

CHỦ ĐỀ 7. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG CÁCH PHỐI HỢP NHIỀU PHƯƠNG PHÁP

A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Khi phân tích đa thức thành nhân tử, nếu cần ta phải phối hợp nhiều phương pháp để phân tích được triệt để. Các phương pháp thông thường:

- ➔ Phương pháp ưu tiên số một là đặt nhân tử chung;
- ➔ Phương pháp ưu tiên số hai là dùng hằng đẳng thức;
- ➔ Cuối cùng là nhóm các hạng tử. Mục đích của việc nhóm các hạng tử nhằm làm cho quá trình phân tích đa thức thành nhân tử được tiếp tục bằng cách đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức.

Ngoài ra, ta còn có thể sử dụng các phương pháp nâng cao sau:

- ➔ Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử;
- ➔ Phương pháp thêm và bớt cùng một hạng tử;
- ➔ Phương pháp đổi biến.

B) CÁC DẠNG TOÁN

📁 DẠNG 1. Phối hợp các phương pháp thông thường

- ➔ Một số bài toán, nếu chỉ áp dụng một phương pháp thì ta không thể phân tích thành nhân tử được vì vậy ta phải kết hợp hai hoặc cả ba phương pháp đã nêu.
- ➔ Khi phối hợp nhiều phương pháp, thông thường phương pháp đặt nhân tử chung được ưu tiên đầu tiên rồi đến nhóm hạng tử và hằng đẳng thức, một phương pháp có thể dùng nhiều lần.

🧩 Ví dụ 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $16x^3 - 54y^3;$

b) $5x^2 - 5y^2;$

c) $2x^4 - 32.$

📝 Lời giải

- a $16x^3 - 54y^3 = 2(8x^3 - 27y^3) = 2(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$.
- b $5x^2 - 5y^2 = 5(x^2 - y^2) = 5(x - y)(x + y)$.
- c $2x^4 - 32 = 2(x^4 - 16) = 2(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 2(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.

□

📖 **Ví dụ 2.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

- a $3x^3 - 75x$; b $5x^2y - 30xy^2 + 45y^3$.

✍️ **Lời giải**

- a $3x^3 - 75x = 3x(x^2 - 25) = 3x(x - 5)(x + 5)$.
- b $5x^2y - 30xy^2 + 45y^3 = 5y(x^2 - 6xy + 9y^2) = 5y(x - 3y)^2$.

□

📖 **Ví dụ 3.** Phân tích đa thức $A = a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$ thành nhân tử.

✍️ **Lời giải**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 = a^2(a^4 - a^2 + 2a + 2) = a^2[a^2(a^2 - 1) + 2(a + 1)] \\ &= a^2[a^2(a - 1)(a + 1) + 2(a + 1)] = a^2(a - 1)(a + 1)(a^2 + 2). \end{aligned}$$

□

📖 **Ví dụ 4.** Phân tích đa thức $B = 2x^3y - 2xy^3 - 4xy^2 - 4x^2y$ thành nhân tử.

✍️ **Lời giải**

Ta có

$$\begin{aligned} B &= 2x^3y - 2xy^3 - 4xy^2 - 4x^2y = 2xy(x^2 - y^2 - 2y - 2x) \\ &= 2xy[(x - y)(x + y) - 2(x + y)] = 2xy(x + y)(x - y - 2). \end{aligned}$$

□

📖 **Ví dụ 5.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$M = (5x - 10)(x^2 - 1) - (3x - 6)(x^2 - 2x + 1).$$

✍️ **Lời giải**

$$M = (5x - 10)(x^2 - 1) - (3x - 6)(x^2 - 2x + 1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 5(x - 2)(x - 1)(x + 1) - 3(x - 2)(x - 1)^2 \\
 &= (x - 2)(x - 1)[5(x + 1) - 3(x - 1)] \\
 &= (x - 2)(x - 1)(2x + 8) \\
 &= 2(x - 2)(x - 1)(x + 4).
 \end{aligned}$$

📦 Ví dụ 6. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$P = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x.$$

✍️ Lời giải

$$\begin{aligned}
 P &= x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x = x[(x^3 + 8) - 4x(x + 2)] \\
 &= x[(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 4x(x + 2)] = x(x + 2)(x^2 - 6x + 4).
 \end{aligned}$$

📦 Ví dụ 7. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$M = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 2) - (x - 1).$$

✍️ Lời giải

$$\begin{aligned}
 M &= (x - 1)(x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 2) - (x - 1) = (x - 1)[(x - 2)(x - 3) + (x - 2) - 1] \\
 &= (x - 1)[(x - 2)(x - 3 + 1) - 1] = (x - 1)[(x - 2)^2 - 1] = (x - 1)(x - 2 + 1)(x - 2 - 1) \\
 &= (x - 1)^2(x - 3).
 \end{aligned}$$


📁 DẠNG 2. Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử

- ➡ Tách các hạng tử của đa thức thành tổng hoặc hiệu của nhiều hạng tử, từ đó ta ghép cặp để được các nhóm hạng tử giống nhau và làm xuất hiện nhân tử chung.
- ➡ Cách tổng quát để phân tích đa thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử là
 - Tách bx thành $b_1x + b_2x$ sao cho $b_1 \cdot b_2 = ac$.
 - Đặt nhân tử chung theo từng nhóm.
- ➡ Đối với đa thức bậc ba trở lên thì tùy theo đặc điểm của các hệ số mà có cách tách riêng cho phù hợp. Một thủ thuật của loại này là dùng máy tính cầm tay nhằm một nghiệm (thường là nghiệm nguyên, giả sử là x_0), khi đó ta tìm cách ghép cặp làm sao cho xuất hiện nhân tử $(x - x_0)$ là được.

 **Ví dụ 1.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$A = 4x^2 - 8x + 3.$$

 **Lời giải**

 **PHÂN TÍCH.** Ta sẽ tách hạng tử $-8x$ thành $b_1x + b_2x$ sao cho $\begin{cases} b_1 + b_2 = -8 \\ b_1 \cdot b_2 = 4 \cdot 3 = 12 \end{cases}$.


Ta chọn $b_1 = -2$ và $b_2 = -6$, nghĩa là $-8x = -6x - 2x$.

 **QUAY TRỞ LẠI BÀI TOÁN.**

Ta có

$$A = 4x^2 - 8x + 3 = 4x^2 - 2x - 6x + 3 = 2x(2x - 1) - 3(2x - 1) = (2x - 1)(2x - 3).$$

Vậy $A = (2x - 1)(2x - 3)$. □

 **Ví dụ 2.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a $x^2 + x - 6$;

b $x^2 - 2xy - 8y^2$;

c $2x + 12x^2 - 2$;

d $15y^2 - 18x^2 + 39xy$.

 **Lời giải**

a $x^2 + x - 6 = x^2 + 3x - 2x - 6 = x(x + 3) - 2(x + 3) = (x + 3)(x - 2)$.


b $x^2 - 2xy - 8y^2 = x^2 - 4xy + 2xy - 8y^2 = x(x - 4y) + 2y(x - 4y) = (x - 4y)(x + 2y)$.

c $2x + 12x^2 - 2 = 12x^2 + 6x - 4x - 2 = 6x(2x + 1) - 2(2x + 1) = 2(2x + 1)(3x - 1)$.

d

$$\begin{aligned} 15y^2 - 18x^2 + 39xy &= -18x^2 + 45xy - 6xy + 15y^2 = 9x(-2x + 5y) + 3y(-2x + 5y) \\ &= 3(5y - 2x)(3x + y). \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 3.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a $4x^4 - 8x^2 + 1$;

b $9x^4 - 37x^2y^2 + 4y^4$.

 **Lời giải**

a $4x^4 - 8x^2 + 1 = (2x^2)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 1 + 1^2 - (2x)^2 = (2x^2 - 1) - (2x)^2 = (2x^2 - 1 - 2x)(2x^2 - 1 + 2x)$.

b

$$\begin{aligned}
 9x^4 - 37x^2y^2 + 4y^4 &= (3x^2)^2 - 2(3x^2)(2y^2) + (2y^2)^2 - 25x^2y^2 = (3x^2 - 2y^2)^2 - (5xy)^2 \\
 &= (3x^2 - 2y^2 - 5xy)(3x^2 - 2y^2 + 5xy) \\
 &= (3x^2 - 6xy + xy - 2y^2)(3x^2 + 6xy - xy - 2y^2) \\
 &= [3x(x - 2y) + y(x - 2y)][3x(x + 2y) - y(x + 2y)] \\
 &= (x - 2y)(3x + y)(x + 2y)(3x - y).
 \end{aligned}$$

□

📖 Ví dụ 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a $x^3 - 4x^2 + x + 6;$

b $8x^3 - 14x^2 - 5x + 2.$

✍️ Lời giải

a

$$\begin{aligned}
 x^3 - 4x^2 + x + 6 &= x^3 + x^2 - 5x^2 - 5x + 6x + 6 = x^2(x + 1) - 5x(x + 1) + 6(x + 1) \\
 &= (x + 1)(x^2 - 5x + 6) = (x + 1)(x^2 - 3x - 2x + 6) \\
 &= (x + 1)[x(x - 3) - 2(x - 3)] = (x + 1)(x - 3)(x - 2).
 \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}
 8x^3 - 14x^2 - 5x + 2 &= 8x^3 - 16x^2 + 2x^2 - 4x - x + 2 = 8x^2(x - 2) + 2x(x - 2) - (x - 2) \\
 &= (x - 2)(8x^2 + 2x - 1) = (x - 2)(8x^2 + 4x - 2x - 1) \\
 &= (x - 2)[4x(2x + 1) - (2x + 1)] = (x - 2)(2x + 1)(4x - 1).
 \end{aligned}$$

□

📖 Ví dụ 5 (Đề thi HSG lớp 8, Lục Nam - Bắc Giang năm 2017). Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$x^2 + 6xy + 5y^2 - 5y - x.$$

✍️ Lời giải

🔍 PHÂN TÍCH. Nhắm các hệ số của biểu thức $x^2 + 6xy + 5y^2$, ta thấy tổng các hệ số bằng nhau. Từ đó ta nghĩ đến việc tách hạng tử $6xy$ để được nhân tử chung.

🔁 QUAY TRỞ LẠI BÀI TOÁN.

Tách hạng tử $6xy$ thành $xy + 5xy$, ta được

$$\begin{aligned}
 x^2 + 6xy + 5y^2 - 5y - x &= x^2 + xy + 5xy + 5y^2 - 5y - x \\
 &= x(x + y) + 5y(x + y) - (x + 5y) = (x + y)(x + 5y) - (x + 5y) = (x + 5y)(x + y - 1).
 \end{aligned}$$

□

📖 **Ví dụ 6 (Đề thi HSG 8 cấp tỉnh, tỉnh Lai Châu, năm 2017).** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$xy(x + y) - yz(y + z) + xz(x - z).$$

✍️ Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} xy(x + y) - yz(y + z) + xz(x - z) &= xy(x + y) - yz(y + z) + xz[(x + y) - (y + z)] \\ &= xy(x + y) + xz(x + y) - yz(y + z) - xz(y + z) \\ &= x(x + y)(y + z) - z(y + z)(x + y) \\ &= (x + y)(y + z)(x - z). \end{aligned}$$

□

📖 **Ví dụ 7 (KSCL mũi nhọn, phòng GD&ĐT Thanh Chương - Nghệ An năm 2013).**

Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y - 5.$$

✍️ Lời giải

❓ **PHÂN TÍCH.** Ta nhận thấy ngay biểu thức $x^2 - 2xy + y^2$ là hằng đẳng thức, kết hợp với phần sau và tách 5 ra để được hiệu của hai bình phương.

🔙 **QUAY TRỞ LẠI BÀI TOÁN.**

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y - 5 &= (x - y)^2 + 4(x - y) - 5 \\ &= (x - y)^2 + 4(x - y) + 4 - 9 = (x - y + 2)^2 - 3^2 = (x - y + 5)(x - y - 1). \end{aligned}$$

★ **LỚP TOÁN THẦY DŨNG** ★

□

📁 **DẠNG 3. Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử**

Khi phân tích đa thức thành nhân tử, đôi khi ta cần tăng thêm các hạng tử của đa thức bằng cách thêm và bớt cùng một hạng tử. Có hai cách thêm bớt thường gặp như sau:

- ➡ Thêm và bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện hiệu của hai bình phương.
- ➡ Thêm và bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện nhân tử chung.

📖 **Ví dụ 1 (Đề HKI, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2014 - 2015).** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$A = x^4 + 4.$$

✍️ Lời giải

🔍 **PHÂN TÍCH.** Ta nhận thấy các phương pháp thông thường không dùng được. Ta tăng thêm các hạng tử của A bằng cách thêm bớt cùng một hạng tử $4x^2$. Lúc này ta sẽ xuất hiện hiệu của hai bình phương.

↩️ **QUAY TRỞ LẠI BÀI TOÁN.**

Thêm và bớt $4x^2$, ta được

$$\begin{aligned} A &= x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2). \end{aligned}$$

📦 **Ví dụ 2.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$B = 4x^4 + 81$$

📝 **Lời giải**

Thêm và bớt $36x^2$, ta được

$$\begin{aligned} B &= 4x^4 + 81 = 4x^4 + 36x^2 + 81 - 36x^2 = (2x^2 + 9)^2 - (6x)^2 \\ &= (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 - 6x + 9). \end{aligned}$$

📦 **Ví dụ 3 (Đề HK1, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2005 - 2006).** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$A = (x - a)^4 + 4a^4.$$

📝 **Lời giải**

Thêm và bớt $4(x - a)^2a^2$, ta được

$$\begin{aligned} A &= (x - a)^4 + 4a^4 = (x - a)^4 + 4(x - a)^2a^2 + 4a^4 - 4(x - a)^2a^2 \\ &= [(x - a)^2 - a^2]^2 - [2a(x - a)]^2 = (x^2 - 2ax)^2 - (2ax - 2a^2)^2 \\ &= (x^2 - 2ax + 2ax - 2a^2)(x^2 - 2ax - 2ax + 2a^2) = (x^2 - 2a^2)(x^2 - 4ax + 2a^2). \end{aligned}$$

📦 **Ví dụ 4.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$N = x^4 + 2x^3 + 6x - 9.$$

📝 **Lời giải**

🔍 **PHÂN TÍCH.** Ta nhận thấy, nếu thêm bớt x^2 và ghép cặp thích hợp thì ta sẽ có nhân tử chung. Các bài tập loại này thường nâng cao, cần phải nhanh để biết được thêm bớt hạng tử nào sẽ thích hợp.

↩️ **QUAY TRỞ LẠI BÀI TOÁN.**

Thêm và bớt x^2 , ta được

$$\begin{aligned} N &= x^4 + 2x^3 + x^2 - x^2 + 6x - 9 = (x^2 + x)^2 - (x^2 - 6x + 9) \\ &= (x^2 + x)^2 - (x - 3)^2 = (x^2 + x + x - 3)(x^2 + x - x + 3) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 3) \\ &= (x^2 - x + 3x - 3)(x^2 + 3) = [x(x - 1) + 3(x - 1)](x^2 + 3) = (x - 1)(x + 3)(x^2 + 3). \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 5.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$D = x^5 + x - 1$$

 **Lời giải**

Thêm và bớt x^2 , ta được

$$\begin{aligned} D &= x^5 + x - 1 = x^5 + x^2 - x^2 + x - 1 = x^2(x^3 + 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= x^2(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)[x^2(x + 1) - 1] \\ &= (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1). \end{aligned}$$

□

DẠNG 4. Phương pháp đổi biến

- ➡ Khi gặp một đa thức phức tạp, ta nên dùng cách đặt ẩn phụ (thay một đa thức của biến cũ bằng một biến mới để được một đa thức đơn giản hơn, dễ phân tích hơn).
- ➡ Sau khi phân tích với biến mới, ta thay trở lại biến cũ để phân tích tiếp (nếu được).

 **Ví dụ 1 (Đề HKI, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2007 - 2008).** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$C = (x^2 + x - 5)(x^2 + x - 7) + 1.$$

 **Lời giải**

❓ **PHÂN TÍCH.** Ta thấy hai biểu thức $(x^2 + x - 5)$ và $(x^2 + x - 7)$ gần giống nhau. Ta sẽ đặt y là trung bình cộng của cả hai biểu thức đó, khi đó C sẽ trở nên đơn giản hơn.

↩ **QUAY TRỞ LẠI BÀI TOÁN.**

Đặt $y = \frac{(x^2 + x - 5) + (x^2 + x - 7)}{2} = x^2 + x - 6$. Khi đó

$$C = (x^2 + x - 5)(x^2 + x - 7) + 1 = (y + 1)(y - 1) + 1 = y^2 - 1 + 1 = y^2.$$

Suy ra $C = (x^2 + x - 6)^2 = (x^2 - 2x + 3x - 6)^2 = [x(x - 2) + 3(x - 2)]^2 = (x - 2)^2(x + 3)^2$. □

 **Ví dụ 2.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$M = x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y - 4.$$

 **Lời giải**

Ta có

$$M = x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y - 4 = (x - y)^2 + 3(x - y) - 4.$$

Đặt $a = x - y$. Khi đó


$$M = a^2 + 3a - 4 = a^2 - a + 4a - 4 = a(a - 1) + 4(a - 1) = (a - 1)(a + 4).$$

Vậy $M = (x - y - 1)(x - y + 4)$. □

 **Ví dụ 3 (ĐỀ HK1, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2007 - 2008).** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$D = (a + b + 1)^2 + (a + b - 1)^2 - 4(a + b)^2.$$

 **Lời giải**

 **PHÂN TÍCH.** Ta thấy biểu thức $(a + b)$ là biểu thức chính của D . Ta sẽ đặt $x = a + b$, khi đó D sẽ trở nên đơn giản hơn.

 **QUAY TRỞ LẠI BÀI TOÁN.**

Đặt $x = a + b$. Khi đó


$$D = (x + 1)^2 + (x - 1)^2 - 4x^2 = -2x^2 + 2 = -2(x^2 - 1) = -2(x - 1)(x + 1).$$

Vậy $D = -2(a + b - 1)(a + b + 1)$. □

 **Ví dụ 4 (ĐỀ HK1, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2005 - 2006).** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$A = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 120.$$

 **Lời giải**

 **PHÂN TÍCH.** Đây là dạng bài khá quen thuộc. Ta sẽ ghép nhóm các thừa số sao cho tổng hệ số tự do của hai nhóm là bằng nhau, từ đó sẽ xuất hiện ẩn phụ.

 **QUAY TRỞ LẠI BÀI TOÁN.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 120 = [(x + 1)(x + 4)] \cdot [(x + 2)(x + 3)] - 120 \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 120. \end{aligned}$$

Đặt $y = \frac{(x^2 + 5x + 4) + (x^2 + 5x + 6)}{2} = x^2 + 5x + 5$, ta được

$$A = (y - 1)(y + 1) - 120 = y^2 - 1 - 120 = y^2 - 121 = (y - 11)(y + 11).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + 5x + 5 - 11)(x^2 + 5x + 5 + 11) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 16) \\ &= (x^2 + 6x - x - 6)(x^2 + 5x + 16) = [x(x + 6) - (x + 6)](x^2 + 5x + 16) \\ &= (x + 6)(x - 1)(x^2 + 5x + 16). \end{aligned}$$

Vậy $A = (x + 6)(x - 1)(x^2 + 5x + 16)$. □

📖 Ví dụ 5 (Đề thi HSG lớp 8, Tiền Hải - Thái Bình năm 2017). Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$M = (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24.$$

✍️ Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} M &= (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24 = [(x + 2)(x + 5)] \cdot [(x + 3)(x + 4)] - 24 \\ &= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 24. \end{aligned}$$

Đặt $y = \frac{(x^2 + 7x + 10) + (x^2 + 7x + 12)}{2} = x^2 + 7x + 11$, ta được

$$M = (y - 1)(y + 1) - 24 = y^2 - 1 - 24 = y^2 - 25 = (y - 5)(y + 5).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} M &= (x^2 + 7x + 11 - 5)(x^2 + 7x + 11 + 5) = (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\ &= (x^2 + x + 6x + 6)(x^2 + 7x + 16) = [x(x + 1) + 6(x + 1)](x^2 + 7x + 16) \\ &= (x + 1)(x + 6)(x^2 + 7x + 16). \end{aligned}$$

Vậy $M = (x + 1)(x + 6)(x^2 + 7x + 16)$. □

📁 DẠNG 5. Tìm x thỏa một đẳng thức cho trước

Một tích bằng 0 khi một trong các nhân tử của nó bằng 0. Ta thực hiện theo các bước sau:

- ➡ Chuyển tất cả sang vế trái để vế phải bằng 0.
- ➡ Phân tích đa thức thành nhân tử để đưa về dạng tích.
- ➡ Cho một trong các nhân tử bằng 0 và tìm x .

! Một số bài toán ta cần đặt ẩn phụ trước rồi mới giải.

📦 Ví dụ 1. Tìm x , biết

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

✍️ Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 = 0 &\Rightarrow (x^2 - x) - (4x + 4) = 0 \\ &\Rightarrow x(x - 1) - 4(x - 1) = 0 \\ &\Rightarrow (x - 1)(x - 4) = 0 \\ &\Rightarrow x - 1 = 0 \text{ hoặc } x - 4 = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 4. \end{aligned}$$

Vậy $x = 1$ hoặc $x = 4$. □

📦 Ví dụ 2 (Trường THCS và THPT Nguyễn Tất Thành, HKI, 2012 - 2013). Tìm x , biết

$$5(x + 4) - x^2 - 4x = 0.$$

✍️ Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} 5(x + 4) - x^2 - 4x = 0 &\Rightarrow 5(x + 4) - x(x + 4) = 0 \\ &\Rightarrow (x + 4)(5 - x) = 0 \\ &\Rightarrow x + 4 = 0 \text{ hoặc } 5 - x = 0 \\ &\Rightarrow x = -4 \text{ hoặc } x = 5. \end{aligned}$$

Vậy $x = -4$ hoặc $x = 5$. □

📦 Ví dụ 3 (Trường THPT Hà Nội - Amsterdam, HKII, 2017 - 2018). Tìm x , biết

$$(3x - 1)(x^2 + 2) = (3x - 1)(7x - 10).$$

✍️ Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} (3x - 1)(x^2 + 2) = (3x - 1)(7x - 10) &\Rightarrow (3x - 1)(x^2 + 2 - 7x + 10) = 0 \\ &\Rightarrow (3x - 1)(x^2 - 3x - 4x + 12) = 0 \\ &\Rightarrow (3x - 1)[x(x - 3) - 4(x - 3)] = 0 \\ &\Rightarrow (3x - 1)(x - 4)(x - 3) = 0 \\ &\Rightarrow 3x - 1 = 0 \text{ hoặc } x - 4 = 0 \text{ hoặc } x - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ hoặc } x = 4 \text{ hoặc } x = 3.$$

Vậy $x = \frac{1}{3}$ hoặc $x = 4$ hoặc $x = 3$. □

📖 Ví dụ 4 (Trường THCS Lê Quý Đôn - Cầu Giấy, HKII, 2017 - 2018). Tìm x , biết

$$(2x - 5)(3x + 7) = 4x^2 - 25$$

✍️ Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} (2x - 5)(3x + 7) = 4x^2 - 25 &\Rightarrow (2x - 5)(3x + 7) - (2x - 5)(2x + 5) = 0 \\ &\Rightarrow (2x - 5)(3x + 7 - 2x - 5) = 0 \\ &\Rightarrow (2x - 5)(x + 2) = 0 \\ &\Rightarrow 2x - 5 = 0 \text{ hoặc } x + 2 = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ hoặc } x = -2. \end{aligned}$$

Vậy $x = \frac{5}{2}$ hoặc $x = -2$. □

📖 Ví dụ 5. Tìm x , biết

$$x(x + 3)(x + 2)(x - 1) = 4.$$

✍️ Lời giải

$$x(x + 3)(x + 2)(x - 1) = 4 \Rightarrow x(x + 2)(x + 3)(x - 1) = 4 \Rightarrow (x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 3) = 4$$

Đặt $t = x^2 + 2x$, khi đó bài toán trở thành $t(t - 3) = 4$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 4t - 4 = 0 \Rightarrow t(t + 1) - 4(t + 1) = 0 \Rightarrow (t + 1)(t - 4) = 0 \\ &\Rightarrow t + 1 = 0 \text{ hoặc } t - 4 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ hoặc } x^2 + 2x - 4 = 0 \\ &\Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \text{ hoặc } (x + 1)^2 = 5 \\ &\Rightarrow x + 1 = 0 \text{ hoặc } x + 1 = \sqrt{5} \text{ hoặc } x + 1 = -\sqrt{5} \\ &\Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -1 + \sqrt{5} \text{ hoặc } x = -1 - \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Vậy $x = -1$ hoặc $x = -1 + \sqrt{5}$ hoặc $x = -1 - \sqrt{5}$. □

📖📖📖 BÀI TẬP TỔNG HỢP 📖📖📖

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a $x^3 - 6x^2 + 9x$;

b $x^4 - 8x$;

c $x^5 + 27x^2$.

✍️ Lời giải

a $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$.

b $x^4 - 8x = x(x^3 - 8) = x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

c $x^5 + 27x^2 = x^2(x^3 + 27) = x^2(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$.

Bài 2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a $3x^3 - 6x^2y + 3xy^2$;

b $7x^2y^2 - 63x^2z^2$;

c $5ab^2 - 10abc + 5ac^2$.

✍️ Lời giải

a $3x^3 - 6x^2y + 3xy^2 = 3x(x^2 - 2xy + y^2) = 3x(x - y)^2$.

b $7x^2y^2 - 63x^2z^2 = 7x^2(y^2 - z^2) = 7x^2(y - z)(y + z)$.

c $5ab^2 - 10abc + 5ac^2 = 5a(b^2 - 2bc + c^2) = 5a(b - c)^2$.

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a $4x^3 - 500$;

b $x^4y^2 - 12x^3y^2 + 48x^2y^2 - 64xy^2$.

✍️ Lời giải

a $4x^3 - 500 = 4(x^3 - 125) = 4(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$.

b $x^4y^2 - 12x^3y^2 + 48x^2y^2 - 64xy^2 = xy^2(x^3 - 12x^2 + 48x - 64) = xy^2(x - 4)^3$.

Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a $5(x^2 + y^2)^2 - 20x^2y^2$;

b $10x^4y^2 - 10x^3y^2 - 10x^2y^2 + 10xy^2$.

✍️ Lời giải

a

$$\begin{aligned} 5(x^2 + y^2)^2 - 20x^2y^2 &= 5[(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2] = 5(x^2 - 2xy + y^2)(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= 5(x - y)^2(x + y)^2. \end{aligned}$$

Thầy NGUYỄN NGỌC DŨNG - THPT TẠ QUANG BỬU

b

$$\begin{aligned}
 10x^4y^2 - 10x^3y^2 - 10x^2y^2 + 10xy^2 &= 10xy^2(x^3 - x^2 - x + 1) \\
 &= 10xy^2(x^2(x-1) - (x-1)) = 10xy^2(x-1)(x^2-1) = 10xy^2(x-1)^2(x+1).
 \end{aligned}$$

□

Bài 5 (Đề HKI, quận Ba Đình năm 2017 - 2018). Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$B = 2x^3 - 50x.$$

✍️ **Lời giải**

Ta có

$$B = 2x^3 - 50x = 2x(x^2 - 25) = 2x(x-5)(x+5).$$

□

Bài 6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a $x^2 + 2x - 24;$

b $15x^2 - 7xy - 2y^2;$

c $2x - 2x^2 + 12;$

d $4x^2 + 4x - 3;$

e $3x^2 - 26xy + 35y^2;$

f $15y^2 + 12xy - 3x^2.$

✍️ **Lời giải**

a $x^2 + 2x - 24 = x^2 + 6x - 4x - 24 = x(x+6) - 4(x+6) = (x+6)(x-4).$

b $15x^2 - 7xy - 2y^2 = 15x^2 - 10xy + 3xy - 2y^2 = 5x(3x-2y) + y(3x-2y) = (3x-2y)(5x+y).$

c $2x - 2x^2 + 12 = -2x^2 + 6x - 4x + 12 = 2x(-x+3) + 4(-x+3) = 2(3-x)(x+2).$

d $4x^2 + 4x - 3 = 4x^2 + 6x - 2x - 3 = 2x(2x+3) - (2x+3) = (2x+3)(2x-1).$

e $3x^2 - 26xy + 35y^2 = 3x^2 - 21xy - 5xy + 35y^2 = 3x(x-7y) - 5y(x-7y) = (x-7y)(3x-5y).$

f

$$\begin{aligned}
 15y^2 + 12xy - 3x^2 &= -3x^2 + 15xy - 3xy + 15y^2 = 3x(-x+5y) + 3y(-x+5y) \\
 &= 3(5y-x)(x+y).
 \end{aligned}$$

□

Bài 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a $a^4 + a^2b^2 + b^4;$

b $6x^2 + 8x - 8;$

c $x^4 - 7x^2 + 1.$

✍️ **Lời giải**

Ⓐ $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$.

Ⓑ $6x^2 + 8x - 8 = 6x^2 + 12x - 4x - 8 = 6x(x + 2) - 4(x + 2) = 2(x + 2)(3x - 2)$.

Ⓒ $x^4 - 7x^2 + 1 = (x^2)^2 + 2x^2 + 1^2 - 9x^2 = (x^2 + 1)^2 - (3x)^2 = (x^2 + 1 - 3x)(x^2 + 1 + 3x)$

□

Bài 8. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

Ⓐ $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$;

Ⓑ $-12x^3 + 20x^2 + 33x - 20$.

✍️ **Lời giải**

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 6x + 8 &= x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 8x + 8 = x^2(x - 1) - 2x(x - 1) - 8(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 - 2x - 8) = (x - 1)(x^2 - 4x + 2x - 8) \\ &= (x - 1)[x(x - 4) + 2(x - 4)] = (x - 1)(x - 4)(x + 2). \end{aligned}$$

Ⓑ

$$\begin{aligned} -12x^3 + 20x^2 + 33x - 20 &= -12x^3 + 6x^2 + 14x^2 - 7x + 40x - 20 \\ &= -6x^2(2x - 1) + 7x(2x - 1) + 20(2x - 1) \\ &= (2x - 1)(-6x^2 + 7x + 20) = (2x - 1)(-6x^2 + 15x - 8x + 20) \\ &= (2x - 1)[3x(-2x + 5) + 4(-2x + 5)] \\ &= (2x - 1)(5 - 2x)(3x + 4). \end{aligned}$$

□

Bài 9 (Đề thi HK1, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2001 - 2002). Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$a^2 - 2ab + 1 + 2b - 2a - 3b^2.$$

✍️ **Lời giải**

Ta có

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + 1 + 2b - 2a - 3b^2 &= a^2 + ab - a - 3ab - a - 3b^2 + 2b + 1 \\ &= a(a + b - 1) - 3ba - 3b^2 + 3b - a - b + 1 \\ &= a(a + b - 1) - 3b(a + b - 1) - (a + b - 1) \\ &= (a + b - 1)(a - 3b - 1). \end{aligned}$$

□

Bài 10 (Đề thi HKI, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2006 - 2007). Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$A = 4x^2y^2(2x + y) + y^2z^2(z - y) - 4x^2z^2(2x + z).$$

✍️ Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} A &= 4x^2y^2(2x + y) + y^2z^2(z - y) - 4x^2z^2(2x + z) \\ &= 4x^2y^2(2x + y) - y^2z^2(2x + y) + y^2z^2(2x + z) - 4x^2z^2(2x + z) \\ &= y^2(2x + y) [(2x)^2 - z^2] + z^2(2x + z) [y^2 - (2x)^2] \\ &= y^2(2x + y)(2x - z)(2x + z) + z^2(2x + z)(y - 2x)(y + 2x) \\ &= (2x + y)(2x + z) [y^2(2x - z) + z^2(y - 2x)] \\ &= (2x + y)(2x + z)(2xy^2 - y^2z - 2xz^2 + yz^2) \\ &= (2x + y)(2x + z) [2x(y^2 - z^2) - yz(y - z)] \\ &= (2x + y)(2x + z) [2x(y + z)(y - z) - yz(y - z)] \\ &= (2x + y)(2x + z)(y - z)(2xy + 2xz - yz). \end{aligned}$$

□

Bài 11 (Đề thi HSG lớp 8, huyện Củ Chi - TPHCM năm 2016 - 2017). Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^2 - x - 6;$

b) $x^3 - x^2 - 14x + 24.$

✍️ Lời giải

a) $x^2 - x - 6 = x^2 + 2x - 3x - 6 = x(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(x - 3).$

b)

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 14x + 24 &= x^3 - 8 - x^2 + 4 - 14x + 28 \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x - 2)(x + 2) - 14(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4 - x - 2 - 14) = (x - 2)(x^2 + x - 12) \\ &= (x - 2)(x^2 + 4x - 3x - 12) = (x - 2)[x(x + 4) - 3(x + 4)] \\ &= (x - 2)(x + 4)(x - 3). \end{aligned}$$

□

Bài 12. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $A = 64x^4 + y^4;$

b) $B = 4x^4 + y^4.$

✍️ **Lời giải**

(a) Thêm và bớt $16x^2y^2$, ta được

$$\begin{aligned} A &= 64x^4 + y^4 = 64x^4 + 16x^2y^2 + y^4 - 16x^2y^2 = (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2 \\ &= (8x^2 + y^2 + 4xy)(8x^2 + y^2 - 4xy). \end{aligned}$$

(b) Thêm và bớt $4x^2y^2$, ta được

$$\begin{aligned} B &= 4x^4 + y^4 = 4x^4 + 4x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2 = (2x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (2x^2 + 2xy + y^2)(2x^2 - 2xy + y^2). \end{aligned}$$

□

Bài 13. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

(a) $A = 4x^4 + 1;$

(b) $B = x^5 + x + 1.$

✍️ **Lời giải**

(a) Thêm và bớt $4x^2$, ta được

$$\begin{aligned} A &= 4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 - (2x)^2 \\ &= (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1). \end{aligned}$$

(b) Thêm và bớt x^2 , ta được

$$\begin{aligned} B &= x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1). \end{aligned}$$

□

Bài 14. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

(a) $A = x^8 + 4;$

(b) $B = x^4 + 18^2;$

(c) $C = x^4 + 32^2.$

✍️ **Lời giải**

(a) Thêm và bớt $4x^4$, ta được

$$A = x^8 + 4 = x^8 + 4x^4 + 4 - 4x^4 = (x^4 + 2)^2 - (2x^2)^2 = (x^4 + 2x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 2).$$

(b) Thêm và bớt $36x^2$, ta được

$$B = x^4 + 18^2 = x^4 + 36x^2 + 18^2 - 36x^2 = (x^2 + 18)^2 - (6x)^2 = (x^2 + 6x + 18)(x^2 - 6x + 18).$$

- © Thêm và bớt $64x^2$, ta được

$$C = x^4 + 32^2 = x^4 + 64x^2 + 32^2 - 64x^2 = (x^2 + 32)^2 - (8x)^2 = (x^2 + 8x + 32)(x^2 - 8x + 32).$$

□

Bài 15. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

Ⓐ $A = 4x^4y^4 + 1;$

Ⓑ $B = 64x^4 + 81;$

Ⓒ $C = x^7 - x^2 - 1.$

✍ **Lời giải**

- Ⓐ Thêm và bớt $4x^2y^2$, ta được

$$\begin{aligned} A &= 4x^4y^4 + 1 = 4x^4y^4 + 4x^2y^2 + 1 - 4x^2y^2 = (2x^2y^2 + 1)^2 - (2xy)^2 \\ &= (2x^2y^2 + 2xy + 1)(2x^2y^2 - 2xy + 1). \end{aligned}$$

- Ⓑ Thêm và bớt $144x^2$, ta được

$$\begin{aligned} B &= 64x^4 + 81 = 64x^4 + 144x^2 + 81 - 144x^2 = (8x^2 + 9)^2 - (12x)^2 \\ &= (8x^2 + 12x + 9)(8x^2 - 12x + 9). \end{aligned}$$

- Ⓒ Thêm và bớt x , ta được

$$\begin{aligned} C &= x^7 - x^2 - 1 = x^7 - x - x^2 + x - 1 = x(x^6 - 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= x(x^3 - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= (x^2 - x + 1)(x^5 + x^4 - x^2 - x - 1). \end{aligned}$$

□

Bài 16. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$A = (x^2 - 3x - 1)^2 - 12(x^2 - 3x - 1) + 27.$$

✍ **Lời giải**

Đặt $y = x^2 - 3x - 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} A &= (x^2 - 3x - 1)^2 - 12(x^2 - 3x - 1) + 27 = y^2 - 12y + 27 \\ &= y^2 - 12y + 36 - 9 = (y - 6)^2 - 9 = (y - 6 - 3)(y - 6 + 3) = (y - 9)(y - 3). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A &= (x^2 - 3x - 1 - 9)(x^2 - 3x - 1 - 3) = (x^2 - 3x - 10)(x^2 - 3x - 4) \\ &= (x^2 - 5x + 2x - 10)(x^2 + x - 4x - 4) = (x - 5)(x + 2)(x + 1)(x - 4). \end{aligned}$$

□

Bài 17 (Đề HKI, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2011 - 2012). Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$B = (x^2 - x - 10)(x^2 - x - 8) - 8.$$

✍️ Lời giải

Đặt $y = \frac{(x^2 - x - 10) + (x^2 - x - 8)}{2} = x^2 - x - 9$. Khi đó

$$B = (x^2 - x - 10)(x^2 - x - 8) - 8 = (y - 1)(y + 1) - 8 = y^2 - 9 = (y - 3)(y + 3).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} B &= (x^2 - x - 9 - 3)(x^2 - x - 9 + 3) = (x^2 - x - 12)(x^2 - x - 6) \\ &= (x^2 - 4x + 3x - 12)(x^2 - 3x + 2x - 6) = (x - 4)(x + 3)(x - 3)(x + 2). \end{aligned}$$

Vậy $B = (x - 4)(x + 3)(x - 3)(x + 2)$. □

Bài 18 (Đề HKI, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2009 - 2010). Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$B = (x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) + 15.$$

✍️ Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} B &= (x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) + 15 = [(x - 1)(x + 5)] \cdot [(x + 1)(x + 3)] + 15 \\ &= (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) + 15. \end{aligned}$$

Đặt $y = \frac{(x^2 + 4x - 5) + (x^2 + 4x + 3)}{2} = x^2 + 4x - 1$, ta được

$$B = (y - 4)(y + 4) + 15 = y^2 - 1 = (y - 1)(y + 1).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} B &= (x^2 + 4x - 1 - 1)(x^2 + 4x - 1 + 1) = (x^2 + 4x - 2)(x^2 + 4x) \\ &= x(x^2 + 4x - 2)(x + 4). \end{aligned}$$

Vậy $B = x(x^2 + 4x - 2)(x + 4)$. □

Bài 19 (Đề HKI, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2012 - 2013). Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$C = (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24.$$

✍️ **Lời giải**

Ta có

$$\begin{aligned} C &= (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24 = [(x+2)(x+5)] \cdot [(x+3)(x+4)] - 24 \\ &= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 24. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } y = \frac{(x^2 + 7x + 10) + (x^2 + 7x + 12)}{2} = x^2 + 7x + 11, \text{ ta được}$$

$$C = (y-1)(y+1) - 24 = y^2 - 25 = (y+5)(y-5).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} C &= (x^2 + 7x + 11 + 5)(x^2 + 7x + 11 - 5) = (x^2 + 7x + 16)(x^2 + 7x + 6) \\ &= (x^2 + 7x + 16)(x^2 + x + 6x + 6) = (x^2 + 7x + 16)[x(x+1) + 6(x+1)] \\ &= (x^2 + 7x + 16)(x+1)(x+6). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } C = (x^2 + 7x + 16)(x+1)(x+6). \quad \square$$

Bài 20 (Đề HKI, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2013 - 2014). Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$B = (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12.$$

✍️ **Lời giải**Đặt $y = (x^2 + x)$. Ta được

$$B = y^2 + 4y - 12 = y^2 - 2y + 6y - 12 = y(y-2) + 6(y-2) = (y-2)(y+6).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} B &= (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 6) = (x^2 - x + 2x - 2)(x^2 + x + 6) \\ &= [x(x-1) + 2(x-1)](x^2 + x + 6) = (x-1)(x+2)(x^2 + x + 6). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = (x-1)(x+2)(x^2 + x + 6). \quad \square$$

Bài 21 (Đề HKI, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2004 - 2005). Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$A = x^2 + y^2 + 3x - 3y - 2xy - 10.$$

✍️ **Lời giải**

Ta có

$$A = x^2 + y^2 + 3x - 3y - 2xy - 10 = x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y - 10 = (x-y)^2 + 3(x-y) - 10.$$

Đặt $a = x - y$. Khi đó

$$A = a^2 + 3a - 10 = a^2 + 5a - 2a - 10 = a(a + 5) - 2(a + 5) = (a + 5)(a - 2).$$

Vậy $A = (x - y + 5)(x - y - 2)$. □

Bài 22 (Đề HKI, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2014 - 2015). Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$C = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24.$$

✍️ Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} C &= (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24 = [(x + 1)(x + 4)] \cdot [(x + 2)(x + 3)] - 24 \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24. \end{aligned}$$

Đặt $y = \frac{(x^2 + 5x + 4) + (x^2 + 5x + 6)}{2} = x^2 + 5x + 5$, ta được

$$C = (y - 1)(y + 1) - 24 = y^2 - 25 = (y + 5)(y - 5).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} C &= (x^2 + 5x + 5 + 5)(x^2 + 5x + 5 - 5) = (x^2 + 5x + 10)(x^2 + 5x) \\ &= (x^2 + 5x + 10)x(x + 5). \end{aligned}$$

Vậy $C = x(x + 5)(x^2 + 5x + 10)$. □

Bài 23 (Đề HKI, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2015 - 2016). Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$D = (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 360.$$

✍️ Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} D &= (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 360 = [(x + 2)(x + 5)] \cdot [(x + 3)(x + 4)] - 360 \\ &= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 360. \end{aligned}$$

Đặt $y = \frac{(x^2 + 7x + 10) + (x^2 + 7x + 12)}{2} = x^2 + 7x + 11$, ta được

$$D = (y - 1)(y + 1) - 360 = y^2 - 361 = (y + 19)(y - 19).$$

Suy ra

$$D = (x^2 + 7x + 11 + 19)(x^2 + 7x + 11 - 19) = (x^2 + 7x + 30)(x^2 + 7x - 8)$$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2 + 7x + 30)(x^2 - x + 8x - 8) = (x^2 + 7x + 30)[x(x - 1) + 8(x - 1)] \\
 &= (x^2 + 7x + 30)(x - 1)(x + 8).
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } D = (x^2 + 7x + 30)(x - 1)(x + 8). \quad \square$$

Bài 24 (ĐỀ HK1, trường THPT Hà Nội - Amsterdam năm 2016 - 2017). Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$N = (x - 1)(x - 2)(x + 7)(x + 8) + 8.$$

✍️ Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
 N &= (x - 1)(x - 2)(x + 7)(x + 8) + 8 = [(x - 1)(x + 7)] \cdot [(x - 2)(x + 8)] + 8 \\
 &= (x^2 + 6x - 7)(x^2 + 6x - 16) + 8.
 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } y = \frac{(x^2 + 6x - 7) + (x^2 + 6x - 16)}{2} = x^2 + 6x - \frac{23}{2}, \text{ ta được}$$

$$N = \left(y + \frac{9}{2}\right) \left(y - \frac{9}{2}\right) + 8 = y^2 - \frac{49}{4} = \left(y + \frac{7}{2}\right) \left(y - \frac{7}{2}\right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
 D &= \left(x^2 + 6x - \frac{23}{2} + \frac{7}{2}\right) \left(x^2 + 6x - \frac{23}{2} - \frac{7}{2}\right) = (x^2 + 7x - 8)(x^2 + 7x - 15) \\
 &= (x^2 - x + 8x - 8)(x^2 + 7x - 15) = [x(x - 1) + 8(x - 1)](x^2 + 7x - 15) \\
 &= (x - 1)(x + 8)(x^2 + 7x - 15).
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } N = (x - 1)(x + 8)(x^2 + 7x - 15). \quad \square$$

Bài 25. Tìm x , biết:

a $2x^2 - 3x = 0;$

b $x^2 - 7x + 6 = 0;$

c $6x^2 + x - 15 = 0.$

✍️ Lời giải

a Ta có

$$2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(2x - 3) \Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{3}{2}.$$

b Ta có

$$\begin{aligned}
 x^2 - 7x + 6 = 0 &\Rightarrow x^2 - x - 6x + 6 = 0 \\
 &\Rightarrow x(x - 1) - 6(x - 1) = 0 \\
 &\Rightarrow (x - 1)(x - 6) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x - 1 = 0 \text{ hoặc } x - 6 = 0 \\ \Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 6. \end{aligned}$$

Vậy $x = 1$ hoặc $x = 6$.

© Ta có

$$\begin{aligned} 6x^2 + x - 15 = 0 &\Rightarrow 6x^2 + 10x - 9x - 15 = 0 \\ &\Rightarrow 2x(3x + 5) - 3(3x + 5) = 0 \\ &\Rightarrow (3x + 5)(2x - 3) = 0 \\ &\Rightarrow x = -\frac{5}{3} \text{ hoặc } x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $x = -\frac{5}{3}$ hoặc $x = \frac{3}{2}$.

Bài 26. Tìm x , biết

$$x^3 + x^2 = 36.$$

✍ **Lời giải**

Ta có

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 = 36 &\Rightarrow x^3 + x^2 - 36 = 0 \\ &\Rightarrow x^3 - 27 + x^2 - 9 = 0 \\ &\Rightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + (x - 3)(x + 3) = 0 \\ &\Rightarrow (x - 3)(x^2 + 4x + 12) = 0. \end{aligned}$$

Vì $x^2 + 4x + 12 = (x + 2)^2 + 8 > 0$ nên $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$.

Vậy $x = 3$.

Bài 27. Tìm x , biết $x^2 - 2^{2019}x - x + 2^{2018}(2^{2018} + 1) = 6$.

✍ **Lời giải**

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 2^{2019}x - x + 2^{2018}(2^{2018} + 1) &= 6 \\ \Rightarrow x^2 - 2x \cdot 2^{2018} + (2^{2018})^2 - x + 2^{2018} - 6 &= 0 \\ \Rightarrow (x - 2^{2018})^2 - (x - 2^{2018}) - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $t = x - 2^{2018}$, khi đó bài toán trở thành

$$t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2t - 6 = 0$$

□

□

$$\begin{aligned} &\Rightarrow t(t-3) + 2(t-6) = 0 \\ &\Rightarrow (t-3)(t+2) = 0 \\ &\Rightarrow t = 3 \text{ hoặc } t = -2 \\ &\Rightarrow x = 3 + 2^{2018} \text{ hoặc } x = -2 + 2^{2018}. \end{aligned}$$

Vậy $x = 3 + 2^{2018}$ hoặc $x = -2 + 2^{2018}$. □

Bài 28. Tìm x , biết

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6) = 24.$$

✍ **Lời giải**

$$\begin{aligned} (x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6) = 24 &\Rightarrow [(x^2 + 6) - 5x] [(x^2 + 6) + 5x] = 24 \\ &\Rightarrow (x^2 + 6)^2 - (5x)^2 = 24 \\ &\Rightarrow x^4 + 12x^2 + 36 - 25x^2 - 24 = 0 \\ &\Rightarrow x^4 - 13x^2 + 12 = 0 \\ &\Rightarrow x^4 - x^2 - 12x^2 + 12 = 0 \\ &\Rightarrow x^2(x^2 - 1) - 12(x^2 - 1) = 0 \\ &\Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 12) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 = 1 \text{ hoặc } x^2 = 12 \\ &\Rightarrow x = \pm 1 \text{ hoặc } x = \pm\sqrt{12}. \end{aligned}$$

Vậy $x = \pm 1$ hoặc $x = \pm\sqrt{12}$. □

Bài 29 (Đề thi HSG8, huyện Củ Chi, TP Hồ Chí Minh năm 2016). Tìm x , biết

$$\star \text{ Lớp } (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12. \star$$

✍ **Lời giải**

Đặt $t = x^2 + x$, khi đó đề bài trở thành

$$\begin{aligned} t^2 + 4t = 12 &\Rightarrow t^2 + 4t + 4 - 16 = 0 \\ &\Rightarrow (t+2)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+6) = 0 \\ &\Rightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = -6 \\ &\Rightarrow x^2 + x = 2 \text{ hoặc } x^2 + x = -6 \\ &\Rightarrow (x-1)(x+2) = 0 \text{ hoặc } x^2 + x + 6 = 0. \end{aligned}$$

Vì $x^2 + x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0$ nên $(x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$.

Vậy $x = 1$ hoặc $x = -2$. □