x)=\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{1}{P(x)}=x^2+\dfrac{1}{x^2}+1\geq 3$

Bài 29: Tìm GTNN của biểu thức: $M=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}\quad(x\neq-1)$

Lời giải

Ta có : $M=\dfrac{x^2+2x+1-(x+1)+1}{x^2+2x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Đặt $\dfrac{1}{x+1}=t$, ta có: $M=t^2-t+1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}$

Bài 30: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B=\dfrac{3(x+1)}{x^3+x^2+x+1}$

Lời giải

Ta có: $B=\dfrac{3(x+1)}{x^3+x^2+x+1}=\dfrac{3(x+1)}{x^2(x+1)+x+1}=\dfrac{3(x+1)}{(x^2+1)(x+1)}=\dfrac{3}{x^2+1}$

Do $x^2+1>0$ => $B=\dfrac{3}{x^2+1}\leq 3$, Dấu bằng khi và chỉ khi x=0

2. Bậc của tử bằng bậc của mẫu

Bài 1: Tìm GTN N của các biểu thức sau

a. $A=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2}(x\neq 0)$ b. $B=\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}(x\neq 1)$

c. $C=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2}$ d. $D=\dfrac{x^2-2x+2016}{x^2}$

Lời giải

a. $A=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2}(x\neq 0)=\dfrac{3(x^2-2x+3)}{3x^2}=\dfrac{(x-3)^2}{3x^2}+\dfrac{2}{3}\geq\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow x=3\Rightarrow A_{\min}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow x=3$

b. $B=\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}(x\neq 1)=\dfrac{4x^2-4x+4}{4(x-1)^2}=\dfrac{x^2+2x+1}{4(x-1)^2}+\dfrac{3x^2-6x+3}{4(x-1)^2}=\dfrac{(x+1)^2}{4(x-1)^2}+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x=-1$

c. $C=\dfrac{2(x^2+2x+3)}{2(x^2+2)}=\dfrac{x^2+4x+4}{2(x^2+2)}+\dfrac{x^2+2}{2(x^2+2)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{(x+2)^2}{2(x^2+2)}\geq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-2$

d. $D=\dfrac{x^2-2x+2016}{x^2}=\dfrac{2016x^2-2x.2016+2016}{2016x^2}=\dfrac{(x-2016)^2}{x^2}+\dfrac{2015}{2016}\geq\dfrac{2015}{2016}\Leftrightarrow x=2016$

Bài 2: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A=\dfrac{6x^2+2x+19}{3x^2+x+7}$ b. $B=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2}$

Lời giải

a. $A=\dfrac{6x^2+2x+19}{3x^2+x+7}=\dfrac{2(3x^2+x+7)+5}{3x^2+x+7}=2+\dfrac{5}{3x^2+x+7}$

$M=3x^2+x+7=3\left(x+\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{83}{12}\geq\dfrac{83}{12}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{6}\Rightarrow A_{max}=M_{\min}\Rightarrow A_{max}=2+\dfrac{5}{\dfrac{83}{12}}=2\dfrac{60}{83}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{6}$

b. $B=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2}=\dfrac{2x^2-x^2+2x+3}{x^2+2}=\dfrac{2(x^2+2)-4-x^2+2x+3}{x^2+2}=2-\dfrac{(x-1)^2}{x^2+2}\leq 2\Leftrightarrow x=1$

Bài 3: Tìm GTLN, GTNN của các biểu thức sau

a. $A=\dfrac{3x^2+2x+3}{x^2+1}$ b. $B=\dfrac{x^2-2x-2}{x^2+x+1}$

Lời giải

a. $A=\dfrac{3x^2+2x+3}{x^2+1}=\dfrac{2(x^2+1)}{x^2+1}+\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}=2+\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}\geq 2\Leftrightarrow x=-1$

+) $A=\dfrac{3x^2+2x+3}{x^2+1}=\dfrac{4x^2+4}{x^2+1}-\dfrac{(x^2-2x+1)}{x^2+1}=4-\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}\leq 4\Leftrightarrow x=1$

b. $B=\dfrac{x^2-2x-2}{x^2+x+1}=\dfrac{3x^2-(2x^2+2x+2)}{x^2+x+1}=\dfrac{3x^2}{x^2+x+1}-2\leq -2\Leftrightarrow x=0$

+) Với $x\neq 0\Rightarrow A=\dfrac{3x^2}{x^2+x+1}-2=\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2$

Ta lại có: $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)^2\geq\frac{3}{4}\Rightarrow A\geq\frac{3}{\frac{3}{4}}-2=2\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{-1}{x}\Leftrightarrow x=-2$

Bài 4: Tìm GTLN của $A=\frac{3x^2+6x+10}{x^2+2x+3}$

Lời giải

$$A=3+\frac{1}{x^2+2x+3}=3+\frac{1}{(x+1)^2+2}\Rightarrow A_{max}\Leftrightarrow\left[\frac{1}{(x+1)^2+2}\right]_{\max}\Leftrightarrow[(x+1)^2+2]_{\min}\Leftrightarrow(x+1)^2+2=2\Leftrightarrow x=-1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(x+1)^2+2}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow A_{max}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow x=-1$$

Bài 5: Tìm GTLN của biểu thức sau $A=\frac{3x^2+6x+10}{x^2+2x+3}\quad(x\in R)$

Lời giải

Ta có: $A=\frac{3x^2+6x+10}{x^2+2x+3}=3+\frac{1}{(x+1)^2+2}\leq3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow x=-1$

Bài 6: Tìm min hoặc max của: $C=\frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}$

Lời giải

$C=2+\frac{2x}{x^2+1}$, Nháp : $a=\frac{2x}{x^2+1}=>a.x^2+a-2x=0$, có $\Delta=4-4a^2=0=>a=\pm1$

Khi đó : $C=\left(\frac{2x}{x^2+1}+1\right)-1+2=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}+1\geq1$

Mặt khác : $C=\left(\frac{2x}{x^2+1}-1\right)+1+2=\frac{-x^2+2x-1}{x^2+1}+3=\frac{-(x-1)^2}{x^2+1}+3\leq3$

Bài 7: Tìm min hoặc max của: $N=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

Lời giải

$N=1+\frac{x}{x^2+1}$, Nháp : $a=\frac{x}{x^2+1}=a.x^2-x+a=0$, có : $\Delta=1-4a^2=0=>a=\pm\frac{1}{2}$

Khi đó ta có : $N=\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\right)+1-\frac{1}{2}=\frac{x^2+2x+1}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$

Mặt khác : $N=\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\right)+1+\frac{1}{2}=\frac{-x^2+2x-1}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}=\frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\leq\frac{3}{2}$

Bài 8: Tìm min hoặc max của: $Q=\dfrac{3x^2-6x+17}{x^2-2x+5}$

Lời giải

Ta có : $Q=3+\dfrac{2}{x^2-2x+5}$, mà $x^2-2x+5=(x-1)^2+4\ge 4 \Rightarrow \dfrac{2}{x^2-2x+5}\le\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Bài 9: Tìm min hoặc max của: $R=\dfrac{2x^2-16x+41}{x^2-8x+22}$

Lời giải

Ta có : $R=\dfrac{2x^2-16x+44-3}{x^2-8x+22}=2-\dfrac{3}{x^2-8x+22}$,

Mà $x^2-8x+22=(x-4)^2+6\ge 6 \Rightarrow \dfrac{3}{(x-4)^2+6}\le\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{-3}{(x-4)^2+6}\ge\dfrac{-1}{2}$

Bài 10: Tìm min hoặc max của: $P=\dfrac{x^2}{x^2-2x+2010}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được : $P=1+\dfrac{2x-2010}{x^2-2x+2010}$,

Nháp : $a=\dfrac{2x-2010}{x^2-2x+2010} \Rightarrow a.x^2-2a.x+2010a-2x+2010=0$

Có $\Delta'=(a+1)^2-a(2010a+2010)=0 \Rightarrow a=-1; a=\dfrac{1}{2009}$

Làm tương tự như các bài trên .

Bài 11: Tìm min hoặc max của: $Q=\dfrac{2x^2-6x+5}{x^2-2x+1}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được : $Q=2+\dfrac{-2x+3}{x^2-2x+1}$, Đặt $x-1=t$, khi đó ta có :

$Q=2+\dfrac{3-2(t+1)}{t^2}=\dfrac{2t^2-2t+1}{t^2}=2-\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{t^2}$, Đặt $\dfrac{1}{t}=a \Rightarrow Q=a^2-2a+2$

Bài 12: Tìm min hoặc max của: $A=\dfrac{2x^2+4x+4}{x^2}$

Lời giải

$A=2+\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}$, Đặt $\dfrac{1}{x}=t \Rightarrow A=4t^2+4t+2$

Bài 13: Tìm min hoặc max của: $H=\dfrac{3x^2-6x+17}{x^2-3x+5}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được : $H=3+\dfrac{3x+2}{x^2-3x+5}$

Nháp : $a=\dfrac{3x+2}{x^2-3x+5} \Rightarrow a.x^2-3a.x-3x+5a-2=0$, có :

$\Delta=9(x+1)^2-4a(5a-2)=-11a^2+26a+9=0 \Rightarrow a=\dfrac{13\pm 2\sqrt{67}}{11}$,

Bài 14: Tìm min hoặc max của: $K=\dfrac{x^2-4x+1}{x^2}$

Lời giải

$K=1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}$, đặt $\dfrac{1}{x}=t \Rightarrow K=t^2-4t+1=(t-2)^2-3\ge -3$

Bài 15: Tìm min hoặc max của: $N=\dfrac{2x^2+4x+9}{x^2+2x+4}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được : $N=2+\dfrac{1}{x^2+2x+4}$, mà $x^2+2x+4=(x+1)^2+3\ge 3$

Bài 16: Tìm min hoặc max của: $Q=\dfrac{x^2-2x+1999}{x^2-3x+2}:\dfrac{x^3}{x^2-3x^2+2x}$

Lời giải

Thực hiện phép tính ta được : $Q=\dfrac{x^2-2x+1999}{x^2}=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1999}{x^2}$,

Đặt $\dfrac{1}{x}=t \Rightarrow Q=1999t^2-2t+1$

Bài 17: Tìm min hoặc max của: $D=\dfrac{2x^2+4x+9}{x^2+2x+4}$

Lời giải

$D=2+\dfrac{1}{x^2+2x+4}$, mà $x^2+2x+4=(x+1)^2+3\ge 3$

Bài 18: Tìm min hoặc max của: $F=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}$

Lời giải

$F=1+\dfrac{-4x}{x^2+2x+2}$

Nháp : $a=\dfrac{-4x}{x^2+2x+2} \Rightarrow a.x^2+2a.x+4a+2a=0$, có $\Delta'=(a+2)^2-a.2a=0 \Rightarrow a=2\pm 2\sqrt{2}$

Bài 19: Tìm min hoặc max của: $H = \dfrac{2x^2 - 2xy + 9y^2}{x^2 + 2xy + 5y^2}$

Lời giải

Với y = 0 ta được H = 2

Với y ≠ 0. Chia cá tử và mẫu cho y^2 ta được:

$$H = \frac{2.\frac{x^2}{y^2} - 2.\frac{x}{y} + 9}{\frac{x^2}{y^2} + 2.\frac{x}{y} + 5}, \text{ đặt } \frac{x}{y} = t \Rightarrow H = \frac{2t^2 - 2t + 9}{t^2 + 2t + 5} = 2 - \frac{6t+1}{t^2 + 2t + 5}$$

Nháp : $a = -\dfrac{6t+1}{t^2 + 2t + 5} \Rightarrow at^2 + 2at + 5a + 6t + 1 = 0$,

Có : $\Delta' = (a+3)^2 - a(5a+1) = 0 \Rightarrow a = -1; a = \dfrac{9}{4}$, làm giống các bài trên

Bài 20: Tìm min hoặc max của: $J = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$

Lời giải

Ta có : $J = 1 + \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$

Nháp : $a = \dfrac{x}{x^2 - x + 1} \Rightarrow a.x^2 - a.x - x + a = 0$, có $\Delta = (a+1)^2 - 4a.a = 0 \Rightarrow a = 1; a = \dfrac{-1}{3}$

Khi đó : $J = 1 + \left(\dfrac{x}{x^2 - x + 1} - 1\right) + 1 = 2 + \left(\dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x^2 - x + 1}\right) = 2 - \dfrac{(x-1)^2}{x^2 - x + 1} \le 2$

Mặt khác : $J = 1 + \left(\dfrac{x}{x^2 - x + 1} + \dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{x^2 + 2x + 1}{3(x^2 - x + 1)} \ge \dfrac{2}{3}$

Bài 21: Tìm min hoặc max của: $Q = \dfrac{5y^2 - 3xy}{x^2 - 3xy + 4y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $Q = \dfrac{5 - 3.\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2} - 3.\frac{x}{y} + 4}$, đặt $\dfrac{x}{y} = t \Rightarrow Q = \dfrac{5 - 3t}{t^2 - 3t + 4}$

Nháp : $a = \dfrac{5 - 3t}{t^2 - 3t + 4} \Rightarrow at^2 - 3at + 4a + 3t - 5 = 0$, có : $\Delta = 9(a-1)^2 - 4a(4a-5) = 0$

$\Rightarrow a = -1; a = \dfrac{9}{7}$

Bài 22: Tìm min hoặc max của: $R=\dfrac{x^2-4y^2}{3x^2-4xy+5y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $R=\dfrac{\dfrac{x^2}{y^2}-4}{3.\dfrac{x^2}{y^2}-4.\dfrac{x}{y}+5}$, Đặt $\dfrac{x}{y}=t \Rightarrow R=\dfrac{t^2-4}{3t^2-4t+5}$

Nháp : $a=\dfrac{t^2-4}{3t^2-4t+5} \Rightarrow 3at^2-4at+5a-t^2+4=0$,

Có $\Delta'=4a^2-(3a-1)(5a+4)=0 \Rightarrow a=-1; a=\dfrac{4}{11}$

Bài 23: Tìm min hoặc max của: $A=\dfrac{x^2-6x+23}{x^2-6x+10}$

Lời giải

$A=1+\dfrac{13}{x^2-6x+10}$

Bài 24: Tìm min hoặc max của: $B=\dfrac{y^2}{9x^2-12xy+5y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $B=\dfrac{1}{9\dfrac{x^2}{y^2}-12\dfrac{x}{y}+5}$, Đặt $\dfrac{x}{y}=t \Rightarrow B=\dfrac{1}{9t^2-12t+5}$

Bài 25: Tìm min hoặc max của: $D=\dfrac{3y^2}{-25x^2+20xy-5y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $D=\dfrac{3}{-25\dfrac{x^2}{y^2}+20\dfrac{x}{y}-5}$, Đặt $\dfrac{x}{t}=t \Rightarrow D=\dfrac{3}{-25t^2+20t-5}$

Bài 26: Tìm min hoặc max của: $E=\dfrac{4x^2-6x+1}{(x-2)^2}$

Lời giải

Đặt $x-2=t \Rightarrow x^2=t^2+4t+4$, khi đó : $E=\dfrac{4t^2+10t+5}{t^2}=4+\dfrac{10}{t}+\dfrac{5}{t^2}$,

Đặt $\dfrac{1}{t}=a \Rightarrow E=5a^2+10a+4$

Bài 27: Tìm min hoặc max của: $F=\dfrac{x^2+4x-14}{x^2-2x+1}$

Lời giải

Đặt $x-1=t \Rightarrow x^2=t^2+2t+1$, Khi đó : $F=\dfrac{t^2+6t-9}{t^2}=1+\dfrac{6}{t}-\dfrac{9}{t^2}$

Đặt $\dfrac{1}{t}=a \Rightarrow F=-9a^2+6a+1$

Bài 28: Tìm min hoặc max của: $G=\dfrac{4x^2-6x+3}{2x^2-3x+2}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được : $G=2+\dfrac{-1}{2x^2-3x+2}$

Bài 29: Tìm min hoặc max của: $H=\dfrac{3x^2-2xy+y^2}{9x^2-6xy+2y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $H=\dfrac{3\dfrac{x^2}{y^2}-2.\dfrac{x}{y}+1}{9\dfrac{x^2}{y^2}-6\dfrac{x}{y}+2}$, Đặt $\dfrac{x}{y}=t \Rightarrow H=\dfrac{3t^2-2t+1}{9t^2-6t+2}$

Nháp: $a=\dfrac{3t^2-2t+1}{9t^2-6t+2} \Rightarrow 9at^2-6at+2a-3t^2+2t-1=0$,

có : $\Delta'=(3a-1)^2-(9a-3)(2a-1)=0 \Rightarrow a=\dfrac{1}{3};a=\dfrac{2}{3}$

Bài 30: Tìm min hoặc max của: $I=\dfrac{4x^2+22x+19}{x^2+4x+4}$

Lời giải

$I=4+\dfrac{6x+3}{(x+2)^2}$, Đặt $x+2=t \Rightarrow I=4+\dfrac{6(t-2)+3}{t^2}=4+\dfrac{6}{t}-\dfrac{9}{t^2}$

Đặt $\dfrac{1}{t}=a \Rightarrow I=-9a^2+6a+4$

Bài 31: Tìm min hoặc max của: $K=\dfrac{9x^2+30x-7}{9x^2+6x+1}$

Lời giải

$K=1+\dfrac{24x-8}{(3x+1)^2}$, đặt $3x+1=t \Rightarrow 3x=t-1 \Rightarrow K=1+\dfrac{3t-3-8}{t^2}=1+\dfrac{3}{t}-\dfrac{11}{t^2}$

Đặt $\frac{1}{t}=a \Rightarrow K=-11a^2+3a+1$

Bài 32: Tìm min hoặc max của: $M=\frac{x^2-5xy+2y^2}{2x^2-10xy+7y^2}$

Lời giải

Với y = 0 thì M = $\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$

Với y ≠ 0 chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $M=\frac{\frac{x^2}{y^2}-5\frac{x}{y}+2}{2\frac{x^2}{y^2}-10\frac{x}{y}+7}$,

Đặt $\frac{x}{y}=t \Rightarrow M=\frac{t^2-5t+2}{2t^2-10t+7}$

Nháp $a=\frac{t^2-5t+2}{2t^2-10t+7} \Rightarrow 2at^2-10at+7a-t^2+5t-2$, có : $\Delta=25(2a-1)^2-4(2a-1)(7a-2)$

$\Delta=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}; a=\frac{17}{22}$

Bài 33: Tìm min hoặc max của: $N=\frac{22x^2-58xy+73y^2}{x^2-4xy+4y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $N=\frac{22\frac{x^2}{y^2}-58\frac{x}{y}+73}{\frac{x^2}{y^2}-4\frac{x}{y}+4}$, Đặt $\frac{x}{y}=t \Rightarrow N=\frac{22t^2-58t+73}{t^2-4t+4}$

$N=22+\frac{30t-15}{(t-2)^2}$, Đặt $t-2=a \Rightarrow N=22+\frac{30(a+2)-15}{a^2}=22+\frac{30a+45}{a^2}=22+\frac{30}{a}+\frac{45}{a^2}$

Đặt $\frac{1}{a}=b \Rightarrow N=22+30b+45b^2$

Bài 34: Tìm min hoặc max của: $P=\frac{8x^2+6xy}{x^2+y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $P=\frac{8\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1}$, Đặt $\frac{x}{y}=t \Rightarrow P=\frac{8t^2+6t}{t^2+1}=8+\frac{6t-8}{t^2+1}$

Nháp: $a=\frac{6t-8}{t^2+1} \Rightarrow at^2+a-6t+8=0$, có $\Delta'=9-a(a+8)=0 \Rightarrow a=1; a=-9$

Bài 35: Tìm min hoặc max của: $Q=\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-2x+1}$

Lời giải

$Q=1+\dfrac{-x+2}{(x-1)^2}$, Đặt $x-1=t => x=t+1$ Khi đó : $Q=1+\dfrac{-t+1}{t^2}=1-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}$

Đặt $\dfrac{1}{t}=a => Q=a^2-a+1$

Bài 36: Tìm min hoặc max của: $R=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$

Lời giải

Với y = 0 thì R = 1

Với y ≠ 0. Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $R=\dfrac{\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x}{y}+1}{\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{x}{y}+1}$,

Đặt $\dfrac{x}{y}=t => R=\dfrac{t^2+t+1}{t^2-t+1}=1+\dfrac{2t}{t^2-t+1}$

Nháp : $a=\dfrac{2t}{t^2-t+1} => at^2-at+a-2t=0$, có $\Delta=(a+2)^2-4a.a=0 => a=2; a=\dfrac{-2}{3}$

CHUYÊN ĐỀ 4:

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

- Là phương trình có dạng: ax = b phụ thuộc vào tham số m

+) Nếu $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$

+) Nếu $a = 0 \Leftrightarrow 0x = b \rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \Leftrightarrow 0x = 0 \quad \text{(Vô số nghiệm)} \\ b \neq 0 \ (PTVN) \end{array}\right.$

Bài 1: Giải và biện luận số nghiệm của phương trình sau

a. $(m^2-4)x = 3m-6$

b. $(2m+1)x - 2m = 3x - 2$

c. $m(x-2) = 3x+1$

d. $(m^2+2)x - 2m = x - 3$

Lời giải

a. $(m^2-4)x = 3m-6$

+) Nếu $(m^2-4) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2 \Rightarrow x = \frac{3m-6}{m^2-4} = \frac{3}{m+2}$

+) Nếu $(m^2-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0x = 0 \quad \text{(Vô số nghiệm)} \\ 0x = -12 \quad \text{(Vô nghiệm)} \end{array}\right.$

b. $(2m+1)x - 2m = 3x - 2 \Leftrightarrow (2m-2)x = 2m-2$

+) Nếu $2m-2 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{2m-2}{2m-2} = 1$

+) Nếu $2m-2 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow 0x = 0$ (vô số nghiệm)

Vậy nếu:

+) Nếu $m \neq 1$ phương trình có vô số nghiệm

+) Nếu m = 1 phương trình vô nghiệm

c. $m(x-2) = 3x+1 \Leftrightarrow (m-3)x = 2m+1$

+) $m-3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3 \Rightarrow x = \frac{2m+1}{m-3}$

+) $m-3 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \Rightarrow 0x = 7$ (vô nghiệm)

d. $(m^2+2)x - 2m = x - 3 \Rightarrow (m^2+1)x = 2m-3$

Ta có: $m^2+1) > 0 \ \forall m$ suy ra phương trình luôn có nghiệm $x = \frac{2m-3}{m^2+1}$

Bài 2: Cho phương trình $(m^2-1)(x+2)+1 = m$

a. Tìm m để x = 3 là nghiệm của phương trình

b. Tìm m để phương trình có nghiệm

c. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất x = 3

Lời giải

a. Thay x = 3 vào phương trình, ta được: $5(m^2-1)+1=m \Leftrightarrow 5m^2-m-4=0 \Leftrightarrow m\in\left\{1;\frac{-4}{5}\right\}$

b. $(m^2-1)(x+2)+1=m \Leftrightarrow (m^2-1)x=-2m^2+m+1$

Để phương trình có nghiệm thì xảy ra 2 trường hợp

+) Phương trình có nghiệm duy nhất khi $m^2-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 1$

+) Phương trình có vô số nghiệm $\begin{cases} m^2-1=0 \\ -2m^2+m+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$

Vậy $m\neq -1$ thì phương trình luôn có nghiệm

c. Để phương trình có nghiệm duy nhất thì $\begin{cases} m\neq \pm 1 \\ \dfrac{-2m^2+m+1}{m^2-1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \pm 1 \\ \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{-4}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{-4}{5}$

Vậy $m=\dfrac{-4}{5}$

Bài 3: Cho phương trình $m(x+1)-2x=m^2+m-4.$ Tìm m sao cho

a. Phương trình nhận 1 là nghiệm

b. Phương trình có nghiệm

c. Phương trình vô nghiệm

Lời giải

a. Thay x = 1 vào phương trình ta được $m\in\{-1;2\}$

b. Phương trình có nghiệm xảy ra 2 trường hợp là có nghiệm duy nhất hoặc có vô số nghiệm $m(x+1)-2x=m^2+m-4 \Leftrightarrow (m-2)x=m^2-4$

+) Phương trình có nghiệm duy nhất khi $m-2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$

+) Phương trình có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m-2=0 \\ m^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2$

Vậy phương trình có nghiệm với mọi m

c. Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m-2=0 \\ m^2-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$

Bài 4: Tìm $a\in Z$ để phương trình $3(x+2)=ax+4$ có nghiệm nguyên

Lời giải

$3(x+2)=ax+4 \Leftrightarrow (3-a)x=-2$

+) Nếu $3-a=0 \Leftrightarrow a=3$ thì phương trình vô nghiệm.

+) Nếu $3-a \neq 0 \Rightarrow x=\dfrac{-2}{3-a} \in Z \Leftrightarrow 3-a \in U(-2)=\{\pm 1;\pm 2\} \Leftrightarrow a \in \{1;2;4;5\}$

Bài 5: Giải và biện luận các phương trình sau

a. $\dfrac{(m-2)x+3}{x+1}=2m-1$

b. $\dfrac{2a-1}{x-2}=a-2$

c. $\dfrac{mx+1}{x-1}=1$

d. $\dfrac{(m+1)x+m-2}{x+3}=m$

Lời giải

a. Điều kiện: $x \neq -1 \Rightarrow (m-2)x+3=(2m-1)(x+1) \Leftrightarrow (-m-1)x=2m-4$

+) $-m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1 \Rightarrow x=\dfrac{2m-4}{-m-1}$ nghiệm này phải khác -1

$\Leftrightarrow \dfrac{2m-4}{-m-1} \neq -1 \Leftrightarrow \dfrac{2m-4}{-m-1}+1 \neq 0 \Leftrightarrow 2m-4-m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 5$

Vậy với $m \neq -1; m \neq 5 \Rightarrow x=\dfrac{2m-4}{-m-1}$

Với m = 5 phương trình vô nghiệm

+) $-m-1=0 \Leftrightarrow m=-1$ khi đó phương trình trở thành 0x = -5 (vô nghiệm)

b. Điều kiện xác định: $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

$\dfrac{2a-1}{x-2}=a-2 \Leftrightarrow (a-2)x=4a-5$

+) $a-2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2 \Rightarrow x=\dfrac{4a-5}{a-2}$. Xét $\dfrac{4a-5}{a-2} \neq 2 \Leftrightarrow 4a-5 \neq 2(a-2) \Leftrightarrow a \neq \dfrac{3}{2}$

+) $a-200 \Leftrightarrow a=2 \Leftrightarrow 0x=3$ (vô nghiệm). Xét $\dfrac{4a-5}{a-2} \neq 2 \leftrightarrow 4a-5 \neq 2(a-2) \leftrightarrow a \neq \dfrac{3}{2}$

Vậy $a=2; a=\dfrac{3}{2}$ thì phương trình vô nghiệm

$a \neq 2; a \neq \dfrac{3}{2}$ suy ra phương trình có nghiệm $x=\dfrac{4a-5}{a-2}$

c. Điều kiện $x \neq 1$

$\dfrac{mx+1}{x-1}=1 \Leftrightarrow mx+1=x-1 \Leftrightarrow (m-1)x=-2$

+) $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$ phương trình vô nghiệm

+) $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \Rightarrow x=\dfrac{-2}{m-1} \neq 1 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{m-1}-1 \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2-m+1}{m-1} \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-m-1}{m-1} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Vậy $m \neq -1; m \doteq 1$ thì phương trình có nghiệm $x=\dfrac{-2}{m-1}$

Vậy $m=1; m=-1$ phương trình vô nghiệm

d. Điều kiện $x \neq -3$

$$\frac{(m+1)x+m-2}{x+3}=m \Leftrightarrow (m+1)x+m-2=m(x+3) \Leftrightarrow x=2m+2$$

Xét $2m+2 \neq -3 \Leftrightarrow m \neq \frac{-5}{2}$

Vậy $m=\frac{-5}{2}$ phương trình có nghiệm $x=2m+2$

BÀI TẬP VỀ NHÀ:

Bài 1: Giải và biện luận số nghiệm của phương trình sau

a. $m(x-m)=x+(m-2)$ b. $m^2(x+1)-1=(2-m)x$

c. $m^2x+6=4x+3m$ d. $m^2(x-1)+m=x(3m-2)$

Bài 2: Tìm m để mỗi phương trình sau có 1 nghiệm

a. $(x-m)(x-1)=0$ b. $m(m-1)x=m^2-1$

Hướng dẫn

a. $(x-m)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m \end{array}\right. \Rightarrow m=1$

b. $m(m-1)x=m^2-1 \Leftrightarrow m(m-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Vậy $m \neq 0; m \neq 1$ thì phương trình có 1 nghiệm

Bài 3: Tìm m để phương trình sau vô nghiệm : $(m+1)x-(x+2)=0$

Hướng dẫn

$(m+1)x-(x+2)=0 \Leftrightarrow mx-2=0$

Để phương trình vô nghiệm thì $\begin{cases} m=0 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$

Bài 4: Tìm m để phương trình sau có vô số nghiệm : $m^2x-m=4x-2$ (1)

Lời giải

(1) $\Leftrightarrow (m^2-4)x=m-2$ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4=0 \\ m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2$

Bài 5: Với giá trị nào của m thì:

a. $2x-1=5a+4$ có nghiệm dương b. $3(x+2)=ax+4$ có nghiệm lớn hơn -1

c. $(a^2-3a+2)x+3=3a$ có nghiệm duy nhất

Lời giải

a. $2x-1=5a+4 \Leftrightarrow 2x=5a+5 \Leftrightarrow x=\frac{5(a+1)}{2}>0 \Leftrightarrow a>-1$

b. $3(x+2)=ax+4 \Leftrightarrow (3-a)x=-2$

+) $3-a=0 \Leftrightarrow a=3$ thay vào phương trình vô nghiệm

+) $3-a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 3 \Rightarrow x=\frac{-2}{3-a}=\frac{2}{a-3}>-1 \Leftrightarrow \frac{2}{a-3}+1>0 \Leftrightarrow \frac{a-1}{a-3}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>3 \\ a<1 \end{array}\right.$

c. $(a^2-3a+2)x+3=3a \Leftrightarrow (a^2-3a+2)x=3a-3$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow a^2-3a+2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases}$

Bài 6: Tìm a để phương trình có nghiệm nguyên: $2x+a-3=(x+2)a$

Lời giải

$2x+a-3=(x+2)a \Leftrightarrow x=\frac{a+3}{2-a}=\frac{a-2+5}{2-a}=-1+\frac{5}{2-a}$

Để $x \in Z \Rightarrow \frac{5}{2-a} \in Z \Rightarrow \frac{5}{2-a}=k \in z(k \neq 0) \Rightarrow 2-a=\frac{5}{k} \Rightarrow a=2-\frac{5}{k}$ $(k \in Z; k \neq 0)$

(Vì a có thể không nguyên)

+) Nếu a nguyên $\Rightarrow \frac{5}{k} \in Z \Rightarrow 5 \vdots k \Rightarrow k=\pm 1; k=\pm 5$

Bài 7: Cho phương trình: $\frac{2-3m}{2-x}=m+1$ (1) . Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 2$

$\frac{2-3m}{2-x}=m+1 \Leftrightarrow 2-3m=(m+1)(2-x) \Leftrightarrow (m+1)x=5m$

+) $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1 \Rightarrow x=\frac{5m}{m+1}$. Vì $x \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ \frac{5m}{m+1} \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}$

Bài 8: Cho phương trình: $\frac{2x+1}{2x-m}=\frac{x+3}{x-1}$. Tìm m để phương trình vô nghiệm

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 1; x \neq \frac{m}{2}$

$\frac{2x+1}{2x-m}=\frac{x+3}{x-1} \Leftrightarrow (2x+1)(x-1)=(x+3)(2x-m) \Leftrightarrow (m-7)x=1-3m$ (1)

+) TH1: m ≠ -7 thì (1) $\Leftrightarrow x=\frac{1-3m}{m-7}$. Vì $x \neq \frac{m}{2}; x \neq 1$ nên ta có các trường hợp sau:

Với $x=\frac{m}{2}\Leftrightarrow\frac{1-3m}{m-7}=\frac{m}{2}\Leftrightarrow 2-6m=m^2-7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=2\end{array}\right.$

Với $x=1\Leftrightarrow\frac{1-3m}{m-7}=1\Leftrightarrow 1-3m=m-7\Leftrightarrow m=2$

Vậy phương trình vô nghiệm khi $m\in\{-1;2;7\}$

Bài 9: Giải và biện luận phương trình sau: $\frac{m}{x-m}+\frac{3m^2-4m+3}{m^2-x^2}=\frac{1}{x+m}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x\neq\pm m$

$$\frac{m}{x-m}+\frac{3m^2-4m+3}{m^2-x^2}=\frac{1}{x+m}$$
$$\Leftrightarrow\frac{m}{x-m}-\frac{3m^2-4m+3}{(x-m)(x+m)}=\frac{1}{x+m}$$
$$\Leftrightarrow m(x+m)-3m^2+4m+3=x-m$$
$$\Leftrightarrow(m-1)x=(m-1)(2m-3)$$

+) $m-1=0\Leftrightarrow m=1\Rightarrow 0.x=0$

Vì $x\neq\pm m\Rightarrow x\neq\pm1\Rightarrow m=1$ phương trình nghiệm đúng với mọi $x\neq\pm1$

Hay $S=\{x\in R/x\neq\pm1\}$

+) $m-1\neq0\Leftrightarrow m\neq1\Rightarrow x=2m-3$ vì điều kiện $x\neq\pm m$

+) $x\neq m\Leftrightarrow 2m-3\neq m\Leftrightarrow m\neq3$

+) $x\neq -m\Leftrightarrow 2m-3\neq -m\Leftrightarrow m\neq1$

Vậy $m\neq1; m\neq3$ phương trình đã cho có nghiệm $x=2m-3$

B. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Dạng tổng quát: $ax+b\geq0\Leftrightarrow ax\geq -b\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a>0\Leftrightarrow x\geq\frac{-b}{a}\\a<0\Leftrightarrow x\leq\frac{-b}{a}\end{array}\right.$

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau

a. $\frac{4x-1}{2}+x\geq\frac{3x-2}{3}$

b. $\frac{10x+3}{4}<1+\frac{6-5x}{8}$

c. $ax+b\geq0$

Lời giải

a. $\frac{4x-1}{2}+x\geq\frac{3x-2}{3}\Leftrightarrow 2x-\frac{1}{2}+x\geq x-\frac{2}{3}\Leftrightarrow 2x\geq\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\Leftrightarrow x\geq-\frac{1}{8}$

b. $\frac{10x+3}{4}<1+\frac{6-5x}{8}\Leftrightarrow\frac{5x}{2}+\frac{5x}{8}<1+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{25x}{8}<1\Leftrightarrow x<\frac{8}{25}$

c. $ax+b\geq 0\Leftrightarrow ax\geq -b\quad(1)$

+) Nếu $a\neq 0$

+) $a>0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow x\geq\frac{-b}{a}$

+) $a<0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow x\leq\frac{-b}{a}$

+) Nếu $a=0\Leftrightarrow 0x\geq -b$

+) $-b\leq 0$ thì bất phương trình vô số nghiệm

+) $-b>0$ thì bất phương trìn vô nghiệm

Ví dụ 2: Giải các hệ bất phương trình sau

a. $\begin{cases}-2x+\frac{3}{5}>\frac{2x-7}{3}\\ x-\frac{1}{2}<5\frac{(3x-1)}{2}\end{cases}$

b. $\begin{cases}\frac{3x+1}{2}-\frac{3-x}{3}\leq\frac{x+1}{4}-\frac{2x-1}{3}\\ 3-\frac{2x+1}{5}>x+\frac{4}{3}\end{cases}$

c. $\begin{cases}15x-2>3x+\frac{1}{3}\\ 2(x-4)<\frac{3x-14}{2}\end{cases}$

d. $\begin{cases}2x-1>x-5\\ (1+2x)^2\leq(2x-3)^2\end{cases}$

Hướng dẫn

a. $\begin{cases}-2x+\frac{3}{5}>\frac{2x-7}{3}\\ x-\frac{1}{2}<5\frac{(3x-1)}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{11}{10}\\ x>\frac{4}{13}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{4}{13}<x<\frac{11}{10}$

b. $\begin{cases}\frac{3x+1}{2}-\frac{3-x}{3}\leq\frac{x+1}{4}-\frac{2x-1}{3}\\ 3-\frac{2x+1}{5}>x+\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\frac{13}{27}\\ x<\frac{22}{21}\end{cases}\Leftrightarrow x\leq\frac{13}{27}$

***) Giải và biện luận bất phương trình**

$ax+b\geq 0\Leftrightarrow ax\geq -b\quad(1)$

+) Nếu $a\neq 0$

+) $a>0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow x\geq\frac{-b}{a}$

+) $a<0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow x\leq\frac{-b}{a}$

+) Nếu $a=0\Leftrightarrow 0x\geq -b$

+) $-b\leq 0$ thì bất phương trình vô số nghiệm

+) $-b>0$ thì bất phương trìn vô nghiệm

Bài 1: Giải và biện luận các bất phương trình sau

a. $m(x-m)\geq 3x-9$

b. $mx+6<2x+3m$

c. $(x+m)m+x>3x+4$

d. $3(x+m)-(m+1)^3\geq -1-mx$

Lời giải

a. $m(x-m)\geq 3x-9 \Leftrightarrow (m-3)x\geq m^2-9 \quad (1)$

+) $m-3>0 \Leftrightarrow m>3$ thì $(1)\Leftrightarrow x\geq \dfrac{m^2-9}{m-3}=m+3$

+) $m-3<0 \Leftrightarrow m<3 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow x\leq m+3$

+) $m-3=0 \Leftrightarrow m=3 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow 0x\geq 0$ (vô số nghiệm)

b. $mx+6<2x+3m \Leftrightarrow (m-2)x<3m-6 \quad (1)$

+) $m-2>0 \Leftrightarrow m>2 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow x<\dfrac{3m-6}{m-2}=3$

+) $m-2<0 \Leftrightarrow m<2 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow x>3$

+) $m-2=0 \Leftrightarrow m=2 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow 0x<0$ vô nghiệm

c. $(x+m)m+x>3x+4 \leftrightarrow (m-2)x>-m^2+4 \quad (1)$

+) $m-2>0 \Leftrightarrow m>2 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow x>\dfrac{-m^2+4}{m-2}=-m-2$

+) $m-2<0 \Leftrightarrow m<2 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow x<-m-2$

+) $m-2=0 \Leftrightarrow m=2 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow 0x>0$ suy ra phương trình vô nghiệm

d. $3(x+m)-(m+1)^3\geq -1-mx \Leftrightarrow (m+3)x\geq m^3+3m^2 \quad (1)$

+) $m+3>0 \Leftrightarrow m>-3 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow x\geq m^2$

+) $m+3<0 \Leftrightarrow m<-3 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow x\leq m^2$

+) $m+3=0 \Leftrightarrow m=-3 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow 0x\geq 0$ vô số nghiệm.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

A. Phương trình bậc cao đưa về dạng tích

1. Phương trình bậc cao đưa về phương trình tích

- Dùng phương pháp nhẩm nghiệm

- Dùng định lý Bezut: Nếu f(x) = 0 có nghiệm x = a thì $f(x)=(x-a).h(x)$

- $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0=0$

Nếu f(x) có nghiệm hữu tỷ $x=\dfrac{p}{q}\Rightarrow \begin{cases} p\in U(a_0) \\ q\in U(a_n) \end{cases}$

- Nếu tổng các hệ số của đa thức bằng 1 thì có nghiệm x = 1

- Nếu tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ thì ó nghiệm x = 1

- Có thể sử dụng lược đồ Hoocne

VD: $2x^4-3x^3-3x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+3)(x^2-x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{-3}{2}\end{array}\right.$

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $x^2-4x+3=0$ b. $x^2-4x+1=0$ c. $x^3+2x^2-9x-18=0$

d. $2x^3-3x^2+x+6=0$ e. $2x^3-3x^2+3x-1=0$ f. $x^4-2x^2-3x-2=0$

Lời giải

a. $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3\end{array}\right.$

b. $x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-3=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$

c. Ta có:

$x^3+2x^2-9x-18=0 \Leftrightarrow (x^3-3x^2)+(5x^2-15x)+(6x-18)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+5x+6)=0 \Leftrightarrow x\in\{\pm3;-2\}$

d. $2x^3-3x^2+x+6=0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow (x+1)\left[\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{23}{16}\right]=0 \Leftrightarrow x=-1$

e. $2x^3-3x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2-x+1) \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

f. $x^4-2x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3-x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow x\in\{-1;2\}$

Bài 2: (HSG – Đông Anh – 2003)

Giải các phương trình sau

a. $x^2-4x+3=0$ b. $x^3-2x^2-3x+10=0$

Lời giải

a. $x^2-4x-3=0 \Leftrightarrow (2x+1)^2-2^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3/2 \\ x=1/2\end{array}\right.$

b. $x^3-2x^2-3x+10=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+4x-5)=0 \Leftrightarrow x=-2$

Bài 3: Giải các phương trình sau

a. $x^4+x^2+6x-8=0$ b. $(x-1)^3+(3x+3)^3=27x^3+8$ c. $(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12$

d. $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)=24$ e. $(x^2+x+1)^2=3(x^4+x^2+1)$ f. $x^5=x^4+x^3+x^2+x+2$

Lời giải

a. Ta có tổng các hệ số = 0 nên có nhân tử là x – 1

$$x^4+x^2+6x-8=0 \Leftrightarrow (x^4-x^3)+(x^3-x^2)+(2x^2-2x)+(8x-8)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3+x^2+2x+8)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2-x+4)=0 \Leftrightarrow x\in\{1;-2\}$$

b. Ta có:

$$(x-1)^3+(3x+3)^3=27x^3+8 \Leftrightarrow 6x^3-11x^2-19x-6=0 \Leftrightarrow (6x^3-18x^2)+(7x^2-21x)+(2x-6)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(6x^2+7x+2)=0 \Leftrightarrow (x-3)(2x+1)(3x+2)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{3;\frac{-1}{2};\frac{-2}{3}\right\}$$

c. $(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12 \Leftrightarrow 2x^3+10x-12=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+6)=0 \Leftrightarrow x=1$

d. Ta có:

$$(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)=24 \Leftrightarrow \left[(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)+1\right]-25=0 \Leftrightarrow (x^2+5x-1)^2-5^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+4) \Leftrightarrow (x-1)(x+6)=0 \Leftrightarrow x\in\{-1;-4;1;-6\}$$

e. Ta có:

$$(x^2+x+1)^2=3(x^4+x^2+1) \Leftrightarrow (x^2+x+1)^2-3(x^4+x^2+1)=0 \Leftrightarrow (x^2+x+1)^2-3(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x+1)\left[x^2+x+1-3(x^2-x+1)\right]=0 \Leftrightarrow (x^2+x+1)(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

f. Ta có:

$$x^5=x^4+x^3+x^2+x+2 \Leftrightarrow x^5-x^4-x^3-x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x^5-1)-(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)-(x^4+x^3+x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^4+x^3+x^2+x+1=0(*) \end{array}\right.$$

$$(*) \Leftrightarrow (x^4+x^3)+(x+1)+x^2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3+1)+x^2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2-x+1)+x^2=0 \quad (VN)$$

Bài 4: Dùng cách đặt ẩn phụ giải các phương trình sau

a. $(x^2+1)^3+(1-3x)^2=(x^2-3x+2)^2(1)$

b. $(x^2+3x-4)^3+(2x^2-5x+3)^3=(3x^2-2x-1)^3$

c. $-x^4+2x^2+3=0$

d. $x^4+8x^3+15x^2-4x-2=0$

e. $x^2+2x+2|x+1|-2=0$

f. $(x-2)(x+2)(x^2-10)=72$

g. $(2x-5)^3-(x-2)^3=(x-3)^3$

Lời giải

Đặt $a=x^2+1; b=1-3x$ khi đó:

$$a^3+b^3=(a+b)^3 \Leftrightarrow a^3+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \Leftrightarrow 3ab(a+b)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-b \\ b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+1=0 & (VN) \\ x^2+1=3x-1 & (*) \\ x=\dfrac{1}{3} & \end{array}\right.$$

$$(*) \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x\in\{1;2\} \Rightarrow x\in\left\{1;2;\frac{1}{3}\right\}$$

b. $(x^2+3x-4)^3+(2x^2-5x+3)^3=(3x^2-2x-1)^3$

Đặt $a=x^2+3x-4; b=2x^2-5x+3$ khi đó:

$$a+b=3x^2-2x-1 \Rightarrow a^3+b^3=(a+b)^3 \Leftrightarrow ab(a+b)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \\ a=-b \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x\in\{1;-4\} \\ 1;3/2 \\ 1;-1/3 \end{array}\right. \Rightarrow x\in\left\{-4;1;\frac{-1}{3};\frac{3}{2}\right\}$$

c. Đặt $t=x^2 (t\ge 0) \Rightarrow -t^2+2t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=-1 & (loai) \\ t=3 & (tm) \end{array}\right. \Rightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

d. $x^4+8x^3+15x^2-4x-2=0 \Leftrightarrow x^4+8x^3+16x^2-x^2-4x-2=0 \Leftrightarrow (x^2+4x)^2-(x^2+4x)-2=0$

Đặt $t=x^2+4x \Rightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x+1=0 \\ x^2+4x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+2)^2=3 \\ (x+2)^2=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\pm\sqrt{3} \\ x=-2\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

e. $x^2+2x+2|x+1|-2=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+2|x+1|-3=0 \Leftrightarrow y^2+2y-3=0 \quad (y=|x+1|; y\ge 0)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-3 \end{array}\right. \Rightarrow |x+1|=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

f. Ta có:

$$(x-2)(x+2)(x^2-10)=72 \Rightarrow (y-4)(y-10)=72 \ \left(y=x^2, y\ge 0\right) \Leftrightarrow y^2-14y-32=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=16 \\ y=-2 \end{array}\right. \Rightarrow x=\pm 4$$

g. Đặt $2x-5=a; x-2=b$ khi đó:

$$a-b=x-3 \Rightarrow a^3-b^3=(a-b)^3 \Leftrightarrow 3ab(a-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left\{3;2;\frac{5}{2}\right\}$$

B. Phương trình dạng: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m \quad (1) \quad (a+d=b+c)$

$$(1) \Leftrightarrow (x+a)(x+d)(x+b)(x+c)=m \Leftrightarrow \left[x^2+(a+d)x+ad\right]\left[x^2+(b+c)x+bc\right]=m$$

Đặt $t=x^2+(a+d)x \Rightarrow (t+ad)(t+bc)=0 \Rightarrow t=... \Rightarrow x=...$

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $x(x+1)(x-1)(x+2)=24 \quad (1)$

b. $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6)=180$

c. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$

d. $(4x+3)^2(2x+1)(x+1)=75$

e. $2x(8x-1)^2(4x-1)=9$

f. $(12x+7)^2(3x+2)(2x+1)=3$

Lời giải

a. Ta có:

$$x(x+1)(x-1)(x+2)=24 \Leftrightarrow (x^2+x)(x^2+x-2)=24 \Leftrightarrow t(t-2)=24 \Leftrightarrow t^2-2t-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=-4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-6=0 \\ x^2+x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{2;-3\}$$

b. $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6)=180 \Leftrightarrow x^2-3x-14=\pm 14 \Leftrightarrow x \in \{7;3;0;-4\}$

c. Ta có:

$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680 \Leftrightarrow (x^2-11x+28)(x^2-11x+30)=1680 \Leftrightarrow (y+1)(y-1)=1680 \Leftrightarrow y=\pm 41$

+) $y=41 \Rightarrow x^2-11x-12=0 \Leftrightarrow x \in \{1;-12\}$

+) $y=-41 \Rightarrow x^2-11x+70=0$ (vô nghiệm)

d. $(4x+3)^2(2x+1)(x+1)=75 \Leftrightarrow (4x+3)(4x+3)(4x+2)(4x+4)=8.75=24.25$

Đặt $t=(4x+3)^2$ ta được:

$(4x+2)(4x+4)=(4x+3)^2-1=t-1 \Rightarrow t(t-1)=24.25 \Leftrightarrow t^2-t=25^2-25 \Leftrightarrow (t-25)(t+24)=0$

$$\Leftrightarrow t=25 (t \ge 0) \Leftrightarrow (4x+3)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+3=5 \\ 4x+3=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

e. Nhân với 8 ta được: $8x(8x-1)(8x-1)(8x-2)=72$

Đặt $8x-1=y$ ta được:

$$(y+1).y^2.(y-1)=72 \Leftrightarrow y^2(y^2-1)=72 \Leftrightarrow y^4-y^2-72=0 \Leftrightarrow (y^2-9)(y^2+8)=0 \Leftrightarrow y^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{-1}{4} \end{array}\right.$$

f. $(12x+7)^2(3x+2)(2x+1)=3$

Nhân hai vế với 24 ta được: $(12x+7)^2(2x+8)(12x+6)=72$

Đặt $12x+7=y$ ta được:

$$(y-1).y.y(y+1)=72 \Leftrightarrow y^4-y^2-72=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=9 \\ y^2=-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1}{3} \\ x=\dfrac{-5}{6} \end{array}\right.$$

Bài 2: Giải các phương trình sau

a. $(x^2-3x)(x^2+7x+10)=216$

b. $(2x^2-7x+3)(2x^2+x-3)+9=0$

Lời giải

a. Ta có:

$(x^2-3x)(x^2+7x+10)=216 \Leftrightarrow x(x-3)(x+2)(x+5)=216 \Leftrightarrow (x^2+2x)(x^2+2x-15)=216$

$\Leftrightarrow y(y-15)-216=0 \Leftrightarrow y^2-15y-216=0 \Leftrightarrow (y-24)(y+9)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=24 \\ y=-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-24=0 \\ x^2+2x+9=0 \quad (vo\ \ nghiem) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=4 \end{array}\right.$$

b. Ta có:

$(2x^2-7x+3)(2x^2+x-3)+9=0 \Leftrightarrow (x-3)(2x-1)(2x+3)(x-1)+9=0 \Leftrightarrow (2x^2-3x+1)(2x^2-3x-9)+9=0$

$$\Leftrightarrow t(t+10)+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-3x-8=0 \\ 2x^2-3x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} .... \\ ..... \end{array}\right.$$

Bài 3: HSG Bắc Giang 30/03/2013.

Giải phương trình sau: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2)=4$

Lời giải

+) Nếu $x \geq 2$ thì:

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=4 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)=4 \Rightarrow x^4-5x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \quad (loai) \\ x=\sqrt{5} \quad (tm) \\ x=-\sqrt{5} \quad (loai) \end{array}\right.$$

+) Nếu $x < 2$ thì:

$(2-x)(x-1)(x+1)(x+2)=4 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=-4 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)=-4$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2+8=0 \Leftrightarrow \left(x^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=0 \quad (vo\ \ nghiem)$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\sqrt{5}$

C. Phương trình dạng: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=mx^2 \quad (ad=bc)$

Cách 1: Đặt $t=(x+a)(x+b)$

Ví dụ 1: Giải phương trình sau:

a. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+6)=30x^2$ b. $(x+2)(x+3)(x+6)(x+9)=80x^2$

Lời giải

a. Đặt $t=x^2+7x+12 \Rightarrow x^2+8x+12=t+x$ ta được:

$(1) \Leftrightarrow (t+x)t=30x^2 \Leftrightarrow t^2+tx-30x^2=0 \Leftrightarrow (t^2-5tx)+(6tx-30x^2)=0$

$$\Leftrightarrow (t-5x)(t+6x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5x \\ t=-6x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x+12=0 \quad (vo\ \ nghiem) \\ x^2+13x+12=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-12 \end{array}\right.$$

b. $(x+2)(x+3)(x+6)(x+9)=80x^2 \Leftrightarrow (x^2+11x+18)(x^2+9x+18)=80x^2 \Leftrightarrow x \in \{-1;-8\}$

Cách 2:

+) Kiểm tra xem $x = 0$ có là nghiệm hay không?

+) Xét $x \neq 0 \Rightarrow pt \Leftrightarrow \left[x^2+(a+d)x+ad\right]\left[x^2+(b+c)x+bc\right]=mx^2$

Chia cả hai vế cho x^2 ta được:

$$\frac{x^2+(a+d)x+ad}{x}.\frac{x^2+(b+c)x+bc}{x}=m \Leftrightarrow (x+\frac{ad}{x}+a+d)(x+\frac{bc}{x}+b+c)=m$$

$\Leftrightarrow (t+d+a)(t+b+c)=m \Rightarrow t=... \Rightarrow x=...$

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)=3x^2$

Lời giải

$$4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)=3x^2$$
$$\Leftrightarrow 4(x+5)(x+12)(x+6)(x+10)=3x^2$$
$$\Leftrightarrow 4(x^2+17x+60)(x^2+10x+60)=3x^2$$

Do x = 0 không thỏa mãn phương trình nên ta chia cả hai vế cho x^2, được:

$$4(x+17+\frac{60}{x})(x+16+\frac{60}{x})=3$$

Đặt $t=x+\frac{60}{x}$ ta được:

$$4(t+17)(t+16)=3 \Leftrightarrow 4t^2+132t+1085=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{-31}{2} \\ t=\frac{-35}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{60}{x}=\frac{-31}{2} \\ x+\frac{60}{x}=\frac{-35}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+31x+120=0 \\ 2x^2+35x+120=0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left\{-8;\frac{-15}{2}\right\} \\ x \in \{....\} \end{array}\right.$$

D. Phương trình dạng: $(x+a)^4+(x+b)^4=m$

Cách giải: Đặt $t=x+\frac{a+b}{2}$ ta được:

$$x+a=t+a-\frac{a+b}{2}=t+\frac{a-b}{2}=t+\alpha;$$
$$x+b=t+b-\frac{a+b}{2}=t-\frac{a-b}{2}=t-\alpha$$

$(x+a)^4+(x+b)^4=m \Leftrightarrow (t+\alpha)^4+(t-\alpha)^4=m \Rightarrow t=..... \Rightarrow x=.....$

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $(x-2)^4+(x-4)^4=16$

b. $(x+1)^4+(x+3)^4=16$

c. $(4-x)^5+(x-2)^5=32$

d. $(x-7)^4+(x-8)^4=(15-2x)^4$

e. $(x+6)^4+(x+8)^4=272$

Lời giải

a. Đặt t = x – 3 ta được: $(t+1)^4+(t-1)^4=16 \Leftrightarrow t^4+6t^2-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2=1 \\ t^2=-7 \ (loai) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right.$

b. Đặt t = x + 2 ta được:

$$(t-1)^4+(t+1)^4=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

c. $(4-x)^5+(x-2)^5=32 \Leftrightarrow (x-2)^5-(x-4)^5=32$

Đặt y = x – 3 suy ra: $x-2=y+1; x-4=y-1$ ta được:

$(y+1)^5-(y-1)^5=32 \Leftrightarrow y^5+5y^4+10y^3+10y^2+5y+1$

$-(y^5-5y^4+10y^3-10y^2+5y-1)-32=0 \Leftrightarrow y^4+2y^2-3=0 \Leftrightarrow y=\pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right.$

d. Đặt $\begin{cases} x-7=a \\ x-8=b \\ 15-2x=c \end{cases} \Rightarrow -c=2x-15 \Rightarrow a+b=-c$ ta được:

$$(x-7)^4+(x-8)^4=(15-2x)^4 \Leftrightarrow a^4+b^4=c^4 \Leftrightarrow a^4+b^4-c^4=0 \Leftrightarrow a^4+b^4-(a+b)^4=0$$

$$\Leftrightarrow 4ab\left(a^2+\frac{3ab}{2}+b^2\right)=0 \Leftrightarrow 4ab\left[\left(a+\frac{3}{4}b\right)^2+\frac{7}{16}b^2\right]=0 \Leftrightarrow ab=0$$

(do $\left(a+\frac{3}{4}b\right)^2+\frac{7}{16}b^2 \geq 0$ nhưng không xảy ra dấu “ = “)

$(x-7)(x-8)=0 \Leftrightarrow x \in \{7;8\}$

e. $x \in \{-4;-10\}$

E. Phương trình dạng: $ax^4 + bx^3 + cx + a = 0$ (phương trình đối xứng)

Cách giải: $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \leftrightarrow a(x^4+1)+bx(x^2+1)+cx^2=0$

Đặt $t=x^2+1$ hoặc $t=x+\frac{1}{x}$

Ví dụ: Giải phương trình sau $2x^4-3x^3-x^2-3x+2=0$

Lời giải

$2x^4-3x^3-x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow 2(x^4+1)-3x(x^2+1)-x^2=0 \leftrightarrow 2(x^2+1)^2-3x(x^2+1)-5x^2=0$

Đặt $t=x^2+1$ ta được:

$2t^2-3tx-5x^2=0 \Leftrightarrow (t-x)(2t-5x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+x=0 \\ 2t-5x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x+1=0 \ (vo\ nghiem) \\ 2t-5x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left\{2;\frac{1}{2}\right\}$

F. Phương trình dạng: $ax^5 + bx^4 + cx^3 + bx + a = 0$ (phương trình đối xứng)

- Nhận thấy x = -1 là nghiệm của phương trình vậy vế trái của phương trình có 1 nhân tử là x + 1

Sau đó phương trình quay trở về dạng E

Ví dụ: Giải các phương trình sau

a. $2x^5-x^4-4x^3-4x^2-x+2=0$ b. $6x^5-11x^4-15x^3-15x^2-11x+6=0$

c. $x^5-x^4+3x^3+3x^2-x+1=0$

Lời giải

a. $2x^5-x^4-4x^3-4x^2-x+2=0 \Leftrightarrow (x+1)\underbrace{(2x^4-3x^3-x^2-3x+2)=0}_{dang\ E} \Leftrightarrow x\in\left\{-1;2;\frac{1}{2}\right\}$

b. Ta có:

$6x^5-11x^4-15x^3-15x^2-11x+6=0 \Leftrightarrow (6x^5+6x^4)-(17x^4+17x^3)+(2x^3+2x^2)-(17x^2+17x)+6x+6=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(6x^4-17x^3+2x^2-17x+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ 6x^4-17x^3+2x^2-17x+6=0\ \ (*)\end{array}\right.$

$(*)\Leftrightarrow 6(x^2+1)^2-17(x^2+1)-10x^2=0$

Đặt $t=x^2+1$ ta được:

$6t^2-17tx-10x^2=0 \Leftrightarrow 6t^2+3tx-20tx-10x^2=0 \Leftrightarrow (2t+x)(3t-10x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+x+2=0 \\ 3x^2-10x+3=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 3x^2-9x-x+3=0 \Leftrightarrow 3x(x-3)-(x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{-1;3;\frac{1}{3}\right\}$

c. Ta có:

$x^5-x^4+3x^3+3x^2-x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^4-2x^3+5x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^4-2x^3+5x^2-2x+1=0\ \ (*)\end{array}\right.$

Giải (*):

Với x = 0 phương trình vô nghiệm.

Với x ≠ 0 ta có:

$(*)\Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{y}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}-1\right)^2+2=0\ (VN)$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{-1\}$

G. Phương trình dạng: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\ \left[\frac{e}{a}=\left(\frac{d}{b}\right)^2\right]$

- Phương trình ở trường hợp 4 là trường hợp đặc biệt của phương trình này

- Cách giải:

+) Đặt $t=x^2+1$

+) Xét $x\neq 0$, chia cả hai vế cho $x^2 \Rightarrow ax^2+bx+c+\frac{d}{x}+\frac{e}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(ax^2+\frac{e}{x^2}\right)+\left(bx+\frac{d}{x}\right)+c=0$

Đặt $t = x + \frac{m}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{m^2}{x^2} + 2m \Rightarrow$ phương trình bậc hai $\Rightarrow t \Rightarrow x$

Ví dụ: Giải các phương trình sau

a. $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 24x + 9 = 0$

b. $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$

c. $2x^4 + 3x^3 - 27x^2 + 6x + 8 = 0$

d. [HSG Nam Trực – 2015] $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$

e. $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$

Lời giải

a. Do x = 0 không thỏa mãn phương trình nên ta chia cả hai vế cho x², được:

$$x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 24x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 21 - \frac{24}{x} + \frac{9}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - 8\left(x + \frac{3}{x}\right) + 21 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{x}\right)^2 - 8\left(x + \frac{3}{x}\right) + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{3}{x} = 3 \\ x + \frac{3}{x} = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 3 = 0 \ (vo\ nghiem) \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \mathrm{x} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

b. Ta có:

$$2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 21t + 54 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = \frac{9}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ 2x^2 - 9x + 10 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left\{1; 2; 5; \frac{5}{2}\right\}$$

c. Ta có:

$$2x^4 + 3x^3 - 27x^2 + 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + 3\left(x + \frac{2}{x}\right) - 35 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{2}{x} = \frac{7}{2} \\ x + \frac{2}{x} = -5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 7x + 4 = 0 \\ x^2 + 5x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}; \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$$

d. Ta có:

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 3y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = -1 \ (vo\ nghiem) \\ x + \frac{1}{x} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1\}$

e. +) Với x = 0 không là nghiệm của phương trình

+) Với x ≠ 0 chia cả hai vế cho x^2 ta được: $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+25\left(x-\frac{1}{x}\right)+12=0$

Đặt $y=x-\frac{1}{x}\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$ ta được:

$$6y^2+25y+24=0\Leftrightarrow 6y^2+9y+16y+24=0\Leftrightarrow (2y+3)(3y+8)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{x}=\frac{-3}{2}\\ x-\frac{1}{x}=\frac{-8}{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-2=-3x\\ 3x^2-3=-8x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2;x=\frac{1}{2}\\ x=-3;x=\frac{1}{3}\end{array}\right.\Rightarrow S=\left\{-2;\frac{1}{2};-3;\frac{1}{3}\right\}$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ BÀI

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $\frac{1}{(x+29)^2}+\frac{1}{(x+30)^2}=\frac{13}{36}$

b. $x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1=0$

Lời giải

a. Điều kiện: x ≠ -29, x ≠ -30

$$\frac{1}{(x+29)^2}+\frac{1}{(x+30)^2}=\frac{13}{36}\Leftrightarrow\frac{1}{(x+29)^2}+\frac{1}{(x+30)^2}-\frac{2}{(x+29)(x+30)}+\frac{2}{(x+29)(x+30)}=\frac{13}{36}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x+29}-\frac{1}{x+30}\right)^2+\frac{2}{(x+29)(x+30)}=\frac{13}{36}\Leftrightarrow\left[\frac{1}{(x+29)(x+30)}\right]^2+\frac{2}{(x+29)(x+30)}+1=\frac{13}{36}+1$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{1}{(x+29)(x+30)}+1\right]^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2$$

+) $\frac{1}{(x+29)(x+30)}=\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}\Leftrightarrow (x+29)(x+30)-6=0\Leftrightarrow x^2+59x-864=0\Leftrightarrow x\in\{-27;-32\}$

+) $\frac{1}{(x+29)(x+30)}=\frac{-13}{6}\Leftrightarrow x^2+59x+870+\frac{6}{13}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{59}{2}\right)^2+870+\frac{6}{13}-\left(\frac{59}{2}\right)^2=0$ *(vo nghiem)*

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{-27;-32\}$

b. $x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1=0$

+) x = 0 không là nghiệm của phương trình

+) Chia cả hai vế cuả phương trình cho x^3 ta được:

$$x^3-3x^2+6x-7+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0\Leftrightarrow\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2;\ x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x.\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) = t^3 - 3t$

Thay vào phương trình ta được:

$$t^3 - 3t - 3(t^2 - 2) + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \quad (VN)$$

CHUYÊN ĐỀ 5: ĐỒNG NHẤT THỨC

A. Các bài toán về biểu thức nguyên

1. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

2. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1})$

3. $a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - ... - b^{2n-1})$

4. $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + b^{n-1})$

5. Nhị thức Newton: $(a+b)^n = a^n + n.a^{n-1}.b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + ... + b^n$

Bài 1: Cho a + b + c = 0 và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Tính $A = a^4 + b^4 + c^4$

Lời giải:

Ta có: $a + b + c = 0 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$

$\Leftrightarrow 14 = -2(ab + bc + ca) \Rightarrow ab + bc + ca = -7 \quad (1)$

Lại có: $a^2 + b^2 + c^2 = 14 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = 14^2 = 169 \quad (2)$

Từ (1) suy ra:

$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2ab^2c + 2a^2bc + 2abc^2 = 49 \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) = 49$

$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 49 \Rightarrow (2): a^4 + b^4 + c^4 = 14^2 - 2.49 = 98$

Bài 2: Cho x + y + z = 0 và xy + yz + xz = 0. Tính $A = (x-1)^{2019} + y^{2020} + (z+1)^{2021}$

Lời giải

Từ : $x + y + z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$

$\Rightarrow A = -1^{2019} + 0^{2020} + 1^{2021} = 0$

Bài 3 : Cho x + y + z = 0 , chứng minh rằng

a. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$ b. $5(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = 6(x^5 + y^5 + z^5)$

c. $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Lời giải:

a. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \quad (1)$

$x+y+z=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx) \Rightarrow (x^2+y^2+z^2)^2=4(xy+yz+zx)^2 \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra :

$x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xy^2z+2x^2yz+2xyz^2)$

$=4[x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+\underbrace{2(x+y+z)}_{=0}]=4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \Rightarrow x^4+y^4+z^4=2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

Thay vào (1), ta được : $(x^2+y^2+z^2)^2=2(x^4+y^4+z^4)$

b. $\frac{1}{5}VT=x^5+y^5+z^5+x^2y^2(x+y)+x^2z^2(x+z)+y^2z^2(y+z)$

Từ x + y + z = 0 suy ra :

$x+y=-z; x+z=-y; y+z=-x \Rightarrow \frac{1}{5}VT=x^5+y^5+z^5-xyz(xy+yz+zx) \quad (1)$

$x+y+z=0 \Rightarrow (x+y+z)^2=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx=\frac{x^2+y^2+z^2}{-2}$

Theo câu a, ta có : $x^3+y^3+z^3=3xyz$ khi x + y + z = 0

$\Rightarrow -(xy+yz+zx).xyz=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}.\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \quad (2)$

Thay vào (1), ta được : $5(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)=6(x^5+y^5+z^5) \quad (*)$

c. Ta có : $x^3+y^3+z^3=3xyz$, thay vào (*), ta được :

$5.3xyz(x^2+y^2+z^2)=6(x^5+y^5+z^5) \Rightarrow 5xyz(x^2+y^2+z^2)=2(x^5+y^5+z^5) \quad (dpcm)$

Bài 4 : Chứng minh rằng

a. $2(a^3+b^3+c^3-3abc)=(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

b. $(a+b)(b+c)(c+a)+4abc=c(a+b)^2+a(b+c)^2+b(c+a)^2$

Lời giải

a. $VP=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\frac{1}{2}VT=a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab]=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \Rightarrow VT=VP$

b. $VT=6abc+ca^2+ac^2+ab^2+a^2b+bc^2+b^2c$

$VP=6abc+ca^2+ac^2+ab^2+a^2b+bc^2+b^2c=VT$

Bài 5 : Cho a + b + c = 4m. Chứng minh rằng

a. $2ab+b^2+a^2-c^2=16m^2-8mc$

b. $\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2+\left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2+\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)^2=a^2+b^2+c^2-4m^2$

Lời giải:

a. $VT=(a+b)^2-c^2=(4m-c)^2-c^2=16m^2-8mc=VP$

b. Từ $a+b+c=4m\Rightarrow a+b-c=4m-2c\Rightarrow \dfrac{a+b-c}{2}=2m-c$

Tương tự:

$VT=(2m-c)^2+(2m-b)^2+(2m-a)^2=a^2+b^2+c^2+12m^2-4m(a+b+c)=a^2+b^2+c^2-4m^2=VP$

Bài 6:

a. Cho $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz \qquad (*)$

Chứng minh rằng: $x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=(x+y+z)^{2019}$

b. Nếu $x+y+z\,\vdots\, 6$. Chứng minh rằng: $A=(x+y)(y+z)(z+x)-2xyz\,\vdots\, 6$

Lời giải

a. Theo (*) $\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz=0$

$\Leftrightarrow xy^2+x^2y+xyz+xyz+y^2z+z^2y+x^2z+xz^2+xyz-xyz=0$

$\Leftrightarrow xy(x+y)+yz(x+y)+z^2(x+y)+xz(x+y)=0\Leftrightarrow (x+y)(xy+yz+z^2+xz)=0$

$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0\\ y+z=0\\ z+x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y\\ y=-z\\ z=-x\end{array}\right.$$

Giả sử: $x=-y\Rightarrow x^{2013}=-y^{2013}\Rightarrow x^{2013}+y^{2013}+z^{2013}=z^{2013};(x+y+z)^{2013}=z^{2013}\Rightarrow dpcm$

b. Theo câu a, ta có:

$(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz\Rightarrow A=\dfrac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{3}-xyz$

Vì $x+y+z\,\vdots\, 6\Rightarrow x+y+z$ là số chẵn $\Rightarrow$ 1 trong 3 số x, y, z là số chẵn $\Rightarrow 3xyz\,\vdots\, 6\Rightarrow A\,\vdots\, 6$

Bài 7 : Cho $a^2+b^2+c^2=a^3+b^5+c^7=1$. Tính $A=a^2+b^9+c^{1945}$

Lời giải

Ta có : $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow 0\le a^2\le 1\Leftrightarrow |a|\le 1\Leftrightarrow -1\le a\le 1;-1\le b,c\le 1$

$$-1\le a\le 1\Rightarrow a^2(1-a)\ge 0\Rightarrow a^2\ge a^3,"="\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0\\ a=1\end{array}\right.$$

$-1\le b\le 1\Rightarrow b^3\le 1\Rightarrow (1-b^3).b^2\ge 0\Rightarrow b^2\ge b^5$

Dấu « = » xảy ra khi b = 0 hoặc b = 1.

Tương tự : $c^2\ge c^7$. Dấu « = » xảy ra khi c = 0 và c = 1.

Mặt khác ta lại có : $a^2+b^2+c^2=a^3+b^5+c^7=1\Rightarrow a^2=a^3;b^2=b^5;c^2=c^7\Rightarrow a,b,c$

có 1 số bằng 1 và 2 số bằng 0 $\Rightarrow A=1$

Bài 8 : Tìm các số a, b, c sao cho : $x^3-ax^2+bx-c=(x-a)(x-b)(x-c)\forall x\in R$

Lời giải:

Ta có: $(x-a)(x-b)(x-c)=(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc+x^3=x^3-\text{ax}^2+bx-c$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=a\\ab+bc+ca=b\\abc=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+c=0\\ \Rightarrow a(b+c)+bc=b\Rightarrow bc=b\\c(1-ab)=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=c=0,\forall a\\a=b=-1;c=1\end{array}\right.$$

Bài 9: Cho a, b thỏa mãn: $a^3-3a^2+5a-17=0;b^3-3b^2+5b+11=0.$

Tính A = a + b

Lời giải:

$$(a^3+b^3)-3(a^2+b^2)+5(a+b)-6=0$$
$$\Leftrightarrow(a+b)^3-3ab(a+b)-3[(a+b)^2-2ab]+5(a+b)-6=0$$
$$\Leftrightarrow(a+b)^3-3(a+b)^2+5(a+b)-6-3ab(a+b)+6ab=0$$
$$\Leftrightarrow(a+b)^3-3(a+b)^2+5(a+b)-6-3ab(a+b-2)=0$$
$$\Leftrightarrow(a+b)^3-2(a+b)^2-(a+b)^2+2(a+b)+3(a+b)-6-3ab(a+b-2)=0$$
$$\Leftrightarrow(a+b)^2(a+b-2)-(a+b)(a+b-2)+3(a+b-2)-3ab(a+b-2)=0$$
$$\Leftrightarrow(a+b-2)[(\text{a+b})^2-(a+b)+3-3ab]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+b-2=0\\(a+b)^2-(a+b)+3-3ab=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}A=2\\a^2-ab+b^2-a-b+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}A=2\\2a^2-2ab+2b^2-2a-2b+6=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}A=2\\(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2+4=0\quad(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow A=2$$

Vậy A = 2.

Bài 10: Chứng minh rằng $A=x^8-x^7+x^5-x^3+1>0$

Lời giải

+) Xét $x\ge1\Rightarrow x^7(x-1)\ge0\Rightarrow x^8\ge x^7;x^3(x^2-1)\ge0\Rightarrow x^5\ge x^3\Rightarrow A\ge1>0$

+) $0\le x\le1\Rightarrow1-x^3\ge0;x^5(1-x^2)\ge0\Rightarrow1\ge x^3;x^5\ge x^7\Rightarrow A=x^8+1-x^3+x^5-x^7\ge0\Rightarrow A>0$

Với $x<0\Rightarrow\begin{cases}-x^7>0\\-x^3>0\end{cases}$

Với $x\le-1\Rightarrow x^5(x^3+1)\ge0\Rightarrow x^8+x^5\ge0\Rightarrow A\ge1$

Với $-1\le x<0\Rightarrow1+x^5>0\Rightarrow A>0$

Vậy A > 0 với mọi x.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Tìm các số a, b, c, d sao cho: $A(x)=x^4+ax^3+bx^2-8x+4$ là bình phương của đa thức $B(x)=x^2+cx+d$

Lời giải:

$$[B(x)]^2=(x^2+cx+d)^2=x^4+2cx^3+(c^2+2d)x^2+2cdx+d^2 \Rightarrow A(x)=B^2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2c=a \\ c^2+2d=b \\ 2cd=-8 \\ d^2=4 \end{cases}$$

+) $d=2 \Rightarrow c=-2; a=-4; d=8$

+) $d=-2 \Rightarrow c=2, a=4, b=0$

Bài 2: Cho $a^3-3ab^2=19; b^3-3a^2b=98$. Tính $E=a^2+b^2$

Lời giải:

Ta có: $(a^3-3ab^2)^2=19^2=a^6-6a^4b^2+9a^2b^4; 98^2=(b^3-3a^2b)=b^6-6b^4a^2+9a^4b^2$

$19^2+98^2=a^6+b^6+3a^4b^2+3a^2b^4=(a^2+b^2)^3 \Rightarrow a^2+b^2=\sqrt[3]{9965}$

Bài 3: Chứng minh rằng: $A=x^{12}-x^9+x^4-x+1>0 \quad \forall x \in R$

Lời giải

+) Với $x \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x^9(x^3-1) \geq 0 \\ x(x^3-1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow A \geq 1 > 0 \ \forall x \in R$

+) Với $x<0 \Rightarrow \begin{cases} -x>0 \\ -x^9>0 \end{cases} \Rightarrow A>0$

+) Với $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x^4-x^9=x^4(1-x^5) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow A>0$

Bài toán được chứng minh

Bài 4: Chứng minh rằng

a. Nếu a + b + c ≥ 0 thì $a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0 \quad (a,b,c \in R)$

b. $a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd \geq 0 \qquad \forall a,b,c,d \in R$

Lời giải

a. Có: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

mà $a+b+c \geq 0 \ (gt); \ (a-b)^2 \geq 0$ nên:

$a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab.$

Tương tự: $a^2+c^2 \geq 2ac; \ b^2+c^2 \geq 2bc$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Rightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$

b. $a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=a^4+b^4-2a^2b^2+c^4+d^4-2c^2d^2+2a^2b^2+2c^2d^2-4abcd$

$=(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2 \qquad \forall a,b,c,d\in R$

CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. Rút gọn, tính giá trị của biểu thức thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài 1: a. Cho a – 2b = 5. Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{3a-2b}{2a+5}+\dfrac{3b-a}{b-5}$

b. Biết 2a – b = 7. Tính $B=\dfrac{5a-b}{3a+7}+\dfrac{3b-2a}{2b-7}$

c. Biết $10a^2-3b^2+5ab=0;9a^2-b^2\neq 0$. Tính $C=\dfrac{2a-b}{3a-b}+\dfrac{5b-a}{3a+b}$

d. Cho $3a^2+3b^2=10ab$ và $b>a>0$. Tính $D=\dfrac{a-b}{a+b}$

e. Biết $x^2+9y^2-4xy=2xy-|x-3|$. Tính $E=\dfrac{x^2-25}{x^3-10x^2+25x}:\dfrac{y-2}{y^2-y-2}$

Lời giải

a) Ta có: $a-2b=5\Rightarrow a=2b+5\Rightarrow A=\dfrac{3(2b+5)-2b}{2(2b+5)+5}+\dfrac{3b-(2b+5)}{b-5}=\dfrac{4b+15}{4b+15}+\dfrac{b-5}{b-5}=2$

b) Ta có : 2a – b = 7 thì b = 2a – 7 do đó :

$$B=\frac{5a-b}{3a+7}+\frac{3b-2a}{2b-7}=\frac{5a-\left(2a-7\right)}{3a+7}+\frac{3\left(2a-7\right)-2a}{2\left(2a-7\right)-7}=\frac{3a+7}{3a+7}+\frac{4a-21}{4a-21}=2$$

c) Ta có:

$$C=\frac{(2a-b)(3a+b)+(5b-a)(3a-b)}{(3a-b)(3a+b)}=\frac{3a^2+15ab-6b^2}{9a^2-b^2} \qquad (1)$$

Từ giải thiết:

$$10a^2-3b^2+5ab=0\Rightarrow 5ab=3b^2-10a^2\Rightarrow A=\frac{3a^2+3(3b^2-10a^2)-6b^2}{9a^2-b^2}=\frac{-27a^2+3b^2}{9a^2-b^2}=-3$$

d) Ta có:

Cách 1: Ta có:

$$3a^2+3b^2=10ab\Rightarrow 3a^2+3b^2-10ab=0\Leftrightarrow(3a-b)(a-3b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=3a\\ a=3b\ \ (loai)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow D=\frac{a-b}{a+b}=\frac{a-3a}{a+3a}=\frac{-1}{2}$$

Cách 2: $D^2 = \dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2} = \dfrac{3a^2+3b^2-6ab}{3a^2+3b^2+6ab} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow A = \dfrac{\pm 1}{2}$

Do $b > a \Rightarrow \begin{cases} a-b<0 \\ a+b>0 \end{cases} \Rightarrow D < 0 \Rightarrow D = \dfrac{-1}{2}$

e) Ta có:

$x^2+9y^2-4xy = 2xy-|x-3| \Leftrightarrow (x-3y)^2+|x-3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A = \dfrac{-8}{3}$

Bài 2: Cho $x+\dfrac{1}{x}=3$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $A = x^2+\dfrac{1}{x^2}$ b. $B = x^3+\dfrac{1}{x^3}$ c. $C = x^4+\dfrac{1}{x^4}$ d. $D = x^5+\dfrac{1}{x^5}$

Lời giải

a. $A = x^2+\dfrac{1}{x^2}+2.x.\dfrac{1}{x}-2 = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2 = 7$

b. $B = x^3+\left(\dfrac{1}{x}\right)^3 = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 3.6 = 18$

c. $C = x^4+\dfrac{1}{x^4} = x^4+\dfrac{1}{x^4}+2.x^2.\dfrac{1}{x^2}-2 = \left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2 = 47$

d. $D = x^5+\left(\dfrac{1}{x}\right)^5 = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^4-x^3.\dfrac{1}{x}+x^2.\dfrac{1}{x^2}-x.\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right) = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}-x^2+1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= 3.(47-7+1) = 123$

Cách 2: $(x^2+\dfrac{1}{x^2})(x^3+\dfrac{1}{x^3}) = x^5+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^5} = 123$

Bài 3: Cho $x^2-4x+1=0$. Tính $A = x^5+\dfrac{1}{x^5}$ và $B = x^7+\dfrac{1}{x^7}$

Lời giải

Có: $x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x^2+1=4x \Rightarrow x \neq 0$

Chia cả hai vế cho x ta được: $x+\dfrac{1}{x}=4$

Ta có: $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\dfrac{1}{x^2} = 16 \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2} = 14$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 = x^3+\dfrac{1}{x^3}+3.x.\dfrac{1}{x}.\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = x^3+\dfrac{1}{x^3}+3.4 = 4^3 \Rightarrow x^3+\dfrac{1}{x^3} = 52$

$$\Rightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x^5}=4+x^5+\frac{1}{x^5}$$

$$\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-4=14.52-4=724$$

Bài 4: Cho $\frac{x}{x^2-x+1}=2008$. Tính $M=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ và $N=\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$

Lời giải

Có: $x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1); x=2008(x^2-x+1)$ (1)

Ta có:

$$\frac{x}{x^2-x+1}=2008\Rightarrow x=2008(x^2+1)-2008x$$

$$\Rightarrow 2009x=2008(x^2+1)\Rightarrow 2009x+2008x=2008(x^2+x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4017x=2008(x^2+x+1) \quad (2)$$

Lấy (1).(2) được:

$$4017x^2=2008^2(x^4+x^2+1)\ (*)\Leftrightarrow\frac{4017x^2}{x^4+x^2+1}=2008^2\Leftrightarrow 4017.M=2008^2\Rightarrow M=\frac{2008^2}{4017}$$

$$(*)\Rightarrow x^2=\frac{2008^2}{4017}(x^4+x^2+1)=M(x^4+x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2=M(x^4-x^2+1+2x^2)\Rightarrow x^2=M(x^4-x^2+1)+2Mx^2$$

$$\Rightarrow(1-2M)x^2=M(x^4-x^2+1)\Rightarrow\frac{(1-2M)x^2}{x^4-x^2+1}=M\Rightarrow(1-2M).N=M\Rightarrow N=\frac{M}{1-2M}$$

Bài 5: Cho $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ (1); $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$ (2). Tính $A=\left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{b}{y}\right)^2+\left(\frac{c}{z}\right)^2$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0\Rightarrow\frac{bcx+acy+abz}{abc}=0\Rightarrow bcz+acy+abx=0$ (3)

Từ (2) ta có:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2\Rightarrow\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)^2=4\Leftrightarrow\left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{b}{y}\right)^2+\left(\frac{c}{z}\right)^2+2\left(\frac{ab}{xy}+\frac{ac}{xz}+\frac{bc}{yz}\right)=4$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{b}{y}\right)^2+\left(\frac{c}{z}\right)^2+2\left(\frac{abz+acy+bcx}{xyz}\right)=4 \quad (4)$$

Thay (3) vào (4), ta được: $A=\left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{b}{y}\right)^2+\left(\frac{c}{z}\right)^2=4$

Bài 6: Biết $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $a+b+c\neq 0$. Tính $A=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$

Lời giải

Ta có:

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\Rightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\Rightarrow a=b=c\Rightarrow A=\dfrac{3a^2}{(3a)^2}=\dfrac{1}{3}$

Bài 7: Tính $A=\dfrac{bc(y-z)^2+ac(z-x)^2+ab(x-y)^2}{ax^2+by^2+cz^2}$, biết $\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a+b+c=25 \end{cases}$

Lời giải

Ta có:

$M=bc(y-z)^2+ac(z-x)^2+ab(x-y)^2=by^2(a+c)+cz^2(a+b)+ax^2(b+c)-2(bcyz+acxz+abxy)$

Ta phải tạo ra nhân tử: a + b + c

$M=by^2(a+b+c)+cz^2(a+b+c)+ax^2(a+b+c)-2(bcyz+acxz+abxy)-b^2y^2-c^2z^2-a^2x^2$

$=(a+b+c)(by^2+cz^2+ax^2)-2(bcyz+acxz+abxy)-(b^2y^2+c^2z^2+a^2x^2)$

Lại có :

$(ax+by+cz)^2=0\Rightarrow a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2(abxy+acxz+bcyz)=0\Rightarrow M=(a+b+c)(by^2+cz^2+ax^2)$

$\Rightarrow A=a+b+c=25$

Bài 8: Cho a.b.c = 2, rút gọn : $A=\dfrac{a}{ab+a+2}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{2c}{ac+2c+2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A&=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{2c}{ac+2c+2}\\ &=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{2c}{ac+2c+abc}\\ &=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{ab}{2+ab+a}+\frac{2}{a+2+ab}\\ &=\frac{a+ab+2}{a+ab+2}\\ &=1 \end{aligned}$$

Bài 9: Cho a + b + c = 0, rút gọn : $A=\dfrac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\dfrac{b^2}{b^2-c^2-a^2}+\dfrac{c^2}{c^2-b^2-a^2}$

Lời giải

Từ: $a+b+c=0\Rightarrow a=-(b+c)\Rightarrow a^2=b^2+c^2+2bc\Rightarrow a^2-b^2-c^2=2bc$

Tương tự: $b^2-a^2-c^2=2ac; c^2-a^2-b^2=2ab\Rightarrow B=\dfrac{a^2}{2bc}+\dfrac{b^2}{2ac}+\dfrac{c^2}{2ab}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}$ (*)

Ta có:

$$a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a \Rightarrow (b+c)^3=-a^3 \Rightarrow -a^3=b^3+c^3+3bc(b+c)=b^3+c^3-3abc$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^2=3abc$$

Do đó: $B=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}=\dfrac{3abc}{2abc}=\dfrac{3}{2}$

Bài 10: Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn: $a+b+c=\sqrt{2019}$; $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$.

Tính $A=a^2+b^2+c^2$

Lời giải

Từ: $a+b+c=\sqrt{2019} \Rightarrow (a+b+c)^2=2019 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=2019$

Mặt khác: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0 \Leftrightarrow \dfrac{bc+ca+ab}{abc}=0 \Rightarrow bc+ca+ab=0 \quad (abc\neq 0) \Rightarrow A=2019$

Bài 11: [HSG Yên Phong – 2015]

Cho a, b, c thỏa mãn: $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2=4abc; \quad a^{2013}+b^{2013}+c^{2013}=1$.

Tính $A=\dfrac{1}{a^{2015}}+\dfrac{1}{b^{2015}}+\dfrac{1}{c^{2015}}$

Lời giải

Ta có:

$$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc=0$$

$$\Leftrightarrow ab^2+2abc+ac^2+bc^2+2abc+ba^2+ca^2+2abc+cb^2-4abc=0$$

$$\Leftrightarrow ab^2+2abc+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2=0$$

$$\Leftrightarrow a(b^2+c^2)+(b+c)(a^2+bc)+2abc=0$$

$$\Leftrightarrow a(b^2+c^2+2bc)+(b+c)(a^2+bc)=0$$

$$\Leftrightarrow (b+c)(ab+ac+bc+a^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \Rightarrow a^{2013}=-b^{2013}; a^{2015}=-b^{2015} \Rightarrow M=1 \\ b=-c \Rightarrow M=1 \\ c=-a \Rightarrow M=1 \end{array}\right.$$

Vậy M = 1 với a = b = c = 1.

Bài 12: Cho ba số a, b, c khác 0 và thỏa mãn: a + b + c = 0.

Tính $A=\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}+\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}$

Lời giải

Từ: $a+b+c=0 \Rightarrow a=-(b+c) \Rightarrow a+b=-c \Rightarrow (a+b)^2=c^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2-c^2=-2ab \\ b^2+c^2-a^2=-2bc \\ c^2+a^2-b^2=-2ac \end{cases}$

Do đó: $A=\dfrac{1}{-2ab}+\dfrac{1}{-2bc}+\dfrac{1}{-2ac} \Rightarrow A=\dfrac{-(a+b+c)}{2abc}=0$

Bài 13: Cho x, y, z đôi một khác nhau và Từ: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$.

Tính $A=\dfrac{yz}{x^2+2yz}+\dfrac{xz}{y^2+2xz}+\dfrac{xy}{z^2+2xy}$

Lời giải

Từ : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0 \Rightarrow \dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=0 \Rightarrow xy+yz+zx=0 \Rightarrow yz=-xy-xz$

Có : $x^2+2yz=x^2+yz+(-xy-xz)=(x-y)(x-z);$

Tương tự: $y^2+2xz=(y-x)(y-z); \quad z^2+2xy=(z-x)(z-y)$

$\Rightarrow A=\dfrac{yz}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{xz}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{xy}{(z-x)(z-y)}=\dfrac{-yz(y-z)-xz(z-x)-xy(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$

Tử số của A

$$\begin{aligned} & yz^2-y^2z-xz^2-xz^2+xy^2-x^2y \\ &= z^2(y-x)+z(x^2-y^2)+xy(y-x) \\ &= (y-x)(z^2+xy)+z(x-y)(x+y) \\ &= (x-y)\left[z(x+y)-z^2-xy\right]=(x-y)(y-z)(z-x) \Rightarrow A=1 \end{aligned}$$

Bài 14: Tính $A=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\left(1+\dfrac{y}{z}\right)\left(1+\dfrac{z}{x}\right)$; $x,y,z\neq 0$; $x^3+y^3+z^3=3xyz$

Lời giải

$$\begin{aligned} & x^3+y^3+z^3=3xyz \\ \Leftrightarrow\ & (x+y)^3+z^3-3xy(x+y)-3xyz=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+y+z)^3-3z(x+y)(x+y+z)-3xy(x+y+z)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right]=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

+) Trường hợp: $x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z; x+z=-y; y+z=-x$

Do đó: $A=\dfrac{x+y}{y}.\dfrac{y+z}{y}.\dfrac{x+z}{x}=\dfrac{-xyz}{xyz}=-1$

+) Trường hợp $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$ ta có:

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z \Rightarrow A=8$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Cho ba số a, b, c khác 0 và thỏa mãn: a + b + c = 0.

Tính $A=\dfrac{a^2+bc}{a^2-b^2-c^2}+\dfrac{b^2+ac}{b^2-c^2-a^2}+\dfrac{c^2+ab}{c^2-a^2-b^2}$

Lời giải

Từ : $a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a \Rightarrow b^2+2bc+c^2=a^2 \Rightarrow a^2-b^2-c^2=2bc$

Tương tự :

$$b^2-c^2-a^2=2ac; c^2-a^2-b^2=2ab \Rightarrow S=\frac{a^2+bc}{2bc}+\frac{b^2+ca}{2ac}+\frac{c^2+ab}{2ab}=\frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ac}+\frac{c^2}{2ab}+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+\frac{3}{2}=\frac{3abc}{2abc}+\frac{3}{2}=3$$

Bài 2*: Biết a + b + c = 0. Tính giá trị của biểu thức sau,

$$A=\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{a-c}\right)$$

Lời giải

Đặt $M=\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}$

Ta có: $M.\dfrac{c}{a-b}=1+\dfrac{c}{a-b}(\dfrac{b^2-bc+ac-a^2}{ab})=1+\dfrac{c}{a-b}.\dfrac{(a-b)(c-a-b)}{ab}=1+\dfrac{c(c-a-b)}{ab}$

$$=1+\frac{c\left[c-(a-b)\right]}{ab}=1+\frac{c.2c}{ab}=1+\frac{2c^2}{ab}$$

Tương tự:

$$M.\frac{a}{b-c}=1+\frac{2a^2}{bc}; M.\frac{b}{a-c}=1+\frac{2b^2}{bc} \Rightarrow A=3+2\left(\frac{c^2}{ab}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}\right)=3+2\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

Ta có:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3=\left[(a+b)^3+c^3\right]-3ab(-c)$$
$$=(a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2\right]+3abc$$
$$=3abc \Rightarrow A=3+3.2=9$$

B. Chứng minh đẳng thức thỏa mãn điều kiện của biến

Bài 1: Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ (1); $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$ (2). Chứng minh rằng: $a+b+c=abc$

Lời giải

Từ (1) suy ra:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=4 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{abc}=1 \Leftrightarrow a+b+c=abc$$

Bài 2: Cho $a,b,c\neq 0; a+b+c\neq 0$, thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^{2019}}+\frac{1}{b^{2019}}+\frac{1}{c^{2019}}=\frac{1}{a^{2019}+b^{2019}+c^{2019}}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}+\frac{a+b+c-c}{c(a+b+c)}=0 \Leftrightarrow (a+b)\left[\frac{1}{ab}+\frac{1}{c(a+b+c)}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)\left[\frac{ca+cb+c^2+ab}{abc(a+b+c)}\right]=0 \Leftrightarrow \frac{(a+b)(a+c)(c+b)}{abc(a+b+c)}=0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$$

+) $a+b=0 \Rightarrow a=-b \Rightarrow a^{2019}=(-b)^{2019} \Rightarrow VT=VP$

Chứng minh tương tự, ta có điều phải chứng minh.

Bài 3: Cho $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=1$. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}=0$

Lời giải

Để xuất hiện a^2, b^2, c^2 ta nhân với a + b + c ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)(a+b+c)=a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{a+c}+b+\frac{c^2}{a+b}+c=a+b+c \Rightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}=0 \quad (dpcm)$$

Bài 4: Cho a + b + c = x + y + z = 0 và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$. Chứng minh rằng : $ax^2+by^2+cz^2=0$

Lời giải

Cách 1:

Ta có :

$$a+b+c=0 \Rightarrow a=-b-c \Rightarrow \frac{-b-c}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$$

$$\Rightarrow b\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+c\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)=0 \Rightarrow b\left(\frac{x-y}{xy}\right)+c\left(\frac{x-z}{xz}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{b(x-y).z+c(z-x).y}{xyz}=0$$

$$\Rightarrow b(x-y)z+c(z-x)y=0 \quad (1)$$

Ta có :

$$ax^2+by^2+cz^2=(-b-c)x^2+by^2+cz^2$$
$$=b(y^2-x^2)+c(z^2-x^2)=b(y-z)(y+x)+c(z-x)(z+x)$$
$$=b(y-x)(-z)+c(z-x)(-y)=b(x-y)z+c(x-z)y=0 \ \left(theo\ (1)\right)$$
$$\Rightarrow ax^2+by^2+cz^2=0$$

Cách 2 : Ta có $x+y+z=0 \Rightarrow x^2=(y+z)^2; y^2=(x+z)^2; z^2=(x+y)^2$

Do đó :

$$ax^2+by^2+cz^2=a(y+z)^2+b(x+z)^2+c(x+y)^2$$
$$=a(y^2+2yz+z^2)+b(x^2+2xz+z^2)+c(x^2+2yx+y^2)$$
$$=x^2(b+c)+y^2(a+c)+z^2(a+b)+2(ayz+bxz+cxy) \quad (*)$$

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a;$

Tương tự: $a+c=-b; a+b=-c$

Có:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0 \Rightarrow \frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0 \Rightarrow ayz+bxz+cxy=0$$

$$\Rightarrow (*): ax^2+by^2+cz^2=x^2(-a)+y^2(-b)+z^2(-c)$$
$$\Rightarrow 2(ax^2+by^2+cz^2)=0 \Rightarrow ax^2+by^2+cz^2=0$$

Bài 5: [GVG- Yên Phong – 2014]

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ và a + b + c = 1.

Chứng minh rằng : $(a-1)(b-1)(c-1)=0$

Lời giải

Ta có : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Rightarrow \frac{bc+ac+ab}{abc}=1 \Rightarrow bc+ac+ab=abc$

Có :

$(a-1)(b-1)(c-1)=abc-ab-ac+a-bc+b+c-1=abc-(ab+ac+bc)+(a+b+c)-1=0$

Bài 6: Cho $\frac{xy+1}{y}=\frac{yz+1}{z}=\frac{xz+1}{x}$. Chứng minh rằng : $x=y=z$ hoặc $x^2y^2z^2=1$

Lời giải

Từ :

$$\frac{xy+1}{y}=\frac{yz+1}{z}=\frac{xz+1}{x} \Rightarrow x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x} \Rightarrow x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{y-z}{yz}; y-z=\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=\frac{z-x}{zx}$$

$$z-x=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{x-y}{xy} \Rightarrow (x-y)(y-z)(z-x)=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^2y^2z^2} \Rightarrow (x-y)(y-z)(z-x)(x^2y^2z^2-1)=$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-y)(y-z)(z-x)=0\\ x^2y^2z^2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=y\\ y=z \Rightarrow x=y=z\\ z=x\end{array}\right.\\ x^2y^2z^2=1\end{array}\right.$$

Bài 7: Cho $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$

Lời giải

Từ : $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0 \Rightarrow \frac{a}{b-c}=\frac{b}{a-c}+\frac{c}{b-a}=\frac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-c)(b-a)}=\frac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(c-a)}$

$\Rightarrow \frac{a}{(b-c)^2}=\frac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ (1) nhân với $\frac{1}{b-c}$

Tương tự : $\frac{b}{(c-a)^2}=\frac{c^2-bc+ab-a^2}{(b-c)(a-c)(a-b)}(2); \frac{c}{(a-b)^2}=\frac{a^2-ac+bc-b^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}(3)$

$(1)+(2)+(3): \frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0(dpcm)$

Bài 8: Cho x, y, a, b là những số thực thỏa mãn : $\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{x^2+y^2}{a+b}$ và $x^2+y^2=1$

Chứng minh rằng : $\frac{x^{2006}}{a^{1003}}+\frac{y^{2006}}{b^{1003}}=\frac{2}{(a+b)^{1003}}$

Lời giải

Nếu $(\frac{x^2}{a})^{2013} \pm (\frac{y^2}{b})^{2013} = \frac{1}{(a+b)^{2013}} \Rightarrow$ xong

Ta có :

$$\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{x^2+y^2}{a+b}=\frac{(x^2+y^2)^2}{a+b} \Leftrightarrow \frac{bx^4+ay^4}{ab}=\frac{(x^2+y^2)^2}{a+b} \Leftrightarrow (bx^4+ay^4)(a+b)=ab(x^2+y^2)^2$$

$$\Leftrightarrow abx^4+b^2x^4+a^2y^4+aby^4=abx^4+2abx^2y^2+aby^4 \Leftrightarrow b^2x^4-2abx^2y^2+a^2y^4=0$$

$$\Leftrightarrow (bx^2-ay^2)^2=0 \Leftrightarrow bx^2=ay^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a}=\frac{y^2}{b}=\frac{x^2+y^2}{a+b}=\frac{1}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{a}\right)^{2003}=\left(\frac{y^2}{b}\right)^{2003}=\frac{1}{(a+b)^{2003}} \quad (dpcm)$$

Bài 9 : [HSG Quảng Xương – 20/04/2015]

Cho ba số a, b, c khác 0, thỏa mãn: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}=1$

Lời giải

Từ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$ ta có :

$ab+bc+ca=0 \Rightarrow bc=-(ab+ac) \Rightarrow a^2+2bc=a^2+bc-(ab+ac)=(a-b)(a-c)$

Tương tự: $b^2+2ac=(b-c)(b-a); c^2+2ab=(c-a)(c-b)$

$$\Rightarrow A=\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$$

$$A=\frac{-a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)9b-c)(c-a)}=1$$

Bài 10: Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ với $a,b,c \neq 0$ và $M=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{a^2c^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}$.

Chứng minh rằng: $M=3abc$

Lời giải

Đặt $\frac{1}{a}=x; \frac{1}{b}=y; \frac{1}{c}=z \Rightarrow x+y+z=0$

$$M=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{a^2c^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}=a^2b^2c^2(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3})=a^2b^2c^2(x^3+y^3+z^3)$$

Từ x + y + z = 0 suy ra:

$x+y=-z \Rightarrow (x+y)^3=-z^3 \Rightarrow x^3+y^3+3xy(x+y)=-z^3 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$

$$\Rightarrow M=a^2b^2c^2.3xyz=a^2b^2c^2.3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}=3abc$$

Bài 11: Cho $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{bcx^2}+\frac{b}{acy^2}+\frac{c}{abz^2}=\frac{4}{abc}$

Lời giải

Có $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \Leftrightarrow bcx+acy+abz=0; \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2 \Rightarrow (\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z})^2=4$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}+2\left(\frac{ab}{xy}+\frac{bc}{yz}+\frac{ac}{xz}\right)=4 \Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}+2\left(\frac{abz+bcx+acy}{xyz}\right)=4 \Rightarrow \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}=4$$

Chia cả hai vế cho abc $\Rightarrow \frac{a}{bcx^2}+\frac{b}{acy^2}+\frac{c}{abz^2}=\frac{4}{abc}$

Bài 12: Cho $x+y=1$ và $xy\neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}+\frac{2(x-y)}{x^2y^2+3}=0$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}=\frac{x^4-x-y^4+y}{(y^3-1)(x^3-1)}=\frac{(x^4-y^4)-(x-y)}{(y-1)(y^2+y+1)(x-1)(x^2+x+1)}$

Theo đầu bài: $x+y=1 \Rightarrow x=1-y; y=1-x$

$$=\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)}{xy(x^2+x+1)(y^2+y+1)}=\frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy(x^2y^2+x^2y+x^2+xy^2+xy+x+y^2+y+1)}$$

$$=\frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy\left[x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+2\right]}=\frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy\left[x^2y^2+(x+y)^2+2\right]}=\frac{(x-y)\left[x(x-1)+y(y-1)\right]}{xy(x^2y^2+3)}$$

$$=\frac{(x-y)\left[x(-y)+y(-x)\right]}{xy(x^2y^2+3)}=\frac{(x-y)(-2xy)}{xy(x^2y^2+3)}=\frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3} \Rightarrow dpcm$$

RÚT GỌN BIỂU THỨC

Bài 1: Rút gọn $A=\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)}$

Lời giải

Ta có:

$(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \Rightarrow MS=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$TS=(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)+(ab+bc+ca)^2$

$=(a^2+b^2+c^2)(MS+ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)^2$

$=(a^2+b^2+c^2).MS+(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)^2$

$= (a^2+b^2+c^2).MS + (ab+ac+bc)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

$= MS.(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

$= MS^2$

$$\Rightarrow A = \frac{TS}{MS} = \frac{MS^2}{MS} = MS$$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau

a. $A = \dfrac{x^2-yz}{1+\dfrac{y+z}{x}} + \dfrac{y^2-zx}{1+\dfrac{z+x}{y}} + \dfrac{z^2=xy}{1+\dfrac{x+y}{z}}$

b. $B = \dfrac{\dfrac{a(a+b)}{a-b}+\dfrac{a(a+c)}{a-c}}{1+\dfrac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}} + \dfrac{\dfrac{b(b+c)}{b-c}+\dfrac{b(b+a)}{b-a}}{1+\dfrac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}} + \dfrac{\dfrac{c(c+a)}{c-a}+\dfrac{c(c+b)}{c-b}}{1+\dfrac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}}$

Lời giải

a) Ta có:

$$A = \frac{x^2-yz}{1+\dfrac{y+z}{x}} + \frac{y^2-zx}{1+\dfrac{z+x}{y}} + \frac{z^2=xy}{1+\dfrac{x+y}{z}} = \frac{x(x^2-yz)}{x+y+z} + \frac{y(y^2-yz)}{x+y+z} + \frac{z(z^2-xy)}{x+y+z} = \frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x+y+z}$$

$$A = \frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{x+y+z} = x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$

b) Đặt $B_1 = \dfrac{\dfrac{a(a+b)}{a-b}+\dfrac{a(a+c)}{a-c}}{1+\dfrac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}}; B_2 = \dfrac{\dfrac{b(b+c)}{b-c}+\dfrac{b(b+a)}{b-a}}{1+\dfrac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}}; B_3 = \dfrac{\dfrac{c(c+a)}{c-a}+\dfrac{c(c+b)}{c-b}}{1+\dfrac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}}$

Tử số

$$B_1 = \frac{a(a+b)(a-c)+a(a+c)(a-b)}{(a-b)(a-c)} = \frac{a\left[a^2+ab-ac-bc+a^2-ab+ac-bc\right]}{(a-b)(a-c)} = \frac{a(2a^2-2bc)}{(a-b)(a-c)}$$

Mẫu số $B_1 = 1+\dfrac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} = \dfrac{(a-b)(a-c)+(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} = \dfrac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{(a-b)(a-c)}$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{2a^3-2abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

Tương tự: $\Rightarrow B_2 = \dfrac{2b^3-2abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}; B_3 = \dfrac{2c^3-2abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$

$$\Rightarrow B = \frac{2(a^3+b^3+c^3-3abc)}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca} = 2(a+b+c)$$

Bài 3: Rút gọn $A=\dfrac{(a+2b)^3-(a-2b)^3}{(2a+b)^3-(2a-b)^3}:\dfrac{3a^4+7a^2b^2+4b^4}{4a^4+7a^2b^2+3b^4}$

Lời giải

+) $(a+2b)^3-(a-2b)^3=\left[(a+2b)-(a-2b)\right]\left[(a+2b)^2+(a+2b)(a-2b)+(a-2b)^2\right]$
$=4b(a^2+4ab+4b^2+a^2-4b^2+a^2-4ab+4b^2)=4b(3a^2+4b^2)$

+) $(2a+b)^3-(2a-b)^3=2b(12a^2+b^2)$

+) $3a^4+7a^2b^2+4b^4=(a^2+b^2)(3a^2+4b^2); 4a^4+7a^2b^2+3b^4=(a^2+b^2)(4a^2+3b^2)\Rightarrow A=2$

Bài 4: Thực hiện phép tính sau

$$A=\dfrac{a+b-2c}{\dfrac{(a-b)^3}{a^3-b^3}+\dfrac{(c-a)(c-b)}{a^2+ab+b^2}}+\dfrac{b+c-2a}{\dfrac{(b-c)^3}{b^3-c^3}+\dfrac{(a-b)(a-c)}{b^2+bc+c^2}}+\dfrac{c+a-2b}{\dfrac{(c-a)^3}{c^3-a^3}+\dfrac{(b-a)(b-c)}{c^2+ca+a^2}}$$

Lời giải

Đặt $A_1=\dfrac{a+b-2c}{\dfrac{(a-b)^3}{a^3-b^3}+\dfrac{(c-a)(c-b)}{a^2+ab+b^2}}$

MS: $A_1=\dfrac{(a-b)^3}{a^3-b^3}+\dfrac{(c-a)(c-b)}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{(a-b)^2+(c-a)(c-b)}{a^2+ab+b^2}\Rightarrow A_1=\dfrac{(a+b-2c)(a^2+ab+b^2)}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$

Tương tự: $A_2=\dfrac{(b+c-2a)(b^2+bc+c^2)}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}; A_3=\dfrac{(c+a-2b)(c^2+ca+a^2)}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$

Tử số của

$A=\left[(a-c)+(b-c)\right](a^2+ab+b^2)+\left[(b-a)+(c-a)\right](b^2+bc+c^2)+\left[(c-b)+(a-b)\right](c^2+ca+a^2)$

$=(a-c)(a^2+ab+b^2)+(b-c)(a^2+ab+b^2)+(b-a)\left(b^2+bc+c^2\right)+(c-a)\left(b^2+bc+c^2\right)$

$+(c-a)\left(c^2+ca+a^2\right)+(a-b)\left(c^2+ca+a^2\right)$

$=(a-c)(a^2+ab+b^2-b^2-bc-c^2)+(b-c)(a^2+ab+b^2-c^2-ca-a^2)$

$+(b-a)(b^2+bc+c^2-c^2-ca-a^2)$

$=(a-c)(a-c)(a+b+c)+(b-c)(b-c)(a+b+c)+(b-a)(b-a)(a+b+c)$

$=(a+b+c)\left[(a-c)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

$=(a+b+c).2.\underbrace{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}_{MS}\Rightarrow A=\dfrac{TS}{MS}=2(a+b+c)$

Bài 5: Cho a, b, c là ba số phân biệt. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ

thuộc vào giá trị x :

$$S_x=\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

Lời giải

$$S_x=\frac{x^2-(a+b)x+ab}{(c-a)(c-b)}+\frac{x^2-(b+c)x+bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{x^2-(a+c)x+ac}{(b-c)(b-a)}$$

$$S_x=x^2\left[\frac{1}{(c-a)(c-b)}+\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}\right]$$

$$+x\left[\frac{-(a+b)}{(c-a)(c-b)}-\frac{(b+c)}{(a-b)(a-c)}-\frac{(a+c)}{(b-c)(b-a)}\right]$$

$$+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}+\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)}\Rightarrow S_x=A.x^2+Bx+C$$

+) $A=\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}=\dfrac{a-b+b-c+c-a}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0$

+) $B=\dfrac{-(a+b)}{(c-a)(c-b)}-\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}-\dfrac{a+c}{(b-c)(b-a)}=0$

$$\Rightarrow S_x=C=\frac{ab}{(c-a)(c-b)}+\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)}$$

Bài 6: Cho a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng giá trị các biểu thức sau không phụ thuộc vào a, b, c

a. $S=\dfrac{a^2+2a+3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2+2b+3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2+2c+3}{(c-a)(c-b)}=S_2+2S_1+3S_0$

+) $S_2=\dfrac{a^2}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$

+) $S_0=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{c-b+a-c+b-a}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$

+) $S_1=\dfrac{a}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0\Rightarrow S=1$

b. $A=\dfrac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}\Rightarrow A=0$

C. Chứng minh phân số tối giản

- Có hai cách cơ bản chứng minh tử số và mẫu số có ƯCLN bằng 1

+) Cách 1: Giả sử d = (a,b), sau đó chỉ ra d = 1

+) Giải sử d ± 1 (d ≥2)

- Gọi p là ước nguyên tố của d
- Chỉ ra rằng p = 1 (Vô lý)
- Kết luận d = 1

Bài 1: Chứng minh rằng phân số $\frac{3n+1}{5n+2}$ là phân số tối giản $\forall n \in N$

Lời giải

Giải sử $(3n+1, 5n+2) = d (d \in N^*)$ suy ra:

$$\begin{cases} 3n+1 \vdots d \\ 5n+2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(3n+1) \vdots d \\ 3(5n+2) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15n+5 \vdots d \\ 15n+6 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{3n+1}{5n+2}$ là phân số tối giản $\forall n \in N$

Bài 2: Chứng minh rằng phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản $\forall n \in N$

Lời giải

Gọi $(12n+1, 30n+2) = d (d \in N^*) \Rightarrow \begin{cases} 12n+1 \vdots d \Rightarrow d : le \\ 30n+2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+1) \vdots d \\ 2(30n+2) \vdots d \end{cases} \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$

Bài 3: Chứng minh rằng phân số $\frac{2n+1}{2n^2-1}$ là phân số tối giản $\forall n \in N$

Lời giải

Gọi $(2n+1, 2n^2-1) = d (d \in N^*)$ ta có:

$$n(2n+1)-(2n^2-1) \vdots d \Rightarrow n+1 \vdots d \Rightarrow \begin{cases} 2n+2 \vdots d \\ 2n+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$$

Bài 4: Chứng minh rằng phân số $\frac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ là phân số tối giản $\forall n \in N$

Lời giải

Gọi $(n^3+2n, n^4+3n^2+1) = d (d \in N^*)$ ta có:

$$\begin{cases} n^3+2n \vdots d \\ n^4+3n^2+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(n^3+2n) \vdots d \\ n^4+3n^2+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow n(n^3+2n)-(n^4+3n^2+1) \vdots d$$

$$\Rightarrow (-n^2-1) \vdots d \Rightarrow n^2+1 \vdots d$$

Ta có: $n^3+2n=\begin{cases} n(n^2+1)+n \vdots d \\ n^2+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow n \vdots d \Rightarrow \begin{cases} n^4 \vdots d \\ 3n^2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^4+3n^2 \vdots d \\ n^4+3n^2+d \end{cases} \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d=1$

Bài 5: Cho $A=\dfrac{n^3+2n^2-1}{n^3+2n^2+2n+1}$

a. Rút gọn A

b. Chứng minh rằng nếu $n \in Z$ thì giá trị tìm được ở câu a là phân số tối giản

Lời giải

a. $A=\dfrac{n^3+2n^2-1}{n^3+2n^2+2n+1}=\dfrac{(n+1)(n^2+n-1)}{(n+1)(n^2+n+1)}=\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n+1}$

b. Gọi $(n^2+n-1,n^2+n+1)=d(d \in N^*) \Rightarrow \begin{cases} n^2+n-1 \vdots d \\ n^2+n+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow -2 \vdots d \Rightarrow d=1; d=2$

Lại có: $n^2+n+1=\underbrace{n(n+1)}_{\vdots 2}+1\ (le) \Rightarrow d \neq 2 \Rightarrow d=1$

Bài 6: Cho phân số $A=\dfrac{n^2+4}{n+5}(n \in N)$. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 2009 sao cho phân số A chưa tối giản

Lời giải

$A=\dfrac{n^2+4}{n+5}=\dfrac{n^2-25+29}{n+5}=n-5+\dfrac{29}{n+5}$

Để A là phân số chưa tối giản thì $\dfrac{29}{n+5}$ là phân số chưa tối giản $\Rightarrow n+5 \vdots 29 \Rightarrow n=29k-5$

Ta có: $0 \le 29k-5 \le 2009 \Rightarrow \dfrac{5}{29} \le k \le \dfrac{2014}{29} \Rightarrow 1 \le k \le 69$

Vậy có 69 giá trị

D. Các bài toán về biểu thức hữu tỷ

Các bước rút gọn biểu thức hữu tỷ

- Tìm điều kiện xác định: Phân tích tử và mẫu thành nhân tử, cho tất cả các nhân tử khác 0
- Phân tích tử và mẫu thành nhân tử rồi chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung

Bài 1: Cho biểu thức $A=\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-10x^2+9}$

a. Rút gọn A

b. Tìm x để A = 0

c. Tìm giá trị của A khi $|2x-1|=7$

Lời giải

a. ĐKXĐ: $x^4-10x^2+9 \neq 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-9) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1; x \neq \pm 3$

$$A=\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-10x^2+9}=\frac{(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)}$$

b. $A=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-4}{x^2-9}=0\Leftrightarrow x=\pm2$

c. $|2x-1|=7\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\ \ (tm)\Rightarrow A=\dfrac{12}{7}\\ x=-3\ \ (loai)\end{array}\right.$

Bài 2: Cho biểu thức $A=\dfrac{x^3+x^2-2x}{x|x+2|-x^2+4}$

a. Rút gọn A

b. Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên

c. Tìm giá trị của A khi x = 6

Lời giải

a. Nếu x + 2 > 0 ta có:

$$x>-2\Rightarrow|x+2|=x+2\Rightarrow A=\frac{x^3+x^2-2x}{x(x+2)-x^2+4}=\frac{x(x-1)(x+2)}{2(x+2)}=\frac{x(x-1)}{2}$$

Nếu $x+2<0\Leftrightarrow x<-2\Rightarrow|x+2|=-(x+2)\Rightarrow A=\dfrac{x^3+x^2-2x}{-x(x+2)-x^2+4}=\dfrac{-x}{2}$

Nếu $x=-2\Rightarrow A$ không xác định

b. Để A nguyên thì $\dfrac{x(x-1)}{2}$ hoặc $\dfrac{-x}{2}$ có giá trị nguyên

+) $\dfrac{x(x-1)}{2}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-1)\,\vdots\,2\\ x>-2\end{cases}$

Ta có: $x(x-1)\,\vdots\,2\,\forall x>-2$

+) $\dfrac{-x}{2}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow\begin{cases}x\,\vdots\,2\\ x<-2\end{cases}\Leftrightarrow x=2k(k\in Z,k<-1)$

Ta có: $x(x-1)\,\vdots\,2\,\forall x>-2$

c. $x=6\Rightarrow x>-2\Rightarrow A=\dfrac{x^2-x}{2}=15$

Bài 3 : [HSG – Yên Phong – 2015]

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{y}{x^2-xy}-\dfrac{x}{xy-y^2}\right).\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}\quad(x\neq0,y\neq0,x\neq-y)$

a. Rút gọn A

b. Tính giá trị của A khi x > y > 0 và thỏa mãn : $2x^2+2y^2=5xy$

Lời giải

a. $A = \dfrac{-(x+y)}{x-y}$

b. Ta có

$$2x^2 + 2y^2 = 5xy \Leftrightarrow (2x^2 - xy) + (2y^2 - 4xy) = 0 \Leftrightarrow (2x-y)(x-2y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x - y = 0 & (loai) \\ x - 2y = 0 & (tm) \end{array}\right.$$

Thay x = 2y vào A, ta được : $A = \dfrac{-(2y+y)}{2y-y} = -3$

Bài 4: Cho $A = \left[\dfrac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)} + \dfrac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)}\right] : \left[\dfrac{5}{x^2+1} + \dfrac{3}{2(x+1)} - \dfrac{3}{2(x-1)}\right]$

a. Rút gọn A

b. Tính giá trị của A khi $|2x-1| = 1$

c. Tìm x để A > 0

d. Tìm x để A nhận giá trị nguyên dương

Lời giải

a. Ta có: $x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+2); x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$

$$M = \frac{(x+2)^2(x-2)}{2(x^4-1)}; N = \frac{2(x+2)(x-2)}{x^4-1} \Rightarrow A = M : N = \frac{x+2}{2} \quad (x \neq \pm 1; x \neq \pm 2)$$

b. $|2x-1| = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \quad (loai) \\ x = 0 \quad (tm) \Rightarrow A = 1 \end{array}\right.$

c. $A > 0 \Leftrightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \neq \pm 1; x \neq \pm 2 \end{cases}$

d. A nguyên dương:

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{2} \in Z \Leftrightarrow (x+2) \vdots 2 \Leftrightarrow x + 2 = 2k (k \in Z; k \neq 0; k \neq 2) \Leftrightarrow x = 2k - 2 = 2(k-1)(k \in Z^*; k \neq 2)$$

Bài 5: [HSG – Long Biên – 2014]

Cho $A = \left(\dfrac{x+2}{3x} + \dfrac{2}{x+1} - 3\right) : \dfrac{2-4x}{x+1} - \dfrac{3x+1-x^2}{3x}$

a. Rút gọn A

b. Tính giá trị của A khi $2014 - |2x-1| = 2013$

c. Tìm x để A < 0

d. Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị là số nguyên

Lời giải

a. ĐKXĐ: $x \neq -1; x \neq 0; x \neq \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = \dfrac{x-1}{3}$

b. $2014-|2x-1|=2013 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow A=0 \\ x=0 \quad (loai) \end{array}\right.$

c. $A<0 \Rightarrow x-1<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x\neq 0, x\neq -1, x\neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

d. A có giá trị nguyên $\Rightarrow (x-1)\vdots 3 \Rightarrow x=3k+1 \quad (k\in Z)$

BIỂU THỨC CÓ TÍNH QUY LUẬT

Bài 1: Tính

a. $\dfrac{3}{(1.3)^2}+\dfrac{5}{(2.3)^2}+...+\dfrac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}$

b. $(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})...(1-\dfrac{1}{n^2})$

Lời giải

a. Ta có:

$$\frac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow A=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+1)}{(n+1)^2}$$

b. Ta có: $1-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2} \Rightarrow B=\left[\dfrac{(2-1)(2+1)}{2^2}\right].\left[\dfrac{(3-1)(3+1)}{3^2}\right]...\left[\dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right]$

$$=\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}.\frac{3.5}{4^2}....\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1.3.2.4.3.5...(n-1)(n+1)}{2^2.3^2.4^2....n^2}=\frac{1.2.3...(n-1)}{2.3.4..(n-1).n}.\frac{3.4.5...(n+1)}{2.3.4...(n-1).n}$$

$$=\frac{1}{n}.\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$$

Bài 2: Cho $A=\dfrac{99}{1}+\dfrac{98}{2}+...+\dfrac{2}{98}+\dfrac{1}{99}; B=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{100}$. Tính A. B

Lời giải

$$A+99=(\frac{99}{1}+1)+(\frac{98}{2}+1)+...+(\frac{2}{98}+1)+(\frac{1}{99}+1)=100+\frac{100}{2}+...+\frac{100}{98}+\frac{100}{99}$$

$$=100+100(\frac{1}{2}+...+\frac{1}{99}) \Rightarrow A=1+100(\frac{1}{2}+...+\frac{1}{99})=100.(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}) \Rightarrow A:B=100$$

Bài 3: Cho $A=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{99}; B=\dfrac{1}{1.99}+\dfrac{1}{3.97}+\dfrac{1}{5.95}+...+\dfrac{1}{97.3}+\dfrac{1}{99.1}$. Tính A : B

Lời giải

$$100.B=\frac{99+1}{1.99}+\frac{97+3}{97.3}+\frac{5+95}{5.95}+...+\frac{97+3}{97.3}+\frac{99+1}{99.1}=1+\frac{1}{99}+\frac{1}{3}+\frac{1}{97}+\frac{1}{5}+\frac{1}{95}+...+\frac{1}{97}+\frac{1}{3}+\frac{1}{99}+1$$

$$=(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{99})+(\frac{1}{99}+\frac{1}{97}+...+\frac{1}{3}+\frac{1}{1})=A+A=2A\Rightarrow A:B=50$$

Bài 4: Chứng minh rằng: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+...+\frac{1}{(2n-1).2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$

Lời giải

$$VT=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2n})$$

$$=(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2n})=(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\Rightarrow VT=VP$$

Bài 5:

a. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}<2\forall n\in N^*$

b. $S=\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{n}{3^n}<\frac{3}{4}\forall n\in Z^+$

Lời giải

$$2.VT=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{n}{2^{n-1}}=2+\frac{3}{2^2}+...+\frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow 2VT-VT=VT=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=A-\frac{n}{2^n}$$

Trong đó:

$$A=1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\Rightarrow 2A=2+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-2}}\Rightarrow 2A-A=A=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow VT=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}<2\quad \forall n\in N^*$$

b) Ta có:

$$3S=1+\frac{2}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+...+\frac{n}{3^{n-1}}\Rightarrow 2S=1+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{n}{3^n}\Rightarrow 2S=S_1-\frac{n}{3^n}$$

$$S_1=1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{n-1}}\Rightarrow 3S_1=3+1+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{n-2}}\Rightarrow 2S_1=3-\frac{1}{3^{n-1}}\Rightarrow S_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2.3^{n-1}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{3}{4}-\frac{1}{4.3^{n-1}}-\frac{n}{2.3^n}<\frac{3}{4}\quad (dpcm)$$

Bài 6: Chứng minh rằng: $\frac{1.2!}{2^1}+\frac{2.3!}{2^2}+\frac{3.4!}{2^3}+...+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2\ \forall n\in N^*$

Lời giải

Cách 1: Chứng minh bằng quy nạp toán học

+) Với n = 1, ta có: $VT=\frac{1.2!}{2!}=1;VP=\frac{3!}{2}-2=1\Rightarrow VT=VP$

+) Giả sử đúng với n = k, tức là : $\frac{1.2!}{2^1}+\frac{2.3!}{2^2}+\frac{3.4!}{2^3}+...+\frac{k(k+1)!}{2^k}=\frac{(k+2)!}{2^k}-2\quad \forall k\in N^*$

Ta sẽ chứng minh đúng với n = k + 1, tức là :

$$\frac{1.2!}{2^1}+\frac{2.3!}{2^2}+\frac{3.4!}{2^3}+...+\frac{k(k+1)!}{2^k}+\frac{(k+1)(k+2)!}{2^{k+1}}=\frac{(k+3)!}{2^{k+1}}-2\quad \forall k\in N^*(**)$$

Thật vậy :

$$VT(**)=\frac{(k+2)!}{2^k}-2+\frac{(k+1)(k+2)!}{2^{k+1}}=\frac{2(k+2)}{2^{k+1}}-2+\frac{(k+1)(k+2)}{2^{k+1}}$$
$$=\frac{(k+2)!(k+3)}{2^{k+1}}=\frac{(k+3)!}{2^{k+1}}-2=VP\quad(**)$$

Cách 2: Xét số hạng tổng quát

$$\frac{k(k+1)!}{2^k}=\frac{(k+2-2)(k+1)!}{2^k}=\frac{(k+2)!-2(k+1)!}{2^k}=\frac{(k+2)!}{2^k}-\frac{(k+1)!}{2^{k-1}}$$

Áp dụng cho k chạy từ 1 đến n, ta được :

$$VT=\frac{3!}{2^1}-\frac{2!}{2^0}+\frac{4!}{2^2}-\frac{3!}{2^1}+\frac{5!}{2^3}-\frac{4!}{2^2}+...+\frac{(n+2)!}{2^n}-\frac{(n+1)!}{2^{n-1}}=\frac{(n+2)!}{2^n}-\frac{2!}{2^0}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2=VP\quad(dpcm)$$

CHUYÊN ĐỀ 6: BẤT ĐẲNG THỨC

I. Các kiến thức cơ bản

1. Định nghĩa: Ta gọi hệ thức dạng a > b ($a<b;a\ge b;a\le b$) là một bất đẳng thức

$$\begin{cases}A\ge B\Leftrightarrow A-B\ge 0\\ A\le B\Leftrightarrow A-B\le 0\end{cases}$$

2. Các tính chất

a. Bắc cầu: $\begin{cases}a>b\\ b>c\end{cases}\Rightarrow a>c$

b. Cộng hai vế của bất đẳng thức với cùng một số: $a>b\Rightarrow a+c>b+c$

Hệ quả 1: $a>b\Rightarrow a-c>b-c$

c. Cộng, trừ từng vế của bất đẳng thức cùng chiều được bđt cùng chiều với bđt đã cho

$\left.\begin{matrix}a>b\\ c>d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+c>b+d$ (lưu ý: không có tính chất trừ vế với vế)

d. Nhân cả hai vế của bddt với cùng một số

$\begin{cases} a > b; c > 0 \Rightarrow a.c > b.c \\ a > b; c < 0 \Rightarrow a.c < b.c \end{cases}$ Hệ quả: $\begin{cases} a > b \Rightarrow -a < -b \\ a > b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \quad (c > 0) \\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \quad (c < 0) \end{array}\right. \end{cases}$

e. Trừ từng vế của bđt ngược chiều: $\begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$

f. Nhân từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm:
$a > b \geq 0; c > d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd$

g. Nâng lên lũy thừa bậc nguyên dương hai vế của bất đẳng thức:

$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$ $\qquad$ $a > b \Rightarrow a^n > b^n$ (n lẻ)

$|a| > |b| \Leftrightarrow a^n > b^n$ (n chẵn)

h. Lấy căn

$a > b > 0, n \in N^* \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Hệ quả: a, b > 0 có $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2; a, b \geq 0 \Rightarrow a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$

i. Lấy nghịch đảo hai vế và đổi chiều bđt nếu hai vế cùng dấu

Với $a > b > 0 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

$a > b, ab > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

II. Các hằng đẳng thức

1. $a^2 \geq 0; -a^2 \leq 0$ $\qquad$ 2. $|a| \leq 0 \Leftrightarrow a = 0$

3. $|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0$ $\qquad$ 4. $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

III. Các bổ đề hay sử dụng

1. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ $\qquad$ 2. $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \quad (\text{AM}-\text{GM})$

3. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b} \quad (a, b > 0)$ $\qquad$ 4. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2 \quad (a, b > 0)$

5. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2 \quad (bu - nhi - a - cop - ski)$

IV. Các dạng toán

Dạng 1: Dùng định nghĩa và các phép biến đổi tương đương

- Để chứng minh: $A \geq B$ ta xét A – B và chứng minh $A - B \geq 0$

Bài 1: Cho ba số a, b, c bất kỳ, chứng minh bất đẳng thức sau:

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \qquad (1)$

Lời giải

$(1) \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Dấu " = " xảy ra $\leftrightarrow a = b = c$

Bài 2: Cho ba số a, b, c bất kỳ, chứng minh rằng: $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)(1)$

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2b^2 - 2ab^2c + b^2c^2) + \left(b^2c^2 - 2abc^2 + c^2a^2\right) + \left(a^2c^2 - 2a^2bc + a^2b^2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ba)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng các phép biến đổi là tương đường nên bài toán được chứng minh.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow ab = bc; bc = ca; ca = ab \Leftrightarrow a = b = c$

Bài 3: Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e) \quad \forall a,b,c,d,e \in R$

Lời giải

Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - ab + b^2 + \frac{a^2}{4} - ac + c^2 + \frac{a^2}{4} - ad + d^2 + \frac{a^2}{4} - ae + e^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng các phép biến đổi là tương đương nên bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi: $b = c = d = \frac{a}{2}$

Bài 4: Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $0 < a \leq b \leq c$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$

Lời giải

Xét hiệu:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b}$$

$$= \frac{1}{abc}(a^2c + ab^2 + bc^2 - b^2c - ba^2 - ac^2)$$

$$= \frac{1}{abc}\left[(a^2c - b^2c) + (b^2a - a^2b) + (c^2b - ac^2)\right]$$

$$=\frac{1}{abc}\left[c(a-b)(a+b)-ab(a-b)-c^2(a-b)\right]$$

$$=\frac{1}{abc}\left[(a-b)\left(ac+bc-ab-c^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{abc}\left[(a-b)\left(c(a-c)+b(c-a)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{abc}(a-b)(a-c)(c-b)\le 0 \quad (do: 0<a\le b\le c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 5: Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ với a, b, c > 0

Lời giải

Xét hiệu:

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}-2\left(\frac{bc}{abc}+\frac{ac}{abc}+\frac{ab}{abc}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng các phép biến đổi là tương đương nên bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi: $a+b=c$

Bài 6: Chứng minh rằng nếu $a+b\ge 2$ thì $a^3+b^3\le a^4+b^4$

Lời giải

Xét hiệu: $a^4+b^4-a^3-b^3=a^3(a-1)+b^3(b-1)=a^3(a-1)-(a-1)+(a-1)+b^3(b-1)-(b-1)+(b-1)$

$=(a-1)(a^3-1)+(b-1)(b^3-1)+a+b-2=(a-1)^2(a^2+a+1)+(b-1)^2(b^2+b+1)+a+b-2\ge 0+0+0=0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi a = b = 1.

Bài 7: Chứng minh rằng nếu $\forall a,b,c$ ta luôn có: $a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$

Lời giải

Xét hiệu:

$$a^4+b^4+c^4-abc(a+b+c)=a^4+b^4+c^4-a^2bc-b^2ac-c^2ab=\frac{1}{2}(2a^4+2b^4+2c^4-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a^4-2a^2b^2+b^4)+2a^2b^2+(a^4-2a^2c^2+c^4)+2a^2c^2+(b^4-2b^2c^2+c^4)+2b^2c^2-a^2bc-b^2ac-c^2ab\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a^2-b^2)^2+(a^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2+(a^2b^2+b^2c^2-2ab^2c)+(b^2c^2+c^2a^2-2abc^2)+(a^2b^2+c^2a^2-2a^2bc)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ab-ac)^2\right]\ge 0 \quad \forall a,b,c$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bài toán được chứng minh.

Dạng 2: Dùng các phép biến đổi tương đương

- Ta biến đổi các bất đẳng thức cần chứng minh tương đường với BĐT đúng hoặc BĐT đã được chứng minh là đúng

- Nếu $A<B \Leftrightarrow C<D$, với C < D luôn đúng

Bài 1: Cho a, b, c, d, e là các số thực, Chứng minh rằng:

a. $a^2+\frac{b^2}{4} \geq ab$

b. $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$

c. $a^2+4b^2+4c^2 \geq 4ab-4ac+8bc$

d. $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

Lời giải

a. $a^2+\frac{b^2}{4} \geq ab \Leftrightarrow a^2+\frac{b^2}{4}-ab \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2+b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (2a-b)^2 \geq 0$ (đúng)

b. $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+1) \geq 2(ab+a+b) \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a=b=1$

c. $a^2+4b^2+4c^2 \geq 4ab-4ac+8bc \Leftrightarrow (a^2-4ab+4b^2)+4c^2+(4ac-bc) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+2(a-2b).2c+(2c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-2b+2c)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

d. $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Bài 2: Cho ba số $a,b,c \in R$ thỏa mãn: abc = 1 và $a+b+c > \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

a. Chứng minh rằng: $(a-1)(b-1)(c-1)>0$

b. Chứng minh răng luôn tồn tại 1 trong ba số a, b, c nhỏ hơn 1

Lời giải

a. Ta có:

$$(a-1)(b-1)(c-1)>0$$
$$\Leftrightarrow abc-ab-bc-ca+a+b+c>0$$
$$\Leftrightarrow abc+(a+b+c)-(ab+bc+ca)>0$$
$$\Leftrightarrow 1+(a+b+c)-(ab+bc+ca)>0 \quad (1)$$

và $a+b+c > \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Leftrightarrow a+b+c > \frac{ab+bc+ca}{abc} \Leftrightarrow a+b+c > ab+bc+ca$ (2)

Từ (1), (2) ta có điều phải chứng minh.

b. Giả sử tồn tại cả ba số a, b, c lớn hơn $1 \Leftrightarrow abc>1$ (mâu thuẫn với giả thiết)

Vậy luôn tồn tại 1 số nhỏ hơn 1.

Bài 3: Chứng minh bất đẳng thức sau: $(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2)\geq(a^8+b^8)(a^4+b^4)$ (1)

Lời giải

$(1)\Leftrightarrow(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2)-(a^8+b^8)(a^4+b^4)\geq 0\Leftrightarrow a^{12}+a^{10}b^2+a^2b^{10}+b^{12}-a^{12}-a^8b-a^4b^8-b^{12}\geq 0$

$\Leftrightarrow(a^{10}b^2-a^8b^4)+(a^2b^{10}-a^4b^8)\geq 0\Leftrightarrow a^8b^2(a^2-b^2)-a^2b^8(a^2-b^2)\geq 0\Leftrightarrow(a^2-b^2)^2a^2b^2(a^4+a^2b^2+b^4)\geq 0$

Bài 4: Chứng minh rằng: $1<\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2\quad(a,b,c>0)$

Lời giải

Ta có: $a+b<a+b+c\Rightarrow\dfrac{1}{a+b}>\dfrac{1}{a+b+c}\Rightarrow\dfrac{a}{a+b}>\dfrac{a}{a+b+c}$

Tương tự: $\dfrac{b}{b+c}>\dfrac{b}{a+b+c};\dfrac{c}{a+c}>\dfrac{c}{a+b+c}$. Vậy $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}>1$ (*)

Lại có: $a<a+b\Rightarrow\dfrac{a}{a+b}<\dfrac{a+c}{a+b+c};\dfrac{b}{b+c}<\dfrac{a+b}{a+b+c};\dfrac{c}{c+a}<\dfrac{c+b}{a+b+c}$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức ta được: $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$ (**)

Do đó bài toán được chứng minh.

Bài 5: **[Vào 10, ĐHSP TPHCM năm 2007 – 2008].**

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2>a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3$

Lời giải

$a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2>a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3\Leftrightarrow a^3b^2-a^2b^3+b^3c^2-c^2a^3+c^3a^2-b^2c^3>0$

$\Leftrightarrow a^2b^2(a-b)+c^2(b^3-a^3)+c^3(a^2-b^2)>0\Leftrightarrow(a-b)\left[a^2b^2-c^2(b^2+ab+a^2)+c^3(a+b)\right]>0$

$(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)>0$ (luôn đúng)

Bài 6: **[Vào 10 Thanh Hóa, năm 2007 – 2008].**

Chứng minh rằng với a > 0 thì: $\dfrac{a}{a^2+1}+\dfrac{5(a^2+1)}{2a}\geq\dfrac{11}{2}$

Lời giải

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{5(a^2+1)}{2a}\geq\frac{11}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{a^2+1}-\frac{1}{2}+\frac{5(a^2+1)}{2a}-5\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{-(a-1)^2}{2(a^2+1)}+\frac{5a^2-10a+5}{2a}\geq 0\Leftrightarrow\frac{-(a-1)^2}{2\left(a^2+1\right)}+\frac{5(a-1)^2}{2a}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(a-1)^2\left(\frac{5}{a}-\frac{1}{a^2+1}\right)\geq 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}(a-1)^2\left[\frac{5a^2-a+5}{a\left(a^2+1\right)}\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(a-1)^2\left[\frac{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+4a^2+\frac{19}{4}}{a\left(a^2+1\right)}\right]\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng với mọi a > 0 nên bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi a = 0

Bài 7: [HSG – 1994 - 1995]

Chứng minh rằng với mọi số thực $x, y \neq 0$ ta có $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4 \geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$ (1)

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(x^2-xy+y^2)}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-y)^2(x^2-xy+y^2)}{x^2y^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(2x^2-2xy+2y^2)}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(x^2+y^2+(x-y)^2)}{x^2y^2} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng các phép biến đổi là tương đương nên bài toán được chứngminh.

Dấu "=" xảy ra khi x = y.

Bài 8: [Chuyên An Giang năm 2010 - 2011]

Cho $a \geq 4, b \geq 4$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+ab \geq 6(a+b)$

Lời giải

Do $a \geq 4, b \geq 4 \Rightarrow a-4 \geq 0; b-4 \geq 0$

Đặt $x=a-4\ (x \geq 0);\ y=b-4 (y \geq 0)$ ta có: (1) $\Leftrightarrow (x+4)^2+(y+4)^2+(x+4)(y+4) \geq 6(x+y+8)$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+xy+6(x+y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+6(x+y) \geq 0$$

Bất đẳng thức đúng với mọi x, y ≥ 0 do đó bài toán được chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi x = y = 0 hay a = b = 4.

Bài 9: [Vào 10 chuyên KHTN, ĐHQGHN, năm 2000 – 2001]

Cho hai số thực x, y ≠ 0. Chứng minh rằng: $\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2} \geq 3$ (1)

Lời giải

Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}-1+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\ge 0\Leftrightarrow \frac{4x^2y^2-(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^4+y^4-2x^2y^2}{x^2y^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2}\ge 0\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2.\left[\frac{1}{x^2y^2}-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2.\frac{(x^2+y^2)^2-x^2y^2}{x^2y^2(x^2+y^2)^2}\ge 0\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2.\frac{x^4+y^4+x^2y^2}{x^2y^2(x^2+y^2)^2}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng các phép biến đổi là tương đương nên bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $x=\pm y$

Bài 10: Cho các số thực a,b. Chứng minh rằng: $\frac{2a}{a+b}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge \sqrt{ab}+\frac{a+b}{2}$ (1)

Lời giải

Ta có: $\frac{a+b}{2}-\frac{2a}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$; $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab}=\frac{\frac{a^2+b^2}{2}-ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}}=\frac{(a-b)^2}{2\left[\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\right]}$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}}-\frac{1}{a+b}\right]\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2\left[2a+2b-\sqrt{2(a^2+b^2)}-2\sqrt{ab}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2a+2b-\sqrt{2(a^2+b^2)}-2\sqrt{ab}\ge 0\qquad (*)$$

Ta có: $a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=\frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$; $a+b-\sqrt{2(a^2+b^2)}=\frac{-(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+(a+b)}$

$$(*)\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}-\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+(a+b)}\right]\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\sqrt{2(a^2+b^2)}-2\sqrt{ab}\right]\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2.\frac{2(a^2+b^2)-4ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+2\sqrt{ab}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(a-b)^4}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+2\sqrt{ab}}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy rakhi a = b.

Dạng 3: Bất đẳng thức dạng nghịch đảo (Cô si cộng mẫu)

*) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}$ *) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{a+b+c}$

*) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\ge\frac{n^2}{a_1+a_2+...+a_n}\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n \quad \forall a,a_1,.....,a_n>0$

Bài 1: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{a+2b}+\frac{3}{b+2c}+\frac{3}{c+2a}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức dạng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ (tự chứng minh bđt)

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ge\frac{9}{a+2b};\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{b+2c};\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\ge\frac{9}{c+2a}$

Cộng vế các bất đẳng thức trên ta được: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{a+2b}+\frac{3}{b+2c}+\frac{3}{c+2a}$

Vậy bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Bài 2: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $4\left(\frac{2}{a+b}+\frac{3}{c+a}+\frac{4}{b+c}\right)\le\frac{5}{a}+\frac{6}{b}+\frac{7}{c}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức dạng: $\frac{4}{x+y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{4}{a+b}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow 2.\frac{4}{a+b}\le 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$;

Tương tự: $\frac{4}{c+a}\le\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\Rightarrow 3.\frac{4}{a+c}\le 3.\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$; $\quad \frac{4}{b+c}\le\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Rightarrow 4.\frac{4}{b+c}\le 4\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Cộng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$4\left(\frac{2}{a+b}+\frac{3}{c+a}+\frac{4}{b+c}\right)\le\frac{5}{a}+\frac{6}{b}+\frac{7}{c}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c

Bài 3: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+4b+4c}+\frac{b}{b+4c+4a}+\frac{c}{c+4a+4b}\ge\frac{1}{3}$ (1)

Lời giải

$(1)\Leftrightarrow\frac{3a}{a+4b+4c}+\frac{3b}{b+4c+4a}+\frac{3c}{c+4a+4b}\ge 1$

$\Leftrightarrow\left(\frac{3a}{a+4b+4c}+1\right)+\left(\frac{3b}{b+4c+4a}+1\right)+\left(\frac{3c}{a+4a+4b}+1\right)\ge 4$

$\Leftrightarrow 4(a+b+c)\left(\frac{1}{a+4b+4c}+\frac{1}{b+4c+4a}+\frac{1}{c+4a+4b}\right)\ge 4$

$\Leftrightarrow\frac{1}{a+4b+4c}+\frac{1}{b+4c+4a}+\frac{1}{c+4a+4b}\ge\frac{1}{a+b+c}$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$

Ta được: $VT(2) \geq \frac{9}{9(a+b+c)} = \frac{1}{a+b+c}$. (đpcm)

Bài 4: Cho a, b, c > 0 thỏa mãn: $a+b+c=3$. Tìm GTLN của $A = \frac{a}{1+2a} + \frac{b}{1+2b} + \frac{c}{1+2c}$

Lời giải

Cách 1: $2A = \frac{2a}{1+2a} + \frac{2b}{1+2b} + \frac{2c}{1+2c} = 1 - \frac{1}{1+2a} + 1 - \frac{1}{1+2b} + 1 - \frac{1}{1+2c} = 3 - B$

$$B = \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+2b} + \frac{1}{1+2c} \geq \frac{9}{3+2(a+b+c)} = 1$$

$2A = 3 - B \leq 2 \Rightarrow A \leq 1 \Leftrightarrow a = b = c$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức:

$$\frac{9}{x+y+z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{9}{1+a+a} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{1+2a} \leq \frac{1}{9}\left(1 + \frac{2}{a}\right) \Rightarrow \frac{a}{1+2a} \leq \frac{a}{9} + \frac{2}{9}$$

Tương tự: $\frac{b}{1+2b} \leq \frac{b}{9} + \frac{2}{9}$; $\quad \frac{c}{1+2c} \leq \frac{c}{9} + \frac{2}{9}$

Cộng ba vế của bất đẳng thức ta được: $A \leq \frac{a+b+c}{9} + \frac{6}{9} = 1 \Leftrightarrow a = b = c$

Bài 5: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng $\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{a+b+c}{4}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức: $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$$VT = ab.\frac{1}{(a+c)+(b+c)} + bc.\frac{1}{(b+a)+(c+a)} + ca.\frac{1}{(c+b)+(a+b)}$$

$$\leq \frac{1}{4}ab\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right) + \frac{1}{4}bc\left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{c+a}\right) + \frac{1}{4}ca.\left(\frac{1}{c+b} + \frac{1}{a+b}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{bc+ca}{a+b} + \frac{ab+bc}{b+c} + \frac{ab+bc}{a+c}\right) = \frac{a+b+c}{4}$$

Bài 6: Cho a, b, c > 0 thỏa mãn: a + b + c = 1. Tìm GTNN: $A = \frac{1}{abc} + \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

Lời giải

$$\frac{1}{abc} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{9}{ab+bc+ca}; \quad \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2} = 9$$

Lại có: $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{ab+bc+ca} \geq 3 \Rightarrow \frac{7}{ab+bc+ca} \geq 21$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức: $A + \frac{9}{ab+cb+ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca} + 30 \Rightarrow A \geq 30 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

BÀI TẬP VẬN DỤNG:

Bài 1: Cho a, b, c > 0 . Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{4}{a+b+2c}+\frac{4}{b+c+2a}+\frac{4}{c+a+2b}$

Lời giải

Ta có: $\frac{4}{(a+c)(b+c)}\le\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}$

Tương tự: $\frac{4}{b+c+2a}\le\frac{1}{b+a}+\frac{1}{c+a}$; $\quad\frac{4}{c+a+2b}\le\frac{1}{c+b}+\frac{1}{a+b}$

Cộng theo vế ta được: $\frac{4}{a+b+2c}+\frac{4}{b+c+2a}+\frac{4}{c+a+2b}\le 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\quad(1)$

Lại có: $\frac{1}{a+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$; $\quad\frac{1}{b+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$; $\quad\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Cộng theo vế ta được:

Cộng theo vế ta được: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\quad(2)$

Từ (1) và (2) nên:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{4}{a+b+2c}+\frac{4}{b+c+2a}+\frac{4}{c+a+2b}$$

Vậy bài toán được chứng minh , Dấu "=" xảy ra khi a = b = c

Bài 2: Cho a, b, c > 0 . Chứng minh rằng: $\frac{7}{a}+\frac{4}{b}+\frac{7}{c}\ge 9\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{2}{b+2c}+\frac{3}{c+2a}\right)$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{9}{a+b+b}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};\frac{9}{b+c+c}\le\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\Rightarrow 2.\frac{9}{b+c+c}\le\frac{2}{b}+\frac{2}{c}+\frac{2}{c}$$

$$\frac{9}{a+c+c}\le\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\Rightarrow 3.\frac{9}{c+a+a}\le\frac{3}{c}+\frac{3}{a}+\frac{3}{a}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức ta được đpcm

Bài 3: Cho a, b, c > 0 . Chứng minh rằng: $\frac{a}{2a+5b+5c}+\frac{b}{2b+5c+5a}+\frac{c}{2c+5a+5b}\ge\frac{1}{4}\quad(1)$

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow 3.VT\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow 3.VT+3\ge\frac{15}{4}$$

Thật vậy:

$$\Rightarrow 3.VT+3=(5a+5b+5c)\left(\frac{1}{2a+5b+5c}+\frac{1}{2b+5c+5a}+\frac{1}{2c+5a+5b}\right)\ge 5(a+b+c).\frac{9}{12(a+b+c)}=\frac{45}{12}=\frac{15}{4}$$

Bài toán được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Dạng 4: Dùng các bất đẳng thức phụ

Các bất đẳng thức phụ thường sử dụng:

$x^2 + y^2 \geq 2xy$

$x^2 + y^2 \geq 2|xy| \geq 2xy$

$(x+y)^2 \geq 4xy; \quad (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$

$x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$

$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$

Bài 1: Cho hai số a và b thỏa mãn: $a + b = 1$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 \geq \dfrac{1}{4}$

Lời giải

Ta có: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 - ab + b^2$

Từ: $a + b = 1 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 1; \quad (a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2} \qquad (1)$

Lại có: $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2} \qquad (2)$

Từ (1), (2) ta có: $ab \leq \dfrac{1}{4} \Rightarrow -ab \geq \dfrac{-1}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 - ab \geq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

Vậy bài toán được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi a = b.

Bài 2: Cho $a + b > 1$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 > \dfrac{1}{8}$

Lời giải

Từ $a + b > 1 \Rightarrow (a+b)^2 > 1 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 > 1; \quad (a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$

$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow (a^2+b^2)^2 \geq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a^4 + b^4 + 2a^2b^2 \geq \dfrac{1}{4} \qquad (1)$

Có tiếp: $(a^2 - b^2)^2 \geq 0 \Rightarrow a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \geq 0 \qquad (2)$

Cộng theo vế của (1) và (2) ta được: $2\left(a^4 + b^4\right) \geq \dfrac{1}{4} \Rightarrow a^4 + b^4 \geq \dfrac{1}{8}$

Vậy bài toán được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi a = b

Bài 3: Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{c}$

Lời giải

Ta có: $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$

Dấu "=" xảy ra khi x = y

Áp dụng: $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} \geq 2\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{c} = 2\dfrac{a}{c}$; $\dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq 2.\dfrac{b}{a}$; $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq 2.\dfrac{b}{c}$

$$\Leftrightarrow 2VT \geq 2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) \Rightarrow VT \geq VP$$

Vậy bài toán được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi a = b

Bài 4: Cho a, b, c, d, > 0 và abcd = 1. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a) \geq 10$$

Lời giải

Ta có: $a^2+b^2 \geq 2ab;\ c^2+d^2 \geq 2cd \Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 2(ab+cd)$

Từ : $abcd = 1 \Rightarrow ab = \frac{1}{cd}; ac = \frac{1}{bd}; ad = \frac{1}{bc}; bc = \frac{1}{ad}; bd = \frac{1}{ac}; cd = \frac{1}{ab}; ad = \frac{1}{bc}$

Có: $2(ad+bc) = 2\left(ab+\frac{1}{ab}\right) \geq 2.2. = 4 \quad \left[do: \left(\frac{ab}{1}+\frac{1}{ab}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab+\frac{1}{ab} \geq 2\right]$

Vậy $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 4$

Lại có: $ab+ac+bc+bd+cd+ad = (ad+bc)+(ac+bd)+(bc+ad)$

$$= \underbrace{(ab+\frac{1}{ab})}_{\geq 2} + \underbrace{(ac+\frac{1}{ac})}_{\geq 2} + \underbrace{(bc+\frac{1}{bc})}_{\geq 2} = 6 \Rightarrow VT \geq 10$$

Bài 5: Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh rằng: $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$ (1)

Lời giải

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geq 64x^2y^2z^2$$

Lại có:

$$(x+y)^2 \geq 4xy; (y+z)^2 \geq 4yz; (z+x)^2 \geq 4xz$$
$$\Rightarrow (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geq 64x^2y^2z^2$$

Vậy bài toán được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi a = b

Bài 6: Cho $a,b,c > 0; abc = 1$. Chứng minh rằng: $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

Lời giải

Ta có:

$(a+1)^2 \geq 4a; (b+1)^2 \geq 4b; (c+1)^2 \geq 4c \Rightarrow \left[(a+1)(b+1)(c+1)\right]^2 \geq (8abc)^2 \Rightarrow (a+1)(b+1)(c+1) \geq 8abc$

Vậy bài toán được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Bài 7: Cho $a,b,c,d > 0; abcd = 1$. Chứn minh rằng: $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd \geq 6$

Lời giải

Có: $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd \geq 2ab+2cd+ab+cd = 3(ab+cd)$

Lại có: $3(ab+cd) = 3\left(ab+\frac{1}{ab}\right) \geq 3.2 = 6$

Vậy bài toán được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = d.

Bài 8: Cho $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

a. $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$

b. $xy+yz+zx\leq\frac{1}{3}$

Lời giải

a. Ta có: $(x-y)^2\geq 0\ \ \forall x,y\Rightarrow x^2+y^2\geq 2xy$.

Tương tự: $y^2+z^2\geq 2yz$; $x^2+z^2\geq 2xz$

Cộng theo vế ta được:

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 2\left(xy+yz+zx\right)\Rightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq x^2+y^2+z^2+2\left(xy+yz+zx\right)$$

$$\Rightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\left(x+y+z\right)^2=1\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi x = y = z.

b. Theo chứng minh trên:

$$2x^2+2y^2+2z^2\geq 2(xy+yz+zx)\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$

$$\Rightarrow (x+y+)^2\geq 3(xy+yz+zx)\Leftrightarrow 1\geq 3(xy+yz+zx)$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\leq\frac{1}{3}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi x = y = z.

Bài 9: Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn: $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $a+b+2c\geq 4(1-a)(1-b)(1-c)$

Lời giải

Ta có: $(x+y)^2\geq 4xy\Leftrightarrow 4xy\leq(x+y)^2$

Áp dụng ta được:

$$0\leq a,b,c\leq 1\Rightarrow 1-c\geq 0\Rightarrow 4(1-a)(1-b)\leq(1-a+1-b)^2=(1+c)^2\Rightarrow VP\leq(1+c)^2(1-c)=(1-c^2)(1+c)\leq 1+c$$

Mà: $1=a+b+c\Rightarrow VP\leq a+b+2c\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=\frac{1}{2}\\c=0\end{cases}$

Bài 10: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn: $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\leq 1$$

Lời giải

Ta có: $x^3+y^3\geq xy(x+y)\Leftrightarrow(x+y)(x-y)^2\geq 0\quad\forall x,y>0$

Áp dụng ta có:

$$a^3+b^3+1\geq ab(a+b)+abc=ab(a+b+c)\Rightarrow\frac{1}{a^3+b^3+1}\leq\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{abc}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{a+b+c}$$

Tương tự: $\frac{1}{b^3+c^3+1}\le\frac{a}{a+b+c}; \frac{1}{c^3+a^3+1}\le\frac{b}{a+b+c}$

Cộng vế các bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi a = b = 1.

Bài 11: Cho $a,b,c\ge 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\ge\frac{3}{1+abc}$

Lời giải

Chứng minh:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge\frac{2}{1+xy}\quad \forall x,y>0; xy\ge 1$$
$$\Leftrightarrow (2+x^2+y^2)(1+xy)\ge 2(1+x^2)(1+y^2)$$
$$\Leftrightarrow 2xy+xy(x^2+y^2)\ge x^2+y^2+2x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2(xy-1)\ge 0\qquad (do: xy\ge 1)$$

Áp dụng: $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge\frac{2}{1+ab}\ge\frac{2}{1+abc};\quad \frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\ge\frac{2}{1+abc};\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}\ge\frac{2}{1+abc}$

Cộng vế các bất đẳng thức thức ta được điều phải chứng minh.

Bài 12: Cho $x,y,z>0; x+y+z=1$. Tìm GTNN: $A=\frac{x^2(y+z)}{yz}+\frac{y^2(z+x)}{zx}+\frac{z^2(x+y)}{xy}$

Lời giải

Ta có: $A=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{y}$

Dễ chứng minh: $a^3+b^3\ge(a+b)ab\qquad \forall a,b>0$

Thật vậy $\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)ab\ge 0\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2\ge 0\qquad \forall a,b\ge 0$

Hoặc: $a^2+b^2-ab\ge ab\ \ \forall a,b\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)\ge ab(a+b)\Leftrightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)$

Áp dụng: $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}\ge x+y\qquad \forall x,y>0;$

Tương tự: $\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{y}\ge y+z;\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{z}\ge x+z$

Cộng vế ba bất đẳng thức ta được: $A\ge 2(x+y+z0=2\to \min A=2\leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$

Bài 13: Cho $x,y,z>0; x^2+y^2+z^2=1$. Tìm GTNN: $A=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}$

Lời giải

Ta có: $A^2=\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{x^2z^2}{y^2}+2$

Mà: $a^2+b^2 \geq 2ab$

Áp dụng: $\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2} \geq 2y^2; \frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{x^2z^2}{y^2} \geq 2z^2; \frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{x^2z^2}{y^2} \geq 2x^2$

Cộng theo vế ta được: $2\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{x^2z^2}{y^2}\right) \geq 2\left(x^2+y^2+z^2\right)=2 \Rightarrow \frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{x^2z^2}{y^2} \geq 1$

Do đó: $A^2 \geq 3 \Leftrightarrow x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \min A=\sqrt{3}$

DẠNG 5: PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

- Muốn chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ đúng, ta giả sử $A \geq B$ là sai, tức là A < B là đúng
- Sau đó chứng minh A < B là sai $\Rightarrow A \geq B$ là đúng

Bài 1: Cho $a^2+b^2 \leq 2$. Chứng minh rằng: $a+b \leq 2$

Lời giải

Giả sử $a+b>2$, bình phương hai vế ta được: $(a+b)^2>4 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2>4$ (1)

Mặt khác ta lại có: $a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$

Theo giải thiết: $2(a^2+b^2) \leq 4 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 4$

Điều này mâu thuẫn với (1) nên suy ra $a+b \leq 2$

Bài 2: Với mọi số thực a, b, c hãy chứng tỏ: $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2 \geq b(a-c)+c(a-b)$.

Lời giải

Giả sử: $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2<b(a-c)+c(a-b) \Leftrightarrow \frac{a^2}{4}+b^2+c^2-ab+bc-ac+bc<0$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4}+b^2+c^2-ab-ac+2bc<0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}-b-c\right)^2<0$

Vậy điều giả sử là sai suy ra: $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2 \geq b(a-c)+c(a-b)$

Bài 3: Cho $a^3+b^3=2$. Chứng minh rằng: $a+b \leq 2$.

Lời giải

Giả sử a + b > 2. Ta có:

$$(a+b)^3>8 \Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)>8 \Leftrightarrow 3ab(a+b)>6$$
$$\Leftrightarrow ab(a+b)>2 \Leftrightarrow ab(a+b)>a^3+b^3$$
$$\Leftrightarrow 0>(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b) \Leftrightarrow 0>(a+b)(a-b)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng sai nên $a+b \leq 2$.

Bài 4: Cho các số thực $a,b,c \in (0;2)$. Chứng minh rằng có ít nhất 1 trong ba bất đẳng thức sau là sai $a(2-b)>1; b(2-c)>1; c(2-a)>1$

Lời giải

Giả sử cả ba bất đẳng thức trên đều đúng, nhân chúng với nhau theo vế, ta được:

$a(2-b).b(2-c).c(2-a)>1 \Leftrightarrow a(2-a).b(2-b).c(2-c)>1$

Mặt khác, do $a \in (0;2)$ nên a và $2-a>0 \Rightarrow 0<a.(2-a)=1-(a-1)^2 \le 1$

Tương tự: $0<b.(2-b)\le 1; 0<c(2-c)\le 1$

Do đó: $a(2-a).b(2-b).c(2-c)\le 1$ (mâu thuẫn). Vậy ta có bài toán được chứng minh.

Bài 5: [Chuyên Thái Bình: năm 2007 – 2008]

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+ab+bc+ca<0$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2<c^2$

Lời giải

Giả sử $a^2+b^2\ge c^2$, khi đó:

$a^2+b^2+2(ab+bc+ca)+a^2+b^2 \ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+ab+bc+ca)\ge (a+b+c)^2$

Kết hợp với giả thiết: $0>2(a^2+b^2+ab+bc+ca)\ge (a+b+c)^2 \Rightarrow (a+b+c)^2<0$ (mâu thuẫn)

Bài 6: [Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa: năm 2007 – 2008]

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a+b+c>0; ab+bc+ca>0; abc>0$

Chứng minh rằng cả ba số a, b, c đều dương

Lời giải

Giả sử ba số a, b, c có 1 số không dương. Không mất tính tổng quát, ta giả sử: $a\le 0$

Mà lại có: $abc>0 \Rightarrow a\ne 0 \Rightarrow a<0$

Lại có: $a+b+c>0 \Rightarrow b+c>0 \Rightarrow a(b+c)<0$

Từ giả thiết thứ hai: ab + bc + ca > 0, ta có: $a(b+c)+bc>0 \Rightarrow bc>0$

Vì thế abc < 0 (mâu thuẫn).

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 7: Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng: Tồn tại một trong các số 9ab, 9bc, 9ca nhỏ hơn $(a+b+c)^2$

Lời giải

Giả sử: $9ab\ge (a+b+c)^2; 9bc\ge (a+b+c)^2; 9ca\ge (a+b+c)^2$

$\Rightarrow 3(a+b+c)^2 \le 9(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a+b+c)^2\le 3(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2\le ab+bc+ca \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\le 0$ (1)

Theo đầu bài: a, b, c đôi một khác nhau nên: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$ (2)

Từ (1), (2) ta thấy mâu thuẫn nên bài toán được chứng minh.

Bài 8: [Chuyên HCM năm 2006 – 200 7] .

Cho hai số dương x, y thỏa mãn: $x^3+y^3=x-y$. Chứng minh rằng: $x^2+y^2<1$

Lời giải

Do x, y dương nên $x,y>0$ mà $x^3+y^3=x-y$ nên x > y

Giả sử: $x^2+y^2\ge 1$

$\Rightarrow x^3+y^3\le (x^2+y^2)(x-y) \Leftrightarrow x^3+y^3\le x^3+x^2y-yx^2-y^3 \Leftrightarrow xy^2-yx^2-2y^3\ge 0 \Leftrightarrow y(xy-x^2-2y^2)\ge 0$ (*)

$\Leftrightarrow y\left[\underbrace{x(y-x)}_{<0}-2y^2\right]\ge 0$ do $x>y\Rightarrow y-x<0$

Do đó (*) không thể xảy ra $x^2+y^2<1$

Bài 9: Cho cặp số (x; y) thỏa mãn các điều kiện sau: $\begin{cases} -1\le x+y\le 1 & (1)\\ -1\le x+y+xy\le 1 & (2)\end{cases}$

Chứng minh rằng: $|x|\le 2;|y|\le 2$

Lời giải

Ta đi chứng minh: $|x|<2$

Giả sử $|x|>2$, khi đó $-2<x<2$

+) $|x|>2,(1)\Rightarrow y\le 1-x<-1\Rightarrow xy<-2$

+) $|x|<-2,(1)\Rightarrow y\ge -1-x>1\Rightarrow xy<-2$

Do đó nếu $|x|>2\Rightarrow xy<-2$. Mà $x+y\le 1\Rightarrow x+y+xy<-1$ (mâu thuẫn với 2)

Suy ra: $|x|\le 2$

Ta đi chứng minh $|y|<2$ (tương tự chứng minh $|x|<2$)

Bài 10: [Olympic Toán Ireland năm 1997]

Cho $a,b,c\ge 0;a+b+c\ge abc$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2\ge abc$

Lời giải

+) Nếu 1 trong ba số bằng 0 thì bất đẳng thức được chứng minh

Ta xét: a, b, c > 0

Giả sử ngược lại: $a^2+b^2+c^2<abc\Rightarrow abc>a^2+b^2+c^2>a^2\Rightarrow a<bc$

Tương tự ta có: $b<ac;c<ab\Rightarrow a+b+c<ab+bc+ca$ (1)

Lại có: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow abc>a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow abc>ab+bc+ca$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: $abc>a+b+c$ (mâu thuẫn với giả thiết) nên điều giả sử là sai.

Bài 11: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\ge abc$. Chứng minh rằng có ít nhất hai trong số các bất đẳng thức sau đúng: $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{6}{c}\ge 6;\ \frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{6}{a}\ge 6;\ \frac{2}{c}+\frac{3}{a}+\frac{6}{b}\ge 6$

Lời giải

Ta có: $a+b+c\ge abc \Leftrightarrow \frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\ge 1 \quad (do: abc>0)$

Đặt $\frac{1}{a}=x; \frac{1}{b}=y; \frac{1}{c}=z \Rightarrow x,y,z>0; \quad xy+yz+xz\ge 1$

Ta phải chứng minh có ít nhất hai trong ba bất đẳng thức sau đúng:

$2x+3y+6z\ge 6; \quad 2y+3z+6x\ge 6; \quad 2x+3z+6y\ge 6$

Giả sử có ít nhất 2 trong 3 bất đẳng thức sau là sai, chẳng hạn:

$2x+3y+6z<6; \quad 2y+3z+6x<6$

Cộng vế hai bất đẳng thức: $8x+5y+9z<12$

Từ giả thiết: $xy+yz+zx\ge 1 \Rightarrow x(y+z)\ge 1-yz \Rightarrow x\ge \frac{1-yz}{y+z}$

Do đó: $12>8.\frac{1-yz}{y+z}+5y+9z \Leftrightarrow 12(y+z)>8(1-yz)+(5y+9z)(y+z)$

$\Leftrightarrow 5y^2+6yz+9z^2-12y-12z+8<0 \Leftrightarrow y^2+2y(3z-2)+9z^2-12z+4+4y^2-8y+4<0$

$\Leftrightarrow (y+3z-2)^2+4(y-1)^2<0$

Bất đẳng thức cuối cùng vô lý nên bài toán được chứng minh.

Bài 12: Cho bốn số a, b, c, d thỏa mãn điều kiện: $ac\ge 2(b+d)$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bđt sau là sai: $a^2<4b; c^2<4d$

Lời giải

Giả sử hai bđt trên đều đúng $a^2+c^2<4(b+d) \quad (1)$

Theo giả thiết: $ac\ge 2(b+d) \Leftrightarrow 2ac\ge 4(b+d)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a^2+c^2<2ac \Leftrightarrow (a-c)^2<0$

Bất đẳng thức cuối cùng vô lý nên bài toán được chứng minh.

CHUYÊN ĐỀ 7: ĐA THỨC

Bài 1: TÍNH CHIA HẾT CỦA ĐA THỨC

A. Các kiến thức cần nhớ

Giả sử f(x) và g(x) là các đa thức và bậc của f(x) lớn hơn hoặc bằng bậc của g(x). Khi đó luôn tồn tại duy nhất các đa thức q(x) và r(x), thỏa mãn:

f(x) = g(x) . q(x) + r(x)

Trong đó: Bậc của r(x) nhỏ hơn bậc của g(x)

Nếu r(x) $\equiv$ 0 thì ta nói f(x) chia hết cho g(x)

Xét phép chia đa thức f(x) cho đa thức bậc nhất x – a

f(x) = (x-a) . q(x) + r . Cho x = a $\Rightarrow$ f(a) = r

- Kết luận: Phần dư trong phép chia đa thức f(x) cho x – a là một số bằng f(a)

- Nếu f(a) = 0 hay x = a là nghiệm của đa thức f(x) thì f(x) chia hết cho x – a

- Định lý Bơ Du:

Số dư trong phép chia đa thức f(x) cho nhị thức x – a bằng giá trị của f(x) tại x = a

$\Rightarrow f(x) \vdots (x-a) \Leftrightarrow f(a)=0$

Ví dụ: Không đặt tính chia, hãy xét xem đa thức A = $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ có chia hết cho x + 1; x – 3 hay không?

Lời giải

Ta có: f(-1) = 0 suy ra A chia hết cho B

f(3) = -20 ≠ 0 nên A không chia hết cho C

- Chú ý:

+) Nếu f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì chia hết cho x – 1

+) Nếu f(x) có tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì chia hết cho x + 1

+) $a^n - b^n$ chia hết cho a – b (a ≠ -b)

+) $a^n + b^n$ (n lẻ) chia hết cho a + b (a ≠ -b)

+) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$

+) $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... - ab^{n-2} + b^{n-1})$

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Chứng minh một đa thức chia hết cho một đa thức (Xét các đa thức một biến)

Cách 1: Phân tích đa thức bị chia thành nhân tử có một thừa số là đa thức chia

Nếu $f(x) = g(x).h(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \vdots g(x) \\ f(x) \vdots h(x) \end{cases}$

Bài 1: Chứng minh rằng

a. $f(x) = 8x^9 - 9x^8 + 1 \vdots g(x) = (x-1)^2$

b. $f(x) = x^{99} + x^{98} + ... + x + 1; g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

c. $f(x) = x^{8n} + x^{4n} + 1; g(x) = x^{2n} + x^n + 1$

d. $f(x) = x^{100} + x^{20} + 1; g(x) = x^{40} + x^{20} + 1$

e. $f(x) = x^{10} - 10x + 9; g(x) = (x-1)^2$

Lời giải:

a. Ta có:

$$f(x) = 8x^9 - 9x^8 + 1 = 8x^9 - 8 - 9x^8 + 9$$
$$= 8(x^9 - 1) - 9(x^8 - 1) = 8(x-1)(x^8 + x^7 + ... + 1) - 9(x-1)(x^7 + x^6 + x^5 + ... + 1)$$

$= (x-1)(8x^8 - x^7 - ..... - x - 1)$

Cách 1: Ta có $8x^8 - x^7 - ..... - x - 1$ có tổng các hệ số = 0 $\Rightarrow \vdots (x-1) \Rightarrow f(x) \vdots (x-1)^2$

Cách 2: Ta có:

$$f(x) = 8x^9 - 9x^8 + 1 = (x-1)(8x^8 - x^7 - ..... - x - 1)$$
$$= (x-1)(8x^8 - 8x^7 + 7x^7 - 7x^6 + ... + x - 1)$$
$$= (x-1)^2(8x^7 + 7x^6 + ... + 2x + 1) \vdots (x-1)^2$$

b. Ta có:

$f(x) = x^{99} + x^{98} + ... + x + 1 = (x^{99} + ... + x^{95}) + ...(x^4 + x^3 + ... + x + 1) = (x^4 + ... + 1)(x^{95} + x^{90} + ... + x^5 + 1) \vdots g(x)$

Cách 2: Ta có

$(x-1).f(x) = x^{100} - 1 = [(x^5)^{20} - 1] \vdots (x^5 - 1) = (x-1).g(x) \Rightarrow f(x) \vdots g(x)$

c. Ta có

$f(x) = x^{8n} + x^{4n} + 1 = (x^{4n})^2 + 2.x^{4n} + 1 - x^{4n} = (x^{4n} + 1)^2 - (x^{2n})^2 = (x^{4n} + x^{2n} + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1)$

Lại có: $x^{4n} + x^{2n} + 1 = (x^{2n} - x^n + 1)(x^{2n} + x^n + 1) \Rightarrow f(x) \vdots g(x)$

d. Đặt $t = x^{20} \Rightarrow f(t) = t^5 + t + 1; g(t) = t^2 + t + 1$

Ta có: $f(t) = t^5 - t^2 + t^2 + t + 1 = t^2(t^3 - 1) + (t^2 + t + 1) = (t^2 + t + 1)(t^3 - t^2 + 1) \Rightarrow f(x) \vdots g(x)$

e.Ta có:

$f(x) = (x^{10} - 1) - (10x - 10) = (x-1)(x^9 + x^8 + ... + x + 1 - 10) = (x-1)[(x^9 - 1) + ... + (x-1)]$

$=(x-1)^2(x^8 + 2x^7 + ... + 8x + 9) \Rightarrow f(x) \vdots g(x)$

Cách 2: Biến đổi đa thức bị chia thành một tổng các đa thức chia hết cho đa thức chia

Nếu f(x) = g(x) + h(x) + k(x), mà $\begin{cases} g(x) \vdots q(x) \\ h(x) \vdots q(x) \\ k(x) \vdots q(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) \vdots q(x)$

Bài 2: Chứng minh rằng

a. $f(x) = x^{50} + x^{10} + 1 \vdots g(x) = x^{20} + x^{10} + 1$

b. $f(x) = x^{199} + x^{27} - x^2 \vdots g(x) = x^2 - x + 1$

c. $f(x) = x^{99} + x^{88} + .. + x^{11} + 1; g(x) = x^9 + x^8 + ... + x + 1$

d. $f(x) = x^{3m+1} + x^{3m+2} + 1; g(x) = x^2 + x + 1 \qquad \forall n \in N$

e. $f(x) = x^{6m+4} + x^{6n+2} + 1; g(x) = x^2 - x + 1 \qquad \forall m.n \in N$

Lời giải

a. $f(x) = x^{50} + x^{10} + 1 = (x^{50} - x^{20}) + (x^{20} + x^{10} + 1)$

Lại có: $x^{50} - x^{20} = x^{20}(x^{30} - 1) = x^{20}[(x^{10})^3 - 1] = x^{20}(x^{10} - 1)(x^{20} + x^{10} + 1) \Rightarrow f(x) \vdots g(x)$

b. Ta có:

$f(x)=x^{199}+x^{27}-x^2=x^{199}-x+x^{27}+1-x^2+x-1$

$=x^{199}-x+x^{27}+1-(x^2-x+1)=x(x^{1998}-1)+(x^{27}+1)-g(x)$

$=x[(x^{999})^2-1]+(x^3)^9+1-g(x)=\underbrace{x(x^{999}-1)(x^{999}+1)}_{\vdots x^{999}+1\Rightarrow \vdots x^3+1}+\underbrace{(x^3)^9+1}_{\vdots x^3+1}-g(x)\Rightarrow f(x)\vdots g(x)$

c. Ta có: $(x-1).g(x)=x^{10}-1$

$f(x)=x^{99}+x^{88}+..+x^{11}+1=(x^{99}-x^9)+(x^{88}-8)+...(x^{11}-x)+x^9+x^8+...+x+1$

$=x^9(x^{90}-1)+x^8(x^{80}-1)+...+x(x^{10}-1)+g(x)$

$=\underbrace{x^9[(x^{10})^9-1]}_{\vdots x^{10}-1}+\underbrace{x^8[(x^{10})^8-1]}_{\vdots x^{10}-1}+...+\underbrace{x(x^{10}-1)}_{\vdots x^{10}-1}+g(x)\Rightarrow f(x)\vdots g(x)$

d. Ta có $f(x)=x^{3m+1}+x^{3m+2}+1=(x^{3m+1}-x)+(x^{3m+2}-x^2)+(x^2+x+1)$

$x^{3m+1}-x=x(x^{3m}-1)=x[(x^3)^m-1]\vdots x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$x^{3m+2}-x^2=x^2(x^{3m}-1)=x^2[(x^3)^m-1]\vdots x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$\Rightarrow f(x)\vdots g(x)$

e. Ta có:

$f(x)=x^{6m+4}+x^{6n+2}+1=x^{6m+4}-x^4+x^{6n+2}-x^2+x^4+x^2+1=x^4\underbrace{[(x^6)^m-1]}_{\vdots x^6-1}+x^2\underbrace{[(x^6)^n-1]}_{x^6-1}+(x^4+x^2+1)$

$x^6-1=(x^3)^2-1=\underbrace{(x^3-1)(x^3+1)}_{\vdots x^2-x+1};x^4+x^2+1=\underbrace{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}_{\vdots x^2-x+1}\Rightarrow f(x)\vdots g(x)$

Cách 3: Sử dụng các phép biến đổi tương đương

Muốn chứng minh f(x) chia hết cho g(x) ta đi chứng minh

$\left[\begin{array}{l} f(x)+g(x)\vdots g(x) \\ f(x)-g(x)\vdots g(x)\end{array}\right.\Rightarrow f(x)\vdots g(x)$

Bài 3: Chứng minh rằng $f(x)=x^{99}+x^{88}+...+x^{11}+1\vdots g(x)=x^9+x^8+...+x+1$

Lời giải

Ta có: $f(x)-g(x)=\underbrace{x^{99}(x^{90}-1)}_{\vdots x^{10}-1}+\underbrace{x^8(x^{80}-1)}_{\vdots x^{10}-1}+...+\underbrace{x(x^{10}-1)}_{\vdots x^{10}-1}$

Mà $x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+x^7+...+x+1)\Rightarrow f(x)-g(x)\vdots g(x)$

Lại có: $g(x)\vdots g(x)\Rightarrow f(x)\vdots g(x)$

Cách 4: Chứng tỏ rằng mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia

- Cách này áp dụng với những bài toán mà đa thức chia dễ tìm được nghiệm

Bài 4: Chứng minh rằng

a. $[f(x)=(x^2+x-1)^{10}+(x^2-x+1)^{10}-2]\vdots g(x)=x^2-x$

b. $f(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1;g(x)=x(x+1)(2x+1)\quad \forall n\in N$

c. $f(x)=(x-2)^{2n}+(x-3)^{2n}-1 \vdots g(x)=x^2-5x+6 \quad \forall n\in N^*$

d. $f(x)=x^2-x^9-x^{1945} \vdots g(x)=x^2-x+1$

Lời giải

a. $g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$, Vậy g(x) có hai nghiệm là x = 0 ; x = 2

$f(1)=0; f(0)=0 \Rightarrow f(x) \vdots (x-1); f(x) \vdots x$, mà x và x -1 không chứa nhân tử chung.

Vậy $[f(x)=(x^2+x-1)^{10}+(x^2-x+1)^{10}-2] \vdots g(x)=x^2-x$

b. $g(x)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{0;-1;\dfrac{-1}{2}\right\}; f(0)=0; f(-1)=0; f\left(\dfrac{-1}{2}\right)=0 \Rightarrow f(x) \vdots g(x)$

c. $g(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{2;3\}; f(2)=f(3)=0 \Rightarrow f(x) \vdots g(x)$

d. Ta có: $f(x)=x^2-x^9-x^{1945}=x^2-x+1-(x^9+1)-(x^{1945}-x)$

$x^2-x+1 \vdots x^2-x+1$ (1); $x^9+1=[(x^3)^3+1] \vdots (x^3+1) \vdots x^2-x+1$ (2); $x^{1945}-x=x(x^{1944}-1) \vdots \left(x^3+1\right)$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có f(x) chia hết cho g(x).

CHUYÊN ĐỀ 3: ĐA THỨC

Bài 2: PHẦN DƯ TRONG PHÉP CHIA ĐA THỨC

A. Tìm dư của phép chia đa thức mà không thực hiện phép chia

1. Cách 1: Tách đa thức bị chia thành tổng các đa thức chia hết cho đa thức chia và còn dư

Bài 1: Tìm dư trong phép chia

a. $f(x)=x^7+x^5+x^3+1; g(x)=x^2-1$

b. $f(x)=x^{27}+x^9+x^3+x; g(x)=x^2-1$

c. $f(x)=x^{41}; g(x)=x^2+1$

d. $f(x)=x^{43}; g(x)=x^2+1$

e. $f(x)=x^{100}+x^{99}+...+x+1; g(x)=x^2+x+1$

f. $f(x)=x^{100}+x^{90}+...+x^{10}+1; g(x)=x^2-x+1$

g. $f(x)=x^{100}+x^{99}+...+x+1; g(x)=(x+1)(x^2+1)$

h. $f(x)=x^{10}+x^9+...+x+1; g(x)=x^2-x-1$

Lời giải:

a. $f(x)=(x^7-x^5)+(2x^5-2x^3)+(3x^3-3x)+(3x+1)=x^5(x^2-1)+2x^3(x^2-1)+3x(x^2-1)+3x+1$

Vậy đa thức dư là: 3x + 1

b. $f(x)=(x^{27}-x)+(x^9-x)+(x^3-x)+4x=x[(x^2)^{13}-1]+x[(x^2)^4-1]+x(x^2-1)+4x$, dư là : 4x

c. $f(x)=x^{41}=(x^{41}-x)+x=\underbrace{x[(x^4)^{10}-1]}_{\vdots x^4-1\Rightarrow \vdots x^2+1}+x$, Vậy dư là : x

d. $f(x)=x^{43}=(x^{43}+x)-x=\underbrace{x[(x^2)^{21}+1]}_{\vdots x^2+1}-x$, Vậy dư là : -x

e. $f(x)=x^{100}+x^{99}+...+x+1=(x^{100}+x^{99}+x^{98})+...(x+1)=\underbrace{(x^2+x+1)(x^{98}+x^{95}+...+x^2)}_{\vdots(x^2+x+1)}+\underbrace{x+1}_{du}$

f.Ta có:

$f(x)=x^{100}+x^{90}+...+x^{10}+1$

$=(x^{100}+x)+(x^{90}-1)+(x^{80}-x^2)+(x^{70}+x)+(x^{60}-1)+(x^{50}-x^2)+(x^{40}+x)+(x^{30}-1)+$

$(x^{20}-x^2)+(x^{10}+x)+3x^2-4x+4$

$=x[(x^3)^{33}+1]+[(x^6)^{15}-1]+x^2[(x^6)^{13}-1]+x[(x^3)^{33}+1]+....+3(x^2-x+1)-\underbrace{(x-1)}_{du}$

g. g(x) có 101 số hạng, nhóm 4 số hạng 1 nhóm, dư là : 1

h. Ta có:

$f(x)=x^{10}+x^9+...+x+1$

$=(x^{10}+x)+(x^9+1)+(x^8-x^2)+(x^7-x)+(x^6+1)+(x^5+x^2)+(x^4+x)+(x^3+1)\underbrace{-x-1}_{du}$

Bài 2: Tìm số dư trong phép chia

$f(x)=(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2008;\ g(x)=x^2+10x+21$

Lời giải:

Ta có:

$f(x)=(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2008=(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+2008$

Đặt $t=x^2+10x+21 \quad (t\neq -3; t\neq -7)\Rightarrow P(t)=t^2-2t+\underbrace{1993}_{du}$

2. Cách 2: Xét giá trị riêng (phép chia ảo)

Bài 3: Tìm số dư của f(x) cho g(x), biết rằng

a. $f(x)=x^7+x^5+x^3+1; g(x)=x^2-1$

b. $f(x)=x^{10}+x^8+...x+1; g(x)=x^2-x-2$

c. $f(x)=(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+1999; g(x)=x^2+8x+12$

Lời giải

a. Gọi thương phép chia là q(x) và dư là: ax + b , ta có:

$x^7+x^5+x^3+1=(x^2-1).q(x)+\text{ax+b} \quad \forall x$

Vì đẳng thức đúng với mọi x nên ta chọn x = 1 và x = -1, được:

$\begin{cases} x=1\Rightarrow 4=a+b \\ x=-1\Rightarrow -2=-a+b \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}\Rightarrow du: 3x+1$

b. Ta có : $g(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

Thực hiện phép chia f(x) cho g(x) ta được:

$f(x)=(x+1)(x-2).q(x)+\text{ax+b}$

Cho $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow 1=-a+b \\ x=2 \Rightarrow 2047=2a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=682 \\ b=683 \end{cases} \Rightarrow du: 682x+683$

c. Cách 1:

$f(x)=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+1999=x^4+16x^3+86x^2+176x+2014=(x+2)(x+6).q(x)+\text{ax+b}$

Cho $\begin{cases} x=-2 \Rightarrow 1984=b-2a \\ x=-6 \Rightarrow 1984=b-6a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1984 \end{cases} \Rightarrow du: 1984$

Cách 2: Đặt $t=x^2+8x+7 \Rightarrow f(t)=t(t+8)+1999=(t^2+8t+15)+1984=(t+3)(t+5)+\underbrace{1984}_{du}$

Bài 4: Tìm đa thức f(x) biết rằng :

a. f(x) chia cho x – 3 thì dư 7, chia cho x – 2 thì dư 5, chia cho (x-2)(x-3) thì được thương là 3x và còn dư.

b. f(x) chia cho x – 2 thì dư 5, chia cho x – 3 thì dư 7, chia cho (x-2)(x-3) thì được thương là x^2 - 1 và còn dư.

c. f(x) chia cho x + 3 thì dư -5, chia cho x – 2 thì dư 5, chia cho x^2 + x - 6 thì được thương là x^2 + 2 và còn dư.

Lời giải

a.Ta có:

$f(x)=(x-3).g(x)+7 \quad (1);$

$f(x)=(x-2).h(x)+5 \quad (2);$

$f(x)=(x-2)(x-3)+\text{ax+b} \quad (3)$

Cho x = 2 $\begin{cases} (2) \Rightarrow f(2)=5 \\ (3) \Rightarrow f(2)=2a+b \end{cases} \Rightarrow 2a+b=5 \quad (*)$

Cho x = 2 $\begin{cases} (2) \Rightarrow f(3)=7 \\ (3) \Rightarrow f(3)=3a+b \end{cases} \Rightarrow 3a+b=7 \quad (**).$

Từ (*) và (**) suy ra: a = 2 và b = 1 suy ra $f(x)=(x-2)(x-3)+\text{2x+1}$

b. $f(x)=-x^4+5x^3-5x^2-5x+6$

c. $f(x)=(x^2+x-6)(x^2+2)+\text{ax}+\text{b}=\text{(x+3)(x - 2)(x}^2+2)+\text{ax + b}$

Cho x = 2, 3

$\Rightarrow f(2)=2a+b=5; f(-3)=-3a+b=-5 \Rightarrow a=2; b=1 \Rightarrow f(x)=x^4+x^3-4x^2+4x-11$

Bài 5: Giả sử đa thức f(x) chia x – 2 dư 11, chia x^2 – x + 1 dư 3x + 2. Tìm phần dư khi chi f(x) cho g(x) = x^3 – 3x^2 + 3x -2

Lời giải

g(x) = x^3 – 3x^2 + 3x -2 = (x – 2)(x^2 – x + 1);

Thực hiện phép chia f(x) cho g(x) ta được: $f(x)=(x-2)(x^2-x+1)+ax^2+bx+c$

$f(x)=(x-2).h(x)+11$. Cho x = 2 $\Rightarrow f(2)=4a+2b+c=11$ (1)

Mặt khác:

$f(x)=(x-2)(x^2-x+1)+a(x^2-x+1)+(a+b)x+c-a=(x-2+a)(x^2-x+1)+\underbrace{(a+b)x+c-a}_{du=3x+2}$

$\Rightarrow\begin{cases}c-a=2 & (2)\\ a+b=3 & (3)\end{cases}$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra (a, b, c) = (1; 2; 3) . Do đó phần dư là $x^2 + 2x + 3$

Bài 6: Giả sử f(x) chia cho x + 2 dư 4 và chia cho x^2 + 1 dư 2x + 3. Tìm phần dư trong phép chia f(x) cho (x + 2)(x^2 + 1).

Lời giải

Ta có:

$f(x)=(x+2)(x^2+1)+ax^2+bx+c$

+) $f(-2)=4\Rightarrow 4a-2b+c=4(1)$

+) $f(x)=(x+2)(x^2+1)+a(x^2+1)+\underbrace{bx+c-a}_{du}\Rightarrow\begin{cases}b=2(2)\\ c-a=3(3)\end{cases}\Rightarrow(a,b,c)=(1,2,4)\Rightarrow du:x^2+2x+4$

Do đó phần dư là $x^2 + 2x + 4$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Chứng minh rằng

a. $x^{4n+2}+2.x^{2n+1}+1\vdots(x-1)^2\forall n\in N$ b. $(x+1)^{4n+2}+(x-1)^{4n+2}\vdots x^2+1\forall n\in N$

Bài 2: Chứng minh đa thức

a. $f(x)=x^{95}+x^{94}+...x^2+x+1\vdots g(x)=x^{31}+x^{30}+...+x^2+x+1$

b. $f(x)=x^{124}+x^{123}+....+x^2+x+1\vdots g(x)=x^{24}+x^{23}+...+x^2+x+1$

Bài 3: Chứng minh rằng $f(x)=x^{19}+x^{18}+...+x+1\vdots g(x)=(x+1)(x^2+1)$

Bài 4: Chứng minh rằng $f(x)=x^{24}+x^{18}+x^{12}+x^6+1\vdots g(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$

Lời giải

Bài 1: $x^{4n+2}+2.x^{2n+1}+1=(x^{2n+1}+1)^2$

Lại có: $x^{2n+1}+1\vdots(x+1)\Rightarrow(x^{2n+1}+1)^2\vdots(x+1)^2$

Bài 2: Ta có $(x-1).f(x)=x^{96}-1=[(x^{32})^3-1]\vdots(x^{32}-1)=(x-1).g(x)\Rightarrow f(x)\vdots q(x)$

Bài 3: $f(x)=(x^{19}+...x^{16})+...(x^3+...+1)=(x^3+...+1)(x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1)\vdots(x+1)(x^2+1)$

Bài 4: $f(x)=x^4(x^{20}-1)+x^3(x^{15}-1)+x^2(x^{10}-1)+x(x^5-1)+g(x)$

$=\underbrace{x^4([(x^5)^4-1]}_{x^5-1}+\underbrace{x^3[(x^5)^3-1]}_{x^5-1}+\underbrace{x^2[(x^5)^2-1]}_{x^5-1}+\underbrace{x(x^5-1)}_{\vdots x^5-1}+g(x)$

Bài 5: Chứng minh rằng $f(x)=x^{80}+x^{70}+1 \vdots g(x)=x^{20}+x^{10}+1$

Lời giải

Đặt $t=x^{10} \Rightarrow f(t)=t^8+t^7+1; g(t)=t^2+t+1$

$f(t)=(t^8-t^2)+(t^7-t)+t^2+t+1=t^2[(t^3)^2-1]+t[(t^3)^2-1]+(t^2+t+1) \vdots t^2+t+1$

Bài 6: Tìm số a để đa thức $f(x)=x^{10}-ax^2+3x+2 \vdots x+2$

Lời giải

Ta có $f(x) \vdots x+2 \Leftrightarrow f(-2)=0 \Leftrightarrow 1024-4a-6+2=0 \Leftrightarrow a=255.$

CHUYÊN ĐỀ 3: ĐA THỨC

Bài 3:

DÙNG PHƯƠNG PHÁP XÉT GIÁ TRỊ RIÊNG ĐỂ TÌM HỆ SỐ CỦA MỘT ĐA THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

Giả sử f(x) và g(x) là các đa thức và bậc của f(x) lớn hơn hoặc bằng bậc của g(x). Khi đó luôn tồn tại duy nhất các đa thức q(x) và r(x), thỏa mãn:

f(x) = g(x) . q(x) + r(x)

Trong đó: Bậc của r(x) nhỏ hơn bậc của g(x)

Nếu r(x) $\equiv$ 0 thì ta nói f(x) chia hết cho g(x)

Xét phép chia đa thức f(x) cho đa thức bậc nhất x – a

f(x) = (x-a) . q(x) + r . Cho x = a $\Rightarrow$ f(a) = r

- Kết luận: Phần dư trong phép chia đa thức f(x) cho x – a là một số bằng f(a)

- Nếu f(a) = 0 hay x = a là nghiệm của đa thức f(x) thì f(x) chia hết cho x – a

- Định lý Bơ Du:

Số dư trong phép chia đa thức f(x) cho nhị thức x – a bằng giá trị của f(x) tại x = a

$\Rightarrow f(x) \vdots (x-a) \Leftrightarrow f(a)=0$

Bài 1: Xác định các hằng số a, b, c sao cho

a. $f(x)=ax^3+bx^2+5x-50 \vdots g(x)=(x+5)(x-2)$

b. $f(x)=x^4+ax^2+bx+c$ chia cho x – 2 thì dư 9, chia cho x^2 – 1 thì dư 2x - 1

c. $f(x)=2x^4+3x^3+5x^2+ax+b \vdots g(x)=x^2+2x+3$

d. $f(x)=ax^3+bx^2+c \vdots (x+2)$ và chia x^2 – 1 dư x + 5.

e. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ chia hết cho x – 2 và chia x^2 – a dư 2x

Lời giải

a. Gọi q(x) là thương của phép chia f(x) cho g(x)

Ta có: $ax^3+bx^2+5x-50=(x+5)(x-2).q(x)$

Xét các giá trị riêng x = -5 ; x = 2 , ta được:

$$\begin{cases} x=-5 \Rightarrow -12a+25b=75 \\ x=2 \Rightarrow 8a+4b=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=8 \end{cases}$$

b. $f(x)=(x^2-1).q(x)+2x-1$

Cho $\begin{cases} x=1 \Rightarrow a+b+c=0 & (1) \\ x=-1 \Rightarrow a-b+c=-4 & (2) \end{cases}$

Mặt khác: f(x) chia cho x - 2 dư 9 $\Rightarrow f(2)=9 \Rightarrow 4a+2b+c=-7$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow (a,b,c)=(-3,2,1)$

c. Ta có: $f(x)=(x+1)(x+2).q(x) \Rightarrow a=-1; b=3$

d. Ta có $f(x)=(x+2).p(x) \Rightarrow f(-2)=0 \Leftrightarrow -8a+4b+c=0$ (1)

$$f(x)=(x-1)(x+1).q(x)+x+5 \Rightarrow \begin{cases} f(1)=a+b+c=6 & (2) \\ f(-1)=-a+b+c=4 & (3) \end{cases}.$$

$(1)(2)(3) \Rightarrow (a,b,c)=(1,1,4)$

e. $(a,b,c)=\left(\frac{-10}{3};1;\frac{10}{3}\right)$

Bài 2: Đa thức P(x) có bậc 4, có hệ số bậc cao nhất là 1. Biết P(1) = 0, P(3) = 0; P(5) = 0. Tính Q = P(-2) + 7.P(6)

Lời giải

Ta có P(x) chia hết cho x – 1: x – 3 ; x – 5 và bậc của P(x) là 4 nên P(x) có dạng:

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$

$P(-2)+7p(6)=(-3)(-5)(-7)(-2+a)+7.5.3.1(a+6)=-105(a-2)+105(a+6)=840$

Bài 3: [GVG Tỉnh – Bắc Ninh : 09/12/2016]

Tìm đa thức f(x), biết f(x) chia cho x – 2 dư 5, f(x) chia cho x – 3 dư 7, chia cho (9x-2)(x-3) được thương là $x^2 - 1$ và đa thức dư bậc nhất đối với x.

Lời giải

Gọi dư trong phép chia f(x) cho (x-2)(x-3) là ax + b

Ta có: $f(x)=(x-2)(x-3)(x^2-1)+\text{ax+b}$

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} f(2)=5 \Rightarrow 2a+b=5 \\ f(3)=7 \Rightarrow 3a+b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Bài 4: Tìm f(x), biết f(x) chia cho x – 1 và x – 3 đều dư 2 và f(x) chia cho $x^2 - 4x + 3$ được thương là x + 1 và còn dư.

Lời giải

f(x) chia cho x – 1 dư 2 $\Rightarrow f(x)=(x-1).g(x)+2(1)$

f(x) chia cho x – 3 dư 2 $\Rightarrow f(x)=(x-3).h(x)+2(2)$

f(x) chia cho x^2 – 4x + 3 được x + 1 và dư $\Rightarrow f(x)=(x^2-4x+3)(x+1)+\text{ax+b}(3)$

Từ (1), cho x = 1 $\Rightarrow a+b=2(4)$

Từ (2)(3) cho x = 3 $\Rightarrow 3a+b=-2(5)$

Từ (4)(5) $a=0;b=2\Rightarrow f(x)=(x^2-4x+3)(x-1)+2$

Bài 4: ĐẶT PHÉP CHIA ĐỂ TÌM HỆ SỐ

Bài 1: Tìm a, b sao cho $f(x)=x^4-x^3y-x^2y^2+\text{axy}^3+by^2 \vdots g(x)=x^2-2xy+3y^2$

Lời giải

Đặt phép chia $f(x)=g(x).(x^2+xy-2y^2)+(a-7)xy^3+(b+6)y^4$

Để phép chia hết thì dư phải bằng 0 $\Rightarrow \begin{cases} a-7=0 \\ b+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=-6 \end{cases}$

Bài 2: Với giá trị nào của a, b thì đa thức $ax^4 + bx^3 + 1$ chia hết cho $(x -1)^2$.

Lời giải

Ta có: $\text{ax}^4+bx^3+1=(x-1)^2[\text{ax}^2+(b+2a)x+3a+2b]+(-b-2a+6a+4b).x+1-3a-2b$

Để phép chia hết thì dư phải bằng 0 $\Rightarrow \begin{cases} -b-2a+6a+4b=0 \\ -1-3a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$

Bài 3: Tìm các số a, b sao cho : $3x^5-3x^4y+4x^3y+3x^2y^2-\text{axy}^4-by^5 \vdots 3x^3-2xy^2+y^3$

Lời giải

Thực hiện phép chia ta được thương: $x^2 - xy + y^2$ và dư: $-(a-5)xy^4 - (b+2)y^5$

Để phép chia hết thì dư phải bằng 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} -(a-5)=0 \\ b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$

Bài 4*: Tìm các số a, b, c sao cho: $4x^4+81 \vdots \text{ax}^2+bx+c$

Lời giải

Ta có: $4x^4+3^4=(2x^2+3^2)^2-(6x)^2=(2x^2-6x+9)(2x^2+6x+9)$

Chia hết cho $\text{ax}^2+bx+c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{ax}^2+bx+c=k(2x^2-6x+9) \quad (k\neq 0) \\ \text{ax}^2+bx+c=h(2x^2+6x+9) \quad (h\neq 0) \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2k;b=-6k;c=9k \\ a=2h;b=6h;c=9h \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{-6}=\dfrac{c}{9}\neq 0 \quad (k\neq 0) \\ \dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{6}=\dfrac{c}{9}\neq 0 \quad (h\neq 0) \end{array}\right.$$

Bài 5: Tìm các số nguyên a, b sao cho $f(x)=x^4-4x^3+\text{ax+b} \vdots \text{g(x)}=\text{x}^2-3x+4$

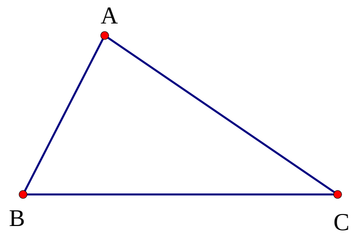
Lời giải

$$f(x) = g(x).(x^2 - 1) + (a-3)x + b + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}$$

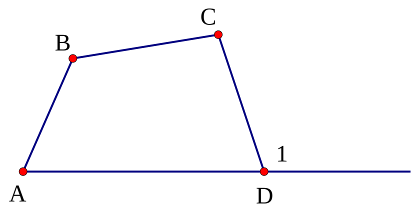
CHUYÊN ĐỀ 8: HÌNH HỌC

A. Kiến thức

1. Tam giác



- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$ (Tổng 3 góc trong 1 tam giác)
- $AB + AC > BC$ (Bất đẳng thức tam giác)
- $AB - AC < BC$ (Bất đẳng thức tam giác)



2. Tứ giác

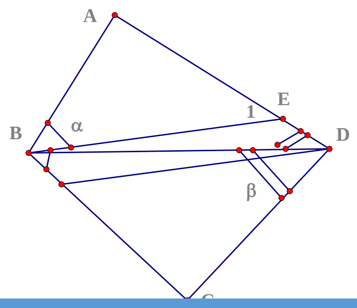
a. Định nghĩa: Tứ giác ABCD là hình gồm 4 đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó bất kỳ 2 đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên 1 đường thẳng

b. Tứ giác lồi: Là tứ giác luôn nằm trong 1 nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kỳ cạnh nào của tứ giác

c. Chú ý: Khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì them, ta hiểu đó là tứ giác lồi

3. Tổng các góc của 1 tứ giác

- Định lý: Tổng các góc cảu một tứ giác bằng $360^0 \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$
- Chú ý: Để bốn góc cho trước thỏa mãn là bốn góc của một tứ giác khi bốn góc đó có tổng bằng 360^0
- Bất đẳng thức đường gấp khúc: AB + BC + CD > DA
- Mở rộng: Tổng bốn góc ngoài ở bốn đỉnh của một tứ giác bằng 360^0.



4. Góc ngoài của tứ giác: Góc kề bù với 1 góc trong của tứ giác gọi là góc ngoài của tứ giác

- Ta có $\hat{B}_1$ là góc ngoài tại đỉnh B.

B. Bài tập

Bài 1: Cho tứ giác ABCD có: $B\hat{A}D = B\hat{C}D = 90^0$, phân giác trong của góc ABC cắt AD tại E. phân giác trong của góc ADC cắt BC tại F. Chứng minh BE // DF

Lời giải

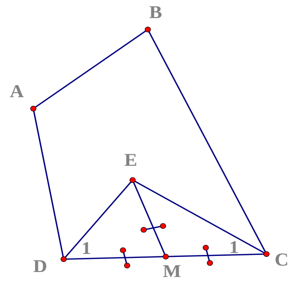
+) $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^0 \Rightarrow \alpha + \beta = 90^0(1)$

+) Xét tam giác ABE, có: $\alpha + \widehat{E}_1 = 90^0(2)$

+) Từ (1), (2)suy ra $\beta = \widehat{E}_1$ và hai góc này ở vị trí đồng vị nên $BE//DF$

Bài 2: Cho tứ giác ABCD có: $\widehat{ABC} + \widehat{BAD} = 180^0$. Phân giác trong của các góc BCD và CDA cắt nhau tại E, biết rằng CD = 2 DE . Chứng minh rằng :

$\widehat{ADC} = 2\widehat{BCD}$



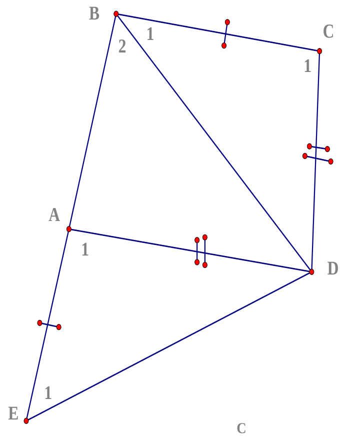
Lời giải

+) Ta có: $\hat{A} + \hat{B} = 180^0 \Rightarrow \hat{C} + \hat{D} = 180^0 \Rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = 90^o \Rightarrow \widehat{DEC} = 90^0$

+) Gọi M là trung điểm của CD $\Rightarrow EM = MC = MD = \dfrac{CD}{2}$

$\Rightarrow \Delta DEM$ đều $\widehat{D}_1 = 60^0 \Rightarrow \widehat{C}_1 = 30^0 \Rightarrow \widehat{D} = 2\widehat{C}(dpcm)$

Bài 3: Cho tứ giác ABCD , có: $\widehat{BAD} + 2\widehat{BCD} = 180^0$, $DA = DC$. chứng minh rằng BD là phân giác $\widehat{ABC}$



Lời giải:

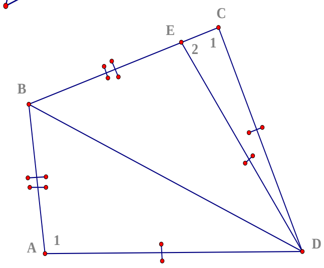
+) Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho AE = BC

+) $\Delta BCD = \Delta EAD(cgc) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B}_1 = \widehat{E}_1(1) \\ DB = DE \end{cases} \Rightarrow \Delta BED$ cân tại D

$\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{B}_2(2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2(dpcm)$

Bài 4: Cho tứ giác ABCD có BD là phân giác của góc ABC , AD = CD , AB < BC . Chứng minh rằng : $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^0$



Lời giải

+) Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = BA

+) $\Delta BED = \Delta BAD(cgc) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{E}_1(1) \\ \begin{cases} AD = ED \Rightarrow ED = CD \Rightarrow \Delta ECD \text{ cân tại} \\ ED = DA \end{cases} \end{cases}$

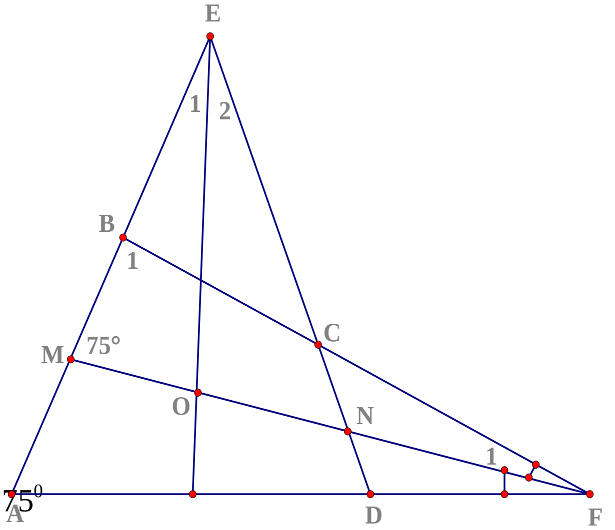
D

$\Rightarrow \widehat{E}_2 = \widehat{C}_1(2)$. Từ (1)(2) $\widehat{A}_1 + \widehat{C}_1 = \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 180^0$

Bài 5: Cho tứ giác ABCD có: $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} : \hat{D} = 5:8:13:10$

a. Tính các góc của tứ giác ABCD

b. AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F. Phân giác góc AED và góc AFB cắt nhau tại O, phân giác góc AFB cắt CD và AB tại M và N. Chứng minh rằng O là trung điểm của MN



Lời giải

a. $\hat{A}=50^0, \hat{B}=80^0, \hat{C}=130^0, \hat{D}=100^0$

b.

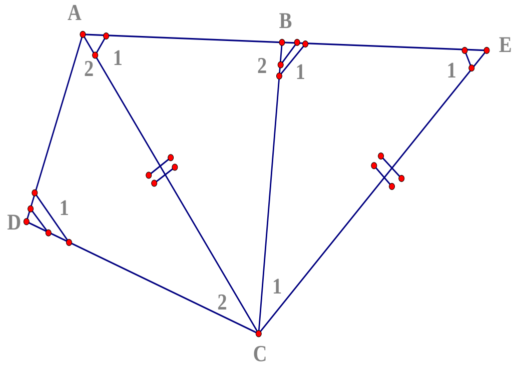
$A\hat{E}D=180^0-\hat{A}-\hat{D}=30^0; A\hat{F}B=180^0-\hat{A}-\hat{B}=50^0$

$E\hat{M}N=180^0-\hat{F}_1-\hat{B}_1=75^0; E\hat{N}M=180^0-75^0-30^0=75^0$

$\Rightarrow \Delta EMN$ cân $\Rightarrow O$ là trung điểm của MN

Bài 6: Cho tứ giác ABCD có $\hat{B}+\hat{D}=180^0$, AC là phân giác của góc A.

Chứng minh rằng: CB = CD



Lời giải

Dựng tam giác ACE cân tại C $\Rightarrow CA=CE$

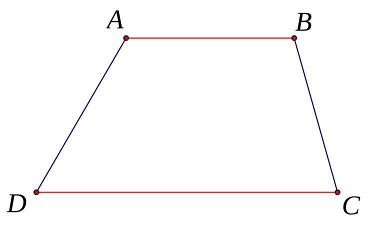
Theo gt: $\begin{cases}\hat{B}_2+\hat{D}=180^0\\ \hat{B}_2+\hat{B}_1=180^0\end{cases} \Rightarrow \hat{D}_1=\hat{B}_1$

Có: $\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{E}_1\\ \hat{A}_1=\hat{A}_2\end{cases} \Rightarrow \hat{E}_1=\hat{A}_2$

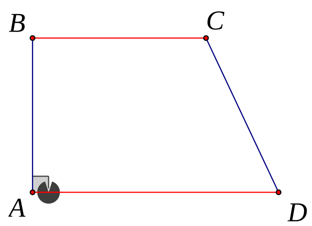
ΔCEB và ΔCAD có: $\begin{cases}\hat{A}_2=\hat{E}_1\\ \hat{D}_1=\hat{B}_1\end{cases} \Rightarrow \hat{C}_1=\hat{C}_2 \Rightarrow \Delta CEB=\Delta CAD(g.c.g) \Rightarrow CB=CD$

HÌNH THANG, HÌNH THANG CÂN

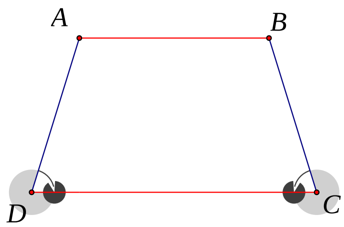
A. HÌNH THANG



H1. HÌNH THANG



H2. THANG VUÔNG



H3. THANG CÂN

1. Định nghĩa: Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.

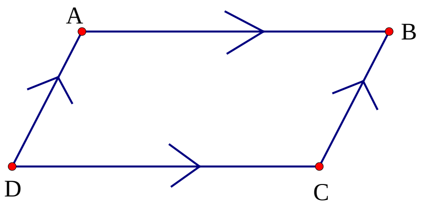
◊ABCD Là hình thang (đáy AB, CD) $\Leftrightarrow \begin{cases}ABCDla◊\\ AB // CD\end{cases}$

+) AB: đáy nhỏ +) CD: đáy lớn +) AD, BC: cạnh bên

Nhận xét

- Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau
- Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau

Dựa vào nhận xét ta có



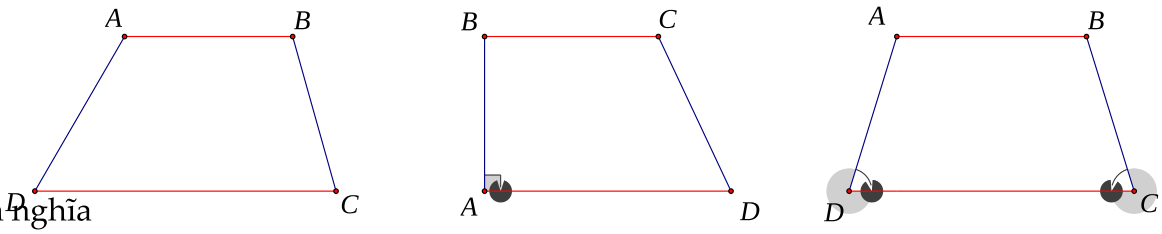
Hình thang ABCD (AB // CD), có:

+) $AD // BC \Rightarrow AD = BC; AB = CD$

+) $AB = CD \Rightarrow AD // BC; AD = BC$

2. Hình thang vuông là hình thang có 1 góc vuông

B. HÌNH THANG CÂN



1. Định nghĩa

H1. HÌNH THANG H2. THANG VUÔNG H3. THANG CÂN

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề 1 đáy bằng nhau

ABCD là hình thang cân (đáy AB, CD) $\Leftrightarrow \begin{cases} ABCD \text{ (là hình thang)} \\ \hat{C}=\hat{D} \text{ hoac } \hat{A}=\hat{B} \end{cases}$

2. Tính chất: Trong hình thang cân

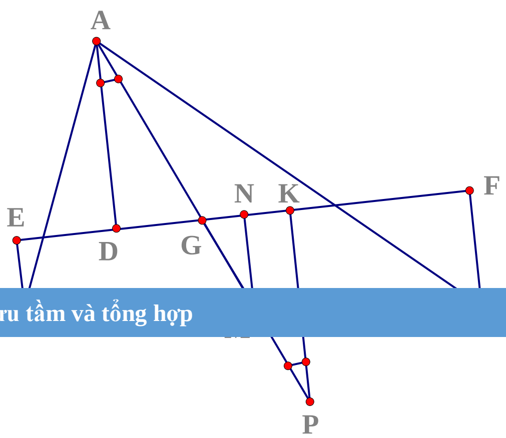
- Hai cạnh bên bằng nhau
- Hai đường chéo bằng nhau

3. Dấu hiệu nhận biết

- Hình thang có 2 góc kề 1 đáy bằng nhau là hình thang cân
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân

4. Chú ý: Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau chưa chắc đã là hình thang cân (Hình bình hành)

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG



Bài 1: Cho tam giác ABC và đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và cắt các đoạn AB, AC. Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ B và C tới d bằng khoảng cách từ A tới d

Lời giải

Ta có tứ giác BEFC là hình thang (BE // CF)

Gọi N là trung điểm của EF, M là trung điểm của BC

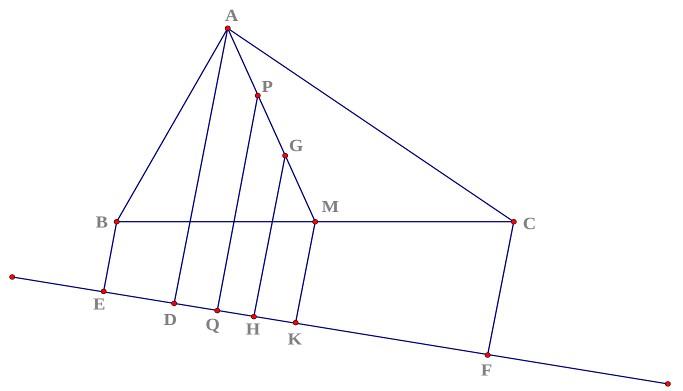
$$\Rightarrow MN = \frac{BE+CF}{2} \Rightarrow \begin{cases} BE+CF = 2MN(1) \\ MN \perp d \end{cases}$$

+) Lấy P thuộc tia đối của MG sao cho MP = MG $\Rightarrow GP = GA$

+) Lấy K thuộc d sao cho NG = NK $\Rightarrow \begin{cases} MN = \frac{1}{2}PK \\ PK \perp D \end{cases}$

$$\Delta ADG = \Delta PKG(ch-gn) \Rightarrow PK = DA \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AD(2) \Rightarrow AD = BE + CF$$

Bài 2: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và đường thẳng d nằm ngoài tam giác. Gọi D, E, F, H lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D lên đường thẳng d. Chứng minh rằng: AD + BE + CF = 3GH



Lời giải

+) Gọi M là trung điểm của BC

+) P là trung điểm của AG

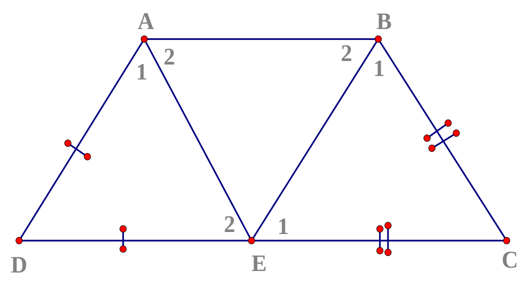
+) K là hình chiếu của M lên d

Ta có : BE + CF = 2MK

AD + GH = 2PQ; MK + PQ = 2GH

2(MK + PQ) = 4GH; BE + AD + CF = 3GH (dpcm)

Bài 3: Cho hình thang ABCD (AB // CD), trong đó CD = BC + AD. Hai đường phân giác của hai góc A và B cắt nhau tại K. Chứng minh rằng C, D, K thẳng hàng.



Lời giải

Trên CD lấy điểm E sao cho CE = CB

$\Rightarrow AD = DE \Rightarrow \Delta CBE$ cân tại C $\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}_1$

Mặt khác $\hat{E}_1 = \hat{B}_2(slt) \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$

ΔADE cân tại D $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E}_2$ mà

$\Rightarrow \hat{E}_2 = \hat{A}_2(slt) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$\Rightarrow EA, EB$ là phân giác của $\hat{A}, \hat{B} \Rightarrow$ giao điểm của hai đường phân giác góc A và B cắt nhau tại E thuộc BC $\Rightarrow E \equiv K \Rightarrow D, K, C$ thẳng hàng.

Bài 4: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC và đồng thời DB là tia phân giác của $A\hat{D}C$

a. Tính các góc của hình thang cân ABCD

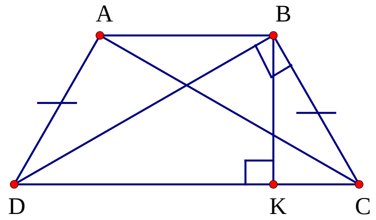
b. Biết BC = 6cm, tính chu vi và diện tích của hình thang cân ABCD

Lời giải

a) $\Delta DBC(\hat{B} = 90^0)$ có

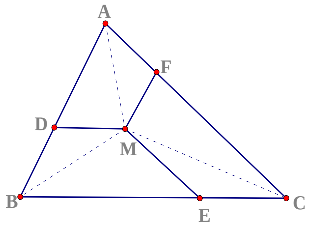
$B\hat{C}D = 2B\hat{D}C \Rightarrow A\hat{D}C = B\hat{C}D = 60^0; D\hat{A}B = C\hat{B}A = 120^0$

b) Tính được DC = 2.BC $P_{ABCD} = 30cm$



Hạ đường cao BK, ta có $BK = 3\sqrt{3}cm \Rightarrow S_{ABCD} = 27\sqrt{3}(cm^2)$

Bài 5: Cho tam giác đều ABC. Từ 1 điểm M nằm bên trong tam giác ta vẽ các tia gốc M song song với BC cắt AB ở D, song song với AC cắt BC tại E, song song với AB cắt AC tại F. Chứng minh rằng chu vi tam giác DEF bằng tổng các khoảng cách từ M đến ba đỉnh của tam giác.



Lời giải

Chu vi tam giác ABC là : DE + DF + EF

Khoảng cách từ M đến 3 đỉnh là : MA + MB + MC

Ta cần chứng minh : DE + DF + EF = MA + MB + MC

+) Ta có hình thang BDME là hình thang cân ($MD // BE, \hat{B} = \hat{E} = \hat{C} = 60^0$) $\Rightarrow DE = MB$

Chứng minh tương tự ta có : DF= MA, EF = MC

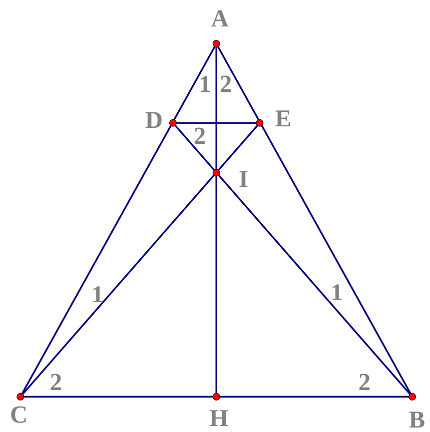
$\Rightarrow$ DE + DF + EF = MA + MB + MC (đpcm)

Bài 6: Cho tam giác ABC cân tại A, điểm I thuộc đường cao AH, BI giao với AC tại D, CI giao với AB tại E

a. Chứng minh rằng: AD = AE

b. Xác định dạng của tứ giác BEDC

c. Xác định I sao cho: BE = ED = DC



Lời giải

a. Ta có:

$\Delta AIC = \Delta AIB(c.g.c) \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \Delta ACE = \Delta ABD(g.c.g) \Rightarrow AE = AD$

b. $\Delta ADE, \Delta ACB$ cân tại A có chung góc A

$$\Rightarrow A\hat{D}E = A\hat{E}D = A\hat{C}B = A\hat{B}C = \frac{180^0 - \hat{A}}{2} \Rightarrow \begin{cases} DE // BC \\ \hat{C} = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow dpcm$$

c. $DE // BC \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2$. Để BE = ED $\Rightarrow \Delta BED$ cân tại E $\Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_2 \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$

Chứng minh tương tự: $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$

Vậy CE và BD là giao điểm của góc C và B

Vậy I là giao điểm của 3 đường phân giác của tam giác ABC.

Bài 7: Cho hình thang ABCD (AB // CD) tia phân giác góc C đi qua trung điểm M của AD. CMR:

a) $\widehat{BMC} = 90^0$ b) BC = AB + CD

Lời giải

a) Giả sử MC cắt AB tại E

Khi đó $\Delta CMD = \Delta EMA\left(g.c.g\right) \Rightarrow CM = EM$; $AD = AE$

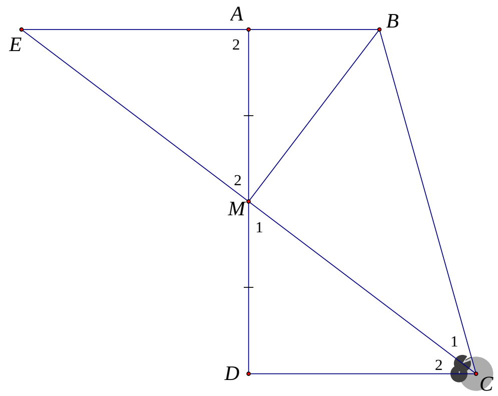
Xét ΔBEC có: $\widehat{E} = \widehat{C_2} = \widehat{C_1}$ => ΔBEC cân

Mà BM là đường trung tuyến

=> BM là đường cao

Vậy BM $\perp$ EC

b) Vì ΔBEC cân nên EB = BC => BC = EA + AB = DC + AB



Bài 8: Cho hình thang ABCD (AB // CD), có $\widehat{C} = 60^0$, DB là phân giác của góc $\widehat{D}$, Biết chu vi của hình thang là 20cm, Tính mỗi cạnh của hình thang

Lời giải

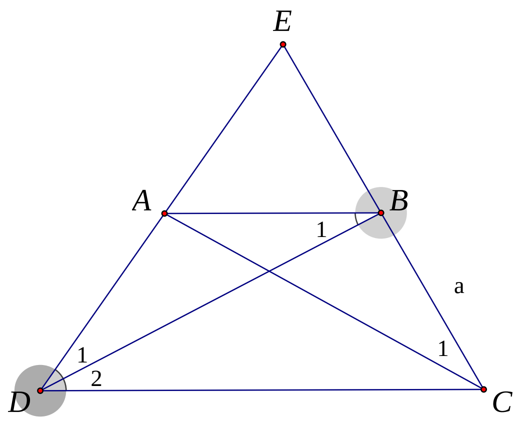
Đặt BC= a, ta có ngay: AD = AB = BC = a

Mà: $\widehat{C} = 60^0 \Rightarrow \widehat{D_2} = 30^0 \Rightarrow \widehat{DBC} = 90^0$

Xét ΔBDC có $\widehat{D_2} = 30^0, \widehat{C} = 60^0 \Rightarrow DC = 2a$

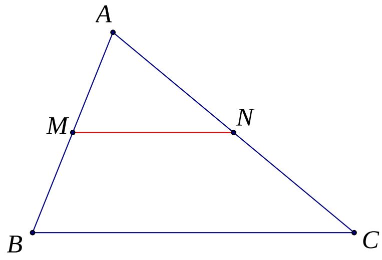
Mà Chu vi hình thang là 20 cm nên ta có:

a + a + a + 2a = 20 => a = 4

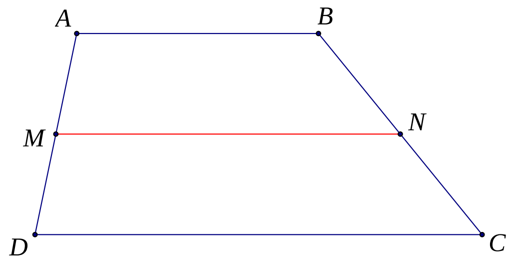


ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, HÌNH THANG

A. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC



H4.ĐƯỜNG TRUNG BÌNH TAM GIÁC



H5. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH HÌNH THANG

1. Định nghĩa: Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

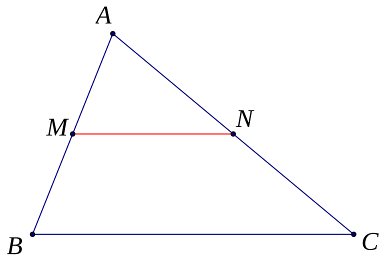
2. Các định lý

a. Định lý 1: Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba

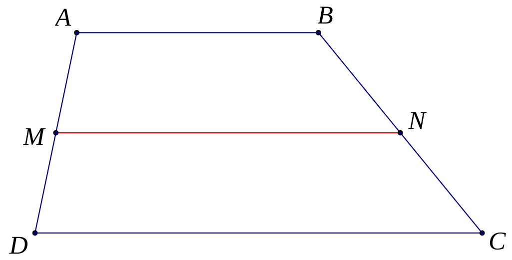
$\Delta ABC, AM = MB, MN / BC \Rightarrow AN = NC$

b. Định lý 2: Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy: $MN // BC; MN = \frac{1}{2}BC$

B. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA HÌNH THANG



H4.ĐƯỜNG TRUNG BÌNH TAM GIÁC



H5. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH HÌNH THANG

1. Định nghĩa: Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang

2. Các định lý

a. Định lý 1: Đường thẳng đi qua trung điểm 1 cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai

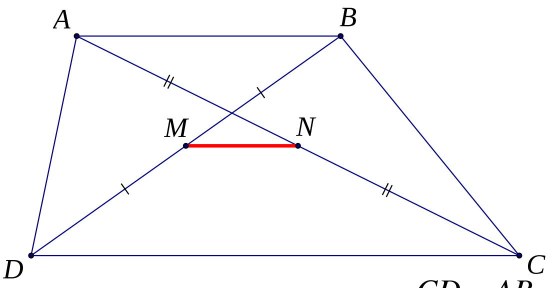
Nếu EA = ED và EF // AB // CD thì FB = FC

b. Định lý 2: Đường trung bình của hình thang song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy

Ta có: EF // AB // CD và $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$

3. Mở rộng

- Trong hình thang có hai cạnh bên không song song, đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo thì song song với hai đáy và bằng một nửa hiệu hai đáy



Ta có: $MN // AB // CD$ và $MN = \frac{CD - AB}{2}$

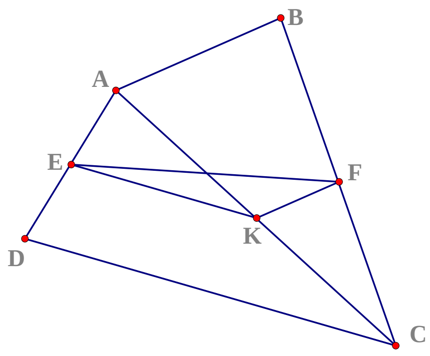
C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Cho tứ giác ABCD. Gọi E, K, F lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC

a. Chứng minh EK // CD, FK // AB

b. So sánh EF và $\frac{1}{2}(AB + CD)$

c. Tìm điều kiện của tứ giác ABCD để 3 điểm E, F, K thẳng hàng, chứng minh $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$



Lời giải

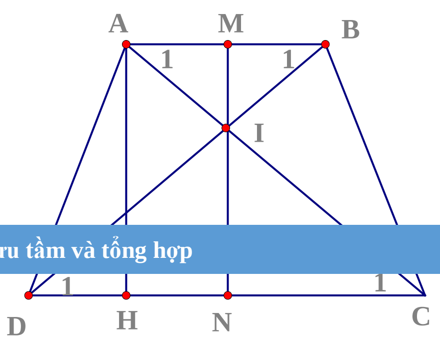
b. Xét ΔEFK ,có:

$$EF \le EK + KF = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

c. Để E, F, K thẳng hàng, khi đó EF đồng thời song song với AB, CD. Tức là tứ giác ABCD là hình thang (AB // CD)

$$\Rightarrow EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

Bài 2: Tính độ dài đường trung bình của một hình thang cân biết rằng các đường chéo của nó vuông góc và chiều cao = 10cm



Lời giải

+) $\Delta ABC = \Delta BAD(ccc) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1$

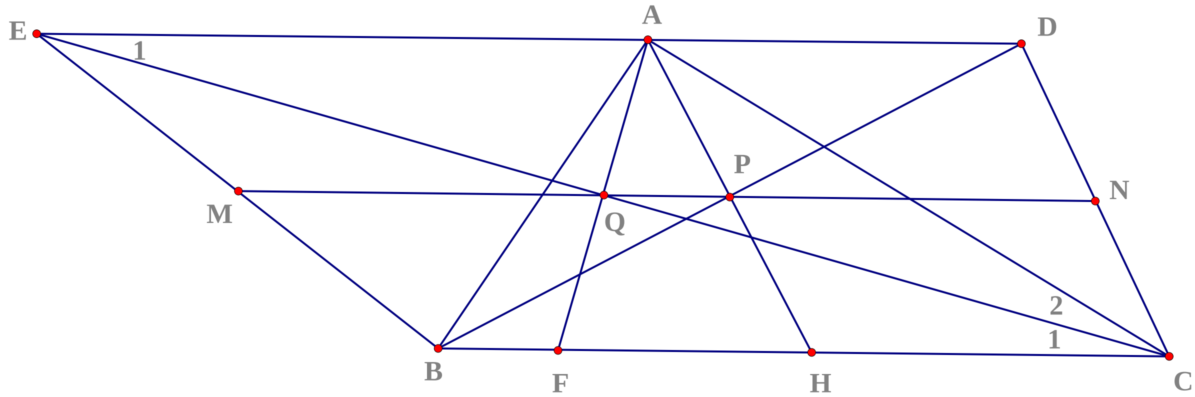
+) $AC \perp BD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \hat{D}_1 = 45^0$

$\Rightarrow \Delta IAB, \Delta ICD$ vuông cân tại I

$\Rightarrow MI = \frac{AB}{2}; NI = \frac{CD}{2} \Rightarrow MI + NI = \frac{AB+CD}{2} =$ đường trung bình của tam giác = 10cm.

Bài 3: Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, AC = b. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt tia phân giác góc B và C tại D và E. Từ A kẻ AP vuông góc với BD; AQ vuông góc với CE. PQ lần lượt cắt EB, CD tại M, N. Tính MN, PQ theo a, b, c

Lời giải



+) $\hat{E}_1 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2 (slt) \Rightarrow \Delta EAC$ cân tại A $\Rightarrow AE = AC; AQ \perp EC \Rightarrow AQ$ là đường cao, phân giác, trung trực, đường trung tuyến $\Rightarrow QE = QC$

+) Tương tự ΔABD cân tại A và $BP = PD$

+) ΔABH có BP là phân giác và đường cao $\Rightarrow \Delta ABH$ cân tại B $\Rightarrow P$ là trung điểm của AH

Tương tự: Q là trung điểm của AF $\Rightarrow PQ = \frac{1}{2}FH$

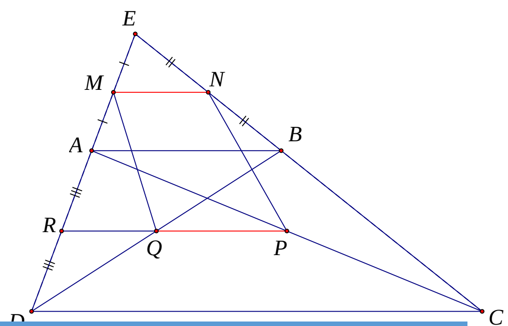
+) $MQ // BC \Rightarrow M$ là trung điểm của BE ; +) N là trung điểm của BE

+) $MN = \frac{1}{2}(ED + BC) = \frac{1}{2}(EA + AD + BC) = \frac{1}{2}(AC + AB + BC)$

$PQ = \frac{1}{2}HF = \frac{1}{2}(FC - HC) = \frac{1}{2}(AC - HC) = \frac{1}{2}(AC - (BC = BH)) = \frac{1}{2}(AC - BC + BA) = \frac{1}{2}(b - a + c)$

Bài 4: Cho hình thang ABCD (AB // CD), Gọi E là giao điểm của AD và BC, Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AE, BE, AC, BD. CMR: MNPQ là hình thang

Lời giải



Dễ dạng chứng minh được MN // AB

- Gọi R là trung điểm của AD khi đó ta có: RQ // AB

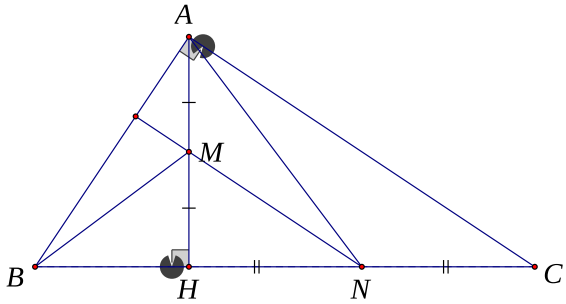
RP // DC // AB

Nên RP // AB => R, Q, P thẳng hàng => PQ // AB

Vậy MNPQ là hình thang

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A, Vẽ AH vuông góc với BC tại H, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH CH, CMR :

MN vuông góc với AB và BM vuông góc với AN



Lời giải

Vì MN là đường trung bình

=> MN // AC mà AC $\perp$ AB

=> MN $\perp$ AB => M là trực tâm của Δ ABN

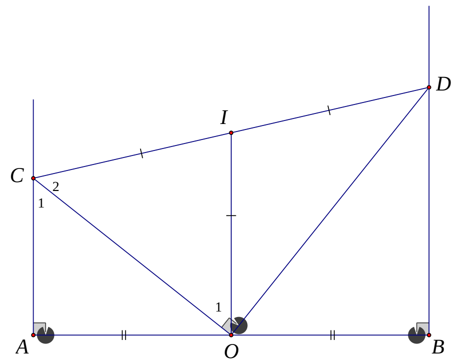
Δ ABN có M là trực tâm => BM $\perp$ AN

Bài 6: Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của nó, trên cùng 1 nửa mặt phẳng có bờ AB, vẽ hai tia Ax và By vuông góc với AB, Một góc vuông đỉnh O cắt Ax tại C, cắt By tại D

a) AC + BD = CD

b) CO là tia phân giác của $\widehat{ACD}$

Lời giải



a) Gọi I là trung điểm của CD

AC // BD => OI là trung bình của hình thang ABCD

$=> OI = \dfrac{AC+BD}{2}$ $=> AC + BD = 2.OI$

Lại có Δ COD vuông => OI là đường trung tuyến

=> OI = CI = ID => 2OI = IC + ID = CD

b) Ta có Δ OCD vuông tại O có OI là đường trung tuyến nên OI = IC

$=>\Rightarrow \Delta IOC$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{C_2} = \widehat{O_1}$

Mà: $\widehat{O_1} = \widehat{C_1}$ Nên $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ Vậy OC là tia phân giác góc $\widehat{ACD}$

Bài 7: Cho tứ giác ABCD có AD = BC, đường thẳng đi qua trung điểm M và N của các cạnh AB và CD cắt AD và BC lần lượt ở E và F, CMR : $\widehat{AEM} = \widehat{MFB}$

Lời giải

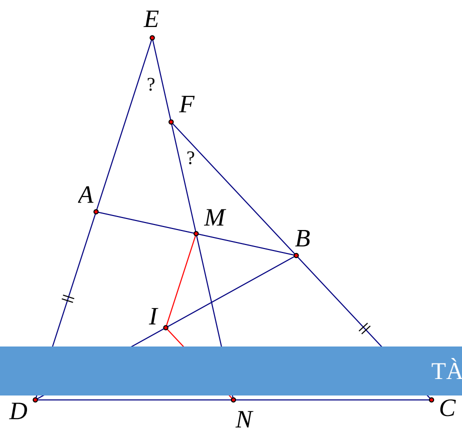
Gọi I là trung điểm của BD

Ta có: MI, NI lần lượt là đường trung bình $\Rightarrow MI = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{BC}{2} = IN \Rightarrow \Delta IMN$ cân

$\Rightarrow \widehat{M} = \widehat{E}$ (đồng vị)

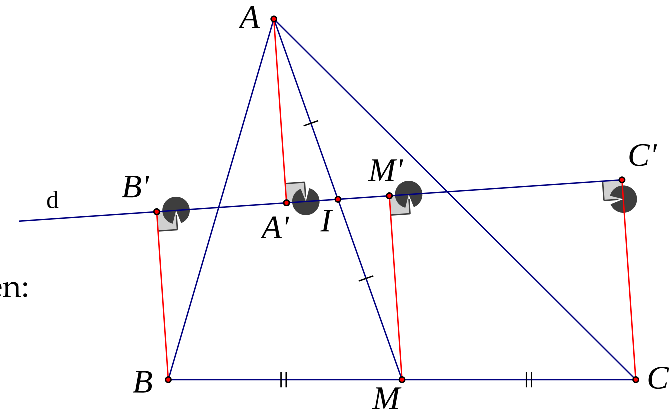
và $\widehat{N} = \widehat{F}$ (so le trong)

Vậy $\widehat{E} = \widehat{F}$



Bài 8: Cho tam giác ABC, AM là đường trung tuyến, vẽ đường thẳng (d) đi qua trung điểm I của AM cắt các cạnh AB, AC, Gọi A′, B′, C′ lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên đường thẳng (d). CMR: $AA' = \dfrac{BB' + CC'}{2}$

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là giao của (d) với AB và AC

Lấy N là hình chiếu của M trên đường thẳng (d)

=> Δ AA′I = Δ MNI (cạnh huyền - góc nhọn)

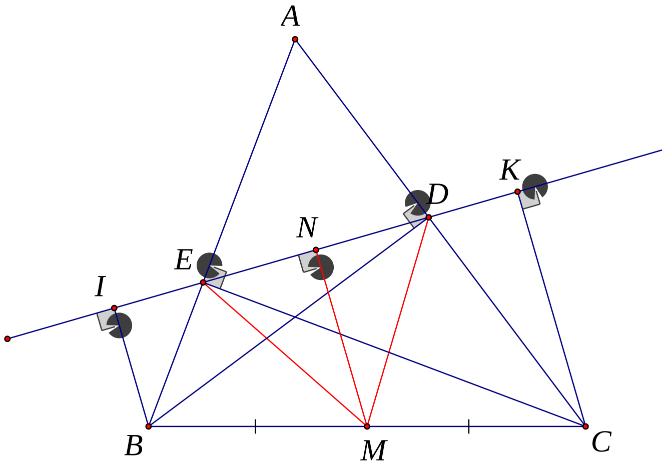
=> AA′ = MN

Hình thang BB′C′C có MN là đường trung bình nên:

$MN = AA' = \dfrac{BB' + CC'}{2}$

Bài 9: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, các đường cao BD và CE, gọi I và K theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên đường thẳng ED, CMR: IE = DK

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC, kẻ MN $\perp$ ED

Tứ giác BIKC là hình thang => NI = NK (1)

ΔBEC vuông có EM = $\dfrac{1}{2}$BC

Δ BDC vuông có DM = $\dfrac{1}{2}$BC => EM = DM

=> ΔEDM cân có MN đường cao và là trung tuyến

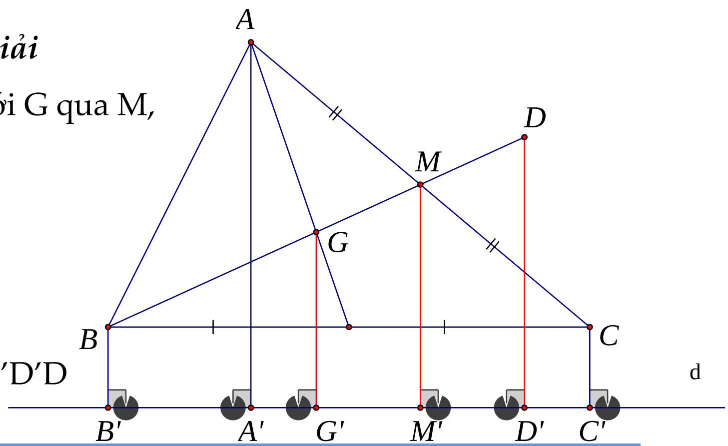
=> NE = ND (2)

Từ (1) và (2) => IE = DK

Bài 10: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, đường thẳng (d) không cắt các cạnh của tam giác ABC, Gọi A′, B′, C′, G′ lần lượt là hình chiếu của A, B, C, G trên đường thẳng (d).

CMR: $GG' = \dfrac{AA' + BB' + CC'}{3}$

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AC, và D đối xứng với G qua M, M′ là hình chiếu của M trên (d), Khi đó ta có :

$GM = DM = \dfrac{BG}{2}$

=> G là trung điểm của BD

=> GG′ là đường trung bình của hình thang BB′D′D

=> MM′ là đường trung bình của hình thang GG′D′D

Nên: $GG' = \dfrac{BB' + DD'}{2}$ (1)

$MM' = \dfrac{AA' + CC'}{2}; MM' = \dfrac{DD' + GG'}{2}$

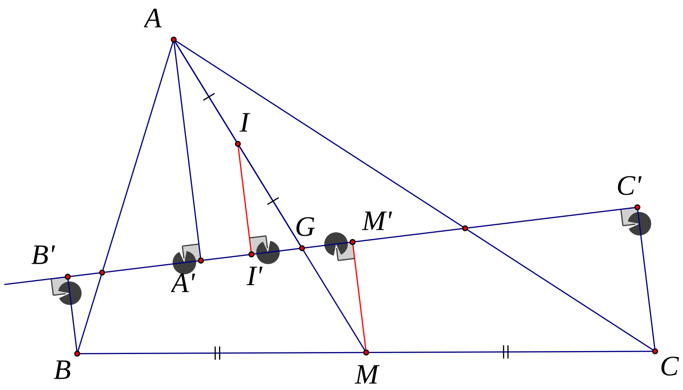
=> DD′ + GG′ = AA′ + CC′ => DD′ = AA′ + CC′ - GG′

Thay (1) vào ta được: 2GG′ = BB′ + AA′ + CC′ - GG′

=> 3GG′ = AA′ + BB′ + CC′ => ĐPCM

Bài 11: Cho tam giác ABC có trọng tâm G (G nằm bên trong tam giác), Vẽ đường thẳng (d) đi qua G, cắt AB, AC, Gọi A′, B′, C′ là hình chiếu của A, B, C trên (d), khi đó AA′, BB, CC′ có mỗi quan hệ gì?

Lời giải



Gọi I trên AG sao cho AI = IG

Kẻ MM′ $\perp$ (d)

Khi đó ta có:

ΔGII′ = ΔGMM′ (cạnh huyền = góc nhọn)

=> II′ = MM′ mà II′ = $\dfrac{1}{2}$AA′ => AA′ = 2. MM′

Hình thang BB′C′C có MM′ là đường trung bình

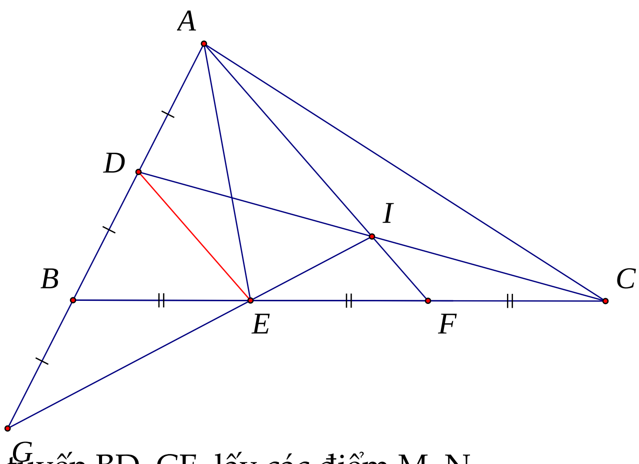
Nên ta có: 2. MM′ = BB′ + CC′

Nên ta có: AA′ = BB′ + CC′

Bài 12: Cho tam giác ABC, Gọi D là trung điểm cạnh AB, trên BC lấy các điểm E, F sao cho BE = EF = FC, trên tia đối của tia BA lấy điểm G sao cho BG = BD

CMR: AF, CD, GE đồng quy

Lời giải



Gọi I là giao điểm của CD và GE

=> E là trọng tâm của ΔDGC => DI = IC

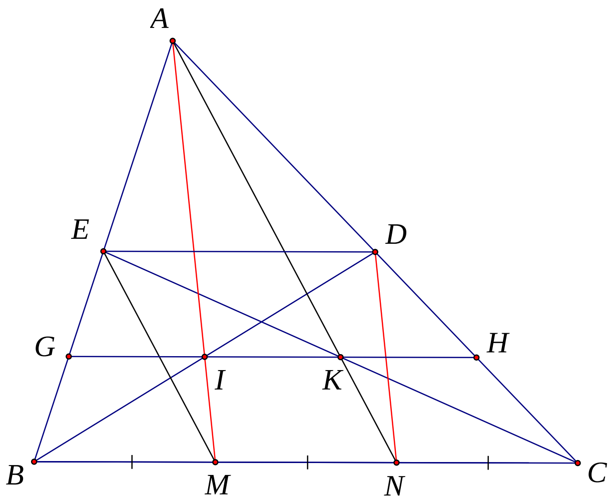
ΔDEC có IF là đường trung bình nên IF // DE

Lại có: DE là đường trung bình ΔABF => DE // AF

Khi đó A, I, F thẳng hàng hay AF có đi qua I

Bài 13: Cho tam giác ABC có BC = a, các đường trung tuyến BD, CE, lấy các điểm M, N trên các cạnh BC sao cho BM = MN = NC, gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của AN và CE. Tính IK

Lời giải



Vì DN là đường trung bình của Δ ACM => DN // AM

ΔBDN có: $\begin{cases} BM = MN \\ AM // DN \end{cases}$ => I là trung điểm của BD

Chứng minh tương tự =>

K là trung điểm của EC

Kéo dài IK cắt AB và AC lần lượt tại G và H

Khi đó Δ BED có GI đi qua trung điểm I của BD

và // ED nên GE = GB

ΔCED có KH đi qua trung điểm K của EC và // ED

Nên HD = HC

Khi đó ta có: $GI = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{4}a, KH = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{4}a$

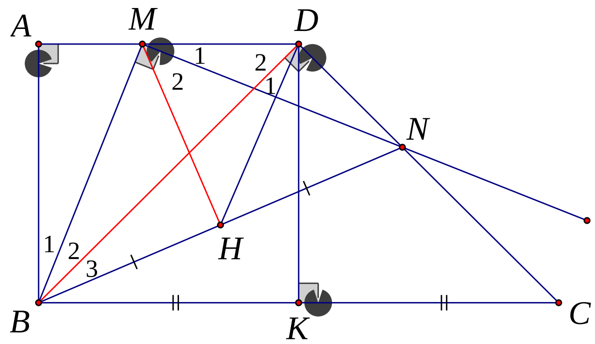
Còn $2GH = a + \frac{1}{2}a = \frac{3a}{2} \Rightarrow GH = \frac{3a}{4}$

Nên IK= GH - GI - HK=$\frac{3a}{4} - \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}a = \frac{a}{4}$

Vậy $IK = \frac{a}{4}$

Bài 14: Cho hình thang ABCD có $\hat{A} = \hat{B} = 1v, BC = 2AB = 2AD$, Gọi M là 1 điểm nằm trên đáy nhỏ AD, kẻ Mx vuông góc với BM và Mx cắt CD tại N. CMR: MB = MN

Lời giải



Kẻ DK //AB, chứng minh ΔBDC vuông tại D

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 90^0 + 45^0 = 135^0$

Gọi H là trung điểm của BN,

Chứng minh MH $\perp$ BN vì ΔBMN vuông

$MH = \frac{1}{2}BN, DH = \frac{1}{2}BN \Rightarrow MH = DH$

$\widehat{HMD} = \widehat{HDM}$ mà $\widehat{HDM} = \widehat{ABH} = \widehat{DMN} + \widehat{MBH}$ (1)

Và $\widehat{HMD} = \widehat{HMN} + \widehat{DMN}$ (2)

Từ (1) và (2) => $\widehat{MBH} = \widehat{HMN}$

Mà: $\widehat{MBH} + \widehat{MNH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HMN} + \widehat{MNH} = 90^0$

Bài 15: Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H, M là trung điểm của BC, qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM, cắt AB, AC theo thứ tự tại E và F

a) Trên Tia đối tia HC, lấy điểm D sao cho HD = HC, CMR E là trực tâm của tam giác DBH

b) CMR: HE = HF

Lời giải

a) Ta có MH là đường trung bình ΔBCD

=> MH// BD

Mà EF // MH => EF $\perp$ BD

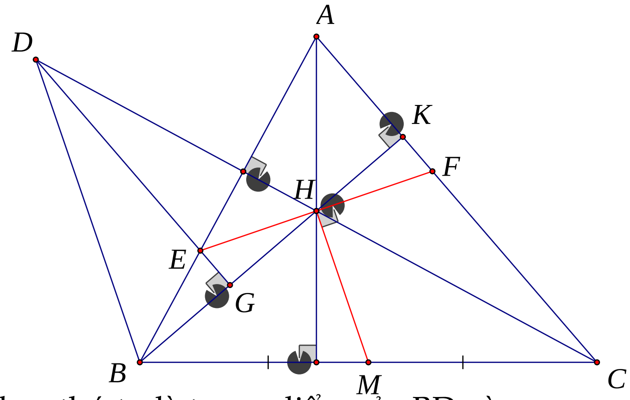
Ta lại có: BA $\perp$ DH => ΔBDH có E là trực tâm

b) Gọi G là giao điểm của DE và BH

=> K là giao điểm BH và AC

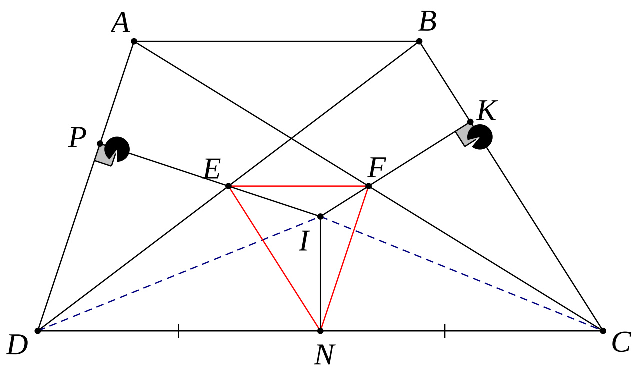
=> ΔDHG = ΔCHK (cạnh huyền - góc nhọn)

=> HG = HK => ΔHE = ΔHKF (c. g. c) => HE = HF



Bài 16: Cho hình thang ABCD (AB // CD), Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của BD và AC, vẽ đường thẳng đi qua E và vuông góc với AD và đường thẳng qua F vuông góc với BC, cắt nhau tại I, CMR: IC = ID

Lời giải



Gọi N là trung điểm của DC

=> FN là đường trung bình của ΔADC

$$=> \begin{cases} FN // AD \\ PE \perp AD \end{cases} => PE \perp FN => EI \perp FN$$

Chứng minh tương tự:

$FQ \perp EN => FI \perp EN$ => I là trực tâm

=> IN $\perp$ EF, mà EF // DC => IN $\perp$ DC

ΔIDC có IN vừa trung tuyến vừa đường cao

=> ΔIDC cân => ID = IC

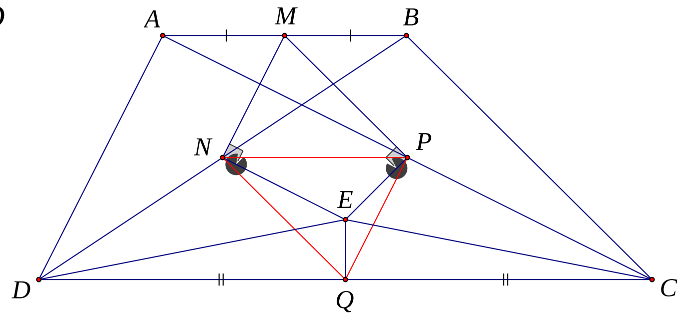
Bài 17: Cho hình thang ABCD, (AB<CD), Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BD, AC, đường thẳng vuông góc với MN tại N và đường thẳng vuông góc với MP tại P cắt nhau tại E, CMR: EC = ED

Lời giải

Gọi Q là trung điểm của CD

MN là đường trung bình $\Rightarrow MN = \frac{1}{2}AD, MN // AD$

PQ là đường trung bình $\Rightarrow PQ = \frac{1}{2}AD, PQ // AD$



Bài 18: Cho 3 điểm A, B, C theo thứ tự nằm trên đường thẳng d, (AB > BC), Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d, vẽ các $\Delta ADB, \Delta BEC$ đều, Gọi M, N, P, Q, I theo thứ tự là Trung điểm của các đoạn thẳng BD, AE, BE, CD, DE

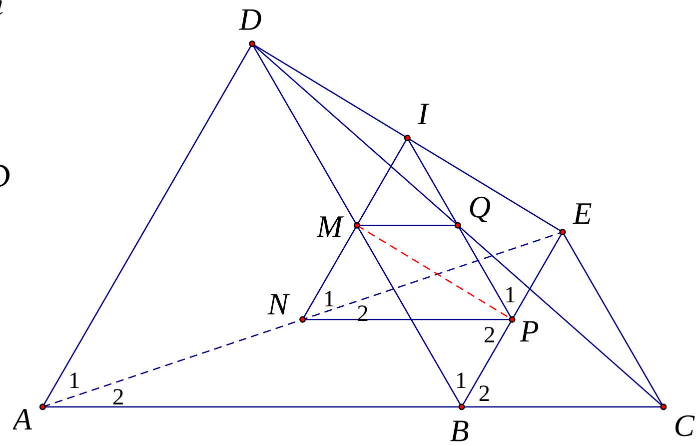
a) CMR: 3 điểm I, M, N thẳng hàng

b) CMR: 3 điểm I, Q, P thẳng hàng

c) CMR: MNPQ là thình thang cân

d) $NQ = \frac{1}{2}DE$

Lời giải



a) Dễ thấy AD // BE

IN là đường trung bình Δ ADE => IN // AD

IM là đường trung bình Δ DBE => IM // BE // AD

=> 3 điểm I, M, N thẳng hàng

b) Chứng minh tương tự

c) Trong Δ AEB có NP là đường trung bình

=> NP // (d)

Tương tự MQ // (d) => MQ // NP

$$=>\Rightarrow \begin{cases} \widehat{N_1} = \widehat{A_1} \\ \widehat{N_2} = \widehat{A_2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{N} = \widehat{A} = 60^0,$$

Chứng minh tương tự ta có: $\begin{cases} \widehat{D_1} = \widehat{B_1} \\ \widehat{P_2} = \widehat{B_2} \end{cases} => \widehat{QPN} = 180^0 - 60^0 - 60^0 = 60^0$

d) Vì MNPQ thang cân => NQ = MP, Mà MP là đường trung bình Δ BED nên:

$$MP = \frac{1}{2}DE => NQ = MP = \frac{1}{2}DE$$

Bài 19: Cho ΔABC đều, Trên tia đối của tian AB, lấy D, trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho AD=AE, Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các trung điểm của BE, AD, AC, AB, CMR:

a) Tứ giác BCDE là hình thang cân

b) Tứ giác CNEQ là hình thang

c) ΔMNP là tam giác đều

Lời giải

a) ΔAED đều => $\widehat{D} = 60^0 = \widehat{B} => ED//BC$

Lại có 2 đường chéo bằng nhau => là hình thang cân

b) ΔABC đều => $CQ \perp AD$

ΔAED đều => $EN \perp AD$ => CQ // EN => là hình thang

c) Ta có: NP là đường trung bình => $NP = \frac{1}{2}DC$

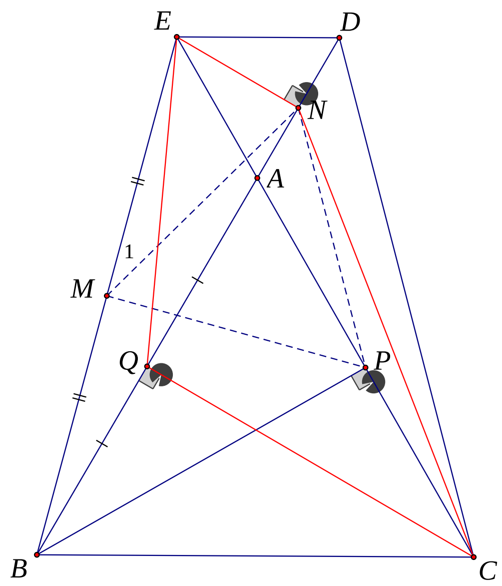
Xét ΔBEP có $\widehat{P} = 90^0$, MP là đường trung tuyến

$=> MP = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}DC$

Xét ΔENB có $\widehat{N} = 90^0$ và MN là đường trung tuyên

$=> MN = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}DC$

Vậy ΔNMP có 3 cạnh bằng nhau nên là tam giác đều

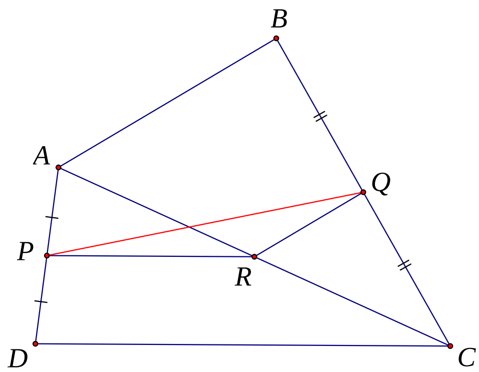


Bài 20: Cho tứ giác ABCD, Gọi P, Q theo thứu tự là trung điểm của AD và BC

a) CMR: $PQ \le \frac{AB+CD}{2}$

b) Tứ giác ABCD là hình thang khi và chỉ khi $PQ = \frac{AB+CD}{2}$

Lời giải



b) Ta chứng minh ABCD là hình thang $\Rightarrow PQ = \frac{AB+CD}{2}$

Thật vậy : ΔADC có pR là đường trung bình

$\Rightarrow PR = \frac{1}{2}DC$ (1)

RQ là đường trung bình Δ ABC

$\Rightarrow RQ = \frac{1}{2}AB$ (2)

Cộng theo vế (1) và (2) ta được : $PQ + RQ = \frac{AB+CD}{2}$

Ngược lại : $PQ = \frac{AB+CD}{2} => PQ = PR + RQ \Rightarrow$ 3 điểm P, Q, R thẳng hàng,

Mà : PQ // DC và RQ // AB => AB // CD => ABCD là hình thang

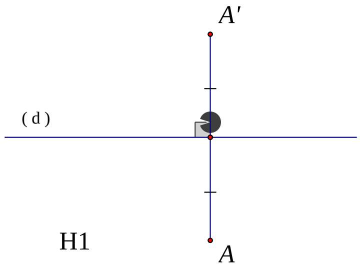
ĐỐI XỨNG TRỤC, ĐỐI XỨNG TÂM

A. LÝ THUYẾT

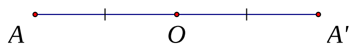
1. Định nghĩa:

- Hai điểm A và A′ được gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d, nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng AA′. (H1)

- Hai điểm A và A′ được gọi là đối xứng với nhau qua điểm O, nếu O là trung điểm của AA′.(H2)



H1



H2

2. Tính chất:

-. Mọi điểm nằm trên đường thẳng (d) đều cách đều hai đầu mút A và A′.

3. Quy ước:

-. Điểm nằm trên trục đối xứng (d) thì điểm đối xứng với nó qua (d) là chính nó.

- Điểm đối xứng với điểm O qua tâm O chính là điểm O.

B. Bài tập

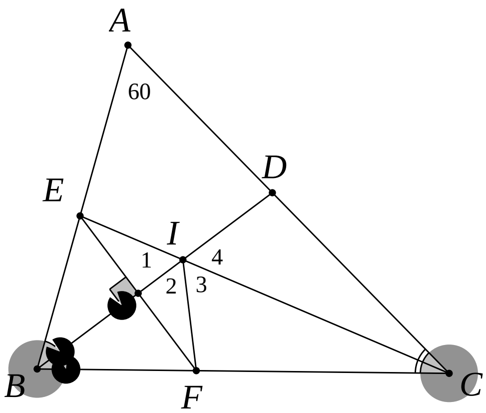
Bài 1: Cho ΔABC có $\widehat{A}=60^0$, các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I, qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BD cắt BC ở F, CMR:

a, E và F đối xứng nhau qua BD

b, IF là phân giác $\widehat{BIC}$

c, D và F đối xứng nhau qua IC

Lời giải



a) ΔEBF cân tại B, BD là tia phân giác góc $\widehat{B}$,

nên BD là đường trung trực EF.

Vậy E, F đối xứng với nhau qua BD

b) Tính $\widehat{BIC}=120^0$ nên $\widehat{I_1}=60^0, \widehat{I_2}=60^0, \widehat{I_3}=60^0$,

vậy IF là tia phân giác $\widehat{BIC}$

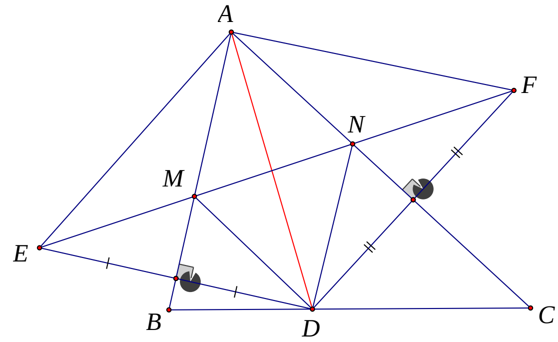
c) $\Delta IDC=\Delta IFC$ (g.c.g) => IF =ID, CF= CD

Do đó: CI là đường trung trực của DF

Vậy D, F đối xứng với nhau qua CI

Bài 2: Cho ΔABC nhọn, trong đó $\widehat{A}=60^0$, Lấy D là điểm bất kì trên BC, gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của D qua cạnh AB, AC. EF cắt AB, AC lần lượt tại M, N a, CMR: AE=AF và Tính $\widehat{EAF}$ b, CMR: AD là tia phân giác ΔDMN

Lời giải



a) Ta có: D và E đối xứng với nhau qua AB

nên AB là đường trung trực của ED => AE = AD

Tương tự AD = AF

khi đó AE=AF, Ta có: $\begin{matrix} \widehat{EAD} = 2.\widehat{MAD} \\ \widehat{DAF} = 2.\widehat{DAM} \end{matrix}$

$\Rightarrow \widehat{EAF} = 2\left(\widehat{MAD} + \widehat{DAM}\right) = 2.\widehat{A} = 120^0$

b) Do đối xứng nên ta có:

$\begin{matrix} \widehat{AEM} = \widehat{ADM} \\ \widehat{AFN} = \widehat{ADN} \end{matrix}$ và ΔAEF cân tại A nên $\widehat{AEM} = \widehat{AFN} \Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{ADN}$

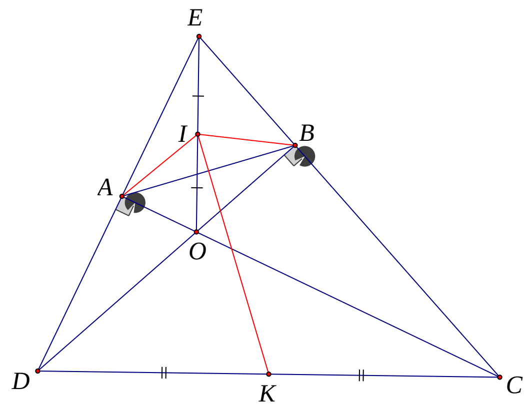
Vậy AD là phân giác góc $\widehat{MDN}$

Bài 3: Cho tứ giác ABCD, có các đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, AD vuông góc AC, BD vuông góc với CB, Gọi E là giao điểm của AD và BC, d là đường thẳng đi qua các trung điểm của EO và CD

a) CMR: A và B đối xứng nhau qua đường thẳng d

b) Tứ giác ABCD sẽ như thế nào nếu D trùng EO

Lời giải



a, Ta có: Gọi I, K lần lượt là trung điểm của OE và BC

ΔAOE vuông tại A có AI là trung tuyến

Nên AI = IE = IO (1)

ΔBOE vuông tại B có BI là đường trung tuyến

Nên BI = EI = IO (2)

Từ (1) và (2) ta có: IA = IB

Tương tự ΔADC vuông tại A có AK là đường trung tuyến

=> AK = DK = CK

ΔBDC có BK là đường trung tuyến của tam giác vuông

nên BK = KD = KC

Nên KA = KB hay K nằm trên đường trung trực AB

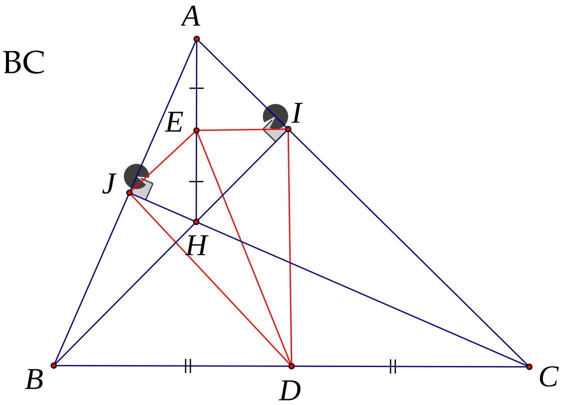
Vậy IK là trung trực của AB hay A và B đối cứng với nhau qua (d)

b, Ta thấy EO là đường thẳng chứa đường cao của ΔEDC

Nếu d trùng với EO thì d vừa là đường trung trực AB và CD nên ABCD là hình thang cân

Bài 4: Cho ΔABC, kẻ các đường cao BD và CJ, Gọi H là trực tâm của Δ, E là trung điểm của AH, D là trung điểm của BC, Chứng minh rằng: I và J đối xứng với nhau qua ED

Lời giải



ΔBIC vuông tại I có ID là trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$=> ID = \dfrac{BC}{2}$

Chứng minh tương tự: $JD = \dfrac{BC}{2} => ID = JD$

Chứng minh tương tự: JE = EI

=> ED là đường trung trực của IJ

=> IJ đối xứng nhau qua ED

Bài 5: Cho ΔABC, kẻ đường cao AH, Gọi D và E theo thứ tự là các điểm đối xứng với H qua AB và AC, đường thẳng DE cắt AB, AC lần lượt tại M, N

a) CMR: ΔDAE cân

b) CMR: HA là phân giác $\widehat{MHN}$

c) CME : 3 đường thẳng BN, CM, AH thẳng hàng

d) CMR : BN, CM là các đường cao của Δ ABC

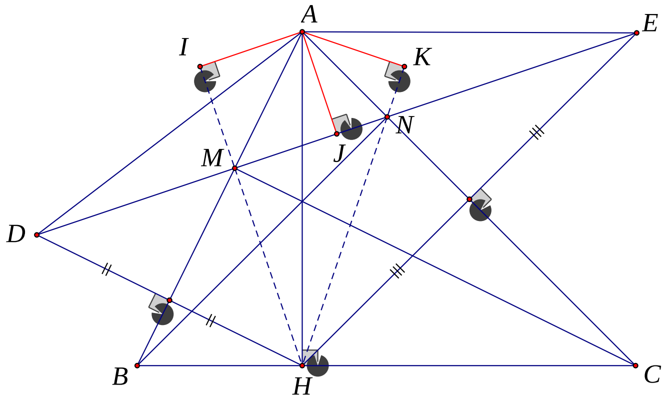
Lời giải

b, Do Tính chất đối xứng ta => AB là phân giác $\widehat{DMH}$

Kẻ $\begin{cases} AI \perp HM \\ AJ \perp DM \end{cases} => AI = AJ$ (1)

AC là phân giác $\widehat{ENH}$,

Kẻ AK $\perp$ HN=> AK= AJ (2)



Từ (1) và (2) ta có: AI = AK

Vậy A cách đều 2 cạnh góc $\widehat{MHN}$

=> HA là phân giác góc $\widehat{MHN}$

c, Chứng minh tương tự ta cũng có:

CM là tia phân giác $\widehat{HMN}$

BN là tia phân giác góc $\widehat{MNH}$

Trong ΔMHN các đường phân giác trong HA, MC, NB cùng đồng quy tại 1 điểm

d, AB là phân giác góc $\widehat{DMH}$

MC là phân giác góc $\widehat{MHN}$, mà 2 góc $\widehat{DMH}, \widehat{MHN}$ kề bù => MC $\perp$ AB => MC là đường cao Δ ABC

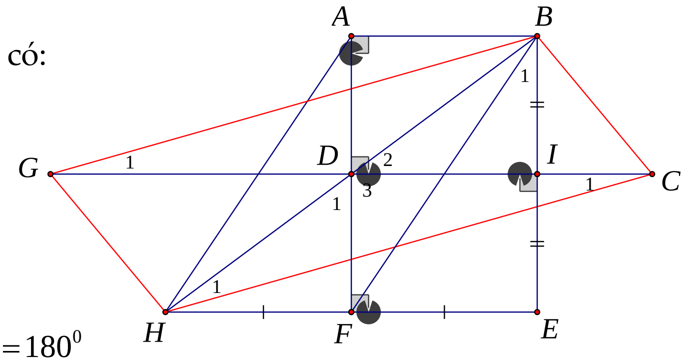
Chứng minh tương tự BN là đường cao của ΔABC

Bài 6: Cho hình thang vuông ABCD, (AB//CD). Gọi E , F theo thứ tự là các điểm đối xứng của B và điểm A qua đường thẳng DC, G, H theo thứ tự là các điểm đối xứng của C và E qua AD

a, CMR: D là trung điểm của BH

b, CMR: AH // BF, CH // BG

Lời giải



a, Gọi I là giao BE và DC, do tính chất đối xứng ta có:

BI = IE, Mà DF = AD và AD = BI => DF = BI

Ta cũng có: DI = HF

Hai tam giác vuông ΔBID và ΔDFH bằng nhau cho ta DB = DH (1)

Và $\widehat{B_1} = \widehat{D_1} \Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{D_2} + \widehat{D_3} = \widehat{D_1} + \widehat{B_1} + 90^0 = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> H, B, D thẳng hàng (2)

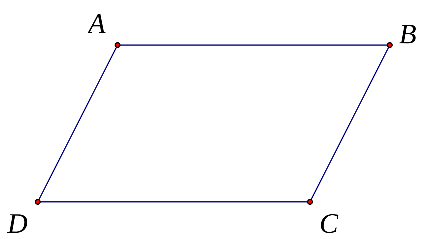
Từ (1) và (2) => D là trung điểm BH

b, Dễ dạng chứng minh được $\Delta ADH = \Delta FDB \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{F_1} \Rightarrow AH // BF$

Dễ chứng minh được $\Delta BDG = \Delta HDC \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{G_1} \Rightarrow CH // GB$

HÌNH BÌNH HÀNH

A. LÝ THUYẾT



H1

1. Định nghĩa: Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song

$\lozenge ABCD$ là hình hình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} \lozenge ABCD \\ AB // CD, AD // BC \end{cases}$

- Chú ý: Hình bình hành là hình thang đặc biệt có hai cạnh bên song song

2. Tính chất: Trong hình bình hành

- Tính chất về cạnh: Các cạnh đối bằng nhau
- Tính chất về góc: Các góc đối bằng nhau
- Tính chất về đường chéo: Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

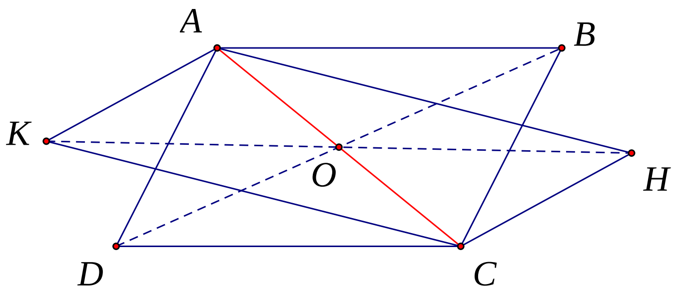
3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành
- Tứ giác có hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau là hình bình hành
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành

- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành

4. Mở rộng

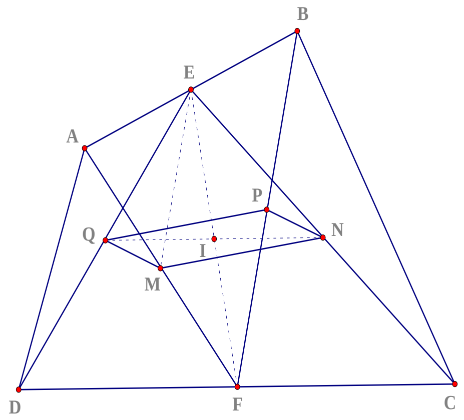
- Hai hình bình hành có một đường chéo chung thì các đường chéo của chúng đồng quy tại trung điểm của đường chéo chung.



B. BÀI TẬP

Bài 1: Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AF, CE, BF, DE. CMR: Tứ giác MNPQ là hình bình hành

Lời giải



Ta có : QF, NF là đường trung bình của tam giác DEC

$\Rightarrow \begin{cases} QF // EC \\ NF // DE \end{cases}; \begin{cases} QF // NE \\ QE // NF \end{cases}$

$\Rightarrow \lozenge QFNE$ là hình bình hành $\Rightarrow QN, FE$

Cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Gọi I là trung điểm của EF $\Rightarrow I$ là trung điểm của QN

Chứng minh tương tự: Tứ giác MEPF là hình bình hành

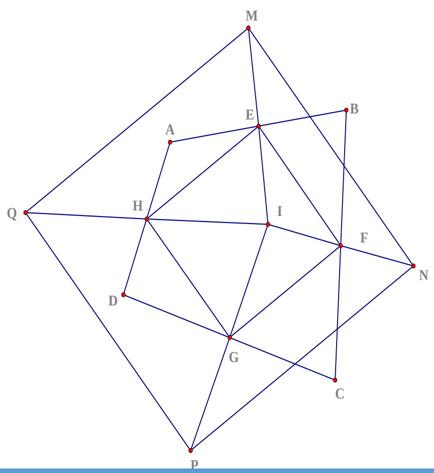
$\Rightarrow I$ là trung điểm của MP $\Rightarrow dpcm$

Bài 2: Cho tứ giác ABCD và điểm I thuộc miền trong tứ giác. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với I qua trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. CMR: MNPQ là hình bình hành

Lời giải

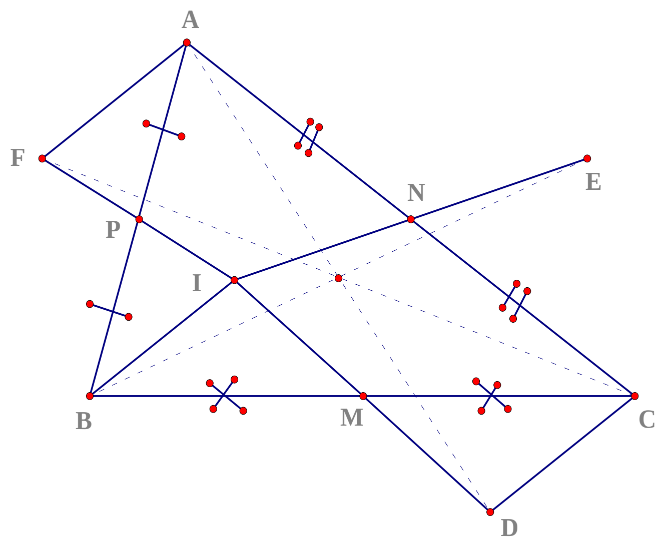
$MN // FE; MN = 2FE; PQ // GH; PQ = 2GH; HG // AC$

$HG = \frac{1}{2}AC; FE // AC; FE = \frac{1}{2}AC$



Bài 3: Cho tam giác ABC và một điểm I thuộc miền trong của tam giác. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng với I qua M, N, P. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy

Lời giải



+) Tứ giác FAIB là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường)

$\Rightarrow FA // = BI (1)$

+) Tứ giác BICD là hình bình hành

$\Rightarrow BI // = CD (2)$

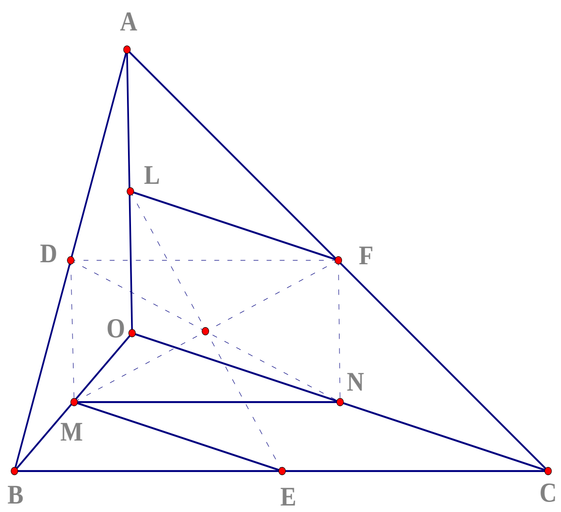
Từ (1)(2) $\Rightarrow FA // = CD (1) \Rightarrow \lozenge FACD$ là hình bình hành $\Rightarrow AD, CF$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (3)

Tương tự: ABDE là hình bình hành

$\Rightarrow AD, BE$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (4)

Từ (3), (4) ta có điều phải chứng minh

Bài 4: Cho ΔABC, O là 1 điểm thuộc miền trong tam giác. D, E, F là trung điểm của AD, BC, CA. L, M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB, OC. CMR: EL, FM, DN đồng quy



Lời giải

+) DMFN là hình bình hành, do:

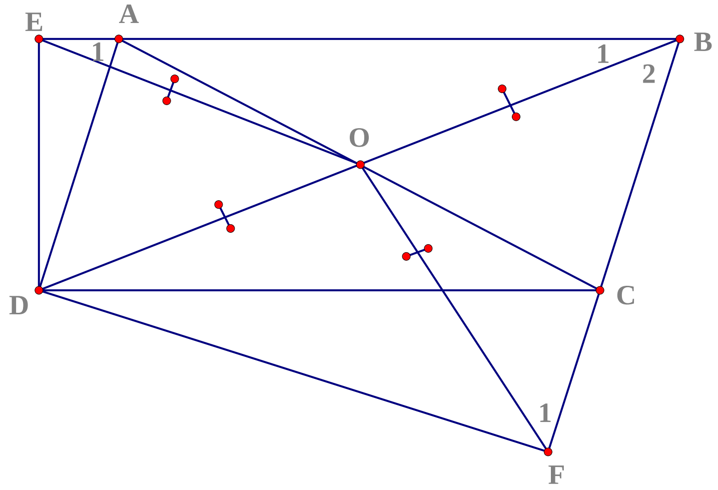
$$\begin{cases} DF = MN = \dfrac{1}{2}BC \\ DF // MN // BC \end{cases}$$

$\Rightarrow DN, FM$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Tương tự: $\begin{cases} MLFE : hbh \\ DLNE : hbh \end{cases}$

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD, $A\hat{D}C = 75^0$. O là giao điểm hai đường chéo. Từ D hạ DE, DF lần lượt vuông góc với AB và BC ($E \in AB, F \in AC$). Tính $F\hat{O}E$

Lời giải



+) Gọi O là giao điểm của AC và BD

Vậy O là trung điểm của AC, BD

$A\hat{B}C = A\hat{D}C = 75^0$

Xét tam giác vuông DEB, có:

$AO = OD = OB = \frac{BD}{2} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}_1$

+) $EOD = \hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 2\hat{B}_1 (Gocngoai\Delta)$

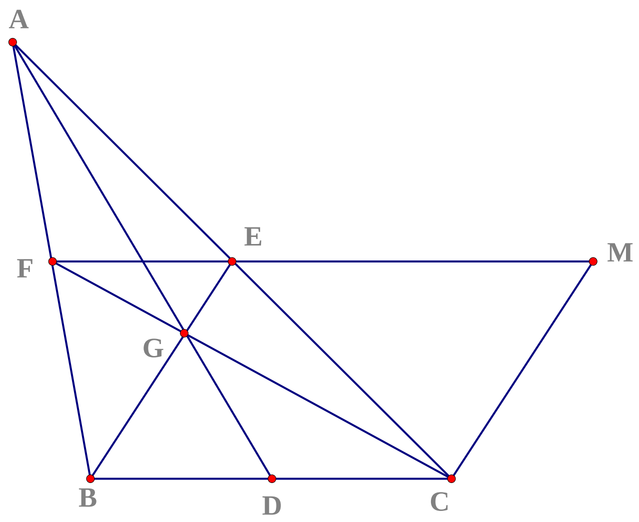
+)

$FO = \frac{1}{2}BD = 0B = 0D \to \hat{B}_2 = \hat{F}_1 \to F\hat{O}D = 2\hat{B}_2$

Tương tự: $F\hat{O}E = E\hat{O}D + F\hat{O}D = 2(\hat{B}_1 + \hat{B}_2) = 2A\hat{B}C = 150^0$

Bài 6: Cho ΔABC, có các trung tuyến AD, BE, CF. Biết rằng $BE \perp CF$. CMR: $AD^2 = BE^2 + CF^2$

Sử dụng phương pháp dịch chuyển tức thời



Lời giải

Dựng hình bình hành BEMC

$\Rightarrow \begin{cases} MC = BE \\ MC // BE \to MC \perp CF (BE \perp CF) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} ME // BC \\ FE // CB (duongTB\Delta) \end{cases}$

Vậy M, E, F thẳng hàng

+) $FE = \frac{1}{2}BC$

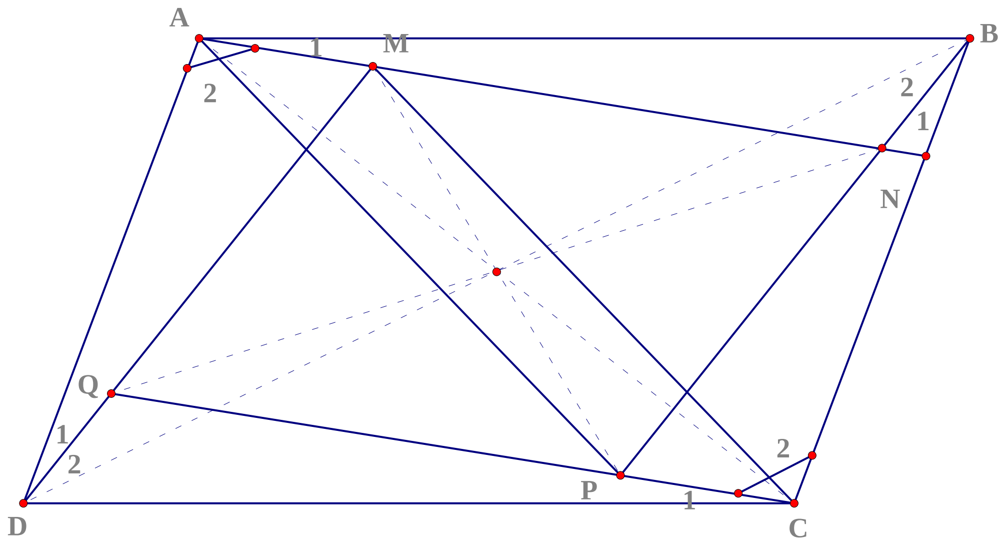
$FM = ME + FE = BC + \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}BC \quad (1)$

Mặt khác: $\begin{cases} AD = 3GD \\ \Delta BGC : GD = \frac{1}{2}BC \end{cases} \Rightarrow AD = \frac{3}{2}BC \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\left. \begin{array}{l} MF = AD \to MF^2 = AD^2 \\ Pytago : FM^2 = FC^2 + MC^2 \end{array} \right\} \Rightarrow AD^2 = FC^2 + BE^2 (dpcm)$

Bài 7: Cho hình bình hành ABCD. Về phía trong hình bình hành dựng các tia Ax, By, Cz, Dt lần lượt tạo với AB, BC, CD, DA các góc bằng nhau và bằng $\propto$. Các tia này cắt nhau tạo thành tứ giác MNPQ. Chứng minh rằng: AC, BD, MP, NQ đồng quy

Lời giải



+) Đi chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành

$$\left.\begin{matrix}\hat{A}_{1,2} = \hat{C}_{1,2} \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{\hat{C}}_2 = \hat{A}_2 \Rightarrow MN // PQ \quad (1)$$

Tương tự: $\hat{B}_2 = \hat{D}_2 \Rightarrow MQ // NP \quad (2) \Rightarrow \lozenge MNPQ : hinhbinhhanh$

+) Thêm: AMCP là hình bình hành

$$\Delta ADM = \Delta CBP(gcg) \Rightarrow \begin{cases} AM = CP \\ AM // CP \end{cases} \Rightarrow HBH \Rightarrow dpcm$$

Bài 8: Cho tứ giác ABCD, E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC. G là đỉnh của hình bình hành CADG và H là đỉnh của hình bình hành CABH

a. Chứng minh BD // GH

b. HD = 2EF

Lời giải

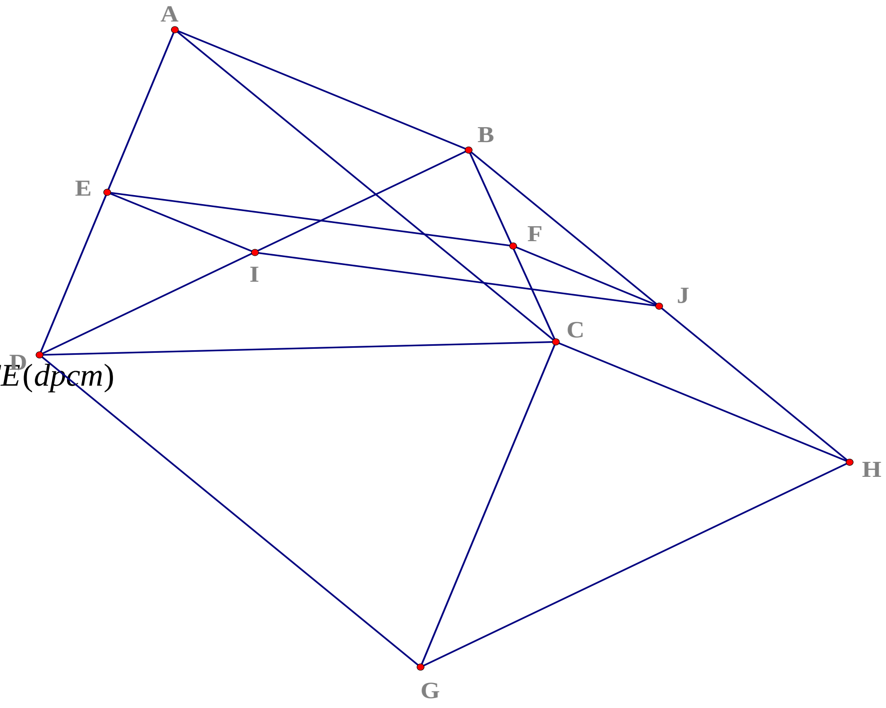
a. Có DG // BH và DG = BH nên tứ giác BDGH là hình bình hành $\rightarrow BD = GH(dpcm)$

b. Gọi I là trung điểm của BD, J là trung điểm của BH $\rightarrow JI = \dfrac{1}{2}DH(1)$

$$\left.\begin{array}{l} EI = \frac{1}{2}A \\ JE = \frac{1}{2}CH \\ AB = CH \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} EI = JF \\ EI // JF \end{cases}$$

$\Rightarrow \lozenge EIJF : hinhbinhhanh$

$\Rightarrow JI = FE(2) \Rightarrow HD = 2FE(dpcm)$



Bài 9: Cho tam giác ABC. Gọi A′ đối xứng với A qua C, B′ đối xứng với B qua A, C′ đối xứng với C qua B. Gọi BM là trung tuyến của tam giác ABC, B′M′ là trung tuyến của tam giác A′B′C′

a. Chứng minh tứ giác ABM′M là hình bình hành

b. G là giao điểm của BM và B′M′. Chứng minh rằng G là trọng tâm tam giác ABC và A′B′C′

Lời giải

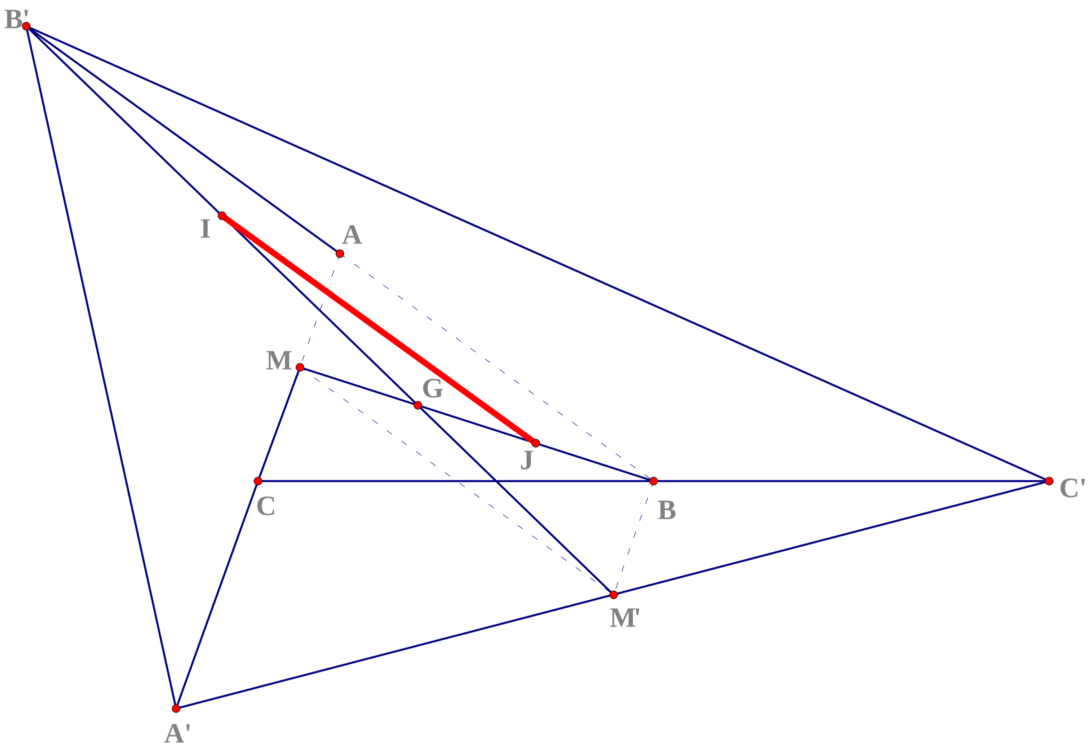
a. $BM' = // \frac{1}{2}A'C \to BM' = // \frac{1}{2}AC = AM \to \lozenge ABMM' : hinhbinhhanh$

b. Gọi I là trung điểm của B′G, J là trung điểm của BG

Suy ra IJ là đường trung bình của tam giác GBB′

$$\Rightarrow JI // = \frac{1}{2}BB' \Rightarrow \begin{cases} JI // AB \\ JI = AB \to JI // = MM' \to JIMM' : hinhbinhhanh \end{cases}$$

Suy ra G là trung điểm của IM′ ; MJ $\Rightarrow \begin{cases} GM' = GI = IB' \\ GM = GJ = JB \end{cases} \Rightarrow G$.....................$\Delta ABC, \Delta A'B'C'$



Bài 10[*]: Cho tam giác đều ABC, một đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại D và E. Gọi G là trọng tâm của tam giác ADE, I là trung điểm của CD. Tính số đo các góc tam giác GIB

Lời giải

+) Qua C kẻ đường thẳng song song với BD cắt ED tại K

+) $\lozenge CBDK$ là hình bình hành. Nên KB cắt CD tại I

+) GD = GE

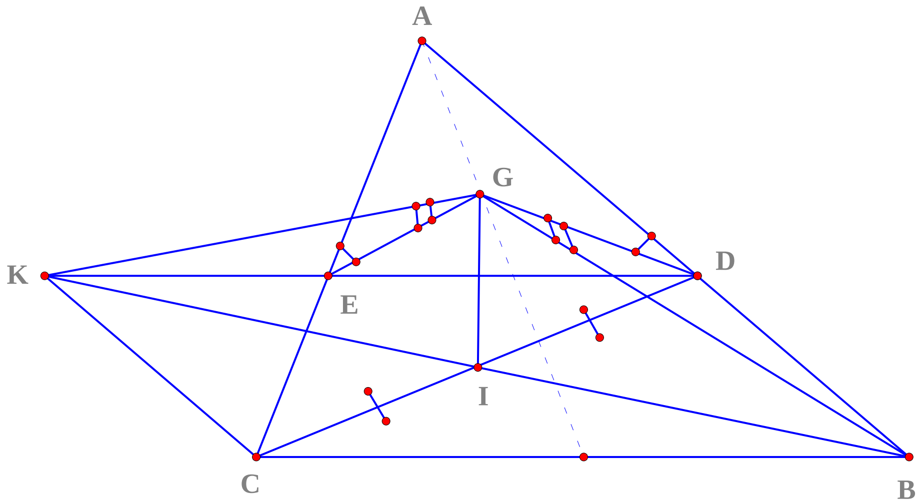
+) $G\hat{D}K = G\hat{D}B = 150^0$

+) ΔKEC đều $\Rightarrow \begin{cases} KC = KE \\ KC = DB \end{cases} \Rightarrow KE = BD \to \Delta GEK = \Delta GDB(cgc) \to GK = GB \to \Delta GBK$: cân

Suy ra GI là trung tuyến, đường cao

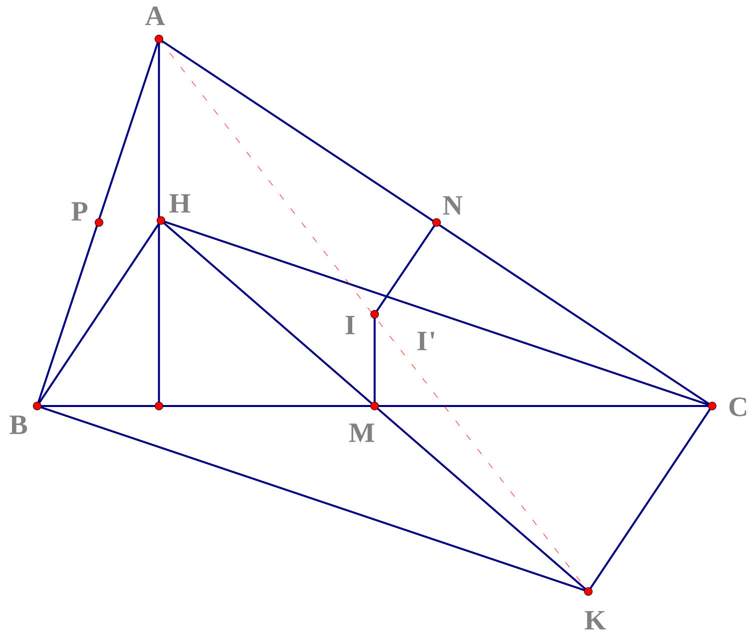
$\Rightarrow GI \perp BK \to G\hat{I}B = 90^0; K\hat{G}B = E\hat{D}G = 120^0 (\Delta AED: deu, G: trongtam)$

$\Rightarrow GBK = GKB = 30^0 (\Delta GKB: cantaiG) \Rightarrow I\hat{G}B = 60^0$



Bài 11*: Cho tam giác ABC, H là trực tâm, I là giao điểm các đường trung trực, K là điểm đối xứng với H qua trung điểm BC. CMR: K đối xứng với A qua I

Lời giải



M là trung điểm của BC và HK

$\Rightarrow \lozenge BHCK$ Là hình bình hành

$\Rightarrow \begin{cases} BH // CK \\ CH // BK \end{cases}; BH \perp AC \to CK \perp AC$

$\begin{cases} BK // CH \\ CH \perp AB \end{cases} \to AB \perp BK$

Gọi I′ là trung điểm của AK

$\to I'N$ là đường trung bình của tam giác ACK

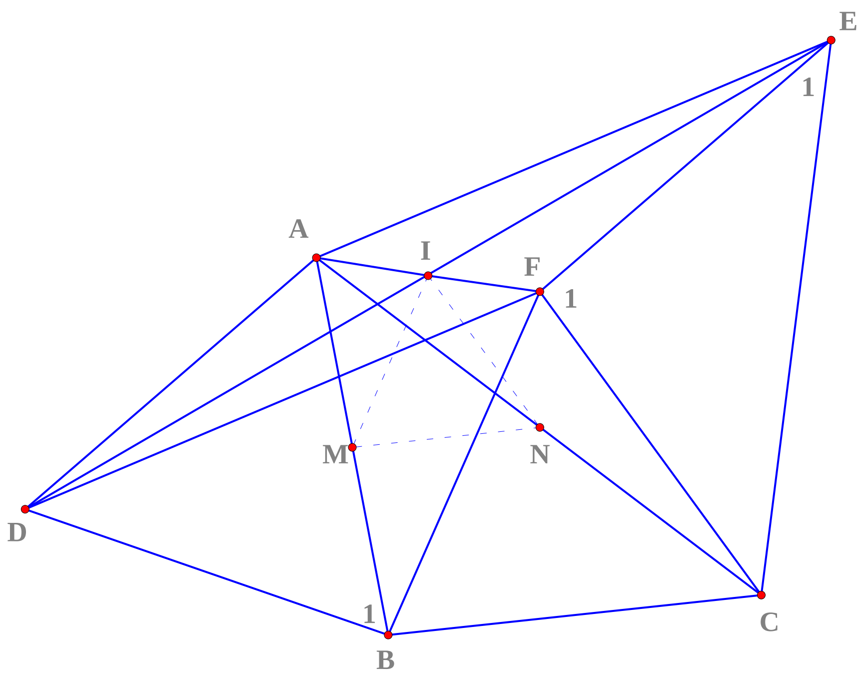
$\Rightarrow I'N // CK'I'N \perp AC$

Goi P là trung điểm của AB $\Rightarrow I'P$ là đường trung bình của tam giác ABK

$\Rightarrow I'P // BK \to I'P \perp AB$

Có: $\left. \begin{matrix} I'N : trungtruc : AC \\ I'P \perp AB \to I'P : trungtruc : AB \end{matrix} \right\} \to I \equiv I' \to K$ đối xứng với A qua I.

Bài 12*: Cho ΔABC, về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác đều ABD, ACE. Gọi I, M, N lần lượt là trung điểm của DE, AB, AC. CMR: ΔIMN đều



Lời giải

Dùng phương pháp phóng to tam giác IMN

Gọi F là điểm đối xứng với A qua I $\Rightarrow \lozenge ADFE$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} FE = AD = BD \\ DF = AE = CE \end{cases}$

+) $A\hat{D}F = A\hat{E}F \rightarrow \hat{D}_1 = \hat{E}_1 (= 60^0 - A\hat{D}F) \Rightarrow \Delta FEC = BDF(cgc) \Rightarrow \begin{cases} BF = FC \\ \hat{F}_1 = \hat{B}_1 \end{cases}$

+) $B\hat{F}C = 360^0 - \hat{F}_1 - B\hat{F}D - D\hat{F}E = 360^0 - D\hat{B}F - B\hat{F}D - D\hat{F}E = 360^0 - (180^0 - B\hat{D}F) - (180^0 - A\hat{D}F)$

$= B\hat{D}F + A\hat{D}F = A\hat{D}B = 60^0 \Rightarrow \Delta BFC$ đều

+) $MI = \frac{1}{2}BF; NI = \frac{1}{2}FC; MN = \frac{1}{2}BC \Rightarrow MI = NI = MN \Rightarrow \Delta MNI$ đều

Bài 13: Cho HBH ABCD, Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC, đường chéo AC cắt BE, DF lần lượt tại P và Q, gọi R là trung điểm của đoạn thẳng BP, CMR:

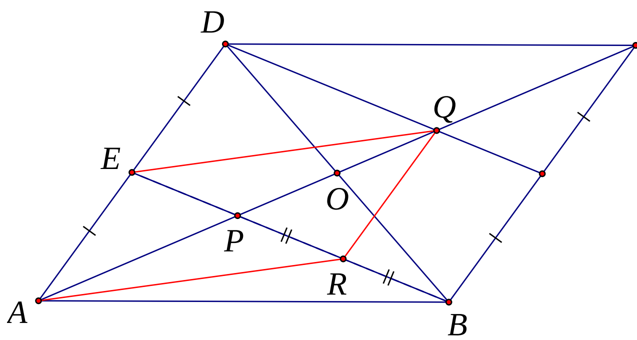
a) AP = PQ = QC b) Tứ giác ARQE là hình bình hành

Lời giải

a, Trong ΔBDC có CO và DF là hai đường trung tuyến nên Q là trọng tâm

$\Rightarrow OQ = \frac{1}{2}QC = \frac{1}{3}OC$

Tương tự ΔABD có P là trọng tâm



$\Rightarrow OP = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{3}AO$

Từ (1) và (2) ta có AP= QC

Ta lại có :

$$PQ = AC - AP - QC = AC - (2AP) = AC - \frac{2}{3}AO = AC - \frac{AC}{3} = \frac{2}{3}AC = AP$$

Vậy AP = PQ = QC

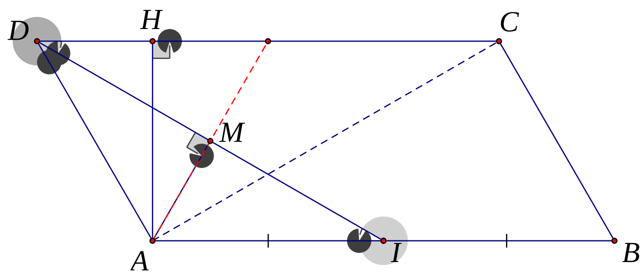
b, Vì P là trọng tâm Δ ABD nên $EP = \frac{1}{2}PB = PR$

Tứ giác ARQE có hai đường chéo cắt nhau tịa trung điểm mỗi đường nên là HBH

Bài 14: Cho HBH ABCD có $\widehat{A} = 120^0$, Tia phân giác góc D đi qua trung điểm I của AB, Kẻ AH vuông góc với DC, CMR:

a) AB = 2AD b) DI = 2AH c) AC vuông góc AD

Lời giải



a) ΔDAI cân đỉnh A

=> AD = AI= $\Rightarrow AD = AI = \frac{1}{2}AB$

b) Kẻ AH $\perp$DC, AM $\perp$DI

=> ΔADM = ΔADH => AH= DM = $\frac{1}{2}$ DI

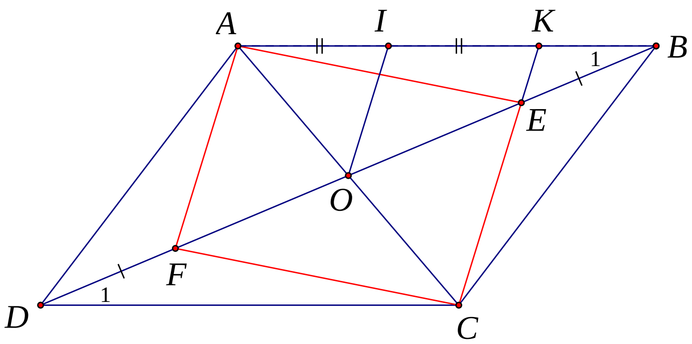
c, ΔADC có $\widehat{D} = 60^0$ => $CD = 2.AD$ => ΔADC vuông tại A

Bài 15: Cho HBH ABCD, lấy hai điểm E, F trên BD sao cho $BE = DF < \frac{BD}{2}$

a) CMR: AECF là HBH

b) Gọi K là giao điểm của CE và AB, I là trung điểm của AK, xác định vị trí điểm E sao cho AI = IK = KB

Lời giải



a) Xét Δ ABE và Δ CDF ta có:

AB = CD, $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ và BE = CF

=> ΔABE= ΔCDF (c. g.c) => AE= CF

Chứng minh tương tự AF = CE

=> AECF là hình bình hành

b) Ta có:

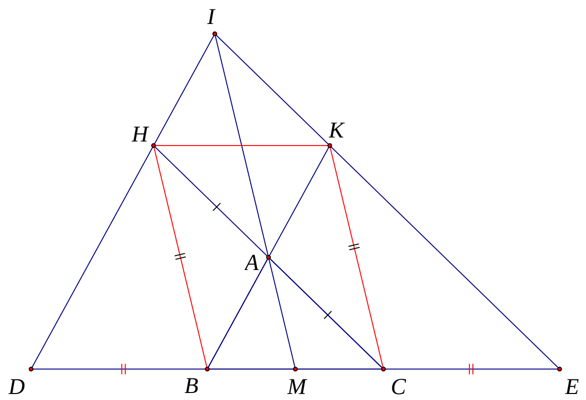
$\begin{cases} OA = OC \\ AI = KI \end{cases}$ => $OI // CK$, khi đó: $\begin{cases} BK = IK \\ KE // IO \end{cases}$ $\Rightarrow$ E là trung điểm OB

Bài 16: Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia BC, lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho BD=BC=CE, Qua D kẻ đường thẳng // với AB cắt AC ở H, qua E kẻ đường thẳng // với AC cắt AB ở k, chúng cắt nhau ở I

a) Tứ giác BHKC là hình gì? b) Tia IA cắt BC tại M, CMR : MB=MC

c) Tìm điều kiện của ΔABC để tứ giác DHKE là hình thang cân

Lời giải



a, Tứ giác BHKC là hình bình hành vì

có 2 đường chéo BK và HC cắt nhau tại trung điểm

của mỗi đường

b, Tứ giác AHIK cũng là hình bình hành

nên AK// IH và AK= IH

AB // IH và AB = IH

=> ABHI là hình bình hành

=> IA // HB => AM là đường trung bình của $\perp$HBC

=> BM = MC

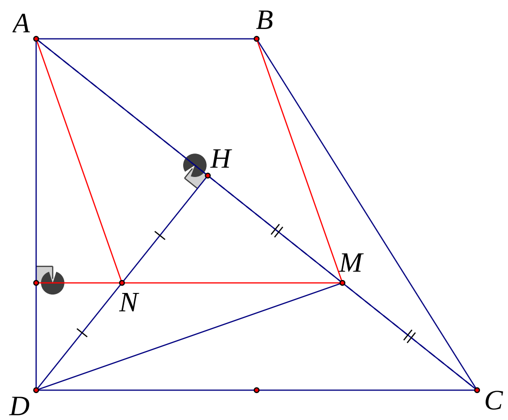
c, Tứ giác DHKE là hình thang vì HK // DE,

để là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{E}$

Hay $\widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

Bài 17: Cho hình thang vuông ABCD $\left(\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0\right)$, có CD= 2AB, gọi H là hình chiếu của D trên AC, M là trung điểm của HC, Chứng minh rằng: $\widehat{BMD} = 90^0$

Lời giải



Gọi N là trung điểm của HD, ta có: MN là đường trung bình

$\Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}DC, MN // DC$

Mà: $AB // DC, AB = \dfrac{1}{2}DC$

nên AB // MN và AB = MN => ABMN là hình bình hành

=> AN // BM

Δ ADM có DH $\perp$AM, MN $\perp$AD, AN $\perp$DM

Khi đó $\widehat{BMD} = 90^0$

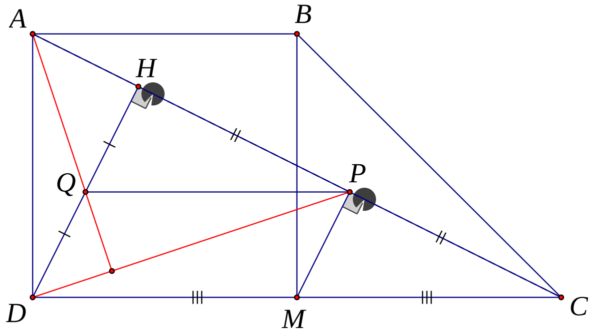
Bài 18: Cho hình thang vuông ABCD, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$, CD = 2AB = 2AD, Gọi H là hình chiếu của D lên AC. Gọi M, P, Q lần lượt là trung điểm của CD, HC và HD

a) CMR: Tứ giác ABMD là hình vuông và tam giác BDC là tam giác vuông cân

b) CMR: DMPQ là hình bình hành

c) CMR: AQ vuông góc với DP

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác ABMD có 4 cạnh bằng nhau,

lại có $\widehat{A} = 90^0$ nên ABMD là hình vuông

ΔBCD có MB = MC = MD nên là tam giác vuông ,

lại có $\widehat{BDC} = 45^0$

Do đó: ΔBDC là tam giác vuông cân ở B

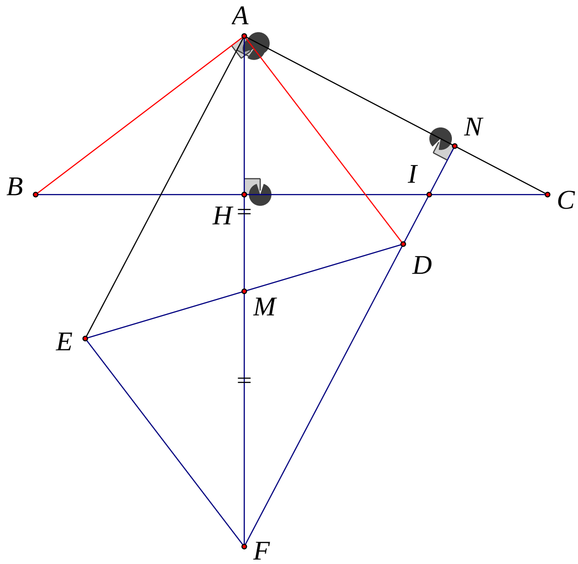
b) Tứ giác DMPQ là hình bình hành vì có PQ// DM

và PQ = DM

c) Chứng minh Q là trực tâm của ΔADP

Bài 19: Cho tam giác ABC có góc A tù, AC > AB, H là chân đường cao hạ từ A, về phía trong góc $\widehat{BAC}$, dựng D và E sao cho AD vuông góc với AB, AD = AB, AE vuông góc với AC và AE = AC, M là trung điểm DE. CMR: A, H, M thẳng hàng

Lời giải



Dựng hình bình hành DAEF $\Rightarrow$ M là trung điểm A

$\Rightarrow$ AE = DF

Mà AE $\perp$ AC => DF $\perp$ AC

Ta có: $\widehat{DAE} + \widehat{BAC} = \widehat{DAE} + \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà: $\widehat{DAE} + \widehat{ADF} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ADF}$

ΔADF = ΔABC (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{DAF}$ và $\widehat{C} = \widehat{F}$

Gọi FD cắt BC tại I, cắt AC tại N và AF cắt BC tại H′

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{H'IF} = \widehat{NIC}\left(d^2\right) \\ \widehat{C} = \widehat{F} \end{cases} \Rightarrow \widehat{IH'F} = \widehat{N} = 90^0,$$

Hay AF $\perp$ BC tại H $\Rightarrow$ A, F, H thẳng hàng $\Rightarrow$ A, H, M thẳng hàng

Bài 20: Cho HBH ABCD có AB và BD cắt nhau tại O, Gọi (d) là đường thẳng đi qua A và không cắt đoạn BD, gọi BB′, CC′, DD′ là khoảng cách từ B, C, D đến đường thẳng (d), (B′, C′, D′ nằm trên (d)). CMR: BB′ + DD′ = CC′

Lời giải

Vẽ OO′ $\perp$ (d) (O′ $\in$ (d))

Khi đó ta có: BB′D′D là hình thang

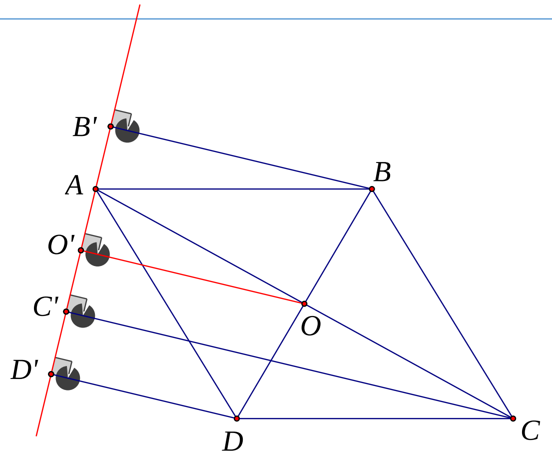
có OO′ là đường trung bình nên:

$2.OO' = BB' + DD'$ (1)

Tương tự $\Delta ACC'$ có OO′ là đường trung bình nên:

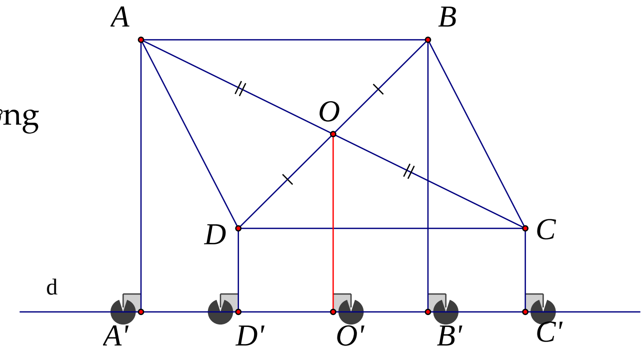
$2.OO' = CC'$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BB' + DD' = CC'$



Bài 21: Cho HBH ABCD và đường thẳng (d) nằm bên ngoài HBH, Gọi A′, B′, C′, D′ lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D trên (d). Chứng minh: $AA' + CC' = BB' + DD'$

Lời giải



Vì ABCD là hình bình hành

Nên hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Gọi O là giao của hai đường chéo AC và BD

O′ là hình chiếu của O xuống (d)

Khi đó ta có: OO′ là đường trung bình của hình thang AA′C′C nên: $2OO' = AA' + CC'$ (1)

Tương tự OO′ là đường trung bình của hình thang DD′B′B

Nên: $2.OO' = DD' + BB'$ (2)

Từ (1) và (2) => $AA' + CC' = BB' + DD'$

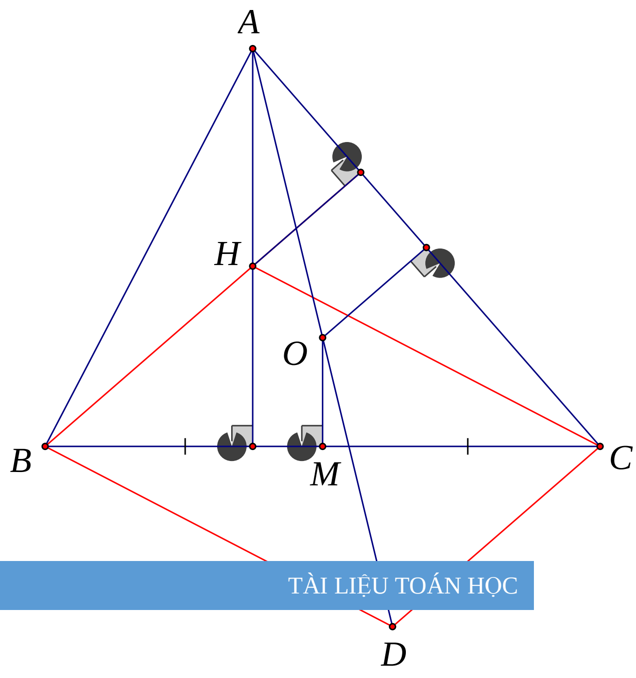
Vậy $HM \perp BN$ => ΔBMN có MH vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên MB = MN

Bài 22: Cho ΔABC có ba góc nhọn (AB<AC), gọi H là trực tâm, O là giao điểm của 3 đường trung trực của tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O

a) CMR: Tứ giác BHCD là HBH

b) Gọi M là trung điểm của BC, CMR : AH = 2.MO

Lời giải



a) Từ AO= OC = OD

$\Rightarrow$ Chứng minh $\widehat{ACD} = 90^0$,

ta có: $DC \perp AC$, $BH \perp AC$ (H là trực tâm của ΔABC)

$\Rightarrow$ BH // DC

Chứng minh tương tự ta cũng có: CH// DB

Vậy BHCD là Hình bình hành

b, M là trung điểm của BC

$\Rightarrow$M là trung điểm của HD

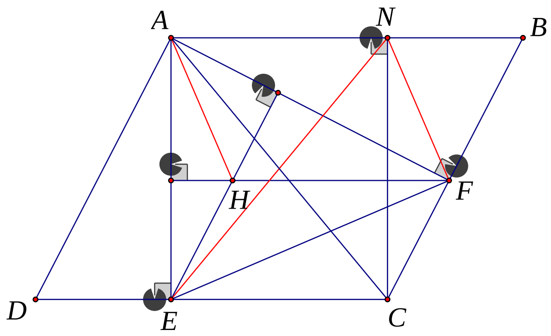
Mà O là trung điểm của AD

$\Rightarrow$ OM là đường trung bình của ΔAHD

$\Rightarrow$ OM $=\frac{1}{2}$AH $\Rightarrow$ AH = 2OM

Bài 23: Cho HBH ABCD, Các đường cao AE và AF, biết AC = 25cm, EF = 24cm, Tính khoảng cách từ A đến trực tâm H của ΔAEF

Lời giải



Kẻ CN vuông góc với AB,

Tứ giác EHFC có EH // CF, HF // FC

nên EHFC là hình bình hành $\Rightarrow$ AN = HF (= EC)

Tứ giác ANFH có AN = HF, AN // HF

nên là hình bình hành $\Rightarrow$ AH + NF, AH// NF

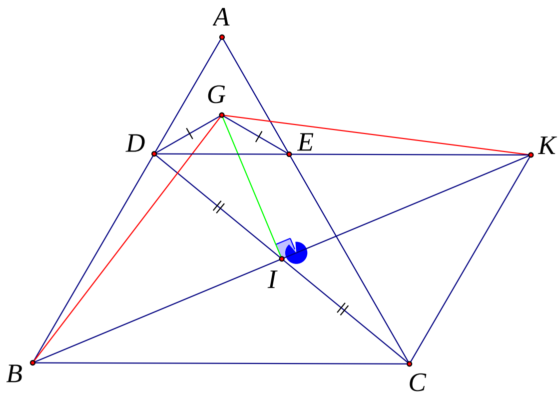
Lại có AH $\perp$EF nên NF $\perp$EF

ΔEFN vuông tại F có EF = 24cm, NE = AC = 25cm nên

$NF^2 = NE^2 - EF^2 = 25^2 - 24^2 = 49 => NF = 7 => AH = 7cm$

Bài 24: Cho tam giác ABC đều, một đường thẳng // với BC cắt AB, AC ở D và E, Gọi D là trọng tâm của tam giác ADE, I là trung điểm của CD, Tính số đo các góc của tam giác GIB

Lời giải



Qua C vẽ đường thẳng song song với BD, cắt DE tại K

Ta có: BDKC là hình bình hành => B, I, K thẳng hàng

Chứng minh ΔGDB= ΔGEK (c.g.c)

Để ΔGBK cân tại G có $\widehat{BGK} = 120^0$,

do đó các góc của ΔGBI lần lượt là $90^0, 60^0, 30^0$

Bài 25: Cho ΔABC, D trên AB, E trên AC sao cho BD = CE, Gọi M, N là trung điểm của BC, DE, Vẽ các hình bình hành BDNI và CENK

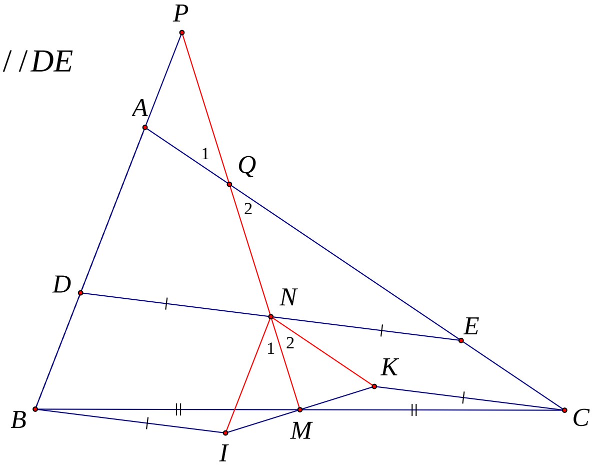
a) CMR: I, M, K thẳng hàng

b) MN cắt AC tại Q, cắt BA tại P, CMR: ΔAPQ cân

Lời giải

a, Tứ giác BDNI là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} BI//DN \\ BI = DN \end{cases} \Rightarrow BI//DE$

Tứ giác NECK là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} KC // NE \\ KC = NE \end{cases} \Rightarrow KC // DE$



Từ đó ta có KC // DE và BI = KC

=> Tứ giác BICK là hình bình hành

có M là trung điểm của BC

=> M đi qua trung điểm IK => I, K, M thẳng hàng

b, Ta có: NI = DB, NK = CE mà BD = CE => NI = NK

=> ΔNIK cân tại N

Mà MN là đường trung tuyến => NM là phân giác $\Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{N_2}$

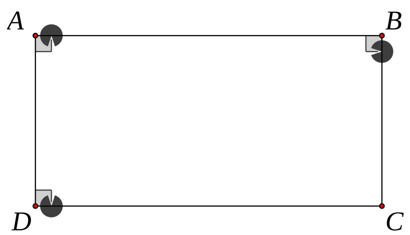
Lại có: NK // QC $\Rightarrow \widehat{N_2} = \widehat{Q_2}$ (đồng vị)

và NI // BD $\Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{P}$ (đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{Q_2} = \widehat{P}$ => $\widehat{Q_1} = \widehat{Q_2}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{P} = \widehat{Q_1}$. Vậy ΔAPQ cân tại A

ÔN TẬP HÌNH CHỮ NHẬT

A. Tóm tắt lý thuyết



H1

1. Định nghĩa: Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông

$\lozenge ABCD$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow \begin{cases} \lozenge ABCD \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} \end{cases}$

- Nhận xét: Hình chữ nhật cũng là 1 hình bình hành, 1 hình thang cân

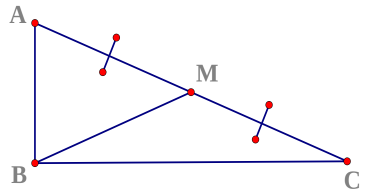
2. Tính chất: Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành và hình thang cân

- Tính chất về cạnh: Các cạnh đối bằng nhau, song song với nhau
- Tính chất về góc: Bốn góc bằng nhau
- Tính chất về đường chéo: Hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật
- Hình thang cân có 1 góc vuông là hình chữ nhật
- Hình bình hành có 1 góc vuông là hình chữ nhật
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật

4. Ứng dụng vào tam giác vuông



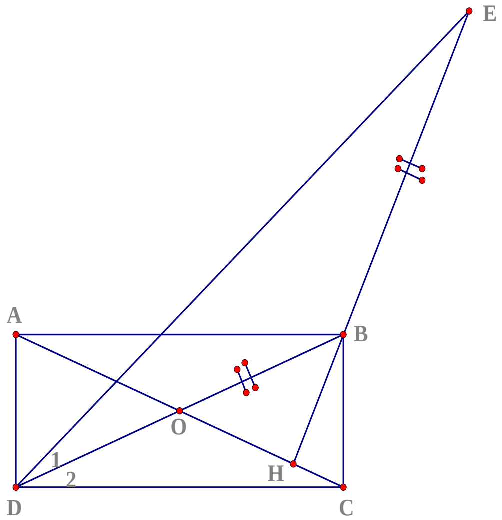
- Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền, ta có: $BM = \frac{1}{2}AC$

- Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với 1 cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông:

$BM = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông

B. Bài tập

Bài 1: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của B lên AC. Trên tia đối của tia BM lấy điểm E sao cho BE = AC. Chứng minh rằng: $A\hat{D}E = 45^0$



Lời giải

+) Ta có ABCD là hình chữ nhật

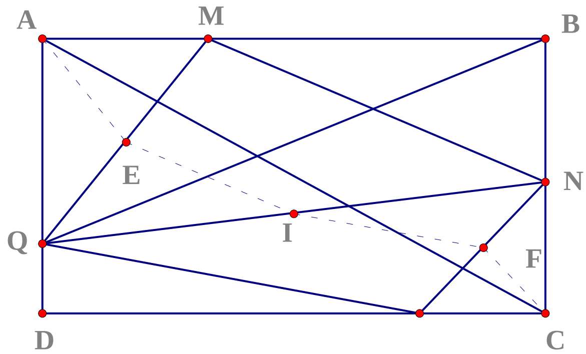
$\rightarrow AC = BD = BE \rightarrow \Delta BED$

Cân tại B $\rightarrow \hat{D}_1 = \hat{E}$

Mặt khác $OC = OD \rightarrow O\hat{C}D = O\hat{D}C$

+) $A\hat{D}E = E\hat{D}B + B\hat{D}C = \frac{1}{2}O\hat{B}H + \frac{1}{2}B\hat{O}H$ (góc ngoài tam giác) $= \frac{1}{2}.90^0 = 45^0$

Bài 2: Cho hình chữ nhật ABCD. Trên các đoạn AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q. Chứng minh rằng: $MN + NP + PQ + QM \geq 2AC$



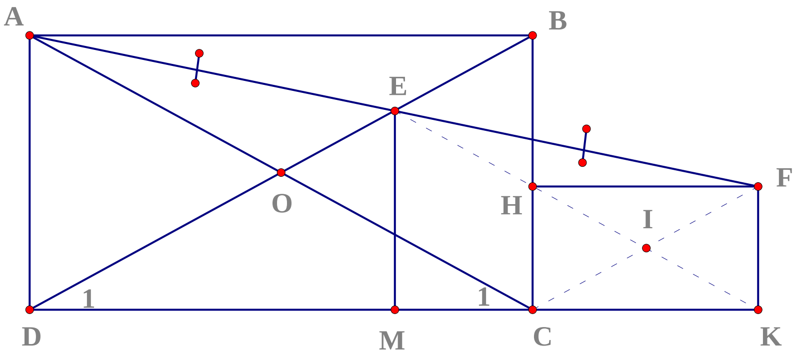
Lời giải

Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của MQ, NP, QN

Vì $\Delta AQN, \Delta CPN$ là các tam giác vuông

$$\left.\begin{array}{l} MQ = 2AE; NP = 2CF \\ IE = \frac{1}{2}MN; FI = \frac{1}{2}PQ \end{array}\right\} \Rightarrow VT = 2(AE + EI + FI + FC) \geq 2AC$$

Bài 3: Cho hình chữ nhật ABCD và điểm E thuộc đoạn BD, gọi F là điểm đối xứng với A qua E. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của F lên BC, CD. CMR: E, H, K thẳng hàng



Lời giải

Ta có HKCF là hình chữ nhật

$\to HK, FC$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

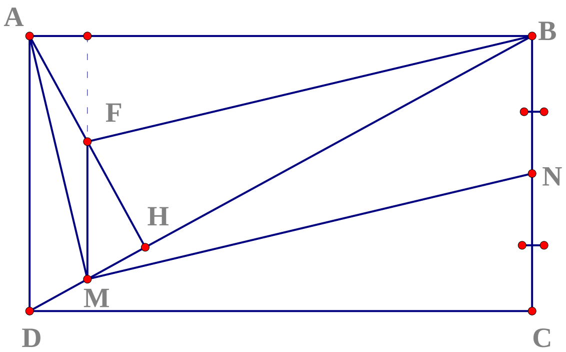
$\to EI$ là đường trung bình $\Delta CFA \to EI // AC(1)$

+) Gọi M là trung điểm của DK nên EM là đường trung bình hình thang ADKF

$\Rightarrow EM // FK \Rightarrow EM \perp CD \Rightarrow \Delta DEK$ cân tại E $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{K}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow EK // AC \quad (2)$

Từ (1)(2) suy ra: $\begin{cases} E, I, K : thanghang \\ H \in IK \end{cases} \Rightarrow E, H, K$ thẳng hàng

Bài 4: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của A lên BD, gọi M, N lần lượt là trung điểm của HD, BC. CMR: $AM \perp MN$



Lời giải

Gọi e là trung điểm của AH nên ME là đường trung bình của

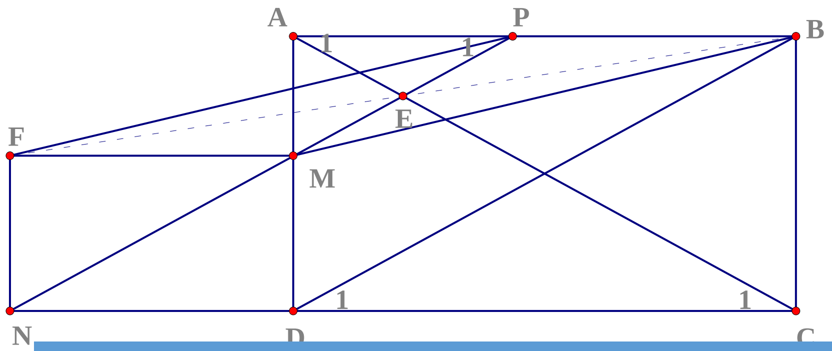
$\Delta AHD \Rightarrow ME // AD; ME = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = BN \Rightarrow \Diamond BEMN$

Là hình bình hành $\to BE // MN(1)$

+) $\begin{cases} ME // AD \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow ME \perp AB$

ΔAMB có E là trực tâm $\Rightarrow BE \perp AM \quad (2) \Rightarrow AM \perp MN(dpcm)$

Bài 5: Cho hình chữ nhật ABCD. Qua điểm E thuộc đoạn AC kẻ đường thẳng song song với BD nó cắt AD, CD ở M và N. Dựng hình chữ nhật NDMF. Chứng minh E là trung điểm của BF



Lời giải

+) $\hat{A}_1 = \hat{P}_1 = \hat{B}_1 = \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \Delta AEP$ cân tại E $\Rightarrow AE = EP$

+) Tương tự:

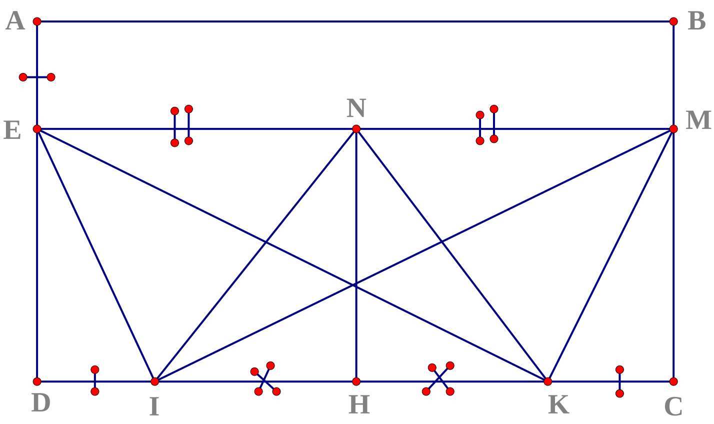
$AE = EM \Rightarrow EM = MP$

+) BPND là hình bình hành

$$\Rightarrow \begin{cases} ND = PB \\ ND = FM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PBMF: hinhbinhhanh \\ EM = MP \end{cases}$$

Vậy E là trung điểm của BF

Bài 6: Cho hình chữ nhật ABCD có AB > AD. Lấy điểm E thuộc đoạn AD, các điểm I, K thuộc đoạn CD sao cho DI = CK = AE. Đường thẳng qua K và vuông góc với EK cắt đoạn BC tại M. Chứng minh rằng: $IM \perp IE$



Lời giải

+) Gọi N, H là trung điểm của EM, CD

$\Rightarrow NH$ là đường trng bình hình thang EDCM $\rightarrow NH \perp CD$

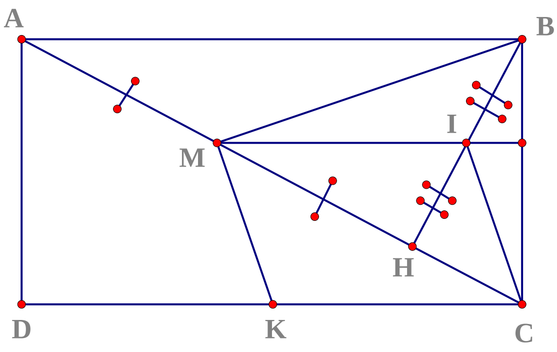
$$\left.\begin{matrix} HD = HC \\ DI + IH = HK + KC \\ DI = KC \end{matrix}\right\} \Rightarrow HI = HK \rightarrow \Delta NIK$$

Cân tại N

$$\Rightarrow \begin{cases} NI = NK \\ NK = \frac{1}{2}EM \end{cases} \Rightarrow NK = \frac{1}{2}NM \Rightarrow NI = \frac{1}{2}NM$$

$\Rightarrow \Delta EIM$ vuông tại I $\Rightarrow EI \perp MI$

Bài 7: Cho hình chữ nhật ABCD, kẻ $BH \perp AC$, gọi M là trung điểm của AH, K là trung điểm của CD. Chứng minh rằng: $BM \perp MK$



Lời giải

Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt BH tại I

Ta có: $MI // AB // CD$

M là trung điểm của AH nên MI là đường trung bình của

$$\Delta ABH \Rightarrow \begin{cases} MI = \frac{1}{2}AB \\ IH = IB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MI // CK \\ MI = CK = \frac{1}{2}CD \end{cases} \Rightarrow \lozenge MICK$$

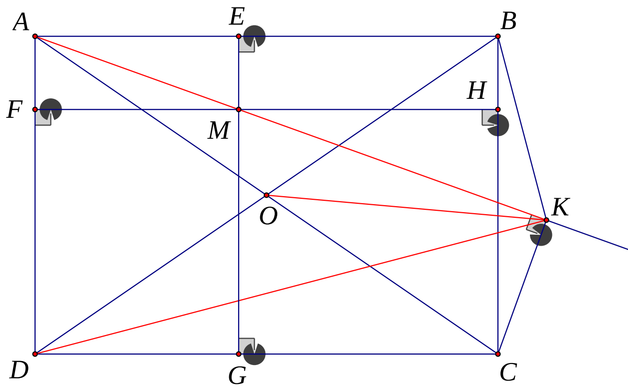
là hình bình hành $\Rightarrow MK // CI$ (1)

Trong ΔMBC có I là trực tâm $\Rightarrow CI \perp MB (2) \Rightarrow BM \perp MK$

Bài 8: Cho hình chữ nhật ABCD, M là điểm bất kỳ nằm trong hình chữ nhật, vẽ ME $\perp$ AB tại E, MF $\perp$ AD tại F, CK $\perp$ AM tại K. Chứng minh rằng :

a) $ME^2 + MF^2 = MA^2$ b) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ c) $\widehat{BKD} = 90^0$

Lời giải



a) Tứ giác AEMF là hình chữ nhật

$\Rightarrow MA = EF \Rightarrow ME^2 + MF^2 = EF^2 = AM^2$

b) Gọi G là giao điểm của EM và CD,

H là giao điểm của FM và BC

=> Tứ giác DFMG, GMHC, EBHM là hình chữ nhật,

Do vậy $MC^2 = MH^2 + MG^2$

$MB^2 = ME^2 + MH^2$

$MD^2 = MG^2 + MF^2$ => ĐPCM

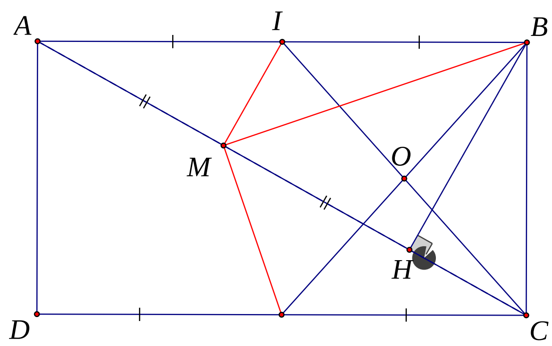
c) Gọi O là giao của 2 đường chéo AC và BD

$=> KO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BD}{2} => BK \perp DK => \widehat{BKD} = 90^0$

Bài 9: Cho H là hình chiếu của B trên đường chéo AC của HCN ABCD, M và K theo thứ tự là trung điểm của AH và CD

a) Gọi I và O theo thứ tự là trung điểm của AB và IC. CMR: $MO = \dfrac{1}{2} IC$

b) Tính số đo $\widehat{BMK}$?



Lời giải

Ta có: BIKC là Hình chữ nhật nên O là trung điểm của IC và BK

Xét ΔIMC vuông, Ta có : MO= $\dfrac{1}{2}$ DC

b, ΔMBK có MD = $\dfrac{1}{2}$IC=$\dfrac{1}{2}$BK, Nên $\widehat{BMK} = 90^0$

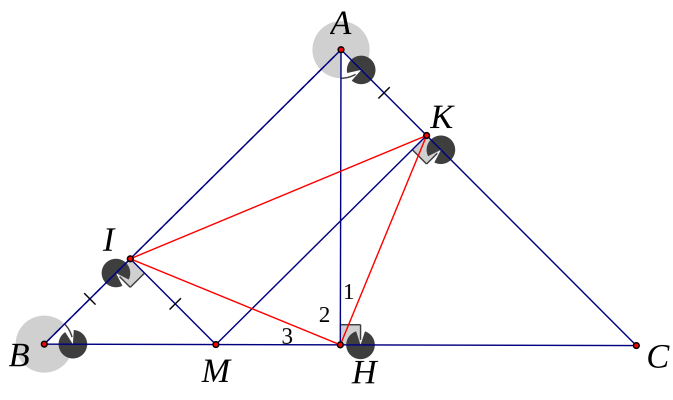
ΔMBK có $MD = \dfrac{1}{2} IC = \dfrac{1}{2} BK \Rightarrow \widehat{BMK} = 90^0$

Bài 10: Cho ΔABC vuông cân tại A có AH là đường cao, Gọi M là 1 điểm bất kỳ trên cạnh BC, I và K là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AC, CMR: ΔIHK vuông cân

Lời giải

Chứng minh AIMK là hình chữ nhật

Vì Δ ABC vuông cân tại A



=> AK= IM = BI

mà BH = HA => $\widehat{HBI} = \widehat{HAK} = 45^0$

=> Δ BHI = Δ AHK (c. g. c)

=> IH = HK

Mà $\widehat{H_3} + \widehat{H_2} = 90^0$ => $\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 90^0$

Bài 11: Cho Δ ABC vuông tại A (AC > AB), đường cao AH, trên HC lấy HD = HA, đường $\perp$ BC tại D cắt AC tại E

a) CMR: AE = AB

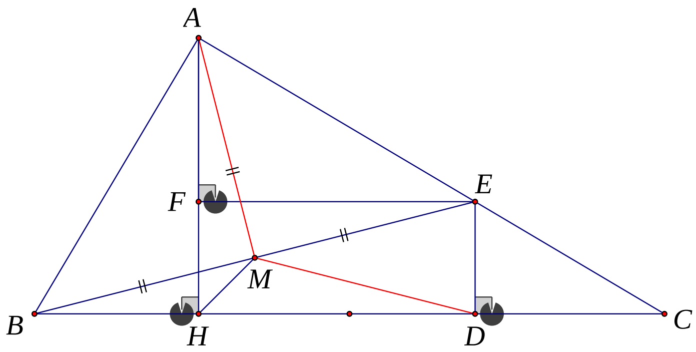
b) M là TĐ của BE, Tính $\widehat{AHM}$

Lời giải

a, Chứng minh AE = AB

Kẻ EF $\perp$ AH => tứ giác HDEF là hình chữ nhật

=>$\Rightarrow \Delta HBA = \Delta FAE(gcg) \Rightarrow AB = AE$



b, Δ ABE vuông cân tại A $\Rightarrow AM = \dfrac{BE}{2}$

Δ BDE vuông cân tại D $\Rightarrow MD = \dfrac{BE}{2}$

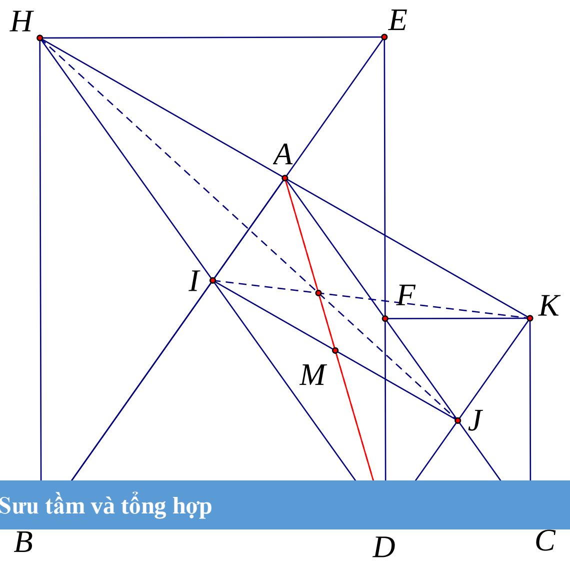
Từ đó ta có: AM = MD

Xét $\Delta AHM = \Delta DHM\,(cgc) \Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 45^0$

Bài 12: Cho Δ ABC cân tại A, từ 1 điểm D bất kỳ trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AB, AC ở E và F, Vẽ các HCN BDEH, CDFK, Gọi I, J lần lượt là tâm các HCN BDEH và CDFK, M là trung điểm của AD

a) CMR: Trung điểm HK là 1 điểm có định không phụ thuộc vào vị trí của D trên BC

b) CMR: 3 điểm I, J, M thẳng hàng và 3 đường thẳng AD, HJ, KI đồng quy



Lời giải

a) Ta có: $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ mà

$\widehat{B_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow ID // AC$

Chứng minh tương tự ta có: JD // AB

Khi đó AIDJ là hình bình hành => AJ // ID, AJ = ID

=> Chứng minh AHIJ là hình bình hành

=> IJ // AH và IJ = AH và IJ // AK và IJ = AK

Khi đó 3 điểm A, H, K thẳng hàng

và A là trung điểm của HK

b) Tứ giác AIDJ là hình bình hành

=> M là trung điểm của AD,

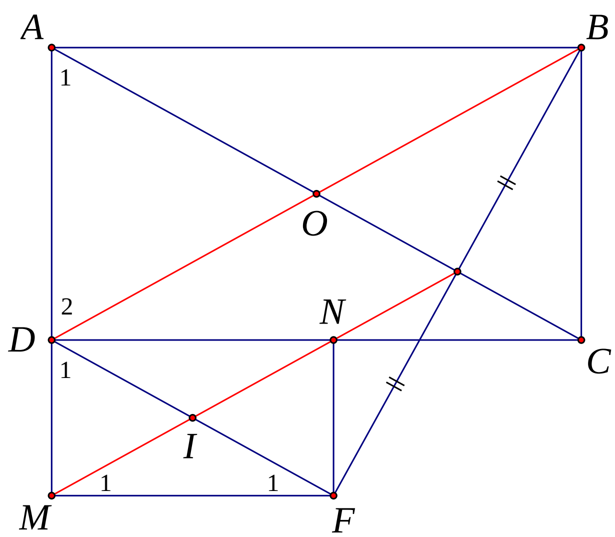
thì M nằm trên đường chéo của HBH

Bài 13: Cho HCN ABCD và E là điểm nằm trên đường chéo AC, trên tia đối của tia EB lấy F sao cho EF = BE, Gọi M, N là hình chiếu của F trên 2 đường thẳng AD, DC. CMR:

a) DF // AC và MN // BD b) 3 điểm E, M, N thẳng hàng

Lời giải

a, Dễ thấy OE là đường trung bình của Δ BDF



=> DF // OE => DF // AC

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ (Đồng vị)

=> Δ OAD cân $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_2} = \widehat{D_1}$

=> Δ IDM cân $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{M_1}$

$\Rightarrow \widehat{D_2} = \widehat{M_1}$ (đồng vị) => MN // DB

b, I là trung điểm DF => IE là trung bình

=> IE // DB mà MN // BD

Vậy M, N, E thẳng hàng

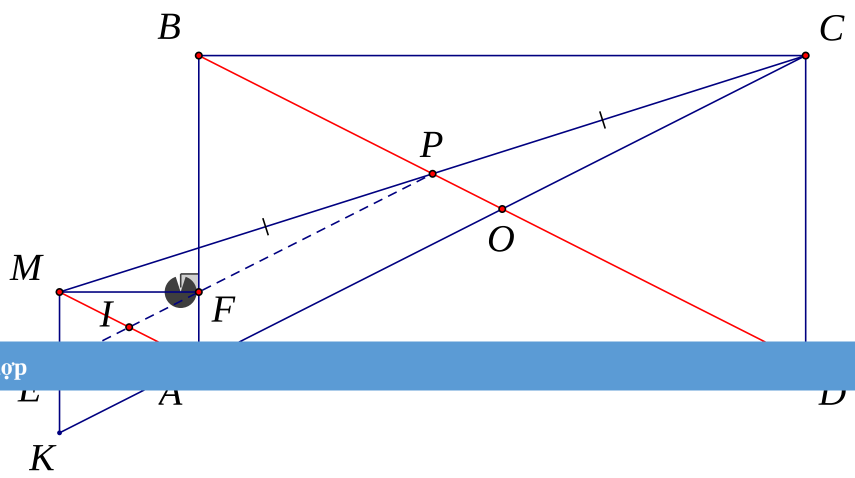
Bài 14: Cho hình chữ nhật ABCD, điểm P thuộc đường chéo BD (P khác B và D), Gọi M là điểm đối xứng của C qua P

a) Chứng minh AM song song với BD

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AD và AB. Chứng mỉnh ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) Chứng minh tỉ số độ dài hai đoạn thẳng MF và FA không phụ thuộc vào vị trí của P

Lời giải



a) Ta có: O là trung điểm của AC (ABCD là hình chữ nhật)

P là trung điểm của CM (Vì M đối xứng với C qua P)

Nên Op là đường trung bình của Δ ACM, do đó: OP // AM => AM // BD

b) Vì OP là đường trunh bình của Δ ACM nên OP//AM và OP = $\frac{1}{2}$ AM

Do đó: OP // AI và OP = AI => tứ giác AIPO là hình bình hành => PI // AC (1)

Kẻ ME // AB cắt AC tại K, ta có: $\widehat{KAE} = \widehat{EAM}\left(= \widehat{KDA}\right)$

Nên AE là phân giác $\widehat{KAM}$, mặt khác: $AE \perp KM$ => ΔAKM cân

E là trung điểm của KM,

do đó EI là đường trung bình của Δ AMK => EI // OA => EI // AC (2)

Ta lại có: E, I, F thẳng hàng (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: E, F, P thẳng hàng.

Bài 15: Cho Δ ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM, Gọi D và E theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC ,CMR:

a, AH = DE b, $\widehat{HAB} = \widehat{MAC}$ c, $AM \perp DE$

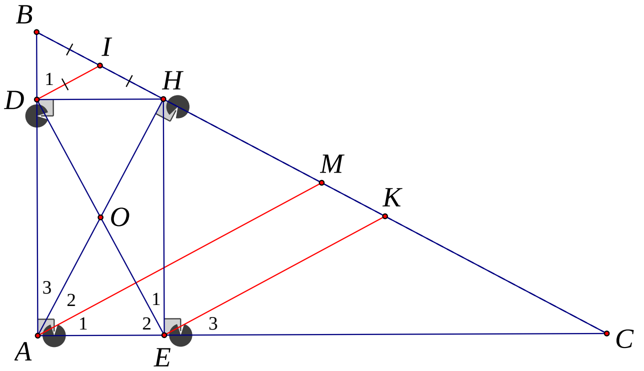
d, DI // EK, với I là trung điểm của HB, K là trung điểm của HC

Lời giải

a) Tứ giác ADHE có 3 góc vuông nên là HCN => AH = DE

b) ΔABC vuông tại A, Có AM là đường trung tuyến => AM = MB = MC

=> ΔAMC cân tại M => $\widehat{MAC} = \widehat{C}$



Mặt khác $\widehat{HAB} = \widehat{C}$,

Vì cùng phụ với $\widehat{HAC}$ => $\widehat{HAB} = \widehat{MAC}\left(= \widehat{C}\right)$

c) Chứng minh AM$\perp DE$, Ta có: $\widehat{A_1} + \widehat{E_2} = 90^0$, ta có:

$\widehat{E_2} + \widehat{A_1} = \widehat{E_2} + \widehat{A_3} = \widehat{E_2} + \widehat{E_1} = 90^0$

d, Ta có: ΔHEC có EK = KH = KC => Δ EKC cân tại K

=> $\widehat{E_3} = \widehat{C} = \widehat{A_1}$

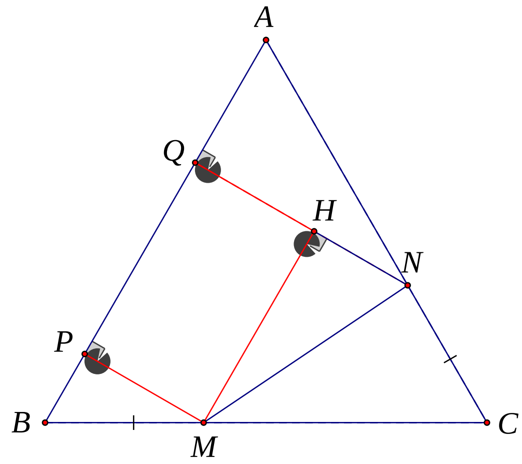
=> EK // AM => KE $\perp$DE. Chứng minh tương tự => $DI \perp DE$ => $DI // EK$

Bài 16: Cho ΔABC đều có cạnh bằng 4cm, M và N là các điểm lần lượt chuyển động trên hai cạnh BC và AC sao cho BM= CN

a) Tính diện tích Δ ABC

b) Xác định vị trí của M, và N để độ dài MN nhỏ nhất . Tìm độ dài nhỏ nhất đó?

Lời giải



a) Tính được độ dài đường cao: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\left(cm\right)$

Suy ra diện tích: $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h = \frac{1}{2}4.2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}(cm^2)$

b) Gọi P và Q là chân đường vuông góc kẻ từ M và N xuống AB

Ta có: Δ ANQ vuông ở Q, có: $\widehat{A} = 60^0 \Rightarrow AQ = \frac{1}{2}AN$

Tương tự đối với Δ MPB có : $PB = \frac{1}{2}BM$

Cộng theo vế ta được : $AQ + PB = \frac{1}{2}AN + \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}\left(AN + NC\right) = \frac{1}{2}AC$

Kẻ $MH \perp QN$. Tứ giác MPQH là hình chữ nhật

Ta có: $MN \geq MH = PQ = AB - \left(AQ + BP\right) = AB - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB$

Như vậy khi M, N di chuyển ta luôn có: $MN \geq \frac{1}{2}AB$

Và $MN = \frac{1}{2}AB$, Khi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC

Suy ra vị trí của M,N cần xác định lần lượt là trung điểm BC và AC,

Khi đó độ dài nhỏ nhất của MN là : $MN = \frac{1}{2}AB = 2cm$

Bài 17: Cho ΔABC nhọn, Trực tâm H, giao điểm của các đường trung trực là O, Gọi P, Q, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AH, AC

a) CMR: OPQN là HBH

b) ΔABC cần có điều kiện gì để OPQN là HCN

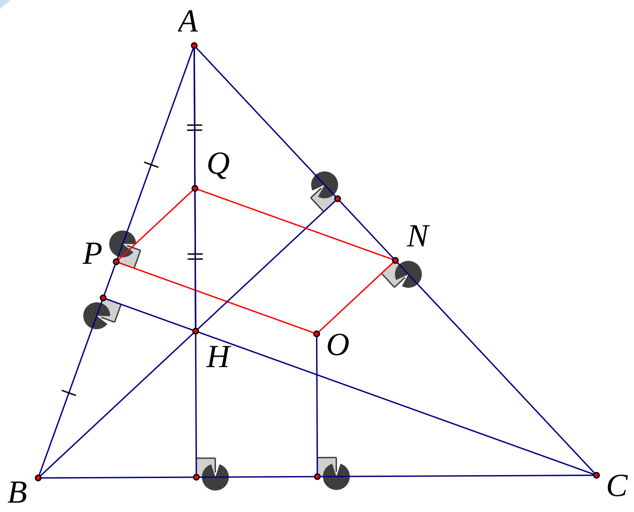
Lời giải

a) Gọi O là giao của 3 đường trung trực nên $OP \perp AB, ON \perp AC$

Trong Δ AHC, QN là đường trung bình nên QN // HC

Và PO // HC (cùng vuông góc với AB)

Chứng minh tương tự ta có: OPQN là hình bình hành



b) Tứ giác BCQN là hình chữ nhật có 2 đường chéo là NC và BQ => NC = BQ =>

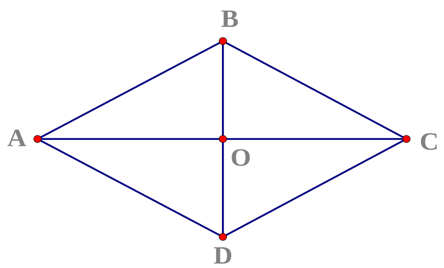
$MP = \frac{1}{2}NC = \frac{1}{2}BQ$

Xét ΔMQB có MP là đường trung tuyến nên MP = $\frac{1}{2}$BQ

Nên ΔMBQ vuông tại M => MB $\perp$MQ

HÌNH THOI

A. Tóm tắt lý thuyết



1. Định nghĩa: Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau

$\lozenge ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow \begin{cases} \lozenge ABCD \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$

2. Tính chất: Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành

- Tính chất về cạnh:

+) Có bốn cạnh bằng nhau +) Các cạnh đối song song

- Tính chất về góc: Các góc đối bằng nhau

- Tính chất về đường chéo:

+) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

+) Hai đường chéo vuông góc với nhau

+)Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi

3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi

- Hình hình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi

- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi

- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc ở đỉnh là hình thoi

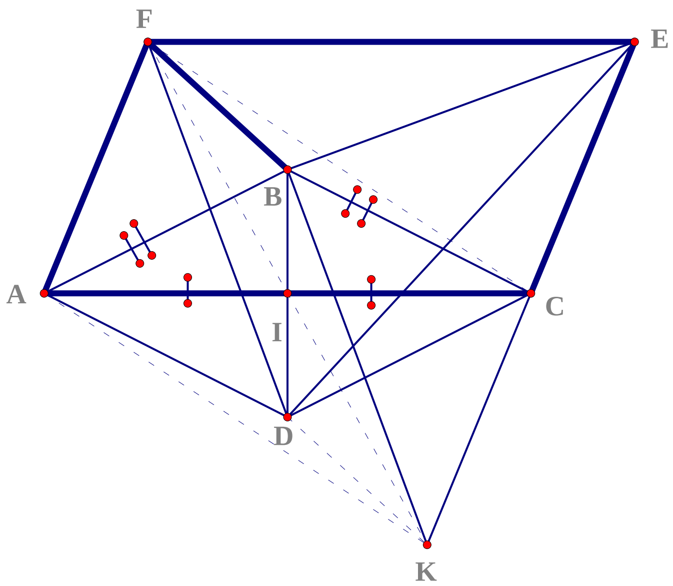
4. Chú ý:

- Hình thoi có 1 tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo

- Hình thoi có hai trục đối xứng là các đường chéo của hình thoi

B. Bài tập

Bài 1: Cho hình thoi ABCD và điểm E nằm ngoài hình thoi và không nằm trên đường thẳng CD sao cho CD = CE. Dựng hình bình hành ACEF. Chứng minh rằng B là trực tâm ΔDEF



Lời giải

Vì ABCD là hình thoi $\to CB = CD$

Có : $\begin{cases} BD \perp AC \\ AC // FE \end{cases} \to BD \perp FE (1)$

Lấy K đối xứng với E qua C

$\Rightarrow \Delta EBK$ vuông tại B

(đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)

+) Có $\Diamond KCFA$ là hình bình hành ($CK //, = FE$)

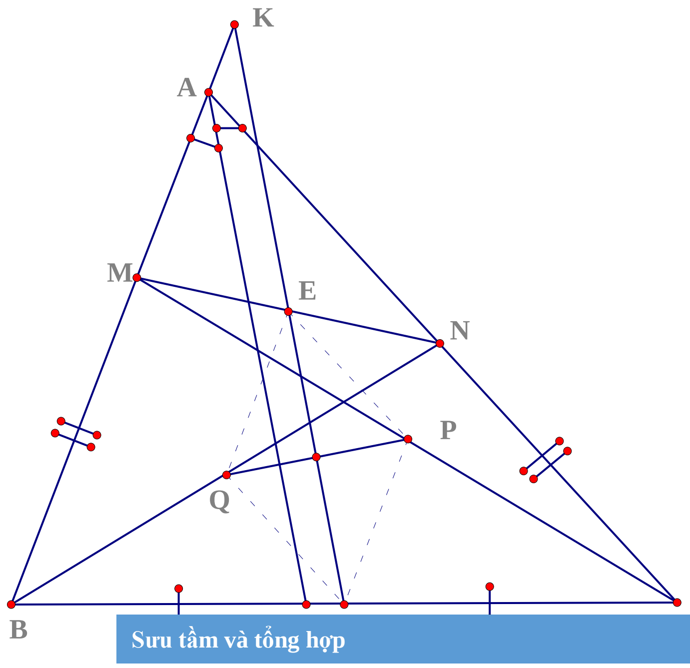
$\Rightarrow CA, FK$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

$\Rightarrow BD, FK$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

$\Rightarrow \Diamond BFDK$ là hình hình hành $\Rightarrow \begin{cases} BK // DF \\ EB \perp BK \end{cases}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra B là trực tâm ΔEDF

Bài 2: Cho tam giác ABC có AB < AC, phân giác trong AD. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn AB, AC sao cho BM = CN. Gọi P, Q lần lượt là rung điểm của MC, MB. Chứng minh rằng $AD \perp PQ$



Lời giải

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MN, BC

$\Rightarrow EQ, QF, FP, PE$ là đường trung bình của các

$\Delta BMN, \Delta BNC, \Delta BMC, \Delta MNC \Rightarrow EQ = FP = \frac{1}{2} BM;$

$EP = FQ = \frac{1}{2} NC \Rightarrow \Diamond EPFQ : la\, hinh\, thoi \Rightarrow FE : la\, phan\, giac$

của $Q\hat{E}P \Rightarrow F\hat{E}Q = F\hat{E}P = \frac{1}{2} P\hat{E}Q$ (1) $\Rightarrow FE \perp PQ$

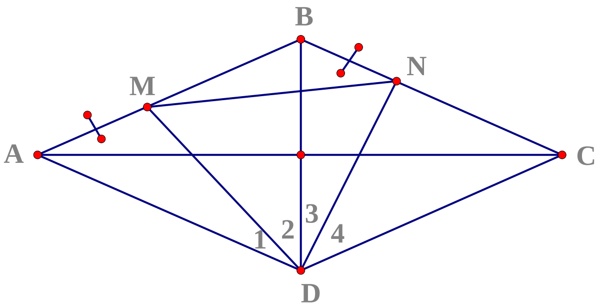
+) Gọi k là giao điểm của FE và AB

Vì $EQ//AB \Rightarrow B\hat{K}F = F\hat{E}Q$ (2)

mà: $Q\hat{E}P = B\hat{A}C$ (3) (góc có cạnh tương ứng song song)

Từ (1), (2), (3) suy ra $B\hat{K}F = \frac{1}{2}B\hat{A}C = B\hat{A}D \rightarrow FK//AD \Rightarrow AD \perp PQ$

Bài 3: Cho hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60^0$. Đường thẳng MN cắt AB ở M, cắt BC ở N. Biết BM + NB có độ dài bằng 1 cạnh của hình thoi. Chứng minh rằng ΔMND đều



Lời giải

+) ΔABD đều (1)

+) $\left.\begin{array}{l} BM + BN = AB \\ AB = BM + MA \end{array}\right\} \Rightarrow BN = AM$

+) $\Delta AMD = \Delta BND \ (c.g.c) \Rightarrow DM = DN$ (2)

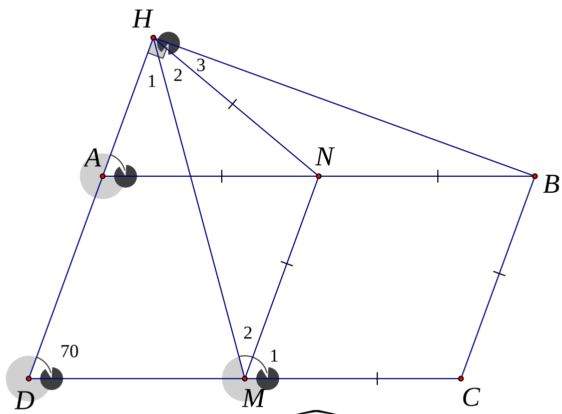
$\left.\begin{array}{l} \hat{D}_1 = \hat{D}_3 \\ \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_2 + \hat{D}_3 = 60^0$ (3) $\Rightarrow \Delta MND : deu$

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD có AB = 2AD, $\widehat{D} = 70^0$, vẽ BH vuông góc với AD, $H \in AD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của CD và AB

a) CMR: ANMD là hình thoi b) Tính $\widehat{HMC}$

Lời giải

b) Ta có:



$\widehat{M_1} = \widehat{D} = 70^0$, Tính $\widehat{M_2}$

Ta có: $\widehat{M_2} = \widehat{H_1}$ (So le trong)

Mà : $\widehat{M_2} = \widehat{H_3} \Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{H_3}$

Xét Δ HAN cân tại N => $\widehat{H_1} + \widehat{H_3} = \widehat{A} = 70^0$

=> $\widehat{H_1} = 35^0$ => $\widehat{M_2} = 35^0$, Vậy $\widehat{HMC} = 35^0 + 70^0 = 105^0$

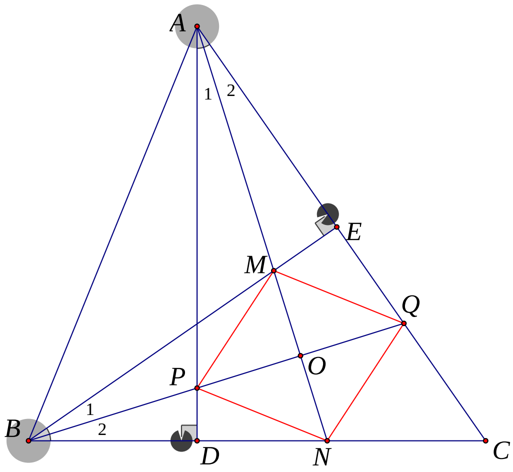
Bài 5: Cho Δ ABC nhọn, vẽ các đường cao AD và BE, Tia phân giác Ax của $\widehat{DAC}$ cắt BE và BC lần lượt ở M và N, Tia phân giác By của $\widehat{EBC}$ cắt AD và AC lần lượt tại P và Q. CMR:

a) AN$\perp$BQ b) Tứ giác MPNQ là hình thoi

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{EBC} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ góc C)

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$



Δ EBQ vuông $\Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{BQE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{BQE} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AOQ} = 90^0 \Rightarrow AN \perp BQ$

b) Δ APQ có AO vừa là đường phân giác vừa là đường cao

=> AO là đường trung trực

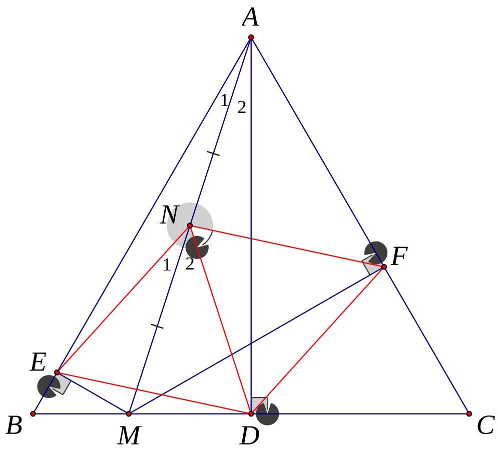
=> MP = MQ, NP = NQ

Δ BMN có BO vừa là đường phân giác vừa là đường cao

=> là đường trung trực (đpcm)

Bài 6: Cho Δ ABC đều, đường cao AD, M là điểm nằm giữa B và D, gọi N là Trung điểm của AM, vẽ ME vuông góc AB tại E, MF vuông góc AC tại F. CMR: DENF là hình thoi

Lời giải



Ta có: MN = EN = DF= FN $\left(= \dfrac{1}{2} AM \right)$

$\Rightarrow \widehat{END} = \widehat{ENM} + \widehat{MND} = 2.\widehat{EAM} + 2\widehat{MAD} = 2.\widehat{DAE} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{DNF} = \widehat{MNF} - \widehat{MND}$

$\Rightarrow \widehat{DNF} = 2.\widehat{MAC} - 2.\widehat{MAD} = 2.\widehat{DAC} = 60^0$

=> Δ NED đều, Δ NDF đều

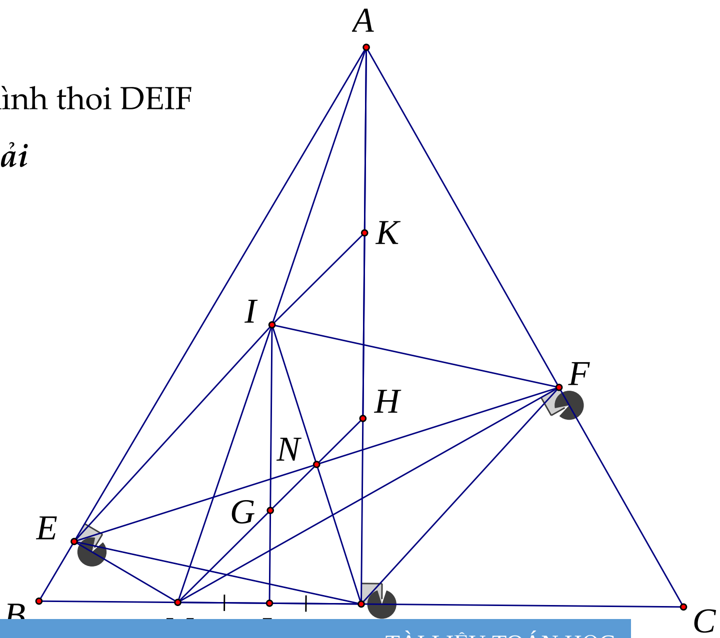
Vậy DENF là hình thoi

Bài 7: Cho tam giác đều ABC, trực tâm H, kẻ đường cao AD, một điểm M thuộc cạnh BC, từ M kẻ ME vuông góc với AB và MF vuông góc với AC, Gọi I là trung điểm của AM, CMR:

a) DEIF là hình thoi

b) Đường thẳng HM đi qua tâm đối xứng của hình thoi DEIF

Lời giải



a) Δ ADM vuông có $DI = \dfrac{1}{2} AM$

Tương tự: $EI = \dfrac{1}{2} AM \Rightarrow DI = EI \Rightarrow \Delta EID$ cân

$EI = AI$ => ΔAIE cân có $\widehat{I_1} = 2\widehat{A_1}$

Tương tự : $\widehat{I_2} = 2.\widehat{A_2}$ => $\widehat{EID} = \widehat{I_1} + \widehat{I_2} = 60^0$

=> Δ EID đều => EI = ED = IP

Chứng minh tương tự: IF = FD = ID

=> Tứ giác EIFD là hình thoi

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo

của hình thoi DEIF và N là trung điểm AH,

Ta có:

Δ AMH có IN là đường trung bình => IN // MH,

Δ IDN có OH là đường trung bình => OH // IN

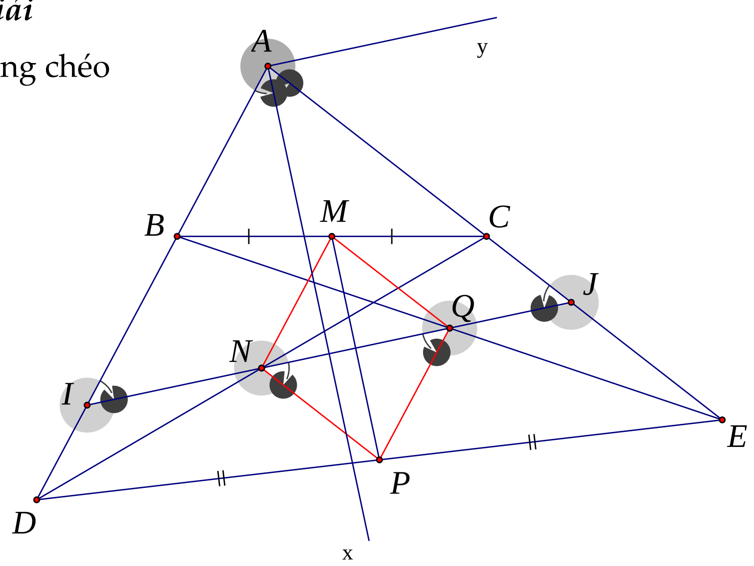
Như vậy O, H, M thẳng hàng => MH đi qua giao điểm O của ID và EF

Bài 8: Cho Δ ABC, trên tia AB ta lấy 1 điểm D, trên tia AC lấy 1 điểm E sao cho BD=CE, Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, CD, DE, EB

a) CMR: MNPQ là hình thoi

b) CMR: các đường chéo của hình thoi MNPQ song song với các phân giác trong và ngoài của góc A

Lời giải



b, Vì MNPQ là hình thoi, MP và NQ là hai đường chéo

=> MP $\perp$ NQ

Gọi I, J lầ lượt là giao NQ với AB và AC

=> PQ // AD => $\widehat{I_1} = \widehat{Q_1}$ (so le trong)

Tương tự: $\widehat{N_1} = \widehat{Q_1}$ => Δ IAJ cân tại A

=> Phân giác Ax là đường cao

=> Ax $\perp$ IJ, Mà MP $\perp$ IJ

=> Ax // MP

Dễ dàng chứng minh được NQ // Ay.

Bài 9: Cho hình thoi ABCD, trên tia đối của tia BA, ta lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy N, trên tia đối tia DC lấy P, trên tia đối tia AD lấy Q sao cho BM = CN = DP = AQ

a, CMR: MNPQ là hình bình hành

b, CMR : MNPQ là hình thoi và ABCD có cùng tâm đối xứng

c, Hình thoi ABCD phải có ĐK gì để MNPQ là hình vuông

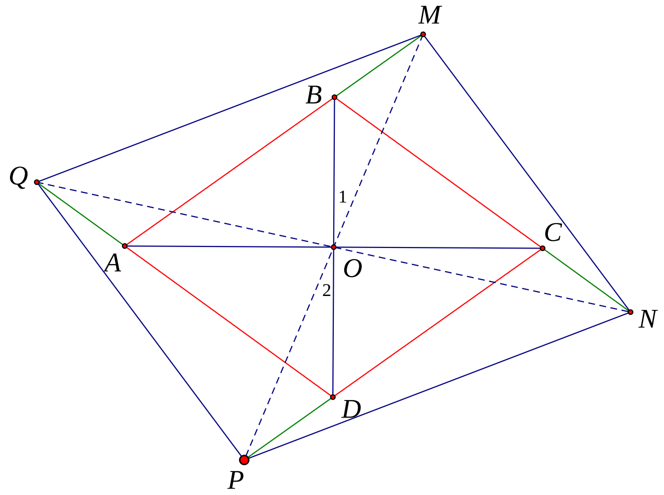
Lời giải

a) $\Delta AQM = \Delta NCP \Rightarrow QM = PN$

$\Delta MBN = \Delta PDQ \Rightarrow QP = MN$

b) $\Delta OBM = \Delta 0DN \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$\Rightarrow P\hat{O}M = P\hat{O}B + \hat{O}_1 = P\hat{O}B + \hat{O}_? = B\hat{O}D = 180^0$



=> P, O, M thẳng hàng

Chứng minh tương tự ta có: Q, O, N thẳng hàng

=> HBH MNPQ có tâm O

c, Để MNPQ là hình thoi thì Hình bình hành MNPQ

có hai cạnh kề bằng nhau: QM= QD. Thật vậy:

Δ QAM= ΔMBN =>

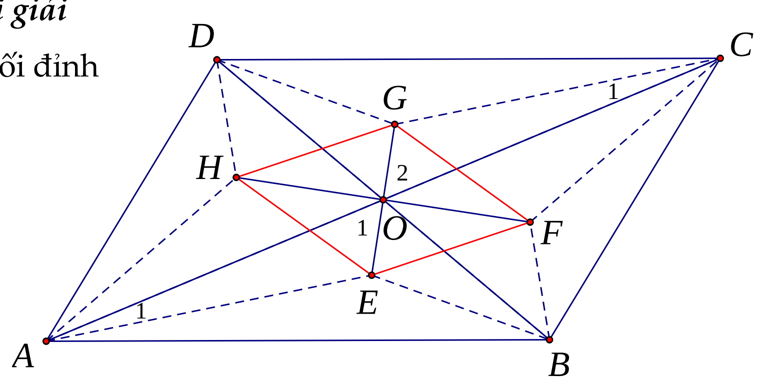
$\widehat{MBN} = \widehat{QAM}$ => $\widehat{QAM} = \widehat{BAD}$,

Mà $\widehat{QAM} = \widehat{BAD}$ và $\widehat{QAM} + \widehat{BAD} = 180^0$ => $\widehat{BAD} = 90^0$

Bài 9: Cho HBH ABCD, các đường chéo cắt nhau ở O, gọi E, F, G, H theo thứ tự là giao điểm của các đường phân giác của các ΔOAB, ΔOBC, ΔOCD, ΔOAD

Chứng minh rằng: EFGH là hình thoi

Lời giải



Vì OH , OF là hai tia phân giác của các góc đối đỉnh nên H, O, F thẳng hàng

Tương tự ta có: G, O, E thẳng hàng

Lại có OH$\perp$OG

(Hai tia phân giác của hai góc kề bù)

Xét $\Delta OAE = \Delta OCG$ (c.g.c) => OG =OE

Chứng minh tương tự : OH= OF

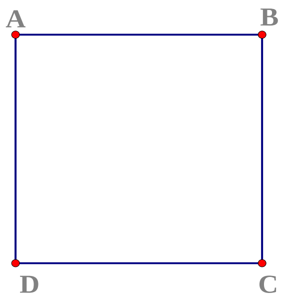
=> EFGH là hình bình hành

có hai đường chéo vuông góc với nhau

=> là hình thoi

HÌNH VUÔNG

A. Tóm tắt lý thuyết



1. Định nghĩa: Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau

$\lozenge ABCD$ là hình vuông $\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$

2. Nhận xét : Từ định nghĩa hình vuông ta suy ra

- Hình vuông là hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau

- Hình vuông là hình thoi có 4 góc vuông

$\Rightarrow$ Hình vuông vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi

3. Tính chất: Hình vuông có tất cả các tính chất của hình bình thoi và hình chữ nhật

- Tính chất về cạnh:

+) Có bốn cạnh bằng nhau

+) Các cạnh đối song song

- Tính chất về góc: Bốn góc bằng nhau

- Tính chất về đường chéo:

+) Hai đường chéo bằng nhau

+) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

+) Hai đường chéo vuông góc với nhau

+) Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi

3. Dấu hiệu nhận biết

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông

- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuôn góc với nhau là hình vuông

- Hình chữ nhật có 1 đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông

- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông

- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông

4. Nhận xét: Một tứ giác vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông

5. Tính chất đối xứng của hình vuông

- Hình vuông có 1 tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo

- Hình vuông có bốn chục đối xứng:

+) 2 đường chéo của hình vuông

+) 2 đường thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện của hình vuông

B. Bài tập và các dạng toán

Bài 1: [HSG – Hà Nội – 2009]

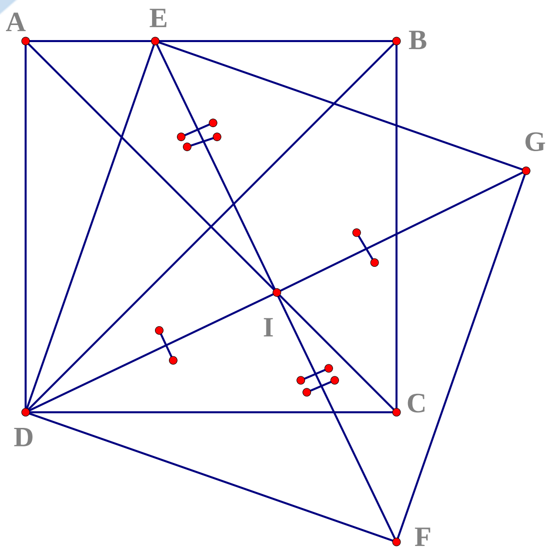
Cho hình vuông ABCD và 1 điểm E bất kỳ nằm giữa hai điểm A và B. Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho CF = AE

a. Tính $E\hat{D}F$

b. Gọi G là điểm đối xứng với D qua trung điểm I của EF. Tứ giác DEGF là hình gì? Vì sao?

c. Chứng minh ba đường thẳng AC, DG, EF đồng quy tại 1 điểm

Lời giải



a. Ta có:

$\widehat{EDF} = \widehat{EDC} + \widehat{CDF} = \widehat{EDC} + \widehat{EDA} = 90^0 \quad (\widehat{CDF} = \widehat{EDA})$

b. Xét $\lozenge DEGF$ có: EI = IF, DI = IG ⇒ ◊DEGF là hình bình hành , lại có $\hat{D} = 90^0 \Rightarrow \lozenge DEGF$ là hình chữ nhật mà

$\Delta ADE = CDF \Rightarrow ED = FD \Rightarrow \lozenge DEGF$ là hình vuông (dấu hiệu nhận biết)

c. Ta có EF giao DG tại I, ta đi chứng minh I thuộc đường trực của AC

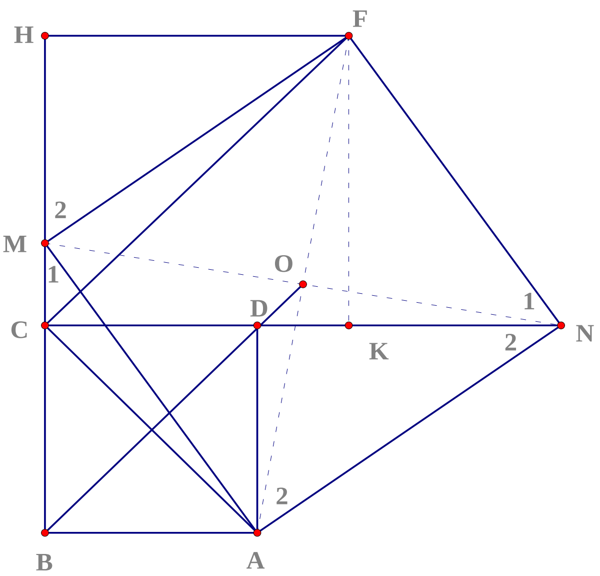
Có: $IB = ID = \frac{1}{2}\text{EF} \Rightarrow$ I thuộc đường trung trực của BD $\Rightarrow I \in AC$ (AC là đường trung trực của BD)

Bài 2: Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M , trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho BM = DN. Vẽ hình bình hành AFMN. Chứng minh rằng

a. $\Delta ABM = \Delta ADN$ b. Tứ giác AMFN là hình vuông

c. Kẻ $FH \perp BM, FK \perp CN$, chứng minh rằng : $\widehat{ACF} = 90^0$

d. B, D, O thẳng hàng (O là trung điểm của FA)



Lời giải

a. Ta có

$\Delta ABM = \Delta ADN(cgc) \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{BAM}$

b. Hình bình hành AMFN, có: AM = AN

$\Rightarrow \lozenge AMFN$

là hình thoi. Lại có

$MAN = MAD + DAN = MAD + MAB = 90^0 \Rightarrow$ ◊AMFN là hình vuông

c. $\widehat{ACF} = \widehat{ACD} + \widehat{DCF} = 45^0 + \widehat{DCF}$

Ta đi chứng minh $\widehat{DCF} = 45^0 \Rightarrow \lozenge CHFK$ là hình vuông

Có:

$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 90^0 \Rightarrow \hat{N}_2 + \hat{M}_2 = 90^0, \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = 90^0 \Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{N}_1 \Rightarrow \Delta MHF = \Delta NKF(ch - gn) \Rightarrow FH = FK$

$\Rightarrow \lozenge CHFK$ là hình vuông $\widehat{DCF} = 45^0 \Rightarrow \widehat{ACF} = 90^0$ (đpcm)

d. Ta đi chứng minh 3 điểm B, D, O nằm trên đường trung trực của AC

Ta có: ABCD là hình vuông $\Rightarrow$ B, D nằm trên đường trung trực của AC

O là trung điểm của AF $\Rightarrow$ O là trung điểm của MN $\Rightarrow OA = OM$

Lại có $OC = OM = \frac{1}{2}AC \Rightarrow OM = OC \Rightarrow OA = OC \Rightarrow O$ nằm trên đường trung trực của AC

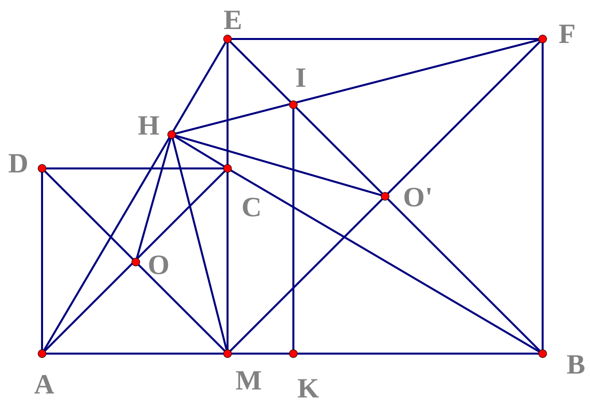
$\Rightarrow B, D, O$ thẳng hàng.

Bài 3: Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB các hình vuông AMCD, BMEF

a. Chứng minh $AE \perp BC$

b. Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng

c. Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng cố định AB



Lời giải

a. Có MD // BE (hai góc đồng vị bằng nhau)

mà: $MD \perp AC \Rightarrow AC \perp BE$. Lại có $EC \perp AB \Rightarrow C$ là trực tâm tam giác ABE

$\Rightarrow AE \perp BC$

b. Gọi O và O′ lần lượt là tâm của hai hình vuông AMCD và BMEF

Tam giác vuông AHC có OH là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AC

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}DM$

$\Rightarrow \Delta DMH(\hat{H} = 90^0) \Rightarrow DH \perp MH (1)$

Chứng minh tương tự, ta được $HF \perp MH (2) \Rightarrow D, H, F$ thẳng hàng.

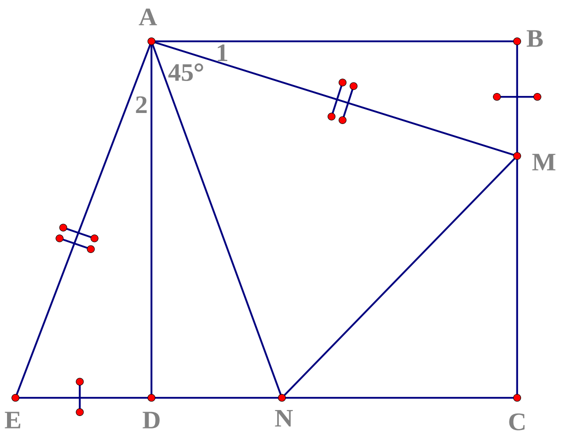
c. Gọi I là giao điểm của AC và DF

Chứng minh được OI là đường trung bình của tam giác DMF, hay I là trung điểm DF

Kẻ IK vuông góc AB (K thuộc AB) $\Rightarrow K$ là trung điểm của AB, vậy K cố định

Mặt khác $IK = \frac{1}{2}(AD + BF) = \frac{1}{2}AB$ (Không đổi) $\Rightarrow I$ cố định. Vậy DE luôn đi qua I cố định.

Bài 4: Cho hình vuông ABCD và điểm M thuộc đoạn BC. Lấy điểm N thuộc đoạn CD sao cho $\widehat{MAN} = 45^0$. Chứng minh rằng: $BM + DN = MN$



Lời giải

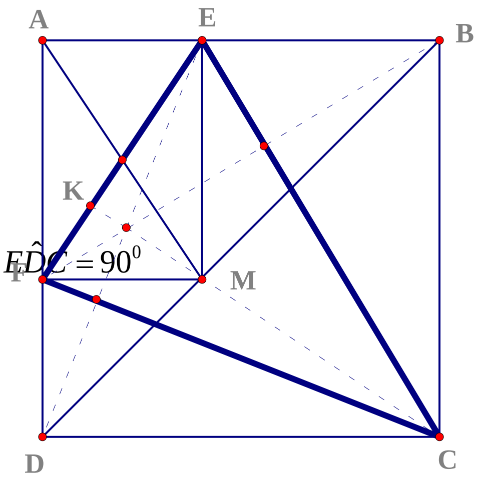
Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho : DE = BM

Ta có: $\Delta ABM = \Delta ADE(cgc) \to AM = AE; \hat{A}_1 = \hat{A}_3$

$M\hat{A}E = M\hat{A}D + D\hat{A}E = M\hat{A}D + B\hat{A}M = 90^0 \to E\hat{A}N = 90^0$

$\Delta EAN = \Delta MAN(cgc) \to EN = MN \leftrightarrow DN + BM = MN$

Bài 5: Cho hình vuông ABCD và điểm M thuộc đoạn BD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M lên AB, AD. Chứng minh rằng: BF, DE, CM đồng quy.



Lời giải

+) Ta có: $\lozenge FAEM$ là hình chữ nhật

+) Ta có: ΔFDM vuông cân tại F $\Rightarrow AE = FM = FD$

$$\left.\begin{array}{l} AD = DC \\ \hat{A} = \hat{D} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta EAD = \Delta FDC(cgc) \Rightarrow E\hat{A}D = F\hat{C}D = E\hat{D}A + E\hat{D}C = 90^0$$

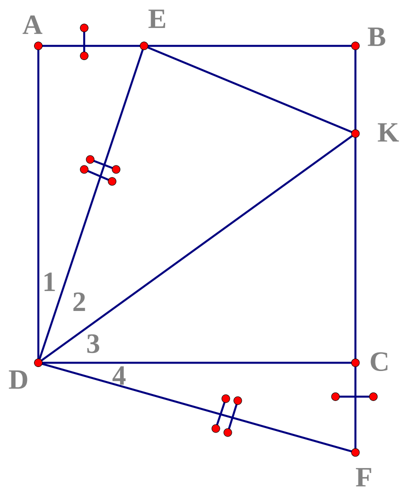
$\Rightarrow CF \perp DE(1)$

Tương tự: $BF \perp CE$ (2)

+) Gọi K là giao điểm của CM và EF

$$K\hat{M}F = \underbrace{M\hat{C}D\,(dvi) = M\hat{A}D}_{doi\ xung\ hinh\ vuong} = \underbrace{A\hat{F}E}_{\Delta AFK\ can} = F\hat{E}M \Rightarrow K\hat{F}M + K\hat{M}F = K\hat{F}M + F\hat{E}M = 90^0 \Rightarrow CM \perp FE \ (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra ba đường cao trong ΔCEF



Bài 6: Cho hình vuông ABCD, E là điểm bất kỳ trên AB. Phân giác góc CDE cắt BC tại K. Chứng minh rằng: CK + EA = DE

Lời giải

+) Trên tia đối của tia CK lấy điểm F sao cho CF = AE

$\Rightarrow CK + EA = CK + CF = FK$

+) $\Delta AED = \Delta CFD\ (c.g.c) \Rightarrow DE = DF; \hat{D}_1 = \hat{D}_4$

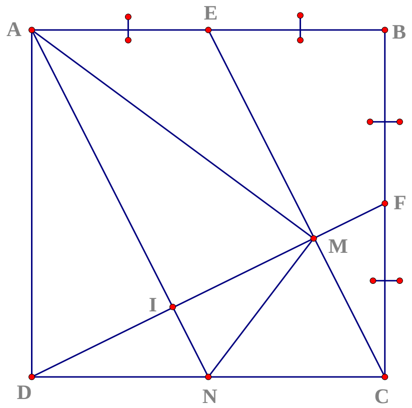
+) Xét ΔDKF có: $D\hat{F}K = D\hat{E}A = 90^0 - \hat{D}_1; F\hat{D}K = \hat{D}_3 + \hat{D}_4$

$D\hat{F}K = 180^0 - D\hat{E}K - F\hat{D}K = 180^0 - (90^0 - \hat{D}_1) - (\hat{D}_3 + \hat{D}_4) = 90^0 + \hat{D}_1 - \hat{D}_3 - \hat{D}_4$

$= 90^0 - \hat{D}_3 = \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = \hat{D}_4 + \hat{D}_3 \Rightarrow F\hat{D}K = D\hat{K}F \Rightarrow \Delta DKF$ cân tại F

$\Rightarrow DF = KF = DE \Rightarrow CK + FC = DE \Rightarrow AE + CK = DE$

Bài 7: Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC. M là giao điểm của CE và DF. Chứng minh rằng : AM = AB



Lời giải

+) $\hat{E} = \hat{F} \to \hat{F} = \hat{C}_1 = 90^0 \to CE \perp FD$

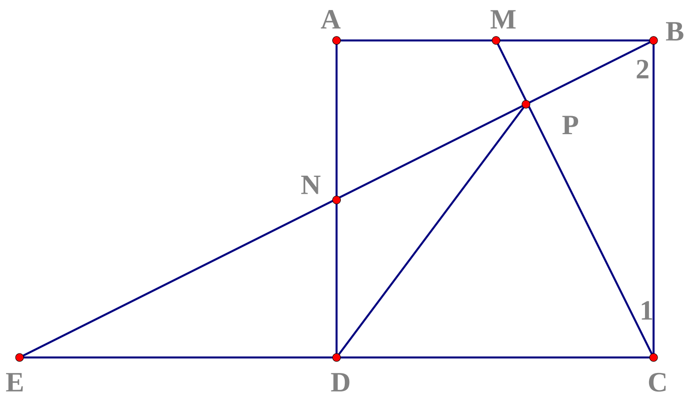
+) Gọi N là trung điểm của CD

+) $\lozenge AECN$ là hình bình hành

+) ΔMCD vuông $\to MN = ND$

Có : $AN \perp DM \to$ Chứng minh : $AM = AD = AB$

Bài 8: Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N là trung điểm của AB, AD. BN và CM cắt nhau tại P. Chứng minh rằng: DP = AB



Lời giải

+) $\Delta BAN = \Delta CBM\,(c.g.c); A\hat{B}N = B\hat{C}N$

$\Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{B}_2 = 90^0 \Rightarrow B\hat{P}C = 90^0$

+) Kéo dài BN cắt CD tại E

$\Delta BAN = \Delta EDN\,(c.g.c) \Rightarrow AB = DE \Rightarrow D$ là trung điểm của EC

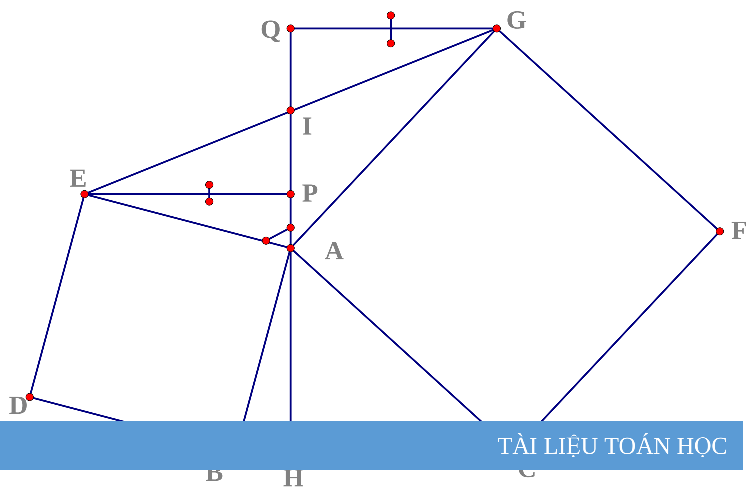
+) Xét ΔCPE vuông tại P

$\Rightarrow PD = \dfrac{1}{2}EC = CD = AB(dpcm)$

Bài 9: Cho ΔABC. Vẽ phía ngoài tam giác dựng các hình vuông ABDE, ACFG. Chứng minh rằng đường cao AH của ΔABC đi qua trung điểm của EG

Lời giải

Gọi P, Q là hình chiếu của E, G lên AH



$$\left.\begin{matrix} AE = AB \\ E\hat{P}A = A\hat{H}B = 90^0 \\ E\hat{A}P = A\hat{B}H(phu:B\hat{A}H) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta EAP = \Delta AHB \Rightarrow PE = AH \ \ (1)$$

Tương tự: $\Delta GQA = \Delta CHA(ch.gn) \Rightarrow GQ = AH \quad (2) \Rightarrow GQ = EP$

Xét $\Delta EPI, \Delta GQI$ có: $\left.\begin{matrix} EP = GQ \\ \hat{I}_1 = \hat{I}_2 \\ \hat{P} = \hat{Q} = 90^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta EPI = \Delta GQI(g.c.g) \Rightarrow EI = IG$

Bài 10: Cho ΔABC, M là trung điểm của BC. Về phía ngoài tam giác dựng các hình vuông ABDE, ACFG. Gọi P, Q lần lượt là tâm của các hình vuông đó. CMR: ΔMPQ vuông cân

Lời giải

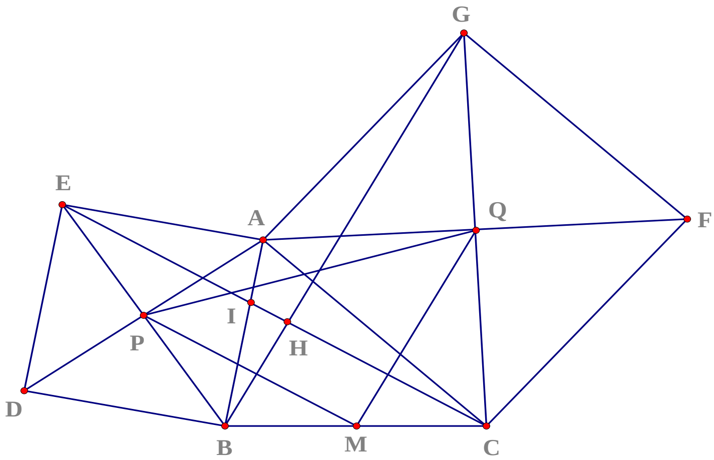
+) PM và QM là đường trung bình của các $\Delta EBC, \Delta BGC \Rightarrow \begin{cases} MP//EC \\ MP = \frac{1}{2}EC \end{cases}; \begin{cases} MQ//BG \\ MQ = \frac{1}{2}BG \end{cases}$

+) $\Delta AEC = \Delta ABG(c.g.c) \Rightarrow \begin{cases} EC = BG \\ A\hat{E}C = A\hat{B}G \end{cases}$

Xét ΔIHB có: $\hat{I}_1 + \hat{B} + \hat{H} = 180^0$

$\begin{cases} \hat{I}_2 = \hat{I}_1 \\ \hat{B} = \hat{E} \end{cases} \Rightarrow \hat{I}_1 + \hat{B} = \hat{I}_2 + \hat{E} = 90^0 \Rightarrow \hat{H} = 90^0$

$\Rightarrow EC \perp BG \Rightarrow \begin{cases} MP \perp MQ \\ MP = MQ \end{cases} \Rightarrow \Delta MPQ$ vuông cân.



Bài 11: Cho ΔABC, về phía ngoài tam giác dựng các hình vuông ABGH, ACEF, BCIJ. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt tâm các hình vuông, M là trung điểm của BC, D là trung điểm của HF. CMR:

a. ΔO_1MO_2 vuông cân

b. $\Diamond DO_1MO_2$ là hình vuông

c. $HF = 2AM$

d. $AD \perp BC; AM \perp HF$

e. $O_1O_2 = AO_3$

Lời giải

Xét ta giác FAB và tam giác CAH có:

$FA = AC;$

$AB = AH;$

$F\hat{A}B = 90^0 + \hat{A} = C\hat{A}H$

$\Rightarrow \Delta FAB = \Delta CAH\,(cgc) \Rightarrow FB = CH \Rightarrow A\hat{H}J_1 = I_1\hat{B}J_1$

Mà: $A\hat{H}J_1 + A\hat{J}_1H = 90^0 \Rightarrow I_1\hat{B}J_1 + B\hat{J}_1I_1 = 90^0 \Rightarrow FB \perp CH$

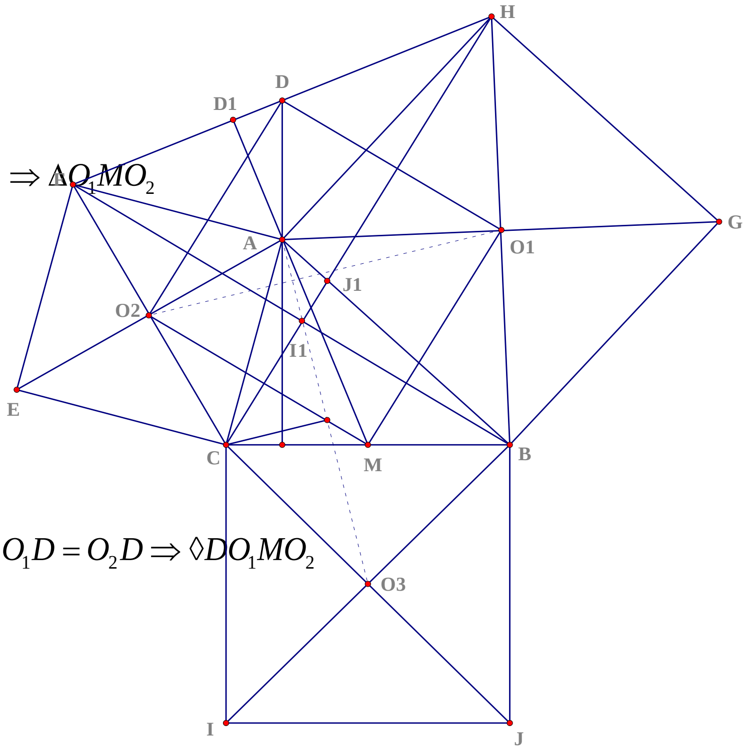
+) O_2M là đường trung bình

$\Delta FCB \Rightarrow O_2M\,//\,FB; O_2M = \frac{1}{2}BF$

+) O_1M là đường trung bình

$\Delta HBC \Rightarrow O_1M\,//\,HC; O_2M = \frac{1}{2}HC \Rightarrow \begin{cases} O_1M \perp O_2M \\ O_1M = O_2M \end{cases} \Rightarrow \Delta O_1MO_2$

vuông cân.



b. +) O_2D là đường trung bình

$\Delta FHC \Rightarrow O_1D\,//\,BF; O_1D = \frac{1}{2}BF$

+) O_1D là đường trung bình

$\Delta FBH \Rightarrow O_2D\,//\,HC; O_2D = \frac{1}{2}HC \Rightarrow O_1M = O_2M = O_1D = O_2D \Rightarrow \lozenge DO_1MO_2$

là hình thoi, $\hat{M} = 90^0 \Rightarrow$ là hình vuông

c. Tứ giác ABA_1C là hình bình hành

$\Rightarrow BA_1 = AC; A\hat{B}A_1 = 180^0 - B\hat{A}C \Rightarrow BA_1 = FA;$

$A\hat{B}A_1 = 180^0 - B\hat{A}C = F\hat{A}H \Rightarrow BA = AH$

+) $\Delta ABA_1 = \Delta FAH \Rightarrow AA_1 = HF \Leftrightarrow 2AM = FH$

d. Hạ $CC_1 \perp AM \equiv C_1$

AM cắt FH tại D1: $\Delta HAF = \Delta BAA_1(c.g.c) \Rightarrow H\hat{F}A = A\hat{A}_1B = C\hat{A}A_1\,(slt)$

Mà: $C\hat{A}A_1 + F\hat{A}D_1 = 90^0 \Rightarrow D_1\hat{F}A + D_1\hat{A}F = 90^0 \Rightarrow \hat{D}_1 = 90^0 \Rightarrow AM \perp FH$

Bài 12: Cho hình vuông ABCD, các điểm E, F lần lượt trên các cạnh BC, CD sao cho $\widehat{EAF} = 45^0$, trên tia đối của tia DC lấy điểm M sao cho DM = BE. CMR:

a) $\Delta ABE = \Delta ADM, \widehat{MAF} = 45^0$

b) Chu vu tam giác CEF bằng 1 nửa chu vi tứ giác ABCD

Lời giải

a, Δ ABE = Δ ADN (2 cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

$\Rightarrow \widehat{MAE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MAF} = 90^0 - 45^0 = 45^0$

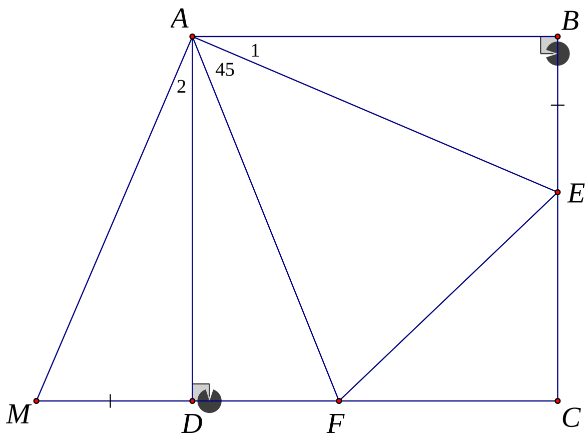
b, Δ AEF = Δ AMF (c.g.c)

=> EF = MF, EF = MD + DF = BE + DF

Chu vi ΔCEF = CE + EF + CF

= CK + BE + DF + CF = BC + CD

$= \frac{1}{2}$ chu vi ABCD



Bài 13: Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH và trung tuyến AM, đường phân giác góc A, cắt đường trung trực BC tại D, Từ D kẻ DE vuông góc với BA và DF vuông góc với AC

a) CMR: AD là phân giác $\widehat{HAM}$

b) 3 điểm E, M, F thẳng hàng

c) Tam giác BDC là tam giác vuông cân

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ góc B)

Mà AM= $\frac{1}{2}$BC=> AM= MC=> $\widehat{A_2} = \widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}, \widehat{A_3} = \widehat{A_4}$

=> AD là tia phân giác

b) AH // DM => $\widehat{D_1} = \widehat{A_4}$,

mà $\widehat{A_4} = \widehat{A_3} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{A_3} \Rightarrow \Delta ADM$ cân

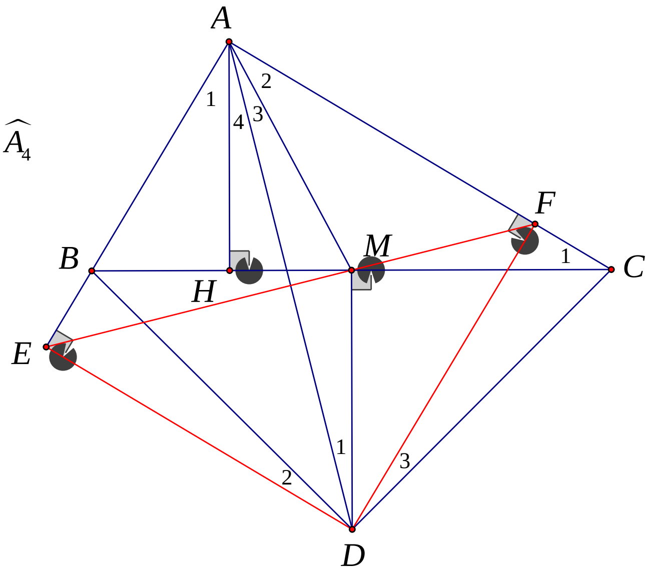
=> AM= MD

Chứng minh Tứ giác AEDF là hình vuông

=> EA = ED => FA = FD

Ta có: M, E, F đều nằm trên đường trung trực của AD

=> Thẳng hàng



c, ΔBED = ΔCFD => $\widehat{D_2} = \widehat{D_3}$

$\widehat{BDC} = \widehat{BDF} + \widehat{D_3} = \widehat{BDF} + \widehat{D_2} = \widehat{EDF} = 90^0$

=> ΔBDC vuông cân

Bài 14: Cho tam giác ABC vuông tại A, và AB<AC, kẻ đường cao AH, trong nửa mặt phẳng có chưa A bờ BC vẽ hình vuông AHDE

a) CMR: D nằm trên HC

b) Gọi F là giao của DE và AC, đường thẳng qua F và // với AB cắt đường thẳng qua B và // với AC tại G, CMR: ABGF là hình vuông

c) CMR: AG, BF, HE đồng quy d) DEHG là hình thang

Lời giải

a) AC > AB => $\widehat{B} > \widehat{C}$

Mà: $\widehat{B} = \widehat{HAC}$ => $\widehat{HAC} > \widehat{C}$ => HC > AH => AH = HD => HC > HD => D nằm giữa H,C

b, Ta có:

$\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^0, \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 90^0$ => $\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$

kết hợp với AE= AH => Δ AEF = Δ AHB => AB= AF

Tứ giác ABGF là hìn bình hành có 1 góc vuông => HCN có AB = AF => là hình vuông

c) Gọi M là giao điểm BF, AG,

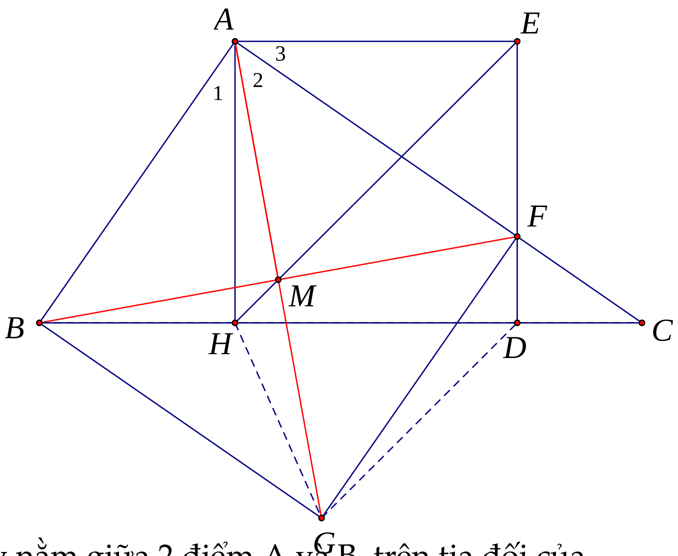
Khi đó ΔBDF có DM = $\frac{1}{2}$BF

Tương tự AM= $\frac{1}{2}$BF

=> M nằm trên đường trung trực AD

Ta lại có: AE= ED, HA= HD

=> E, H cũng nằm trên đường trung trực của AD hay H, M, E thẳng hàng



Bài 15: Cho hình vuông ABCD và 1 điểm E bất kỳ nằm giữa 2 điểm A và B, trên tia đối của tia CB lấy 1 điểm F sao cho CF =AE

a) Tính $\widehat{EDF}$

b) Gọi G là điểm đối xứng với D qua trung điểm I của EF, tứ giác DEGF là hình gì?

c) CMR: AC, DG, EF đồng quy

Lời giải

a) ΔAED = ΔCFD (c.g.c)

=> $\widehat{ADE} = \widehat{CDF}$ => $\widehat{EDF} = \widehat{EDC} + \widehat{CDF} = \widehat{EDC} + \widehat{ADE}$

=> $\widehat{EDF} = \widehat{ADC} = 90^0$

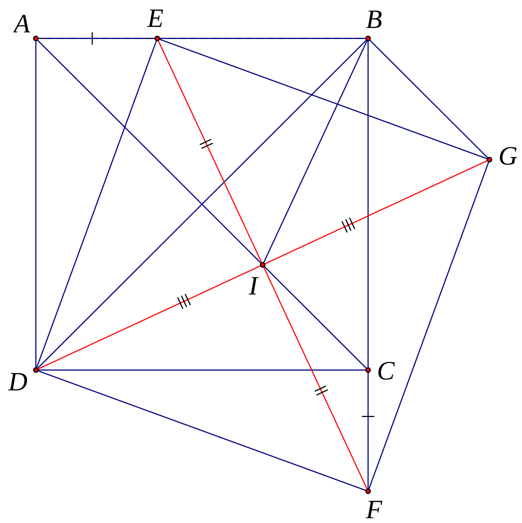
b) Tứ giác DEGF có I là trung điểm của EF (gt)

I là trung điểm của DG

Do đó: DEGF là hình bình hành

lại có: $\widehat{EDF} = 90^0$ => Là hình chữ nhật, lại có tiếp DE = DF

=> Là hình vuông

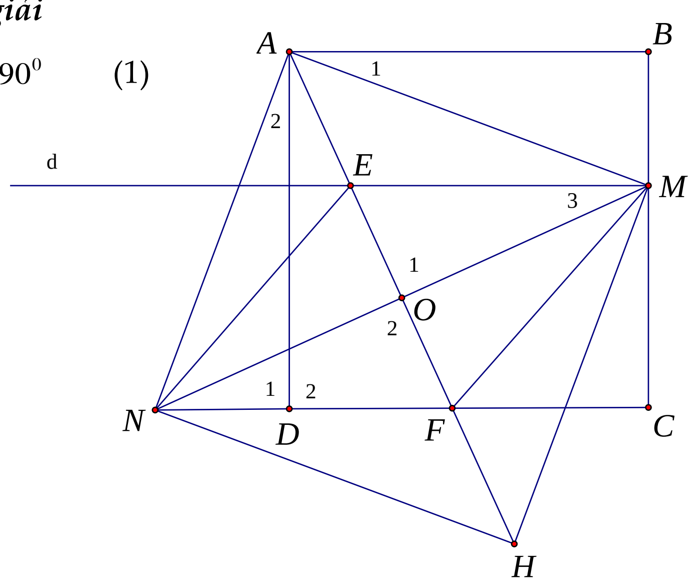


Bài 16: Cho hình vuông ABCD, M là điểm bất kì trên cạnh BC, trong nửa mp bờ AB chứa C dựng hình vuông AMHN, Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH ở E, Cắt DC ở F. Chứng minh rằng:

a) : B M = ND b) N, D, C thẳng hàng c) EMFN là hình gì?

d) Chứng minh $DF + BM = FM$ và chu vi Δ MFC không đổi khi M thay đổi trên BC

Lời giải



a) Tứ giác ABCD là hình vuông => $\widehat{A_1} + \widehat{MAD} = 90^0$ (1)

Vì AMHN là hình vuông

$=> \widehat{A_2} + \widehat{MAD} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

Ta có : Δ AND= Δ AMB (c.g.c)

$=> \widehat{B} = \widehat{D_1} = 90^0, BM = ND$

b, ABCD là hình vuông

$=> \widehat{D_2} = 90^0 => \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = \widehat{NDC} = 180^0$,

Nên N, D, C thẳng hàng

c, Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AH và MN của hình vuông AMHN

=> O là tâm đối xứng của hình vuông AMHN

=> AH là đường trung trực của đoạn MN, mà E, F $\in$ AH

=> EN = EM và FM = FN (3)

$=> \widehat{O_1} = \widehat{O_2} => EM = NF$ (4)

Từ (3) và (4) => EM = NE = NF = FM => MENF là hình thoi (5)

d, Từ (5) suy ra FM = FN = FD + DN, mà DN = MB (cmt) => MF = DF + BM

Gọi chu vi của Δ MCF là P và cạnh hình vuông ABCD là a

Ta có : $P = MC + CF + MF = MC + CF + BM + DF$, Vì (MF = DF + MB)

$= (MC + MB) + (CF + FD) = BC + CD = a + a = 2a$

Hình vuông ABCD cho trước => a không đổi => P không đổi

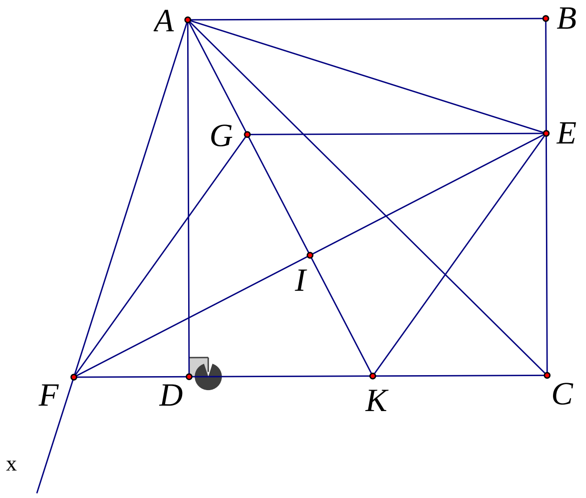
Bài 17: Cho hình vuông ABCD, Gọi E là 1 điểm bất kỳ trên cạnh BC (E khác B và C), Qua A kẻ Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F, trung tuyến AI của Δ AEF cắt CD ở K, đường thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G

a) Chứng minh AE=AF và tứ giác EGFK là hình thoi

b) Chứng minh Δ AKF đồng dạng với Δ CAF và AF^2 $= FK.FC$

c) Khi E thay đổi trên BC, chứng minh chu vi của Δ EKC không đổi

Lời giải



a) Xét Δ ABE vuông tại B và Δ ADF vuông tại D có:

AB = AD,

$\widehat{BAE} = \widehat{CAF}$ => Δ ABE = Δ ADF

=> AE = AF Vì AE = AF và AI là đường trung tuyến

Δ AEF => AI $\perp$ EF

Hai Δ IEG vuông tại I và Δ IFK vuông tại I có:

IE=IF, $\widehat{IEG} = \widehat{IFK}$,

Nên Δ IEG = Δ IFK => EG = FK

Tứ giác EGFK có hai cạnh đối EG và FK song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

Hình bình hành EGFK có hai đường chéo GK và EF vuông góc nên là hình thoi

b) Xét Δ AKF và Δ CAF có: $\widehat{AFK} = \widehat{CFA}$,

$$\widehat{KAF} = \widehat{ACF} = 45^0 \Rightarrow \Delta AKF \sim \Delta CAF(g.g) \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{FK}{AF} \Leftrightarrow AF^2 = FK.FC$$

c) Theo câu a ta có: Δ ABE = Δ ADF nên EB=FD, Tứ giác EGFK là hình thoi nên EK= KF

Do đó chu vi Δ EKC là: $C_{EKC} = EK + KC + CE = CF + CE = CD + DF + CE = 2CD$ (Không đổi)

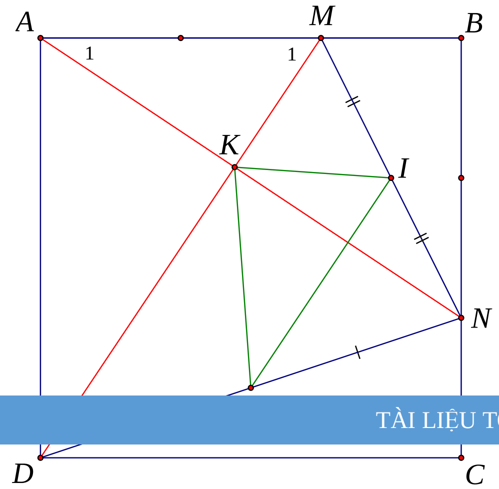
Bài 18: Cho hình vuông ABCD cạnh a, trên AB lấy $AM = \frac{2a}{3}$, trên BC lấy BN sao cho $BN = \frac{2a}{3}$

a) CMR: AN vuông góc DM

b) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của NM, DN và K là giao AN và DN, Tính IK , KJ và IJ

Lời giải

a, Ta chứng minh Δ ABN = Δ DAM => $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$, Mà : $\widehat{D_1} + \widehat{M_1} = 90^0$ => $\widehat{A_1} + \widehat{M_1} = 90^0$ => $\widehat{K} = 90^0$



b, Ta có : $MN = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{4a^2}{9}} = \frac{a}{3}\sqrt{5}$

$KI = \frac{1}{2}MN = \frac{a}{6}\sqrt{5}$

Tương tự ta có : $DN = \frac{a\sqrt{10}}{3} \Rightarrow KJ = \frac{a}{6}\sqrt{10}$

Tương tự $DM = \frac{a}{3}\sqrt{13} \Rightarrow IJ = \frac{a}{6}\sqrt{13}$

Bài 19: Cho hình vuông ABCD, Từ điểm M tùy ý trên đường chéo BD, kẻ ME, MF lần lượt vuông góc với AB và AD, CMR:

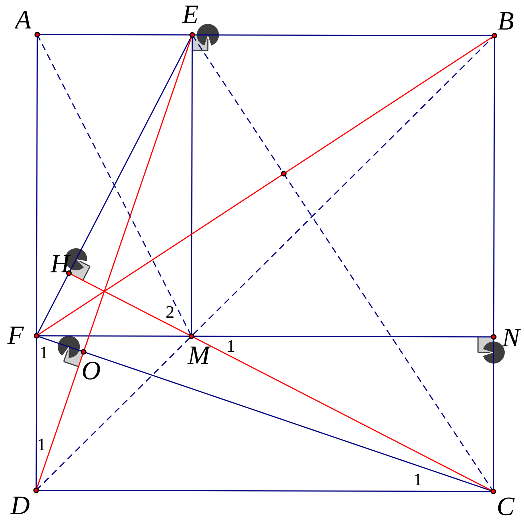
a, CF = DE, CF $\perp$ DE

b, CM = EF, OM $\perp$ EF

c, CM, BF, DE đồng quy

d, Xác định M để diện tích AEMF lớn nhất

Lời giải



a) BD là đường chéo của hình vuông ABCD

=> BD là phân giác góc D

=> $\widehat{ADB} = 45^0 \Rightarrow \Delta DFM$ cân tại F=> DF = FM = AE

ΔCDF = ΔDAE (c.g.c) => CF = DE và $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$

Mà $\widehat{C_1} + \widehat{F_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{F_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{FOD} = 90^0$

b, AM = EF, BD là đường trung trực của AC

=> MA = MC => MC = EF

Kéo dài FM cắt BC tại N => Tứ giác BEMN là hình vuông,

=> MN = ME

=> ΔEMF = ΔMNC(c. g. c) => $\widehat{M_1} = \widehat{MEF}$,

Mà $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MEF} + \widehat{M_2} = 90^0$

=> $\widehat{EHM} = 90^0$ => ĐPCM

c) ΔEFC có CH$\perp$EF => CM trùng CH là đường cao ứng với cạnh EF

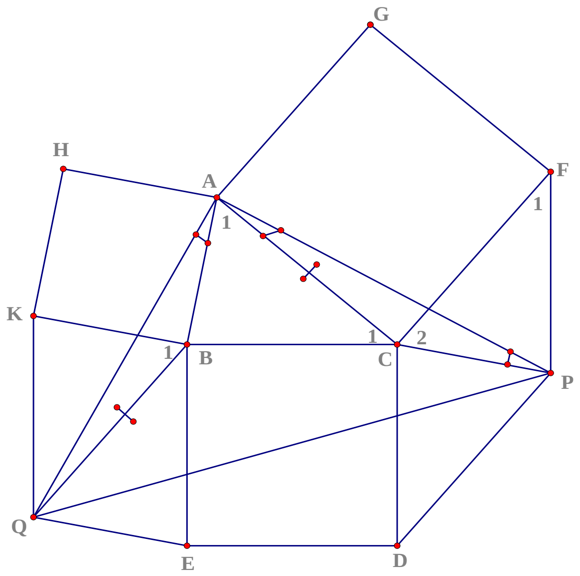
Lại có ED$\perp$CF tại O => ED là đường cao ứng với cạnh CF

Chứng minh tương tự câu a => CE$\perp$BF => BF là đường cao ứng với cạnh CE

=> 3 đường CM, BF, DE đồng quy

CÁC BÀI TẬP TỔNG HỢP VỀ TỨ GIÁC ĐẶC BIỆT

Bài 1: Cho ΔABC, về ra phía ngoài tam giác dựng các hình vuông BCDE, ACIG và hình bình hành BEQK, CDPE. Chứng minh rằng ΔAPQ vuông cân



Lời giải

$\Delta ABC = \Delta CFP(c.g.c): AC = CF; BC = PF = CD;$

$\hat{C}_1 = \hat{F}_1$(bù: $D\hat{C}F$) $\Rightarrow$ CP = AB ; $\hat{A}_1 = \hat{C}_2$

Tương tự: $\Delta ABC = \Delta BKQ(c.g.c) \Rightarrow \begin{cases} AC = BQ \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \end{cases}$

$\Delta ABQ = \Delta ACP(cgc) \Rightarrow AQ = AP \Rightarrow \Delta APQ$

Cân tại A

Ta có:

$Q\hat{A}P = Q\hat{A}B + B\hat{A}C + C\hat{A}P = A\hat{P}C + F\hat{C}P + C\hat{A}P$

$= 180^0 - 90^0 = 90^0$ (Tổng ba góc tam giác)

$\Rightarrow \Delta APQ$ vuông cân

Bài 2: [HSG: 14/04/2014]

Cho hình thang ABCD vuông tại A và D, biết CD = 2AB = 2AD và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của CD

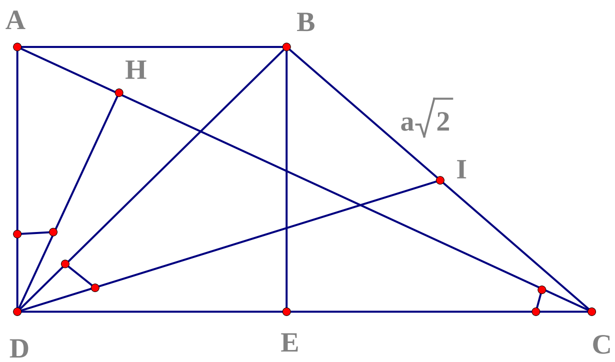
a. $\lozenge ABED$ là hình gì? Vì sao

b. Tính S_{ABCD} theo a

c. Gọi I là trung điểm của BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC. Tính $H\hat{D}I$

Lời giải

a. Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình vuông



b. ΔBEC vuông cân vuông cân

$\Rightarrow AB = AD = a; CD = 2a;$

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD).AD}{2} = \frac{(a + 2a).a}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

c. $\begin{cases} H\hat{D}I = H\hat{D}B + B\hat{D}I \\ H\hat{D}B + H\hat{D}A = 90^0 \end{cases}$. Ta đi chứng minh :

$B\hat{D}I = A\hat{D}H = A\hat{C}D$ $(phu: H\hat{D}C) \Leftarrow \Delta BDI \sim \Delta DCA(cgc)$

Vì : $\dfrac{BI}{BD} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{AD}{DC}; \hat{B} = \hat{D} = 90^0 \Rightarrow ....H\hat{D}I = 45^0$

Bài 3: [HSG – Yên Dũng – Bắc Giang – 2014]

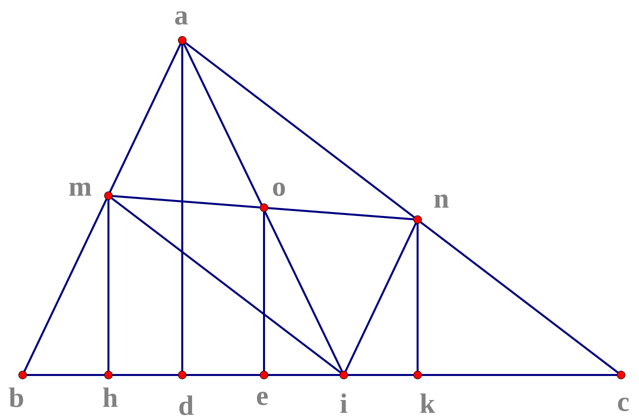
Cho ΔABC. Gọi I là 1 điểm di chuyển trên cạnh BC. Qua I kẻ đường thẳng song song với cạnh AC cắt AB tại M. Qua I kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại N

a. Gọi O là trung điểm của AI. CMR: M, O, N thẳng hàng

b. Kẻ MH, NK, AD vuông góc với BC lần lượt tại H, K, D.

Chứng minh rằng MH + NK = AD

c. Tìm vị trí của điểm I để MN // BC



Lời giải

a. $\left.\begin{matrix} AM//NI \\ AN//MI \end{matrix}\right\} \Rightarrow HBH \Rightarrow MN \cap AI$ tại trung điểm của mỗi đường $\to M, O, N$ thẳng hàng

b. Kẻ $OE \perp BC$ ta đi chứng minh MHKN là hình thang vuông

Ta có: O là trung điểm của MN, mà : $OE//MH//NK \Rightarrow OE$ là đường trung bình hình thang vuông $MNHK \Rightarrow MH + NK = 2OE$ (1)

+) Xét $\Delta ADI \Rightarrow OE$ là đường trng bình $\Delta ADI \Rightarrow AD = 2OE(2) \Rightarrow MH + NK = AD$ $(dpcm)$

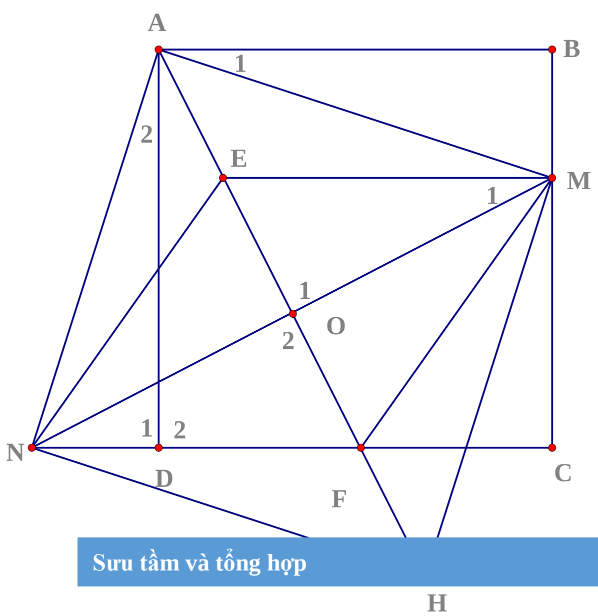
c. Ta có : $MN//BC \Leftrightarrow MN$ là đường trung bình ΔABC, lại có O là trung điểm của AI mà : MI // AC, M là trung điểm của AB $\Rightarrow I$ phải là trung điểm của BC

Bài 4: Cho hình vuông ABCD, M là điểm trên cạnh BC. Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C dựng hình vuông AMHN. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH ở E, cắt DC ở F

a. Chứng minh rằng: BM = ND b. N, D, C thẳng hàng c. FMNE là hình gì?

d. DF + BM = FM và chu vi ΔMFC không đổi khi M thay đổi vị trí trên BC

Lời giải



a. $\Delta AND = \Delta AMB(c.g.c) \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_1 = 90^0; BM = ND$

b. $N\hat{D}C = 180^0 \Rightarrow N, D, C$ thẳng hàng

c. Ta có : MN là đường trung trực của AH

$E, F \in AH \Rightarrow \begin{cases} EN = EM \\ FM = FN \end{cases}; \Delta EOM = \Delta FON(ch-gn) \Rightarrow FN = EM$

Vậy 4 cạnh bằng nhau nên là hình thoi.

d. $FM = FN = ND + DF = BM + FD$

+) $P_{\Delta MFC} = MC + CF + FM = MC + CF + BM + DF$

$= (MC + MB) + (CF + DF) = 2AB$ (không đổi)

Bài 5: Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh là a. Gọi M và N theo thứ tự là hai điểm trên cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN} = 45^0$. Trên tia đối của tia DC lấy điểm K sao cho DK = BM

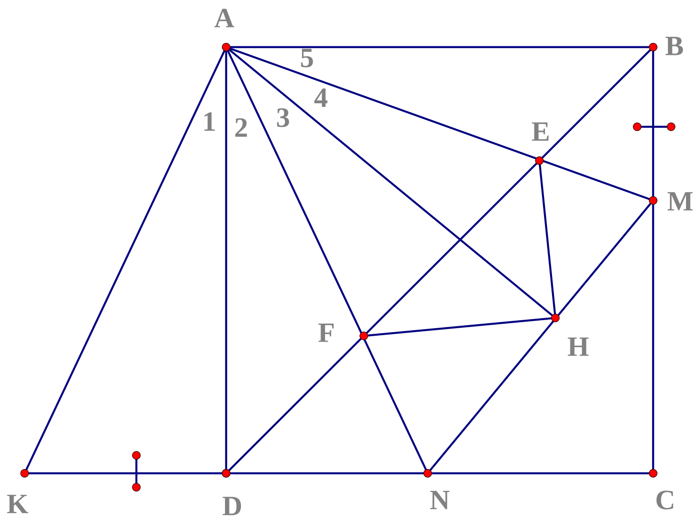
a. Chứng minh $\Delta ADK = \Delta ABM$

b. Chứng minh AN là tia phân giác $\widehat{KAM}$

c. Tính chu vi ΔCMN theo a

d. BD cắt AM và AN lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng ba đoạn BE, FE, FD lập thành ba cạnh của 1 tam giác vuông

Lời giải



a. $\Delta ADK = \Delta ABM\,(c-g-c)$

b. $\Delta ADK = \Delta ABM \to \hat{A}_1 = \hat{A}_5$

$\widehat{KAM} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = \hat{A}_5 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = 90^0$

$\widehat{KAN} = 90^0 - \widehat{NAM} = 45^0 \Rightarrow \widehat{KAN} = \widehat{MAN} = 45^0\,(dpcm)$

c. $P_{CMN} = MN + NC + CM = CM + CN + KN$

$(\Delta ANK = \Delta AMN) = CM + CN + KD + DN = 2a$

d. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến MN

$\Delta AND = \Delta AMH\,(ch - gn) \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}_3$

$\Rightarrow \Delta FAD = \Delta FAH\,(c.g.c)$

$\Rightarrow FH = FD; \widehat{AHF} = \widehat{ADF} = 45^0$

$\Delta AEH = \Delta AEB(c.g.c) \Rightarrow EH = EB; \widehat{AHE} = ABE = 45^0$

Ta có: $\widehat{EHF} = \widehat{EHA} + \widehat{FHA} = 90^0 \Rightarrow$ vuông tại H

Vậy BE, DF, FE lập thành ba cạnh của một tam giác vuông