PHAN NHẬT LINH

Phát triển

16 DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM 2023

Từ câu 35 đến 50 trong đề tham khảo của BGD năm 2023

CÂU HỎI
Gồm bộ câu hỏi đa dạng và có nhiều ý tưởng mới theo hướng ra đề BGD 2023

GIẢI CHI TIẾT
Được giải chi tiết 100%, dễ dàng phục vụ học tập và tra cứu

TRÌNH BÀY
Có phần câu hỏi riêng và giải chi tiết riêng

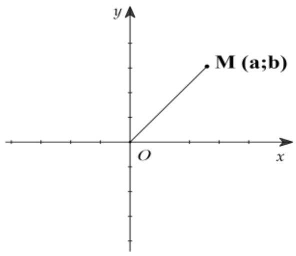
LUYỆN THI THPT QUỐC GIA 2023

DẠNG 1 TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Biểu diễn hình học số phức

Số phức $z = a + bi$ $\left(a,\ b \in \mathbb{R}\right)$ được biểu diễn bởi điểm $M\left(a;b\right)$ hay bởi $\vec{u} = \left(a;b\right)$ trong mặt phẳng phức với hệ tọa độ Oxy .



Tập hợp điểm biểu diễn số phức

Một số tập hợp điểm biểu diễn số phức z thường gặp:

- $ax + by + c = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường thẳng
- $x = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục tung *Oy*
- $y = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục hoành *Ox*
- $\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2 < R^2 \Rightarrow$ tập hợp điểm là *hình tròn* tâm $I\left(a;b\right)$, bán kính R
- $\left[\begin{array}{l}\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2 = R^2\\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ tập hợp điểm là *đường tròn* có tâm $I\left(a;b\right)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$
- $x > 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên phải trục tung
- $y < 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền phía dưới trục hoành
- $x < 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên trái trục tung
- $y > 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là phía trên trục hoành
- $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Parabol
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Elip
- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Hyperbol

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 35 – Đề tham khảo 2023. Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|z+2i\right| = 1$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là.

A. $\left(0;2\right)$. **B.** $\left(-2;0\right)$. **C.** $\left(0;-2\right)$. **D.** $\left(2;0\right)$.

✍ Lời giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết $\left|z+2i\right| = 1 \Rightarrow x^2 + \left(y+2\right)^2 = 1$.

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(0;-2\right)$, bán kính $R = 1$

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Cho các số phức z thỏa mãn $|iz-1|=|1+\sqrt{2}i|$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn (C). Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C) lần lượt là

A. $I(0;1)$; $R=3$. **B.** $I(0;1)$; $R=\sqrt{3}$. **C.** $I(0;-1)$; $R=\sqrt{3}$. **D.** $I(0;-1)$; $R=3$.

Câu 2: Cho số phức z thoả mãn $|z+6-2i|=4$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng toạ độ biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tìm toạ độ tâm I và bán kính R của đường tròn đó.

A. $I(-6;2)$, $R=16$. **B.** $I(6;-2)$, $R=4$.

C. $I(6;-2)$, $R=16$. **D.** $I(-6;2)$, $R=4$.

Câu 3: Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+1-2i|=3$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $I(-1;2)$. **B.** $I(-1;-2)$. **C.** $I(1;2)$. **D.** $I(1;-2)$.

Câu 4: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-1);B(-3;4)$ và điểm $M(a;b)$ biểu diễn số phức z. Biết số phức $w=(z+2i)(\overline{z}-4)$ là số thực và M nằm trên trung trực của AB.Tổng $S=a+b$ là

A. $S=-14$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$ **D.** $S=\dfrac{10}{3}$.

Câu 5: Cho số phức w có $|w|=\sqrt{3}$. Một tam giác có một đỉnh là điểm biểu diễn của w và hai đỉnh còn lại biểu diễn hai nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{z+w}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w}$. Diện tích của tam giác đó bằng

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 6: Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|\overline{z}+2-3i|=4$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $I(2;3)$. **B.** $I(-2;-3)$. **C.** $I(-2;3)$. **D.** $I(2;-3)$.

Câu 7: Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+(1+2i)^2|=4$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $I(-3;4)$. **B.** $I(-3;-4)$. **C.** $I(3;-4)$. **D.** $I(3;4)$.

Câu 8: Cho Gọi (C) là tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}-4|+4|z-\overline{z}|=8$. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi (C) là

A. 24. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 8.

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|1+z|=|i-z|$ là

A. $x-y=0$. **B.** $x+y-1=0$. **C.** $x-y+1=0$. **D.** $x+y=0$.

Câu 10: Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $\left|2z-3\bar{z}\right|\le 5$, và số phức z có phần thực không âm. Tính diện tích hình H.

A. 2π. **B.** 5π. **C.** $\dfrac{5\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{5\pi}{4}$.

Câu 11: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1+2i|\le 3$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=z(1+i)$ trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) là hình phẳng (H) có diện tích bằng

A. $S=9\pi$. **B.** $S=9$. **C.** $S=18\pi$. **D.** $S=18$.

Câu 12: Xét các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z-1+i}{(z+\bar{z})i+1}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=3z$ là một parabol có đỉnh

A. $I\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$. **B.** $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right)$. **C.** $I\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{33}{8}\right)$. **D.** $I\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$.

Câu 13: Cho số phức $w=(1+i)z+2$ với $|1+iz|=|z-2i|$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng Δ. Khoảng cách từ điểm $A(1;-2)$ đến Δ bằng

A. 0 **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14: Cho phương trình $z^3-(m+1)z^2+(m+1+mi)z-1-mi=0$ trong đó $z\in\mathbb{C}$, m là tham số thực. Số giá trị của tham số m để phương trình có 3 nghiệm phức phân biệt sao cho các điểm biểu diễn của các nghiệm trên mặt phẳng phức tạo thành một tam giác cân là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 15: Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|iz+1-2i|=3$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $I(-2;-1)$. **B.** $I(-2;1)$. **C.** $I(2;1)$. **D.** $I(2;-1)$.

Câu 16: Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+5-i|=2$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $I(2;3)$. **B.** $I(2;-3)$. **C.** $I(-2;-3)$. **D.** $I(-2;3)$.

Câu 17: Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z}{3-4i}+1+i\right|=2$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $I(7;-1)$. **B.** $I(-7;1)$. **C.** $I(-7;-1)$. **D.** $I(7;1)$.

Câu 18: Cho số phức z có $|z-1|=2$ và $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$ là một đường tròn, tâm và bán kính đường tròn đó là

A. $I\left(-3;\sqrt{3}\right)$, $R=4$. **B.** $I\left(3;-\sqrt{3}\right)$, $R=2$. **C.** $I\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$, $R=4$. **D.** $I\left(3;\sqrt{3}\right)$, $R=4$.

Câu 19: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2|=2$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=(1-i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 20: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{\bar{z}}{1-i}$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có tâm là

A. $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $I\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $I\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 21: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z+1-2i}{\bar{z}-2+3i}\right|=\sqrt{2}$ là

A. Đường tròn tâm $I(5;-8)$ bán kính $2\sqrt{17}$.

B. Đường tròn tâm $I(-5;8)$ bán kính $2\sqrt{17}$.

C. Đường tròn tâm $I(5;4)$ bán kính $2\sqrt{5}$.

D. Đường tròn tâm $I(-5\,;4)$ bán kính $2\sqrt{5}$.

Câu 22: Cho z_1 và z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z-5-3i|=5$, đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\,(r>0)$. Tính giá trị của biểu thức $T=(a+b)r$.

A. $T=96$. **B.** $T=64$. **C.** $T=6$. **D.** $T=12$.

Câu 23: Biết phương trình $z^2+mz+m^2-2=0$ (m là tham số thực) có hai nghiệm phức z_1,z_2. Gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1,z_2 và $z_0=i$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để diện tích tam giác ABC bằng 1?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Cho các số phức z thỏa mãn $|iz-1|=|1+\sqrt{2}i|$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn (C). Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C) lần lượt là

A. $I(0;1)$; $R=3$. **B.** $I(0;1)$; $R=\sqrt{3}$. **C.** $I(0;-1)$; $R=\sqrt{3}$. **D.** $I(0;-1)$; $R=3$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$. Theo bài ra: $|iz-1|=|1+\sqrt{2}i| \Leftrightarrow |i(x+yi)-1|=|1+\sqrt{2}i|$.

$\Leftrightarrow |-1-y+xi|=\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=3$.

Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.

Câu 2: Cho số phức z thoả mãn $|z+6-2i|=4$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng toạ độ biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tìm toạ độ tâm I và bán kính R của đường tròn đó.

A. $I(-6;2)$, $R=16$. **B.** $I(6;-2)$, $R=4$.

C. $I(6;-2)$, $R=16$. **D.** $I(-6;2)$, $R=4$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Theo đề bài ta có: $|x+yi+6-2i|=4 \Leftrightarrow |(x+6)+(y-2)i|=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2}=4 \Leftrightarrow (x+6)^2+(y-2)^2=16$.

Vậy tập điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-6;2)$, bán kính $R=4$.

Câu 3: Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+1-2i|=3$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $I(-1;2)$. **B.** $I(-1;-2)$. **C.** $I(1;2)$. **D.** $I(1;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi$ (với $x;y\in\mathbb{R}$). Ta có: $|z+1-2i|=3$

$\Leftrightarrow |(x+1)+(y-2)i|=3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=3 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=9$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$.

Câu 4: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-1);B(-3;4)$ và điểm $M(a;b)$ biểu diễn số phức z. Biết số phức $w=(z+2i)(\overline{z}-4)$ là số thực và M nằm trên trung trực của AB.Tổng $S=a+b$ là

A. $S=-14$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$ **D.** $S=\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-5;5)$.

Đường trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm $I\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$ có phương trình $(d): x-y+2=0$.

$M\in d \Rightarrow M(a;a+2)\Rightarrow z=a+(a+2)i$; $\overline{z}=a-(a+2)i$.

Khi đó $w=\left[a+(a+4)i\right]\left[a-4-(a+2)i\right]$

$=a(a-4)-a(a+2)i+(a-4)(a+4)i+(a+4)(a-2)$

w là số thực khi và chỉ khi $-a(a+2)+(a+4)(a-4)=0$

$\Leftrightarrow -a^2-2a+a^2-16=0 \Leftrightarrow a=-8\Rightarrow b=-6\Rightarrow a+b=-14$.

Câu 5: Cho số phức w có $|w|=\sqrt{3}$. Một tam giác có một đỉnh là điểm biểu diễn của w và hai đỉnh còn lại biểu diễn hai nghiệm của phương trình $\frac{1}{z+w}=\frac{1}{z}+\frac{1}{w}$. Diện tích của tam giác đó bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

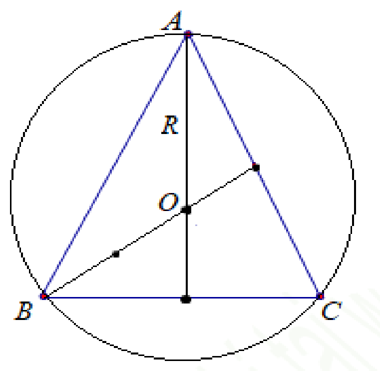
Điều kiện: $\begin{cases} z\neq 0\\ w\neq 0\end{cases}$

Ta có $\frac{1}{z+w}=\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\Leftrightarrow z.w=(z+w)w+(z+w)z \Leftrightarrow z^2+z.w+w^2=0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{w}\right)^2+\frac{z}{w}+1=0\Leftrightarrow \frac{z}{w}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\Leftrightarrow z=\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w=z_{1,2}$.

Lúc đó $|z_1|=|z_2|=\left|-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right||w|=|w|=\sqrt{3}$ và $w+z_1+z_2=0$.

Suy ra w, z_1, z_2 được biểu diễn bởi ba điểm A,B,C tạo thành một tam giác đều nằm trên đường tròn tâm O bán kính $R=\sqrt{3}$.



Tam giác ABC đều có đường cao $h=\frac{3}{2}R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, độ dài cạnh $a=\frac{2}{\sqrt{3}}.h=\frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{3\sqrt{3}}{2}=3$

Diện tích tam giác là $S_{ABC}=\frac{1}{2}a.h=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Câu 6: Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|\overline{z}+2-3i\right|=4$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $I(2;3)$. **B.** $I(-2;-3)$. **C.** $I(-2;3)$. **D.** $I(2;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi$ (với $x;y\in\mathbb{R}$). Suy ra $\overline{z}=x-yi$.

Ta có: $\left|\overline{z}+2-3i\right|=4\Leftrightarrow\left|(x+2)+(-y-3)i\right|=4$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}=4\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+3)^2=16$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(-2;-3)$, bán kính $R=4$.

Câu 7: Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|z+(1+2i)^2\right|=4$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $I(-3;4)$. **B.** $I(-3;-4)$. **C.** $I(3;-4)$. **D.** $I(3;4)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$ (với $x;y\in\mathbb{R}$).

Ta có: $\left|z+(1+2i)^2\right|=4\Leftrightarrow\left|z-3+4i\right|=4$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=4\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+4)^2=16$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(3;-4)$, bán kính $R=4$.

Câu 8: Cho Gọi (C) là tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|z+\overline{z}-4\right|+4\left|z-\overline{z}\right|=8$. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi (C) là

A. 24. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 8.

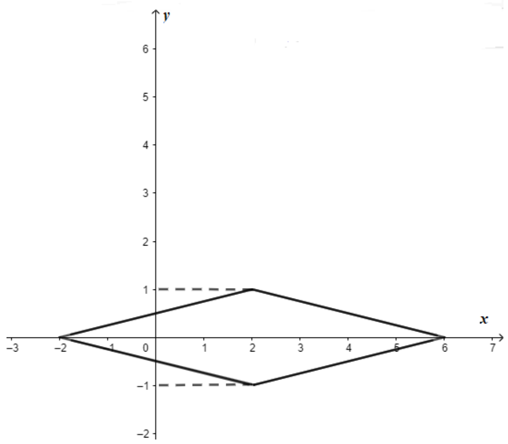
Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó, đẳng thức $\left|z+\overline{z}-4\right|+4\left|z-\overline{z}\right|=8\Leftrightarrow\left|2x-4\right|+4\left|2iy\right|=8$

$\Leftrightarrow 2\left|x-2\right|+8\left|y\right|=8\Leftrightarrow\left|x-2\right|+4\left|y\right|=4$

Ta được đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Đây là hình thoi có độ dài hai đường chéo là 2 ; 8 nên diện tích bằng (2.8) : 2 = 8.

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $z = x + yi \;\; (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|1+z| = |i-z|$ là

A. $x - y = 0$. **B.** $x + y - 1 = 0$. **C.** $x - y + 1 = 0$. **D.** $x + y = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $|1+z| = |i-z| \Leftrightarrow |1+x+yi| = |i-x-yi| \Leftrightarrow (1+x)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x + y = 0$.

Câu 10: Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $|2z - 3\bar{z}| \le 5$, và số phức z có phần thực không âm. Tính diện tích hình H.

A. 2π. **B.** 5π. **C.** $\dfrac{5\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{5\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi, \; (x, y \in \mathbb{R}, x \ge 0)$.

Ta có $|2(x+yi) - 3(x-yi)| \le 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 25y^2} \le 5 \Leftrightarrow x^2 + 25y^2 \le 25 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{1} \le 1$.

Xét elip $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{1} = 1$, có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là miền trong của Elip với $x \ge 0$.

Ta có $a = 5, \; b = 1$, nên diện tích hình H là $S = \dfrac{1}{2}.\pi.a.b = \dfrac{5\pi}{2}$.

Câu 11: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| \le 3$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z(1+i)$ trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) là hình phẳng (H) có diện tích bằng

A. $S = 9\pi$. **B.** $S = 9$. **C.** $S = 18\pi$. **D.** $S = 18$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|z - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |z(1+i) + (-1+2i)(1+i)| = 3|1+i| \Leftrightarrow |w - 3 + i| \le 3\sqrt{2}$.

Giả sử $w = x + yi \;\; (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |x - 3 + (y+1)i| \le 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 \le 18$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là hình tròn (H) tâm $I(3;1)$ và bán kính $R = \sqrt{18}$. Khi đó diện tích hình tròn là $S = \pi R^2 = 18\pi$.

Câu 12: Xét các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z - 1 + i}{(z + \bar{z})i + 1}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = 3z$ là một parabol có đỉnh

A. $I\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{9}{2}\right)$. **B.** $I\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{9}{2}\right)$. **C.** $I\left(\dfrac{3}{4}; -\dfrac{33}{8}\right)$. **D.** $I\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{9}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó $\dfrac{z - 1 + i}{(z + \bar{z})i + 1} = \dfrac{(a-1) + (b+1)i}{2ai + 1}$

Vì $\dfrac{z-1+i}{\left(z+\bar{z}\right)i+1}$ là số thực nên $\left(\left(a-1\right)+\left(b+1\right)i\right)\left(1-2ai\right)$ là số thực hay $-2a\left(a-1\right)+\left(b+1\right)=0$

Suy ra $2a^2-2a-b-1=0\left(*\right)$

Mà $w=3z$, gọi $w=x+yi$, suy ra: $\begin{cases} a=\dfrac{x}{3} \\ b=\dfrac{y}{3} \end{cases}$ thay vào biểu thức $(*)$ ta được

$$2\left(\frac{x}{3}\right)^2-2\frac{x}{3}-\frac{y}{3}-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x^2-2x-3$$

Do đó, tập hợp biểu biễn w là một parabol có đỉnh là $I\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$

Câu 13: Cho số phức $w=\left(1+i\right)z+2$ với $\left|1+iz\right|=\left|z-2i\right|$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng Δ. Khoảng cách từ điểm $A(1;-2)$ đến Δ bằng

A. 0 **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $w=\left(1+i\right)z+2 \Leftrightarrow z=\dfrac{w-2}{1+i}$, thay vào $\left|1+iz\right|=\left|z-2i\right|$ ta được:

$$\left|1+i\frac{w-2}{1+i}\right|=\left|\frac{w-2}{1+i}-2i\right| \Leftrightarrow \left|\frac{i\left(w-2\right)+1+i}{1+i}\right|=\left|\frac{w-2-2i-2i^2}{1+i}\right| \Leftrightarrow \left|i\left(w-2\right)+1+i\right|=\left|w-2i\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|i\left(w-2+\frac{1+i}{i}\right)\right|=\left|w-2i\right| \Leftrightarrow \left|w-2+1-i\right|=\left|w-2i\right| \Leftrightarrow \left|w-1-i\right|=\left|w-2i\right| \quad (1)$$

Gọi $w=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$, từ (1) ta có $\left|x+yi-1-i\right|=\left|x+yi-2i\right|$.

$$\Leftrightarrow \left|\left(x-1\right)+\left(y-1\right)i\right|=\left|x+\left(y-2\right)i\right| \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=x^2+\left(y-2\right)^2 \Leftrightarrow x-y+1=0.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w trên mặt phẳng phức là đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$.

Khi đó $d\left(A,\Delta\right)=\dfrac{\left|1-\left(-2\right)+1\right|}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}}=2\sqrt{2}.$

Câu 14: Cho phương trình $z^3-\left(m+1\right)z^2+\left(m+1+mi\right)z-1-mi=0$ trong đó $z\in\mathbb{C}$, m là tham số thực. Số giá trị của tham số m để phương trình có 3 nghiệm phức phân biệt sao cho các điểm biểu diễn của các nghiệm trên mặt phẳng phức tạo thành một tam giác cân là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình:

$$z^3-\left(m+1\right)z^2+\left(m+1+mi\right)z-1-mi=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z^2-mz+1+mi=0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z^2-i^2-(mz-mi)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ (z-i)(z+i-m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=i \\ z=m-i \end{array}\right.$.

Đặt $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(m;-1)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các nghiệm $z=1$, $z=i$, $z=m-i$ trên mặt phẳng phức.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(m-1;-1)$, $\overrightarrow{BC}=(m;-2)$

$AB=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{m^2+4}$, $AC=\sqrt{(m-1)^2+1}$.

Ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay $m\neq 2$.

Tam giác ABC cân $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AC=AB \\ BC=AB \\ AC=BC \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{(m-1)^2+1}=\sqrt{2} \\ \sqrt{m^2+4}=\sqrt{2} \\ \sqrt{(m-1)^2+1}=\sqrt{m^2+4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-2m=0 \\ -2m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $m\neq 2$ ta được $m\in\{0;-1\}$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn đề.

Câu 15: Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|iz+1-2i|=3$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $I(-2;-1)$. **B.** $I(-2;1)$. **C.** $I(2;1)$. **D.** $I(2;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$ (với $x;y\in\mathbb{R}$).

Ta có: $|i(z-i-2)|=3 \Leftrightarrow |i|.|z-i-2|=3 \Leftrightarrow |z-i-2|=3 \Leftrightarrow |(x-2)+(y-1)i|=3$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=3 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=9$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(2;1)$, bán kính $R=3$.

Câu 16: Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+5-i|=2$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $I(2;3)$. **B.** $I(2;-3)$. **C.** $I(-2;-3)$. **D.** $I(-2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi$ (với $x;y\in\mathbb{R}$). Ta có: $|(1+i)(z+2-3i)|=3 \Leftrightarrow |1+i|.|z+2-3i|=2$

$\Leftrightarrow |z+2-3i|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{2} \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=2$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(-2;3)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Câu 17: Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z}{3-4i}+1+i\right|=2$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $I(7;-1)$. **B.** $I(-7;1)$. **C.** $I(-7;-1)$. **D.** $I(7;1)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi$ (với $x; y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $\left|\dfrac{z}{3-4i}+1+i\right|=2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z+7-i}{3-4i}\right|=2 \Leftrightarrow \dfrac{|z+7-i|}{|3-4i|}=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+7)^2+(y-1)^2}=10$

$\Leftrightarrow (x+7)^2+(y-1)^2=100$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(-7;1)$, bán kính $R=10$.

Câu 18: Cho số phức z có $|z-1|=2$ và $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$ là một đường tròn, tâm và bán kính đường tròn đó là

A. $I\left(-3;\sqrt{3}\right)$, R = 4. **B.** $I\left(3;-\sqrt{3}\right)$, R = 2. **C.** $I\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$, R = 4. **D.** $I\left(3;\sqrt{3}\right)$, R = 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2 \Leftrightarrow w=\left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)+3+\sqrt{3}i \Leftrightarrow w-\left(3+\sqrt{3}i\right)=\left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)$.

Lấy môđun hai vế, ta được $\left|w-\left(3+\sqrt{3}i\right)\right|=\underbrace{\left|1+\sqrt{3}i\right|}_{2}.\underbrace{|z-1|}_{2}=2.2=4$.

Biểu thức $\left|w-\left(3+\sqrt{3}i\right)\right|=4$ chứng tỏ tập hợp các số phức w là một đường tròn có tâm $I\left(3;\sqrt{3}\right)$ và bán kính $R=4$.

Câu 19: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2|=2$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\mathrm{w}=(1-i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta đặt $\mathrm{w}=a+bi$

$\Rightarrow a+bi=(1-i)z+i \Rightarrow z=\dfrac{a+(b-1)i}{1-i}=\dfrac{a-b+1}{2}+\dfrac{a+b-1}{2}i$

Theo giả thết $|z-2|=2$, nên ta có:

$\left(\dfrac{a-b+1}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{a+b-1}{2}\right)^2=4 \Leftrightarrow (a-b-3)^2+(a+b-1)^2=16$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+9-2ab-6a+6b+a^2+b^2+1+2ab-2a-2b=16$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2-8a+4b-6=0 \Leftrightarrow a^2+b^2-4a+2b-3=0$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của w là đường tròn có bán kính $R=\sqrt{2^2+(-1)^2-(-3)}=2\sqrt{2}$

Cách 2: Ta có: $\mathrm{w}=(1-i)z+i \Rightarrow z=\dfrac{\mathrm{w}-i}{1-i}$

Mà $|z-2|=2 \Rightarrow \left|\dfrac{\mathrm{w}-i}{1-i}-2\right|=2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\mathrm{w}-2+i}{1-i}\right|=2 \Leftrightarrow |\mathrm{w}-2+i|=2|1-i|=2\sqrt{2}$ (*)

Đặt $\mathrm{w}=x+yi$ khi đó $(*) \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$

Đây là đường tròn có tâm $I(2;-1),\ R=2\sqrt{2}$.

Câu 20: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{\bar{z}}{1-i}$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có tâm là::

A. $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $I\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $I\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Do $w=\dfrac{\bar{z}}{1-i}\Rightarrow \bar{z}=w(1-i)$.

Theo giả thiết, $|z-1+2i|=2\Leftrightarrow \left|\overline{z-1+2i}\right|=2\Leftrightarrow |\bar{z}-1-2i|=2\Leftrightarrow |w(1-i)-1-2i|=2$

$\Leftrightarrow |1-i|\left|w-\dfrac{1+2i}{1-i}\right|=2\Leftrightarrow \sqrt{2}.\left|w+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i\right|=2\Leftrightarrow \left|w+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i\right|=\sqrt{2}$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 21: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z+1-2i}{\bar{z}-2+3i}\right|=\sqrt{2}$ là

A. Đường tròn tâm $I(5;-8)$ bán kính $2\sqrt{17}$.

B. Đường tròn tâm $I(-5;8)$ bán kính $2\sqrt{17}$.

C. Đường tròn tâm $I(5;4)$ bán kính $2\sqrt{5}$.

D. Đường tròn tâm $I(-5\ ;4)$ bán kính $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi\ \Rightarrow\ \bar{z}=x-yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$.

$\left|\dfrac{z+1-2i}{\bar{z}-2+3i}\right|=\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ |z+1-2i|\ =\ \sqrt{2}\,|\bar{z}-2+3i|$

$\Leftrightarrow\ |(x+1)+(y-2)i|\ =\ \sqrt{2}\,|(x-2)+(3-y)i|$.

$\Leftrightarrow\ (x+1)^2+(y-2)^2\ =\ 2(x-2)^2+2(y-3)^2$.

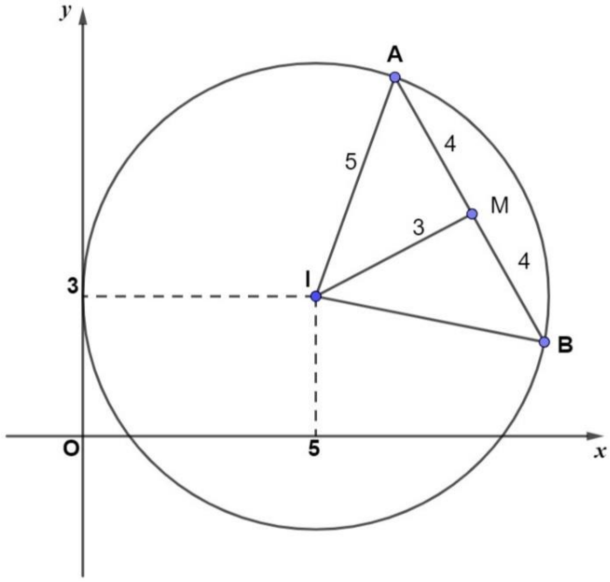
$\Leftrightarrow\ x^2+y^2-10x-8y+21=0\Leftrightarrow (x-5)^2+(y-4)^2=20$

Tập hợp các điểm M là đường tròn $(x-5)^2+(y-4)^2=20$ với tâm $I(5;4)$ bán kính $2\sqrt{5}$.

Câu 22: Cho z_1 và z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z-5-3i|=5$, đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\mathrm{w}=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\,(r>0)$. Tính giá trị của biểu thức $T=(a+b)r$.

A. $T=96$. **B.** $T=64$. **C.** $T=6$. **D.** $T=12$.

Lời giải



Gọi $A;B$ lần lượt là điểm biểu diễn của $z_1;z_2$. Từ giả thiết $|z-5-3i|=5$ suy ra $A;B$ thuộc đường tròn tâm $I(5;3)$, bán kính 5 và $|z_1-z_2|=8$ suy ra $AB=8$.

Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Khi đó ta tính được $IM=3$.

Mặt khác, M là điểm biểu diễn của số phức $\frac{z_1+z_2}{2}$, I là điểm biểu diễn của số phức $5+3i$, thay vào ta có biểu thức $\left|\frac{z_1+z_2}{2}-5-3i\right|=3 \Leftrightarrow |(z_1+z_2)-10-6i|=6$

Vậy điểm biểu diễn của z_1+z_2 nằm trên đường tròn tâm $J(10;6)$; $r=6$.

Khi đó $a=10$; $b=6$; $r=6$. Vậy $(a+b).r=96$.

Câu 23: Biết phương trình $z^2+mz+m^2-2=0$ (m là tham số thực) có hai nghiệm phức z_1,z_2. Gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1,z_2 và $z_0=i$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để diện tích tam giác ABC bằng 1?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\Delta=m^2-4(m^2-2)=-3m^2+8$

Trường hợp 1: $\Delta>0 \Leftrightarrow -3m^2+8>0 \Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{6}}{3}<m<\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt là z_1,z_2.

Vì $A,B\in Ox$ nên $AB=|z_1-z_2|=\sqrt{(z_1-z_2)^2}=\sqrt{(z_1+z_2)^2-4z_1z_2}=\sqrt{-3m^2+8}$.

Mặt khác, ta có $C(0;1)\Rightarrow d(C;AB)=1$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C;AB)=\frac{\sqrt{-3m^2+8}}{2}=1 \Leftrightarrow \boxed{m=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}}(n)$.

Trường hợp 2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 8 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \\ m < \dfrac{-2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức liên hợp là $z_{1,2} = \dfrac{-m + i\sqrt{|\Delta|}}{2}$.

Ta có: $AB = |z_1 - z_2| = \left|i\sqrt{|\Delta|}\right| = \sqrt{|-3m^2 + 8|} = \sqrt{3m^2 - 8}$ và $C(0;1)$.

Phương trình đường thẳng AB là $x + \dfrac{m}{2} = 0$ nên $d(C;AB) = \dfrac{|m|}{2}$.

Do đó, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.d(C;AB) = \dfrac{|m|\sqrt{3m^2 - 8}}{4} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 = 4 \\ m^2 = -\dfrac{4}{3} \text{(VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Vậy có 4 giá trị thực của tham số m thỏa mãn đề bài.

DẠNG 2 VIẾT PTĐT ĐI QUA HAI ĐIỂM

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Để viết một phương trình đường thẳng thì ta cần một điểm đi qua và một vectơ chỉ phương của nó.

- Đường thẳng d đi qua điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và nhận $\vec{u}=\left(a;b;c\right)$ là một vectơ chỉ phương thì đường thẳng d có phương trình là: $d:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt,\\z=z_0+ct\end{cases}\quad\left(t\in\mathbb{R}\right)$
- Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B thì nó nhận $\overrightarrow{AB}$ là một vectơ chỉ phương.

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 46 – Đề tham khảo 2023. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M\left(1;-1;-1\right)$ và $N\left(5;5;1\right)$. Đường thẳng MN có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=5+2t\\y=5+3t\\z=-1+t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=5+t\\y=5+2t\\z=1+3t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=-1+t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-1+3t\end{cases}$

Lời giải

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{MN}=\left(4;6;2\right)=2\left(2;3;1\right)$.

Đường thẳng MN qua $M\left(1;-1;-1\right)$ nhận $\overrightarrow{MN}=\left(2;3;1\right)$ làm vectơ chỉ phương

Phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=-1+t\end{cases}$.

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $E(-1;0;2)$ và $F(2;1;-5)$. Phương trình đường thẳng EF là

A. $\begin{cases}x=1+3t\\y=t\\z=-2-7t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1+3t\\y=t\\z=2-7t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-2-3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-1+t\\y=t\\z=2+3t\end{cases}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $P\left(1;1;-1\right)$ và $Q\left(2;3;2\right)$. Phương trình đường thẳng PQ là

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-1;-1)$ và $N(5;5;1)$. Đường thẳng MN có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=5+2t \\ y=5+3t \\ z=-1+t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=5+t \\ y=5+2t \\ z=1+3t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=-1+t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-1+3t \end{cases}$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-2)$ và $B(3;-3;1)$. Đường thẳng AB có phương trình là

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{3}$. **B.** $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-3}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{3}$. **D.** $\frac{x+3}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{3}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm điểm $A(4;-3;2)$, $B(6;1;-7)$, $C(2;8;-1)$. Đường thẳng qua gốc toạ độ O và trọng tâm tam giác ABC có phương trình là

A. $\frac{x}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-3}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$. **C.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$. **D.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ΔABC có $A(1;0;-2)$, $B(2;-2;1)$ và $C(0;0;1)$. Đường trung tuyến AM có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+3t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=-t \\ z=-2+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=-1-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=-t \\ z=-2+3t \end{cases}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x+y+2z+1=0$. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha);(\beta)$ có phương trình

A. $\Delta: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z}{2}$. **B.** $\Delta: \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z}{2}$.

C. $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$. **D.** $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(5;-3;2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$. Tìm phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc (P).

A. $\frac{x+5}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{1}$. **B.** $\frac{x-5}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$.

C. $\frac{x-6}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-3}{1}$. **D.** $\frac{x+5}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;-5)$, hai mặt phẳng $(P): x-y+z-4=0$ và $(Q): 2x+y+z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A đồng thời Δ song song với hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $\Delta: \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{-3}$. **B.** $\Delta: \frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-5}{-3}$.

C. $\Delta: \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{-3}$. **D.** $\Delta: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{3}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;0), B(2;-1;3), C(0;-1;1)$. Đường trung tuyến AM của tam giác ABC có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2+t \\ z=2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-2 \\ z=-2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=-2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ z=2t \end{cases}$.

Câu 11: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): z-1=0$ và $(Q): x+y+z-3=0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt đường thẳng $d': \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$ và vuông góc với đường thẳng Δ. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3-t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Delta': \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ'.

A. $\begin{cases} x=-1-t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-t \\ y=1+t \\ z=3+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1-t \\ y=1-t \\ z=3+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1-t \\ y=1+t \\ z=3+t \end{cases}$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+y+z=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+3}{2}$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P), cắt và vuông góc với d. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của Δ?

A. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=3-5t \\ z=3-7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=5-5t \\ z=4-7t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1-5t \\ z=-4-7t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=7-5t \\ z=2-7t \end{cases}$.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có $A(0;0;2), B(3;0;5), C(1;1;1), D(4;1;2)$. Phương trình đường cao kẻ từ D của tứ diện là

A. $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

C. $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Câu 15: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm $A(1;3;-1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng Δ.

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OE}=5\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}, \overrightarrow{OF}=\vec{j}-3\vec{k}$. Đường thẳng đi qua hai điểm E và F có phương trình là

A. $\begin{cases}x=5t\\y=1+3t\\z=-3+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=5\\y=4+t\\z=-2-3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=5t\\y=1+3t\\z=-3-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-5t\\y=1+3t\\z=-3+t\end{cases}$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=2t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;-2;1), B(-2;2;1), C(1;-2;2)$. Đường phân giác trong của góc A có một véctơ chỉ phương $\vec{u}(3;a;b)$. Tính $a-b$.

A. 1. **B.** -9. **C.** -1. **D.** 9.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;7;0), B(3;0;3)$. Phương trình đường phân giác trong của góc AOB của tam giác AOB là

A. $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{3}$. **B.** $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$. **C.** $\frac{x}{6}=\frac{y}{7}=\frac{z}{5}$. **D.** $\frac{x}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z}{4}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(3;4;5)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-14=0$. Gọi Δ là một đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên Δ. Biết rằng khi $AH=BK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=4+t\\y=5-2t\\z=1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=4-t\\y=5+2t\\z=t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=4+t\\y=5-2t\\z=t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=4-t\\y=5+2t\\z=1\end{cases}$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2,-2,3); B(1,3,4); C(3,-1,4)$. Phương trình đường phân giác góc BAC là.

A. $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{2}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+6}{4}=\frac{z-1}{2}$.

C. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{2}$. **D.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{2}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;0)$, $B(1;1;1)$, $C(2;-3;2)$. Tập hợp tất cả các điểm M cách đều ba điểm A, B, C là một đường thẳng d. Phương trình tham số của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=-8-3t \\ y=t \\ z=15+7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-8+3t \\ y=t \\ z=15-7t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-8+3t \\ y=-t \\ z=-15-7t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-8+3t \\ y=t \\ z=15+7t \end{cases}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1), B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (α) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $E(-1;0;2)$ và $F(2;1;-5)$. Phương trình đường thẳng EF là

A. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=t \\ z=-2-7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=t \\ z=2-7t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=-2-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=t \\ z=2+3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng EF có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{EF}=(3;1;-7)$

Điểm $E(-1;0;2)\in EF$.

Vậy đường thẳng EF có phương trình tham số là: $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=t \\ z=2-7t \end{cases}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $P(1;1;-1)$ và $Q(2;3;2)$. Phương trình đường thẳng PQ là

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng PQ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{PQ}=(1;2;3)$.

Điểm $P(1;1;-1)\in PQ$.

Vậy đường thẳng PQ có phương trình là: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-1;-1)$ và $N(5;5;1)$. Đường thẳng MN có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=5+2t \\ y=5+3t \\ z=-1+t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=5+t \\ y=5+2t \\ z=1+3t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=-1+t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-1+3t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{MN}=(4;6;2)=2(2;3;1)$.

Đường thẳng MN qua $M(1;-1;-1)$ nhận $\overrightarrow{MN}=(2;3;1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-2)$ và $B(3;-3;1)$. Đường thẳng AB có phương trình là

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{3}$. **B.** $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-3}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{3}$. **D.** $\frac{x+3}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;3)=-(-2;3;-3)$.

Đường thẳng AB đi qua $B(3;-3;1)$, nhận $\vec{u}=(-2;3;-3)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-3}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm điểm $A(4;-3;2)$, $B(6;1;-7)$, $C(2;8;-1)$. Đường thẳng qua gốc toạ độ O và trọng tâm tam giác ABC có phương trình là

A. $\frac{x}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-3}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$. **C.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$. **D.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow G(4;2;-2)$.

Đường thẳng OG có một véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{OG}=(4;2;-2)$

$\Rightarrow \vec{u}=(2;1;-1)$ cũng là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng OG.

Vậy phương trình đường thẳng OG là: $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ΔABC có $A(1;0;-2)$, $B(2;-2;1)$ và $C(0;0;1)$. Đường trung tuyến AM có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+3t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=-t \\ z=-2+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=-1-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=-t \\ z=-2+3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Do M là trung điểm của BC nên $M(1;-1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(0;-1;3)$.

Đường thẳng AM đi qua $A(1;0;-2)$, nhận $\overrightarrow{AM}=(0;-1;3)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\begin{cases} x=1 \\ y=-t \\ z=-2+3t \end{cases}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x+y+2z+1=0$. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha);(\beta)$ có phương trình

A. $\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z}{2}$. **B.** $\Delta: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z}{2}$.

C. $\Delta: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $\Delta: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải

Chọn C

$\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$ đi qua $M(2;1;0)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;1;-2)$.

$(\beta): x+y+2z+1=0$ có VTPT $\vec{n}=(1;1;2)$.

(α) đi qua $M(2;1;0)$ và có VTPT $\left[\vec{u};\vec{n}\right]=(4;-4;0)$ nên chọn $\vec{n}=(1;-1;0)$.

Phương trình (α): $(x-2)-(y-1)=0 \Leftrightarrow x-y-1=0$.

Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha);(\beta)$. Ta có:

D đi qua $N(0;-1;0)$ và có VTCP $\left[\vec{n};\overrightarrow{n_\alpha}\right]=(2;2;-2)$ nên chọn $\vec{u}=(1;1;-1)$.

Phương trình d : $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(5;-3;2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$. Tìm phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc (P).

A. $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$. **B.** $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

C. $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$. **D.** $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải

Chọn C

d qua điểm $M(5;-3;2)$ và vuông góc (P) nhận $\vec{u}=(1;-2;1)$ là vtcp có dạng $\begin{cases} x=5+t \\ y=-3-2t \\ z=2+t \end{cases}$.

Cho $t=1 \Rightarrow N(6;-5;3)\in d \Rightarrow d: \dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;-5)$, hai mặt phẳng $(P): x-y+z-4=0$ và $(Q): 2x+y+z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A đồng thời Δ song song với hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $\Delta: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-3}$. **B.** $\Delta: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-5}{-3}$.

C. $\Delta: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+5}{-3}$. **D.** $\Delta: \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_1}=(1;-1;1)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\overrightarrow{n_2}=(2;1;1)$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\neq\frac{-1}{1}\Rightarrow \overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ không cùng phương.

Ta có: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(-2;1;3)$.

Đường thẳng Δ đi qua $A(3;1;-5)$ và nhận vectơ $\vec{n}=(-2;1;3)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{-3}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;0),B(2;-1;3),C(0;-1;1)$. Đường trung tuyến AM của tam giác ABC có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=1\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-2t\\y=-2\\z=-2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-2\\z=-2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Có M là trung điểm của $BC\Rightarrow M(1;-1;2)$.

$\overrightarrow{AM}=(0;1;2)$ là một véctơ chỉ phương của đường trung tuyến AM.

Điểm $A(1;-2;0)\in AM$.

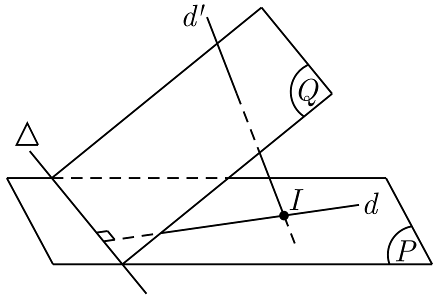
Vậy đường trung tuyến AM có phương trình tham số là: $\begin{cases}x=1\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}$.

Câu 11: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): z-1=0$ và $(Q): x+y+z-3=0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt đường thẳng $d': \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$ và vuông góc với đường thẳng Δ. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=3+t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3-t\\y=t\\z=1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+t\\y=t\\z=1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=-t\\z=1+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $\vec{n}_P=(0;0;1)$ và $\vec{n}_Q=(1;1;1)$ lần lượt là véctơ pháp tuyến của (P) và (Q).

Do $\Delta=(P)\cap(Q)$ nên Δ có một véctơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(-1;1;0)$.

Đường thẳng d nằm trong (P) và $d\perp\Delta$ nên d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_P,\vec{u}_\Delta\right]=(-1;-1;0)$.

Gọi $d':\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$ và $I=d'\cap d\Rightarrow I=d'\cap(P)$

Xét hệ phương trình $\begin{cases}z-1=0\\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=1\\ y=0\\ x=3\end{cases}\Rightarrow I(3;0;1)$.

Do đó phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=3+t\\ y=t\\ z=1\end{cases}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Delta':\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ'.

A. $\begin{cases}x=-1-t\\ y=1+t\\ z=1+3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-t\\ y=1+t\\ z=3+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-1-t\\ y=1-t\\ z=3+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-1-t\\ y=1+t\\ z=3+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

+) VTCP của Δ,Δ' lần lượt là $\vec{u}=(3;2;1)$ và $\vec{v}=(1;3;-2)$; $[\vec{u},\vec{v}]=(-7;7;7)$

+) Vì d vuông góc với Δ và Δ' nên $\vec{u}_d=(-1;1;1)$.

+) d đi qua $M(-1;1;3)$ nên $d:\begin{cases}x=-1-t\\ y=1+t\\ z=3+t\end{cases}$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+y+z=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+3}{2}$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P), cắt và vuông góc với d. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của Δ?

A. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=3-5t \\ z=3-7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=5-5t \\ z=4-7t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1-5t \\ z=-4-7t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=7-5t \\ z=2-7t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Do Δ nằm trong nằm trong (P) và vuông góc với d nên Δ có véctơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{u_d}\right]=(4;-5;-7)$$

Gọi $A=\Delta\cap d$ thì $A=(P)\cap d\Rightarrow A(1;0;-3)$

Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=1+4t \\ y=0-5t \\ z=-3-7t \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=5-5t \\ z=4-7t \end{cases}$

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;1)$, $D(4;1;2)$. Phương trình đường cao kẻ từ D của tứ diện là

A. $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

B. $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

C. $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

D. $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;0;3),\overrightarrow{AC}=(1;1;-1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;6;3)\Rightarrow\vec{n}_{(ABC)}=(1;-2;-1)$

Gọi H là hình chiếu của D lên mặt phẳng (ABC). Khi đó đường thẳng DH có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_{DH}=\vec{n}_{(ABC)}=(1;-2;-1)$

Phương trình đường cao DH có dạng: $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Câu 15: **10.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm $A(1;3;-1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng Δ.

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{-1}$.

B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

D. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Gọi B là giao điểm của hai đường thẳng d và Δ.

Vì $B\in\Delta$ nên tọa độ $B(1+t\ ;\ -t\ ;\ -1+t)$. Khi đó $\overrightarrow{BA}=(-t;t+3;-t)$.

Đường thẳng Δ có một vec tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-1;1)$.

$d\perp\Delta\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra $\overrightarrow{BA}=(1\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

Do đó đường thẳng d đi qua điểm A và nhận $\overrightarrow{BA}$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Cách 2: Suy luận nhanh

VTCP của Δ là $\overrightarrow{u_{\Delta}}=(1;-1;1)$.

d vuông góc với đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{\Delta}}.\overrightarrow{u_d}=0$. Chỉ có đáp án C thỏa mãn.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OE}=5\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}, \overrightarrow{OF}=\vec{j}-3\vec{k}$. Đường thẳng đi qua hai điểm E và F có phương trình là

A. $\begin{cases}x=5t\\y=1+3t\\z=-3+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=5\\y=4+t\\z=-2-3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=5t\\y=1+3t\\z=-3-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-5t\\y=1+3t\\z=-3+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{OE}=5\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}\Rightarrow E(5;4;-2)$; $\overrightarrow{OF}=\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow F(0;1;-3)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm E và F có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{FE}=(5;3;1)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm E và F là: $\begin{cases}x=5t\\y=1+3t\\z=-3+t\end{cases}$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=2t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng MN có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN}=(2;2;-2)$

$\Rightarrow \vec{u}=(1;1;-1)$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng MN.

Điểm $M(1;0;1)\in MN$.

Vậy đường thẳng MN có phương trình tham số là: $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;-2;1), B(-2;2;1), C(1;-2;2)$. Đường phân giác trong của góc A có một véctơ chỉ phương $\vec{u}(3;a;b)$. Tính $a-b$.

A. 1. **B.** -9. **C.** -1. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-3;4;0) \Rightarrow AB = 5$

$\overrightarrow{AC}(0;0;1) \Rightarrow AC = 1$.

Một VTCPcủa đường phân giác trong của góc A là:

$\vec{a} = \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{AC}\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5};1\right) \Rightarrow \vec{u}(3;-4;-5) \Rightarrow a = -4$; $b = -5 \Rightarrow a - b = 1$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;7;0)$, $B(3;0;3)$. Phương trình đường phân giác trong của góc AOB của tam giác AOB là

A. $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$. **B.** $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$. **C.** $\frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}$. **D.** $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (1;7;0) \Rightarrow OA = 5\sqrt{2}; \overrightarrow{OB} = (3;0;3) \Rightarrow OB = 3\sqrt{2}$.

Đường phân giác trong của góc AOB của tam giác AOB có một véctơ chỉ phương:

$\vec{a} = \frac{1}{OA}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{OB}\overrightarrow{OB} = \left(\frac{6}{5\sqrt{2}};\frac{7}{5\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

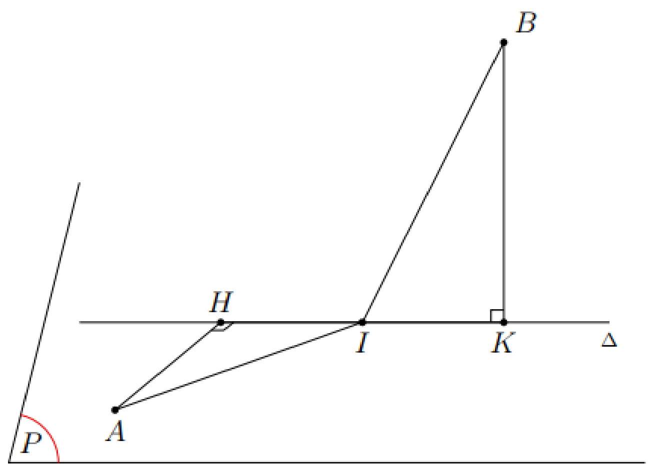
Dễ thấy $\vec{u}(6;7;5)$ cũng là một VTCP của đường phân giác trong của góc AOB

Vậy phương trình đường phân giác trong góc $AOB: \frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(3;4;5)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$. Gọi Δ là một đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên Δ. Biết rằng khi $AH = BK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 5 + 2t \\ z = t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$.

Lời giải



Ta thấy $A \in (P), B \notin (P)$.

Gọi I là trung điểm của $HK \Rightarrow I \in (P)$.

Ta có $\Delta BKI = \Delta AHI\,(c-g-c) \Rightarrow IA = IB \Rightarrow I$ luôn nằm trong mặt phẳng trung trực (Q) của đoạn AB. Do đó $I \in d = (P) \cap (Q)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua trung điểm $J(2;3;4)$ của AB và nhận $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1;1;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên $(Q): x + y + z - 9 = 0$.

Xét hệ $\begin{cases} x + y + z - 9 = 0 \\ x + 2y + 3z - 14 = 0 \end{cases}$.

Chọn $z = 0$ ta được $\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ x + 2y - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$. Suy ra $M(4;5;0) \in d$.

Mặt phẳng $(Q): x + y + z - 9 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q} = (1;1;1)$.

Mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (1;2;3)$.

Đường thẳng d đi qua $M(4;5;0)$, nhận $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_P}\right] = (1;-2;1)$ làm véc tơ chỉ phương nên d phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$.

Vậy $d: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2,-2,3); B(1,3,4); C(3,-1,4)$. Phương trình đường phân giác góc BAC là.

A. $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{2}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-1}{2}$.

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{2}$.

D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử đường phân giác trong của góc BAC cắt cạnh BC tại D.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (2,-4,0)$.

Suy ra đường thẳng BC là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 4 \end{cases}$. $D \in BC \Rightarrow D(1 + 2t, 3 - 4t, 4)$.

$\overrightarrow{AB} = (-1,5,1) \Rightarrow AB = \sqrt{27}$; $\overrightarrow{AC} = (1,1,1) \Rightarrow AC = \sqrt{3}$.

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = 3 \Rightarrow DB = 3DC \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -3\overrightarrow{DC}.$$

Ta có: $\overrightarrow{DB} = (-2t, 4t, 0)$; $\overrightarrow{DC} = (2 - 2t, -4 + 4t, 0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t=-6+6t \\ 4t=12-12t \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{3}{4} \Rightarrow D\left(\frac{5}{2},0,4\right) \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{2},2,1\right)=\frac{1}{2}(1,4,2).$$

Nên chọn VTCP là $\vec{u}=(1;4;2)$.

Vậy phương trình đường thẳng AD là $\begin{cases} x=2+t \\ y=-2+4t \\ z=3+2t \end{cases}$.

Vậy $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-3}{2}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;0)$, $B(1;1;1)$, $C(2;-3;2)$. Tập hợp tất cả các điểm M cách đều ba điểm A, B, C là một đường thẳng d. Phương trình tham số của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=-8-3t \\ y=t \\ z=15+7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-8+3t \\ y=t \\ z=15-7t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-8+3t \\ y=-t \\ z=-15-7t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-8+3t \\ y=t \\ z=15+7t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-1;1)$; $\overrightarrow{AC}=(3;-5;2)$.

Ta thấy $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

M cách đều hai điểm A, B nên điểm M nằm trên mặt trung trực của AB.

M cách đều hai điểm B, C nên điểm M nằm trên mặt trung trực của AC.

Do đó tập hợp tất cả các điểm M cách đều ba điểm A, B, C là giao tuyến của hai mặt trung trực

của AB và AC.

Gọi (P), (Q) lần lượt là các mặt phẳng trung trực của AB và AC.

$K\left(0;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm AB; $N\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right)$ là trung điểm AC.

(P) đi qua K và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;-1;1)$ làm véctơ pháp tuyến nên phương trình của (P)

$2x-\left(y-\frac{3}{2}\right)+\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$ hay $2x-y+z+1=0$.

(Q) đi qua N và nhận $\overrightarrow{AC}=(3;-5;2)$ làm véctơ pháp tuyến nên phương trình của (Q)

$3\left(x-\frac{1}{2}\right)-5\left(y+\frac{1}{2}\right)+2(z-1)=0$ hay $3x-5y+2z-6=0$.

Ta có $d:\begin{cases} 2x-y+z+1=0 \\ 3x-5y+2z-6=0 \end{cases}$

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;-1;-7)$ Nên d có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(-3;1;7)$

Cho $y=0$ ta sẽ tìm được $x=-8$, $z=15$ nên điểm $I(-8;0;15)\in d$.

Vậy $d:\begin{cases} x=-8-3t \\ y=t \\ z=15+7t \end{cases}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1), B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (α) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$.
B. $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$.
D. $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Vì mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B nên d nằm trong (P) với (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

(P) đi qua trung điểm $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};1\right)$ của AB và nhận $\overrightarrow{BA}=(3;1;0)$ làm một vectơ pháp tuyến có phương trình là $3x+y-7=0$.

d là giao tuyến của (P) và (α) nên một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{n_{(\alpha)}}\right]=(1;-3;2)$.

DẠNG 3 TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẲNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$, khi đó:

- Hình chiếu của 1 điểm lên mặt phẳng (P)

  Điểm H là hình chiếu của điểm M trên $(P): \begin{cases} \overrightarrow{MH}, \vec{n} \text{ cung phuong} \\ H \in (P) \end{cases}$

- Điểm đối xứng của 1 điểm qua mặt phẳng (P)

  Điểm M' đối xứng với điểm M qua $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 37 – Đề tham khảo 2023. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(1;2;-3)$. **C.** $(-1;-2;-3)$. **D.** $(-1;2;3)$.

✍ **Lời giải**

Chọn A

Tọa độ hình chiếu của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxz) là $(1;0;3)$. Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(1;-2;3)$.

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-5;7)$. Điểm M' đối xứng với điểm M qua mặt phẳng Oxy có tọa độ là:

A. $(2;-5;-7)$. **B.** $(2;5;7)$. **C.** $(-2;-5;7)$. **D.** $(-2;5;7)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-6;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+3t \\ y=-2-2t \\ z=t \end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên d. Khi đó toạ độ điểm H là:

A. $H(1;-2;3)$. **B.** $H(4;-4;1)$. **C.** $H(1;2;1)$. **D.** $H(-8;4;3)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-5y+2z+8=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=7+5t \\ y=-7+t \\ z=6-5t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Tìm phương trình đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng d qua mặt phẳng (P).

A. $\Delta:\begin{cases}x=-5+5t\\y=13+t\\z=-2-5t\end{cases}$. **B.** $\Delta:\begin{cases}x=-17+5t\\y=33+t\\z=66-5t\end{cases}$. **C.** $\Delta:\begin{cases}x=-11+5t\\y=23+t\\z=32-5t\end{cases}$. **D.** $\Delta:\begin{cases}x=13+5t\\y=-17+t\\z=-104-5t\end{cases}$.

Câu 4: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(3;0;0), B(0;3;0), C(0;0;3)$. Phương trình hình chiếu của đường thẳng OA trên mặt phẳng (ABC) là

A. $\begin{cases}x=3-2t\\y=t\\z=t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+4t\\y=t\\z=t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+t\\y=0\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(2;1;0)$. **B.** $(0;0;-1)$. **C.** $(2;0;0)$. **D.** $(0;1;0)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho điểm $A(-3;1;2)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy là

A. $(3;-1;-2)$. **B.** $(3;-1;2)$. **C.** $(3;1;-2)$. **D.** $(-3;-1;2)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho sáu điểm $A(1;2;3),$ $B(2;-1;1),$ $C(3;3;-3)$ và A', B', C' thỏa mãn $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}.$ Nếu G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ thì G' có tọa độ là

A. $\left(2;\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(2;-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(2;\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-2;\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho tam giác ABC có $A(0;0;1),$ $B(-1;-2;0),$ $C(2;1;-1)$. Tọa độ chân đường cao H hạ từ A xuống BC là

A. $H\left(\frac{5}{19};-\frac{14}{19};-\frac{8}{19}\right)$. **B.** $H\left(\frac{4}{9};1;1\right)$. **C.** $H\left(1;1;-\frac{8}{9}\right)$. **D.** $H\left(1;\frac{3}{2};1\right)$.

Câu 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz,$ cho tam giác ABC có $A(-4;-1;2),$ $B(3;5;-10)$ và $C(a;b;c)$. Trung điểm cạnh AC thuộc trục tung, trung điểm cạnh BC thuộc mặt phẳng (Oxz). Tổng $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 11.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-1;1), B(3;2;-2), C(-3;1;5)$. Tìm tọa độ điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{CM}$. Khi đó tổng $S=\frac{9}{x}+\frac{3}{y}-\frac{27}{z}$ bằng.

A. 6. **B.** -15. **C.** 16. **D.** -13.

Câu 11: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;2;4)$, $B(3;0;-2)$ và $C(1;3;7)$. Gọi D chân đường phân giác trong hạ từ A. Tính OD

A. $\frac{\sqrt{207}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{205}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{201}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{203}}{3}$.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-2;0)$, $B(3;1;2)$, $C(1;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+z+5=0$. Biết $D(a;b;c)$ nằm trên (P) sao cho hai đường thẳng BD, AC song song với nhau. Giá trị $a+b+c$ bằng:

A. 46. **B.** 12. **C.** -35. **D.** 26.

Câu 13: Cho mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$ và hai điểm $A(1;1;1), B(1;1;0)$. Gọi $M(a;b;c) \in (P)$ sao cho $|MB-MA|$ lớn nhất. Tính $2a-b+c$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+z-4=0$. Điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P) có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$ và điểm $A(2;2;-2)$. Gọi $A'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với A qua (P). Giá trị của c bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$, $B(-2;1;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x-2y+z+4=0$ sao cho $MA=MB=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. $a+b+c=\dfrac{1}{2}$. **B.** $a+b+c=1$. **C.** $a+b+c=\dfrac{3}{2}$. **D.** $a+b+c=2$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;2;-1)$, $B(-2;1;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x-2y+z+4=0$ sao cho $MA=MB=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. Khi đó, giá trị $a+b+c$ bằng

A. $a+b+c=\dfrac{1}{2}$. **B.** $a+b+c=1$. **C.** $a+b+c=\dfrac{3}{2}$. **D.** $a+b+c=2$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$ và điểm $A(2;3;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $6x+8y+11=0$. **B.** $3x+4y+2=0$. **C.** $3x+4y-2=0$. **D.** $6x+8y-11=0$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P):$2x-2y-z+7=0$ và điểm $A(1;1;-2)$. Điểm $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Tổng $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+2)^2+y^2+(z+5)^2=24$ cắt mặt phẳng $(P): x+y+4=0$ theo giao tuyến là đường tròn (C). Điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến $A(4;-12;1)$ nhỏ nhất có tung độ bằng

A. -6. **B.** -4. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 21: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z+11=0$. Xét điểm M di động trên (P), các điểm A,B,C phân biệt di động trên (S) sao cho MA,MB,MC là các tiếp tuyến của (S). Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $E(0;3;-1)$ **B.** $F\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ **C.** $G(0;-1;3)$ **D.** $H\left(\frac{3}{2};0;2\right)$

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M\left(2;-5;7\right)$. Điểm M' đối xứng với điểm M qua mặt phẳng Oxy có tọa độ là:

A. $\left(2;-5;-7\right)$. **B.** $\left(2;5;7\right)$. **C.** $\left(-2;-5;7\right)$. **D.** $\left(-2;5;7\right)$.

Lời giải

Chọn A

Do điểm $M'\left(x';y';z'\right)$ đối xứng điểm $M\left(x;y;z\right)$ qua mặt phẳng Oxy nên

$\begin{cases} x'=x \\ y'=y \\ z'=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=2 \\ y'=-5 \\ z'=-7 \end{cases}$. Vậy $M'\left(2;-5;-7\right)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\left(2;-6;3\right)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2-2t \\ z=t \end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên d. Khi đó toạ độ điểm H là:

A. $H\left(1;-2;3\right)$. **B.** $H\left(4;-4;1\right)$. **C.** $H\left(1;2;1\right)$. **D.** $H\left(-8;4;3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $\left(\alpha\right)$ là mặt phẳng qua M và vuông góc với d.

Khi đó: $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{u_d}=\left(3;-2;1\right)$

$\Rightarrow \left(\alpha\right):3\left(x-2\right)-2\left(y+6\right)+\left(z-3\right)=0 \Leftrightarrow \left(\alpha\right):3x-2y+z-21=0$.

Vì H hình chiếu vuông góc của M lên d nên $H=\left(\alpha\right)\cap d$.

Do đó tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2-2t \\ z=t \\ 3x-2y+z-21=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$.

Vậy: $H\left(4;-4;1\right)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right):3x-5y+2z+8=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=7+5t \\ y=-7+t \\ z=6-5t \end{cases}$ $\left(t\in\mathbb{R}\right)$. Tìm phương trình đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng d qua mặt phẳng $\left(P\right)$.

A. $\Delta:\begin{cases} x=-5+5t \\ y=13+t \\ z=-2-5t \end{cases}$. **B.** $\Delta:\begin{cases} x=-17+5t \\ y=33+t \\ z=66-5t \end{cases}$.

C. $\Delta:\begin{cases}x=-11+5t\\ y=23+t\\ z=32-5t\end{cases}$.   **D.** $\Delta:\begin{cases}x=13+5t\\ y=-17+t\\ z=-104-5t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: ta có $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{a_d}=0$. Lấy $M(7;-7;6)\in d$ thay vào mặt phẳng (P) thấy không thỏa mãn nên đường thẳng d song song với mặt phẳng (P).

Gọi $M(7;-7;6)\in d$. Gọi $N(x;y;z)$ là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (P) và I là trung điểm MN.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{n_P}\\ I\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-7;y+7;z-6)=k(3;-5;2)\\ 3x-5y+2z+84=0\end{cases}$.

Giải hệ, ta có: $k=-4\Rightarrow M(-5;13;-2)$.

Do đó: Δ đi qua M và nhận $\overrightarrow{n_P}(5;1;-5)$ làm vec tơ chỉ phương $\Delta:\begin{cases}x=-5+5t\\ y=13+t\\ z=-2-5t\end{cases}$

Câu 4: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(3;0;0), B(0;3;0), C(0;0;3)$. Phương trình hình chiếu của đường thẳng OA trên mặt phẳng (ABC) là

A. $\begin{cases}x=3-2t\\ y=t\\ z=t\end{cases}$.   **B.** $\begin{cases}x=3+4t\\ y=t\\ z=t\end{cases}$.   **C.** $\begin{cases}x=3+t\\ y=0\\ z=0\end{cases}$.   **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\ y=1+t\\ z=1+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy $O.ABC$ là hình chóp đều nên hình chiếu của điểm O trên $mp(ABC)$ là trọng tâm H của tam giác ABC: $H(1;1;1)$. Vậy hình chiếu của của đường thẳng OA trên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng AH.

AH đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AH}(-2;1;1)$.

Vậy phương trình hình chiếu của đường thẳng OA trên mặt phẳng (ABC) là: $\begin{cases}x=3-2t\\ y=t\\ z=t\end{cases}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(2;1;0)$.   **B.** $(0;0;-1)$.   **C.** $(2;0;0)$.   **D.** $(0;1;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} M(a;b;c) \xrightarrow{\text{chieu len truc } Ox} M'(a;0;0) \\ M(a;b;c) \xrightarrow{\text{chieu len truc } Oy} M'(0;b;0) \\ M(a;b;c) \xrightarrow{\text{chieu len truc } Oz} M'(0;0;c) \end{cases}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;1;2)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy là

A. $(3;-1;-2)$. **B.** $(3;-1;2)$. **C.** $(3;1;-2)$. **D.** $(-3;-1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Dễ dàng tìm được tọa độ hình chiếu vuông góc của $A(-3;1;2)$ trên trục Oy là $H(0;1;0)$. Vì A' đối xứng với M qua trục Oy nên H là trung điểm của AA', suy ra $A'(3;1;-2)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho sáu điểm $A(1;2;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(3;3;-3)$ và A', B', C' thỏa mãn $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$. Nếu G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ thì G' có tọa độ là

A. $\left(2;\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(2;-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(2;\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-2;\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{C'G'}+\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}\right)+\left(\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}\right)=\vec{0}$.

Suy ra G' cũng là trọng tâm của tam giác ABC nên có tọa độ $G'\left(2;\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;0;1)$, $B(-1;-2;0)$, $C(2;1;-1)$. Tọa độ chân đường cao H hạ từ A xuống BC là

A. $H\left(\frac{5}{19};-\frac{14}{19};-\frac{8}{19}\right)$. **B.** $H\left(\frac{4}{9};1;1\right)$.

C. $H\left(1;1;-\frac{8}{9}\right)$. **D.** $H\left(1;\frac{3}{2};1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $H(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AH}=(x;y;z-1)$, $\overrightarrow{BC}=(3;3;-1)$, $\overrightarrow{BH}=(x+1;y+2;z)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{BH} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x.3+y.3+(z-1).(-1)=0 \\ \frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{5}{19};-\frac{14}{19};-\frac{8}{19}\right)$.

Câu 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-4;-1;2)$, $B(3;5;-10)$ và $C(a;b;c)$. Trung điểm cạnh AC thuộc trục tung, trung điểm cạnh BC thuộc mặt phẳng (Oxz). Tổng $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(0;y;0)\in Oy$ là trung điểm AC. Suy ra $C(4;2y+1;-2)$.

Gọi N là trung điểm của BC, suy ra $N\left(\frac{7}{2};y+3;-6\right)$.

Do $N\in(Oxz)$ nên $y+3=0\Leftrightarrow y=-3\Rightarrow C(4;-5;-2)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-1;1), B(3;2;-2), C(-3;1;5)$. Tìm tọa độ điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{CM}$. Khi đó tổng $S=\frac{9}{x}+\frac{3}{y}-\frac{27}{z}$ bằng.

A. 6. **B.** -15. **C.** 16. **D.** -13.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{CM}\Rightarrow\begin{cases}1-x-2.2=4(x+3)\\-1-y-2.3=4(y-1)\\1-z-2.(-3)=4(z-5)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-\frac{3}{5}\\z=\frac{27}{5}\end{cases}$.

Khi đó $S=\frac{9}{-3}+\frac{3.5}{-3}-\frac{27.5}{27}=-13$.

Câu 11: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;2;4)$, $B(3;0;-2)$ và $C(1;3;7)$. Gọi D chân đường phân giác trong hạ từ A. Tính OD

A. $\frac{\sqrt{207}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{205}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{201}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{203}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$AB=2\sqrt{14}$ và $AC=\sqrt{14}$ do đó $AB=2AC$. Suy ra $DB=2DC$.

Do D là chân đường phân giác trong và $DB=2DC$ nên $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{DC}$, suy ra $D\left(\frac{5}{3};2;4\right)$

Vậy $OD=\frac{\sqrt{205}}{3}$.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-2;0)$, $B(3;1;2)$, $C(1;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+z+5=0$. Biết $D(a;b;c)$ nằm trên (P) sao cho hai đường thẳng BD, AC song song với nhau. Giá trị $a+b+c$ bằng:

A. 46. **B.** 12. **C.** -35. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AC}=(2;2;1)$ và $\overrightarrow{BD}=(a-3;b-1;c-2)$ vì hai đường thẳng BD, AC song song với nhau nên $\overrightarrow{BD}=t.\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}a-3=2t\\b-1=2t\\c-2=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3+2t\\b=1+2t\\c=2+t\end{cases}$.

Điểm $D(a;b;c)$ nằm trên (P) nên ta có $3+2t-2(1+2t)+2+t+5=0\Leftrightarrow t=8$ suy ra $\begin{cases}a=19\\b=17\\c=10\end{cases}$

.

Vậy $a+b+c=46$.

Câu 13: Cho mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$ và hai điểm $A(1;1;1), B(1;1;0)$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $|MB-MA|$ lớn nhất. Tính $2a-b+c$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(P): x+y+z-4=0$.

Ta thấy $(1+1+1-4).(1+1+0-4)=2>0$. Suy ra A, B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P).

Khi đó $T=|MB-MA|\le AB=1\Rightarrow \max T=1\Leftrightarrow M=AB\cap(P)$.

Đường thẳng AB qua $A(1;1;1), B(1;1;0)$ có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(0;0;-1)$.

Suy ra $AB:\begin{cases}x=1\\y=1\\z=-t\end{cases}$.

Vì $M\in AB\Rightarrow M(0;0;-t)$. Mặt khác $M\in(P)$ nên ta có $-t-4=0\Leftrightarrow t=-4$. Vậy $M(0;0;4)$.

Do đó ta có $a=b=0, c=4\Rightarrow 2a-b+c=4$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+z-4=0$. Điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P) có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Gọi d là đường thẳng đi qua $A(0;3;1)$ và vuông góc với $(P): 2x-y+z-4=0$.

Suy ra $d:\begin{cases}x=2t\\y=3-t\\z=1+t\end{cases}$ (t là tham số).

Gọi I là giao điểm của d và (P).

Vì $I\in d$ nên $I(2t;3-t;1+t)$.

Vì $I\in(P)$ nên $2.2t-(3-t)+1+t-4=0\Leftrightarrow 6t-6=0\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra $I(2;2;2)$.

Vì I là trung điểm của AA' nên $\begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_A = 2.2 - 0 = 4 \\ y_{A'} = 2y_I - y_A = 2.2 - 3 = 1 \\ z_{A'} = 2z_I - z_A = 2.2 - 1 = 3 \end{cases}$

Vậy $x_{A'} + y_{A'} = 4 + 1 = 5$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và điểm $A(2;2;-2)$. Gọi $A'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với A qua (P). Giá trị của c bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Gọi Δ là đường thẳng qua $A(2;2;-2)$ và vuông góc với $(P): x + y - z - 3 = 0$.

Khi đó $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

Khi đó tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2 + t + 2 + t + 2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(1;1;-1)$.

Gọi $A'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với A qua (P).

Suy ra H là trung điểm của đoạn thẳng AA'. Nên $A'(0;0;0) \equiv O$.

Vậy giá trị của c bằng 0.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$, $B(-2;1;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 4 = 0$ sao cho $MA = MB = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$. Khi đó $a + b + c$ bằng

A. $a + b + c = \dfrac{1}{2}$. **B.** $a + b + c = 1$. **C.** $a + b + c = \dfrac{3}{2}$. **D.** $a + b + c = 2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $MA = MB \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c+1)^2 = (a+2)^2 + (b-1)^2 + c^2 \Leftrightarrow 3a + b - c - \dfrac{1}{2} = 0$. (1)

$M \in (P): x - 2y + z + 4 = 0 \Rightarrow a - 2b + c + 4 = 0$. (2)

Cộng hai vế của (1) và (2) ta được $4a - b + \dfrac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow b = 4a + \dfrac{7}{2}$.

Thay vào phương trình $(1) \Rightarrow c = 7a + 3$.

$MA = \frac{\sqrt{11}}{2} \Leftrightarrow MA^2 = \frac{11}{4} \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c+1)^2 = \frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + \left(4a + \frac{3}{2}\right)^2 + (7a+4)^2 = \frac{11}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$

Suy ra $a+b+c = a + 4a + \frac{7}{4} + 7a + 3 = 12 + \frac{13}{2} = -6 + \frac{13}{2} = \frac{1}{2}$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;2;-1)$, $B(-2;1;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 4 = 0$ sao cho $MA = MB = \frac{\sqrt{11}}{2}$. Khi đó, giá trị $a+b+c$ bằng

A. $a+b+c = \frac{1}{2}$. **B.** $a+b+c = 1$. **C.** $a+b+c = \frac{3}{2}$. **D.** $a+b+c = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $A, B \in (P)$ và $AB = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$ nên M là trung điểm của AB suy ra $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Vậy $a+b+c = \frac{1}{2}$.

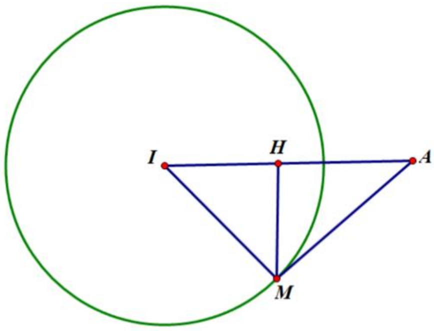
Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2;3;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $6x + 8y + 11 = 0$. **B.** $3x + 4y + 2 = 0$.

C. $3x + 4y - 2 = 0$. **D.** $6x + 8y - 11 = 0$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ có tâm $I(-1;-1;-1)$ và bán kính là $R = 3$.

Ta có $\overrightarrow{AI} = (3;4;0) \Rightarrow AI = \sqrt{9+16+0} = 5 > R$, do đó A nằm ngoài (S).

Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu của M lên AI.

Lại có $IM^2 = IH.IA \Rightarrow IH = \frac{9}{5}$ và $AM^2 = AH.IA \Rightarrow AH = \frac{16}{5}$.

Do đó $9\overrightarrow{AH}=16\overrightarrow{HI}\Leftrightarrow\begin{cases}9(x-2)=16(-1-x)\\9(y-3)=16(-1-y)\\9(z+1)=16(-1-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{25}\\y=\dfrac{11}{25}\\z=-1\end{cases}$.

Vì điểm M thuộc (S) sao cho AM tiếp xúc với (S) nên M luôn thuộc mặt phẳng đi qua H và vuông góc với AI.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $3\left(x-\dfrac{2}{25}\right)+4\left(y-\dfrac{11}{25}\right)=0\Leftrightarrow 3x+4y-2=0$.

Cách 2:

Mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$ có tâm $I(-1;-1;-1)$ và bán kính là $R=3$.

Ta có $IA=\sqrt{9+16+0}=5>R$, do đó A nằm ngoài (S).

Mặt khác $MA=\sqrt{IA^2-R^2}=4$, do đó M thuộc mặt cầu (S_1) có tâm $A(2;3;-1)$ và bán kính $R_1=4$.

$(S_1):(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$.

Vì M thuộc hai mặt cầu (S) và (S_1) nên tọa độ điểm M thỏa hệ phương trình sau

$\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9\\(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16\end{cases}$

Trừ 2 vế tương ứng ta được $6x+8y-11=-7\Leftrightarrow 3x+4y-2=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $3x+4y-2=0$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y-z+7=0$ và điểm $A(1;1;-2)$. Điểm $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Tổng $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$(P):2x-2y-z+7=0\Rightarrow$ mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}=(2;-2;-1)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $A(1;1;-2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\Rightarrow H=d\cap(P)$

$\Rightarrow d$ có phương trình tham số: $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-2t\\z=-2-t\end{cases}$

Xét phương trình: $2(1+2t)-2(1-2t)-(-2-t)+7=0\Leftrightarrow 9t=-9\Leftrightarrow t=-1$ thay vào phương trình đường thẳng d ta được tọa độ điểm $H(-1;3;-1)$. Suy ra: $a+b+c=1$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+2)^2+y^2+(z+5)^2=24$ cắt mặt phẳng $(P):x+y+4=0$ theo giao tuyến là đường tròn (C). Điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến $A(4;-12;1)$ nhỏ nhất có tung độ bằng

A. -6. **B.** -4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;0;-5)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa IA và vuông góc với mặt phẳng $(P): x+y+4=0$.

Khi đó (Q) có cặp véctơ chỉ phương là $\begin{cases}\vec{u}_1=\overrightarrow{AI}=(-6;12;-6)\\ \vec{u}_2=\vec{n}_{(P)}=(1;1;0)\end{cases}$.

$\Rightarrow (Q)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-1;1;3)$.

Do đó $(Q): -x+y+3z+13=0$.

MA nhỏ nhất khi $M\in(Q)\Rightarrow M\in(P)\cap(Q)\cap(S)$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x+y+4=0\\ -x+y+3z+13=0\\ (x+2)^2+y^2+(z+5)^2=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y-4 & (1)\\ z=\dfrac{-2}{3}y-\dfrac{17}{3} & (2)\\ (x+2)^2+y^2+(z+5)^2=24 & (3)\end{cases}$$

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta được phương trình:

$$22y^2+44y-176=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\ \Rightarrow M(-6;2;-7)\Rightarrow MA=6\sqrt{10}\\ y=-4\Rightarrow M(0;-4;-3)\Rightarrow MA=4\sqrt{6}\end{array}\right.$$

MA nhỏ nhất nên ta chọn $M(0;-4;-3)$.

Vậy tung độ điểm M cần tìm bằng -4.

Câu 21: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z+11=0$. Xét điểm M di động trên (P), các điểm A,B,C phân biệt di động trên (S) sao cho MA,MB,MC là các tiếp tuyến của (S). Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $E(0;3;-1)$ **B.** $F\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ **C.** $G(0;-1;3)$ **D.** $H\left(\dfrac{3}{2};0;2\right)$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=2\sqrt{3}$

Giả sử điểm $M(a;b;c)$ và $A(x,y,z)$, ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases}A\in(S)\\ IAM=90^0\\ M\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12\\ AI^2+AM^2=IM^2\\ a-2b+2c+11=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12 \ (1) \\ 12+(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \ (2) \\ a-2b+2c+11=0 \ (3) \end{cases}$$

Trừ theo về (1) và (2) ta được $(a-1)x+(b-1)y+(c-1)z-a-b-c-9=0$.

Kết hợp với (3): $a-2b+2c+11=0$.

Ta có $(a-1)x+(b-1)y+(c-1)z-a-b-c-9=a-2b+2c+11$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-x-y-z=0a+3b-c-2$

Đồng nhất hệ số ta có

$$\begin{cases} 0a=\text{ax} \\ 3b=by \\ -c=cz \\ -x-y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=-1 \\ -0-3+1=-2 \ (t/m) \end{cases}$$

Vậy mặt phẳng (ABC) đi qua điểm cố định $E(0;3;-1)$

DẠNG 4 KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Dạng 1: Tính khoảng cách từ hình chiếu vuông góc của đỉnh đến một mặt

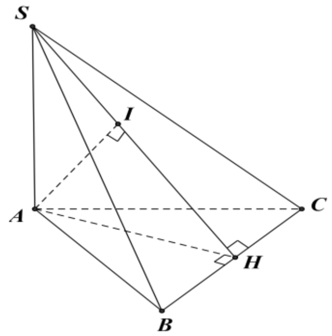
Phương pháp xác định khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh đến một mặt phẳng bên.

- **Bước 1**: Xác định giao tuyến d
- **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp d$ ($H \in d$).
- **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH \left(I \in SH \right)$. Khoảng cách cần tìm là AI

Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ điển hình: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy $\left(ABC\right)$

Hãy xác khoảng cách từ điểm A đến mặt bên $\left(SBC\right)$.



Ta có BC là giao tuyến của mp $\left(SBC\right)$ và $\left(ABC\right)$.

Từ hình chiếu của đỉnh là điểm A, dựng $AH \perp BC$ tại H. Dựng $AI \perp SH$ tại I

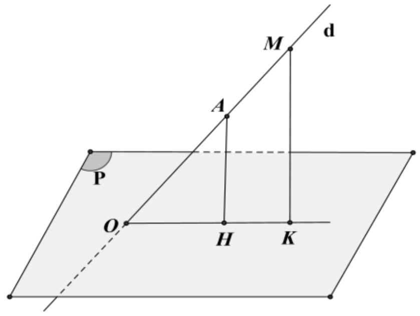
Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(SAH\right) \Rightarrow \left(SBC\right) \perp \left(SAH\right)$.

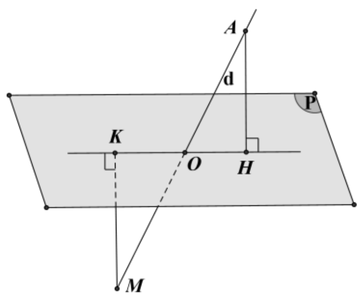
Mặt phẳng $\left(SBC\right)$ vuông góc với mặt phẳng $\left(SAH\right)$ theo giao tuyến SH có $AI \perp SH$

nên $AI \perp mp\left(SBC\right) \Rightarrow d\left(A, mp\left(SBC\right)\right) = AI$

Dạng 2: Tính khoảng cách từ một đểm bất kỳ đến một mặt phẳng

Thường sử dụng công thức sau:



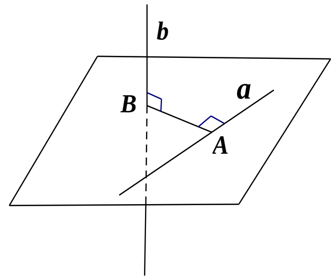


Công thức tính tỉ lệ khoảng cách: $\dfrac{d\left(M, mp\left(P\right)\right)}{d\left(A, mp\left(P\right)\right)} = \dfrac{MO}{AO}$

Ở công thức trên cần tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $\left(P\right)$

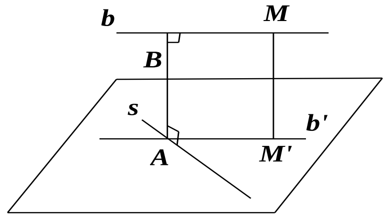
Ta có các trường hợp sau đây:

- Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$
  - Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.
  - Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A, ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



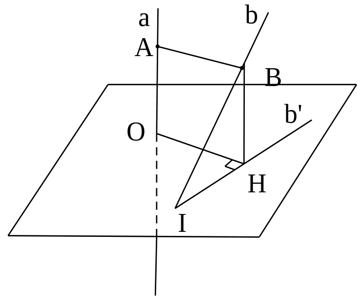
- Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

Cách 1:



- Ta dựng mặt phẳng (α) chứ a và song song với b.
- Lấy một điểm M tùy ý trên b dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'.
- Từ M' dựng $b'//b$ cắt a tại A.
- Từ A dựng $AB//MM'$ cắt b tại B, độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Cách 2:

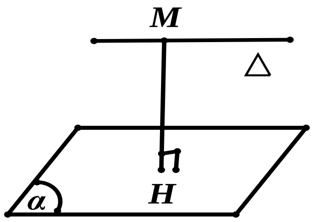


- Ta dựng mặt phẳng $(\alpha) \perp a$ tại O, (α) cắt b tại I.
- Dựng hình chiếu vuông góc của b là b' trên (α).
- Trong mặt phẳng (α), vẽ $OH \perp b'$, $H \in b'$.
- Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B.
- Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A.
- Độ dài đoạn thẳng AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Dạng 3. Khoảng cách của đường với mặt, mặt với mặt

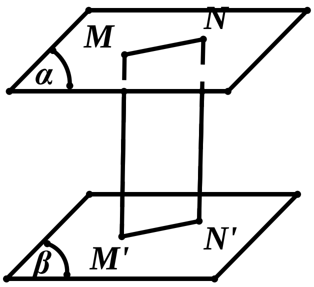
Ở dạng toán này chúng ta đều quy về dạng toán 1

- Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với nhau. Khi đó khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến mặt phẳng (α) được gọi là khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α).



$d(\Delta,(\alpha)) = d(M,(\alpha)), M \in \Delta$.

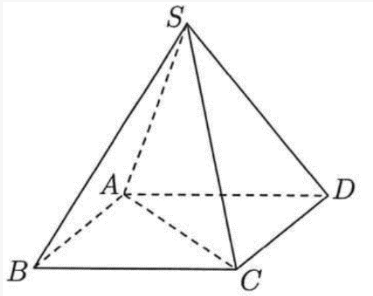
- Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳn kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



$d((\alpha),(\beta)) = d(M,(\beta)) = d(N,(\alpha))$ $, M \in (\alpha), N \in (\beta)$.

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

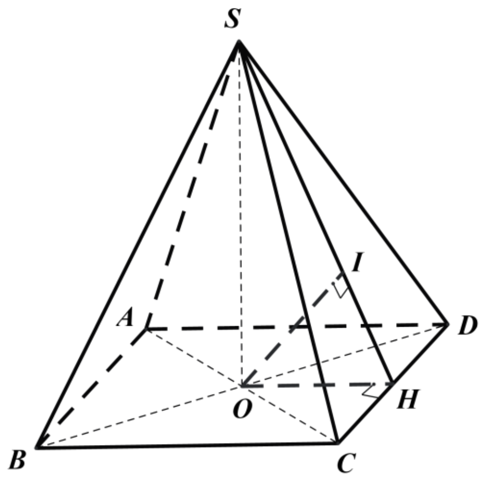
Câu 38 – Đề tham khảo 2023. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có chiều cao a, $AC = 2a$ (tham khảo hình bên). Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$, H là trung điểm CD. Trong (SOH), kẻ $OI \perp SH$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOH) \Rightarrow CD \perp OI$ mà $OI \perp SH$ nên $OI \perp (SCD)$

$\Rightarrow d(O,(SCD)) = OI$.

Vì O là trung điểm BD nên $d(B,(SCD)) = d(O,(SCD)) = 2OI = \frac{2SO.OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}}$.

Lại có: $AD = AC\sin 45° = a\sqrt{2}$, $OH = a\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d(B,(SCD)) = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Vậy khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC).

A. $d=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $d=a$. **C.** $d=\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $AB=2a$; $SA=SB=SC$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BC là

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ A đến (SCD).

A. $d=1$. **B.** $d=\sqrt{2}$. **C.** $d=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O, $SA\perp(ABCD)$, $SA=2a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của đoạn AB. Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{17}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a.$ Gọi E là trung điểm của cạnh $CD.$ Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE:

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và SC; P là điểm trên cạnh SD sao cho $SP=2PD$. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (MNP).

A. $\dfrac{a\sqrt{34}}{34}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{17}}{34}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{17}}{41}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{16}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA\perp(ABCD)$ và $SA=2a$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính khoảng cách từ điểm O đến SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

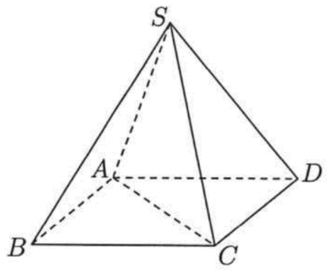
Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC=a\sqrt{3}$, $ABC=60^0$. Gọi M là trung điểm của BC. Biết $SA=SB=SM=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh S đến (ABC)

A. $d=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d=a$. **C.** $d=2a$. **D.** $d=a\sqrt{3}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD=2AB=2a$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN).

A. $d=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$ **B.** $d=2a.$ **C.** $d=\dfrac{3a}{2}.$ **D.** $d=a\sqrt{5}.$

Câu 10: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ thể tích $V_{SABCD}=\dfrac{2a^3}{3}$, $AC=2a$ (tham khảo hình bên). Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

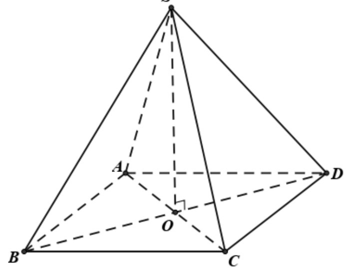
Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA\perp(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) theo a

A. a. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{21}}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 13: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}.$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}.$ **C.** $a\sqrt{14}.$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}.$

Câu 14: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30^0. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\frac{2a\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{14}}{7}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 15: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA' = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC. Gọi P, Q, N lần lượt là trung điểm của AB, CC' và $A'G$. Khoảng cách từ N đến mặt phẳng (PQC) là

A. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{14}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AB. Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a}{6}$.

Câu 18: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và $SA = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC)

A. $\frac{\sqrt{13}}{13}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}a$. **C.** $\frac{9\sqrt{13}}{13}a$. **D.** $\frac{3\sqrt{13}}{13}a$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; $AB = 2a, AD = DC = a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc vớI $(ABCD)$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) bằng?

A. $\frac{a\left(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}\right)}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$.

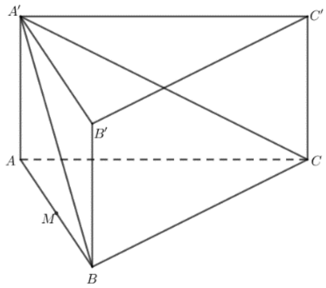
Câu 20: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BAC = 60°$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng

A. $2a$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

Câu 21: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông cân tại A. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm của cạnh BC. Biết cạnh $AA' = a\sqrt{3}$ và tạo với mặt đáy của hình lăng trụ một góc $60°$. Khoảng cách từ đỉnh C' đến mặt $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Câu 22: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $4a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30^o. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$?



A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $3a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Câu 23: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết khoảng cách từ điểm O đến các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt là a, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) theo a

A. $2a$. **B.** $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. **C.** $\frac{11a}{6}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{33}}{11}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60^0, M là trung điểm của BC. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $a^3\frac{\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCD) là

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2a, AC = a, SBA = SCA = 90^0$, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45^0. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{30}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $ADC = 60^0$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \sqrt{6}a$, G là trọng tâm tam giác SAC. Khoảng cách từ G đến (SCD) là

A. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 27: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Gọi M là trung điểm AD, tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBM) biết $SO = \frac{\sqrt{95}}{10}a$.

A. $\frac{\sqrt{95}}{5}a$. **B.** $\frac{\sqrt{95}}{100}a$. **C.** $\frac{\sqrt{19}}{5}a$. **D.** $\frac{\sqrt{19}}{10}a$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có chiều cao $AB=a$ và $SA\perp(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAD) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang cân có góc ở đáy bằng $60°$. $AB=2CD=2a$, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc $45°$. Hình chiếu vuông góc của S lên đáy trùng với giao điểm của AC và BD. Tính Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 30: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $45°$, M là điểm tùy ý thuộc cạnh $B'C'$. Khoảng các từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 31: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng $2a$, $B'D=3a$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{5}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh $4a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của FG,GH. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (CMN) bằng

A. $\frac{3}{4}a$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}a$. **D.** $\frac{2}{3}a$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, trọng tâm G, $SA=2a, AB=4\sqrt{3}a$, $SA\perp(ABC)$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CS. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (MNP) bằng

A. $\frac{3a\sqrt{10}}{20}$. **B.** $\frac{a\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{20}$.

Câu 34: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.DEF$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác AEF. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (GBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{19}}{19}a$. **B.** $\frac{\sqrt{57}}{19}a$. **C.** $\frac{2\sqrt{57}}{19}a$. **D.** $\frac{2\sqrt{19}}{19}a$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính khoảng cách h từ AB đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $\frac{a\sqrt{42}}{7}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB=3a$, $AD=DC=a$. Gọi I là trung điểm của AD, biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Tính theo a khoảng cách từ trung điểm cạnh SD đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{17}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{19}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{20}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$, mặt bên SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $ASB=ASC=60^o, SB=1$. Biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{a}}{b}$ (a,b là hai số nguyên dương nhỏ hơn 10), tính $2a+b$.

A. $2a+b=18$. **B.** $2a+b=15$. **C.** $2a+b=8$. **D.** $2a+b=12$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và đỉnh S cách đều các điểm A, B, C. Biết $SA=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$, tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{13}}{13}a$. **B.** $\frac{3\sqrt{13}}{13}a$. **C.** $\frac{9\sqrt{13}}{13}a$. **D.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}a$.

Câu 39: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B,. Góc giữa cạnh $A'B$ và mặt đáy là $60°$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\frac{a\sqrt{15}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B; $AB=BC=a$; $AD=2a$; SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{11}$. **B.** $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. **C.** $\frac{a\sqrt{11}}{22}$. **D.** $\frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy (ABC) thỏa mãn $AB=a, AC=2a, BAC=120°$; SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA=a$. Gọi M là trung điểm của BC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA=2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

A. $d = 4a$. **B.** $d = 2a$. **C.** $d = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. **D.** $d = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 44: Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa SC và AB.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $d = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{30}}{5}$.

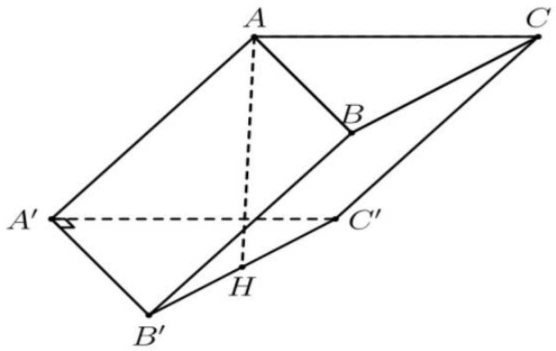
Câu 45: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC và diện tích tam giác $A'AB$ bằng $\dfrac{a^2}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và AB'.

A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $SBD = 60°$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 47: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}, AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm H của đoạn $B'C'$ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Câu 48: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của CD, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SC theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 49: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD. Gọi M, E, F lần lượt là trung điểm của AB, SC, SD. Biết $SO = a; AB = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng ME và CF bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

Câu 50: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách d của hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 51: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BC = a\sqrt{3}, AB = a$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt đáy là điểm M thoả mãn $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{210}}{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{45}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{714}}{17}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{714}}{51}$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

A. $\dfrac{\sqrt{42}}{8}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{42}}{6}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{42}}{4}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{42}}{3}a$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB bằng a. Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SD.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$. **D.** $\dfrac{4a}{3}$.

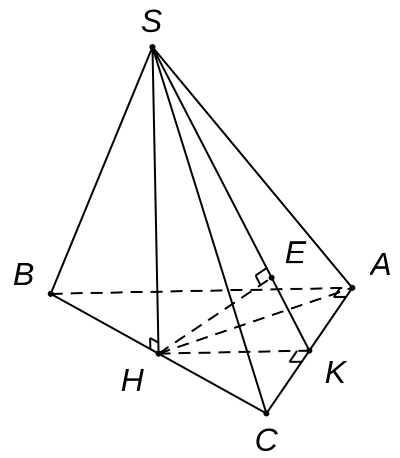
ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a,\ AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}.$ **B.** $d = a.$ **C.** $d = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}.$ **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \perp AC$.

Kẻ $HE \perp SK\ \ (E \in SK)$.

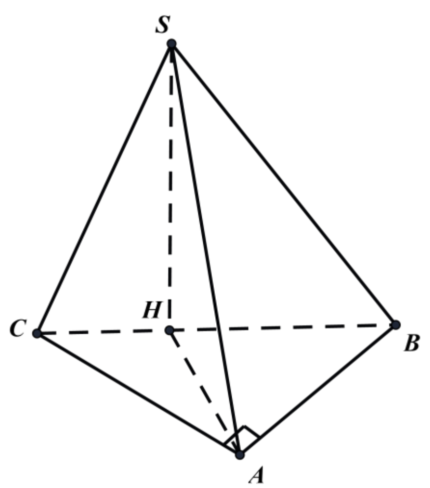
Khi đó $d\left[B,(SAC)\right] = 2d\left[H,(SAC)\right] = 2HE = 2.\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}.$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$; $SA = SB = SC$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BC là

A. $a\sqrt{2}.$ **B.** $a\sqrt{6}.$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

Lời giải

Chọn B



Ta có vì $SA = SB = SC$ nên $\Rightarrow S$ nằm trên đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với đáy. Mà ΔABC vuông cân tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là trung điểm H của BC. Vậy S nằm trên đường thẳng đi qua H vuông góc với (ABC).

Mà góc giữa đường thẳng SA và (ABC) là $60^0 \Rightarrow SAH = 60^0$

ΔABC vuông cân tại A có $AB = 2a \Rightarrow BC = 2a\sqrt{2}$. Mà H là trung điểm của BC

$\Rightarrow AH = \dfrac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$

Xét tam giác vuông SHA ta có: $SH = AH.\tan 60^0 = a\sqrt{6}$

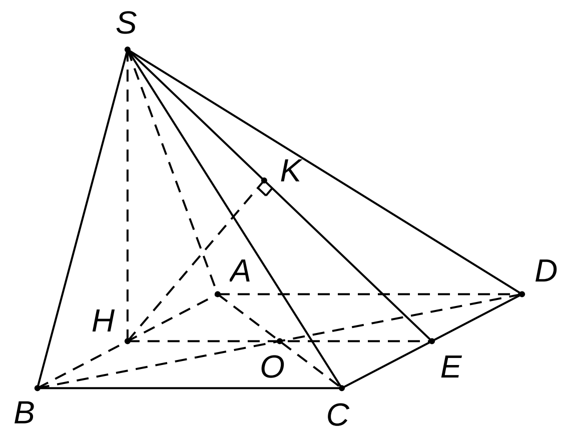
Vậy khoảng cách từ S đến đường thẳng BC là $a\sqrt{6}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ A đến (SCD).

A. $d = 1$. **B.** $d = \sqrt{2}$. **C.** $d = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp AB.$ Do đó $SH \perp (ABCD)$.

Do $AH \parallel CD$ nên $d\left[A,(SCD)\right] = d\left[H,(SCD)\right]$.

Gọi E là trung điểm CD; K là hình chiếu vuông góc của H trên SE.

Khi đó $d\left[H,(SCD)\right] = HK = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

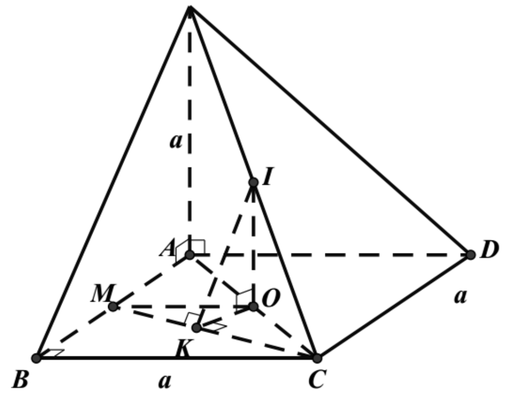
Vậy $d\left[A,(SCD)\right] = HK = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O, $SA \perp (ABCD), SA = 2a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của đoạn AB. Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{17}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Do $IO \perp (ABCD)$ nên nếu dựng $OK \perp CM\,(K \in CM)$ thì

Tức là $d(I,\ CM) = IK$ mà $IK = \sqrt{OI^2 + OK^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + OK^2}$

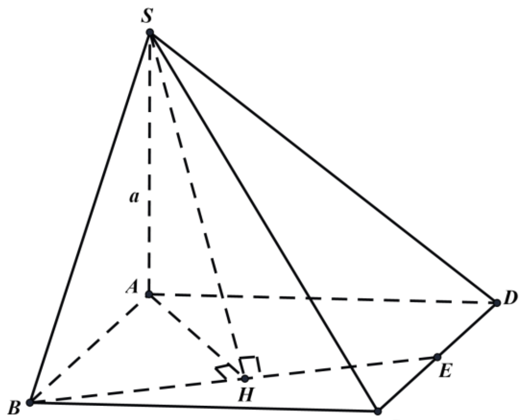
Do $S_{\Delta OMC} = \dfrac{1}{2}OK.MC \Rightarrow OK = \dfrac{2S_{\Delta OMC}}{MC} == \dfrac{a}{\sqrt{5}}$. Suy ra $IK = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{5}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE:

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



$SA \perp (ABCD)$, trong mặt phẳng $(ABCD)$ nếu dựng $AH \perp BE$ tại H thì $SH \perp BE$ (định lý 3 đường vuông góc). Tức là khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE bằng đoạn SH.

Ta có: $S_{\Delta ABE} = \dfrac{1}{2}AB.FE = \dfrac{1}{2}a.a = \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{1}{2}AH.BE$ mà $BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{a^2}{BE} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$, mà ΔSAH vuông tại A, nên:

$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{4a^2}{5}} = \dfrac{3a}{\sqrt{5}} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$

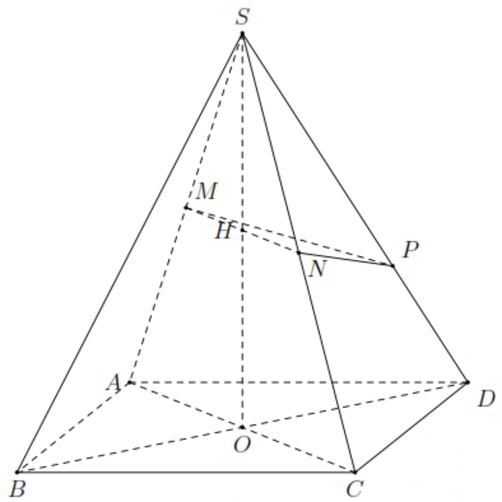
Vậy $d(S,\ BE) = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và SC; P là điểm trên cạnh SD sao cho $SP = 2PD$. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (MNP).

A. $\dfrac{a\sqrt{34}}{34}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{17}}{34}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{17}}{41}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $V_{D.MNP} = \dfrac{1}{2}V_{S.MNP} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SC}.\dfrac{SP}{SD}V_{S.ACD} = \dfrac{1}{12}V_{S.ACD}$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Suy ra $OA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $V_{S.ACD} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{\Delta SCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V_{D.MNP} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{144}$.

Do MN là đường trung bình của tam giác SAC nên $MN = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAD và SCD đều cạnh a nên $PM^2 = PN^2 = SM^2 + SP^2 - 2SM.SP.\cos 60^o = \dfrac{13a^2}{36}$.

Do tam giác MNP cân tại P nên gọi H là trung điểm MN thì $PH \perp MN$.

Suy ra $PH = \sqrt{PM^2 - \dfrac{MN^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{13a^2}{36} - \dfrac{a^2}{8}} = \dfrac{a\sqrt{34}}{12}$.

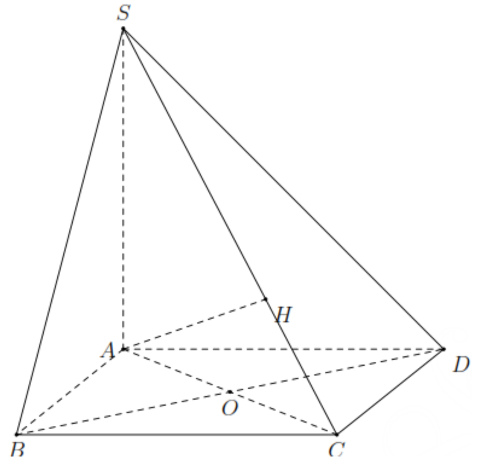
Vậy $d\left(D,(MNP)\right) = \dfrac{3V_{D.MNP}}{S_{MNP}} = \dfrac{3.\dfrac{a\sqrt{2}}{144}}{\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{34}}{12}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{34}}{34}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính khoảng cách từ điểm O đến SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

Do O là tâm của hình vuông $ABCD$ nên $d(O,SC) = \frac{1}{2}d(A,SC)$.

Trong tam giác SAC vuông tại A hạ $AH \perp SC$.

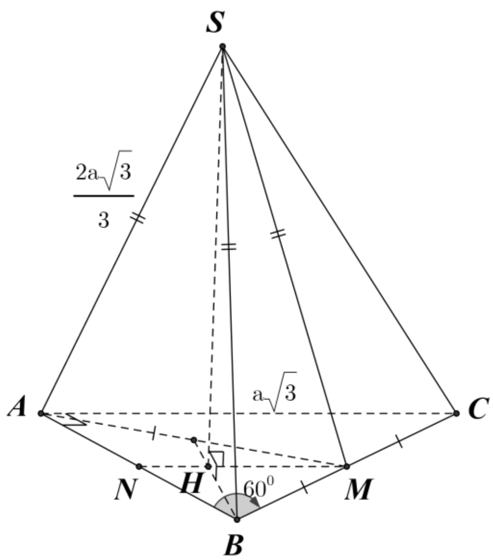
Suy ra $d(A,SC) = AH = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a.a\sqrt{2}}{\sqrt{4a^2 + 2a^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(O,SC) = \frac{1}{2}d(A,SC) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = a\sqrt{3}$, $ABC = 60^0$. Gọi M là trung điểm của BC. Biết $SA = SB = SM = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh S đến (ABC)

A. $d = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = 2a$. **D.** $d = a\sqrt{3}$.

Lời giải



Vì ΔABC vuông tại A, M là trung điểm của BC và $ABC = 60^0$ suy ra ΔABM đều.

$SA = SB = SM = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Suy ra, hình chóp $S.ABM$ đều.

Xét ΔABC: $\sin 60^0 = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow AM = AB = BM = a$.

Gọi H là trọng tâm ΔABC nên H là chân đường cao kẻ từ S xuống (ABC).

ΔABC đều cạnh a nên $MH = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (với N là trung điểm AB).

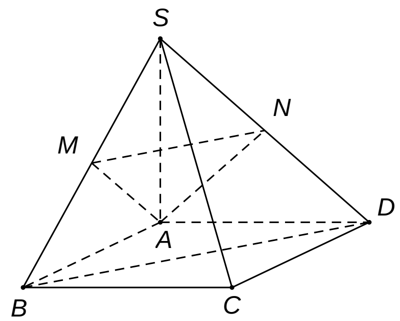
Xét ΔSHM vuông tại H: $d\left(S,(ABC)\right) = SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN).

A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $d = 2a$. **C.** $d = \frac{3a}{2}$. **D.** $d = a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



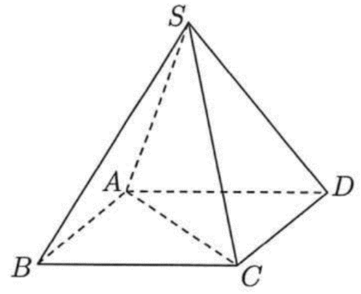
Thể tích khối chóp $V_{S.ABD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABD}.SA = \frac{2a^3}{3}$.

Vì $S_{\Delta SMN} = \frac{1}{4}S_{\Delta SBD}$ nên $V_{A.SMN} = \frac{1}{4}V_{A.SBD} = \frac{a^3}{6}$.

Ta có AM, AN là các đường trung tuyến trong tam giác vuông, MN là đường trung bình nên tính được $AM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $AN = a\sqrt{2}$, $MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó tính được $S_{\Delta AMN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. Vậy $d\left[S,(AMN)\right] = \frac{3V_{S.AMN}}{S_{\Delta AMN}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

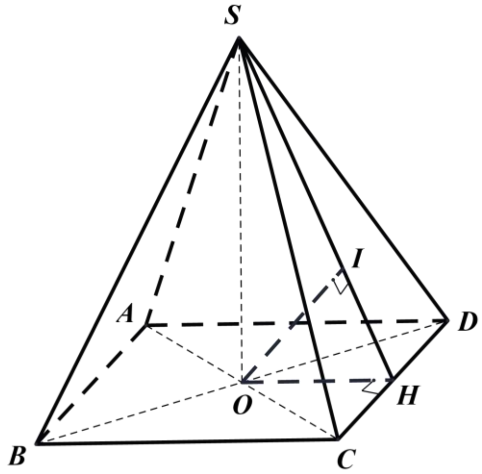
Câu 10: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ thể tích $V_{SABCD} = \frac{2a^3}{3}$, $AC = 2a$ (tham khảo hình bên). Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$, H là trung điểm CD. Trong (SOH), kẻ $OI \perp SH$.

Có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOH) \Rightarrow CD \perp OI$.

Mà $OI \perp SH$ nên $OI \perp (SCD) \Rightarrow d(O,(SCD)) = OI$.

Có $AD = AC\sin 45° = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2a^2$

Ta có: $V_{SABCD} = \dfrac{2a^3}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}.SO.2a^2 = \dfrac{2a^3}{3} \Leftrightarrow SO = a$.

Vì O là trung điểm AC nên $d(A,(SCD)) = 2d(O,(SCD)) = 2OI = \dfrac{2SO.OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}}$.

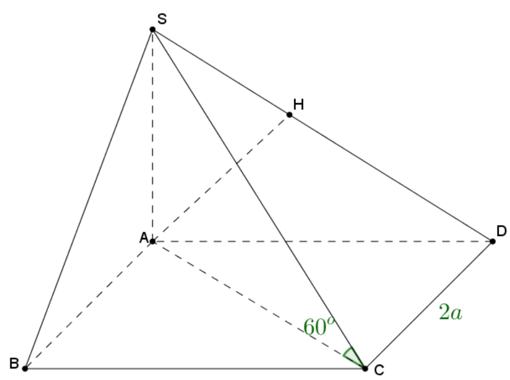
Mà $AD = AC\sin 45° = a\sqrt{2} \Rightarrow OH = a\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d(A,(SCD)) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $(SC,(BCD)) = (SC, AC) = SCA = 60°$.

Khi đó $AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow SA = AC.\tan 60^\circ = 2a\sqrt{6}$.

Mà $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD) \Rightarrow d(B,(SCD)) = d(A,(SCD))$.

Kẻ $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$

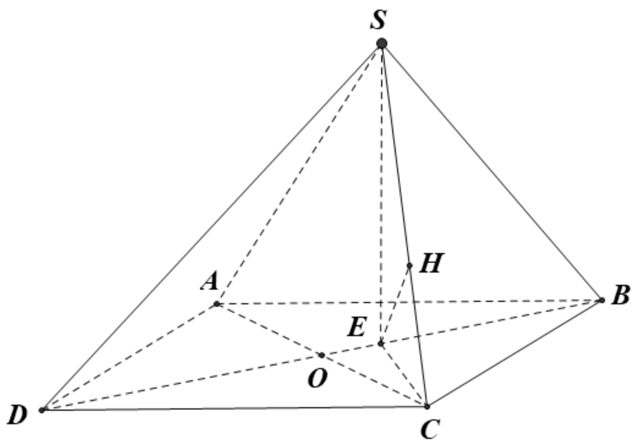
Khi đó $d(B,(SCD)) = d(A,(SCD)) = AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}}$

$\Rightarrow d(B,(SCD)) = \dfrac{2a\sqrt{2}.2a}{\sqrt{(2a\sqrt{2})^2 + (2a)^2}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) theo a

A. a. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{21}}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải



Chọn D

Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$ và E là trọng tâm của tam giác ABC.

$\begin{cases} SD \cap (ABCD) = D \\ SE \perp (ABCD) \text{ taïi E} \end{cases} \Rightarrow (SD,(ABCD)) = (SD, ED) = SDE = 30^\circ$

Do tam giác ABC đều nên $\begin{cases} BD = 2BO = a\sqrt{3} \Rightarrow DE = \dfrac{2}{3}BD = a\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ CE = \dfrac{2}{3}BO = a\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Khi đó $\tan SDO = \dfrac{SE}{DE} \Rightarrow SE = \dfrac{2a}{3}$

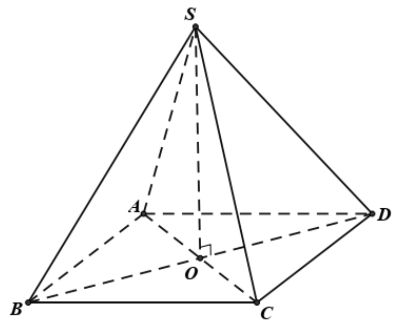
Vì tam giác ABC đều nên $CE \perp AB \Rightarrow CE \perp CD$ mà $CD \perp SE$ nên $CD \perp (SEC)$

Kẻ $EH \perp SC (H \in SC)$ khi đó $EH \perp (SCD)$ tại H nên $d(E,(SCD)) = EH$

$\dfrac{1}{EH^2} = \dfrac{1}{SE^2} + \dfrac{1}{EC^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(a\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \Rightarrow EH = a\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$

Do $BE\cap(SCD)=D$ nên $\dfrac{d\left(B,(SCD)\right)}{d\left(E,(SCD)\right)}=\dfrac{BD}{ED}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{3}{2}d\left(E,(SCD)\right)=a\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 13: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **C.** $a\sqrt{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $O=AC\cap DB$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông.

Ta có: $\dfrac{d\left(A,(SCD)\right)}{d\left(O,(SCD)\right)}=\dfrac{AC}{OC}=2\Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=2d\left(O,(SCD)\right)$.

Tam giác ΔACD vuông tại D có: $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=2a\sqrt{2}\Rightarrow OD=OC=a\sqrt{2}$.

Tam giác ΔSCO vuông tại O có: $SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=a\sqrt{7}$.

Do SO,OC,OD đôi một vuông góc nên gọi $h=d\left(O,(SCD)\right)$ thì $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{OS^2}+\dfrac{1}{OD^2}+\dfrac{1}{OC^2}=\dfrac{8}{7a^2}\Rightarrow h=\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

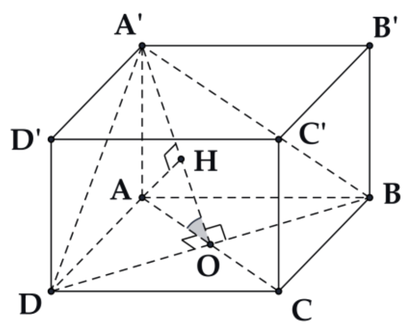
Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Câu 14: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30^0. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{7}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AOA') \Rightarrow A'O \perp BD$.

Khi đó $((A'BD),(ABCD)) = (A'O, AO) = \widehat{A'OA} = 30^\circ$.

Vẽ $AH \perp A'O$ tại H.

Ta có $BD \perp (AOA') \Rightarrow (A'BD) \perp (AOA')$.

Khi đó $\begin{cases} (AOA') \perp (A'BD) \\ (AOA') \cap (A'BD) = A'O \\ \text{Trong } (AOA'): AH \perp A'O \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BD) \Rightarrow d(A,(A'BD)) = AH$.

$AC = BD = 2a \Rightarrow AO = a$, $AH = AO.\sin \widehat{AOA'} = a.\sin 30^\circ = \dfrac{a}{2}$.

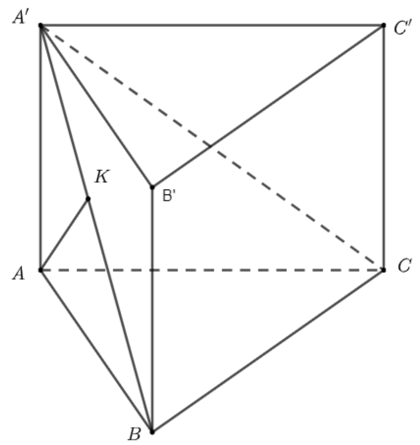
Vậy $d(A,(A'BD)) = \dfrac{a}{2}$.

Câu 15: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác ABA' dựng $AK \perp A'B$.

Do ABC là tam giác vuông tại B nên $BC \perp BA$,

Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ nên $A'A \perp BC$, do đó $BC \perp (ABA') \Rightarrow BC \perp AK$.

Từ đó suy ra $AK \perp (A'BC) \Rightarrow d(A,(A'BC)) = AK$.

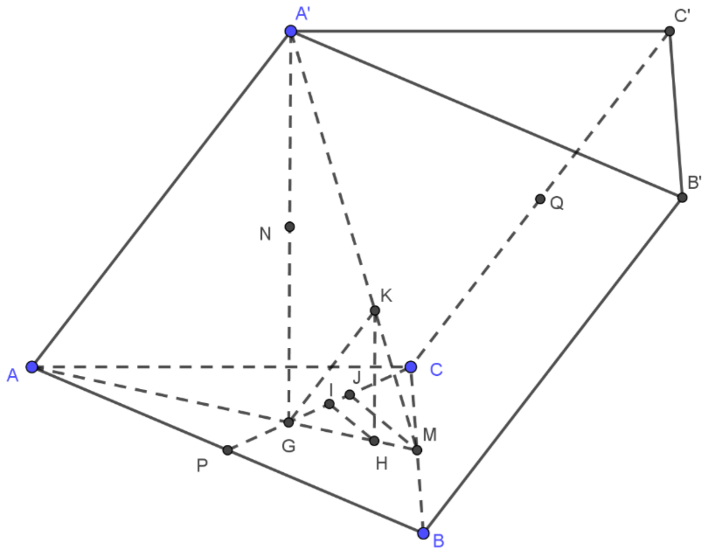
$\Delta A'AB: \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{A'A^2} \Rightarrow AK = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA' = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC. Gọi P, Q, N lần lượt là trung điểm của AB, CC' và $A'G$. Khoảng cách từ N đến mặt phẳng (PQC) là

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{14}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC. Dựng $KG//AA'$ mà $CC'//AA'$ nên suy ra $d\left(N,\left(PQC\right)\right)=d\left(N,\left(PKC\right)\right)$.

$\dfrac{d\left(N,\left(PKC\right)\right)}{d\left(A',\left(PKC\right)\right)}=\dfrac{NG}{A'G}=\dfrac{1}{2}$.

Lại có $\dfrac{A'K}{MK}=\dfrac{AG}{GM}=2\Rightarrow\dfrac{d\left(A',\left(PKC\right)\right)}{d\left(M,\left(PKC\right)\right)}=\dfrac{A'K}{MK}=2\Rightarrow d\left(A',\left(PKC\right)\right)=2d\left(M,\left(PKC\right)\right)$.

Dựng $A'G//KH$ mà $A'G\perp\left(ABC\right)$ nên $KH\perp\left(ABC\right)$.

Ta có $\dfrac{d\left(M,\left(PKC\right)\right)}{d\left(H,\left(PKC\right)\right)}=\dfrac{MG}{HG}=\dfrac{A'M}{A'K}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow d\left(M,\left(PKC\right)\right)=\dfrac{3}{2}d\left(H,\left(PKC\right)\right)$.

Vậy $d\left(N,\left(PKC\right)\right)=\dfrac{1}{2}.2.\dfrac{3}{2}d\left(H,\left(PKC\right)\right)=\dfrac{3}{2}d\left(H,\left(PKC\right)\right)$.

Dựng $HI\perp PC$ và $MJ\perp PC$.

Ta có $AG=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Có $A'G=\sqrt{AA'^2-AG^2}=\sqrt{\dfrac{2a^2}{3}-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác $A'GM$ có $A'G//KH$ nên $\dfrac{KH}{A'G}=\dfrac{MK}{MA'}\Rightarrow KH=A'G.\dfrac{MK}{MA'}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{a\sqrt{3}}{9}$.

Tam giác MGC vuông tại M và $MJ\perp MC\Rightarrow\dfrac{1}{MJ^2}=\dfrac{1}{MG^2}+\dfrac{1}{MC^2}\Rightarrow MJ=\dfrac{1}{4}a$.

Lại có $\dfrac{HI}{MJ}=\dfrac{HG}{MG}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow HI=\dfrac{a}{6}$.

$$\frac{1}{d\left(H,\left(PKC\right)\right)^2}=\frac{1}{HI^2}+\frac{1}{KH^2}\Rightarrow d\left(H,\left(PKC\right)\right)=\frac{a\sqrt{7}}{21}.$$

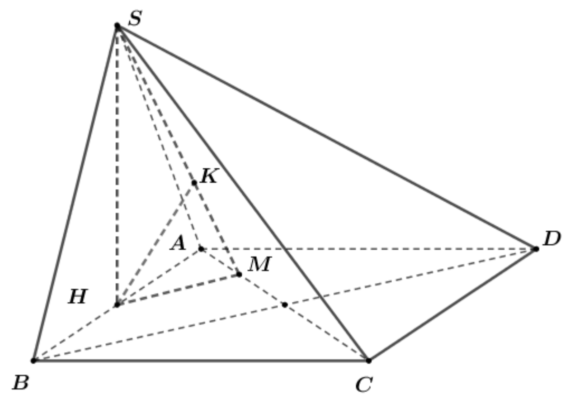
$$d\left(N,\left(PKC\right)\right)=\frac{3}{2}d\left(H,\left(PKC\right)\right)=\frac{a\sqrt{7}}{14}.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AB. Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Tam giác SAB vuông cân tại S, H là trung điểm của AB nên $SH\perp AB$.

Ta có $\begin{cases}\left(SAB\right)\perp\left(ABCD\right)\\ \left(SAB\right)\cap\left(ABCD\right)=AB\\ SH\subset\left(SAB\right),SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp\left(ABCD\right)$.

Từ H dựng $HM\perp AC$ tại M, từ H dựng $HK\perp SM$ tại K. Ta có

$\begin{cases}AC\perp HM\\ AC\perp SH\ \left(SH\perp\left(ABCD\right)\right)\end{cases}\Rightarrow AC\perp\left(SHM\right)\Rightarrow AC\perp HK$.

Khi đó $\begin{cases}HK\perp SM\\ HK\perp AC\end{cases}\Rightarrow HK\perp\left(SAC\right)$ tại K nên $d\left(H,\left(SAC\right)\right)=HK$.

Ta có $\begin{cases}SH=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}\\ HM=\frac{BD}{4}=\frac{a\sqrt{2}}{4}\end{cases}$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SHM. Ta có

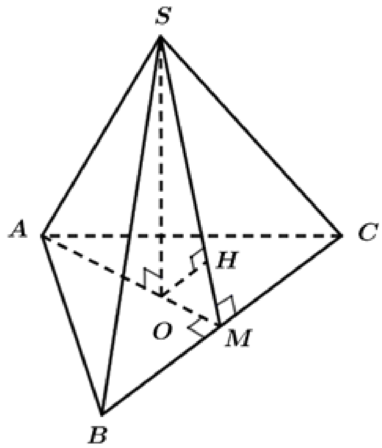
$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HM^2}\Leftrightarrow\frac{1}{HK^2}=\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a^2}\Leftrightarrow HK=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $d\left(H,\left(SAC\right)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 18: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và $SA=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$

A. $\frac{\sqrt{13}}{13}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}a$. **C.** $\frac{9\sqrt{13}}{13}a$. **D.** $\frac{3\sqrt{13}}{13}a$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, O là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$

Ta có $\begin{cases} OM \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SOM) \perp BC$

Trong (SOM) kẻ $OH \perp SM\,(H \in SM)$ mà $OH \perp BC$ do $BC \perp (SOM)$

$\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OH$.

Ta có $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a; OM = \frac{1}{2}AO = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông SAO

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = a$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SOM có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \frac{SO.OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{a.\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}} = \frac{\sqrt{13}}{13}a$$

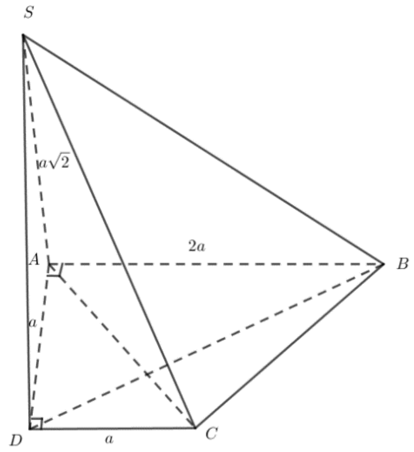
Ta có $\frac{d(A,(SBC))}{d(O,(SBC))} = \frac{AM}{OM} = 3 \Rightarrow d(A,(SBC)) = 3.d(O,(SBC)) = 3.OH = \frac{3\sqrt{13}}{13}a.$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; $AB = 2a,\ AD = DC = a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc vớI $(ABCD)$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) bằng?

A. $\frac{a\left(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}\right)}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABD}\Rightarrow V_{S.ABCD}=3V_{SBCD}\Rightarrow d\left(C;\left(SBD\right)\right)=\frac{V_{S.ABCD}}{S_{\Delta SBD}}$.

Mà $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{2}\frac{\left(a+2a\right)a}{2}=\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$

$SD=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{3};SB=\sqrt{\left(2a\right)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{6};BD=\sqrt{a^2+\left(2a\right)^2}=a\sqrt{5}$

Suy ra, $cos BSD=\frac{SB^2+SD^2-BD^2}{2.SB.SD}=\frac{2}{3\sqrt{2}}\Rightarrow \sin BSD=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

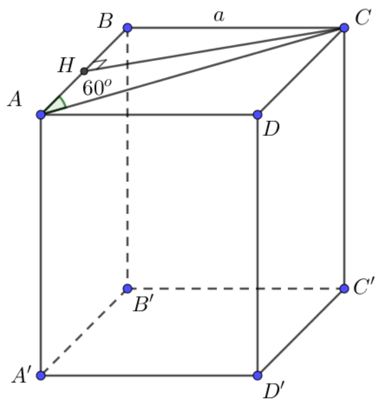
Từ đó, $S_{\Delta SBD}=\frac{1}{2}SB.SD.\sin BSD=\frac{a^2\sqrt{14}}{2}$.

Vậy $d\left(B;\left(SBD\right)\right)=\frac{\sqrt{2}a^3}{2}.\frac{2}{a^2\sqrt{14}}=\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 20: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BAC=60°$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$ bằng

A. $2a$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình thoi và $BAC=60°$ nên tam giác ABC là tam giác đều.

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó $CH\perp AB$.

Ta có $\begin{cases}CH\perp AB\\CH\perp BB'\end{cases}\Rightarrow CH\perp\left(ABB'A'\right)$.

Do đó $d\left(C;\left(ABB'A'\right)\right)=CH$.

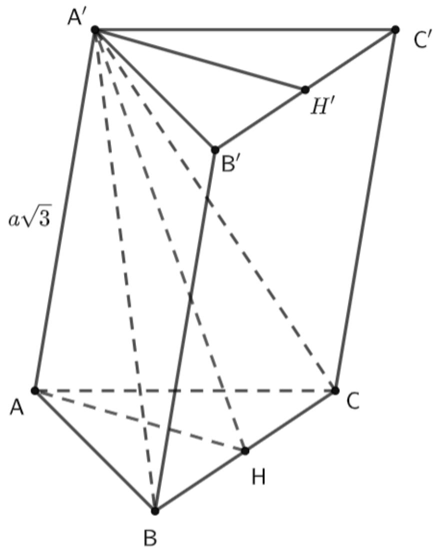
Vì ΔABC là tam giác đều nên $CH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông cân tại A. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm của cạnh BC. Biết cạnh $AA'=a\sqrt{3}$ và tạo với mặt đáy của hình lăng trụ một góc $60°$. Khoảng cách từ đỉnh C' đến mặt $\left(A'BC\right)$ bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Vì $A'H\perp\left(ABC\right)$ nên AH là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$. Khi đó góc giữa AA' và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là góc giữa AA' và AH, hay chính là góc $A'AH$.

Vì $A'H\perp\left(ABC\right)$ nên $A'H\perp AH$ hay tam giác $AA'H$ vuông tại H.

Khi đó $\cos A'AH=\dfrac{AH}{AA'}\Rightarrow AH=AA'.\cos A'AH=a\sqrt{3}.\cos 60°=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H' là trung điểm của cạnh $B'C'$.

Tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại A' nên $A'H'\perp B'C'$.

$A'H\perp\left(ABC\right)\Rightarrow A'H\perp\left(A'B'C'\right)\Rightarrow A'H\perp A'H'$.

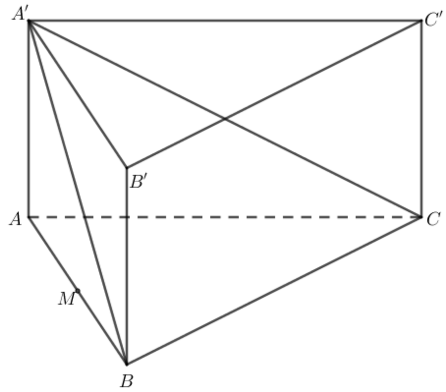
Ta có $\begin{cases}A'H'\perp B'C'\\A'H'\perp A'H\\A'H\cap BC=\left\{H\right\}\\A'H,BC\subset\left(A'BC\right)\end{cases}\Rightarrow A'H'\perp\left(A'BC\right)$.

Vì $BC\parallel B'C'$, $BC\subset\left(A'BC\right)$ nên $B'C'\parallel\left(A'BC\right)$.

Suy ra $d\left(C';\left(A'BC\right)\right)=d\left(B'C';\left(A'BC\right)\right)=d\left(H';\left(A'BC\right)\right)=A'H'=AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 22: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $4a$. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ và

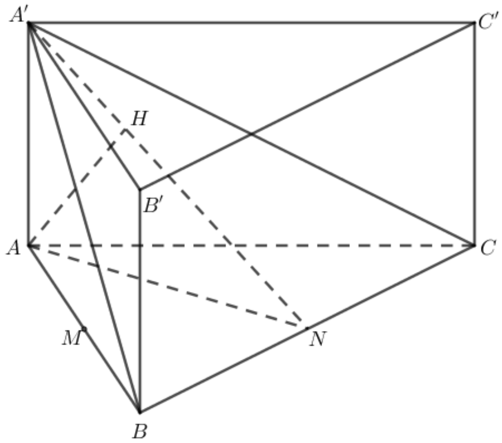
(ABC) bằng 30^o. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$?



A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $3a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của BC.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $BC \perp AN, AA'$ và $AN = 2a\sqrt{3}$. Suy ra $BC \perp (A'AN)$. Từ đó ta có: $\left((A'BC),(ABC)\right) = A'NA = 30^o$.

Gọi H là hình chiếu của A trên $A'N$, do $BC \perp (A'AN)$ nên: $AH \perp AN, BC$ $\Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow d\left(A,(A'BC)\right) = AH$.

Xét tam giác AHN vuông tại H có: $AH = AN\sin ANA' = a\sqrt{3}$. Suy ra $d\left(A,(A'BC)\right) = a\sqrt{3}$.

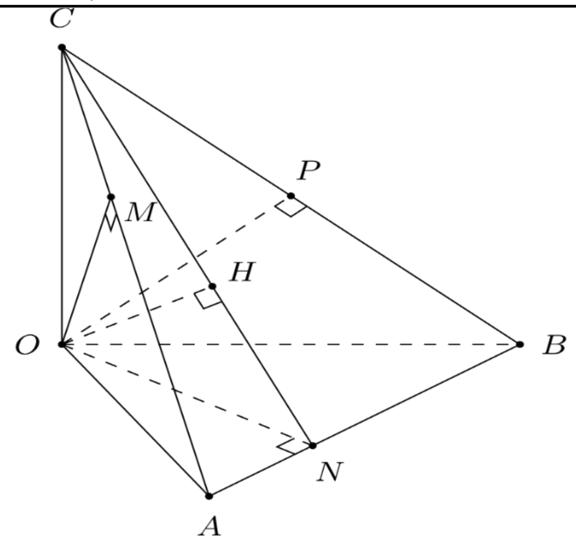
Mặt khác, M là trung điểm của cạnh AB nên $d\left(M,(A'BC)\right) = \frac{1}{2}d\left(A,(A'BC)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết khoảng cách từ điểm O đến các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt là a, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) theo a

A. $2a$. **B.** $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. **C.** $\frac{11a}{6}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{33}}{11}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $OM \perp AC$ $(M \in AC)$, $ON \perp AB$ $(N \in AB)$, $OP \perp BC$ $(P \in BC)$.

Khi đó ta có $OP = a$, $OM = a\sqrt{2}$, $ON = a\sqrt{3}$.

Trong (OCN) kẻ $OH \perp CN$ $(H \in CN)$ ta có:

$$\begin{cases} AB \perp ON \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCN) \Rightarrow AB \perp OH$$

$$\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp CN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC) \Rightarrow \mathrm{d}(O,(ABC)) = OH$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

Lại có:

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OC^2};\ \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2};\ \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2} = 2\left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{11}{12a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{11}{12a^2} \Rightarrow OH = \frac{2a\sqrt{33}}{11}$$

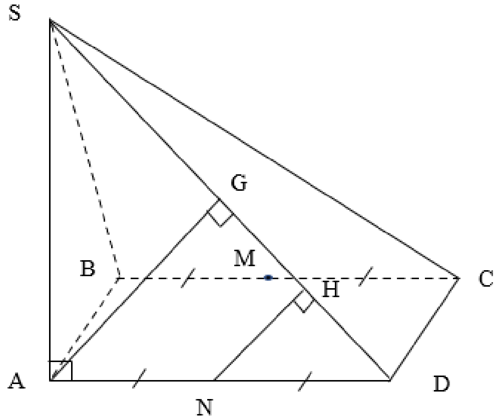
Vậy $\mathrm{d}(O,(ABC)) = \dfrac{2a\sqrt{33}}{11}$

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60^0, M là trung điểm của BC. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCD) là

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm của cạnh AD.

Gọi cạnh hình vuông $ABCD$ có độ dài là $x,(x>0)$.

Ta có: $MN \parallel CD \Rightarrow d\left(M;(SCD)\right)=d\left(N;(SCD)\right)$.

Kẻ $NH \perp SD, AG \perp SD \Rightarrow d\left(M;(SCD)\right)=d\left(N;(SCD)\right)=NH=\frac{1}{2}AG$.

Do SA vuông góc với $(ABCD)$ nên góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy là góc $SDA=60^0$.

$\Rightarrow \tan SDA=\frac{SA}{AD}\Rightarrow SA=AD.\tan 60^0=x\sqrt{3}.$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.x^2.x\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=a.$

Xét ΔSAD:

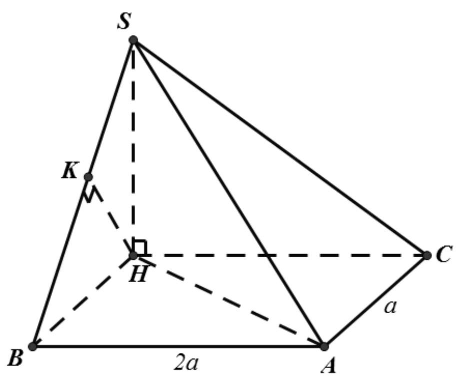
$\frac{1}{AG^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a\sqrt{3})^2}\Rightarrow AG=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow NH=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=2a,\ AC=a,\ SBA=SCA=90^0,$ góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45^0. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{30}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC).

$\begin{cases} AB \perp SH \\ AB \perp SB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHB) \Rightarrow AB \perp HB$ mà $AB \perp AC$ nên suy ra $HB//AC(1)$

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp SH \\ AC \perp SC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHC) \Rightarrow AC \perp HC$ mà $AC \perp AB$ nên suy ra $HC//AB(2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $ABHC$ là hình bình hành mà $A = 90^0$ nên $ABHC$ là hình chữ nhật.

và $(SA,(ABC)) = SAH = 45^0, SH = AH = a\sqrt{5}.$

$HC//(SAB) \Rightarrow d_{(C;(SAB))} = d_{(H;(SAB))}$

Gọi K là hình chiếu của H lên SB. Kẻ $HK \perp SB$

Mà $AB \perp (SHB) \Rightarrow AB \perp HK$

Suy ra $HK \perp (SAB)$.

$d_{(C;(SAB))} = d_{(H;(SAB))} = HK$.

ΔSHB vuông tại H . Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HB^2} = \dfrac{1}{5a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{6}{5a^2}$.

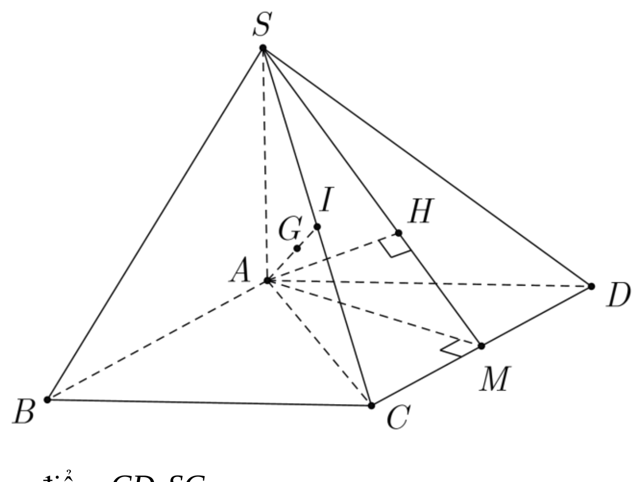
Vậy $HK = \dfrac{a\sqrt{30}}{6}$..

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $ADC = 60^0$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \sqrt{6}a$, G là trọng tâm tam giác SAC. Khoảng cách từ G đến (SCD) là

A. $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, I lần lượt là trung điểm CD, SC.

Theo giả thiết ta có tam giác ACD đều. Suy ra $AM = \dfrac{AD\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$.

Kẻ $AH \perp SM$ $(H \in SM)$ thì $AH \perp (SCD)$.

Ta có $GI = \dfrac{1}{3}AI$ nên $d(G,(SCD)) = \dfrac{1}{3}d(A,(SCD)) = \dfrac{1}{3}AH$

$=\frac{1}{3}.\frac{AM.SA}{\sqrt{AM^2+SA^2}}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a.\sqrt{6}a}{\sqrt{3a^2+6a^2}}=\frac{\sqrt{2}a}{3}$

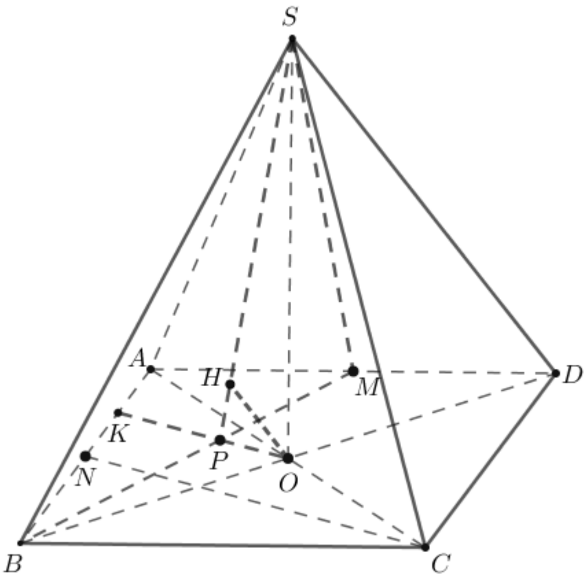
Vậy $d\left(G,\left(SCD\right)\right)=\frac{\sqrt{2}a}{3}$.

Câu 27: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Gọi M là trung điểm AD, tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng $\left(SBM\right)$ biết $SO=\frac{\sqrt{95}}{10}a$.

A. $\frac{\sqrt{95}}{5}a$. **B.** $\frac{\sqrt{95}}{100}a$. **C.** $\frac{\sqrt{19}}{5}a$. **D.** $\frac{\sqrt{19}}{10}a$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm cạnh AB suy ra $CN\perp BM$. Dựng đường thẳng qua O, song song với CN cắt BM tại P và AN tại K, suy ra $OP\perp BM\left(1\right)$.

Từ giả thiết suy ra $SO\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SO\perp BM\left(2\right)$.

Từ $\left(1\right),\left(2\right)$ suy ra $d\left(O,\left(SBM\right)\right)=d\left(O,SP\right)=OH$ (H là hình chiếu vuông góc của O lên SP)

Hai tam giác $\Delta BPK,\Delta MPO$ đồng dạng cho ta $\frac{PO}{PK}=\frac{OM}{KB}=\frac{2}{3}$

OK là đường trung bình của ΔACN nên $OK=\frac{CN}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}a\Rightarrow OP=\frac{2}{5}OK=\frac{2}{5}.\frac{\sqrt{5}}{4}a=\frac{\sqrt{5}}{10}a$.

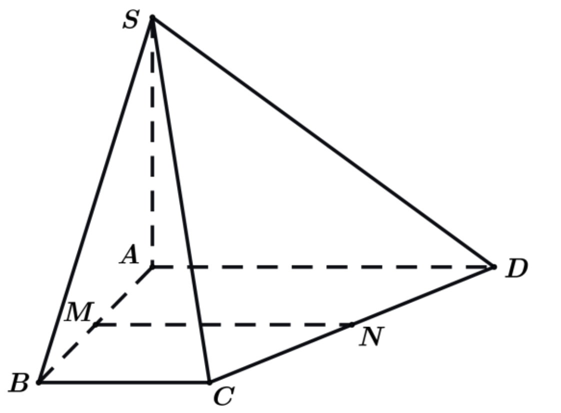
Vậy $d\left(D,\left(SBM\right)\right)=2d\left(O,\left(SBM\right)\right)=2OH=\frac{2SO.OP}{\sqrt{SO^2+OP^2}}=\frac{2.\frac{\sqrt{95}}{10}a.\frac{\sqrt{5}}{10}a}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{95}}{10}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{10}a\right)^2}}=\frac{\sqrt{19}}{10}a$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có chiều cao $AB=a$ và $SA\perp\left(ABCD\right)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $\left(SAD\right)$ bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $\begin{cases} MN//AD \\ MN \not\subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow MN//(SAD)$

$\Rightarrow d(MN,(SAD)) = d(M,(SAD))$

Vì $\begin{cases} MA \perp AD \\ MA \perp SA \end{cases} \Rightarrow MA \perp (SAD) \Rightarrow d(M,(SAD)) = MA$

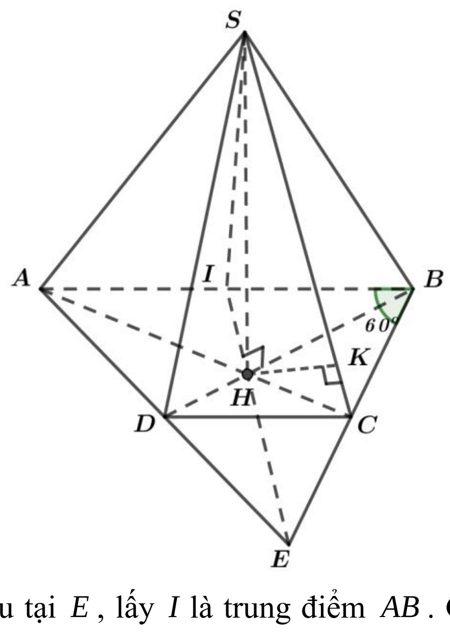
Vậy $d(MN,(SAD)) = d(M,(SAD)) = MA = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang cân có góc ở đáy bằng $60°$. $AB = 2CD = 2a$, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc $45°$. Hình chiếu vuông góc của S lên đáy trùng với giao điểm của AC và BD. Tính Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Kéo dài AD và BC cắt nhau tại E, lấy I là trung điểm AB. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên đáy, kẻ HK vuông góc với SC tại K.

Xét tam giác ABE có $ABE = BAE = 60^o$ nên ABE là tam giác đều và H là trực tâm

$$\Rightarrow \begin{cases} AC \perp BC \\ HI \perp AB \\ HI = HC = \dfrac{1}{3}EI = \dfrac{1}{3}2a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$\Delta SHA = \Delta SHB \Rightarrow SA = SB \Rightarrow SI \perp AB \Rightarrow \left((SAB),(ABCD)\right) = SIH = 45°$

$\Rightarrow SH = IH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Ta có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp HK$, ta lại có $\begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp BC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$

Suy ra khoảng cách từ H đến (SBC) là $HK = \dfrac{HS.HC}{\sqrt{HS^2 + HC^2}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Tam giác HAB đồng dạng với tam giác HCD và $AB = 2CD$ nên $\dfrac{AH}{HC} = \dfrac{AB}{CD} = 2$

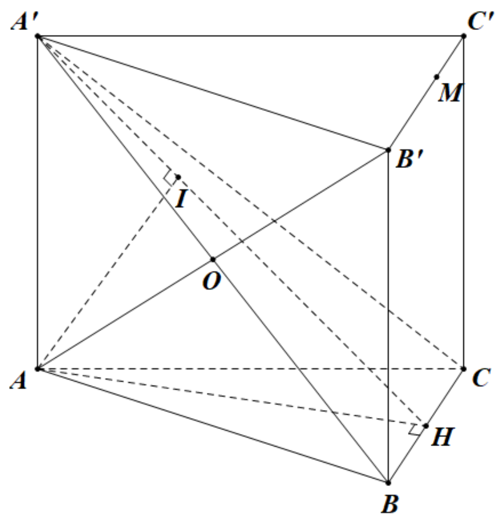
Vậy khoảng cách từ A đến (SBC) bằng 3 lần khoảng cách từ H đến (SBC) $= \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 30: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $45°$, M là điểm tùy ý thuộc cạnh $B'C'$. Khoảng các từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên là lăng trụ đứng có đáy ABC là tam giác đều.
Ta có $B'C' \parallel (A'BC)$ nên $d\left(M,(A'BC)\right) = d\left(B',(A'BC)\right)$.

Mà $AB' \cap (A'BC) = O$ với O là trung điểm AB' nên $d\left(B',(A'BC)\right) = d\left(A,(A'BC)\right)$.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC, I là hình chiếu của A lên $A'H$, ta chứng minh được $AI \perp (A'BC)$, suy ra $d\left(A,(A'BC)\right) = AI$.

Mà $\left((A'BC),(ABC)\right)=A'HA=45^\circ$ nên tam giác $A'AH$ vuông cân tại A, do đó

$A'H=AH\sqrt{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

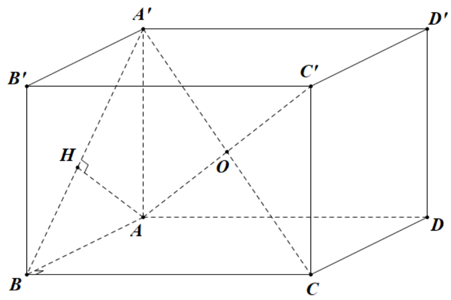
Mặt khác, AI là đường cao của tam giác $A'AH$ nên $AI=\dfrac{A'H}{2}=\dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 31: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng $2a$, $B'D=3a$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều nên là lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh $2a$, suy ra $BD=2a\sqrt{2}$.

Mà $B'D=3a\Rightarrow B'B=\sqrt{B'D^2-BD^2}=\sqrt{9a^2-8a^2}=a$.

Ta có $AC'\cap(A'BC)=O$ (với O là trung điểm của AC').

Suy ra $\mathrm{d}\left(C',(A'BC)\right)=\mathrm{d}\left(A,(A'BC)\right)$.

Gọi H là hình chiếu của A lên $A'B$, ta chứng minh được $AH\perp(A'BC)$.

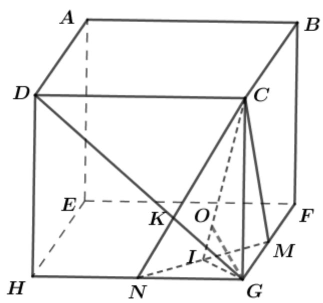
Suy ra $AH=\mathrm{d}\left(A,(A'BC)\right)$.

Tam giác $A'AB$ vuông tại A và có AH là đường cao nên

$AH=\dfrac{AA'\cdot AB}{\sqrt{AA'^2+AB^2}}=\dfrac{a\cdot 2a}{\sqrt{a^2+(2a)^2}}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh $4a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của FG,GH. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (CMN) bằng

A. $\dfrac{3}{4}a$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}a$. **D.** $\dfrac{2}{3}a$.



Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng $(CDHG)$ gọi $K = CN \cap DG$ suy ra $K \in DG, K \in (CMN)$ (1).

Dễ thấy hai tam giác ΔKCD và ΔKNG đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{DK}{GK} = \dfrac{CD}{NG} = 2$ $\quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $d\big(D,(CMN)\big) = 2d\big(G,(CMN)\big)$.

Gọi I là trung điểm $MN \Rightarrow GI \perp MN \Rightarrow MN \perp (ICG)$.

Ngoài ra ta còn có $\begin{cases} (ICG) \cap (CMN) = IC \\ MN \subset (CMN) \end{cases} \Rightarrow (ICG) \perp (CMN)$

Trong mặt phẳng (ICG) gọi O là hình chiếu vuông góc của G trên $IC \Rightarrow d\big(G,(CMN)\big) = GO$

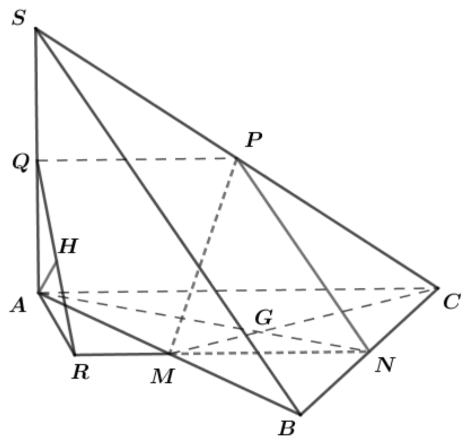
Hình chóp $G.MNC$ có các cặp cạnh GM, GN, GC đôi một vuông góc nên ta có:

$$\frac{1}{GO^2} = \frac{1}{GM^2} + \frac{1}{GN^2} + \frac{1}{GC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow GO = \frac{2}{3}a$$

Vậy $d\big(D,(CMN)\big) = 2d\big(G,(CMN)\big) = \dfrac{4}{3}a$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, trọng tâm G, $SA = 2a, AB = 4\sqrt{3}a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CS. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (MNP) bằng

A. $\dfrac{3a\sqrt{10}}{20}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{20}$.



Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng (ABC) đường thẳng qua A và vuông góc với MN cắt MN tại R.

Gọi Q là trung điểm của $SA \Rightarrow PQ$ song song với $MN \Rightarrow Q \in (MNP)$

Ta chứng minh được $MN \perp (RAQ) \Rightarrow (PMN) \perp (RAQ)$.

Trong mặt phẳng (RAQ) gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên RQ thì $AH = d\big(A,(MNP)\big)$
.

Do $A \in AC, R \in MN$ mà MN song song với AC nên

$$AR = d(MN, AC) = \frac{1}{2}d(B, AC) = \frac{4\sqrt{3}a.\sqrt{3}}{4} = 3a$$

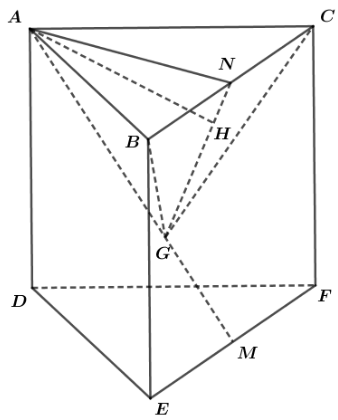
Xét tam giác RAQ vuông tại A, đường cao AH có:

$$AH = \frac{AQ.AR}{\sqrt{AQ^2 + AR^2}} = \frac{a.3a}{\sqrt{a^2 + (3a)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}a.$$

Vậy $d\left(G,(MNP)\right) = \frac{1}{3}d\left(A,(MNP)\right) = \frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Câu 34: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.DEF$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác AEF. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (GBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{19}}{19}a$. **B.** $\frac{\sqrt{57}}{19}a$. **C.** $\frac{2\sqrt{57}}{19}a$. **D.** $\frac{2\sqrt{19}}{19}a$.



Lời giải

Chọn C

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF, BC. Hai mặt phẳng (AGN) và (GBC) có:

$$\Rightarrow \begin{cases} (AGN) \cap (GBC) = GN \\ BC \subset (GBC),\ BC \perp AN, BC \perp GN \Rightarrow (AGN) \perp (GBC) \\ AN, GN \subset (AGN), AN \cap GN = N \end{cases}$$

Trong mp(AGN), gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên GN suy ra $d\left(A,(GBC)\right) = AH$.

$$AN = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2},$$

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a\sqrt{7}}{3},\ \cos GAN = \frac{AN}{AM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$GN = \sqrt{AG^2 + AN^2 - 2AG.AN.\cos GAN} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{7}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2.\frac{a\sqrt{7}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{\frac{3}{7}}} = \frac{\sqrt{19}}{6}a$$

$$S_{AGN} = \frac{2}{3}S_{AMN} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a = \frac{\sqrt{3}}{6}a^2$$

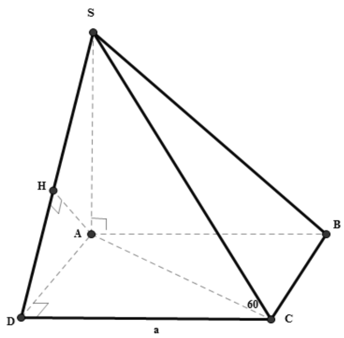
Vậy $d\left(A,(GBC)\right) = AH = \frac{2S_{ABC}}{GN} = \frac{2.\frac{\sqrt{3}}{6}a^2}{\frac{\sqrt{19}}{6}a} = \frac{2\sqrt{57}}{19}a$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính khoảng cách h từ AB đến mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ theo giao tuyến SD, dựng $AH \perp SD$, mà $AH \in (SAD) \Rightarrow AH \perp (SCD)$

Ta có $AB // (SCD)$ nên $h = d\left(AB,(SCD)\right) = d\left(A,(SCD)\right) = AH$

Theo đề góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$ nên $SCA = 60°$.

Ta có: $\tan 60° = \dfrac{SA}{AC} \Rightarrow SA = a\sqrt{6}$

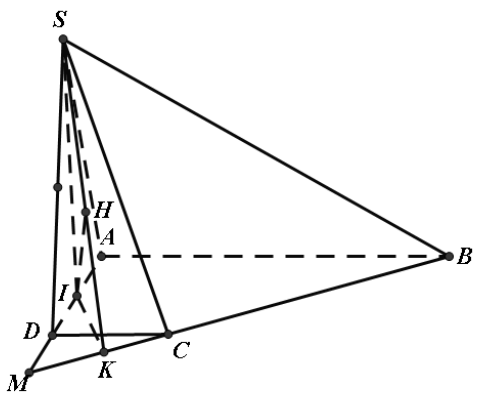
Và $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

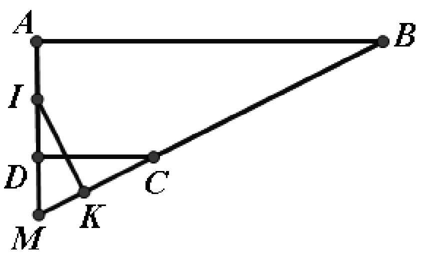
Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 3a$, $AD = DC = a$. Gọi I là trung điểm của AD, biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Tính theo a khoảng cách từ trung điểm cạnh SD đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{17}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{19}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải

Chọn D





Kẻ $IK \perp BC\left(K \in BC\right) \Rightarrow \left(\left(SBC\right);\left(ABCD\right)\right) = SKI = 60^0$

Gọi $M = AD \cap BC$. Ta có $\dfrac{MD}{MA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MD = \dfrac{a}{2}$

Ta có ΔMIK đồng dạng với ΔMBA nên suy ra $\dfrac{IK}{BA} = \dfrac{MI}{MB} = \dfrac{a}{\sqrt{\left(3a\right)^2 + \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

$\Rightarrow IK = \dfrac{2\sqrt{5}}{15}.3a = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

Gọi N là trung điểm của SD.

Ta có $d\left(N,\left(SBC\right)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(D,\left(SBC\right)\right) = \dfrac{1}{4}d\left(I,\left(SBC\right)\right)$

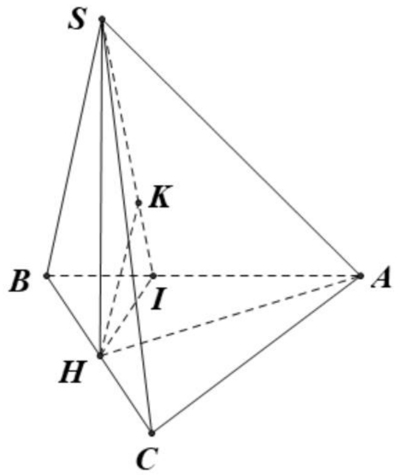
Từ I kẻ $IH \perp SK$ suy ra $IH = d\left(I,\left(SBC\right)\right) = IK.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{15}}{5} \Rightarrow d\left(N,\left(SBC\right)\right) = \dfrac{a\sqrt{15}}{20}$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$, mặt bên SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $ASB = ASC = 60^o, SB = 1$. Biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$ bằng $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ (a,b là hai số nguyên dương nhỏ hơn 10), tính $2a+b$.

A. $2a+b=18$. **B.** $2a+b=15$. **C.** $2a+b=8$. **D.** $2a+b=12$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC suy ra $SH \perp \left(ABC\right)$.

Ta có $d\left(C;\left(SAB\right)\right) = 2d\left(H;\left(SAB\right)\right)$.

Kẻ $HI \perp AB; HK \perp SI$ suy ra $d\left(H;\left(SAB\right)\right) = HK$.

Vì ΔSBC đều, $SB = 1$ suy ra $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Đặt $SA = x \Rightarrow AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2.SA.SB.\cos ASB} = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Ta lại có $\Delta ASB = \Delta ASC \Rightarrow AB = AC \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{x^2 - x + \dfrac{3}{4}}$.

Mà tam giác SHA vuông tại H nên $SA^2 = SH^2 + HA^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{3}{4} + x^2 - x + \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Suy ra $AB=\dfrac{\sqrt{7}}{2};AH=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow HI=\dfrac{BH.AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

Từ đó ta có $HK=\dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2+HI^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

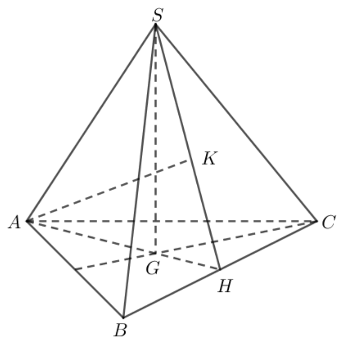
Suy ra $d\left(C;\left(SAB\right)\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow a=6;b=3\Rightarrow 2a+b=15$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và đỉnh S cách đều các điểm A, B, C. Biết $SA=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$, tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{13}}{13}a$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}a$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{13}}{13}a$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}a$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC và G là trọng tâm $\Delta ABC\Rightarrow SG\perp\left(ABC\right)$ và $AH\perp BC$.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp SG\\BC\perp AH\\SG\cap AH=G\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(SAH\right)$.

Trong $\left(SAH\right)$, kẻ $AK\perp SH\Rightarrow AK\perp\left(SBC\right)\Rightarrow d\left(A,\left(SBC\right)\right)=AK$.

Lại có: $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AG=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $GH=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

ΔSAG vuông tại G có: $SG=\sqrt{SA^2-AG^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=a$.

ΔSGH vuông tại G có: $SH=\sqrt{SG^2+GH^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.

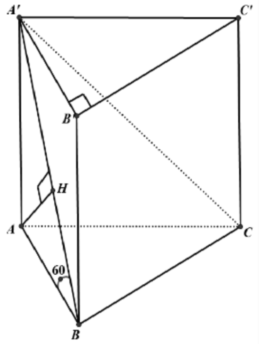
Ta có: $AK.SH=SG.AH\Rightarrow AK=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{39}}{6}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}a$.

Câu 39: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B ,. Góc giữa cạnh $A'B$ và mặt đáy là 60°. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$.

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn A



Góc giữa cạnh $A'B$ và mặt đáy là $A'BA$ bằng $60°$. Suy ra $AA' = \text{AB}.\tan 60^{\text{o}} = a\sqrt{15}$

Kẻ AH vuông góc với $A'B$ ta chứng minh được AH là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$.

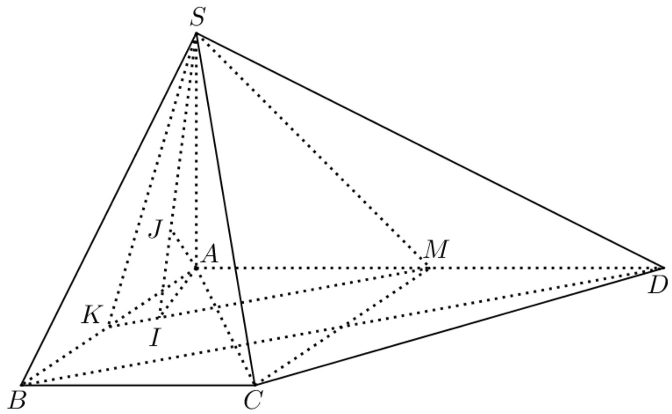
Tam giác $A'AB$ vuông tại A nên $AH = \dfrac{AA'.\text{AB}}{\sqrt{AA'^2 + \text{AB}^2}} = \dfrac{a\sqrt{15}.a\sqrt{5}}{\sqrt{20a^2}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B; $AB = BC = a$; $AD = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD là:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{11}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{22}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\left(SC,\left(ABCD\right)\right) = SCA = 45^0 \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$

Gọi K là trung điểm của AB, khi đó AB song song với $\left(SMK\right)$.

Do đó $d\left(BD, SM\right) = d\left(BD,\left(SMK\right)\right) = d\left(B,\left(SMK\right)\right) = d\left(A,\left(SMK\right)\right)$.

Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MK và SI.

Khi đó $MK \perp AI, MK \perp SA \Rightarrow MK \perp AJ$. Do $AJ \perp MK$ và $AJ \perp SI$ nên $AJ \perp \left(SMK\right)$ hay $d\left(A,\left(AMK\right)\right) = AJ$.

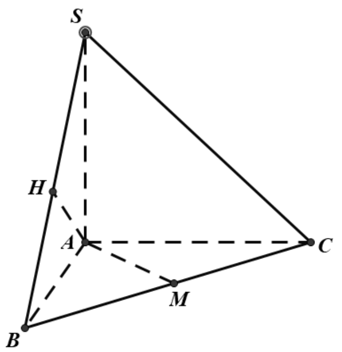
Ta có $\dfrac{1}{AJ^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{11}{2a^2} \Rightarrow AJ = \dfrac{a\sqrt{22}}{11}$

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $\left(ABC\right)$ thỏa mãn $AB = a, AC = 2a, BAC = 120°$; SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA=a$. Gọi M là trung điểm của BC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.cosBAC=7a^2\Rightarrow BM^2=\frac{7a^2}{4}$

$AM^2=\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$; $AB^2+AM^2=BM^2\Rightarrow\triangle ABM$ vuông tại A

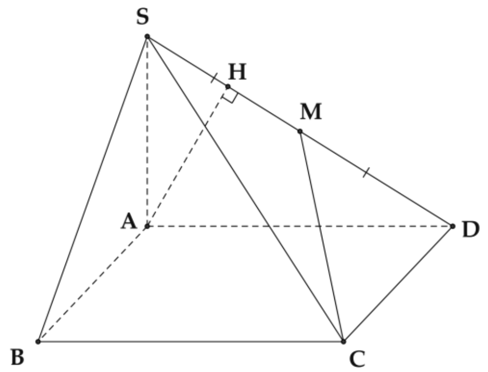
Ta có $\begin{cases}AM\perp AB\\AM\perp SA\\SA\cap AB\end{cases}\Rightarrow AM\perp(SAB)$. Trong mp$(SAB)$, kẻ $AH\perp SB$, vậy AH là đoạn vuông góc chung của AM và SB. Do $\triangle SAB$ vuông cân đỉnh S nên $AH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AB//CD$ nên $AB//(SCD)$.

Khi đó $d(AB,CM)=d(AB,(SCD))=d(A,(SCD))$.

Ta có $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)\Rightarrow(SCD)\perp(SAD)$.

Trong mặt phẳng (SAD) vẽ $AH \perp SD$ tại H.

Khi đó $\begin{cases} (SAD) \perp (SCD) \\ (SAD) \cap (SCD) = SD \\ \text{Trong}(SAD): AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d\left(A;(SCD)\right) = AH$.

Ta có $AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}.a}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

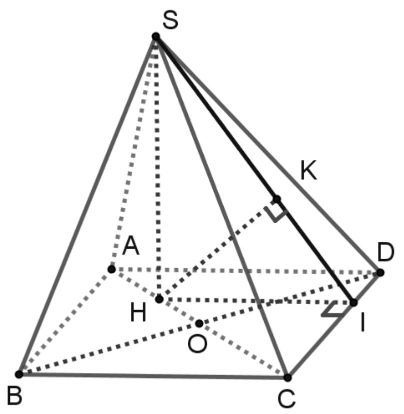
Vậy $d\left(AB, CM\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

A. $d = 4a$. **B.** $d = 2a$. **C.** $d = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. **D.** $d = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là hình chiếu của H trên $CD \Rightarrow HI \perp CD$. Gọi K là hình chiếu của H trên $SI \Rightarrow HK \perp SI$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SH \ \left(SH \perp (ABCD)\right) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHI) \Rightarrow CD \perp HK$.

Ta có $\begin{cases} HK \perp CD \\ HK \perp SI \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SCD) \Rightarrow d\left(H;(SCD)\right) = HK$.

Ta có $HI = \dfrac{3}{4}AD = 3a;\ AC = 4\sqrt{2}a \Rightarrow AH = \sqrt{2}a$.

Xét ΔSHA có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$.

Xét ΔSHI có $HK = \dfrac{HI.SH}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \dfrac{3}{2}a$.

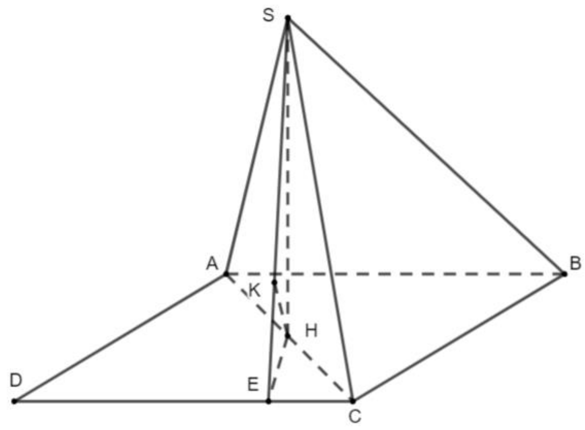
Ta có $AB // (SCD) \Rightarrow d\left(AB;(SCD)\right) = d\left(A;(SCD)\right) = \dfrac{4}{3}d\left(H;(SCD)\right) = \dfrac{4}{3}HK = 2a$.

Câu 44: Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa SC và AB.

A. $d=\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $d=\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $d=\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d=\frac{2a\sqrt{30}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Do $(SAC)\perp(ABCD), SH\perp AC$ (H là trung điểm của AC) thì $SH\perp(ABCD)$.

Kẻ $CD /\!/ AB, (CD=AB)$, ta có $d(SC,AB)=d(AB,(SCD))=d(A,(SCD))=2d(H,(SCD))$.

Kẻ $HE\perp DC$, mà $SH\perp DC\Rightarrow DC\perp(SHE)$, kẻ $HK\perp SE, HK\perp DC(DC\perp(SHE))$ suy ra $HK\perp(SCD)$ hay $d(H,(SCD))=HK$.

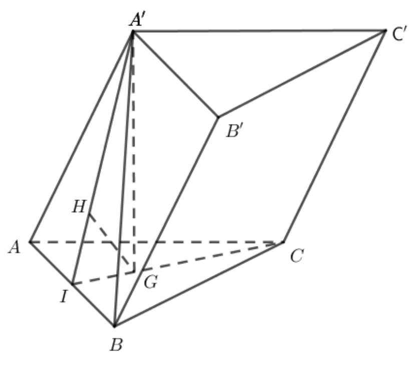
Ta có tam giác SAC vuông cân tại S nên $SH=\frac{1}{2}AC=a$, $HE=HC.\sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $HK=\frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}a$ suy ra $d(SC,AB)=\frac{2\sqrt{21}}{7}a$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC và diện tích tam giác $A'AB$ bằng $\frac{a^2}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và AB'.

A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn mặt phẳng $(AA'B'A)$ chứa AB' và song song với CC'.

Khi đó $d(AB',CC')=d(CC',(AA'B'B))=d(C,(AA'B'B))$.

Gọi I là trung điểm của AB. Vì tam giác ABC đều nên $CI\perp AB\Rightarrow GI\perp AB$.

Vì $\begin{cases} A'G \perp AB \\ GI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'GI) \Rightarrow AB \perp A'I$.

$GI = \dfrac{1}{3}CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vì diện tích tam giác $A'AB$ bằng $\dfrac{a^2}{4}$ nên $\dfrac{1}{2}A'I.AB = \dfrac{a^2}{4} \Leftrightarrow A'I = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra $A'G = \sqrt{A'I^2 - GI^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{36}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Trong mặt phẳng $(A'GI)$ kẻ $GH \perp A'I$ $(H \in A'I)$.

Khi đó $\begin{cases} GH \perp A'I \\ GH \perp AB \quad (AB \perp (A'GI)) \end{cases}$ suy ra $GH \perp (AA'B'B) \Rightarrow d(G,(AA'B'B)) = GH$.

Xét tam giác $\Delta A'GI$ vuông tại G có

$$GH.A'I = A'G.GI \Rightarrow d(G,(AA'B'B)) = GH = \frac{A'G.GI}{A'I} = \frac{\dfrac{a\sqrt{6}}{6}.\dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Ta lại có $\dfrac{d(C,(AA'B'B))}{d(G,(AA'B'B))} = \dfrac{CI}{GI} = 3 \Rightarrow d(C,(AA'B'B)) = 3.d(G,(AA'B'B)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

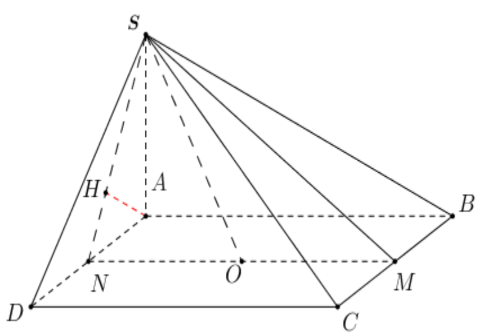
Vậy $d(AB',CC') = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $SBD = 60°$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD. Dựng $AH \perp SN$

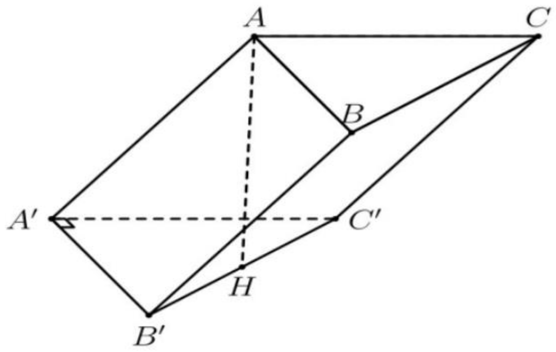
Khi đó $d(AB;SO) = d(AB,(SMN)) = d(A,(SMN)) = AH$

Do tam giác SBD có $SBD = 60°$ và $SB = SD$ nên SBD là tam giác đều

Suy ra $SD = BD = a\sqrt{2}$, do đó $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = a$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AN^2} \Leftrightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5} = d(AB,SO)$.

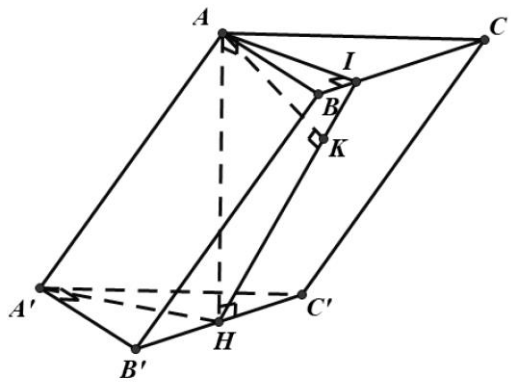
Câu 47: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}, AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm H của đoạn $B'C'$ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $AI \perp BC, AK \perp HI$.

Do $AH \perp (A'B'C') \Rightarrow AH \perp B'C' \Rightarrow AH \perp BC$ mà $AI \perp BC$ nên $BC \perp (AHI) \Rightarrow BC \perp AK$.

Vì $AK \perp BC, AK \perp HI \Rightarrow AK \perp (BB'C'C)$.

Vì $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BB'C'C) \Rightarrow d(AA', BC') = d(AA', (BB'C'C)) = d(A, (BB'C'C)) = AK$.

Xét tam giác ABC có đường cao AI nên

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3}a}{2} \text{ ; } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a.$$

Xét tam giác $A'B'C'$ có đường trung tuyến AH nên $A'H = \dfrac{1}{2}B'C' = \dfrac{1}{2}BC = a$.

Xét tam giác $AA'H$ vuông tại H (do $AH \perp (A'B'C') \Rightarrow AH \perp A'H$) nên

$$AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a.$$

Xét tam giác AHI vuông tại A (do $AH \perp (A'B'C') \Rightarrow AH \perp (ABC) \Rightarrow AH \perp AI$) có đường cao AK

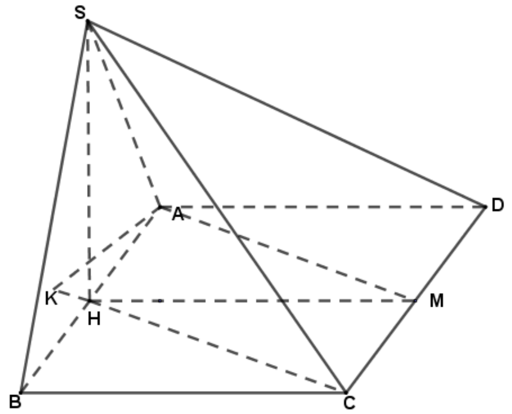
nên $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{5}{3a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{\sqrt{15}a}{5} \Rightarrow d(AA', BC') = \dfrac{\sqrt{15}a}{5}$.

Câu 48: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của CD, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SC theo a.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của cạnh AB, do tam giác SAB cân tại S nên $SH \perp AB$.

Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\SH\perp AB\end{cases} \Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, xét tam giác BHC vuông tại B có:

$$CH=\sqrt{BH^2+BC^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Do H, M lần lượt là trung điểm của cạnh AB, CD nên $AM // CH$.

Ta có $\begin{cases}AM//HC\\HC\subset(SHC), AM\not\subset(SHC)\end{cases}\Rightarrow AM//(SHC)$.

$\Rightarrow d(AM,SC)=d(AM,(SHC))=d(A,(SHC))$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, từ A kẻ $AK\perp HC$, mặt khác có $SH\perp(ABCD)$ nên $SH\perp AK$, do đó $AK\perp(SHC)$. Vậy $d(A,(SHC))=AK$.

Ta có $\Delta BHC\sim\Delta KHA(g.g)$ nên $\frac{AK}{BC}=\frac{AH}{CH}\Rightarrow AK=\frac{AH}{CH}.BC=\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

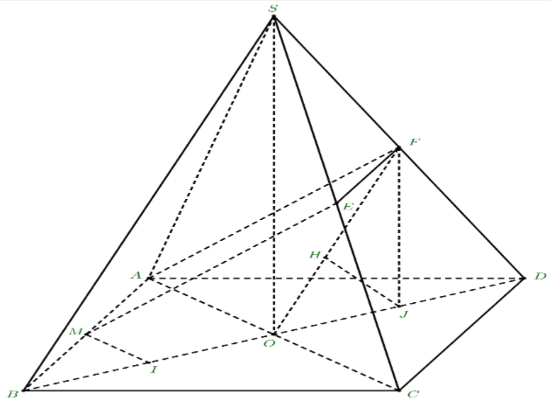
Vậy $d(AM,SC)=d(A,(SHC))=\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 49: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD. Gọi M, E, F lần lượt là trung điểm của AB, SC, SD. Biết $SO=a; AB=2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng ME và CF bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}a$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{6}a$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{6}a$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của OB, OD.

Có O là trung điểm của IJ .

Có $FJ\,//\,SO \Rightarrow FJ \perp (ABCD)$.

Có $AFEM$ là hình bình hành nên $ME\,//\,AF \Rightarrow ME\,//\,(AFC)$.

$\Rightarrow d(ME,CF) = d(ME,(AFC)) = d(M,(AFC)) = d(I,(AFC)) = d(J,(AFC))$

Trong (SBD) kẻ JH vuông góc với OF tại H, dễ có JH vuông (AFC).

Có $FJ = \dfrac{a}{2}, JO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$,

$$\frac{1}{JH^2} = \frac{1}{JF^2} + \frac{1}{JO^2} \Rightarrow JH = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

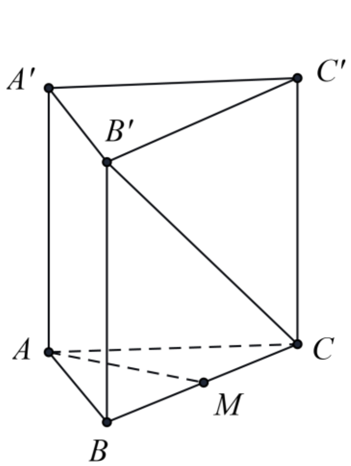
Vậy $d(ME,CF) = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

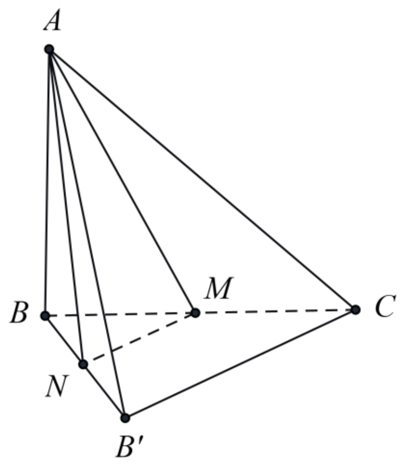
Câu 50: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách d của hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn D





Tam giác ABC vuông và $AB = BC = a$ nên ΔABC chỉ có thể vuông tại B.

Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCB')$.

Kẻ $MN \,//\, B'C \Rightarrow B'C \,//\, (AMN)$

$\Rightarrow d = d(B'C, MN) = d(B'C,(AMN)) = d(C,(AMN)) = d(B,(AMN))$.

Vì tứ diện $BAMN$ là tứ diện vuông nên

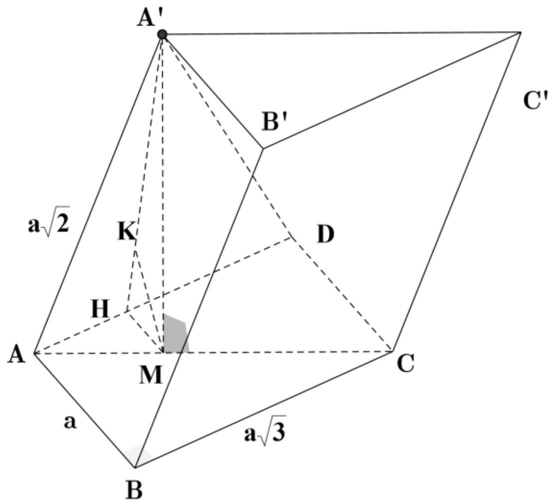
$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Câu 51: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BC = a\sqrt{3}, AB = a$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt đáy là điểm M thoả mãn $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng

A. $\frac{a\sqrt{210}}{15}$. **B.** $\frac{a\sqrt{210}}{45}$. **C.** $\frac{a\sqrt{714}}{17}$. **D.** $\frac{a\sqrt{714}}{51}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng hình bình hành $ABCD$, vì tam giác ABC là tam giác vuông tại B nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

Suy ra $BC \,//\, AD \Rightarrow BC \,//\, (A'AD)$.

Do đó $d(BC, AA') = d(BC,(A'AD)) = d(C,(A'AD))$.

Mà $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$ nên $d(C,(A'AD)) = 3d(M,(A'AD))$.

Kẻ $MH \perp AD \Rightarrow (A'MH) \perp (A'AD) = A'H$.

Kẻ $MK \perp A'H \Rightarrow MK \perp (A'AD) \Rightarrow MK = d(M,(A'AD))$.

Mặt khác ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow AM = \frac{1}{3}AC = \frac{2a}{3} \Rightarrow A'M = \sqrt{A'A^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{14}}{3}$.

Và $MH \,//\, CD \Rightarrow \frac{MH}{CD} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MH = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}AB = \frac{a}{3}$.

Suy ra $\frac{1}{MK^2} = \frac{1}{A'M^2} + \frac{1}{MH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{MK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{14}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{MK^2} = \frac{135}{14a^2} \Leftrightarrow MK = \frac{a\sqrt{210}}{45}$

.

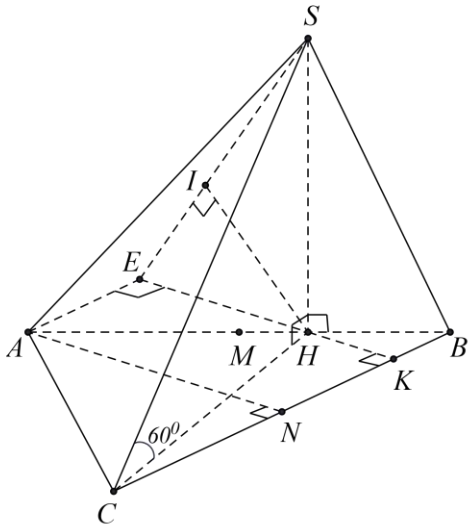
Vậy $d\left(BC,AA'\right)=d\left(C,\left(A'AD\right)\right)=3d\left(M,\left(A'AD\right)\right)=3MK=3\dfrac{a\sqrt{210}}{45}=\dfrac{a\sqrt{210}}{15}$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA=2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

A. $\dfrac{\sqrt{42}}{8}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{42}}{6}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{42}}{4}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{42}}{3}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi N là trung điểm BC. Trong mặt phẳng (ABC) dựng đường thẳng d qua A và song song với BC.

Qua H dựng đường thẳng song song với AN cắt d tại E và cắt BC tại K. Khi đó tứ giác $AEKN$ là hình chữ nhật.

Ta có: $BC//AE\Rightarrow BC//(SAE)\Rightarrow d\left(BC,SA\right)=d\left(BC,(SAE)\right)=d\left(K,(SAE)\right)$

Mặt khác $\dfrac{HB}{HA}=\dfrac{HK}{HE}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{KH}{KE}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow d\left(K,(SAE)\right)=\dfrac{3}{2}d\left(H,(SAE)\right)$.

Ta có $\begin{cases}AE\perp SH\\AE\perp KE\end{cases}\Rightarrow AE\perp(SHE)\Rightarrow(SHE)\perp(SAE)$

Trong mặt phẳng (SHE) kẻ $HI\perp SE$ tại I. Từ đó suy ra:

$HI\perp(SAE)\Rightarrow d\left(H,(SAE)\right)=HI\Rightarrow d\left(BC,SA\right)=\dfrac{3}{2}HI.$

$HK=\dfrac{1}{3}AN\Rightarrow EH=\dfrac{2}{3}AN=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow HI=\dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\dfrac{a\sqrt{42}}{6}$.

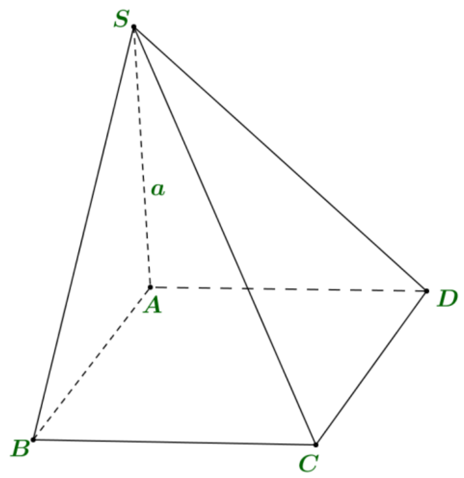
Vậy $d\left(SA,BC\right)=\dfrac{a\sqrt{42}}{4}$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB bằng a. Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SD.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a$. **D.** $\frac{4a}{3}$.

Lời giải

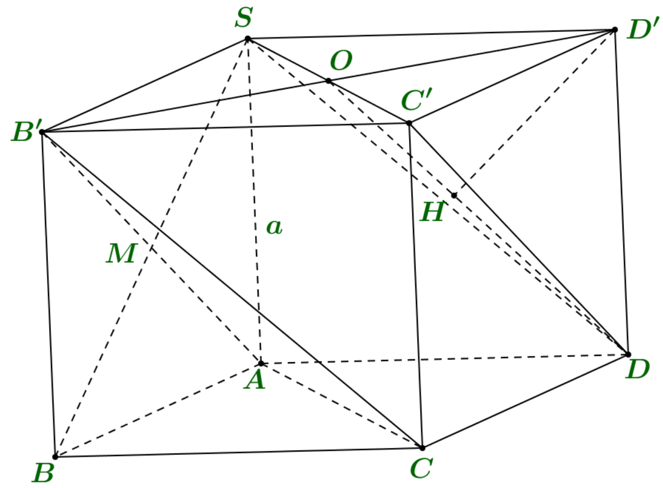
Chọn B



Ta có $CD//AB \Rightarrow CD//(SAB) \Rightarrow d(CD,SB) = d(CD,(SAB)) = d(D,(SAB))$.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD$. Mà $ABCD$ là hình vuông nên: $AD \perp AB \Rightarrow DA \perp (SAB) \Rightarrow DA = d(CD,SB) = a$.

Dựng hình lập phương $ABCD.SB'C'D'$ như hình vẽ.



Ta có:

$AB'//DC' \Rightarrow AB'//(SC'D) \Rightarrow d(AM,SD) = d(AB',SD) = d(A,(SC'D)) = d(D',(SC'D))$.

Gọi $O = SC' \cap B'D' \Rightarrow SC' \perp D'O$ mà $D'D \perp SC' \Rightarrow SC' \perp (ODD') \Rightarrow (SC'D) \perp (OD'D)$

Trong mặt phẳng (DOD') kẻ $D'H \perp OD$ tại H. Suy ra $D'H \perp (SC'D) \Rightarrow d(AM,SD) = D'H$.

Ta có $D'O = \frac{a\sqrt{2}}{2}, D'D = a \Rightarrow d(AM,SD) = D'H = \frac{D'O.D'D}{\sqrt{D'O^2 + D'D}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $d(AM,SD) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

DẠNG 5 BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bất phương trình logarit cơ bản

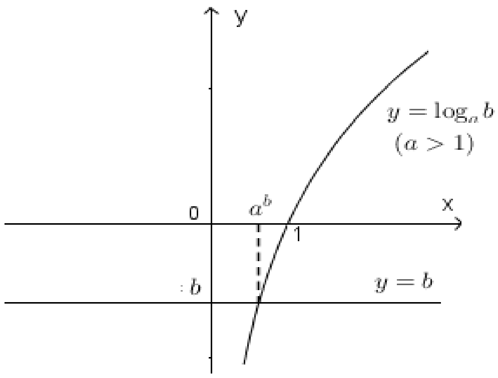
Bất phương trình logarit cơ bản có dạng: $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \ge b, \log_a x < b, \log_a x \le b$) với $a > 0, a \ne 1$.

Xét bất phương trình $\log_a x > b$.

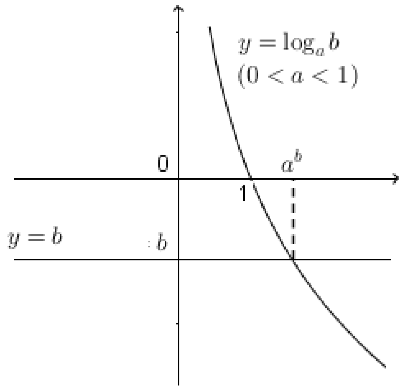
- Trường hợp $a > 1$, ta có: $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$.
- Trường hợp $0 < a < 1$, ta có: $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$.

Ta minh họa bằng đồ thị như sau.

Với $a > 1$, ta có đồ thị sau.



Với $0 < a < 1$, ta có đồ thị sau.



- Quan sát đồ thị, ta thấy rằng:
  - Trường hợp $a > 1$: $\log_a x > b$ khi và chỉ khi $x > a^b$.
  - Trường hợp $0 < a < 1$: $\log_a x > b$ khi và chỉ khi $0 < x < a^b$.

Các phương pháp giải bất phương trình logarit :

- Phương pháp đưa về cùng cơ số : $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < a < 1\\ f(x) < g(x)\end{cases}\\ \begin{cases}a > 1\\ f(x) > g(x)\end{cases}\end{array}\right.$
- Phương pháp logarit hóa : $\log_a f(x) > b \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a > 1\\ f(x) > a^b\end{cases}\\ \begin{cases}0 < a < 1\\ 0 < f(x) < a^b\end{cases}\end{array}\right.$
- Phương pháp hàm số.

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 39 – Đề tham khảo 2023. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3\frac{x^2-16}{343}<\log_7\frac{x^2-16}{27}$?

A. 193. **B.** 92. **C.** 186. **D.** 184.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

Ta có: $\log_3\frac{x^2-16}{343}<\log_7\frac{x^2-16}{27}$

$\Leftrightarrow \log_3 7.\left[\log_7\left(x^2-16\right)-3\right]<\log_7\left(x^2-16\right)-3\log_7 3$

$\Leftrightarrow (\log_3 7-1).\log_7\left(x^2-16\right)<3\log_3 7-3\log_7 3$

$\Leftrightarrow \log_7\left(x^2-16\right)<\frac{3(\log_3 7-\log_7 3)}{\log_3 7-1}\Leftrightarrow \log_7\left(x^2-16\right)<3(1+\log_7 3)$

$\Leftrightarrow \log_7\left(x^2-16\right)<\log_7 21^3\Leftrightarrow x^2-16<21^3\Leftrightarrow -\sqrt{9277}<x<\sqrt{9277}$

Kết hợp điều kiện ta có $x\in\{-96;-95;...;-5;5;...;95;96\}$. Vậy có 184 số nguyên x thỏa mãn.

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3\frac{x^2-9}{125}\le\log_5\frac{x^2-9}{27}$?

A. 116. **B.** 58. **C.** 117. **D.** 100.

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $3.\log_5\frac{x^2+4x-5}{512}<\log_2\frac{x^2+4x-5}{125}$?

A. 490. **B.** 502. **C.** 500. **D.** 498.

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$?

A. 24. **B.** 26. **C.** 25. **D.** Vô số.

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $\log_{2\sqrt{3}}\frac{x^2-25}{324}<\log_{3\sqrt{2}}\frac{x^2-25}{144}$?

A. 432. **B.** 434 **C.** 216. **D.** 217.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)=-x^3+\frac{13}{2}x^2-12x-e^x-2022$. Cho biết bất phương trình ẩn m sau đây $f\left[\log_{0,5}\left(\log_2(2m+1)\right)-2021\right]<f\left[f(0)\right]$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 14. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 7.

Câu 6: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_x\left(\log_2(4^x-6)\right)\le 1$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên a thỏa mãn $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)>2\log_2\sqrt{a}$.

A. 4096. **B.** 4095. **C.** 4094. **D.** 4093.

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right]\le 0$?

A. 24. **B.** 26. **C.** Vô số. **D.** 25.

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3\dfrac{(x^2-4x)^2}{4096}<\log_2\dfrac{x^2-4x}{27}$?

A. 78. **B.** 80. **C.** 76. **D.** 82.

Câu 10: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình sau?

$$\left(3^{2x}-2188\cdot 3^{x-2}+27\right)\sqrt{3-\log_3\left(x^2+18\right)}\le 0.$$

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 11: Bất phương trình $\left(x^2-4\left(x-1\right)\right)\log_{\frac{1}{e}}\left(-x^2+4x+1\right)<0$ có tổng tất cả các nghiệm nguyên là?

A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 12: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn

$$\log_3\left(\frac{2x^2-5x+2}{1000}\right)+\log 3.\log\left(\frac{2x^2-5x+2}{27}\right)<\log(2x^2-5x+2)?$$

A. 234. **B.** 230. **C.** 288. **D.** 232.

Câu 13: Có bao nhiêu số nguyên x nhỏ hơn 2022 thoả mãn $\left(\log_2^2 x-3.\log_2 x+2\right)\sqrt{16-\left(0,5\right)^{2x}}\ge 0$.

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 14: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2\dfrac{x^2-4}{81}<\log_3\left(\dfrac{x^2-4}{16}\right)$**?**

A. 68. **B.** 34. **C.** 63. **D.** 33.

Câu 15: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(\sqrt{2^{16-x^2}-1}\right)\left(\log_3 x-3\right)\le 0$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 16: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(3^x+3^{6-x}-246\right)\sqrt{5-\ln\left(x+3\right)}\ge 0$ là

A. 144. **B.** 145. **C.** 146. **D.** 147.

Câu 17: Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $\log\left(2x^2+3\right)>\log\left(x^2+mx+1\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $-2<m<2$. **B.** $m<2\sqrt{2}$. **C.** $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. **D.** $m<2$.

Câu 18: Bất phương trình $\left[\log\left(x^2+x\right)-\log\left(3-x\right)\right]\left(3^x-3^{x^2}\right)>0$ có tập nghiệm **không là** tập con của tập nào trong các tập hợp sau đây?

A. $\left(-3;7\right)$. **B.** $\left(-3;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;-5\right)$. **D.** $\left(-\infty;0\right)$.

Câu 19: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 5 số nguyên x thỏa mãn $\left(3y-3^x\right)\left(\ln x-1\right)>0$

A. 2181. **B.** 2183. **C.** 2179. **D.** 2187.

Câu 20: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn

$$\left(4^{\log(x+3)}-5.2^{\log(x+3)}+4\right)\sqrt{\log_{x+3}\left(x^2-x\right)-1}\le 0\,?$$

A. 94. **B.** 95. **C.** 98. **D.** 97.

Câu 21: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4\left(3^x-1\right).\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{3^x-1}{16}\right)\le\dfrac{3}{4}$ là

A. $(0;1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $[1;2]$. **D.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Câu 22: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn bất phương trình $\left(\log_2^2 x-\log_2 x^3+2\right)\sqrt{32-2^x}\ge 0$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 23: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(-\log_2^2 x+5\log_2 x+6\right)\sqrt{3-\log_5 x}\ge 0$?

A. 64. **B.** 9. **C.** 65. **D.** 8.

Câu 24: Cho bao nhiêu số nguyên dương m để bất phương trình sau $\log_3\dfrac{2x^2-x+1}{4x^2-x+4-m}<-2x^2+2x-m$ có nghiệm

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 25: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\sqrt{2\log_2(x+2)}-\sqrt{\log_2\left(2x^2-1\right)}\ge(x+1)(x-5)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 26: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\sqrt{2\log_3(x+2)}-\sqrt{\log_3\left(2x^2-1\right)}\ge(x+1)(x-5)$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 27: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$, trong đó $a,b\in[1;2022]$ thỏa mãn $\left(\dfrac{2a}{a+2^b}\right)^{2^b}\ge\left(\dfrac{a+2^b}{2^{b+1}}\right)^a$?

A. 5. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3\frac{x^2-9}{125}\le\log_5\frac{x^2-9}{27}$?

A. 116. **B.** 58. **C.** 117. **D.** 100.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

Ta có: $\log_3\frac{x^2-9}{125}\le\log_5\frac{x^2-9}{27}\Leftrightarrow\frac{1}{\ln 3}\left(\ln\left(x^2-9\right)-\ln 125\right)\le\frac{1}{\ln 5}\left(\ln\left(x^2-9\right)-\ln 27\right)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{\ln 3}\left(\ln\left(x^2-9\right)-3\ln 5\right)\le\frac{1}{\ln 5}\left(\ln\left(x^2-9\right)-3\ln 3\right)$

$\Leftrightarrow(\ln 5-\ln 3)\ln\left(x^2-16\right)\le 3\left(\ln^2 5-\ln^2 3\right)$

$\Leftrightarrow\ln\left(x^2-9\right)\le 3(\ln 5+\ln 3)$

$\Leftrightarrow x^2-9\le 15^3\Leftrightarrow-\sqrt{3384}\le x\le\sqrt{3384}$

Kết hợp điều kiện ta có $x\in\{-58;-57;...;-4;4;...;57;58\}$. Vậy có 184 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $3.\log_5\frac{x^2+4x-5}{512}<\log_2\frac{x^2+4x-5}{125}$?

A. 490. **B.** 502. **C.** 500. **D.** 498.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=(-\infty;-5)\cup(1;+\infty)$.

Ta có: $3.\log_5\frac{x^2+4x-5}{512}<\log_2\frac{x^2+4x-5}{125}$

$\Leftrightarrow 3.\log_5(x^2+4x-5)-3.\log_5 512<\log_2(x^2+4x-5)-\log_2 125$

$\Leftrightarrow 3.\log_5(x^2+4x-5)-\log_2(x^2+4x-5)<3.\log_5 512-\log_2 125$

$\Leftrightarrow\log_5(x^2+4x-5)[3-\log_2 5]<3.\log_5 512-\log_2 125$

$\Leftrightarrow\log_5(x^2+4x-5)<\frac{3.\log_5 512-\log_2 125}{3-\log_2 5}$

$\Leftrightarrow x^2+4x-5<5^{\frac{3.\log_5 512-\log_2 125}{3-\log_2 5}}\Leftrightarrow x^2+4x-5<64000$

$\Leftrightarrow x^2+4x-64005<0\Leftrightarrow-255<x<251$

Kết hợp điều kiện ta có $x\in\{-254;-253;...;-6;2;...;249;250\}$. Vậy có 498 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$?

A. 24. **B.** 26. **C.** 25. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>-25$.

Đặt $f(x)=\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]$; $2^{x^2}-4^x=0\Leftrightarrow 2^{x^2}=2^{2x}\Leftrightarrow x^2=2x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$\log_3(x+25)-3=0\Leftrightarrow \log_3(x+25)=3\Leftrightarrow x+25=3^3\Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu

x	-25		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, $f(x)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-25<x\le 0\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy có 26 số nguyên x thỏa yêu cầu.

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $\log_{2\sqrt{3}}\frac{x^2-25}{324}<\log_{3\sqrt{2}}\frac{x^2-25}{144}$?

A. 432. **B.** 434 **C.** 216. **D.** 217.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$.

Ta có: $\log_{2\sqrt{3}}\frac{x^2-25}{324}<\log_{3\sqrt{2}}\frac{x^2-25}{144}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2\sqrt{3}}\left(\ln\left(x^2-25\right)-\ln 324\right)<\frac{1}{\ln 3\sqrt{2}}\left(\ln\left(x^2-9\right)-\ln 144\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2\sqrt{3}}\left(\ln\left(x^2-25\right)-4\ln 2\sqrt{3}\right)<\frac{1}{\ln 3\sqrt{2}}\left(\ln\left(x^2-25\right)-4\ln 3\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\ln 3\sqrt{2}-\ln 2\sqrt{3}\right)\ln\left(x^2-25\right)<4\left(\ln^2 3\sqrt{2}-\ln^2 2\sqrt{3}\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(x^2-25\right)<4\left(\ln 3\sqrt{2}+\ln 2\sqrt{3}\right)$

$\Leftrightarrow x^2-25<\left(3\sqrt{2}.2\sqrt{3}\right)^4\Leftrightarrow -\sqrt{46681}<x<\sqrt{46681}$

Kết hợp điều kiện ta có $x\in\{-216;-215;...;-6;6;...;215;216\}$.

Vì x nguyên dương nên có 217 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)=-x^3+\frac{13}{2}x^2-12x-e^x-2022$. Cho biết bất phương trình ẩn *m* sau đây $f\left[\log_{0,5}\left(\log_2(2m+1)\right)-2021\right]<f\left[f(0)\right]$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 14. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $m>2$. Ta có: $y=f(x)=-x^3+\frac{13}{2}x^2-12x-e^x-2022$

$y'=f'(x)=-3x^2+13x-12-e^x=-3(x-2)^2+x-e^x<0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó:

$f\left(\log_{0,5}\left(\log_2(2m+1)\right)-2021\right)<f\left(f(0)\right)\Leftrightarrow \log_{0,5}\left(\log_2(2m+1)\right)-2021>f(0)=-2023$

$\Leftrightarrow \log_{0,5}\left(\log_2\left(2m+1\right)\right) > -2 \Leftrightarrow 0 < \log_2\left(2m+1\right) < 4 \Leftrightarrow 1 < 2m+1 < 16 \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{15}{2}$

Vậy có 7 nghiệm nguyên.

Câu 6: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_x\left(\log_2(4^x-6)\right) \le 1$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện:

$$\begin{cases} x>0, x\ne 1 \\ 4^x-6>0 \\ \log_2\left(4^x-6\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, x\ne 1 \\ x>\log_4 6 \\ 4^x-6>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, x\ne 1 \\ x>\log_4 6 \\ x>\log_4 7 \end{cases} \Leftrightarrow x>\log_4 7.$$

Ta có: $\log_x\left(\log_2(4^x-6)\right) \le 1 \Leftrightarrow \log_2(4^x-6) \le x$

$\Leftrightarrow 4^x-6 \le 2^x \Leftrightarrow 4^x-2^x-6 \le 0 \Leftrightarrow 2^x \le 3 \Leftrightarrow x \le \log_2 3$

Kết hợp với điều kiện ta có: $\log_4 7 < x \le \log_2 3$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên bất phương trình không có nghiệm nguyên.

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên a thỏa mãn $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right) > 2\log_2\sqrt{a}$.

A. 4096. **B.** 4095. **C.** 4094. **D.** 4093.

Lời giải

Từ giả thiết $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right) > 2\log_2\sqrt{a}$.

Đặt $\log_2\sqrt{a}=3x \Leftrightarrow a=64^x$.

Ta được bất phương trình: $3\log_3\left(1+8^x+4^x\right) > 6x \Leftrightarrow 1+8^x+4^x > 9^x$.

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{9}\right)^x+\left(\dfrac{8}{9}\right)^x+\left(\dfrac{4}{9}\right)^x > 1$. Đặt $f\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{9}\right)^x+\left(\dfrac{8}{9}\right)^x+\left(\dfrac{4}{9}\right)^x$.

$\Rightarrow f'\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{9}\right)^x\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{8}{9}\right)^x\ln\left(\dfrac{8}{9}\right)+\left(\dfrac{4}{9}\right)^x\ln\left(\dfrac{4}{9}\right)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $f\left(x\right)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Và ta lại có $f\left(2\right)=1$.

Từ $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x+\left(\dfrac{8}{9}\right)^x+\left(\dfrac{4}{9}\right)^x > 1 \Leftrightarrow f\left(x\right) > f\left(2\right) \Leftrightarrow x<2$.

Suy ra $a<64^2=4096$. Suy ra có 4095 giá trị a nguyên.

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right]\le 0$?

A. 24. **B.** 26. **C.** Vô số. **D.** 25.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right]\le 0 \Leftrightarrow \left(2^{x^2}-2^{2x}\right)\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right]\le 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-25\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2}-2^{2x}\ge 0\\ \log_3\left(x+25\right)-3\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}2^{x^2}-2^{2x}\le 0\\ \log_3\left(x+25\right)-3\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-25\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-2x\ge 0\\ x+25\le 27\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x\le 0\\ x+25\ge 27\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-25\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le 0\end{array}\right.\\ x\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x\le 2\\ x\ge 2\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-25<x\le 0\\ x=2\end{array}\right.\\ x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-25<x\le 0\\ x=2\end{array}\right..$$

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ có 26 số nguyên thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3\frac{(x^2-4x)^2}{4096}<\log_2\frac{x^2-4x}{27}$?

A. 78. **B.** 80. **C.** 76. **D.** 82.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\left(-\infty;0\right)\cup\left(4;+\infty\right)$.

Ta có: $\log_3\frac{(x^2-4x)^2}{4096}<\log_2\frac{x^2-4x}{27}$

$\Leftrightarrow\log_3(x^2-4x)^2-\log_3 4096<\log_2(x^2-4x)-\log_2 27$

$\Leftrightarrow 2\left[\log_3(x^2-4x)-\log_3 64\right]<\log_2(x^2-4x)-\log_2 27$

$\Leftrightarrow 2\left[\log_3(x^2-4x)-6\log_3 2\right]<\log_2 3.\log_3(x^2-4x)-3\log_2 3$

$\Leftrightarrow\log_3(x^2-4x)\left[2-\log_2 3\right]<12\log_3 2-3\log_2 3$

$\Leftrightarrow\log_3(x^2-4x)<\frac{12\log_3 2-3\log_2 3}{2-\log_2 3}\Leftrightarrow\log_3(x^2-4x)<\frac{3(4-\log_2^2 3)}{\log_2 3.(2-\log_2 3)}$

$\Leftrightarrow\log_3(x^2-4x)<\frac{3(2+\log_2 3)}{\log_2 3}\Leftrightarrow\log_3(x^2-4x)<3(2.\log_3 2+1)$

$\Leftrightarrow\log_3(x^2-4x)<\log_3 12^3\Leftrightarrow x^2-4x-1728<0\Leftrightarrow 2-2\sqrt{433}<x<2+2\sqrt{433}$

$\Leftrightarrow 2-2\sqrt{433}<x<2+2\sqrt{433}$

Kết hợp điều kiện ta có $x\in\left\{-39;-38;...;-1;5;...;42;43\right\}$.

Vậy có 78 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 10: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình sau?

$$\left(3^{2x}-2188\cdot 3^{x-2}+27\right)\sqrt{3-\log_3\left(x^2+18\right)}\le 0.$$

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Trường hợp 1: $3-\log_3\left(x^2+18\right)=0\Leftrightarrow\log_3\left(x^2+18\right)=3\Leftrightarrow x^2-9=0\Leftrightarrow x=\pm 3$.

Thử lại với bất phương trình đề bài ta nhận $x=\pm 3$.

Trường hợp 2: $3-\log_3\left(x^2+18\right)>0 \Leftrightarrow \log_3\left(x^2+18\right)<3 \Leftrightarrow x^2-9<0 \Leftrightarrow -3<x<3$.

Ta có : $\left(3^{2x}-2188\cdot 3^{x-2}+27\right)\sqrt{3-\log_3\left(x^2+18\right)}\le 0$

$\Leftrightarrow 3^{2x}-2188\cdot 3^{x-2}+27\le 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2-\dfrac{2188}{9}\cdot 3^x+27\le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{9}\le 3^x\le 243 \Leftrightarrow 3^{-2}\le 3^x\le 3^5 \Leftrightarrow -2\le x\le 5$.

So với điều kiện của trường hợp 2 ta nhận $-2\le x<3$.

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Kết hợp với trường hợp 1 ta nhận $x\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy có tất cả 7 số nguyên x là nghiệm của bất phương trình.

Câu 11: Bất phương trình $\left(x^2-4(x-1)\right)\log_{\frac{1}{e}}\left(-x^2+4x+1\right)<0$ có tổng tất cả các nghiệm nguyên là?

A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(x^2-4(x-1)\right)\log_{\frac{1}{e}}\left(-x^2+4x+1\right)<0 \Leftrightarrow (x-2)^2\log_{\frac{1}{e}}\left(-x^2+4x+1\right)<0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ne 0 \\ \log_{\frac{1}{e}}\left(-x^2+4x+1\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 2 \\ -x^2+4x+1>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 2 \\ -x^2+4x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 2 \\ 0<x<4 \end{cases}$.

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;3\}$. Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên bằng 4.

Câu 12: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn

$$\log_3\left(\frac{2x^2-5x+2}{1000}\right)+\log 3.\log\left(\frac{2x^2-5x+2}{27}\right)<\log(2x^2-5x+2)\ ?$$

A. 234. **B.** 230. **C.** 288. **D.** 232.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

Ta có: $\log_3\left(\dfrac{2x^2-5x+2}{1000}\right)+\log 3.\log\left(\dfrac{2x^2-5x+2}{27}\right)<\log(2x^2-5x+2)$

$\Leftrightarrow \log_3(2x^2-5x+2)-\log_3 1000+\log 3[\log(2x^2-5x+2)-\log 27]<\log(2x^2-5x+2)$

$\Leftrightarrow \log_3(2x^2-5x+2)+\log 3.\log(2x^2-5x+2)-\log(2x^2-5x+2)<\log_3 1000+\log 3.\log 27$

$\Leftrightarrow \log_3(2x^2-5x+2)[1+\log^2 3-\log 3]<3(\log_3 10+\log^2 3)$

$\Leftrightarrow \log_3(2x^2-5x+2)<\dfrac{3(\log_3 10+\log^2 3)}{1+\log^2 3-\log 3}$ $\Leftrightarrow 2x^2-5x+2<3^{\frac{3(\log_3 10+\log^2 3)}{1+\log^2 3-\log 3}}$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2<27000 \Leftrightarrow 2x^2-5x-26998<0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(5-3\sqrt{24001}) < x < \frac{1}{4}(5+3\sqrt{24001})$

Kết hợp điều kiện ta có $x \in \{-114;-113;...;0;3;...;116;117\}$.

Vậy có 230 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 13: Có bao nhiêu số nguyên x nhỏ hơn 2022 thoả mãn $\left(\log_2^2 x - 3.\log_2 x + 2\right)\sqrt{16-(0,5)^{2x}} \ge 0$.

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} 16-(0,5)^{2x} \ge 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

Ta có $\left(\log_2^2 x - 3.\log_2 x + 2\right)\sqrt{16-(0,5)^{2x}} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 16-(0,5)^{2x} = 0 & (1) \\ \log_2^2 x - 3.\log_2 x + 2 \ge 0 & (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (0,5)^{2x} = 16 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$ (không thỏa mãn)

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \le 1 \\ \log_2 x \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 2 \\ x \ge 4 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện, ta có các giá trị nguyên thoả mãn trong trường hợp này là $x \in \{1;2\} \cup \{4;5;6;....2021\}$.

Vậy có 2020 số nguyên x thoả mãn đề bài.

Câu 14: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2-4}{81} < \log_3\left(\frac{x^2-4}{16}\right)$**?**

A. 68. **B.** 34. **C.** 63. **D.** 33.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 2 \end{array}\right.$.

Ta có: $\log_2\left(x^2-4\right) - 4\log_2 3 < \log_3\left(x^2-4\right) - 4\log_3 2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-4\right) - 4\log_2 3 < \frac{\log_2\left(x^2-4\right)}{\log_2 3} - 4\log_3 2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-4\right)\left(1-\log_3 2\right) < 4\left[\frac{1}{\log_3 2} - \log_3 2\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-4\right) < 4\frac{1+\log_3 2}{\log_3 2} \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-4\right) < 4\log_2 6$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 < 6^4 \Leftrightarrow -10\sqrt{13} < x < 10\sqrt{13}$

Kết hợp điều kiện ta được: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 10\sqrt{13} \\ -10\sqrt{13} < x < -2 \end{array}\right.$

Từ đó suy ra có 68 số nguyên x thỏa mãn**.**

Câu 15: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(\sqrt{2^{16-x^2}-1}\right)\left(\log_3 x-3\right)\le 0$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}2^{x^2-16}-1\ge 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-16\ge 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 4$.

Trường hợp 1: Xét $x=4$ thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 2: Xét $0<x<4$, ta có $\sqrt{2^{16-x^2}}-1>0$. Khi đó

$\left(\sqrt{2^{16-x^2}-1}\right)\left(\log_3 x-3\right)\le 0\Leftrightarrow \log_3 x-3\le 0\Leftrightarrow x\le 27$

Kết hợp với điều kiện $x\in\mathbb{Z},\,0<x<4$ ta có trường hợp này các giá trị x thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x\in\{1;2;3\}$. Vậy $x\in\{1;2;3;4\}$ nên có 4 giá trị x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(3^x+3^{6-x}-246\right)\sqrt{5-\ln(x+3)}\ge 0$ là

A. 144. **B.** 145. **C.** 146. **D.** 147.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\left(3^x+3^{6-x}-246\right)\sqrt{5-\ln(x+3)}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5-\ln(x+3)=0\\ \begin{cases}5-\ln(x+3)>0\\ 3^x+3^{6-x}-246\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+3=e^5\ (ktm)\\ \begin{cases}-3<x<e^5-3\\ 3^{2x}-246.3^x+3^6\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3<x<e^5-3\\ \left[\begin{array}{l}3^x\le 3\\ 3^x\ge 243\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<x<e^5-3\\ \left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge 5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3<x\le 1\\ 5\le x<e^5-3\end{array}\right..$$

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên ta được số nghiệm nguyên của bất phương trình là 145.

Câu 17: Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $\log\left(2x^2+3\right)>\log\left(x^2+mx+1\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $-2<m<2$. **B.** $m<2\sqrt{2}$. **C.** $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log\left(2x^2+3\right)>\log\left(x^2+mx+1\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+mx+1>0\\ 2x^2+3>x^2+mx+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+mx+1>0\ (1)\\ x^2-mx+2>0\ (2)\end{cases}\quad (*)$$

Để bất phương trình $\log\left(2x^2+3\right)>\log\left(x^2+mx+1\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ thì hệ $(*)$ có tập nghiệm $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_1=m^2-4<0\\ \Delta_2=m^2-8<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<2$.

Câu 18: Bất phương trình $\left[\log\left(x^2+x\right)-\log\left(3-x\right)\right]\left(3^x-3^{x^2}\right)>0$ có tập nghiệm **không là** tập con của tập nào trong các tập hợp sau đây?

A. $(-3;7)$. **B.** $(-3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-5)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x^2+x>0\\3-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>0\end{array}\right.\\x<3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\0<x<3\end{array}\right.$.

Trường hợp 1:

$\begin{cases}\log\left(x^2+x\right)-\log\left(3-x\right)>0\\3^x-3^{x^2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x>3-x\\x>x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x-3>0\\x^2-x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1\\x<-3\end{array}\right.\\0<x<1\end{cases}$ (Vô nghiệm)

Trường hợp 2:

$\begin{cases}\log\left(x^2+x\right)-\log\left(3-x\right)<0\\3^x-3^{x^2}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x<3-x\\x<x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x-3<0\\x^2-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<x<1\\\left[\begin{array}{l}x>1\\x<0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-3;0)$

Kết hợp với điều kiện ta được $x\in(-3;-1)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-3;-1)$. Ta thấy S không là tập con của tập hợp $(-\infty;-5)$.

Câu 19: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 5 số nguyên x thỏa mãn $\left(3y-3^x\right)(\ln x-1)>0$

A. 2181. **B.** 2183. **C.** 2179. **D.** 2187.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x>0$

Trường hợp 1: $\begin{cases}3y-3^x>0\\\ln x-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3y>3^x\\\ln x>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_3 3y>x\\x>\mathrm{e}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+\log_3 y>x\\x>\mathrm{e}\end{cases}\Rightarrow \mathrm{e}<x<1+\log_3 y$

Yêu cầu bài toán $\Rightarrow 1+\log_3 y\le 8\Leftrightarrow y\le 3^7$

Trường hợp 2: $\begin{cases}3y-3^x<0\\\ln x-1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3y<3^x\\\ln x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_3 3y<x\\x<\mathrm{e}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+\log_3 y<x\\x<\mathrm{e}\end{cases}\Rightarrow 1+\log_3 y<x<\mathrm{e}$

Yêu cầu bài toán $\Rightarrow 1+\log_3 y\ge 0\Leftrightarrow y\ge 3^{-1}$

Từ, và yêu cầu y nguyên dương ta có: $3^{-1}\le y\le 3^7\Rightarrow$ có 2187 số y thỏa mãn.

Câu 20: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn

$$\left(4^{\log(x+3)}-5.2^{\log(x+3)}+4\right)\sqrt{\log_{x+3}\left(x^2-x\right)-1}\le 0\,?$$

A. 94. **B.** 95. **C.** 98. **D.** 97.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < x+3 \neq 1 \\ x^2 - x > 0 \\ \log_{x+3}\left(x^2-x\right)-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > -3 \\ x \neq -2 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x > -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ x < -2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > -3 \\ x \neq -2 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -2 < x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{array}\right.$$

Với điều kiện trên, bất phương trình: $\left(4^{\log(x+3)} - 5.2^{\log(x+3)} + 4\right)\sqrt{\log_{x+3}\left(x^2-x\right)-1} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{\log(x+3)} - 5.2^{\log(x+3)} + 4 \leq 0 \\ \log_{x+3}\left(x^2-x\right)-1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leq 2^{\log(x+3)} \leq 4 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leq x \leq 97 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 97$$

So với điều kiện ta có: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} -2 < x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{array}\right. \\ -2 \leq x \leq 97 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 \leq x \leq 97 \\ -2 < x \leq -1 \end{array}\right.$

Các số nguyên thoả mãn yêu cầu bài toán gồm: $-1;3;4;5;...;97$

Vậy có 96 số nguyên thoả yêu cầu bài toán.

Câu 21: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4\left(3^x-1\right).\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{3^x-1}{16}\right) \leq \dfrac{3}{4}$ là

A. $(0;1] \cup [2;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $[1;2]$. **D.** $(-\infty;1] \cup [2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $3^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$-\log_4\left(3^x-1\right).\left[\log_4\left(3^x-1\right) - \log_4 16\right] \leq \dfrac{3}{4}$ (1), đặt $t = \log_4\left(3^x-1\right) \quad (t \in \mathbb{R})$

(1) trở thành $-t^2 + 2t - \dfrac{3}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq \dfrac{3}{2} \\ t \leq \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_4\left(3^x-1\right) \geq \dfrac{3}{2} \\ \log_4\left(3^x-1\right) \leq \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 1 \geq 8 \\ 3^x - 1 \leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $(0;1] \cup [2;+\infty)$.

Câu 22: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn bất phương trình $\left(\log_2^2 x - \log_2 x^3 + 2\right)\sqrt{32 - 2^x} \geq 0$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$$\left(\log_2^2 x-\log_2 x^3+2\right)\sqrt{32-2^x}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\32-2^x=0\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\32-2^x>0\\\log_2^2 x-\log_2 x^3+2\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5\\ \begin{cases}x>0\\x<5\\\log_2^2 x-3\log_2 x+2\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5\\ \begin{cases}x>0\\x<5\\\left[\begin{array}{l}\log_2 x\le 1\\\log_2 x\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5\\0<x\le 2\\4\le x<5\end{array}\right.$$

Vậy có bốn giá trị nguyên của x thoả mãn.

Câu 23: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(-\log_2^2 x+5\log_2 x+6\right)\sqrt{3-\log_5 x}\ge 0$?

A. 64. **B.** 9. **C.** 65. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

$\left(-\log_2^2 x+5\log_2 x+6\right)\sqrt{3-\log_5 x}\ge 0$ (1)

$$\left[\begin{array}{l}\log_5 x=3\\ \begin{cases}\log_5 x<3\\-\log_2^2 x+5\log_2 x+6\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=125\\ \begin{cases}\log_5 x<3\\-1\le \log_2 x\le 6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=125\\ \begin{cases}0<x<125\\\frac{1}{2}\le x\le 64\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=125\\\frac{1}{2}\le x\le 64\end{array}\right.$$

Suy ra có 65 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 24: Cho bao nhiêu số nguyên dương m để bất phương trình sau $\log_3\dfrac{2x^2-x+1}{4x^2-x+4-m}<-2x^2+2x-m$ có nghiệm

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_3\dfrac{2x^2-x+1}{4x^2-x+4-m}<-2x^2+2x-m$

$\Leftrightarrow \log_3\dfrac{2x^2-x+1}{4x^2-x+4-m}<4x^2-x+4-m-3\left(2x^2-x+1\right)-1$

$\Leftrightarrow \log_3\left[3\left(2x^2-x+1\right)\right]+3\left(2x^2-x+1\right)<\log_3\left(4x^2-x+4-m\right)+4x^2-x+4-m$

Xét hàm $f(t)=t+\log_3 t$ có $f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 3}>0$ nên đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do đó: $f\left[3\left(2x^2-x+1\right)\right]<f\left(4x^2-x+4-m\right)\Leftrightarrow\left[3\left(2x^2-x+1\right)\right]<4x^2-x+4-m$

$\Leftrightarrow m<-2x^2+2x+1$

Bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m\ge -2x^2+2x+1, \forall x\in\mathbb{R}$

Ta có: $Max\left(-2x^2+2x+1\right)=\dfrac{3}{2}\ \Rightarrow m\geq Max\left(-2x^2+2x+1\right)=\dfrac{3}{2}$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $m<\dfrac{3}{2}$

Câu 25: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\sqrt{2\log_2(x+2)}-\sqrt{\log_2\left(2x^2-1\right)}\geq(x+1)(x-5)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}x+2>0\\2x^2-1>0\\\log_2(x+2)\geq 0\\\log_2\left(2x^2-1\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\\left[\begin{array}{l}x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\\x+2\geq 1\\2x^2-1\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\\left[\begin{array}{l}x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\\x\geq -1\\\left[\begin{array}{l}x\geq 1\\x\leq -1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 1\\x=-1\end{array}\right.$.

Ta có $x=-1$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Với $x\geq 1$, bất phương trình $\sqrt{2\log_2(x+2)}-\sqrt{\log_2\left(2x^2-1\right)}\geq(x+1)(x-5)$

$\Leftrightarrow\sqrt{\log_2(x+2)^2}-\sqrt{\log_2\left(2x^2-1\right)}\geq x^2-4x-5\Leftrightarrow\sqrt{\log_2(x+2)^2}-\sqrt{\log_2\left(2x^2-1\right)}\geq\left(2x^2-1\right)-\left(x^2+\right.$

$\Leftrightarrow\sqrt{\log_2\left(x^2+4x+4\right)}+\left(x^2+4x+4\right)\geq\sqrt{\log_2\left(2x^2-1\right)}+\left(2x^2-1\right)\ (*)$

Đặt $\begin{cases}u=x^2+4x+4\\v=2x^2-1\end{cases}$, khi đó $(*)$ có dạng $\sqrt{\log_2 u}+u\geq\sqrt{\log_2 v}+v$.

Xét hàm số $f(\mathrm{t})=\sqrt{\log_2 t}+t$ có $f'(t)=\dfrac{(\log_2 t)'}{2\sqrt{\log_2 t}}+1=\dfrac{1}{2t.\ln 2.\sqrt{\log_2 t}}+1>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$, do đó bpt $\sqrt{\log_2 u}+u\geq\sqrt{\log_2 v}+v\Leftrightarrow u\geq v$.

Khi đó $x^2+4x+4\geq 2x^2-1\Leftrightarrow x^2-4x-5\leq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 5$.

Kết hợp với điều kiện ta có: $x=-1\cup 1\leq x\leq 5$. Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-1;1;2;3;4;5\}$.

Câu 26: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\sqrt{2\log_3(x+2)}-\sqrt{\log_3\left(2x^2-1\right)}\geq(x+1)(x-5)$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

ĐKXĐ: $\begin{cases}x+2\geq 1\\2x^2-1\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\x\leq -1\vee x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 1\Rightarrow D=[1;+\infty)$

Ta có $\sqrt{2\log_3(x+2)}-\sqrt{\log_3\left(2x^2-1\right)}\geq(x+1)(x-5)$

$\Leftrightarrow\sqrt{\log_3\left(x^2+4x+4\right)}+\left(x^2+4x+4\right)\geq\sqrt{\log_3\left(2x^2-1\right)}+\left(2x^2-1\right)$

Đặt $f(t)=\sqrt{\log_3 t}+t,\ \forall t\ge 1 \Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 3}.\dfrac{1}{2\sqrt{\log_3 t}}+1>0,\ \forall t>1$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

Suy ra $f\left(x^2+4x+4\right)\ge f\left(2x^2-1\right)\Leftrightarrow x^2+4x+4\ge 2x^2-1\Leftrightarrow -1\le x\le 5$

Vậy có 7 số nguyên x thoả mãn.

Câu 27: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$, trong đó $a,b\in[1;2022]$ thỏa mãn $\left(\dfrac{2a}{a+2^b}\right)^{2^b}\ge\left(\dfrac{a+2^b}{2^{b+1}}\right)^a$?

A. 5. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=a;y=2^b$, ta có $\left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^y\ge\left(\dfrac{x+y}{2y}\right)^x\Leftrightarrow\left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^y.\left(\dfrac{2y}{x+y}\right)^x\ge 1$

Xét hàm $f(x;y)=\left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^y.\left(\dfrac{2y}{x+y}\right)^x$

Khi $x=y\Rightarrow f(x;y)=1$

Giả sử $x>y\Rightarrow f(x;y)<\left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^x.\left(\dfrac{2y}{x+y}\right)^x=\left(\dfrac{4xy}{(x+y)^2}\right)^x<1^x=1(4xy<x^2+y^2)$

Giả sử $x<y\Rightarrow f(x;y)<\left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^y.\left(\dfrac{2y}{x+y}\right)^y=\left(\dfrac{4xy}{(x+y)^2}\right)^y<1^x=1$

Vậy, $f(x;y)\ge 1\Leftrightarrow f(x;y)=1\Leftrightarrow x=y\Leftrightarrow a=2^b$

Trên đoạn $a,b\in[1;2022]\Rightarrow 2^b<2022\Rightarrow b<11$

Vậy, có 10 giá trị của b, và có 10 giá trị của a nên có 10 cặp $(a;b)$ thỏa mãn.

DẠNG 6 TÍNH TÍCH PHÂN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Công thức tính tích phân

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Nhận xét: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

Tính chất của tích phân

Giả sử cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K, a, b, c là ba số bất kỳ thuộc K. Khi đó ta có:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

5. $\int_a^b kf(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$.

6. Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a;b]$ thì: $\int_a^b f(x)dx \geq 0 \forall x \in [a;b]$

7. Nếu $\forall x \in [a;b]; f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

8. Nếu $\forall x \in [a;b]$ mà $M \leq f(x) \leq N$ thì $M(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq N(b-a)$.

Phương pháp tính tích phân

1. Phương pháp đổi biến

Phương pháp đổi biến số dạng 1:

Định lý:

- Hàm $x = u(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha; \beta]$
- Hàm hợp $f(u(t))$ được xác định trên $[\alpha; \beta]$,
- $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$

Khi đó: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$.

Phương pháp chung

- **Bước 1:** Đặt $x = u(t)$
- **Bước 2:** Tính vi phân hai vế : $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$

  Đổi cận: $\left| \begin{array}{l} x = b \\ x = a \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t = \beta \\ t = \alpha \end{array} \right.$
- **Bước 3:** Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t

Vậy: $I=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left[u(t)\right]u'(t)dt=\int_\alpha^\beta g(t)dt=G(t)\Big|_\alpha^\beta=G(\beta)-G(\alpha)$

Phương pháp đổi biến dạng 2

Định lý:

Nếu hàm số $u=u(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho $f(x)dx=g\left(u(x)\right)u'(x)dx=g(u)du$ thì: $I=\int_a^b f(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$.

Phương pháp chung

- **Bước 1:** Đặt $u=u(x)\Rightarrow du=u'(x)dx$
- **Bước 2:** Đổi cận: $\left|\begin{array}{l}x=b\\x=a\end{array}\right.\Rightarrow\left|\begin{array}{l}u=u(b)\\u=u(a)\end{array}\right.$
- **Bước 3:** Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo u

Vậy: $I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g\left[u(x)\right].u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$

2. Phương pháp tích phân từng phần

Định lý

- Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thì:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx \text{ Hay } \int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

Phương pháp chung

- **Bước 1:** Viết $f(x)dx$ dưới dạng $udv=uv'dx$ bằng cách chọn một phần thích hợp của $f(x)$ làm $u(x)$ và phần còn lại $dv=v'(x)dx$
- **Bước 2:** Tính $du=u'dx$ và $v=\int dv=\int v'(x)dx$
- **Bước 3:** Tính $\int_a^b vu'(x)dx$ và $uv\Big|_a^b$

Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần.

Đặt u theo thứ tự ưu tiên: *"nhất Loga, nhì Đa, tam Lượng, tứ Mũ"*	$\int_a^b P(x)e^x dx$	$\int_a^b P(x)\ln x dx$	$\int_a^b P(x)\cos x dx$	$\int_a^b e^x\cos x dx$
u	$P(x)$	$\ln x$	$P(x)$	e^x
dv	$e^x dx$	$P(x)dx$	$\cos xdx$	$\cos xdx$

Chú ý:

Nên chọn u là phần của $f(x)$ mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn $dv=v'dx$ là phần của $f(x)dx$ là vi phân một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 40 – Đề tham khảo 2023. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F\left(x\right),G\left(x\right)$ là hai nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(4\right)+G\left(4\right)=4$ và $F\left(0\right)+G\left(0\right)=1$. Khi đó $\int\limits_0^2 f\left(2x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $G\left(x\right)=F\left(x\right)+C$

$$\begin{cases}F(4)+G(4)=4\\F(0)+G(0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2F(4)+C=4\\2F(0)+C=1\end{cases}\Leftrightarrow F(4)-F(0)=\frac{3}{2}.$$

Vậy: $\int\limits_0^2 f(2x)dx=\int\limits_0^4 f(x)dx=F(4)-F(0)=\frac{3}{2}.$

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên R. Gọi $F\left(x\right),G\left(x\right)$ là hai nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên R thỏa mãn $F\left(9\right)+G\left(9\right)=19,F\left(0\right)+G\left(0\right)=3$. Khi đó tích phân $I=\int\limits_0^3 f\left(3x\right)dx$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** -2.

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=8x^3+\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=3$. Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(0\right)=2$, khi đó $F\left(1\right)$ bằng

A. $\frac{32}{5}+\cos 1$. **B.** $\frac{32}{5}-\cos 1$. **C.** $\frac{32}{5}-\sin 1$. **D.** $\frac{32}{5}+\sin 1$.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F\left(x\right),G\left(x\right)$ là hai nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(7\right)+2G\left(7\right)=8$ và $F\left(1\right)+2G\left(1\right)=2$. Khi đó $\int\limits_0^3 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\frac{x+1}{x^2}$, $f\left(-1\right)=1$ và $f\left(1\right)=-1$. Giá trị của biểu thức $f\left(-2\right)+f\left(4\right)$ bằng

A. $3\ln 2+\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{6\ln 2+3}{4}$. **C.** $\frac{8\ln 2+3}{4}$. **D.** $3\ln 2-\frac{7}{4}$.

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F\left(x\right),G\left(x\right)$ là hai nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F\left(0\right)-G\left(0\right)=1,\ F\left(2\right)-2G\left(2\right)=4$ và $F\left(1\right)-G\left(1\right)=-1$. Tính $\int\limits_1^{e^2}\frac{f\left(\ln x\right)}{2x}\mathrm{d}x$.

A. -2. **B.** -4. **C.** -6. **D.** -8.

Câu 6: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sin x$ thỏa mãn $F(\pi)=2\pi$. Tính giá trị của biểu thức $T=2F(0)-8F(2\pi)$.

A. $T=10\pi$. **B.** $T=4\pi$. **C.** $T=8\pi$. **D.** $T=6\pi$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3F(8)+G(8)=9$ và $3F(0)+G(0)=3$. Khi đó $\int\limits_0^2 f(4x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{8}$.

Câu 8: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{1+\sin 2x}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Biết $F(0)=1$ và $F(\pi)=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

A. $P=2-\sqrt{3}$. **B.** $P=0$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=1$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),\ G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)=6$ và $F(0)+G(0)=2$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 4.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $R\setminus\{0\}$ thoả mãn $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}, f(-2)=\frac{3}{2}$ và $f(2)=2\ln 2-\frac{3}{2}$ .Tính giá trị biểu thức $f(-1)+f(4)$ bằng.

A. $\frac{6\ln 2-3}{4}$. **B.** $\frac{6\ln 2+3}{4}$. **C.** $\frac{8\ln 2+3}{4}$. **D.** $\frac{8\ln 2-3}{4}$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $R\setminus\{-2,2\}$ thoả mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}, f(-3)+f(3)=f(-1)+f(1)=2$ .Tính giá trị biểu thức $f(-4)+f(0)+f(4)$ bằng.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),\ G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)+G(2)=5$ và $F(0)+G(0)=1$. Khi đó $I=\int\limits_0^{\sqrt{2}} xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x),H(x)$ là ba nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(8)+G(8)+H(8)=4$ và $F(0)+G(0)+H(0)=1$. Khi đó $\int\limits_0^2 f(4x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x), H(x)$ là ba nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)+H(3)=4$ và $F(0)+G(0)+H(0)=1$. Khi đó $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 15: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa $F(0)=\frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_2[3F(1)-2F(2)]$.

A. $T=4$. **B.** $T=2$. **C.** $T=10$. **D.** $T=-4$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(3)-G(3)=4$ và $2F(0)-G(0)=1$. Khi đó $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x-4 & \text{khi } x\ge 4 \\ \frac{1}{4}x^3-x^2+x & \text{khi } x<4 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(2\sin^2 x+3\right)\sin 2x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{341}{48}$. **B.** $\frac{341}{96}$. **C.** $\frac{28}{3}$. **D.** 8.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thoả mãn $f(2)=16, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=7$. **C.** $I=13$. **D.** $I=20$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(1)+G(1)=-2$ và $F(-1)+G(-1)=0$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin x-2\sin 2x\, f(\cos 2x)\right]\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(5)+G(5)=10$ và $F(1)+G(1)=2$. Khi đó $\int_0^2 f(2x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 4.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6; \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân

$I=\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=8$. **C.** $I=14$. **D.** $I=6$.

Câu 22: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_{0}^{2024} f\left(x\right)\mathrm{d}x=8$, $\int\limits_{0}^{6064} f\left(x\right)\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int\limits_{-2022}^{2022} f\left(\left|2x-2020\right|\right)\mathrm{d}x$

A. $I=18$. **B.** $I=2$. **C.** $I=9$. **D.** $I=5$.

Câu 23: Tính tích các giá trị của số thực m để tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\left|2x-m\right|dx=2$.

A. 6. **B.** −3. **C.** 2. **D.** −4.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x=18$, $\int\limits_{0}^{5} f(x)\mathrm{d}x=3$. Giá trị của $\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|4x-1\right|\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{21}{4}$. **C.** 21. **D.** $\dfrac{15}{4}$.

Câu 25: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ đi qua điểm $A\left(1;0\right)$ và nhận điểm $I\left(2;2\right)$ làm tâm đối xứng. Giá trị của $\int\limits_{1}^{3} x\left(x-2\right)\left[f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right]dx$ bằng

A. $-\dfrac{8}{3}$. **B.** $-\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Câu 26: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa:

$f\left(x\right)=x^2-3x+2\int_0^1 f\left(x\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x, \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm giá trị thực dương của a để $\int_0^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{4}{5}a$

.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 27: Cho hàm số $f\left(x\right)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $\left[0;2\right]$. Biết $f\left(0\right)=1$ và $f\left(x\right)f\left(2-x\right)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in\left[0;2\right]$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{2}\dfrac{\left(x^3-3x^2\right)f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx$

A. $I=-\dfrac{14}{3}$. **B.** $I=-\dfrac{32}{5}$. **C.** $I=-\dfrac{16}{5}$. **D.** $I=-\dfrac{16}{3}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-1;1\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+2=\frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(x+t\right)f\left(t\right)\mathrm{d}t$ với $\forall x\in\left[-1;1\right]$. Khi đó $I=\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=3$. **B.** $I=4$. **C.** $I=2$. **D.** $I=1$.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm không âm trên $\left[0;1\right]$, thỏa mãn $f(x)>0$ với mọi $x\in\left[0;1\right]$ và $\left[f(x)\right]^2.\left[f'(x)\right]^2\left(x^2+1\right)^2=1+\left[f(x)\right]^2$. Nếu $f(0)=\sqrt{3}$ thì giá trị $f(1)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(3;\frac{7}{2}\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Câu 30: Cho hàm số $f\left(x\right)>0$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\left(x+1\right)f'\left(x\right)=\frac{\sqrt{f\left(x\right)}}{x+2}$ và $f\left(0\right)=\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$. Giá trị $f\left(3\right)$ bằng

A. $2\left(4\ln 2-\ln 5\right)^2$. **B.** $\frac{1}{2}\left(4\ln 2-\ln 5\right)^2$. **C.** $4\left(4\ln 2-\ln 5\right)^2$. **D.** $\frac{1}{4}\left(4\ln 2-\ln 5\right)^2$.

Câu 31: Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức có các hệ số nguyên. Biết $5f\left(x\right)-\left(f'\left(x\right)\right)^2=x^2+x+4,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{11}{6}$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thoả mãn đẳng thức sau $4xf\left(x^2\right)+2f\left(2x+1\right)=4x^5+8x^3+10x^2+30x+12-xf'\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_{0}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** -1. **C.** 27. **D.** 1.

Câu 33: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Đặt $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)$, biết $g\left(0\right)=2,\ g\left(1\right)=6$, tính tích phân $\int\limits_{0}^{1}\frac{6x-f\left(x\right)}{e^x}\mathrm{d}x$.

A. -2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên R thỏa mãn $F(9)+G(9)=19, F(0)+G(0)=3$. Khi đó tích phân $I=\int_0^3 f(3x)dx$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^9 f(x)dx = F(x)\Big|_0^9 = F(9)-F(0)$

$\int_0^9 f(x)dx = G(x)\Big|_0^9 = G(9)-G(0)$

$\Rightarrow 2\int_0^9 f(x)dx = [F(9)+G(9)]-[F(0)+G(0)]=16 \Rightarrow \int_0^9 f(x)dx = 8$

$I=\int_0^3 f(3x)dx \overset{(t=3x)}{=} \frac{1}{3}\int_0^9 f(t)dt = \frac{1}{3}.8=\frac{8}{3}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=8x^3+\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=3$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$, khi đó $F(1)$ bằng

A. $\frac{32}{5}+\cos 1$. **B.** $\frac{32}{5}-\cos 1$. **C.** $\frac{32}{5}-\sin 1$. **D.** $\frac{32}{5}+\sin 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(8x^3+\sin x\right)dx=2x^4-\cos x+C$.

Mà $f(0)=3$ nên suy ra: $3=-1+C \Leftrightarrow C=4 \Rightarrow f(x)=2x^4-\cos x+4$.

Ta có: $F(x)=\int f(x)dx=\int\left(2x^4-\cos x+4\right)dx=\frac{2}{5}x^5-\sin x+4x+C$.

Mà $F(0)=2$ nên suy ra: $C=2 \Rightarrow F(x)=\frac{2}{5}x^5-\sin x+4x+2$.

Vậy $F(1)=\frac{32}{5}-\sin 1$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(7)+2G(7)=8$ và $F(1)+2G(1)=2$. Khi đó $\int_0^3 f(2x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Vì $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại hằng số C thỏa mãn điều kiện $G(x) = F(x) + C, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $G(7) - G(1) = F(7) - F(1)$.

Theo giả thiết ta có:

$F(7) - F(1) + 2\left[G(7) - G(1)\right] = 6 \Leftrightarrow 3\left[F(7) - F(1)\right] = 6 \Leftrightarrow F(7) - F(1) = 2$.

Xét $\int\limits_0^3 f(2x+1)\mathrm{d}x$

Đặt $2x + 1 = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$

$x = 3 \Rightarrow t = 7$

Khi đó $\int\limits_0^3 f(2x+1)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^7 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left[F(7) - F(1)\right] = 1$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$, $f(-1) = 1$ và $f(1) = -1$. Giá trị của biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng

A. $3\ln 2 + \dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{6\ln 2 + 3}{4}$. **C.** $\dfrac{8\ln 2 + 3}{4}$. **D.** $3\ln 2 - \dfrac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Có $f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x = \ln|x| - \dfrac{1}{x} + C$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln(-x) - \dfrac{1}{x} + C_1 & \text{khi } x < 0 \\ \ln x - \dfrac{1}{x} + C_2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

Do $f(-1) = 1 \Rightarrow \ln 1 + 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0$

Do $f(1) = -1 \Rightarrow \ln 1 - 1 + C_2 = -1 \Rightarrow C_2 = 0$

Như vậy, $f(x) = \begin{cases} \ln(-x) - \dfrac{1}{x} & \text{khi } x < 0 \\ \ln x - \dfrac{1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

Vậy $f(-2) + f(4) = \left(\dfrac{1}{2} + \ln 2\right) + \left(\ln 4 - \dfrac{1}{4}\right) = 3\ln 2 + \dfrac{1}{4}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(0) - G(0) = 1$, $F(2) - 2G(2) = 4$ và $F(1) - G(1) = -1$. Tính $\int\limits_1^{e^2} \dfrac{f(\ln x)}{2x}\mathrm{d}x$.

A. -2. **B.** -4. **C.** -6. **D.** -8.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $G(x)=F(x)+C$

$$\begin{cases}2F(0)-G(0)=1\\F(2)-2G(2)=4\\F(1)-G(1)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}F(0)-C=1\\-F(2)-2C=4\\C=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}F(0)=2\\F(2)=-6\\C=1\end{cases}.$$

Do đó $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)=-8$.

Vậy $\int_1^{e^2}\frac{f(\ln x)}{2x}\mathrm{d}x=\int_1^{e^2}\frac{f(\ln x)}{2}\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{2}\int_0^2 f(u)\mathrm{d}u=-4$.

Câu 6: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sin x$ thỏa mãn $F(\pi)=2\pi$. Tính giá trị của biểu thức $T=2F(0)-8F(2\pi)$.

A. $T=10\pi$. **B.** $T=4\pi$. **C.** $T=8\pi$. **D.** $T=6\pi$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=x\\\mathrm{d}v=\sin x\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=-\cos x\end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần ta có:

$\int x\sin x\mathrm{d}x=-x\cos x+\int\cos x\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C$.

Theo giả thiết $F(\pi)=2\pi\Rightarrow\pi+C=2\pi\Leftrightarrow C=\pi$.

Suy ra: $F(x)=-x\cos x+\sin x+\pi\ \Rightarrow T=2F(0)-8F(2\pi)=10\pi$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3F(8)+G(8)=9$ và $3F(0)+G(0)=3$. Khi đó $\int_0^2 f(4x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $G(x)=F(x)+C$

$$\begin{cases}3F(8)+G(8)=9\\3F(0)+G(0)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4F(8)+C=9\\4F(0)+C=3\end{cases}\Leftrightarrow F(8)-F(0)=\frac{3}{2}.$$

Vậy:

$$\int_0^2 f(4x)dx=\frac{1}{4}\int_0^8 f(x)dx=\frac{F(8)-F(0)}{4}=\frac{3}{8}.$$

Câu 8: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{1+\sin 2x}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Biết $F(0)=1$ và $F(\pi)=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

A. $P=2-\sqrt{3}$. **B.** $P=0$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=\dfrac{1}{1+\sin 2x}=\dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}=\dfrac{1}{2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

Khi đó:

$$F(x)=\int\frac{dx}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C_1 \text{ khi } x\in\left(-\frac{5\pi}{4}+k2\pi;-\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)\\ -\frac{1}{2}\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C_2 \text{ khi } x\in\left(-\frac{\pi}{4}+k2\pi;\frac{3\pi}{4}+k2\pi\right)\end{cases}(k\in\mathbb{Z}).$$

Ta có:

$$\begin{cases}F(0)=1\\F(\pi)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}+C_2=1\\-\frac{1}{2}+C_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=\frac{3}{2}\\C_1=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2} \text{ khi } x\in\left(-\frac{5\pi}{4}+k2\pi;-\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)\\ -\frac{1}{2}\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2} \text{ khi } x\in\left(-\frac{\pi}{4}+k2\pi;\frac{3\pi}{4}+k2\pi\right)\end{cases}.$$

Vậy: $P=F\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)-F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{3}{2}\right)-\left(-\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{7\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\right)=1$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)=6$ và $F(0)+G(0)=2$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $G(x)=F(x)+C\Rightarrow\begin{cases}G(3)=F(3)+C\\G(0)=F(0)+C\end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases}F(3)+G(3)=6\\F(0)+G(0)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2F(3)+C=6\\2F(0)+C=2\end{cases}\Leftrightarrow F(3)-F(0)=2$.

Vậy: $\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\left(F(3)-F(0)\right)=\dfrac{2}{3}$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $R\setminus\{0\}$ thoả mãn $f'(x)=\dfrac{x+1}{x^2}, f(-2)=\dfrac{3}{2}$ và $f(2)=2\ln 2-\dfrac{3}{2}$ .Tính giá trị biểu thức $f(-1)+f(4)$ bằng.

A. $\dfrac{6\ln 2-3}{4}$. **B.** $\dfrac{6\ln 2+3}{4}$. **C.** $\dfrac{8\ln 2+3}{4}$. **D.** $\dfrac{8\ln 2-3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x+1}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{x}+C$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln(x)-\dfrac{1}{x}+C_1\text{ khi } x>0\\ \ln(-x)-\dfrac{1}{x}+C_2\text{ khi } x<0\end{cases}$$

Do $f(-2)=\frac{3}{2}\Rightarrow\ln(-(-2))-\frac{1}{-2}+C_2=\frac{3}{2}\Rightarrow\ln2+\frac{1}{2}+C_2=\frac{3}{2}\Rightarrow C_2=1-\ln2$

Do $f(2)=2\ln2-\frac{3}{2}\Rightarrow\ln(2)-\frac{1}{2}+C_1=2\ln2-\frac{3}{2}\Rightarrow\ln2-\frac{1}{2}+C_1=2\ln2-\frac{3}{2}\Rightarrow C_1=\ln2-1$

Như vậy $f(x)=\begin{cases}\ln(x)-\dfrac{1}{x}+\ln2-1\text{ khi } x>0\\ \ln(-x)-\dfrac{1}{x}+1-\ln2\text{ khi } x<0\end{cases}$

Vậy ta có

$$f(-1)+f(4)=\left[\ln(-(-1))-\frac{1}{-1}+1-\ln2\right]+\left[\ln(4)-\frac{1}{4}+\ln2-1\right]$$

$$=0+1+1-\ln2+2\ln2-\frac{1}{4}+\ln2-1=2\ln2+\frac{3}{4}=\frac{8\ln2+3}{4}$$

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $R\setminus\{-2,2\}$ thoả mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}$, $f(-3)+f(3)=f(-1)+f(1)=2$. Tính giá trị biểu thức $f(-4)+f(0)+f(4)$ bằng.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{4}{x^2-4}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\ln|x-2|-\ln|x+2|+C=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)+C_1\text{ khi } x<-2\\ \ln\left(\dfrac{2-x}{x+2}\right)+C_2\text{ khi} -2<x<2\\ \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)+C_3\text{ khi } x>2\end{cases}$$

Ta có

$$f(-3)=\ln\left(\frac{-3-2}{-3+2}\right)+C_1=\ln(5)+C_1;\ f(3)=\ln\left(\frac{3-2}{3+2}\right)+C_3=\ln\left(\frac{1}{5}\right)+C_3=-\ln(5)+C_3$$

$$f(-1)=\ln\left(\frac{2-(-1)}{-1+2}\right)+C_2=\ln(3)+C_2;\ f(1)=\ln\left(\frac{2-1}{1+2}\right)+C_2=\ln\left(\frac{1}{3}\right)+C_2=-\ln(3)+C_2$$

Mà

$f(-3)+f(3)=f(-1)+f(1)=2 \Leftrightarrow \ln(5)+C_1+(-\ln(5)+C_3)=\ln(3)+C_2+(-\ln(3)+C_2)=2$

$\Leftrightarrow C_1+C_3=2C_2=2 \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_3=2 \\ C_2=1 \end{cases} \Rightarrow C_1+C_3+C_2=3$

Yêu cầu bài toán

$f(-4)+f(0)+f(4)=\ln\left(\dfrac{-4-2}{-4+2}\right)+C_1+\ln\left(\dfrac{2-0}{0+2}\right)+C_2+\ln\left(\dfrac{4-2}{4+2}\right)+C_3$

$=\ln(3)+C_1+\ln(1)+C_2+\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)+C_3=\left[\ln(3)-\ln(3)\right]+\left[C_1+C_2+C_3\right]=3$

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)+G(2)=5$ và $F(0)+G(0)=1$. Khi đó $I=\int\limits_0^{\sqrt{2}} xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $G(x)=F(x)+C \Rightarrow \begin{cases} G(2)=F(2)+C \\ G(0)=F(0)+C \end{cases}$.

$\begin{cases} F(2)+G(2)=5 \\ F(0)+G(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(2)+C=5 \\ 2F(0)+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow F(2)-F(0)=2$.

Xét tích phân: $I=\int\limits_0^{\sqrt{2}} xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$, $x=\sqrt{2} \Rightarrow t=2$.

Khi đó: $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\left(F(2)-F(0)\right)=1$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x),H(x)$ là ba nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(8)+G(8)+H(8)=4$ và $F(0)+G(0)+H(0)=1$. Khi đó $\int\limits_0^2 f(4x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 6. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $G(x)=F(x)+C$, $H(x)=F(x)+C'$

$\begin{cases} F(8)+G(8)+H(8)=4 \\ F(0)+G(0)+H(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3F(8)+C+C'=4 \\ 3F(0)+C+C'=1 \end{cases} \Leftrightarrow F(8)-F(0)=1.$

Vậy:

$\int\limits_0^2 f(4x)dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^8 f(x)dx = \frac{F(8)-F(0)}{4} = \frac{1}{4}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x), H(x)$ là ba nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)+H(3)=4$ và $F(0)+G(0)+H(0)=1$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $F(3)+G(3)+H(3)-F(0)-G(0)-H(0)=3$

$\Leftrightarrow F(3)-F(0)+G(3)-G(0)+H(3)-H(0)=3$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=3 \Leftrightarrow \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=1$

Lại có: $\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy: $\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

Câu 15: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa $F(0)=\frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_2[3F(1)-2F(2)]$.

A. $T=4$. **B.** $T=2$. **C.** $T=10$. **D.** $T=-4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x-3)^2\mathrm{d}x=\int\left(4x^2-12x+9\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+C$.

Theo giả thiết: $F(0)=\frac{1}{3}\Rightarrow C=\frac{1}{3}$.

Suy ra: $F(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+\frac{1}{3} \Rightarrow T=\log_2\left[3F(1)-2F(2)\right]=2$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(3)-G(3)=4$ và $2F(0)-G(0)=1$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2F(3)-G(3)-\left[2F(0)-G(0)\right]=3$

$\Leftrightarrow 2\left[F(3)-F(0)\right]-\left[G(3)-G(0)\right]=3$

$\Leftrightarrow 2\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3\Leftrightarrow\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$

Lại có: $\int\limits_0^1 f\left(3x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_0^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Vậy: $\int\limits_0^1 f\left(3x\right)\mathrm{d}x=1$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-4 & \text{khi } x\geq 4\\ \frac{1}{4}x^3-x^2+x & \text{khi } x<4\end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(2\sin^2 x+3\right)\sin 2x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{341}{48}$. **B.** $\frac{341}{96}$. **C.** $\frac{28}{3}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(2x-4)=4;\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\frac{1}{4}x^3-x^2+x\right)=4;\ f(4)=4$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4)$

Nên hàm số đã cho liên tục tại $x=4$

Xét $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(2\sin^2 x+3\right)\sin 2x\,\mathrm{d}x$

Đặt $2\sin^2 x+3=t\Rightarrow \sin 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$

Với $x=0\Rightarrow t=3$

$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=5$

$\Rightarrow I=\int_3^5 f(t)\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_3^5 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_3^4\left(\frac{1}{4}t^3-t^2+t\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_4^5(2t-4)\mathrm{d}t=\frac{341}{96}$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ và thoả mãn $f(2)=16,\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$.

Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=7$. **C.** $I=13$. **D.** $I=20$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2x\Rightarrow dt=2dx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$ và $x=1\Rightarrow t=2$.

Vậy $I=\frac{1}{4}\int_0^2 t f'(t)\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u=t\\ dv=f'(t)\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ v=f(t)\end{cases}$,

khi đó $4I=[tf(t)]\Big|_0^2-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=2f(2)-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=32-4=28\Rightarrow I=7$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(1)+G(1)=-2$ và $F(-1)+G(-1)=0$. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin x-2\sin 2x\, f(\cos 2x)\right]\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $G(x)=F(x)+C$

$\begin{cases}F(1)+G(1)=-2\\F(-1)+G(-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2F(1)+C=-2\\2F(-1)+C=0\end{cases}\Leftrightarrow\left\{F(1)-F(-1)=-1\right.$.

Do đó $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=F(1)-F(-1)=-1$.

Lại có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin x-2\sin 2x\, f(\cos 2x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\, f(\cos 2x)\mathrm{d}x$

$=1-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\, f(\cos 2x)\mathrm{d}x$.

Mà $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\, f(\cos 2x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos 2x)\mathrm{d}(\cos 2x)=-\frac{1}{2}\int\limits_1^{-1}f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin x-2\sin 2x\, f(\cos 2x)\right]\mathrm{d}x=1-2.\left(-\frac{1}{2}\right)=2$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(5)+G(5)=10$ và $F(1)+G(1)=2$. Khi đó $\int\limits_0^{2}f(2x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $G(x)=F(x)+C\Rightarrow\begin{cases}G(5)=F(5)+C\\G(1)=F(1)+C\end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases}F(5)+G(5)=10\\F(1)+G(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2F(5)+C=10\\2F(1)+C=2\end{cases}\Leftrightarrow F(5)-F(1)=4$.

Xét tích phân: $\int\limits_0^{2}f(2x+1)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$, $x=2\Rightarrow t=5$.

Suy ra: $I=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{5}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(F(5)-F(1)\right)=2$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=6;\int\limits_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1}f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=8$. **C.** $I=14$. **D.** $I=6$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\int\limits_{-1}^{1}f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}f(1-2x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(2x-1)\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$

Tính $I_1=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}f(1-2x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $u=1-2x\Rightarrow \mathrm{d}u=-2\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-1\Rightarrow u=3\\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow u=0\end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=\frac{-1}{2}\int\limits_{3}^{0}f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{3}f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x\right]=5$

Tính $I_2=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(2x-1)\,\mathrm{d}x$. Đặt $v=2x-1\Rightarrow \mathrm{d}v=2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow v=1\\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow v=0\end{cases}$.

$\Rightarrow I_2=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}f(v)\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=3.$

Vậy $I=I_1+I_2=8$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_{0}^{2024}f(x)\,\mathrm{d}x=8$, $\int\limits_{0}^{6064}f(x)\,\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int\limits_{-2022}^{2022}f\left(|2x-2020|\right)\mathrm{d}x$

A. $I=18$. **B.** $I=2$. **C.** $I=9$. **D.** $I=5$.

Lời giải

Chọn C

$I=\int\limits_{-2022}^{2022}f\left(|2x-2020|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2022}^{1010}f(-2x+2020)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1010}^{2022}f(2x-2020)\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

$I_1=\int\limits_{-2022}^{1010}f(-2x+2020)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{6064}^{0}f(t)\left(\frac{\text{-dt}}{2}\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{6064}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.10=5$.

$I_2=\int\limits_{1010}^{2022}f(2x-2020)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2024}f(t)\left(\frac{\mathrm{dt}}{2}\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2024}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.8=4$.

Do đó, $I=5+4=9$.

Câu 23: Tính tích các giá trị của số thực m để tích phân $I=\int\limits_0^1 |2x-m|dx=2$.

A. 6. **B.** −3. **C.** 2. **D.** −4.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1. $m<0\Rightarrow 2x-m>0\forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^1(2x-m)dx=\left(x^2-mx\right)\Big|_0^1=1-m$

$\Rightarrow 1-m=2\Leftrightarrow m=-1.$

Trường hợp 2. $m>2\Rightarrow 2x-m<0\forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^1(m-2x)dx=\left(mx-x^2\right)\Big|_0^1=m-1.$

$\Rightarrow m-1=2\Leftrightarrow m=3$

Trường hợp 3. $0\le m\le 2$

$$I=\int\limits_0^{\frac{m}{2}}(m-2x)dx+\int\limits_{\frac{m}{2}}^1(2x-m)dx=\left(mx-x^2\right)\Big|_0^{\frac{m}{2}}+\left(x^2-mx\right)\Big|_{\frac{m}{2}}^1=\frac{m^2}{4}+(1-m)+\frac{m^2}{4}=\frac{m^2}{2}-m+1$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{2}-m+1=2\Leftrightarrow m^2-2m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1+\sqrt{3}\\ m=1-\sqrt{3}\end{array}\right.\text{ (loại)}$$

Tích các giá trị của m là $-1.3=-3$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=18$, $\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x=3$. Giá trị của $\int\limits_{-1}^1 f\left(|4x-1|\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{21}{4}$. **C.** 21. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int\limits_{-1}^1 f\left(|4x-1|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)\mathrm{d}x$.

+) Tính $I_1=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)\mathrm{d}x$: Đặt $t=1-4x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{4}$.

Đổi cận: $x=-1\Rightarrow t=5$; $x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=0$. Khi đó $I_1=-\frac{1}{4}\int\limits_5^0 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\limits_0^5 f(t)\mathrm{d}t$.

+) Tính $I_2=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f\left(4x-1\right)\mathrm{d}x$: Đặt $t=4x-1\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{4}$.

Đổi cận: $x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=0;\ x=1\Rightarrow t=3$. Khi đó $I_2=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{3} f\left(t\right)\mathrm{d}t$.

Vậy $I=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f\left(1-4x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f\left(4x-1\right)\mathrm{d}x=I_1+I_2=\frac{3}{4}+\frac{18}{4}=\frac{21}{4}$.

Câu 25: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ đi qua điểm $A\left(1;0\right)$ và nhận điểm $I\left(2;2\right)$ làm tâm đối xứng. Giá trị của $\int\limits_{1}^{3} x\left(x-2\right)\left[f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right]dx$ bằng

A. $-\frac{8}{3}$. **B.** $-\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Đặt $t=4-x\Rightarrow dt=-dx$.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có $I\left(2;2\right)$ là tâm đối xứng nên $\frac{f\left(x\right)+f\left(4-x\right)}{2}=2$.

Như vậy $f\left(x\right)+f\left(4-x\right)=4\Rightarrow f'\left(x\right)-f'\left(4-x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=f'\left(4-x\right),\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $I=\int\limits_{1}^{3} x\left(x-2\right)\left[f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right]dx$

$=\int\limits_{1}^{3}\left(4-t\right)\left(2-t\right)\left[f\left(4-t\right)+f'\left(4-t\right)\right]dt$

$=\int\limits_{1}^{3}\left(t^2-6t+8\right)\left[4-f\left(t\right)+f'\left(t\right)\right]dt$

$=\int\limits_{1}^{3}4\left(t^2-6t+8\right)dt-\int\limits_{1}^{3}\left[t^2-2t-4\left(t-2\right)\right].\left[f\left(t\right)+f'\left(t\right)\right]dt+\int\limits_{1}^{3}2\left(t^2-6t+8\right)f'\left(t\right)dt$

$=2.\int\limits_{1}^{3}\left(t^2-6t+8\right)dt+\int\limits_{1}^{3}2\left(t-2\right)\left[f\left(t\right)+f'\left(t\right)\right]dt+\int\limits_{1}^{3}\left(t^2-6t+8\right)f'\left(t\right)dt$

$=\int\limits_{1}^{3}\left(t^2-6t+8\right)dt+\int\limits_{1}^{3}\left(2t-4\right)f\left(t\right)dt+\int\limits_{1}^{3}\left(t^2-4t+4\right)f'\left(t\right)dt$

$=\left(\frac{t^3}{3}-3t^2+8t\right)\Bigg|_1^3+\left(t^2-4t+4\right)f\left(t\right)\Big|_1^3=\frac{16}{3}$.

Câu 26: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa:

$f\left(x\right)=x^2-3x+2\int_0^1 f\left(x\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm giá trị thực dương của a để $\int_0^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}a$

.

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $m=\int_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x$. Khi đó $f(x)=x^2-3x+2m,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f'(x)=2x-3$.

Vậy $m=\int_0^1 (x^2-3x+2m)(2x-3)\mathrm{d}x$. Đặt $t=x^2-3x+2m\Rightarrow \mathrm{d}t=(2x-3)\mathrm{d}x$.

Do đó $m=-\int_{2m-2}^{2m} t\mathrm{d}t \Leftrightarrow m=-\frac{t^2}{2}\Big|_{2m-2}^{2m} \Leftrightarrow m=-4m+2\Leftrightarrow m=\frac{2}{5}$.

Vậy $f(x)=x^2-3x+\frac{4}{5}$.

Ta có $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}a\Leftrightarrow \int_0^a\left(x^2-3x+\frac{4}{5}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}a\Leftrightarrow \frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{4}{5}a=\frac{4}{5}a\Leftrightarrow a=\frac{9}{2}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$

A. $I=-\frac{14}{3}$. **B.** $I=-\frac{32}{5}$. **C.** $I=-\frac{16}{5}$. **D.** $I=-\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ nên thay $x=0$, ta có: $f(0).f(2)=1$ mà $f(0)=1\Rightarrow f(2)=1$.

Đặt:

$$\begin{cases}u=x^3-3x^2\\ \mathrm{d}v=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=(3x^2-6x)\mathrm{d}x\\ v=\ln|f(x)|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=(3x^2-6x)\mathrm{d}x\\ v=\ln f(x)\end{cases}$$

Suy ra: $I=(x^3-3x^2)\ln f(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2(3x^2-6x)\ln f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^2(3x^2-6x)\ln f(x)\mathrm{d}x\ (1)$

Đặt $x=2-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Khi $x=0\to t=2$ và $x=2\to t=0$.

Khi đó, $J=-\int\limits_2^0(3t^2-6t)\ln f(2-t)(-\mathrm{d}t)=-\int\limits_0^2(3t^2-6t)\ln f(2-t)\mathrm{d}t$.

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên $I=-\int\limits_0^2(3x^2-6x)\ln f(2-x)\mathrm{d}x\ (2)$

Từ (1) và (2), ta cộng vế theo vế, ta được: $2I=-\int\limits_0^2(3x^2-6x)\left[\ln f(x)+\ln f(2-x)\right]\mathrm{d}x$.

Hay $I=-\frac{1}{2}\int_0^2\left(3x^2-6x\right)\left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x=-\frac{16}{5}$

Câu 28: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-1;1\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+2=\frac{3}{2}\int_{-1}^1\left(x+t\right)f\left(t\right)\mathrm{d}t$ với $\forall x\in\left[-1;1\right]$. Khi đó $I=\int_{-1}^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=3$. **B.** $I=4$. **C.** $I=2$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f\left(x\right)+2=\frac{3}{2}\int_{-1}^1\left(x+t\right)f\left(t\right)\mathrm{d}t\Leftrightarrow f\left(x\right)=\frac{3}{2}x.\int_{-1}^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t+\frac{3}{2}\int_{-1}^1 tf\left(t\right)\mathrm{d}t-2$

$\Rightarrow f\left(x\right)=Ax+B$, với $A=\frac{3}{2}\int_{-1}^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t, B=\frac{3}{2}\int_{-1}^1 tf\left(t\right)\mathrm{d}t-2$.

Giả sử $f\left(x\right)=ax+b,\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

Theo giả thiết ta có:

$ax+b+2=\frac{3}{2}\int_{-1}^1\left(x+t\right)\left(at+b\right)\mathrm{d}t,\forall x\in\left[-1;1\right]\Leftrightarrow ax+b+2=\frac{3}{2}\int\left(axt+bx+at^2+bt\right)\mathrm{d}t$

$ax+b+2=\frac{3}{2}\left(\frac{axt^2}{2}+bxt+\frac{at^3}{3}+\frac{bt^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^1\Leftrightarrow ax+b+2=\frac{3}{2}\left(2bx+\frac{2a}{3}\right),\forall x\in\left[-1;1\right]$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3}{2}.2b=a\\ \frac{3}{2}.\frac{2}{3}a=b+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3b\\ a=b+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ a=3\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=3x+1.$

Ta có: $I=\int_{-1}^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\left(3x+1\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{3x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^1=\left(\frac{3}{2}+1\right)-\left(\frac{3}{2}-1\right)=2.$

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm không âm trên $\left[0;1\right]$, thỏa mãn $f(x)>0$ với mọi $x\in\left[0;1\right]$ và $\left[f(x)\right]^2.\left[f'(x)\right]^2\left(x^2+1\right)^2=1+\left[f(x)\right]^2$. Nếu $f(0)=\sqrt{3}$ thì giá trị $f(1)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(3;\frac{7}{2}\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left[f(x)\right]^2.\left[f'(x)\right]^2\left(x^2+1\right)^2=1+\left[f(x)\right]^2\Leftrightarrow\frac{\left[f(x)\right]^2.\left[f'(x)\right]^2}{1+\left[f(x)\right]^2}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$

$\Leftrightarrow\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+\left[f(x)\right]^2}}=\frac{1}{x^2+1}\Rightarrow\int_0^1\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+\left[f(x)\right]^2}}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$$

+ Nếu đặt $t=\sqrt{1+[f(x)]^2} \Rightarrow dt = \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}dx \Rightarrow \text{VT} = \int_2^{\sqrt{1+f^2(1)}} dt = \sqrt{1+f^2(1)}-2$

+ Nếu đặt $x=\tan u \Rightarrow dx = \left(1+\tan^2 u\right)du \Rightarrow \text{VP} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 u}\left(1+\tan^2 u\right)dx = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \sqrt{1+f^2(1)}-2=\frac{\pi}{4} \Rightarrow f(1)=\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+\pi+3} \approx 2,6 \in \left(\frac{5}{2};3\right).$$

Câu 30: Cho hàm số $f(x)>0$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $(x+1)f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}$ và $f(0)=\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$. Giá trị $f(3)$ bằng

A. $2(4\ln 2-\ln 5)^2$. **B.** $\frac{1}{2}(4\ln 2-\ln 5)^2$. **C.** $4(4\ln 2-\ln 5)^2$. **D.** $\frac{1}{4}(4\ln 2-\ln 5)^2$.

Lời giải

Chọn D

Xét $x\in[0;3]$. Ta có

$$(x+1)f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{x+2} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{(x+1)(x+2)} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{f(x)}=\ln(x+1)-\ln(x+2)+C \Rightarrow 2\sqrt{f(x)}=\ln\frac{x+1}{x+2}+C.$$

Thay

$$x=0: 2\sqrt{f(0)}=\ln\frac{1}{2}+C \Leftrightarrow 2\sqrt{\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2}=-\ln 2+C \Leftrightarrow C=2\ln 2 \Rightarrow 2\sqrt{f(x)}=\ln\frac{x+1}{x+2}+2\ln 2$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{x+1}{x+2}+2\ln 2\right)^2 \Rightarrow f(3)=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{4}{5}+2\ln 2\right)^2=\frac{1}{4}(4\ln 2-\ln 5)^2.$$

Câu 31: Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức có các hệ số nguyên. Biết $5f(x)-\left(f'(x)\right)^2=x^2+x+4, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra ta có $f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b$

Thay vào $5f(x)-\left(f'(x)\right)^2=x^2+x+4, \forall x\in\mathbb{R}$ ta được

$$5\left(ax^2+bx+c\right)-\left(2ax+b\right)^2=x^2+x+4$$

$$\Leftrightarrow \left(5a-4a^2\right)x^2+\left(5b-4ab\right)x+5c-b^2=x^2+x+4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5a-4a^2=1\\5b-4ab=1\\5c-b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=1\\a=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\\(5-4a)b=1\\5c=b^2+4\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\b=1\\c=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\b=\dfrac{1}{4}\\c=\dfrac{13}{16}\end{cases}\end{array}\right.$$

Giả thiết suy ra $a=b=c=1\Rightarrow f\left(x\right)=x^2+x+1$ và $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^2+x+1\right)dx=\dfrac{11}{6}$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thoả mãn đẳng thức sau $4xf\left(x^2\right)+2f\left(2x+1\right)=4x^5+8x^3+10x^2+30x+12-xf'\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** -1. **C.** 27. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $4xf\left(x^2\right)+2f\left(2x+1\right)=4x^5+8x^3+10x^2+30x+12-xf'\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.(*)$

$$\Rightarrow \int\limits_{-1}^0 4xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^0 2f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0\left(4x^5+8x^3+10x^2+30x+12\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^0 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_{-1}^0 f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)+\int\limits_{-1}^0 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}\left(2x+1\right)=\frac{-7}{3}-xf\left(x\right)\Big|_{-1}^0+\int\limits_{-1}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_1^0 f\left(t\right)\mathrm{d}t+\int\limits_{-1}^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u=\frac{-7}{3}-xf\left(x\right)\Big|_{-1}^0+\int\limits_{-1}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_1^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{-7}{3}-f\left(-1\right)+\int\limits_{-1}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f\left(-1\right)=-\frac{7}{3}+\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x \qquad (1)$$

Ta có: $4xf\left(x^2\right)+2f\left(2x+1\right)=4x^5+8x^3+10x^2+30x+12-xf'\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.$

$$\Rightarrow \int\limits_{-1}^1 4xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^1 2f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^1\left(4x^5+8x^3+10x^2+30x+12\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^1 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_{-1}^1 f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)+\int\limits_{-1}^1 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}\left(2x+1\right)=\frac{92}{3}-xf\left(x\right)\Big|_{-1}^1+\int\limits_{-1}^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_1^1 f\left(v\right)\mathrm{d}v+\int\limits_{-1}^3 f\left(h\right)\mathrm{d}h=\frac{92}{3}-xf\left(x\right)\Big|_{-1}^1+\int\limits_{-1}^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{92}{3} - f(1) - f(-1) + \int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{92}{3} - f(1) - f(-1) \qquad (2)$

Từ $(1),(2)$ ta có được $\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{92}{3} - f(1) + \dfrac{7}{3} - \int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 33 - f(1) = 27$.

Thay $x = 0$ vào $(*)$ ta có được $f(1) = 6 \Rightarrow \int\limits_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 27$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Đặt $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$, biết $g(0) = 2,\ g(1) = 6$, tính tích phân $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{6x - f(x)}{e^x}\mathrm{d}x$.

A. -2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b,\ f''(x) = 6x + 2a,\ f'''(x) = 6$.

Do $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)\ (1)$

$\Rightarrow g'(x) = f'(x) + f''(x) + f'''(x)\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $g(x) = f(x) + g'(x) - f'''(x)$

$\Rightarrow 6x - f(x) = g'(x) - 6 - g(x) + 6x$.

$\Rightarrow \dfrac{6x - f(x)}{e^x} = \dfrac{g'(x) - 6 - (g(x) - 6x)}{e^x}$

$\Rightarrow \dfrac{6x - f(x)}{e^x} = \dfrac{(g'(x) - 6)e^x - (g(x) - 6x)e^x}{e^{2x}} = \left(\dfrac{g(x) - 6x}{e^x}\right)'$

$\Rightarrow \int\limits_{0}^{1} \dfrac{6x - f(x)}{e^x}\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \left(\dfrac{g(x) - 6x}{e^x}\right)' \mathrm{d}x = \left.\dfrac{g(x) - 6x}{e^x}\right|_0^1 = \dfrac{g(1) - 6}{e^1} - \dfrac{g(0) - 0}{e^0} = -2$

DẠNG 7 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. CỰC TRỊ HÀM SỐ

1.1 Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:

- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là ***điểm cực trị của hàm số*** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp *K*.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là ***giá trị cực trị (hay cực trị)*** *của hàm số*.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f.

Nhận xét:

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập D; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $(a;b)$ nào đó chứa x_0 hay nói cách khác khi x_0 điểm cực đại (cực tiểu) sẽ tồn tại khoảng (a;b) chứa x_0 sao cho $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $(a;b)$.
- Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập K. Hàm số có thể không có cực trị trên một tập cho trước.

1.2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lí 1:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

- Đạo hàm $f'(x)$ có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.
- Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
- Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

1.3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2:

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

- Nếu $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

1.4. Quy tắc tìm cực trị

Quy tắc 1:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các điểm x_i $(i=1;2;...)$ mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Định lí 3:

Giả sử $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0-h;x_0+h)$ với $h>0$. Khi đó:

- Nếu $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.
- Nếu $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

Quy tắc 2:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các nghiệm x_i $(i=1;2;...)$ của phương trình $f'(x)=0$.
- **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.
  - ✓ Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.
  - ✓ Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

2. MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ HÀM SỐ

2.1. Cực trị của hàm đa thức bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn hoành độ cho trước

Bài toán tổng quát:

Cho hàm số $y=f(x;m)=ax^3+bx^2+cx+d$. Tìm tham số *m* để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1,x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

Phương pháp:

- **Bước 1:**
  - Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
  - Đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c=Ax^2+Bx+C$
- **Bước 2:** Hàm số có cực trị (hay có hai cực trị, hai cực trị phân biệt hay có cực đại và cực tiểu)
  $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua 2 nghiệm đó
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} A=3a\neq 0 \\ \Delta_{y'}=B^2-4AC=4b^2-12ac>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases} \Rightarrow m\in D_1.$$
- **Bước 3:** Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$.

Khi đó: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{B}{A}=-\dfrac{2b}{3a} \\ x_1.x_2=\dfrac{C}{A}=\dfrac{c}{3a} \end{cases}.$

- **Bước 4:** Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P. Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.
- **Bước 5:** Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

Chú ý: Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\left(a \neq 0\right)$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Điều kiện	*Kết luận*
$b^2 - 3ac \le 0$	Hàm số không có cực trị.
$b^2 - 3ac > 0$	Hàm số có hai điểm cực trị.

➢ ***Điều kiện để hàm số có cực trị cùng dấu, trái dấu.***

- **Hàm số có 2 cực trị trái dấu**

  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu

  $\Leftrightarrow A.C = 3ac < 0 \Leftrightarrow ac < 0.$

- **Hàm số có hai cực trị cùng dấu**

  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

- **Hàm số có hai cực trị cùng dấu dương**

  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

- **Hàm số có hai cực trị cùng dấu âm**

  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt

  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} < 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

➢ **Tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn:** $\begin{cases} x_1 < \alpha < x_2 \\ x_1 < x_2 < \alpha \\ \alpha < x_1 < x_2 \end{cases}$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < \alpha < x_2$

$$\Leftrightarrow \left(x_1 - \alpha\right)\left(x_2 - \alpha\right) < 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 - \alpha\left(x_1 + x_2\right) + \alpha^2 < 0$$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0\\ x_1+x_2<2\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1.x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2>0\\ x_1+x_2<2\alpha\end{cases}$$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $\alpha < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0\\ x_1+x_2>2\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1.x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2>0\\ x_1+x_2>2\alpha\end{cases}$$

- Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng
- khi có 1 nghiệm là $x=\dfrac{-b}{3a}$, có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân khi có 1 nghiệm là $x=-\sqrt[3]{\dfrac{d}{a}}$.

2.2. Cực trị của hàm bậc 4 trùng phương $y=ax^4+bx^2+c,\ \ (a\neq 0)$

- Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow ab\geq 0.$
- Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab<0.$
- Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\ b\geq 0\end{cases}.$
- Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases}a<0\\ b\leq 0\end{cases}.$
- Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\ b<0\end{cases}.$
- Hàm số có một cực tiểu và hai cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases}a<0\\ b>0\end{cases}.$

2.3. Cực trị hàm hợp $y=f(u(x))$**.** Đạo hàm của hàm hợp: $y'=f'(u(x))=u'(x).f'(u(x))$

- Tính chất đổi dấu của biểu thức: Gọi α là một nghiệm của phương trình $f(x)=0$, khi đó:
  - Nếu $x=\alpha$ là nghiệm bội bậc chẵn $(x-\alpha)^2, (x-\alpha)^4,...$ thì hàm số $y=f(x)$ không đổi dấu khi đi qua α.
  - Nếu $x=\alpha$ là nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ $(x-\alpha),(x-\alpha)^3,...$ thì hàm số $y=f(x)$ đổi dấu khi đi qua α.

Bài toán: Cho hàm số $y=f(x)$ *(Đề có thể cho bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của $f(x), f'(x)$).*Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(u)$ trong đó u là một hàm số đối với x

Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

- **Bước 1.** Tính đạo hàm $y'=u'.f'(u)$
- **Bước 2.** Giải phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u'=0\\ f'(u)=0\end{array}\right.$
- **Bước 3.**Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà y' không xác định.

- Bài toán tìm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left[u(x)\right]+h(x)\right|$
  - **Bước 1.** Tìm cực trị của hàm số $v(x)=f\left[u(x)\right]+h(x)$
  - **Bước 2.** Sử dụng phương pháp biến đổi đồ thị hàm số trị tuyệt đối để tìm số cực trị của hàm số $g(x)$

2.3. Cực trị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối: Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị

- **Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y=\left|f(x)\right| \Rightarrow y'=\dfrac{f(x).f'(x)}{\left|f(x)\right|}$.
- **Bước 2:** Giải phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \quad (1) \\ f'(x)=0 \quad (2) \end{array}\right.$
- **Bước 3:** Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành $y=0$. Còn số nghiệm của phương trình (2) là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, dựa vào đồ thị ta có thể suy ra (2). Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của phương trình (1) và (2) chính là số điểm cực trị cần tìm.
- **Lưu ý:** Ta có thể sử dụng công thức đếm nhanh số điểm cực trị của hàm $f(u)$ để tối ưu thời gian trong khi giải toán trắc nghiệm như sau:
- Số điểm cực trị của $f(u)=$ Số điểm cực trị của u + Số nghiệm đơn (bội lẻ) của $u=a;u=b;u=c,...$

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 41 – Đề tham khảo 2023. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=-x^4+6x^2+mx$ có ba điểm cực trị?

A. 17. **B.** 15. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=-4x^3+12x+m$.

$y'=0 \Leftrightarrow -4x^3+12x+m=0 \Leftrightarrow m=4x^3-12x=f(x)$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $f(x)=4x^3-12x$ tại ba điểm phân biệt.

$f'(x)=12x^2-12=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có ba điểm cực trị khi $-8<m<8 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-7;-6;...;7\}$.

Vậy có 15 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m+1)x^2 + 2m - 1$ có 3 điểm cực trị.

A. $-1 < m < 0$. **B.** $m < -1$. **C.** $m > -1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị m nguyên nhỏ hơn 2022 thỏa mãn đồ thị hàm số $y = (4 + 4m - m^2 - m^3)x^4 - 2(m+1)x^2 + 3$ có đúng một điểm cực đại?

A. 2023. **B.** 2021. **C.** 2. **D.** 2022.

Câu 3: Xét hàm số $y = f(x) = x^4 + 2mx^3 - (m+1)x^2 + 2m - 2$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại là

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4: Số điểm cực trị của hàm số $y = x(x^2 - 4)(-x^2 + 3x - 2)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

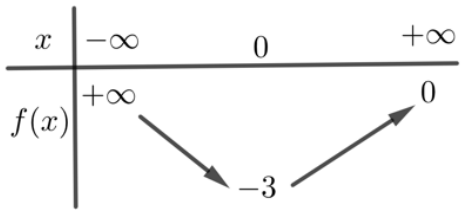
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 3, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x) = x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f'(x)]^2 - 2f(x).f''(x)$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 6: Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 6x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = (x_1^2 - 3)(x_2^2 - 1)$ là

A. $7 - 4\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $7 + 4\sqrt{3}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 8: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 + 2)x - m + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right.$. **B.** Không tồn tại m.

C. $m = 1$. **D.** $m = 5$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

A. $m = 3$. **B.** $m \in \varnothing$. **C.** $m = -24$. **D.** $m = 0$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=-x^3+2(2m-1)x^2-(m^2-8)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x=-1$.

A. $m=3$. **B.** $m=-9$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Câu 11: Cho hàm số $y=x^6+(4+m)x^5+(16-m^2)x^4+2$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 6. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 9.

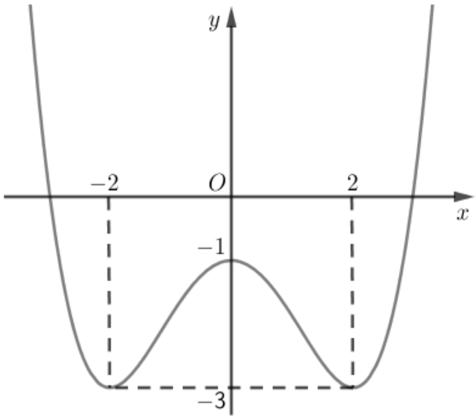
Câu 12: Cho hàm số $y=x^6+(2+m)x^5+(4-m^2)x^4+4$. Gọi S là tập hợp các giá trị m nguyên dương không vượt quá 10 để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 42. **B.** 52. **C.** 40. **D.** 50.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

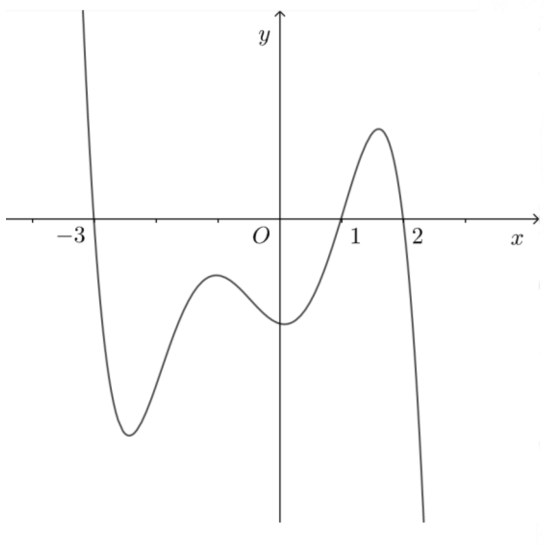
A. 3. **B.** 5. **C.** vô số. **D.** 4.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c,(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f^2(x)$ bằng?



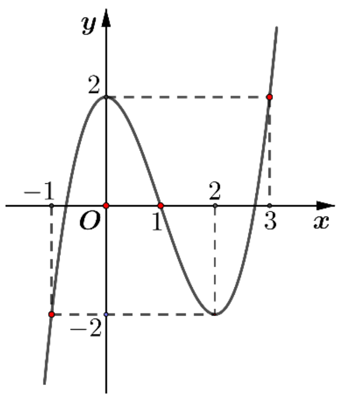
A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(-3)>0,\ f(2)=0$ và có đồ thị $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Hàm số $g(x)=\left|f(x)-x^4+14x^2-24x+11\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5.

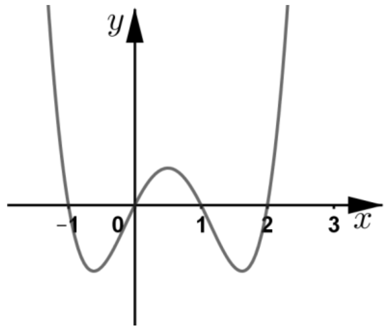
Câu 16: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2}$, hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left|18f\left(1-\dfrac{x}{3}\right)-x^2\right|$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 7.

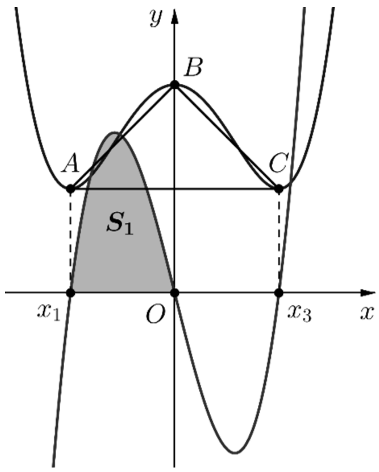
Câu 17: Cho $f\left(x\right)$ là đa thức bậc ba, biết hàm số $y=f'\left(x^2-x+1\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $\left[-10;10\right]$ để hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+4}-m\right)$ có năm điểm cực trị?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 18: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới. Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có hoành độ lần lượt là $x_1,\ x_2,\ x_3$.



Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'\left(x\right),\ y=0,\ x=x_1,\ x=x_2$ là S_1 và diện tích của tam giác ABC là S. Tính $P=x_1.x_3$, với $S_1=1$ và $S=1$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^3+(m-1)x^2+2x-m+2022$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2021;2022]$ để hàm số $y=\left|f(x-2021)-2022\right|$ có số điểm cực trị nhiều nhất?

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 4040. **D.** 2023

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m+1)x^2+(3-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m\ge 3$. **B.** $\frac{-1}{2}<m$. **C.** $m>3$. **D.** $-\frac{1}{2}<m\le 3$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^3-2x^2)(x^3-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $\left|f(1-2022x)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 12. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 22: Hàm số $y=\left|x^4-4x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

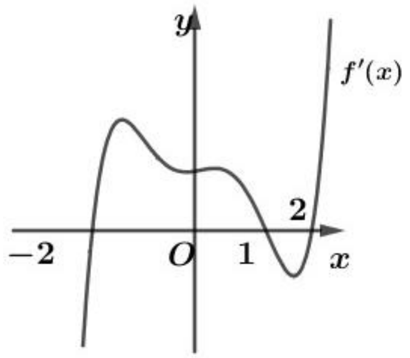
Câu 24: Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-8|x|^3+22x^2-24|x|+6\sqrt{2}$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(-2)<f(2)=0$, đồ thị $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Hàm số $g(x)=\left|f(x)+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|-x^3+3x^2+m+2\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

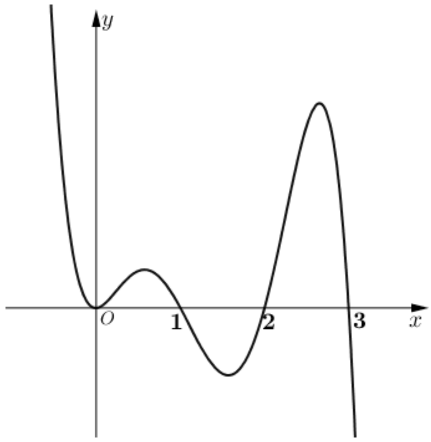
Câu 28: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f\left(-2\right)=0$ và đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g\left(x\right)=\left|15f\left(-x^4+2x^2-2\right)-10x^6+30x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 29: Cho hàm đa thức $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị của m để $m\in\left[0;6\right]$, $2m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2\left|x-1\right|-2x+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 30: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f\ \ x=\left|\dfrac{x}{x^2+x+1}-\dfrac{m}{3}\right|$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

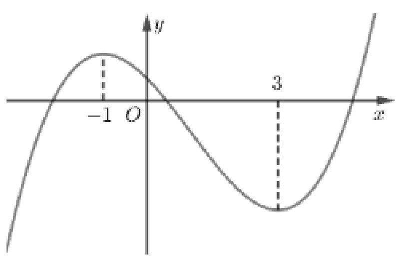
Câu 31: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'\left(x\right)$ như hình bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x+1-\left|x-1\right|\right)$ là

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 7.

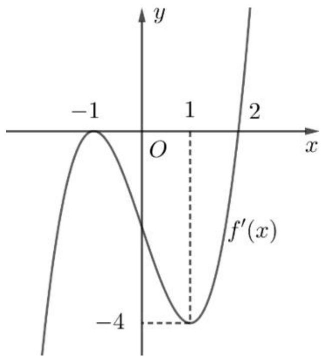
Câu 32: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-4x+m\right)$ có 3 điểm cực trị. Số phần tử của S là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - 4|x| + m - 3\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - mx^2 - x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(|x| + 1)$ bằng 5.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

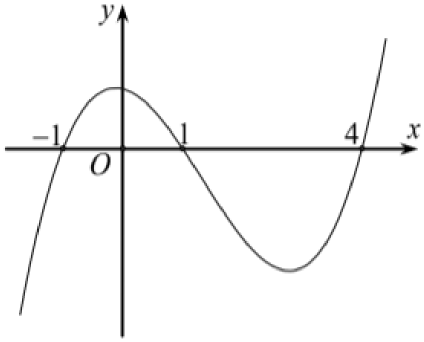
Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f^3\left(x^3 + 3x\right) + 2022$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x) = (x-2)^2\left(x^2 - x\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 154. **B.** 17. **C.** 213. **D.** 153.

Câu 37: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|4 - 2x| + m - 6)$ có đúng 3 điểm cực tiểu. Tổng các phần tử của S bằng

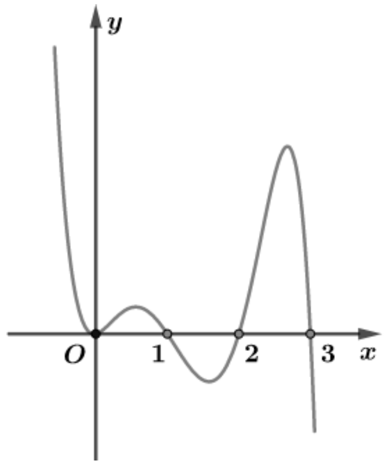


A. 18. **B.** 11. **C.** 2. **D.** 13.

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2+x-6$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(x^3-3x^2-9x+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 39: Cho hàm đa thức $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



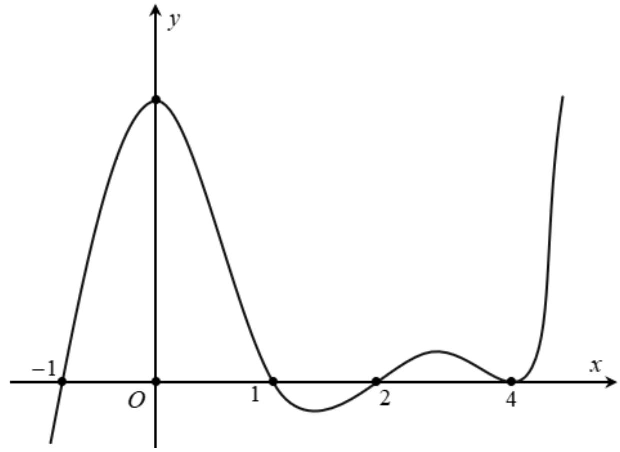
Có bao nhiêu giá trị của $m\in\left[2;6\right);2m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2\left|x-1\right|-2x+m-1\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 40: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'\left(x\right)=x^3-3x^2-10x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$ có 13 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 41: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x\right|^3-3\left|x\right|+m+2021\right)+2022m^3$ có đúng 11 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m+1)x^2 + 2m - 1$ có 3 điểm cực trị.

A. $-1 < m < 0$. **B.** $m < -1$. **C.** $m > -1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 4mx^3 - 2(m+1)x = 2x(2mx^2 - m - 1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & (1) \\ 2mx^2 - m - 1 = 0 & (2) \end{array}\right..$$

Để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \neq 0 \\ \Delta' = 2m(m+1) > 0 \\ -m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right..$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$ thì hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị m nguyên nhỏ hơn 2022 thỏa mãn đồ thị hàm số $y = (4 + 4m - m^2 - m^3)x^4 - 2(m+1)x^2 + 3$ có đúng một điểm cực đại?

A. 2023. **B.** 2021. **C.** 2. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = -(m-2)(m+2)(m+1)x^4 - 2(m+1)x^2 + 3$.

Trường hợp 1: $m = 2 \Rightarrow y = -6x^2 + 3$, thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m = -2 \Rightarrow y = 2x^2 + 3$, loại.

Trường hợp 3: $m = -1 \Rightarrow y = 3$, loại.

Trường hợp 4: $\begin{cases} 2(m-2)(m+2)(m+1)^2 < 0 \\ -(m-2)(m+2)(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)(m+2) < 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 2.$

Trường hợp 5: $\begin{cases} 2(m-2)(m+2)(m+1)^2 > 0 \\ -(m-2)(m+2)(m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)(m+2) > 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$

Vậy $m > -1$.

Câu 3: Xét hàm số $y = f(x) = x^4 + 2mx^3 - (m+1)x^2 + 2m - 2$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại là

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta xét $y = f(x) = x^4 + 2mx^3 - (m+1)x^2 + 2m - 2$

$y' = 4x^3 + 6mx^2 - 2(m+1)x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 + 3mx - m - 1 = 0 \, (*) \end{array}\right.$

Để hàm số có tực tiểu mà không có cực đại khi và chỉ khi

Trường hợp 1: $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \le 0 \Leftrightarrow 9m^2 + 8m + 8 \le 0 \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

Trường hợp 2: $(*)$ có một nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy số giá trị nguyên của tham số m là 1.

Câu 4: Số điểm cực trị của hàm số $y = x\left(x^2 - 4\right)\left(-x^2 + 3x - 2\right)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có $y = f(x) = x\left(x^2 - 4\right)\left(-x^2 + 3x - 2\right) = -x(x-1)(x+2)(x-2)^2$.

Ta có $y' = -(x-1)(x+2)(x-2)^2 - x(x+2)(x-2)^2 - x(x-1)(x-2)^2 - 2x(x-1)(x+2)(x-2)$

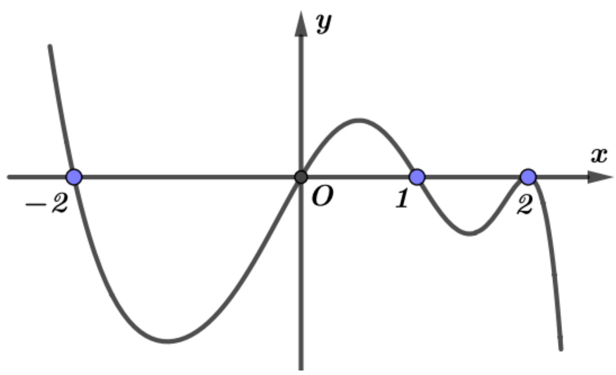
$y' = -(x-2)\left(x^3 - x^2 - 4x + 4 + x^3 - 4x + x^3 - 3x^2 + 2x + 2x^3 + 2x^2 - 4x\right)$

$\Rightarrow y' = -(x-2)\left(5x^3 - 2x^2 - 10x + 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ 5x^3 - 2x^2 - 10x + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \dfrac{2}{5} \end{array}\right.$

Vì y' đổi dấu khi qua 4 điểm $x = 2$; $x = \pm\sqrt{2}$ và $x = \dfrac{2}{5}$. Vậy số điểm cực trị của hàm số là 4.

Cách 2:

Nhận xét: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 4 điểm có hoành độ $0, 1, -2, 2$ trong đó tại điểm có hoành độ $x = 2$ là đồ thị $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành. Do đó, đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hình dạng như sau



Từ đồ thị, ta thấy số điểm cực trị của hàm số là 4.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 3, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x) = x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left[f'(x)\right]^2 - 2f(x).f''(x)$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-2f(x).f''(x)$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=2f'(x).f''(x)-2\left[f'(x).f''(x)+f(x).f'''(x)\right]=-2f(x).f'''(x)$

Do đó $g'(x)=-2x.(x-1)^2.(x+4)^2$.

Ta thấy $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua $x=0,x=-4$ nên hàm số y= $y=g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 6: Gọi x_1,x_2 là các điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2-6x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\left(x_1^2-3\right)\left(x_2^2-1\right)$ là

A. $7-4\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $7+4\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-6mx-6$.

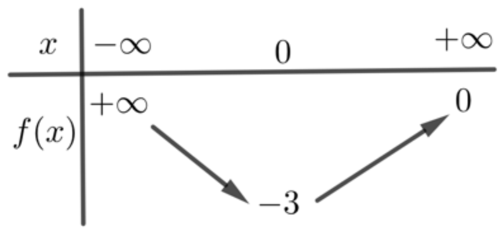
Dễ thấy $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với mọi $m\in\mathbb{R}$ và $x_1.x_2=-2$.

Ta có $S=\left(x_1^2-3\right)\left(x_2^2-1\right)=x_1^2x_2^2-x_1^2-3x_2^2+3=7-x_1^2-\dfrac{12}{x_1^2}$

$=7-\left(x_1^2+\dfrac{12}{x_1^2}\right)\le 7-2\sqrt{x_1^2.\dfrac{12}{x_1^2}}=7-4\sqrt{3}$.

Vậy $\max S=7-4\sqrt{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2=\dfrac{12}{x_1^2}\\ x_1x_2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=\sqrt[4]{12}\\ x_2=\dfrac{-2}{\sqrt[4]{12}}\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=-\sqrt[4]{12}\\ x_2=\dfrac{2}{\sqrt[4]{12}}\end{cases}\end{array}\right.$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^3}$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Với $\forall x\in(0;+\infty)$:

$g'(x)=\dfrac{f'(x).x^3-f(x).3x^2}{x^6}=\dfrac{x.f'(x)-3.f(x)}{x^4}=\dfrac{h(x)}{x^4}$, với $h(x)=xf'(x)-3f(x)$.

Từ bảng biến thiên, ta thấy: $\begin{cases}-3<f(x)<0\\ f'(x)>0\end{cases}$, $\forall x\in(0;+\infty)\Rightarrow\begin{cases}-3f(x)>0\\ xf'(x)>0\end{cases}\Rightarrow h(x)>0$.

Do đó $g'(x)>0,\forall x\in(0;+\infty)$. Vậy hàm số $g(x)$ không có cực trị trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 8: Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(m^2+2)x-m+1$ đạt cực đại tại $x=1$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=5\end{array}\right.$. **B.** Không tồn tại m.

C. $m=1$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-6mx+(m^2+2)$, $y''=6x-6m$.

Hàm số $y=x^3-3mx^2+(m^2+2)x-m+1$ đạt cực đại tại $x=1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y'(1)=0\\ y''(1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-6m+m^2+2=0\\ 6-6m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-6m+5=0\\ m>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=5\end{array}\right.\\ m>1\end{cases}\Leftrightarrow m=5$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

A. $m=3$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m=-24$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6x+m$

Do hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ nên $y'(-2)=0\Leftrightarrow 3.2^2+6.2+m=0\Leftrightarrow m=-24$

Với $m=-24$ hàm số trở thành $y=x^3-3x^2-24x+1$

$y'=3x^2-6x-24, y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-2\end{array}\right.$.

$y''=6x-6$

Ta có $\begin{cases}y''(-2)=-18<0\\ y'(-2)=0\end{cases}\Rightarrow x=-2$ là điểm cực đại của hàm số đã cho.

Vậy $m\in\varnothing$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=-x^3+2(2m-1)x^2-(m^2-8)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x=-1$.

A. $m=3$. **B.** $m=-9$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)=-x^3+2(2m-1)x^2-(m^2-8)x+2$ có $f'(x)=-3x^2+4(2m-1)x-(m^2-8)$ và $f''(x)=-6x+4(2m-1)$.

Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị tại điểm $x=-1$ là $f'(-1)=0$

$\Leftrightarrow -3-4(2m-1)-(m^2-8)=0 \Leftrightarrow m^2+8m-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-9 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $m=1 \Rightarrow f''(-1)=-6(-1)+4(2.1-1)=10 \Rightarrow f''(-1)>0$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$. Vậy $m=1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m=-9 \Rightarrow f''(-1)=-6(-1)+4\left[2(-9)-1\right]=-70 \Rightarrow f''(-1)<0$, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Vậy với $m=-9$ thì hàm số đã cho đạt giá trị cực đại tại điểm $x=-1$.

Câu 11: Cho hàm số $y=x^6+(4+m)x^5+(16-m^2)x^4+2$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 6. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=x^6+(4+m)x^5+(16-m^2)x^4+2$ có TXĐ là $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=6x^5+5(4+m)x^4+4(16-m^2)x^3=x^3\left[6x^2+5(4+m)x+4(16-m^2)\right]$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 6x^2+5(4+m)x+4(16-m^2)=0 \end{array}\right.$.

Do $x=0$ là một nghiệm của phương trình $y'=0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi qua điểm $x=0$.

Đặt $g(x)=6x^2+5(4+m)x+4(16-m^2)$.

Trường hợp 1: $x=0$ là nghiệm của phương trình $g(x)=0$. Suy ra $m=4$ hoặc $m=-4$.

Với $m=4$, $g(x)=6x^2+40x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{20}{3} \end{array}\right.$.

Khi đó phương trình $y'=0$ có $x=0$ là nghiệm bội 4 nên y' không đổi dấu khi qua điểm $x=0$.
Suy ra $x=0$ không là điểm cực trị của hàm số.
Vậy $m=4$ không thỏa mãn.
Với $m=-4$, loại do m là số nguyên dương.

Trường hợp 2: $x=0$ không là nghiệm của phương trình $g(x)=0$ hay $m\neq \pm 4$.

Ta có $y'=x^3.g(x)$; $g(0)=4(16-m^2)$.

y' đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi qua điểm $x=0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)>0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 4(16-m^2)>0 \Leftrightarrow -4<m<4$.

Mà m là số nguyên dương nên ta có $m\in\{1,2,3\}$ hay $S=\{1,2,3\}$.

Vậy tổng các phần tử của tập hợp S là $1+2+3=6$.

Câu 12: Cho hàm số $y=x^6+(2+m)x^5+(4-m^2)x^4+4$. Gọi S là tập hợp các giá trị m nguyên dương không vượt quá 10 để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 42. **B.** 52. **C.** 40. **D.** 50.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 6x^5 + 5(2+m)x^4 + 4(4-m^2)x^3 = x^3(6x^2 + 5(2+m)x + 4 - m^2)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ 6x^2 + 5(2+m)x + 4 - m^2 = 0\ (*) \end{cases}$.

$(*)$ có $\Delta = 49m^2 + 100m + 4 = (49m+2)(m+2)$.

Với mọi m nguyên dương thì $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{-5(2+m)}{6} < 0 \end{cases}$ do đó ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$: $(*)$ có hai nghiệm âm phân biệt $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$, ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Lúc này $x = 0$ là điểm cực tiểu.

Trường hợp 2: $\begin{cases} 4 - m^2 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$: $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $x_1, x_2\ (x_1 < 0 < x_2)$, ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đây suy ra $x = 0$ là điểm cực đại.

Trường hợp 3: $(*)$ có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm, lúc này $x = 0$ là nghiệm bội 4 của đạo hàm nên không phải là điểm cực trị.

Vậy có ba giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Tổng các phần tử của S bằng 52.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3. **B.** 5. **C.** vô số. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3\left[8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)\right] = x^3.g(x)$

Với $g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0) = -4(m^2-4)$.

Trường hợp 1: $g(0) < 0 \Leftrightarrow -4(m^2-4) < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Khi $x \to 0^-$ thì $y' = x^3.g(x) \to 0^+$; khi $x \to 0^+$ thì $y' = x^3.g(x) \to 0^- \Rightarrow y'$ đổi dấu từ dương sang âm qua $x = 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Trường hợp 2: $g(0)>0 \Leftrightarrow -4(m^2-4)>0 \Leftrightarrow m\in(-2;2)$.

Khi $x\to 0^-$ thì $y'=x^3.g(x)\to 0^-$; khi $x\to 0^+$ thì $y'=x^3.g(x)\to 0^+ \Rightarrow y'$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Trường hợp 3: $g(0)=0 \Leftrightarrow -4(m^2-4)=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$

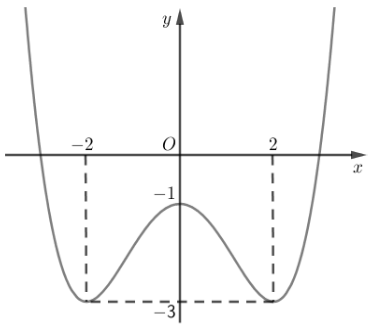
Với $m=2$, ta có $y'=8x^7 \Rightarrow y'$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Với $m=-2$, ta có $y'=x^3(8x^7-20x)=x^4(8x^6-20) \Rightarrow y'$ không đổi dấu qua $x=0 \Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị tại $x=0$.

Như vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Leftrightarrow m\in(-2;2]$. Do m nguyên nên $m\in\{-1;0;1;2\}$.

Vậy có tất cả 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c,(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f^2(x)$ bằng?



A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

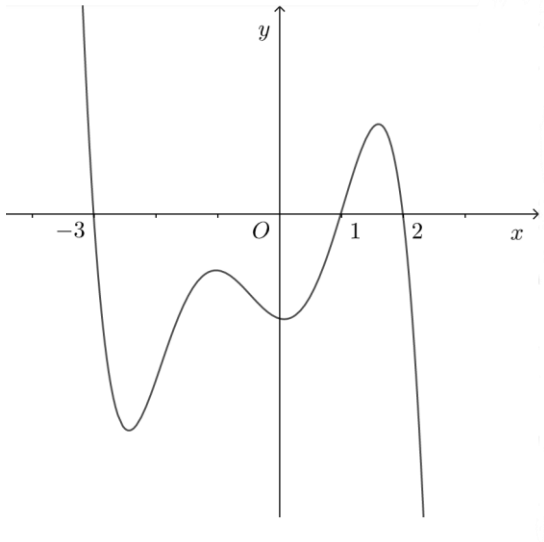
Chọn B

Ta có: $y=f^2(x)\Rightarrow y'=2f'(x)f(x)$

Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm x_0 \end{array}\right. (x_0>2)$.

Phương trình $y'=0$ có 5 nghiệm đơn nên hàm số $y=f^2(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(-3)>0, f(2)=0$ và có đồ thị $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Hàm số $g(x)=\left|f(x)-x^4+14x^2-24x+11\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5.

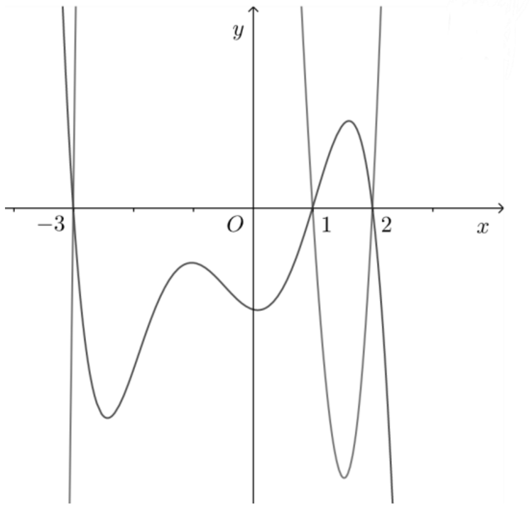
Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta thấy $f(x)$ đồng biến trên $[1;2]$, suy ra $f(1)<f(2)=0$.

Xét hàm số $h(x)=f(x)-x^4+14x^2-24x+11; h'(x)=f'(x)-\left(4x^3-28x+24\right)$.

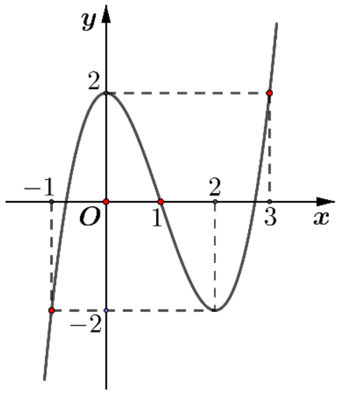
Vẽ đồ thị hàm số $y=4x^3-28x+24$ trên cùng mặt phẳng tọa độ, ta lập được bảng biến thiên của $h(x)$ và $g(x)=|h(x)|$ ($h(-3)=f(-3)+128>128, h(1)=f(1)<0, h(2)=3$).



x	$-\infty$	x_1	-3	x_2	1	x_3	2	x_4	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	0	>0	0	<0	0	3	0	$-\infty$
$\lvert h(x)\rvert$	$+\infty$	0		0		0		0	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=\left|f(x)-x^4+14x^2-24x+11\right|$ có 4 điểm cực tiểu.

Câu 16: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2}$, hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left|18f\left(1-\dfrac{x}{3}\right)-x^2\right|$ là

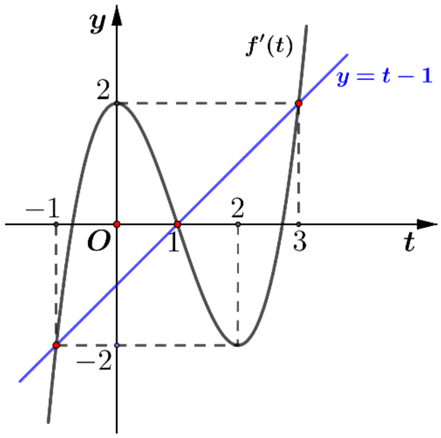
A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h\left(x\right)=18f\left(1-\dfrac{x}{3}\right)-x^2$. Ta có: $h'\left(x\right)=-6.f'\left(1-\dfrac{x}{3}\right)-2x$.

$h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(1-\dfrac{x}{3}\right)=-\dfrac{x}{3}\Leftrightarrow f'\left(1-\dfrac{x}{3}\right)=\left(1-\dfrac{x}{3}\right)-1$ (phương trình có dạng: $f'\left(t\right)=t-1$)



Dựa vào đồ thị ta thấy: $f'\left(1-\dfrac{x}{3}\right)=\left(1-\dfrac{x}{3}\right)-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-\dfrac{x}{3}=-1\\1-\dfrac{x}{3}=1\\1-\dfrac{x}{3}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\x=0\\x=-6\end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ là đồ thị hàm đa thức bậc ba, có hai điểm cực trị là $A\left(0;2\right)$ và $B\left(2;-2\right)$. Suy ra: $f'\left(x\right)=x^3-3x^2+2\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+2x+d$.

Do $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2}$ nên $d=\dfrac{1}{2}$. Ta được: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+2x+\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $h\left(-6\right)=18f\left(3\right)-36=18\left[f\left(3\right)-2\right]=18\left(\dfrac{-1}{4}-2\right)=-\dfrac{81}{2}$

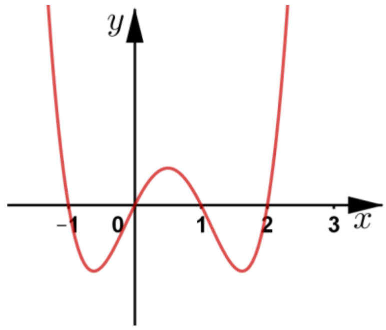
$h(0)=18f(1)-0=\dfrac{63}{2}$; $h(6)=18f(-1)-36=18\left[f(-1)-2\right]=18\left(\dfrac{-1}{4}-2\right)=-\dfrac{81}{2}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-6		0		6		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{81}{2}$	↗	$\frac{63}{2}$	↘	$-\frac{81}{2}$	↗	$+\infty$
$g(x)=\lvert h(x)\rvert$	$+\infty$	↘ 0 ↗	$\frac{81}{2}$	↘ 0 ↗	$\frac{63}{2}$	↘ 0 ↗	$\frac{81}{2}$	↘ 0 ↗	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=\left|18f\left(1-\dfrac{x}{3}\right)-x^2\right|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 17: Cho $f(x)$ là đa thức bậc ba, biết hàm số $y=f'\left(x^2-x+1\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+4}-m\right)$ có năm điểm cực trị?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)$ là đa thức bậc ba nên $f'(x)$ là đa thức bậc hai $\Rightarrow f'\left(x^2-x+1\right)$ là đa thức bậc 4.

Do đó từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x^2-x+1\right)$ ta có:

$f'\left(x^2-x+1\right)=a(x+1)x(x-1)(x-2)$, với $a>0$.

$f'\left(x^2-x+1\right)=a\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x\right)=a\left(x^2-x+1-3\right)\left(x^2-x+1-1\right)$.

Suy ra $f'(x)=a(x-3)(x-1), \forall x\in\mathbb{R}$

Xét hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+4}-m\right)$ có $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}f'\left(\sqrt{x^2+4}-m\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+4}-m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+4}-m=1\\ \sqrt{x^2+4}-m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+4}=m+1\\ \sqrt{x^2+4}=m+3\end{array}\right..$$

Hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+4}-m\right)$ có 5 điểm cực trị

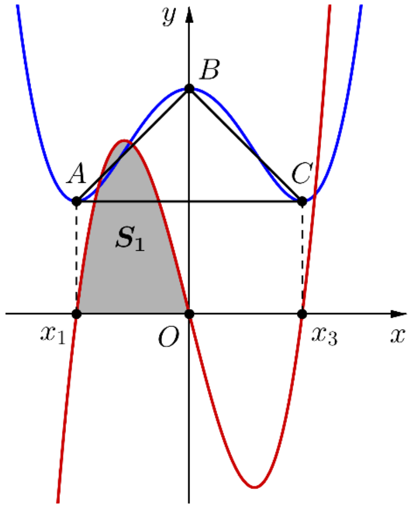
$\Leftrightarrow y'=0$ có 5 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua các nghiệm đó.

$\Leftrightarrow m+1>2 \Leftrightarrow m>1$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10;10]$ nên $m \in \{2;3;4;...;10\}$

Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3.



Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$, $y=0$, $x=x_1$, $x=x_2$ là S_1 và diện tích của tam giác ABC là S. Tính $P=x_1.x_3$, với $S_1=1$ và $S=1$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: x_1, x_2, x_3 là các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, với $x_2=0$ và $x_1<x_3$.

Theo giả thiết: $S_1=1 \Rightarrow \int\limits_{x_1}^{0} f'(x)\mathrm{d}x=1 \Rightarrow f(0)-f(x_1)=1$.

Và giả thiết: $S_{\Delta ABC}=1 \Rightarrow \frac{1}{2}(x_3-x_1).\left[f(0)-f(x_1)\right]=1$.

Ta có hệ: $\begin{cases} f(0)-f(x_1)=1 \\ \frac{1}{2}(x_3-x_1)\left[f(0)-f(x_1)\right]=1 \\ x_1+x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3-x_1=2 \\ x_1+x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_3=1 \end{cases}$. Vậy $P=x_1.x_3=-1$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^3+(m-1)x^2+2x-m+2022$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2021;2022]$ để hàm số $y=\left|f(x-2021)-2022\right|$ có số điểm cực trị nhiều nhất?

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 4040. **D.** 2023

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\left|f(x-2021)-2022\right|$ có số điểm cực trị nhiều nhất là 7 khi và chỉ khi phương trình $f(x-2021)=2022$ có 4 nghiệm phân biệt hay phương trình $f(x)=2022$ có 4 nghiệm phân biệt

Ta có $f(x)=2022 \Leftrightarrow x^4-2x^3+(m-1)x^2+2x-m=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)\left[x^2-2x+m\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x^2-2x+m=0\ (*) \end{array}\right.$$

Suy ra $f(x)=2022$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1 và 1 tức là

$\begin{cases} 1-m>0 \\ 1^2-2+m\neq 0 \\ 1^2+2+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m\neq -3 \end{cases}$ do m nguyên thuộc $[-2021;2022]$ nên có 2021 giá trị thỏa mãn.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m+1)x^2+(3-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m\geq 3$. **B.** $\frac{-1}{2}<m$. **C.** $m>3$. **D.** $-\frac{1}{2}<m\leq 3$.

Lời giải

Chọn A

Để hàm số $y=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $y=f(x)$ có đúng 1 cực trị dương.

Khi đó $f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3-m=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm dương và nghiệm còn lại phải bé hơn hoặc bằng 0. Suy ra

$$\begin{cases} \Delta'=(2m+1)^2-3(3-m)>0 \\ x_1x_2=\dfrac{3-m}{3}\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2+7m-8>0 \\ 3-m\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{-7-\sqrt{177}}{8} \\ m>\dfrac{-7+\sqrt{177}}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 3.$$

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^3-2x^2)(x^3-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $|f(1-2022x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 12. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=(x^3-2x^2)(x^3-2x)=x^3(x-2)(x^2-2)=x^3(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

$f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn và 1 nghiệm bội 3 nên hàm số $f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Số điểm cực trị của hàm số $|f(1-2022x)|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$.

Ta có số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng $m+n$ (Trong đó m là số điểm cực trị của hàm $f(x)$, n là số nghiệm của $f(x)$ không tính những nghiệm là điểm cực trị).

Theo trên ta có $m=4$ nên số nghiệm lớn nhất của $f(x)$ là 5 hay $n=5$.

Hàm số $|f(1-2022x)|$ có nhiều nhất 9 điểm cực trị.

Câu 22: Hàm số $y=|x^4-4x^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=x^4-4x^2$ có $y'=4x^3-8x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Khi đó hàm số $y=x^4-4x^2$ có 3 cực trị.

Mặt khác phương trình $x^4-4x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$.

Ta thấy phương trình $x^4-4x^2=0$ có 2 nghiệm đơn.

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là $3+2=5$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ ta có hàm số $f(x)$ có 2 cực trị tại $x=-1$ và $x=4$.

Xét $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)=\begin{cases}f\left(x^3+2x-4\right)\text{ khi } x\ge 0\\ f\left(x^3-2x-4\right)\text{ khi } x<0\end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases}\left(3x^2+2\right).f'\left(x^3+2x-4\right)\text{ khi } x\ge 0\\ \left(3x^2-2\right).f'\left(x^3-2x-4\right)\text{ khi } x<0\end{cases}$.

Xét $g'(x)=0$

Trường hợp 1: $x\ge 0$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left(3x^2+2\right).f'\left(x^3+2x-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+2x-4=-1\\x^3+2x-4=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+2x-3=0\\x^3+2x-8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1>0\\x\simeq 1,67>0\end{array}\right.$

Với $x\ge 0$ có 2 cực trị.

Trường hợp 2: $x<0$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left(3x^2-2\right).f'\left(x^3-2x-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2=0\\x^3-2x-4=-1\\x^3-2x-4=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\dfrac{2}{3}\\x^3-2x-3=0\\x^3-2x-8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\\x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\text{ (lo¹i)}\\x\simeq 1.89\text{ (lo¹i)}\\x\simeq 2,33\text{ (lo¹i)}\end{array}\right.$

Với $x<0$ có 1 cực trị.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)$ có 3 cực trị.

Câu 24: Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-8|x|^3+22x^2-24|x|+6\sqrt{2}$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+6\sqrt{2}$.

Suy ra $f'(x)=4x^3-24x^2+44x-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị dương.

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $y=x^4-8|x|^3+22x^2-24|x|+6\sqrt{2}$ bằng $2.3+1=7$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét: Hàm số $y=f(|x|)$ có số điểm cực trị $=2.$(số điểm cực trị dương của hàm số $y=f(x)$) $+1$.

Suy ra để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f(x)$ phải có 2 điểm cực trị dương.

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\,(L) \\ (x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2(m+1)x+m^2-1=0\,(*) \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Từ điều kiện bài toán suy ra phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 và trái dấu hoặc có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương khác 1.

Trường hợp 1: hai nghiệm phân biệt khác 1 và trái dấu.

Điều kiện $\begin{cases}1^2-2(m+1).1+m^2-1\neq 0\\ 1.\left(m^2-1\right)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-2m-2\neq 0\\ m^2-1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 1-\sqrt{3};\\ m\neq 1+\sqrt{3};\\ -1<m<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 1-\sqrt{3}\\ -1<m<1\end{cases}$.

Suy ra $m=0$ (TM).

Trường hợp 2: có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương khác 1.

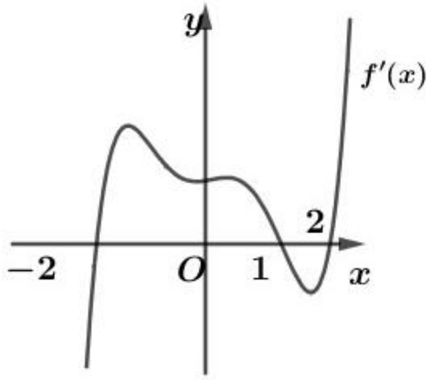
Điều kiện $0^2-2(m+1).0+m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Với $m=1 \Rightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\end{array}\right. \Rightarrow m=1$ (TM).

Với $m=-1 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow m=-1$ (Loại).

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(-2)<f(2)=0$, đồ thị $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Hàm số $g(x)=\left|f(x)+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $h(x)=f(x)+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x$.

Ta có $h'(x)=f'(x)+x^3-x^2-4x+4$. Với $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x^3+x^2+4x-4$.

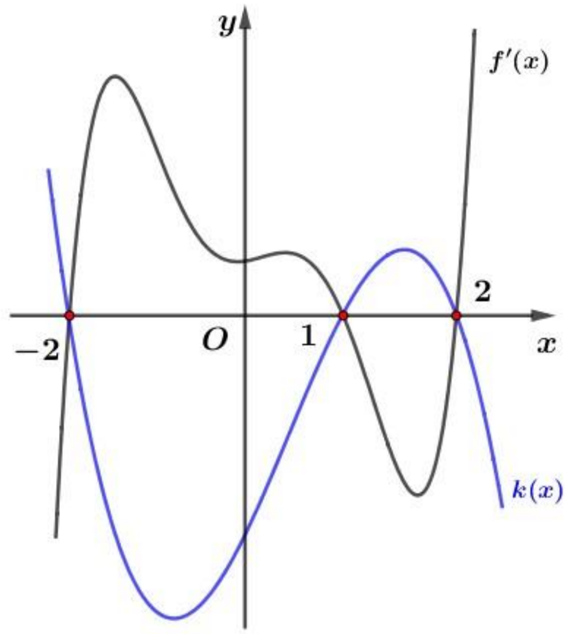
Đặt $k(x)=-x^3+x^2+4x-4$, ta sẽ khảo sát và vẽ đồ thị của $k(x)$.

Ta có $k'(x)=-3x^2+2x+4$. Cho $k'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+2x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$.

Chú ý sự tương giao của đồ thị hàm số $k(x)$ và trục hoành, ta thấy

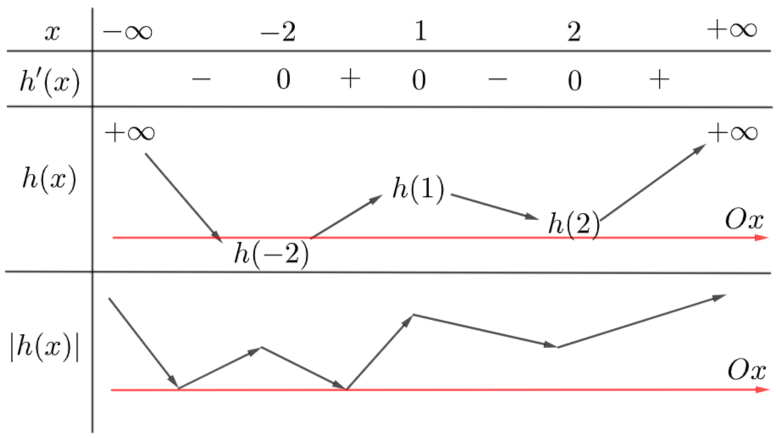
$$k(x)=0 \Leftrightarrow -x^3+x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=1\\ x=2\end{array}\right..$$

Từ đó ta có hình vẽ như sau



Từ hình vẽ, ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Hơn nữa, $h(-2)=f(-2)-\frac{28}{3}<0$, $h(2)=f(2)+\frac{4}{3}>0$. Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ và $|h(x)|$ như sau



Vậy hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|-x^3+3x^2+m+2\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=|g(x)|$ có số điểm cực trị bằng tổng số điểm cực trị của $g(x)$ và số nghiệm đơn của phương trình $g(x)=0$.

Xét hàm số $y=g(x)=-x^3+3x^2+m+2$.

Suy ra $y'=g'(x)=-3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$m+2$	$\nearrow$	$m+6$	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra hàm số $y=g\left(x\right)=-x^3+3x^2+m+2$ có 2 điểm cực trị.

Hàm số $y=\left|-x^3+3x^2+m+2\right|$ có 5 điểm cực trị khi $-x^3+3x^2+m+2=0$ có 3 nghiệm đơn khác 0 và 2. Khi đó $\begin{cases} m+6>0 \\ m+2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-6 \\ m<-2 \end{cases} \Leftrightarrow -6<m<-2$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|-x^3+3x^2+m+2\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 28: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f\left(-2\right)=0$ và đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g\left(x\right)=\left|15f\left(-x^4+2x^2-2\right)-10x^6+30x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $h\left(x\right)=15f\left(-x^4+2x^2-2\right)-10x^6+30x^2$

Ta có $h'\left(x\right)=15\left(-4x^3+4x\right).f'\left(-x^4+2x^2-2\right)-60x^5+60x$

$\Rightarrow h'\left(x\right)=-60x\left(x^2-1\right)\left[f'\left(-x^4+2x^2-2\right)+x^2+1\right]$.

Mà $-x^4+2x^2-2=-\left(x^2-1\right)^2-1\le -1, \forall x\in\mathbb{R}$ nên dựa vào bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ ta suy ra $f'\left(-x^4+2x^2-2\right)\ge 0$.

Suy ra $f'\left(-x^4+2x^2-2\right)+x^2+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

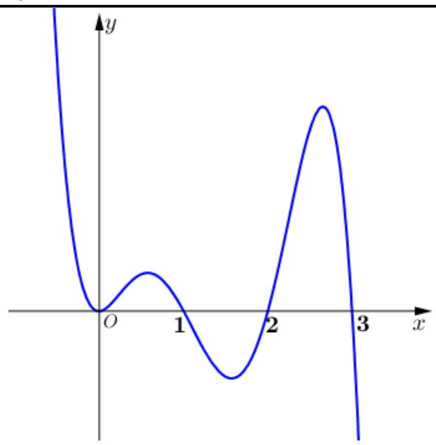
Do đó dấu của $h'\left(x\right)$ cùng dấu với $u\left(x\right)=-60x\left(x^2-1\right)$, tức là đổi dấu khi đi qua các điểm $x=-1; x=0; x=1$.

Vậy hàm số $h\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $h\left(0\right)=15f\left(-2\right)=0$ nên đồ thị hàm số $y=h\left(x\right)$ tiếp xúc Ox tại O và cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt khác điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=g\left(x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 29: Cho hàm đa thức $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị của m để $m \in [0;6]$, $2m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2|x-1| - 2x + m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = h(|x-1|) = f\left(|x-1|^2 - 2|x-1| + m - 1\right)$

Do đồ thị hàm số $y = h(|x-1|)$ có được khi tịnh tiến đồ thị hàm số $y = h(|x|)$ sang phải một đơn vị nên số cực trị của hàm số $y = h(|x-1|)$ bằng số cực trị hàm $y = h(|x|)$. Như vậy, để hàm số $g(x)$ có 9 cực trị thì hàm số $y = h(x) = f\left(x^2 - 2x + m - 1\right)$ có 4 cực trị có hoành độ dương.

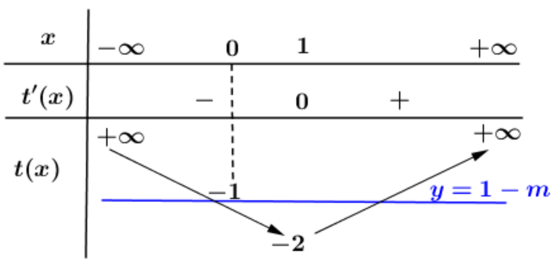
Lại có: $y' = (2x-2)\, f'\left(x^2 - 2x + m - 1\right)$.

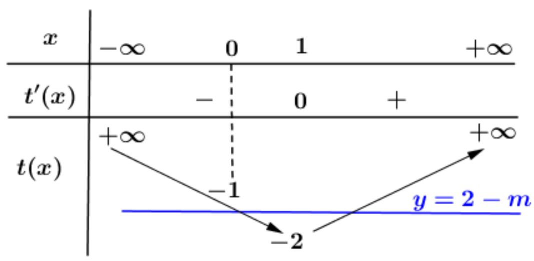
$$y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ f'\left(x^2 - 2x + m - 1\right) = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

$$(*) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + m - 1 = 1 \\ x^2 - 2x + m - 1 = 2 \\ x^2 - 2x + m - 1 = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 1 = 1 - m \ \ (1) \\ x^2 - 2x - 1 = 2 - m \ \ (2) \\ x^2 - 2x - 1 = 3 - m \ \ (3) \end{array}\right.$$

(trường hợp $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ có nghiệm bội chẵn nên không là cực trị).

Xét hàm số $t(x) = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow t'(x) = 2x - 2$





Để hàm số đã cho có 9 cực trị thì phương trình $(1), (2), (3)$ phải có 3 nghiệm dương phân biệt khác 1. Khi đó, ta có:

$$\left[\begin{array}{l} 1 - m \geq -1 \\ -2 < 2 - m < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 2 \\ 3 < m < 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq 2m \leq 4 \\ 6 < 2m < 8 \end{array}\right..$$

Do $2m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $2m \in \{0;1;2;3;4;7\}$. Vậy có 6 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 30: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f\;\;x=\left|\dfrac{x}{x^2+x+1}-\dfrac{m}{3}\right|$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

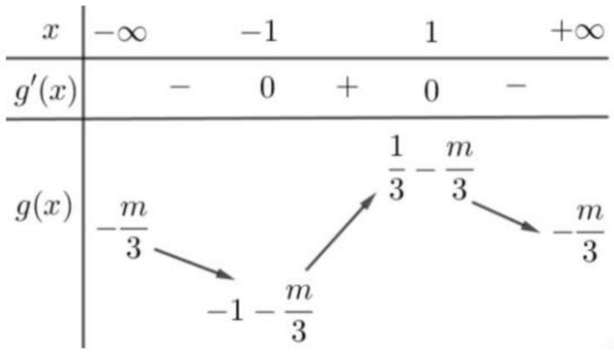
Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g\;\;x=\dfrac{x}{x^2+x+1}-\dfrac{m}{3}$.

Ta có $g'\;\;x=0\Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{x^2+x+1^{\;\;2}}=0\Leftrightarrow x=\pm 1.$

Bảng biến thiên



Hàm số $g\;\;x$ có hai điểm cực trị $x=-1,\ x=1$ với mọi $m\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f\;\;x=\left|g\;\;x\right|$ có ít nhất 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g\;\;x=0$ có nghiệm bội lẻ.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(-1-\dfrac{m}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{m}{3}\right)<0\\ -\dfrac{m}{3}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3<m<1\\ m=0\end{array}\right.\Rightarrow m\in\;\;-2;-1,0\quad (\text{ Do } m \text{ nguyên})$$

Câu 31: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'\left(x\right)$ như hình bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x+1-\left|x-1\right|\right)$ là

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x+1-\sqrt{\left(x-1\right)^2}\right)$

có $g'\left(x\right)=\left(2x-2-\dfrac{x-1}{\left|x-1\right|}\right)f'\left(x^2-2x+1-\left|x-1\right|\right)=\left(x-1\right)\left(2-\dfrac{1}{\left|x-1\right|}\right)f'\left(x^2-2x+1-\left|x-1\right|\right)$

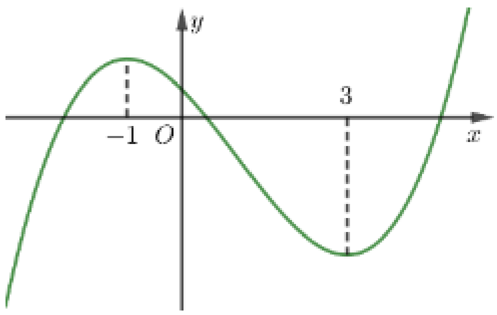
Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ |x-1|=\dfrac{1}{2} \\ x^2-2x+1-|x-1|=-1 \\ x^2-2x+1-|x-1|=0 \\ x^2-2x+1-|x-1|=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{1}{2} \\ |x-1|^2-|x-1|+1=0\ (vn) \\ |x-1|^2-|x-1|=0 \\ |x-1|^2-|x-1|-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=1(k) \\ x=0 \\ x=2 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$-\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 32: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-4x+m\right)$ có 3 điểm cực trị. Số phần tử của S là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

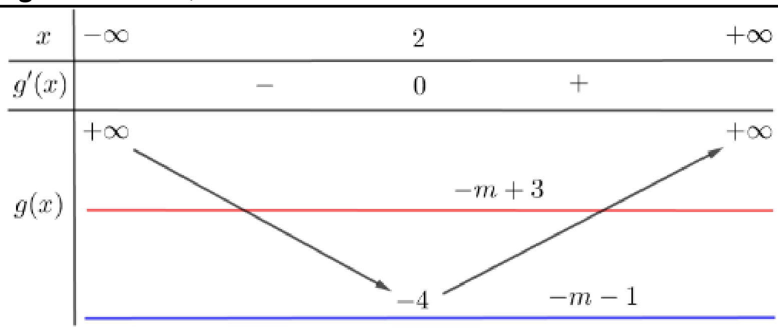
Chọn A

Ta có: $y'=(2x-4)f'\left(x^2-4x+m\right)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f'\left(x^2-4x+m\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-4x+m=-1 \\ x^2-4x+m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-4x=-m-1 \quad (*) \\ x^2-4x=-m+3 \end{array}\right.$

Hàm số $y=f\left(x^2-4x+m\right)$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có đúng 3 nghiệm bội lẻ.

Xét hàm số: $g(x)=x^2-4x$

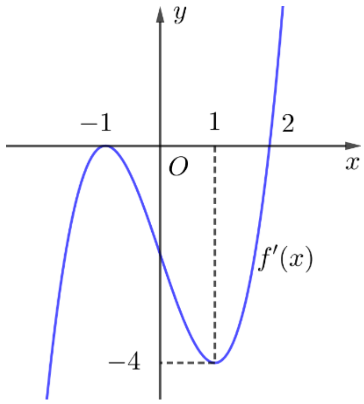


Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: Phương trình $(*)$ có đúng ba nghiệm bội lẻ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m+3>-4 \\ -m-1\le -4 \end{cases} \Leftrightarrow 3\le m<7$$

$$\Rightarrow S=\{3;4;5;6\}$$

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-4|x|+m-3\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x)=f\left(2x^2-4x+m-3\right)$.

Suy ra $h'(x)=(4x-4).f'\left(2x^2-4x+m-3\right)$

Để $g(x)$ có 7 điểm cực trị thì $h(x)$ phải có 3 điểm cực trị dương.

Ta có: $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-4=0 \\ 2x^2-4x+m-3=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 2x^2-4x+m-5=0\,(*) \end{array}\right.$.

$h(x)$ có 3 điểm cực trị dương $\Rightarrow (*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt, khác 1.

$$\Rightarrow \begin{cases} 4-2(m-5)>0 \\ \dfrac{m-5}{2}>0 \\ 2-4+m-5\ne 0 \end{cases} \Rightarrow 5<m<7.$$

Vì m nguyên nên $m=6$. Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.

Câu 34: Cho hàm số $y = f\left(x\right) = x^3 - mx^2 - x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f\left(|x| + 1\right)$ bằng 5.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$y = g(x) = f\left(|x|+1\right) = \left(|x|+1\right)^3 - m\left(|x|+1\right)^2 - \left(|x|+1\right) + 1 = |x|^3 + \left(3-m\right)|x|^2 + \left(2-2m\right)|x| + 1 - m$$

Xét hàm số: $h(x) = x^3 + \left(3-m\right)x^2 + \left(2-2m\right)x + 1 - m$. Để số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f\left(|x|+1\right)$ bằng 5 thì hàm số $h(x) = x^3 + \left(3-m\right)x^2 + \left(2-2m\right)x + 1 - m$ có hai điểm cực trị dương, hay phương trình $h'(x) = 3x^2 + 2\left(3-m\right)x + 2 - 2m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Suy ra: $\begin{cases} \Delta' = \left(3-m\right)^2 - 3\left(2-2m\right) = m^2 + 3 > 0 \\ \dfrac{-2\left(3-m\right)}{3} > 0 \\ \dfrac{2-2m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ (vô lí).

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Câu 35: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right) = f^3\left(x^3 + 3x\right) + 2022$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'\left(x\right) = 3\left(3x^2 + 3\right) f'\left(x^3 + 3x\right) f^2\left(x^3 + 3x\right)$.

Ta thấy $3\left(3x^2 + 3\right) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, và $f^2\left(x^3 + 3x\right) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, nên dấu của $g'\left(x\right)$ chính là dấu của $f'\left(x^3 + 3x\right)$.

$$f'\left(x^3 + 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 + 3x = -1 \\ x^3 + 3x = 0 \\ x^3 + 3x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in \left(-1;0\right) \\ x = 0 \\ x = x_2 \in \left(0;1\right) \end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên của hàm $f\left(x\right)$ ta có $f'\left(x\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$

Do đó $f'\left(x^3 + 3x\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x^3 + 3x < 0 \\ x^3 + 3x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 < x < 0 \\ x > x_2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)=(x-2)^2(x^2-x)$, $x\in\mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 154. **B.** 17. **C.** 213. **D.** 153.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\\x=1\end{array}\right.$, trong đó $x=2$ là nghiệm bội chẵn nên không phải là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Xét hàm số $y=g(x)=f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$; $g'(x)=(x-6)f'\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\f'\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\\frac{1}{2}x^2-6x+m=2\\\frac{1}{2}x^2-6x+m=0\\\frac{1}{2}x^2-6x+m=1\end{array}\right..$$

Nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=2$ không phải là điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

Để hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=0$ và $\frac{1}{2}x^2-6x+m=1$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 6.

Xét hàm số $h(x)=\frac{1}{2}x^2-6x$ có $h'(x)=x-6$. Cho $h'(x)=0\Leftrightarrow x=6$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm phương trình $\frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 0$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x)$ và đường thẳng $y = -m$.

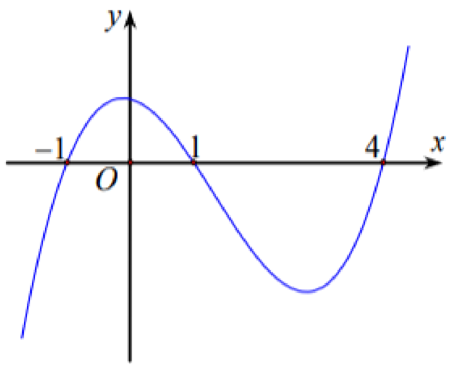
Số nghiệm phương trình $\frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 1$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x)$ và đường thẳng $y = -m + 1$.

Mà $-m < -m + 1$ nên để hai phương trình trên có 4 nghiệm phân biệt khác 6 thì $-m > -18$ $\Leftrightarrow m < 18$.

Tập các giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S = \{1;...;17\}$.

Tổng tất các giá trị m của tập S là $1 + ... + 17 = 153$.

Câu 37: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|4 - 2x| + m - 6)$ có đúng 3 điểm cực tiểu. Tổng các phần tử của S bằng



A. 18. **B.** 11. **C.** 2. **D.** 13.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = f(|4 - 2x| + m - 6)$ là hàm số chẵn với biến số $2x - 4$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ làm trục đối xứng.

Xét hàm số $y = f[(2x - 4) + m - 6]$ (1) có $y' = 2f'(2x + m - 10)$.

Theo đầu bài $y' = 0$ tại các điểm $x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = 4$.

Ta có $\left[\begin{array}{l} 2x_1 + m - 10 = -1 \\ 2x_2 + m - 10 = 1 \\ 2x_3 + m - 10 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{9 - m}{2} \\ x_2 = \frac{11 - m}{2} \\ x_3 = \frac{14 - m}{2} \end{array}\right.$ (x_1, x_2, x_3 là các nghiệm đơn).

Suy ra hàm số (1) có 3 điểm cực trị (2 cực tiểu và 1 cực đại vì là hàm bậc 4 có hệ số $a > 0$).

Đồ thị hàm số $y = f(|4 - 2x| + m - 6)$ gồm 2 phần:

Phần 1: Đồ thị hàm số (1) phía bên phải đường thẳng $x = 2$.

Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua đường thẳng $x = 2$.

Do đó hàm số $y = f(|4 - 2x| + m - 6)$ có 3 điểm cực tiểu thì hàm số $y = f[(2x - 4) + m - 6]$

có 3 cực trị x_1, x_2, x_3 với $x_1 < x_2 < x_3$ và thỏa mãn $\begin{cases} x_1 \le 2 \\ x_2 > 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9-m}{2} \le 2 \\ \dfrac{11-m}{2} > 2 \end{cases} \Rightarrow 5 \le m < 7 \Rightarrow m \in \{5;6\} \Rightarrow S = 11.$$

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + x - 6$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f\left(x^3 - 3x^2 - 9x + m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta có $y' = \left(3x^2 - 6x - 9\right) f'\left(x^3 - 3x^2 - 9x + m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \\ x^3 - 3x^2 - 9x = -m - 3 \quad (1) \\ x^3 - 3x^2 - 9x = -m + 2 \quad (2) \end{array}\right.$.

Xét $h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x;\ h'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$, ta có bảng biến thiên

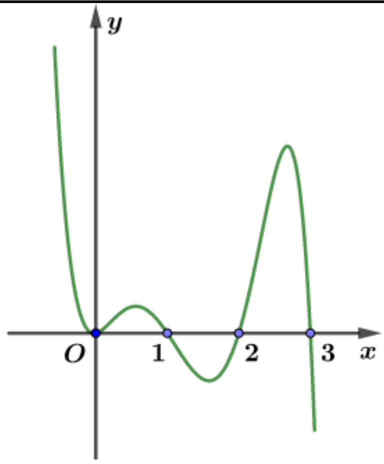
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$ $-m+2$ $-m-3$	$+\infty$

Để hàm số $y = f\left(x^3 - 3x^2 - 9x + m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị thì

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -m + 2 \ge 5 \\ -27 < -m - 3 < 5 \end{cases} \\ \begin{cases} -27 < -m + 2 < 5 \\ -m - 3 \le -27 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -8 < m \le -3 \\ 24 \le m < 29 \end{array}\right..$$

Vậy có 10 giá trị nguyên của m để hàm số $y = f\left(x^3 - 3x^2 - 9x + m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị.

Câu 39: Cho hàm đa thức $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị của $m \in [2;6); 2m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2|x-1| - 2x + m - 1\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = \dfrac{2(x-1)(|x-1|-1)}{|x-1|} f'\left(x^2 - 2|x-1| - 2x + m - 1\right)$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ f'\left(x^2 - 2|x-1| - 2x + m - 1\right) = 0 \end{array}\right.$; $g'(x)$ không xác định tại $x = 1$

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta có

$$f'\left(x^2 - 2|x-1| - 2x + m - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2|x-1| - 2x + m - 1 = 1 \\ x^2 - 2|x-1| - 2x + m - 1 = 2 \\ x^2 - 2|x-1| - 2x + m - 1 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2|x-1| - 2x = 2 - m \\ x^2 - 2|x-1| - 2x = 3 - m \\ x^2 - 2|x-1| - 2x = 4 - m \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2|x-1| - 2x$, ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho có 9 cực trị $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - m \geq -1 \\ -2 < 3 - m < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 3 \\ 4 < m < 5 \end{array}\right. \Rightarrow m \in \left\{2; 3; \dfrac{5}{2}; \dfrac{9}{2}\right\}$.

Vậy có bốn giá trị của m.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 10x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(\left|x^2 - 2mx + m - 2\right| - 3\right)$ có 13 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

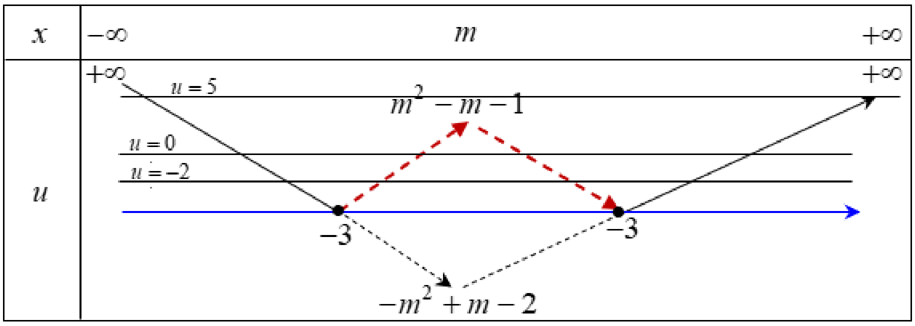
Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x=5;x=0;x=-2$.

Xét hàm số $f(u)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$ với $u=\left|x^2-2mx+m-2\right|-3$.

Đặt $h(x)=x^2-2mx+m-2$, ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		m		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-m^2+m-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhận thấy $-m^2+m-2<0$ nên ta suy ra được bảng biến thiên của u như sau:



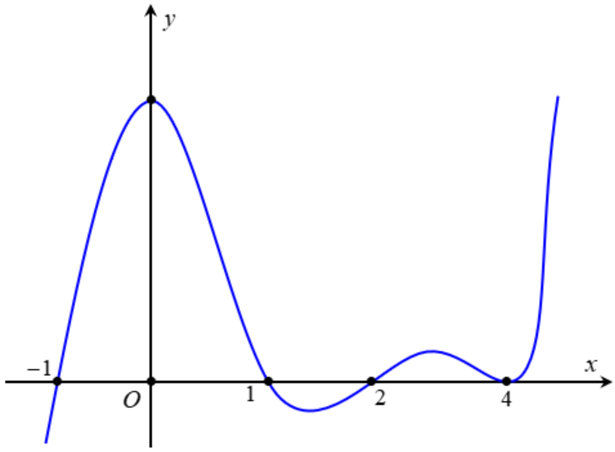
Số điểm cực trị của $f(u)=$ Số điểm cực trị của u + Số nghiệm đơn (bội lẻ) của $\left[\begin{array}{l}u=5\\u=0\\u=-2\end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên ta thấy u có 3 điểm cực trị. Để hàm số $g(x)$ có 13 cực trị thì số nghiệm đơn (bội lẻ) của $\left[\begin{array}{l}u=5\\u=0\\u=-2\end{array}\right.$ phải bằng 10.

Để có 10 nghiệm bội lẻ thì các đường thẳng $u=-2;u=0$ phải nằm dưới m^2-m-1 (nếu nằm trên thì chỉ cho tối đa 6 nghiệm) và đường thẳng $u=5$ phải nằm trên m^2-m-1.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\m<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\m^2-m-1\le 5\Leftrightarrow -2\le m\le 3\end{cases}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+}m\in\{2;3\}$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)+2022m^3$ có đúng 11 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Với mỗi tham số m thì số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)+2022m^3$ và $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)$ bằng nhau.

Do đó ta chỉ cần tìm giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)$ có đúng 11 điểm cực trị.

Xét $x>0$: Hàm số có dạng $y=f\left(x^3-3x+m+2021\right)$.

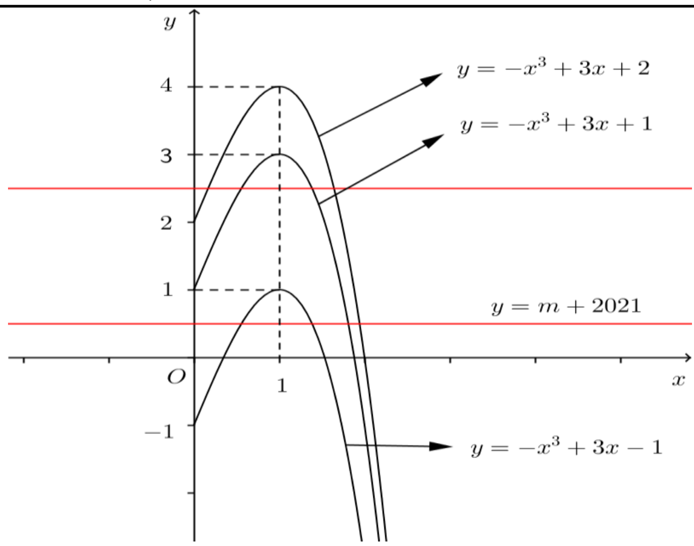
Khi đó ta có đạo hàm như sau: $y'=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+m+2021\right)$.

Do nghiệm của phương trình $x^3-3x+m+2021=4$ là các nghiệm bội bậc chẵn của phương trình $y'=0$ nên ta chỉ cần quan tâm đến các nghiệm còn lại. Tức là

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-3=0 \\ f'\left(x^3-3x+m+2021\right)=0 \end{array}\right. \Leftarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ \left(\text{do } x>0\right) \\ x^3-3x+m+2021=-1 \\ x^3-3x+m+2021=1 \\ x^3-3x+m+2021=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1\ \left(\text{do } x>0\right) \\ m+2021=-x^3+3x-1 \\ m+2021=-x^3+3x+1 \\ m+2021=-x^3+3x+2 \end{array}\right.$$

Vẽ đồ thị ba hàm số $y=-x^3+3x-1$; $y=-x^3+3x+1$; $y=-x^3+3x+2$ với $x>0$ trên cùng một hệ trục



Hàm số $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)$ có đúng 11 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f\left(x^3-3x+m+2021\right)$ có đúng 5 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'\left(x^3-3x+m+2021\right)=0$ có đúng 4 nghiệm bội lẻ dương và khác 1

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m+2021$ cắt đồ thị ba hàm số $y=-x^3+3x-1$; $y=-x^3+3x+1$; $y=-x^3+3x+2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ dương khác 1

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<m+2021<1\\2<m+2021<3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2022<m<-2020\\-2019<m<-2018\end{array}\right.$.

Do điều kiện m nguyên nên $m=-2021$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

DẠNG 8 CỰC TRỊ SỐ PHỨC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Môđun của số phức:

- Số phức $z=a+bi$ được biểu diễn bởi điểm $M\left(a;b\right)$ trên mặt phẳng Oxy. Độ dài của véctơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z. Kí hiệu $\left|z\right|=\left|a+bi\right|=\sqrt{a^2+b^2}$
- **Tính chất**

$\oplus\ |z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\overline{z}}=|\overrightarrow{OM}|$

$\oplus\ |z|\ge 0,\ \forall z\in\mathbb{C},|z|=0\Leftrightarrow z=0$

$\oplus\ |z.z'|=|z|.|z'|$

$\oplus\ \left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|},\left(z'\ne 0\right)$

$\oplus\ \big||z|-|z'|\big|\le|z\pm z'|\le|z|+|z'|$

$\oplus\ \left|kz\right|=\left|k\right|.\left|z\right|,k\in\mathbb{R}$

- **Chú ý:** $\left|z^2\right|=\left|a^2-b^2+2abi\right|=\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}=a^2+b^2=\left|z\right|^2=\left|\overline{z}\right|^2=z.\overline{z}$.
- **Một số lưu ý:**

$\oplus\ \left|z_1+z_2\right|\le\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\left(k\ge 0\right)$

$\oplus\ \left|z_1-z_2\right|\le\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\left(k\le 0\right)$.

$\oplus\ \left|z_1+z_2\right|\ge\big|\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\big|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\left(k\le 0\right)$

$\oplus\ \left|z_1-z_2\right|\ge\big|\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\big|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\left(k\ge 0\right)$

$\oplus\ \left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=2\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)$

$\oplus\ \left|z\right|^2=\left|\overline{z}\right|\left|z\right|=\left|\overline{z}\right|^2,\forall z\in\mathbb{C}$

2. Một số quỹ tích nên nhớ

Biểu thức liên hệ x,y	**Quỹ tích điểm M**
$ax+by+c=0\ (1)$ $\left|z-a-bi\right|=\left|z-c-di\right|\ (2)$	(1) Đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$ (2) Đường trung trực đoạn AB với $\left(A\left(a,b\right),B\left(c,d\right)\right)$
$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2\le R^2$ hoặc $\left|z-a-bi\right|\le R$	Hình tròn tâm $I\left(a;b\right)$, bán kính R
$r^2\le\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2\le R^2$ hoặc $r\le\left|z-a-bi\right|\le R$	Hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm $I\left(a;b\right)$, bán kính lần lượt là r,R
$\left[\begin{array}{l}y=ax^2+bx+c\\x=ay^2+by+c\end{array}\right.\left(c\ne 0\right)$	Parabol
$\dfrac{\left(x+a\right)^2}{b^2}+\dfrac{\left(y+c\right)^2}{d^2}=1(1)$ hoặc $\left|z-a_1-b_1i\right|+\left|z-a_2-b_2i\right|=2a$	(1) Elip (2) Elip nếu $2a>AB$, $A\left(a_1,b_1\right),B\left(a_2,b_2\right)$ Đoạn AB nếu $2a=AB$

$\dfrac{(x+a)^2}{b^2}-\dfrac{(y+c)^2}{d^2}=1$	Hypebol

MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT CẦN LƯU Ý:

Dạng 1: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường thẳng.

Tổng quát 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z-a-bi|=|z|$, tìm $|z|_{Min}$. Khi đó ta có

- Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn OA với $A(a;b)$

$$\begin{cases}|z|_{Min}=\dfrac{1}{2}|z_0|=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\\ z=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}i\end{cases}$$

Tổng quát 2: Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|z-a-bi|=|z-c-di|$. Tìm $|z|_{\min}$. Ta có

- Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn AB với $A(a;b),B(c;d)$

$$|z|_{Min}=d(O,AB)=\frac{|a^2+b^2-c^2-d^2|}{2\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}$$

Lưu ý: Đề bài có thể suy biến bài toán thành 1 số dạng, khi đó ta cần thực hiện biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

VÍ DỤ 1:

- Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|\overline{z}-a-bi|=|z-c-di|$. Khi đó ta biến đổi

$|\overline{z}-a-bi|=|z-c-di|\Leftrightarrow|z-a+bi|=|z-c-di|$.

- Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|iz-a-bi|=|z-c-di|$. Khi đó ta biến đổi

$|iz-a-bi|=|iz-c-di|\Leftrightarrow\left|z+\dfrac{-a-bi}{i}\right|=\left|z+\dfrac{-c-di}{i}\right|\Leftrightarrow|z+b+ai|=|z+d+ci|$.

Dạng 2: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường tròn.

Tổng quát: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-a-bi|=R>0\left(|z-z_0|=R\right)$. Tìm $|z|_{Max},|z|_{Min}$

- Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R

$$\begin{cases}|z|_{Max}=OI+R=\sqrt{a^2+b^2}+R=|z_0|+R\\ |z|_{Min}=|OI-R|=\left|\sqrt{a^2+b^2}-R\right|=\left||z_0|-R\right|\end{cases}$$

Lưu ý: Đề bài có thể cho ở dạng khác, ta cần thực hiện các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|iz-a-bi|=R\Leftrightarrow\left|z+\dfrac{-a-bi}{i}\right|=\dfrac{R}{|i|}$ (Chia hai vế cho $|i|$) $\Leftrightarrow|z+b+ai|=R$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|\overline{z}-a-bi|=R\Leftrightarrow|z-a+bi|=R$ (Lấy liên hợp 2 vế)

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện:

$$|(c+di)z-a-bi|=R\Leftrightarrow\left|z+\frac{-a-bi}{c+di}\right|=\frac{R}{|c+di|}=\frac{R}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

Hay viết gọn $|z_0z - z_1| = R \Leftrightarrow \left|z - \frac{z_1}{z_0}\right| = \frac{R}{|z_0|}$ (Chia cả hai vế cho $|z_0|$)

Dạng 3: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là Elip.

Tổng quát 1: (Elip chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-c|+|z+c| = 2a, (a > c)$

- Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là Elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

$$\begin{cases} |z|_{Max} = a \\ |z|_{Min} = \sqrt{a^2 - c^2} \end{cases}$$

Tổng quát 2: (Elip không chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$

Thỏa mãn $2a > |z_1 - z_2|$. Khi đó ta thực hiện phép biến đổi để đưa Elip về dạng chính tắc

<table>
<tr><td colspan="2">Khi đề cho Elip dạng không chính tắc $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a, (|z_1 - z_2| < 2a)$ và $z_1, z_2 \neq \pm c, \pm ci$
Tìm Max, Min của $P = |z - z_0|$. Đặt $\begin{cases} |z_1 - z_2| = 2c \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Nếu $\left|z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2}\right| = 0$</td><td>$\begin{cases} P_{Max} = a \\ P_{Min} = b \end{cases}$ (dạng chính tắc)</td></tr>
<tr><td>Nếu $\begin{cases} \left|z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2}\right| > a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} P_{Max} = \left|z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2}\right| + a \\ P_{Min} = \left|z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2}\right| - a \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Nếu $\begin{cases} \left|z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2}\right| < a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$</td><td>$P_{Max} = \left|z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2}\right| + a$</td></tr>
<tr><td>Nếu $|z_0 - z_1| = |z_0 - z_2|$</td><td>$P_{Min} = \left|\left|z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2}\right| - b\right|$</td></tr>
</table>

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 42 – Đề tham khảo 2023. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2 - 3 - 4i| = 2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M^2 + m^2$ bằng

A. 28. **B.** $18 + 4\sqrt{6}$. **C.** 14. **D.** $11 + 4\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$2|z| = |z^2 - 3 - 4i| \geq \left||z^2| - |3 + 4i|\right| = \left||z|^2 - 5\right|$ (vì $|z^2| = |z|^2$).

Dấu "=" xảy ra khi $z^2 = k(-3 - 4i)$.

Suy ra $4|z|^2 \geq (|z| - 5)^2 \Leftrightarrow |z|^4 - 14|z|^2 + 25 \leq 0 \Leftrightarrow 7 - 2\sqrt{6} \leq |z|^2 \leq 7 + 2\sqrt{6}$

$\Rightarrow \sqrt{6} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{6} + 1$. Do đó, ta có $M = 1 + \sqrt{6}$ và $m = \sqrt{6} - 1$. Vậy $M^2 + m^2 = 14$.

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Cho hai số phức z và w thỏa mãn $|z| = 4, |w| = 2$. Khi $|z + \overline{w} + 5 + 12i|$ đạt giá trị lớn nhất, phần thực của $z + iw$ bằng

A. $\frac{30}{13}$. **B.** $-\frac{4}{13}$. **C.** $\frac{44}{13}$. **D.** $\frac{58}{13}$.

Câu 2: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 5i| = 2$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2 + 1 + 2i| = |z_2 + i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2 - 1 - 2i|$.

A. $\frac{7\sqrt{2}+4}{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}-4}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{7}-4}{2}$. **D.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |\overline{z} - 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 2i| + |\overline{z} - 1 - 2i|$.

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{17}$.

Câu 4: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 2$ và $|w| = 3$. Khi $|z + i\overline{w} - 5 - 12i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z - w|$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{758}}{13}$. **B.** 8. **C.** $\frac{\sqrt{475}}{13}$. **D.** $\frac{\sqrt{757}}{13}$.

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 2z + 5| = |(z + 1 + 2i)(z + 1 - 3i)|$ và số phức $w = z - 1 - 2i$. Giá trị nhỏ nhất $|w|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn.$|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{13\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 7: Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 2$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tổng $M + m$ bằng:

A. 11. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 8: Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2| + 2|3 - \overline{z}|$. Tổng $M + m$ bằng.

A. 14. **B.** 7. **C.** $\frac{45+5\sqrt{55}}{3}$. **D.** $\frac{15+5\sqrt{33}}{3}$.

Câu 9: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 + 4| = |z^2 + 2iz|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + i|$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 10: Gọi a,b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $\mathrm{w}=\dfrac{z+2\overline{z}}{1-iz}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $|z-1-2i|=2\sqrt{5}$ và biểu thức $|z+2|^2-|z+i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tổng $a+b$.

A. $a+b=\dfrac{16}{13}$. **B.** $a+b=\dfrac{12}{13}$. **C.** $a+b=\dfrac{45}{13}$. **D.** $a+b=\dfrac{62}{13}$.

Câu 11: Giả sử $z_1;z_2$ là hai trong số các số phức z thoả mãn $(z-6)(8-i.\overline{z})$ là một số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$. **B.** $20-4\sqrt{21}$. **C.** $-5+\sqrt{73}$. **D.** $20-2\sqrt{73}$.

Câu 12: Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2-6-8i|=2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 12. **B.** 24. **C.** $2\sqrt{94}$. **D.** $\sqrt{94}$.

Câu 13: Giả sử z_1,z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8-i\overline{z})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=6$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $-5+\sqrt{73}$. **B.** $5+\sqrt{21}$ **C.** $20-2\sqrt{73}$ **D.** $20-4\sqrt{21}$

Câu 14: Xét các số phức. z . thỏa mãn điều kiện $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1$. Gọi $m,\ M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z|$. Tính $S=2023-3M+2m.$

A. $S=2021$ **B.** $S=2017$ **C.** $S=2019$ **D.** $S=2023$

Câu 15: Xét các số phức $z,\ \mathrm{w}$ thỏa mãn $|z|=2$ và $|i.\overline{w}|=1$. Khi $|iz+w+3-4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-\mathrm{w}|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$.

Câu 16: Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w=\dfrac{z+3}{z+1}$ có phần thực bằng 2. Xét các số phức $z_1,z_2\in S$ thỏa mãn $|3z_1-4z_2|=2$, giá trị lớn nhất của $P=|z_1-3i|^2-|z_2-4i|^2$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 32.

Câu 17: Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8+6i$ và $|z-w|=4.$ Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z|+|w|$ bằng:

A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Câu 18: Cho $z_1,\ z_2$ là hai số phức thỏa mãn $|iz-1+i|=2$ và $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1+z_2+1+2i|$ có dạng $a+\sqrt{b}$. Khi đó a^2+b có giá trị là

A. 18. **B.** 15. **C.** 19. **D.** 17.

Câu 19: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2iz|=2.$ Giá trị lớn nhất của $|z|$ bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{3}-1$. **C.** $\sqrt{3}+1$. **D.** 2.

Câu 20: Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2-5+12i\right|=3|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 26. **B.** $\frac{35+3\sqrt{61}}{2}$. **C.** 35. **D.** $35+3\sqrt{61}$.

Câu 21: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-5i|=|z-3i|$. Biết rằng số phức $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ có môđun nhỏ nhất. Tính $P=x^2+y^2$.

A. $P=\frac{25}{2}$. **B.** $P=5$. **C.** $P=\frac{4}{5}$. **D.** $P=\frac{20}{25}$.

Câu 22: Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}|+2|z-\overline{z}|=8$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-3i|$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. $\sqrt{10}+\sqrt{34}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}+\sqrt{58}$. **D.** $\sqrt{5}+\sqrt{58}$.

Câu 23: Xét các số phức thỏa mãn $\left|z^2-6z+5-3i\right|=4|z-3|$.Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-3|$.Giá trị của biểu thức $3M-2m$ bằng:

A. 10. **B.** 13. **C.** 73. **D.** 8

Câu 24: Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z thoả mãn điều kiện $z.\overline{z}=|z+\overline{z}|$. Xét các số phức $z_1,z_2\in S$ sao cho $|z_1-z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z_1-\sqrt{3}i\right|+\left|\overline{z}_2+\sqrt{3}i\right|$ bằng

A. 2. **B.** $1+\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{20-8\sqrt{3}}$.

Câu 25: Cho số phức z có phần ảo dương thỏa mãn $|z|=1$ và biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $Q=\left|z+\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i\right|$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{6}{5}$. **C.** 2. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 26: Xét các số phức thỏa mãn $\left|z^2-8+6i\right|=5|z|$.Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.Giá trị của biểu thức M^2+m^2 bằng:

A. $\frac{45}{2}$. **B.** 45. **C.** 15. **D.** 10

Câu 27: Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2-4z-4-6i\right|=3|z-2|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-2|$. Giá trị của $5M-2m$ bằng

A. 29. **B.** 21. **C.** 26. **D.** 18.

Câu 28: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z-3+7i|+|z+2-5i|\le 13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\overline{z}-5i\right|$

A. 3. **B.** $2\sqrt{26}$ **C.** 4 **D.** $\sqrt{13}$.

Câu 29: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 30: Cho hai số phức z,z' thỏa mãn $|z+4|=3$ và $|z'+1+2i|=|z'-2+6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-z'|$.

A. $\frac{29}{20}$. **B.** $\frac{29}{5}$. **C.** $\frac{29}{10}$. **D.** $\frac{29}{8}$.

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị $|z^2+i|$.

A. 51. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{41}$.

Câu 32: Cho $z=x+yi$ thỏa $|z-2-4i|=|z-2i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $3x-2y$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 33: Xét hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn: $z_1+3z_2=15-5i$ và $|3z_1-z_2|=5\sqrt{10}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$ bằng:

A. 10. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 34: Cho số phức z thỏa $|z-2-2i|=\sqrt{17}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z+2-i|+2|\overline{z}-6-3i|$. Tính $M+m$.

A. $2\sqrt{17}\left(\sqrt{5}+1\right)$. **B.** $4\sqrt{17}$. **C.** $\sqrt{17}\left(\sqrt{5}+1\right)$. **D.** $2\left(\sqrt{85}+\sqrt{17}\right)$.

Câu 35: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa $|iz_1-1|=1$ và $|\overline{z}_2+i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|2z_1+3z_2|$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 36: Cho số phức $z_1;z_2$ thỏa $|z_1-1-2i|=1$ và $|z_2+2+3i|=|z_2-1-i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ bằng

A. $\frac{27}{10}$. **B.** $\frac{29}{10}$. **C.** $\frac{33}{10}$. **D.** $\frac{23}{10}$.

Câu 37: Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2+1|=2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 38: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+5|=2|z|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M+m$ bằng:

A. $2\sqrt{6}+1$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{6}+1$.

Câu 39: Cho số phức z thỏa mãn $4|z|=|z^2-6-8i|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 36. **B.** $\sqrt{14}+2$. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** 14.

Câu 40: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của $|z+4i|$. Giá trị m^2 là?

A. 32. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** 16.

Câu 41: Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2-3+4i\right|-2|z|=0$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2-m^2 bằng

A. $4\sqrt{6}$. **B.** 14. **C.** 146. **D.** $56\sqrt{6}$.

Câu 42: Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2-5-12i\right|=3|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** $\sqrt{61}$. **D.** $\sqrt{59}$.

Câu 43: Xét các số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3+2i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a-b$ khi $|z-3-3i|+|z-7-i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 8. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 44: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\ge 2$. Tính tỉ số $\dfrac{M}{m}$.

A. $\dfrac{M}{m}=3$. **B.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{M}{m}=2$.

Câu 45: Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w=\dfrac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng $\dfrac{1}{8}$. Xét các số phức $z_1,\, z_2\in S$ thỏa mãn $\left|z_1-z_2\right|=2$, giá trị lớn nhất của $P=\left|z_1-5i\right|^2-\left|z_2-5i\right|^2$ bằng

A. 16. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 32.

Câu 46: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính môđun của số phức $w=M+mi$.

A. $|w|=2\sqrt{314}$. **B.** $|w|=2\sqrt{309}$. **C.** $|w|=\sqrt{1258}$. **D.** $|w|=3\sqrt{137}$.

Câu 47: Vậy tổng Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z+1-2i|=9$ và $|z-2+mi|=|z-m+i|$, (trong đó $m\in\mathbb{R}$). Gọi z_1,z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $\left|z_1-z_2\right|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $\left|z_1+z_2\right|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 6. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 18.

Câu 48: Cho số phức z,w sao cho thỏa $|z|=2,|w|=4$ và $(z-i)\left(\overline{w}+i\right)$ là số thuần ảo. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z-w|$. Khi đó giá trị của $M+m$ bằng

A. $2\sqrt{19}$. **B.** 14. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Câu 49: Xét hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|\left(z_1-2-i\right)\left(2+2\sqrt{3}i\right)\right|=\left|\left(z_1-\overline{z}_1\right)\left(\sqrt{3}-i\right)\right|$ và $\left|z_2+i\right|=\left|z_2+1+2i\right|$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1-z_2\right|$ bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{34}{5}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 50: Xét các số phức z,z_1,z_2 thỏa mãn $\left|z_1-4-5i\right|=\left|z_2-1\right|=1$ và $\left|\overline{z}+4i\right|=|z-8+4i|$. Tính $M=\left|z_1+z_2\right|$ khi biểu thức $P=\left|z-z_1\right|+\left|z-z_2\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M=\sqrt{41}$. **B.** $M=6$. **C.** $M=2\sqrt{5}$. **D.** $M=2\sqrt{13}$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Cho hai số phức z và w thỏa mãn $|z|=4,|\mathrm{w}|=2$. Khi $\left|z+\overline{\mathrm{w}}+5+12i\right|$ đạt giá trị lớn nhất, phần thực của $z+iw$ bằng

A. $\dfrac{30}{13}$. **B.** $-\dfrac{4}{13}$. **C.** $\dfrac{44}{13}$. **D.** $\dfrac{58}{13}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|\mathrm{w}|=2\Rightarrow\left|\overline{\mathrm{w}}\right|=2$.

Ta lại có $\left|z+\overline{\mathrm{w}}+5+12i\right|\le\left|z+\overline{\mathrm{w}}\right|+|5+12i|\le|z|+\left|\overline{\mathrm{w}}\right|+13$.

Suy ra $\left|z+\overline{\mathrm{w}}+5+12i\right|\le 19$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}z=k\overline{\mathrm{w}}\\ z+\overline{\mathrm{w}}=h(5+12i)\end{cases}\left(k,h\in\mathbb{R};k,h>0\right)$

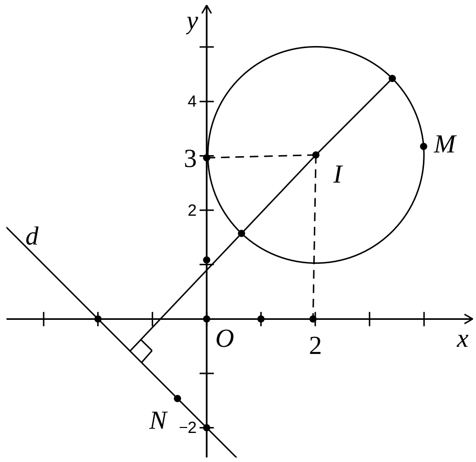
$\Rightarrow\begin{cases}k=2\\ h=\dfrac{6}{13}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{\mathrm{w}}=\dfrac{10}{13}+\dfrac{24}{13}i\\ z=\dfrac{20}{13}+\dfrac{48}{13}i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{w}=\dfrac{10}{13}-\dfrac{24}{13}i\\ z=\dfrac{20}{13}+\dfrac{48}{13}i\end{cases}\Rightarrow z+iw=\dfrac{44}{13}+\dfrac{58}{13}i$.

Vậy phần thực của $z+iw$ bằng $\dfrac{44}{13}$.

Câu 1: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z_1-3-5i|=2$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2+1+2i|=|z_2+i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2-1-2i|$.

A. $\dfrac{7\sqrt{2}+4}{2}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{2}-4}{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{7}-4}{2}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Ta có $|z_1-z_2-1-2i|=\left|\left(z_1-1-2i\right)-z_2\right|=|z_3-z_2|$, với $z_3=z_1-1-2i$.

Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_{3,}$ z_2 trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có $|z_1-3-5i|=2\Leftrightarrow\left|\left(z_1-1-2i\right)-2-3i\right|=2$

Suy ra $M\in\left(C\right)$ có tâm $I\left(2;3\right)$, bán kính $R=2$.

Gọi $z_2=x+yi;\left(x;y\in\mathbb{R}\right),|z_2+1+2i|=|z_2+i|$

$\Leftrightarrow x+y+2=0\Rightarrow N\in x+y+2=0$.

Ta có $d\left(I;d\right)=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

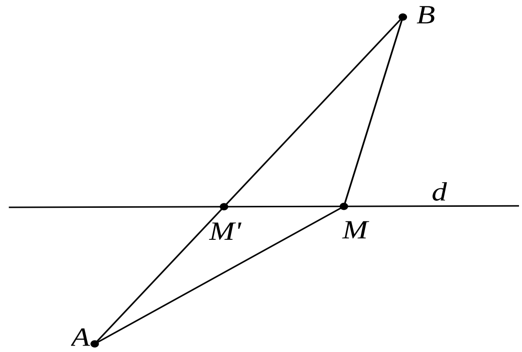
Từ hình vẽ ta có $MN_{\min}=d\left(A;d\right)=d\left(I;d\right)-R=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}-2=\dfrac{7\sqrt{2}-4}{2}$.

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+2-2i\right|=\left|\overline{z}-2i\right|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z-2i\right|+\left|\overline{z}-1-2i\right|$.

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{17}$.

Lời giải

Gọi $M\left(x,y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R},\ i^2=-1$ trên mặt phẳng tọa độ.



Ta có: $\left|z+2-2i\right|=\left|\overline{z}-2i\right|\Leftrightarrow\left(x+2\right)^2+\left(y-2\right)^2=x^2+\left(y+2\right)^2\Leftrightarrow x-2y+1=0$

$\Rightarrow$ M thuộc đường thẳng *d:* $x-2y+1=0$.

Gọi $A\left(0;\,2\right),\,B\left(1;\,-2\right)$ thì

$P=\left|z-2i\right|+\left|\overline{z}-1-2i\right|=\left|x+(y-2)i\right|+\left|x-1-(y+2)i\right|=MA+MB$.

Bài toán trở về: Tìm điểm $M\in d:x-2y+1=0$ sao cho $P=MA+MB$ nhỏ nhất.

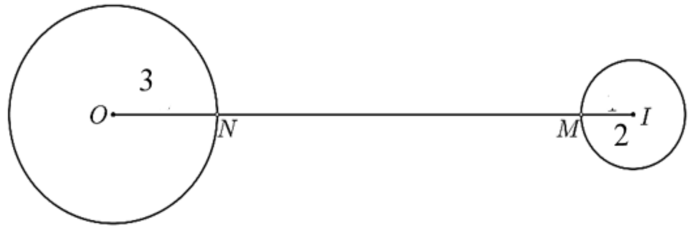
Ta thấy $A,\,B$ thuộc hai nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng *d.*

$\Rightarrow P=MA+MB\geq AB$. Dấu "=" xảy ra khi $M\equiv M'=AB\cap d\Rightarrow P_{\min}=AB=\sqrt{17}.$

Câu 3: Xét các số phức z,w thỏa mãn $\left|z\right|=2$ và $\left|w\right|=3$. Khi $\left|z+i\overline{w}-5-12i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $\left|z-w\right|$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{758}}{13}$. **B.** 8. **C.** $\dfrac{\sqrt{475}}{13}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{757}}{13}$.

Lời giải



Gọi M,N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z-5-12i$ và $-i\overline{w}$.

Ta có $\left|z\right|=2\Leftrightarrow\left|\left(z-5-12i\right)+\left(5+12i\right)\right|=2\Leftrightarrow MI=2$, với $I\left(-5;-12\right)$.

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (T_1) tâm $I(-5;-12)$ và bán kính $R_1=2$.

Lại có $\left|-i\overline{w}\right|=|-i|.\left|\overline{w}\right|=3$. Suy ra tập hợp điểm N là đường tròn (T_2) tâm O và bán kính $R_2=3$.

Ta thấy $OI=13>R_1+R_2\Rightarrow(T_1)$ và (T_2) rời nhau.

Khi đó: $P=\left|z+i\overline{w}-5-12i\right|=MN$.

Suy ra: $\mathrm{Min}\,P=OI-R_1-R_2=13-2-3=8$ (do (T_1) và (T_2) rời nhau) khi

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}=\dfrac{11}{13}\overrightarrow{OI}\\ \overrightarrow{ON}=\dfrac{3}{13}\overrightarrow{OI}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M\left(-\dfrac{55}{13};-\dfrac{132}{13}\right)\\ N\left(-\dfrac{15}{13};-\dfrac{36}{13}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z-5-12i=-\dfrac{55}{13}-\dfrac{132}{13}i\\ -i\overline{w}=-\dfrac{15}{13}-\dfrac{36}{13}i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\dfrac{10}{13}+\dfrac{24}{13}i\\ w=\dfrac{36}{13}+\dfrac{15}{13}i\end{cases}.$$

Vậy: $|z-w|=\left|-2+\dfrac{9}{13}i\right|=\dfrac{\sqrt{757}}{13}$.

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^2+2z+5\right|=\left|(z+1+2i)(z+1-3i)\right|$ và số phức $w=z-1-2i$. Giá trị nhỏ nhất $|w|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Theo giả thiết, $\left|z^2+2z+5\right|=\left|(z+1+2i)(z+1-3i)\right|$

$\Leftrightarrow\left|(z+1+2i)(z+1-2i)\right|=\left|(z+1+2i)(z+1-3i)\right|$

$\Leftrightarrow|z+1+2i|.\left(|z+1-2i|-|z+1-3i|\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}|z+1+2i|=0 & (1)\\ |z+1-2i|=|z+1-3i| & (2)\end{array}\right.$.

$(1)\Leftrightarrow z+1+2i=0\Leftrightarrow z=-1-2i$. Khi đó, $|w|=|-1-2i-1-2i|=|-2-4i|=2\sqrt{5}$ (3).

Đặt $z=x+yi$ ($x,\,y\in\mathbb{R}$). Khi đó:

$(2)\Leftrightarrow\left|(x+1)+(y-2)i\right|=\left|(x+1)+(y-3)i\right|$

$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y-3)^2\Leftrightarrow(y-2)^2=(y-3)^2\Leftrightarrow y=\dfrac{5}{2}\Rightarrow z=x+\dfrac{5}{2}i$.

$\Rightarrow|w|=\left|(x-1)+\dfrac{1}{2}i\right|=\sqrt{(x-1)^2+\dfrac{1}{4}}\ge\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$. (4).

Từ (3) và (4) suy ra giá trị nhỏ nhất $\min|w|=\dfrac{1}{2}$.

Câu 3: Cho số phức z thỏa mãn .$|z|=1$.. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+\left|z^2-z+1\right|$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{13\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=|z+1|\le|z|+1=2$ nên $t\in[0;2]$. Vì $|z|=1$ nên $z.\overline{z}=1$. Do đó, ta có:

$P=|z+1|+\left|z^2-z+1\right|=|z+1|+\left|z^2-z+z.\overline{z}\right|=|z+1|+\left|z-1+\overline{z}\right|$.

Ta lại có $t^2=|z+1|^2=(z+1).\overline{(z+1)}=(z+1)\left(\overline{z}+1\right)=2+z+\overline{z}$.

Suy ra $z+\overline{z}=t^2-2$.

Vậy $P=t+\left|t^2-3\right|=f(t)$, với $t\in[0;2]$. Dễ thấy $f(t)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f(t)=\begin{cases} t+t^2-3 & \text{khi } \sqrt{3}\le t\le 2 \\ t-t^2+3 & \text{khi } 0\le t<\sqrt{3} \end{cases}$.

Do đó $f'(t)=\begin{cases} 2t+1 & \text{khi } \sqrt{3}\le t<2 \\ -2t+1 & \text{khi } 0<t<\sqrt{3} \end{cases}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $f(0)=3$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{13}{4}$, $f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}$, $f(2)=3$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $M=\dfrac{13}{4}$; giá trị nhỏ nhất của P là $m=\sqrt{3}$.

Khi đó $M.m=\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 4: Xét các số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=2$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tổng $M+m$ bằng:

A. 11. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 10.

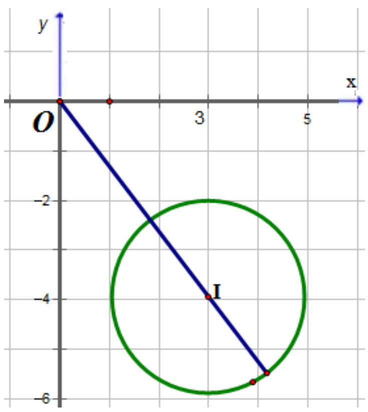
Lời giải

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-3+4i|=2\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+4)^2=4$.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa đề là đường tròn tâm $I(3;-4)$, bán kính $R=2$.

$OI=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.



Khi đó: $\begin{cases} m=|IO-R|=|5-2|=3 \\ M=IO+R=5+2=7 \end{cases}\Rightarrow M+m=7+3=10$.

Câu 5: Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|+2\left|3-\overline{z}\right|$. Tổng $M+m$ bằng.

A. 14. **B.** 7. **C.** $\dfrac{45+5\sqrt{55}}{3}$. **D.** $\dfrac{15+5\sqrt{33}}{3}$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$.

Ta có: $|z-1|=2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=4 \Leftrightarrow y^2=-x^2+2x+3\ge 0 \Rightarrow -1\le x\le 3$.

$P=|z+2|+2|3-\overline{z}|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}+2\sqrt{(3-x)^2+y^2}=\sqrt{6x+7}+2\sqrt{12-4x}$

Xét $y=\sqrt{6x+7}+2\sqrt{12-4x} \Rightarrow y'=\dfrac{3}{\sqrt{6x+7}}-\dfrac{4}{\sqrt{12-4x}}$

Có $y'=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{33}$. Ta có bảng biến thiên sau

x	-1		$-\dfrac{1}{33}$		3
y'		$+$	0	$-$	
y	9	$\nearrow$	$\dfrac{5\sqrt{33}}{3}$	$\searrow$	5

Vậy $m=5, M=\dfrac{5\sqrt{33}}{3} \Rightarrow M+m=\dfrac{15+5\sqrt{33}}{3}$.

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+4|=|z^2+2iz|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z^2+4|=|z^2+2iz| \Leftrightarrow |(z-2i)(z+2i)|=|z(z+2i)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+2i=0 \quad (1) \\ |z-2i|=|z| \quad (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow z=-2i \Rightarrow |z+i|=|-2i+i|=1$.

$(2) \Leftrightarrow |x+yi-2i|=|x+yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=x^2+y^2 \Leftrightarrow y=1$.

Suy ra: $|z+i|=|x+yi+i|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2+4}\ge 2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng 1 khi $z=-2i$.

Câu 5: Gọi a,b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $w=\dfrac{z+2\overline{z}}{1-iz}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $|z-1-2i|=2\sqrt{5}$ và biểu thức $|z+2|^2-|z+i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tổng $a+b$.

A. $a+b=\dfrac{16}{13}$. **B.** $a+b=\dfrac{12}{13}$. **C.** $a+b=\dfrac{45}{13}$. **D.** $a+b=\dfrac{62}{13}$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $\left|z-1-2i\right|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|(x-1)+(y-2)i\right|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=20$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(1;2)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Đặt $m=\left|z+2\right|^2-\left|z+i\right|^2$.

Ta có: $m=\left|z+2\right|^2-\left|z+i\right|^2=\left[(x+2)^2+y^2\right]-\left[x^2+(y+1)^2\right]=4x-2y+3$.

Xét $\Delta: 4x-2y+3-m=0$.

Để tồn tại z thì (C) và Δ phải có điểm chung $\Leftrightarrow d(I;\Delta)\le R$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|3-m\right|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}\le 2\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|3-m\right|\le 20\Leftrightarrow -17\le m\le 23.$$

Suy ra $m_{\max}=23$ khi $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=20\\ 4x-2y-20=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=0\end{cases}$.

Vậy $z=5$.

Do đó $w=\dfrac{z+2\overline{z}}{1-iz}=\dfrac{5+2.5}{1-5i}=\dfrac{15}{1-5i}=\dfrac{15}{26}+\dfrac{75}{26}i.$

Vậy $a+b=\dfrac{15}{26}+\dfrac{75}{26}=\dfrac{90}{26}=\dfrac{45}{13}.$

Câu 6: Giả sử $z_1;z_2$ là hai trong số các số phức z thoả mãn $(z-6)(8-i.\overline{z})$ là một số thực. Biết rằng $\left|z_1-z_2\right|=6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|z_1+3z_2\right|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$. **B.** $20-4\sqrt{21}$. **C.** $-5+\sqrt{73}$. **D.** $20-2\sqrt{73}$.

Lời giải

Chon D

Gọi A,B là các điểm biểu diễn cho $z_2;z_1$

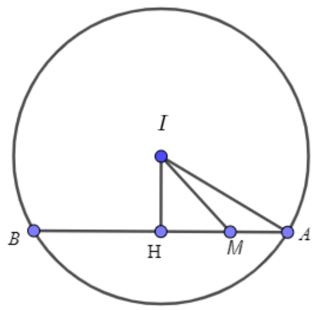
Đặt $z=a+bi\Rightarrow(z-6)(8-i.\overline{z})=\left[(a-6)+bi\right].\left[(8-b)-ai\right]$

Do $(z-6)(8-i.\overline{z})$ là một số thực nên $-a.(a-6)+b(8-b)=0\Leftrightarrow a^2+b^2-6a-8b=0$

Suy ra A,B thuộc đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R=5$

Gọi M điểm thoả mãn $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Gọi H là trung điểm của AB



Ta có $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$; $IM=\sqrt{IH^2+MH^2}=\sqrt{4^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$.

Khi đó M thuộc đường tròm tâm I, bán kính $R'=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$.

Xét biểu thức $\left|z_1+3z_2\right|=\left|3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|4\overrightarrow{OM}+3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=4OM$.

Ta có $\left|z_1+3z_2\right|_{\min}\Leftrightarrow OM_{\min}=\left|OI-R'\right|=5-\dfrac{\sqrt{73}}{2}$.

Vậy $\left|z_1+3z_2\right|_{\min}=4\left(5-\dfrac{\sqrt{73}}{2}\right)=20-2\sqrt{73}$.

Câu 7: Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2-6-8i\right|=2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 12. **B.** 24. **C.** $2\sqrt{94}$. **D.** $\sqrt{94}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$2|z|=\left|z^2-6-8i\right|\ge\left|\left|z^2\right|-|6+8i|\right|=\left||z|^2-10\right|$ (vì $\left|z^2\right|=|z|^2$). Dấu "=" xảy ra khi $z^2=k(-6-8i)$.

Suy ra $4|z|^2\ge\left(|z|^2-10\right)^2\Leftrightarrow|z|^4-24|z|^2+100\le0\Leftrightarrow12-2\sqrt{11}\le|z|^2\le12+2\sqrt{11}$.

$\Rightarrow\sqrt{11}-1\le|z|\le\sqrt{11}+1$

Do đó, ta có $M=1+\sqrt{11}$ và $m=\sqrt{11}-1$.

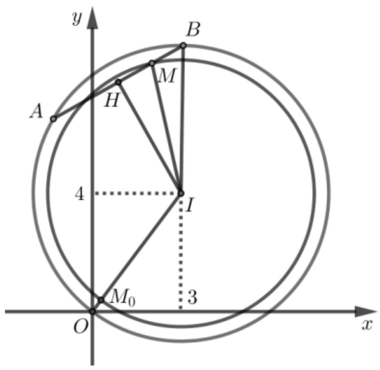
Vậy $M^2+m^2=24$.

Câu 8: Giả sử z_1,z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8-i\bar{z})$ là số thực. Biết rằng $\left|z_1-z_2\right|=6$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1+3z_2\right|$ bằng

A. $-5+\sqrt{73}$. **B.** $5+\sqrt{21}$ **C.** $20-2\sqrt{73}$ **D.** $20-4\sqrt{21}$

Lời giải

Chon C



Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Gọi A,B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1,z_2. Suy ra $AB=\left|z_1-z_2\right|=4$.

Ta có:

$(z-6)(8-i\bar{z})=(x+yi-6)(8-i(x-yi))=(x+yi-6)(8-ix-y)$

$=8x-x^2i-xy+8yi+xy-y^2i-48+6xi+6y$

Do $(z-6)(8-i\bar{z})$ là số thực nên ta được $x^2+y^2-6x-8y=0$. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm $I(3;4)$ bán kính $r=5$.

Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$.

Gọi H là trung điểm AB.

Ta có $HA=HB=\dfrac{AB}{2}=3$ và $MA=\dfrac{3}{4}AB=\dfrac{9}{2}\Rightarrow HM=MA-HA=\dfrac{3}{2}$.

Từ đó $HI^2=R^2-HB^2=16$, $IM=\sqrt{HI^2+HM^2}=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3;4)$, bán kính $r=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$.

Ta có $|z_1+3z_2|=|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|=|4\overrightarrow{OM}|=4OM$, do đó $|z_1+3z_2|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

Ta có $OM_{\min}=OM_0=|OI-r|=5-\dfrac{\sqrt{73}}{2}$.

Vậy $|z_1+3z_2|_{\min}=4OM_0=20-2\sqrt{73}$.

Câu 9: Xét các số phức . z . thỏa mãn điều kiện $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z|$. Tính $S=2023-3M+2m$.

A. $S=2021$ **B.** $S=2017$ **C.** $S=2019$ **D.** $S=2023$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\dfrac{-2-3i}{3-2i}=-i$ nên $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1\Leftrightarrow|-iz+1|=1$

$\Leftrightarrow|-i|.\left|z+\dfrac{1}{-i}\right|=1\Leftrightarrow|z-(-i)|=1$.

Suy ra tập hợp các số phức z là đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=1$.

Khi đó $\begin{cases}P_{\min}=|OI-R|=|1-1|=0\\P_{\max}=OI+R=1+1=2\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}m=0\\M=2\end{cases}\longrightarrow S=2017.$

Câu 10: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$ và $|i.\bar{w}|=1$. Khi $|iz+w+3-4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-\mathrm{w}|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có $|iz+w+3-4i|\ge|3-4i|-|iz+w|\ge5-(|iz|+|w|)\ge5-(2+1)=2$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} w = k_1(3-4i)\ khi\ (k_1<0) \\ i.z = k_2(3-4i)\ khi\ (k_2<0) \end{cases}$ và $\begin{cases} |w| = |i\overline{w}| = 1 \\ |iz| = |z| = 2 \end{cases}$.

Giải hệ trên suy ra $k_2 = -\dfrac{2}{5}$; $k_1 = -\dfrac{1}{5}$.

Hay $\begin{cases} w = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i \\ iz = \dfrac{-2}{5}(3-4i) \end{cases} \Rightarrow -z = \dfrac{-2i}{5}(3-4i) \Rightarrow z = -\dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}i$

Khi đó $z - w = -1 - 2i \Rightarrow |z - \mathrm{w}| = \sqrt{5}$.

Cách 2:

Trong mặt phẳng Oxy:

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức $iz \Rightarrow OM = 2 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm O bán kính $R_1 = 2$.

Gọi N là điểm biểu diễn của số phức $w \Rightarrow ON = 1 \Rightarrow N$ thuộc đường tròn (C_2) tâm O bán kính $R_2 = 1$.

Gọi $E(3;-4)$. Khi đó $A = |iz + w + 3 - 4i| = \left|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OE}\right|$.

Ta thấy A đạt giá trị nhỏ nhất khi $M,\ N,\ E$ thẳng hàng và $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OE}$

Đường thẳng OE có phương trình là $y = \dfrac{-4}{3}x$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng OE và đường tròn (C_1) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \dfrac{-4}{3}x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-4}{3}x \\ x^2 + \left(\dfrac{-4}{3}x\right)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-4}{3}x \\ 25x^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{6}{5} \\ y = \dfrac{-8}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{6}{5} \\ y = \dfrac{8}{5} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy $M\left(-\dfrac{6}{5};\dfrac{8}{5}\right)$ (Vì $\overrightarrow{OM}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OE}$).

Tọa độ giao điểm của đường thẳng OE và đường tròn (C_2) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \dfrac{-4}{3}x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-4}{3}x \\ x^2 + \left(\dfrac{-4}{3}x\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-4}{3}x \\ 25x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{-4}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{4}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $N\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ (Vì $\overrightarrow{ON}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OE}$).

Do đó: $w=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ và $i.z=-\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i \Leftrightarrow z=-\frac{8}{5}-\frac{6}{5}i$.

Vậy $|z-\mathrm{w}|=|-1-2i|=\sqrt{5}$.

Câu 11: Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w=\frac{z+3}{z+1}$ có phần thực bằng 2. Xét các số phức $z_1,z_2\in S$ thỏa mãn $|3z_1-4z_2|=2$, giá trị lớn nhất của $P=|z_1-3i|^2-|z_2-4i|^2$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 32.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $w=\frac{z+3}{z+1}=\frac{(z+3)(\overline{z}+1)}{(z+1)(\overline{z}+1)}=\frac{|z|^2+4x+3-2iy}{|z|^2+2x+1}$

$\Rightarrow w$ có phần thực là $\frac{|z|^2+4x+3}{|z|^2+2x+1}=2\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

$P=|z_1-3i|^2-|z_2-4i|^2=(z_1-3i)(\overline{z_1}+3i)-(z_2-4i)(\overline{z_2}+4i)=i\left(3z_1-4z_2-\overline{3z_1-4z_2}\right)$

$P=i\left(3z_1-4z_2-\overline{3z_1-4z_2}\right)\le |i|\left(|3z_1-4z_2|+\left|\overline{3z_1-4z_2}\right|\right)=4$

Câu 12: Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8+6i$ và $|z-w|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z|+|w|$ bằng:

A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

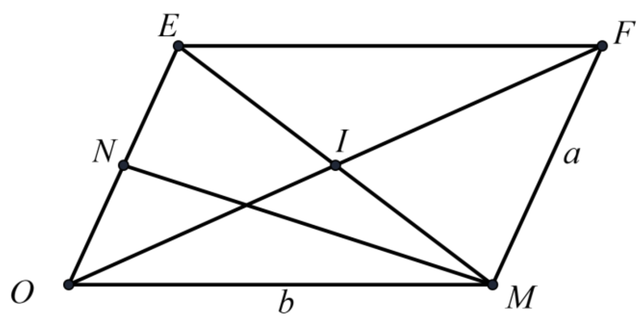
Lời giải

Chọn C

Giả sử M,N lần lượt là các điểm biểu diễn cho z và w.

Suy ra $\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OI}$, $|z-w|=MN=4$ và $OF=2OI=10$.

Đặt $|z|=ON=\frac{a}{2};|w|=OM=b.$ Dựng hình bình hành $OMFE$



Ta có $\begin{cases} \dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{ME^2}{4}=25 \\ \dfrac{b^2+ME^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=16 \end{cases} \Rightarrow a^2+2b^2=88$.

$\left(|z|+|w|\right)^2=\left(\dfrac{a}{2}+b\right)^2\le\left(a^2+2b^2\right)\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)=66$.

Suy ra $|z|+|w|\le\sqrt{66},$ dấu "=" xảy ra khi $a=b=\dfrac{2\sqrt{66}}{3}$. Vậy $\left(|z|+|w|\right)_{\max}=\sqrt{66}$.

Câu 13: Cho $z_1,\ z_2$ là hai số phức thỏa mãn $|iz-1+i|=2$ và $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1+z_2+1+2i|$ có dạng $a+\sqrt{b}$. Khi đó a^2+b có giá trị là

A. 18. **B.** 15. **C.** 19. **D.** 17 .

Lời giải

Chọn B

Đặt $w=iz-1+i\Rightarrow|w|=2$. Với $w_1=iz_1-1+i$; $w_2=iz_2-1+i$ thì $|w_1|=2$; $|w_2|=2$.

Ta có: $|z_1-z_2|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|i(z_1-z_2)|=\sqrt{2}|i|\Leftrightarrow|w_1-w_2|=\sqrt{2}$.

Mặt khác, $|w_1-w_2|^2+|w_1+w_2|^2=(w_1-w_2)\overline{(w_1-w_2)}+(w_1+w_2)\overline{(w_1+w_2)}$

$=(w_1-w_2)\left(\overline{w_1}-\overline{w_2}\right)+(w_1+w_2)\left(\overline{w_1}+\overline{w_2}\right)=2\left(w_1.\overline{w_1}+w_2.\overline{w_2}\right)=2\left(|w_1|^2+|w_2|^2\right)$.

Do đó $|w_1+w_2|^2=2\left(|w_1|^2+|w_2|^2\right)-|w_1-w_2|^2\Rightarrow|w_1+w_2|=\sqrt{14}.$

Ta có $P=|z_1+z_2+1+2i|=|i|.|z_1+z_2+1+2i|=|iz_1+iz_2-2+i|$

$=|w_1+1-i+w_2+1-i-2+i|=|w_1+w_2-i|$.

Lại có: $P=|w_1+w_2-i|\le|w_1+w_2|+|i|\Leftrightarrow P\le\sqrt{14}+1$.

Suy ra $\max P=1+\sqrt{14}$. Do đó $a=1,\ b=14$.

Vậy $a^2+b=15$.

Câu 14: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^2-2iz\right|=2.$ Giá trị lớn nhất của $|z|$ bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{3}-1$. **C.** $\sqrt{3}+1$. **D.** 2 .

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $|z_1|+|z_2|\ge|z_1+z_2|$, ta được $2+|2iz|=\left|z^2-2iz\right|+|2iz|\ge\left|z^2\right|$.

Suy ra $\left|z^2\right|-2|z|-2\le0\Leftrightarrow0\le|z|\le1+\sqrt{3}$.

Vậy $|z|$ lớn nhất là $1+\sqrt{3}$, dấu bằng xảy ra khi $z^2-2iz=k.2iz\,(k>0)\Leftrightarrow z=2(1+k)i$.

Mà $|z|=1+\sqrt{3}$, suy ra $z=\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

Câu 15: Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2-5+12i\right|=3|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 26. **B.** $\dfrac{35+3\sqrt{61}}{2}$. **C.** 35. **D.** $35+3\sqrt{61}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$3|z|=\left|z^2-5+12i\right|\geq\left|\left|z^2\right|-|5-12i|\right|=\left||z|^2-13\right|$ (vì $\left|z^2\right|=|z|^2$).

Dấu "=" xảy ra khi $z^2=k(5-12i)$.

Suy ra $9|z|^2\geq\left(|z|^2-13\right)^2\Leftrightarrow|z|^4-35|z|^2+169\leq0\Leftrightarrow\dfrac{35-3\sqrt{61}}{2}\leq|z|^2\leq\dfrac{35+3\sqrt{61}}{2}$.

$\Rightarrow\sqrt{\dfrac{35-3\sqrt{61}}{2}}\leq|z|\leq\sqrt{\dfrac{35+3\sqrt{61}}{2}}$

Do đó, ta có $M^2=\dfrac{35+3\sqrt{61}}{2}$ và $m^2=\dfrac{35-3\sqrt{61}}{2}$. Vậy $M^2+m^2=35$.

Câu 16: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-5i|=|z-3i|$. Biết rằng số phức $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ có môđun nhỏ nhất. Tính $P=x^2+y^2$.

A. $P=\dfrac{25}{2}$. **B.** $P=5$. **C.** $P=\dfrac{4}{5}$. **D.** $P=\dfrac{20}{25}$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-2-5i|=|z-3i|\Leftrightarrow|(x-2)+(y-5)i|=|x+(y-3)i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}=\sqrt{x^2+(y-3)^2}\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-10y+25=x^2+y^2-6y+9$

$\Leftrightarrow-4x-4y+20=0\Leftrightarrow y=5-x$.

Do đó $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(5-x)^2}=\sqrt{2x^2-10x+25}=\sqrt{2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{2}}\geq\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}\Rightarrow y=\dfrac{5}{2}$. Khi đó $z=\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}i$.

Vậy $P=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$.

Câu 17: Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}|+2|z-\overline{z}|=8$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-3i|$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. $\sqrt{10}+\sqrt{34}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}+\sqrt{58}$. **D.** $\sqrt{5}+\sqrt{58}$.

Lời giải

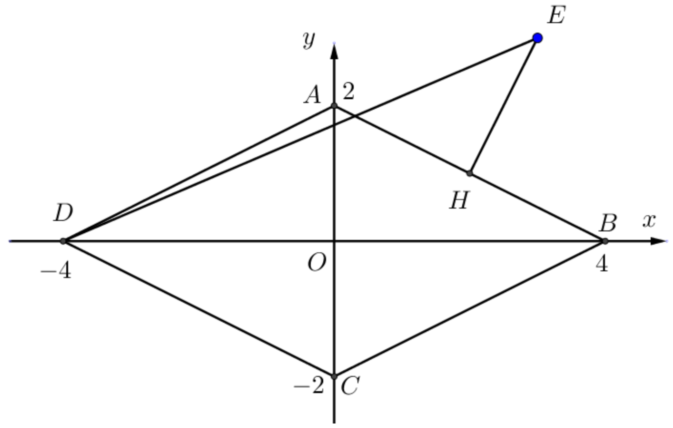
Chọn D

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z+\overline{z}|+2|z-\overline{z}|=8\Leftrightarrow2|x|+4|y|=8\Leftrightarrow|x|+2|y|=4$.

Trong mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn hình học của số phức z. Khi đó tập hợp điểm M là hình bình hành $ABCD$ với $A(0;2)$, $B(4;0)$, $C(0;-2)$, $D(-4;0)$.

$P=|z-3-3i|=EM$ với $E(3;3)$.



$\min P = EH = d\left(E, AB\right) = \sqrt{5}$ với H là hình chiếu vuông góc của E lên đoạn AB.

$\max P = ED = \sqrt{58}$.

Vậy $M + m = \sqrt{5} + \sqrt{58}$.

Câu 18: Xét các số phức thỏa mãn $\left|z^2 - 6z + 5 - 3i\right| = 4\left|z - 3\right|$.Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z - 3\right|$.Giá trị của biểu thức $3M - 2m$ bằng:

A. 10. **B.** 13. **C.** 73. **D.** 8

Lời giải

Ta có $4\left|z - 3\right| = \left|\left|z - 3\right|^2 - 4 - 3i\right| \ge \left|\left|z - 3\right|^2 - \left|4 + 3i\right|\right| = \left|\left|z - 3\right|^2 - 5\right|$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left|z - 3\right|^2 = k(4 + 3i)$

Khi đó ta có $4\left|z - 3\right| \ge \left|\left|z - 3\right|^2 - 5\right| \Leftrightarrow \left|z - 3\right|^4 - 26\left|z - 3\right|^2 + 25 \le 0$

$\Leftrightarrow 1 \le \left|z - 3\right|^2 \le 25 \Leftrightarrow 1 \le \left|z - 3\right| \le 5$

Suy ra $M = 5, m = 1$. Vậy $3M - 2m = 13$.

Câu 19: Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z thoả mãn điều kiện $z.\overline{z} = \left|z + \overline{z}\right|$. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ sao cho $\left|z_1 - z_2\right| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left|z_1 - \sqrt{3}i\right| + \left|\overline{z}_2 + \sqrt{3}i\right|$ bằng

A. 2. **B.** $1 + \sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{20 - 8\sqrt{3}}$.

Lời giải

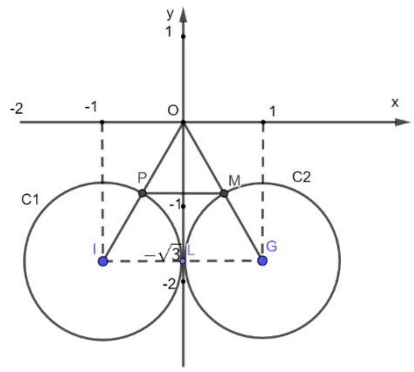
Chọn A

Đặt $w = z - \sqrt{3}i, w_1 = z_1 - \sqrt{3}i, w_2 = z_2 - \sqrt{3}i$. Khi đó từ giả thiết ta có $\left|w_1 - w_2\right| = 1$, $P = \left|z_1 - \sqrt{3}i\right| + \left|\overline{z}_2 + \sqrt{3}i\right| = \left|w_1\right| + \left|\overline{\overline{z_2} + \sqrt{3}i}\right| = \left|w_1\right| + \left|z_2 - \sqrt{3}i\right| = \left|w_1\right| + \left|w_2\right|$, và w_1, w_2 là các số phức thuộc tập hợp các số phức w thỏa mãn $\left(w + \sqrt{3}i\right).\overline{w + \sqrt{3}i} = \left|w + \sqrt{3}i + \left(\overline{w + \sqrt{3}i}\right)\right|$ (*)

Đặt $w = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow \left|x + \left(y + \sqrt{3}\right)i\right|^2 = \left|2x\right| \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \sqrt{3}\right)^2 = \left|2x\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left(x - 1\right)^2 + \left(y + \sqrt{3}\right)^2 = 1 \\ x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \left(x + 1\right)^2 + \left(y + \sqrt{3}\right)^2 = 1 \\ x \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Do đó tập hợp điểm $X(x;y)$ biểu thị số phức w là hai đường tròn (C1) và (C2) lần lượt có tâm là $I\left(-1;-\sqrt{3}\right)$ và $G\left(1;-\sqrt{3}\right)$, cùng có bán kính $R=1$ và cùng tiếp xúc với trục tung tại điểm $L\left(0;-\sqrt{3}\right)$.



Giả sử X_1, X_2 là hai điểm biểu diễn của $w_1; w_2$.

Ta có $OI = OG = 2$ nên cho dù điểm X thuộc đường tròn (C1) hay (C2) thì ta luôn có $OX \geq 2 - R = 2 - 1 = 1$ do vậy $P = |w_1| + |w_2| = OX_1 + OX_2 \geq 2$, dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi X_1 trùng với điểm P là giao của đoạn OI với đường tròn (C1) và X_2 trùng với M là giao của đoạn OG với đường tròn (C2). Khi đó $|w_1 - w_2| = X_1X_2 = PM = 1$ (thoả mãn đề).

Vậy $MinP = 2$

Câu 20: Cho số phức z có phần ảo dương thỏa mãn $|z| = 1$ và biểu thức $P = |1+z| + 2|1-z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $Q = \left|z + \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i\right|$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{6}{5}$. **C.** 2. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Gọi $z = x + yi;\ \left(x, y \in \mathbb{R}, y > 0\right)$.

$|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x \in [-1;1]$.

Ta có: $P = |1+z| + 2|1-z| = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + 2\sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{2(1+x)} + 2\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2(1+x)} + 2\sqrt{2(1-x)};\ x \in [-1;1]$.

Hàm số liên tục trên $[-1;1]$ và với $x \in (-1;1)$ ta có: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}} - \frac{2}{\sqrt{2(1-x)}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}} - \frac{2}{\sqrt{2(1-x)}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5} \in (-1;1)$.

$f(1) = 2;\ f(-1) = 4;\ f\left(-\frac{3}{5}\right) = 2\sqrt{5}$.

$\Rightarrow \max\limits_{x \in [-1;1]} f(x) = 2\sqrt{5}$ khi $x = -\frac{3}{5}$.

Với $x = -\frac{3}{5} \Rightarrow y^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow y = \frac{4}{5}$ (Vì số phức z có phần ảo dương nên $y > 0$).

Do đó, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng $2\sqrt{5}$ khi $z=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$.

$\Rightarrow Q=\left|z+\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i\right|=\left|-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i+\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i\right|=|2i|=2$.

Câu 21: Xét các số phức thỏa mãn $\left|z^2-8+6i\right|=5|z|$.Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.Giá trị của biểu thức M^2+m^2 bằng:

A. $\frac{45}{2}$. **B.** 45. **C.** 15. **D.** 10

Lời giải

Ta có $5|z|=\left|z^2-8+6i\right|\geq\left||z|^2-|8-6i|\right|=\left||z|^2-10\right|$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |z|^2=k(8-6i)$

Khi đó ta có $5|z|\geq\left||z|^2-10\right|\Leftrightarrow |z|^4-45|z|^2+100\leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{45-5\sqrt{65}}{2}\leq |z|^2\leq\frac{45+5\sqrt{65}}{2}$

Suy ra $M^2=\frac{45+5\sqrt{65}}{2}$, $m^2=\frac{45-5\sqrt{65}}{2}$

Vậy $M^2+m^2=45$.

Câu 22: Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2-4z-4-6i\right|=3|z-2|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-2|$. Giá trị của $5M-2m$ bằng

A. 29. **B.** 21. **C.** 26. **D.** 18.

Lời giải

Ta có

$3|z-2|=\left|z^2-4z-4-6i\right|=\left|(z-2)^2-8-6i\right|\geq\left|\left|(z-2)^2\right|-|8+6i|\right|=\left||z-2|^2-10\right|$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (z-2)^2=k.(8+6i)$.

Khi đó ta có

$3|z-2|\geq\left||z-2|^2-10\right|$

$\Leftrightarrow 9|z-2|^2\geq|z-2|^4-20|z-2|^2+100\Leftrightarrow |z-2|^4-29|z-2|^2+100\leq 0$

$\Leftrightarrow 4\leq|z-2|^2\leq 25\Leftrightarrow 2\leq|z-2|\leq 5$

Vậy $M=5,m=2\Leftrightarrow 5M-2m=21$.

Câu 23: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z-3+7i|+|z+2-5i|\leq 13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\bar{z}-5i\right|$

A. 3. **B.** $2\sqrt{26}$ **C.** 4 **D.** $\sqrt{13}$.

Lời giải

Ta có: $|z-3+7i|+|z+2-5i|\leq 13$

$\Leftrightarrow |z+5i-3+2i|+|z+5i+2-10i|\leq 13$ (1)

Gọi $M(a;b), A(3;-2), B(-2;10)$ lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $w = z + 5i; z_1 = 3 - 2i; z_2 = -2 + 10i$

$\overrightarrow{AB} = (-5;12) \Rightarrow AB = 13$

Biểu thức (1) viết lại: $MA + MB \le AB \Rightarrow MA + MB = AB$

$\Longrightarrow$ tập hợp điểm M biểu diễn của số phức w là đoạn thẳng AB

Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = -2 + 12t \end{cases} (t \in [0;1])$

Gọi $M(3-5t; -2+12t) \in AB$

$\overrightarrow{OM} = (3-5t; -2+12t)$

$OM = \sqrt{(3-5t)^2 + (-2+12t)^2} = 169t^2 - 78t + 13$

$OM_{\min} = 4 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{13}$ (thỏa)

$P = |\overline{z} - 5i| = |z + 5i| = OM$. Vậy $P_{\min} = 4$

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 2|1-z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi;\ (x; y \in \mathbb{R})$.

$|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x \in [-1;1]$.

Ta có: $P = |1+z| + 3|1-z| = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + 3\sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{2(1+x)} + 2\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2(1+x)} + 2\sqrt{2(1-x)};\ x \in [-1;1]$.

Hàm số liên tục trên $[-1;1]$ và với $x \in (-1;1)$ ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}} - \dfrac{2}{\sqrt{2(1-x)}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}} - \dfrac{2}{\sqrt{2(1-x)}} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{5} \in (-1;1)$.

$f(1) = 2;\ f(-1) = 4;\ f\left(-\dfrac{3}{5}\right) = 2\sqrt{5} \Rightarrow \max\limits_{x \in [-1;1]} f(x) = 2\sqrt{5}$.

Câu 25: Cho hai số phức z, z' thỏa mãn $|z+4| = 3$ và $|z' + 1 + 2i| = |z' - 2 + 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - z'|$.

A. $\dfrac{29}{20}$. **B.** $\dfrac{29}{5}$. **C.** $\dfrac{29}{10}$. **D.** $\dfrac{29}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$, $N(x';y')$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x' + y'i$.

Ta có $|z+4| = 3 \Leftrightarrow |x + 4 + yi| = 3 \Leftrightarrow (x+4)^2 + y^2 = 3^2$.

Vậy M thuộc đường tròn $(C):(x+4)^2+y^2=3^2$ có tâm $I(-4;0)$

$|z'+1+2i|=|z'-2+6i| \Leftrightarrow |(x'+1)+(y'+2)i|=|x'-2+(y'+6)i|$

$\Leftrightarrow (x'+1)^2+(y'+2)^2=(x'-2)^2+(y'+6)^2 \Leftrightarrow 6x'-8y'-35=0$

Vậy N thuộc đường thẳng $\Delta: 6x'-8y'-35=0$

Dễ thấy đường thẳng Δ không cắt .(C). và $|z-z'|=MN$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, cho bộ ba điểm (I,M,N) ta có.

$$MN \geq |IN-IM|=|IN-R| \geq |IN_0-R|=|d(I,\Delta)-R|=\left|\frac{|6.(-4)-8.0-35|}{\sqrt{6^2+8^2}}-3\right|=\frac{29}{10}$$

Câu 26: Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị $|z^2+i|$.

A. 51. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{41}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=x+yi$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết: $|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Mặt khác: $P=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3=4(x-3)+2(y-4)+23$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski cho hai bộ số: $(4;2)$ và $(x-3;y-4)$, ta được:

$\left[4(x-3)+2(y-4)\right]^2 \leq (4^2+2^2).\left[(x-3)^2+(y-4)^2\right]=20.5=100$

$\Rightarrow 4(x-3)+2(y-4)\leq 10$

$\Rightarrow P=4(x-3)+2(y-4)+23\leq 33$.

$P_{\max}=33 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2=5\\4x+2y+3=33\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(15-2x-4)^2=5\\y=15-2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=5\end{cases} \Leftrightarrow z=5+5i$.

Vậy $|z^2+i|=|(5+5i)^2+i|=51$.

Câu 27: Cho $z=x+yi$ thỏa $|z-2-4i|=|z-2i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $3x-2y$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

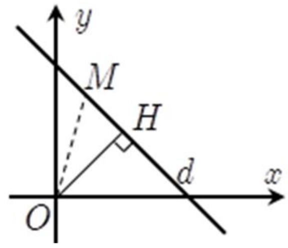
Ta có: $|z-2-4i|=|z-2i| \Leftrightarrow |(x-2)+(y-4)i|=|x+(y-2)i|$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=x^2+(y-2)^2 \Leftrightarrow x+y-4=0$: là đường thẳng d.

Cách 1.

Gọi $M\in d$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Khi đó: $|z|=OM \Rightarrow |z|_{\min}=OM_{\min} \Leftrightarrow M\equiv H$



Do $OH \perp d: x+y-4=0 \Rightarrow OH: x-y+m=0.$

$O(0;0) \in OH \Rightarrow m=0 \Rightarrow OH: x-y=0.$

Tọa độ $H = d \cap OH$ thỏa $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow 3x-2y=2.$

Cách 2.

Từ $d: y=4-x \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(4-x)^2} = \sqrt{2(x-2)^2+8} \ge \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

Suy ra: $|z|_{\min} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow 3x-2y=2.$

Cách 3. Sử dụng Cauchy – Schwarz, có

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}} \ge \sqrt{\frac{(x+y)^2}{1+1}} = \sqrt{\frac{4^2}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Dấu "=" khi $x=y$ và $x+y=4 \Leftrightarrow x=y=2 \Rightarrow 3x-2y=2.$

Lưu ý. Nếu đề bài chỉ yêu cầu tính $|z|_{\min}$, thì nó là $|z|_{\min} = OH = d(O;d).$

Câu 28: Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn: $z_1+3z_2=15-5i$ và $|3z_1-z_2| = 5\sqrt{10}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$ bằng:

A. 10. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Đặt: $\begin{cases} z_1 = a+bi \\ z_2 = c+di \end{cases}$ với $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Ta có:

$$z_1+3z_2=15-5i \Rightarrow \sqrt{(a+3c)^2+(b+3d)^2} = \sqrt{15^2+(-5)^2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2)+9(c^2+d^2)+6(ac+bd)=250. \quad (1)$$

$$|3z_1-z_2| = 5\sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(3a-c)^2+(3b-d)^2} = 5\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow 9(a^2+b^2)+(c^2+d^2)-6(ac+bd)=250. \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được: $a^2+b^2+c^2+d^2=50$.

Khi đó:

$$P=|z_1|+|z_2| = \left||z_1|+|z_2|\right| = \left|1.\sqrt{a^2+b^2}+1.\sqrt{c^2+d^2}\right|$$

$$\le \sqrt{(1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)}$$

$$=10$$

Vậy: $Max\,\mathrm{P} = 10.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 25$ và $ac + bd = 0$.

Tìm được: $z_1 = 3 + 4i; z_2 = 4 - 3i$ thỏa mãn.

Câu 29: Cho số phức z thỏa $\left|z - 2 - 2i\right| = \sqrt{17}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \left|z + 2 - i\right| + 2\left|\overline{z} - 6 - 3i\right|$. Tính $M + m$.

A. $M + m = 2\sqrt{17}\left(\sqrt{5} + 1\right)$. **B.** $M + m = 4\sqrt{17}$.

C. $M + m = \sqrt{17}\left(\sqrt{5} + 1\right)$. **D.** $M + m = 2\left(\sqrt{85} + \sqrt{17}\right)$.

Lời giải

Đặt $z = a + bi$ (với $a,\ b \in \mathbb{R}$).

Khi đó: $\left|z - 2 - 2i\right| = \sqrt{17} \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-2)^2 = 17 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4a + 4b + 9$.

Suy ra $P = \left|z + 2 - i\right| + 2\left|\overline{z} - 6 + 3i\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + 4a - 2b + 5} + 2\sqrt{a^2 + b^2 - 12a - 6b + 45}$

$= \sqrt{8a + 2b + 14} + 2\sqrt{-8a - 2b + 54}$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t + 14} + 2\sqrt{54 - t}$ với $t = 8a + 2b$, $t \in [-14; 54]$

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t + 14}} - \dfrac{2}{2\sqrt{54 - t}}$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{t + 14} = \dfrac{4}{54 - t} \Leftrightarrow 5t = -2 \Leftrightarrow t = -\dfrac{2}{5}$.

Bảng biến thiên

t	-14		$-0,4$		54
$f'(t)$			0		
$f(t)$	$4\sqrt{17}$	$\nearrow$	$2\sqrt{85}$	$\searrow$	$2\sqrt{17}$

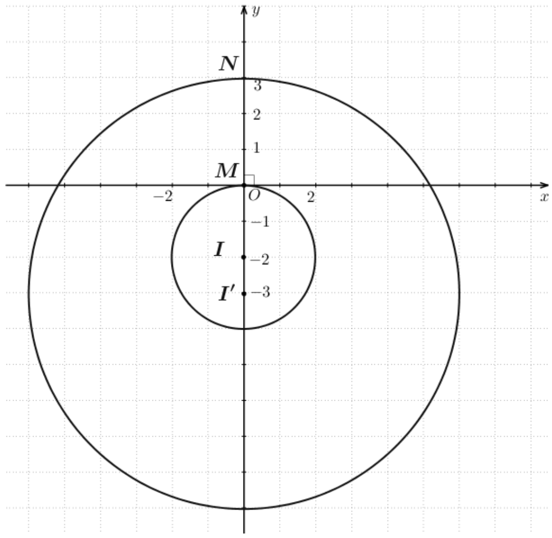
Suy ra $P_{\max} = 2\sqrt{85}$, $P_{\min} = 2\sqrt{17}$.

Vậy $M + m = 2\left(\sqrt{85} + \sqrt{17}\right)$.

Câu 30: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $\left|iz_1 - 1\right| = 1$ và $\left|\overline{z}_2 + i\right| = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \left|2z_1 + 3z_2\right|$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải



Ta có: $\left|iz_1-1\right|=1 \Leftrightarrow \left|i\right|\left|z_1-\dfrac{1}{i}\right|=1 \Leftrightarrow \left|z_1+i\right|=1 \Leftrightarrow \left|2z_1+2i\right|=2$.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức $2z_1$.

$\Longrightarrow$ Tập hợp M thuộc đường tròn tâm $I(0;-2)$, $R=2$.

Ta có: $\left|\overline{z}_2+i\right|=2 \Leftrightarrow \left|z_2-i\right|=2 \Leftrightarrow \left|-3z_2+3i\right|=6$.

Gọi N là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$.

$\Longrightarrow$ Tập hợp N thuộc đường tròn tâm $I'(0;-3)$, $R'=6$.

Suy ra: $P=\left|2z_1+3z_2\right|=MN$

$\Rightarrow P_{\min} \Leftrightarrow MN_{\min} \Leftrightarrow MN=3$ ($\Rightarrow M,N,I,I'$ thẳng hàng).

Câu 31: Cho số phức $z_1;z_2$ thỏa $\left|z_1-1-2i\right|=1$ và $\left|z_2+2+3i\right|=\left|z_2-1-i\right|$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1-z_2\right|$ bằng

A. $\dfrac{27}{10}$. **B.** $\dfrac{29}{10}$. **C.** $\dfrac{33}{10}$. **D.** $\dfrac{23}{10}$.

Lời giải

Gọi $z_1=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ khi đó $\left|z_1-1-2i\right|=1 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=1$.

Suy ra tập hợp biểu diễn số phức z_1 là đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=1$

Gọi $z_2=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$

khi đó $\left|z_2+2+3i\right|=\left|z_2-1-i\right| \Leftrightarrow (a+2)^2+(b+3)^2=(a-1)^2+(b-1)^2 \Rightarrow 6a+8b+11=0.$

Suy ra tập hợp biểu diễn số phức z_2 là đường thẳng Δ có phương trình $\Delta: 6x+8y+11=0$.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1 và N là điểm biểu diễn số phức z_2 trong mặt phẳng phức.

Từ đó ta có $\left|z_1-z_2\right|=NM$.

Ta thấy $d(I,\Delta)>R$ (Với I và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn (C))

Nên $NM_{\min}=d(I,\Delta)-R=\dfrac{33}{10}-1=\dfrac{23}{10}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1-z_2\right|$ bằng $\dfrac{23}{10}$.

Câu 32: Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2+1\right|=2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức mô đun : $|z_1+z_2|\ge\left||z_1|-|z_2|\right|$. Dấu bằng xảy ra $z_1=kz_2,(k\le 0)$.

Ta có: $2|z|=\left|z^2+1\right|\ge\left|\left|z^2\right|-1\right|\Leftrightarrow -2|z|\le\left|z^2\right|-1\le 2|z|$

Với $\left|z^2\right|-1\le 2|z|\Leftrightarrow\left|z^2\right|-2|z|-1\le 0\Rightarrow|z|\le 1+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}|z|=1+\sqrt{2}\\ z^2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-3-2\sqrt{2}\\ z=\pm\left(1+\sqrt{2}\right)i\end{cases}\Rightarrow|z|_{\max}=1+\sqrt{2}=M$

Với $\left|z^2\right|-1\ge -2|z|\Leftrightarrow\left|z^2\right|+2|z|-1\ge 0\Rightarrow|z|\ge -1+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}|z|=\sqrt{2}-1\\ z^2=k'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k'=-3+2\sqrt{2}\\ z=\pm\left(\sqrt{2}-1\right)i\end{cases}\Rightarrow|z|_{\min}=\sqrt{2}-1=m$

Vậy $M^2+m^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+\left(\sqrt{2}+1\right)^2=6.$

Câu 33: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z^2+5\right|=2|z|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M+m$ bằng:

A. $2\sqrt{6}+1$. **B.** 2 . **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{6}+1$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $|u|+|v|\ge|u+v|$ ta có:

$2|z|=\left|z^2+5\right|\Leftrightarrow 2|z|+|-5|=\left|z^2+5\right|+|-5|\ge\left|z^2+5-5\right|=\left|z^2\right|=|z|^2$ (Vì $\left|z^2\right|=|z|^2$)

Suy ra $2|z|+5\ge|z|^2\Leftrightarrow -|z|^2+2|z|+5\ge 0\Leftrightarrow|z|\le\sqrt{6}+1$.

Dấu bằng xảy ra khi $z=\pm\left(i+i\sqrt{6}\right)$. Vậy $M=\sqrt{6}+1$

Ta có:

$2|z|+\left|-z^2\right|=\left|z^2+5\right|+\left|-z^2\right|\ge\left|z^2+5-z^2\right|=|5|=5$

Suy ra $2|z|+|z|^2\ge 5\Leftrightarrow|z|^2+2|z|-5\ge 0\Rightarrow|z|\ge\sqrt{6}-1$.

Dấu bằng xảy ra khi $z=\pm\left(-i+i\sqrt{6}\right)$. Vậy $m=\sqrt{6}-1$

Vậy $M+m=\left(\sqrt{6}-1\right)+\left(\sqrt{6}+1\right)=2\sqrt{6}$.

Câu 34: Cho số phức z thỏa mãn $4|z|=\left|z^2-6-8i\right|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 36. **B.** $\sqrt{14}+2$. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** 14.

Lời giải

Ta có:

$4|z|+|6+8i|=|z^2-6-8i|+|6+8i|\ge|z^2-6-8i+6+8i|=|z^2|=|z|^2$

$\Leftrightarrow 4|z|+10\ge|z|^2 \Leftrightarrow -|z|^2+4|z|+10\ge 0\Rightarrow |z|\le 2+\sqrt{14}$

Dấu bằng xảy ra khi $z=\pm\left(2i+i\sqrt{14}\right)$. Vậy $M=2+\sqrt{14}$.

$4|z|+|-z^2|=|z^2-6-8i|+|-z^2|\ge|z^2-6-8i-z^2|=|-6-8i|=10$

$\Leftrightarrow 4|z|+|z|^2\ge 10\Leftrightarrow |z|^2+4|z|-10\ge 0\Rightarrow |z|\ge\sqrt{14}-2$

Dấu bằng xảy ra khi $z=\pm\left(-2i+i\sqrt{14}\right)$. Vậy $m=\sqrt{14}-2$.

Do đó $M^2+m^2=36$.

Câu 35: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của $|z+4i|$. Giá trị m^2 là?

A. 32. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** 16.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$.

Ta có $|z-2-4i|=|z-2i|\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=x^2+(y-2)^2\Leftrightarrow x+y-4=0$

$\Leftrightarrow y=4-x$

Xét $|z+4i|^2=x^2+(y+4)^2=x^2+(8-x)^2=2x^2-16x+64=2(x-4)^2+32\ge 32$

Suy ra $|z+4i|\ge\sqrt{32}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z=4$.

Vậy $m=\sqrt{32}$ hay $m^2=32$.

Câu 36: Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2-3+4i|-2|z|=0$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2-m^2 bằng

A. $4\sqrt{6}$. **B.** 14. **C.** 146. **D.** $56\sqrt{6}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$2|z|=|z^2-3+4i|\ge\left||z^2|-|3-4i|\right|=\left||z|^2-5\right|$ (vì $|z^2|=|z|^2$).

Dấu "$=$" xảy ra khi $z^2=k(-3+4i)$.

Suy ra $4|z|^2\ge\left(|z|^2-5\right)^2\Leftrightarrow|z|^4-14|z|^2+25\le 0\Leftrightarrow 7-2\sqrt{6}\le|z|^2\le 7+2\sqrt{6}$

$\Rightarrow\sqrt{6}-1\le|z|\le\sqrt{6}+1$

Do đó, ta có $M=\sqrt{6}+1$ và $m=\sqrt{6}-1$.

Vậy $M^2-m^2=4\sqrt{6}$.

Câu 37: Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2-5-12i|=3|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** $\sqrt{61}$. **D.** $\sqrt{59}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$3|z|=\left|z^2-5-12i\right|\ge\left||z^2|-|5+12i|\right|=\left||z|^2-13\right|$ (vì $\left|z^2\right|=|z|^2$).

Dấu "$=$" xảy ra khi $z^2=k\left(-5-12i\right)$.

Suy ra $9|z|^2\ge\left(|z|^2-13\right)^2\Leftrightarrow|z|^4-35|z|^2+169\le0\Leftrightarrow\dfrac{35-3\sqrt{61}}{2}\le|z|^2\le\dfrac{35+3\sqrt{61}}{2}$

$\Rightarrow\dfrac{\sqrt{61}-3}{2}\le|z|\le\dfrac{\sqrt{61}+3}{2}$.

Do đó, ta có $M=\dfrac{\sqrt{61}+3}{2}$ và $m=\dfrac{\sqrt{61}-3}{2}$. Vậy $M-m=3$.

Câu 38: Xét các số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3+2i|=\sqrt5$. Tính $P=a-b$ khi $|z-3-3i|+|z-7-i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 8. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

$|z-3+2i|=\sqrt5\Rightarrow|a-3+(b+2)i|=\sqrt5\Leftrightarrow(a-3)^2+(b+2)^2=5$.

Khi đó z nằm trên đường tròn (C) tâm $I(3;-2)$, bán kính $R=\sqrt5$.

Gọi $A(3;3),B(7;1)$. Gọi I' là trung điểm của $AB\Rightarrow I'(5;2)$.

Đặt $P=|z-3-3i|+|z-7-i|=\sqrt{(a-3)^2+(b-3)^2}+\sqrt{(a-7)^2+(b-1)^2}=MA+MB$

Suy ra $P=MA+MB\le\sqrt{2\left(MA^2+MB^2\right)}$

Mặt khác ta có $MA^2+MB^2=2MI'^2+\dfrac{AB^2}{2}$. P lớn nhất khi MI' lớn nhất

Khi M,I,I' thẳng hàng. Ta có $\overrightarrow{II'}=(2;4)$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và nhận $\vec n=(2;-1)$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình

$\Delta:2(x-3)-1(y+2)=0\Leftrightarrow y=2x-8$

Khi dó tọa độ $M(a;b)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}(a-3)^2+(b+2)^2=5\\b=2a-8\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=4\\b=0\end{cases}\\\begin{cases}a=2\\b=-4\end{cases}\end{array}\right.$

$+\begin{cases}a=4\\b=0\end{cases}\Rightarrow M(4;0)\Rightarrow P=MA+MB=2\sqrt{10}\approx6.32$;

$+\begin{cases}a=2\\b=-4\end{cases}\Rightarrow M(2;-4)\Rightarrow P=MA+MB=10\sqrt2\approx14.143$.

Vậy P lớn nhất khi $M(2;-4)\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-4\end{cases}\Rightarrow a-b=6$.

Câu 39: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\ge 2$. Tính tỉ số $\dfrac{M}{m}$.

A. $\dfrac{M}{m}=3$. **B.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{M}{m}=2$.

Lời giải

Ta có $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|=\dfrac{|2z+i|}{|z|}\Rightarrow \dfrac{|2z|-|i|}{|z|}\le P\le \dfrac{|2z|+|i|}{|z|}\Leftrightarrow 2-\dfrac{1}{|z|}\le P\le 2+\dfrac{1}{|z|}\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\le P\le \dfrac{5}{2}$.

Vậy $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$.

Câu 40: Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w=\dfrac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng $\dfrac{1}{8}$. Xét các số phức $z_1, z_2\in S$ thỏa mãn $|z_1-z_2|=2$, giá trị lớn nhất của $P=|z_1-5i|^2-|z_2-5i|^2$ bằng

A. 16. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 32.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Do $w=\dfrac{1}{|z|-z}$ nên $|z|-z\ne 0$.

Ta có: $w=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}-x-yi}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x+yi}{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)^2+y^2}$

nên theo giả thiết ta có: $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)^2+y^2}=\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{x^2+y^2-2x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}=\dfrac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}=\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=4$. $\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\ne 0\right)$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm là gốc tọa độ O, bán kính $r=4$ (bỏ đi điểm $(4;0)$). Giả sử hai điểm A,B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 thì A,B thuộc đường tròn $(O;4)$ nên: $OA=OB=4$.

Vì: $|z_1-z_2|=2\Rightarrow AB=2$. Gọi $I(0;5)$, $IO=5$, K là trung điểm của đoạn thẳng AB thì khi đó $OK\perp AB$, ta có:

$P=|z_1-5i|^2-|z_2-5i|^2=AI^2-BI^2=\overrightarrow{IA}^2-\overrightarrow{IB}^2=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{IK}$

$=2\overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OK}\right)=2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{IO}=2BA.IO.\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{IO}\right)\le 2BA.IO=20$.

Dấu "$=$" xảy ra khi 2 vecto $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{IO}$ cùng hướng.

Vậy $P=|z_1-5i|^2-|z_2-5i|^2$ có giá trị lớn nhất là 20.

Cách 2:

Điều kiện: $|z|-z\ne 0\Leftrightarrow |z|\ne z$ (*).

Đặt $z = x + yi$, ta có: $w = \dfrac{1}{|z| - z} = \dfrac{|z| - \bar{z}}{(|z| - z)(|z| - \bar{z})} = \dfrac{|z| - x}{(|z| - z)(|z| - \bar{z})} + \dfrac{yi}{(|z| - z)(|z| - \bar{z})}$.

Vì w có phần thực bằng $\dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{|z| - x}{(|z| - z)(|z| - \bar{z})} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{|z| - x}{2|z|^2 - 2x|z|} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{|z| - x}{(|z| - x)|z|} = \dfrac{1}{4}$ (1).

Từ điều kiện (*) suy ra: $|z| - x \neq 0$. Do đó: $(1) \Leftrightarrow |z| = 4$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm là gốc tọa độ O, bán kính $r = 4$ (bỏ đi điểm $(4;0)$). Giả sử hai điểm A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 thì A, B thuộc đường tròn $(O;4)$ nên: $OA = OB = 4$.

Vì: $|z_1 - z_2| = 2 \Rightarrow AB = 2$. Gọi $I(0;5)$, $IO = 5$, K là trung điểm của đoạn thẳng AB thì khi đó $OK \perp AB$, ta có:

$P = |z_1 - 5i|^2 - |z_2 - 5i|^2 = AI^2 - BI^2 = \overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{IB}^2 = (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{IK}$

$= 2\overrightarrow{BA}(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OK}) = 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{IO} = 2BA.IO.\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{IO}) \leq 2BA.IO = 20$.

Dấu "=" xảy ra khi 2 vecto $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{IO}$ cùng hướng.

Vậy $P = |z_1 - 5i|^2 - |z_2 - 5i|^2$ có giá trị lớn nhất là 20.

Cách 3:

Điều kiện: $|z| - z \neq 0 \Leftrightarrow |z| \neq z$ (*).

Ta có: $w + \bar{w} = \dfrac{1}{|z| - z} + \dfrac{1}{|z| - \bar{z}} = \dfrac{|z| - \bar{z} + |z| - z}{(|z| - z)(|z| - \bar{z})} = \dfrac{2|z| - \bar{z} - z}{|z|^2 - |z|(\bar{z} + z) + |z|^2} = \dfrac{1}{|z|}$.

Vì $w = \dfrac{1}{|z| - z}$ có phần thực bằng $\dfrac{1}{8}$ nên $w + \bar{w} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow |z| = 4$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm là gốc tọa độ O, bán kính $r = 4$ (bỏ đi điểm $(4;0)$). Giả sử hai điểm A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 thì: A, B thuộc đường tròn $(O;4)$ nên: $OA = OB = 4$.

Vì: $|z_1 - z_2| = 2 \Rightarrow AB = 2$. Gọi $I(0;5)$, $IO = 5$, K là trung điểm của đoạn thẳng AB thì khi đó $OK \perp AB$, ta có:

$P = |z_1 - 5i|^2 - |z_2 - 5i|^2 = AI^2 - BI^2 = \overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{IB}^2 = (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{IK}$

$= 2\overrightarrow{BA}(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OK}) = 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{IO} = 2BA.IO.\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{IO}) \leq 2BA.IO = 20$.

Dấu "=" xảy ra khi 2 vecto $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{IO}$ cùng hướng.

Vậy $P = |z_1 - 5i|^2 - |z_2 - 5i|^2$ có giá trị lớn nhất là 20.

Câu 41: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Tính môđun của số phức $w = M + mi$.

A. $|w| = 2\sqrt{314}$. **B.** $|w| = 2\sqrt{309}$. **C.** $|w| = \sqrt{1258}$. **D.** $|w| = 3\sqrt{137}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Do $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ nên điểm A biểu diễn số phức z thuộc đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Lại có $P=|x+yi+2|^2-|x+yi-i|^2=|x+2+yi|^2-|x+(y-1)i|^2=$

$=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3$.

Do đó điểm A thuộc đường thẳng $\Delta: 4x+2y+3-P=0$.

Để tồn tại x; y thì $d(I;\Delta)\le R \Leftrightarrow \dfrac{|4.3+2.4+3-P|}{\sqrt{4^2+2^2}}\le\sqrt{5} \Leftrightarrow |P-23|\le 10 \Leftrightarrow 13\le P\le 33$.

$\Rightarrow M=\max P=33$ và $m=\min P=13 \Rightarrow |w|=\sqrt{M^2+m^2}=\sqrt{1258}$.

Câu 42: Vậy tổng Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z+1-2i|=9$ và $|z-2+mi|=|z-m+i|$, (trong đó $m\in\mathbb{R}$). Gọi z_1,z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1-z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 6. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z+1-2i|=9 \Rightarrow |x+yi+1-2i|=9 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=9$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=81$

Và $|z-2+mi|=|z-m+i| \Rightarrow |x+yi-2+mi|=|x+yi-m+i|$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+m)^2}=\sqrt{(x-m)^2+(y+1)^2} \Rightarrow (x-2)^2+(y+m)^2=(x-m)^2+(y+1)^2$

$\Rightarrow (2m-4)x+(2m-2)y+3=0$

Do đó S là tập hợp các số phức có điểm biểu diễn là giao của đường tròn (C) và đường thẳng d với $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=81$ và $d:(2m-4)x+(2m-2)y+3=0$.

(C) là đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=9$.

Gọi A,B lần lượt là điểm biểu diễn hai số phức z_1,z_2. Khi đó $AB=|z_1-z_2|$.

Độ dài AB lớn nhất khi AB là đường kính của đường tròn (C) $\Rightarrow |z_1-z_2|=AB=18$.

Ta có I là trung điểm của AB nên có

$OI^2=\dfrac{OA^2+OB^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4} \Rightarrow 2\left(OA^2+OB^2\right)=4OI^2+AB^2 \Rightarrow 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)=4OI^2+AB^2$

Có $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)=4OI^2+AB^2$

$\Rightarrow |z_1+z_2|^2=4OI^2=20 \Rightarrow |z_1+z_2|=2\sqrt{5}$

Câu 43: Cho số phức z,w sao cho thỏa $|z|=2,|w|=4$ và $(z-i)(\overline{w}+i)$ là số thuần ảo. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z-w|$. Khi đó giá trị của $M+m$ bằng

A. $2\sqrt{19}$. **B.** 14. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Do $(z-i)\left(\overline{w}+i\right)$ là số thuần ảo nên $(z-i)\left(\overline{w}+i\right)=(z-i)\overline{(w-i)}=\dfrac{z-i}{w-i}|w-i|^2$ cũng là số thuần ảo tức ta luôn có được: $z-i=-ki(w-i)$ $(k\in\mathbb{R},k\neq 0)$. Từ đó ta suy ra

$z+kiw=-k+i$

$$\Rightarrow |z+kiw|^2=|k+i|^2=k^2+1\Rightarrow\begin{cases}|z|^2+k^2|w|^2+ki\left(w\overline{z}-\overline{w}z\right)=k^2+1\\|z|^2=4,|w|^2=16\end{cases}$$

$$\Rightarrow -ki\left(w\overline{z}-\overline{w}z\right)=15k^2+3$$

$$\Leftrightarrow -\left(w\overline{z}-\overline{w}z\right)^2=\frac{\left(15k^2+3\right)^2}{k^2}\Leftrightarrow\begin{cases}4w\overline{z}\overline{w}z-\left(w\overline{z}+\overline{w}z\right)^2=\dfrac{\left(15k^2+3\right)^2}{k^2}\\z.\overline{z}=|z|^2=4;w.\overline{w}=|w|^2=16\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(w\overline{z}+\overline{w}z\right)^2=256-\frac{\left(15k^2+3\right)^2}{k^2}$$

Khi đó ta có được:

$$\left(w\overline{z}+\overline{w}z\right)^2=256-\frac{\left(15k^2+3\right)^2}{k^2}=256-\left(15k+\frac{3}{k}\right)^2\le 256-\left(2\sqrt{15k.\frac{3}{k}}\right)^2=76$$

Suy ra với $\left(w\overline{z}+\overline{w}z\right)^2\le 76$ ta có được $-2\sqrt{19}\le w\overline{z}+\overline{w}z\le 2\sqrt{19}$.

Khi đó: $|z-w|^2=|z|^2+|w|^2-\left(w\overline{z}+\overline{w}z\right)=20-\left(w\overline{z}+\overline{w}z\right)\Rightarrow|z-w|^2\in\left[20-2\sqrt{19};20+2\sqrt{19}\right]$.

Vậy $|z-w|\in\left[\sqrt{19}-1;\sqrt{19}+1\right]$ tức $\begin{cases}M=\sqrt{19}+1\\m=\sqrt{19}-1\end{cases}\Rightarrow M+m=2\sqrt{19}$.

Cách 2: Từ có: $z+kiw=k+i$. Đặt $\dfrac{z}{w}=x+yi,$ $(x,y\in\mathbb{R})$ với $x^2+y^2=|x+yi|^2=\left|\dfrac{z}{w}\right|^2=\dfrac{1}{4}$.

Khi đó ta có: $z+kiw=k+i\Leftrightarrow\dfrac{z}{w}+ki=\dfrac{k+i}{w}\Leftrightarrow|x+(y+k)i|=\left|\dfrac{k+i}{w}\right|\Leftrightarrow x^2+(y+k)^2=\dfrac{k^2+1}{16}$

.

$$\Rightarrow\left(x^2+y^2\right)+2ky+k^2=\frac{k^2+1}{16}\Leftrightarrow\frac{1}{4}+2ky+k^2=\frac{k^2+1}{16}\Rightarrow y=\frac{15k^2+3}{-32k}$$. Từ đó ta suy ra:

$$x^2=\frac{1}{4}-y^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{32^2}\left(15k+\frac{3}{k}\right)^2\le\frac{1}{4}-\frac{1}{32^2}\left(2\sqrt{15k.\frac{3}{k}}\right)^2=\frac{19}{256}\Rightarrow-\frac{\sqrt{19}}{16}\le x\le\frac{\sqrt{19}}{16}.$$

Khi đó ta có: $|z-w|=|w|\left|\dfrac{z}{w}-1\right|=4|(x-1)+yi|=4\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$$\Rightarrow\begin{cases}|z-w|^2=16\left(\dfrac{5}{4}-2x\right)\le 16\left(\dfrac{5}{4}-2\left(-\dfrac{\sqrt{19}}{16}\right)\right)\\|z-w|^2=16\left(\dfrac{5}{4}-2x\right)\ge 16\left(\dfrac{5}{4}-2\left(+\dfrac{\sqrt{19}}{16}\right)\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-w|^2 \le 20+2\sqrt{19} = \left(\sqrt{19}+1\right)^2 \\ |z-w|^2 \ge 20-2\sqrt{19} = \left(\sqrt{19}-1\right)^2 \end{cases} \Rightarrow |z-w| \in \left[\sqrt{19}-1;\sqrt{19}+1\right]$$

tức $\begin{cases} M=\sqrt{19}+1 \\ m=\sqrt{19}-1 \end{cases} \Rightarrow M+m=2\sqrt{19}$.

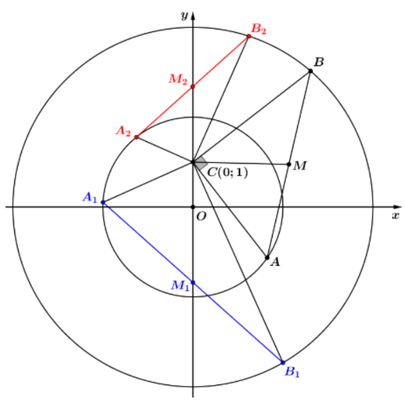
Cách 3: Đặt $z=a+bi, w=c+di,\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ khi đó ta có:

$(z-i)(\overline{w}+i)=(a+(b-1)i)(c-(d-1)i)$ là số thuần ảo. Khi đó ta suy ra:

$\operatorname{Re}z\left((z-i)(\overline{w}+i)\right)=ac+(b-1)(d-1)=0$. Gọi $A(a;b),B(c,d)$ là các điểm biểu diễn số phức z,w với A,B lần lượt thuộc quỹ tích đường tròn tâm O, bán kính bằng 2 và 4.

Cùng với điểm $C(0;1)$ thì phương trình tương đương với $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=0$ tức ta có được tam giác ABC vuông tại C. Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AC}=(a;b-1) \\ \overrightarrow{BC}=(c;d-1) \end{cases}$, gọi M là trung điểm AB. Khi đó $MC=\dfrac{AB}{2}$

.



Từ đó ta có: $\begin{cases} AB=2MC\le 2(CO+OM_1)=2(1+OM_1) \\ AB=2MC\ge 2(-CO+OM_2)=2(-1+OM_2) \end{cases}$ với M_1,M_2 là các điểm như hình vẽ trên.

$$\Rightarrow \begin{cases} AB\le 2\left(1+\sqrt{\dfrac{2OA^2+2OB^2-AB^2}{4}}\right) \\ AB\ge\left(-1+\sqrt{\dfrac{2OA^2+2OB^2-AB^2}{4}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2\left(1+\sqrt{\dfrac{40-x^2}{4}}\right) \\ x\ge\left(-1+\sqrt{\dfrac{40-x^2}{4}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le\sqrt{19}+1 \\ x\ge\sqrt{19}-1 \end{cases}.$$

Vậy $|z-w|\in\left[\sqrt{19}-1;\sqrt{19}+1\right]$ tức $\begin{cases} M=\sqrt{19}+1 \\ m=\sqrt{19}-1 \end{cases} \Rightarrow M+m=2\sqrt{19}$.

Câu 44: Xét hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|(z_1-2-i)(2+2\sqrt{3}i)\right|=\left|(z_1-\overline{z}_1)(\sqrt{3}-i)\right|$ và $|z_2+i|=|z_2+1+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{34}{5}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z_1 = a + bi$,

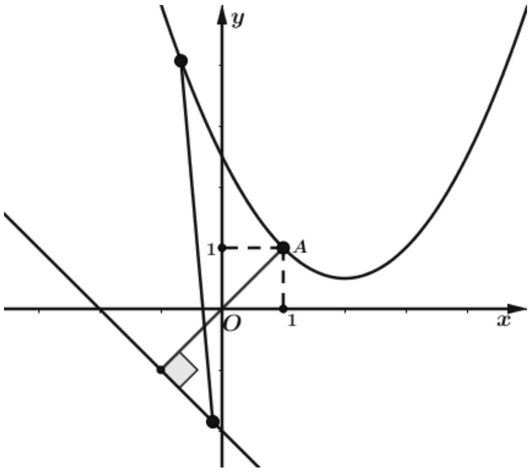
Ta có: $\left|(z_1 - 2 - i)(2 + 2\sqrt{3}i)\right| = \left|(z_1 - \overline{z_1})(\sqrt{3} - i)\right| \Leftrightarrow 2\left|(z_1 - 2 - i)\right| = \left|(z_1 - \overline{z_1})\right|$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = 2|b| \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 + b^2 - 2b + 1 = b^2 \Leftrightarrow b = \dfrac{a^2 - 4a + 5}{2}$

Đặt điểm biểu diễn số phức z_1 là M, vậy quỹ tích của M là parabol $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{2}$

Đặt điểm biểu diễn số phức z_2 là N. Ta dễ thấy quỹ tích của N là đường thẳng $d: y = -x - 2$.

Minh họa trên hệ trục Oxy.



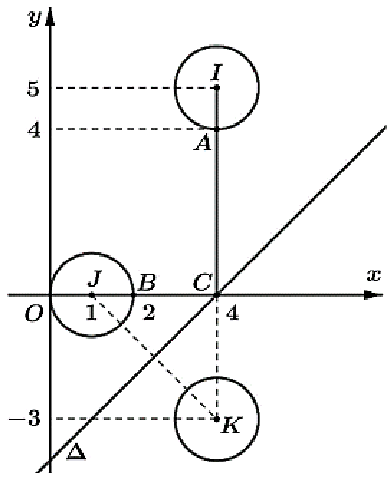
Ta thấy $|z_1 - z_2|_{\min} \Leftrightarrow MN_{\min} = d(A;d) = 2\sqrt{2}$.

Câu 45: Xét các số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\overline{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tính $M = |z_1 + z_2|$ khi biểu thức $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M = \sqrt{41}$. **B.** $M = 6$. **C.** $M = 2\sqrt{5}$. **D.** $M = 2\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có:

$|z_1 - 4 - 5i| = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm A biểu diễn số phức z_1 là đường tròn (C_1) có tâm $I(4;5)$, bán kính $R_1 = 1$.

$|z_2 - 1| = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm B biểu diễn số phức z_2 là đường tròn (C_2) có tâm $J(1;0)$, bán kính $R_2 = 1$.

Đặt $z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|\overline{z} + 4i| = |z - 8 + 4i| \Leftrightarrow a^2 + (-b+4)^2 = (a-8)^2 + (b+4)^2 \Leftrightarrow a - b = 4.$

Suy ra tập hợp điểm C biểu diễn số phức z nằm trên đường thẳng $\Delta : x - y = 4$.

Khi đó: $P = |z - z_1| + |z - z_2| = CA + CB$.

Gọi K là điểm đối xứng của J qua đường thẳng Δ, khi đó ta tìm được $K(4;-3)$, suy ra phương trình đường thẳng $IK : x = 4$.

Do đó: $P_{\min}$ khi và chỉ khi $C = IK \cap \Delta$; $A = CI \cap (C_1)$ (A ở giữa CI); $B = CJ \cap (C_2)$ (B ở giữa CJ). Suy ra: $\begin{cases} A(4;4) \\ B(2;0) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z_1 = 4 + 4i \\ z_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow M = |z_1 + z_2| = 2\sqrt{13}$.

DẠNG 9 THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN KHI BIẾT YẾU TỐ KHOẢNG CÁCH

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Thể tích khối lăng trụ

$$V_{LT} = S_d.h$$

Trong đó: S_d là diện tích đáy, h là chiều cao khối lăng trụ.

Kiến thức về khoảng cách trong không gian xem lại dạng 4.

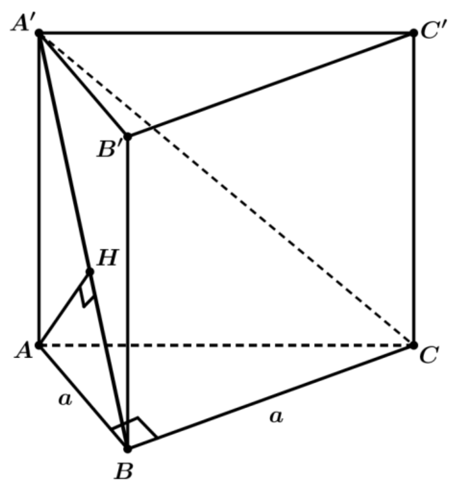
B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 43 – Đề tham khảo 2023. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$. **C.** $\sqrt{2}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $AH \perp A'B$, $H \in A'B$.

Vì $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AH$.

Ta có $BC \perp AH$, $AH \perp A'B \Rightarrow AH \perp (A'BC)$. Do đó $d(A,(A'BC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác vuông $AA'B$ vuông tại A, ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{9}{6a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow A'A = a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'A = \frac{1}{2}a.a.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}a^3}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

Câu 2: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{8}a^3$. **C.** $\frac{3}{4}a^3$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$ có $AB = a,\ AD = a\sqrt{2}$. Biết khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(BC'D')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, thể tích khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}a^3$. **D.** $a^3\sqrt{6}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3}{3}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBE).

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB = 1,\ AC = 2, BAC = 120°$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết ΔSBC có diện tích bằng $\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{7}}{24}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng $60°$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{7\sqrt{6}}{3}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{42}}{3}a^3$. **C.** $\frac{7\sqrt{42}}{3}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a^3$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc bằng $60°$, M là trung điểm của BC. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng đáy trùng trung điểm H của cạnh AB, biết góc giữa $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $30°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 9: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng đáy trùng trọng tâm tam giác ABC, biết khoảng cách giữa AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$, có đáy là tam giác ABC cân tại A, $BAC=120^{\circ}$, các cạnh bên hợp với đáy góc 45^{o}. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC), trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính thể tích của khối lặng trụ $ABCA'B'C'$, biết khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(AA'C'C)$ bằng $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 12: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác có $AB=a;AC=a\sqrt{3};BC=a$. Gọi M là trung điểm CC' và khoảng cách từ M đến $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 13: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông đỉnh B có $AB=a;BC=a\sqrt{2}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm $A'B'$ và $A'C'$, P thuộc cạnh BC sao cho $BP=\dfrac{1}{3}BC$. Biết khoảng cách từ điểm A đến (PMN) bằng $\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$, thể tích khối lăng trụ bằng

A. a^3. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{2}$.

Câu 14: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, cạnh bên có độ dài bằng $2a$. Gọi M, O lần lượt là trung điểm $A'B'$ và $A'C'$. Biết khoảng cách giữa AM và CO bằng $\frac{4a}{9}$. Thể tích khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ bằng

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $2a^3$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{2}$.

Câu 15: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có CA' tạo với $(BCC'B')$ mọt góc $45°$. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$, khoảng cách từ C' đến $(CA'G)$ bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích lăng trụ?

A. $9a^3\sqrt{2}$. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $3a^3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 16: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi có $DAB = 120°$. Biết $(AB'C'D)$ tạo với đáy một góc $60°$ và khoảng cách từ điểm C đến $(AB'C')$ bằng $a\sqrt{3}$. Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$?

A. $48\sqrt{3}a^3$. **B.** $16\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{32\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $24\sqrt{3}a^3$.

Câu 17: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC = a$, diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Biết khoảng cách đường thẳng BC và mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 18: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $ACB = 30°$. Biết góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = a^3\sqrt{6}$. **B.** $V = \frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V = a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt $(ABCD)$ trùng với trung điểm của BD. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $V = \frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{2a^3}{3}$. **C.** $V = \sqrt{3}a^3$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 21: Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $2a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{\sqrt{2}}{3}a$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** a^3. **D.** $6a^3$.

Câu 22: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

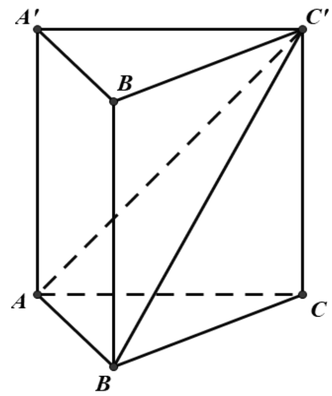
Câu 23: **2.** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC, góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và $(BCC'B')$ bằng $60°$,. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $8a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{8a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $8a^3\sqrt{6}$.

Câu 24: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'B'CD)$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích khối hộp theo a.

A. $V = a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{21}}{7}$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 25: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABCA'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa 2 mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $cos\alpha = \frac{1}{3}$ (tham khảo hình dưới đây). Thể tích V của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ bằng



A. $\frac{9a^3\sqrt{15}}{20}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\frac{9a^3\sqrt{15}}{10}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{15}}{10}$.

Câu 26: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$. Biết khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{2}$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Câu 27: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A có $AC = a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng (ABC) bằng φ với $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$, khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC') bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Thể tích khối lẳng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{18}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{18}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Câu 28: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm cạnh BB'. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MDA') bằng $\frac{2a}{3}$. Thể tích khối lập phương đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** $8a^3$. **D.** a^3.

Câu 29: Cho khối chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, đường chéo $BD = a\sqrt{5}$, có SA vuông góc với mặt đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{2a}{3}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Câu 30: Cho khối chóp $SABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB = a, ACB = 30^0$. Các mặt bên tạo với đáy những góc bằng nhau và bằng 60^0. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{(\sqrt{3}-1)a^3}{12}$. **B.** $\frac{(\sqrt{3}-1)a^3}{4}$. **C.** $\frac{(\sqrt{3}-1)a^3}{6}$. **D.** $(\sqrt{3}-1)a^3$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{3}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. Tính theo a thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V = 8a^3$. **B.** $V = 3\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = 8\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 6a^3$.

Câu 33: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa 2 đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 34: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông và $A'BC$ là tam giác đều. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{4}{3}a^3$. **B.** $\frac{14\sqrt{21}}{27}a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $\frac{28\sqrt{7}}{27}a^3$.

Câu 35: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{1}{8}a^3$. **B.** $\frac{3}{8}a^3$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 37: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông; mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông. Biết khoảng cách giữa AB' và CC' bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{2}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **D.** a^3.

Câu 39: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ góc α thỏa mãn $\cot\alpha = 2$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{4}{3}a^3\sqrt{11}$. **B.** $\frac{1}{9}a^3\sqrt{11}$. **C.** $\frac{1}{3}a^3\sqrt{11}$. **D.** $\frac{2}{3}a^3\sqrt{11}$.

Câu 40: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'D$ và $B'C$ là a. Khi đó thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $9\sqrt{3}a^3$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** $9a^3$. **D.** $18a^3$.

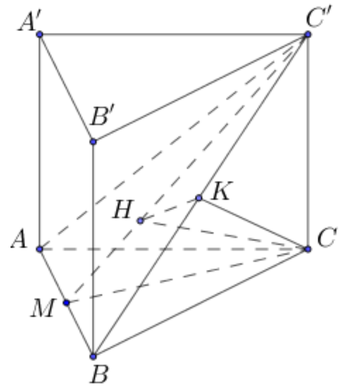
ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}a^3}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $2x$ là độ dài cạnh đáy của lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow CM = x\sqrt{3}$

Tam giác ABC đều $\Rightarrow CM \perp AB,$ mà $AB \perp CC' \Rightarrow AB \perp (CMC') \Rightarrow (C'AB) \perp (CMC')$

Lại có $(ABC') \cap (CMC') = C'M$, kẻ $MH \perp C'M, (H \in C'M)$

$\Rightarrow CH \perp (ABC') \Rightarrow d(C,(ABC')) = CH = a$

Tam giác MCC' vuông tại $C,$ có $CH \perp MC'$

$$\Rightarrow \frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CM^2} + \frac{1}{CC'^2} \Rightarrow CC' = \frac{CH.CM}{\sqrt{CM^2 - CH^2}} = \frac{ax\sqrt{3}}{\sqrt{3x^2 - a^2}}.$$

Tam giác BCC' vuông tại C, kẻ $CK \perp BC' \Rightarrow CK = \frac{CB.CC'}{\sqrt{CB^2 + CC'^2}}$

$$\Rightarrow CK = \frac{2x.\frac{ax\sqrt{3}}{\sqrt{3x^2 - a^2}}}{\sqrt{4x^2 + \frac{3a^2x^2}{3x^2 - a^2}}} = \frac{2ax\sqrt{3}}{\sqrt{12x^2 - a^2}}.$$

Ta có $\begin{cases} (ABC') \cap (BCC'B') = BC' \\ C \in (BCC'B') \end{cases} \Rightarrow \sin((ABC'),(BCC'B')) = \frac{d(C,(ABC'))}{d(C,BC')} = \frac{CH}{CK}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a}{\frac{2ax\sqrt{3}}{\sqrt{12x^2 - a^2}}} \Leftrightarrow \frac{11}{12} = \frac{12x^2 - a^2}{12x^2} \Rightarrow x = a.$$

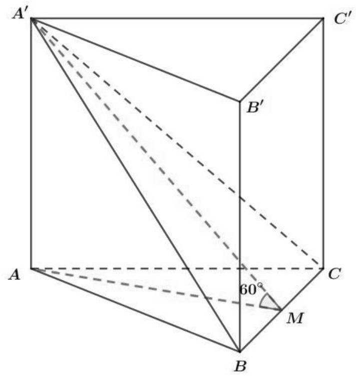
$\Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh $2a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = a^2\sqrt{3}$ và $CC' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.CC' = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

Câu 2: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{8}a^3$. **C.** $\dfrac{3}{4}a^3$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC.

Do tam giác ABC đều nên $BC \perp AM$ (1).

Lại có $BC \perp (A'AM)$ (Do $BC \perp AM$ và $BC \perp AA'$). Suy ra $BC \perp A'M$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và đáy chính là góc giữa hai đường thẳng AM và $A'M$.

Do tam giác $AA'M$ vuông nên góc giữa hai đường thẳng AM và $A'M$ chính là góc $A'MA$ hay $A'MA = 60°$.

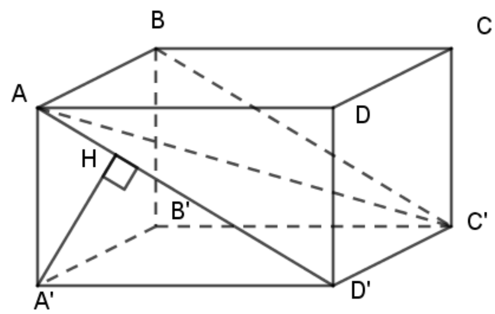
Ta có $AA' = AM.\tan 60° = \dfrac{3}{2}a$.

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$ có $AB = a,\ AD = a\sqrt{2}$. Biết khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(BC'D')$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, thể tích khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a^3$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a^3$. **D.** $a^3\sqrt{6}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A' trên AD', tức là $A'H \perp AD'$ (1)

Do $C'D' \perp (ADD'A')$ nên $C'D' \perp A'H$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A'H \perp (ABC'D')$ hay $A'H \perp (BC'D')$.

Suy ra $A'H$ chính là khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(BC'D')$.

Ta có $\dfrac{1}{A'H^2}=\dfrac{1}{A'A^2}+\dfrac{1}{A'D'^2} \Rightarrow A'A=\dfrac{A'H.A'D'}{\sqrt{A'D'^2-A'H^2}}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2-\frac{3a^2}{9}}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}a$.

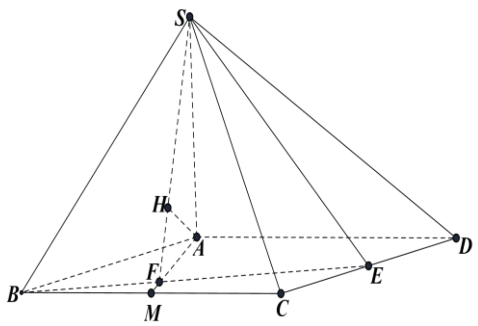
Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho là $V_{ABCD.A'B'C'D'}=AB.AD.AA'=\dfrac{\sqrt{10}}{5}a.a^2\sqrt{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a^3$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{a^3}{3}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBE).

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $V=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{a^3}{3} \Rightarrow SA=a$.

Gọi M là trung điểm BC $\Rightarrow AM \perp BE$ tại F.

Ta lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BE$.

$\Rightarrow BE \perp (SAF)$. Suy ra $(SBE) \perp (SAF)$ theo giao tuyến SF. Trong (SAF), kẻ $AH \perp SF$ thì $AH \perp (SBE)$.

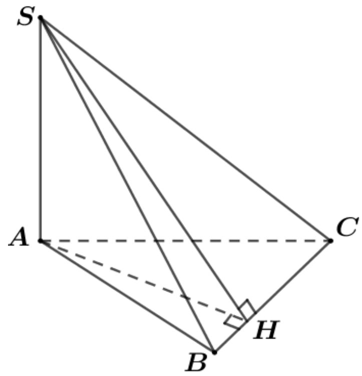
Ta có: $\Delta ABF \backsim \Delta AMB \Rightarrow \dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AB}{AM} \Rightarrow AF=\dfrac{AB^2}{\sqrt{AB^2+BM^2}}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Tam giác SAF có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AF^2} \Rightarrow AH=\dfrac{SA.AF}{\sqrt{SA^2+AF^2}}=\dfrac{2}{3}a$.

Câu 5: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB=1,\ AC=2, BAC=120°$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết ΔSBC có diện tích bằng $\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}}{12}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{7}}{24}$.

Lời giải



$S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin 120° = \frac{1}{2}.1.2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow \Delta ABC$ là hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên (ABC).

Gọi $\left((SBC),(ABC)\right) = \alpha$, ta có $S_{ABC} = S_{SBC}.\cos\alpha \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.\cos\alpha \Rightarrow \alpha = 60°$.

Kẻ $AH \perp BC$, lại có $SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SH \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow \left((SBC),(ABC)\right) = \left(SH, AH\right) = SHA = \alpha = 60°.$$

Áp dụng định lý hàm số cosin cho ΔABC ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120°} = \sqrt{7}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}.AH.BC \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.AH.\sqrt{7} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

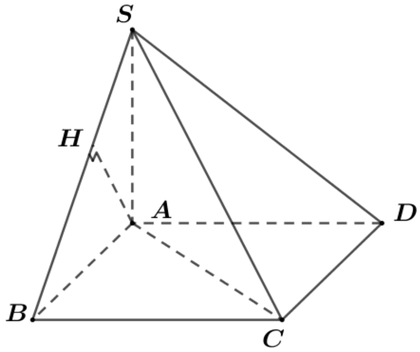
Xét ΔSAH vuông tại A, ta có $SA = AH.\tan 60° = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{7}}{7}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng $60°$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{7\sqrt{6}}{3}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{42}}{3}a^3$. **C.** $\frac{7\sqrt{42}}{3}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a^3$.

Lời giải



Gọi $SA = h,\ AB = x \Rightarrow AC = x\sqrt{2}$.

Vì AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$

$\Rightarrow \left(SC,(ABCD)\right) = \left(SC,AC\right) = SCA = 60°$.

Xét ΔSAC vuông tại A, ta có $SA = AC.\tan 60° \Rightarrow h = x\sqrt{6}$ (1).

Kẻ $AH \perp SB$ (2).

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (3).

Từ (2), $(3) \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}\left(A,(SBC)\right) = AH = a\sqrt{6}$.

Xét ΔSAB vuông tại A, đường cao AH ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow \dfrac{1}{6a^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{x^2}$ (4).

Từ (1), $(4) \Rightarrow h = a\sqrt{42}, x = a\sqrt{7}$.

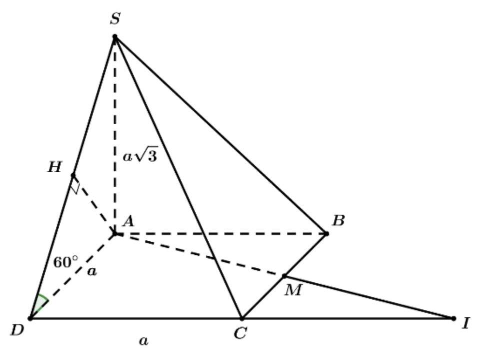
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{42}.\left(a\sqrt{7}\right)^2 = \dfrac{7\sqrt{42}}{3}a^3$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc bằng $60°$, M là trung điểm của BC. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi x là độ dài cạnh đáy $(x > 0)$.

Theo giả thiết, $(SCD);(ABCD) = 60° \Rightarrow SDA = 60° \Rightarrow SA = DA.\tan 60° = x\sqrt{3}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{3}$, mà $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ nên $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = a$.

$\Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.

Trong $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của AM và $DC \Rightarrow I = AM \cap (SCD)$.

$\Rightarrow \dfrac{d\left(M;(SCD)\right)}{d\left(A;(SCD)\right)} = \dfrac{IM}{IA} = \dfrac{MC}{AD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d\left(M;(SCD)\right) = \dfrac{1}{2}\cdot d\left(A;(SCD)\right)$ (1).

Trong (SAD), kẻ $AH \perp SD$. Dễ thấy $AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = d\left(A;(SCD)\right)$ (2).

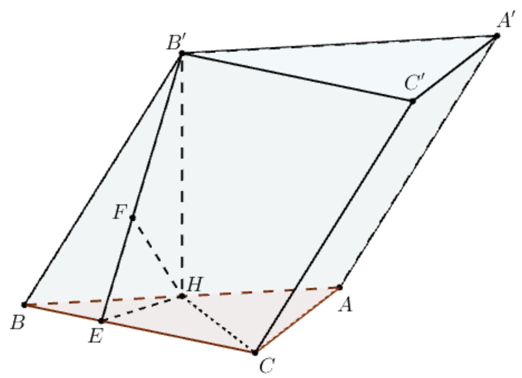
Mà ΔSAD vuông tại A nên $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}\Rightarrow AH=\frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\ (3)$.

Từ $(1),(2),(3)\Rightarrow d\left(M;(SCD)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 8: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng đáy trùng trung điểm H của cạnh AB, biết góc giữa $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $30°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải



Dựng $HE\perp BC$ tại E, $HF\perp B'E$ tại F.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp B'H\\BC\perp HE\end{cases}$ suy ra $BC\perp HF\Rightarrow HF\perp(B'BCC')$

$\Rightarrow\left(B'H;(BCC'B')\right)=HB'F=HB'E=30°$.

Ta có: $HE=HB\sin HBE=\frac{a}{2}\sin 60°=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

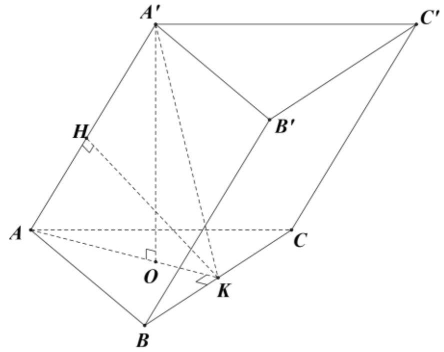
Khi đó $B'H=\frac{HE}{\tan 30°}=\frac{3a}{4}$.

Vậy $V=V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.B'H=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{4}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 9: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng đáy trùng trọng tâm tam giác ABC, biết khoảng cách giữa AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải



Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC và $K = AO \cap BC$.

Dựng $KH \perp AA'$ $\left(H \in AA'\right)$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(AA'K\right) \Rightarrow BC \perp HK$.

Khi đó: $d\left(AA';BC\right) = HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác AHK vuông tại H: $AH = \sqrt{AK^2 - HK^2} = \dfrac{3a}{4}$ và $\tan HAK = \dfrac{HK}{AH}$

Tam giác $A'AO$ vuông tại O: $\tan A'AO = \dfrac{A'O}{AO}$.

Suy ra $\dfrac{HK}{AH} = \dfrac{A'O}{AO} \Rightarrow A'O = \dfrac{a}{3}$.

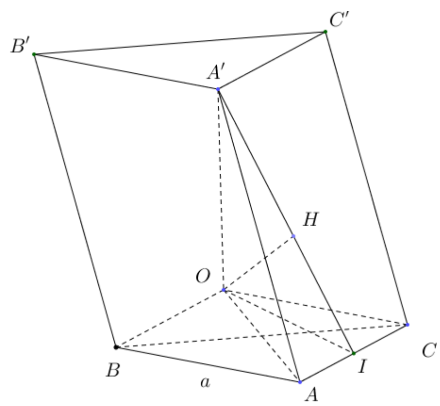
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'O.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$, có đáy là tam giác ABC cân tại A, $BAC = 120^\circ$, các cạnh bên hợp với đáy góc 45^o. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC), trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính thể tích của khối lặng trụ $ABCA'B'C'$, biết khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(AA'C'C)$ bằng $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, dễ thấy tứ giác $ABOC$ là hình thoi cạnh a

Gọi I là trung điểm của cạnh AC, vẽ $OH \perp A'C$ tại H

Ta có: $d\left(B;\left(AA'C'C\right)\right)=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ suy ra $OH=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

Vì góc giữa AA' và $\left(ABC\right)$ bằng 45^o nên tam giác $A'OA$ vuông cân tại O

Suy ra $A'O=AO=a$

Vì tam giác AOC đều cạnh a nên $OI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA'^2}+\dfrac{1}{OI^2}\Rightarrow a=1$

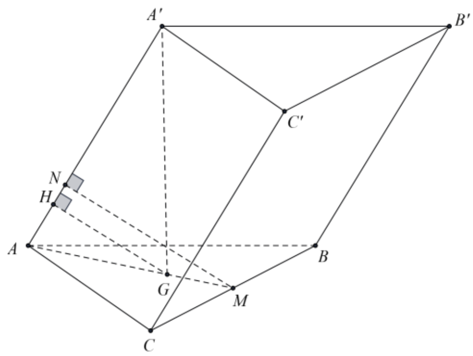
Vậy thể tích của khối lặng trụ $ABCA'B'C'$ là: $V_{ABCA'B'C'}=A'O.S_{\Delta ABC}=1.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Câu 11: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm của ΔABC, M là trung điểm của BC.

$\Rightarrow A'G\perp\left(ABC\right)$.

Trong $\left(AA'M\right)$ dựng $MN\perp AA'$, ta có: $\begin{cases}BC\perp AM\\BC\perp A'G\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(AA'G\right)\Rightarrow BC\perp MN$.

$\Rightarrow d\left(AA',BC\right)=MN=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi H là hình chiếu của G lên AA'.

Ta có: $GH\,//\,MN\Rightarrow\dfrac{GH}{MN}=\dfrac{AG}{AM}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow GH=\dfrac{2}{3}MN=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G, ta có:

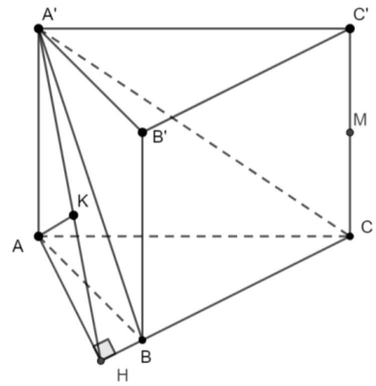
$$\frac{1}{GH^2}=\frac{1}{GA^2}+\frac{1}{GA'^2}\Rightarrow\frac{1}{GA'^2}=\frac{1}{GH^2}-\frac{1}{GA^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{27}{3a^2}.\Rightarrow GA'=\frac{a}{3}.$$

Vậy thể tích của khối lăng trụ là: $V=S_{ABC}.A'G=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 12: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác có $AB=a;AC=a\sqrt{3};BC=a$. Gọi M là trung điểm CC' và khoảng cách từ M đến $(A'BC)$ bằng $\frac{a\sqrt{21}}{14}$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{3a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải



Ta có $d(M;(A'BC))=\frac{1}{2}d(A;(A'BC))$ nên $d(A;(A'BC))=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh BC.

Ta có: $\begin{cases}AH\perp BC\\AA'\perp BC\end{cases}\Rightarrow(AHA')\perp BC\Rightarrow(AHA')\perp(A'BC)$.

Dựng $AK\perp A'H\Rightarrow AK\perp(A'BC)$. Vậy $d(A;(A'BC))=AK=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Trong tam giác ABC có: $\cos ABC=\frac{a^2+a^2-3a^2}{2.a.a}=\frac{-1}{2}\Rightarrow ABC=120°$.

$s_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.BC.\sin120°=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow AH=\frac{2S}{BC}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

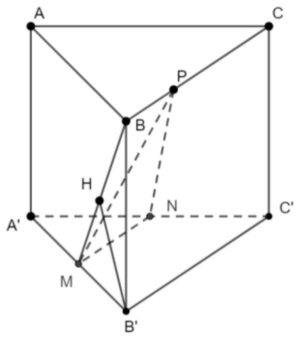
Trong tam giác vuông $A'AH$ có: $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{AA'^2}\Rightarrow\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{AK^2}-\frac{1}{AH^2}=1\Rightarrow AA'=1$.

Vậy $V=AA'.S_{\Delta ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 13: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông đỉnh B có $AB=a;BC=a\sqrt{2}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm $A'B'$ và $A'C'$, P thuộc cạnh BC sao cho $BP = \frac{1}{3}BC$. Biết khoảng cách từ điểm A đến (PMN) bằng $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, thể tích khối lăng trụ bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{2}$.

Lời giải



Ta có $MN \parallel BC$ nên M, N, B, P đồng phẳng.

$\Rightarrow \frac{d\left(A;(PMN)\right)}{d\left(A';(PMN)\right)} = \frac{AB}{A'M} = 2 \Rightarrow d\left(B';(PMN)\right) = \frac{1}{2}d\left(A;(PMN)\right) = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Ta có: $\begin{cases} B'M \perp MN \\ BB' \perp MN \end{cases} \Rightarrow (BB'M) \perp MN \Rightarrow (BB'M) \perp (PMN)$.

Gọi H là hình chiếu của B' trên cạnh BM.

$\Rightarrow B'H \perp (PMN)$.

$\Rightarrow d\left(B';(PMN)\right) = B'H = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $BB'M$ ta có:

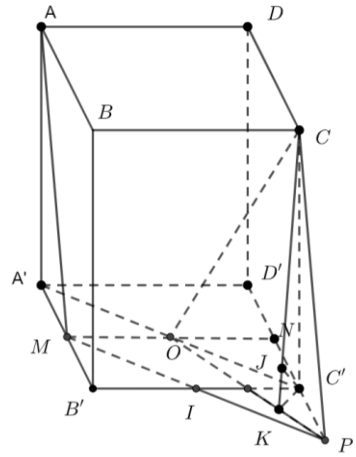
$\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'M^2} + \frac{1}{BB'^2} \Rightarrow B'B = a\sqrt{2}$.

Vậy $V = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2} = a^3$.

Câu 14: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, cạnh bên có độ dài bằng $2a$. Gọi M, O lần lượt là trung điểm $A'B'$ và $A'C'$. Biết khoảng cách giữa AM và CO bằng $\frac{4a}{9}$. Thể tích khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ bằng

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $2a^3$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi N, I lần lượt là trung điểm $D'C'$ và $B'C'$.

Gọi P đối xứng M qua I, khi đó $AMPC$ là hình bình hành $\Rightarrow AM // (COP)$.

$$\Rightarrow d(AM;OC) = d(AM;(COP)) = d(M;(COP)) = d(N;(COP)) = 2d(C';(COP)) = \frac{4a}{9}$$

$$\Rightarrow d(C';(COP)) = \frac{2a}{9}.$$

Gọi K là hình chiếu của C' trên cạnh OP, gọi J là hình chiếu của C' trên CK

$\Rightarrow d(C';(COP)) = C'K$.

Gọi độ dài cạnh đáy bằng x. Ta có: $S_{C'OP} = \frac{1}{2}S_{NOP} = \frac{1}{2}.x.\frac{x}{2} = \frac{x^2}{4}$; $OP = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$.

$$\Rightarrow C'K = \frac{2S_{C'OP}}{OP} = \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x\sqrt{5}}{2}} = \frac{x\sqrt{5}}{5}.$$

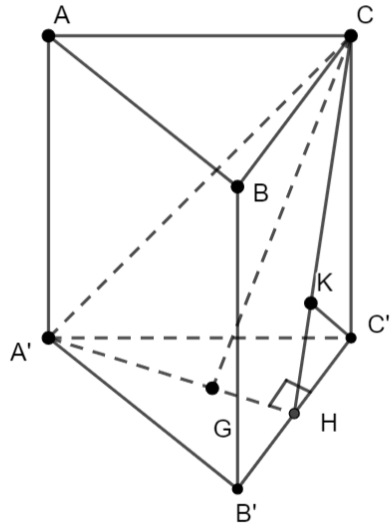
Trong tam giác $CC'K$ có: $\frac{1}{C'J^2} = \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{C'K^2} \Leftrightarrow \frac{81}{4a^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{C'K^2} \Rightarrow C'K = \frac{a\sqrt{5}}{10}$.

$\Rightarrow \frac{x\sqrt{5}}{5} = \frac{a\sqrt{5}}{10} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$. Vậy $V = 2a.\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{2}$

Câu 15: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có CA' tạo với $(BCC'B')$ một góc $45°$. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$, khoảng cách từ C' đến $(CA'G)$ bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích lăng trụ?

A. $9a^3\sqrt{2}$. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $3a^3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Gọi độ dài cạnh đáy là x. Gọi H là trung điểm cạnh $B'C'$, suy ra $A'H=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases}(BCC'B')\perp(A'B'C')\\ A'H\perp B'C'\end{cases}$ nên $A'H\perp(BCC'B')$.

Vậy $\left(CA';(BCC'B')\right)=\left(CA';CH\right)=A'CH=45^\circ$.

Vì $A'H\perp(BCC'B')$ nên $A'H\perp CH\Rightarrow A'H=CH=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam gác $CC'H$ có: $CC'=\sqrt{\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{4}}=\frac{x\sqrt{2}}{2}$

Gọi K là hình chiếu của C' trên CH.

$\Rightarrow C'K\perp(CA'H)\Rightarrow d\left(C';(CA'H)\right)=C'K=a\sqrt{2}$.

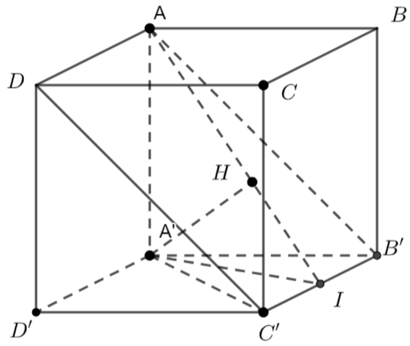
Ta có: $\frac{1}{C'K^2}=\frac{1}{C'H^2}+\frac{1}{C'C^2}\Leftrightarrow\frac{1}{2a^2}=\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^2}\Leftrightarrow x=2a\sqrt{3}$

$\Rightarrow CC'=\frac{2a\sqrt{3}.\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{6}$. Vậy $V=\frac{\left(2a\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{6}=9a^3\sqrt{2}$.

Câu 16: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi có $DAB=120^\circ$. Biết $(AB'C'D)$ tạo với đáy một góc 60° và khoảng cách từ điểm C đến $(AB'C')$ bằng $a\sqrt{3}$. Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$?

A. $48\sqrt{3}a^3$. **B.** $16\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{32\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $24\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm $B'C'$. Gọi độ dài cạnh đáy bằng $x\left(x>0\right)\Rightarrow A'I=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\left(AA'I\right)\perp B'C\Rightarrow\left(\left(AB'C'D\right);\left(A'B'C'D'\right)\right)=AIA'=60°\Rightarrow AA'=\frac{3x}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của A' trên cạnh AI.

$\Rightarrow A'H\perp\left(AB'C'D\right)$. Măt khác $d\left(C;\left(AB'C'D\right)\right)=d\left(A';\left(AB'C'D\right)\right)$.

Vậy $d\left(A';\left(AB'C'D\right)\right)=A'H=a\sqrt{3}$.

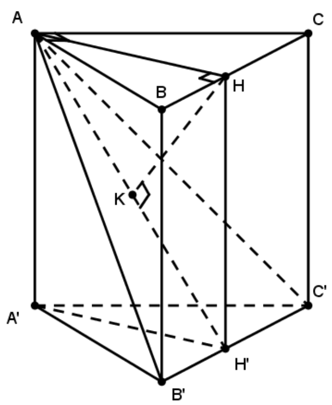
Trong tam giác $AA'I$ có: $\frac{1}{A'H^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{A'I^2}\Leftrightarrow\frac{1}{3a^2}=\frac{4}{9x^2}+\frac{4}{3x^2}\Leftrightarrow x=\frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V=4a.\left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{32\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 17: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC=a$, diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Biết khoảng cách đường thẳng BC và mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A trên BC, H' là hình chiếu của H trên $B'C'$, K là hình chiếu của H trên AH'.

Tam giác vuông ABC có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ và $BC=a$ nên ta có $AH=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp HH' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AHH') \Rightarrow BC \perp HK \Rightarrow B'C' \perp HK$$

$$\begin{cases} HK \perp AH' \\ HK \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow HK \perp (AB'C') \Rightarrow HK = d\left(BC,(AB'C')\right) = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

Tam giác AHH' vuông tại H và HK là đường cao của nó nên ta có

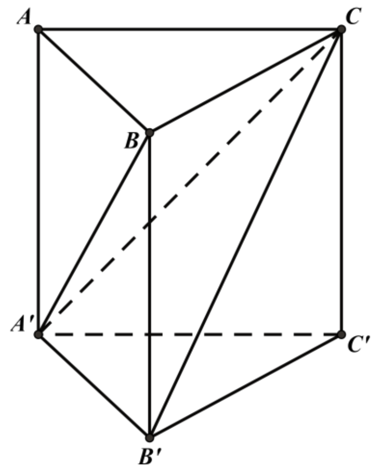
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{HH'^2} \Rightarrow \frac{1}{HH'^2} = \frac{1}{HK^2} - \frac{1}{AH^2} = \frac{25}{3a^2} - \frac{16}{3a^2} = \frac{9}{3a^2} \Rightarrow HH' = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.HH' = \frac{a^3}{8}.$$

Câu 18: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $ACB = 30°$. Biết góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = a^3\sqrt{6}$. **B.** $V = \frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V = a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có: $CC'//(AA'B'B)$ mà $A'B \subset (AA'B'B)$

Nên $d(CC';A'B) = d\left(CC';(AA'B'B)\right) = C'A' = a\sqrt{3}$

$A'C' = a\sqrt{3}, A'B' = a$

$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$A'B' \perp (ACC'A')$

Góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ là $B'CA' = \alpha$

$\sin\alpha = \frac{A'B'}{B'C} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow B'C = 2a\sqrt{5}$

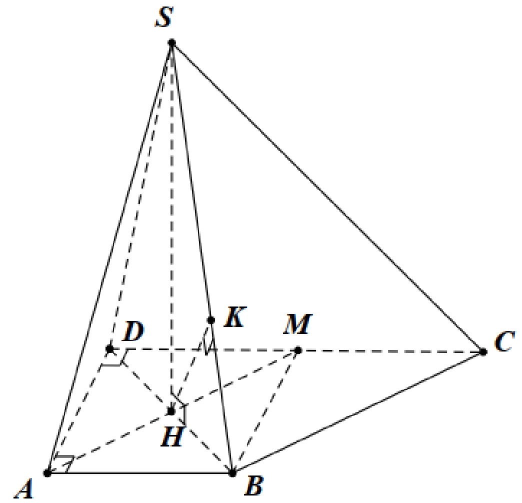
$CC' = \sqrt{B'C^2 - B'C'^2} = \sqrt{20a^2 - 4a^2} = 4a$

Thể tích lăng trụ là $V = B.h$ với $h = CC'$ $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.4a = 2a^3\sqrt{3}.$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt $(ABCD)$ trùng với trung điểm của BD. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD. Ta có tứ giác $ABMD$ là hình vuông. Gọi H là trung điểm của BD. Ta có H cũng là trung điểm của AM và $BD \perp AM$ (1).

Vì $MC = MD = MB = \dfrac{CD}{2} = a$ nên ΔBDC vuông tại B. Do đó $BD \perp BC$ (2).

$(1),(2) \Rightarrow AM // BC \Rightarrow AM // (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(H,(SBC))$.

Dựng $HK \perp SB$ (3)

Ta có: $\begin{cases} SH \perp BC & (do\ SH \perp (ABCD)) \\ DB \perp BC & (do\ (2)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBD) \Rightarrow BC \perp HK\ (4)$

Từ (3) và (4) suy ra: $HK \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(H,(SBC)) = HK$

Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SH \Leftrightarrow \dfrac{a^3}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{(a+2a)a}{2}.SH \Leftrightarrow SH = a\sqrt{2}$

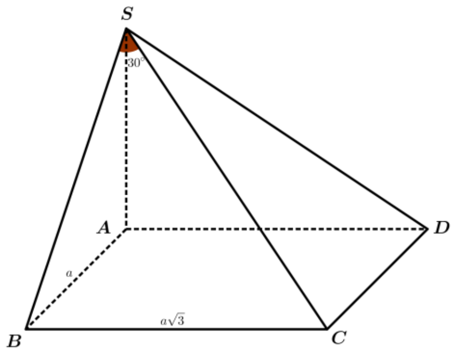
Xét ΔSHB vuông tại H, có đường cao HK:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $V=\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $V=\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải



Khối chóp $S.ABCD$ có diện tích đáy là: $S_{ABCD}=AB.BC=a^2\sqrt{3}$.

Ta có: $\begin{cases} CB\perp AB \\ CB\perp SA\left(\text{V×}\ SA\perp\left(ABCD\right)\right)\end{cases}$

$\Rightarrow CB\perp\left(SAB\right)$ tại B.

Mà $SC\cap\left(SAB\right)=S$ nên SB là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $\left(SAB\right)$.

Vì $CB\perp\left(SAB\right)$ nên $CB\perp SB$. Do đó tam giác SBC vuông tại B, góc CSB là góc nhọn.

$\Rightarrow\left(SC,\left(SAB\right)\right)=\left(SC,SB\right)=CSB=30^\circ$.

Xét tam giác SBC vuông tại B có $SB=\dfrac{BC}{\tan CSB}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\tan 30^\circ}=3a$.

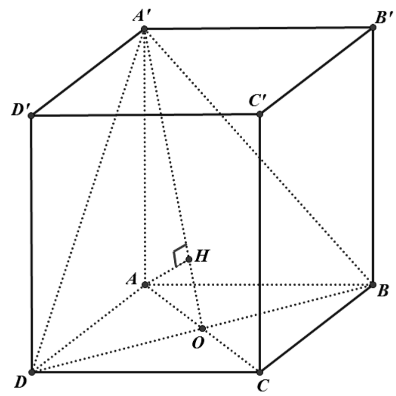
Xét tam giác SAB vuông tại A có $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\sqrt{9a^2-a^2}=2a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\dfrac{1}{3}.a^2\sqrt{3}.2a\sqrt{2}=\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Câu 21: Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $2a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** a^3. **D.** $6a^3$.

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Kẻ $AH\perp A'O,\ \left(H\in A'O\right)$; (1)

$\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'AO) \Rightarrow BD \perp AH;\ (2)$

Từ (1) và (2), ta có $AH \perp (A'BD) \Rightarrow d(A,(A'BD)) = AH = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a$.

$AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}a$.

Xét tam giác $A'AO$ vuông tại A, ta có

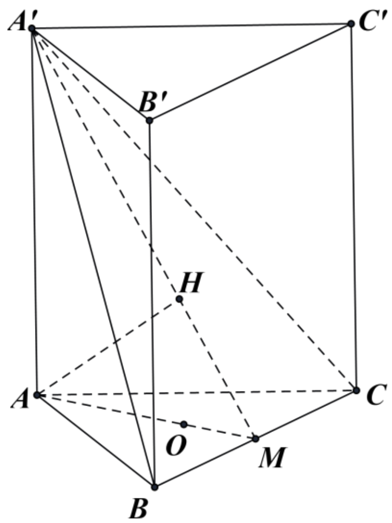
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}a\right)^2} - \frac{1}{\left(\sqrt{2}a\right)^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow A'A = \frac{a}{2}$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'A = (2a)^2\dfrac{a}{2} = 2a^3$.

Câu 22: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{6}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên $A'M$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp AH\ (1)$

Mà $AH \perp A'M\ (2)$

Từ (1) và (2) $AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A,(A'BC)) = AH$.

Ta có $\dfrac{d(O,(A'BC))}{d(A,(A'BC))} = \dfrac{MO}{MA} = \dfrac{1}{3}$ (do tính chất trọng tâm).

$\Rightarrow d(A,(A'BC)) = 3d(O,(A'BC)) = \dfrac{a}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{2}$.

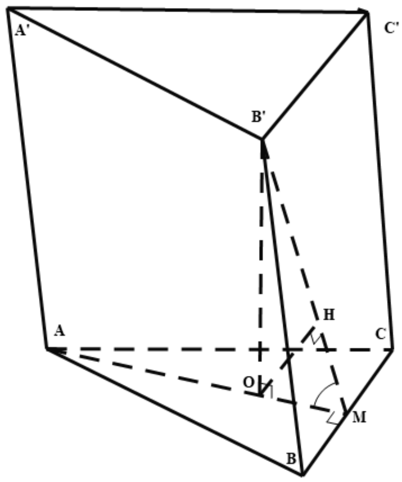
Xét tam giác vuông $A'AM$: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{4}{3a^2} \Leftrightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

Câu 23: **2.** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC, góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và $(BCC'B')$ bằng $60°$,. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $8a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{8a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $8a^3\sqrt{6}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, O là trọng tâm tam giác ABC, H là hình chiếu vuông góc của O lên $B'M$. Giả sử cạnh đáy bằng x.

Ta có $B'O \perp (ABC)$ và $\left((A'B'C'),(BCC'B')\right) = \left((ABC),(BCC'B')\right) = B'MO = 60^0$.

$d(A'A, B'C') = d(A'A,(B'C'CB)) = d(A,(B'C'CB)) = 3d(O,(B'C'CB)) = 3OH = 3a$

$\Rightarrow OH = a$.

Trong tam giác $B'OM$ có

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{B'O^2} + \dfrac{1}{OM^2}$, trong đó $\begin{cases} OM = \dfrac{x\sqrt{3}}{6} \\ B'O = OM.\tan 60° = \dfrac{x}{2} \end{cases}$.

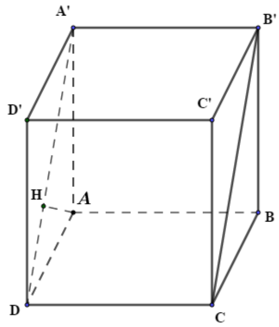
Suy ra $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{12}{x^2} \Rightarrow x = 4a$.

Thể tích khối lăng trụ $V = B'O.S_{ABC} = \dfrac{x}{2}.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 8a^3\sqrt{3}$.

Câu 24: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'B'CD)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích khối hộp theo a.

A. $V = a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{7}$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh $A'D$.

Ta có $\begin{cases} AH \perp A'D \\ AH \perp A'B' \end{cases}$

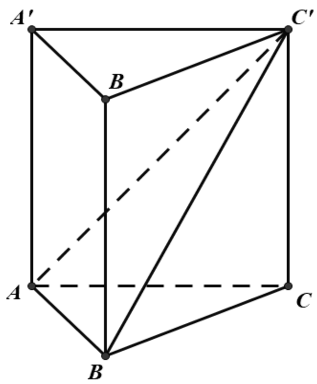
$\Rightarrow AH \perp (A'B'CD) \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác $AA'D$

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow AA'^2 = 3a^2 \Rightarrow AA' = a\sqrt{3}$.

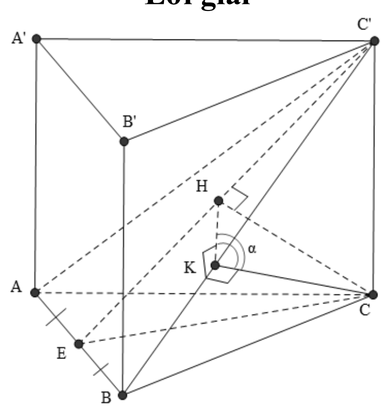
$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.AB.AD = a\sqrt{3}.a.a = a^3\sqrt{3}$.

Câu 25: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABCA'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa 2 mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ (tham khảo hình dưới đây). Thể tích V của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ bằng



A. $\dfrac{9a^3\sqrt{15}}{20}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\dfrac{9a^3\sqrt{15}}{10}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{15}}{10}$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của AB, gọi H là hình chiếu vuông góc hạ từ điểm C lên $C'E$.

Khi đó ta có: $AB \perp (C'CE) \Rightarrow AB \perp CH$ (1) và $CH \perp C'E$ (2)

Từ $(1),(2).\Rightarrow CH\perp(ABC')\Rightarrow d\left(C;(ABC')\right)=CH=a$

Kẻ $HK\perp BC'\Rightarrow BC'\perp(CHK)\Rightarrow BC'\perp CK$.

$\Rightarrow\left((ABC'),(BCC'B')\right)=CKH=\alpha$.

$\sin\alpha=\dfrac{CH}{CK}\Rightarrow CK=\dfrac{CH}{\sin\alpha}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$. Đặt $CB=x>0$. Ta có

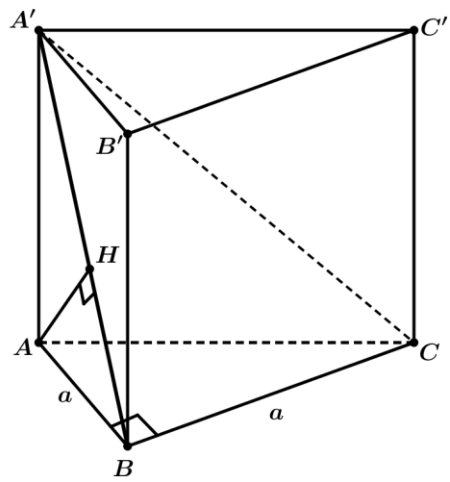
$\begin{cases}\dfrac{1}{CC'^2}=\dfrac{1}{CH^2}-\dfrac{1}{CE^2}\\ \dfrac{1}{CK^2}=\dfrac{1}{CB^2}+\dfrac{1}{CC'^2}\end{cases}\Rightarrow x=a\sqrt{3}\Rightarrow CC'=\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$; $S_{\Delta ABC}=\left(a\sqrt{3}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối chóp $ABCA'B'C'$ là: $V=CC'.S_{\Delta ABC}=\dfrac{9a^3\sqrt{15}}{20}$.

Câu 26: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$. Biết khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{2}$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải



Do ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$ nên $AB=AC=a$.

Gọi I là giao điểm của AC' và $A'C$, ta có

$\dfrac{d\left(A,(A'BC)\right)}{d\left(C',(A'BC)\right)}=\dfrac{IA}{IC'}=1\Rightarrow d\left(C',(A'BC)\right)=d\left(A,(A'BC)\right)=\dfrac{a}{2}$.

Kẻ $AH\perp A'B$, $H\in A'B$.

Vì $\left.\begin{matrix}BC\perp AB\\ BC\perp AA'\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(ABB'A')\Rightarrow BC\perp AH$.

Ta có $BC\perp AH,\ AH\perp A'B\Rightarrow AH\perp(A'BC)$. Do đó $d\left(A,(A'BC)\right)=AH=\dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác vuông $AA'B$ vuông tại A, ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{A'A^2}+\dfrac{1}{AB^2}\Rightarrow\dfrac{1}{A'A^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AB^2}$

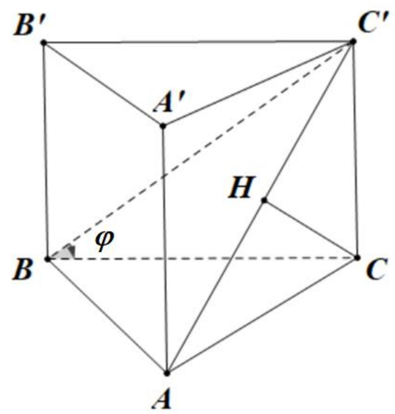
$\Rightarrow\dfrac{1}{A'A^2}=\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3}{a^2}\Rightarrow A'A=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 27: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A có $AC = a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng (ABC) bằng φ với $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$, khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC') bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Thể tích khối lẳng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{18}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{18}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Lời giải



Kẻ CH vuông góc với AC' tại H, ta có $CH \perp (ABC')$ (vì $AB \perp (ACC'A') \Rightarrow AB \perp CH$).

Ta có $d(A',(ABC')) = d(C,(ABC')) = CH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Tam giác vuông ACC' có CH là đường cao, có $\frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{CH^2} - \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow CC' = a\sqrt{3}$.

Mặt khác $CC' \perp (ABC)$ nên $(BC',(ABC)) = (BC',BC) = \varphi$.

Với $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{CC'}{BC'} \Rightarrow BC' = CC'.\frac{4}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{2}a$.

Xét tam giác vuông BCC' có $BC^2 = \sqrt{BC'^2 - CC'^2} = a\sqrt{5}$

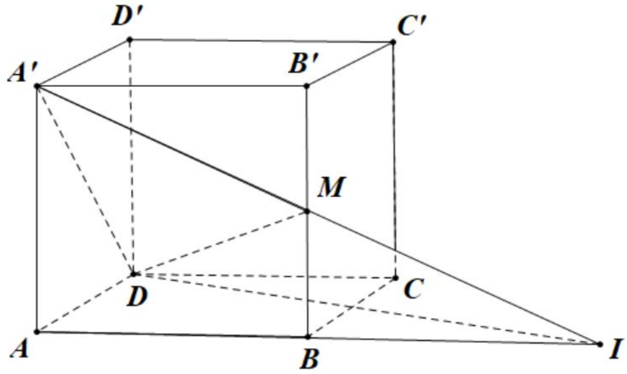
Xét tam giác vuông ABC có $AB^2 = \sqrt{BC^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$, có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

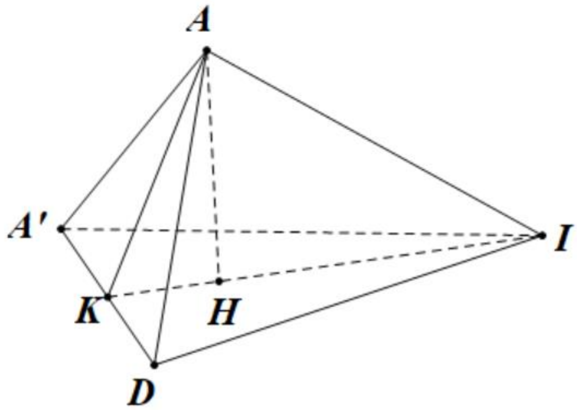
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{18}}{2}$.

Câu 28: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm cạnh BB'. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MDA') bằng $\frac{2a}{3}$. Thể tích khối lập phương đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** $8a^3$. **D.** a^3.

Lời giải





Gọi độ dài cạnh lập phương là x $(x>0)$. Gọi $I=AB\cap A'M$, do M là trung điểm của BB' và $BB'//AA'$ nên B là trung điểm của AI, suy ra $AI=2x$.

Ta có $d\left(A,\left(A'DM\right)\right)=d\left(A,\left(A'DI\right)\right)=AH$, với $AH\perp IK$ tại H, $A'D\perp IK$ tại K.

Vì tứ diện $AA'DI$ có AA', AD, AI đôi một vuông góc nên $AH\perp\left(A'DI\right)$.

Xét hai tam giác vuông AKI, $A'AD$ có đường cao lần lượt là AH, AK, khi đó

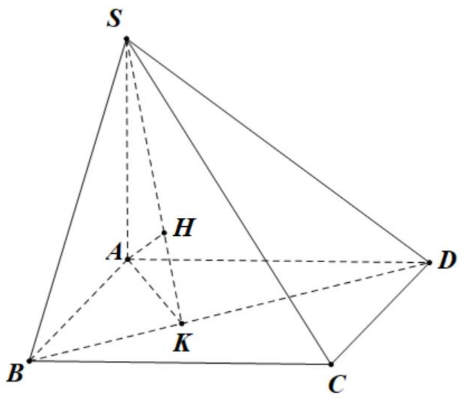
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AK^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{9}{4x^2}=\frac{9}{4a^2}\Rightarrow x=a.$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=a^3$.

Câu 29: Cho khối chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB=a$, đường chéo $BD=a\sqrt{5}$, có SA vuông góc với mặt đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{2a}{3}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



$ABCD$ là hình chữ nhật có $AD^2 = BD^2 - AB^2 = 5a^2 - a^2 = 4a^2 \Rightarrow AD = 2a$.

$S_{ABCD} = AB.AD = a.2a = 2a^2$.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BD và SK suy ra $AH \perp (SBD)$.

$d\left(A,(SBD)\right) = AH = \dfrac{2a}{3}$.

Xét tam giác vuông ABD có đường cao AK, ta có $AK = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{a.2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông SAK có đường cao AH, ta có

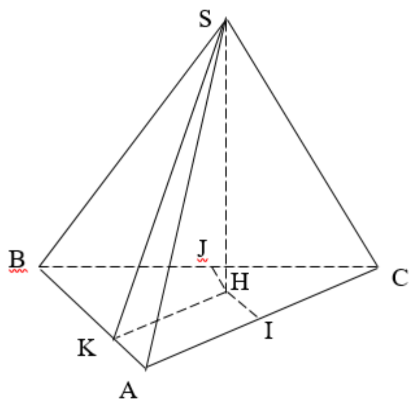
$\dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{9}{4a^2} - \dfrac{5}{4a^2} = \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow SA = a$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} a.2a^2 = \dfrac{2a^3}{3}$.

Câu 30: Cho khối chóp $SABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB = a, ACB = 30^0$. Các mặt bên tạo với đáy những góc bằng nhau và bằng 60^0. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)a^3}{12}$. **B.** $\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)a^3}{6}$. **D.** $\left(\sqrt{3}-1\right)a^3$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của S lên đáy, I, J, K là hình chiếu của S lên AC, CB, BA.

Dễ dàng chứng minh được góc giữa các mặt bên và đáy là các góc SIH, SJH, SKH và các tam giác vuông SHI, SHJ, SHK bằng nhau, nên $HI = HJ = HK$. Do đó H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Ta có: $AC = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}; BC = 2a$. Nên diện tích và nửa chu vi của tam giác ABC lần lượt là: $S = \dfrac{1}{2} AB.AC = \dfrac{a^2.\sqrt{3}}{2}$; $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)a}{2}$

Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC là: $r = HK = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)a}{2}$.

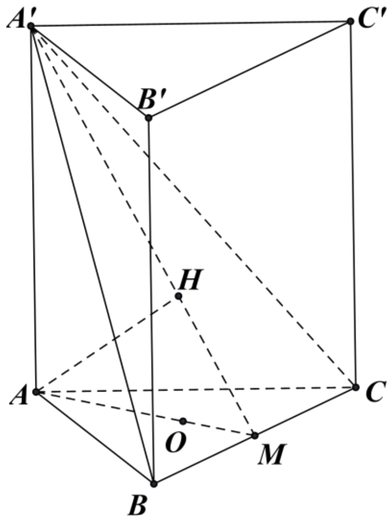
Đường cao của khối chóp $SABC$ là $SH = HK.\tan 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)a}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp đã cho là: $V = \dfrac{1}{3} dt_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2.\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)a}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)a^3}{4}$

Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng $\frac{a}{3}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên $A'M$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp \left(AA'M\right) \Rightarrow BC \perp AH$ (1)

Mà $AH \perp A'M$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp \left(A'BC\right) \Rightarrow d\left(A,\left(A'BC\right)\right) = AH$.

Ta có $\frac{d\left(O,\left(A'BC\right)\right)}{d\left(A,\left(A'BC\right)\right)} = \frac{MO}{MA} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow d\left(A,\left(A'BC\right)\right) = 3d\left(O,\left(A'BC\right)\right) = a \Leftrightarrow AH = a$.

Vì tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ nên $AM = a\sqrt{3}$

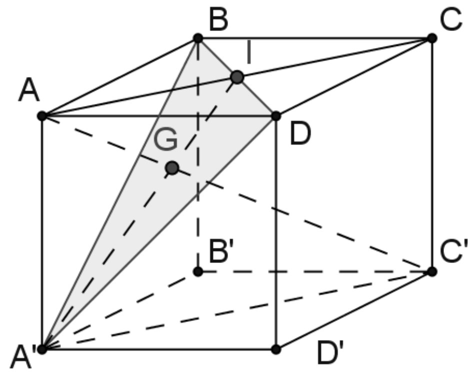
Xét tam giác vuông $A'AM$: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{3a^2} = \frac{2}{3a^2} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ bằng $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. Tính theo a thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V = 8a^3$. **B.** $V = 3\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = 8\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 6a^3$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$: AC' cắt $A'I$ tại G.

Do AI song song $A'C'$ và $AI = \dfrac{1}{2}AC'$ nên $IG = \dfrac{1}{2}GA'$.

Suy ra G là trọng tâm tam giác $A'BD$, mà tam giác $A'BD$ đều (các cạnh là các đường chéo của những hình vuông bằng nhau)

Vì vậy $GA' = GB = GD$ và $AA' = AB = AD$, suy ra $AG \perp (A'BD)$.

Do đó khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BD)$ là $C'G$.

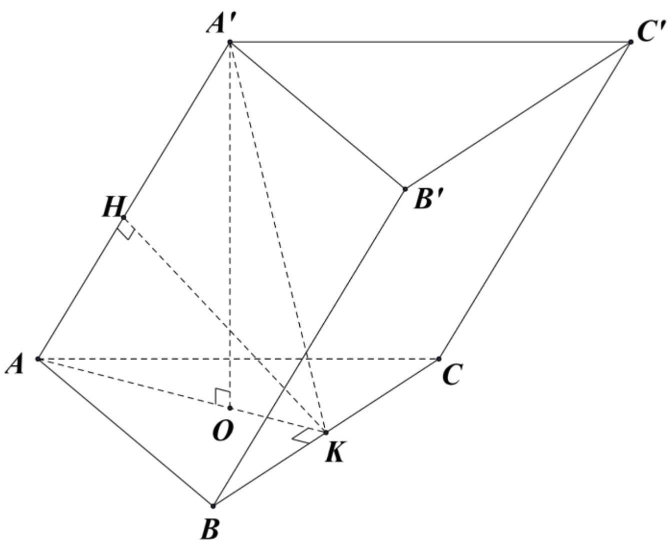
Mặt khác $C'G = \dfrac{2}{3}AC' = \dfrac{2}{3}AB\sqrt{3} = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AB = 2a$.

Vậy thể tích $V = 8a^3$.

Câu 33: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa 2 đường AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC và $K = AO \cap BC$.

Dựng $KH \perp AA'$ $(H \in AA')$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp A'O \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(AA'K\right) \Rightarrow BC \perp HK$.

Khi đó: $d\left(AA', BC\right) = HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác AHK vuông tại H: $AH = \sqrt{AK^2 - HK^2} = \dfrac{3a}{4}$ và $\tan HAK = \dfrac{HK}{AH}$.

Tam giác $A'AO$ vuông tại O: $\tan A'AO = \dfrac{A'O}{AO}$.

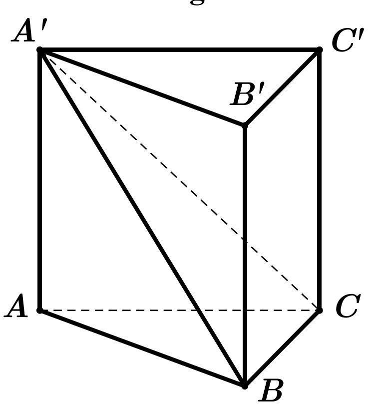
Suy ra $\dfrac{HK}{AH} = \dfrac{A'O}{AO} \Rightarrow A'O = \dfrac{a}{3}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'O.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 34: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông và $A'BC$ là tam giác đều. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}a^3$. **B.** $\dfrac{14\sqrt{21}}{27}a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $\dfrac{28\sqrt{7}}{27}a^3$.

Lời giải



Do tam giác $A'BC$ là tam giác đều nên tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A.

Đặt: $AB = AC = x \Rightarrow BC = x\sqrt{2} \Rightarrow A'C = A'B = BC = x\sqrt{2}$.

Ta có: $d\left(C', \left(A'BC\right)\right) = d\left(A, \left(A'BC\right)\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Mặt khác: $\dfrac{1}{3}d\left(A, \left(A'BC\right)\right).S_{A'BC} = \dfrac{1}{3}AA'.S_{ABC} \Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a.\dfrac{\left(x\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = AA'.\dfrac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow AA' = 2a$.

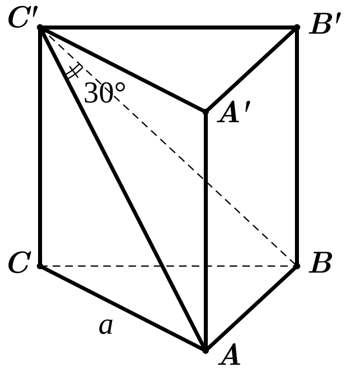
$AA'^2 + AB^2 = A'B^2 \Leftrightarrow 4a^2 + x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = 2a$.

Vậy $V = 2a.\dfrac{1}{2}.\left(2a\right)^2 = 4a^3$.

Câu 35: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{1}{8}a^3$. **B.** $\dfrac{3}{8}a^3$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Lời giải



Ta có: $\left.\begin{matrix} AB\perp AC \\ A'A\perp AB \end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\perp\left(A'C'CA\right)$.

Mặt khác: A là hình chiếu của B lên $\left(A'C'CA\right)\Rightarrow\left(BC',\left(A'C'CA\right)\right)=AC'B=30^\circ$

$\Rightarrow \tan AC'B=\dfrac{AB}{AC'}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow AC'=\sqrt{3}a$

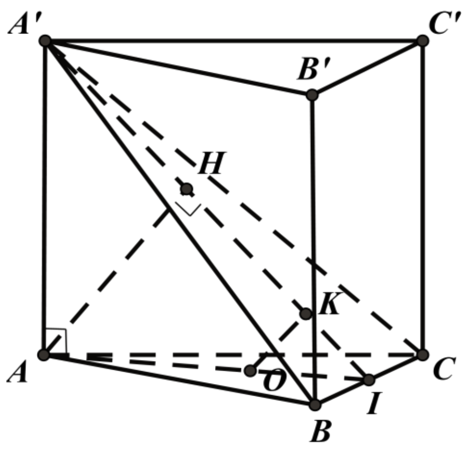
$\Rightarrow AA'=\sqrt{AC'^2-A'C'^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}$

$\Rightarrow V=AA'.S_{ABC}=a\sqrt{2}.\dfrac{1}{2}.a^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng $\dfrac{a}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải



Do tam giác ABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'I$, K là hình chiếu vuông góc của O lên $A'I$.

Diện tích đáy là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$, $AI=2a\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Ta có $AH\perp\left(A'BC\right)\Rightarrow d\left(A;\left(A'BC\right)\right)=AH$ và $OK\perp\left(A'BC\right)\Rightarrow d\left(O;\left(A'BC\right)\right)=OK$.

Do đó $\dfrac{d\left(O;\left(A'BC\right)\right)}{d\left(A;\left(A'BC\right)\right)}=\dfrac{OK}{AH}=\dfrac{OI}{AI}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow d\left(O;\left(A'BC\right)\right)=\dfrac{d\left(A;\left(A'BC\right)\right)}{3}=\dfrac{AH}{3}=\dfrac{a}{3}\Rightarrow AH=a.$

Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A ta có:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AI^2}\Rightarrow\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AI^2}\Rightarrow\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2}{3a^2}.$$

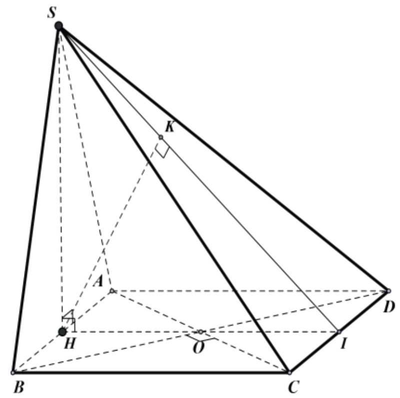
$$\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a^2\sqrt{3}=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 37: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông; mặt bên $\left(SAB\right)$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ bằng $\dfrac{3\sqrt{7}a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{2}$.

Lời giải



Ta có $d\left(B,\left(SCD\right)\right)=d\left(H,\left(SCD\right)\right)=HK$ với $HK\perp SI$, I là trung điểm của CD.

Gọi x là cạnh hình vuông $ABCD$ với $x=AB$.

Ta có phương trình :

$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\left(x\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{49}{9.7a^2}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{4}{3x^2}=\frac{7}{9a^2},$$

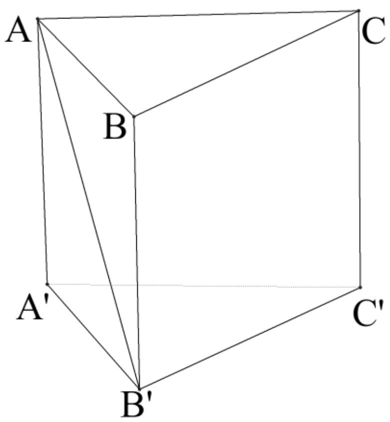
$$\Leftrightarrow\frac{7}{3x^2}=\frac{7}{9a^2}\Leftrightarrow x^2=3a^2$$

Suy ra $x=a\sqrt{3}\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}.x^2.\dfrac{x\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}a^3$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông. Biết khoảng cách giữa AB' và CC' bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{2}a^3$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **D.** a^3.

Lời giải



Tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow AC \perp AB$ (1).

$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AC$ (2).

Từ (1),(2), suy ra $AC \perp (ABB'A') \Rightarrow d(C,(ABB'A')) = AC$.

Mặt khác $CC'//(ABB'A') \Rightarrow d(AB',CC') = d(CC',(ABB'A')) = d(C,(ABB'A')) = AC$.

$\Rightarrow AB = AC = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AA' = BB' = a\sqrt{2}$.

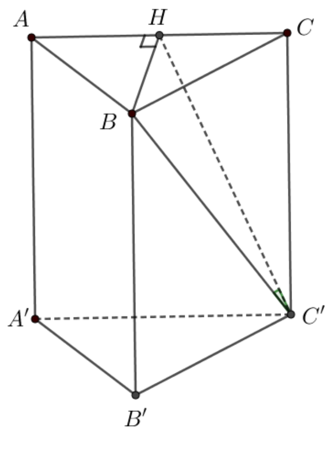
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{2}.\dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 39: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ góc α thỏa mãn $\cot\alpha = 2$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}a^3\sqrt{11}$. **B.** $\dfrac{1}{9}a^3\sqrt{11}$. **C.** $\dfrac{1}{3}a^3\sqrt{11}$. **D.** $\dfrac{2}{3}a^3\sqrt{11}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm cạnh AC.

Do tam giác ABC đều nên $BH \perp AC$ và $BH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a$.

Ta có: $BH \perp AC$, $BH \perp AA'$ (do $AA' \perp (ABC)$) suy ra $BH \perp (ACC'A')$.

Do đó: $(BC',(ACC'A')) = (BC',HC') = BC'H = \alpha$.

Xét tam giác vuông HBC': $\cot\alpha = \dfrac{C'H}{BH} \Rightarrow C'H = BH.\cot\alpha = 2a$.

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông CHC':

$$CC' = \sqrt{C'H^2 - CH^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$$

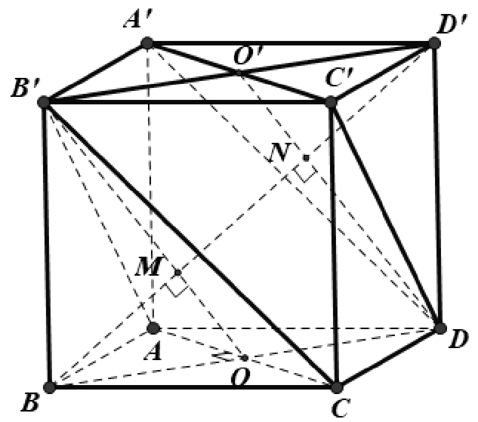
Thể tích khối lăng trụ:

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.CC' = \frac{1}{2}.BH.AC.CC' = \frac{1}{2}.a.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{33}}{3} = \frac{1}{3}a^3\sqrt{11}.$$

Câu 40: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'D$ và $B'C$ là a. Khi đó thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $9\sqrt{3}a^3$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** $9a^3$. **D.** $18a^3$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD; O' = A'C' \cap B'D'; M = B'O \cap BD'; N = DO' \cap BD'$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} B'C \perp (BC'D'A) \Rightarrow B'C \perp BD' \\ AC \perp (BB'D'D) \Rightarrow AC \perp BD' \end{array}\right\} \Rightarrow BD' \perp (ACB') \text{ taïi M} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{maø } (B'AC)//(A'C'D) \end{array}\right\} \Rightarrow BD' \perp (A'C'D) \text{ taïi N}$$

Ta lại có:

$$\left.\begin{array}{l} B'C \subset (B'AC) \\ C'D \subset (A'C'D) \\ (B'AC)//(A'C'D) \end{array}\right\} \Rightarrow d(B'C, C'D) = d\left((B'AC),(A'C'D)\right) = MN = a \Rightarrow BD' = 3MN = 3a$$

Gọi x là độ dài cạnh hình lập phương

$$DD'^2 + BD^2 = BD'^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(\sqrt{2}x\right)^2 = (3a)^2 \Leftrightarrow x^2 = 3a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{3} \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 3\sqrt{3}a^3$$

DẠNG 10 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

Định lý: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, không âm trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x=a,x=b$ là: $S=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$.

- **Bài toán 1:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$ được xác định: $S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$.
- **Bài toán 2:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và hai đường thẳng $x=a,x=b$ được xác định: $S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx$.
- **Bài toán 4:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị $\left(C_1\right):f_1\left(x\right),\left(C_2\right):f_2\left(x\right)$ là: $S=\int\limits_{x_1}^{x_n}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx$, trong đó x_1,x_n tương ứng là nghiệm nhỏ nhất của phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$.

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 44 – Đề tham khảo 2023. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3+4x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

✍ Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)+x.f'(x)=4x^3+4x+2\Leftrightarrow(x)'\cdot f(x)+x.f'(x)=4x^3+4x+2$

$\Leftrightarrow[x.f(x)]'=4x^3+4x+2\Leftrightarrow x.f(x)=x^4+2x^2+2x+C\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^4+2x^2+2x+C}{x}$

Vì do $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C=0$. Do đó $f(x)=x^3+2x+2\Rightarrow f'(x)=3x^2+2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$ và $y=f'(x)$, ta có:

$$x^3+2x+2=3x^2+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right..$$

Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ là:

$$S=\int\limits_0^2\left|f(x)-f'(x)\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=0$ và $f'(0)\neq 0$ thỏa mãn biểu thức $3f(x)-f'(x)\left(2f(x)-2x^2-3x\right)=18x^2-4xf(x)$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $g(x)=x^2.f'(x)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3-8x-4,\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{125}{2}$. **B.** $\frac{40}{3}$. **C.** $\frac{131}{4}$. **D.** $\frac{10}{4}$.

Câu 3: Biết hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên nửa khoảng $(0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$ và $2f(x)+x.f'(x)=\sqrt{\frac{f(x)}{x}}$ với mọi $x\in(0;1]$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=5-4x$ gần giá trị nào nhất sau đây?

A. $0,58$. **B.** $0,49$. **C.** $1,22$. **D.** $0,97$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $\sqrt{x}.f'(x)-\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)=x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$. Biết $f(1)=-1,$ tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm liên tục có tích phân trên $[0;2]$ thỏa điều kiện $f(x^2)=6x^4+\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=6x-12$

A. 30. **B.** 27. **C.** 24. **D.** 22.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành. Hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $(y')^2+y''.y=-4$ và $f(0)=1;\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành gần nhất với số nào dưới đây?

A. $0,98$. **B.** $0,88$. **C.** $0,78$. **D.** $0,68$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $[0;2]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(1)\neq\frac{1}{2}, f(x)\neq 0$ với $\forall x\neq 1$, $(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)$ với $\forall x\in[0;2]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=x^2-1$ bằng

A. $S=\frac{5}{6}$. **B.** $S=\frac{1}{6}$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

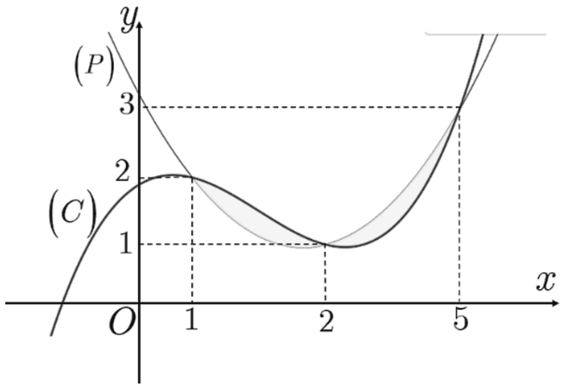
Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2xf(x) + x^2 f'(x) = \frac{3}{2}x^5 + \frac{5}{2}x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = x^4 + bx^2 + c\,(b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong (C) và đường thẳng $(d): y = g(x)$ tiếp xúc với (C) tại điểm $x_0 = 1$. Biết (d) và (C) còn hai điểm chung khác có hoành độ là $x_1, x_2\,(x_1 < x_2)$ và $\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{g(x) - f(x)}{(x-1)^2}dx = \frac{4}{3}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và đường thẳng (d).

A. $\frac{29}{5}$. **B.** $\frac{28}{5}$. **C.** $\frac{143}{5}$ **D.** $\frac{43}{5}$.

Câu 10: Cho đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $(P): y = mx^2 + nx + p$ có đồ thị như hình vẽ (*Đồ thị (C) là nét có đường cong đậm hơn*). Biết phần hình phẳng được giới hạn bởi (C) và (P) (phần tô đậm) có diện tích bằng 2. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay phần hình phẳng quanh trục hoành có giá trị gần với số nào nhất?



A. 12.53. **B.** 9.34. **C.** 10.23. **D.** 11.74.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2xf(x) + x^2 f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 4x, \forall x \in \mathbb{R}$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $[0; +\infty)$ và thỏa mãn điều kiện $2x^2 + [8 - f'(x)]x + [f(x) - 2f'(x) + 8] = 0$, $\forall x \in [0; +\infty)$ và $f(1) = 0$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = f(x)$ và $y = x^2 + 8x - 4$ bằng:

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $-xf'(x)\ln x + f(x) = 2x^2 f^2(x), \forall x \in (1; +\infty)$, $f(x) > 0, \forall x \in (1; +\infty)$ và $f(e) = \frac{1}{e^2}$. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = xf(x), y = 0, x = e, x = e^2$.

A. $S = \frac{3}{2}$. **B.** $S = \frac{5}{2}$. **C.** $S = \frac{7}{3}$. **D.** $S = \frac{5}{4}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(x)<0\,\forall x\in(-1,+\infty)$, $f'(0)=-1$ và $\left[f'(x)\right]^2=f''(x)$, $f(3)=-\ln 4$. Khi đó diện tích giới hạn bởi đồ thị $(C): y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2, x=3$ bằng bao nhiêu?

A. $8\ln 2-\ln 3-1$. **B.** $8\ln 2-3\ln 3-1$.
C. $4\ln 2-3\ln 3-1$. **D.** $8\ln 2+3\ln 3-1$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa $f(x)+f'(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+5x}{\left(x^2-x+1\right)^2}$; $f(1)-f(0)=2$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y=f(x)$, trục tung và trục hoành có dạng $S=\ln a-\ln b$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=14$. **B.** $T=25$. **C.** $T=36$. **D.** $T=43$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai, liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f'(x)-2f(x).f'(x)+2xf'(x)+(x+1)^2 f''(x)=0, \forall x\in[0;1], f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1.$ Biết tích phân $\int\limits_0^1\left[f^2(x)\right]dx=\dfrac{a}{b}$ (a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân só tối giản). Giá trị của $a+b$ bằng

A. 181. **B.** 25. **C.** 10. **D.** 26.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)-f(x)=-8+16x-4x^2$ và $f(0)=0$. Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox quay quanh Ox.

A. $\dfrac{256}{15}$. **B.** $\dfrac{256}{15}\pi$. **C.** $\dfrac{16}{3}\pi$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $x.f'(x)-2f(x)=4x-8$ và $f(2)=0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và trục Oy.

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{7}$

Câu 19: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+x.f'(x)+f'(x)=4x^3-6x^2-2x+4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$.

A. $S=8$. **B.** $S=4$. **C.** $S=8\pi$. **D.** $S=4\pi$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=4x^3+3x^2-xf'(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ có kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai bằng

A. $7,31$. **B.** $7,32$. **C.** $7,33$. **D.** $7,34$

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=0$; $\left[f'(x)\right]^2+8xf(x)=x^4-2x, \forall x\in[0;1]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox, Oy. Khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{7}$. **B.** $\frac{2\pi}{7}$. **C.** $\frac{3\pi}{7}$. **D.** $\frac{4\pi}{7}$

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=5x^4+6x+3, \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ thuộc khoảng

A. $(27;28)$. **B.** $(26;27)$. **C.** $(28;29)$. **D.** $(29;30)$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\cos xf'(x)-\sin xf(x)=2\cos 2x+2\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $x=0$ và $x=\frac{\pi}{2}$ bằng

A. $2-\pi$. **B.** $2+\pi$. **C.** $4-\pi$. **D.** $4+\pi$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 27.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thoả mãn $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$ và phương trình tiếp tuyến của tại điểm $y=f(x)$ có hoành độ $x=2$.

A. $\frac{2400}{12}$. **B.** $\frac{2401}{12}$. **C.** $\frac{333}{4}$. **D.** $\frac{335}{4}$.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thoả mãn $f(1)=3$ và $x(4-f'(x))=f(x)-1$ với mọi $x>0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$ và trục Ox, trục Oy và $x=1$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ thoả mãn $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}; f(2)=\frac{1}{5}$ và $f'(x)=-2x\left[f(x)\right]^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $x=0$ và $x=1$.

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3\pi}{4}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $-xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2f^2(x)$, $\forall x\in(1;+\infty)$, $f(x)>0$, $\forall x\in(1;+\infty)$ và $f(e)=\frac{1}{e^2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf(x)$, $y=0$, $x=e$, $x=e^2$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức $2x.f(x)+x^2.f'(x)=4x^3-12x^2+8x$. Tính thể tích vật tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và trục tung quanh trục Ox.

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{8\pi}{3}$. **C.** $\frac{32}{5}$. **D.** $\frac{32\pi}{5}$.

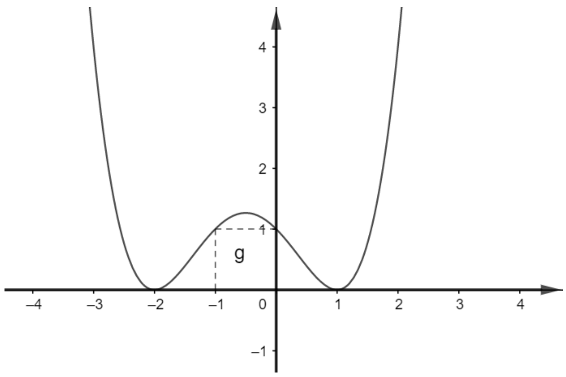
Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ dương, có đạo hàm liên tục trên $[-2;1]$, thỏa mãn hệ thức $f(x)=f'(x).\sqrt{x+3}$ và $f(1)=1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=-2, x=1$.

A. $\frac{3e^2-1}{2e^2}$. **B.** $\frac{3e^2+1}{2e^2}$. **C.** $\frac{3e^2+1}{e^2}$. **D.** $\frac{3e^2-1}{e^2}$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+12}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $\ln 2$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{107}{5}$. **C.** $\frac{127}{10}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thoã mãn $f(1)=3$ và $f^2(x)-8xf(x)-f'(x)=-16x^2-4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bới các đường $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1; x=2$.

A. $\ln 2-6$. **B.** $8-\ln 2$. **C.** $6-\ln 2$. **D.** $10-\ln 2$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)=x^3+\int_0^1(10u-4x)f(u)du$ có đồ thị (C). Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục tung, tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $S=108$ **B.** $S=12$. **C.** $S=180$. **D.** $S=112$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm xác định trên $[0;+\infty)$ và thoả mãn $x^2-x(f'(x)-2)+(f(x)-f'(x)+1)=0$, $\forall x\in[0;+\infty)$ và có $f(0)=0$. Diện tích hình phẳng gới hạn bởi hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{5\sqrt{5}}{6}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=(x-1)f'(x)+2x^3-3x^2+1$ và $f(2)=-6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)+2$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 22.

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1)=6$ và $xf'(x)=f(x)+3x^4-3x^2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{162}{5}$. **B.** $\frac{324}{5}$. **C.** $\frac{104}{5}$. **D.** $\frac{229}{10}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $f(0)=1$ và $f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=\sqrt{2}$ và trục Oy (trong miền $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}\pi-4}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi-1}{4}$. **C.** $\sqrt{2}-\pi$. **D.** $\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3-6x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{7}{12}$. **B.** $\frac{45}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{71}{6}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=5x^4+6x^2-4,\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=\frac{1}{4}xf'(x)$ bằng

A. $\frac{112}{15}$. **B.** $\frac{272}{15}$. **C.** $\frac{1088}{15}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ liên trục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=2x^3-9+\int_0^1 xf\left(\sqrt{1+15x^2}\right)dx$. Đồ thị hàm số $y=g(x)=ax^3+bx^2+cx-9$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $1;2;4$. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $f(x)$ và $g(x)$ có diện tích bằng:

A. $I = 2.$ **B.** $I = \frac{3}{2}.$ **C.** $I = \frac{37}{12}.$ **D.** $I = 1.$

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm $f(1) = 1$ và $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases}$ trên $(1; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $2\left[f'(x)\right]^2 = (x-1)^2.\left(4f(x) - \left[f'(x)\right]^2 + 4\right)$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ với các đường $x = 1; x = 2$ và Ox ?

A. $S = \frac{4}{3}.$ **B.** $S = \frac{8}{3}.$ **C.** $S = \frac{-4}{3}.$ **D.** $S = \frac{-8}{3}.$

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $x\left(f'(x) - x\right) = f(x) - 1, \forall x > 0$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$; $x = 1; x = 3$ và trục hoành bằng

A. $\frac{32}{2}.$ **B.** $\frac{20}{3}.$ **C.** $12.$ **D.** $\frac{32}{3}.$

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 4x\sqrt{x}$. Biết $f(1) = 1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $g(x) = f(x) - 2xf'(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = 1; x = 4$.

A. $\frac{14}{3}.$ **B.** $\frac{124}{5}.$ **C.** $\frac{62}{5}.$ **D.** $\frac{28}{3}.$

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 0$, đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-2; +\infty)$ và thỏa mãn $(x+2)f'(x) - 2f(x) = (x-2)(x+2)^3$ với mọi $x \in [-2; +\infty)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành bằng

A. $\frac{432}{5}.$ **B.** $\frac{448}{5}.$ **C.** $\frac{464}{5}.$ **D.** $\frac{446}{5}.$

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=0$ và $f'(0)\neq 0$ thỏa mãn biểu thức $3f(x)-f'(x)\left(2f(x)-2x^2-3x\right)=18x^2-4xf(x)$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $g(x)=x^2.f'(x)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3f(x)-f'(x)\left(2f(x)-2x^2-3x\right)=18x^2-4xf(x)$

$\Leftrightarrow 4xf(x)+3f(x)=f'(x)\left(2f(x)-2x^2-3x\right)+18x^2$

$\Leftrightarrow (4x+3)f(x)+f'(x)\left(2x^2+3x\right)=2f(x).f'(x)+18x^2$

$\Leftrightarrow \left[f(x)\left(2x^2+3x\right)\right]'=\left[f^2(x)\right]'+18x^2$

$\Leftrightarrow \int\left[f(x)\left(2x^2+3x\right)\right]'dx=\int\left[f^2(x)\right]'dx+\int 18x^2dx$

$\Leftrightarrow f(x)\left(2x^2+3x\right)=f^2(x)+6x^3+C\xrightarrow{f(0)=0}C=0$

$\Leftrightarrow f^2(x)-2x^2f(x)+6x^3-3xf(x)=0\Leftrightarrow f(x)\left(f(x)-2x^2\right)-3x\left(f(x)-2x^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(f(x)-2x^2\right)\left(f(x)-3x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2x^2 \\ f(x)=3x \end{array}\right.$. Do $f'(0)\neq 0\Rightarrow f(x)=3x$

Ta có: $f(x)=3x\Rightarrow f'(x)=3\Rightarrow g(x)=x^2f'(x)=x^2.3=3x^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là: $3x=3x^2\Leftrightarrow 3x^2-3x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là: $S=\left|\int_0^1\left(3x-3x^2\right)dx\right|=\frac{1}{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3-8x-4,\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{125}{2}$. **B.** $\frac{40}{3}$. **C.** $\frac{131}{4}$. **D.** $\frac{10}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)+x.f'(x)=4x^3-8x-4$ $,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow (x)'\cdot f(x)+x.f'(x)=4x^3-8x-4$ $,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow [x.f(x)]'=4x^3-8x-4$ $,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x.f(x)=x^4-4x^2-4x+C$ $,\forall x\in\mathbb{R}$.

Với $x=0\Rightarrow C=0$.

Suy ra $f(x)=x^3-4x-4 \Rightarrow f'(x)=3x^2-4$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$ và $y=f'(x)$, ta có:

$x^3-4x-4=3x^2-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=4 \end{array}\right.$. Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ là: $S=\int\limits_{-1}^{4}|f(x)-f'(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{4}\left|x^3-3x^2-4x\right|\mathrm{d}x=\dfrac{131}{4}$.

Câu 3: Biết hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên nửa khoảng $(0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$ và $2f(x)+x.f'(x)=\sqrt{\dfrac{f(x)}{x}}$ với mọi $x\in(0;1]$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=5-4x$ gần giá trị nào nhất sau đây?

A. $0,58$. **B.** $0,49$. **C.** $1,22$. **D.** $0,97$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$2f(x)+x.f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2.\sqrt{f(x)}+\frac{x.f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow (2x)'.\sqrt{f(x)}+2x.\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x.\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2x.\sqrt{f(x)}=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2x.\sqrt{f(x)}=2\sqrt{x}+C$$

Vì $f(1)=1 \Rightarrow 2.1.\sqrt{f(1)}=2\sqrt{1}+C \Rightarrow C=0$.

Do đó $2x.\sqrt{f(x)}=2\sqrt{x} \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=5-x$ là

$$\frac{1}{x}=5-4x \Leftrightarrow -4x^2+5x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{4} \\ x=1 \end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là

$$S=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\left|\frac{1}{x}-5+4x\right|dx=0,488.$$

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $\sqrt{x}.f'(x)-\dfrac{1}{\sqrt{x}}f(x)=x\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Biết $f(1)=-1$, tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có: $xf'(x)-f(x)=x^2-1 \Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=1-\dfrac{1}{x^2}$.

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=1-\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=\int\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)dx \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{1}{x}+C \quad (*)$

Mà $f(1)=-1$ nên từ $(*)$ có: $\dfrac{f(1)}{1}=1+\dfrac{1}{1}+C \Leftrightarrow -1=2+C \Leftrightarrow C=-3$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{1}{x}-3 \Rightarrow f(x)=x^2-3x+1 \Rightarrow f'(x)=2x-3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-3x+1=2x-3 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng bằng: $S=\int\limits_1^4 \left|x^2-5x+4\right|dx=\dfrac{9}{2}$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm liên tục có tích phân trên $[0;2]$ thỏa điều kiện $f(x^2)=6x^4+\int\limits_0^2 xf(x)\mathrm{d}x$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=6x-12$

A. 30. **B.** 27. **C.** 24. **D.** 22.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x^2)=6x^4+\int\limits_0^2 xf(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\int\limits_0^2 xf(x)\mathrm{d}x=a$.

Khi đó $f(x^2)=6x^4+a \Rightarrow f(x)=6x^2+a$.

Do đó $a=\int\limits_0^2 xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 x(6x^2+a)\mathrm{d}x \Leftrightarrow a=\left.\left(\dfrac{3}{2}x^4+\dfrac{ax^2}{2}\right)\right|_0^2 \Leftrightarrow a=24+2a \Leftrightarrow a=-24$.

Nên $f(x)=6x^2-24$.

Ta có $6x^2-24=6x-12 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy diện tích cần tìm là $S=\int\limits_{-1}^2 \left|6x^2-6x-12\right|dx=\left|\int\limits_{-1}^2 (6x^2-6x-12)dx\right|=27$

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành. Hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $(y')^2+y''.y=-4$ và $f(0)=1;\ f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành gần nhất với số nào dưới đây?

A. $0,98$. **B.** $0,88$. **C.** $0,78$. **D.** $0,68$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(f'(x)\right)^2+f''(x).f(x)=-4\Leftrightarrow\left(f'(x).f(x)\right)'=-4$

$\Leftrightarrow\int\left(f'(x).f(x)\right)'dx=\int-4dx\Leftrightarrow f'(x).f(x)=-4x+C$

$\Leftrightarrow\int f'(x).f(x)dx=\int(-4x+C)dx\Leftrightarrow\int f(x)d\left(f(x)\right)=-4\dfrac{x^2}{2}+C.x+B$

$\Leftrightarrow\dfrac{f^2(x)}{2}=-2x^2+C.x+B\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{-4x^2+2C.x+B}$.

Theo giả thiết $f(0)=1$ và $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ nên ta có

$$\begin{cases}\sqrt{B}=1\\ \sqrt{-\dfrac{1}{4}+\dfrac{C}{2}+B}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=1\\ C=1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\sqrt{-4x^2+2x+1}\quad(C)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành $\sqrt{-4x^2+2x+1}=0$.

$$\Leftrightarrow-4x^2+2x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\\ x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right..$$

Vì (C) luôn ở phía trên trục hoành nên $S=\displaystyle\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}\sqrt{-4x^2+2x+1}dx\approx0,98$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $[0;2]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(1)\neq\dfrac{1}{2}, f(x)\neq0$ với $\forall x\neq1$, $(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)$ với $\forall x\in[0;2]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=x^2-1$ bằng

A. $S=\dfrac{5}{6}$. **B.** $S=\dfrac{1}{6}$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết $(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)$ với $\forall x\in[0;2]$, cho $x=1$, ta có

$f(1)=2f(1).f'(1)\Leftrightarrow f(1).\left[1-2f'(1)\right]=0\Rightarrow f(1)=0$.

Mặt khác, $\forall x\in[0;2]$, ta có

$(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)\Leftrightarrow\left[(x-1).f(x)\right]'=\left[f^2(x)\right]'\Rightarrow(x-1).f(x)=f^2(x)+C$

Thay $x=1$, ta suy ra $f^2(1)+C=0\Leftrightarrow C=0$.

Do đó, ta được $(x-1).f(x)=f^2(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ f(x)=x-1.\end{array}\right.$

Vì $f(x)\neq0,\forall x\neq1$ nên ta suy ra được $f(x)=x-1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$ và $y=x^2-1$, ta có:

$x-1=x^2-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=x^2-1$ là: $S=\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.$

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2xf(x)+x^2f'(x)=\frac{3}{2}x^5+\frac{5}{2}x^4-3x^3-3x^2+2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x); y=f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2xf(x)+x^2f'(x)=\frac{3}{2}x^5+\frac{5}{2}x^4-3x^3-3x^2+2x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(x^2\right)' f(x)+x^2f'(x)=\frac{3}{2}x^5+\frac{5}{2}x^4-3x^3-3x^2+2x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left[x^2f(x)\right]'=\frac{3}{2}x^5+\frac{5}{2}x^4-3x^3-3x^2+2x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2f(x)=\frac{1}{4}x^6+\frac{1}{2}x^5-\frac{3}{4}x^4-x^3+x^2+C$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-x+1+\frac{C}{x^2}$

Vì do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C=0$.

Do đó $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1.$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=f'(x)$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} x&=&-2 \\ x&=&-1 \\ x&=&1 \\ x&=&4 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x); y=f'(x)$ là $S=\int_{-2}^{4}\left|f(x)-f'(x)\right|dx=\frac{107}{5}(dvdt).$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=x^4+bx^2+c\,(b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong (C) và đường thẳng $(d): y=g(x)$ tiếp xúc với (C) tại điểm $x_0=1$. Biết (d) và (C) còn hai điểm chung khác có hoành độ là $x_1, x_2\,(x_1<x_2)$ và $\int_{x_1}^{x_2}\frac{g(x)-f(x)}{(x-1)^2}dx=\frac{4}{3}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và đường thẳng (d).

A. $\frac{29}{5}$. **B.** $\frac{28}{5}$. **C.** $\frac{143}{5}$. **D.** $\frac{43}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có: $f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-x_1)(x-x_2)=x^4+bx^2-mx+n\ (*)$

Ta có: $\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)-g(x)}{(x-1)^2}dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}(x-x_1)(x-x_1+x_1-x_2)dx$

$=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[(x-x_1)^2+(x-x_1)(x_1-x_2)\right]dx=\left.\left(\frac{(x-x_1)^3}{3}+(x_1-x_2)\frac{(x-x_1)^2}{2}\right)\right|_{x_1}^{x_2}$

$=\frac{(x_2-x_1)^3}{3}-\frac{(x_2-x_1)^3}{2}=-\frac{(x_2-x_1)^3}{6}=\frac{-4}{3}$

Suy ra $(x_2-x_1)^3=8\Leftrightarrow x_2-x_1=2\quad(1)$

Mặt khác theo định lí viet bậc 4 của phương trình (*) ta được:

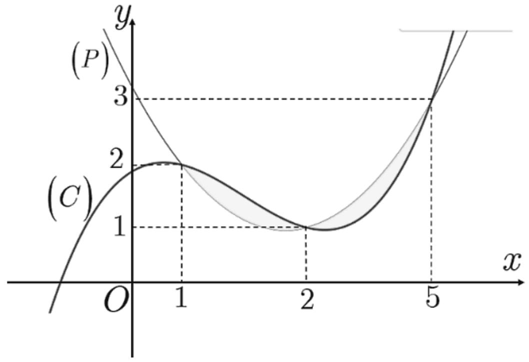
$1+1+x_2+x_1=0\Leftrightarrow x_2+x_1=-2(2)$

Từ $(1),(2)\ \Rightarrow\begin{cases}x_2=0\\x_1=-2\end{cases}$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và đường thẳng (d) là:

$S=\int\limits_{-2}^{1}\left|(x-1)^2(x+2)x\right|dx=\frac{29}{5}$.

Câu 10: Cho đồ thị hàm số $(C):y=ax^3+bx^2+cx+d$ và $(P):y=mx^2+nx+p$ có đồ thị như hình vẽ (*Đồ thị (C) là nét có đường cong đậm hơn).* Biết phần hình phẳng được giới hạn bởi (C) và (P) (phần tô đậm) có diện tích bằng 2. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay phần hình phẳng quanh trục hoành có giá trị gần với số nào nhất?



A. 12.53. **B.** 9.34. **C.** 10.23. **D.** 11.74.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta có: $(P):y=g(x)=mx^2+nx+p$ và (P) qua $(3;1)$, $(5;3)$, $(1;2)$

$\Rightarrow\begin{cases}9m+3n+p=1\\25m+5n+p=3\\m+n+p=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{3}{8}\\n=-2\\p=\frac{29}{8}\end{cases}\Rightarrow g(x)=\frac{3}{8}x^2-2x+\frac{29}{8}$

Đường cong $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$ suy ra $f(x) - g(x) = k(x-1)(x-3)(x-5)(k > 0)$

$$S = k\left[\int_1^3 (x-1)(x-3)(x-5)\mathrm{d}x - \int_3^5 (x-1)(x-3)(x-5)\mathrm{d}x\right] = k\left[4 - (-4)\right] = 8k$$

$$S = 2 \Rightarrow 2 = 8k \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x-1)(x-3)(x-5) + \frac{3}{8}x^2 - 2x + \frac{29}{8} = \frac{x^3}{4} - \frac{15}{8}x^2 + \frac{15}{4}x - \frac{1}{8}$$

Vậy $V = \pi\int_1^2 \left(f^2 - g^2\right)\mathrm{d}x + \pi\int_2^5 \left(g^2 - f^2\right)\mathrm{d}x = \frac{6533}{3360}\pi + \frac{2007}{1120}\pi \approx 11.74$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2xf(x) + x^2 f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 4x, \forall x \in \mathbb{R}$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\int\left(2xf(x) + x^2 f'(x)\right)dx = \int\left(\left(x^2\right)' f(x) + x^2 f'(x)\right)dx = \int\left(5x^4 + 6x^2 + 4x\right)dx = x^5 + 2x^3 + 2x^2 + C$$

$$\Rightarrow x^2 f(x) = x^5 + 2x^3 + 2x^2 + C$$

Cho $x = 0$ ta được $C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + 2x + 2$; $f'(x) = 3x^2 + 2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ và $y = f'(x)$:

$$x^3 + 2x + 2 = 3x^2 + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_0^2 \left|f(x) - f'(x)\right| dx = \frac{1}{2}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn điều kiện $2x^2 + \left[8 - f'(x)\right]x + \left[f(x) - 2f'(x) + 8\right] = 0$, $\forall x \in [0;+\infty)$ và $f(1) = 0$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = f(x)$ và $y = x^2 + 8x - 4$ bằng:

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2x^2 + \left(8 - f'(x)\right)x + \left(f(x) - 2f'(x) + 8\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2+8x-xf'(x)+f(x)-2f'(x)+8=0 \Leftrightarrow 2x^2+8x+8=xf'(x)-f(x)+2f'(x)$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2+4x+4\right)=f'(x)(x+2)-f(x) \Leftrightarrow 2(x+2)^2=(x+2)f'(x)-f(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+2)f'(x)-f(x)}{(x+2)^2}=2 \Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{x+2}\right]'=2 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x+2}=2x+C$.

Mặt khác $f(1)=0$ nên $C=-2 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x+2}=2x-2 \Leftrightarrow f(x)=(x+2)(2x-2)=2x^2+2x-4$

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là: $2x^2+2x-4=x^2+8x-4$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=x^2+8x-4 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số là:

$S=\int\limits_2^4\left|\left(2x^2+2x-4\right)-\left(x^2+8x-4\right)\right|dx=\left|\int\limits_2^4\left|x^2-6x+8\right|dx\right|=\dfrac{4}{3}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $-xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2f^2(x), \forall x\in(1;+\infty)$, $f(x)>0, \forall x\in(1;+\infty)$ và $f(e)=\dfrac{1}{e^2}$. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf(x), y=0, x=e, x=e^2$.

A. $S=\dfrac{3}{2}$. **B.** $S=\dfrac{5}{2}$. **C.** $S=\dfrac{7}{3}$. **D.** $S=\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $-xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2f^2(x) \Leftrightarrow -x\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\ln x+\dfrac{1}{f(x)}=2x^2, \forall x\in(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow xg'(x)\ln x+g(x)=2x^2, \forall x\in(1;+\infty)$ với $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

$\Leftrightarrow g'(x)\ln x+\dfrac{g(x)}{x}=2x, \forall x\in(1;+\infty) \Rightarrow \int g'(x)\ln x\,dx+\int\dfrac{g(x)}{x}dx=\int 2x\,dx$.

$\Leftrightarrow g(x)\ln x-\int\dfrac{g(x)}{x}dx+\int\dfrac{g(x)}{x}dx=x^2+C \Leftrightarrow g(x)\ln x=x^2+C, \forall x\in(1;+\infty)$.

Do $f(e)=\dfrac{1}{e^2} \Leftrightarrow g(e)=e^2 \Rightarrow C=0$. Suy ra $g(x)\ln x=x^2, \forall x\in(1;+\infty)$.

$\Rightarrow g(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}>0, \forall x\in(1;+\infty) \Rightarrow y=xf(x)=\dfrac{x}{g(x)}=\dfrac{\ln x}{x}, \forall x\in(1;+\infty)$.

Ta có $S=\int_e^{e^2}xf(x)dx=\int_e^{e^2}\dfrac{\ln x}{x}dx=\dfrac{1}{2}\ln^2 x\Big|_e^{e^2}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(x)<0\,\forall x\in(-1,+\infty)$, $f'(0)=-1$ và $\left[f'(x)\right]^2=f''(x)$, $f(3)=-\ln 4$. Khi đó diện tích giới hạn bởi đồ thị $(C): y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2, x=3$ bằng bao nhiêu?

A. $8\ln 2-\ln 3-1$. **B.** $8\ln 2-3\ln 3-1$.

C. $4\ln 2-3\ln 3-1$. **D.** $8\ln 2+3\ln 3-1$.

Lời giải

Chọn B

Với $x\in(-1;+\infty)$, ta có: $\left[f'(x)\right]^2=f''(x)\Leftrightarrow -1=-\dfrac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}\Leftrightarrow -1=\left[\dfrac{1}{f'(x)}\right]'$

$\Leftrightarrow -x+C_1=\dfrac{1}{f'(x)}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{-x+C_1}$ mà $f'(0)=-1$ nên $C_1=-1$.

Vậy $f'(x)=\dfrac{1}{-x-1}\Rightarrow f(x)=\int\dfrac{1}{-x-1}dx=-\ln|x+1|+C_2$

Mặt khác, ta có: $f(3)=-\ln 4\Rightarrow -\ln(4)+C=-\ln(4)\Rightarrow C_2=0$ nên $f(x)=-\ln(x+1)$.

Khi đó: $S=\int\limits_2^3\left|-\ln(x+1)\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_2^3\ln(x+1)\mathrm{d}x\right|=8\ln 2-3\ln 3-1$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa $f(x)+f'(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+5x}{\left(x^2-x+1\right)^2}$; $f(1)-f(0)=2$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y=f(x)$, trục tung và trục hoành có dạng $S=\ln a-\ln b$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=14$. **B.** $T=25$. **C.** $T=36$. **D.** $T=43$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)+f'(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+5x}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\dfrac{(2x-1)\left(x^2-x+1\right)-2x^2+2x+1}{\left(x^2-x+1\right)^2}$.

$\Rightarrow\int f(x)\mathrm{d}x+\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x-\int\dfrac{2x^2-2x-1}{\left(x^2-x+1\right)^2}\mathrm{d}x$.

$$\Rightarrow\int f(x)\mathrm{d}x+\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}-\int\frac{\dfrac{2x^2-2x-1}{(2x-1)^2}}{\left(\dfrac{x^2-x+1}{2x-1}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\int f(x)\mathrm{d}x+f(x)=\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}-\int\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{x^2-x+1}{2x-1}\right)}{\left(\dfrac{x^2-x+1}{2x-1}\right)^2}=\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{2x-1}{x^2-x+1}+C.$$

$$\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\left(\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{2x-1}{x^2-x+1}-f(x)+C\right)\Bigg|_0^1.$$

Vì $\begin{cases} \ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_0^1 = 0 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\ \left(\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}\right)\Bigg|_0^1 = 1-(-1) = 2 = f(1)-f(0) \end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases} C = 0 \\ f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} \end{cases}$.

Do đó: $S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}\right| \mathrm{d}x = -\ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln\dfrac{4}{3} = \ln 4 - \ln 3$.

Suy ra $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$. Vậy $T = a^2+b^2 = 25$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai, liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f'(x)-2f(x).f'(x)+2xf'(x)+(x+1)^2 f''(x) = 0, \forall x \in [0;1], f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$. Biết tích phân $\int\limits_0^1 \left[f^2(x)\right] dx = \dfrac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân só tối giản). Giá trị của $a+b$ bằng

A. 181. **B.** 25. **C.** 10. **D.** 26.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)-2f(x).f'(x)+2xf'(x)+(x+1)^2 f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow f'(x)+f'(x)+2xf'(x)+(x+1)^2 f''(x) = 2f(x)f'(x)+f'(x)$

$\Leftrightarrow (2x+2)f'(x)+(x+1)^2 f''(x) = 2f(x)f'(x)+f'(x)$

$\Leftrightarrow \left[(x+1)^2 f'(x)\right]' = \left[2f(x)+1\right]f'(x) \Rightarrow (x+1)^2 f'(x) = f^2(x)+f(x)+C_1$.

Theo giả thiết: $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \dfrac{9}{4} = 2 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow (x+1)^2 f'(x) = f^2(x)+f(x)+\dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)+f(x)+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{(x+1)^2} \left(f(x) > 0\right)$.

Do đó $\int \dfrac{f'(x)\mathrm{d}x}{\left(f(x)+\dfrac{1}{2}\right)^2} = \int \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{-1}{f(x)+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{-1}{(x+1)} + C_2$

Theo giả thiết: $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{(x+1)}$

$\Rightarrow f(x) = x + \dfrac{1}{2} \Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f(x)\right]^2 dx = \int\limits_0^1 \left[x+\dfrac{1}{2}\right]^2 dx = \dfrac{13}{12} \Rightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b = 12 \end{cases} \Rightarrow a+b = 25$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)-f(x) = -8+16x-4x^2$ và $f(0) = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox quay quanh Ox.

A. $\frac{256}{15}$. **B.** $\frac{256}{15}\pi$. **C.** $\frac{16}{3}\pi$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có

$f'(x)-f(x)=-8+16x-4x^2 \Leftrightarrow f'(x).e^{-x}-f(x).e^{-x}=\left(-8+16x-4x^2\right).e^{-x}$

$\Leftrightarrow \left(f(x).e^{-x}\right)'=\left(-8+16x-4x^2\right).e^{-x} \Rightarrow f(x).e^{-x}=\int\left(-8+16x-4x^2\right).e^{-x}dx$

$\Leftrightarrow f(x).e^{-x}=\left(4x^2-8x\right).e^{-x}+C$

Vì $f(0)=0 \Rightarrow C=0$. Ta có $f(x)=4x^2-8x$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành thỏa mãn phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox quay quanh Ox là $V=\pi\int_0^2\left(4x^2-8x\right)^2dx=\frac{256}{15}\pi$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $x.f'(x)-2f(x)=4x-8$ và $f(2)=0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và trục Oy.

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{3}{7}$

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có

$x.f'(x)-2f(x)=4x-8 \Rightarrow \frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{4x-8}{x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=\frac{4x-8}{x^3}$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{x^2}=\int\frac{4x-8}{x^3}dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2}=-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}+C \Leftrightarrow f(x)=Cx^2-4x+4$

Vì $f(2)=0$ nên $C=1$

Vậy $f(x)=x^2-4x+4$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục hoành là nghiệm của phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và trục Oy là

$S=\int_0^2(x^2-4x+4)dx=\frac{8}{3}$.

Câu 19: Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+x.f'\left(x\right)+f'\left(x\right)=4x^3-6x^2-2x+4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=f'\left(x\right)$.

A. $S=8$. **B.** $S=4$. **C.** $S=8\pi$. **D.** $S=4\pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(x\right)+x.f'\left(x\right)+f'\left(x\right)=f\left(x\right)+\left(x+1\right)f'\left(x\right)=\left[\left(x+1\right)f\left(x\right)\right]'$

Nên $f\left(x\right)+x.f'\left(x\right)+f'\left(x\right)=4x^3-6x^2-2x+4 \Leftrightarrow 4x^3-6x^2-2x+4=\left[\left(x+1\right)f\left(x\right)\right]'$

$\Rightarrow \left(x+1\right)f\left(x\right)=x^4-2x^3-x^2+4x+C\ (1)$

Thay $x=-1$ vào (1) ta được $C-2=0 \Leftrightarrow C=2$. Suy ra $\left(x+1\right)f\left(x\right)=x^4-2x^3-x^2+4x+2$

$\Rightarrow f\left(x\right)=x^3-3x^2+2x+2$

Khi đó $f'\left(x\right)=3x^2-6x+2$.

Xét phương trình $x^3-3x^2+2x+2=3x^2-6x+2 \Leftrightarrow x^3-6x^2+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$

$\Rightarrow S=\int\limits_0^4\left|x^3-6x^2+8x\right|\mathrm{d}x=8$

Câu 20: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x\right)=4x^3+3x^2-xf'\left(x\right), \forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$ và $y=f'\left(x\right)$ có kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai bằng

A. $7,31$. **B.** $7,32$. **C.** $7,33$. **D.** $7,34$

Lời giải

Chọn C

Ta có $f\left(x\right)=4x^3+3x^2-xf'\left(x\right) \Leftrightarrow f\left(x\right)+xf'\left(x\right)=4x^3+3x^2$

$\Leftrightarrow \left[x.f\left(x\right)\right]'=4x^3+3x^2 \Rightarrow x.f\left(x\right)=x^4+x^3+C$

Cho $x=0$ ta được $C=0$ $\Rightarrow f\left(x\right)=x^3+x^2$ và $f'\left(x\right)=3x^2+2x$.

Xét phương trình: $f\left(x\right)=f'\left(x\right)$

$\Leftrightarrow x^3+x^2=3x^2+2x \Leftrightarrow x^3-2x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng là: $S=\int\limits_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}\left|x^3-2x^2-2x\right|\mathrm{d}x\approx 7,33$ (đvdt).

Câu 21: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $f\left(1\right)=0$; $\left[f^{'}\left(x\right)\right]^{2}+8xf\left(x\right)=x^{4}-2x,\ \forall x\in\left[0;1\right]$. Hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và trục Ox, Oy. Khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng $\left(H\right)$ quanh trục Ox có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{7}$. **B.** $\frac{2\pi}{7}$. **C.** $\frac{3\pi}{7}$. **D.** $\frac{4\pi}{7}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_{0}^{1}xf\left(x\right)\mathrm{d}x=\int f\left(x\right)\mathrm{d}\left(\frac{x^{2}}{2}\right)=f\left(x\right).\frac{x^{2}}{2}\bigg|_{0}^{1}-\int\limits_{0}^{1}\frac{x^{2}}{2}.f^{'}\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}f\left(1\right)-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}x^{2}f^{'}\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}x^{2}f^{'}\left(x\right)\mathrm{d}x$

$\left[f^{'}\left(x\right)\right]^{2}+8xf\left(x\right)=x^{4}-2x,\ \forall x\in\left[0;1\right]\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1}\left[f^{'}\left(x\right)\right]^{2}\mathrm{d}x+8\int\limits_{0}^{1}xf\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left(x^{4}-2x\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1}\left[f^{'}\left(x\right)\right]^{2}\mathrm{d}x-4\int\limits_{0}^{1}x^{2}f^{'}\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{-4}{5}\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1}\left[f^{'}\left(x\right)\right]^{2}\mathrm{d}x-4\int\limits_{0}^{1}x^{2}f^{'}\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}4x^{4}=0$

$\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1}\left(f^{'}\left(x\right)-2x^{2}\right)^{2}\mathrm{d}x=0\Rightarrow f^{'}\left(x\right)=2x^{2}\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{2}{3}x^{3}+C$

Do $f\left(1\right)=0$ nên $C=\frac{-2}{3}\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{2}{3}x^{3}-\frac{2}{3}$

Xét phương trình: $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\frac{2}{3}x^{3}-\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow x=1$.

Thể tích của khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{2}{3}x^{3}-\frac{2}{3}\right)^{2}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{7}$ (đvtt).

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=5x^{4}+6x+3,\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f^{'}(x)$ thuộc khoảng

A. $\left(27;28\right)$. **B.** $\left(26;27\right)$. **C.** $\left(28;29\right)$. **D.** $\left(29;30\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)+x.f'(x)=5x^{4}+6x+3\Leftrightarrow(x)'\cdot f(x)+x.f'(x)=5x^{4}+6x+3$

$\Leftrightarrow[x.f(x)]'=5x^{4}+6x+3\Leftrightarrow x.f(x)=x^{5}+3x^{2}+3x+C\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^{5}+3x^{2}+3x+C}{x}$

Vì $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C=0$. Suy ra $f(x)=x^{4}+3x+3\Rightarrow f'(x)=4x^{3}+3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$, ta có:

$x^4+3x+3=4x^3+3 \Leftrightarrow x\left(x^3-4x^2+3\right)=0$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\left(x^2-3x-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ là:

$$S=\int\limits_{\frac{3-\sqrt{21}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}\left|f(x)-f'(x)\right|\mathrm{d}x \approx 28{,}87$$

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\cos x f'(x)-\sin x f(x)=2\cos 2x+2\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$ bằng

A. $2-\pi$. **B.** $2+\pi$. **C.** $4-\pi$. **D.** $4+\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\cos x f'(x)-\sin x f(x)=2\cos 2x+2\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \cos x\cdot f'(x)+\left(\cos x\right)'.f(x)=2\cos 2x+2\sin x$

$\Leftrightarrow [\cos x.f(x)]'=2\cos 2x+2\sin x$ $\Leftrightarrow \cos x.f(x)=\sin 2x-2\cos x+C$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\sin 2x-2\cos x+C}{\cos x}=\dfrac{2\sin x.\cos x-2\cos x+C}{\cos x}$

Vì do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C=0$. Do đó $f(x)=2\cos x-2 \Rightarrow f'(x)=-2\sin x$

Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$ là:

$$S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x)-f'(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left|2\cos x+2\sin x-2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos x+2\sin x-2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(2\sin x-2\cos x-2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4-\pi.$$

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 27.

Lời giải

Chọn C

$f\left(x\right)=xf'\left(x\right)-2x^3-3x^2 \Leftrightarrow xf'\left(x\right)-f\left(x\right)=2x^3+3x^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{xf'\left(x\right)-f\left(x\right)}{x^2}=2x+3;\forall x\neq 0$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{f\left(x\right)}{x}\right]'=2x+3 \Leftrightarrow \int\left[\dfrac{f\left(x\right)}{x}\right]'dx=\int\left(2x+3\right)dx=x^2+3x+C$

$\Leftrightarrow \dfrac{f\left(x\right)}{x}=x^2+3x+C$

Vì $f\left(1\right)=4$ nên $\Leftrightarrow 4=1^2+3.1+C \Leftrightarrow C=0$.

Do đó $f\left(x\right)=x^3+3x^2;\forall x\neq 0$.

Vì $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=0 \Rightarrow f\left(0\right)=0 \Rightarrow f\left(x\right)=x^3+3x^2;\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f'\left(x\right)=3x^2+6x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=f\left(x\right);y=f'\left(x\right)$ là

$x^3+3x^2=3x^2+6x \Leftrightarrow x\left(x^2-6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{6} \\ x=\sqrt{6} \end{array}\right.$

$S_{hp}=\int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left|x^3-6x\right|dx=18$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thoả mãn $f'\left(x\right)+\dfrac{f\left(x\right)}{x}=4x^2+3x$ và $f\left(1\right)=2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f\left(x\right)$ và phương trình tiếp tuyến của tại điểm $y=f\left(x\right)$ có hoành độ $x=2$.

A. $\dfrac{2400}{12}$. **B.** $\dfrac{2401}{12}$. **C.** $\dfrac{333}{4}$. **D.** $\dfrac{335}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$f'\left(x\right)+\dfrac{f\left(x\right)}{x}=4x^2+3x \Leftrightarrow xf'\left(x\right)+x'f\left(x\right)=4x^3+3x^2$

$\Leftrightarrow \left[x.f\left(x\right)\right]'=4x^3+3x^2 \Leftrightarrow \int\left[x.f\left(x\right)\right]'dx=\int\left(4x^3+3x^2\right)dx \Leftrightarrow xf\left(x\right)=x^4+x^3+C$.

Vì $f\left(1\right)=2$ nên $1f\left(1\right)=1+1+C \Leftrightarrow C=0$. Do đó $f\left(x\right)=x^3+x^2$.

Lại có $f'\left(x\right)=3x^2+2x$.

$f'\left(2\right)=16, f\left(2\right)=12$.

Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là $y=16x-20$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $f\left(x\right)=x^3+x^2$ và $y=16x-20$

$x^3+x^2=16x-20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=2 \end{array}\right.$

$S_{hp}=\int\limits_{-5}^{2}\left|x^3+x^2-16x+20\right|dx=\dfrac{2401}{12}$.

Câu 26: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thoả mãn $f\left(1\right)=3$ và $x\left(4-f'\left(x\right)\right)=f\left(x\right)-1$ với mọi $x>0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f\left(x\right)$ và trục Ox, trục Oy và $x=1$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$x\left(4-f'\left(x\right)\right)=f\left(x\right)-1\Leftrightarrow xf'\left(x\right)+f\left(x\right)=4x+1\Leftrightarrow\left[xf\left(x\right)\right]'=4x+1$

$\Leftrightarrow\int\left[x.f\left(x\right)\right]'dx=\int\left(4x+1\right)dx\Leftrightarrow x.f\left(x\right)=2x^2+x+C$

Vì $f\left(1\right)=3$ nên $C=0$.

Do đó $f\left(x\right)=2x+1$

$S_{hp}=\int\limits_{0}^{1}\left|2x+1\right|dx=2$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thoả mãn $f\left(x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R};f\left(2\right)=\dfrac{1}{5}$ và $f'\left(x\right)=-2x\left[f\left(x\right)\right]^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f\left(x\right)$, $x=0$ và $x=1$.

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$f'\left(x\right)=-2x\left[f\left(x\right)\right]^2\Leftrightarrow\dfrac{-f'\left(x\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2}=2x\Leftrightarrow\int\dfrac{-f'\left(x\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2}dx=\int 2xdx\Leftrightarrow\dfrac{1}{f\left(x\right)}=x^2+C$

Vì $f\left(2\right)=\dfrac{1}{5}$ nên $C=1$.

Do đó $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+1}$ suy ra $S_{hp}=\int\limits_{0}^{1}\left|\dfrac{1}{x^2+1}\right|dx=\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $-xf'\left(x\right)\ln x+f\left(x\right)=2x^2f^2\left(x\right)$, $\forall x\in\left(1;+\infty\right)$, $f\left(x\right)>0$, $\forall x\in\left(1;+\infty\right)$ và $f\left(e\right)=\dfrac{1}{e^2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf\left(x\right)$, $y=0$, $x=e$, $x=e^2$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $-xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2f^2(x)\Leftrightarrow -x\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\ln x+\dfrac{1}{f(x)}=2x^2,\forall x\in(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow xg'(x)\ln x+g(x)=2x^2,\forall x\in(1;+\infty)$ với $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

$\Leftrightarrow\ g'(x)\ln x+\dfrac{g(x)}{x}=2x,\forall x\in(1;+\infty)\Rightarrow \int g'(x)\ln x\,\mathrm{d}x+\int\dfrac{g(x)}{x}\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\ g(x)\ln x-\int\dfrac{g(x)}{x}\mathrm{d}x+\int\dfrac{g(x)}{x}\mathrm{d}x=x^2+C\Leftrightarrow g(x)\ln x=x^2+C,\ \forall x\in(1;+\infty)$

Do $f(e)=\dfrac{1}{e^2}\Leftrightarrow g(e)=e^2\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $g(x)\ln x=x^2,\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Rightarrow\ g(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}>0,\ \forall x\in(1;+\infty)\Rightarrow\ xf(x)=\dfrac{x}{g(x)}=\dfrac{\ln x}{x}>0,\ \forall x\in(1;+\infty)$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf(x)$, $y=0$, $x=e$, $x=e^2$ là:

$\int\limits_e^{e^2}xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_e^{e^2}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_e^{e^2}\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{2}\ln^2x\Big|_e^{e^2}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức $2x.f(x)+x^2.f'(x)=4x^3-12x^2+8x$. Tính thể tích vật tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và trục tung quanh trục Ox.

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{32}{5}$. **D.** $\dfrac{32\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2x.f(x)+x^2.f'(x)=4x^3-12x^2+8x\Leftrightarrow\left[x^2.f(x)\right]'=4x^3-12x^2+8x$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\int\left[x^2.f(x)\right]'dx=\int\left(4x^3-12x^2+8x\right)dx$

$\Leftrightarrow x^2.f(x)=x^4-4x^3+4x^2+C$

Chọn $x=0\Rightarrow C=0$, nên $f(x)=x^2-4x+4$

Hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^2-4x+4$ với trục hoành là $x=2$.

Nên thể tích cần tìm là: $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2-4x+4\right)^2dx=\pi\int\limits_0^2(x-2)^4dx=\dfrac{\pi}{5}(x-2)^5\Big|_0^2=\dfrac{32\pi}{5}$

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ dương, có đạo hàm liên tục trên $[-2;1]$, thỏa mãn hệ thức $f(x)=f'(x).\sqrt{x+3}$ và $f(1)=1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=-2,x=1$.

A. $\dfrac{3e^2-1}{2e^2}$. **B.** $\dfrac{3e^2+1}{2e^2}$. **C.** $\dfrac{3e^2+1}{e^2}$. **D.** $\dfrac{3e^2-1}{e^2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f\left(x\right)=f'\left(x\right).\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\ln f\left(x\right)=\int\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}dx\Leftrightarrow\ln f\left(x\right)=2\sqrt{x+3}+C$

Do $f\left(1\right)=1$ nên $C=-4$. Vậy $f\left(x\right)=e^{2\sqrt{x+3}-4}=\dfrac{e^{2\sqrt{x+3}}}{e^4}$

Khi đó, diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\dfrac{1}{e^4}\int\limits_{-2}^{1}e^{2\sqrt{x+3}}dx$

Đặt $I=\int\limits_{-2}^{1}e^{2\sqrt{x+3}}dx$.

Đặt $t=2\sqrt{x+3}\Leftrightarrow t^2=4\left(x+3\right)\Leftrightarrow dx=\dfrac{tdt}{2}$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=4; x=-2\Rightarrow t=2$

Nên: $I=\int\limits_{-2}^{1}e^{2\sqrt{x+3}}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_{2}^{4}e^t.tdt=\dfrac{1}{2}\left(e^t t\Big|_2^4-e^t\Big|_2^4\right)=\dfrac{3\text{e}^4-e^2}{2}\Rightarrow S=\dfrac{3\text{e}^2-1}{2\text{e}^2}$.

Câu 31: Cho hàm số $f\left(x\right)=2x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)+12}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln3$. **B.** $\ln3$. **C.** $\ln18$. **D.** $\ln2$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)$.

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+f''\left(x\right)+f'''\left(x\right)=f'\left(x\right)+f''\left(x\right)+12$

Theo giả thiết ta có phương trình $g'\left(x\right)=0$ có hai nghiệm m,n

Vì $g\left(x\right)$ là hàm bậc ba có hệ số $a>0$ nên nếu giả sử $m<n$ thì $\begin{cases}g\left(m\right)=g_{CD}=4\\g\left(n\right)=g_{CT}=-4\end{cases}$

Xét phương trình $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)+12}=1\Rightarrow g\left(x\right)+12-f\left(x\right)=0$

$\Leftrightarrow f'\left(x\right)+f''\left(x\right)+12=0\Leftrightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=n\end{array}\right.$

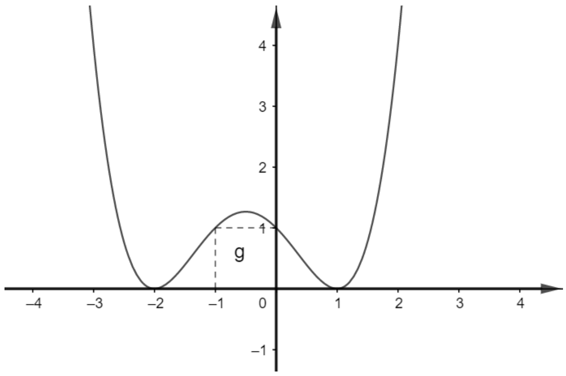
Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\int\limits_m^n\left|1-\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)+12}\right|\text{d}x=\left|\int\limits_m^n\left(1-\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)+12}\right)\text{d}x\right|=\left|\int\limits_m^n\left(\dfrac{g\left(x\right)+12-f\left(x\right)}{g\left(x\right)+12}\right)\text{d}x\right|$$

$$= \left|\int_m^n \frac{f'(x)+f''(x)+12}{g(x)+12}dx\right| = \left|\int_m^n \frac{g'(x)}{g(x)+12}dx\right| = \left|\int_m^n \frac{d\left(g(x)+12\right)}{g(x)+12}\right| = \left|\ln\left|g(x)+12\right|\right|\Big|_m^n$$

$$= \left|\ln\left|g(n)+12\right| - \ln\left|g(m)+12\right|\right| = \left|\ln\left|-4+12\right| - \ln\left|4+12\right|\right| = \left|\ln\frac{8}{16}\right| = \ln 2 .$$

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{127}{40}$. **B.** $\dfrac{107}{5}$. **C.** $\dfrac{127}{10}$. **D.** $\dfrac{13}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho có dạng $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$

$\Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Từ hình vẽ đã cho ta thấy đồ thị $f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại các điểm $(-2;0)$, $(1;0)$ và đi qua điểm $(0;1)$ nên:

$$\begin{cases} f(x) = k.(x+2)^2.(x-1)^2 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}.(x+2)^2.(x-1)^2$$

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x - 1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = f'(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ là

$$S = \int_{-2}^{4} \left|f(x) - f'(x)\right| \mathrm{d}x$$

Do $f(x)$ không đổi dấu trên các khoảng $(-2;-1)$, $(-1;1)$, $(1;4)$ nên ta có:

$$\left|\int_{-2}^{-1}\left[f(x) - f'(x)\right]\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-1}^{1}\left[f(x) - f'(x)\right]\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{1}^{4}\left[f(x) - f'(x)\right]\mathrm{d}x\right| = \frac{107}{5} \text{(đvdt)}.$$

Câu 33: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ thoã mãn $f\left(1\right)=3$ và $f^2\left(x\right)-8xf\left(x\right)-f'\left(x\right)=-16x^2-4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bới các đường $y=f\left(x\right)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1;x=2$.

A. $\ln 2-6$. **B.** $8-\ln 2$. **C.** $6-\ln 2$. **D.** $10-\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f^2\left(x\right)-8xf\left(x\right)-f'\left(x\right)=-16x^2-4\Leftrightarrow f^2\left(x\right)-8xf\left(x\right)+16x^2=f'\left(x\right)-4$

$\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)-4x\right)^2=\left(f\left(x\right)-4x\right)'$ (1). Đặt $f\left(x\right)-4x=h\left(x\right)$. Ta có $(1)\Leftrightarrow h^2\left(x\right)=h'\left(x\right)$

$\Leftrightarrow\dfrac{h'\left(x\right)}{h^2\left(x\right)}=1\quad\Rightarrow\quad\int\dfrac{h'\left(x\right)}{h^2\left(x\right)}dx=\int 1dx\quad\Leftrightarrow-\dfrac{1}{h\left(x\right)}=x+C\quad\Rightarrow h\left(x\right)=-\dfrac{1}{x+C}$

$\Rightarrow f\left(x\right)-4x=-\dfrac{1}{x+C}$ Do $f\left(1\right)=3\Rightarrow C=0\Rightarrow f\left(x\right)-4x=-\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{1}{x}+4x$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1;x=2$

là $S=\int\limits_1^2\left|f\left(x\right)\right|dx=\int\limits_1^2\left|-\dfrac{1}{x}+4x\right|dx=6-\ln 2$.

Câu 34: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+\int\limits_0^1\left(10u-4x\right)f\left(u\right)du$ có đồ thị $\left(C\right)$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$, trục tung, tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $S=108$ **B.** $S=12$. **C.** $S=180$. **D.** $S=112$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right)=x^3+\int\limits_0^1\left(10u-4x\right)f\left(u\right)du=x^3-4x\int\limits_0^1 f\left(u\right)du+10\int\limits_0^1 uf\left(u\right)du$

Đặt $a=\int\limits_0^1 f(u)du$ và $b=\int\limits_0^1 uf(u)du$. Khi đó hàm số $f\left(x\right)$ có dạng $f\left(x\right)=x^3-4ax+10b$.

Suy ra $f\left(u\right)=u^3-4au+10b$

$$a=\int\limits_0^1 f(u)du=\int\limits_0^1\left(u^3-4au+10b\right)du=\left.\left(\frac{1}{4}u^4-2au^2+10bu\right)\right|_0^1=\frac{1}{4}-2a+10b.$$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}-2a+10b\Leftrightarrow 3a-10b=\dfrac{1}{4}$ (1).

$$b=\int\limits_0^1 uf(u)du=\int\limits_0^1 u\left(u^3-4au+10b\right)du$$

$$=\int\limits_0^1\left(u^4-4au^2+10bu\right)du=\left.\left(\frac{1}{5}u^5-\frac{4}{3}au^3+5bu^2\right)\right|_0^1=\frac{1}{5}-\frac{4}{3}a+5b.$$

$\Rightarrow b=\frac{1}{5}-\frac{4}{3}a+5b \Leftrightarrow \frac{4}{3}a-4b=\frac{1}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $\begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=\frac{1}{5} \end{cases}$

Suy ra $f\left(x\right)=x^3-3x+2;\ f'(x)=3x^2-3.$ Ta có: $f(2)=4;\ f'(2)=9.$

Phương trình tiếp tuyến d của $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ $x=2$:

$y=9\left(x-2\right)+4 \Leftrightarrow y=9x-14.$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $\left(C\right)$ với tiếp tuyến d là:

$x^3-3x+2=9x-14 \Leftrightarrow x^3-12x+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=2 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right)$, trục tung, tiếp tuyến d là

$$S=\int_0^2\left|x^3-3x+2-\left(9x-14\right)\right|dx=\int_0^2\left|x^3-12x+16\right|dx=\left|\int_0^2\left(x^3-12x+16\right)dx\right|=12.$$

Câu 35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm xác định trên $\left[0;+\infty\right)$ và thoả mãn $x^2-x\left(f'\left(x\right)-2\right)+\left(f\left(x\right)-f'\left(x\right)+1\right)=0$, $\forall x\in\left[0;+\infty\right)$ và có $f\left(0\right)=0$. Diện tích hình phẳng gới hạn bởi hai đồ thị $y=f\left(x\right)$ và $y=f'\left(x\right)$ bằng

A. $\frac{5\sqrt{5}}{6}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^2-x\left(f'\left(x\right)-2\right)+\left(f\left(x\right)-f'\left(x\right)+1\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-xf'\left(x\right)+2x+f\left(x\right)-f'\left(x\right)+1=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right)f'\left(x\right)-f\left(x\right)=\left(x+1\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\left(x+1\right)f'\left(x\right)-f\left(x\right)}{\left(x+1\right)^2}=1, \forall x\in\left[0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow \left[\frac{f\left(x\right)}{x+1}\right]'=1, \forall x\in\left[0;+\infty\right) \Rightarrow \frac{f\left(x\right)}{x+1}=x+C$

Mà $f\left(0\right)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f\left(x\right)=x^2+x \Rightarrow f'\left(x\right)=2x+1$

Xét $f\left(x\right)=f'\left(x\right) \Leftrightarrow x^2+x=2x+1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy $S=\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\left|x^2-x-1\right|dx=\frac{5\sqrt{5}}{6}$

Câu 36: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x\right)=\left(x-1\right)f'\left(x\right)+2x^3-3x^2+1$ và $f\left(2\right)=-6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$ và $y=f'\left(x\right)+2$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 22.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right)=\left(x-1\right)f'\left(x\right)+2x^3-3x^2+1\Leftrightarrow\left(x-1\right)f'\left(x\right)-f\left(x\right)=-2x^3+3x^2-1$ (*)

Nếu $x=1$ thì $f\left(1\right)=0$

Nếu $x\neq1$ thì (*)$\Leftrightarrow\dfrac{\left(x-1\right)f'\left(x\right)-f\left(x\right)}{\left(x-1\right)^2}=-2x-1$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{f\left(x\right)}{x-1}\right)'=-2x-1\Leftrightarrow\dfrac{f\left(x\right)}{x-1}=-x^2-x+C$

Mà $f\left(2\right)=-6\Rightarrow C=0$. Vậy $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(-x^2-x\right)=-x^3+x\Rightarrow f'\left(x\right)=-3x^2+1$.

Phương trình hoành độ giao điểm $f\left(x\right)=f'\left(x\right)+2\Leftrightarrow x^3-3x^2-x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$ và $y=f'\left(x\right)+2$ là:

$S=\displaystyle\int_{-1}^{3}\left|x^3-3x^2-x+3\right|\mathrm{d}x=8$.

Câu 37: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(1\right)=6$ và $xf'\left(x\right)=f\left(x\right)+3x^4-3x^2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$ và $y=f'\left(x\right)$ bằng

A. $\dfrac{162}{5}$. **B.** $\dfrac{324}{5}$. **C.** $\dfrac{104}{5}$. **D.** $\dfrac{229}{10}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết $xf'\left(x\right)=f\left(x\right)+3x^4-3x^2\Rightarrow xf'\left(x\right)-f\left(x\right)=3x^4-3x^2$.

Có $f\left(0\right)=0$, với $x\neq0$ thì $\dfrac{xf'\left(x\right)-f\left(x\right)}{x^2}=3x^2-3\Rightarrow\left(\dfrac{f\left(x\right)}{x}\right)'=3x^2-3$

$\Rightarrow\dfrac{f\left(x\right)}{x}=x^3-3x+C$, mà $f\left(1\right)=6$ nên $C=8$. Do đó $f\left(x\right)=x^4-3x^2+8x$ (thỏa mãn).

Xét phương trình $f\left(x\right)=f'\left(x\right)\Leftrightarrow x^4-4x^3-3x^2+14x-8=0$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)\left(x-4\right)=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-2$ hoặc $x=4$.

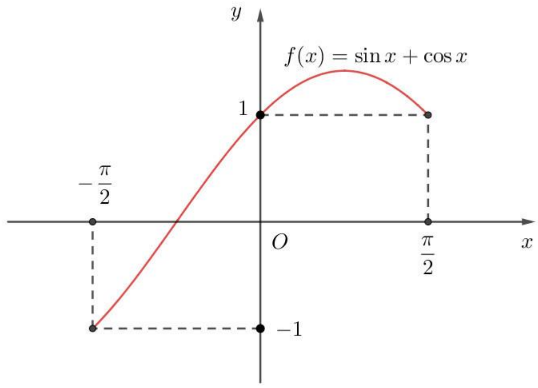
Vậy diện tích hình phẳng cần tính bằng $S=\displaystyle\int_{-2}^{4}\left|x^4-4x^3-3x^2+14x-8\right|\mathrm{d}x=\dfrac{324}{5}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $f\left(0\right)=1$ và $f'\left(x\right)\cos x+f\left(x\right)\sin x=1$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=\sqrt{2}$ và trục Oy (trong miền $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}\pi-4}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi-1}{4}$. **C.** $\sqrt{2}-\pi$. **D.** $\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, ta có: $f'\left(x\right)\cos x+f\left(x\right)\sin x=1$

$$\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)\cos x-f\left(x\right)\left(\cos x\right)'}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\Leftrightarrow\left(\frac{f\left(x\right)}{\cos x}\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\frac{f\left(x\right)}{\cos x}=\tan x+C.$$

Mà $f\left(0\right)=1$nên $C=1$. Suy ra: $f\left(x\right)=\sin x+\cos x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$, $y=\sqrt{2}$ (trong miền $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) là:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=\sqrt{2}$ và trục Oy (trong miền $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) bằng: $S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x+\cos x-\sqrt{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}\pi-4}{4}$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3-6x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{7}{12}$. **B.** $\frac{45}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{71}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)+x.f'(x)=4x^3-6x^2\Leftrightarrow(x)'\cdot f(x)+x.f'(x)=4x^3-6x^2$

$\Leftrightarrow [x.f(x)]' = 4x^3 - 6x^2 \Leftrightarrow x.f(x) = x^4 - 2x^3 + C$

Với $x = 0 \Rightarrow C = 0$.

Do đó: $f(x) = x^3 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 2x^2 = 3x^2 - 4x \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right..$$

Suy ra, diện tích phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là:

$$S = \int_0^4 |f(x) - f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^3 - 5x^2 + 4x\right)\mathrm{d}x - \int_1^4 \left(x^3 - 5x^2 + 4x\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6}.$$

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + xf'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = \dfrac{1}{4}xf'(x)$ bằng

A. $\dfrac{112}{15}$. **B.** $\dfrac{272}{15}$. **C.** $\dfrac{1088}{15}$. **D.** $\dfrac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) + x.f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 4 \Leftrightarrow (x)' \cdot f(x) + x.f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 4$

$\Leftrightarrow [x.f(x)]' = 5x^4 + 6x^2 - 4 \Leftrightarrow x.f(x) = x^5 + 2x^3 - 4x + C$

Với $x = 0 \Rightarrow C = 0$.

Do đó $f(x) = x^4 + 2x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 4x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = \dfrac{1}{4}xf'(x)$ là:

$$x^4 + 2x^2 - 4 = \frac{1}{4}x\left(4x^3 + 4x\right) \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Suy ra, diện tích phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = f(x)$ và $y = \dfrac{1}{4}xf'(x)$ là:

$$S = \int_{-2}^{2} \left| f(x) - \frac{1}{4}xf'(x) \right| \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \left|4 - x^2\right| \mathrm{d}x = \frac{32}{3}.$$

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ liên trục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) = 2x^3 - 9 + \int_0^1 xf\left(\sqrt{1 + 15x^2}\right)dx$.

Đồ thị hàm số $y = g(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 9$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $1;2;4$. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $f(x)$ và $g(x)$ có diện tích bằng:

A. $I = 2.$ **B.** $I = \dfrac{3}{2}.$ **C.** $I = \dfrac{37}{12}.$ **D.** $I = 1.$

Lời giải

Chọn C

Đặt $k=\int_0^1 xf\left(\sqrt{1+15x^2}\right)dx=\int_1^4 \frac{t}{15}f(t)dt=\frac{1}{15}\int_1^4 xf(x)dx \Leftrightarrow 15k=\int_1^4 xf(x)dx \quad (1)$.

Khi đó $f(x)=2x^2-9+k \Rightarrow x.f(x)=2x^3-9x+kx$ thay vào (1), ta được:

$(1)\Leftrightarrow 15k=\int_1^4\left(2x^3-9x+kx\right)dx \Leftrightarrow 15k=\left.\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{2}x^2+\frac{k}{2}x^2\right)\right|_1^4 \Rightarrow k=8 \Rightarrow f(x)=2x^2-1$.

Mặt khác: $g(x)-f(x)=a(x-1)(x-2)(x-4)=\left(ax^3+bx^2+cx-9\right)-\left(2x^2-1\right)$.

$\Leftrightarrow g(x)-f(x)=a(x-1)(x-2)(x-4)=ax^3+(b-2)x^2+cx-8$.

Cho $x=0 \Rightarrow -8a=-8 \Rightarrow a=1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $f(x)$ và $g(x)$ bằng:

$S=\int_1^4\left|(x-1)(x-2)(x-4)\right|dx=\frac{37}{12}$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$, có đạo hàm $f(1)=1$ và $\begin{cases} f(x)>0 \\ f'(x)>0 \end{cases}$ trên $(1;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện $2\left[f'(x)\right]^2=(x-1)^2.\left(4f(x)-\left[f'(x)\right]^2+4\right)$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ với các đường $x=1;x=2$ và Ox?

A. $S=\frac{4}{3}$. **B.** $S=\frac{8}{3}$. **C.** $S=\frac{-4}{3}$. **D.** $S=\frac{-8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2\left[f'(x)\right]^2=(x-1)^2.\left(4f(x)-\left[f'(x)\right]^2+4\right)$.

$\Leftrightarrow 2\left[f'(x)\right]^2+\left[f'(x)\right]^2.(x-1)^2=4(x-1)^2.\left(f(x)+1\right)$.

$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2.\left(x^2-2x+3\right)=4(x-1)^2.\left(f(x)+1\right)$.

$\Leftrightarrow f'(x).\sqrt{\left(x^2-2x+3\right)}=2(x-1).\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{f(x)+1}\right]'=\left[\sqrt{x^2-2x+3}+C\right]'$.

Mặt khác ta có $f(1)=1 \Rightarrow f(x)=x^2-2x+2 \Rightarrow S=\int_1^2 f(x)dx=\frac{4}{3}$.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và $x\left(f'(x)-x\right)=f(x)-1, \forall x>0$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$; $x=1;x=3$ và trục hoành bằng

A. $\frac{32}{2}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** 12. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x\left(f'(x)-x\right)=f(x)-1\Rightarrow xf'(x)-f(x)=x^2-1$

$\Rightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}\Rightarrow \dfrac{xf'(x)-x'f(x)}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

$\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=1-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{1}{x}+C.$

Mặt khác: $f(1)=2\Rightarrow C=0\Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)=x^2+1$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int\limits_1^3 \left|f(x)\right|dx=\dfrac{32}{3}$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=4x\sqrt{x}$. Biết $f(1)=1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $g(x)=f(x)-2xf'(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=1; x=4$.

A. $\dfrac{14}{3}$. **B.** $\dfrac{124}{5}$. **C.** $\dfrac{62}{5}$. **D.** $\dfrac{28}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Với $x>0$ ta có:

$2xf'(x)+f(x)=4x\sqrt{x}\Leftrightarrow \dfrac{2xf'(x)+f(x)}{2\sqrt{x}}=\dfrac{4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\Leftrightarrow \sqrt{x}.f'(x)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}f(x)=2x$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}.f(x)\right)'=2x\Rightarrow \sqrt{x}.f(x)=x^2+C$

Với $x=1$ ta có $\sqrt{1}.f(1)=1^2+C\Leftrightarrow 1=1+C\Leftrightarrow C=0\Rightarrow \sqrt{x}.f(x)=x^2$, $\Rightarrow f(x)=x\sqrt{x}$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. Suy ra $g(x)=-2x\sqrt{x}$.

Vậy diện tích $S=\int\limits_1^4 \left|-2x\sqrt{x}\right|=\dfrac{124}{5}$ (Đvtt)

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(0)=0$, đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-2;+\infty)$ và thỏa mãn $(x+2)f'(x)-2f(x)=(x-2)(x+2)^3$ với mọi $x\in[-2;+\infty)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành bằng

A. $\dfrac{432}{5}$. **B.** $\dfrac{448}{5}$. **C.** $\dfrac{464}{5}$. **D.** $\dfrac{446}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Xét $x=-2$: từ điều kiện ta có $f(-2)=0$.

Xét $x>-2$: chia hai vế của điều kiện cho $(x+2)^3$ ta được

$\dfrac{1}{(x+2)^2}f'(x)-\dfrac{2}{(x+2)^3}f(x)=x-2$.

Do $\left[\dfrac{1}{(x+2)^2}\right]' = -\dfrac{2}{(x+2)^3}$ nên $\left[\dfrac{f(x)}{(x+2)^2}\right]' = x+2$, suy ra $\dfrac{f(x)}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2}{2} - 2x + C$ hay

$f(x) = (x+2)^2\left(\dfrac{x^2}{2} - 2x + C\right)$

Vì $f(0) = 0$ nên $C = 0$, suy ra $f(x) = x\left(\dfrac{x}{2} - 2\right)(x+2)^2$.

Kết hợp cả hai trường hợp ta có $f(x) = x\left(\dfrac{x}{2} - 2\right)(x+2)^2$ với mọi $x \in [-2;+\infty)$.

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm $x = -2$, $x = 0$ và $x = 4$. Bên cạnh đó $f(x) \le 0$ với mọi $x \in [0;4]$ và $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in [-2;0]$.

Vậy diện tích cần tìm là: $S = \int\limits_{-2}^{0} x\left(\dfrac{x}{2} - 2\right)(x+2)^2\,dx - \int\limits_{0}^{4} x\left(\dfrac{x}{2} - 2\right)(x+2)^2\,dx = \dfrac{464}{5}$.

DẠNG 11 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI SỐ PHỨC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0,\ (*)$ với $a\neq 0$ có: $\Delta=b^2-4ac$.

- Nếu $\Delta=0$ thì $(*)$ có nghiệm kép: $z_1=z_2=-\dfrac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta>0$ thì $(*)$ có hai nghiệm thực phân biệt $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Nếu $\Delta<0$ thì $(*)$ có hai nghiệm phức phân biệt $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$. Hai nghiệm phức này là 2 số phức liên hợp của nhau.

<u>Lưu ý</u>

- Hệ thức Viét vẫn đúng trong trường phức $\mathbb{C}$: $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ và $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.
- Căn bậc hai của số phức $z=x+yi$ là một số phức w và tìm như sau:

  Đặt $w=\sqrt{z}=\sqrt{x+yi}=a+bi$ với $x,y,a,b\in\mathbb{R}$.

  $w^2=x+yi=(a+bi)^2\Leftrightarrow(a^2-b^2)+2abi=x+yi\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=x\\2ab=y\end{cases}$.

  Giải hệ này với $a,b\in\mathbb{R}$ sẽ tìm được a và b $\Rightarrow w=\sqrt{z}=a+bi$.

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 42 – Đề tham khảo 2023. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=2$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\Delta'=2m+2$

Trường hợp 1: $\Delta'<0\Leftrightarrow m<-1$.

Phương trình có hai nghiệm phức, khi đó: $|z_1|=|z_2|=\sqrt{\dfrac{c}{a}}=\sqrt{m^2}$.

Suy ra: $2\sqrt{m^2}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\ (l)\end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $\Delta'>0\Leftrightarrow m>-1$.

Vì $a.c=m^2\geq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1.z_2\geq 0$ hoặc $z_1.z_2\leq 0$.

Suy ra: $|z_1|+|z_2|=2\Leftrightarrow|z_1+z_2|=2\Leftrightarrow|2m+2|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\ (l)\\m=0\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-(m+2)z+m^2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa nãm $|z_1|^3+|z_2|^3=16$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 2: Cho phương trình $z^2-2mz+6m-8=0$. (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 3: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2+2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=8$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4: Cho các số thực b,c sao cho phương trình $z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm phức $z_1;z_2$ với phần thực là số nguyên và thỏa mãn $|z_1+3-2i|=1$ và $(z_1-2i)(z_2+2)$ là số thuần ảo. Khi đó, $b+c$ bằng

A. -1. **B.** 12. **C.** 4. **D.** -12.

Câu 5: Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4+(4-m)z^2-4m=0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6$.

A. $m=-1$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** $m=\pm 3$ **D.** $m=\pm 1$.

Câu 6: Trong tập số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+2m-2=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$. Tổng các phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 7: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-(a-3)z+a^2+a=0$ (a là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình có 2 nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 8: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-6z+m=0$ (1) (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(0;20)$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Câu 9: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(2m-1)z+m^2=0$ (m là số thực). Khi phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 sao cho biểu thức $T=|z_1|^2+|z_2|^2-10|z_1z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $[1;2)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2};3\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 10: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Khi đó $z_1^{2021} - z_2^{2022} + \dfrac{1}{z_1^{2021}} - \dfrac{1}{z_2^{2022}}$ bằng

A. -1. **B.** $2^{2021}i$. **C.** 2022. **D.** 2021.

Câu 11: Gọi S là tập hợp các số thực m để phương trình $z^2 + 3z + m^2 - 2m = 0$ có một nghiệm phức z_0 với $|z_0| = 2$. Tổng tất cả các phần tử trong S là

A. 0. **B.** -6. **C.** -5. **D.** 4.

Câu 12: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+2)z + 2m^2 - 3m + 10 = 0$ (m là số thực). Biết rằng phương trình trên có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{|z_1|} + \dfrac{1}{|z_2|} = \dfrac{1}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z - z_1| + |z - z_2|$ với $z \in \mathbb{C}$.

A. 0. **B.** $\sqrt{39}$. **C.** $\sqrt{231}$. **D.** $\sqrt{613}$.

Câu 13: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 8m - 12 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$?

A. 5 **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 14: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 6z + m = 0$ (m là tham số thực). Gọi m_o là một giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2}$. Trong khoảng $(0;20)$ có bao nhiêu giá trị m_o

A. 11. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 15: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 2m^2 - 2m = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10;10)$ để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2| = |z_2 - 2|$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 16: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 6z + 10 = 0$. Giá trị biểu thức $\mathrm{w} = (2 + z_1)^{1000} + (2 + z_2)^{1000}$ là

A. $\mathrm{w} = 2^{501}$. **B.** $\mathrm{w} = 0$. **C.** $2^{500}i$. **D.** $\mathrm{w} = -2^{500}i$.

Câu 17: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 + 2mz - m + 12 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = \sqrt{2}|z_1 - z_2|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 18: Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 + 3i| = 1$ và $|z_2 - 8 - 6i| = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $5b + c = -12$. **B.** $5b + c = 4$. **C.** $5b + c = -4$. **D.** $5b + c = 12$.

Câu 19: Trong tập hợp các số phức, cho phương trình $z^2 - 2(a - 45)z + 2016 - 80a = 0$ (a là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 sao cho $|z_1| = |z_2|$

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 20: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $z^2+2mz+1=0$ có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+3|=|z_2+3|$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị m nguyên và $m\in[-2022;2022]$ để phương trình $z^2-2z+1-3m=0$ có hai nghiệm phức thỏa mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$.

A. 4045. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023

Câu 22: Gọi z là nghiệm có phần ảo dương của phương trình $z^2+z+1=0$. Tính giá trị biểu thức $A=z^{2022}-2z^{2021}+\frac{3}{z^{2022}}-\frac{1}{z^{2021}}+1$.

A. 0. **B.** i. **C.** $\frac{13}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **D.** $\frac{13}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Câu 23: Trên tập hợp các số phức, gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $mz^2+2(m+1)z-m+6=0$ có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=1$. Tính S.

A. 3. **B.** -4. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $z^2-2mz+9m-8=0$ có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 25: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $(z-1-a)(z+1-a)=6z$ (a là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của a để phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|^2+|z_2|^2=42$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 26: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-4(m+1)z+4m^2+2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình đó có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0|=4$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 27: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+4)z+m^2-8=0$ (m là tham số thực). Tính tổng các giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_o thỏa mãn $|z_o|=3$?

A. $\sqrt{17}$. **B.** 6. **C.** $6+\sqrt{17}$. **D.** $6-\sqrt{17}$.

Câu 28: Tìm tổng các giá trị của số thực a sao cho phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0|=2$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình: $4z^2+4(m-1)z+m^2-3m=0$ có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=2$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 30: Cho số phức w và hai số thực a,b. Biết $z_1=w+2i$ và $z_2=2w-3$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+az+b=0$. Tính giá trị của $T=|z_1|+|z_2|$.

A. $T=2\sqrt{13}$. **B.** $T=4\sqrt{13}$. **C.** $T=\frac{2\sqrt{97}}{3}$. **D.** $T=\frac{2\sqrt{85}}{3}$.

Câu 31: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2az+b^2-20=0(1)$ với a,b là các tham số nguyên dương. Khi phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn: $z_1+3iz_2=7+5i$ thì giá trị của biểu thức $7a+5b$ bằng

A. 19. **B.** 17. **C.** 32. **D.** 40.

Câu 32: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2mz+m^2-2m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=2$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 33: Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $z^2-(a-3)z+a^2+a=0$ có 2 nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 34: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+8m-12=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=4$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 35: Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $z^2-(a-3)z+a^2+a=0$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 36: Cho số phức w và hai số thực b, c. Biết rằng $w+2$ và $3w-4i$ là hai nghiệm của phương trình $2022z^2+bz+c=0$. Tính giá trị biểu thức $P=b+c$ bằng

A. $P=-4044$. **B.** $P=8088$. **C.** $P=4044$. **D.** $P=-8088$.

Câu 37: Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+2=0$. Phần ảo của số phức $\left[(z_1-i)(z_2-i)\right]^{2022}$ là

A. -2^{1011}. **B.** 2^{2022}. **C.** -2^{2022}. **D.** 2^{1011}.

Câu 38: Cho phương trình $4z^4+mz^2+4=0$ trong tập số phức và m là tham số thực. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $(z_1^2+4)(z_2^2+4)(z_3^2+4)(z_4^2+4)=324$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-15\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=15\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-35\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=35\end{array}\right.$.

Câu 39: Tổng các giá trị nguyên của tham số a để phương trình $z^2-2(a+2)z+a^2+3a=0$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 4. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -4.

Câu 40: Cho số phức w và hai số thực a,b Biết rằng $w+i$ và $2w-1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Tính tổng $S=a+b$

A. $\frac{13}{9}$ **B.** $\frac{-13}{9}$ **C.** $\frac{-5}{9}$ **D.** $\frac{5}{9}$

Câu 41: Kí hiệu z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $|z_1|+|z_2|=2$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 42: Cho số phức w và hai số thực a, b. Biết rằng $w+i$ và $3-2w$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Tổng $S=a+b$ bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 43: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-mz+m+1=0$. Tính tổng các giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $z_1{}^2+z_2{}^2=z_1z_2+1$.

A. -1. **B.** -4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 44: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 4m - 3 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = 8$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 45: Trên tập các số phức, xét phương trình $z^2 - mz + m + 8 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 phân biệt thỏa mãn $\left|z_1\left(z_1^2 + mz_2\right)\right| = \left(m^2 - m - 8\right)|z_2|$?

A. 12. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 11.

Câu 46: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 6z + m = 0$ (1) (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(0;20)$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2}$?

A. 20. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 47: Cho phương trình $4z^4 + mz^2 + 4 = 0$ trong tập số phức và m là tham số thự **C.** Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $\left(z_1^2 + 4\right)\left(z_2^2 + 4\right)\left(z_3^2 + 4\right)\left(z_4^2 + 4\right) = 324$.

A. $m = 1$ hoặc $m = -35$. **B.** $m = -1$ hoặc $m = -35$.
C. $m = -1$ hoặc $m = 35$. **D.** $m = 1$ hoặc $m = 35$.

Câu 48: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$. Tổng $T = |z_1|^{2022} + |z_2|^{2022} + |z_3|^{2022} + |z_4|^{2022}$ bằng?

A. $1 + 2^{2022}$. **B.** $2 + 2^{2022}$. **C.** $1 + 2^{2023}$. **D.** $2 + 2^{2023}$.

Câu 49: Cho phương trình $z^2 - 2(m-2)z + m^2 - 5 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiêm phức phân biệt z_1, z_2 thoả mãn $|z_1|^2 + |z_2|^2 \le 8$?

A. 5. **B.** 7. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 50: Biết phương trình $z^2 + mz + m^2 - 2 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm phức z_1, z_2. Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 và $z_0 = i$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để diện tích tam giác ABC bằng 1?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 51: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2z - m + 2 = 0$ (m là tham số thực). Gọi T là tập hợp các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt được biểu diễn hình học bởi hai điểm A, B trên mặt phẳng tọa độ sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$, với $C(-1;1)$. Tổng các phần tử trong T bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 9. **D.** -1.

Câu 52: Trên tập hợp các số phức, cho biết phương trình $z^2 - 2z + \dfrac{c}{d} = 0$ (với $c, d \in \mathbb{Z}$ và phân số $\dfrac{c}{d}$ tối giản) có hai nghiệm z_1, z_2. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn hình học của z_1, z_2 trên mặt phẳng Oxy. Biết tam giác OAB đều, tính giá trị của $P = c + 4d$.

A. $P = 19$. **B.** $P = 16$. **C.** $P = 22$. **D.** $P = 14$.

Câu 53: Biết rằng phương trình $z^2 + 2az + b = 0$ (a, b là các số thực dương) có hai nghiệm phức liên hợp z_1, z_2. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức $w = 2, z_1, z_2$. Tính giá trị của biểu thức $T = b - 4a$ biết rằng ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác vuông có diện tích bằng 9.

A. 6. **B.** -8. **C.** 9. **D.** 14.

Câu 54: Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần thực và phần ảo đều âm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$ Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, điểm M nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = i^3\overline{z}_0$?

A. $M(2;1)$. **B.** $M(-2;-1)$. **C.** $M(2;-1)$. **D.** $M(-1;2)$.

Câu 55: Trên tập hợp các số phức, phương trình $z^2 + (a-2)z + 2a - 3 = 0$ (a là tham số thực) có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết rằng có 2 giá trị của tham số a để tam giác OMN có một góc bằng $120°$. Tổng các giá trị đó bằng bao nhiêu?

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -6.

Câu 56: Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2 - 6z + m = 0, m \in \mathbb{R}(1)$. Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0;20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0 \in \mathbb{N}$?

A. 10. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 13.

Câu 57: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m + 3 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $|z_0 + 2| = 6$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 58: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(2m-1)z + 4m^2 - 5m = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm z_0 thoả mãn $\left|{z_0}^2 + (1-4m)z_0 + 4m^2 - 5m - 3\right| = 10$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 59: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 2m^2 - 2m = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10;10)$ để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2| = |z_2 - 2|$?

A. 15 **B.** 18. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 60: Trong tập số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m-1)z + 4 = 0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$. Tính tổng các phần tử của tập S

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 61: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m-4)z + m^2 - 4m + 1 = 0$, m là tham số thự **C.** Có bao nhiêu giá trị m để phương trình đã cho có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa điều kiện $\left|z_1+z_2-2z_1z_2\right|=\left|z_1\right|$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 62: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình: $z^2-2(m+1)z+m^2-3m+5=0$ (m là tham số thực). Hỏi tổng các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm z_0 thỏa mãn $\left|\overline{z_0}\right|^3-12=5\left|z_0\right|$?

A. 9. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 63: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình: $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình trên có nghiệm z_0 thỏa mãn $\left|z_0\right|=6$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 64: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(2m-1)z+4m^2-5m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm z_0 thoả mãn $\left|z_0+3\right|=10$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 65: Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $z^2-(a-3)z+a^2+a=0$ có 2 nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|z_1+z_2\right|=\left|z_1-z_2\right|$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 66: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+7m-10=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $\left|z_1+1-3i\right|=3$, $\left|z_2-3+5i\right|=5$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 67: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+8m-4=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $\left|z_1^2-2mz_1+8m\right|=\left|z_2^2-2mz_2+8m\right|$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 68: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-\sqrt{m+1}z-\frac{1}{4}\left(m^2-5m-6\right)=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-10;10]$ để phương trình trên có hai nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|z_1+z_2\right|\le\left|z_1-z_2\right|$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 69: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m+3=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $\left|z_0+2\right|=6$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-(m+2)z+m^2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa năm $|z_1|^3+|z_2|^3=16$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta=-3m^2+4m+4$

TH1: $\Delta<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{2}{3} \\ m>2 \end{array}\right.$

Phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$.

Khi đó $|z_1|^3+|z_2|^3=16 \Leftrightarrow 2|z_1|^3=16 \Leftrightarrow |z_1|=2 \Leftrightarrow z_1.z_2=4$.

Theo Vi-ét ta có $m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$. Kết hợp điều kiện ta được $m=-2$.

TH2: $\Delta>0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}<m<4$.Vì

$|z_1|^3+|z_2|^3=|z_1+z_2|^3-3|z_1z_2|(|z_1|+|z_2|)=|z_1+z_2|^3-3z_1z_2(z_1+z_2)$

$=(m+2)^3-3m^2(m+2)=-2m^3+12m+8$

Nên $-2m^3+12m+8=16 \Leftrightarrow -2m^3+12m-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1+\sqrt{3} \\ m=-1-\sqrt{3} \\ m=2 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta được $m=2; m=-1+\sqrt{3}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Cho phương trình $z^2-2mz+6m-8=0$. (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$?

A. 4 . **B.** 1 . **C.** 3 . **D.** 2 .

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta'=m^2-6m+8$

TH1: $\Delta'>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<2 \end{array}\right.$

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt z_1,z_2 và

$z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1^2=z_2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=z_2\,(loai) \\ z_1=-z_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow 2m=0 \Leftrightarrow m=0\,(tm)$

TH2: $\Delta'<0 \Leftrightarrow 2<m<4$

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm phức phân biệt z_1,z_2

$z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1.z_2=z_1.z_1$ (luôn đúng)

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{3\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 3: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2+2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=8$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\Delta'=2m-1$.

TH1: $\Delta'<0\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$.

Phương trình có hai nghiệm phức $z_{1,2}=m+1\pm i\sqrt{-2m+1}$.

Ta có $|z_1|=|z_2|$, do đó $|z_1|+|z_2|=8\Leftrightarrow|z_1|=4$

$\Leftrightarrow(m+1)^2-2m+1=16\Leftrightarrow m^2=14\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\sqrt{14}\,(l)\\m=-\sqrt{14}\,(tm)\end{array}\right.$.

TH2: $\Delta'>0\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$

Phương trình có hai nghiệm thực phân biệt z_1,z_2.

Ta có $z_1+z_2=2(m+1)>0;z_1z_2=m^2+2>0,\forall m>\frac{1}{2}$.Suy ra: $z_1>0,z_2>0$.

Khi đó $|z_1|+|z_2|=8\Leftrightarrow z_1+z_2=8\Leftrightarrow 2(m+1)=8\Leftrightarrow m=3(tm)$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 4: Cho các số thực b,c sao cho phương trình $z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm phức $z_1;z_2$ với phần thực là số nguyên và thỏa mãn $|z_1+3-2i|=1$ và $(z_1-2i)(z_2+2)$ là số thuần ảo. Khi đó, $b+c$ bằng

A. -1. **B.** 12. **C.** 4. **D.** -12.

Lời giải

Chọn B

Trường hợp 1: Nếu các nghiệm của phương trình là các số thực $x;y$ thì

$|z_1+3-2i|=|(x+3)-2i|=\sqrt{(x+3)^2+4}=2>1$ mâu thuẫn với giả thiết.

Trường hợp 2: Các nghiệm phức của phương trình không là các số thực

Giả sử $z_1=x+yi\Rightarrow z_2=\overline{z_1}=x-yi$.

Khi đó $|z_1+3-2i|=1\Leftrightarrow(x+3)^2+(y-2)^2=1\quad(1)$.

Lại có $(z_1-2i)(z_2+2)=[x+(y-2)i].[(x+2)-yi]$

$=x.(x+2)+y.(y-2)+[(x+2).(y-2)-xy].i$ là một số thuần ảo.

Suy ra $x.(x+2)+y.(y-2)=0\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-2y=0\quad(2)$.

Giải hệ gồm (1) và (2): $\begin{cases}(x+3)^2+(y-2)^2=1\\x^2+y^2+2x-2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}\Rightarrow z_1=-2+2i$; $z_2=-2-2i$.

Vì vậy theo Viet ta có: $\begin{cases}z_1+z_2=-b=(-2+2i)+(-2-2i)=-4\\z_1.z_2=c=(-2+2i).(-2-2i)=8\end{cases}\Rightarrow b+c=4+8=12$.

Câu 5: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4 + (4-m)z^2 - 4m = 0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 6$.

A. $m = -1$. **B.** $m = \pm 2$. **C.** $m = \pm 3$ **D.** $m = \pm 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z^4 + (4-m)z^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow (z^2+4)(z^2-m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = -4 \quad (1) \\ z^2 = m \quad (2) \end{array}\right.$

Ta có: $|z^n| = |z|^n$.

$z_1; z_2$ là nghiệm của phương trình (1). Ta có: $|z_1| = |z_2| = \sqrt{|-4|} = 2$.

$z_3; z_4$ là nghiệm của phương trình (2). Ta có: $|z_3| = |z_4| = \sqrt{|m|}$.

Theo đề ra ta có: $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{|m|} + 4 = 6 \Leftrightarrow \sqrt{|m|} = 1 \Leftrightarrow |m| = 1$ (thỏa mãn).

Kết luận $m = \pm 1$.

Câu 6: Trong tập số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m-1)z + 2m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$. Tổng các phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $z^2 - 2(m-1)z + 2m - 2 = 0$, ta có:

$\Delta' = [-(m-1)]^2 - 1.(2m-2) = m^2 - 4m + 3$.

TH1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < 1 \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2.

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2(m-1) \\ z_1 z_2 = 2m - 2 \end{cases}$.

Theo đề bài ta có: $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow 2(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

TH2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$

Phương trình luôn có hai nghiệm phức z_1, z_2 luôn thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$.

Do đó $S = \{2\}$. Vậy tổng các phần tử của tập S là 1.

Câu 7: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - (a-3)z + a^2 + a = 0$ (a là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta = -3a^2 - 10a + 9$.

TH1: $\Delta \ge 0$, phương trình có 2 nghiệm $z_{1,2} = \dfrac{a-3\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, khi đó

$\left|z_1+z_2\right| = \left|z_1-z_2\right| \Leftrightarrow \left|a-3\right| = \left|\sqrt{\Delta}\right| \Leftrightarrow \left(a-3\right)^2 = \Delta \Leftrightarrow 4a^2+4a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-1 \end{array}\right.$. (thỏa mãn điều kiện $\Delta \ge 0$).

TH2: $\Delta < 0$, phương trình có 2 nghiệm $z_{1,2} = \dfrac{a-3\pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$, khi đó

$\left|z_1+z_2\right| = \left|z_1-z_2\right| \Leftrightarrow \left|a-3\right| = \left|i\sqrt{-\Delta}\right| \Leftrightarrow \left(a-3\right)^2 = -\Delta \Leftrightarrow 2a^2+16a-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-9 \end{array}\right.$. (thỏa mãn điều kiện $\Delta < 0$).

Vậy có 4 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-6z+m=0$ (1) (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(0;20)$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2}$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là: $\Delta = 9-m \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 9$.

Trường hợp 1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 9$. Khi đó phương trình $(*)$ có 2 nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 và $z_1 = \overline{z_1}$, $z_2 = \overline{z_2}$. Nên $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1{}^2 = z_2{}^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = z_2 \\ z_1 = -z_2 \end{array}\right.$

Với $z_1 = z_2$, không thoả mãn yêu cầu phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, nên loại.

Với $z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1+z_2=0$ không thỏa mãn, do theo Vi-ét, ta có $z_1+z_2=6$.

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 9$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 và $z_2 = \overline{z_1}$, $z_1 = \overline{z_2}$. Yêu cầu $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1z_2 = z_1z_2$ luôn đúng với $m > 9$.

Vậy trong khoảng $(0;20)$ có 10 số m_0 thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(2m-1)z+m^2=0$ (m là số thực). Khi phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 sao cho biểu thức $T = \left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-10\left|z_1z_2\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $[1;2)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2};3\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\Delta' = 3m^2-4m+1$.

TH1: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 3m^2-4m+1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < m < 1$.

Phương trình có hai nghiệm phức $z_{1,2} = 2m-1 \pm i\sqrt{-3m^2+4m-1}$.

Ta có $|z_1|^2 = |z_2|^2 = z_1z_2 = m^2$.

Do đó $T = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 10|z_1z_2| = 2z_1z_2 - 10|z_1z_2| = -8m^2 > -8, \forall m \in \left(\frac{1}{3};1\right)$.

Trường hợp này không tồn tại m để T đạt giá trị nhỏ nhất.

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < \frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Phương trình có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2.

Ta có $z_1 + z_2 = 2(2m-1) > 0; z_1z_2 = m^2$.

Khi đó $T = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 10|z_1z_2| = z_1^2 + z_2^2 - 10|z_1z_2| = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 - 10|z_1z_2|$

$= 4(2m-1)^2 - 12m^2 = 4m^2 - 16m + 4 = 4(m-2)^2 - 12 \geq -12, \forall m \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$.

Vậy biểu thức T đạt giá trị nhỏ nhất bằng -12 khi $m = 2$.

Câu 10: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Khi đó $z_1^{2021} - z_2^{2022} + \frac{1}{z_1^{2021}} - \frac{1}{z_2^{2022}}$ bằng

A. -1. **B.** $2^{2021}i$. **C.** 2022. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$ mà $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = -1$

$\Rightarrow z_1^{2021} = (z_1^3)^{673}.z_1^2 = (-1)^{673}.z_1^2 = -z_1^2$, $z_2^{2022} = (z_2^3)^{674} = (-1)^{674} = 1$

$\Rightarrow z_1^{2021} - z_2^{2022} + \frac{1}{z_1^{2021}} - \frac{1}{z_2^{2022}} = -z_1^2 - 1 + \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{-1} = -\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2 + \frac{1}{-\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2} - 2 = 1 - 2 = -1$

Câu 11: Gọi S là tập hợp các số thực m để phương trình $z^2 + 3z + m^2 - 2m = 0$ có một nghiệm phức z_0 với $|z_0| = 2$. Tổng tất cả các phần tử trong S là

A. 0. **B.** -6. **C.** -5. **D.** 4.

Lời giải

Cách 1

TH1: z_0 là số thực

$|z_0| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = 2 \\ z_0 = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - 2m + 10 = 0 (VN) \\ m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$

TH2: z_0 không phải là số thực $\Leftrightarrow \Delta = 9 - 4(m^2 - 2m) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m > \frac{9}{4}$ (1)

Vì phương trình $z^2+3z+m^2-2m=0\left(*\right)$ có các hệ số thực và z_0 là nghiệm của $\left(*\right)$ nên $\overline{z}_0$ cũng là nghiệm của $\left(*\right)$.

Theo Viet ta có $z_0.\overline{z}_0=m^2-2m\Leftrightarrow 4=\left|z_0\right|^2=m^2-2m$ (thỏa (1))

$\Leftrightarrow m^2-2m-4=0\Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{5}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 4.

Cách 2:

Gọi $z_0=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$

$\left|z_0\right|=2\Leftrightarrow a^2+b^2=4$ (1)

z_0 là nghiệm của phương trình $z^2+3z+m^2-2m=0$ $\Leftrightarrow\left(a+bi\right)^2+3\left(a+bi\right)+m^2-2m=0$

$\Leftrightarrow a^2-b^2+3a+m^2-2m+(2ab+3b)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2+3a+m^2-2m=0\ (2)\\ 2ab+3b=0\ (3)\end{cases}$

Ta có $(3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ a=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$

Với $b=0$. Từ $(1)\Rightarrow a^2=4\Leftrightarrow a=\pm 2$.

Khi $b=0,a=2$, lúc đó: $\left(2\right)\Leftrightarrow m^2-2m+10=0$ (vô nghiệm)

Khi $b=0,a=-2$, lúc đó: $\left(2\right)\Leftrightarrow m^2-2m-2=0\Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{3}$

Với $a=-\dfrac{3}{2}$, lúc đó : $\left(1\right)\Leftrightarrow b^2=\dfrac{7}{4}$.

Do đó: $\left(2\right)\Leftrightarrow m^2-2m-4=0\Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{5}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 4 .

Câu 12: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2\left(m+2\right)z+2m^2-3m+10=0$ (m là số thực). Biết rằng phương trình trên có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{\left|z_1\right|}+\dfrac{1}{\left|z_2\right|}=\dfrac{1}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left|z-z_1\right|+\left|z-z_2\right|$ với $z\in\mathbb{C}$.

A. 0. **B.** $\sqrt{39}$. **C.** $\sqrt{231}$. **D.** $\sqrt{613}$.

Lời giải

Chọn C

$\Delta'=\left(m+2\right)^2-\left(2m^2-3m+10\right)=-m^2+7m-6$.

TH1: $\Delta'>0\Leftrightarrow 1<m<6$.

Ta có: $\begin{cases}S=2\left(m+2\right)>0\\ P=2m^2-3m+10>0\end{cases}$, $\forall m\in\left(1;6\right)$ nên phương trình có 2 nghiệm thực $z_2>z_1>0$.

Do đó: $\dfrac{1}{\left|z_1\right|}+\dfrac{1}{\left|z_2\right|}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 4S=P\Leftrightarrow 2m^2-11m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{-1}{2}\\ m=6\end{array}\right.$ (loại).

TH2: $\Delta'<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<1\\ m>6\end{array}\right.$.

Phương trình có hai nghiệm phức thoả: $z_2 = \overline{z_1}$ nên $P = z_1 z_2 = |z_1|^2 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{P}$.

Do đó: $\dfrac{1}{|z_1|} + \dfrac{1}{|z_2|} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{P}} + \dfrac{1}{\sqrt{P}} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow P = 64 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 54 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-9}{2} \\ m = 6 \end{array}\right.$.

So với ĐK nhận $m = \dfrac{-9}{2}$. Khi đó PT trở thành: $z^2 + 5z + 64 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{-5}{2} \pm \dfrac{\sqrt{231}}{2} i$.

$T = |z - z_1| + |z_2 - z| \geq |z_2 - z_1| = \sqrt{231}$. Vậy $\min T = \sqrt{231}$ đạt được tại $z = \dfrac{-5}{2}$.

Câu 13: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 8m - 12 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$?

A. 5 **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z^2 - 2mz + 8m - 12 = 0$ $(*)$ thì $\Delta' = m^2 - 8m + 12$.

TH1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 2 \end{array}\right.$. Khi đó phương trình $(*)$ có 2 nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 và theo yêu cầu bài toán: $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = z_2 \ (KTM) \\ z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow m = 0 \ (TM) \end{array}\right.$

TH2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 6$. Phương trình $(*)$ khi đó có 2 nghiệm $z_{1,2} = m \pm i\sqrt{|\Delta'|}$ luôn thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$. Nên: $m \in \{3; 4; 5\}$.

Vậy các giá trị m thỏa mãn là: $m \in \{0; 3; 4; 5\}$.

Câu 14: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 6z + m = 0$ (m là tham số thực). Gọi m_o là một giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2}$. Trong khoảng $(0; 20)$ có bao nhiêu giá trị m_o

A. 11. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $z^2 - 6z + m = 0$.

Ta có $\Delta' = 9 - m$.

Theo đề bài: $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2} \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Khi $\Delta' > 0$ phương trình có hai nghiệm thực phân biệt, khi đó:

$|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0$ (mâu thuẫn vì $z_1 + z_2 = 6$).

Khi $\Delta' < 0$ phương trình có hai nghiệm phức phân biệt là hai số phức liên hợp, hay: $9 - m < 0 \Leftrightarrow m > 9$. Suy ra Trong khoảng $(0; 20)$ có 10 giá trị m_o.

Câu 15: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+2m^2-2m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2|=|z_2-2|$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Ta có: $z^2-2mz+2m^2-2m=0$ $(*)$ thì $\Delta'=-m^2+2m$.

Trường hợp 1: $\Delta'>0\Leftrightarrow -m^2+2m>0\Leftrightarrow 0<m<2$.

Với $0<m<2$ phương trình có hai nghiệm thực $z_1\neq z_2$.

Khi đó $|z_1-2|=|z_2-2|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1-2=z_2-2\\ z_1-2=-(z_2-2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=z_2\ (L)\\ z_1+z_2=4\end{array}\right.$.

Suy ra $z_1+z_2=4\Leftrightarrow 2m=4\Leftrightarrow m=2$ (loại).

Trường hợp 2: $\Delta'<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<0\end{array}\right.$.

Phương trình $(*)$ khi đó có 2 nghiệm $z_{1,2}=m\pm i\sqrt{|-m^2+2m|}$.

Do đó $|z_1-2|=|z_2-2|$ (luôn đúng).

Kết hợp điều kiện $\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<0\end{array}\right.$ và $m\in(-10;10)$, m nguyên suy ra $m\in\{-9;-8;...;-1;3;4;...;9\}$

Vậy các giá trị nguyên của thỏa mãn là: $m\in\{-9;-8;...;-1;3;4;...;9\}$ nên có 16 giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ thoả mãn.

Câu 16: Gọi z_1,z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2+6z+10=0$. Giá trị biểu thức $\mathrm{w}=(2+z_1)^{1000}+(2+z_2)^{1000}$ là

A. $\mathrm{w}=2^{501}$. **B.** $\mathrm{w}=0$. **C.** $2^{500}i$. **D.** $\mathrm{w}=-2^{500}i$.

Lời giải

Chọn A

Có $z^2+6z+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-3+i\\ z=-3-i\end{array}\right.$.

Khi đó $\mathrm{w}=(2+z_1)^{1000}+(2+z_2)^{1000}=(-1+i)^{1000}+(-1-i)^{1000}$

$\mathrm{w}=\left[(-1+i)^4\right]^{250}+\left[(-1-i)^4\right]^{250}=4^{250}+4^{250}=2^{501}$.

Câu 17: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2mz-m+12=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=\sqrt{2}|z_1-z_2|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho có $\Delta'=m^2+m-12$.

Trường hợp 1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 3 \end{array}\right.$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm thực z_1, z_2 phân biệt.

Do đó, $|z_1| + |z_2| = \sqrt{2}|z_1 - z_2| \Leftrightarrow \left(|z_1| + |z_2|\right)^2 = \left(\sqrt{2}|z_1 - z_2|\right)^2$

$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2|z_1z_2| = 2\left(z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2\right) \Leftrightarrow \left(z_1 + z_2\right)^2 - 2z_1z_2 + 2|z_1z_2| = 2\left[\left(z_1 + z_2\right)^2 - 4z_1z_2\right]$

$\Leftrightarrow \left(z_1 + z_2\right)^2 - 6z_1z_2 - 2|z_1z_2| = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 6(-m + 12) - 2|-m + 12| = 0\ (*)$

Nếu $m < -4$ hoặc $3 < m < 12$ thì $(*) \Leftrightarrow 4m^2 - 8(-m + 12) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -6 \\ m = 4 \end{array}\right.$

Nếu $m \geq 12$ thì $(*) \Leftrightarrow 4m^2 - 4(-m + 12) = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 = 0$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 3$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 là hai số phức liên hợp:

$-m + i\sqrt{-m^2 - m + 12}$ và $-m - i\sqrt{-m^2 - m + 12}$.

Do đó, $|z_1| + |z_2| = \sqrt{2}|z_1 - z_2| \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 + \left(-m^2 - m + 12\right)} = 2\sqrt{-m^2 - m + 12}$

$\Leftrightarrow -m + 12 = -m^2 - m + 12 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn).

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 18: Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 + 3i| = 1$ và $|z_2 - 8 - 6i| = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $5b + c = -12.$ **B.** $5b + c = 4.$ **C.** $5b + c = -4.$ **D.** $5b + c = 12.$

Lời giải

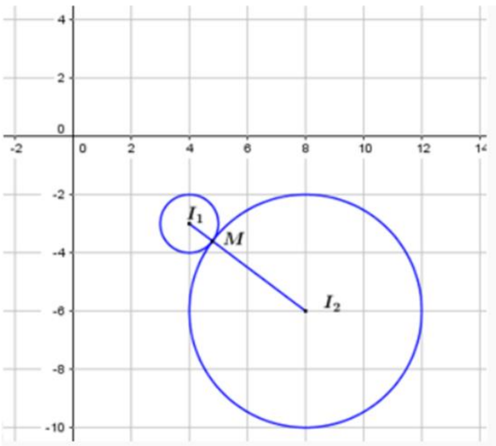
Chọn A

Vì z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nên $z_1 = \overline{z_2}$

Khi đó ta có $|z_2 - 8 - 6i| = 4 \Leftrightarrow |\overline{z_1} - 8 - 6i| = 4 \Leftrightarrow |z_1 - 8 + 6i| = 4.$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1.

$\Rightarrow M$ vừa thuộc đường tròn (C_1) tâm $I_1(4;-3)$, bán kính $R_1 = 1$ và đường tròn (C_2) tâm $I_1(8;-6)$, bán kính $R_1 = 4$ $\Rightarrow m \in (C_1) \cap (C_2)$.



Ta có $I_1I_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 = R_1 + R_2 \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc ngoài.

Do đó có duy nhất 1 điểm M thỏa mãn, tọa độ điểm M là nghiệm của hệ :

$\begin{cases} x^2+y^2-8x+6y+24=0 \\ x^2+y^2-16x+12y+84=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{24}{5} \\ y=-\dfrac{18}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{24}{5};-\dfrac{18}{5}\right) \Rightarrow z_1=\dfrac{24}{5}-\dfrac{18}{5}i$ là nghiệm của phương trình $z^2+bz+c=0 \Rightarrow z_2=\dfrac{24}{5}+\dfrac{18}{5}i$ cũng là nghiệm của phương trình $z^2+bz+c=0$.

Áp dụng định lí Vi ét ta có $z_1+z_2=-b=\dfrac{48}{5} \Rightarrow b=-\dfrac{48}{5}$; $z_1.z_2=c=36$

Vậy $5b+c=-48+36=-12$.

Câu 19: Trong tập hợp các số phức, cho phương trình $z^2-2(a-45)z+2016-80a=0$ (a là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 sao cho $|z_1|=|z_2|$

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta'=(a-45)^2-(2016-80a)=a^2-10a+9$

TH1:. $\Delta'>0 \Leftrightarrow a^2-10a+9>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<1 \\ a>9 \end{array}\right.$.

Phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt, khi đó: $|z_1|=|z_2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=z_2\,(l) \\ z_1=-z_2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow 2(a-45)=0 \Leftrightarrow a=45$.

TH2: $\Delta'<0 \Leftrightarrow a^2-10a+9<0 \Leftrightarrow a\in(1;9)$.

Khi đó phương trình có 2 nghiệm phức z_1,z_2 là 2 số phức liên hợp của nhau, ta luôn có $|z_1|=|z_2|$.

Với $a\in\mathbb{Z}^+ \Rightarrow a\in\{2;3;4;5;6;7;8;45\}$. Vậy có 8 giá trị nguyên dương cần tìm.

Câu 20: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $z^2+2mz+1=0$ có hai nghiệm phức phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+3|=|z_2+3|$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Với $\Delta'=m^2-1<0$, phương trình $z^2+2mz+1=0$ có hai nghiệm phức liên hợp $z_1=a+bi, z_2=a-bi$. Khi đó hiển nhiên $|z_1+3|=\sqrt{(a+3)^2+b^2}=|z_2+3|$.

Với $\Delta'=m^2-1>0$, phương trình $z^2+2mz+1=0$ có hai nghiệm thực phân biệt z_1,z_2. Đẳng thức $|z_1+3|=|z_2+3|$ tương đương với $z_1+z_2+6=0$, điều này nghĩa là $-2m+6=0$ tức $m=3$.

Tóm lại các số nguyên m cần tìm là $m=0, m=3$.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị m nguyên và $m\in[-2022;2022]$ để phương trình $z^2-2z+1-3m=0$ có hai nghiệm phức thỏa mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$.

A. 4045. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023

Lời giải

Chọn D

$\Delta = 4 - 4(1-3m) = 12m$

TH1. Nếu $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$

Khi đó phương trình có hai nghiệm thực $z_1 = 1 - \sqrt{3m}$ và $z_2 = 1 + \sqrt{3m}$

$\Rightarrow \overline{z_1} = 1 - \sqrt{3m},\ \overline{z_2} = 1 + \sqrt{3m}$

Ta có $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2} \Leftrightarrow \left(1 - \sqrt{3m}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{3m}\right)^2 \Leftrightarrow m = 0$

TH2. Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Khi đó phương trình có hai nghiệm phức $z_1 = 1 - i\sqrt{-3m}$ và $z_2 = 1 + i\sqrt{-3m}$

$\Rightarrow \overline{z_1} = 1 + i\sqrt{-3m},\ \overline{z_2} = 1 - i\sqrt{-3m}$

Mà $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2} \Leftrightarrow \left(1 - i\sqrt{-3m}\right)\left(1 + i\sqrt{-3m}\right) = \left(1 + i\sqrt{-3m}\right)\left(1 - i\sqrt{-3m}\right)$

$\Leftrightarrow 1 - 3m = 1 - 3m$

Kết hợp hai TH suy ra $m \leq 0$ thì phương trình luôn có hai nghiệm phức thỏa mãn $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2}$.

Mà $m \in Z, m \in [-2022; 2022] \Rightarrow m = \{-2022; -2021; ...; -1; 0\}$.

Vậy có 2023 giá trị m cần tìm.

Câu 22: Gọi z là nghiệm có phần ảo dương của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = z^{2022} - 2z^{2021} + \frac{3}{z^{2022}} - \frac{1}{z^{2021}} + 1$.

A. 0. **B.** i. **C.** $\frac{13}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **D.** $\frac{13}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Lời giải

Chọn C

$$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$$

Lấy $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, ta có: $z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ và $z^3 = 1$.

Suy ra $z^{2022} = \left(z^3\right)^{674} = 1$ và $z^{2021} = \left(z^3\right)^{673}.z^2 = z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Suy ra $A = 1 - 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 3 - \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} + 1$

Suy ra $A = 1 - 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 3 - \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} + 1 = \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Câu 23: Trên tập hợp các số phức, gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $mz^2 + 2(m+1)z - m + 6 = 0$ có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 1$. Tính S.

A. 3. **B.** -4. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $mz^2+2(m+1)z-m+6=0$.

TH1: $m=0\Rightarrow$ Phương trình đã cho có dạng $2z+6=0\Leftrightarrow z=-3\Rightarrow|z|=3$ không thõa mãn.

TH2: $m\neq 0$. Ta có $\Delta'=(m+1)^2-m(-m+6)=2m^2-4m+1$.

Nếu: $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow 2m^2-4m+1\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\leq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\\ m\geq\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thực $\Rightarrow$

z_0 là số thực

Theo bài ra, ta có $|z_0|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z_0=1\\ z_0=-1\end{array}\right.$.

Với $z_0=1$, ta có $m+2m+2-m+6=0\Leftrightarrow m=-4$ (thỏa mãn).

Với $z_0=-1$, ta có $m-2m-2-m+6=0\Leftrightarrow m=2$ (thỏa mãn).

Nếu: $\Delta'<0\Leftrightarrow 2m^2-4m+1<0\Leftrightarrow\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$, thì phương trình đã cho có hai nghiệm phức

z_0 là nghiệm của phương trình đã cho $\Rightarrow\overline{z_0}$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Áp dụng hệ thức viét, ta có $z_0.\overline{z_0}=\dfrac{-m+6}{m}$ mà $z_0.\overline{z_0}=|z_0|^2=1\Rightarrow\dfrac{-m+6}{m}=1\Leftrightarrow m=3$ (không thõa mãn)

Vậy $m=-4;m=2\Rightarrow S=-2$.

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $z^2-2mz+9m-8=0$ có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta'>0\\ z_1+z_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-9m+8>0\\ m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=0\\ \begin{cases}\Delta'<0\\ |z_1|=|z_2|\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<8\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{2;3;4;5;6;7\}\end{array}\right.$.

Vậy có tất cả 7 giá trị m cần tìm.

Câu 25: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $(z-1-a)(z+1-a)=6z$ (a là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của a để phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|^2+|z_2|^2=42$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(z-1-a)(z+1-a)=6z\Leftrightarrow z^2-2(a+3)z+a^2-1=0$ (1) có $\Delta'=6a+10$.

Trường hợp 1: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{5}{3}$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm thực z_1, z_2.

Suy ra $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 42 \Leftrightarrow \left[2(a+3)\right]^2 - 2(a^2-1) = 42 \Leftrightarrow 2a^2 + 24a - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -6+\sqrt{38} \\ a = -6-\sqrt{38} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện nhận $a = -6+\sqrt{38}$.

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{5}{3}$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 = \overline{z_2}$.

Suy ra $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 42 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = 42 \Leftrightarrow z_1 z_2 = 21 \Leftrightarrow a^2 - 22 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{22} \\ a = -\sqrt{22} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $a < -\frac{5}{3}$, nhận $a = -\sqrt{22}$.

Vậy có 2 giá trị của a thỏa mãn.

Câu 26: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 - 4(m+1)z + 4m^2 + 2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình đó có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0| = 4$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $z^2 - 4(m+1)z + 4m^2 + 2 = 0$ có $\Delta' = 4(m+1)^2 - 4m^2 - 2 = 8m + 2$.

Trường hợp 1: Nếu $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{4}$. Phương trình đã cho có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0| = 4$, suy ra $z_0 = 4$ hoặc $z_0 = -4$.

Nếu $z_0 = 4$, suy ra $16 - 4(m+1).4 + 4m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{4+\sqrt{14}}{2} \\ m = \frac{4-\sqrt{14}}{2} \end{array}\right. (t)$

Nếu $z_0 = -4$, suy ra $16 + 4(m+1).4 + 4m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 16m + 34 = 0$ (vô nghiệm).

Trường hợp 2: Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$, phương trình đã cho có hai nghiệm phức $z_1 = 2(m+1) - i\sqrt{-8m-2}$ và $z_2 = 2(m+1) + i\sqrt{-8m-2}$.

Khi đó $|z_0| = 4 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 8m - 2 = 16 \Leftrightarrow 4m^2 = 14 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{\sqrt{14}}{2}\ (l) \\ m = -\frac{\sqrt{14}}{2}\ (t) \end{array}\right.$.

Vậy có 3 giá trị của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+4)z + m^2 - 8 = 0$ (m là tham số thực). Tính tổng các giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_o thỏa mãn $|z_o| = 3$?

A. $\sqrt{17}$. **B.** 6. **C.** $6+\sqrt{17}$. **D.** $6-\sqrt{17}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $z^2-2(m+4)z+m^2-8=0$ có $\Delta'=8m+24$.

Nếu $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 8m+24\ge 0\Leftrightarrow m\ge -3$ thì phương trình có nghiệm z_o thỏa $|z_o|=3$ suy ra $z_o=3$ hoặc $z_o=-3$.

Với $z_o=3$ ta có $9-2(m+4).3+m^2-8=0\Leftrightarrow m^2-6m-23=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3+4\sqrt{2}\\ m=3-4\sqrt{2}\end{array}\right.$ (nhận).

Với $z_o=-3$ ta có $9-2(m+4)(-3)+m^2-8=0\Leftrightarrow m^2+6m+25=0$ (vô nghiệm).

Nếu $\Delta'<0\Leftrightarrow m<-3$, khi đó phương trình có hai nghiệm phức $z_1;z_2$ thỏa mãn $z_o=z_1=\overline{z_2}$.

Suy ra $|z_o|=3\Leftrightarrow z_o.\overline{z_o}=9\Leftrightarrow z_1.z_2=9\Leftrightarrow m^2-8=9\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{17}$.

Kết hợp với điều kiện $m<-3$ suy ra $m=-\sqrt{17}$.

Vậy tổng các giá trị của m là $3+4\sqrt{2}+3-4\sqrt{2}-\sqrt{17}=6-\sqrt{17}$.

Câu 28: Tìm tổng các giá trị của số thực a sao cho phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0|=2$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Trường hợp $z_0\in\mathbb{R}$. Khi đó $|z_0|=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0=2\\ z_0=-2\end{array}\right.$.

Nếu $z_0=2$ thì $a^2-2a+10=0$ không có nghiệm thực a.

Nếu $z_0=-2$ thì $a^2-2a-2=0$ luôn có nghiệm thực a và theo định lý Vi-ét tổng hai nghiệm thực này là 2 (1).

Trường hợp phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức $z_0\notin\mathbb{R}$ thì $\overline{z}_0$ cũng là nghiệm phức của phương trình.

Vì $|z_0|=2$ nên $z_0.\overline{z}_0=|z_0|^2=4$.

Theo định lý Vi-ét ta có $z_0.\overline{z}_0=\dfrac{a^2-2a}{1}=a^2-2a\Rightarrow a^2-2a=4\Leftrightarrow a^2-2a-4=0$ $(*)$.

Phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm thực phân biệt, theo định lý Vi-ét ta có tổng các giá trị của số thực a bằng 2 (2).

Từ (1) và (2) suy ra tổng các giá trị của số thực a sao cho phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0|=2$ là 4.

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình: $4z^2+4(m-1)z+m^2-3m=0$ có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=2$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $4z^2+4(m-1)z+m^2-3m=0$ (1)

Có: $\Delta' = 4.(m-1)^2 - 4\left(m^2 - 3m\right) = 4m + 4$

Trường hợp 1: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -1$. (1) có 2 nghiệm $z_1 = z_2 = 1 \Rightarrow |z_1| + |z_2| = 2$

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -1 \Rightarrow (1)$ có 2 nghiệm phức liên hợp $z_{1,2} = a \pm b.i\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$.

Ta có: $\begin{cases} |z_1| + |z_2| = 2 \\ z_1.z_2 = \dfrac{m^2 - 3m}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \dfrac{m^2 - 3m}{4} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{m^2 - 3m}{4} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Trường hợp 3: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -1 \Rightarrow (1)$ có 2 nghiệm thực phân biệt thỏa mãn định lý Viet:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 - m \\ z_1.z_2 = \dfrac{m^2 - 3m}{4} \end{cases}$$

Mà $|z_1| + |z_2| = 2 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2.|z_1.z_2| = 4 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 + 2.|z_1.z_2| = 4$

$\Leftrightarrow (1-m)^2 - \dfrac{m^2 - 3m}{2} + \dfrac{\left|m^2 - 3m\right|}{2} = 4 \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30: Cho số phức w và hai số thực a, b. Biết $z_1 = w + 2i$ và $z_2 = 2w - 3$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tính giá trị của $T = |z_1| + |z_2|$.

A. $T = 2\sqrt{13}$. **B.** $T = 4\sqrt{13}$. **C.** $T = \dfrac{2\sqrt{97}}{3}$. **D.** $T = \dfrac{2\sqrt{85}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Vì z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình đã cho nên $\begin{cases} \overline{z_1} = z_2 \\ \overline{z_2} = z_1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{w} - 2i = 2w - 3 \\ 2\overline{w} - 3 = w + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\overline{w} - 4i = 4w - 6 \\ 2\overline{w} - 3 = w + 2i \end{cases} \Rightarrow w = 3 - \dfrac{2}{3}i$

$\Rightarrow z_1 = 3 + \dfrac{4}{3}i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{97}}{3}$.

Mà z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình trên nên $|z_1| = |z_2| = \dfrac{\sqrt{97}}{3}$. Vậy $T = \dfrac{2\sqrt{97}}{3}$.

Câu 31: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2az + b^2 - 20 = 0\,(1)$ với a, b là các tham số nguyên dương. Khi phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn: $z_1 + 3iz_2 = 7 + 5i$ thì giá trị của biểu thức $7a + 5b$ bằng

A. 19. **B.** 17. **C.** 32. **D.** 40.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét: Nếu $\Delta' = a^2 - b^2 + 20 \geq 0$

Giả thiết $z_1+3iz_2=7+5i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=7 \\ z_2=\frac{5}{3} \end{cases}$. Suy ra $7+\frac{5}{3}=z_1+z_2=2a\in\mathbb{Z}$ (vô lý)

Suy ra: $\Delta'=a^2-b^2+20<0$

Giải phương trình (1) ta có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z=a+\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}i \\ z=a-\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}i \end{array}\right.$

TH1: $\begin{cases} z_1=a-\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}i \\ z_2=a+\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}i \end{cases} \Rightarrow z_1+3iz_2=7+5i$

$\Leftrightarrow a-3\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}+\left(3a-\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}\right)i=7+5i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}=7 \\ 3a-\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ \sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}=-2 \end{cases} \Rightarrow VN$

TH2: $\begin{cases} z_1=a+\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}i \\ z_2=a-\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}i \end{cases} \Rightarrow z_1+3iz_2=7+5i$

$\Leftrightarrow a+3\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}+\left(3a+\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}\right)i=7+5i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}=7 \\ 3a+\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ \sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ \left[\begin{array}{l} b^2=25 \\ b^2=17(l) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ \left[\begin{array}{l} b=5 \\ b=-5(l) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}$

Suy ra $7a+5b=32$

Cách 2

Nhận xét: Nếu $\Delta'=a^2-b^2+20\ge 0$

Giả thiết $z_1+3iz_2=7+5i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=7 \\ z_2=\frac{5}{3} \end{cases}$. Suy ra $7+\frac{5}{3}=z_1+z_2=2a\in\mathbb{Z}$ (vô lý)

Suy ra: $\Delta'=a^2-b^2+20<0$

Giả thiết ta có: $\begin{cases} z_1+3iz_2=7+5i \\ z_2-3iz_1=7-5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1+3i\left(7-5i+3iz_1\right)=7+5i \\ z_2-3iz_1=7-5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=1+2i \\ z_2=1-2i \end{cases}$

Áp dụng viet suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow 7a+5b=32$

Câu 32: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2mz+m^2-2m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình có nghiệm z_0 thỏa mãn $\left|z_0\right|=2$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta' = 2m$

Trường hợp 1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m > 0 \Leftrightarrow m > 0$ phương trình có hai nghiệm thực, khi đó $|z_0| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = 2 \\ z_0 = -2 \end{array}\right.$

Nếu $z_0 = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho thì ta có

$2^2 - 2m.2 + m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1(nhaän \\ m = 4(nhaän) \end{array}\right.$

Nếu $z_0 = -2$ là nghiệm của phương trình đã cho thì ta có

$(-2)^2 - 2m.(-2) + m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m^2 + 3m + 4 = 0$ (vô nghiệm)

Trường hợp 2: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ phương trình đã cho là $z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$ không thỏa mãn điều kiện $|z_0| = 2$ nên $m = 0$ không là giá trị càn tìm.

Trường hợp 3: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m < 0 \Leftrightarrow m < 0$ khi đó phương trình có hai nghiệm phức là $z_2 = m - \sqrt{-2m}i; z_1 = m + \sqrt{-2m}i$. Vì hai nghiệm này là hai số phức liên hợp, nên có modun bằng nhau, do đó ta chỉ cần xét một trường hợp.

Giả sử $z_0 = m + \sqrt{-2m}i$ khi đó $|z_0| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 2m} = 2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 - \sqrt{5}\,(nhaän) \\ m = 1 + \sqrt{5}\,(loaïi) \end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán, **Chọn D**

Câu 33: Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $z^2 - (a-3)z + a^2 + a = 0$ có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\Delta = (a-3)^2 - 4(a^2 + a) = -3a^2 - 10a + 9$

TH1: $\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ |z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ |z_1 + z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a^2 - 10a + 9 \ge 0 \\ z_1.z_2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a^2 - 10a + 9 \ge 0 \\ a^2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -1 \end{array}\right..$

TH2: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ |z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ |a - 3| = \left|i.\sqrt{3a^2 + 10a - 9}\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a^2 - 10a + 9 < 0 \\ 2a^2 + 16a - 18 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -9 \end{array}\right..$

Vậy có 4 giá trị nguyên của a thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 34: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 8m - 12 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = 4$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta' = m^2 - 8m + 12$. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 2 \end{array}\right.$.

Phương trình có hai nghiệm thực z_1, z_2 và $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2m \\ z_1.z_2 = 8m - 12 \end{cases}$.

Theo giả thiết: $|z_1| + |z_2| = 4 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2|z_1z_2| = 16 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 + 2|z_1z_2| = 16$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 2(8m - 12) + 2|8m - 12| = 16 \Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 8 + 2|8m - 12| = 0$ (*)

Với $m > 6$ hoặc $\frac{3}{2} \le m < 2$:

$(*) \Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 8 + 2(8m - 12) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2\ \ (KTM) \\ m = -2\ (KTM) \end{array}\right.$.

Với $m < \frac{3}{2}$:

$(*) \Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 8 + 2(-8m + 12) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 32m + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 - 2\sqrt{2}\ \ (TM) \\ m = 4 + 2\sqrt{2}\,(KTM) \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 6$.

Phương trình có hai nghiệm phức z_1, z_2 và $z_1 = \overline{z_2} \Rightarrow |z_1| = |\overline{z_2}| = |z_2|$.

Theo giả thiết $|z_1| + |z_2| = 4 \Leftrightarrow 2|z_1| = 4 \Leftrightarrow |z_1| = 2$ (**).

Khi đó (**) $\Leftrightarrow \left|m + i\sqrt{m^2 - 8m + 12}\right| = 2 \Leftrightarrow 2m^2 - 8m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (không thỏa mãn).

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn là $.\,m = 4 - 2\sqrt{2}$..

Câu 35: Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $z^2 - (a - 3)z + a^2 + a = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta = [-(a - 3)]^2 - 4(a^2 + a) = -3a^2 - 10a + 9$

Trường hợp 1: $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow -3a^2 - 10a + 9 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-5 - 2\sqrt{13}}{3} \le a \le \frac{-5 + 2\sqrt{13}}{3}(*)$

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm thực z_1, z_2 (nghiệm thực cũng là nghiệm phức có phần ảo bằng 0), thỏa mãn $\begin{cases} z_1 + z_2 = a - 3 \\ |z_1 - z_2| = \left|\sqrt{\Delta}\right| \end{cases}$.

Suy ra $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |a - 3| = \left|\sqrt{\Delta}\right| \Leftrightarrow (a - 3)^2 = \Delta$

$\Leftrightarrow (a - 3)^2 = -3a^2 - 10a + 9 \Leftrightarrow 4a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -1 \end{array}\right.$ đều thỏa mãn $(*)$.

Trường hợp 2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow -3a^2 - 10a + 9 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < \dfrac{-5-2\sqrt{13}}{3} \\ a > \dfrac{-5+2\sqrt{13}}{3} \end{array}\right. (**)$

Khi đó phương trình có hai nghiệm phức z_1, z_2, thỏa mãn $\begin{cases} z_1 + z_2 = a - 3 \\ |z_1 - z_2| = \left|i\sqrt{|\Delta|}\right| \end{cases}$.

Suy ra $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |a-3| = \left|i\sqrt{|\Delta|}\right| \Leftrightarrow (a-3)^2 = -\Delta$

$\Leftrightarrow (a-3)^2 = 3a^2 + 10a - 9 \Leftrightarrow 2a^2 + 16a - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -9 \end{array}\right.$ đều thỏa mãn $(**)$.

Vậy có 4 số nguyên *a* thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36: Cho số phức w và hai số thực b, c. Biết rằng $w+2$ và $3w-4i$ là hai nghiệm của phương trình $2022z^2 + bz + c = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = b + c$ bằng

A. $P = -4044$. **B.** $P = 8088$. **C.** $P = 4044$. **D.** $P = -8088$.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét: Trong tập số phức, phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 (*có phần ảo khác 0*) thì $z_1 = \overline{z_2}$.

Đặt $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Vì $b, c \in \mathbb{R}$ và phương trình $2022z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = w + 2$, $z_2 = 3w - 4i$ nên 2 nghiệm z_1, z_2 là 2 nghiệm phức có phần ảo khác 0.

Do đó $z_1 = \overline{z_2} \Leftrightarrow w + 2 = \overline{3w - 4i} \Leftrightarrow x + yi + 2 = \overline{3(x+yi) - 4i}$

$\Leftrightarrow x + 2 + yi = 3x + (4-3y)i \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 3x \\ y = 4 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow w = 1 + i \Rightarrow \begin{cases} z_1 = w + 2 = 3 + i \\ z_2 = 3w - 4i = 3 - i \end{cases}$.

Theo định lý Viet: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{2022} \\ z_2.z_2 = \dfrac{c}{2022} \end{cases}$, từ đó suy ra $\begin{cases} -\dfrac{b}{2022} = 6 \\ \dfrac{c}{2022} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6.2022 \\ c = 10.2022 \end{cases} \Rightarrow b + c = 8088$

Vậy $P = b + c = 8088$.

Câu 37: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$. Phần ảo của số phức $\left[(z_1 - i)(z_2 - i)\right]^{2022}$ là

A. -2^{1011}. **B.** 2^{2022}. **C.** -2^{2022}. **D.** 2^{1011}.

Lời giải

Chọn D

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$ nên $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1.z_2 = 2 \end{cases}$.

$\left[(z_1 - i)(z_2 - i)\right]^{2022} = \left[z_1z_2 - i(z_1 + z_2) + i^2\right]^{2022} = (2 - i - 1)^{2022} = (1-i)^{2022}$

$= \left[(1-i)^2\right]^{1011} = (-2i)^{1011} = (-2)^{1011} i^{1011} = (-2)^{1011}\left(i^2\right)^{505} i = (-2)^{1011}(-1)i = 2^{1011} i$.

Vậy phần ảo của số phức $\left[(z_1-i)(z_2-i)\right]^{2022}$ là 2^{1011}.

Câu 38: Cho phương trình $4z^4+mz^2+4=0$ trong tập số phức và m là tham số thực. Gọi $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ là bốn nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $\left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right)=324$.

A. $\left[\begin{matrix} m=2 \\ m=-15 \end{matrix}\right.$. **B.** $\left[\begin{matrix} m=-2 \\ m=15 \end{matrix}\right.$. **C.** $\left[\begin{matrix} m=1 \\ m=-35 \end{matrix}\right.$. **D.** $\left[\begin{matrix} m=-1 \\ m=35 \end{matrix}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=z^2$, phương trình trở thành $4t^2+mt+4=0$ có hai nghiệm $t_1,\ t_2$.

Ta có $\begin{cases} t_1+t_2=-\dfrac{m}{4} \\ t_1.t_2=1 \end{cases}$. Do vai trò bình đẳng, giả sử ta có $z_1^2=z_2^2=t_1$, $z_3^2=z_4^2=t_2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (t_1+4)^2(t_2+4)^2=324 \Leftrightarrow \left[t_1t_2+4(t_1+t_2)+16\right]^2=324$

$\Leftrightarrow (-m+17)^2=18^2 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} -m+17=18 \\ -m+17=-18 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} m=-1 \\ m=35 \end{matrix}\right.$.

Câu 39: Tổng các giá trị nguyên của tham số a để phương trình $z^2-2(a+2)z+a^2+3a=0$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 4. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=2(a+2) \\ z_1.z_2=a^2+3a \end{cases}$

Mặt khác: $|z_1+z_2|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow \left|(z_1+z_2)^2\right|=\left|(z_1-z_2)^2\right|$

$\Leftrightarrow \left|(z_1+z_2)^2\right|=\left|(z_1+z_2)^2-4z_1z_2\right| \Leftrightarrow \left|4(a+2)^2\right|=\left|4(a+2)^2-4\left(a^2+3a\right)\right|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} (a+2)^2=(a+2)^2-\left(a^2+3a\right) \\ (a+2)^2=-(a+2)^2+\left(a^2+3a\right) \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} a^2+3a=0 \\ a^2+5a+8=0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} a=0 \\ a=-3 \end{matrix}\right.$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của a bằng -3.

Câu 40: Cho số phức w và hai số thực a,b Biết rằng $w+i$ và $2w-1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Tính tổng $S=a+b$

A. $\dfrac{13}{9}$ **B.** $\dfrac{-13}{9}$ **C.** $\dfrac{-5}{9}$ **D.** $\dfrac{5}{9}$

Lời giải

Chọn C

Đặt $w=x+yi$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$. Vì $a,\ b\in\mathbb{R}$ và phương trình $z^2+az+b=0$ có hai nghiệm là $z_1=w+i$, $z_2=2w-1$ (z_2 là số phức) nên $z_1;z_2$ là 2 số phức liên hợp

Ta có: $z_1=\overline{z_2} \Leftrightarrow w+i=\overline{2w-1} \Leftrightarrow x+yi+i=\overline{2(x+yi)-1}$

$\Leftrightarrow x+(y+1)i=(2x-1)-2yi \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x-1 \\ y+1=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow w=1-\dfrac{1}{3}i \Rightarrow \begin{cases} z_1=w+i=1+\dfrac{2}{3}i \\ z_2=2w-1=1-\dfrac{2}{3}i \end{cases}$.

Theo định lý Viet: $\begin{cases} z_1+z_2=-a \\ z_2.z_2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=-a \\ 1+\dfrac{4}{9}=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=\dfrac{13}{9} \end{cases}$.

Vậy $S=a+b=-\dfrac{5}{9}$.

Câu 41: Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $|z_1|+|z_2|=2$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Xét $z^2+z+m=0\ (1)$, $\Delta=1-4m$.

TH1: $\Delta<0 \Leftrightarrow 1-4m<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$. Khi đó (1) có hai nghiệm phức là hai số phức liên hợp của nhau.

Giả sử $z_1=z_0 \Rightarrow z_2=\overline{z_0}$.

Ta có: $z_0.\overline{z_0}=m \Rightarrow |z_0|^2=m \Rightarrow |z_0|=\sqrt{m}$ nên $T=|z_1|+|z_2|=2|z_0|=2\sqrt{m}$.

$T=2 \Leftrightarrow 2\sqrt{m}=2 \Leftrightarrow m=1$.

TH2: $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 1-4m \ge 0 \Leftrightarrow m \le \dfrac{1}{4}$. Khi đó (1) có hai nghiệm thực thỏa mãn $\begin{cases} z_1+z_2=-1 \\ z_1z_2=m \end{cases}$

$T=|z_1|+|z_2| \Rightarrow T^2=(z_1+z_2)^2+2|z_1z_2|-2z_1z_2=1+2|m|-2m.$

$T=2 \Leftrightarrow 1+2|m|-2m=2 \Leftrightarrow 2|m|-2m=1 \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ -4m=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{-1}{4}.$

Vậy $m=1$ là giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 42: Cho số phức w và hai số thực a, b. Biết rằng $w+i$ và $3-2w$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Tổng $S=a+b$ bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Đặt $w=x+yi\ (x, y \in \mathbb{R})$. Vì $a, b \in \mathbb{R}$ và phương trình $z^2+az+b=0$ có hai nghiệm là $z_1=w+i$, $z_2=3-2w$ nên $z_1=\overline{z_2} \Leftrightarrow w+i=\overline{3-2w} \Leftrightarrow x+yi+i=\overline{3-2(x+yi)}$

$\Leftrightarrow x+(y+1)i=(3-2x)+2yi \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2x \\ y+1=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$

$\Rightarrow w=1+i \Rightarrow \begin{cases} z_1 = w+i = 1+2i \\ z_2 = 3-2w = 1-2i \end{cases}$.

Theo định lý Viet: $\begin{cases} z_1+z_2=-a \\ z_2.z_2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=-a \\ 1+4=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$.

Vậy $S=a+b=3$.

Câu 43: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-mz+m+1=0$. Tính tổng các giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1{}^2+z_2{}^2=z_1z_2+1$.

A. -1. **B.** -4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\Delta = m^2-4m-4$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \notin \left\{2-2\sqrt{2}; 2+2\sqrt{2}\right\}$.

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình.

Theo Viet ta có: $\begin{cases} z_1z_2=m+1 \\ z_1+z_2=m \end{cases} \ (1)$.

$z_1{}^2+z_2{}^2=z_1z_2+1 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2-2z_1z_2=z_1z_2+1 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2-3z_1z_2=1 \ (2)$.

Thay (1) vào (2) ta có: $m^2-3(m+1)=1 \Leftrightarrow m^2-3m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=4 \end{array}\right. \ (tm)$.

Vậy tổng các giá trị của m là $-1+4=3$.

Câu 44: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-2mz+4m-3=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=8$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta' = m^2-4m+3$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' \neq 0$. Nên để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=8$ ta xét hai trường hợp:

TH1: $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ |z_1|+|z_2|=8 \end{cases}$, trong trường hợp này z_1, z_2 là hai nghiệm thực nên $\begin{cases} m^2-4m+3>0 \\ \left(|z_1|+|z_2|\right)^2=64 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty) \\ (z_1+z_2)^2-2z_1z_2+2|z_1z_2|=64 \end{cases} \overset{m\in\mathbb{Z}^+}{\Leftrightarrow} \begin{cases} m \in (3;+\infty) \\ 4m^2-2(4m-3)+2.|4m-3|=64 \end{cases} \overset{m\in\mathbb{Z}^+}{\Leftrightarrow} \begin{cases} m \in (3;+\infty) \\ 4m^2=64 \end{cases}$

$\overset{m\in\mathbb{Z}^+}{\Leftrightarrow} m=4$.

TH2: $\begin{cases} \Delta' < 0 \\ |z_1|+|z_2|=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+3<0 \\ \left|m+i\sqrt{-m^2+4m-3}\right|+\left|m-i\sqrt{-m^2+4m-3}\right|=8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (1;3) \\ 2\sqrt{m^2 + (-m^2 + 4m - 3)} = 8 \end{cases} \overset{m \in \mathbb{Z}^+}{\Rightarrow} \begin{cases} m = 2 \\ \sqrt{5} = 4 \end{cases}$, nên không tồn tại số nguyên dương m trong trường hợp này.

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn điều kiện bài ra.

Câu 45: Trên tập các số phức, xét phương trình $z^2 - mz + m + 8 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 phân biệt thỏa mãn $\left|z_1\left(z_1^2 + mz_2\right)\right| = \left(m^2 - m - 8\right)|z_2|$?

A. 12. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta = m^2 - 4m - 32$ là biệt thức của phương trình.

TH1: Xét $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 32 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 8 \\ m < -4 \end{array}\right.$ khi đó phương trình có hai nghiệm thực phân biệt. Ta có $z_1^2 = mz_1 - m - 8$ suy ra $z_1^2 + mz_2 = m(z_1 + z_2) - m - 8 = m^2 - m - 8$ do đó $\left|z_1\left(z_1^2 + mz_2\right)\right| = \left(m^2 - m - 8\right)|z_2| \Leftrightarrow \left|m^2 - m - 8\right||z_1| = \left(m^2 - m - 8\right)|z_2|$ (*).

Nếu $z_1.z_2 = 0$ thì $m + 8 = 0 \Rightarrow m = -8$ không thỏa mãn. Khi đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 8 > 0 \\ |z_1| = |z_2| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 8 > 0 \\ z_1 = -z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 8 > 0 \\ m = 0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

TH2: Xét $\Delta < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 8$ khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt và $|z_1| = |z_2|$, ta có $\left|z_1\left(z_1^2 + mz_2\right)\right| = \left(m^2 - m - 8\right)|z_2| \Leftrightarrow \left|m^2 - m - 8\right||z_1| = \left(m^2 - m - 8\right)|z_2|$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1 + \sqrt{33}}{2} \\ m \leq \dfrac{1 - \sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện ta được $m \in \{-3; 4; 5; 6; 7\}$.

Vậy có tất cả là 5 số nguyên cần tìm.

Câu 46: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 6z + m = 0$ (1) (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(0;20)$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2}$?

A. 20. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là: $\Delta = 9 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 9$.

Trường hợp 1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 9$. Khi đó phương trình $(*)$ có 2 nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 và $z_1 = \overline{z_1}$, $z_2 = \overline{z_2}$. Nên $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow {z_1}^2 = {z_2}^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = z_2 \\ z_1 = -z_2 \end{array}\right.$

Với $z_1 = z_2$, không thoả mãn yêu cầu phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, nên loại.

Với $z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0$ không thỏa mãn, do theo Vi-ét, ta có $z_1 + z_2 = 6$.

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 9$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 và $z_2 = \overline{z_1}$, $z_1 = \overline{z_2}$. Yêu cầu $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1z_2 = z_1z_2$ luôn đúng với $m > 9$.

Vậy trong khoảng $(0;20)$ có 10 số m_0 thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47: Cho phương trình $4z^4 + mz^2 + 4 = 0$ trong tập số phức và m là tham số thự **C.** Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $\left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right) = 324$.

A. $m = 1$ hoặc $m = -35$.
B. $m = -1$ hoặc $m = -35$.
C. $m = -1$ hoặc $m = 35$.
D. $m = 1$ hoặc $m = 35$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(z) = 4z^4 + mz^2 + 4$.

Vì phương trình $f(z) = 0$ có 4 nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 nên

$$f(z) = 4z^4 + mz^2 + 4 = 4(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

Ta có: $z_1^2 + 4 = (z_1 - 2i)(z_1 + 2i) \Rightarrow \left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right) = \dfrac{f(2i)}{4}.\dfrac{f(-2i)}{4}$

Mà $\begin{cases} f(2i) = 4(2i)^4 + m(2i)^2 + 4 = 68 - 4m \\ f(-2i) = 4(-2i)^4 + m(-2i)^2 + 4 = 68 - 4m \end{cases}$ và $\left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right) = 324$

Nên $324 = \dfrac{(68-4m)^2}{16} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 35 \end{array}\right.$.

Câu 48: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$. Tổng $T = |z_1|^{2022} + |z_2|^{2022} + |z_3|^{2022} + |z_4|^{2022}$ bằng?

A. $1 + 2^{2022}$.
B. $2 + 2^{2022}$.
C. $1 + 2^{2023}$.
D. $2 + 2^{2023}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z^4 + 5z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = -1 \\ z^2 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm i \\ z = \pm 2i \end{array}\right.$.

$$T = |z_1|^{2022} + |z_2|^{2022} + |z_3|^{2022} + |z_4|^{2022} = |i|^{2022} + |-i|^{2022} + |2i|^{2022} + |-2i|^{2022} = 2 + 2^{2023}.$$

Câu 49: Cho phương trình $z^2 - 2(m-2)z + m^2 - 5 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiêm phức phân biệt z_1, z_2 thoả mãn $|z_1|^2 + |z_2|^2 \le 8$?

A. 5.
B. 7.
C. 2.
D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta' = (m-2)^2 - m^2 + 5 = 9 - 4m$.

Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{4}$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $z_1 = m - 2 - \sqrt{9-4m}$ và $z_2 = m - 2 + \sqrt{9-4m}$.

Ta có $|z_1|^2 + |z_2|^2 \le 8 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 9 < 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{7} < m < 4 + \sqrt{7}$.

Kết hợp ĐK ta được: $4 - \sqrt{7} < m < \dfrac{9}{4}$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 2$.

Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 9 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{9}{4}$ thì phương trình có hai nghiệm phức phân biệt là $z_1 = m - 2 - i\sqrt{4m-9}$ và $z_2 = m - 2 + i\sqrt{4m-9}$.

Ta có $|z_1|^2 + |z_2|^2 \le 8 \Leftrightarrow (m-2)^2 + 4m - 9 + (m-2)^2 + 4m - 9 \le 8 \Leftrightarrow m^2 - 9 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le m \le 3$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m > \dfrac{9}{4}$ nên $m = 3$. Tóm lại $m \in \{2;3\}$.

Câu 50: Biết phương trình $z^2 + mz + m^2 - 2 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm phức z_1, z_2. Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 và $z_0 = i$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để diện tích tam giác ABC bằng 1?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Để phương trình có hai nghiệm phức thì $\Delta = -3m^2 + 8 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\sqrt{\dfrac{8}{3}} \\ m > \sqrt{\dfrac{8}{3}} \end{array}\right.$

Ta có $AB^2 = |z_1 - z_2|^2 = \left|(z_1 - z_2)^2\right| = \left|(z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2\right| = 3m^2 - 8 \Rightarrow AB = \sqrt{3m^2 - 8}$

Lại có $d(C, AB) = d(O, AB) = \left|\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| = \left|\dfrac{m}{2}\right| \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} d(C, AB).AB = \left|\dfrac{m}{4}\right|.\sqrt{3m^2 - 8}$

$S_{\Delta ABC} = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{m}{4}\right|.\sqrt{3m^2 - 8} = 1 \Leftrightarrow m^2(3m^2 - 8) = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \quad (TM) \\ m = -2 \ (TM) \end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 51: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2z - m + 2 = 0$ (m là tham số thực). Gọi T là tập hợp các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt được biểu diễn hình học bởi hai điểm A, B trên mặt phẳng tọa độ sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$, với $C(-1;1)$. Tổng các phần tử trong T bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 9. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z^2 - 2z - m + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = m - 1 \ (1)$

TH1: (1) có hai nghiệm phức $\Leftrightarrow m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức $z_1 = 1 + \sqrt{1-m}\,i$; $z_2 = 1 - \sqrt{1-m}\,i$.

Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn của z_1; z_2 trên mặt phẳng Oxy ta có:

$A\left(1;-\sqrt{1-m}\right)$; $B\left(1;\sqrt{1-m}\right)$.

Ta có: $AB=2\sqrt{1-m}$; $d\left(C;AB\right)=d\left(C;\left(x=1\right)\right)=2$.

Khi đó $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.d\left(C;AB\right)=2\sqrt{1-m}=2\sqrt{2}\Rightarrow m=-1.$

TH2: (1) có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow\ m-1>0\Leftrightarrow m>1$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm $z_1=1+\sqrt{1-m}$; $z_2=1-\sqrt{1-m}$.

Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn của z_1; z_2 trên mặt phẳng Oxy ta có:

$A\left(1-\sqrt{1-m};0\right)$; $B\left(1+\sqrt{1-m};0\right)$.

Ta có: $AB=2\sqrt{1-m}$; $d\left(C;AB\right)=d\left(C;Ox\right)=1$.

Khi đó $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.d\left(C;AB\right)=\sqrt{1-m}=2\sqrt{2}\Rightarrow m=9.$ Vậy $T=\{-1;9\}$ nên tổng các phần tử trong T bằng 8.

Câu 52: Trên tập hợp các số phức, cho biết phương trình $z^2-2z+\dfrac{c}{d}=0$ (với $c,d\in\mathbb{Z}$ và phân số $\dfrac{c}{d}$ tối giản) có hai nghiệm z_1,z_2. Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn hình học của z_1,z_2 trên mặt phẳng Oxy. Biết tam giác OAB đều, tính giá trị của $P=c+4d$.

A. $P=19$. **B.** $P=16$. **C.** $P=22$. **D.** $P=14$.

Lời giải

Từ giả thiết $z^2-2z+\dfrac{c}{d}=0\Leftrightarrow\left(z-1\right)^2=1-\dfrac{c}{d}\ (*)$

Nếu $1-\dfrac{c}{d}\ge 0$ thì (*) có hai nghiệm thực nên không tồn tại tam giác OAB, không thỏa mãn bài toán.

Nếu $1-\dfrac{c}{d}<0\Leftrightarrow\dfrac{c}{d}>1$. Khi đó $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}z_1=1+i\sqrt{\dfrac{c}{d}-1}\\ z_2=1-i\sqrt{\dfrac{c}{d}-1}\end{cases}$.

Suy ra $A\left(1;\sqrt{\dfrac{c}{d}-1}\right)$ và $B\left(1;-\sqrt{\dfrac{c}{d}-1}\right)$ nên tam giác OAB luôn cân tại O.

Gọi I là trung điểm đoạn AB, tam giác OAB đều thì $OI=\dfrac{AB.\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 1=\sqrt{3}.\sqrt{\dfrac{c}{d}-1}\Leftrightarrow\dfrac{c}{d}=\dfrac{4}{3}$.

Theo giả thiết $c,d\in\mathbb{Z}$ và phân số . $\dfrac{c}{d}$. tối giản nên $c=4$ và $d=3$. Vậy $P=c+4d=4+4.3=16.$

Câu 53: Biết rằng phương trình $z^2+2az+b=0$ (a,b là các số thực dương) có hai nghiệm phức liên hợp z_1,z_2. Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức $w=2,z_1,z_2$. Tính giá trị của biểu thức $T=b-4a$ biết rằng ba điểm A,B,C tạo thành một tam giác vuông có diện tích bằng 9.

A. 6. **B.** -8. **C.** 9. **D.** 14.

Lời giải

Chọn A

Do phương trình $z^2+2az+b=0$ (a,b là các số thực dương) có hai nghiệm phức liên hợp z_1,z_2 nên từ giả thiết ta gọi tọa độ các điểm biểu diễn cho các số phức $w=2,z_1,z_2$ là $A(2;0);B(x;y);C(x;-y)$ với $x\neq 2,y\neq 0$

$\overrightarrow{AB}=(x-2;y);\overrightarrow{AC}=(x-2;-y)$. Do A thuộc Ox, B,C đối xứng qua Ox

Nên theo giả thiết suy ra ABC là tam giác vuông cân tại A

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow (x-2)^2-y^2=0$ (1)

Mặt khác $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC\Leftrightarrow 9=\dfrac{1}{2}\left[(x-2)^2+y^2\right]$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left[\begin{array}{l} x=5\Rightarrow y=\pm 3\\ x=-1\Rightarrow y=\pm 3\end{array}\right.$

Với $x=5,y=\pm 3$ ta tìm được $z_1=5+3i;z_2=5-3i$ (loại do không thỏa a,b là các số thực dương).

Với $x=-1,y=\pm 3$ ta tìm được $z_1=-1+3i;z_2=-1-3i$ suy ra $a=1;b=10\Rightarrow T=6$

Câu 54: Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần thực và phần ảo đều âm của phương trình $z^2+2z+5=0$ Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, điểm M nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=i^3\overline{z}_0$?

A. $M(2;1)$. **B.** $M(-2;-1)$. **C.** $M(2;-1)$. **D.** $M(-1;2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z^2+2z+5=0\Leftrightarrow (z+1)^2=(2i)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1+2i\\ z=-1-2i\end{array}\right.$.

Theo giả thiết ta có $z_0=-1-2i$. Suy ra $\overline{z}_0=-1+2i$.

Từ đó $w=i^3.\overline{z}_0=-i(-1+2i)=2+i$. Suy ra w có biểu diễn là $M(2;1)$.

Câu 55: Trên tập hợp các số phức, phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$ (a là tham số thực) có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết rằng có 2 giá trị của tham số a để tam giác OMN có một góc bằng 120°. Tổng các giá trị đó bằng bao nhiêu?

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -6.

Lời giải

Chọn A

Vì O, M, N không thẳng hàng nên z_1, z_2 không đồng thời là số thực, cũng không đồng thời là số thuần ảo $\Rightarrow z_1$, z_2 là hai nghiệm phức, không phải số thực của phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$. Do đó, ta phải có $\Delta=a^2-12a+16<0\Leftrightarrow a\in\left(6-2\sqrt{5};\,6+2\sqrt{5}\right)$.

Khi đó, ta có $\left\{\begin{array}{l} z_1=\dfrac{2-a}{2}-\dfrac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i\\ z_1=\dfrac{2-a}{2}+\dfrac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i\end{array}\right.$.

$\Rightarrow OM=ON=|z_1|=|z_2|=\sqrt{2a-3}$ và $MN=|z_1-z_2|=\sqrt{-a^2+12a-16}$.

Tam giác OMN cân nên $MON = 120°$ $\Rightarrow \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM.ON} = \cos 120°$

$\Leftrightarrow \frac{a^2 - 8a + 10}{2(2a-3)} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 - 6a + 7 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \pm \sqrt{2}$.

Suy ra tổng các giá trị cần tìm của a bằng 6.

Câu 56: Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2 - 6z + m = 0, m \in \mathbb{R} (1)$. Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0;20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0 \in \mathbb{N}$?

A. 10. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

$z^2 - 6z + m = 0, m \in \mathbb{R} (1)$. $\Delta' = 9 - m$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2

Khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - m > 0 \Leftrightarrow m < 9$ khi đó phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt $z_1 = 3 - \sqrt{9-m}, z_2 = 3 + \sqrt{9-m}, (z_1 \neq z_2)$.

Ta có $z_1 = \overline{z_1}, z_2 = \overline{z_2} \Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow {z_1}^2 = {z_2}^2 \Rightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow 6 = 0$ không có giá trị của m

Khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 9 - m < 0 \Leftrightarrow m > 9$ khi đó phương trình có 2 nghiệm phức phân biệt $z_1 = 3 - i\sqrt{m-9}, z_2 = 3 + i\sqrt{m-9}$.

$z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2$ luôn thỏa mãn $m > 9$.

Do $\begin{cases} m \in (0;20) \\ m \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow m \in \{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$. Vậy có 10 giá trị của m.

Câu 57: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m + 3 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $|z_0 + 2| = 6$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m + 3 = 0$ (1)

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - m - 3 = m^2 + m - 2$..

Nếu $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$ thì phương trình (1) có nghiệm thực:

$|z_0 + 2| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = 4 \\ z_0 = -8 \end{array}\right.$

Với $z_0 = 4$: thay vào (1), được: $m = \frac{11}{7}$ (TM)

Với $z_0 = -8$: thay vào (1), được: $m = -\frac{83}{17}$ (TM)

Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$ thì phương trình (1) có nghiệm phức

$$\left[\begin{array}{l} z_0 = m+1-i\sqrt{m^2+m-2} \\ z_0 = m+1+i\sqrt{m^2+m-2} \end{array}\right.$$

Khi đó $|z_0+2| = 6 \Leftrightarrow (m+3)^2 + \left(m^2+m-2\right) = 36 \Leftrightarrow 2m^2+7m-29=0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Vậy có 4 giá trị của tham số m để bài toán thỏa mãn.

Câu 58: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(2m-1)z+4m^2-5m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm z_0 thoả mãn $\left|{z_0}^2+(1-4m)z_0+4m^2-5m-3\right| = 10$?

A. 1. **B.** 2 . **C.** 4 . **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $\Delta' = m+1$.

Trường hợp 1: $m+1 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -1$.

Khi đó theo bài ra, phương trình đã cho có nghiệm thực z_0 thoả mãn $|z_0+3| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = 7 \\ z_0 = -13 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} 7^2-2(2m-1)7+4m^2-5m=0 \\ (-13)^2-2(2m-1)(-13)+4m^2-5m=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m^2-33m+63=0 \\ 4m^2-47m+143=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=3 & (tm) \\ m=\dfrac{21}{4} & (tm) \end{array}\right..$$

Trường hợp 2: $m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$.

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm phức là z_0 và $\overline{z}_0$ và thoả mãn $|z_0+3| = 10$

$$\Leftrightarrow (z_0+3)(\overline{z}_0+3) = 100 \Leftrightarrow |z_0|^2+3(z_0+\overline{z}_0)+9=100 \Leftrightarrow 4m^2-5m+3.2(2m-1)-91=0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2+7m-97=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=-\dfrac{7+\sqrt{1601}}{8} & (tm) \\ m=-\dfrac{7-\sqrt{1601}}{8} & (ktm) \end{array}\right..$$

Vậy có 3 giá trị của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Ta có $z^2-2(2m-1)z+4m^2-5m=0 \Leftrightarrow (z-2m+1)^2 = m+1 \ (1)$.

Trường hợp 1: $m+1 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -1$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2m-1+\sqrt{m+1} \\ z = 2m-1-\sqrt{m+1} \end{array}\right.$.

Theo bài ra, phương trình đã cho có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0+3| = 10$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} \left|2m+2+\sqrt{m+1}\right| = 10 \\ \left|2m+2-\sqrt{m+1}\right| = 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=3 & (tm) \\ m=\dfrac{21}{4} & (tm) \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=2m-1+i\sqrt{|m+1|} \\ z=2m-1-i\sqrt{|m+1|} \end{array}\right.$.

Theo bài ra, phương trình đã cho có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0+3|=10$.

Do đó $\left|2m+2+i\sqrt{|m+1|}\right|=10\Leftrightarrow 4m^2+8m+4-m-1=100\Leftrightarrow 4m^2+7m-97=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{7+\sqrt{1601}}{8}\ (tm) \\ m=-\dfrac{7-\sqrt{1601}}{8}\ (ktm) \end{array}\right.$.

Vậy có 3 giá trị của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 59: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+2m^2-2m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2|=|z_2-2|$?

A. 15 **B.** 18. **C.** 16. **D.** 17 .

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z^2-2mz+2m^2-2m=0$ $(*)$ thì $\Delta'=-m^2+2m$.

Trường hợp 1: $\Delta'>0\Leftrightarrow -m^2+2m>0\Leftrightarrow 0<m<2$.

Với $0<m<2$ phương trình có hai nghiệm thực $z_1\neq z_2$.

Khi đó $|z_1-2|=|z_2-2|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z_1-2=z_2-2 \\ z_1-2=-(z_2-2) \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z_1=z_2\ (L) \\ z_1+z_2=4 \end{array}\right.$.

Suy ra $z_1+z_2=4\Leftrightarrow 2m=4\Leftrightarrow m=2$ (loại).

Trường hợp 2: $\Delta'<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Phương trình $(*)$ khi đó có 2 nghiệm $z_{1,2}=m\pm i\sqrt{|-m^2+2m|}$.

Do đó $|z_1-2|=|z_2-2|$ (luôn đúng).

Kết hợp điều kiện $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0 \end{array}\right.$ và $m\in(-10;10)$, m nguyên suy ra $m\in\{-9;-8;...;-1;3;4;...;9\}$

Vậy các giá trị nguyên của thỏa mãn là: $m\in\{-9;-8;...;-1;3;4;...;9\}$ nên có 16 giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ thoả mãn.

Câu 60: Trong tập số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+4=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$. Tính tổng các phần tử của tập S

A. 3. **B.** 2 . **C.** 6 . **D.** 5.

Lời giải

Ta có: $\Delta'=(m-1)^2-4=m^2-2m-3$

TH1: Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$ thì phương trình có 2 nghiệm thực, khi đó:

$|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow 2(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (không thỏa mãn)

TH2: Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phức khi đó z_1 và z_2 là 2 số phức liên hợp nên $|z_1| = |z_2|$

$\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3 \Rightarrow m \in \{0;1;2\}$

Vậy tổng các phần tử của tập S là: $1 + 2 = 3$.

Câu 61: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m-4)z + m^2 - 4m + 1 = 0$, m là tham số thự **C.** Có bao nhiêu giá trị m để phương trình đã cho có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa điều kiện $|z_1 + z_2 - 2z_1z_2| = |z_1|$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phức phân biệt trong đó z_1 là nghiệm có phần ảo âm là: $\Delta' = (m-4)^2 - (m^2 - 4m + 1) < 0 \Leftrightarrow -4m + 15 < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{15}{4}$.

Khi đó: $z_1 + z_2 - 2z_1z_2 = 2(m-4) - 2(m^2 - 4m + 1) = -2m^2 + 10m - 10$

Và $z_1 = -b' - i\sqrt{|\Delta'|} = m - 4 - i\sqrt{|-4m+15|}$

Ta có: $|z_1 + z_2 - 2z_1z_2| = |z_1| \Leftrightarrow |-2m^2 + 10m - 10| = (m-4)^2 + (4m - 15)$

$\Leftrightarrow |-2m^2 + 10m - 10| = m^2 - 4m + 1$

Vì $m > \dfrac{15}{4}$ nên $m^2 - 4m + 1 > 0$, do đó:

$$(*) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2m^2 + 10m - 10 = m^2 - 4m + 1 \\ -2m^2 + 10m - 10 = -m^2 + 4m - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3m^2 - 14m + 11 = 0 \\ m^2 - 6m + 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1, m = \dfrac{11}{3} \\ m = 3 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện $m > \dfrac{15}{4}$ suy ra không có giá trị nào của m thỏa điều kiện bài toán.

Câu 62: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình: $z^2 - 2(m+1)z + m^2 - 3m + 5 = 0$ (m là tham số thực). Hỏi tổng các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm z_0 thỏa mãn $|\overline{z_0}|^3 - 12 = 5|z_0|$?

A. 9. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $|\overline{z_0}|^3 - 12 = 5|z_0| \Leftrightarrow |z_0|^3 - 5|z_0| - 12 = 0 \Leftrightarrow (|z_0| - 3)(|z_0|^2 + 3|z_0| + 4) = 0 \Leftrightarrow |z_0| = 3$

Đặt phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 - 3m + 5 = 0$ (1) có $\Delta' = 5m - 4$

TH1: xét $\Delta' \geq 0 \Rightarrow 5m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{4}{5}$ khi đó $z_0 \in \mathbb{R}$. Ta có $|z_0| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = 3 \\ z_0 = -3 \end{array}\right.$

Với $z_0 = 3$ thay vào (1) $\Leftrightarrow m^2 - 9m + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 8 \end{array}\right.$

Với $z_0 = -3$ thay vào (1) $\Leftrightarrow m^2 + 3m + 20 = 0 \Rightarrow$ pt vô nghiệm.

TH2: xét $\Delta' < 0 \Rightarrow 5m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{4}{5}$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phức $z_1 = z_0$ và $z_2 = \overline{z_0}$ thỏa mãn $|z_0| = 3 \Leftrightarrow |z_0|^2 = 9 \Leftrightarrow z_0.\overline{z_0} = 9 \Leftrightarrow z_1.z_2 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 5 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 4 \end{array}\right.$.

Với $m = -1$ thay vào (1) $\Leftrightarrow z^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 3i$ thỏa mãn

Với $m = 4$ không thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Vậy có 3 giá trị $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 8 \\ m = -1 \end{array}\right.$

Nên tổng các giá trị của tham số m là 8.

Câu 63: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình: $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình trên có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 6$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0 (*)$

TH1: $z_0 \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z_0| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = 6 \\ z_0 = -6 \end{array}\right.$

Với $z_0 = 6$ thay vào $(*)$ $\Leftrightarrow 36 - 12(m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 + 2\sqrt{3} \\ m = 6 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Với $z_0 = -6$ thay vào $(*)$ $\Leftrightarrow 36 + 12(m+1) + m^2 = 0 \Rightarrow$ Không có m.

TH2: $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0 (*)$ có 2 nghiệm z_0 và $\overline{z_0}$

Ta có: $z_0 \overline{z_0} = |z_0|^2 \Leftrightarrow m^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -6 \end{array}\right.$

Với $m = 6$ thay vào $(*) \Leftrightarrow z^2 - 14z + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = 7 + \sqrt{13} \\ z_0 = 7 - \sqrt{13} \end{array}\right.$ (loại)

Với $m = -6$ thay vào $(*) \Leftrightarrow z^2 + 10z + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = -5 + i\sqrt{11} \\ \overline{z_0} = -5 - i\sqrt{11} \end{array}\right.$ (Thỏa mãn)

Vậy có 3 giá trị $\left[\begin{array}{l} m=6+2\sqrt{3} \\ m=6-2\sqrt{3} \\ m=-6 \end{array}\right.$.

Câu 64: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(2m-1)z+4m^2-5m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0+3|=10$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $\Delta'=m+1$.

Trường hợp 1: $m+1\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -1$.

Khi đó theo bài ra, phương trình đã cho có nghiệm thực z_0 thoả mãn $|z_0+3|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0=7 \\ z_0=-13 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} 7^2-2(2m-1)7+4m^2-5m=0 \\ (-13)^2-2(2m-1)(-13)+4m^2-5m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m^2-33m+63=0 \\ 4m^2-47m+143=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \quad (tm) \\ m=\dfrac{21}{4} \quad (tm) \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$.

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm phức là z_0 và $\overline{z}_0$ và thoả mãn $|z_0+3|=10$

$\Leftrightarrow (z_0+3)(\overline{z}_0+3)=100 \Leftrightarrow |z_0|^2+3(z_0+\overline{z}_0)+9=100 \Leftrightarrow 4m^2-5m+3.2(2m-1)-91=0$

$\Leftrightarrow 4m^2+7m-97=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{7+\sqrt{1601}}{8} \quad (tm) \\ m=-\dfrac{7-\sqrt{1601}}{8} \quad (ktm) \end{array}\right.$.

Vậy có 3 giá trị của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Ta có $z^2-2(2m-1)z+4m^2-5m=0 \Leftrightarrow (z-2m+1)^2=m+1 \ (1)$.

Trường hợp 1: $m+1\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -1$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2m-1+\sqrt{m+1} \\ z=2m-1-\sqrt{m+1} \end{array}\right.$.

Theo bài ra, phương trình đã cho có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0+3|=10$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} \left|2m+2+\sqrt{m+1}\right|=10 \\ \left|2m+2-\sqrt{m+1}\right|=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \quad (tm) \\ m=\dfrac{21}{4} \quad (tm) \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2m-1+i\sqrt{|m+1|} \\ z=2m-1-i\sqrt{|m+1|} \end{array}\right.$.

Theo bài ra, phương trình đã cho có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0+3|=10$.

Do đó $\left|2m+2+i\sqrt{|m+1|}\right|=10 \Leftrightarrow 4m^2+8m+4-m-1=100 \Leftrightarrow 4m^2+7m-97=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{7+\sqrt{1601}}{8}\ (tm) \\ m=-\dfrac{7-\sqrt{1601}}{8}\ (ktm) \end{array}\right..$$

Vậy có 3 giá trị của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 65: Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $z^2-(a-3)z+a^2+a=0$ có 2 nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta=-3a^2-10a+9$.

TH1: $\Delta\ge 0$, phương trình có 2 nghiệm $z_{1,2}=\dfrac{a-3\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, khi đó

$$|z_1+z_2|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |a-3|=\left|\sqrt{\Delta}\right| \Leftrightarrow (a-3)^2=\Delta \Leftrightarrow 4a^2+4a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-1 \end{array}\right..$$

Thỏa mãn điều kiện $\Delta\ge 0$.

TH2: $\Delta<0$, phương trình có 2 nghiệm $z_{1,2}=\dfrac{a-3\pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$, khi đó

$$|z_1+z_2|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |a-3|=\left|i\sqrt{-\Delta}\right| \Leftrightarrow (a-3)^2=-\Delta \Leftrightarrow 2a^2+16a-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-9 \end{array}\right..$$

Thỏa mãn điều kiện $\Delta<0$. Vậy có 4 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 66: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+7m-10=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+1-3i|=3$, $|z_2-3+5i|=5$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta'=m^2-7m+10$

Trường hợp 1: $\Delta'>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<2 \\ m>5 \end{array}\right.$.

Khi đó $z_1=x_1, z_2=x_2$ (với $x_1;x_2\in\mathbb{R}$) là các nghiệm thực phân biệt nên ta có:

$|z_1+1-3i|=\sqrt{(x_1+1)^2+3^2}\ge 3$. Dấu bằng xảy ra khi $x_1=-1$.

$|z_2-3+5i|=\sqrt{(x_2-3)^2+5^2}\ge 5$. Dấu bằng xảy ra khi $x_2=3$.

Vậy phương trình $z^2-2mz+7m-10=0$ có nghiệm $z_1=-1, z_2=3$ khi đó $m=1$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\Delta'<0 \Leftrightarrow 2<m<5$. Kết hợp $m\in\mathbb{Z}$.

Với $m=3$ ta được phương trình $z^2-6z+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3+\sqrt{2}i \\ z=3-\sqrt{2}i \end{array}\right.$.

Không thỏa mãn $|z_1+1-3i|=3$, $|z_2-3+5i|=5$ nên $m=3$ (loại).

Với $m=4$ ta được phương trình $z^2-8z+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=4+\sqrt{2}i \\ z=4-\sqrt{2}i \end{array}\right.$.

Không thỏa mãn $|z_1+1-3i|=3$, $|z_2-3+5i|=5$ nên $m=4$ (loại).

Câu 67: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+8m-4=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1^2-2mz_1+8m|=|z_2^2-2mz_2+8m|$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta'=m^2-6m+5$ và $|z_1^2-2mz_1+8m|=|z_2^2-2mz_2+8m|$

$\Leftrightarrow |z_1^2-2(m+1)z_1+8m-4+2z_1+4|=|z_2^2-2(m+1)z_2+8m-4+2z_2+4|$

$\Leftrightarrow |2z_1+4|=|2z_2+4|$ (1)

Xét $\Delta'>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>5 \\ m<1 \end{array}\right.$. Khi đó PT có 2 nghiệm thực phân biệt

Nên $(1) \Leftrightarrow 2z_1+4=-(2z_2+4) \Leftrightarrow z_1+z_2=-4 \Leftrightarrow 2(m+1)=-4 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa)

Xét $\Delta'<0 \Leftrightarrow 1<m<5$. Khi đó PT có 2 nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 liên hợp của nhau

Nên $2z_1+1$, $2z_2+1$ cũng là hai số phức liên hợp của nhau. Suy ra $|2z_1+1|=|2z_2+1|$ luôn thỏa

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 68: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-\sqrt{m+1}z-\frac{1}{4}(m^2-5m-6)=0$($m$ là tham số thực).

Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-10;10]$ để phương trình trên có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|\le|z_1-z_2|$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $m+1\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -1$. $\Delta=m^2-4m-5$

Trường hợp 1: $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow m^2-4m-5\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 5 \\ m\le -1 \end{array}\right.$ phương trình có 2 nghiệm thực z_1, z_2

Theo định lý Viet $z_1.z_2=-\frac{1}{4}(m^2-5m-6)$.

$|z_1+z_2|\le|z_1-z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2\le|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow 4z_1.z_2\le 0$

$-(m^2-5m-6)\le 0 \Leftrightarrow m^2-5m-6\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 6 \\ m\le -1 \end{array}\right.$

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10]$ nên số giá trị m thỏa mãn là $(10-6)+1+1=6$.

Trường hợp 2: $\Delta<0 \Leftrightarrow m^2-4m-5<0 \Leftrightarrow -1<m<5$.

Phương trình có 2 nghiệm phức z_1, z_2

$$|z_1+z_2|\le|z_1-z_2|\Leftrightarrow|z_1+z_2|^2\le|z_1-z_2|^2\Leftrightarrow m+1\le|m^2-4m-5|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2-5m-6\ge0\\m^2-3m-4\le0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge6\\m\le-1\\-1\le m\le4\end{array}\right.$$

Do $m\in\mathbb{Z}, -1<m<5$ và $m\in[-10;10]$ nên số giá trị m thỏa mãn là $m=0, m=1, m=2, m=3$.

Vậy có 10 giá trị của m.

Câu 69: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m+3=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $|z_0+2|=6$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $z^2-2(m+1)z+m+3=0$ (1) (m là tham số thực).

Ta có $\Delta'=(m+1)^2-(m+3)=m^2+m-2$.

Nếu $\Delta'\ge0\Leftrightarrow m^2+m-2\ge0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le-2\\m\ge1\end{array}\right.$ thì phương trình (1) có nghiệm thự **C.** Khi đó theo đầu bài, nghiệm z_0 phải thỏa mãn $|z_0+2|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_0+2=6\\z_0+2=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_0=4\\z_0=-8\end{array}\right.$

Do đó suy ra $\left[\begin{array}{l}4^2-2(m+1)4+m+3=0\\(-8)^2-2(m+1)(-8)+m+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{11}{7}\\m=-\dfrac{83}{17}\end{array}\right.$ (thỏa mãn $m\le-2$ hoặc $m\ge1$).

Nếu $\Delta'<0\Leftrightarrow m^2+m-2<0\Leftrightarrow-2<m<1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 với $z_2=\overline{z_1}$ $\Rightarrow|z_1+2|=|\overline{z_1}+2|=|z_2+2|$. Do đó theo điều kiện đầu bài, ta có

$$|z_1+2|=|z_2+2|=6\Rightarrow|z_1+2||z_2+2|=36\Leftrightarrow|z_1z_2+2(z_1+z_2)+4|=36$$

$\Leftrightarrow|m+3+4(m+1)+4|=36\Leftrightarrow|5m+11|=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5m+11=36\\5m+11=-36\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=5\\m=-\dfrac{47}{5}\end{array}\right.$ (không thỏa mãn điều kiện $-2<m<1$).

Vậy với $m=\dfrac{11}{7}$ hoặc $m=-\dfrac{83}{17}$ thì phương trình (1) có nghiệm phức thỏa mãn điều kiện đầu bài.

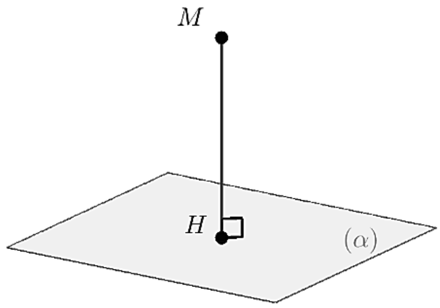
DẠNG 12 KHOẢNG CÁCH TRONG HỆ TỌA ĐỘ OXYZ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phương trình mặt phẳng:

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{n}=(a;b;c)$ làm một vectơ pháp tuyến có phương trình là: (P): $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:



Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α): $Ax+By+Cz+D=0$ và điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Khi đó khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng (α) được tính bằng công thức:

$$d\left[M_0;(\alpha)\right]=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 46 – Đề tham khảo 2023. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(5;-1;3)$ đến (P) bằng

A. 5. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Lấy $B(2;1;1)\in d$ ta có $\overrightarrow{AB}=(2;0;-1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]=(2;4;4)=2(1;2;2)$

Mặt phẳng (P) đi qua A và chứa d suy ra $\overrightarrow{n_P}=(1;2;2)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): x+2y+2z-6=0$

Vậy $\mathrm{d}(M,(P))=\frac{|x_M+2y_M+2z_M-6|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$.

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y-z+1=0$ và $(\beta): 2x+2y-3z-4=0$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;-1;0)$ và chứa đường thẳng Δ. Tính khoảng cách từ điểm $N(1;2;3)$ đến mặt phẳng (P).

A. 4. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{12}{5}$. **D.** $\dfrac{7}{5}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(2;1;5)$, bán kính bằng 2 và mặt cầu (S_1) có phuong trình: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$. Mặt phẳng (P) thay đổi và luôn tiếp xúc với 2 mặt cầu trên. Khoảng cách nhỏ nhất từ O đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\dfrac{9-\sqrt{15}}{2}$. **C.** $\dfrac{9+\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$.

Câu 3: Cho $A(2;4;3)$, mặt phẳng (α) đi qua A và cách trục Ox một khoảng lớn nhất. Khoảng cách từ $M(0;1;2)$ đến mặt phẳng (α) bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-2=0$. Có bao nhiêu điểm M thuộc d sao cho M cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng (P)?

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;2;2)$ và song song với trục Ox. Tính cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-1=0$.

A. $-\dfrac{\sqrt{5}}{15}$. **B.** $-\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{195}}{15}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ $M(7;-1;-2)$ đến (P) lớn nhất có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;4)$. Giá trị của tổng $a+b$ là

A. 2. **B.** -1. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A, B, C mà $OA=OB=OC\neq 0$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$, mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α), (P) song song với giá của vecto $\vec{v}=(1;6;2)$ và (P) tiếp xúc với (S). Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $2x-y+2z-2=0$ và $x-2y+z-21=0$ **B.** $x-2y+2z+3=0$ và $x-2y+z-21=0$

C. $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$. **D.** $2x-y+2z+5=0$ và $2x-y+2z-2=0$.

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-3-t\\z=-4+3t\end{cases}$ và điểm $A(-3;6;-3)$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và có khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất là

A. $(P): x-4y-2z-21=0.$ **B.** $(P): 2x-y+3z-7=0.$

C. $(P): x-2y-2z+17=0.$ **D.** $(P): 2x+y-4z+3=0.$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $d_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và $d_2:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d_1,d_2. Khoảng cách từ điểm $M(0;4;3)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. 26. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $\dfrac{19\sqrt{26}}{26}$. **D.** $\dfrac{35\sqrt{26}}{26}$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$ và $d':\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z+18}{4}$. (P) là mặt phẳng chứa d và d'. Khoảng cách từ $M(1;0;2)$ đến (P) bằng

A. $\dfrac{99}{16250}$. **B.** $\dfrac{99}{25\sqrt{25}}$. **C.** $\dfrac{99}{25\sqrt{26}}$. **D.** $\dfrac{8}{625}$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y-2z=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{2}$. Gọi $A(a;0;0)$ là điểm thuộc trục Ox sao cho A cách đều d và (P). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\le -3$. **B.** $a=-3$. **C.** $a>2$. **D.** $a>5$.

Câu 13: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{11\sqrt{18}}{18}.$ **B.** $3\sqrt{2}.$ **C.** $\dfrac{\sqrt{11}}{18}.$ **D.** $\dfrac{4}{3}.$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d_2:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2. Khoảng cách từ điểm $M(-1;3;2)$ đến (P) là

A. $\frac{7\sqrt{10}}{15}$. **B.** $\frac{14\sqrt{10}}{15}$. **C.** $\frac{7\sqrt{10}}{3}$. **D.** $\frac{14}{\sqrt{10}}$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-3}{1}$. Khoảng cách từ điểm $A(2;1;4)$ đến (P) bằng:

A. $\frac{2\sqrt{14}}{7}$. **B.** $\frac{4\sqrt{14}}{7}$. **C.** $\frac{4\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\frac{8\sqrt{21}}{21}$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$, điểm $B(2;-1;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, B và song song với d. Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến (P) bằng

A. $\frac{7}{\sqrt{17}}$. **B.** $\frac{10}{\sqrt{17}}$. **C.** $\frac{6}{\sqrt{29}}$. **D.** $\frac{12}{\sqrt{29}}$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa đường thẳng d. Khoảng cách từ điểm $M(-2;1;0)$ đến (P) bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** 1. **D.** $\frac{11}{3}$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;-1;-2)$ và chứa trục Oz. Khoảng cách từ điểm $M(2;1;4)$ đến (P) bằng:

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y+3z=0$, $(R): 2x-y+z=0$. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;1)$ đến (P) bằng:

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{19\sqrt{2}}{10}$. **C.** $\frac{19\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$ và đường thẳng $d_2: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d_1 và song song với d_2. Tính khoảng cách giữa đường thẳng d_2 và mặt phẳng (P).

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{7}{5}$. **D.** $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(Q):x-3y+4z-1=0$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (Q). Tính khoảng cách từ điểm $A(0;1;2)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\frac{6}{\sqrt{185}}$. **B.** $\frac{10}{\sqrt{185}}$. **C.** $\frac{8}{\sqrt{185}}$. **D.** $\frac{16}{\sqrt{185}}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+4t\\y=-6t\\z=-1-8t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-7}{-6}=\frac{y-2}{9}=\frac{z}{12}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d và Δ. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;3)$ đến (P) bằng

A. $\frac{152}{\sqrt{870}}$. **B.** $\frac{125}{\sqrt{870}}$. **C.** $\frac{512}{\sqrt{870}}$. **D.** $\frac{215}{\sqrt{870}}$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Cosin của góc giữa (P) và $(Q):-x+3y-3z+2023=0$ bằng

A. $\frac{-1}{3\sqrt{19}}$. **B.** $\frac{1}{3\sqrt{13}}$. **C.** $\frac{1}{3\sqrt{19}}$. **D.** $\frac{13}{3\sqrt{19}}$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ và hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(0;-1;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với đường thẳng AB và đường thẳng d. Viết phương trình mặt phẳng (P) biết khoảng cách giữa d và (P) bằng $\sqrt{2}$ và (P) cắt Ox tại điểm có hoành độ dương.

A. $x-y-1=0$. **B.** $x-y-3=0$. **C.** $x-z-1=0$. **D.** $x-z-3=0$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-3)$, $B(-1;4;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua A,B và song song với đường thẳng d. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{5\sqrt{21}}{21}$. **C.** $\frac{4\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(8;-8;8)$. Gọi M là điểm sao cho $MA=3MO$ (Với O là gốc tọa độ). Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(P):2x+2y+z+19=0$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $6+3\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $6-3\sqrt{3}$. **D.** 6.

Câu 27: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=16$, điểm $A(1;0;2)$. Gọi mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất. Khoảng cách từ $M(2;-1;4)$ đến (P) là:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** 6.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a+b+c=2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Khoảng cách từ $M(0;2023;0)$ tới mặt phẳng (P) bằng

A. 2022. **B.** $\frac{2023}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{2021}{3}$. **D.** $674\sqrt{3}$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=36$ và $(S'):(x+1)^2+y^2+z^2=4$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng $2\pi\sqrt{11}$. Khoảng cách từ $M(2;-1;3)$ đến (P) bằng

A. $\frac{19}{3}$. **B.** $\frac{17}{7}$. **C.** $\frac{8}{9}$. **D.** $\frac{19}{2}$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$. Gọi mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất. Tính khoảng cách từ $M(2;-3;4)$ đến mặt phẳng (α).

A. $\frac{7}{\sqrt{41}}$. **B.** $\frac{\sqrt{42}}{6}$. **C.** $\frac{5}{\sqrt{42}}$. **D.** $\frac{5}{13}$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α).

A. $\frac{8\sqrt{21}}{21}$. **B.** $\frac{2\sqrt{12}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\frac{7\sqrt{21}}{21}$.

Câu 32: Trong không gian Oxyz cho điểm $A(1;-2;1)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-1+t \\ z=-1-t \end{cases}$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;-2;1)$ và chứa d. Khoảng cách từ $M(-1;0;4)$ đến (P) bằng

A. $\frac{3\sqrt{30}}{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{30}}{5}$. **C.** $\frac{16}{\sqrt{30}}$. **D.** $\frac{14}{\sqrt{30}}$.

Câu 33: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) song song và cách mặt phẳng ` $(Q): x+2y+2z-3=0$ một khoảng bằng 1 và (P) không qua gốc tọa độ O. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+2z-6=0$ **B.** $x+2y+2z+1=0$

C. $x+2y+2z=0$ **D.** $x+2y+2z+3=0$

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1); B(-1;0;3)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-2=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a^2+b^2+c^2=3$. **B.** $a^2+b^2+c^2=13$. **C.** $a^2+b^2+c^2=5$. **D.** $a^2+b^2+c^2=10$.

Câu 35: Trong không gian *Oxyz*, cho điểm $A(2;-1;3)$, mặt phẳng $(P): 4x-y+z-10=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm *M, N* sao cho *A* là trung điểm của đoạn *MN*. Biết $\vec{u}=(a;b;-4)$ là một vec tơ chỉ phương của Δ. Giá trị của $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 1. **D.** -6.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng *d* và vuông góc với (P). Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến (Q) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{8}$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng *d* và song song với trục Ox. Khoảng cách từ điểm $M(1;-1;0)$ đến (P) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(0;-2;5)$ đến (P) bằng

A. $\frac{3\sqrt{11}}{11}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{23}{\sqrt{195}}$. **D.** $\frac{29}{\sqrt{195}}$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=8$ và điểm $A(1;3;2)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Biết (P) có dạng $ax+by+cz+6=0$. Tính $a+b+c$.

A. 4. **B.** 2. **C.** -4. **D.** -6.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$, $(Q): x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với cả (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (R) bằng $\sqrt{2}$.

A. $\left[\begin{array}{l} x-z+2=0 \\ x-z-2=0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x-z+4=0 \\ x-z-4=0 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x-y+2=0 \\ x-y-2=0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x-y+4=0 \\ x-y-4=0 \end{array}\right.$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;3), B(-1;3;2), C(-1;2;3)$. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;-2;4)$ đến mặt phẳng ABC.

A. $\sqrt{15}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2z-7=0$. Gọi I là giao điểm của d và (P). Biết $IM = 9$, khoảng cách từ điểm M thuộc d đến (P) bằng

A. $\sqrt{15}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;2)$ và chứa đường thẳng $(\Delta): \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-m}$. Giá trị m thuộc khoảng nào dưới đây sao cho khoảng cách từ điểm $M(5;-1;3)$ đến mặt phẳng (P) lớn nhất?

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$; $B(11;15;4)$; $C(3;9;-2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=-4+3t \\ y=-3+2t \\ z=-2+2t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và điểm A. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $S = MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(Q): 2x+y+2z-3=0$.

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=-t \\ y=-8+4t \\ z=-3+3t \end{cases}$ và $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-3}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d và Δ. Khoảng cách từ điểm $M(0;2;1)$ đến (P) bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{217}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{271}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{217}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{271}}$.

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $A(2;-2;4)$. **B.** $D(2;2;4)$. **C.** $B(2;2;-4)$. **D.** $C(-2;2;4)$.

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc bằng 30^0. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 48: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;8;2), N(9;-7;23)$ và mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$. Mặt phẳng $(P): x+by+cz+d=0$ đi qua điểm M và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ N đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khi đó tổng $b-c+d$ có giá trị bằng

A. $b+c+d=2$. **B.** $b+c+d=-1$. **C.** $b+c+d=-5$. **D.** $b+c+d=4$.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x-2y+z=0$. Đường thẳng d cắt (P) tại điểm A. Biết rằng $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d có hoành độ âm đồng thời $AM=\sqrt{6}$. Tính $S=2a+3b+c$.

A. $S=-10$. **B.** $S=10$. **C.** $S=-12$. **D.** $S=12$.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;1)$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm M và chứa trục Oy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2}$; $d': \begin{cases} x=3-t \\ y=-1+2t \\ z=1-2t \end{cases}$ và điểm $M(5;0;-1)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d và d'. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{34}}{34}$. **C.** $\frac{27\sqrt{2}}{10}$. **D.** $\frac{23\sqrt{2}}{10}$.

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

A. $x+2y-3z-10=0$. **B.** $x-2y+3z-10=0$.

C. $x-2y+3z+10=0$. **D.** $x-2y-3z-10=0$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y-z+1=0$ và $(\beta): 2x+2y-3z-4=0$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;-1;0)$ và chứa đường thẳng Δ. Tính khoảng cách từ điểm $N(1;2;3)$ đến mặt phẳng (P).

A. 4. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{12}{5}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Lời giải

Chọn C

(α) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=(1;-2;-1)$, (β) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_{(\beta)}}=(2;2;-3)$.

Ta có: Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nên Δ có 1 VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_{(\alpha)}},\overrightarrow{n_{(\beta)}}\right]=(8;1;6)$.

Gọi $A(x_A;y_A;0)$ là 1 điểm thuộc Δ, ta có: $\begin{cases} x_A-2y_A+1=0 \\ 2x_A+2y_A-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=1 \\ y_A=1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1;0)$.

Vì (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và chứa đường thẳng Δ nên (P) nhận $\overrightarrow{u_\Delta}=(8;1;6)$ và $\overrightarrow{AM}=(0;-2;0)$ là 2 VTCP, suy ra $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AM}\right]=(12;0;-16)=4(3;0;-4)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1;-1;0)$ và có VTPT $\overrightarrow{n_{(P)}}=(3;0;-4)$ là:

$(P): 3x-4z-3=0 \Rightarrow d(N;(P))=\dfrac{|3.1-4.3-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{12}{5}$.

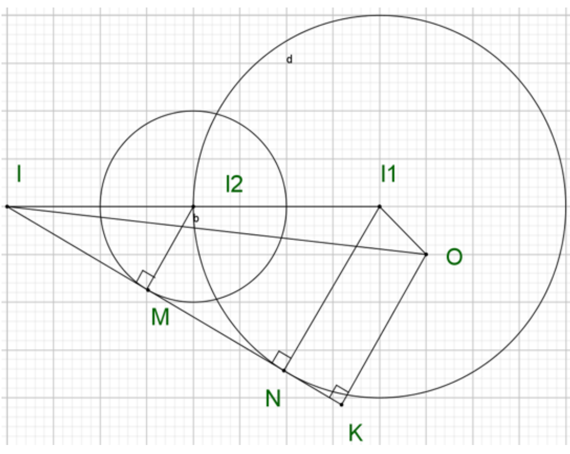
Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(2;1;5)$, bán kính bằng 2 và mặt cầu (S_1) có phuong trình: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$. Mặt phẳng (P) thay đổi và luôn tiếp xúc với 2 mặt cầu trên. Khoảng cách nhỏ nhất từ O đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\frac{9-\sqrt{15}}{2}$. **C.** $\frac{9+\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\frac{9\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(2;1;1)$, bán kính bằng 4. Gọi M,N lần lượt là tiếp điểm của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S_1), (S_2) ta có $\dfrac{I_1M}{I_2N}=2$



$\Rightarrow V_{(I,2)}\left((S_2)\right)=(S_1)\Rightarrow V_{(I,2)}(I_2)=(I_1)\Rightarrow I(2;1;9)$

Giả sử $(I_1I_2MN)\cap(P)=MN$, $(I_1I_2MN)\cap(P)=MN$, $(I_1I_2MN)\cap(S_1)=(I_1,4)$, $(I_1I_2MN)\cap(S_2)=(I_2,2)$. Với $(I_1,4)$ là đường tròn, $(I_2,2)$ là đường tròn.

Xét tam giác I_2IM vuông tại M, $II_2=4$, $I_2M=2$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (P)

$\sin I_2\hat{I}M=\dfrac{I_2M}{II_2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow I_2\hat{I}M=30^0$.

Tam giác II_1O có $OI=\sqrt{86}, II_1=8, OI_1=\sqrt{6}$.

$\cos I_1\hat{I}O=\dfrac{(II_1)^2+(OI)^2-(OI_1)^2}{2OI.II_1}=\dfrac{9}{\sqrt{86}}\Rightarrow I_1\hat{I}O\approx 13^0 57'9,9''$

$\Rightarrow H\hat{I}O=30^0-I_1\hat{I}O\approx 16^0 2'50''$

Xét tam giác OIH vuông tại H. Ta có $OH=OI.\sin O\hat{I}H\approx 2,5635083$.

$\dfrac{9-\sqrt{15}}{2}\approx 2,5635083$.

Câu 3: Cho $A(2;4;3)$, mặt phẳng (α) đi qua A và cách trục Ox một khoảng lớn nhất. Khoảng cách từ $M(0;1;2)$ đến mặt phẳng (α) bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên trục $Ox\Rightarrow A'(2;0;0)$.

Để khoảng cách từ trục Ox đến (α) là lớn nhất thì $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{A'A}=(0;4;3)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) là: $4(y-4)+3(z-3)=0\Leftrightarrow 4y+3z-25=0$

Suy ra $d\left(M,(\alpha)\right)=\dfrac{|4.1+2.3-25|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3.$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-2=0$. Có bao nhiêu điểm M thuộc d sao cho M cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng (P)?

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Vì $M\in d\Rightarrow M(-2t;1+t;t)$.

M cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng (P) nên

$OM=d\left(M;(P)\right)\Rightarrow\sqrt{6t^2+2t+1}=\dfrac{|-3t-3|}{3}\Rightarrow 5t^2=0\Rightarrow t=0.$

Vậy có 1 điểm M thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;2;2)$ và song song với trục Ox. Tính cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-1=0$.

A. $-\dfrac{\sqrt{5}}{15}$. **B.** $-\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{195}}{15}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;2;1)$ và mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_{(Q)}=(1;2;2)$.

Vì (P) là mặt phẳng chứa hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;2;2)$ và song song với trục Ox nên có có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{i}\right]=(0;1;-2)$.

Suy ra góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q):

$$\cos\left((P),(Q)\right)=\frac{\left|\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{n}_{(Q)}\right|}{\left|\vec{n}_{(P)}\right|\cdot\left|\vec{n}_{(Q)}\right|}=\frac{|2-4|}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ $M(7;-1;-2)$ đến (P) lớn nhất có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;4)$. Giá trị của tổng $a+b$ là

A. 2. **B.** -1. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB và $(P)\Rightarrow d\left(M;(P)\right)=MK$

Ta có ΔMHK vuông tại $M \Rightarrow MK\le MH$

$\Rightarrow d\left(M;(P)\right)_{\max}\Leftrightarrow MK=MH\Leftrightarrow K\equiv H$

Khi đó $MH\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{MH}$ là 1 VTPT của (P).

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AB:

$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z+8}{-1}\Rightarrow H(t+1;2t-7;-t-8)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MH}=(t-6;2t-6;-t-6)\perp\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow 1.(t-6)+2.(2t-6)-1.(-t-6)=0$

$\Leftrightarrow 6t-12=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow\overrightarrow{MH}=(-4;-2;-8)=-2(2;1;4)$

$\Rightarrow a=2;b=1\Rightarrow a+b=3$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A, B, C mà $OA=OB=OC\neq 0$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Từ đó ta có $OA=|a|$, $OB=|b|$, $OC=|c|$

Mặt phẳng qua các điểm A, B, C có phương trình theo đoạn chắn: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ (P)$.

Vì $M \in (P)$ nên $\frac{1}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1$. Vì $OA=OB=OC \Rightarrow |a|=|b|=|c|$

Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{1}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1\\|a|=|b|=|c|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1\\|a|=|b|\\|b|=|c|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1\\\left[\begin{array}{l}a=b\\a=-b\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}b=c\\b=-c\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{1}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1\\a=b=c\end{cases}\\\begin{cases}\frac{1}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1\\a=b=-c\end{cases}\\\begin{cases}\frac{1}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1\\a=-b=c\end{cases}\\\begin{cases}\frac{1}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1\\a=-b=-c\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b=-c=-4\\a=-b=c=6\\a=-b=-c=2\end{array}\right..$$

Vậy có 3 mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$, mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α), (P) song song với giá của vecto $\vec{v}=(1;6;2)$ và (P) tiếp xúc với (S). Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $2x-y+2z-2=0$ và $x-2y+z-21=0$ **B.** $x-2y+2z+3=0$ và $x-2y+z-21=0$

C. $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$. **D.** $2x-y+2z+5=0$ và $2x-y+2z-2=0$.

Lời giải

Chọn C

(S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R=4$. Véc tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;4;1)$.

Suy ra VTPT của (P) là $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\vec{v}\right]=(2;-1;2)$.

Do đó (P) có dạng: $2x-y+2z+d=0$.

Mặt khác (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I,(P))=4$

Hay $\frac{|2+3+4+d|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}d=-21\\d=3\end{array}\right.$.

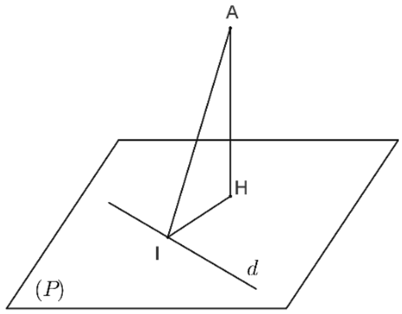
Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-3-t\\z=-4+3t\end{cases}$ và điểm $A(-3;6;-3)$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và có khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất là

A. $(P): x-4y-2z-21=0.$ **B.** $(P): 2x-y+3z-7=0.$

C. $(P): x-2y-2z+17=0.$ **D.** $(P): 2x+y-4z+3=0.$

Lời giải

Chọn A



Ta gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Kẻ $HI \perp d$ tại $I \Rightarrow AI \perp d$.

Khi đó $d(A,(P)) = AH \le d(A,d) = AI$. Mà AI không đổi. Vậy khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất khi chỉ khi $AI \perp (P)$ tại I.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-3;-4)$ và có VTCP $\overrightarrow{a_d} = (2;-1;3)$.

Gọi $I(1+2t;-3-t;-4+3t) \in d$.

$\overrightarrow{AI} = (2t+4;-t-9;3t-1)$

Từ $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{a_d} \Leftrightarrow 14t+14=0 \Leftrightarrow t=-1$. Vậy $\overrightarrow{AI} = (2;-8;-4) = 2(1;-4;-2)$

$\Rightarrow (P)$ có một VTPT là $\vec{n} = (1;-4;-2)$

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;-3;-4)$ và có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-4;-2)$.

$\Rightarrow (P): x-4y-2z-21=0$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $d_1: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ và $d_2: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d_1, d_2. Khoảng cách từ điểm $M(0;4;3)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. 26. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $\dfrac{19\sqrt{26}}{26}$. **D.** $\dfrac{35\sqrt{26}}{26}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $A(3;0;2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1;1;-1)$.

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (3;2;1)$.

(P) chứa hai đường thẳng cắt nhau $d_1, d_2 \Rightarrow (P)$ đi qua điểm $A(3;0;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right] = (3;-4;-1)$. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là:

$3(x-3)-4(y-0)-(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-4y-z-7=0$.

$d\left(M,(P)\right)=\dfrac{|0-16-3-7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\sqrt{26}$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$ và $d':\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z+18}{4}$. (P) là mặt phẳng chứa d và d'. Khoảng cách từ $M(1;0;2)$ đến (P) bằng

A. $\dfrac{99}{16250}$. **B.** $\dfrac{99}{25\sqrt{25}}$. **C.** $\dfrac{99}{25\sqrt{26}}$. **D.** $\dfrac{8}{625}$.

Lời giải

Chọn C

d có VTCP $\vec{u}=(3;-1;4)$ và đi qua $A(-7;5;9)$,

d' có VTCP $\vec{u}'=(3;-1;4)$ và đi qua $B(0;-4;-18)$.

Từ đó ta có $\overrightarrow{AB}=(7;-9;-27)$, $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{u}'$ và $[\vec{u};\overrightarrow{AB}]\neq\vec{0}$

Suy ra d song song d'. (P) là mặt phẳng chứa d và d' nên (P) đi qua $A(-7;5;9)$ và có VTPT $\vec{n}=\left[\vec{u};\overrightarrow{AB}\right]=(63;109;-20)$. Do đó ta có phương trình mặt phẳng (P):

$63(x+7)+109(y-5)-20(z-9)=0 \Leftrightarrow 63x+109y-20z+76=0$.

Khoảng cách từ $M(1;0;2)$ đến (P): $d(M;(P))=\dfrac{|63.1+109.0-20.2+76|}{\sqrt{63^2+109^2+(-20)^2}}=\dfrac{99}{25\sqrt{26}}$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y-2z=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{2}$. Gọi $A(a;0;0)$ là điểm thuộc trục Ox sao cho A cách đều d và (P). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\le -3$. **B.** $a=-3$. **C.** $a>2$. **D.** $a>5$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua $M(1;0;-2)$ và có một VTCP là $\vec{u}_d=(1;2;2)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(a-1;0;2)$, suy ra $\left[\vec{u}_d,\overrightarrow{MA}\right]=(4;2a-4;-2a+2)$.

Theo đề bài ta có:

$$d(A,d)=d(A,(P))\Leftrightarrow \dfrac{\left|\left[\vec{u}_d,\overrightarrow{MA}\right]\right|}{|\vec{u}_d|}=\dfrac{|2a|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{16+(2a-4)^2+(-2a+2)^2}}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{|2a|}{\sqrt{4+1+4}}\Leftrightarrow a=3.$$

Vậy $A(3;0;0)$.

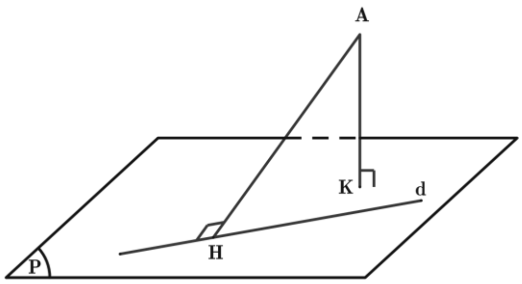
Câu 13: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng

$d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{11\sqrt{18}}{18}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{11}}{18}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của A trên d; K là hình chiếu của A trên (P).

Ta có $d(A,(P))=AK\le AH$ (Không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d,(P))$ là AH

$\Rightarrow d(A,(P))$ lớn nhất khi $K\equiv H$.

Gọi $H(1+2t;t;2+2t)\in d$, suy ra $\overrightarrow{AH}=(2t-1;t-5;2t-1)$.

Vì $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{u_d}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 2(2t-1)+t-5+2(2t-1)=0\Leftrightarrow t=1$.

Nên $H(3;1;4)$, (P) qua H và vuông góc với AH.

$\Rightarrow(P):x-4y+z-3=0$

Vậy $d(M,(P))=\dfrac{11\sqrt{18}}{18}$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d_2:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2. Khoảng cách từ điểm $M(-1;3;2)$ đến (P) là

A. $\dfrac{7\sqrt{10}}{15}$. **B.** $\dfrac{14\sqrt{10}}{15}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{10}}{3}$. **D.** $\dfrac{14}{\sqrt{10}}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d_1 đi qua $A(2;6;-2)$ và có một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;-2;1)$.

Đường thẳng d_2 có một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(1;3;-2)$.

Gọi $\vec{n}$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Do mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2 nên $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(1;5;8)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2;6;-2)$ và có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;5;8)$ là $x+5y+8z-16=0$.

$$\mathrm{d}(M,(P))=\frac{|x_M+5y_M+8z_M-16|}{\sqrt{1^2+5^2+8^2}}=\frac{7\sqrt{10}}{15}$$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-3}{1}$. Khoảng cách từ điểm $A(2;1;4)$ đến (P) bằng:

A. $\frac{2\sqrt{14}}{7}$. **B.** $\frac{4\sqrt{14}}{7}$. **C.** $\frac{4\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\frac{8\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải

Chọn A

Do $(P)\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{u_\Delta}=(3;-2;1)$

(P) qua $M(3;-1;1)$ nên phương trình (P) là:

$3(x-3)-2(y+1)+1(z-1)=0\Leftrightarrow 3x-2y+z-12=0$.

Khoảng cách từ điểm $A(2;1;4)$ đến (P) là: $d(M,(P))=\frac{|6-2+4-12|}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{2\sqrt{14}}{7}$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$, điểm $B(2;-1;0)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A,B và song song với d. Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến (P) bằng

A. $\frac{7}{\sqrt{17}}$. **B.** $\frac{10}{\sqrt{17}}$. **C.** $\frac{6}{\sqrt{29}}$. **D.** $\frac{12}{\sqrt{29}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;1)$.

Do (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;1;2),B(2;-1;0)$ và song song với d

Suy ra mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(2;-3;4)$.

Vậy $(P):2x-3y+4z-7=0$.

Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến (P) bằng: $\frac{|2.3-3.1+4.(-2)-7|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}=\frac{12}{\sqrt{29}}$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa đường thẳng d. Khoảng cách từ điểm $M(-2;1;0)$ đến (P) bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** 1. **D.** $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Từ phương trình đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3}$, ta thấy đường thẳng d đi qua điểm $B(-1;2;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;3)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;0;-2)$.

Suy ra, mặt phẳng (P) đi qua $A(1;2;3)$ nhận $\vec{n}=\left[\vec{u},\overrightarrow{AB}\right]=(-2;2;2)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) là: $x-y-z+4=0$.

Khoảng cách từ điểm $M(-2;1;0)$ đến (P) là: $d(M,(P))=\frac{|-2-1+4|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;-1;-2)$ và chứa trục Oz. Khoảng cách từ điểm $M(2;1;4)$ đến (P) bằng:

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) đi qua $A(1;-1;-2)$ nhận $\vec{n}=\left[\vec{k},\overrightarrow{OA}\right]=(1;1;0)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) là: $x+y=0$.

Khoảng cách từ điểm $M(2;1;4)$ đến (P) là: $d(M,(P))=\frac{|2+1|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q):x+y+3z=0$, $(R):2x-y+z=0$. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;1)$ đến (P) bằng:

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{19\sqrt{2}}{10}$. **C.** $\frac{19\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng $(Q):x+y+3z=0$, $(R):2x-y+z=0$ lần lượt có các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;3)$ và $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;1)$.

Vì (P) vuông góc với hai mặt phẳng (Q), (R) nên (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(4;5;-3)$.

Ta lại có (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$ nên $(P):4(x-2)+5(y-1)-3(z+3)=0$ $\Leftrightarrow 4x+5y-3z-22=0$.

Khoảng cách từ điểm $M\left(-1;2;1\right)$ đến $\left(P\right)$ là: $d\left(M,\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|-4+10-3-22\right|}{\sqrt{16+25+9}}=\dfrac{19\sqrt{2}}{10}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ và đường thẳng $d_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng d_1 và song song với d_2. Tính khoảng cách giữa đường thẳng d_2 và mặt phẳng $\left(P\right)$.

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{7}{5}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có d_1 đi qua $M_1\left(1;0;2\right)$ và có vtcp $\vec{u_1}\left(2;1;2\right)$; d_2 đi qua $M_2\left(0;2;-1\right)$ và có vtcp $\vec{u_2}\left(1;1;2\right)$

Vì $\left(P\right)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng d_1 và song song với d_2 nên vtpt $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=\left(0;-2;1\right)$.

Do $\left(P\right)$ chứa d_1 nên điểm $M_1\in\left(P\right)$. Khi đó phương trình $\left(P\right):-2y+z-2=0$.

Vì d_2 song song với $\left(P\right)$ nên $d\left(d_2,\left(P\right)\right)=d\left(M_2,\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|-4-1-2\right|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $\left(Q\right):x-3y+4z-1=0$. Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với $\left(Q\right)$. Tính khoảng cách từ điểm $A\left(0;1;2\right)$ đến mặt phẳng $\left(P\right)$.

A. $\dfrac{6}{\sqrt{185}}$. **B.** $\dfrac{10}{\sqrt{185}}$. **C.** $\dfrac{8}{\sqrt{185}}$. **D.** $\dfrac{16}{\sqrt{185}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có d đi qua $M\left(1;0;2\right)$ và có vtcp $\vec{u}\left(2;1;2\right)$; và $\left(Q\right)$ có vtpt $\vec{n}_{(Q)}=\left(1;-3;4\right)$

Vì $\left(P\right)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với $\left(Q\right)$ nên vtpt $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u};\vec{n}_{(Q)}\right]=\left(10;-6;-7\right)$.

Do $\left(P\right)$ chứa d nên điểm $M\in\left(P\right)$. Khi đó phương trình $\left(P\right):10x-6y-7z+4=0$.

Khi đó $d\left(A,\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|-6-14+4\right|}{\sqrt{100+36+49}}=\dfrac{16}{\sqrt{185}}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+4t\\y=-6t\\z=-1-8t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-7}{-6}=\dfrac{y-2}{9}=\dfrac{z}{12}$. Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d và Δ. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;3)$ đến (P) bằng

A. $\frac{152}{\sqrt{870}}$. **B.** $\frac{125}{\sqrt{870}}$. **C.** $\frac{512}{\sqrt{870}}$. **D.** $\frac{215}{\sqrt{870}}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;-8)$; đường thẳng Δ đi qua điểm $B(7;2;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{b}=(-6;9;12)$.

Ta có $\frac{4}{-6}=\frac{-6}{9}=\frac{-8}{12}$ suy ra $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương.

Mặt khác ta thấy $A(2;0;-1)\notin\Delta$.

Vậy $d//\Delta$.

Lấy điểm $C(6;-6;-9)\in d$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{BC}=(-1;-8;-9);\overrightarrow{BA}=(-5;-2;-1)$

$\Rightarrow\vec{n}=\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=(10;-44;-38)=2(5;-22;-19)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(2;0;-1)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(5;-22;-19)$ có phương trình là : $5x-22y-19z-29=0$.

Vậy $d(M,(P))=\frac{|5.1-22.2-19.3-29|}{\sqrt{5^2+(-22)^2+(-19)^2}}=\frac{125}{\sqrt{870}}$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Cosin của góc giữa (P) và $(Q):-x+3y-3z+2023=0$ bằng

A. $\frac{-1}{3\sqrt{19}}$. **B.** $\frac{1}{3\sqrt{13}}$. **C.** $\frac{1}{3\sqrt{19}}$. **D.** $\frac{13}{3\sqrt{19}}$.

Lời giải

Chọn C

Lấy $B(2;1;1)\in d$ ta có $\overrightarrow{AB}=(2;0;-1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]=(2;4;4)=2(1;2;2)$

Mặt phẳng (P) đi qua A và chứa d suy ra $\overrightarrow{n_P}=(1;2;2)$.

Gọi α là góc giữa (P) và (Q)

Ta có $\cos\alpha=\left|\cos(\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|}=\frac{|-1+6-6|}{\sqrt{1+4+4}.\sqrt{1+9+9}}=\frac{1}{3\sqrt{19}}$

Vậy $\cos\alpha=\frac{1}{3\sqrt{19}}$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ và hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(0;-1;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với đường thẳng AB và đường thẳng d. Viết phương trình mặt phẳng (P) biết khoảng cách giữa d và (P) bằng $\sqrt{2}$ và (P) cắt Ox tại điểm có hoành độ dương.

A. $x-y-1=0$. **B.** $x-y-3=0$. **C.** $x-z-1=0$. **D.** $x-z-3=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có d đi qua $M(2;1;1)$ và có vtcp $\vec{u}(2;1;2)$

Vì (P) là mặt phẳng song song với đường thẳng AB và đường thẳng d nên vtpt $\vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}\right]=(-7;0;7)$. Chọn $\vec{n}_{(P)}=(1;0;-1)$.

Phương trình $(P): x-z+D=0$ (vì (P) cắt Ox tại điểm có hoành độ dương nên $D<0$).

Vì d song song với (P) nên $d(d,(P))=d(M,(P))=\dfrac{|1+D|}{\sqrt{2}}$.

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{|1+D|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|1+D|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=1\\D=-3\end{array}\right.\Rightarrow D=-3$.

Vậy phương trình $(P): x-z-3=0$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-3), B(-1;4;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua A,B và song song với đường thẳng d. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{21}}{21}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;6;4)$, Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Mặt phẳng (α) đi qua A,B và song song với đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(16;8;-4)=4(4;2;-1)$.

Mặt phẳng (α) có phương trình là $4(x-1)+2(y+2)-(z+3)=0\Leftrightarrow 4x+2y-z-3=0$.

Khi đó $d(O,(\alpha))=\dfrac{|-3|}{\sqrt{4^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(8;-8;8)$. Gọi M là điểm sao cho $MA=3MO$ (Với O là gốc tọa độ). Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+19=0$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $6+3\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $6-3\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;y;z)$. Khi đó $MA=3MO$

$\Leftrightarrow(x-8)^2+(y+8)^2+(z-8)^2=9\left(x^2+y^2+z^2\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-24=0$

Suy ra tập hợp các điểm M thỏa $MA=3MO$ là mặt cầu (S) tâm $I(-1;1;-1)$ và bán kính $R=3\sqrt{3}.$

Vì $d(I,(P))=6>R$ nên (P) không cắt (S).

Do đó khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị nhỏ nhất là

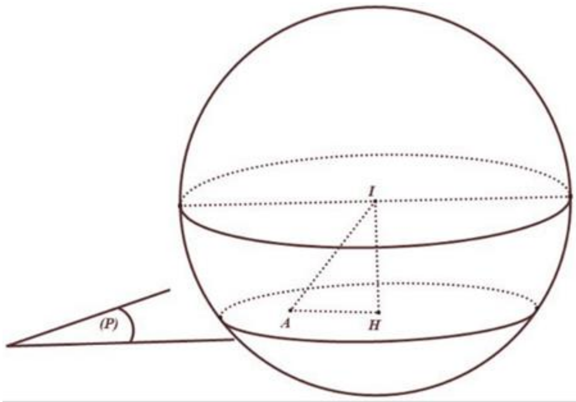
$d_{\min}=d(I,(P))-R=6-3\sqrt{3}.$

Câu 27: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=16$, điểm $A(1;0;2)$. Gọi mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất. Khoảng cách từ $M(2;-1;4)$ đến (P) là:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$, bán kính $R=4$.

Ta có $IA=3<R\Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S).

Do đó mặt phẳng (P) qua A luôn cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$.

Ta luôn có $IA\ge IH\Rightarrow\sqrt{R^2-IH^2}\ge\sqrt{R^2-IA^2}\Rightarrow r\ge\sqrt{R^2-IA^2}$.

Diện tích của hình tròn (C) nhỏ nhất khi bán kính r nhỏ nhất, tức là $r=\sqrt{R^2-IA^2}\Leftrightarrow H\equiv A$.

Khi đó $IA\perp(P)\Rightarrow$mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{IA}=(2;-2;1)$ làm một VTPT.

$\Rightarrow$phương trình mặt phẳng (P): $2(x-1)-2y+(z-2)=0\Leftrightarrow 2x-2y+z-4=0.$

Vậy khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là $d(M,(P))=\frac{|4+2+4-4|}{3}=2$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a+b+c=2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Khoảng cách từ $M(0;2023;0)$ tới mặt phẳng (P) bằng

A. 2022. **B.** $\frac{2023}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{2021}{3}$. **D.** $674\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn OA.

$\Rightarrow(\alpha)$ đi qua điểm $D\left(\frac{a}{2};0;0\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OA}=(a;0;0)=a(1;0;0)\Rightarrow(\alpha):x-\frac{a}{2}=0$.

Gọi (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn OB.

$\Rightarrow(\beta)$ đi qua điểm $E\left(0;\frac{b}{2};0\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OB}=(0;b;0)=b(0;1;0)\Rightarrow(\beta):y-\frac{b}{2}=0$.

Gọi (γ) là mặt phẳng trung trực của đoạn OC.

$\Rightarrow(\gamma)$ đi qua điểm $F\left(0;0;\frac{c}{2}\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OC}=(0;0;c)=c(0;0;1)\Rightarrow(\gamma):z-\frac{c}{2}=0$.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ $\Rightarrow I=(\alpha)\cap(\beta)\cap(\gamma)\Rightarrow I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$.

Theo giả thiết, $a+b+c=2\Leftrightarrow\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=1\Rightarrow I\in(P):x+y+z=1$.

Vậy, $d(M,(P))=\frac{|2023-1|}{\sqrt{3}}=\frac{2022}{\sqrt{3}}=674\sqrt{3}$.

Câu 29: Trong không gian *Oxyz*, cho hai mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=36$ và $(S'):(x+1)^2+y^2+z^2=4$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng $2\pi\sqrt{11}$. Khoảng cách từ $M(2;-1;3)$ đến (P) bằng

A. $\frac{19}{3}$. **B.** $\frac{17}{7}$. **C.** $\frac{8}{9}$. **D.** $\frac{19}{2}$.

Lời giải

Lờigiải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=6$, mặt cầu (S') có tâm $I'(-1;0;0)$, bán kính $R'=2$

Vì $I'I=3<R-R'=4$ nên mặt cầu (S') nằm trong mặt cầu (S).

Mặt phẳng (P) tiếp xúc $(S')\Rightarrow d(I',(P))=R'=2$; (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng $2\pi\sqrt{11}$ nên $d(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2}=5$.

Nhận thấy $d(I,(P))-d(I',(P))=I'I$ nên tiếp điểm H của (P) và (S') cũng là tâm đường tròn giao của (P) và (S). Khi đó, (P) là mặt phẳng đi qua H, nhận $\overrightarrow{II'}=(-2;1;-2)$ làm vecto pháp tuyến.

Ta có: $\overrightarrow{IH}=\frac{5}{3}\overrightarrow{II'}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=-\frac{7}{3}\\ y_H=\frac{2}{3}\\ z_H=\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow H\left(-\frac{7}{3};\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (P): $-2\left(x+\frac{7}{3}\right)+\left(y-\frac{2}{3}\right)-2\left(z+\frac{4}{3}\right)=0\Leftrightarrow 2x-y+2z+8=0$.

Khoảng cách từ M đến (P) là $d\left(M,(P)\right)=\frac{19}{3}$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$. Gọi mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất. Tính khoảng cách từ $M(2;-3;4)$ đến mặt phẳng (α).

A. $\frac{7}{\sqrt{41}}$. **B.** $\frac{\sqrt{42}}{6}$. **C.** $\frac{5}{\sqrt{42}}$. **D.** $\frac{5}{13}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu của A đến d. Khi đó $H(2+t;-1-2t;1+3t)$ $\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(-1+t;-2t;-1+3t)$

Do $AH\perp d\Rightarrow -1+t+4t-3+9t=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{7}$. Khi đó $\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{5}{7};-\frac{4}{7};-\frac{1}{7}\right)$.

Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi $AH\perp(\alpha)$.

Do đó (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(5;4;1)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (α): $5(x-2)+4(y+1)+(z-1)=0\Leftrightarrow 5x+4y+z-7=0$.

Vậy khoảng cách từ M đến (P) là $d\left(M,(P)\right)=\frac{5}{\sqrt{42}}$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α).

A. $\frac{8\sqrt{21}}{21}$. **B.** $\frac{2\sqrt{12}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\frac{7\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải

Phương trình mặt chắn cắt tia Ox tại $A(a;0;0)$, cắt tia Oy tại $B(0;b;0)$, cắt tia Oz tại $C(0;0;c)$ có dạng là (P): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (với $a>0$, $b>0, c>0$).

Theo đề: $\dfrac{OA}{1}=\dfrac{OB}{2}=\dfrac{OC}{4}\Leftrightarrow\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{b}{2}\\c=2b\end{cases}$.

Vì $M(1;3;-2)$ nằm trên mặt phẳng (P) nên ta có: $\dfrac{1}{\frac{b}{2}}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{-2}{2b}=1\Leftrightarrow\dfrac{4}{b}=1\Leftrightarrow b=4$.

Khi đó $a=2$, $c=8$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{8}=1\Leftrightarrow 4x+2y+z-8=0$.

Vậy $d(O,(\alpha))=\dfrac{|-8|}{\sqrt{4^2+(2)^2+(1)^2}}=\dfrac{8\sqrt{21}}{21}$.

Câu 32: Trong không gian Oxyz cho điểm $A(1;-2;1)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=2+3t\\y=-1+t\\z=-1-t\end{cases}$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;-2;1)$ và chứa d. Khoảng cách từ $M(-1;0;4)$ đến (P) bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{30}}{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$. **C.** $\dfrac{16}{\sqrt{30}}$. **D.** $\dfrac{14}{\sqrt{30}}$.

Lời giải

Chọn A

Lấy $B(2;-1;-1)\in d$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1;-2)$, một VTCP của d là $\vec{u}(3;1;-1)$. Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(1;-5;-2)$. (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;-2;1)$ và chứa d nên một VTPT của (P) là: $\vec{n}=(1;-5;-2)$. Phương trình mặt phẳng (P) là:

$1(x-1)-5(y+2)-2(z-1)=0\Leftrightarrow x-5y-2z-9=0$.

$d(M,(P))=\dfrac{|-1-5.0-2.4-9|}{\sqrt{1^2+(-5)^2+(-2)^2}}=\dfrac{18}{\sqrt{30}}=\dfrac{3\sqrt{30}}{5}$.

Câu 33: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) song song và cách mặt phẳng ` $(Q): x+2y+2z-3=0$ một khoảng bằng 1 và (P) không qua gốc tọa độ O. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+2z-6=0$ **B.** $x+2y+2z+1=0$

C. $x+2y+2z=0$ **D.** $x+2y+2z+3=0$

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-3=0$ nên phương trình mp (P): $x+2y+2z+d=0$. $A(3,0,0)\in(Q)$.

Mặt phẳng (P) cách mặt phẳng ` $(Q): x+2y+2z-3=0$ một khoảng bằng 1 $\Rightarrow d(A,(P))=1\Leftrightarrow\dfrac{|3+d|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1\Leftrightarrow|d+3|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=-6\\d=0\end{array}\right.$.

Vì (P) không qua gốc tọa độ O nên $d \neq 0 \Rightarrow d = -6$.

Vậy pt mặt phẳng (P) : $x + 2y + 2z - 6 = 0$.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1); B(-1;0;3)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 5 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + cz - 2 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. **B.** $a^2 + b^2 + c^2 = 13$. **C.** $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. **D.** $a^2 + b^2 + c^2 = 10$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;1)$, $\overrightarrow{AB} = (-3;-1;2)$.

Vì (Q) vuông góc với của (P) nên $\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{n}$.

Mặt khác (Q) đi qua A và B nên $\overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{AB}$. Ta có: $\left[\vec{n}, \overrightarrow{AB}\right] = (5;-5;5)$

Mp(Q) nhận $\overrightarrow{n_Q} = \frac{1}{5}\left[\vec{n}, \overrightarrow{AB}\right] = (1;-1;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): 1(x-2) - 1(y-1) + 1(z-1) = 0$, hay $(Q): x - y + z - 2 = 0$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Câu 35: Trong không gian *Oxyz*, cho điểm $A(2;-1;3)$, mặt phẳng $(P): 4x - y + z - 10 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm *M*, *N* sao cho *A* là trung điểm của đoạn *MN*. Biết $\vec{u} = (a;b;-4)$ là một vec tơ chỉ phương của Δ. Giá trị của $a + b$ bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 1. **D.** -6.

Lời giải

Chọn B

Vì *N* là giao điểm của Δ và d nên $N(2+2t;-1+2t;2-t)$.

A là trung điểm của đoạn *MN* $\Rightarrow \begin{cases} x_M = 2.x_A - x_N = 2 - 2t \\ y_M = 2.y_A - y_N = -1 - 2t \Rightarrow M(2-2t;-1-2t;4+t) \\ z_M = 2.z_A - z_N = 4 + t \end{cases}$

Vì $M \in (P)$ nên ta có phương trình:

$(P): 4(2-2t) - (-1-2t) + 4 + t - 10 = 0 \Leftrightarrow -5t = -3 \Leftrightarrow t = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow N\left(\frac{16}{5};\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$. Khi đó, đường thẳng Δ có một VTCP là $\overrightarrow{NA} = \left(-\frac{6}{5};-\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right) \Rightarrow \vec{u} = (3;3;-4)$

Suy ra $\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$. Vậy $a + b = 6$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (P). Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến (Q) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;-1;1)$. Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;1;-1)$. Vì mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với (P) nên mặt phẳng (Q) có một véc tơ pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}\right]=(0;2;2)$. Vậy mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(2;-1;1)$, có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(0;2;2)$ có phương trình là: $2y+2z=0$. Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến (Q) bằng: $d(M;(Q))=\frac{|2-4|}{\sqrt{4+4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và song song với trục Ox. Khoảng cách từ điểm $M(1;-1;0)$ đến (P) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;-1;1)$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và song song với trục Ox $\Rightarrow \overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_d};\vec{i}\right]=(0;1;1)$. Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;2)$, có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(0;1;1)$ có phương trình là: $y+z-1=0$. Khoảng cách từ điểm $M(1;-1;0)$ đến (P) bằng: $d(M;(P))=\frac{|-1+0-1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(0;-2;5)$ đến (P) bằng

A. $\frac{3\sqrt{11}}{11}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{23}{\sqrt{195}}$. **D.** $\frac{29}{\sqrt{195}}$.

Lời giải

Chọn C

Lấy $B(1;-2;3)\in d$ ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-5;1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]=(13;-1;-5)$

Mặt phẳng (P) đi qua A và chứa d suy ra $\overrightarrow{n_P}=(13;-1;-5)$.

Phương trình mặt phẳng $(P):13x-y-5z=0$

Vậy $\mathrm{d}(M,(P))=\frac{|13x_M-y_M-5z_M|}{\sqrt{13^2+(-1)^2+(-5)^2}}=\frac{23}{\sqrt{195}}$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=8$ và điểm $A(1;3;2)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Biết (P) có dạng $ax+by+cz+6=0$. Tính $a+b+c$.

A. 4. **B.** 2. **C.** -4. **D.** -6.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$

Ta có $\overrightarrow{IA}=(2;1;-1)$; $AI=\sqrt{6}<R$, suy ra điểm A nằm trong mặt cầu (S)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P), khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$, do đó r nhỏ nhất khi và chỉ khi IH lớn nhất.

Mặt khác ta luôn có $IH\le IA$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi H trùng với A, hay $(P)\perp IA$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{IA}=(2;1;-1)$ và qua $A(1;3;2)$ có phương trình

$2(x-1)+(y-3)-1(z-2)=0\Leftrightarrow 2x+y-z-3=0\Leftrightarrow -4x-2y+2z+6=0$

Vậy $a+b+c=-4$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$, $(Q):x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với cả (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (R) bằng $\sqrt{2}$.

A. $\left[\begin{array}{l}x-z+2=0\\x-z-2=0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x-z+4=0\\x-z-4=0\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}x-y+2=0\\x-y-2=0\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}x-y+4=0\\x-y-4=0\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn A

Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ có vectơpháp tuyến lần lượt là: $\overrightarrow{n_1}(1;1;1),\overrightarrow{n_2}(1;-1;1)$.

Vì mặt phẳng (R) vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) nên mặt phẳng (R) có một vectơ pháp tuyến là

$\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(2;0;-2)$

Hay mặt phẳng (R) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n'}(1;0;-1)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (R) có dạng: $x-z+D=0$.

Mặt khác, ta có: $d(O,(R))=\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{|D|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|D|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=2\\D=-2\end{array}\right.$.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán là: $(R_1): x-z+2=0$, $(R_2): x-z-2=0$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;3),B(-1;3;2),C(-1;2;3)$. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;-2;4)$ đến mặt phẳng ABC .

A. $\sqrt{15}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;2;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;1;0)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC): $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(1;2;2)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC): $1(x-1)+2(y-1)+2(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-9=0$.

$d(M,(ABC))=\dfrac{|1-4+8-9|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{4}{3}$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+2z-7=0$. Gọi I là giao điểm của d và (P). Biết $IM=9$, khoảng cách từ điểm M thuộc d đến (P) bằng

A. $\sqrt{15}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra đường thẳng d có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;2;1)$, mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;2)$.

Gọi α là góc giữa d và $(P) \Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\dfrac{8}{3.3}=\dfrac{8}{9}$

Mà $\sin\alpha=\dfrac{d(M,(P))}{IM} \Rightarrow d(M,(P))=8$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;2)$ và chứa đường thẳng $(\Delta):\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-m}$. Giá trị m thuộc khoảng nào dưới đây sao cho khoảng cách từ điểm $M(5;-1;3)$ đến mặt phẳng (P) lớn nhất?

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

(Δ) đi qua $B(2;1;1)$ và có vtcp $\vec{u}(2;2;-m)$.

$\overrightarrow{AB}(2;0;-1)$, $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(2;2m-2;4)=2(1;m-1;2)$

Mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\vec{n}(1;m-1;2)$ làm vtpt nên có phương trình:

$x+(m-1)y+2z-3-m=0$

$d(M;(P))=\dfrac{|9-2m|}{\sqrt{m^2-2m+6}}$

Đặt $f(m)=\dfrac{|9-2m|}{\sqrt{m^2-2m+6}}$

$\Rightarrow f'(m)=\dfrac{14m^2-57m-27}{|9-2m|\left(\sqrt{m^2-2m+6}\right)^3}$, với $m\neq\dfrac{9}{2}$, $f'(m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{9}{2} \\ m=\dfrac{-3}{7} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

m	$-\infty$		$-\dfrac{3}{7}$		$\dfrac{9}{2}$		$+\infty$
$f'(m)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f(m)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{345}}{5}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\max f(m)=\dfrac{\sqrt{345}}{5}$ tại $m=\dfrac{-3}{7}$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$; $B(11;15;4)$; $C(3;9;-2)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-4+3t\\y=-3+2t\\z=-2+2t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và điểm A. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $S=MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(Q):2x+y+2z-3=0$.

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d đi qua điểm $E(-4;-3;-2)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u}=(3;2;2)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}=(-3;-4;-3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AE},\vec{u}\right]=\left(\begin{vmatrix}-4&-3\\2&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3&-3\\2&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3&-4\\3&2\end{vmatrix}\right)=(-2;-3;6)$.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và điểm A nên có một vector pháp tuyến $\vec{n}=(2;3;-6)$.

$\Rightarrow$Phương trình mặt phẳng (P) là: $2(x+1)+3(y-1)-6(y-1)=0$ hay $2x+3y-6z+5=0$.

Gọi I là trung điểm $BC\Rightarrow I(7;12;1)$.

Ta có: $S=MB^2+MC^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=$

$=2\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IC}^2+\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=2IM^2+IB^2+IC^2\ge 2\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2+IB^2+IC^2=const$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P).

Khi đó đường thẳng IM đi qua điểm $I(7;12;1)$ và có một vector chỉ phương $\vec{n}=(2;3;-6)$.

$\Rightarrow$Phương trình đường thẳng IM là: $\begin{cases}x=7+2t_1\\y=12+3t_1\\z=1-6t_1\end{cases}$.

Do $M=IM\cap(P)$ nên tọa độ điểm M thỏa mãn hệ: $\begin{cases}x=7+2t_1\\y=12+3t_1\\z=1-6t_1\\2x+3y-6z+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=-1\\x=5\\y=9\\z=7\end{cases}$

$\Rightarrow M(5;9;7)$.

Vậy $d\left(M;(Q)\right)=\dfrac{|2.5+9+2.7-3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=10$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\ y=-8+4t\\ z=-3+3t\end{cases}$ và $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-3}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d và Δ. Khoảng cách từ điểm $M(0;2;1)$ đến (P) bằng

A. $\dfrac{2}{\sqrt{217}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{271}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{217}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{271}}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d đi qua điểm $A(0;-8;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-1;4;3)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $B(-1;4;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-4;-3)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;12;6)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]=(12;-3;8)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0;-8;-3)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(12;-3;8)$ có phương trình $12x-3y+8z=0$

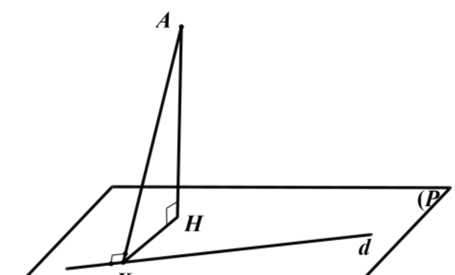
Vậy $d\left(M;(P)\right)=\dfrac{|12.0-3.2+8.1|}{\sqrt{12^2+3^2+8^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{217}}$

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $A(2;-2;4)$. **B.** $D(2;2;4)$. **C.** $B(2;2;-4)$. **D.** $C(-2;2;4)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi K là hình chiếu của A trên đường thẳng d.

Ta có $K\in d\Rightarrow K(-2+3t;-2+2t;t)\Rightarrow\overrightarrow{AK}=(3t-1;2t-4;t-3)$.

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}=(3;2;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AK}\perp\overrightarrow{u_d}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 3(3t-1)+2(2t-4)+1(t-3)=0\Leftrightarrow t=1$

Với $t=1$, ta có $K(1;0;1)$ và $\overrightarrow{AK}=(2;-2;-2); AK=2\sqrt{3}$.

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P).

Ta có $AH \le AK \Rightarrow d(A,(P)) \le 2\sqrt{3} \Rightarrow \max d(A,(P))=2\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv K$. Khi đó $AK \perp (P)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $K(1;0;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{AK}=(2;-2;-2)$.

Do đó phương trình mặt phẳng (P) là: $2(x-1)-2y-2(z-1)=0 \Leftrightarrow x-y-z=0$.

Thay tọa độ các điểm trong các phương án vào phương trình mặt phẳng (P) ta thấy có điểm $A(2;-2;4)$ thỏa mãn.

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc bằng 30^0. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử mặt phẳng (α) cắt Oz tại $C(0;0;c)$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{c}=1$

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{c}\right)$

Mặt phẳng (Oyz) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(1;0;0)$

Mặt phẳng (α) tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc bằng 30^0 nên ta có

$$\cos\left(30^0\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2c|}{\sqrt{5c^2+4}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c=\pm 2\sqrt{3}$$

Với $c=2\sqrt{3} \Rightarrow (\alpha): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2\sqrt{3}}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+z-2\sqrt{3}=0$

Với $c=-2\sqrt{3} \Rightarrow (\alpha): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}-\frac{z}{2\sqrt{3}}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-z-2\sqrt{3}=0$

Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) là: $d(O;(\alpha))=\frac{\left|-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12+3+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 48: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;8;2), N(9;-7;23)$ và mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$. Mặt phẳng $(P): x+by+cz+d=0$ đi qua điểm M và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ N đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khi đó tổng $b-c+d$ có giá trị bằng

A. $b+c+d=2$. **B.** $b+c+d=-1$. **C.** $b+c+d=-5$. **D.** $b+c+d=4$.

Lời giải

Chọn C

Vì $M\in(P)$ nên $8b+2c+d=0\Leftrightarrow d=-8b-2c\Rightarrow(P):x+by+cz-8b-2c=0$

Do (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên

$$d\left(I;(P)\right)=R\Leftrightarrow\frac{\left|-11b+5c+5\right|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=6\sqrt{2}$$

Ta có: $d\left(N;(P)\right)=\dfrac{\left|9-15b+21c\right|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=\dfrac{\left|(-11b+5c+5)+4(-b+4c+1)\right|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}$

$$\Rightarrow d\left(N;(P)\right)\le\frac{\left|(-11b+5c+5)\right|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}+\frac{\left|4(-b+4c+1)\right|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=6\sqrt{2}+\frac{\left|4(-b+4c+1)\right|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}$$

$$\le 6\sqrt{2}+4\frac{\sqrt{\left(1^2+4^2+1^2\right)\left(b^2+c^2+1^2\right)}}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=18\sqrt{2}.$$

Vậy $d\left(N;(P)\right)_{\max}=18\sqrt{2}$ khi $\begin{cases}(-11b+5c+5).(-b+4c+1)>0\\ \dfrac{b}{-1}=\dfrac{c}{4}=\dfrac{1}{1}\end{cases}\Leftrightarrow b=-1;c=4$.

Từ đây có $b=-1;c=4;d=0\Rightarrow b-c+d=-5$.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x-2y+z=0$. Đường thẳng d cắt (P) tại điểm A. Biết rằng $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d có hoành độ âm đồng thời $AM=\sqrt{6}$. Tính $S=2a+3b+c$.

A. $S=-10$. **B.** $S=10$. **C.** $S=-12$. **D.** $S=12$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A\in d\Rightarrow A(2t+1;t;-t-2)$. Lại có $A\in(P)\Rightarrow t=-1\Rightarrow A(-1;-1;-1)$.

Với $M\in d\Rightarrow M(2m+1;m;-m-2)$

Theo đề $AM=\sqrt{6}\Leftrightarrow(2m+2)^2+(m+1)^2+(-m-1)^2=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=0\end{array}\right.$.

$m=-2\Rightarrow M(-3;-2;0)$ (chọn).

$m=0\Rightarrow M(1;0;-2)$ (loại).

$S=2a+3b+c=2.(-3)+3.(-2)+0=-12$.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;1)$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm M và chứa trục Oy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{OM}=(2;-1;1)$ và và vecto đơn vị $\vec{j}=(0;1;0)$.

Khi đó $\left[\overrightarrow{OM},\vec{j}\right]=(-1;0;2)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm M và chứa trục Oy nên có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-1;0;2)$.

Suy ra phương trình của (α) là: $-x+2z=0$.

Vậy $d\left(A,(\alpha)\right)=\dfrac{|-1+2.3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$; $d':\begin{cases}x=3-t\\y=-1+2t\\z=1-2t\end{cases}$ và điểm $M(5;0;-1)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d và d'. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{34}}{34}$. **C.** $\dfrac{27\sqrt{2}}{10}$. **D.** $\dfrac{23\sqrt{2}}{10}$.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy d và d' là hai đường thẳng song song và $M_1(1;-2;0)\in d$, $M_2(3;-1;1)\in d'$, $\vec{u}=(1;-2;2)$ là một véctơ chỉ phương của chúng.

Có $\left[\overrightarrow{M_1M_2},\vec{u}\right]=(4;-3;-5)$.

Mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng d và d' nên có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;-3;-5)$, do đó nó có phương trình: $4x-3y-5z-10=0$.

Vậy $d\left(M,(\alpha)\right)=\dfrac{|4.5-3.0+5-10|}{5\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

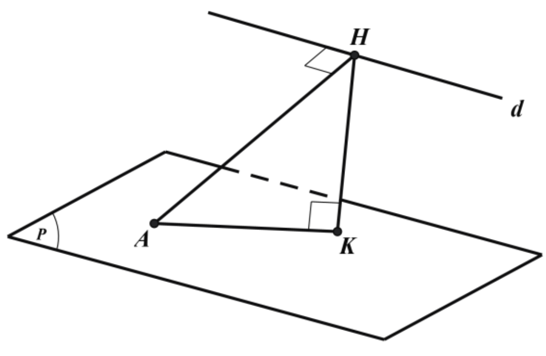
Câu 52: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

A. $x+2y-3z-10=0$. **B.** $x-2y+3z-10=0$.

C. $x-2y+3z+10=0$. **D.** $x-2y-3z-10=0$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d. Ta suy ra $H(1;1;1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và (P) song song với đường thẳng d. Gọi K là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P). Do $d \,//\, (P)$ nên ta có $d\left(d,(P)\right) = d\left(H,(P)\right) = HK$.

Ta luôn có bất đẳng thức $HK \le HA$. Như vậy khoảng cách từ (d) đến (P) lớn nhất bằng AH

Khi đó (P) nhận $\overrightarrow{AH} = (-1;2;3)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Do (P) đi qua $A(2;-1;-2)$ nên ta có phương trình của (P) là: $x - 2y - 3z - 10 = 0$.

DẠNG 13 TÌM CẶP SỐ NGUYÊN LIÊN QUAN ĐẾN BPT LOGARIT

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa: Bất phương trình lôgarit là bất phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

Bất phương trình lôgarit cơ bản: cho $a,b>0,a\neq 1$

Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng:

$$\log_a f(x)>b;\log_a f(x)\geq b;\log_a f(x)<b;\log_a f(x)\leq b$$

Phương pháp giải phương trình và bất phương trình lôgarit

- Đưa về cùng cơ số
  - Nếu $a>1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} g(x)>0\\ f(x)>g(x)\end{cases}$
  - Nếu $0<a<1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)>0\\ f(x)<g(x)\end{cases}$
- Đặt ẩn phụ
- Mũ hóa
- Phương pháp hàm số và đánh giá

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 47 – Đề tham khảo 2023. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn:

$$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)?$$

A. 89. **B.** 48. **C.** 90. **D.** 49.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+y^2+x\right)-\log_3 x\le\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)-\log_2\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{x^2+y^2+x}{x}\right)\le\log_2\left(\dfrac{x^2+y^2+24x}{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow \log_3\left(1+\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)\le\log_2\left(1+\dfrac{24x}{x^2+y^2}\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}+1\right)-\log_2\left(1+\dfrac{24x}{x^2+y^2}\right)\le 0.$

Đặt: $t=\dfrac{x^2+y^2}{x}(t>0)$, bất phương trình trở thành: $\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)\le 0$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)\ln 3}+\dfrac{24}{\left(t^2+24t\right)\ln 2}>0,\forall t>0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f(8)=\log_3(1+8)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{8}\right)=0$

Từ đó suy ra: (1) $\Leftrightarrow f(t)\le f(8)\Leftrightarrow t\le 8\Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{x}\le 8\Leftrightarrow (x-4)^2+y^2\le 16$.

Đếm các cặp giá trị nguyên của $(x;y)$

Ta có: $(x-4)^2\le 16\Leftrightarrow 0\le x\le 8$, mà $x>0$ nên $0<x\le 8$.

Với $x=1,x=7\Rightarrow y=\{\pm2;\pm1;0\}$ nên có 10 cặp.

Với $x=2,x=6\Rightarrow y=\{\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 14 cặp.

Với $x=3,x=5\Rightarrow y=\{\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 14 cặp.

Với $x=4\Rightarrow y=\{\pm4;\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 9 cặp.

Với $x=8\Rightarrow y=0$ có 1 cặp.

Vậy có 48 cặp giá trị nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x,y nguyên và $1\le x,y\le 2023$ thỏa mãn:

$$(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)?$$

A. 4040. **B.** 2023. **C.** 4046. **D.** 2020.

Câu 2: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa

$$3\left(81^y+4y\right)+2026\le -x^2+2024x+\log_3\left[(x-2023)^3(1-x)^3\right]$$

A. 2021. **B.** 2003. **C.** 4042. **D.** 4024.

Câu 3: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_5\left(x^2+y^2+x\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_5 x+\log_3\left(x^2+y^2+8x\right)?$$

A. 12. **B.** 13. **C.** 24. **D.** 30.

Câu 4: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện x là số nguyên tố; $y\le 4320$ và $2\left(2.8^x+9x\right)\le y-11+3\log_2(y+1)^2$?

A. 6340. **B.** 2024. **C.** 7286. **D.** 8022.

Câu 5: Có bao nhiêu số nguyên $x\in[-2022;2022]$ để ứng với mỗi x có tối thiểu 64 số nguyên y thỏa mãn $\log_3\sqrt{x^4+y}\ge\log_2(x+y)$?

A. 3992. **B.** 3994. **C.** 3990. **D.** 3989.

Câu 6: Giả sử $(x;y)$ là cặp số nguyên thỏa mãn đồng thời $8\le x\le 2022$ và $2^y-\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=2x-y$. Tổng các giá trị của y bằng

A. 60. **B.** 63. **C.** 2022. **D.** 49.

Câu 7: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $y\le 2023$ và $3\left(9^x+2x\right)\le y+\log_3(y+1)^3-2$?

A. 10. **B.** 2023. **C.** 3776. **D.** 3780.

Câu 8: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$ có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A. 36. **B.** 35. **C.** 34. **D.** vô số.

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với mỗi số nguyên y có đúng 6 số nguyên x thỏa mãn $7^{x^2-|y-3x+2|}.\log_{(|y-3x+2|+5)}\left(x^2+5\right)\le 1$?

A. 16. **B.** 17. **C.** 14. **D.** 15.

Câu 10: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng với mỗi giá trị y luôn tồn tại không quá 15 số nguyên x thỏa mãn điều kiện $\log_{2021}\left(x+y^2\right)+\log_{2022}\left(y^2+y+16\right)\ge\log_2(x-y)$?

A. 2021. **B.** 4042. **C.** 2020. **D.** 4041.

Câu 11: Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy.$

A. 7 . **B.** 6 . **C.** 5 . **D.** 9 .

Câu 12: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $0<y<2020$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$?

A. 6 . **B.** 7 . **C.** 5 . **D.** 9 .

Câu 13: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(x^2+y^2+2x\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_2 x+\log_3\left(x^2+y^2+16x\right)$$

A. 2 . **B.** 3 . **C.** 4 . **D.** 5 .

Câu 14: Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $y\le 20$ thỏa mãn

$$\log_{2022}\frac{x+1}{y+1}\le y^4+2y^3-x^2y^2-2y^2x.$$

A. 200 . **B.** 380 . **C.** 210 . **D.** 420 .

Câu 15: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng với mỗi y luôn tồn tại không quá 63 số nguyên x thỏa mãn điều kiện: $\log_{2020}(x+y^2)+\log_{2021}(y^2+y+64)\ge\log_4(x-y).$

A. 301. **B.** 302. **C.** 602. **D.** 2.

Câu 16: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $x\le 2020$ thỏa mãn $\log_2(x-1)+2x-2y=1+4^y$

A. 2020 . **B.** 1010 . **C.** 6 . **D.** 5 .

Câu 17: Có bao nhiêu bộ số nguyên $(x;y)$ và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn

$$(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$$

A. 2017 . **B.** 2 . **C.** 2020 . **D.** 4034 .

Câu 18: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa $x\in[0;3]$ và $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_3 y}+6x+1>\left(\dfrac{1}{4}\right)^x+\log_3\left(3y^3\right)$?

A. 819 . **B.** 817 . **C.** 816 . **D.** 88 .

Câu 19: Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x,y nguyên và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn

$$(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)?$$

A. 2017 . **B.** 4034 . **C.** 2 . **D.** 2017.2020 .

Câu 20: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $x\le 2023$ và $3\left(9^y+2y\right)+2\le x+\log_3(x+1)^3$?

A. 3778 . **B.** 3780 . **C.** 2 . **D.** 3776 .

Câu 21: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(1-\frac{6y+8}{x^2+y^2}\right)-\log_5\left(x^2+y^2\right)\le\log_5\left(\frac{157+12y}{x^2+y^2}-2\right)-\frac{1}{\log_{\left(x^2+y^2\right)}2}$$

A. 250 . **B.** 251 . **C.** 133 . **D.** 221 .

Câu 22: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $e^{x^2+y^2}\le e^{2x+2y}\left[(x+y+1)(3-x-y)+2(xy-1)\right]$

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 23: Có bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $3^{x^2+y^2-2}.\log_2(x-y)=\frac{1}{2}\left(1+\log_2(1-xy)\right)$ và $2\left(x^3+y^3\right)-3xy\geq\frac{13}{2}$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 0.

Câu 24: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+4y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+4y^2\right)+\frac{x^2-8x+4y^2}{x}\leq\log_3 x+\log_2\left(x^2+4y^2+24x\right)$$

A. 24. **B.** 25. **C.** 22. **D.** 48.

Câu 25: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\leq x\leq 2023$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2023. **B.** 5. **C.** 2022. **D.** 4.

Câu 26: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thỏa mãn $\log_2 y+6\log_2 x-\log_2^2 x+1\geq 2^{\log_2^2(2x)}+\log_2 x^2-4yx^6$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của y để tập hợp S có nhiều nhất 32 phần tử?

A. 18. **B.** 36. **C.** 38. **D.** 19.

Câu 27: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x\ ;\ y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(x^2+y^2+18x\right)-\log_5\left(x^2+y^2+4x\right)\geq\log_2\left(x^2+y^2\right)-\log_5 2x+1.$$

A. 10. **B.** 20. **C.** 27. **D.** 28

Câu 28: Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x,y nguyên và $1\leq x,y\leq 2020$ thỏa mãn

$$(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\leq(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)?$$

A. 2017. **B.** 4034. **C.** 2 **D.** 2017×2020

Câu 29: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x\in(1;6)$ thỏa mãn

$$4(x-1)e^x=y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)?$$

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 30: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x+y>0;-4\leq x\leq 4$ và

$$\log_3\frac{(x+2y)}{4}+x^2+2y^2+3xy-4x-4y\leq 0\ ?$$

A. 11. **B.** 10 **C.** 12. **D.** 13.

Câu 31: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi số nguyên x có đúng 5 số nguyên y thỏa mãn $3^{y^2-|x-2y|}\leq\log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right)$?

A. 10. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 32: có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x\leq 2023$ và

$$3\left(9^y+2y\right)\leq x+\log_3(x+1)^3-2\ ?$$

A. 3778. **B.** 3780. **C.** 2. **D.** 4046.

Câu 33: Có bao nhiêu số nguyên $y \in (-2023;2023)$ để phương trình $e^x + e^{x+y} = \ln(x+1) - \ln(x+y+1)$ có nghiệm thực duy nhất?

A. 2023. **B.** 4044. **C.** 2022. **D.** 2024.

Câu 34: Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ thuộc đoạn $[1;100]$ thỏa mãn y là số nguyên và $x + \log_2 x = y + 2^y$?

A. 100. **B.** 99. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 35: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $-20 \le x \le 20, 1 \le y \le 20$ $3^{x+3} + 5x + 10 = 3^{y^2+1} + 5y^2$?

A. 13. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 20.

Câu 36: Gọi S là tập hợp điểm $M(x;y)$ với x, y là các số nguyên thỏa mãn $8 < x < 3000$ và $\log_3(x-2) + 3x = y + 9(3^{y+2} + 1)$. Có bao nhiêu tứ giác lập được từ các điểm thuộc tập S ?

A. 15. **B.** 6. **C.** 3091. **D.** 360.

Câu 37: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2 + y^2 + 3x\right) + \log_2\left(x^2 + y^2\right) \le \log_3 x + \log_2\left(x^2 + y^2 + 18x\right)?$$

A. 29. **B.** 28. **C.** 48. **D.** 49.

Câu 38: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2 + y + 3x\right) + \log_2\left(x^2 + y\right) \le \log_3 x + \log_2\left(x^2 + y + 18x\right)?$$

A. 42. **B.** 36. **C.** 35. **D.** 41.

Câu 39: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2 + y^2 + x\right) + \log_2\left(x^2 + y^2\right) \le \log_3 x + \log_2\left(x^2 + y^2 + 2x\right)?$$

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 40: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \le 16$ và

$$\log_3\left(x^2 + y + x\right) + \log_2\left(x^2 + y\right) \le \log_3 x + \log_2\left(x^2 + y + 24x\right)?$$

A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 13.

Câu 41: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn bất đẳng thức $\log\dfrac{x+1}{3y+1} \le 9y^4 + 6y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$ (1). Biết $y \le 1000$, hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn bất đẳng thức (1).

A. 1501100. **B.** 1501300. **C.** 1501400. **D.** 1501500.

Câu 42: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $\log_3\left(4x^2 + 4y^2 + x\right) + \log_2\left(x^2 + y^2\right) \le \log_3 x + \log_2\left(x^2 + y^2 + 6x\right)$?

A. 12. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 13.

Câu 43: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(2x^2 + 2y^2 + 5x\right) + \log_5\left(x^2 + y^2\right) \le \log_3 x + \log_5\left(20x^2 + 20y^2 + 10x\right)$$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 44: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(x^2 + y^2\right) + \log_5\left(x^2 + y^2\right) \le \log_2(x+y) + \log_5\left(x^2 + y^2 + 96x + 96y\right)?$$

A. 3. **B.** 26. **C.** 24. **D.** 10.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x,y nguyên và $1\le x,y\le 2023$ thỏa mãn:

$$(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)?$$

A. 4040. **B.** 2023. **C.** 4046. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases}x,y\in\mathbb{N}^*:x,y\le 2023\\ \dfrac{2x+1}{x-3}>0,\dfrac{2y}{y+2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,y\in\mathbb{N}^*:x,y\le 2023\\ x>3,y>0\end{cases}$.

BPT cho có dạng $(x-3)(y-2)\log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right)+(x+4)(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)\le 0$ (*).

TH1: Xét $y=1$ thì (*) thành $-(x-3)\log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right)+3(x+4)\log_3\frac{2}{3}\le 0$, rõ ràng BPT này nghiệm đúng với mọi $x>3$ vì

$-(x-3)<0,\ \log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right)>\log_2(0+1)=0,\ 3(x+4)>0,\ \log_3\frac{2}{3}<0$.

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2020 bộ $(x;y)=(x;1)$ với $4\le x\le 2023, x\in\mathbb{N}$.

TH2: Xét $y=2$ thì (*) thành $4(x+4)\log_3 1\le 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi x mà $4\le x\le 2023, x\in\mathbb{N}$.

Trường hợp này cho ta 2020 cặp $(x;y)$ nữa.

TH3: Xét $y>2, x>3$ thì $VT(*)>0$ nên (*) không xảy ra.

Vậy có đúng 4040 bộ số $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa

$$3\left(81^y+4y\right)+2026\le -x^2+2024x+\log_3\left[(x-2023)^3(1-x)^3\right]$$

A. 2021. **B.** 2003. **C.** 4042. **D.** 4024.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $(x-2023)^3(1-x)^3>0\Leftrightarrow(x-2023)(1-x)>0\Leftrightarrow 1<x<2023$

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2\le x\le 2022$

$3\left(81^y+4y\right)+2026\le -x^2+2024x+\log_3\left[(x-2023)^3(1-x)^3\right]$

$\Leftrightarrow 3.3^{4y}+3.4y+3\le -x^2+2024x-2023+3\log_3\left[(x-2023)(1-x)\right]$

$\Leftrightarrow 3^{4y+1}+3(4y+1)\le(x-2023)(1-x)+3\log_3\left[(x-2023)(1-x)\right]$

$\Leftrightarrow 3^{4y+1}+3(4y+1)\le 3^{\log_3\left[(x-2023)(1-x)\right]}+3\log_3\left[(x-2023)(1-x)\right]$ (*)

Xét hàm số $f(t)=3^t+3t,\ t\in\mathbb{R}$

Ta có $f'(t)=3^t\ln 3+3>0\quad\forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(t)=3^t+3t,\ t\in\mathbb{R}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó: (*) $\Leftrightarrow f(4y+1)\le f\left[\log_3(x-2023)(1-x)\right]\Leftrightarrow 4y+1\le\log_3\left[(x-2023)(1-x)\right]$ (1)

Ta có:

$(x-2023)(1-x)\le 1022121, \forall x\in(1;2023)$

$\Rightarrow \log_3\left[(x-2023)(1-x)\right]\le\log_3 1022121\sim 12{,}59$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $4y+1\le 12{,}59\Rightarrow y\le 2{,}89,\ y\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow y\in\{1,2\}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (x-2023)(1-x)\ge 3^{4y+1}\Leftrightarrow -x^2+2024x-2023-3^{4y+1}\ge 0$

Với $y=1$: $-x^2+2024x-2266\ge 0\Leftrightarrow 1{,}12\le x\le 2022{,}8\Rightarrow 2\le x\le 2022$: có 2021 giá trị x

Với $y=2$: $-x^2+2024x-21706\ge 0\Leftrightarrow 10{,}78\le x\le 2013{,}2\Rightarrow 11\le x\le 2013$: có 2003 giá trị x

Vậy có $2021+2003=4024$ cặp $(x;y)$ thỏa yêu cầu bài toán

Câu 3: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_5\left(x^2+y^2+x\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_5 x+\log_3\left(x^2+y^2+8x\right)?$$

A. 12. **B.** 13. **C.** 24. **D.** 30.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

$\log_5\left(x^2+y^2+x\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_5 x+\log_3\left(x^2+y^2+8x\right)$ (1)

$\Leftrightarrow \log_5\dfrac{x^2+y^2+x}{x}\le\log_3\dfrac{x^2+y^2+8x}{x^2+y^2}$.

Đặt $t=\log_5\dfrac{x^2+y^2+x}{x}=\log_5\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}+1\right)\ (t>0)\Rightarrow\dfrac{x^2+y^2}{x}=5^t-1$.

$(1)\Leftrightarrow t\le\log_3\left(1+8.\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow 3^t\le 1+\dfrac{8}{5^t-1},(t>0)$.

$\Leftrightarrow 5^t+7\ge 15^t-3^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+\left(\dfrac{1}{5}\right)^t+\left(\dfrac{1}{15}\right)^t-1\ge 0$.

Xét $f(t)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+\left(\dfrac{1}{5}\right)^t+\left(\dfrac{1}{15}\right)^t-1$

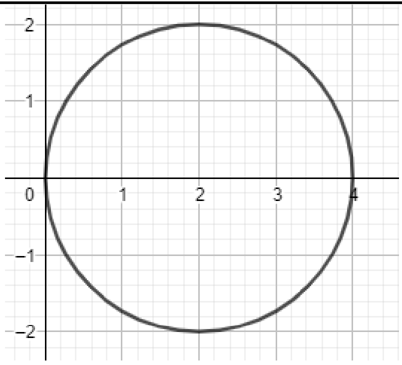
Có $f'(t)=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^t.\ln 2-.\left(\dfrac{1}{5}\right)^t\ln 5-\left(\dfrac{1}{15}\right)^t\ln 15<0$ với $\forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$(1)\Leftrightarrow f(t)\ge f(1)\Leftrightarrow 0<t\le 1\ \Leftrightarrow 0<\log_5\dfrac{x^2+y^2+x}{x}\le 1$.

$\Leftrightarrow 1<\dfrac{x^2+y^2+x}{x}\le 5\Leftrightarrow x^2+y^2-4x\le 0\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2\le 4$.

Tập hợp các điểm $M(x;y)$ có tọa độ thỏa mãn (1) là phần nằm trong đường tròn tâm $I(2;0)$ bán kính bằng 2 bao gồm cả đường tròn, trừ điểm $O(0;0)$ do $x>0$.



Từ hình vẽ ta có 12 cặp số nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 4: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện x là số nguyên tố; $y\le 4320$ và $2\left(2.8^x+9x\right)\le y-11+3\log_2(y+1)^2$?

A. 6340. **B.** 2024. **C.** 7286. **D.** 8022.

Lời giải:

Chọn A

Do $x;y$ nguyên dương, nên ta có

$2\left(2.8^x+9x\right)\le y-11+3\log_2(y+1)^2 \Leftrightarrow 4.8^x+18x\le y-11+\log_2(y+1)^6$

$\Leftrightarrow 2^{3x+2}+18x+12\le y+1+\log_2(y+1)^6 \Leftrightarrow 2^{3x+2}+6(3x+2)\le(y+1)+6\log_2(y+1)$. (1)

Xét hàm số $f(t)=2^t+6t$ có $f'(t)=2^t.\ln 2+6>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)=2^t+6t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f(3x+2)\le f\left(\log_2(y+1)\right)\Leftrightarrow 3x+2\le\log_2(y+1)\Leftrightarrow 2^{3x+2}-1\le y$.

Vì $y\le 4320$ nên $2^{3x+2}-1\le 4320\Leftrightarrow x\le\dfrac{\log_2 4321-2}{3}\approx 3{,}359$.

Theo đề bài,do x là số nguyên tố suy ra $x\in\{2;3\}$.

Với $x=2$ có $255\le y\le 4320$ suy ra có 4066 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $x=3$ có $2047\le y\le 4320$ suy ra có 2274 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 6340 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 5: Có bao nhiêu số nguyên $x\in[-2022;2022]$ để ứng với mỗi x có tối thiểu 64 số nguyên y thỏa mãn $\log_3\sqrt{x^4+y}\ge\log_2(x+y)$?

A. 3992. **B.** 3994. **C.** 3990. **D.** 3989.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}\sqrt{x^4+y}>0\\x^4+y\ge 0\\x+y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4+y>0\\x+y>0\end{cases}$.

Đặt $k=x+y\in\mathbb{Z}^+$.

Xét hàm số $f(y)=\log_3\sqrt{x^4+y}-\log_2(x+y)\ge 0$.

Suy ra $f'(y)=\dfrac{1}{2\left(x^4+y\right)\ln 3}-\dfrac{1}{(x+y)\ln 2}<0 \Rightarrow f(y)$ nghịch biến.

Xét hàm số $g(k)=f(k-x)=\log_3\left(\sqrt{x^4+k-x}\right)-\log_2 k$, $k\in\mathbb{Z}^+$.

Do hàm số f nghịch biến nên hàm số g cũng nghịch biến.

Giả sử k_0 là nghiệm của phương trình $g(k)=0$.

Suy ra $\begin{cases}1\le k\le k_0\\ k\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Rightarrow k_0\le 64$.

Nên $g(64)\ge 0\Leftrightarrow \log_3\left(\sqrt{x^4+64-x}\right)\ge\log_2 64$

$\Rightarrow \sqrt{x^4-x+64}\ge 3^{\log_2 64}\Rightarrow x^4-x+64\ge\left(3^{\log_2 64}\right)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 26{,}99\\ x\le -26{,}99\end{array}\right.$.

Với $26{,}99\le x\le 2022$ ta có 1996 số nguyên x

Với $-2022\le x\le -26{,}99$ ta có 1996 số nguyên x

Vậy có 3992 số nguyên x.

Câu 6: Giả sử $(x;y)$ là cặp số nguyên thỏa mãn đồng thời $8\le x\le 2022$ và $2^y-\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=2x-y$. Tổng các giá trị của y bằng

A. 60. **B.** 63. **C.** 2022. **D.** 49.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^y-\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=2x-y\Leftrightarrow 2.2^y+y+1=2x+2^y+\log_2\left(2x+2^y\right)$

$\Leftrightarrow 2^{y+1}+\log_2 2^{y+1}=2x+2^y+\log_2\left(2x+2^y\right)$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2(t)$, $t>0$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $(*)\Leftrightarrow 2^{y+1}=2x+2^y\Leftrightarrow x=2^{y-1}$

Ta có: $8\le x\le 2022\Rightarrow 8\le 2^{y-1}\le 2022\Leftrightarrow 4\le y\le\log_2 2024\Rightarrow 4\le y\le 10$

Suy ra $y\in\{4;5;6;7;8;9;10\}$.

Câu 7: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $y\le 2023$ và $3\left(9^x+2x\right)\le y+\log_3(y+1)^3-2$?

A. 10. **B.** 2023. **C.** 3776. **D.** 3780.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3\left(9^x+2x\right)\le y+\log_3(y+1)^3-2\Leftrightarrow 3.9^x+6x\le y+3\log_3(y+1)-2$

$\Leftrightarrow 3^{2x+1}+3(2x+1)\le(y+1)+3\log_3(y+1)$. (*)

Xét hàm số $f(t)=3^t+3t$ có $f'(t)=3^t.\ln 3+3>0,\ \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t)=3^t+3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(2x+1)\le f\left(\log_3(y+1)\right)\Leftrightarrow 2x+1\le\log_3(y+1)\Leftrightarrow 3^{2x+1}-1\le y$.

Vì $y \le 2023$ nên $3^{2x+1} - 1 \le 2023 \Leftrightarrow x \le \dfrac{\log_3 2024 - 1}{2} \approx 2,96$.

Với giả thiết x nguyên dương suy ra $x \in \{1;2\}$.

Với $x = 1$ có $26 \le y \le 2023$ suy ra có 1998 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $x = 2$ có $242 \le y \le 2023$ suy ra có 1782 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 3780 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 8: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1 > \log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$ có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A. 36. **B.** 35. **C.** 34. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1 > \log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$

$\Leftrightarrow \log_7\left[7\left(x^2+2x+2\right)\right] > \log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\left(x^2+2x+2\right) > x^2+6x+5+m \\ x^2+6x+5+m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2+8x+9 > m \\ x^2+6x+5 > -m \end{cases}$.

Xét $\begin{cases} f(x) = 6x^2+8x+9 \\ g(x) = x^2+6x+5 \end{cases}, \forall x \in (1;3)$, ta có $\begin{cases} f'(x) = 12x+8 > 0 \\ g'(x) = 2x+6 > 0 \end{cases}, \forall x \in (1;3)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2+8x+9 > m \\ x^2+6x+5 > -m \end{cases}$ có nghiệm $\forall x \in (1;3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \ge m \\ g(1) \ge -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 23 \ge m \\ 12 \ge -m \end{cases} \Leftrightarrow -12 \le m \le 23$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-12, -11, -10, ...21, 22, 23\}$. Vậy có 36 giá trị m cần tìm.

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với mỗi số nguyên y có đúng 6 số nguyên x thỏa mãn $7^{x^2-|y-3x+2|}.\log_{(|y-3x+2|+5)}\left(x^2+5\right) \le 1$?

A. 16. **B.** 17. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy $|y-3x+2|+5 \ge 5$ và $x^2+5 \ge 5$ với mọi $x; y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $7^{x^2-|y-3x+2|}.\log_{(|y-3x+2|+5)}\left(x^2+5\right) \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{7^{x^2+5}}{7^{|y-3x+2|+5}}.\dfrac{\ln\left(x^2+5\right)}{\ln\left(|y-3x+2|+5\right)} \le 1$

$\Leftrightarrow 7^{x^2+5}.\ln\left(x^2+5\right) \le 7^{|y-3x+2|+5}.\ln\left(|y-3x+2|+5\right)$ (1)

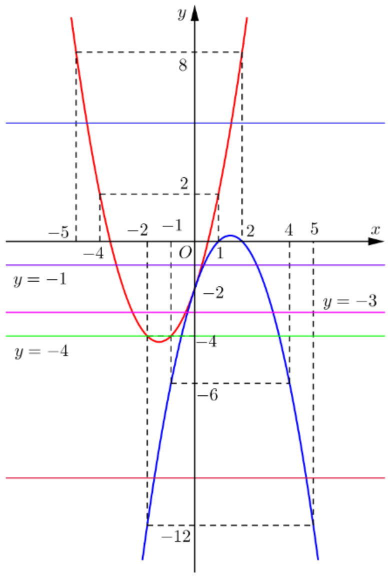
Xét hàm số $f(t) = 7^t.\ln t$ trên $[5;+\infty)$.

$f'(t) = 7^t.\ln t.\ln 7 + 7^t.\dfrac{1}{t} > 0, \forall t \ge 5 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[5;+\infty)$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f\left(x^2+5\right) \le f\left(|y-3x+2|+5\right) \Leftrightarrow x^2+5 \le |y-3x+2|+5 \Leftrightarrow x^2 \le |y-3x+2|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-3x+2 \ge x^2 \\ y-3x+2 \le -x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \ge x^2+3x-2 \\ y \le -x^2+3x-2 \end{array}\right.$.

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y=x^2+3x-2$ và $y=-x^2+3x-2$ trên cùng một hệ trục tọa độ:



Dựa vào đồ thị vừa vẽ ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le y < 8 \\ -12 < y \le -6 \\ y=0 \\ y=-1 \\ y=-3 \\ y=-4 \end{array}\right.$.

Do y nguyên nên $y \in \{-11;-10;-9;-8;-7;-6;-4;-3;-1;0;2;3;4;5;6;7\}$.

Vậy có 16 số nguyên y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng với mỗi giá trị y luôn tồn tại không quá 15 số nguyên x thỏa mãn điều kiện $\log_{2021}\left(x+y^2\right)+\log_{2022}\left(y^2+y+16\right) \ge \log_2(x-y)$?

A. 2021. **B.** 4042. **C.** 2020. **D.** 4041.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} x+y^2>0 \\ x-y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y>0 \\ x>y \end{cases}$.

Ta có bất phương trình $\log_{2021}\left(x+y^2\right)+\log_{2022}\left(y^2+y+16\right)-\log_2(x-y) \ge 0$

Xét $f(x)=\log_{2021}\left(x+y^2\right)+\log_{2022}\left(y^2+y+16\right)-\log_2(x-y)$ với $x>y$, $y \in \mathbb{Z}$.

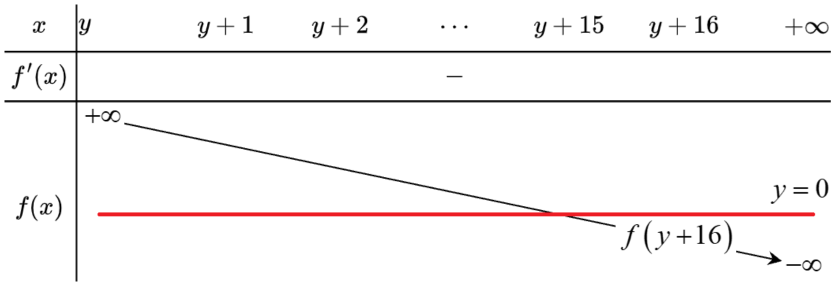
Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{\left(x+y^2\right)\ln 2021}-\dfrac{1}{(x-y)\ln 2}=\dfrac{x(\ln 2-\ln 2021)-y\ln 2-y^2\ln 2021}{\left(x+y^2\right).(x-y).\ln 2021.\ln 2}$.

Ta có: $x>y \Rightarrow x(\ln 2-\ln 2021)<y(\ln 2-\ln 2021)$

Suy ra $x(\ln 2-\ln 2021)-y\ln 2-y^2\ln 2021<\left(-y^2-y\right)\ln 2021<0, \forall y \in \mathbb{Z}$.

Do đó $f'(x) < 0, \forall x > y, y \in \mathbb{Z}$.

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ là:



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(y+16) < 0$

$$\Leftrightarrow \log_{2021}\left(y^2+y+16\right)+\log_{2022}\left(y^2+y+16\right)<\log_2 16$$

$$\Leftrightarrow \log_{2021}\left(y^2+y+16\right)+\frac{\log_{2021}\left(y^2+y+16\right)}{\log_{2021}2022}<4$$

$$\Leftrightarrow \log_{2021}\left(y^2+y+16\right)<\frac{4}{1+\log_{2022}2021}\approx 2{,}00$$

$$\Leftrightarrow y^2+y+16<2021^{\frac{4}{1+\log_{2022}2021}} \Leftrightarrow -2021{,}99 \le y \le 2020{,}99.$$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-2021; -2020; ...; 2020\}$.

Vậy có tất cả 4041 giá trị nguyên y thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 11: Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy.$

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}>0 \Leftrightarrow x+y>0.$

$$\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)-2\log_3\left(x^2+y^2+xy+2\right)=x^2+y^2+xy-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)+2-2\log_3\left(x^2+y^2+xy+2\right)=x^2+y^2+xy+2-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y)+(3x+3y)=2\log_3\left(x^2+y^2+xy+2\right)+x^2+y^2+xy+2$$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=2\log_3 t+t,\ t\in(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\frac{2}{t.\ln 3}+1>0, \forall t\in(0;+\infty)$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Phương trình $\Leftrightarrow f(3x+3y)=f\left(x^2+y^2+xy+2\right) \Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2=3x+3y$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-3)x+y^2-3y+2=0.$$

Điều kiện của y để phương trình có nghiệm là $(y-3)^2-4\left(y^2-3y+2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow -3y^2+6y+1\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}\le y\le \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{0;1;2\}$.

Với $y=0$, ta được $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=2\end{array}\right.$.

Với $y=1$, ta được $x^2+2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-2\end{array}\right.$.($x=-2$ loại)

Với $y=2$, ta được $x^2+x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-1\end{array}\right.$.

Vậy có 5 cặp số thỏa mãn đề bài.

Câu 12: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $0<y<2020$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3 \Leftrightarrow 3^x+3x-6=9y+3\log_3 y$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}+x-2=3y+\log_3 y \Leftrightarrow 3^{x-1}+x-1=3y+\log_3(3y)$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}+x-1=3^{\log_3(3y)}+\log_3(3y)\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=3^t+t$. Ta có: $f'(t)=1+3^t.\ln 3>0,\ \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(x-1)=f(\log_3(3y))\Leftrightarrow x-1=\log_3(3y)\Leftrightarrow x-2=\log_3 y\Leftrightarrow y=3^{x-2}$.

Vì $y\in(0;2020)$ nên $3^{x-2}<2020\Leftrightarrow x-2<\log_3 2020\Leftrightarrow x<2+\log_3 2020$

Do $x;y\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{2;3;4;5;6;7;8\}$.

Ứng với mỗi giá trị nguyên của x cho ta 1 giá trị nguyên của y.

Vậy có 7 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(x^2+y^2+2x\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le \log_2 x+\log_3\left(x^2+y^2+16x\right)$$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+y^2>0\\ x>0\end{cases}$.

Ta có: $\log_2\left(x^2+y^2+2x\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le \log_2 x+\log_3\left(x^2+y^2+16x\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+y^2+2x\right)-\log_2 x+\log_3\left(x^2+y^2\right)-\log_3\left(x^2+y^2+16x\right)\le 0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{x^2+y^2+2x}{x}\right)+\log_3\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+16x}\right)\le 0\quad (1)$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x}+2\right)+\log_3\left(\frac{\frac{x^2+y^2}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x}+16}\right)\le 0 \quad (1)$$

Đặt $t=\dfrac{x^2+y^2}{x} \quad (t>0)$

Bất phương trình (1) trở thành $\log_2(t+2)+\log_3\left(\dfrac{t}{t+16}\right)\le 0$

Gọi $f(t)=\log_2(t+2)+\log_3\left(\dfrac{t}{t+16}\right)$ với $t>0$

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{(t+2)\ln 2}+\dfrac{16}{t(t+16)\ln 3}>0\ \forall t>0$

Do đó hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác $f(2)=0$ nên $\log_2(t+2)+\log_3\left(\dfrac{t}{t+16}\right)\le 0 \Leftrightarrow t\le 2$

Suy ra $\dfrac{x^2+y^2}{x}\le 2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x\le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1.$

Ta có các trường hợp sau xảy ra đối với cặp số nguyên $(x;y)$:

TH1: $x=1 \Rightarrow y^2\le 1 \Rightarrow y\in\{-1;0;1\}$

TH2: $x=2 \Rightarrow y^2\le 0 \Rightarrow y=0$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện bài toán là $(1;-1),(1;0),(1;1),(2;0)$.

Câu 14: Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $y\le 20$ thỏa mãn

$$\log_{2022}\frac{x+1}{y+1}\le y^4+2y^3-x^2y^2-2y^2x.$$

A. 200. **B.** 380. **C.** 210. **D.** 420.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{2022}\frac{x+1}{y+1}\le y^4+2y^3-x^2y^2-2y^2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_{2022}\frac{y^2(x+1)^2}{y^2(y+1)^2}\le y^2\left(y^2+2y-x^2-2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_{2022}y^2(x+1)^2-\frac{1}{2}\log_{2022}y^2(y+1)^2\le y^2(y+1)^2-y^2(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_{2022}y^2(x+1)^2+y^2(y+1)^2\le\frac{1}{2}\log_{2022}y^2(y+1)^2+y^2(x+1)^2 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{2}\log_{2022}t+t \Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{4044.\ln t}+1>0$. Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow f\left(y^2(x+1)^2\right)\le f\left(y^2(y+1)^2\right)\Leftrightarrow x\le y$.

Vì $\begin{cases} x,y\in Z^+ \\ x\le y\le 20\end{cases}$ nên có các trường hợp sau

$y=20\Rightarrow x=\{1,2,3,...,20\}$

$y=19\Rightarrow x=\{1,2,3,...,19\}$

....

$y=2\Rightarrow x=\{1,2\}$

$y=1\Rightarrow x=\{1\}$

Vậy cặp số tự nhiên thỏa mãn là: $1+2+3+...+19+20=210$

Câu 15: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng với mỗi y luôn tồn tại không quá 63 số nguyên x thỏa mãn điều kiện

$\log_{2020}(x+y^2)+\log_{2021}(y^2+y+64)\ge\log_4(x-y)$.

A. 301. **B.** 302. **C.** 602. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$\log_{2020}(x+y^2)+\log_{2021}(y^2+y+64)\ge\log_4(x-y)$

$\Leftrightarrow\log_{2020}(x+y^2)+\log_{2021}(y^2+y+64)-\log_4(x-y)\ge 0$ (1).

Đặt $f(x)=\log_{2020}(x+y^2)+\log_{2021}(y^2+y+64)-\log_4(x-y)$, (coi y là tham số).

Điều kiện xác định của $f(x)$ là: $\begin{cases}x+y^2>0\\ y^2+y+64>0\\ x-y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-y^2\\ x>y\end{cases}$.

Do x, y nguyên, $x>y\ge -y^2$, tồn tại không quá 63 số nguyên x nên $x\in[y+1;y+64]$.

Xét hàm số $f(x)$ trên $[y+1;y+64]$

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{(x+y^2)\ln 2020}-\dfrac{1}{(x-y)\ln 4}<0,\ \forall x\ge y+1.$

Bảng biến thiên

x	$y+1$	$y+64$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	$f(y+64)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán trở thành

$f(y+64)<0\Leftrightarrow\log_{2020}(y^2+y+64)+\log_{2021}(y^2+y+64)<\log_4 64$

$\Leftrightarrow\log_{2020}(y^2+y+64)(\log_{2020}2021+1)<3$

$\Leftrightarrow y^2+y+64-2021^{\frac{3}{\log_{2020}2021+1}}<0\Rightarrow -301,76<y<300,76$

Mà y nguyên nên $y\in\{-301,-300,...,299,300\}$. Vậy có 602 giá trị của y thỏa mãn.

Câu 16: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $x\le 2020$ thỏa mãn $\log_2(x-1)+2x-2y=1+4^y$

A. 2020. **B.** 1010. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài: $\log_2(x-1)+2x-2y=1+4^y \Leftrightarrow \log_2 2(x-1)+2(x-1)=2y+2^{2y}$

Đặt $t=\log_2 2(x-1) \Rightarrow 2(x-1)=2^t$

Ta có: $2^t+t=2^{2y}+2y$ (1). Xét hàm số: $f(t)=2^t+t$

Có: $f'(t)=2^t.\ln 2+1>0 \quad \forall t\in R \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên R

$(1)\Leftrightarrow f(t)=f(2y)\Leftrightarrow t=2y\Leftrightarrow \log_2 2(x-1)=2y$

$\Leftrightarrow 2(x-1)=2^{2y}\Leftrightarrow x=2^{2y-1}+1$

Mà $x\le 2020\Rightarrow 2^{2y-1}+1\le 2020\Leftrightarrow y\le \frac{1}{2}(1+\log_2 2019)$.

Vì $y\in Z^+\Rightarrow y\in\{1;2;3;4;5\}$.

Vậy có 5 cặp số nguyên dương thỏa mãn ycbt.

Câu 17: Có bao nhiêu bộ số nguyên $(x;y)$ và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn

$$(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$$

A. 2017. **B.** 2. **C.** 2020. **D.** 4034.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} x,y\in N^*: x,y\le 2020 \\ \frac{2x+1}{x-3}>0, \frac{2y}{y+2}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x,y\in N^*: x,y\le 2020 \\ x>3, y>0\end{cases}$.

BPT cho có dạng: $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)-(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)\le 0$

$\Leftrightarrow (x+4)(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+(x-3)(y-2)\log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right)\le 0 \quad (*)$

Xét $y=1$ thì $(*)$ trở thành: $3(x+4)\log_3\frac{2}{3}-(x-3)\log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right)\le 0$

BPT nghiệm đúng với $\forall x>3$ vì: $x+4>0, \log_3\frac{2}{3}<0$

$$x-3>0, \log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right)>\log_2(0+1)=0$$

Vậy trường hợp này cho ta 2017 bộ $(x,y)=(x;1)$ với $4\le x\le 2020, x\in N$

Xét $y=2$ thì $(*)$ trở thành: $4(x+4)\log_3 1\le 0$

BPT nghiệm đúng với $\forall x$ mà $4\le x\le 2020, x\in N$

Trường hợp này cho ta 2017 bộ (x,y) nữa.

Xét $y>2, x>3$ thì $VT(*)>0$ nên không xảy ra.

Vậy có 4034 bộ số (x,y) thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 18: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa $x\in[0;3]$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 y}+6x+1>\left(\frac{1}{4}\right)^x+\log_3(3y^3)$?

A. 819. **B.** 817. **C.** 816. **D.** 88.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $y>0$.

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 y}+6x+1>\left(\frac{1}{4}\right)^{x}+\log_3\left(3y^3\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 y}+6x+1>\left(\frac{1}{4}\right)^{x}+1+3\log_3 y$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 y}-3\log_3 y>\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-6x\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 y}-3\log_3 y>\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-3.2x\ \ (1)$

Xét hàm số $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{t}-3t$ có $f'(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^{t}\ln\frac{1}{2}-3<0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow\log_3 y<2x\Leftrightarrow y<3^{2x}\Leftrightarrow y<9^x\ \ (2)$.

Vì x nguyên và thuộc đoạn $[0;3]$ nên có các trường hợp sau

TH1: $x=0$: Từ $(2)\Rightarrow 0<y<9^0=1$ (loại)

TH2: $x=1$: Từ $(2)\Rightarrow 0<y<9^1=9$ (Có 8 giá trị y)

TH3: $x=2$: Từ $(2)\Rightarrow 0<y<9^2=81$ (Có 80 giá trị y)

TH4: $x=3$: Từ $(2)\Rightarrow 0<y<9^3=729$ (Có 728 giá trị y)

Vậy có 816 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa đề bài.

Câu 19: Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x,y nguyên và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn

$$(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)?$$

A. 2017. **B.** 4034. **C.** 2. **D.** 2017×2020.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases}x,y\in\mathbb{N}^*: x,y\le 2020\\ \frac{2x+1}{x-3}>0,\frac{2y}{y+2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,y\in\mathbb{N}^*: x,y\le 2020\\ x>3,y>0\end{cases}$.

BPT cho có dạng $(x-3)(y-2)\log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right)+(x+4)(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)\le 0$ (*).

Xét $y=1$ thì (*) thành $-(x-3)\log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right)+3(x+4)\log_3\frac{2}{3}\le 0$, rõ ràng BPT này nghiệm đúng với mọi $x>3$ vì $-(x-3)<0,\ \log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right)>\log_2(0+1)=0,\ 3(x+4)>0,\ \log_3\frac{2}{3}<0$

.

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2017 bộ $(x;y)=(x;1)$ với $4\le x\le 2020, x\in\mathbb{N}$.

Xét $y=2$ thì (*) thành $4(x+4)\log_3 1\le 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi x mà $4\le x\le 2020, x\in\mathbb{N}$.

Trường hợp này cho ta 2017 cặp $(x;y)$ nữa.

Với $y > 2, x > 3$ thì $VT(*) > 0$ nên (*) không xảy ra.

Vậy có đúng 4034 bộ số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x \le 2023$ và $3\left(9^y + 2y\right) + 2 \le x + \log_3 (x+1)^3$?

A. 3778. **B.** 3780. **C.** 2. **D.** 3776.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3\left(9^y + 2y\right) + 2 \le x + \log_3 (x+1)^3 \Leftrightarrow 3.9^y + 6y + 2 \le x + 3\log_3 (x+1)$

$\Leftrightarrow 3^{2y+1} + 3(2y+1) \le (x+1) + 3\log_3 (x+1)$. (*)

Xét hàm số $f(t) = 3^t + 3t$ có $f'(t) = 3^t.\ln 3 + 3 > 0,\ \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t) = 3^t + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(2y+1) \le f\left(\log_3 (x+1)\right) \Leftrightarrow 2y + 1 \le \log_3 (x+1) \Leftrightarrow 3^{2y+1} - 1 \le x$.

Vì $x \le 2023$ nên $3^{2y+1} - 1 \le 2023 \Leftrightarrow y \le \dfrac{\log_3 2024 - 1}{2} \approx 2,96$.

Với giả thiết y nguyên dương suy ra $y \in \{1; 2\}$.

Với $y = 1$ có $26 \le x \le 2023$ suy ra có 1998 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Với $y = 2$ có $242 \le x \le 2023$ suy ra có 1782 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 3780 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 21: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(1 - \frac{6y+8}{x^2+y^2}\right) - \log_5\left(x^2+y^2\right) \le \log_5\left(\frac{157+12y}{x^2+y^2} - 2\right) - \frac{1}{\log_{\left(x^2+y^2\right)} 2}$$

A. 250. **B.** 251. **C.** 133. **D.** 221.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 0 < x^2 + y^2 \ne 1 \\ \dfrac{6y+8}{x^2+y^2} < 1 \\ \dfrac{157+12y}{x^2+y^2} > 2 \end{cases}$

$$\log_2\left(1 - \frac{6y+8}{x^2+y^2}\right) - \log_5\left(x^2+y^2\right) \le \log_5\left(\frac{157+12y}{x^2+y^2} - 2\right) - \frac{1}{\log_{\left(x^2+y^2\right)} 2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(1 - \frac{6y+8}{x^2+y^2}\right) + \log_2\left(x^2+y^2\right) \le \log_5\left(\frac{157+12y}{x^2+y^2} - 2\right) + \log_5\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2 + y^2 - 6y - 8\right) \le \log_5\left(157 - 2x^2 - 2y^2 + 12y\right)$$

Đặt $t = x^2 + y^2 - 6y$, điều kiện: $8 < t < \dfrac{157}{2}$. Bất phương trình trên trở thành:

$\log_2(t-8) \le \log_5(157-2t) \Leftrightarrow \log_2(t-8) - \log_5(157-2t) \le 0$ (1).

Đặt $g(t) = \log_2(t-8) - \log_5(157-2t)$

$g'(t) = \dfrac{1}{(t-8)\ln 2} + \dfrac{2}{(157-2t)\ln 5} > 0\ \forall t \in \left(8;\dfrac{157}{2}\right)$ nên $g(t)$ đồng biến trên $\left(8;\dfrac{157}{2}\right)$.

Mà $g(t) \le g(16)$ (Do $g(16) = 0$)

Suy ra: $8 < t \le 16 \Leftrightarrow 8 < x^2 + y^2 - 6y \le 16 \Leftrightarrow 17 < (x-3)^2 + y^2 \le 25$

Ta có: $y^2 \le 25 \Rightarrow -5 \le y \le 5$.

Với $y = \pm 5 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ nên có 2 cặp.

Với $y = \pm 4 \Rightarrow 1 < (x-3)^2 \le 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x-3 \le 3 \\ -3 \le x-3 < -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4 < x \le 6 \\ 0 \le x < 2 \end{array}\right. \Rightarrow x \in \{0;1;5;6\}$ nên có 8 cặp.

Với $y = \pm 3 \Rightarrow 8 < (x-3)^2 \le 16 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{2} < x-3 \le 4 \\ -4 \le x-3 < -2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{2}+3 < x \le 7 \\ -1 \le x < 3-2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow x \in \{-1;0;6;7\}$

nên có 8 cặp.

Với $y = \pm 2 \Rightarrow 13 < (x-3)^2 \le 21$ mà $(x-3)^2$ là số chính phương nên $(x-3)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = -1 \end{array}\right.$

suy ra có 4 cặp.

Với $y = \pm 1 \Rightarrow 16 < (x-3)^2 \le 24$ mà $(x-3)^2$ là số chính phương nên sẽ không tồn tại x thỏa mãn.

Với $y = 0 \Rightarrow 17 < (x-3)^2 \le 25$ mà $(x-3)^2$ là số chính phương nên nên $(x-3)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = -2 \end{array}\right.$ suy ra có 2 cặp.

Vậy có 24 cặp giá trị nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 22: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $e^{x^2+y^2} \le e^{2x+2y}\left[(x+y+1)(3-x-y)+2(xy-1)\right]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

$e^{x^2+y^2} \le e^{2x+2y}\left[(x+y+1)(3-x-y)+2(xy-1)\right]$

$\Leftrightarrow e^{x^2+y^2-2(x+y)} \le 2(x+y) - (x^2+y^2) + 1$

$\Leftrightarrow e^{x^2+y^2-2(x+y)} + \left[x^2+y^2-2(x+y)\right] \le 1$

Đặt $t = x^2 + y^2 - 2(x+y)$ ($t \ge -2$), bất phương trình trên trở thành $e^t + t \le 1$.

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \ge -2$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[-2;+\infty)$.

Do đó $f(t) \le 1 = f(0) \Leftrightarrow t \le 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(x+y) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 2$.

Trường hợp 1: $(x-1)^2+(y-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Trường hợp 2: $(x-1)^2+(y-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1=0 \\ y-1=\pm1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=\pm1 \\ y-1=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=2 \\ x=1; y=0 \\ x=2; y=1 \\ x=0; y=1 \end{array}\right.$.

Trường hợp 3: $(x-1)^2+(y-1)^2=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\pm1 \\ y-1=\pm1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2; y=2 \\ x=2; y=0 \\ x=0; y=2 \\ x=0; y=0 \end{array}\right.$.

Vậy có 9 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23: Có bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $3^{x^2+y^2-2}.\log_2(x-y)=\frac{1}{2}\left(1+\log_2(1-xy)\right)$ và $2\left(x^3+y^3\right)-3xy\ge\frac{13}{2}$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>y; xy<1$.

Từ giả thiết thứ nhất ta có: $3^{x^2+y^2-2}.\log_2(x-y)^2=\log_2(2-2xy)$

$\Leftrightarrow 3^{x^2+y^2-2}.\log_2\left(x^2+y^2-2+2-2xy\right)=\log_2(2-2xy)$.

Nếu $x^2+y^2>2 \Rightarrow VT>\log_2(2-2xy)=VP$.

Nếu $x^2+y^2<2 \Rightarrow VT<\log_2(2-2xy)=VP$.

Từ đó suy ra: $x^2+y^2=2$.

Khi đó $(x+y)^2=2+2xy \Leftrightarrow xy=\frac{(x+y)^2-2}{2}$. Do $xy<1$ nên $x+y\in(-2;2)$.

Xét giả thiết thứ hai, đặt $P=2\left(x^3+y^3\right)-3xy=2(x+y)^3-6xy(x+y)-3xy$.

Đặt $a=x+y$, $P=2a^3-3a\left(a^2-2\right)-3\frac{\left(a^2-2\right)}{2}=f(a)$.

Lập BBT cho $f(a)$ ta được $P=f(a)\le f(1)=\frac{13}{2}$.

Mà ở giả thiết thứ hai $P\ge\frac{13}{2}$ suy ra $P=\frac{13}{2}$, khi đó $x+y=1$.

Vậy số các cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đề là số giao điểm của đường tròn và đường thẳng.

Vì khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng nhỏ hơn bán kính nên chúng có hai điểm chung, hay có 2 cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 24: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+4y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+4y^2\right)+\frac{x^2-8x+4y^2}{x}\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+4y^2+24x\right)$$

A. 24 . **B.** 25 . **C.** 22 . **D.** 48 .

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_3\left(x^2+4y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+4y^2\right)+\dfrac{x^2-8x+4y^2}{x}\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+4y^2+24x\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(x^2+4y^2+x\right)-\log_3 x+\dfrac{x^2+4y^2}{x}\le\log_2\left(x^2+4y^2+24x\right)-\log_2\left(x^2+4y^2\right)+8$

$\Leftrightarrow\log_3\left(\dfrac{x^2+4y^2+x}{x}\right)+\dfrac{x^2+4y^2}{x}\le\log_2\left(\dfrac{x^2+4y^2+24x}{x^2+4y^2}\right)+8$

$\Leftrightarrow\log_3\left(1+\dfrac{x^2+4y^2}{x}\right)+\dfrac{x^2+4y^2}{x}\le\log_2\left(1+\dfrac{24x}{x^2+4y^2}\right)+8$

$\Leftrightarrow\log_3\left(\dfrac{x^2+4y^2}{x}+1\right)-\log_2\left(1+\dfrac{24x}{x^2+4y^2}\right)+\dfrac{x^2+4y^2}{x}\le 8.$

Đặt: $t=\dfrac{x^2+4y^2}{x}(t>0)$, bất phương trình trở thành: $\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)+t\le 8$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t+\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)$ có

$f'(t)=1+\dfrac{1}{(1+t)\ln 3}+\dfrac{24}{\left(t^2+24t\right)\ln 2}>0,\forall t>0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f(8)=8+\log_3(1+8)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{8}\right)=8$

Từ đó suy ra: (1) $\Leftrightarrow f(t)\le f(8)\Leftrightarrow t\le 8\Leftrightarrow\dfrac{x^2+4y^2}{x}\le 8\Leftrightarrow(x-4)^2+4y^2\le 16$.

Đếm các cặp giá trị nguyên của $(x;y)$

Ta có: $4y^2\le 16\Leftrightarrow -2\le y\le 2$

Với $y=2,y=-2\Rightarrow x=4$ nên có 2 cặp.

Với $y=1,y=-1\Rightarrow x=\{1;2;3;4;5;6;7\}$ nên có 14 cặp.

Với $y=0\Rightarrow x=\{1;2;3;....;8\}$ nên có 8 cặp.

Vậy có 24 cặp giá trị nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 25: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2023$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2023. **B.** 5 . **C.** 2022 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_3\left(3x+3\right)+x=2y+9^y\Leftrightarrow 1+\log_3\left(x+1\right)+x=2y+9^y$ (1)

Đặt $t=\log_3\left(x+1\right)$. Suy ra: $x+1=3^t\Leftrightarrow x=3^t-1$. Khi đó: $\left(1\right)\Leftrightarrow t+3^t=2y+3^{2y}$ (2)

Xét hàm số: $f\left(u\right)=u+3^u$. Ta có: $f'\left(u\right)=1+3^u.\ln 3>0,\forall u\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: Từ $(2) \Rightarrow f(t) = f(2y) \Leftrightarrow t = 2y \Leftrightarrow \log_3(x+1) = 2y \Leftrightarrow x+1 = 3^{2y} \Leftrightarrow x+1 = 9^y$

Vì: $0 \le x \le 2023$ nên $1 \le x+1 \le 2024 \Leftrightarrow 1 \le 9^y \le 2024 \Leftrightarrow 0 \le y \le \log_9 2024 \approx 3,46$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0;1;2;3\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thoả mãn.

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả yêu cầu bài toán.

Câu 26: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thỏa mãn $\log_2 y + 6\log_2 x - \log_2^2 x + 1 \ge 2^{\log_2^2(2x)} + \log_2 x^2 - 4yx^6$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của y để tập hợp S có nhiều nhất 32 phần tử?

A. 18. **B.** 36. **C.** 38. **D.** 19.

Lời giải

Chọn D

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$ và $y > 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với: $\log_2\left(yx^6\right) - \log_2^2 x + 1 \ge 2^{\log_2^2(2x)} + 2\log_2 x - 4yx^6$

$$4yx^6 + \log_2\left(yx^6\right) + 1 \ge 2^{\log_2^2(2x)} + \log_2^2 x + 2\log_2 x$$

$$\Leftrightarrow 4yx^6 + \log_2\left(yx^6\right) + 2 \ge 2^{\log_2^2(2x)} + \left(\log_2^2 x + 2\log_2 x + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4yx^6 + \log_2\left(4yx^6\right) \ge 2^{\log_2^2(2x)} + (\log_2 x + 1)^2 \Leftrightarrow 4yx^6 + \log_2\left(4yx^6\right) \ge 2^{\log_2^2(2x)} + \log_2^2(2x)$$

$$\Leftrightarrow 4yx^6 + \log_2\left(4yx^6\right) \ge 2^{\log_2^2(2x)} + \log_2 2^{\log_2^2(2x)} \Leftrightarrow f\left(4yx^6\right) \ge f\left(2^{\log_2^2 2x}\right) (1).$$

Trong đó $f(t) = t + \log_2 t,\ t > 0$.

Ta có $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t\ln 2} > 0$ với $t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow 4yx^6 \ge 2^{\log_2^2 2x} \Leftrightarrow 2 + \log_2 y + 6\log_2 x \ge \log_2^2 2x$

$$\Leftrightarrow 2 + \log_2 y + 6\log_2 x \ge (\log_2 x + 1)^2 \Leftrightarrow \log_2 y \ge \log_2^2 x - 4\log_2 x - 1 = g(x).$$

Ta có $g'(x) = \dfrac{2}{x\ln 2}\log_2 x - \dfrac{4}{x\ln 2} = \dfrac{2}{x\ln 2}(\log_2 x - 2)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

x	0		1		4		33
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	↘		-1		-5	↗	$g(33)$

Để tập S có nhiều nhất 32 phần tử thì $\log_2 y < g(33) \Leftrightarrow 0 < y < 2^{g(33)} \Rightarrow 0 < y \le 19$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x\,;\,y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(x^2+y^2+18x\right)-\log_5\left(x^2+y^2+4x\right)\ge\log_2\left(x^2+y^2\right)-\log_5 2x+1.$$

A. 10. **B.** 20. **C.** 27. **D.** 28

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x>0$

Ta có $\log_2\left(x^2+y^2+18x\right)-\log_5\left(x^2+y^2+4x\right)\ge\log_2\left(x^2+y^2\right)-\log_5 2x+1$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2+y^2+18x\right)-\log_2\left(x^2+y^2\right)-\left[\log_5\left(x^2+y^2+4x\right)-\log_5 2x\right]\ge 1$

$\Leftrightarrow\log_2\dfrac{x^2+y^2+18x}{x^2+y^2}-\log_5\dfrac{x^2+y^2+4x}{2x}\ge 1$

$\Leftrightarrow\log_2\left(1+\dfrac{18x}{x^2+y^2}\right)-\log_5\left(2+\dfrac{x^2+y^2}{2x}\right)\ge 1$

Đặt $\dfrac{x^2+y^2}{2x}=t>0$, bất phương trình trở thành $\log_2\left(1+\dfrac{9}{t}\right)-\log_5\left(2+t\right)\ge 1$ (1).

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_2\left(1+\dfrac{9}{t}\right)-\log_5\left(2+t\right)$ có $f'\left(t\right)=-\dfrac{9}{\left(t^2+9t\right)\ln 2}-\dfrac{1}{\left(2+t\right)\ln 5}<0\ \forall t>0$

$\Rightarrow f\left(t\right)$ là hàm nghịch biến trên $\left(0\ ;\ +\infty\right)$ (2).

Mà $f\left(3\right)=1$ nên từ (1) và (2) ta có $f\left(t\right)\ge f\left(3\right)\Leftrightarrow t\le 3$.

Từ đó ta có $\dfrac{x^2+y^2}{2x}\le 3\Leftrightarrow x^2+y^2-6x\le 0\Leftrightarrow\left(x-3\right)^2+y^2\le 9$.

Suy ra $\left(x-3\right)^2\le 9\Leftrightarrow -3\le x-3\le 3\Leftrightarrow 0\le x\le 6$. Mà $x>0$ nên $0<x\le 6$; $x,y\in\mathbb{Z}$:

Nếu $x=1$ hoặc $x=5$ thì $y\in\left\{\pm 1;\ \pm 2;\ 0\right\}$: trường hợp này có 10 cặp số nguyên $\left(x\ ;\ y\right)$ thỏa mãn.

Nếu $x=2$ hoặc $x=4$ thì $y\in\left\{\pm 1;\ \pm 2;\ 0\right\}$: trường hợp này có 10 cặp số nguyên $\left(x\ ;\ y\right)$ thỏa mãn.

Nếu $x=3$ thì $y\in\left\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ 0\right\}$: trường hợp này có 7 cặp số nguyên $\left(x\ ;\ y\right)$ thỏa mãn.

Nếu $x=6$ thì $y=0$: trường hợp này có 1 cặp số nguyên $\left(x\ ;\ y\right)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 28 cặp số nguyên $\left(x\ ;\ y\right)$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Câu 28: Có bao nhiêu bộ $\left(x;y\right)$ với x,y nguyên và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn

$$\left(xy+2x+4y+8\right)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le\left(2x+3y-xy-6\right)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)?$$

A. 2017. **B.** 4034. **C.** 2 **D.** 2017×2020

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases}x,y\in\mathbb{N}^*: x,y\le 2020\\ \dfrac{2x+1}{x-3}>0,\dfrac{2y}{y+2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,y\in\mathbb{N}^*: x,y\le 2020\\ x>3,y>0\end{cases}$.

BPT đã cho có dạng $(x-3)(y-2)\log_2\left(\dfrac{x+4}{x-3}+1\right)+(x+4)(y+2)\log_3\left(\dfrac{y-2}{y+2}+1\right)\le 0\ ^{(*)}$.

Do $y>0$, y nguyên dương nên:

Xét $y=1$ thì thành $-(x-3)\log_2\left(\dfrac{x+4}{x-3}+1\right)+3(x+4)\log_3\dfrac{2}{3}\le 0$, rõ ràng BPT này nghiệm đúng với mọi $x>3$ vì $-(x-3)<0,\ \log_2\left(\dfrac{x+4}{x-3}+1\right)>\log_2(0+1)=0,\ 3(x+4)>0,\ \log_3\dfrac{2}{3}<0$

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2017 bộ $(x;y)=(x;1)$ với $4\le x\le 2020, x\in\mathbb{N}$.

Xét $y=2$ thì thành $4(x+4)\log_3 1\le 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi x mà $4\le x\le 2020, x\in\mathbb{N}$.

Trường hợp này cho ta 2017 cặp $(x;y)$ nữa.

Với $y>2, x>3$ thì $VT(*)>0$ nên không xảy ra.

Vậy có đúng 4034 bộ số $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x\in(1;6)$ thỏa mãn

$$4(x-1)e^x=y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)?$$

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Ta có $4(x-1)e^x=y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)\Leftrightarrow 4(x-1)e^x-y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)=0\ (*)$.

Xét hàm số $f(x)=4(x-1)e^x-y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)$ trên $(1;6)$.

$f'(x)=4e^x+4(x-1)e^x-y\left(e^x+y-4x\right)=4xe^x-ye^x+y(4x-y)=(4x-y)\left(e^x+y\right)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow(4x-y)\left(e^x+y\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{y}{4}$ (do $e^x+y>0$, $\forall y\in\mathbb{N}^*$).

Trường hợp 1: $\dfrac{y}{4}\le 1\Leftrightarrow y\le 4$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(1;6)$:

x	1		6
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(6)$

$f(1)=-y(e+y-5)$; $f(6)=20e^6-y\left(e^6+6y-75\right)=-6y^2+\left(75-e^6\right)y+20e^6$.

Ta có $f(6)>0\Leftrightarrow -6y^2+\left(75-e^6\right)y+20e^6>0\Leftrightarrow -72{,}1<y<18{,}4$.

Suy ra $\forall y\in\mathbb{N}^*, y\le 4,$ thì $f(6)>0$.

Do đó phương trình $(*)$ có nghiệm $x \in (1;6) \Leftrightarrow f(1) < 0 \Leftrightarrow e + y - 5 > 0 \Leftrightarrow y > 5 - e \approx 2,3$.

Cùng điều kiện $y \le 4$ và y nguyên dương, ta có $y \in \{3;4\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $\frac{y}{4} \ge 6 \Leftrightarrow y \ge 24$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(1;6)$:

x	1		6
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$	$f(6)$

Với $y \ge 24$ ta luôn có $f(1) = -y(e + y - 5) < 0$ nên không tồn tại $x \in (1;6)$ thỏa mãn $(*)$.

Trường hợp 3: $1 < \frac{y}{4} < 6 \Leftrightarrow 4 < y < 24$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(1;6)$:

x	1		$\frac{y}{4}$		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$	$f\left(\frac{y}{4}\right)$	$\nearrow$	$f(6)$

Với $y \in (4;24)$ ta luôn có $f(1) = -y(e + y - 5) < 0$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm $x \in (1;6)$
$\Leftrightarrow f(6) > 0 \Leftrightarrow -72,1 < y < 18,4$.

Cùng điều kiện $y \in (4;24)$ và y nguyên dương ta có $y \in \{5;6;...;18\}$.

Do đó, tập các giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\{3;4;....;18\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x + y > 0; -4 \le x \le 4$ và

$$\log_3 \frac{(x+2y)}{4} + x^2 + 2y^2 + 3xy - 4x - 4y \le 0 \text{ ?}$$

A. 11. **B.** 10 **C.** 12. **D.** 13.

Lờigiải

Chọn C

Điều kiện: $x + 2y > 0$

Do $x + y > 0$ nên $\log_3 \frac{(x+2y)}{4} + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y \le 0$

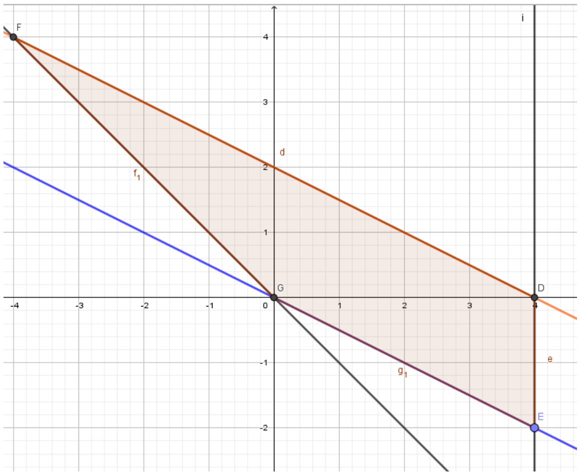
$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{(x+y)(x+2y)}{4(x+y)} + x^2 + 2y^2 + 3xy - 4x - 4y \le 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2 + 3xy + 2y^2\right) + x^2 + 2y^2 + 3xy \le \log_2 4(x+y) + 4(x+y) \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$, ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0 \forall t \in (0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f\left(x^2 + 2y^2 + 3xy\right) \le f\left[4(x+y)\right] \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 3xy \le 4(x+y)$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+2y-4) \le 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4 \le 0$ (vì $x + y > 0$).



Biểu diễn miền nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y > 0 \\ x + 2y > 0 \\ x + 2y - 4 \le 0 \\ -4 \le x \le 4 \end{cases}$, tìm được 12 cặp số nguyên thỏa mãn.

Câu 31: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi số nguyên x có đúng 5 số nguyên y thỏa mãn $3^{y^2 - |x-2y|} \le \log_{y^2+3}\left(|x-2y| + 3\right)$?

A. 10. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

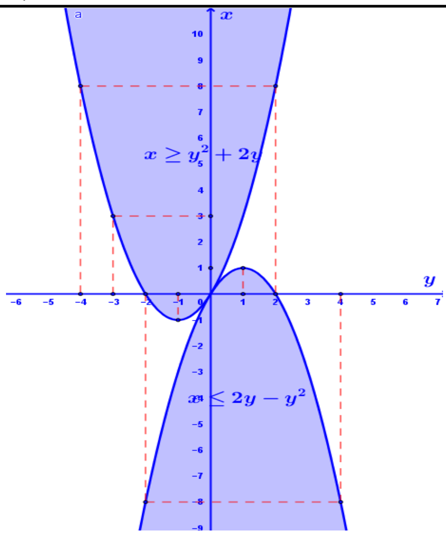
$$3^{y^2 - |x-2y|} \le \log_{y^2+3}\left(|x-2y| + 3\right) \Leftrightarrow \frac{3^{y^2+3}}{3^{|x-2y|+3}} \le \frac{\ln\left(|x-2y|+3\right)}{\ln\left(y^2+3\right)}$$

$\Leftrightarrow 3^{y^2+3}\ln\left(y^2+3\right) \le 3^{|x-2y|+3}\ln\left(|x-2y|+3\right)$. Xét hàm số $f(t) = 3^t \ln t$ với $t \ge 3$.

$f'(t) = 3^t \ln t . \ln t + \dfrac{3^t}{t} > 0, \forall t \ge 3 \Rightarrow$ hàm số đồng trên $\left[3;+\infty\right)$.

Ta có: $f\left(y^2+3\right) \le f\left(|x-2y|+3\right) \Leftrightarrow y^2 + 3 \le |x-2y| + 3 \Leftrightarrow y^2 \le |x-2y|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge y^2 + 2y = g_1(y) \\ x \le 2y - y^2 = g_2(y) \end{array}\right.$$



Ta thấy $\left[\begin{array}{l} 3 \leq x < 8 \\ x = 0 \\ -8 < x \leq -3 \end{array}\right.$ thì sẽ có đúng 5 giá trị nguyên của y với mỗi giá trị nguyên của x.

Vậy có tất cả 11 giá trị.

Câu 32: có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x \leq 2023$ và $3(9^y + 2y) \leq x + \log_3 (x+1)^3 - 2$?

A. 3778. **B.** 3780. **C.** 2. **D.** 4046.

Lời giải

Chọn B

$3(9^y + 2y) \leq x + \log_3 (x+1)^3 - 2 \Leftrightarrow 3^{2y+1} + 3(2y+1) \leq x + 1 + \log_3 (x+1)^3$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t + 3t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến $\forall t \in \mathbb{R}$.

Khi đó $f(2y+1) \leq f(\log_3 (x+1)) \Leftrightarrow 2y + 1 \leq \log_3 (x+1) \Leftrightarrow y \leq \dfrac{\log_3 (x+1) - 1}{2}$.

Vì $x \leq 2023$ nên $y \leq \dfrac{\log_3 2024 - 1}{2} \approx 2,965$.

Vì y nguyên dương nên $y \in \{1;2\}$.

Với $y = 1 \Rightarrow x \geq 3^{2y+1} - 1 = 26$. Có 1998 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $y = 2 \Rightarrow x \geq 3^{2y+1} - 1 = 242$. Có 1782 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy có 3780 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 33: Có bao nhiêu số nguyên $y \in (-2023;2023)$ để phương trình $e^x + e^{x+y} = \ln(x+1) - \ln(x+y+1)$ có nghiệm thực duy nhất?

A. 2023. **B.** 4044. **C.** 2022. **D.** 2024.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét: $e^x + e^{x+y} > 0 \Rightarrow \ln(x+1) > \ln(x+y+1) \Rightarrow x + 1 > x + y + 1 \Rightarrow y < 0$

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+y+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1-y$.

Từ: $e^x+e^{x+y}=\ln(x+1)-\ln(x+y+1) \Leftrightarrow e^x+e^{x+y}-\ln(x+1)+\ln(x+y+1)=0$.

Đặt $f(x)=e^x+e^{x+y}-\ln(x+1)+\ln(x+y+1), \forall y<0, \forall x>-1-y$.

Ta có

$$f'(x)=e^x+e^{x+y}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+y+1}=e^x+e^{x+y}-\frac{y}{(x+1)(x+y+1)}>0, \forall y<0, \forall x>-1-y.$$

Suy ra $f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(-1-y;+\infty)$ với $y<0$.

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty; \lim\limits_{x\to-(1+y)^+} f(x)=-\infty$.

Nên $f(x)=0$ luôn có nghiệm duy nhất với mọi số nguyên $y<0$.

Vậy có 2022 số nguyên y thỏa mãn.

Câu 34: Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ thuộc đoạn $[1;100]$ thỏa mãn y là số nguyên và $x+\log_2 x=y+2^y$?

A. 100. **B.** 99. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(t)=t+2^t \Rightarrow f'(t)=1+2^t\ln 2>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f(\log_2 x)=f(y) \Rightarrow \log_2 x=y \Rightarrow x=2^y$.

Để $1\le x\le 100$ thì $1\le 2^y\le 100 \Rightarrow 0\le y\le \log_2 100\approx 6,64$

Do y nguyên và $y\in[1;100]$ nên $y\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Vì mỗi giá trị của y thì chỉ có một giá trị của x thỏa mãn $1\le x\le 100$ nên có 6 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 35: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $-20\le x\le 20, 1\le y\le 20$ $3^{x+3}+5x+10=3^{y^2+1}+5y^2$?

A. 13. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

$3^{x+3}+5x+10=3^{y^2+1}+5y^2 \Leftrightarrow 3^{x+3}+5(x+3)=3^{y^2+1}+5(y^2+1)$.

Xét hàm số $f(t)=3^t+5t \Rightarrow f'(t)=3^t\ln 3+5>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f(x+3)=f(y^2+1) \Rightarrow x+3=y^2+1 \Rightarrow x=y^2-2$.

Vì $-20\le x\le 20 \Rightarrow -20\le y^2-2\le 20 \Rightarrow -18\le y^2\le 22 \Rightarrow -\sqrt{22}\le y\le\sqrt{22}$.

Do y nguyên và $1\le y\le 20$ nên $y\in\{1;2;3;4\}$.

Mỗi giá trị của y chỉ ứng với một giá trị của x với $-20\le x\le 20$ nên có 4 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 36: Gọi S là tập hợp điểm $M(x;y)$ với x,y là các số nguyên thỏa mãn $8<x<3000$ và $\log_3(x-2)+3x=y+9\left(3^{y+2}+1\right)$. Có bao nhiêu tứ giác lập được từ các điểm thuộc tập S ?

A. 15. **B.** 6. **C.** 3091. **D.** 360.

Lời giải

Chọn A

$\log_3(x-2)+3x=y+9\left(3^{y+2}+1\right)\Leftrightarrow \log_3(x-2)+1+3x-6=y+4+3^{y+4}$.

$\Leftrightarrow \log_3(3x-6)+3x-6=y+4+3^{y+4}$

Xét hàm số $f(t)=3^t+t\Rightarrow f'(t)=3^t\ln 3+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(\log_3(3x-6)\right)=f(y+4)\Rightarrow \log_3(3x-6)=y+4\Rightarrow y=-4+\log_3(3x-6)$.

Do $8<x<3000$ nên $-4+\log_3 18<y<-4+\log_3(8994)\Rightarrow y\in\{-1;0;1;2;3;4\}$.

Vì $x=3^{y+3}$ và $8<x<3000$ nên mỗi giá trị của y có một giá trị của x nên có 6 điểm thuộc S .

Do các điểm này nằm trên đồ thị hàm số $y=-4+\log_3(3x-6)$ nên không có 4 điểm nào thẳng hàng.

Vậy có $C_6^4=15$ tứ giác được tạo thành từ các điểm thuộc S.

Câu 37: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+y^2+3x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le \log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+18x\right)?$$

A. 29. **B.** 28. **C.** 48. **D.** 49.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

$\log_3\left(x^2+y^2+3x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le \log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+18x\right)$ (1)

$\Leftrightarrow \log_3\dfrac{x^2+y^2+3x}{x}\le \log_2\dfrac{x^2+y^2+18x}{x^2+y^2}$.

Đặt $t=\log_3\dfrac{x^2+y^2+3x}{x}=\log_3\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}+3\right)>1\Rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{x}=3^t-3$.

$(1)\Leftrightarrow t\le \log_2\left(1+18.\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow 2^t\le 1+\dfrac{18}{3^t-3},(t>0)$.

$\Leftrightarrow 3^t+15\ge 6^t-3.2^t\Leftrightarrow 3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+15.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{2}\right)^t-1\ge 0$.

Xét $f(t)=3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+15.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{2}\right)^t-1$ với $t>1$.

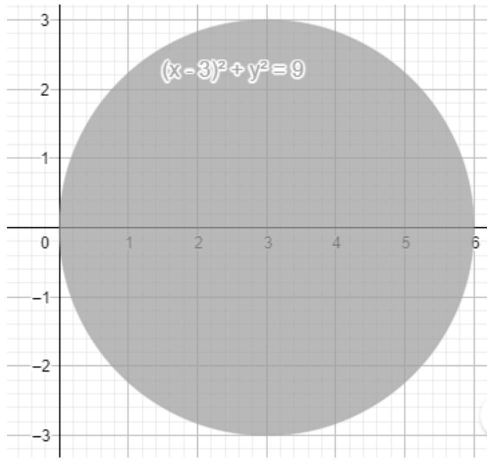
Có $f'(t)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^t.\ln 2-15.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t\ln 6-3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^t\ln 3<0$ với $\forall t>1$.

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

$(1)\Leftrightarrow f(t)\ge f(2)\Leftrightarrow 1<t\le 2\Leftrightarrow 1<\log_3\dfrac{x^2+y^2+3x}{x}\le 2$.

$\Leftrightarrow 3<\dfrac{x^2+y^2+3x}{x}\le 9 \Leftrightarrow x^2+y^2-6x\le 0 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2\le 9$.

Tập hợp các điểm $M(x;y)$ có tọa độ thỏa mãn (1) là phần nằm trong đường tròn tâm $I(3;0)$ bán kính bằng 3 bao gồm cả đường tròn, trừ điểm $O(0;0)$ do $x>0$.



Từ hình vẽ ta có 28 cặp số nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 38: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+y+3x\right)+\log_2\left(x^2+y\right)\le \log_3 x+\log_2\left(x^2+y+18x\right)?$$

A. 42. **B.** 36. **C.** 35. **D.** 41.

Lời giải

Chọn C

$\log_3\left(x^2+y+3x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le \log_3 x+\log_2\left(x^2+y+18x\right)\ (1)$.

$\Leftrightarrow \log_3\dfrac{x^2+y+3x}{x}\le \log_2\dfrac{x^2+y+18x}{x^2+y}$.

Đặt $t=\log_3\dfrac{x^2+y+3x}{x}=\log_3\left(\dfrac{x^2+y}{x}+3\right)>1 \Rightarrow \dfrac{x^2+y}{x}=3^t-3$.

$(1)\Leftrightarrow t\le \log_2\left(1+18.\dfrac{x}{x^2+y}\right)\Leftrightarrow 2^t\le 1+\dfrac{18}{3^t-3},(t>0)$.

$\Leftrightarrow 3^t+15\ge 6^t-3.2^t \Leftrightarrow 3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+15.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{2}\right)^t-1\ge 0$.

Xét $f(t)=3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+15.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{2}\right)^t-1$ với $t>1$.

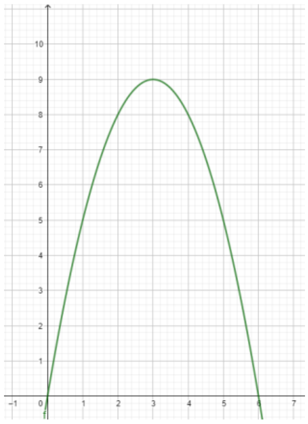
Có $f'(t)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^t.\ln 2-15.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t\ln 6-3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^t\ln 3<0$ với $\forall t>1$.

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

$(1)\Leftrightarrow f(t)\ge f(2)\Leftrightarrow 1<t\le 2 \Leftrightarrow 1<\log_3\dfrac{x^2+y+3x}{x}\le 2$.

$\Leftrightarrow 3<\dfrac{x^2+y+3x}{x}\le 9 \Leftrightarrow 3x<x^2+y\le 6x \Leftrightarrow -x^2<y\le -x^2+6x$.

Tập hợp các điểm $M\left(x;y\right)$ có tọa độ thỏa mãn (1) là phần nằm trong parabol $\left(P\right): y=-x^2+6x$ và trục hoành (không tính các điểm trên trục hoành).



Từ hình vẽ ta có 35 cặp số nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 39: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le \log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+2x\right)?$$

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3\dfrac{x^2+y^2+x}{x}\le \log_2\dfrac{x^2+y^2+2x}{x^2+y^2}$.

Đặt $\log_3\dfrac{x^2+y^2+x}{x}=t\Rightarrow x^2+y^2+x=x.3^t.$

Khi đó bất phương trình $\Leftrightarrow \log_2\dfrac{x^2+y^2+2x}{x^2+y^2}\ge t\Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2+2x}{x^2+y^2}\ge 2^t\Leftrightarrow \dfrac{x.3^t+x}{x.3^t-x}\ge 2^t$

$\Leftrightarrow \dfrac{3^t+1}{3^t-1}\ge 2^t\Leftrightarrow 3^t+1\ge 2^t\left(3^t-1\right)\Leftrightarrow 3^t+1+2^t\ge 6^t\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^t+\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{3}\right)^t\ge 1\,(1).$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t+\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{3}\right)^t$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow f\left(t\right)\ge f\left(1\right)\Leftrightarrow t\le 1.$

Khi đó ta có $\log_3\dfrac{x^2+y^2+x}{x}\le 1\Rightarrow x^2+y^2+x\le 3x\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2+y^2\le 1.$

Ta có $\left(x-1\right)^2\le 1\Leftrightarrow 0\le x\le 2$

Với $x=0\Rightarrow y=1$

Với $x=1\Rightarrow y=\pm 1$

Với $x=1\Rightarrow y=0$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 40: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le 16$ và

$$\log_3\left(x^2+y+x\right)+\log_2\left(x^2+y\right)\le \log_3 x+\log_2\left(x^2+y+24x\right)?$$

A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C

$\log_3\left(x^2+y+x\right)+\log_2\left(x^2+y\right)\le \log_3 x+\log_2\left(x^2+y+24x\right)$ (1)

$\Leftrightarrow \log_3\dfrac{x^2+y+x}{x}\le \log_2\dfrac{x^2+y+24x}{x^2+y}$.

Đặt $t=\log_3\dfrac{x^2+y+x}{x}\Leftrightarrow x^2+y+x=x.3^t$.

$(1)\Leftrightarrow t\le \log_2\dfrac{x.3^t+23x}{x.3^t-x}\Leftrightarrow 2^t\le \dfrac{3^t+23}{3^t-1},(t>0)$.

$\Leftrightarrow 3^t+23\ge 6^t-2^t\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^t+23.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{3}\right)^t\ge 1$.

Xét $f(t)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t+23.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{3}\right)^t-1$ với $t>0$.

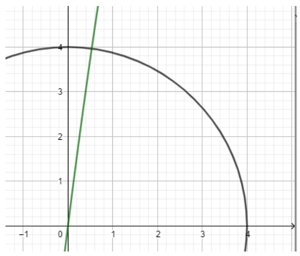
Có $f'(t)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^t.\ln 2-23.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t\ln 6-\left(\dfrac{1}{3}\right)^t\ln 3<0$ với $\forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$(1)\Leftrightarrow f(t)\ge f(2)\Leftrightarrow 0<t\le 2\Leftrightarrow 0<\log_3\dfrac{x^2+y+x}{x}\le 2$.

$\Leftrightarrow 1<\dfrac{x^2+y+x}{x}\le 9\Leftrightarrow y\le -x^2+8x$.

Tập hợp các điểm $M(x;y)$ có tọa độ thỏa mãn đề là phần nằm trong parabol $(P): y=-x^2+8x$ và đường tròn (C) tâm gốc tọa độ, bán kính $R=4$ và trục hoành (không tính các điểm trên trục hoành).



Từ hình vẽ ta có 8 cặp số nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 41: Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn bất đẳng thức $\log\dfrac{x+1}{3y+1}\le 9y^4+6y^3-x^2y^2-2y^2x$ (1). Biết $y\le 1000$, hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn bất đẳng thức (1).

A. 1501100. **B.** 1501300. **C.** 1501400. **D.** 1501500.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$\log\dfrac{x+1}{3y+1}\le 9y^4+6y^3-x^2y^2-2y^2x\Leftrightarrow \log\dfrac{xy+y}{3y^2+y}\le\left(9y^4+6y^3+y^2\right)-\left(x^2y^2+2xy.y+y^2\right)$

$\Leftrightarrow \log(xy+y)-\log\left(3y^2+y\right)\le\left(3y^2+y\right)^2-(xy+y)^2$

$\Leftrightarrow \log(xy+y)+(xy+y)^2 \le \log(3y^2+y)+(3y^2+y)^2$ (*)

Xét hàm $f(t)=\log t+t^2$ với $t\in(0;+\infty)$

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 10}+2t>0\ \forall t\in(0;+\infty)$. Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $t\in(0;+\infty)$.

$(*)\Leftrightarrow f(xy+y)\le f(3y^2+y) \Leftrightarrow xy+y\le 3y^2+y \Leftrightarrow x\le 3y$.

Vì $y\le 2020$ nên ta có các trường hợp sau

$y=1 \Rightarrow x\in\{1;2;3\}$

$y=2\Rightarrow x\in\{1;2;3;4;5;6\}$

$y=1000\Rightarrow x\in\{1;2;.......;3000\}$

Vậy số cặp nghiệm thỏa mãn điều kiện đề bài là: $3+6+9+...+3000=1501500$.

Câu 42: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_3(4x^2+4y^2+x)+\log_2(x^2+y^2)\le \log_3 x+\log_2(x^2+y^2+6x)$?

A. 12. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$.

$\log_3(4x^2+4y^2+x)+\log_2(x^2+y^2)\le \log_3 x+\log_2(x^2+y^2+6x)$ (1)

$\Leftrightarrow \log_3\dfrac{4x^2+4y^2+x}{x}\le \log_2\dfrac{x^2+y^2+6x}{x^2+y^2}$.

Đặt $t=\log_3\dfrac{4x^2+4y^2+x}{x}=\log_3\left(\dfrac{4x^2+4y^2}{x}+1\right)>0\Rightarrow 4.\dfrac{x^2+y^2}{x}=3^t-1$.

$(1)\Leftrightarrow t\le \log_2\left(1+6.\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow 2^t\le 1+\dfrac{24}{3^t-1},(t>0)$.

$\Leftrightarrow 3^t+23\ge 6^t-2^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^t+\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+23.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t-1\ge 0$.

Xét $f(t)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t+23.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{3}\right)^t-1$ với $t>0$.

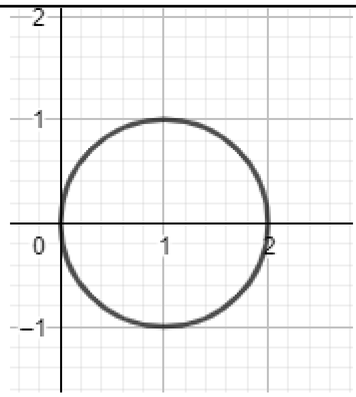
Có $f'(t)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^t.\ln 2-23.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t\ln 6-\left(\dfrac{1}{3}\right)^t\ln 3<0$ với $\forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$(1)\Leftrightarrow f(t)\ge f(2)\Leftrightarrow 0<t\le 2 \Leftrightarrow 0<\log_3\dfrac{4x^2+4y^2+x}{x}\le 2$.

$\Leftrightarrow 1<\dfrac{4x^2+4y^2+x}{x}\le 9\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2+4y^2>0\,(ld)\\4x^2+4y^2\le 8x\end{cases}\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$.

Tập hợp các điểm $M(x;y)$ có tọa độ thỏa mãn (1) là phần nằm trong đường tròn tâm $I(1;0)$ bán kính bằng 1 bao gồm cả đường tròn, trừ điểm $O(0;0)$ do $x>0$.



Từ hình vẽ ta có 4 cặp số nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 43: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(2x^2+2y^2+5x\right)+\log_5\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_5\left(20x^2+20y^2+10x\right)$$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+y^2>0\\ x>0\end{cases}$.

Ta có: $\log_3\left(2x^2+2y^2+5x\right)+\log_5\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_5\left(20x^2+20y^2+10x\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(2x^2+2y^2+5x\right)-\log_3 x+\log_5\left(x^2+y^2\right)-\log_5\left(20x^2+20y^2+10x\right)\le 0$

$\Leftrightarrow\log_3\left(\dfrac{2x^2+2y^2+5x}{x}\right)+\log_5\left(\dfrac{x^2+y^2}{20x^2+20y^2+10x}\right)\le 0\quad(1)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(2\dfrac{x^2+y^2}{x}+5\right)+\log_3\left(\dfrac{\dfrac{x^2+y^2}{x}}{20\dfrac{x^2+y^2}{x}+10}\right)\le 0\quad(1)$

Đặt $t=\dfrac{x^2+y^2}{x}\quad(t>0)$

Bất phương trình (1) trở thành $\log_3\left(2t+5\right)+\log_5\left(\dfrac{t}{20t+10}\right)\le 0$

Gọi $f(t)=\log_3\left(2t+5\right)+\log_5\left(\dfrac{t}{20t+10}\right)\le 0$ với $t>0$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2}{(2t+5)\ln 2}+\dfrac{10}{t(20t+10)\ln 5}>0\ \forall t>0$

Do đó hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác $f(2)=0$ nên $\log_3\left(2t+5\right)+\log_5\left(\dfrac{t}{20t+10}\right)\le 0\Leftrightarrow t\le 2$

Suy ra $\dfrac{x^2+y^2}{x}\le 2\Leftrightarrow x^2+y^2-2x\le 0\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2\le 1$.

Ta có các trường hợp sau xảy ra đối với cặp số nguyên $(x;y)$:

TH1: $x=1 \Rightarrow y^2 \le 1 \Rightarrow y \in \{-1;0;1\}$

TH2: $x=2 \Rightarrow y^2 \le 0 \Rightarrow y=0$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện bài toán là $(1;-1),(1;0),(1;1),(2;0)$.

Câu 44: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(x^2+y^2\right)+\log_5\left(x^2+y^2\right) \le \log_2(x+y)+\log_5\left(x^2+y^2+96x+96y\right)?$$

A. 3. **B.** 26. **C.** 24. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+y>0 \\ x,y \in Z \end{cases}$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_2 \dfrac{x^2+y^2}{x+y} \le \log_5 \dfrac{x^2+y^2+96x+96y}{x^2+y^2}$.(*)

Đặt $t=\log_2 \dfrac{x^2+y^2}{x+y} \Leftrightarrow x^2+y^2=(x+y)2^t$.

Bất phương trình $(*) \Leftrightarrow t \le \log_5 \dfrac{(x+y)2^t+96(x+y)}{(x+y)2^t} \Leftrightarrow t \le \log_5 \dfrac{2^t+96}{2^t} \Leftrightarrow 5^t \le \dfrac{2^t+96}{2^t}$

$\Leftrightarrow 10^t \le 2^t+96 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{5}\right)^t+96\left(\dfrac{1}{10}\right)^t \ge 1$.

Xét $f(u)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^u+96\left(\dfrac{1}{10}\right)^u$; $f'(u)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^u \ln\left(\dfrac{1}{5}\right)+96\left(\dfrac{1}{10}\right)^u \ln\left(\dfrac{1}{10}\right)<0(\forall u>0)$

$\Leftrightarrow f(t) \ge f(2) \Leftrightarrow 0<t \le 2 \Leftrightarrow 0<\log_2 \dfrac{x^2+y^2}{x+y} \le 2$

$\Leftrightarrow 1<\dfrac{x^2+y^2}{x+y} \le 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y<x^2+y^2\,(\forall x \in D) \\ x^2+y^2 \le 4x+4y \end{cases} \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 \le 8$

Đặt $\begin{cases} X=x-2 \\ Y=y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=X+2 \\ y=Y+2 \end{cases}; (x;y;X;Y \in Z)$

Khi đó $\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2 \le 8 \\ x+y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2+Y^2 \le 8 \\ X+Y>-4 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2 \le 8 \\ x+y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2+Y^2 \le 8 \\ X+Y>-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \in \{-2;-1;-0;1;2\} \\ Y \in \{-2;-1;-0;1;2\} \end{cases}$

$\begin{cases} X \in \{-2\} \\ Y \in \{-1;-0;1;2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0\} \\ y \in \{1;2;3;4\} \end{cases} \Rightarrow 4$ cặp số nguyên $(x;y)$.

$\begin{cases} X \in \{-1;0;1;2\} \\ Y \in \{-2;-1;-0;1;2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{1;2;3;4\} \\ y \in \{0;1;2;3;4\} \end{cases} \Rightarrow 20$ cặp số nguyên $(x;y)$.

Vậy 24 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa điều kiện bài toán.

DẠNG 14 TÍNH KHOẢNG CÁCH LIÊN QUAN ĐẾN MẶT NÓN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

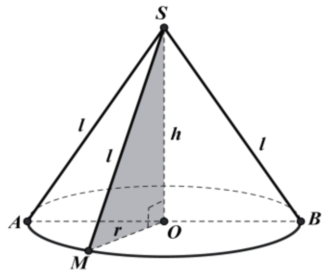
Quay Δ vuông SOM quanh trục SO, ta được mặt nón như hình bên với: $\begin{cases} h = SO \\ r = OM \end{cases}$.

Chu vi đáy: $\boxed{p = 2\pi r}$

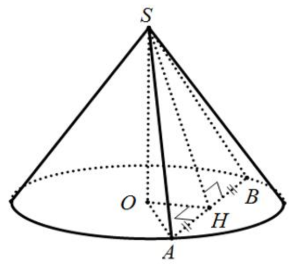
Diện tích đáy: $\boxed{S_{đ} = \pi r^2}$

Thể tích: $\boxed{V = \frac{1}{3}h.S_{đ} = \frac{1}{3}h.\pi r^2}$

Diện tích xung quanh: $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$

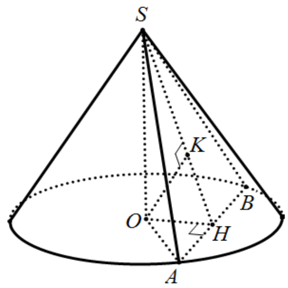


- Thiết diện qua đỉnh của hình nón: mặt phẳng (P) **đi qua đỉnh** của hình nón và cắt mặt nón theo 2 đường sinh $\Rightarrow$Thiết diện cũng là tam giác cân SAB.



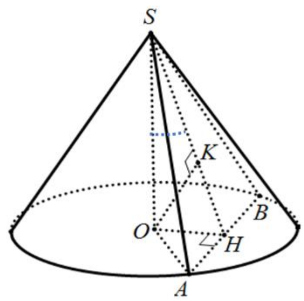
- Khoảng cách từ tâm của đáy O đến thiết diện:

$$d\left(O;(SAB)\right) = OK \Rightarrow OK = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OH^2}}}$$



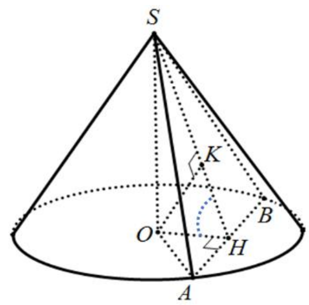
- Góc giữa SO và thiết diện SAB:

$$\left(SO;(SAB)\right) = SOH \Rightarrow \tan SOH = \frac{OH}{SO}$$



- Góc giữa (SAB) và đáy:

$$\left(SAB;(OAB)\right) = SHO \Rightarrow \tan SHO = \frac{SO}{OH}$$



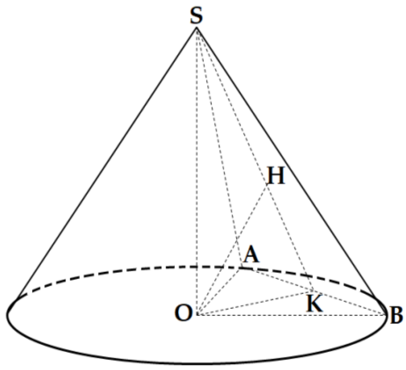
B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 48 – Đề tham khảo 2023. Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 8 và thể tích bằng $\frac{800\pi}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=12$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $\frac{24}{5}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $\frac{5}{24}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính đáy của khối nón, K, H lần lượt là hình chiếu của O lên AB, SK. Khi đó khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng OH.

Ta có: $V=\frac{1}{3}\pi R^2.h \Rightarrow R^2=\frac{3V}{\pi.h}=\frac{3.\frac{800\pi}{3}}{\pi.8}=100 \Rightarrow R=10$

Trong tam giác vuông OBK có: $OK=\sqrt{OB^2-BK^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

Trong tam giác vuông SOK có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}=\frac{2}{8^2} \Rightarrow OH=4\sqrt{2}$.

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h=20$, bán kính đáy $r=25$. Cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và khoảng cách từ tâm của đáy hình nón đến mặt phẳng này bằng 12. Diện tích thiết diện thu được bằng

A. 500. **B.** 400. **C.** 300. **D.** 406.

Câu 2: Cho hình nón có đường cao $h=5a$ và bán kính đáy $r=12a$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt đường tròn đáy theo dây cung có độ dài $10a$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình nón đã cho.

A. $69a^2$. **B.** $120a^2$. **C.** $60a^2$. **D.** $\dfrac{119a^2}{2}$.

Câu 3: Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, bán kính $R=5$. Mặt phẳng (α) qua S, cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) tạo với đáy hình nón góc 45^o; tam giác OAB nhọn. Thể tích V của khối nón tạo nên từ hình nón đã cho bằng

A. $V=100\pi$. **B.** $V=25\pi$ **C.** $V=\dfrac{100\pi}{3}$. **D.** $V=75\pi$.

Câu 4: Cho hình nón có chiều cao $h=20$, bán kính đáy $r=25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S=500$. **B.** $S=400$. **C.** $S=300$. **D.** $S=406$

Câu 5: Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O. Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác có một góc bằng 120^0, thiết diện qua đỉnh S cắt mặt phẳng đáy theo dây cung $AB=4a$ và là một tam giác vuông. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $\pi\sqrt{3}a^2$. **B.** $\pi 8\sqrt{3}a^2$. **C.** $\pi 2\sqrt{3}a^2$. **D.** $\pi 4\sqrt{3}a^2$.

Câu 6: Cho khối nón (N) có chiều cao $h=20$ cm, bán kính đáy $r=25$ cm. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đỉnh của (N) và cách tâm của mặt đáy 12 cm. Khi đó (α) cắt (N) theo một thiết diện có diện tích là

A. $S=300\,\text{cm}^2$. **B.** $S=500\ \text{cm}^2$. **C.** $S=406\ \text{cm}^2$. **D.** $S=400\ \text{cm}^2$.

Câu 7: Cho hình nón đỉnh S, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SAO=30^0, SAB=60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Câu 8: Cho khối nón xoay đỉnh S có thể tích bằng 96π. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có cạnh bằng 10. Khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (α) có thể bằng kết quả nào dưới đây?

A. 8. **B.** $\dfrac{8\sqrt{33}}{15}$. **C.** $\dfrac{6\sqrt{13}}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{24}$.

Câu 9: Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 12 và thể tích bằng $\frac{1200\pi}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=12$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{\sqrt{13}}{24}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{24\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Câu 10: Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, bán kính R. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng 60^0, khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$. Đường cao h của hình nón bằng

A. $h=\frac{R\sqrt{6}}{4}$. **B.** $h=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=a\sqrt{3}$. **D.** $h=a\sqrt{2}$.

Câu 11: Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Đường cao h của hình nón bằng

A. $h=\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=a\sqrt{3}$. **D.** $h=a\sqrt{2}$.

Câu 12: Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}a$; BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc $60°$. Tính theo a diện tích S của tam giác IBC.

A. $S=\frac{\sqrt{2}}{3}a^2$. **B.** $S=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2$. **C.** $S=\frac{a^2}{3}$. **D.** $S=\frac{4\sqrt{2}}{3}a^2$.

Câu 13: Cho hình nón đỉnh S, đường tròn đáy tâm O và góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng đi qua S cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3, diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng $18\pi\sqrt{3}$. Tính diện tích tam giác SAB.

A. 21. **B.** 27. **C.** 12. **D.** 18.

Câu 14: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SAO=30^0, SAB=60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Câu 15: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SAO=30°, SAB=60°$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Câu 16: Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón, cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều sao cho góc hợp bởi mặt phẳng thiết diện và mặt đáy của hình nón có số đo bằng $60°$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. 104π. **B.** $\frac{4\sqrt{39}\pi}{3}$. **C.** $104\sqrt{3}\pi$. **D.** $\frac{104\sqrt{3}\pi}{3}$.

Câu 17: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $SAO = 30^0$, $SAB = 60^0$. Độ dài đường sinh ℓ của hình nón bằng

A. $\ell = a$. **B.** $\ell = a\sqrt{2}$. **C.** $\ell = a\sqrt{3}$. **D.** $\ell = 2a$.

Câu 18: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp của đáy ABC đến một mặt bên là $\frac{a}{2}$. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{4\pi a^3}{9}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{27}$. **D.** $\frac{2\pi a^3}{3}$.

Câu 19: Cho khối nón đỉnh S, bán kính đáy bằng $3\sqrt{3}$ và có góc ở đỉnh bằng $120°$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho tam giác SAB là tam giác vuông, khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. 3. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Câu 20: Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và tạo với hình nón một thiết diện là tam giác có diện tích bằng $3\sqrt{2}$. Biết mặt phẳng đó tạo với trục của hình nón một góc 30°. Thể tích của hình nón đã cho là

A. $V = \frac{8\pi}{3}$. **B.** $V = 9\pi$. **C.** $V = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V = \frac{9\pi\sqrt{2}}{4}$.

Câu 21: Cho hình nón (N) có chiều cao bằng $6a$. Cắt (N) bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh và cách tâm của đáy một khoảng bằng $3a$ ta được thiết diện có diện tích bằng $12\sqrt{11}a^2$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $36\sqrt{5}\pi a^3$. **B.** $270\pi a^3$. **C.** $90\pi a^3$. **D.** $12\sqrt{5}\pi a^3$.

Câu 22: Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R = 2a$. Trên đường tròn đáy lấy 2 điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông. Biết diện tích tam giác SAB bằng $4a^2\sqrt{2}$, thể tích khối nón đã cho bằng

A. $V = \frac{4\pi a^3\sqrt{14}}{3}$. **B.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{14}}{3}$. **C.** $V = \frac{2\pi a^3\sqrt{14}}{3}$. **D.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{14}}{6}$.

Câu 23: Cho khối nón (N) có đỉnh S, chiều cao bằng 10, đáy là đường tròn tâm O. Gọi A,B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho hình chóp $S.OAB$ có thể tích bằng 40. Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{20\sqrt{29}}{29}$. Tính thể tích khối nón (N).

A. $\frac{250\pi}{3}$. **B.** 500π. **C.** 250π. **D.** $\frac{500\pi}{3}$.

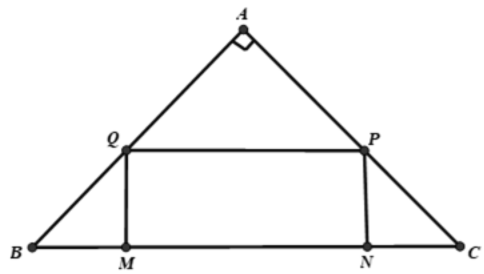
Câu 24: Cho khối nón (N) có đỉnh S, chiều cao bằng 5, đáy là đường tròn tâm O. Thiết diện chứa SO của khối nón (N) là tam giác vuông cân. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho diện tích của tam giác OAB bằng 12. Biết độ dài đoạn $AB < 7$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

A. $\dfrac{12}{5}$. **B.** $\dfrac{20\sqrt{41}}{41}$. **C.** $\dfrac{20\sqrt{29}}{29}$. **D.** $\dfrac{15\sqrt{34}}{34}$.

Câu 25: Một hình nón có chiều cao $h = 4$; độ dài đường sinh $l = 5$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của nón và cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng $2\sqrt{5}$. Khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng đó bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Câu 26: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = 10\sqrt{2}\ (cm)$. Hình chữ nhật $MNPQ$ có P, Q lần lượt thuộc cạnh AB, AC và M, N thuộc cạnh BC. Quay hình chữ nhật $MNPQ$ (và miền trong của nó) quanh trục đối xứng của tam giác ABC được một khối tròn xoay. Tính độ dài đoạn PQ để thể tích khối tròn xoay lớn nhất.



A. $PQ = 5cm$. **B.** $PQ = 10cm$. **C.** $PQ = \dfrac{20}{3}\ cm$. **D.** $PQ = \dfrac{40}{3}\ cm$.

Câu 27: Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $120°$ và chiều cao bằng 3. Gọi (S) là mặt cầu đi qua đỉnh và chứa đường tròn đáy của hình nón đã cho. Diện tích của (S) bằng:

A. 108π. **B.** 144π. **C.** 96π. **D.** 48π.

Câu 28: Cho hình nón (N) có đỉnh là S, tâm đường tròn đáy là O và góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng qua S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 4. Tính thể tích của hình nón (N)?

A. $V = 36\pi$. **B.** $V = 48\pi$. **C.** $V = 64\pi$. **D.** $V = 16\pi$.

Câu 29: Cho hình nón có đỉnh S, trục SO, bán kính R, chiều cao h. Dây cung AB thuộc đường tròn đáy và cách O một khoảng $\dfrac{R}{2}$ như hình vẽ. Ký hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của hình nón và diện tích tam giác SAB. Biết $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{10\pi}{3\sqrt{3}}$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $h = \left(\sqrt{2} - 1\right)R.$. **B.** $h = \dfrac{1}{3}R.$. **C.** $h = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}R.$. **D.** $h = \dfrac{\sqrt{11}}{8}R.$.

Câu 30: Hình nón (N) đỉnh S, có tâm của đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh 120^0. Một mặt phẳng qua đỉnh S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq} = 27\sqrt{3}\pi$ **B.** $S_{xq} = 18\sqrt{3}\pi$. **C.** $S_{xq} = 9\sqrt{3}\pi$. **D.** $S_{xq} = 36\sqrt{3}\pi$.

Câu 31: Cho khối nón (S). Cắt khối nón bởi mặt phẳng (P) đi qua đỉnh và tạo với đáy góc $30°$ thiết diện thu được là tam giác đều cạnh có độ dài là 1. Thể tích khối nón (S) là

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{192}$ **B.** $\dfrac{13\pi\sqrt{3}}{192}$. **C.** $\dfrac{13\pi\sqrt{3}}{64}$. **D.** $\dfrac{13\pi\sqrt{3}}{48}$.

Câu 32: Cho hình nón có chiều cao $h = 20\,\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\,\text{cm}$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $12\,\text{cm}$. Tính diện tích của thiết diện đó.

A. $S = 500\,\text{cm}^2$. **B.** $S = 300\,\text{cm}^2$. **C.** $S = 406\,\text{cm}^2$. **D.** $S = 400\,\text{cm}^2$.

Câu 33: Cho khối nón có đỉnh S, O là tâm đường tròn đáy, bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh là $6\sqrt{3}\pi$. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho ΔSAB có diện tích là 3 và AB không là đường kính. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 34: Cho hình nón có đường cao $h = 40cm$, bán kính đáy $r = 50cm$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón, có khoảng cách từ tâm của đáy hình nón đến mặt phẳng (P) bằng $24cm$. Tính diện tích thiết diện của hình nón khi cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $S = 2000\left(cm^2\right)$. **B.** $S = 800\left(cm^2\right)$. **C.** $S = 1200\left(cm^2\right)$. **D.** $S = 1600\left(cm^2\right)$.

Câu 35: Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 6. Mặt phẳng (P) qua đỉnh hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 6. Khoảng cách từ tâm đáy tới mặt phẳng (P) bằng.

A. $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\sqrt{21}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.

Câu 36: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh $AB = a$ và mặt bên tạo với mặt đáy một góc $60°$. Một mặt cầu tâm O ngoại tiếp hình chóp nói trên. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB).

A. $\dfrac{7a}{24}$. **B.** $\dfrac{7a}{6}$. **C.** $\dfrac{a}{4}$. **D.** $\dfrac{13a}{24}$.

Câu 37: Cho hình nón đỉnh S có chiều cao bằng $\sqrt{11}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều SAB có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB).

A. $\dfrac{\sqrt{33}}{9}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{33}}{9}$. **C.** $\sqrt{33}$. **D.** $\dfrac{4}{9}$.

Câu 38: Cho hình nón có chiều cao $SO = 12$, bán kính đáy $R = 24$. Cắt khối nón bởi một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh S và hợp với SO một góc bằng 60^o. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (α).

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** 12.

Câu 39: Cho một hình nón có chiều cao $h = a$ và chu vi đường tròn đáy bằng $4\pi a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $d = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 40: Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O. Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác cân có diện tích a^2. Gọi A, B là hai điểm bất kì trên đường tròn (O) sao cho thể tích khối chóp $S.OAB$ lớn nhất và bằng $\dfrac{a^3}{12}$. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng bao nhiêu?

A. $S_{xq} = \dfrac{a^2\sqrt{17}}{4}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{8}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{2}$. **D.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$.

Câu 41: Cho khối nón đỉnh S, bán kính đáy $r = 10$ và và đường sinh $l = \sqrt{117}$. Gọi A, B và M là ba điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 12$. Giá trị lớn nhất của khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng

A. $\sqrt{117}$. **B.** $\dfrac{340}{13}$. **C.** 9. **D.** $\dfrac{1700}{117}$.

Câu 42: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB là a và $SAO = 30^o$, $SAB = 60^o$. Bán kính đáy bằng

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 43: Cho khối nón (N) có bán kính đáy $r = 4a$ và chiều cao lớn hơn bán kính đáy. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh nón và tạo với đáy nón một góc $60°$ cắt khối nón (N) theo thiết diện là một tam giác có diện tích bằng $8\sqrt{3}a^2$. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $64\pi a^3$. **B.** $96\pi a^3$ **C.** $32\pi a^3$. **D.** $192\pi a^3$

Câu 44: Cắt hình nón đỉnh S bởi một mặt phẳng không đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$; AB là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SAB) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc $60°$. Tính theo a khoảng cách từ tâm O của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{8}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $d = \dfrac{a}{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

Câu 45: Cho khối nón đỉnh S, có đường kính đáy bằng 8. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ tâm O của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $\sqrt{6}$. Diện tích hình chiếu của tam giác SAB lên mặt phẳng đáy bằng 8. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy của hình nón.

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $15°$.

Câu 46: Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 6 và thể tích bằng 50π. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 8$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

Câu 47: Cho hình nón có chiều cao bằng $2a$, biết rằng khi cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và tạo với mặt đáy của hình nón một góc 30^0, thiết diện thu được là một tam giác vuông. Diện tích toàn phần của hình nón đã cho bằng

A. $4\left(4\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$. **B.** $4\left(2\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{14}\pi a^2$. **D.** $8\left(2\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$.

Câu 48: Cho hình nón có đỉnh S, chiều cao bằng $3a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho diện tích tam giác SAB bằng $9a^2$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng a. Tính thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho.

A. $\dfrac{219\pi a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{73\pi a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{73\pi a^3}{24}$. **D.** $\dfrac{73\pi a^3}{8}$.

Câu 49: Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng 4 và diện tích xung quanh hình nón bằng $16\sqrt{2}\pi$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A, B và $AB = 4\sqrt{3}$. Khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến (P) bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 50: Cho hình nón có chiều cao $h = 6$ và thể tích khối nón bằng 50π. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$. Tính diện tích của thiết diện đó?

A. $24\sqrt{5}$. **B.** $12\sqrt{5}$. **C.** 9. **D.** $6\sqrt{5}$.

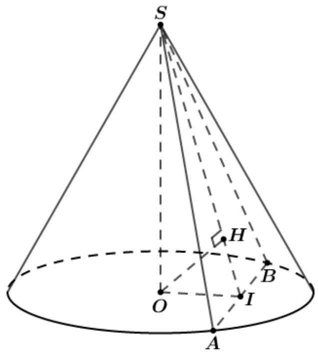
ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$, bán kính đáy $r = 25$. Cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và khoảng cách từ tâm của đáy hình nón đến mặt phẳng này bằng 12. Diện tích thiết diện thu được bằng

A. 500. **B.** 400. **C.** 300. **D.** 406.

Lời giải

Chọn A



Giả sử thiết diện thỏa đề bài là tam giác SAB, chiều cao $SO = 20$, bán kính đáy $OA = 25$.

Gọi I là trung điểm của AB, trong mặt phẳng (SOI) kẻ $OH \perp SI$ tại H.

Ta có $AB \perp OI$ và $AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow OH \perp AB$. Lại có $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAB)$.

Do đó khoảng cách từ tâm của đáy đến thiết diện là $OH = 12$.

Xét tam giác vuông SOI vuông tại O có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{1}{225} \Rightarrow OI = 15$$

và $SI = \sqrt{OI^2 + SO^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$.

Xét tam giác vuông OIA vuông tại I có $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \Rightarrow AB = 40$

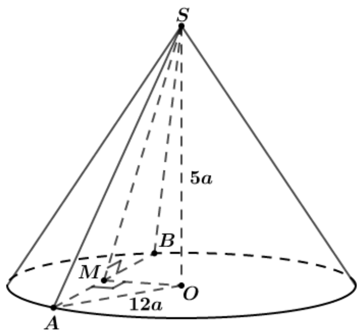
Vậy diện tích thiết diện $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.SI = \frac{1}{2}40.25 = 500$.

Câu 2: Cho hình nón có đường cao $h = 5a$ và bán kính đáy $r = 12a$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt đường tròn đáy theo dây cung có độ dài $10a$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình nón đã cho.

A. $69a^2$. **B.** $120a^2$. **C.** $60a^2$. **D.** $\frac{119a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi S là đỉnh của hình nón và O là tâm của đường tròn đáy.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác SAB cân tại S.

Theo giả thiết ta có: $SO = 5a$, $OA = OB = 12a$ và $AB = 10a$.

Gọi M là trung điểm của AB suy ra $MA = MB = \dfrac{AB}{2} = 5a$ và $OM \perp AB$.

Xét tam giác OMA vuông tại M có: $OM^2 = OA^2 - MA^2 = 144a^2 - 25a^2 = 119a^2$.

Xét tam giác SOM vuông tại O có: $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{25a^2 + 119a^2} = 12a$.

Tam giác SAB cân tại S, có SM là đường trung tuyến nên đồng thời là đường cao.

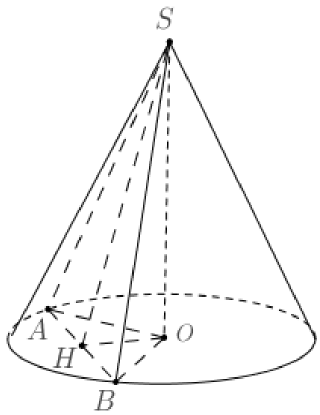
Vậy diện tích của thiết diện: $S_{SAB} = \dfrac{1}{2}SM.AB = \dfrac{1}{2}.12a.10a = 60a^2$.

Câu 3: Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, bán kính $R = 5$. Mặt phẳng (α) qua S, cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) tạo với đáy hình nón góc 45^o; tam giác OAB nhọn. Thể tích V của khối nón tạo nên từ hình nón đã cho bằng

A. $V = 100\pi$. **B.** $V = 25\pi$ **C.** $V = \dfrac{100\pi}{3}$. **D.** $V = 75\pi$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $AB = 2x$. Do tam giác OAB nhọn nên $AB^2 < OA^2 + OB^2 \Rightarrow 4x^2 < 50 \Rightarrow x \in \left(0;\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$.

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó: $AB \perp SO, AB \perp OH \Rightarrow AB \perp (SOH)$

$\Rightarrow \left((\alpha),(OAB)\right) = SHO = 45^o$ $\Rightarrow SO = OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{25 - x^2}$

$SH = OH\sqrt{2} = \sqrt{2\left(25 - x^2\right)}$.

Do đó: $S_{SAB} = \dfrac{1}{2}AB.SH = x\sqrt{2\left(25 - x^2\right)} = 12\sqrt{2} \Rightarrow x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3\ (tm) \\ x = 4\ (ktm) \end{array}\right.$

$\Rightarrow SO = \sqrt{25 - x^2} = 4$. Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2.SO = \dfrac{100\pi}{3}$.

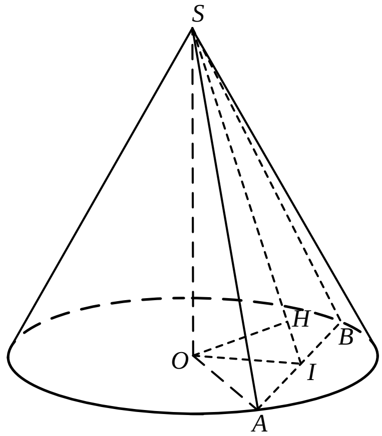
Câu 4: Cho hình nón có chiều cao $h = 20$, bán kính đáy $r = 25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S = 500$. **B.** $S = 400$. **C.** $S = 300$. **D.** $S = 406$

Lời giải

Chọn A

Giả sử hình nón đỉnh S, tâm đáy O và có thiết diện qua đỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là ΔSAB (hình vẽ).



Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI \Rightarrow OH \perp SI$.

Ta chứng minh được $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = 12$.

Xét tam giác vuông SOI có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{1}{225}$.

$\Rightarrow OI^2 = 225 \Rightarrow OI = 15$.

Xét tam giác vuông SOI có $SI = \sqrt{OS^2 + OI^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

Xét tam giác vuông OIA có $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \Rightarrow AB = 40$.

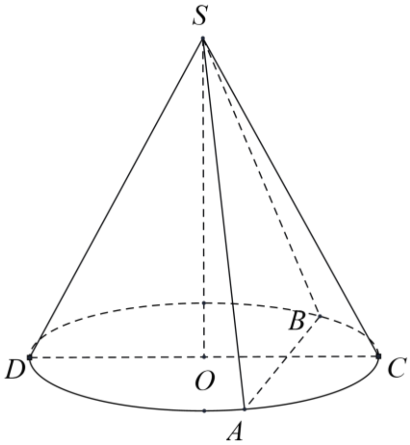
Ta có $S = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.SI = \frac{1}{2}.40.25 = 500$.

Câu 5: Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O. Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác có một góc bằng 120^0, thiết diện qua đỉnh S cắt mặt phẳng đáy theo dây cung $AB = 4a$ và là một tam giác vuông. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $\pi\sqrt{3}a^2$. **B.** $\pi 8\sqrt{3}a^2$. **C.** $\pi 2\sqrt{3}a^2$. **D.** $\pi 4\sqrt{3}a^2$.

Lời giải

Chọn D



Ta có tam giác SAB vuông cân tại S, $AB = 4a$ nên $SB = 2a\sqrt{2}$.

Mặt khác tam giác SDC cân tại S và có góc $CSD = 120°$ nên $CSO = 60°$.

Xét tam giác vuông SOC có $\sin CSO = \frac{OC}{SC} \Leftrightarrow OC = SC.\sin CSO \Rightarrow OC = a\sqrt{6}$.

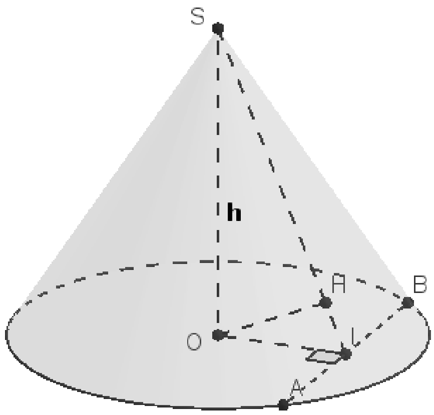
Vậy diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl = \pi a\sqrt{6}.2a\sqrt{2} = 4\pi a^2\sqrt{3}$.

Câu 6: Cho khối nón (N) có chiều cao $h = 20\,\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\,\text{cm}$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đỉnh của (N) và cách tâm của mặt đáy $12\,\text{cm}$. Khi đó (α) cắt (N) theo một thiết diện có diện tích là

A. $S = 300\,\text{cm}^2$. **B.** $S = 500\ \text{cm}^2$. **C.** $S = 406\ \text{cm}^2$. **D.** $S = 400\ \text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi S, O lần lượt là đỉnh và tâm đường tròn đáy của khối nón (N).

Ta có mặt phẳng (α) qua đỉnh của (N) cắt đường tròn đáy tâm O tại 2 điểm A, B.

Vậy mặt phẳng (α) cắt khối nón theo một thiết diện là ΔSAB.

Kẻ $OI \perp AB$, $OH \perp SI$. Ta có $\begin{cases} OI \perp AB \\ SO \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp OH \\ SI \perp OH \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d\left[O,(SAB)\right] = OH = 12\,\text{cm}$.

Áp dụng hệ thức lượng cho ΔSOI vuông tại O có đường cao OH

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OI = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2}}} = 15\,\text{cm}.$$

Xét ΔAOI vuông tại I có: $IA^2 + OI^2 = AO^2 \Rightarrow IA = \sqrt{AO^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20\ cm$.

Xét ΔSOI vuông tại O có: $SO^2 + IO^2 = SI^2 \Rightarrow SI = \sqrt{SO^2 + IO^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25\ cm$.

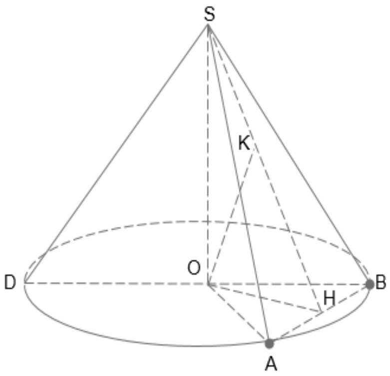
Vậy $S_{SAB} = \frac{1}{2}SI.AB = SI.IA = 25.20 = 500\ cm^2$.

Câu 7: Cho hình nón đỉnh S, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SAO = 30^0, SAB = 60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của AB, K là hình chiếu của O lên SH.
Vì tam giác OAB cân tại $O \Rightarrow OH \perp AB$.

Mà $AB \perp SO$. vậy $AB \perp (SOI) \Rightarrow OK \perp AB$.

Mặt khác, theo cách vẽ $OK \perp SH$. nên $OK \perp (SAB)$.

Vậy $d(O;(SAB)) = OK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Theo giả thiết $SAO = 30^0 \Rightarrow SO = SA.\sin 30^0 = \dfrac{1}{2}SA$.

Mà $SAB = 60^0 \Rightarrow \Delta SAB$ đều $\Rightarrow SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}SA$.

Xét tam giác vuông SOH vuông tại O: $OH^2 = SH^2 - SO^2 = \dfrac{3}{4}SA^2 - \dfrac{1}{4}SA^2 = \dfrac{1}{2}SA^2$.

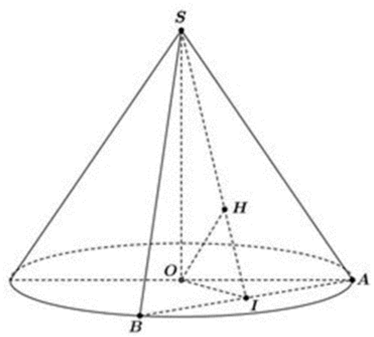
$\Rightarrow OH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}SA$ mà $OK.SH = SO.OH \Leftrightarrow \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}SA = \dfrac{1}{2}SA.\dfrac{\sqrt{2}}{2}SA \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.

Câu 8: Cho khối nón xoay đỉnh S có thể tích bằng 96π. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có cạnh bằng 10. Khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (α) có thể bằng kết quả nào dưới đây?

A. 8. **B.** $\dfrac{8\sqrt{33}}{15}$. **C.** $\dfrac{6\sqrt{13}}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{24}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi thiết diện mặt phẳng (α) cắt hình nón là tam giác SAB. Do đó, ΔSAB đều có cạnh $AB = 10$

Gọi O, R, h lần lượt là tâm, bán kính của đường tròn đáy và chiều cao của khối nón, I , H lần lượt là hình chiếu của O lên AB , SI . Khi đó khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng OH .

Ta có: $V = \frac{1}{3}\pi R^2.h = 96\pi \Rightarrow R^2 = \frac{3V}{\pi.h} = \frac{3.96\pi}{\pi.h} = \frac{288}{h}$

Xét tam giác vuông SOA có: $SO^2 + OA^2 = SA^2 \Leftrightarrow h^2 + R^2 = 100 \Leftrightarrow h^2 + \frac{288}{h} = 100$

$$\Leftrightarrow h^3 - 100h + 288 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 8 \\ h = -2.(2+\sqrt{13}) < 0 (L) \\ h = 2.(\sqrt{13}-2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 8 \\ h = 2.(\sqrt{13}-2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (h;R) = (8;6) \\ (h;R) = \left(2.(\sqrt{13}-2); 4\sqrt{2+\sqrt{13}}\right) \end{array}\right.$$

TH1: $(h;R) = (8;6)$

Xét tam giác vuông OIA có: $IO^2 = OA^2 - IA^2 = 6^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 6^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 11$

Trong tam giác vuông SIO có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{11} = \frac{75}{704} \Rightarrow OH = \frac{8\sqrt{33}}{15}$.

TH2: $(h;R) = \left(2.(\sqrt{13}-2); 4\sqrt{2+\sqrt{13}}\right)$

Xét tam giác vuông OIA có:

$$IO^2 = OA^2 - IA^2 = 16.\left(2+\sqrt{13}\right) - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 16.\left(2+\sqrt{13}\right) - \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 7 + 16\sqrt{3}$$

Trong tam giác vuông SIO có:

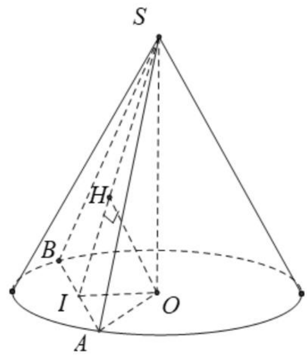
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{\left(2.(\sqrt{13}-2)\right)^2} + \frac{1}{7+16\sqrt{3}} \Rightarrow OH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{68+8\sqrt{13}} + \frac{1}{7+16\sqrt{3}}}}.$$

Câu 9: Cho khối nón có đỉnh S , chiều cao bằng 12 và thể tích bằng $\frac{1200\pi}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 12$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{\sqrt{13}}{24}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{24\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\frac{1}{3}\pi.OA^2.12=\frac{1200\pi}{3}\Rightarrow OA^2=100\Rightarrow OA=10$.

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow OI\perp AB$. $OI=\sqrt{OA^2-IA^2}=8$.

Kẻ $OH\perp SI$ tại $H\Rightarrow OH\perp(SAB)\Rightarrow d(O;(SAB))=OH=\sqrt{\frac{OI^2SO^2}{OI^2+SO^2}}=\frac{24\sqrt{13}}{13}$.

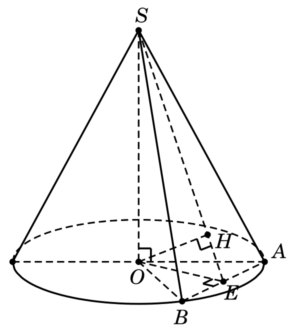
Câu 10: Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, bán kính R. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng 60^0, khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$. Đường cao h của hình nón bằng

A. $h=\frac{R\sqrt{6}}{4}$. **B.** $h=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=a\sqrt{3}$. **D.** $h=a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có tam giác OAB đều cạnh R.



Gọi E là trung điểm AB, suy ra $OE\perp AB$ và $OE=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của O trên SE, suy ra $OH\perp SE$.

Ta có $\begin{cases}AB\perp OE\\AB\perp SO\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SOE)\Rightarrow AB\perp OH.$

Từ đó suy ra $OH\perp(SAB)$ nên $d[O,(SAB)]=OH=\frac{R}{2}.$

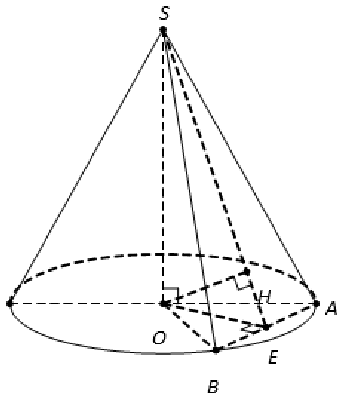
Trong tam giác vuông SOE, ta có $\frac{1}{SO^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OE^2}=\frac{8}{3R^2}\Rightarrow SO=\frac{R\sqrt{6}}{4}$.

Câu 11: Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Đường cao h của hình nón bằng

A. $h=\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=a\sqrt{3}$. **D.** $h=a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết ta có tam giác SAB vuông cân tại S.

Gọi E là trung điểm AB, suy ra $\begin{cases} SE \perp AB \\ OE \perp AB \end{cases}$ và $SE = \dfrac{1}{2}AB$.

Ta có $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}AB.SE = 4a^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AB.\dfrac{1}{2}AB = 4a^2 \Rightarrow AB = 4a \Rightarrow SE = 2a$.

Gọi H là hình chiếu của O trên SE, suy ra $OH \perp SE$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow AB \perp OH.$

Từ đó suy ra $OH \perp (SAB)$ nên $30^0 = \left(SO,(SAB)\right) = \left(SO, SH\right) = OSH = OSE.$

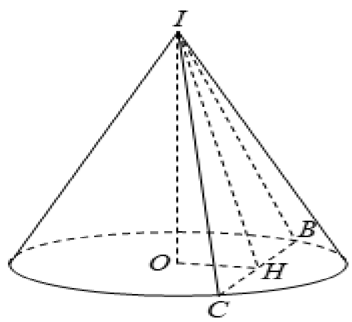
Trong tam giác vuông SOE, ta có $SO = SE.\cos OSE = a\sqrt{3}.$

Câu 12: Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}a$; BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc $60°$. Tính theo a diện tích S của tam giác IBC.

A. $S = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a^2$. **B.** $S = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^2$. **C.** $S = \dfrac{a^2}{3}$. **D.** $S = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}a^2$.

Lời giải

Chọn D



Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}a$ nên bán kính của hình nón là $r = OB = OC = a\sqrt{2}$, đường sinh $l = IB = IC = 2a$ và đường cao $h = IO = \sqrt{IB^2 - OB^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$.

Gọi H là trung điểm BC, khi đó góc hợp bởi mặt phẳng (IBC) và mặt phẳng chứa đường tròn đáy là $IHO = 60°$. Suy ra $IH = \dfrac{IO}{\sin 60°} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$ và $BC = 2CH = 2\sqrt{IC^2 - IH^2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$.

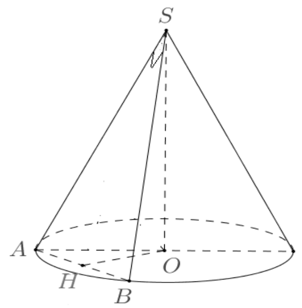
Diện tích tam giác IBC là: $S_{IBC}=\dfrac{1}{2}IH.BC=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a.\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}a^2$.

Câu 13: Cho hình nón đỉnh S, đường tròn đáy tâm O và góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng đi qua S cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3, diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng $18\pi\sqrt{3}$. Tính diện tích tam giác SAB.

A. 21. **B.** 27. **C.** 12. **D.** 18.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AB, ΔSAB cân tại $S\left(SA=SB=l\right)$ nên $OH\perp AB$.

Mà SO vuông góc với đáy $\Rightarrow SO\perp OH$

$\Rightarrow OH$ là đoạn vuông góc chung của AB và SO nên $d\left(SO,AB\right)=OH=3$.

Gọi bán kính của đường tròn đáy hình nón là $r\Rightarrow r=OB$.

Vì góc đỉnh hình nón bằng $120°\Rightarrow OSB=60°\Rightarrow \sin OSB=\dfrac{OB}{SB}$

$\Rightarrow SB=\dfrac{r}{\sin 60°}=\dfrac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq}=\pi rl=\pi r.\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\pi r^2\sqrt{3}}{3}$.

Theo giả thiết $S_{xq}=\dfrac{2\pi r^2\sqrt{3}}{3}=18\pi\sqrt{3}\Rightarrow r^2=27\Rightarrow r=3\sqrt{3}$.

Xét ΔOHB vuông tại $H: HB^2=OB^2-OH^2=r^2-3^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2-3^2=18$.

$\Rightarrow HB=3\sqrt{2}\Rightarrow AB=6\sqrt{2}$. Ta có: $SB=\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}=6$.

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại $S\left(SA=SB, SA^2+SB^2=72=AB^2\right)$

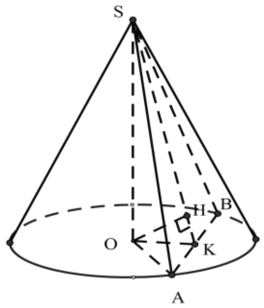
Vậy diện tích tam giác SAB bằng $S_{\Delta SAB}=\dfrac{1}{2}SA.SB=\dfrac{1}{2}.6.6=18$.

Câu 14: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SAO=30^0, SAB=60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK \perp AB$ vì tam giác OAB cân tại O

Mà $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOK)$ $\Rightarrow (SOK) \perp (SAB)$ mà $\Rightarrow (SOK) \cap (SAB) = SK$ nên từ O dựng $OH \perp SK$ thì $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O,(SAB))$

Xét tam giác SAO ta có: $\sin SAO = \dfrac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \dfrac{SA}{2}$

Xét tam giác SAB ta có: $\sin SAB = \dfrac{SK}{SA} \Rightarrow SK = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SOK ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{SK^2 - SO^2} + \dfrac{1}{SO^2}$

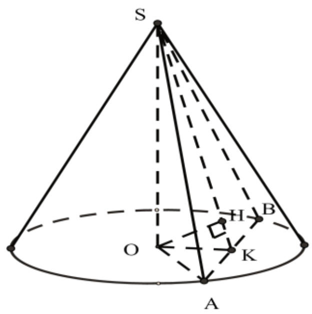
$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\frac{SA^2}{4}} + \frac{1}{\frac{3SA^2}{4} - \frac{SA^2}{4}} = \frac{4}{SA^2} + \frac{2}{SA^2} \Rightarrow \frac{6}{SA^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow SA = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$$

Câu 15: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SAO = 30°, SAB = 60°$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A



Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK \perp AB$ vì tam giác OAB cân tại O

Mà $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOK)$ $\Rightarrow (SOK) \perp (SAB)$ $\Rightarrow (SOK) \cap (SAB) = SK$ nên từ O dựng $OH \perp SK$ thì $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O,(SAB))$

Xét tam giác SAO ta có: $\sin SAO = \dfrac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \dfrac{SA}{2}$

Xét tam giác SAB ta có: $\sin SAB = \dfrac{SK}{SA} \Rightarrow SK = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SOK ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{SK^2 - SO^2} + \dfrac{1}{SO^2}$

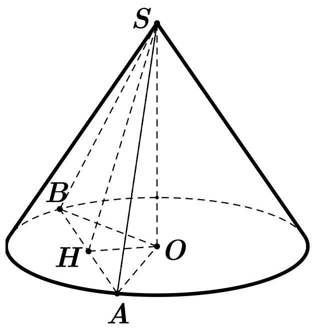
$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{\dfrac{SA^2}{4}} + \dfrac{1}{\dfrac{3SA^2}{4} - \dfrac{SA^2}{4}} = \dfrac{4}{SA^2} + \dfrac{2}{SA^2} \Rightarrow \dfrac{6}{SA^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow SA = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$

Câu 16: Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón, cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều sao cho góc hợp bởi mặt phẳng thiết diện và mặt đáy của hình nón có số đo bằng $60°$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. 104π. **B.** $\dfrac{4\sqrt{39}\pi}{3}$. **C.** $104\sqrt{3}\pi$. **D.** $\dfrac{104\sqrt{3}\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều SAB.

Gọi H là trung điểm của AB ta có $SH \perp AB$ và $OH \perp AB$. Do đó góc hợp bởi bởi mặt phẳng thiết diện và mặt đáy của hình nón là góc $SHO = 60°$

Theo đề bài ta có: $h = SO = 2\sqrt{3}$.

Xét tam giác SHO vuông tại O có $\cos SHO = \dfrac{SO}{SH} \Rightarrow SH = \dfrac{SO}{\cos 60°} = 4\sqrt{3}$.

mà $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$ (do tam giác SAB là tam giác đều) $\Rightarrow AB = \dfrac{2SH}{\sqrt{3}} = 8$

$\Rightarrow SA = SB = AB = 8$.

ΔSOA vuông tại O ta có: $SA^2 = OA^2 + SO^2 \Rightarrow OA^2 = SA^2 - SO^2 = 52$.

$\Rightarrow r^2 = OA^2 = 52$.

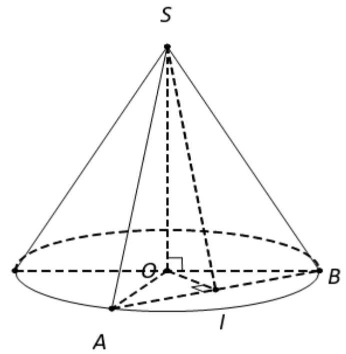
$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.52.2\sqrt{3} = \dfrac{104\sqrt{3}\pi}{3}$ (đơn vị thể tích).

Câu 17: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $SAO = 30^0$, $SAB = 60^0$. Độ dài đường sinh ℓ của hình nón bằng

A. $\ell = a$. **B.** $\ell = a\sqrt{2}$. **C.** $\ell = a\sqrt{3}$. **D.** $\ell = 2a$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm AB, suy ra $OI \perp AB,\ SI \perp AB$ và $OI = a$.

Trong tam giác vuông SOA, ta có $OA = SA.\cos SAO = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SIA, ta có $IA = SA.\cos SAB = \dfrac{SA}{2}$.

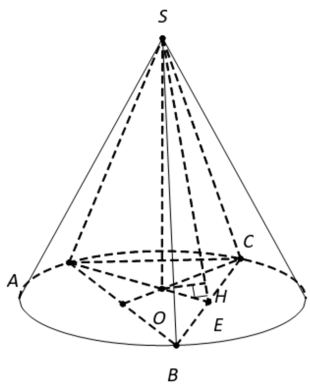
Trong tam giác vuông OIA, ta có $OA^2 = OI^2 + IA^2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}SA^2 = a^2 + \dfrac{1}{4}SA^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}.$

Câu 18: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp của đáy ABC đến một mặt bên là $\dfrac{a}{2}$. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^3}{9}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{27}$. **D.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm của BC, dựng $OH \perp SE$ tại H.

Chứng minh được $OH \perp (SBC)$ nên suy ra $OH = d\left[O,(SBC)\right] = \dfrac{a}{2}$.

Trong tam giác đều ABC, ta có $OE = \dfrac{1}{3}AE = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OA = \dfrac{2}{3}AE = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông SOE, ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OE^2} + \dfrac{1}{SO^2} \Rightarrow \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow SO = a$.

Vậy thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi OA^2.SO = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a = \dfrac{4\pi a^3}{9}$ (đvtt).

Câu 19: Cho khối nón đỉnh S, bán kính đáy bằng $3\sqrt{3}$ và có góc ở đỉnh bằng $120°$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho tam giác SAB là tam giác vuông, khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. 3. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

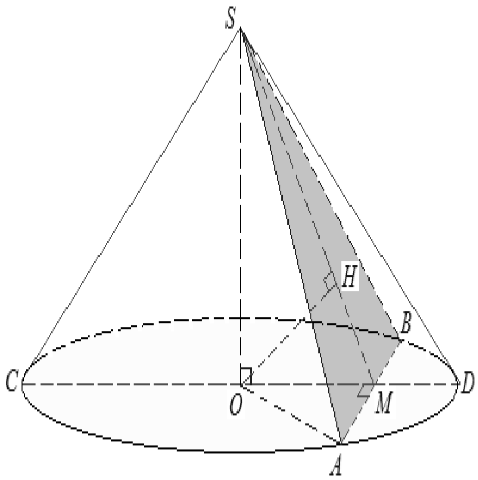
Lời giải

Chọn D

Gọi O là tâm của đường tròn đáy và CD là đường kính vuông góc với dây cung AB.

Ta có $OA = OB = OC = OD = R = 3\sqrt{3}$.

Do khối nón có góc ở đỉnh bằng $120°$ nên $OSD = 60°$.



Tam giác vuông SOD có: $\begin{cases} \tan OSD = \dfrac{OD}{SO} \Leftrightarrow \tan 60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{SO} \Leftrightarrow SO = \dfrac{3\sqrt{3}}{\tan 60°} = 3 \\ \sin OSD = \dfrac{OD}{SD} \Leftrightarrow \sin 60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{SD} \Leftrightarrow SD = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 60°} = 6 \end{cases}$.

$\Rightarrow$Khối nón có chiều cao $h = 3$ và đường sinh $l = 6$.

Do tam giác SAB vuông cân tại S, có $SA = SB = l = 6$ nên $AB = SA\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Gọi M là giao điểm của AB và CD ta có M là trung điểm của AB (tính chất đường kính vuông góc với dây cung thì đi qua trung điểm của dây cung đó).

Suy ra $MA = MB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

Tam giác vuông MOA có $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = 3$.

Kẻ OH vuông góc với SM tại H ta có:

$$\begin{cases} OH \perp SM \\ OH \perp AB\left(do\begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOM) \Rightarrow AB \perp OH\right) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB).$$

Suy ra $d\left(O,(SAB)\right) = OH$. Tam giác SOM vuông tại O có OH là đường cao ứng với cạnh huyền SM nên ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OM^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^2} \Leftrightarrow OH = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Câu 20: Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và tạo với hình nón một thiết diện là tam giác có diện tích bằng $3\sqrt{2}$. Biết mặt phẳng đó tạo với trục của hình nón một góc 30°. Thể tích của hình nón đã cho là

A. $V=\dfrac{8\pi}{3}$. **B.** $V=9\pi$. **C.** $V=\dfrac{16\pi\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{9\pi\sqrt{2}}{4}$.

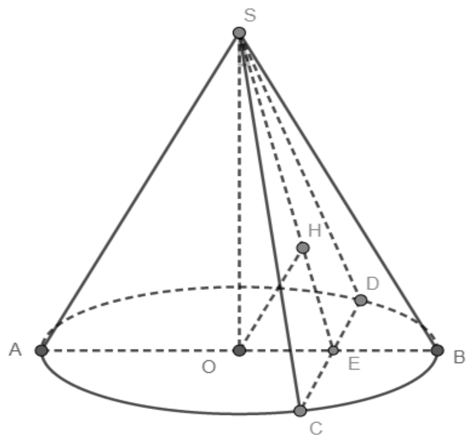
Lời giải

Chọn D

Gọi thiết diện qua trục của hình nón là ΔSAB, mặt phẳng qua đỉnh hình nón là (SCD)

$SO\cap(SCD)=\{S\}$.Gọi E là trung điểm của CD.

ΔOCD cân tại O nên $OE\perp CD$. Vẽ $OH\perp SE$ (1)



Ta có: $\left.\begin{matrix} CD\perp OE \\ CD\perp SO \end{matrix}\right\}\Rightarrow CD\perp(SOE)$ mà $OH\subset(SOE)$ nên $CD\perp OH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OH\perp(SCD)\Rightarrow(SO,(SCD))=OSH=OSE=30^\circ$

Gọi $SO=x$.

ΔSOE vuông tại $O: OE=SO\cdot\tan30^\circ=x\tan30^\circ=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$

$\cos30^\circ=\dfrac{SO}{SE}\Rightarrow SE=\dfrac{x}{\cos30^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}x}{3}$

ΔSAB vuông tại S nên $SO=OB=OD=x$

$ED=\sqrt{OD^2-OE^2}=\sqrt{x^2-\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{x\sqrt{6}}{3}$

$CD=2ED=\dfrac{2x\sqrt{6}}{3}$

Ta có: $S_{SCD}=\dfrac{1}{2}SE\cdot CD\Leftrightarrow 3\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}x}{3}\cdot\dfrac{2x\sqrt{6}}{3}\Leftrightarrow x^2=\dfrac{9}{2}\Rightarrow x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

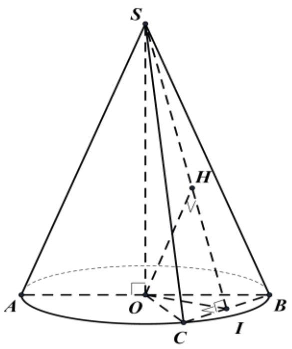
$V_n=\dfrac{1}{3}\pi\cdot OB^2\cdot SO=\dfrac{1}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{9\sqrt{2}\pi}{4}$.

Câu 21: Cho hình nón (N) có chiều cao bằng $6a$. Cắt (N) bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh và cách tâm của đáy một khoảng bằng $3a$ ta được thiết diện có diện tích bằng $12\sqrt{11}a^2$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $36\sqrt{5}\pi a^3$. **B.** $270\pi a^3$. **C.** $90\pi a^3$. **D.** $12\sqrt{5}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SBC.

Gọi I là trung điểm của BC. Ta có $\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI)$.

Kẻ $OH \perp SI$ $(H \in SI)$, mà $OH \perp BC$ (vì $BC \perp (SOI)$ và $OH \subset (SOI)$)

suy ra $OH \perp (SBC)$.

Theo giả thiết có: $SO = 6a$, $S_{SBC} = 12\sqrt{11}a^2$ và $d(O;(SBC)) = OH = 3a$.

Trong ΔSOI vuông tại O có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OI^2}$ $\Rightarrow OI = 2\sqrt{3}a$

$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = 4\sqrt{3}a$.

Ta có: $S_{SBC} = \dfrac{1}{2}SI.BC$ $\Rightarrow BC = \dfrac{2S_{SBC}}{SI} = 2\sqrt{33}a$ $\Rightarrow IC = \dfrac{BC}{2} = \sqrt{33}a$.

Trong ΔOIC vuông tại I có: $OC = \sqrt{OI^2 + IC^2} = 3\sqrt{5}a = R$.

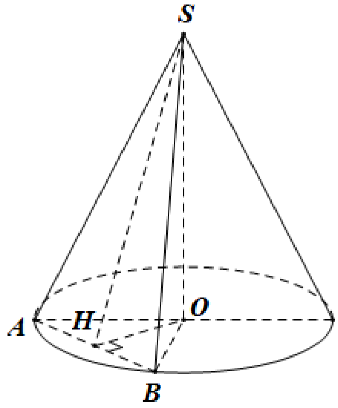
Vậy thể tích của khối nón đã cho là $V = \dfrac{1}{3}\pi.SO.OC^2 = 90\pi a^3$.

Câu 22: Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R = 2a$. Trên đường tròn đáy lấy 2 điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông. Biết diện tích tam giác SAB bằng $4a^2\sqrt{2}$, thể tích khối nón đã cho bằng

A. $V = \dfrac{4\pi a^3\sqrt{14}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{14}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{2\pi a^3\sqrt{14}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{14}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $OH \perp AB$, $(H \in AB) \Rightarrow H$ là trung điểm AB và $SH \perp AB$.

Do tam giác OAB vuông $\Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2a\sqrt{2} \\ OH = \dfrac{AB}{2} = a\sqrt{2} \end{cases}$

Ta có $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2} SH.AB \Rightarrow SH = \dfrac{2S_{\Delta SAB}}{AB} = \dfrac{2.4a^2\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}} = 4a.$

Xét ΔSOH vuông tại O có: $SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{16a^2 - 2a^2} = a\sqrt{14}$.

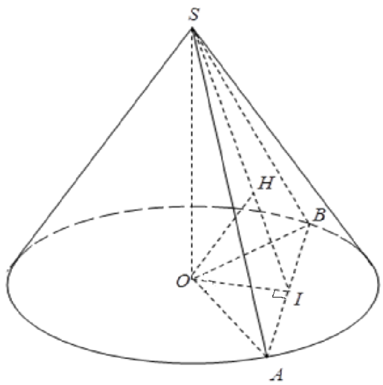
Vậy thể tích của khối nón đã cho là $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2.SO = \dfrac{1}{3}\pi(2a)^2.a\sqrt{14} = \dfrac{4\pi a^3\sqrt{14}}{3}$.

Câu 23: Cho khối nón (N) có đỉnh S, chiều cao bằng 10, đáy là đường tròn tâm O. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho hình chóp $S.OAB$ có thể tích bằng 40. Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{20\sqrt{29}}{29}$. Tính thể tích khối nón (N).

A. $\dfrac{250\pi}{3}$. **B.** 500π. **C.** 250π. **D.** $\dfrac{500\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Từ đề bài ta có: $SO = 10$. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$

Mà $SO \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOI)$

Trong mặt phẳng (SOI) dựng $OH \perp SI$. Do $AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$

$\Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow$ khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) là $OH = \dfrac{20\sqrt{29}}{29}$

Ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}\Leftrightarrow\frac{29}{400}=\frac{1}{100}+\frac{1}{OI^2}\Rightarrow OI=4$

Thể tích của khối chóp $S.OAB$: $V_{S.OAB}=\frac{1}{3}SO.S_{OAB}=\frac{1}{6}.SO.OI.AB=\frac{1}{6}.10.4.AB=\frac{20}{3}AB$

Mà $V_{S.OAB}=40\Rightarrow AB=6$

Bán kính của đường tròn đáy $R=OA=\sqrt{OI^2+\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{4^2+\frac{6^2}{4}}=5$

Thể tích của khối nón (N): $V=\frac{1}{3}SO.\pi.R^2=\frac{1}{3}.10.\pi.5^2=\frac{250\pi}{3}$.

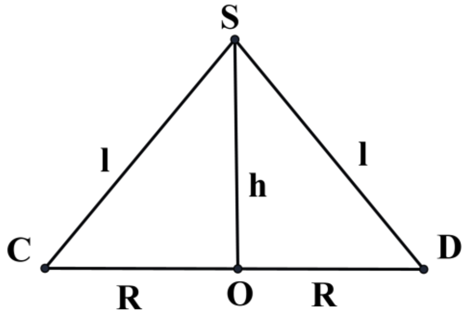
Câu 24: Cho khối nón (N) có đỉnh S, chiều cao bằng 5, đáy là đường tròn tâm O. Thiết diện chứa SO của khối nón (N) là tam giác vuông cân. Gọi A,B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho diện tích của tam giác OAB bằng 12. Biết độ dài đoạn $AB<7$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

A. $\frac{12}{5}$. **B.** $\frac{20\sqrt{41}}{41}$. **C.** $\frac{20\sqrt{29}}{29}$. **D.** $\frac{15\sqrt{34}}{34}$.

Lời giải

Chọn B

Xét thiết diện chứa SO của khối nón (N) là tam giác vuông cân SCD như hình vẽ.



Ta có chiều cao $SO=5$, tam giác SCD vuông cân nên $\Rightarrow SO=\frac{CD}{2}\Rightarrow R=h=5$.

Gọi I là trung điểm của AB, do tam giác OAB cân tại $O\Rightarrow OI\perp AB$

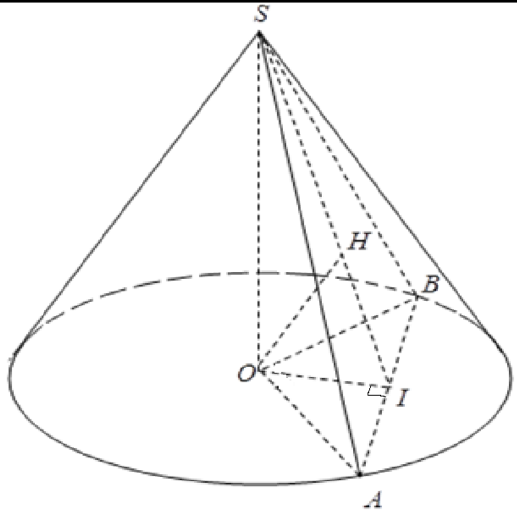
Xét tam giác OAB: Theo đề bài ta có $S_{OAB}=12\Leftrightarrow\frac{1}{2}OI.AB=12\Leftrightarrow OI.AB=24(*)$

Do ΔIOA vuông tại I

$\Rightarrow OI^2+AI^2=OA^2\Leftrightarrow OI^2+\frac{AB^2}{4}=25(**)$

Từ $(*)$ và $(**)\Rightarrow\begin{cases}OI=4\\AB=6\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}OI=3\\AB=8\end{cases}$. Do $AB<7\Rightarrow\begin{cases}OI=4\\AB=6\end{cases}$

Xét hình nón (N)



Ta có: $OI \perp AB$ mà $SO \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOI)$

Trong mặt phẳng (SOI) dựng $OH \perp SI$

Do $AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$

$\Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow$ khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) là OH

Ta có:

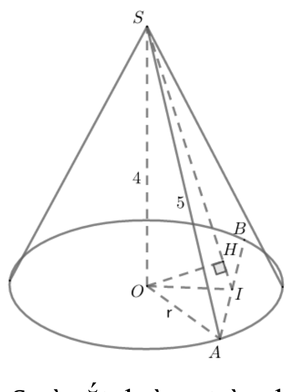
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{25} + \frac{1}{16} = \frac{41}{400} \Rightarrow OH = \frac{20\sqrt{41}}{41} \Rightarrow d(O,(SAB)) = \frac{20\sqrt{41}}{41}.$$

Câu 25: Một hình nón có chiều cao $h = 4$; độ dài đường sinh $l = 5$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của nón và cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng $2\sqrt{5}$. Khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng đó bằng

A. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi mặt phẳng (P) đi qua đỉnh nón S và cắt đường tròn đáy theo dây cung $AB = 2\sqrt{5}$.

Từ hình vẽ, ta có:

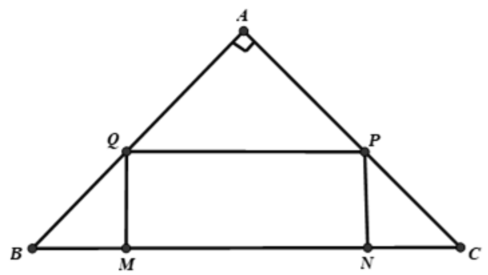
Bán kính đường tròn đáy của hình nón: $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

$IA = \frac{AB}{2} = \sqrt{5}$, $OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$.

Do đó, ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{5}{16}$

$d(O;(P)) = OH = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

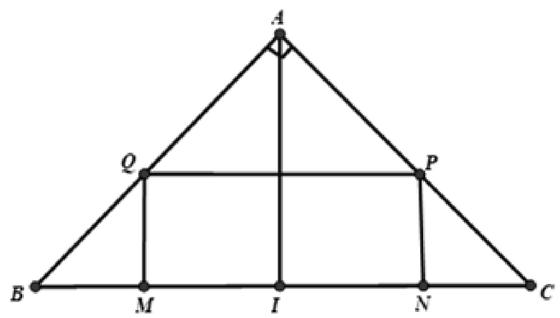
Câu 26: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = 10\sqrt{2}\ (cm)$. Hình chữ nhật $MNPQ$ có P,Q lần lượt thuộc cạnh AB, AC và M, N thuộc cạnh BC. Quay hình chữ nhật $MNPQ$ (và miền trong của nó) quanh trục đối xứng của tam giác ABC được một khối tròn xoay. Tính độ dài đoạn PQ để thể tích khối tròn xoay lớn nhất.



A. $PQ = 5cm$. **B.** $PQ = 10cm$. **C.** $PQ = \dfrac{20}{3}\ cm$. **D.** $PQ = \dfrac{40}{3}\ cm$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi I là trung điểm BC $\Rightarrow I$ là trung điểm MN.

Có $AB = 10\sqrt{2}(cm) \Rightarrow BC = 20(cm) \Rightarrow BI = AI = 10(cm)$.

Đặt $PQ = 2x$ $(0 < x < 10) \Rightarrow BM = BI - IM = 10 - x$.

Do $MQ // IA \Rightarrow \dfrac{MQ}{AI} = \dfrac{BM}{BI} \Rightarrow MQ = \dfrac{AI.BM}{BI} = \dfrac{10(10-x)}{10} = 10 - x$.

Gọi R là bán kính của trụ $\Rightarrow R = MI = x$

$\Rightarrow V_T = \pi R^2 h = \pi x^2 (10 - x) = \pi\left(-x^3 + 10x^2\right)$.

Xét $f(x) = \pi\left(-x^3 + 10x^2\right)$ với $0 < x < 10$.

Khi đó: $f'(x) = \pi\left(-3x^2 + 20x\right) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{20}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{20}{3}$		10
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4000}{27}$	$\searrow$	

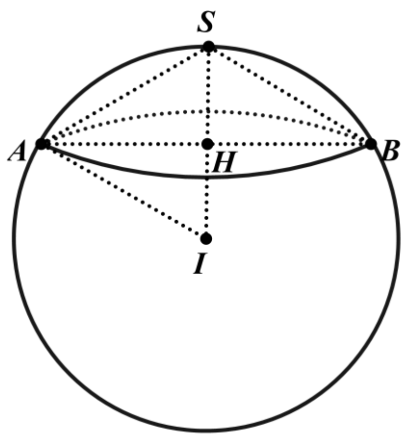
Vậy $\max\limits_{x\in(0;10)} f(x)=\frac{4000}{27}$ khi $x=\frac{20}{3}\Rightarrow PQ=\frac{40}{3}(cm)$.

Câu 27: Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 120° và chiều cao bằng 3. Gọi (S) là mặt cầu đi qua đỉnh và chứa đường tròn đáy của hình nón đã cho. Diện tích của (S) bằng:

A. 108π. **B.** 144π. **C.** 96π. **D.** 48π.

Lời giải

Chọn B



Gọi S là đỉnh hình nón và gọi I là tâm mặt cầu.
Gọi đường kính đường tròn đáy của hình nón là AB, H là trung điểm của AB.

Ta có: $ASH=\frac{1}{2}ASB=60^0$, $AS=\frac{SH}{\cos 60^\circ}=6=2SH$.

Vì $\begin{cases} AI=AS \\ ASI=60^0 \end{cases}$ nên ΔAIS là tam giác đều. Suy ra $AI=R=2SH=6$.

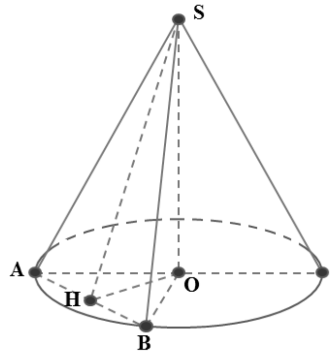
Vậy $S_{(S)}=4\pi R^2=4\pi.6^2=144\pi$.

Câu 28: Cho hình nón (N) có đỉnh là S, tâm đường tròn đáy là O và góc ở đỉnh bằng 120°. Một mặt phẳng qua S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 4. Tính thể tích của hình nón (N)?

A. $V=36\pi$. **B.** $V=48\pi$. **C.** $V=64\pi$. **D.** $V=16\pi$.

Lời giải

Chọn C



Vì góc ở đỉnh bằng $120°$ nên ta có $ASO = 60°$.

Gọi H là trung điểm của AB, khi đó OH là đường vuông góc chung của hai đường thẳng SO và SO. Như vậy $d\left(SO, AB\right) = OH = 4$.

Xét tam giác SOA vuông tại O có $SA = \dfrac{OA}{\sin 60°} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow l = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Xét tam giác OHB vuông tại H có $HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - 16} \Rightarrow AB = 2HB = 2\sqrt{R^2 - 16}$.
Tam giác SAB vuông cân tại S nên ta có

$$AB = l\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{R^2 - 16} = \frac{2R}{\sqrt{3}}.\sqrt{2} \Leftrightarrow 3\left(R^2 - 16\right) = 2R^2 \Leftrightarrow R^2 = 48 \Leftrightarrow R = 4\sqrt{3} \Rightarrow l = 8.$$

Suy ra $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{8^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 4$.

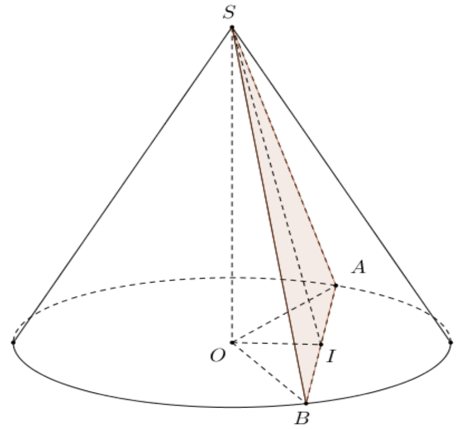
Vậy thể tích của hình nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.\left(4\sqrt{3}\right)^2.4 = 64\pi$.

Câu 29: Cho hình nón có đỉnh S, trục SO, bán kính R, chiều cao h. Dây cung AB thuộc đường tròn đáy và cách O một khoảng $\dfrac{R}{2}$ như hình vẽ. Ký hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của hình nón và diện tích tam giác SAB. Biết $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{10\pi}{3\sqrt{3}}$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $h = \left(\sqrt{2} - 1\right)R.$. **B.** $h = \dfrac{1}{3}R.$. **C.** $h = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}R.$. **D.** $h = \dfrac{\sqrt{11}}{8}R.$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AB. Ta có $OI \perp AB$ tại $I \Rightarrow d\left(O;AB\right) = OI = \dfrac{R}{2}$

Đường sinh của hình nón $\ell = SB = SA = \sqrt{R^2 + h^2}$.

Khi đó $S_1 = \pi R\ell = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$.

Áp dụng định lý Pytago ta được

$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{h^2 + \dfrac{R^2}{4}}$ và $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = R\sqrt{3}.$

Khi đó $S_2 = \dfrac{1}{2}AB.SI = \dfrac{1}{2}R\sqrt{3}.\sqrt{h^2 + \dfrac{R^2}{4}}.$

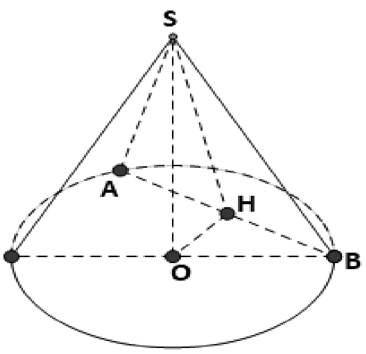
Theo đề $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{10\pi}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}.\pi R\sqrt{R^2 + h^2} = 10\pi.\dfrac{R\sqrt{3}}{2}.\sqrt{h^2 + \dfrac{R^2}{4}} \Rightarrow h = \dfrac{R\sqrt{11}}{8}.$

Câu 30: Hình nón $\left(N\right)$ đỉnh S, có tâm của đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh 120^0. Một mặt phẳng qua đỉnh S cắt hình nón $\left(N\right)$ theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón $\left(N\right)$.

A. $S_{xq} = 27\sqrt{3}\pi$ **B.** $S_{xq} = 18\sqrt{3}\pi$. **C.** $S_{xq} = 9\sqrt{3}\pi$. **D.** $S_{xq} = 36\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH \perp AB$ tại H

Mà $OH \perp SO$ tại $O \Rightarrow OH$ là khoảng cách giữa AB và SO

Theo bài ra ta có tam giác SAB vuông cân tại S và $OH = 3$; và $BSO = 60°$.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón thì đường sinh $l = SB = \dfrac{r}{\sin 60°} \Rightarrow l = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $BH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{SA^2+SB^2}=\frac{1}{2}SB\sqrt{2}=\frac{r\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác OBH vuông tại H, ta có $OB^2=BH^2+OH^2\Leftrightarrow 9+\frac{6r^2}{9}=r^2\Leftrightarrow r=3\sqrt{3}$.

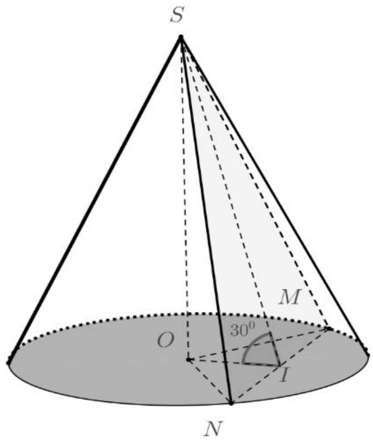
Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N) là $S_{xq}=\pi.r.l=\pi.3\sqrt{3}.\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=18\pi\sqrt{3}$.

Câu 31: Cho khối nón (S). Cắt khối nón bởi mặt phẳng (P) đi qua đỉnh và tạo với đáy góc $30°$ thiết diện thu được là tam giác đều cạnh có độ dài là 1. Thể tích khối nón (S) là

A. $\frac{13\sqrt{3}}{192}$ **B.** $\frac{13\pi\sqrt{3}}{192}$. **C.** $\frac{13\pi\sqrt{3}}{64}$. **D.** $\frac{13\pi\sqrt{3}}{48}$.

Lời giải

Chọn B



Khối nón có đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, thiết diện là tam giác SMN đều cạnh có độ dài bằng 1. Từ O kẻ OI vuông góc với MN tại I ta có $SIO=30°$.

Tam giác SMN đều cạnh có độ dài bằng 1, đường cao $SI=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$OI=SI.\cos 30°=\frac{3}{4}$; $h=SO=SI.\sin 30°=\frac{\sqrt{3}}{4}$; $R=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{4}$.

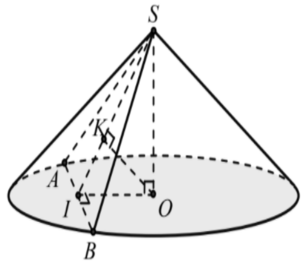
$V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{13\pi\sqrt{3}}{192}$.

Câu 32: Cho hình nón có chiều cao $h=20\,\text{cm}$, bán kính đáy $r=25\,\text{cm}$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $12\,\text{cm}$. Tính diện tích của thiết diện đó.

A. $S=500\,\text{cm}^2$. **B.** $S=300\,\text{cm}^2$. **C.** $S=406\,\text{cm}^2$. **D.** $S=400\,\text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O,S lần lượt là tâm của mặt đáy và đỉnh của hình nón. A,B là giao điểm của thiết diện đi qua đỉnh và đường tròn đáy.

Kẻ $OI \perp AB$; $OK \perp SI$ khi đó ta có:

$SO = h = 20cm; OK = d = 12cm$.

Xét tam giác SOI vuông tại O, ta có:

$\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{SO^2} \Rightarrow OI = 15cm \Rightarrow IB = 20cm \Rightarrow AB = 40cm$.

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông cho tam giác $SOI \Rightarrow SI = 25\ cm$.

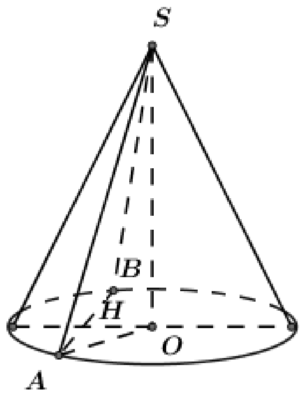
$S_{\Delta SAC} = \dfrac{1}{2}.SI.AB = 500\,\text{cm}^2$.

Câu 33: Cho khối nón có đỉnh S, O là tâm đường tròn đáy, bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh là $6\sqrt{3}\pi$. Gọi A,B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho ΔSAB có diện tích là 3 và AB không là đường kính. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\pi Rl = 6\sqrt{3}\pi \Rightarrow l = 2\sqrt{3}$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}l^2 \sin ASB \Rightarrow \left[\begin{array}{l} ASB = 120^0 \\ ASB = 60^0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} AB = \sqrt{2l^2 - 2l^2\cos ASB} = 6 \\ AB = \sqrt{2l^2 - 2l^2\cos ASB} = 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$

Gọi H là hình chiếu của O lên đoạn AB ta có $OH = \sqrt{R^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = \sqrt{6}$

Ta có $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{3}$

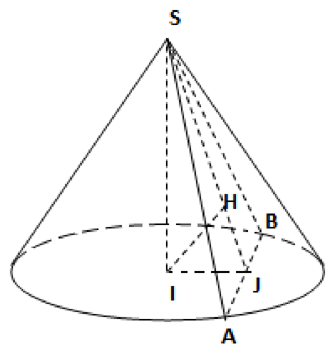
Ta có $\dfrac{1}{\left[d\left(O;(SAB)\right)\right]^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{OH^2} \Rightarrow d\left(O;(SAB)\right) = \sqrt{2}$.

Câu 34: Cho hình nón có đường cao $h = 40cm$, bán kính đáy $r = 50cm$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón, có khoảng cách từ tâm của đáy hình nón đến mặt phẳng (P) bằng $24cm$. Tính diện tích thiết diện của hình nón khi cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $S = 2000\left(cm^2\right)$. **B.** $S = 800\left(cm^2\right)$. **C.** $S = 1200\left(cm^2\right)$. **D.** $S = 1600\left(cm^2\right)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi S là đỉnh của hình nón, I là tâm của đường tròn đáy hình nón.
Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh và cắt mặt mặt đáy tại hai điểm A, B sao cho $d\left(I,(P)\right) = 24cm$.
Gọi J là trung điểm của AB. Kẻ $IH \perp SI$, $H \in SJ$.

Có: $\begin{cases} AB \perp IJ \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SJI) \Rightarrow (SAB) \perp (SIJ)$

Có $\begin{cases} (SAB) \perp (SIJ) \\ (SAB) \cap (SIJ) = SJ \\ IH \perp SJ \end{cases} \Rightarrow d\left(I,(SAB)\right) = IH = 24$.

Xét tam giác SIJ vuông tại I, đường cao IH, ta có

$\dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{SI^2} + \dfrac{1}{IJ^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{IJ^2} = -\dfrac{1}{40^2} + \dfrac{1}{24^2}$

$\Rightarrow JI = 30$. Suy ra $BJ = \sqrt{IB^2 - IJ^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40 \Rightarrow AB = 80$.

Mặt khác: $SJ = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$.

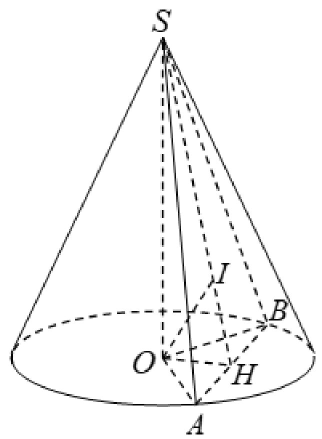
Vậy $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2} SJ.AB = \dfrac{1}{2} 50.80 = 2000\left(cm^2\right)$.

Câu 35: Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 6. Mặt phẳng (P) qua đỉnh hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 6. Khoảng cách từ tâm đáy tới mặt phẳng (P) bằng.

A. $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\sqrt{21}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



(P) qua đỉnh S cắt đáy theo dây cung $AB \Rightarrow AB = 6 \Rightarrow OA = OB = AB = 6 \Rightarrow \Delta OAB$ đều.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ OH = 3\sqrt{3} \end{cases}$.

Kẻ $OI \perp SH$.

Do $\begin{cases} OH \perp AB \\ SO \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOH)$.

Do $\begin{cases} AB \perp (SOH) \\ OI \subset (SOH) \end{cases} \Rightarrow AB \perp OI$.

Ta có $\begin{cases} OI \perp AB \\ OI \perp SH \end{cases} \Rightarrow OI \perp (SAB) \Rightarrow d\left(O,(P)\right) = d\left(O,(SAB)\right) = OI$.

Xét ΔSOH vuông tại O có đường cao OI

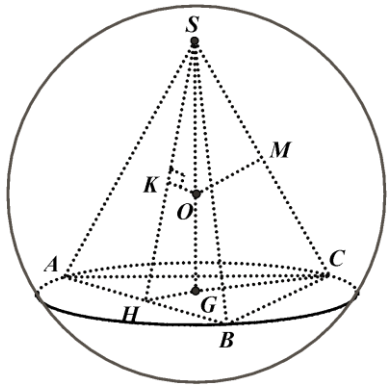
$$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{(3\sqrt{3})^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{7}{108} \Rightarrow OI^2 = \frac{108}{7} \Rightarrow OI = \frac{6\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 36: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh $AB = a$ và mặt bên tạo với mặt đáy một góc $60°$. Một mặt cầu tâm O ngoại tiếp hình chóp nói trên. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB).

A. $\dfrac{7a}{24}$. **B.** $\dfrac{7a}{6}$. **C.** $\dfrac{a}{4}$. **D.** $\dfrac{13a}{24}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, H, M lần lượt là trung điểm AB, SC.

Do hình chóp $S.ABC$ đều nên $SG \perp (ABC)$. Suy ra $SG \perp AB$.

Mà $HG \perp AB$. Do đó $AB \perp (SHG) \Rightarrow AB \perp SH$.

Khi đó, góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SHG} \Rightarrow \widehat{SHG} = 60°$.

Xét tam giác SHG vuông tại G có: $SG = HG.\tan\widehat{SHG} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\tan 60° = \dfrac{a}{2}$.

Ta có: $\Delta SOM \backsim \Delta SCG(g.g) \Rightarrow \dfrac{SO}{SC} = \dfrac{SM}{SG} \Leftrightarrow SO = \dfrac{SC^2}{2SG} = \dfrac{SG^2 + CG^2}{2SG} = \dfrac{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{3}}{2.\dfrac{a}{2}} = \dfrac{7a}{12}$.

Trong mặt phẳng (SHG) vẽ $OK \perp SH$ tại K.

Ta lại có $\Delta SOK \backsim \Delta SHG(g.g) \Rightarrow \dfrac{OK}{HG} = \dfrac{SO}{SH} \Leftrightarrow OK = \dfrac{SO.HG}{SH} = \dfrac{7a}{12}\cos\widehat{SHG} = \dfrac{7a}{24}$.

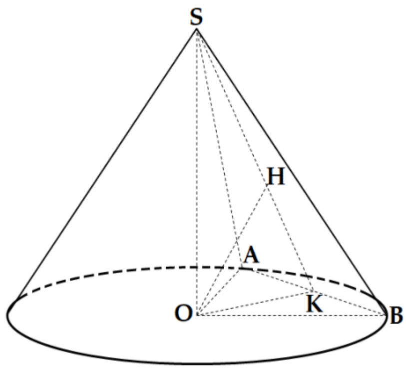
Do $\begin{cases} OK \perp SH \\ OK \perp AB \end{cases} \Rightarrow OK \perp (SAB) \Rightarrow d(O,(SAB)) = OK = \dfrac{7a}{24}$.

Câu 37: Cho hình nón đỉnh S có chiều cao bằng $\sqrt{11}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều SAB có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB).

A. $\dfrac{\sqrt{33}}{9}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{33}}{9}$. **C.** $\sqrt{33}$. **D.** $\dfrac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thiết tam giác SAB đều, $S_{\Delta SAB} = 9\sqrt{3}$ và $SO = \sqrt{11}$.

$S_{\Delta SAB} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow AB = 6$. ΔSAB đều $\Rightarrow SA = AB = 6$.

Xét ΔSOA vuông tại O, theo định lý Pytago ta có: $R = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{6^2 - \left(\sqrt{11}\right)^2} = 5$.

Gọi K là trung điểm của AB, H là hình chiếu của O lên SK. Khi đó $d(O,(SAB)) = OH$

Trong tam giác vuông OBK có: $OK = \sqrt{OB^2 - BK^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

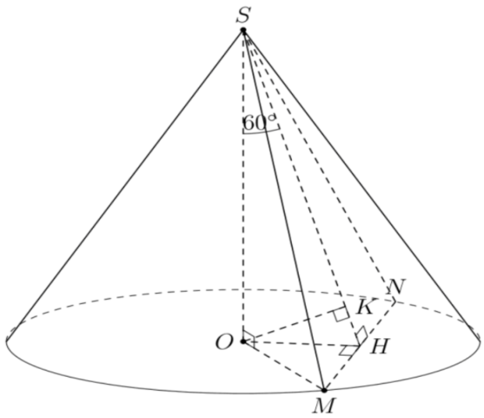
Trong tam giác vuông SOK có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{11}\right)^2} + \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{27}{176} \Rightarrow OH = \dfrac{4\sqrt{33}}{9}$.

Câu 38: Cho hình nón có chiều cao $SO = 12$, bán kính đáy $R = 24$. Cắt khối nón bởi một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh S và hợp với SO một góc bằng 60^o. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (α).

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) và đường tròn đáy, H, K lần lượt là hình chiếu của O lên MN và SH. Ta có $\begin{cases} MN \perp OH \\ MN \perp SO \end{cases} \Rightarrow MN \perp OK$.

Mặt khác $SH \perp OK$ nên $OK \perp (SMN)$.

Khi đó $(SO,(\alpha)) = (SO, SK) = (SO, SH) = OSH = 60^o$ và $OK = d(O,(\alpha))$.

Trong tam giác vuông SOH ta có $OH = SO.\tan OSH = 12.\tan 60^o = 12\sqrt{3} \Rightarrow SH = 24$.

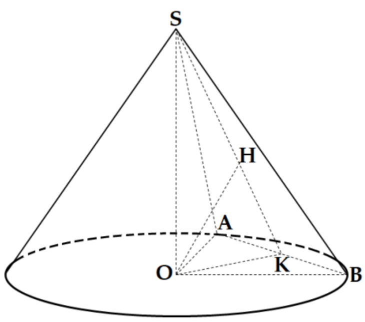
Trong tam giác vuông SOH có: $OK = \dfrac{SO.OH}{SH} = \dfrac{12.12\sqrt{3}}{24} = 6\sqrt{3}$.

Câu 39: Cho một hình nón có chiều cao $h = a$ và chu vi đường tròn đáy bằng $4\pi a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $d = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Có $(P) \equiv (SAB)$.

Chu vi đường tròn đáy bằng $4\pi a \Leftrightarrow 2\pi r = 4\pi a \Leftrightarrow r = 2a$

Ta có $SO = a = h, OA = OB = r = 2a, AB = 2a\sqrt{3}$, gọi K là hình chiếu của O lên AB suy ra K là trung điểm AB, gọi H là hình chiếu của O lên SK suy ra $d\left(O;\left(SAB\right)\right) = OH$.

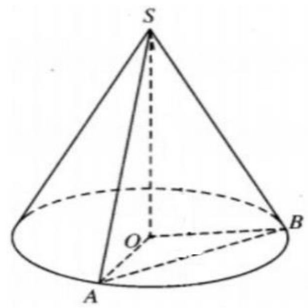
Ta tính được $OK = \sqrt{OA^2 - KA^2} = a$ suy ra SOK là tam giác vuông cân tại O, suy ra H là trung điểm của SK nên $OH = \dfrac{SK}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 40: Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O. Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác cân có diện tích a^2. Gọi A, B là hai điểm bất kì trên đường tròn $\left(O\right)$ sao cho thể tích khối chóp $S.OAB$ lớn nhất và bằng $\dfrac{a^3}{12}$. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng bao nhiêu?

A. $S_{xq} = \dfrac{a^2\sqrt{17}}{4}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{8}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{2}$. **D.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình nón lần lượt là h, r. Ta có $\dfrac{1}{2}h.2r = a^2 \Leftrightarrow hr = a^2$.

Ta có $V_{S.OAB} = \dfrac{1}{3}SO.S_{OAB} = \dfrac{1}{3}SO.\dfrac{1}{2}OA.OB.\sin AOB \le \dfrac{1}{6}hr^2$.

Suy ra $\dfrac{1}{6}hr^2 = \dfrac{a^3}{12} \Leftrightarrow 2a^2r = a^3 \Leftrightarrow r = \dfrac{a}{2} \Rightarrow h = 2a$.

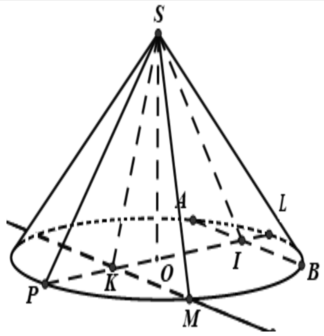
Do đó độ dài đường sinh của hình nón là $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$. Vậy $S_{xq} = \pi rl = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$.

Câu 41: Cho khối nón đỉnh S, bán kính đáy $r = 10$ và và đường sinh $l = \sqrt{117}$. Gọi A, B và M là ba điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 12$. Giá trị lớn nhất của khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng

A. $\sqrt{117}$. **B.** $\dfrac{340}{13}$. **C.** 9. **D.** $\dfrac{1700}{117}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có chiều cao $h=\sqrt{117-100}=\sqrt{17}$.

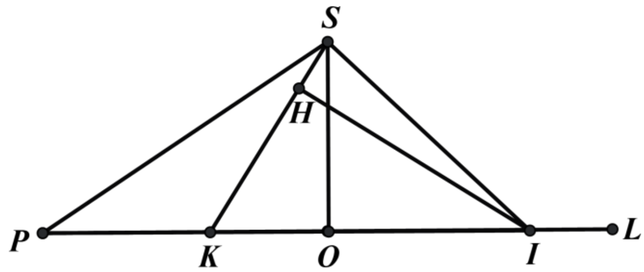
Không mất tổng quát ta cố định AB, điểm M di động

Gọi O là tâm đáy, I là trung điểm AB, P và L là giao điểm giữa IO với đường tròn đáy sao cho O nằm giữa I và P.

Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt IO tại K.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng SK

Xét tam giác ΔSPI, khi M thay đổi thì K thay đổ trên đoạn PL



Khoảng cách từ I đến SK là IH (với H là hình chiếu của I trên SK).

Nếu góc PSI nhọn thì IH lớn nhất khi K trùng với P

Nếu góc PSI tù hoặc vuông thì IH lớn nhất khi SK vuông góc với SI khi đó H trùng với S.

Ta có $IO=\sqrt{r^2-IA^2}=8$, $OP=r=10$, $SO=h=\sqrt{17}$, $IP=18$, $SP=\sqrt{117}$

Suy ra, $SI=\sqrt{IO^2+SO^2}=\sqrt{64+17}=9$, $cos\left(PSI\right)=\dfrac{SP^2+SI^2-PI^2}{2SP.SI}=\dfrac{-143}{16\sqrt{117}}<0$ nên góc PSI tù.

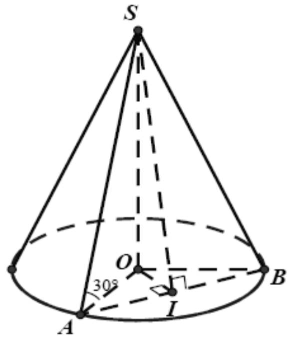
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng $SI=9$

Câu 42: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A,B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB là a và $SAO=30^o$, $SAB=60^o$. Bán kính đáy bằng

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AB, ta có: $OI \perp AB, SI \perp AB, OI = a$.

Ngoài ra: $\begin{cases} AO = SA.\cos SAO = SA.\cos 30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}SA \\ AI = SA.\cos SAI = SA.\cos 60^o = \dfrac{1}{2}SA \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Mà $\dfrac{AI}{AO} = \cos IAO \Rightarrow \cos IAO = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin IAO = \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{OI}{OA} = \dfrac{a}{OA}$

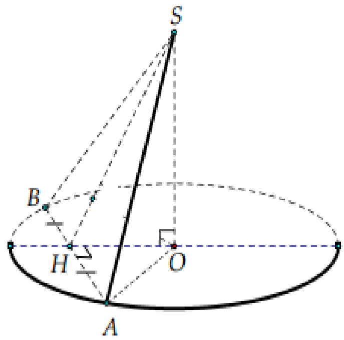
Vậy $OA = \dfrac{3a}{\sqrt{6}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 43: Cho khối nón (N) có bán kính đáy $r = 4a$ và chiều cao lớn hơn bán kính đáy. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh nón và tạo với đáy nón một góc $60°$ cắt khối nón (N) theo thiết diện là một tam giác có diện tích bằng $8\sqrt{3}a^2$. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $64\pi a^3$. **B.** $96\pi a^3$ **C.** $32\pi a^3$. **D.** $192\pi a^3$

Lời giải

Chọn C



Gọi thiết diện của mặt phẳng (P) và khối nón (N) là ΔSAB (hình vẽ), đường cao $SO = h$, mặt đáy của hình (N) là (Q)

Vẽ $OH \perp AB$ tại H thì H cũng là trung điểm của AB

Ta có: $\begin{cases} OH \perp AB \Rightarrow SH \perp AB \\ SH \subset (P), OH \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = AB \end{cases} \Rightarrow \left((P),(Q)\right) = SHO = 60°$

Ta có: $OH = \dfrac{SO}{\tan 60^0} = \dfrac{h\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{16a^2 - \dfrac{h^2}{3}}$ và $SH = \dfrac{SO}{\sin 60^0} = \dfrac{2h\sqrt{3}}{3}$

$$S_{\Delta SHA}=\frac{1}{2}SH.AH=\frac{8\sqrt{3}a^2}{2}=4\sqrt{3}a^2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{2h\sqrt{3}}{3}.\sqrt{16a^2-\frac{h^2}{3}}=4\sqrt{3}a^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}h=6a\\h=2\sqrt{3}a\end{array}\right.(h>0)$$

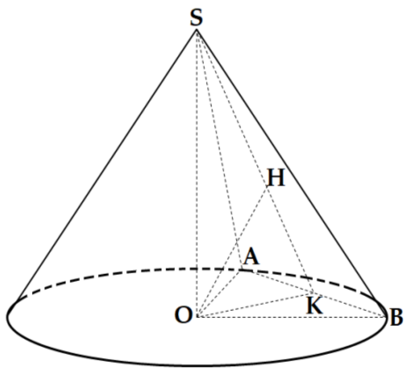
$$h>r\Rightarrow h=6a\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi(4a)^2.6a=32\pi a^2.$$

Câu 44: Cắt hình nón đỉnh S bởi một mặt phẳng không đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$; AB là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SAB) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc $60°$. Tính theo a khoảng cách từ tâm O của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB).

A. $d=\frac{a\sqrt{6}}{8}$. **B.** $d=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $d=\frac{a}{3}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính đáy của khối nón, K, H lần lượt là hình chiếu của O lên AB, SK. Khi đó khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng OH.

Ta có: SK trung tuyến trong tam giác vuông cân $SAB\Rightarrow SK=\frac{AB}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác vuông SOK: $SO=\sin 60°.SK=\frac{\sqrt{6}}{4}$; $OK=\cos 60°.SK=\frac{\sqrt{2}}{4}$

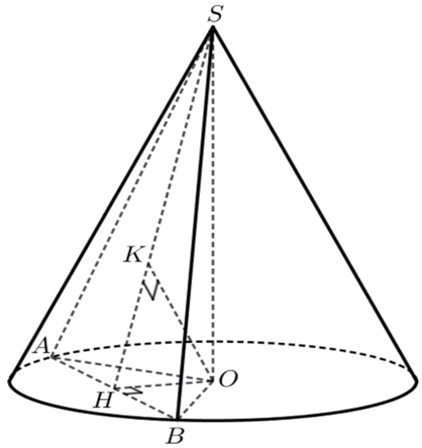
$$OH=\frac{SO.OK}{\sqrt{SO^2+OK^2}}=\frac{\sqrt{6}}{8}$$

Câu 45: Cho khối nón đỉnh S, có đường kính đáy bằng 8. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ tâm O của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $\sqrt{6}$. Diện tích hình chiếu của tam giác SAB lên mặt phẳng đáy bằng 8. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy của hình nón.

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $15°$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $OH \perp AB$ tại H $\Rightarrow d\left(O,AB\right)=OH$. Ta có: $OA=OB=\dfrac{8}{2}=4$.

Mặt khác: $S_{\Delta OAB}=8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.OA.OB.\sin AOB=8 \Leftrightarrow \sin AOB=1 \Rightarrow AOB=90^\circ$.

$\Rightarrow \Delta OAB$ vuông cân tại $O \Rightarrow OH=d\left(O,AB\right)=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

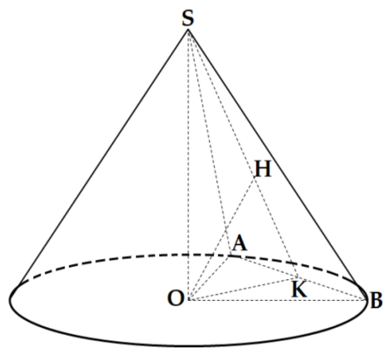
Mặt khác, $\sin\left(\left(SAB\right),\left(OAB\right)\right)=\dfrac{d\left(O,\left(SAB\right)\right)}{d\left(O,AB\right)}=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(\left(SAB\right),\left(OAB\right)\right)=60^\circ$.

Câu 46: Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 6 và thể tích bằng 50π. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=8$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính đáy của khối nón.
Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của O lên AB, SK.

$\left.\begin{array}{l} AB \perp OK \\ AB \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp \left(SOK\right)$. Suy ra $AB \perp OH$.

$\left.\begin{array}{l} OH \perp SK \\ OH \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp \left(SAB\right)$. Suy ra khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$ bằng OH.

Ta có $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2.h \Rightarrow R^2=\dfrac{3V}{\pi.h}=\dfrac{3.50\pi}{\pi.6}=25 \Rightarrow R=5$.

Trong tam giác vuông OBK có $OK = \sqrt{OB^2 - BK^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

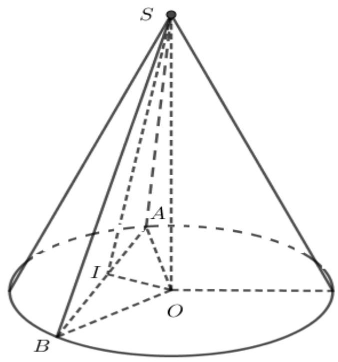
Trong tam giác vuông SOK có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{6^2} + \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{5}{36} \Rightarrow OH = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

Câu 47: Cho hình nón có chiều cao bằng $2a$, biết rằng khi cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và tạo với mặt đáy của hình nón một góc 30^0, thiết diện thu được là một tam giác vuông. Diện tích toàn phần của hình nón đã cho bằng

A. $4\left(4\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$. **B.** $4\left(2\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{14}\pi a^2$. **D.** $8\left(2\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử thiết diện thu được là tam giác vuông SAB.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có góc giữa (P) và mặt đáy của hình nón là góc $SIO = 30^0$.

Xét ΔSOI vuông tại O, có $\sin 30^0 = \dfrac{SO}{SI} \Rightarrow SI = \dfrac{SO}{\sin 30^0} = \dfrac{2a}{\frac{1}{2}} = 4a$.

$OI^2 = SI^2 - SO^2 = (4a)^2 - (2a)^2 = 12a^2 \Rightarrow OI = 2a\sqrt{3}$.

Xét ΔSAB vuông cân tại S, ta có $SI = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow AB = 8a$. Suy ra $IB = 4a$.

$SA^2 + SB^2 = AB^2 \Rightarrow 2SB^2 = (8a)^2 \Rightarrow SB = 4a\sqrt{2}$.

Xét ΔBIO vuông tại I, ta có $OB = \sqrt{OI^2 + IB^2} = \sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2 + (4a)^2} = 2a\sqrt{7}$.

Diện tích toàn phần của hình nón đã cho bằng

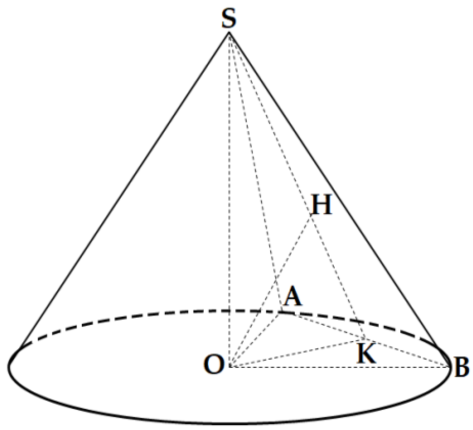
$S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \pi.2a\sqrt{7}.4a\sqrt{2} + \pi\left(2a\sqrt{7}\right)^2 = 4\left(2\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$.

Câu 48: Cho hình nón có đỉnh S, chiều cao bằng $3a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho diện tích tam giác SAB bằng $9a^2$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng a. Tính thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho.

A. $\dfrac{219\pi a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{73\pi a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{73\pi a^3}{24}$. **D.** $\dfrac{73\pi a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính đáy của khối nón.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của O lên AB, SK.

$\left.\begin{matrix} AB \perp OK \\ AB \perp SO \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (SOK)$. Suy ra $AB \perp OH$.

$\left.\begin{matrix} OH \perp SK \\ OH \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow OH \perp (SAB)$. Suy ra khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng OH.

Trong tam giác vuông SOK có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OK^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{(3a)^2} = \dfrac{8}{9a^2} \Rightarrow OK = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

$SK^2 = SO^2 + OK^2 = (3a)^2 + \left(\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{81a^2}{8} \Rightarrow SK = \dfrac{9a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác cân SAB có

$S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}SK.AB \Rightarrow AB = \dfrac{2.S_{\Delta SAB}}{SK} = \dfrac{2.9a^2}{\dfrac{9a\sqrt{2}}{4}} = 4a\sqrt{2}$.

Suy ra $BK = 2a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông OBK có $OB = \sqrt{OK^2 + BK^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(2a\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{146}}{4}$.

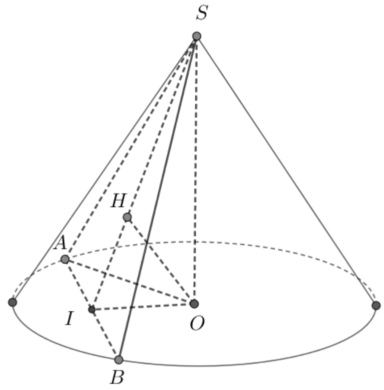
Thể tích khối nón bằng $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{146}}{4}\right)^2.3a = \dfrac{73\pi a^3}{8}$.

Câu 49: Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng 4 và diện tích xung quanh hình nón bằng $16\sqrt{2}\pi$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A, B và $AB = 4\sqrt{3}$. Khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến (P) bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $S_{xq} = \pi.r.l = 16\sqrt{2}\pi \Rightarrow l = 4\sqrt{2}$.

Mặt khác $l^2 = h^2 + r^2$ nên $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 4$.

Gọi I là trung điểm cạnh AB, suy ra $OI \perp AB$.

Do SO vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tâm O nên $SO \perp AB$.

Khi đó $AB \perp (SOI)$.

Trong tam giác SOI, dựng $OH \perp SI$.

Do $AB \perp (SOI)$, nên $AB \perp OH$, từ đó suy ra $OH \perp (SAB)$.

Vậy $d(O,(P)) = d(O,(SAB)) = OH$.

Xét tam giác vuông IOA: $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$.

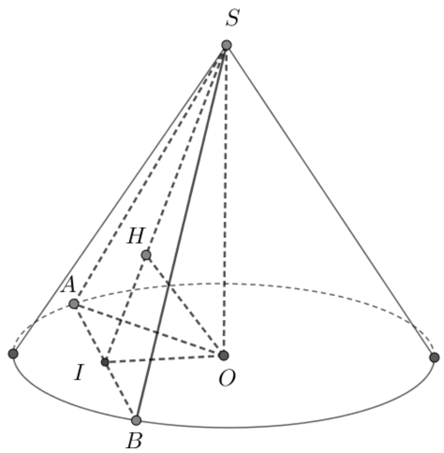
Trong tam giác vuông OIS: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{5}{16} \Rightarrow OH = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

Câu 50: Cho hình nón có chiều cao $h = 6$ và thể tích khối nón bằng 50π. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$. Tính diện tích của thiết diện đó?

A. $24\sqrt{5}$. **B.** $12\sqrt{5}$. **C.** 9. **D.** $6\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi hình nón đã cho có đỉnh là S và tâm của đáy là O; thiết diện qua đỉnh là tam giác SAB.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 50\pi \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$.

Dựng $OI \perp AB$,suy ra $AB \perp (SOI)$.

Trong tam giác SOI , dựng $OH \perp SI$.

Do $AB \perp (SOI)$, nên $AB \perp OH$, từ đó suy ra $OH \perp (SAB)$.

Vậy $d(O,(P)) = d(O,(SAB)) = OH$, suy ra $OH = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

Trong tam giác vuông OIS : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow OI = 3$.

Khi đó $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$.

Xét tam giác vuông IAO: $AI = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow AB = 8$.

Vậy diện tích tam giác SAB là: $\dfrac{1}{2}.AB.SI = \dfrac{1}{2}.8.3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$.

DẠNG 15 CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Dạng 1: Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $\vec{u}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$ có $\left|\vec{u}\right|$ đạt min.

Phương pháp giải:

- Tìm điểm I thõa mãn hệ thức $a\overrightarrow{IB}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ tọa độ điểm I là: $\begin{cases} x_1=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c} \\ y_1=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c} \\ z_1=\dfrac{az_A+bz_B+cz_C}{a+b+c} \end{cases}$
- Phân tích $\vec{u}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MI}+\left(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}\right)=(a+b+c)\overrightarrow{MI}$
- Khi đó $\left|\vec{u}\right|=\left|a+b+c\right|MI\Rightarrow\left|\vec{u}\right|_{\min}\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên (P).
- Viết phương trình đường thẳng IM đi qua I và vuông góc với $(P)\Rightarrow\overrightarrow{u_{IM}}=\overrightarrow{n_{(P)}}$
- Khi đó $M=(P)\cap(IM)$.

Dạng 2: Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $T=aMA^2+bMB^2+cMC^2$ đạt max hoặc min.

Phương pháp giải:

- Tìm điểm I thỏa mãn hệ thức $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$
- Phân tích $T=a\overrightarrow{MA}^2+b\overrightarrow{MB}^2+c\overrightarrow{MC}^2=a\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+b\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+c\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

  $\Rightarrow(a+b+c)MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}\right)+aIA^2+bIB^2+cIC^2$

  $=(a+b+c)MI^2+aIA^2+bIB^2+cIC^2$.
- Nếu $a+b+c>0$ thì T đặt min; $a+b+c<0$ thì T đặt max.
- Khi đó $T_{max};T_{\min}\Leftrightarrow MI_{\min}\rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên (P).

Dạng 3: Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $(MA+MB)_{\min}$ hoặc $\left|MA-MB\right|_{max}$

Phương pháp giải:

- Kiểm tra vị trí tương đối của các điểm A và B so với mặt phẳng (P).
- Nếu A và B cùng phía (P) thì bài toán $(MA+MB)_{\min}$ phải lấy đối xứng A qua (P) khi đó $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A',M,B$ thẳng hàng hay $M=A'B\cap(P)$.
- Bài toán tìm $\left|MA-MB\right|_{max}$, ta có $\left|MA-MB\right|\leq AB\Rightarrow M$ là giao điểm trực tiếp của đường thẳng AB và (P).
- Nếu A và B khác phía (P) thì bài toán $\left|MA-MB\right|_{max}$ phải lấy đối xứng A qua (P) bài toán tìm $(MA+MB)_{\min}\Rightarrow$M là giao điểm trực tiếp của đường thẳng AB và (P).

Dạng 4: Bài toán lập phương trình mặt phẳng, đường thẳng có yếu tố cực trị

Phương pháp đại số:

- Gọi véc tơ pháp tuyến hoặc véc tơ chỉ phương của mặt phẳng (hoặc đường thẳng) cần lập là $(a;b;c),(a^2+b^2+c^2)>0$
- Thiết lập một phương trình quy ẩn (a theo b,c hoặc ngược lại) từ một dữ kiện về mặt phẳng chứa đường, song song hoặc vuông góc. Giả sử phương trình thu gọn ẩn là $a=f(b;c)$.
- Thiết lập phương trình khoảng cách mà đề bài yêu cầu, thay $a=f(b;c)$ vào ta được một phương trình hai ẩn b;c.
- Xét hàm khoảng cách $d=g\left(b;c\right)$

  Nếu $c=0$ thì $b\neq 0\rightarrow d=d_1$ lưu lại giá trị khoảng cách d_1 này.

  Nếu $c\neq 0\Rightarrow d=g\left(\frac{b}{c}\right)=g\left(t\right);t=\frac{b}{c}$
- Khảo sát hàm $g\left(t\right)$ ta thu được kết quả.

Chú ý:

- Công thức khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng $d\left(A;(P)\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
- Công thức khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng $d\left(A;\Delta\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}$;M thuộc Δ.
- Công thức khoảng cách giữa hai đường thẳng $d\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_{\Delta 1}};\overrightarrow{u_{\Delta 2}}\right]\overrightarrow{M_1.M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_{\Delta 1}};\overrightarrow{u_{\Delta 2}}\right]\right|}$

Phương pháp hình học:

Bài toán 1: *Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất, với M là điểm không thuộc d.*

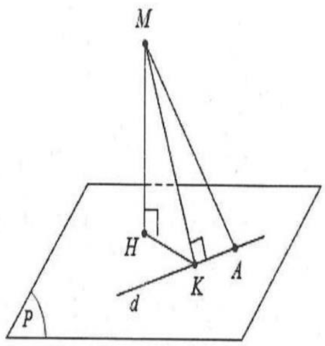
Phương pháp giải:

Đường thẳng d xác định đi qua điểm A và có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}$.

Kẻ $MH\perp(P);MK\perp d\Rightarrow MH=d\left(M;(P)\right)$ và điểm K cố định.

Ta có $d\left(M;(P)\right)=MH\leq MK$

Suy ra $d_{\max}=MK$. Khi đó $\begin{cases}d\subset(P)\\(P)\perp(M;d)\end{cases}$



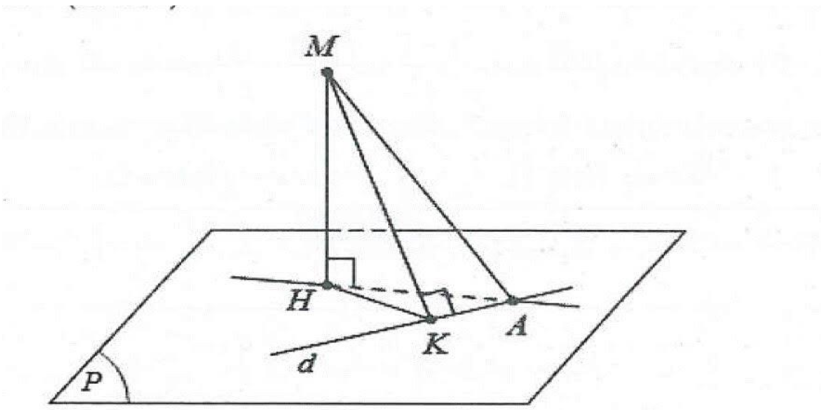
Gọi $\left(\alpha\right)$ là mặt phẳng chứa M và d ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_{(P)}}\perp\overrightarrow{u_d}\\\overrightarrow{n_{(P)}}\perp\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{MA}\right]\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_d}\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{MA}\right]\right]$$

Khi đó (P) đi qua A và có véc tơ pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_{(P)}} = \left[\overrightarrow{u_d}\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{MA}\right]\right]$

Bài toán 2: *Lập phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) , đi qua điểm A sao cho khoảng cách từ điểm M đến d lớn nhất, nhỏ nhất?*

Phương pháp giải:



Kẻ $MK \perp d; MK \perp (P) \Rightarrow MK = d\left(M;\text{d}\right)$ và điểm H cố định.

Kẻ $MK \perp d; MH \perp (P); \Rightarrow MK = d\left(M;\text{d}\right) = d$ và điểm H cố định.

Ta có: $MH \le MK \le MA \Leftrightarrow MH \le d \le MA$.

Ta có $MK \le MA \Rightarrow d\left(M;d\right)_{\max} = MA \Leftrightarrow K \equiv A.$

Khi đó đường thẳng d nằm trong (P), đi qua A và vuông góc với đường thẳng AM , suy ra d có một véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{MA}\right]$

Mặt khác, lại có $MK \ge MH \Rightarrow d\left(M;d\right)_{\min} = MH \Leftrightarrow H \equiv K$.

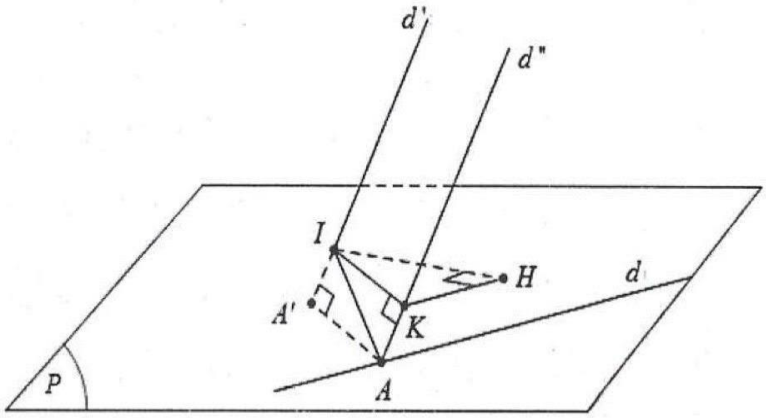
Khi đó đường thẳng d nằm trong (P) , đi qua A và đi qua hình chiếu H của M. Suy ra $d = \left(P\right) \cap \left(MHA\right)$. Trong đó $\overrightarrow{n\left(_{MHA}\right)} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{MA}\right]$

Khi đó đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}};\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{MA}\right]\right]$

(Chú ý: Trong trường hợp $d_{\min}$ thì d chính là hình chiếu vuông góc của MA trên mặt phẳng (P)).

Bài toán 3: *Lập phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P), đi qua điểm A cho trước sao cho khoảng cách giữa d và d' lớn nhất, với d' là đường thẳng cho trước và cắt (P).*

Phương pháp giải:



Gọi $I = d' \cap (P)$, qua A dựng đường thẳng $\text{d}'' \parallel \text{d}' \Rightarrow \text{d}' \parallel (\text{Q})$, với (Q) là mặt phẳng chứa d và d''.

Khi đó $\mathrm{d}(d;d')=d(d';(Q))=d(I;(Q))$

Kẻ $IH\perp(Q);\mathrm{IK}\perp d''\Rightarrow IH=d(I;(Q))$ và điểm K cố định.

Ta có $H\le IK\Rightarrow d(\mathrm{I};(Q))_{\max}=IK\Leftrightarrow H\equiv K.$ Khi đó đường thẳng *d* nằm trong *(P),* đi qua *A* và vuông góc với đường thẳng *IK,* suy ra *d* có một véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{IK}\right]$

Gọi A' là hình chiếu vuông góc của *A* lên *d'* , suy ra $AA'\parallel IK$, khi đó $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{\mathrm{AA}'}\right]$

Vậy đường thẳng *d* cần lập đi qua điểm A và có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{\mathrm{AA}'}\right]$

Bài toán 4: *Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A cho trước, d cắt d_1 và khoảng cách giữa d và d_2 lớn nhất*

Phương pháp giải:

Gọi *(P)* là mặt phẳng đi qua *A* và chứa d_1 , suy ra *d* nằm trong *(P).* Khi đó quy về bài toán 3!

Dạng 5: Bài toán tìm điểm M thuộc đường thẳng có yếu tố cực trị

Phương pháp giải:

Tham số hóa điểm *M* theo phương trình đường thẳng.

Biến đổi giả thiết về dạng $y=f(t)$ và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=f(t)$.

Chú ý:

Tam thức bậc hai: $y=ax^2+bx+c(a\ne0)$ có đỉnh $I\left(\dfrac{-b}{2a};\dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

Bất đẳng thức véc tơ: Cho 2 véc tơ $\vec{u}=(a;b)$ và $\vec{v}=(c;d)$ ta có: $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|$

Khi đó $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.

Dạng 6: Bài toán cực trị liên quan đến góc

Phương pháp đại số

- Gọi véc tơ pháp tuyến hoặc véc tơ chỉ phương của mặt phẳng (hoặc đường thẳng) cần lập là $(a;b;\mathrm{c})$ trong đó $a^2+b^2+c^2>0$.
- Thiết lập một phương trình quy ẩn (*a* theo *b,c* hoặc ngược lại) từ một dữ kiện về mặt phẳng chứa đường, song song hoặc vuông góc. Giả sử phương trình thu gọn ẩn là $\mathrm{a}=\mathrm{f}(b;c)$.
- Thiết lập phương trình về góc, thay $\mathrm{a}=\mathrm{f}(b;c)$. vào ta được một phương trình hai ẩn *b,c.*

Chú ý:

- Góc giữa hai đường thẳng $\cos(d_1;d_2)=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$
- Góc giữa hai mặt phẳng $\cos((P)_1;(\mathrm{P}_2))=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng $\sin(\mathrm{d};(\mathrm{P}))=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{u_d}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_d}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{u_d}\right|}$

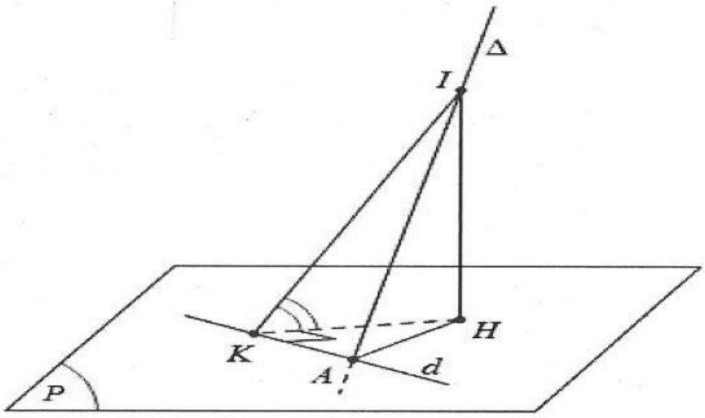
- Ta biết rằng hàm $\sin\varphi$ đồng biến khi $0<\varphi<90°$, ngược lại hàm $\cos\varphi$ nghịch biến .
- *Vậy khi hàm xét max, min là hàm sin thì góc lớn ứng với hàm max, góc nhỏ ứng với hàm nhỏ. Còn khi hàm xét max, min là hàm cosin thì ngược lại, đề bài yêu cầu tìm góc lớn thì hàm phải đạt min, góc nhỏ thì hàm đạt max.*

Phương pháp hình học

Bài toán 1: *Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ sao cho mặt phẳng (Q) tạo với mặt phẳng (P) cho trước một góc nhỏ nhất (hoặc tạo với đường thẳng d cho trước một góc lớn nhất)*

Phương pháp giải:

Trường hợp 1: $\left((P);(Q)\right)_{\min}$



Gọi $A=\Delta\cap(P); d=(P)\cap(Q)$ với (Q) là mặt phẳng (IAK) trong hình vẽ.

Lấy $I\in\Delta\Rightarrow A;I$ cố định, dựng $IH\perp d\Rightarrow\left((P);(Q)\right)=IKH=\varphi.$

Do $IA\ge IK\Rightarrow\sin\varphi=\dfrac{IH}{IK}\ge\dfrac{IH}{IA}\Rightarrow\varphi_{\min}$ khi $K\equiv A$ tức là $\Delta\perp d\Leftrightarrow\Delta\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{u_d}\right]$

Mặt khác $\begin{cases}IA\perp d\\d\subset(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\perp d\\d\subset(P)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{n_{(P)}}\right]$

Suy ra $\left((P);(Q)\right)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow\Delta\perp$ giao tuyến d của (P) và $(Q)\Leftrightarrow\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{u_\Delta};\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{n_{(P)}}\right]\right]$

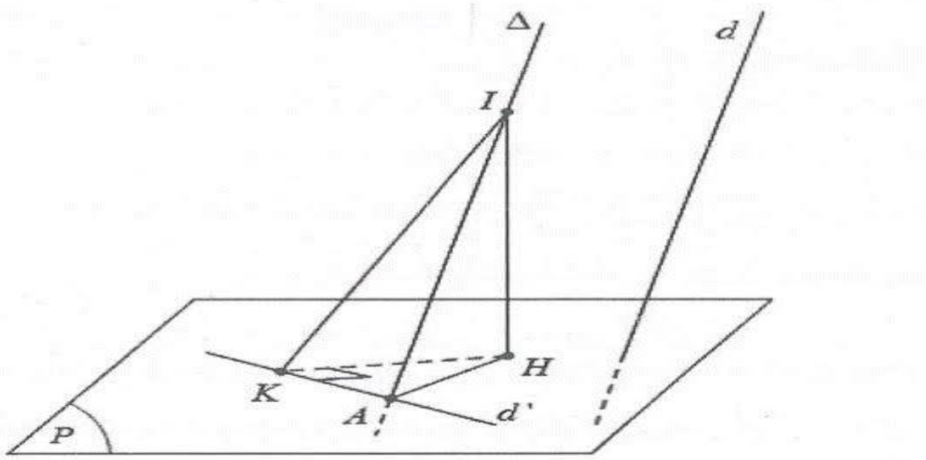
Trường hợp 2*:* $\left((Q);\text{d}\right)_{\max}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{u_\Delta};\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{u_d}\right]\right]$

Tổng kết: $\begin{cases}\left((P);(Q)\right)_{\min}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{u_\Delta};\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{n_{(P)}}\right]\right]\\\left((Q);d\right)_{\max}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{u_\Delta};\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{u_d}\right]\right]\end{cases}$

Bài toán 2: *Viết phương trình đường thẳng d' qua A nằm trong (P) sao cho góc giữa 2 đường thẳng d và d' nhỏ nhất (hoặc tạo với mặt phẳng (Q) cho trước một góc lớn nhất)*

Phương pháp giải:

Trường hợp 1: $(d;d')_{\min}$



Qua A dựng đường thẳng $\Delta \parallel d$, trên Δ lấy điểm I, hạ $IH \perp (P) \Rightarrow A, I, H$ cố định, điểm K thay đổi

$(d;d') = (\Delta;d') = IAK = \alpha$

Mà $\sin\alpha = \frac{IK}{IA} \geq \frac{IH}{IA}$ (Do $IK \geq IH$) suy ra $\alpha_{\min} \Leftrightarrow H \equiv K$ hay d' qua A và H.

Khi đó d' là hình chiếu vuông góc của Δ trên (P).

Ta có: $(d;d')_{\min} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{n_{AIH}}\right] = \left[\overrightarrow{n_{(P)}};\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{u_d}\right]\right]$.

Trường hợp 2: $(d;(Q))_{\max} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}};\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{n_Q}\right]\right]$.

Tổng kết: $\begin{cases} (d;d')_{\min} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}};\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{u_d}\right]\right] \\ (d;(Q))_{\max} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}};\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]\right]. \end{cases}$

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 49 – Đề tham khảo 2023. Trong không gian $Oxyz,$ cho $A(0;0;10), B(3;4;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM không có góc tù và có diện tích bằng $15.$ Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

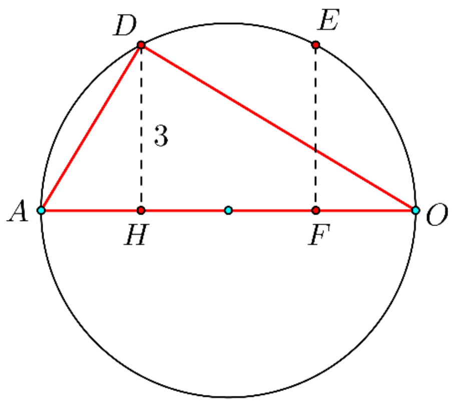
A. $(4;5)$. **<u>B</u>.** $(3;4)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(6;7)$.

✍ Lời giải

Chọn B

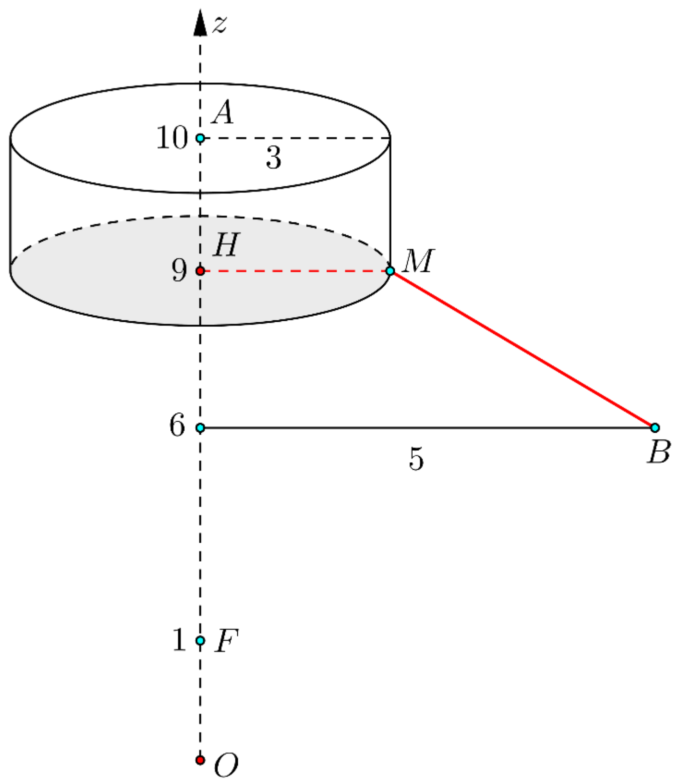
Ta có: $S_{OAM} = \frac{1}{2}OA.d(M;OA) = 15 \Rightarrow d(M;OA) = 3.$

Suy ra: M di động trên mặt trụ, bán kính bằng $3,$ trục là $OA.$



Xét điểm D như hình vẽ, $\begin{cases} HA.HO = HD^2 = 9 \\ HA + HO = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HA = 1 \\ HO = 9 \end{cases}.$

Vì $AMO \le 90$ nên giới hạn của M là hai mặt trụ với trục AH và $FO.$



Vì hình chiếu của B cách H gần hơn nên $BM_{\min} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=1+t\\z=-t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+z-6=0$.

Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Δ (I có hoành độ âm) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại A. Điểm $N(a;b;c)$ là điểm thay đổi trên (S), khi khoảng cách ON lớn nhất thì giá trị của $T=a+b-c$ là bao nhiêu, biết rằng diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$ (M là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P)).

A. $2+2\sqrt{3}$. **B.** $-2-2\sqrt{3}$. **C.** $-2+2\sqrt{3}$. **D.** $-2+\sqrt{3}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+y-2z+5=0$ và điểm $A(1;2;-3)$. Đường thẳng d đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trên (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc $90°$. Độ dài đoạn MB lớn nhất bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{41}}{6}$. **C.** $\frac{5\sqrt{5}}{12}$. **D.** $\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $C(0;0;4)$, $M(-1;-1;0)$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm C và tạo với trục Oz một góc φ thỏa mãn $\tan\varphi=\frac{5\sqrt{2}}{4}$. Giả sử $\vec{n}(a;b;c)$ là một vectơ pháp tuyến của (α). Khi khoảng cách từ M đến (α) lớn nhất, giá trị biểu thức $\frac{ac}{b^2}$ bằng

A. $-\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** -10.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;5),B(4;-3;7)$. Xét điểm M thay đổi sao cho tam giác OMA không có góc tù và có diện tích bằng 10. Giá trị nhỏ nhất của độ dài MB là

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=9$ và hai điểm $A(-2;3;2),B(-1;0;3)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$.

A. $\sqrt{11}$. **B.** 6. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $\sqrt{31}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;4;1),B(3;-2;0)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-m}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+m^2}{1}$, với m là tham số. Gọi $M(a;b;c)$, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B lên Δ sao cho thể tích khối tứ diện $ABMN$ nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-4;-2)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;5;4)$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn biểu thức $MA^2+MB^2=40$

và khoảng cách từ M đến (P) nhỏ nhất. Khi đó $T=a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 25. **B.** 21. **C.** 19. **D.** 5.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(4;-5;2)$ và $B(1;-1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và song song với (α) và thõa mãn điều kiện sao cho khoảng cách từ B đến Δ là nhỏ nhất. Đường thẳng Δ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(2;-2;-3)$. **B.** $N(6;-7;-1)$. **C.** $P(2;3;-5)$. **D.** $Q(6;-7;1)$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-3;0;1), B(-2;0;0)$, $C\left(-\frac{3}{2};1;1\right)$. Điểm M thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=AB$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $O.MAC$ là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{12}{3}$. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** $\frac{11}{6}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $B(2;5;0)$, $C(4;7;0)$ và $E(1;1;3)$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua E và vuông góc với mặt phẳng (Oxy), Δ là giao tuyến của (Q) và (Oxy), $T=2d(B,(Q))+d(C,(Q))$. Khi T đạt giá trị lớn nhất, Δ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $M(-12;6;0)$. **B.** $P(12;-4;0)$. **C.** $Q(15;4;0)$. **D.** $N(15;-4;0)$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;-2;0)$ và hai điểm $A(-4;7;3)$, $B(4;4;5)$. Hai điểm M,N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng $\vec{a}$ và $MN=5\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$

A. $\sqrt{62}$. **B.** $\sqrt{77}$. **C.** $\sqrt{82}-5$. **D.** $\sqrt{98}-3$.

Câu 12: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=3$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{1}$. Mặt phẳng (P) chứa Δ và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có chu vi nhỏ nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{6}{\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{13}}$. **D.** $\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;8)$, $B(6;8;7)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM luôn vuông tại M và có diện tích bằng $8\sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(12;13)$. **B.** $(13;14)$. **C.** $(14;15)$. **D.** $(15;16)$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-9)^2+z^2=18$ và hai điểm $A(8;0;0), B(4;4;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ bất kì thuộc mặt cầu (S) sao cho $MA+3MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $2a+3b+c$

A. 22. **B.** 28. **C.** 12. **D.** 8.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8;1;1)$, $B(2;1;3)$ và $C(6;4;0)$. Một điểm $M(a;b;c)$ di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+34$ và $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn. Tính giá trị biểu thức $a+2b-5c$

A. 11 **B.** -11 **C.** 12 **D.** -6

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;10)$ và $B(3;4;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM có OMA tù và có diện tích bằng 15. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ và hai điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;-2;1)$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S). Giá trị lớn nhất của $|2MA-3MB|$ đạt được là

A. $\sqrt{65}$. **B.** $\sqrt{67}$. **C.** $\sqrt{69}$. **D.** $\sqrt{61}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;3)$, bán kính R. AB là một đường kính của (S); mặt phẳng (P) qua I và tạo với AB một góc 60^0. Hai điểm M,N thay đổi trên (P) sao cho $MN=\dfrac{R}{2}$. Biết rằng biểu thức $T=3AM^2+4BN^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{159}{7}$. Viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\dfrac{159}{28}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;0)$ và $B(8;0;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho khoảng cách từ A đến đường thẳng OM bằng 2 và diện tích tam giác OAM không lớn hơn 6. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\dfrac{13}{3};5\right)$. **B.** $\left(4;\dfrac{13}{3}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{7}{2};4\right)$. **D.** $(5;7)$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$, $A(1;2;3), B(2;-1;1), C(4;-3;5), D(1;-2;3)$. Xét các điểm M thay đổi trên mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=9$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(200;210)$. **B.** $(190;200)$. **C.** $(180;190)$. **D.** $(170;180)$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;-2;-3)$, $C(1;0;-3)$. Điểm D thuộc mặt cầu (S). Thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4;5)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(6;7)$. **D.** $(5;6)$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(1;-2;\dfrac{5}{2}\right)$ và $B\left(4;2;\dfrac{5}{2}\right)$. Tìm hoành độ điểm M trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $ABM = 45°$ và tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất?

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 2.

Câu 23: Cho các điểm $A(3;2;1)$, $B(0;1;1)$. Đặt $P = \left|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right|$, trong đó M là một điểm chạy trên mặt phẳng (Oxy). Tìm tung độ của M khi P đạt giá trị nhỏ nhất?

A. -6. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;1)$ và hai đường thẳng $d_1:\begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1 \\ z = -2+t \end{cases}$, $d_2:\begin{cases} x = 5+3s \\ y = 1 \\ z = 3-s \end{cases}$. Gọi B, C là các điểm lần lượt di động trên d_1, d_2. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = AB + BC + CA$.

A. $2\sqrt{29}$. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\sqrt{30}$. **D.** $2\sqrt{30}$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + z + 7 = 0$, đường thẳng $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5$. Gọi A, B là hai điểm trên mặt cầu (S) và $AB = 4$; A', B' là hai điểm nằm trên mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với đường thẳng d. Giá trị lớn nhất của tổng $AA' + BB'$ gần nhất với giá trị nào sau đây

A. 13. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 14.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-5;4;-1)$ và $B(3;4;5)$. Xét các điểm M và N thay đổi sao cho tam giác ABM có diện tích bằng 40 và tam giác ABN vuông tại N. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(2;4)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(5;7)$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-5;4;-1)$ và $B(3;4;5)$. Xét các điểm M và N thay đổi sao cho tam giác ABM có diện tích bằng 15, góc $AMB \geq 90^0$ và tam giác ABN vuông tại N. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(13;15)$. **B.** $(8;11)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(10;12)$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z + 7 = 0$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z + 7 = 0$. Xét hai điểm M, N là hai điểm bất kì thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng

A. $\sqrt{18 + 2\sqrt{13}}$. **B.** $\sqrt{18 - 2\sqrt{13}}$. **C.** $18 - 2\sqrt{13}$. **D.** $18 + 2\sqrt{13}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-2;2;-2)$ và điểm $B(3;-3;3)$. Điểm M thay đổi trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{2}{3}$. Điểm $N(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P): -x + 2y - 2z + 6 = 0$ sao cho MN nhỏ nhất. Tính tổng $T = a + b + c$.

A. 6. **B.** -2. **C.** 12. **D.** -6.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90^o. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $K(3;0;15)$. **B.** $J(-3;2;7)$. **C.** $H(-2;-1;3)$. **D.** $I(-1;-2;3)$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a \ge 4, b \ge 5, c \ge 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Khi tổng $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $a+b+c=$?

A. $a+b+c=16$ **B.** $a+b+c=15$ **C.** $a+b+c=17$ **D.** $a+b+c=14$

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$. Lấy điểm M trong không gian sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) thỏa mãn $AMB=60°$, $BMC=90°$, $CMA=120°$ (A, B, C là các tiếp điểm). Khi đó đoạn thẳng OM có độ nhỏ nhất bằng

A. $\sqrt{14}-3\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{14}+6\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{14}-6$. **D.** $6-\sqrt{14}$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-3)^2+z^2=4$ và hai điểm $A(4;3;3)$, $B(2;1;0)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A tiếp xúc với (S). Gọi khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ B đến (P) lần lượt là m và n. Khi đó $T=m+n$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(2;\frac{7}{2}\right)$.

Câu 34: Cho điểm $A(2;3;5)$, hai mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2=9$, $(S_2): (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$ và điểm M di động thuộc cả hai mặt cầu. Gọi m,n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của AM. Tính giá trị của biểu thức $T=m^2+n^2$.

A. $\frac{341}{4}$. **B.** $\frac{151}{2}$ **C.** $\frac{1028}{7}$ **D.** $\frac{2411}{28}$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;1)$, $B(0;0;4)$, $C(2;2;1)$, $E(4;0;0)$, $F(3;1;\sqrt{6})$. Xét điểm M thay đổi sao cho $MA=\frac{1}{2}MB$ và $MA=MC$. Giá trị lớn nhất của $ME+MF$ bằng

A. $4\sqrt{3+\sqrt{3}}$. **B.** $4\sqrt{3+\sqrt{6}}$. **C.** $4\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **D.** $4\sqrt{6+\sqrt{6}}$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, xét mặt phẳng (ABC), có $A(4;-3;7); B(-1;3;-12); C(-10;3;0)$. Lấy Δ là một đường thẳng bất kì vuông góc với (ABC) gọi $I=\Delta\cap(ABC)$ thỏa mãn I thuộc miền trong ΔABC. Lấy $M\in\Delta; M\ne I$, gọi E,F,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng BC, CA, AB. Hệ thức nào của điểm M là đúng để biểu thức $P=\left|\overrightarrow{IE}\right|.\left|\overrightarrow{IF}\right|.\left|\overrightarrow{IK}\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$.
B. $\overrightarrow{MI}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}\right)$.
C. $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$.
D. $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=-1-t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-1=0$. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất cắt mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=12$ theo đường tròn có bán kính bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{64}{3}$.

Câu 38: Cho $A(1;1;-3), B(6;2;2), C(-1;0;-2)$. Tọa độ điểm $M\in(Oxy)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $M\left(\frac{5}{3};\frac{5}{6};0\right)$. **B.** $M\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{6};0\right)$. **C.** $M\left(-\frac{5}{3};-\frac{5}{6};0\right)$. **D.** $M\left(-\frac{5}{3};\frac{5}{6};0\right)$.

Câu 39: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7;-1;-2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;4)$, khi đó giá trị của tổng $a+b$ là

A. -1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ và các điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(-1;2;3)$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thỏa $d=3MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $T=4x_0-3y_0-2z_0$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$. Mặt phẳng (P) qua điểm A và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) có bán kính nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $(P): 3x-z-1=0$.
B. $(P): 3y-z+1=0$.
C. $(P): 2x+y-z-1=0$.
D. $(P): 3y-z-1=0$.

Câu 42: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(1;0;-1), B(1;2;1), C(2;-1;-1)$. Gọi M là điểm thay đổi thuộc mặt cầu tâm B, bán kính $R=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MC$ là

A. $2\sqrt{14}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{38}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y-1=0$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\y=2-t\\z=1\end{cases}$ và hai điểm $A(-1;-3;11)$, $B\left(\frac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M,d)=2$ và $NA=2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

A. $MN_{\min}=1$. **B.** $MN_{\min}=\sqrt{2}$. **C.** $MN_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $MN_{\min}=\frac{2}{3}$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;-2;4)$, $B(-2;6;4)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=5\\y=-1\\z=t\end{cases}$. Gọi M là điểm di động thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $AMB=90^{\circ}$ và N là điểm di động thuộc d. Tìm giá trị nhỏ nhất của MN.

A. 2 **B.** 8. **C.** $\sqrt{73}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-2)$, $B(2;4;-3)$. Điểm M di động trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MA, MB luôn tạo với (Oxy) các góc phụ nhau. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng OM thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4;5)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(6;7)$.

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;1), B(0;0;9), Q(3;4;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích lớn nhất. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MQ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4;5)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho hai điểm $A(2;-1;-3)$, $B(0;1;-2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z-4=0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho AMB lớn nhất thì giá trị của $\sin AMB$ bằng

A. $-\frac{5}{13}$ **B.** $-\frac{12}{13}$. **C.** $\frac{12}{13}$. **D.** $\frac{5}{13}$.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $S(7;8;6)$ và $P(-5;-4;0)$. Xét khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu đường kính SP. Khi khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng $ABCD$ có phương trình $2x+by+cz+d=0$. Giá trị $b+c+d$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** -3. **D.** -5.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S): $(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P): 2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$ **B.** 27 **C.** $5\sqrt{29}$ **D.** $\sqrt{742}$

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90°. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $H(-2;-1;3)$. **B.** $I(-1;-2;3)$. **C.** $K(3;0;15)$. **D.** $J(-3;2;7)$.

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;-4)$ và $B(-2;1;1)$. Với M là điểm trên đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$, xét N là một điểm di động trên mặt cầu có tâm M với bán kính bằng 2. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=AM+BN$ thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(7;9)$

Câu 52: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$ và hai điểm $A(3;0;0); B(-1;1;0)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+3MB$.

A. $2\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{26}$ **C.** 6 **D.** 5

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

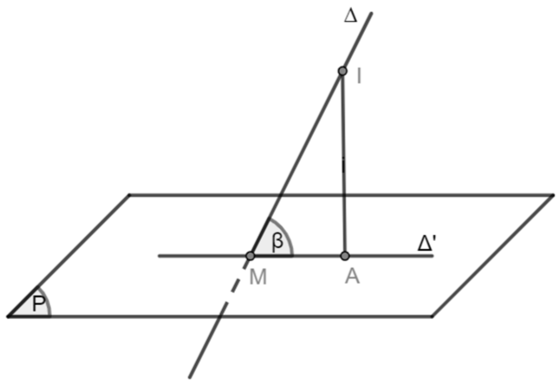
Câu 1: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=1+t\\z=-t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-6=0$.

Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Δ (I có hoành độ âm) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại A. Điểm $N(a;b;c)$ là điểm thay đổi trên (S), khi khoảng cách ON lớn nhất thì giá trị của $T=a+b-c$ là bao nhiêu, biết rằng diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$ (M là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P)).

A. $2+2\sqrt{3}$. **B.** $-2-2\sqrt{3}$. **C.** $-2+2\sqrt{3}$. **D.** $-2+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Áp dụng công thức tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) ta có:

$\sin(\Delta,(P))=\dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\dfrac{|2.1+1.2+(-1).1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$. Suy ra góc $IMA=30^\circ$.

Gọi R là bán kính mặt cầu (S), ta có: $IA=R$. Tam giác IAM vuông tại A có:

$IMA=30^\circ \Rightarrow AM=R\sqrt{3}$. Diện tích: $S_{IAM}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}IA.AM=3\sqrt{3}\Leftrightarrow R=\sqrt{6}$.

$I\in\Delta \Rightarrow$ Giả sử $I(2t+1;1+t;-t)$, $t<\dfrac{-1}{2}$.

$d(I,(P))=R\Leftrightarrow \dfrac{|3t-3|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\t=3\ (L)\end{array}\right.\Rightarrow I(-1;0;1)$.

Phương trình mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$.

Khoảng cách ON lớn nhất $\Rightarrow N\in OI\cap(S)$.

Đường thẳng OI có phương trình: $\begin{cases}x=-t\\y=0\\z=t\end{cases}$.

Tham số t ứng với giao điểm của OI và (S) là nghiệm của phương trình:

$(-t+1)^2+0^2+(t-1)^2=6\Leftrightarrow (t-1)^2=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1+\sqrt{3}\\t=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$

Suy ra đường thẳng OI cắt (S) tại hai điểm $X\left(-1-\sqrt{3};0;1+\sqrt{3}\right);Y\left(-1+\sqrt{3};0;1-\sqrt{3}\right)$

$$OX=\sqrt{\left(-1-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2\left(4+2\sqrt{3}\right)}$$

$$OY=\sqrt{\left(-1+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2\left(4-2\sqrt{3}\right)}$$

Do $OX>OY$ nên điểm N thỏa mãn bài toán khi N trùng điểm X.

$$\Rightarrow N\left(-1-\sqrt{3};0;1+\sqrt{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}a=-1-\sqrt{3}\\ b=0\\ c=1+\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow a+b-c=-2-2\sqrt{3}.$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+y-2z+5=0$ và điểm $A(1;2;-3)$. Đường thẳng d đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trên (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc 90°. Độ dài đoạn MB lớn nhất bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{41}}{6}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{5}}{12}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\ y=2+4t\\ z=-3-4t\end{cases}$ nên tọa độ điểm B thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases}x=1+3t\\ y=2+4t\\ z=-3-4t\\ 2x+y-2z+5=0\end{cases}\Rightarrow 2(1+3t)+(2+4t)-2(-3-4t)+5=0\Leftrightarrow t=-\frac{5}{6}\Rightarrow B\left(-\frac{3}{2};-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Do M nhìn đoạn AB dưới một góc 90° nên M thuộc mặt cầu (S) có đường kính $AB=\dfrac{5\sqrt{41}}{6}$. Lại do $M\in(P)$ nên M thuộc đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu (S) và mặt phẳng (P).

Do MB là một dây cung của đường tròn này nên MB lớn nhất khi nó là đường kính của đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu (S) và mặt phẳng (P). Gọi $I\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$ là trung điểm AB thì I là tâm mặt cầu (S) và $d\left(I;(P)\right)=\dfrac{5}{2}$. Khi đó bán kính đường tròn giao tuyến là:

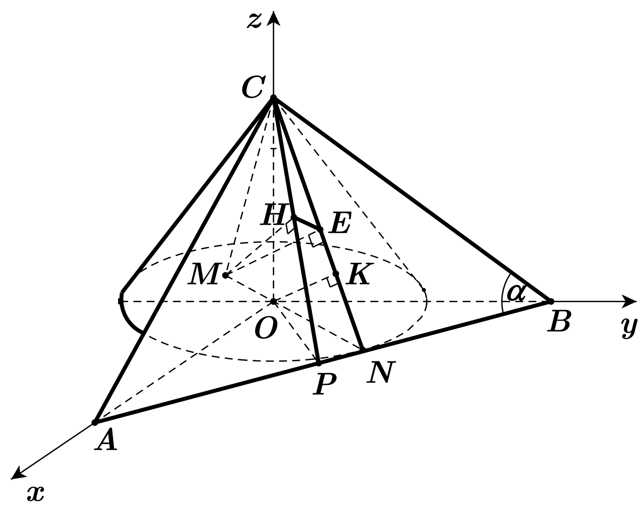
$$r=\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2-d^2\left(I;(P)\right)}=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{41}}{12}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{12}.\text{ Vậy } MB_{\max}=2r=\frac{5\sqrt{5}}{6}.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $C(0;0;4)$, $M(-1;-1;0)$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm C và tạo với trục Oz một góc φ thỏa mãn $\tan\varphi = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$. Giả sử $\vec{n}(a;b;c)$ là một vectơ pháp tuyến của (α). Khi khoảng cách từ M đến (α) lớn nhất, giá trị biểu thức $\dfrac{ac}{b^2}$ bằng

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** -10.

Lời giải

Chọn B



Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên (α), $N = (Oxy) \cap CK$.

Ta có $ON = 5\sqrt{2}$, suy ra N thuộc đường tròn (T) có tâm O, bán kính $r = 5\sqrt{2}$ nằm trong $mp(Oxy)$. ((α) chứa một đường sinh duy nhất của hình nón đỉnh C, trục CO và góc ở đỉnh là 2φ)

Gọi H, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (α) và CN.

Suy ra: $d(M,(\alpha)) = MH \le ME = CM.\sin MCN$.

Do đó $d(M,(\alpha))$ lớn nhất khi $\sin MCN$ lớn nhất.

Vì M nằm trên $mp(Oxy)$ và nằm bên trong đường tròn (T) nên số đo góc MCN lớn nhất khi M, O, N thẳng hàng và O nằm giữa M, N. Khi đó $MCN = \arctan\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \arctan\dfrac{5\sqrt{2}}{4} < \dfrac{\pi}{2}$, nên $\sin MCN$ lớn nhất khi M, O, N thẳng hàng và O nằm giữa M, N.

Mặt khác trong $mp(Oxy)$ thì M nằm trên đường phân giác của góc $x'Oy'$, suy ra $N(5;5;0)$.

Cũng trong $mp(Oxy)$ gọi d là đường phân giác của góc $xOy' \Rightarrow \vec{u}_d = (1;-1;0)$ là vectơ chỉ phương của d và $d \perp (MCN)$. Dễ thấy $\vec{u}_d \perp \overrightarrow{OK}$ và $\vec{n}$ cùng phương với $\overrightarrow{OK}$, do đó $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{u}_d$ và $\overrightarrow{CN}$, từ đó ta có $\vec{n} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{CN}\right] = (4;4;10) \Rightarrow \dfrac{ac}{b^2} = \dfrac{5}{2}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;5), B(4;-3;7)$. Xét điểm M thay đổi sao cho tam giác OMA không có góc tù và có diện tích bằng 10. Giá trị nhỏ nhất của độ dài MB là

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M\left(x;y;z\right)$

Ta có $S_{OMA}=10\Rightarrow d\left(M,OA\right)=4\Rightarrow x^2+y^2=16$

$OA^2=25;OM^2=x^2+y^2+z^2=16+z^2;MA^2=x^2+y^2+\left(z-5\right)^2$

Do cho tam giác OMA không có góc tù nên

$$\begin{cases}OA^2+OM^2\ge MA^2\\OA^2+MA^2\ge OM^2\\MA^2+OM^2\ge OA^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}25+16+z^2\ge 16+\left(z-5\right)^2\\25+16+\left(z-5\right)^2\ge 16+z^2\Leftrightarrow 0\le z\le 5\\16+\left(z-5\right)^2+16+z^2\ge 25\end{cases}$$

Ta có $MB^2=\left(x-4\right)^2+\left(y+3\right)^2+\left(z-7\right)^2$

Do $x^2+y^2=16\Rightarrow\left(x-4\right)^2+\left(y+3\right)^2\ge 1$

$0\le z\le 5\Rightarrow -7\le z-7\le -2\Rightarrow\left(z-7\right)^2\ge 4$

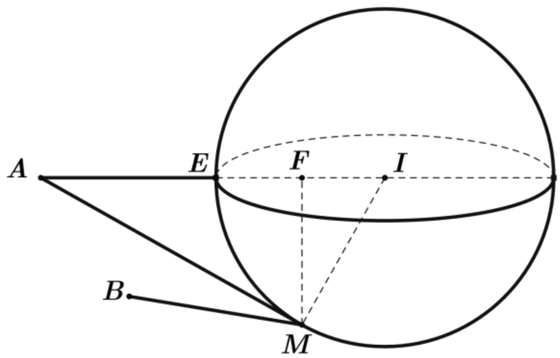
Nên $MB^2\ge 1+4=5\Rightarrow\min MB=\sqrt{5}.$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right):\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2+z^2=9$ và hai điểm $A\left(-2;3;2\right),B\left(-1;0;3\right)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $\left(S\right)$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$.

A. $\sqrt{11}$. **B.** 6. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $\sqrt{31}$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu $\left(S\right):\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2+z^2=9$ có tâm $I\left(2;-1;0\right)$, bán kính $R=3$.

Ta có $IA=\sqrt{4^2+\left(-4\right)^2+\left(-2\right)^2}=6=2R$.

Gọi $E\left(0;1;1\right)$ là trung điểm của $IA\Rightarrow E\in\left(S\right)$. Gọi $F\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của IE.

Xét tam giác IMF và IAM có $\frac{IF}{IM}=\frac{1}{2}=\frac{IM}{IA}$ và MIA chung nên $\Delta IMF\sim\Delta IAM$.

Do đó $\frac{MF}{AM}=\frac{1}{2}\Rightarrow AM=2MF$.

Ta có $MA+2MB=2MF+2MB\ge 2BF=\sqrt{41}$.

Dấu bằng xảy ra khi $M=BF\cap\left(S\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$ là $\sqrt{41}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(-1;4;1), B(3;-2;0)$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-m}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+m^2}{1}$, với m là tham số. Gọi $M\left(a;b;c\right)$, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên Δ sao cho thể tích khối tứ diện $ABMN$ nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-4;-2)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) qua điểm A vuông góc Δ là $x-2y+z+8=0$.

Mặt phẳng (Q) qua B vuông góc với Δ là $x-2y+z-7=0$.

Do đó $MN=d((P),(Q))=\dfrac{\left|8-(-7)\right|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{6}}$.

Đường thẳng Δ qua điểm $I(m;-1;-m^2)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;1)$.

Đường thẳng AB qua điểm $A(-1;4;1)$ có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(4;-6;-1)$.

Góc giữa hai đường thẳng Δ và AB là $\cos\alpha=\dfrac{\left|\vec{u}.\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{15}{\sqrt{6}\sqrt{53}}=\dfrac{15}{\sqrt{318}}\Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{\dfrac{31}{106}}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và MN là $d=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AI}\right|}{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AB}\right]\right|}=\dfrac{\left|2m^2-8m+19\right|}{\sqrt{93}}=\dfrac{\left|2\left(m-2\right)^2+11\right|}{\sqrt{93}}\geq\dfrac{11}{\sqrt{93}}$.

Do đó $V_{ABMN}=\dfrac{1}{6}AB.MN.d.\sin\alpha\geq\dfrac{1}{6}.\dfrac{15}{\sqrt{6}}.\sqrt{53}.\dfrac{11}{\sqrt{93}}.\sqrt{\dfrac{31}{106}}=\dfrac{55}{12}$.

Dấu "=" xảy ra khi $m=2$.

Khi đó phương trình đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+4}{1}$.

Đường thẳng Δ có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;1)$. Vì M là hình chiếu của A lên Δ nên $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0\Rightarrow M(\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{16}{3})$. Suy ra $T=a+b+c=-3$.

Câu 7: Trong không gian *Oxyz* cho hai điểm $A\left(0;-1;2\right)$, $B\left(2;5;4\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right): 2x-2y+z+3=0$. Gọi $M\left(a;b;c\right)$ là điểm thỏa mãn biểu thức $MA^2+MB^2=40$ và khoảng cách từ M đến $\left(P\right)$ nhỏ nhất. Khi đó $T=a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 25. **B.** 21. **C.** 19. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow I\left(1;2;3\right)$, $AB=2\sqrt{11}$

$MA^2 + MB^2 = 40 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 40$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 40 \Leftrightarrow MI = 3$

Do đó M thuộc mặt cầu (S) cầu có tâm $I(1;2;3), R = 3$.

$d\left(I,(P)\right) = \dfrac{|2.1 - 2.2 + 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{4}{3} < R$ suy ra mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn.

Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) nhỏ nhất.

Khi đó, M thuộc đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P)

Ta có phương trình tham số của đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Tọa độ M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow (2t)^2 + (-2t)^2 + (t)^2 = 9 \Rightarrow 9t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 1$

Với $t = 1 \Rightarrow M(3;0;4) \Rightarrow d\left(M;(P)\right) = \dfrac{|2.3 - 2.0 + 4 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{10}{3}$.(loại)

Với $t = -1 \Rightarrow M(-1;4;2) \Rightarrow d\left(M;(P)\right) = \dfrac{|2.(-1) - 2.4 + 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{3}$

Vậy $M(-1;4;2) \Rightarrow T = a^2 + b^2 + c^2 = 21$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(4;-5;2)$ và $B(1;-1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và song song với (α) và thõa mãn điều kiện sao cho khoảng cách từ B đến Δ là nhỏ nhất. Đường thẳng Δ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(2;-2;-3)$. **B.** $N(6;-7;-1)$. **C.** $P(2;3;-5)$. **D.** $Q(6;-7;1)$.

Lời giải

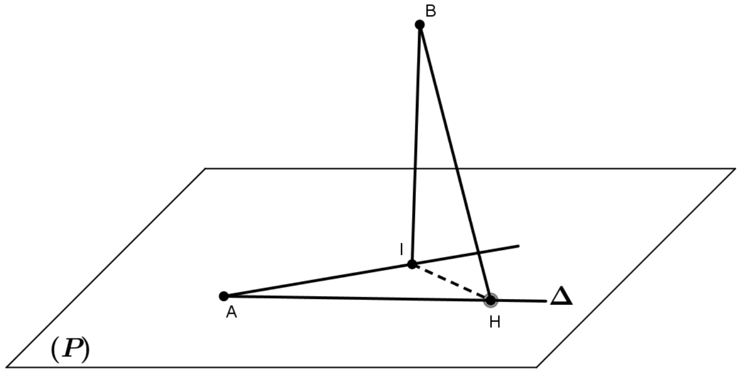
Chọn B

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và song song với (α).

Phương trình của $(P): x - 2y + 2z - 18 = 0$

Suy ra Δ nằm trong mặt phẳng (P)

Gọi I và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên (P) và Δ



Tam giác BIH vuông tại $I \Rightarrow BH \geq BI \Rightarrow d(B,\Delta) \geq d(B,(P))$

Suy ra $d(B,\Delta)_{\min} = d(B,(P))$ hay Δ là đường thẳng đi qua hai điểm A và I (điểm H trùng với điểm I).

BI vuông góc với (P) nên đường thẳng BI nhận $\overrightarrow{n_p} = (1;-2;2)$ là một VTCP.

Phương trình tham số của đường thẳng BI là: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 3+2t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$.

Điểm I là giao điểm của đường thẳng BI và mặt phẳng $\left(P\right)$ nên tọa độ I thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 3+2t \\ x-2y+2z-18=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(2;-3;5\right) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \left(-2;2;3\right)$.

Ta có đường thẳng Δ có một VTCP là $\vec{u} = (2;-2;-3)$ và đi qua điểm $I\left(2;-3;5\right)$

Phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-5}{-3}$.

Thay tọa độ các điểm M, N, P, Q vào phương trình chính tắc của đường thẳng Δ ta thấy tọa độ điểm N thỏa mãn. Vậy đường thẳng Δ đi qua điểm N .

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A\left(-3;0;1\right), B\left(-2;0;0\right)$, $C\left(-\dfrac{3}{2};1;1\right)$. Điểm M thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB} = AB$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $O.MAC$ là bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{12}{3}$. **C.** $\dfrac{22}{3}$. **D.** $\dfrac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M\left(a;b;c\right)$. Ta có:

$$\frac{MA}{MB} = AB \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = \sqrt{2} \Leftrightarrow MA^2 = 2.MB^2 \Leftrightarrow \left(a+3\right)^2 + \left(b\right)^2 + \left(c-1\right)^2 = 2\left[\left(a+2\right)^2 + \left(b\right)^2 + \left(c\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2a + 2c - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(a+1\right)^2 + b^2 + \left(c+1\right)^2 = 4$$

Vậy M thuộc mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(-1;0;-1\right)$ và bán kính $R = 2$.

Mặt phẳng $(\alpha)\equiv(OAC)$ đi qua các điểm $O(0;0;0)$, $A(-3;0;1)$, $C\left(-\dfrac{3}{2};1;1\right)$ nên có phương trình là $(\alpha):-2x+3y-6z=0$.

Vì $d\left(I;(OAC)\right)=\dfrac{8}{7}<R=2$ nên (OAC) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn.

Ta có: $V_{O.MAC}=V_{M.OAC}=\dfrac{1}{3}.d\left(M;(OAC)\right).S_{\Delta OAC}=\dfrac{7}{12}.d\left(M;(OAC)\right)$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $O.MAC$ đạt được khi $d\left(M;(OAC)\right)=d\left(M;(\alpha)\right)=\dfrac{\left|-2a+3b-6c\right|}{7}$ lớn nhất.

Đặt $P=\left|-2a+3b-6c\right|$.Áp dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối $|x+y|\le|x|+|y|$ và Bunhiacopxki:

$P=\left|-2a+3b-6c\right|=\left|\left[-2(a+1)+3b-6(c+1)\right]+8\right|\le\left|-2(a+1)+3b-6(c+1)\right|+8$

$\le\sqrt{(-2)^2+3^2+(-6)^2}.\sqrt{(a+1)^2+b^2+(c+1)^2}+8=7.4+8=22$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases}(a+1)^2+b^2+(c+1)^2=4\\ \dfrac{a+1}{-2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c+1}{-6}\\ 8.\left[-2(a+1)+3b-6(c+1)\right]\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-11}{7}\\ b=\dfrac{6}{7}\\ c=\dfrac{-19}{7}\end{cases}$

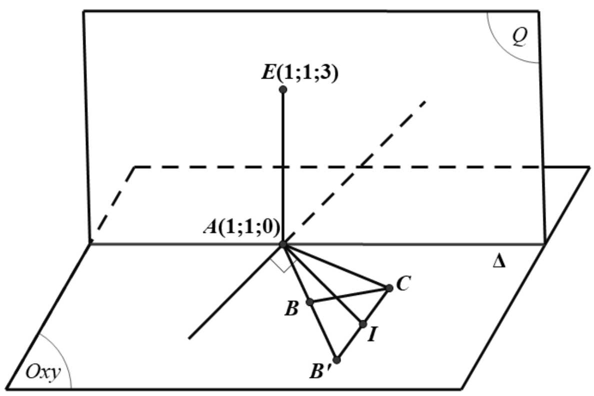
Vậy: $V_{O.MAC}=\dfrac{11}{6}$.

Câu 10: Trong không gian *Oxyz*, cho ba điểm $B(2;5;0)$, $C(4;7;0)$ và $E(1;1;3)$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua E và vuông góc với mặt phẳng (Oxy), Δ là giao tuyến của (Q) và (Oxy), $T=2d\left(B,(Q)\right)+d\left(C,(Q)\right)$. Khi T đạt giá trị lớn nhất, Δ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $M(-12;6;0)$. **B.** $P(12;-4;0)$. **C.** $Q(15;4;0)$. **D.** $N(15;-4;0)$.

Lời giải

Chọn D



Ta thấy B,C cùng thuộc mặt phẳng (Oxy). Gọi A là hình chiếu vuông góc của E trên $(Oxy)\Rightarrow A(1;1;0)$.

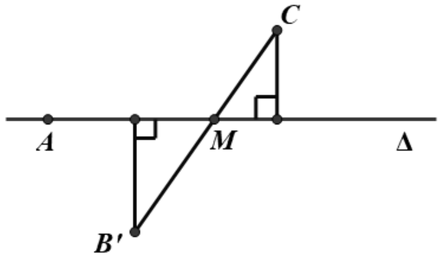
Vì $(Q)\perp(Oxy)$ nên $A\in\Delta$ và $T=2d\left(B,(Q)\right)+d\left(C,(Q)\right)=2d\left(B,\Delta\right)+d\left(C,\Delta\right)$.

Trên tia AB lấy điểm B' đối xứng với A qua B, suy ra $B'(3;9;0)$ và $d\left(B',\Delta\right)=2d\left(B,\Delta\right)$.

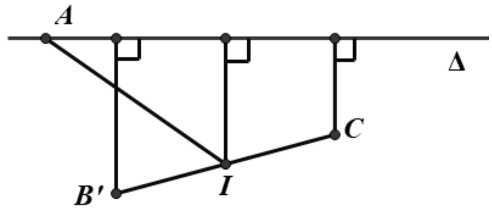
Do đó: $T = 2d\left(B,(Q)\right) + d\left(C,(Q)\right) = d\left(B',\Delta\right) + d\left(C,\Delta\right)$.

Nhận xét:

Nếu Δ đi qua A và cắt đoạn $B'C$ tại M thì $d\left(B',\Delta\right) + d\left(C,\Delta\right) \le B'M + CM = B'C$, dấu "=" xảy ra khi $\Delta \perp B'C$ (1).



Nếu Δ không cắt đoạn $B'C$ thì $d\left(B',\Delta\right) + d\left(C,\Delta\right) = 2d\left(I,\Delta\right) \le 2IA$, với $I\left(\frac{7}{2};8;0\right)$ là trung điểm đoạn $B'C$, dấu "=" xảy ra khi $\Delta \perp IA$ (2).



Mặt khác: xét tam giác $AB'C$ có $\cos B'AC = \frac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC}}{AB'.AC} = \frac{54}{\sqrt{68}.\sqrt{45}} > 0$. Suy ra $B'AC$ nhọn nên $2IA > B'C$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $MaxT = 2IA = 2\frac{\sqrt{221}}{2} = \sqrt{221}$, khi Δ đi qua $A(1;1;0)$ và vuông góc với đường thẳng IA. Khi đó Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta} = \frac{1}{3}\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AE}\right] = \left(7;-\frac{5}{2};0\right)$.

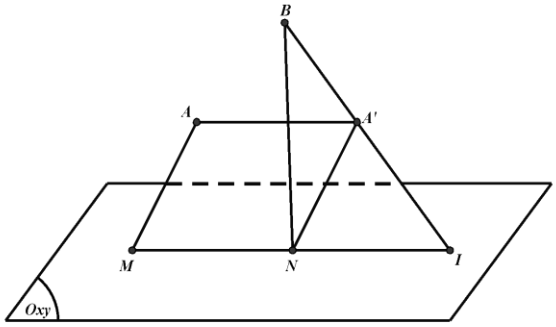
$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$. Với $t = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = -4 \Rightarrow N(15;-4;0) \in \Delta \\ z = 0 \end{cases}$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;-2;0)$ và hai điểm $A(-4;7;3)$, $B(4;4;5)$. Hai điểm M,N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng $\vec{a}$ và $MN = 5\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$

A. $\sqrt{62}$. **B.** $\sqrt{77}$. **C.** $\sqrt{82} - 5$. **D.** $\sqrt{98} - 3$.

Lời giải

Chọn A



Ta thấy A và B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (Oxy).

Dựng hình bình hành $AMNA'$. Khi đó ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN} = (k; -2k; 0)$ với $k > 0$.

Từ giả thiết $MN = 5\sqrt{5} \Rightarrow k = 5$. Suy ra $\overrightarrow{AA'} = (5; -10; 0) \Rightarrow A'(1; -3; 3)$.

Khi đó $|AM - BN| = |A'N - BN| \le A'B$.

Suy ra $Max|AM - BN| = A'B = \sqrt{62}$. Dấu "=" xảy ra $N \equiv I$ là giao điểm của $A'B$ với mặt phẳng (Oxy).

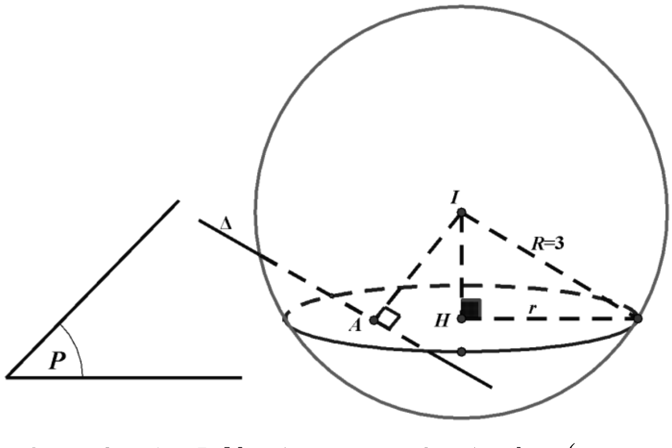
Vậy giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng $\sqrt{62}$.

Câu 12: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 3$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$. Mặt phẳng (P) chứa Δ và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có chu vi nhỏ nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\dfrac{6}{\sqrt{13}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi A là hình chiếu vuông góc của I lên Δ. Suy ra $A \in \Delta$ và $A(1+t; -1-t; 3+t)$.

$\overrightarrow{IA} = (t; -3-t; t)$. Đường thẳng (Δ) có 1 VTCP là $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; -1; 1)$.

Do $\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow t + 3 + t + t = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Suy ra $A(0;0;2)$.

Nhận xét: $d(I, \Delta) = IA = \sqrt{6} < R = 3$ suy ra A nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là hình chiếu của I lên (P) thì H là tâm của đường tròn (C).

Đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{9 - IH^2}$.

Chu vi đường tròn (C) nhỏ nhất khi bán kính r nhỏ nhất tức IH lớn nhất.

Mà $IH \le IA \Rightarrow IH_{\max} = IA$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $H \equiv A$.

Khi đó (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với IA.

Phương trình của mặt phẳng $(P): x+2y+z-2=0$. Suy ra $d\left(O,(P)\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

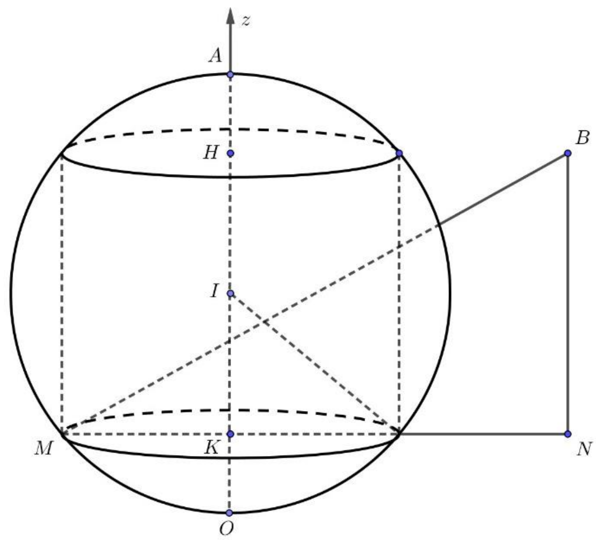
Vậy $d\left(O,(P)\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;8)$, $B(6;8;7)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM luôn vuông tại M và có diện tích bằng $8\sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(12;13)$. **B.** $(13;14)$. **C.** $(14;15)$. **D.** $(15;16)$.

Lời giải

Chọn C



Tam giác OAM luôn vuông tại M nên M thuộc mặt cầu đường kính OA, bán kính $R=4$.

Tam giác OAM có diện tích bằng $8\sqrt{3}$ $\Rightarrow 8\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}d_{(M;OA)}.OA \Leftrightarrow d_{(M;OA)}=2\sqrt{3} \Rightarrow M$ thuộc mặt trụ bán kính $r=2\sqrt{3}$ và trục là OA.

Từ hai giả thiết trên ta thấy M thuộc hai đường tròn đáy là giao tuyến của mặt trụ và mặt cầu.
Gọi I là tâm mặt cầu, H,K lần lượt là hai tâm của đáy hình trụ như hình vẽ.

Ta có: $IK=\sqrt{R^2-r^2}=2 \Rightarrow OK=2$.

Xét mặt phẳng (P) đi qua đường tròn $(K;r)$ khi đó phương trình $(P): z-2=0$.

Gọi N là hình chiếu của B lên (P) $\Rightarrow N(6;8;2)$.

Ta có: $BN=5$, $NK=10$.

Lại có: $BM=\sqrt{BN^2+MN^2} \le \sqrt{BN^2+(NK+r)^2} \Rightarrow BM_{\max}=\sqrt{5^2+\left(10+2\sqrt{3}\right)^2} \approx 14,36$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-9)^2+z^2=18$ và hai điểm $A(8;0;0), B(4;4;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ bất kì thuộc mặt cầu (S) sao cho $MA+3MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $2a+3b+c$

A. 22. **B.** 28. **C.** 12. **D.** 8 .

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(-1;9;0\right)$ và bán kính $R=3\sqrt{2}$

Ta có: $IA=9\sqrt{2}>R$; $IB=5\sqrt{2}>R$ nên A,B nằm ngoài mặt cầu (S) và $IA=3R$

Trên đoạn IA lấy điểm C sao cho $IC=\dfrac{R}{3}$. Xét hai tam giác ΔICM và ΔIMA có: $\hat{I}$ chung; $\dfrac{IC}{IM}=\dfrac{IM}{IA}=\dfrac{1}{3}$ nên ΔICM đồng dạng với ΔIMA. Suy ra $\dfrac{MC}{MA}=\dfrac{IM}{IA}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow MA=3MC$

$MA+3MB=3MC+3MB=3(MC+MB)\geq 3BC$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của đoạn BC và mặt cầu (S).

Gọi $C(x;y;z)$, ta có $\overrightarrow{IA}=9\overrightarrow{IC}\Rightarrow\begin{cases}9=9(x+1)\\-9=9(y-9)\\0=9(z-0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=8\\z=0\end{cases}$;

$\overrightarrow{BC}=(-4;4;0)$. Phương trình đường thẳng $BC:\begin{cases}x=4+t\\y=4-t\\z=0\end{cases}$

Tọa độ giao điểm của M là nghiệm hệ phương trình:

$\begin{cases}x=4+t;\ y=4-t;\ z=0\\(x+1)^2+(y-9)^2+z^2=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4+t;y=4-t;z=0\\t=-2\vee t=-8\end{cases}$.

Suy ra $M(2;6;0)$ hoặc $M(-4;12;0)$

Vì M thuộc đoạn BC nên $M(2;6;0)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8;1;1)$, $B(2;1;3)$ và $C(6;4;0)$. Một điểm $M(a;b;c)$ di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+34$ và $\left|MA-MB\right|$ đạt giá trị lớn. Tính giá trị biểu thức $a+2b-5c$

A. 11 **B.** -11 **C.** 12 **D.** -6

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(a;b;c)$, $\overrightarrow{MA}=\left(-8-a;1-b;1-c\right),\overrightarrow{BC}=(2;3;-3)$

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+34\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=34\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=34$

$\Leftrightarrow 4(-8-a)+3(1-b)-3(1-c)=34\Leftrightarrow -4a-3b+3c-66=0$

Suy ra $M\in(P):-4x-3y+3z-66=0$

Ta thấy điểm A,B nằm về cùng phía đối với mặt phẳng (P)

Ta có: $\left|MA-MB\right|\leq AB$ suy ra $\left|MA-MB\right|$ đạt gí trị lớn nhất bằng AB khi M,A,B thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn thẳng AB hay M là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P)

Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=2+5t\\y=1\\z=3+t\end{cases}$

Tọa độ điểm M là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=2+5t \\ y=1 \\ z=3+t \\ -4x-3y+3z-66=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+5t \\ y=1 \\ z=3+t \\ -4(2+5t)-3.1+3(3+t)-66=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-18 \\ y=1 \\ z=-1 \\ t=-4 \end{cases}$$

Vậy $M(-18;1;-1)$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;10)$ và $B(3;4;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM có $\widehat{OMA}$ tù và có diện tích bằng 15. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x;y;z)$, suy ra $\overrightarrow{OA}=(0;0;10)$ và $\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$, dẫn đến $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right]=(-10y;10x;0)$.

Suy ra, $S_{OAM}=15 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{100\left(x^2+y^2\right)}=15 \Leftrightarrow x^2+y^2=9.$

Do tam giác OAM tù tại M nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}>0 \\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}>0 \\ \overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MA}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z>0 \\ z<10 \\ x^2+y^2-z(10-z)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<z<10 \\ z^2-10z+9<0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<z<9.$$

Khi đó: $MB^2=(x-3)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=-(6x+8y)+z^2-12z+70$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} -\sqrt{\left(6^2+8^2\right)\left(x^2+y^2\right)}+z^2-12z+70=z^2-12z+40=(z-6)^2+4\geq 4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ \frac{x}{y}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \\ z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25x^2}{9}=9 \\ y=\frac{4}{3}x \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{5} \\ y=\frac{12}{5} \\ z=6. \end{cases}$

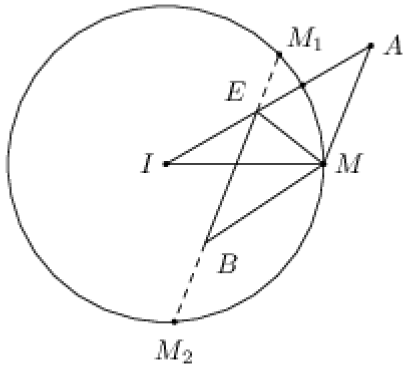
Suy ra, $\min MB=2.$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ và hai điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;-2;1)$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S). Giá trị lớn nhất của $|2MA-3MB|$ đạt được là

A. $\sqrt{65}$. **B.** $\sqrt{67}$. **C.** $\sqrt{69}$. **D.** $\sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;0)$, bán kính $R=2$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-2;2;1)\Rightarrow IA=3>R$, suy ra A nằm ngoài (S) và $\dfrac{IA}{R}=\dfrac{3}{2}$.

Lại có $\overrightarrow{IB}=(1;-1;1)\Rightarrow IB=\sqrt{3}<R$, suy ra B nằm trong (S).

Lấy điểm $E\in IA$ sao cho $IE=\dfrac{2}{3}\cdot R=\dfrac{4}{3}$.

Xét hai tam giác IEM và tam giác IMA, ta có $\hat{I}$ chung và $\dfrac{IE}{IM}=\dfrac{IM}{IA}=\dfrac{2}{3}$. Do đó, hai tam giác IEM và tam giác IMA đồng dạng. Suy ra, $\dfrac{EM}{AM}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow AM=\dfrac{3}{2}EM$. Khi đó,

$$P=\left|3EM-3MB\right|=3\left|EM-MB\right|\le 3EB.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv M_1$ hoặc $M\equiv M_2$, tức là M, E, B thẳng hàng, suy ra $\max P=3EB$. Gọi $E(a;b;c)$.

Ta có: $IE=\dfrac{2}{3}R=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot IA=\dfrac{4}{9}\cdot IA\Rightarrow \overrightarrow{IE}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{IA}=\left(-\dfrac{8}{9};\dfrac{8}{9};\dfrac{4}{9}\right)\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{9}\\ b=-\dfrac{1}{9}\\ c=\dfrac{4}{9}.\end{cases}$

Suy ra $E\left(\dfrac{1}{9};-\dfrac{1}{9};\dfrac{4}{9}\right)\Rightarrow\overrightarrow{EB}=\left(\dfrac{17}{9};-\dfrac{17}{9};\dfrac{5}{9}\right)\Rightarrow EB=\dfrac{\sqrt{67}}{3}$.

Vậy $\max P=3EB=\sqrt{67}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;3)$, bán kính R. AB là một đường kính của (S); mặt phẳng (P) qua I và tạo với AB một góc 60^0. Hai điểm M,N thay đổi trên (P) sao cho $MN=\dfrac{R}{2}$. Biết rằng biểu thức $T=3AM^2+4BN^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{159}{7}$. Viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$.

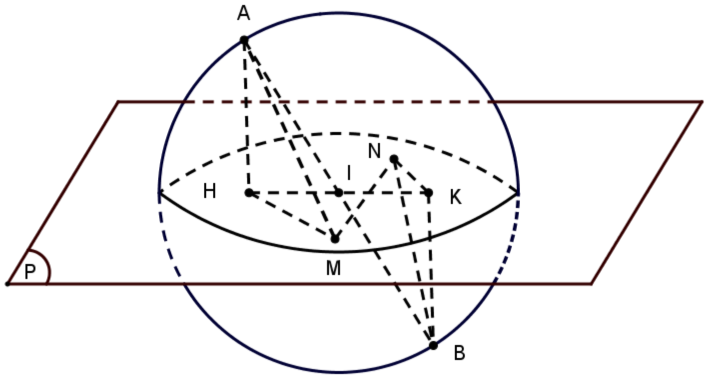
B. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$.

D. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\dfrac{159}{28}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A,B xuống mặt phẳng (IMN).

Góc giữa AB với (IMN) là $AIH = BIK = 60^0$, khi đó $AH = BK = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; $IH = IK = \frac{R}{2} \Rightarrow HK = R$.

$T = 3AM^2 + 4BN^2 = 3\left(AH^2 + HM^2\right) + 4\left(BK^2 + KN^2\right) = 3AH^2 + 4BK^2 + 3HM^2 + 4KN^2$

$= \frac{21R^2}{4} + 3HM^2 + 4KN^2$.

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(3HM^2 + 4KN^2\right) \ge \left(HM + KN\right)^2 = \left(HM + MN + KN - MN\right)^2 \ge \left(HK - MN\right)^2 = \frac{R^2}{4}$

$\Rightarrow \left(3HM^2 + 4KN^2\right) \ge \frac{3R^2}{7}$, dấu "=" xảy ra khi H,M,N,K theo thứ tự đó cùng nằm trên cùng một đường thẳng.

Suy ra $T \ge \frac{21R^2}{4} + \frac{3R^2}{7} = \frac{159R^2}{28}$ như vậy $T_{\min} = \frac{159R^2}{28} = \frac{159}{7} \Leftrightarrow R^2 = 4$.

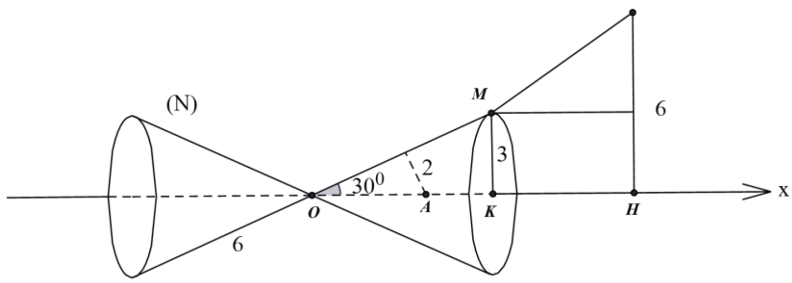
Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;0)$ và $B(8;0;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho khoảng cách từ A đến đường thẳng OM bằng 2 và diện tích tam giác OAM không lớn hơn 6. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{13}{3};5\right)$. **B.** $\left(4;\frac{13}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{7}{2};4\right)$. **D.** $(5;7)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\sin MOA = \dfrac{d\left(A,OM\right)}{OA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MOA = 30^{\text{o}}$.

Lại có $S_{MOA} = \dfrac{1}{2}.OM.d\left(A,OM\right) \le 6 \Rightarrow OM \le 6$.

Suy ra quỹ tích điểm M là mặt xung quanh của hai hình nón có đỉnh O, trục OA, góc ở đỉnh hình nón là $2.30^{\text{o}} = 60^{\text{o}}$ và đường sinh bằng 6.

Để MB nhỏ nhất thì điểm M phải nằm vị trí như trên hình vẽ.

Gọi hình chiếu của B, M trên trục Ox lần lượt là H, K.

Ta có $OK = OM.\cos 30^{\text{o}} = 6.\cos 30^{\text{o}} = 3\sqrt{3}$, $MK = OM.\sin 30^{\text{o}} = 6.\sin 30^{\text{o}} = 3$

Mặt khác $H\left(8;0;0\right)$ nên $OH = 8, BH = 6$. Suy ra $MB_{\min} = \sqrt{\left(8-3\sqrt{3}\right)^2 + \left(6-3\right)^2} \approx 4{,}1$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$, $A(1;2;3), B(2;-1;1), C(4;-3;5), D(1;-2;3)$. Xét các điểm M thay đổi trên mặt cầu $\left(S\right): x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(200;210)$. **B.** $(190;200)$. **C.** $(180;190)$. **D.** $(170;180)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 3$.

Gọi I là trọng tâm tứ diện $ABCD$, ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ suy ra $I\left(2;-1;3\right)$

$T = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2$

$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}\right)^2$

$= 4MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right) + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$

$= 4MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$ đạt GTLN khi độ dài đoạn thẳng IM lớn nhất

$\max IM = OI + R = \sqrt{14} + 3$

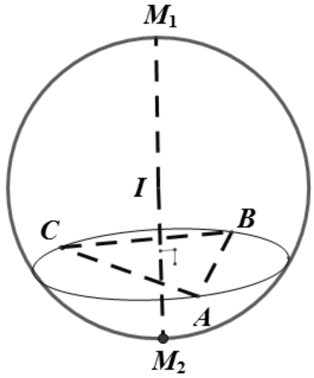
Vậy $\max T = 4\left(OI + R\right)^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 120 + 24\sqrt{14}$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$,cho mặt cầu $\left(S\right): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$ và các điểm $A\left(0;1;1\right)$, $B\left(-1;-2;-3\right)$, $C\left(1;0;-3\right)$. Điểm D thuộc mặt cầu $\left(S\right)$. Thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(4;5\right)$. **B.** $\left(2;5\right)$. **C.** $\left(6;7\right)$. **D.** $\left(5;6\right)$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1: Ta có $(S):(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;-3;-4)\\ \overrightarrow{AC}=(1;-1;-4)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(8;-8;4)$.

Gọi $D(x;y;z)\in(S)\Rightarrow\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4\\ \overrightarrow{AD}=(x;y-1;z-1)\end{cases}$.

Ta có: $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{1}{6}|8x-8y+4z+4|=\dfrac{2}{3}|2x-2y+z+1|$.

Ta có:

$(2x-2y+z-1)^2=\left[2.(x-1)-2.y+1.(z+1)\right]^2\le\left(2^2+2^2+1^2\right)\left[(x-1)^2+y^2+(z+1)^2\right]=36$

$\Rightarrow -6\le 2x-2y+z-1\le 6\Leftrightarrow -4\le 2x-2y+z+1\le 8\Rightarrow|2x-2y+z+1|\le 8\Rightarrow V_{ABCD}\le\dfrac{16}{3}$

Suy ra: Giá trị lớn nhất của V_{ABCD} bằng $\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{1}>0\\ (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4\end{cases}\Rightarrow D\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

Cách 2:

Mặt cầu (S): $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$ có tâm $I(1;0-1)$,bán kính $R=2$.

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;-3;-4)\\ \overrightarrow{AC}=(1;-1;-4)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(8;-8;4)\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{8^2+8^2+4^2}=6.$

Mặt phẳng $(ABC):2x-2y+z+1=0$.

Ta có: $d(I;(ABC))=\dfrac{|2.1-2.0-1+1|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{2}{3}<R=2\Rightarrow$ mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (ABC) theo thiết diện là một đường tròn.

Ta lại có: $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABC}.d(D;(ABC))=2.d(D;(ABC))$.

Do đó: V_{ABCD} lớn nhất $\Leftrightarrow d(D;(ABC))$ lớn nhất.

Mà $d(D;(ABC))_{\max}=R+d(I;(ABC))=2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$. Do đó: $\max V_{ABCD}=\dfrac{16}{3}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(1;-2;\dfrac{5}{2}\right)$ và $B\left(4;2;\dfrac{5}{2}\right)$. Tìm hoành độ điểm M trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $ABM=45^\circ$ và tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất?

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy đường thẳng AB song song với mặt phẳng (Oxy).

Do hai điểm A,B cố định nên ΔMAB có diện tích nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ khoảng cách từ M đến đường thẳng AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M thuộc đường thẳng Δ là hình chiếu của đường thẳng AB trên mặt phẳng (Oxy).

Gọi A' là hình chiếu của A trên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow A'(1;-2;0)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm A' và song song với đường thẳng AB nên có phương trình là:

$\Delta:\begin{cases}x=1+3t\\y=-2+4t\\z=0\end{cases}$; do $M\in\Delta$ nên gọi $M(1+3t;-2+4t;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}=\left(3t-3;4t-4;-\frac{5}{2}\right)$; $\overrightarrow{BA}=(-3;-4;0)$.

Ta có: $\cos ABM=\cos\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{-3(3t-3)-4(4t-4)}{5.\sqrt{(3t-3)^2+(4t-4)^2+\frac{25}{4}}}=\dfrac{-25(t-1)}{5.\sqrt{25(t-1)^2+\frac{25}{4}}}$

Nên $ABM=45^\circ$ khi và chỉ khi

$$\frac{-25(t-1)}{5.\sqrt{25(t-1)^2+\frac{25}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 50(t-1)^2=25(t-1)^2+\frac{25}{4}\ (t\le 1)$$

$\Leftrightarrow (t-1)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{3}{2}\\t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow t=\frac{1}{2}$. Vậy hoành độ của điểm M bằng $\frac{5}{2}$.

Câu 23: Cho các điểm $A(3;2;1)$, $B(0;1;1)$. Đặt $P=\left|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$, trong đó M là một điểm chạy trên mặt phẳng (Oxy). Tìm tung độ của M khi P đạt giá trị nhỏ nhất?

A. -6. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x_I;y_I;z_I)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Khi đó, $2\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\begin{cases}2(3-x_I)=3(0-x_I)\\2(2-y_I)=3(1-y_I)\\2(1-z_I)=3(1-z_I)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=-6\\y_I=-1\\z_I=1\end{cases}\Leftrightarrow I(-6;-1;1)$.

Ta có, $P=\left|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|=\left|2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})-3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\right|=\left|2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI$.

Do đó, P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (Oxy). Vậy $M(-6;-1;0)$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;1)$ và hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2-2t\\y=1\\z=-2+t\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=5+3s\\y=1\\z=3-s\end{cases}$. Gọi B, C là các điểm lần lượt di động trên d_1, d_2. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=AB+BC+CA$.

A. $2\sqrt{29}$. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\sqrt{30}$. **D.** $2\sqrt{30}$.

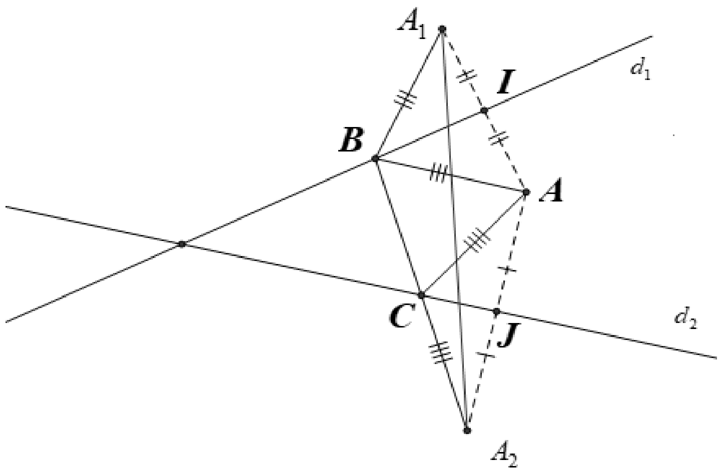
Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra hai đường thẳng d_1, d_2 cùng nằm trong mặt phẳng $(\alpha):y=1$ và $A\in(\alpha)$.

d_1 có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(-2;0;1)$; d_2 có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(3;0;-1)$.

Do $\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]=(0;1;0)\neq\vec{0}$ nên d_1 cắt d_2.



Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua d_1 và d_2.

Gọi (β) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d_1 $\Rightarrow(\beta):-2x+z+1=0$.

Gọi $I=(\beta)\cap d_1$, thì tọa độ của I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x=2-2t\\y=1\\z=-2+t\\-2x+z+1=0\end{cases}\Rightarrow I(0;1;-1)\Rightarrow A_1(-1;1;-3).$$

Gọi (δ) là mặt phẳng qua A và vuông góc với $d_2\Rightarrow(\delta):3x-z-2=0$.

Gọi $J=(\delta)\cap d_2$, thì tọa độ của J là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x=5+3s\\y=1\\z=3-s\\3x-z-2=0\end{cases}\Rightarrow J(2;1;4)\Rightarrow A_2(3;1;7)$

Ta có: $P=AB+BC+CA=A_1B+BC+CA_2\geq A_1A_2$

$\Rightarrow P$ đạt GTNN khi $P=A_1A_2\Rightarrow P_{\min}=A_1A_2=2\sqrt{29}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $2\sqrt{29}$.

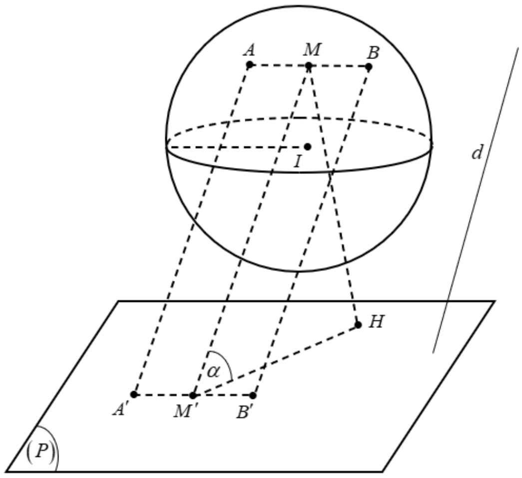
Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-y+z+7=0$, đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=5$. Gọi A,B là hai điểm trên mặt cầu

(S) và $AB = 4$; A', B' là hai điểm nằm trên mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với đường thẳng d. Giá trị lớn nhất của tổng $AA' + BB'$ gần nhất với giá trị nào sau đây

A. 13. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 14.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Khi đó khoảng cách: $d\left(I;(P)\right) = \dfrac{10\sqrt{3}}{3} > R$ nên (P) và mặt cầu (S) không giao nhau.

Gọi M là trung điểm của AB, M' là trung điểm của $A'B'$ thì:

$AA' + BB' = 2MM' = 2.\dfrac{MH}{\sin\left(MM';(P)\right)}$.

Khi đó $MH_{\max} = \sqrt{R^2 - \dfrac{AB^2}{4}} + d\left(I;(P)\right) = \sqrt{5-4} + \dfrac{10\sqrt{3}}{3} = \dfrac{3+10\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\sin\left(MM';(P)\right) = \sin\left(d;(P)\right) = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}$.

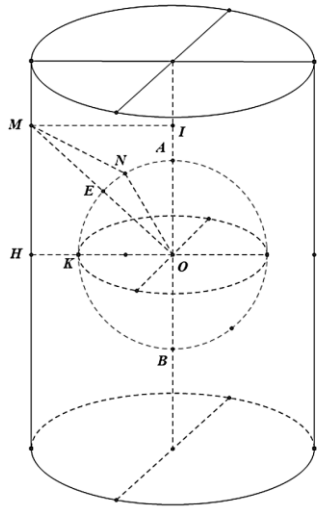
Vậy $\left(AA' + BB'\right)_{\max} = 2.\dfrac{\dfrac{3+10\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{5\sqrt{3}}{9}} = \dfrac{60+6\sqrt{3}}{5} \approx 14,08$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-5;4;-1)$ và $B(3;4;5)$. Xét các điểm M và N thay đổi sao cho tam giác ABM có diện tích bằng 40 và tam giác ABN vuông tại N. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(2;4)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(5;7)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{AB}=(8;0;6)\Rightarrow AB=10$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của M xuống đường thẳng AB, suy ra $S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}MI.AB=40$

$\Leftrightarrow MI=\frac{80}{AB}\Leftrightarrow MI=8$ nên M thuộc mặt trụ (D) có trục AB và bán kính $R=8$.

Do tam giác ABN vuông tại N nên N thuộc mặt cầu (S) đường kính AB, tâm O, bán kính $R'=5$.

Gọi (P) là mặt phẳng qua O và vuông góc với AB.

Ta có $MN+NO\ge MO\ge HO=HK+KO\Rightarrow MN\ge HK=HO-KO=3$.

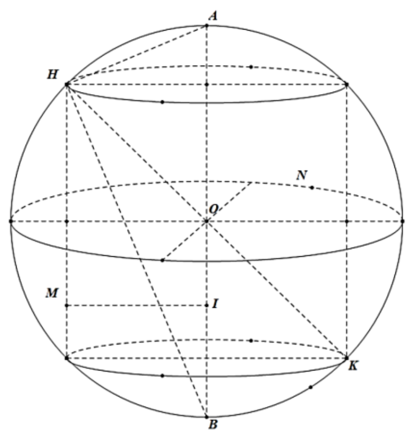
Suy ra MN nhỏ nhất bằng 3 khi M thuộc giao của mặt trụ (D) với mặt phẳng (P), N thuộc giao của mặt cầu (S) với mặt phẳng (P) sao cho M,N,O thẳng hàng và N nằm giữa M,O.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-5;4;-1)$ và $B(3;4;5)$. Xét các điểm M và N thay đổi sao cho tam giác ABM có diện tích bằng 15, góc $AMB\ge 90^0$ và tam giác ABN vuông tại N. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(13;15)$. **B.** $(8;11)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(10;12)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AB}=(8;0;6)\Rightarrow AB=10$.

Do tam giác ABN vuông tại N nên N thuộc mặt cầu (S) đường kính AB, tâm O, bán kính $R=5$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của M xuống đường thẳng AB, suy ra $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}MI.AB = 15$

$\Leftrightarrow MI = \frac{30}{AB} \Leftrightarrow MI = 3$ nên M thuộc mặt trụ (D) có trục AB và bán kính $R' = 3$.

Do góc $AMB \geq 90^0$ nên M thuộc phần mặt trụ (D) giao với mặt cầu (S) hoặc phần mặt trụ (D) nằm trong mặt cầu (S).

Ta có $MN \leq 2R = 10$.

Suy ra MN lớn nhất bằng 10 khi M thuộc giao của mặt trụ (D) với mặt phẳng (P), N thuộc mặt cầu (S) sao cho M, N, O thẳng hàng và O nằm giữa M, N.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z + 7 = 0$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z + 7 = 0$. Xét hai điểm M, N là hai điểm bất kì thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng

A. $\sqrt{18 + 2\sqrt{13}}$. **B.** $\sqrt{18 - 2\sqrt{13}}$. **C.** $18 - 2\sqrt{13}$. **D.** $18 + 2\sqrt{13}$.

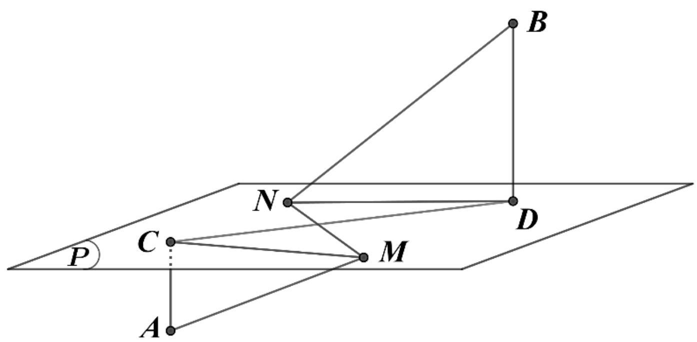
Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) là giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z + 7 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow (P) \equiv (Oyz).$$

Gọi $C(0;0;0)$ và $D(0;2;3)$ lần lượt là hình chiếu của A và B lên (Oyz). Khi đó $AC = 1$, $BD = 1$, $CD = \sqrt{13}$.



Ta có: $AM + BN = \sqrt{AC^2 + CM^2} + \sqrt{BD^2 + DN^2} \geq \sqrt{(AC + BD)^2 + (CM + DN)^2}$

Mặt khác: $CM + DN + MN \geq CD \Rightarrow CM + DN \geq CD - MN = \sqrt{13} - 1$.

Suy ra $AM + BN \geq \sqrt{4 + (CM + DN)^2} \geq \sqrt{4 + \left(\sqrt{13} - 1\right)^2} = \sqrt{18 - 2\sqrt{13}}$

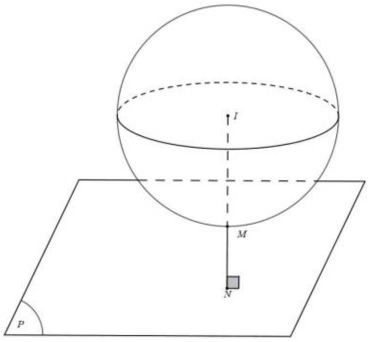
Vậy $AM + BN$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{18 - 2\sqrt{13}}$, dấu "=" xảy ra khi C, M, N, D thẳng hàng.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-2;2;-2)$ và điểm $B(3;-3;3)$. Điểm M thay đổi trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Điểm $N(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P):-x+2y-2z+6=0$ sao cho MN nhỏ nhất. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. 6. **B.** -2. **C.** 12. **D.** -6.

Lời giải

Chọn B



Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 9MA^2=4MB^2\Leftrightarrow (x+6)^2+(y-6)^2+(z+6)^2=108$. Vậy điểm M thuộc mặt cầu tâm $I(-6;6;-6)$ bán kính $R=6\sqrt{3}$.

Vậy MN nhỏ nhất khi M,N thuộc đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Gọi (d) là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Khi đó $(d):\begin{cases}x=-6-t\\y=6+2t\\z=-6-2t\end{cases}$. Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x=-6-t\\y=6+2t\\z=-6-2t\\-x+2y-2z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6-t\\y=6+2t\\z=-6-2t\\6+t+12+4t+12+4t+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-2\\z=2\\t=-4\end{cases}.$$

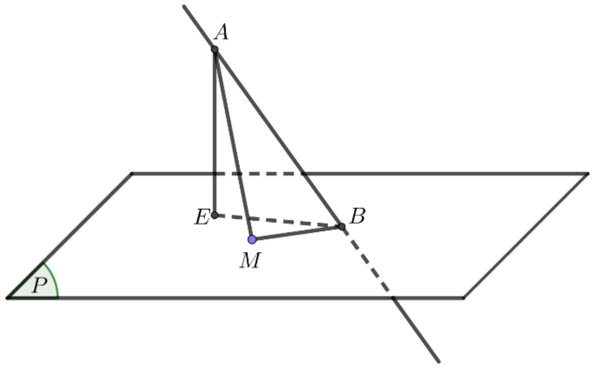
$\Rightarrow N(-2;-2;2)$. Do đó $T=-2-2+2=-2$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90°. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $K(3;0;15)$. **B.** $J(-3;2;7)$. **C.** $H(-2;-1;3)$. **D.** $I(-1;-2;3)$.

Lời giải

Chọn D



Đường thẳng d đi qua $A(1;2;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ có phương trình là $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \\ z=-3-4t \end{cases}$.

Ta có: $MB^2=AB^2-MA^2$. Do đó $(MB)_{\max}$ khi và chỉ khi $(MA)_{\min}$.

Gọi E là hình chiếu của A lên (P). Ta có: $AM \geq AE$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv E$.

Khi đó $(AM)_{\min}=AE$ và MB qua B nhận $\overrightarrow{BE}$ làm vectơ chỉ phương.

Ta có: $B \in d$ nên $B(1+3t;2+4t;-3-4t)$ mà $B \in (P)$ suy ra

$2(1+3t)+2(2+4t)-(-3-4t)+9=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow B(-2;-2;1)$.

Đường thẳng AE qua $A(1;2;-3)$, nhận $\vec{n}_P=(2;2;-1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=-3-t \end{cases}$.

Suy ra $E(1+2t;2+2t;-3-t)$.

Mặt khác, $E \in (P)$ nên $2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow E(-3;-2;-1)$.

Do đó đường thẳng. MB. qua $B(-2;-2;1)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{BE}=(-1;0;-2)$ nên có phương trình là $\begin{cases} x=-2-t \\ y=-2 \\ z=1-2t \end{cases}$.

Thử các đáp án thấy điểm $I(-1;-2;3)$ thỏa

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Khi tổng $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $a+b+c=?$

A. $a+b+c=16$ **B.** $a+b+c=15$ **C.** $a+b+c=17$ **D.** $a+b+c=14$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $a^2+b^2+c^2=90$ và $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$. Khi đó: $4 \leq a \leq \sqrt{29}; 5 \leq b \leq \sqrt{38}$.

Ta có: $OA+OB+OC=a+b+c=a+b+\sqrt{90-a^2-b^2}=f(a,b)$.

Xét $f'(a)=1-\dfrac{a}{\sqrt{90-a^2-b^2}}=0\Leftrightarrow a=\sqrt{45-\dfrac{b^2}{2}}$. Lập bảng biến thiên ta được:

$\min f(a,b)=\min\left\{f(4);f\left(\sqrt{29}\right)\right\}=\min\left\{b+4+\sqrt{74-b^2};b+\sqrt{29}+\sqrt{61-b^2}\right\}$

Dễ có:

$b+4+\sqrt{74-b^2}<b+\sqrt{29}+\sqrt{61-b^2}\ \ \forall b\in\left[5;\sqrt{38}\right]\Rightarrow \min f(a,b)=b+4+\sqrt{74-b^2}=f(b)$

.

Do $f'(b)=1-\dfrac{b}{\sqrt{74-b^2}}=0\Leftrightarrow b=\sqrt{37}$ nên lập bảng biến thiên ta được

$\min f(a,b)=f(5)=16$.

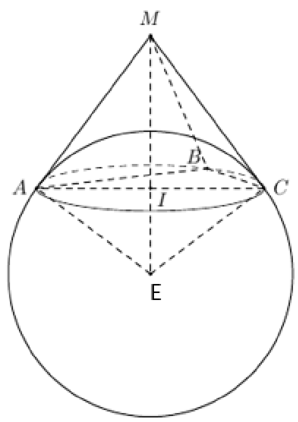
Do đó giá trị nhỏ nhất của $OA+OB+OC$ là 16 khi $a=4,b=5,c=7$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$. Lấy điểm M trong không gian sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) thỏa mãn $AMB=60°$, $BMC=90°$, $CMA=120°$ (A, B, C là các tiếp điểm). Khi đó đoạn thẳng OM có độ nhỏ nhất bằng

A. $\sqrt{14}-3\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{14}+6\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{14}-6$. **D.** $6-\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn D



Vì MA, MB, MC là 3 tiếp tuyến nên ta đặt $MA=MB=MC=x$.

$\triangle MAB$ có $MA=MB$, $AMB=60°$ nên ΔMAB là tam giác đều, suy ra $AB=MA=MB=x$.

Áp dụng định lí Py-ta-go cho $\triangle MBC$ ta có $BC=\sqrt{MB^2+MC^2}=\sqrt{2x^2}=x\sqrt{2}.$

Áp dụng định lí hàm số cos cho $\triangle MCA$: $CA=\sqrt{MA^2+MC^2-2MA.MC.\cos120°}=x\sqrt{3}$.

Nhận thấy $AB^2+BC^2=x^2+2x^2=3x^2=AC^2$, suy ra $\triangle ABC$ vuông tại B.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC\Rightarrow I$ là trung điểm của AC.

Vì $MA=MB=MC$ nên MI là trục đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$.

Do đó M; I; E thẳng hàng.

Mặt cầu (S) có tâm $E(1;2;-3)$ bán kính $R=3\sqrt{3}=EC$

Suy ra $ME=\dfrac{EC}{\sin60^0}=6$. Vậy M thuộc mặt cầu (S') có tâm $E(1;2;-3)$ bán kính $R'=6$.

Ta có $OE=\sqrt{14}$

Vậy $MinOM = |OE - R'| = 6 - \sqrt{14}$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4$ và hai điểm $A(4;3;3)$, $B(2;1;0)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A tiếp xúc với (S). Gọi khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ B đến (P) lần lượt là m và n. Khi đó $T = m + n$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(2;\frac{7}{2}\right)$.

Lời giải

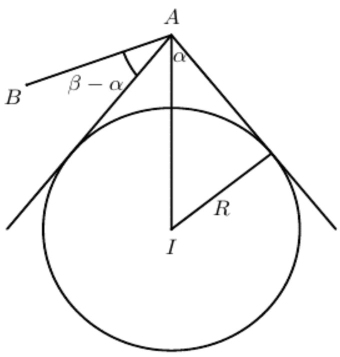
Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;3;0)$, $R = 2$.

Ta có $AI = 5$, $AB = \sqrt{17}$.

Có thể coi như tập hợp tất cả các đường thẳng AM với M là tiếp điểm của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S) là một mặt nón tròn xoay (N) có đỉnh nón là điểm A và trục nón là đường thẳng AI

Góc ở đỉnh nón là 2α, có $\sin\alpha = \frac{R}{AI} = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$.



Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) cũng chính là khoảng cách từ B đến các đường sinh của nón (N).

Ta đi tính góc $\cos BAI = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}}{AB.AI} = \frac{\sqrt{17}}{5} \Rightarrow BAI > \alpha$.

Suy ra khoảng cách nhỏ nhất từ B đến (P) là $n = d\left(B,(P)\right)_{\min} = 0$. Khi đó $B \in (P)$.

Gọi β là góc tạo bởi AB và AI. Khoảng cách lớn nhất từ B đến (P) là

$$m = d\left(B,(P)\right)_{\max} = AB.\sin(\alpha+\beta)$$

$$= \sqrt{17}\left(\sin\alpha.\cos\beta + \cos\beta.\sin\alpha\right) = \sqrt{17}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}.\frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{\sqrt{17}}{5}.\frac{2}{5}\right) = \frac{2\sqrt{714}+34}{25} \approx 3,5$$

Vậy $m + n = 3,5$.

Câu 34: Cho điểm $A(2;3;5)$, hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $(S_2): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$ và điểm M di động thuộc cả hai mặt cầu. Gọi m, n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của AM. Tính giá trị của biểu thức $T = m^2 + n^2$.

A. $\frac{341}{4}$. **B.** $\frac{151}{2}$ **C.** $\frac{1028}{7}$ **D.** $\frac{2411}{28}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S_1) có tâm O, bán kính $R_1 = 3$; mặt cầu (S_2) có tâm $I(1;2;-3)$, bán kính $R_2 = 4$.

Ta có $|R_1 - R_2| < OI = \sqrt{14} < R_1 + R_2 \Rightarrow$ hai mặt cầu cắt nhau theo một đường tròn, kí hiệu là đường tròn (C) có tâm H, bán kính r.

Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn (C) là: $(P): 2x + 4y - 6z - 7 = 0$

Bán kính đường tròn (C) bằng $r = \sqrt{R_1^2 - d^2(O,(P))} = \dfrac{\sqrt{130}}{4}$

Gọi A' là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P).

Ta có HA' là hình chiếu của OA trên mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;-3)$, $\overrightarrow{OA} = (2;3;5)$

$\sin(OA,(P)) = \left|\cos\left(\overrightarrow{OA},\vec{n}\right)\right| = \dfrac{\sqrt{133}}{38} \Rightarrow \cos(OA,(P)) = \sqrt{\dfrac{69}{76}}$

$\Rightarrow HA' = OA.\cos(OA,(P)) = \dfrac{\sqrt{138}}{2} > r$

Suy ra A' nằm ngoài đường tròn (C).

Khi đó giá trị lớn nhất của AM bằng $m = HA' + r = \dfrac{\sqrt{138}}{2} + \dfrac{\sqrt{130}}{4}$

Giá trị nhỏ nhất của AM bằng $m = HA' - r = \dfrac{\sqrt{138}}{2} - \dfrac{\sqrt{130}}{4}$. $T = m^2 + n^2 = \dfrac{341}{4}$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;1)$, $B(0;0;4)$, $C(2;2;1)$, $E(4;0;0)$, $F\left(3;1;\sqrt{6}\right)$. Xét điểm M thay đổi sao cho $MA = \dfrac{1}{2}MB$ và $MA = MC$. Giá trị lớn nhất của $ME + MF$ bằng

A. $4\sqrt{3+\sqrt{3}}$. **B.** $4\sqrt{3+\sqrt{6}}$. **C.** $4\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **D.** $4\sqrt{6+\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y;z)$. Khi đó giả thiết tương đương với:

$$\begin{cases} MA = 2MA \\ MA = MC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4\left(x^2 + y^2 + (z-1)^2\right) \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + (2-x)^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ z = \pm\sqrt{4x - 2x^2} \end{cases}.$$

Suy ra:

$$ME + MF = \sqrt{(x-4)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \sqrt{6}\right)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 16} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 2\sqrt{6}z + 16}$$

$$= \sqrt{20 - 8x} + \sqrt{20 - 6x - 2y - 2\sqrt{6}z} == \sqrt{20 - 8x} + \sqrt{20 - 6x - 2(2-x) - 2\sqrt{6}z}$$

$$= \sqrt{20 - 8x} + \sqrt{16 - 6x - 2\sqrt{6}z}$$

$\leq g(x)=\sqrt{20-8x}+\sqrt{16-4x+2\sqrt{6(4x-2x^2)}}\leq \max\limits_{[0;2]} g(x)=g\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\sqrt{3+\sqrt{3}}$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, xét mặt phẳng (ABC), có $A(4;-3;7);B(-1;3;-12);C(-10;3;0)$. Lấy Δ là một đường thẳng bất kì vuông góc với (ABC) gọi $I=\Delta\cap(ABC)$ thỏa mãn I thuộc miền trong ΔABC. Lấy $M\in\Delta;M\neq I$, gọi E,F,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng BC,CA,AB. Hệ thức nào của điểm M là đúng để biểu thức $P=\left|\overrightarrow{IE}\right|.\left|\overrightarrow{IF}\right|.\left|\overrightarrow{IK}\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$.

B. $\overrightarrow{MI}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}\right)$.

C. $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$.

D. $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$2V_{MABC}=2\left(V_{MIBC}+V_{MICA}+V_{MIAB}\right)\Leftrightarrow 2S_{ABC}=2\left(S_{IBC}+S_{ICA}+S_{IAB}\right)=BC.IE+AC.IF+AB.IK$

Do đó áp dụng bất đẳng thức Cô-si

với bộ 3 số $BC.IE,AC.IF,AB.IK$. Ta có: $BC.AC.AB.IE.IF.IK=(BC.IE).(AC.IF).(AB.IK)\leq$

$\leq\frac{1}{27}(BC.IE+AC.IF+AB.IK)^3=8S_{ABC}^3\Rightarrow IE.IF.IK\leq\frac{8S_{ABC}^3}{BC.AC.AB}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $BC.IE=AC.IF=AB.IK\Leftrightarrow S_{IBC}=S_{ICA}=S_{IAB}$

Khi đó I là trọng tâm tam giác ABC.

Vậy $\left(P=\left|\overrightarrow{IE}\right|.\left|\overrightarrow{IF}\right|.\left|\overrightarrow{IK}\right|\right)_{\max}$ khi I là trọng tâm tam giác ABC.

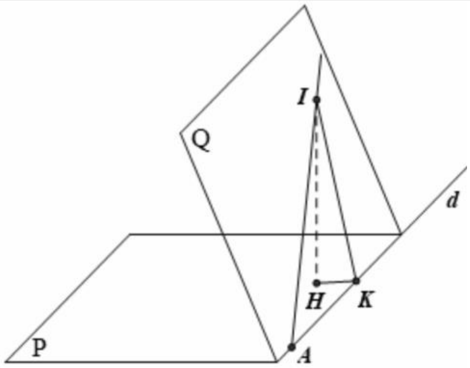
Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=-1-t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z-1=0$.

Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất cắt mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=12$ theo đường tròn có bán kính bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{64}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $A=\Delta\cap(P);d=(P)\cap(Q)$

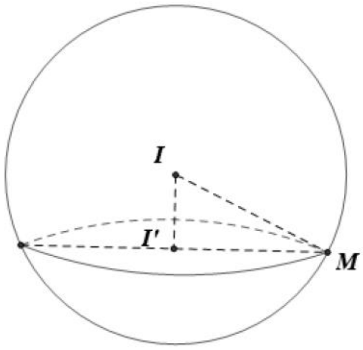
Lấy $I\in\Delta\Rightarrow A;I$ cố định, kẻ $IH\perp(P);HK\perp d\Rightarrow((P);(P))=IKH$.

Do $IA\geq IK\Rightarrow\sin IKH=\dfrac{IH}{IK}\geq\dfrac{IH}{IA}\Rightarrow IKH_{\min}$ khi $K\equiv A$ tức là $IA\perp d\Rightarrow\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{u_d}\right]$

Trong đó $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-2;-1);\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_P}\right]=(3;0;3)=3(1;0;1)$

Suy ra $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{u_d}\right]=-2(1;1;-1)$, mặt khác (Q) chứa đường thẳng Δ nên (Q) đi qua điểm $(1;2;-1)$.

Do đó $(Q):x+y-z-4=0$.



Mặt cầu $(S):\begin{cases}I(1;1;2)\\R=2\sqrt{3}\end{cases}$.

$d(I,(Q))=\dfrac{|1+1-2-4|}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Bán kính đường tròn giao tuyến $r=\sqrt{IM^2-d^2(I,(Q))}=\sqrt{12-\dfrac{16}{3}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Câu 38: Cho $A(1;1;-3)$, $B(6;2;2)$, $C(-1;0;-2)$. Tọa độ điểm $M\in(Oxy)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $M\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{6};0\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{5}{6};0\right)$. **C.** $M\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{5}{6};0\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{6};0\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ suy ra $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+2x_B+3x_C}{1+2+3}=\dfrac{5}{3} \\ y_I=\dfrac{y_A+2y_B+3y_C}{1+2+3}=\dfrac{5}{6} \\ z_I=\dfrac{z_A+2z_B+3z_C}{1+2+3}=-\dfrac{5}{6} \end{cases}$ nên $I\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{6};-\dfrac{5}{6}\right)$.

Ta có $P=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|=\left|6\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)\right|=\left|6\overrightarrow{MI}\right|=6MI$.

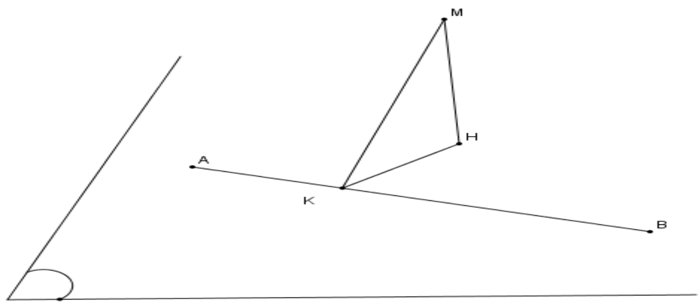
Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì MI min, suy ra M là hình chiếu của I trên (Oxy). Do đó tọa độ điểm cần tìm là $M\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{6};0\right)$.

Câu 39: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7;-1;-2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;4)$, khi đó giá trị của tổng $a+b$ là

A. -1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B



Gọi H , K lần lượt là hình chiếu của M trên (P) và đường thẳng AB .

Phương trình đường thẳng AB , nhận VTCP là $\overrightarrow{AB}(1;2;-1)$

$\begin{cases} x=1+t \\ y=-7+2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-8-t \end{cases}$

$K\in AB \Rightarrow K(1+t;-7+2t;-8-t) \Rightarrow \overrightarrow{MK}(t-6;-6+2t;-6-t)$

Do $\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow t-6+2(-6+2t)+t+6=0 \Leftrightarrow t=2$

Ta có: $K(3;-3;-10)$ và $d(M,(P))=MH\le MK$.

Dấu bằng xảy ra khi $H\equiv K$, khi đó $\overrightarrow{MH}=(-4;-2;-8)=-2(2;1;4)$, mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}=(2;1;4)$ làm vectơ pháp tuyến.

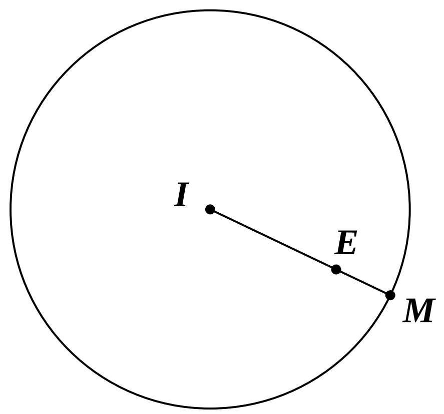
Vậy $a+b=3$.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ và các điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(-1;2;3)$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thỏa $d=3MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $T=4x_0-3y_0-2z_0$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=5$.

Gọi điểm E thỏa mãn $3\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}=\vec{0}$. Khi đó $E\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$.

Ta có $d=3MA^2+2MB^2-MC^2=3\overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MC}^2$

$=3\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2-\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}\right)^2$

$=4ME^2+2\overrightarrow{ME}\left(3\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}\right)+3EA^2+2EB^2-EC^2=4ME^2+3EA^2+2EB^2-EC^2$.

d đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $IE=\frac{\sqrt{209}}{4}<R$. Do đó điểm E nằm trong mặt cầu (S).

Khi đó $ME_{\min}=R-IE=\frac{20-\sqrt{209}}{4}$.

M là giao điểm của đường thẳng IE và mặt cầu (S).

Phương trình đường thẳng $IE:\begin{cases}x=1-2t\\y=-2+6t\\z=3-13t\end{cases}$. Gọi $M(1-2t;-2+6t;3-13t)$.

Vì $M\in(S)$ nên ta có $(1-2t-1)^2+(-2+6t+2)^2+(3-13t-3)^2=25\Leftrightarrow t=\pm\frac{5}{\sqrt{209}}$.

Suy ra $M_1\left(1-\frac{10}{\sqrt{209}};-2+\frac{30}{\sqrt{209}};3-\frac{65}{\sqrt{209}}\right), M_2\left(1+\frac{10}{\sqrt{209}};-2-\frac{30}{\sqrt{209}};3+\frac{65}{\sqrt{209}}\right)$.

Mà $ME_{\min}=\frac{20-\sqrt{209}}{4}$ do đó nhận $M\left(1-\frac{10}{\sqrt{209}};-2+\frac{30}{\sqrt{209}};3-\frac{65}{\sqrt{209}}\right)$.

Khi đó $T=4x_0-3y_0-2z_0=4$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$. Mặt phẳng (P) qua điểm A và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) có bán kính nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $(P): 3x-z-1=0$. **B.** $(P): 3y-z+1=0$.

C. $(P): 2x+y-z-1=0$. **D.** $(P): 3y-z-1=0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=4$.

Ta có: $\overrightarrow{IA}=(0;3;-1) \Rightarrow IA=\sqrt{10}<R$ suy ra A nằm trong mặt cầu (S)

.Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P), khi đó bán kính của đường tròn (C) là: $r=\sqrt{R^2-\mathrm{d}^2(I,(P))}=\sqrt{R^2-IH^2}$.

Diện tích đường tròn (C) nhỏ nhất khi IH lớn nhất. Mà $IH \le IA$ nên IH lớn nhất khi $H \equiv A$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;1;2)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{IA}=(0;3;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.

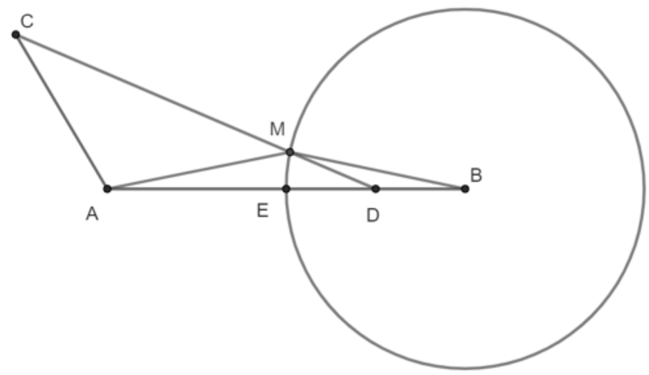
$(P): 0(x-1)+3(y-1)-1(z-2)=0 \Leftrightarrow 3y-z-1=0$.

Câu 42: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(1;0;-1)$, $B(1;2;1)$, $C(2;-1;-1)$. Gọi M là điểm thay đổi thuộc mặt cầu tâm B, bán kính $R=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MC$ là

A. $2\sqrt{14}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{38}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



$\overrightarrow{AB}=(0;2;2), \overrightarrow{AC}=(1;-1;0) \Rightarrow AB=2\sqrt{2},\ AC=\sqrt{2}, CAB=120°$.

$AB=2R, AC=R, CAB=120°$.

Gọi $E=BA\cap(B)$ và D là trung điểm BE.

Xét tam giác BDM và tam giác MAB có:

$\begin{cases} \dfrac{BD}{MB}=\dfrac{MB}{AB}=\dfrac{1}{2} \\ B\ chung \end{cases} \Rightarrow$ Tam giác BDM đồng dạng với tam giác BMA.

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MD}=\dfrac{MB}{BD}=2 \Rightarrow MA=2MD \Rightarrow MA+2MC=2(MD+MC)\ge 2CD$

Áp dụng định lí cô – sin vào tam giác CAD ta có:

$CD^2 = CA^2 + AD^2 - 2.CA.AD.\cos 120^\circ = 2 + \dfrac{9}{2} + 3 = \dfrac{19}{2} \Rightarrow CD = \dfrac{\sqrt{38}}{2}$

Vậy $MA + 2MC \geq \sqrt{38}$. Dấu "=" xảy ra khi: $M = CD \cap (B)$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y - 1 = 0$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và hai điểm $A(-1;-3;11)$, $B\left(\dfrac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M,d) = 2$ và $NA = 2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

A. $MN_{\min} = 1$. **B.** $MN_{\min} = \sqrt{2}$. **C.** $MN_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $MN_{\min} = \dfrac{2}{3}$.

$V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{24}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I = d \cap (P) \Rightarrow I(1;2-t;1)$

$I \in (P) \Rightarrow 2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow I(1;1;1)$

Ta có $d \perp (P) \Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I(1;1;1), R_1 = 2$.

$N(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{NA}(-1-x;-3-y;11-z); \overrightarrow{NB}\left(\dfrac{1}{2} - x; -y; 8 - z\right)$

$NA = 2NB \Leftrightarrow (1+x)^2 + (3+y)^2 + (11-z)^2 = 4\left[\left(\dfrac{1}{2} - x\right)^2 + y^2 + (8-z)^2\right]$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 6y - 42z + 126 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14z + 42 = 0$

Vậy $N \in S(J(1;1;7); R_2 = 3)$ và $J \in (P): y = 1$

Nên N thuộc đường tròn tâm $J(1;1;7); R_2 = 3$

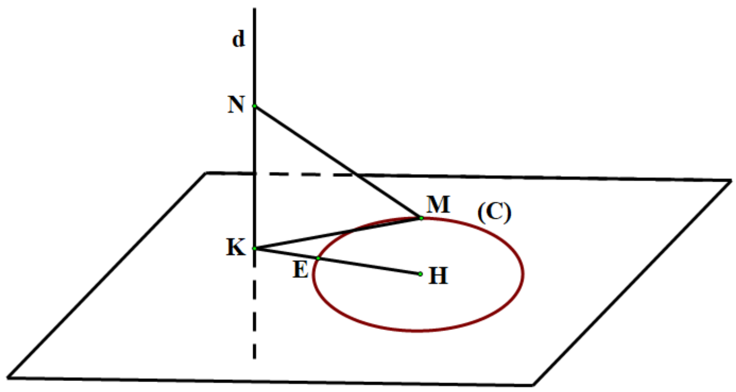
Ta có $IJ = 6 > R_1 + R_2 \Rightarrow MN_{\min} = IJ - R_1 - R_2 = 1$

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;-2;4)$, $B(-2;6;4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$. Gọi M là điểm di động thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $AMB = 90^\circ$ và N là điểm di động thuộc d. Tìm giá trị nhỏ nhất của MN.

A. 2 **B.** 8. **C.** $\sqrt{73}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



$AMB = 90^{0}$ nên M thuộc mặt cầu đường kính AB, có tâm $I(1;2;4); R = \dfrac{AB}{2} = 5$. Mặt khác M là điểm di động thuộc mặt phẳng (Oxy) nên M thuộc đường tròn (C) là giao của mặt cầu với mặt phẳng (Oxy). Đường tròn này có tâm $H(1;2;0)$ là hình chiếu của I trên(Oxy). bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = 3$.

Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (Oxy) và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$. suy ra $K(5;-1;0), HK = 5$

.

Nhận thấy $d \perp (Oxy)$ tại K. Gọi $E = HK \cap (Oxy)$, E nằm giữa HK,

Ta có $\forall M \in (C), N \in d: MN \geq MK \geq KE$. Vậy EK là giá trị nhỏ nhất của MN.

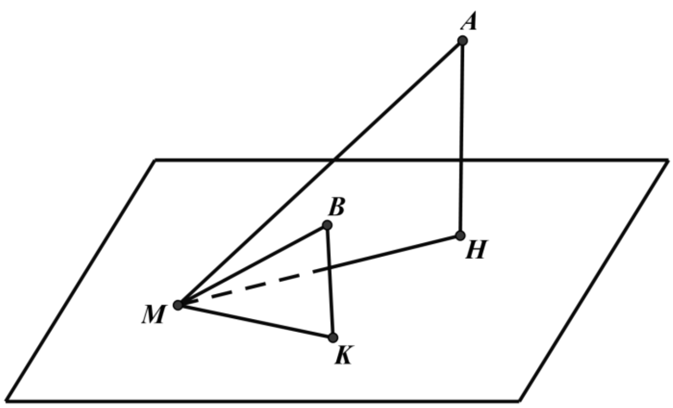
Lại có $HE = r = 3 \Rightarrow KE = 2$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-2)$, $B(2;4;-3)$. Điểm M di động trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MA, MB luôn tạo với (Oxy) các góc phụ nhau. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng OM thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4;5)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (Oxy). Khi đó:

$H(1;2;0)$, $K(2;4;0)$; $AH = d(A,(Oxy)) = |-2| = 2$; $BK = d(B,(Oxy)) = |-3| = 3$.

Vì MA, MB tạo với (Oxy) các góc phụ nhau nên $\Delta MAH \sim \Delta BMK$.

Suy ra $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{MH}{BK}=\dfrac{AH}{MK}\Rightarrow MH.MK=AH.BK=6$.

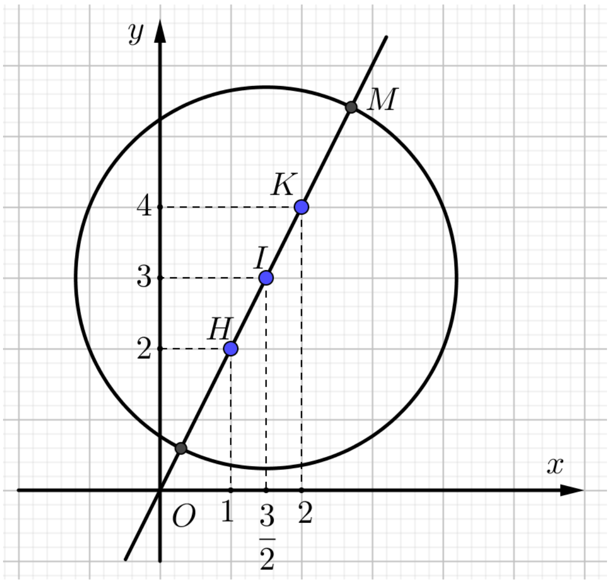
Giả sử $M\left(x;y;z\right)$, ta có:

$6=MH.MK\geq \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MK}=(1-x).(2-x)+(2-y)(4-y)+-(z).(-z)$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-6y+4\leq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{MH},\overrightarrow{MK}$ cùng hướng.

Do đó, M luôn thuộc hình tròn $\left(C\right)$ là giao tuyến của khối cầu $\left(S\right): x^2+y^2+z^2-3x-6y+4\leq 0$ và mặt phẳng $\left(Oxy\right)$.



Hình tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(\dfrac{3}{2};3;0\right)$ là trung điểm của HK và bán kính $R=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Do O nằm ngoài $\left(C\right)$ và bốn điểm O, H, I, K thẳng hàng nên giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng OM là $\max OM=OI+R=\dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}\approx 6,045$.

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho $A\left(0;0;1\right), B\left(0;0;9\right), Q\left(3;4;6\right)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích lớn nhất. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MQ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(4;5\right)$. **B.** $\left(3;4\right)$. **C.** $\left(2;3\right)$. **D.** $\left(1;2\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow I\left(0;0;5\right)$.

$\overrightarrow{AB}=\left(0;0;8\right)$, $AB=8$.

Gọi $\left(S\right)$ là mặt cầu đường kính AB, ta có $\left(S\right): x^2+y^2+\left(z-5\right)^2=16$.

Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng trung trực của đoạn $\left(S\right)$ $AB\Rightarrow\left(P\right): z-5=0$.

Gọi đường tròn $\left(C\right)=\left(S\right)\cap\left(P\right)=\begin{cases}x^2+y^2+\left(z-5\right)^2=16\\ z-5=0\end{cases}$, đường tròn $\left(C\right)$ có bán kính bằng 4.

Tam giác ABC vuông tại M và có diện tích lớn nhất $\Rightarrow M\in\left(C\right)$.

Gọi T là hình chiếu của Q trên $(P) \Rightarrow T(3;4;5)$.

Ta có $QT = d(Q,(P)) = 1$, $IT = 5$ nên T nằm ngoài (C).

Lại có $MQ = \sqrt{QT^2 + TM^2} = \sqrt{1 + QT^2}$, nên MQ nhỏ nhất khi TM nhỏ nhất.

Ta có TM nhỏ nhất khi I, M, T thẳng hàng theo thứ tự đó, khi đó $TM = TI - IM = 5 - 4 = 1$.

Vậy MQ nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$.

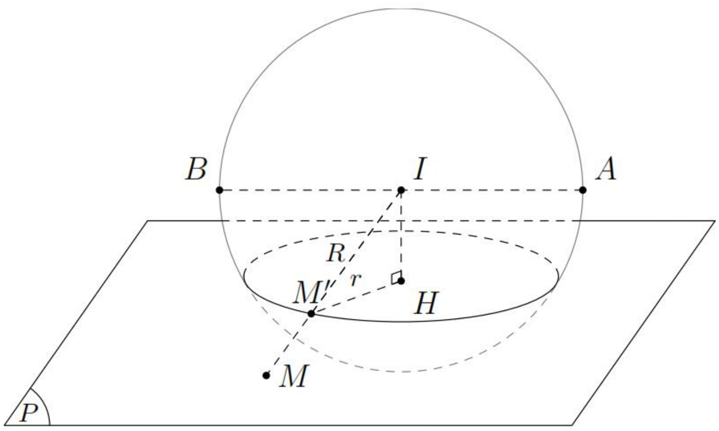
Vậy $\min V = \dfrac{80\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow IK = 5\sqrt{5}$

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho hai điểm $A(2;-1;-3)$, $B(0;1;-2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 4 = 0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho AMB lớn nhất thì giá trị của $\sin AMB$ bằng

A. $-\dfrac{5}{13}$ **B.** $-\dfrac{12}{13}$. **C.** $\dfrac{12}{13}$. **D.** $\dfrac{5}{13}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;2;-1), AB = 3$ và $\vec{n}_P = (2;1;-2)$ nên $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = -4 + 2 + 2 = 0$ hay $AB \parallel (P)$.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I\left(1;0;-\dfrac{5}{2}\right)$. Xét mặt cầu (S) đường kính AB.

Do $d(I,(P)) = \dfrac{\left|2\times 1 - 0 - 2\times\left(-\dfrac{5}{2}\right) - 4\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{3}{3} = 1 < \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Nên mặt cầu (S) sẽ cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có tâm H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) và bán kính $r = \sqrt{\dfrac{AB^2}{4} - d^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Xét điểm M bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) nằm ngoài đường tròn tâm H bán kính $r = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Gọi M' là giao điểm của IM và mặt cầu (S), khi đó $AMB < AM'B = 90^\circ$.

Vậy M thuộc mặt phẳng (P) nằm trong đường tròn tâm H bán kính $r = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Ta có $\cot AMB = \dfrac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{4S_{AMB}}; MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

$\Rightarrow \cot AMB = \dfrac{2MI^2 - \dfrac{AB^2}{2}}{4S_{AMB}}$.

Do $d(M, AB) \geq HI \Rightarrow S_{AMB} \geq S_{AHB} = \dfrac{1}{2}.1.3 = \dfrac{3}{2}, MI^2 \geq HI^2 = 1$ và $\cot AMB < 0$.

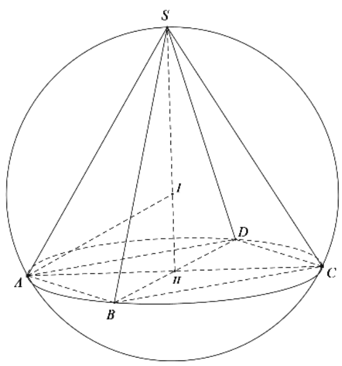
Nên để AMB lớn nhất thì $M \equiv H$ và $\cot AMB = \dfrac{2 - \dfrac{9}{2}}{4 \times \dfrac{3}{2}} = -\dfrac{5}{12} \Rightarrow \sin AMB = -\dfrac{5}{13}$.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $S(7;8;6)$ và $P(-5;-4;0)$. Xét khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu đường kính SP. Khi khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng $ABCD$ có phương trình $2x + by + cz + d = 0$. Giá trị $b + c + d$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** -3. **D.** -5.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu đường kính SP có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 9$.

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm H, cạnh a $\left(0 < a \leq 9\sqrt{2}\right)$.

Ta chỉ cần xét trường hợp $SH > SI$.

Ta có

$HA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HI = \sqrt{IA^2 - HA^2} = \sqrt{81 - \dfrac{a^2}{2}}$

Mặt khác ta lại có $SH = SI + IH = 9 + \sqrt{81 - \dfrac{a^2}{2}}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}a^2\left(9 + \sqrt{81 - \dfrac{a^2}{2}}\right) = 3a^2 + \dfrac{1}{3}a^2\sqrt{81 - \dfrac{a^2}{2}}$.

Đặt $a^2 = t$, do $0 < a \leq 9\sqrt{2}$ nên $0 < t \leq 162$.

Xét hàm số $f(t) = 3t + \dfrac{1}{3}t\left(\sqrt{81 - \dfrac{t}{2}}\right)$, với $0 < t \leq 162$.

Ta có $f'(t)=3+\dfrac{324-3t}{12\sqrt{81-\dfrac{t}{2}}}$.

Suy ra

$$f'(t)=0\Leftrightarrow 3+\dfrac{324-3t}{12\sqrt{81-\dfrac{t}{2}}}=0\Leftrightarrow 36\sqrt{81-\dfrac{t}{2}}=3t-324$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{81-\dfrac{t}{2}}=\dfrac{t}{12}-9\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 108\\ 81-\dfrac{t}{2}=\left(\dfrac{t}{12}-9\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 108\\ \left[\begin{array}{l} t=0\\ t=144\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow t=144.$$

Ta có bảng biến thiên

t	0		144		162
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	↗		576		↘

Từ bảng biến thiên ta có $V_{\max}=576$ khi $t=144$ hay $a=12$.

Khi đó $HI=\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}=3$. Suy ra $\overrightarrow{SH}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{SI}$.

Do $S(7;8;6)$ và $I(1;2;3)$ nên $\overrightarrow{SI}=(-6;-6;-3)$ suy ra $H(-1;0;2)$.

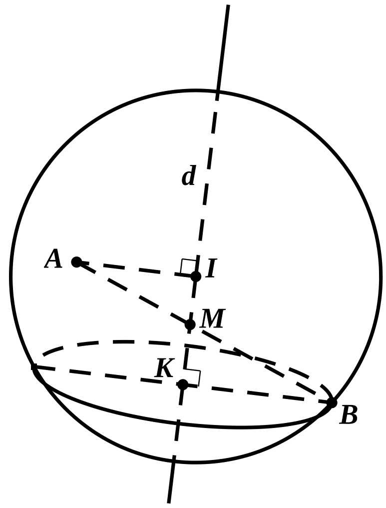
Mặt phẳng $(ABCD)$ qua $H(-1;0;2)$ và nhận $\vec{n}=(2;2;1)$ là véctơ pháp tuyến nên có phương trình: $2x+2y+z=0$. Vậy $b+c+d=3$.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S) : $(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P):2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$ **B.** 27 **C.** $5\sqrt{29}$ **D.** $\sqrt{742}$

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(-3;-4;-5)$ và bán kính $R=27$.

Đường thẳng d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;4) \Rightarrow d \perp (P)$.

Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng d. Vì $I \in d$ nên K là tâm của đường tròn giao tuyến và $KB \perp d$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1;2;-2) \Rightarrow IA=3$ và $\overrightarrow{IA}.\vec{u}=0 \Rightarrow IA \perp d$.

Ta tính được $IK=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2.(-3)+3.(-4)+4(-5)-107|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=5\sqrt{29}$ và $KB=\sqrt{R^2-IK^2}=2$

.

Do M di động trên đường thẳng d (trục của đường tròn giao tuyến) và B thuộc đường tròn giao tuyến nên biểu thức $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M=AB \cap d$.

Khi đó, ta có $\dfrac{MI}{MK}=\dfrac{IA}{KB}=\dfrac{3}{2}$ và $MI+MK=IK=5\sqrt{29}$.

Suy ra $MI=3\sqrt{29}$, $MK=2\sqrt{29}$.

Ta có $AM=\sqrt{IA^2+MI^2}=3\sqrt{30} \Rightarrow BM=\dfrac{2}{3}AM=2\sqrt{30}$.

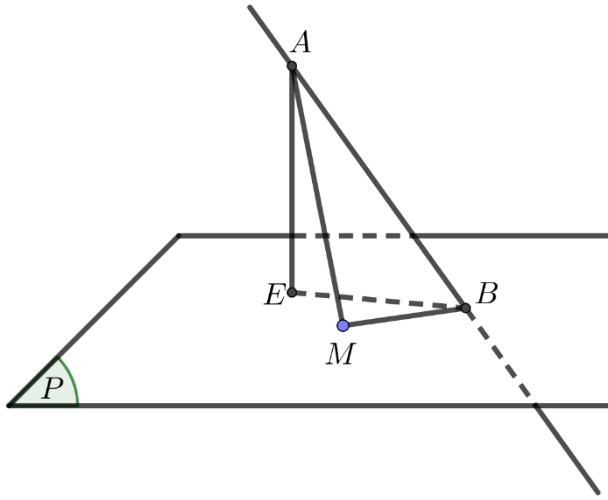
Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ là $AM+BM=3\sqrt{30}+2\sqrt{30}=5\sqrt{30}$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90°. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $H(-2;-1;3)$. **B.** $I(-1;-2;3)$. **C.** $K(3;0;15)$. **D.** $J(-3;2;7)$.

Lời giải

Chọn B



Đường thẳng d đi qua $A(1;2;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ có phương trình là

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \\ z=-3-4t \end{cases}.$$

Ta có: $MB^2=AB^2-MA^2$. Do đó $(MB)_{\max}$ khi và chỉ khi $(MA)_{\min}$.

Gọi E là hình chiếu của A lên (P). Ta có: $AM \geq AE$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv E$.

Khi đó $(AM)_{\min}=AE$ và MB qua B nhận $\overrightarrow{BE}$ làm vectơ chỉ phương.

Ta có: $B \in d$ nên $B(1+3t;2+4t;-3-4t)$ mà $B \in (P)$ suy ra:

$2(1+3t)+2(2+4t)-(-3-4t)+9=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow B(-2;-2;1)$.

Đường thẳng AE qua $A(1;2;-3)$, nhận $\vec{n}_P=(2;2;-1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=-3-t \end{cases}.$$

Suy ra $E(1+2t;2+2t;-3-t)$.

Mặt khác, $E \in (P)$ nên $2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow E(-3;-2;-1)$.

Do đó đường thẳng. MB. qua $B(-2;-2;1)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{BE}=(-1;0;-2)$ nên có phương trình là $\begin{cases} x=-2-t \\ y=-2 \\ z=1-2t \end{cases}$.

Thử các đáp án thấy điểm $I(-1;-2;3)$ thỏa.

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;-4)$ và $B(-2;1;1)$. Với M là điểm trên đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$, xét N là một điểm di động trên mặt cầu có tâm M với bán kính bằng 2. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=AM+BN$ thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(7;9)$

Lời giải

Chọn C

Với mỗi điểm M di động trên đường thẳng d, do N là một điểm di động trên mặt cầu có tâm M với bán kính bằng 2 nên BN nhỏ nhất khi $BN = |BM - R| = |BM - 2|$.

Do đó, bài toán đưa về việc tìm M sao cho $P = AM + |BM - 2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Do $M \in d$ nên $M(1+t;2t;-1-t)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $AM = \sqrt{t^2 + (2t+3)^2 + (3-t)^2} = \sqrt{6t^2 + 6t + 18}$,

$BM = \sqrt{(t+3)^2 + (2t-1)^2 + (-2-t)^2} = \sqrt{6t^2 + 6t + 14}$.

Khi đó $P = \sqrt{6t^2+6t+18} + \left|\sqrt{6t^2+6t+14} - 2\right| = \sqrt{6t^2+6t+18} + \sqrt{6t^2+6t+14} - 2$ (vì $\forall t \in \mathbb{R}$, thì $6t^2 + 6t + 14 > 4$ nên $\sqrt{6t^2+6t+14} - 2 > 0$, do đó $\left|\sqrt{6t^2+6t+14} - 2\right| = \sqrt{6t^2+6t+14} - 2$).

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{6t^2+6t+18} + \sqrt{6t^2+6t+14} - 2$, với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{6t+3}{\sqrt{6t^2+6t+18}} + \dfrac{6t+3}{\sqrt{6t^2+6t+14}} = 0 \Leftrightarrow 6t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$.

Qua đó, ta thấy ngay $t = -\dfrac{1}{2}$ là điểm cực trị duy nhất của hàm số và đó là điểm cực tiểu nên hàm số $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{\sqrt{66} + 5\sqrt{2} - 4}{2}$ tại $t = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 52: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và hai điểm $A(3;0;0); B(-1;1;0)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 3MB$.

A. $2\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{26}$ **C.** 6 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

Ta có : $M \in (S) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

$MA = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2}; MB = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$.

Suy ra: $MA + 3MB = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$

$= \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2 + 8(x^2 + y^2 + z^2) - 8} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$

$= 3\sqrt{\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 + y^2 + z^2} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2} = 3(MC + MB) \geq 3BC$ với $C\left(\dfrac{1}{3};0;0\right)$. (*Dễ thấy điểm B nằm ngoài mặt cầu, còn điểm C nằm trong mặt cầu*).

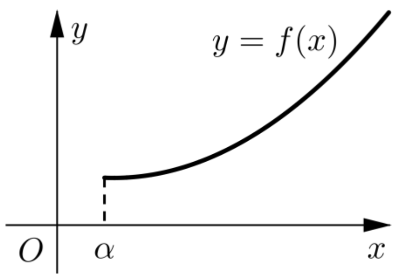
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 3MB$ bằng 5 khi

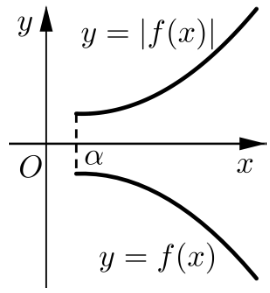
$\begin{cases} M = BC \cap (S) \\ \overrightarrow{CM} = k.\overrightarrow{CB}\ (k > 0) \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{3 - 8\sqrt{6}}{25}; \dfrac{4 + 6\sqrt{6}}{25}; 0\right)$.

DẠNG 16 TÍNH ĐƠN ĐIỆU HÀM SỐ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

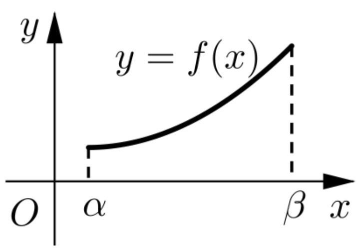
- Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $[\alpha;+\infty)$ khi và chỉ khi

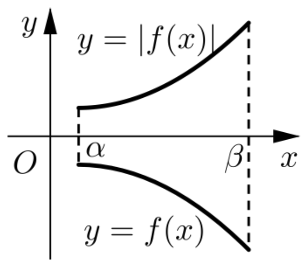




- $\begin{cases} y'(\alpha)\ge 0,\ \forall x\in[\alpha;+\infty) \\ y(\alpha)\ge 0 \end{cases}$.
- $\begin{cases} y'(\alpha)\le 0,\ \forall x\in[\alpha;+\infty) \\ y(\alpha)\le 0 \end{cases}$.

- Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(\alpha;\beta)$ khi và chỉ khi





- $\begin{cases} y'(\alpha)\ge 0,\ \forall x\in(\alpha;\beta) \\ y(\alpha)\ge 0 \end{cases}$.
- $\begin{cases} y'(\alpha)\le 0,\ \forall x\in(\alpha;\beta) \\ y(\alpha)\le 0 \end{cases}$.

- Các dạng đồng biến $y=|f(x)|$ trên $(-\infty;a]$, $[\alpha;\beta]$ ta thực hiện tương tự.
- Hàm số hỏi nghịch biến làm ngược lại.

B BÀI TẬP TRONG ĐỀ MINH HỌA

Câu 50 – Đề tham khảo 2023. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in (-10;+\infty)$ để hàm số $y=\left|x^3+(a+2)x+9-a^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Xét $f(x)=x^3+(a+2)x+9-a^2$ có $f'(x)=3x^2+a+2$

Để $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

Trường hợp 1: $\begin{cases} f'(x)\ge 0, \forall x\in(0;1) \\ f(0)\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+a+2\ge 0, \forall x\in(0;1) \\ 9-a^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge \underset{(0;1)}{Max}\left(-3x^2-2\right) \\ 9-a^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ -3\le a\le 3 \end{cases} \Rightarrow a\in[-2;3]$

$a=\{-2;-1;0;1;2;3;\} \to 6$ giá trị

Trường hợp 2: $\begin{cases} f'(x)\le, \forall x\in(0;1) \\ f(0)\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+a+2\le 0, \forall x\in(0;1) \\ 9-a^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le \underset{(0;1)}{Min}\left(-3x^2-2\right) \\ 9-a^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le -5 \\ \left[\begin{array}{l} a\ge 3 \\ a\le -3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a\le -5$

Kết hợp với điều kiện bài toán $a=\{-9;-8;-7;-6;-5\} \to 5$ giá trị

Vậy có 11 giá trị thoả mãn.

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in[-10;10]$ để hàm số $f(x)=\left|x^3-3ax^2-3(a+2)x-a+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 19. **B.** 12. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+mx+10\right|$ đồng biến trên $(-1;1)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 3: Gọi S là số giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-20;20)$ để hàm số $f(x)=\left|2x^4-4(m+4)x^3+3m^2x^2+48\right|$ đồng biến trên $(0;2)$. Số phần tử của tập S là

A. 16. **B.** 32. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\left|x^3+mx^2-2mx+m-3\right|$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2m+3)x^2-\left(m^2+3m\right)x+\frac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 9.

Câu 6: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y=\left|-x^4+mx^3+2m^2x^2+m-1\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. -1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-4;4)$ để hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3-x^2+mx+1\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 8: Gọi $S=[a\,;+\infty)$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+mx+3m+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(-2\,;+\infty)$. Khi đó a bằng

A. -3. **B.** 19. **C.** 3. **D.** -2.

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|\frac{x^2-2x+2m+2}{x-1}\right|$ đồng biến trên $[3;+\infty)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 6.

Câu 10: Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y=\left|x+1+\frac{m^2-2m-1}{x+1}\right|$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ là $[a;b]$.Tính $a.b$.

A. -10. **B.** -9. **C.** 2. **D.** -7.

Câu 11: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|\frac{x^2+x+2m-3}{x-1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 12: Cho hàm số $y=\left|\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}+\frac{m}{2}x-1\right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$

A. 4 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=\left|\sqrt{x^2+2x+2}-x+m\right|$, trong đó m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. Số phần tử của tập S là

A. 2018. **B.** 2017. **C.** 2019. **D.** 4039.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-5;5]$ để hàm số $y=\left|\cos^3 x-3m^2\cos x\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A. 1. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 6

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $y=\left|9^x+3^x-m+1\right|$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

A. 1. **B.** 4 . **C.** 3 . **D.** 6 .

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương và nhỏ hơn 2020 để hàm số $y=\left|4^x-m.2^{x+1}+m+2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 17: Cho hàm số $y=\left|e^{\frac{2x+2}{x-1}}+3e^{\frac{x+1}{x-1}}-2m+5\right|$ (1). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$?

A. 234. **B.** Vô số. **C.** 40. **D.** Không tồn tại m.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\left|8^{\tan x}+3.2^{\tan x}-m+2\right|$ đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\le\frac{29}{8}$. **B.** $m>\frac{29}{8}$. **C.** $m<\frac{29}{8}$. **D.** $m\ge\frac{29}{8}$.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-100;100)$ của tham số m để hàm số $y=\left|\ln 3x-4x^2+m\right|$ đồng biến trên đoạn $\left[1;e^2\right]$?

A. 101. **B.** 102 . **C.** 103. **D.** 100 .

Câu 20: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2020;2020)$ để hàm số $y=\left|\ln\left(x^2+2x-m\right)-2mx^2-1\right|$ luôn đồng biến trên $(0;10)$.

A. 4038 . **B.** 2020 . **C.** 2017 . **D.** 2017 .

Câu 21: Có bao nhiêu số nguyên của tham số m trong đoạn $[-3;3]$ để hàm số $y=\left|\ln\left(x^3+mx+2\right)\right|$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;3)$?

A. 7. **B.** 4 . **C.** 6 . **D.** 5 .

Câu 22: Cho hàm số $y=\left|\ln\left(x^2-mx-m\right)-1\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};1\right)$?

A. 10. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 5.

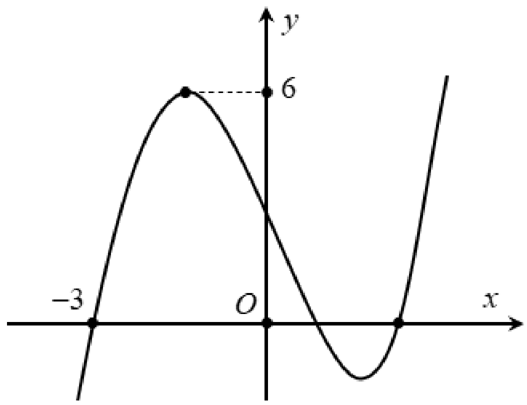
Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số $y=\left|\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

A. 13 . **B.** 12 . **C.** 11 . **D.** 10 .

Câu 24: Tổng các giá trị nguyên của m trên $[-10;10]$ để hàm số $y=g(x)=\left|\ln\left(x^2+x+m\right)+x\right|$ đồng biến trên $(-1;3)$ là

A. 50 . **B.** 100 . **C.** 52 . **D.** 105 .

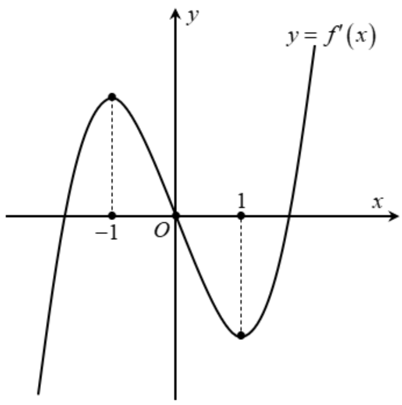
Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0;23]$ để hàm số $y = \left| f(x) - 2m^2x + m - 1 \right|$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$? Biết rằng tọa độ điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $(-3;5)$?

A. 1. **B.** 22. **C.** 3. **D.** 20.

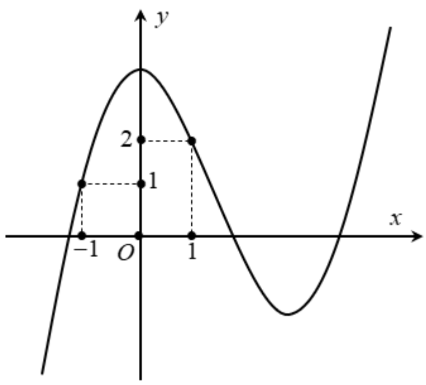
Câu 26: Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $f(1) = 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2023;2023]$ để hàm số $y = \left| 4f(\ln x) - \ln^2 x + 1 - 2m \right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;e)$.

A. 2023. **B.** 2014. **C.** 2026. **D.** 4042.

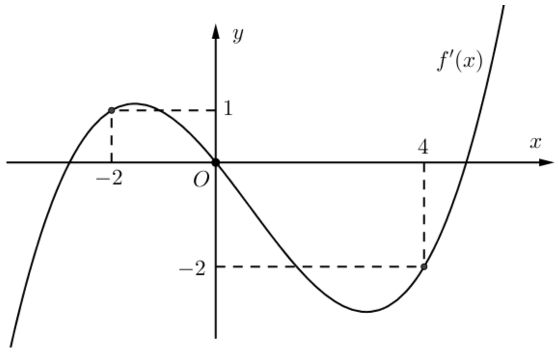
Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-23;23]$ để hàm số $y = \left| 2f(2-x) - mx^2 + 2(3m+1)x + m \right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$?

A. 43. **B.** 41. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn dương trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



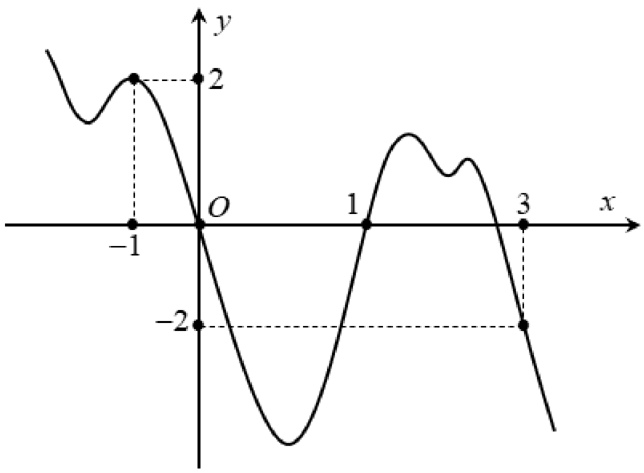
Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $0 \le m < 20$ để hàm số $y = \left|4f(|x-m|) + x^2 - 2mx + 2023\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 - 2x + 3$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $g(x) = f\left(\left|\sin^2 x + 3\sin x - m\right|\right) + m^2 + 2$ đồng biến trên $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 14. **D.** 11.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như sau:



Hàm số ho hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) + x^2 - 2x - 2|x-1| + 2023$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(3;+\infty)$.

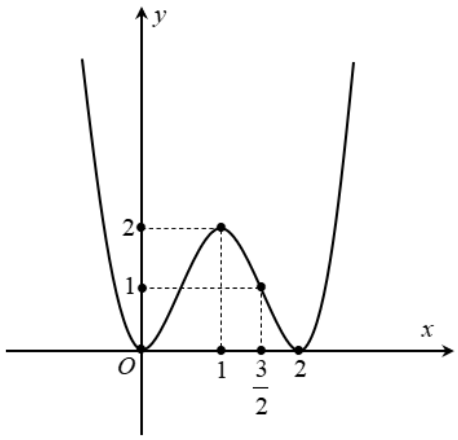
Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x) = \left|2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f\left(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2\right)\right|$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

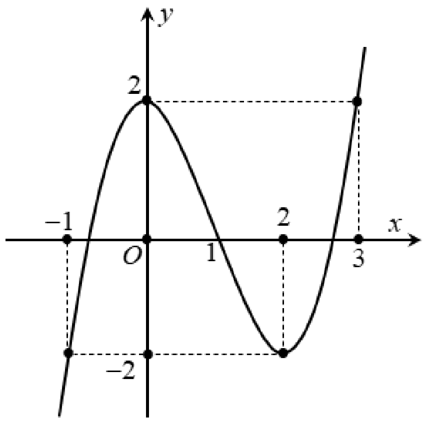
Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=f(2x-2)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Gọi S là tập tất cả các số nguyên của tham số a để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-(a+1)^2\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Tổng các phần tử của tập S là:

A. 2. **B.** -3. **C.** 0. **D.** -1.

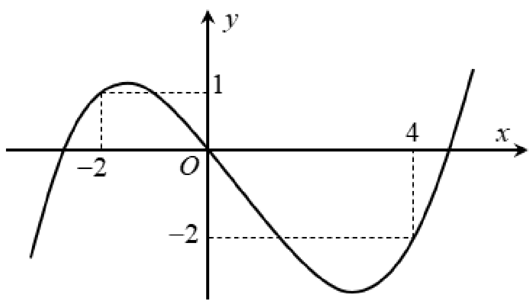
Câu 33: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(5)>8$ và $f(1)=0$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $g(x)=\left|f\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{8}\right|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

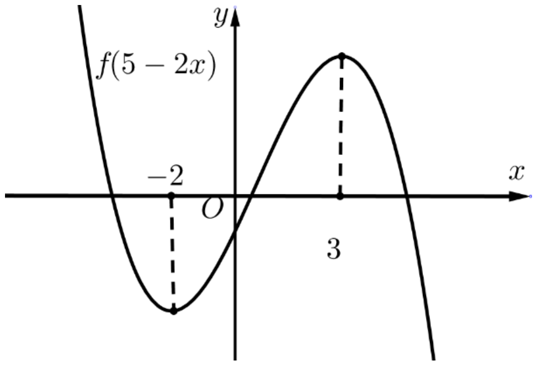
A. $(-8;-4)$ **B.** $(4;+\infty)$ **C.** $(2;4)$ **D.** $(-10;-8)$

Câu 34: Cho hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên không quá 100 của m sao cho hàm số $g(x)=f(|m-2x|)+x^2-mx$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Số phần tử của tập S bằng:



A. 95. **B.** 96. **C.** 100. **D.** 99.

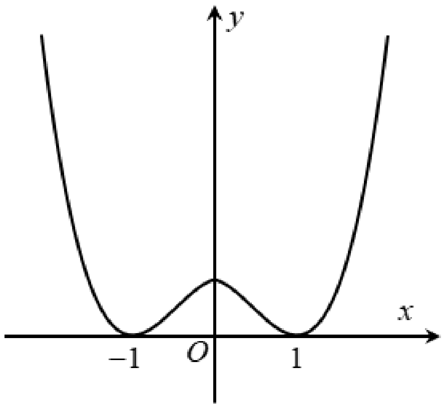
Câu 35: Cho đồ thị hàm số $y = f\left(5-2x\right)$ như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in \left[-23;23\right]$ để hàm số $y = f\left(\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$?

A. 23. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 36: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in \left[0;23\right]$ để hàm số $g\left(x\right) = f\left(\left|x^2-2x\right|+m\right)+2023$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$?

A. 23. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in [-10;10]$ để hàm số $f(x) = |x^3 - 3ax^2 - 3(a+2)x - a + 1|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 19. **B.** 12. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3ax^2 - 3(a+2)x - a + 1$

Đạo hàm $g'(x) = 3x^2 - 6ax - 3(a+2) = 3(x^2 - 2ax - a - 2)$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ thì ta có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} f(0) \ge 0 \\ f'(x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 1 \ge 0 \\ a \le \dfrac{x^2 - 2}{2x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 1 \\ a \le -2 \end{cases}, \forall x \in (0;2)$

Trường hợp 2: $\begin{cases} f(0) \le 0 \\ f'(x) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 1 \le 0 \\ a \ge \dfrac{x^2 - 2}{2x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 1 \\ a \ge 1 \end{cases}, \forall x \in (0;2)$

Từ hai trường hợp, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le -2 \\ a \ge 1 \end{array} \right. \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}; a \in [-10;10]} \left[\begin{array}{l} -10 \le a \le -2 \\ 1 \le a \le 10 \end{array} \right.$

Vậy có tất cả 19 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + mx + 10|$ đồng biến trên $(-1;1)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + mx + 10|$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$.

Hàm số $f(x) = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ thì bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-1;1)$ phải có dạng như sau:

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(-1) \ge 0$	$\nearrow$	

x	-1		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(-1) \le 0$	$\searrow$	

Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và không âm trên $(-1;1)$ tức là

$\begin{cases} f(-1)\ge 0 \\ f'(x)\ge 0 \end{cases}, \forall x\in(-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} 6-m\ge 0 \Leftrightarrow m\le 6 \\ m\ge 6x-3x^2=g(x) \end{cases}, \forall x\in(-1;1)$

Xét hàm $g(x)=6x-3x^2$ trên khoảng $(-1;1)$ ta có $g'(x)=6-6x$, $g'(x)>0\ \forall x\in(-1;1)$.

Bảng biến thiên

x	-1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 1
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-9 \nearrow 3$

Do đó giá trị m thỏa mãn trường hợp này là $\begin{cases} m\le 6 \\ m\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3\le m\le 6$

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ và không dương trên $(-1;1)$ tức là $\begin{cases} f(-1)\le 0 \\ f'(x)\le 0 \end{cases}, \forall x(-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} 6-m\le 0 \\ m\le 6x-3x^2 \end{cases}, \forall x\in(-1;1)$.

Sử dụng bảng biến thiên hàm $g(x)$ bên trên ta được: $\begin{cases} m\ge 6 \\ m\le -9 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên ta được kết quả $m\in\{3,4,5,6\}$.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Gọi S là số giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-20;20)$ để hàm số $f(x)=\left|2x^4-4(m+4)x^3+3m^2x^2+48\right|$ đồng biến trên $(0;2)$. Số phần tử của tập S là

A. 16. **B.** 32. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=\left|2x^4-4(m+4)x^3+3m^2x^2+48\right|$,vì $h(0)=48>0$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi và chỉ khi $h(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ hay $h'(x)\ge 0,\forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow 8x^3-12(m+4)x^2+6m^2x\ge 0,\forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow g(x)=4x^2-6(m+4)x+3m^2\ge 0,\forall x\in(0;2)$. Xảy ra 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $g(x)=4x^2-6(m+4)x+3m^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta'\le 0 \Leftrightarrow -3\left(-48-24m+m^2\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 12-8\sqrt{3} \\ m\ge 12+8\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $g(x)$ có hai nghiệm $x_1<x_2\le 0$ hoặc $g(x)$ có hai nghiệm $2\le x_1<x_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ g(0)\ge 0 \\ \dfrac{S}{2}<0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \Delta'>0 \\ g(2)\ge 0 \\ \dfrac{S}{2}>2 \end{cases}$.

Ta có

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ g(0)\ge 0\\ \dfrac{S}{2}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\left(-48-24m+m^2\right)>0\\ m^2\ge 0\\ \dfrac{3m+4}{4}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12-8\sqrt{3}<m<12+8\sqrt{3}\\ m^2\ge 0\\ m<-\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow 12-8\sqrt{3}<m<-\frac{4}{3}.$$

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ g(2)\ge 0\\ \dfrac{S}{2}>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\left(-48-24m+m^2\right)>0\\ 3m^2-12m-32\ge 0\\ \dfrac{3m+4}{4}>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12-8\sqrt{3}<m<12+8\sqrt{3}\\ \left[\begin{array}{l}m\ge\dfrac{6+2\sqrt{33}}{3}\\ m\le\dfrac{6-2\sqrt{33}}{3}\end{array}\right.\\ m>\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{6+2\sqrt{33}}{3}\le m<12+8\sqrt{3}.$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên thuộc khoảng $(-20;20)$

$\Rightarrow m\in\{-19;-18;......;-2\}\cup\{6;7;8;......;19\}$.

Câu 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\left|x^3+mx^2-2mx+m-3\right|$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=x^3+mx^2-2mx+m-3$

Trường hợp 1: $f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in(-\infty;1)$ thì hàm số $y=\left|f(x)\right|$ không thể nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Trường hợp 2: $f(x)=0$ không có nghiệm $x_0\in(-\infty;1)$. Ta có: $f'(x)=3x^2+2mx-2m$

Khi đó $y=\left|x^3+mx^2-2mx+m-3\right|=\left|f(x)\right|=\sqrt{f^2(x)}$ nên $y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$. khi và chỉ khi $y'\le 0$ với $\forall x\in(-\infty;1)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f'(x).f(x)\le 0\\ f(x)\ne 0\end{cases},\forall x\in(1;+\infty)\ \Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<0\\ f'(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in(-\infty;1)\ (\text{ vì }\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty)$$

$\Leftrightarrow f'(x)\ge 0;\forall x\in(-\infty;1)$ (vì $f(1)=-2<0$)

$\Leftrightarrow 2m(x-1)\ge -3x^2;\forall x\in(-\infty;1)$

$$\Leftrightarrow m\le\frac{-3x^2}{2(x-1)};\forall x\in(-\infty;1)\Leftrightarrow m\le\min_{(-\infty;1)}\left[\frac{-3x^2}{2(x-1)}\right].$$

Lại có $\dfrac{-x^2}{x-1}=-x-1+\dfrac{1}{1-x}=1-x+\dfrac{1}{1-x}-2$

Do $1-x>0$, áp dụng BĐT Côsi: $1-x+\frac{1}{1-x}-2\ge 2.\sqrt{(1-x).\frac{1}{1-x}}-2=0$

Dấu $"="$ xảy ra khi $x=0$.

Suy ra $m\in(-\infty;0]$, do $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[-10;10]\end{cases}$ nên $m\in\{-10;-9;...;0\}$.

Vậy có tất cả 11 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2m+3)x^2-\left(m^2+3m\right)x+\frac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2m+3)x^2-\left(m^2+3m\right)x+\frac{2019}{2020}$

$\Rightarrow g'(x)=-x^2+(2m+3)x-\left(m^2+3m\right)$

Để $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $g(x)$ nghịch biến và không âm trên khoảng $(1;2)$.

Tức là: $\begin{cases} g'(x)\le 0,\forall x\in(1;2) \\ g(2)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+(2m+3)x-\left(m^2+3m\right)\le 0,\forall x\in(1;2) \\ -\frac{1}{3}.2^3+\frac{1}{2}.(2m+3).2^2-\left(m^2+3m\right).2+\frac{2}{3}\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge m+3,\forall x\in(1;2) \\ x\le m,\quad \forall x\in(1;2)\end{array}\right. \\ -2m^2-2m+4\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 2\end{array}\right. \\ -2\le m\le 1\end{cases} \Leftrightarrow m=-2$.

Trường hợp 2: $g(x)$ đồng biến và không dương trên khoảng $(1;2)$.

Tức là: $\begin{cases} g'(x)\ge 0,\forall x\in(1;2) \\ g(2)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+(2m+3)x-\left(m^2+3m\right)\ge 0,\forall x\in(1;2) \\ -\frac{1}{3}.2^3+\frac{1}{2}.(2m+3).2^2-\left(m^2+3m\right).2+\frac{2}{3}\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le x\le m+3,\forall x\in(1;2) \\ -2m^2-2m+4\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le m\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Câu 6: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y=\left|-x^4+mx^3+2m^2x^2+m-1\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. -1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Gọi $g(x)=-x^4+mx^3+2m^2x^2+m-1$.

$g'(x)=-4x^3+3mx^2+4m^2x=x\left(-4x^2+3mx+4m^2\right)=-4x\left(x-\frac{3-\sqrt{73}}{8}m\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{73}}{8}m\right)$

Gọi $a=\dfrac{3-\sqrt{73}}{8}m, b=\dfrac{3+\sqrt{73}}{8}m, b-a=\dfrac{2\sqrt{73}}{8}m$.

Nếu $m>0$ thì $b>a$, nếu $m<0$ thì $b<a$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=-\infty$ nên không xảy ra trường hợp hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

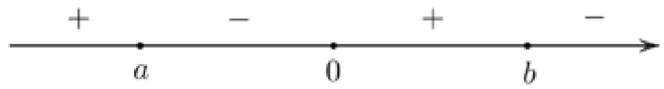
Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì phải có $g(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ và $g(1)\le 0$.

$g(1)\le 0 \Leftrightarrow 2m^2+2m-2\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\le m\le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (1).

$g(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)\Leftrightarrow g'(x)\le 0, \forall x\in(1;+\infty)$ (2).

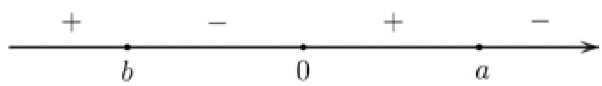
Nếu $m=0: g'(x)=-4x^3$. Điều kiện (1) và (2) đều thỏa mãn, do đó giá trị $m=0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nếu $0<m\le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (3): Dấu $g'(x)$ trên trục số như sau:



Để thỏa mãn điều kiện (2) thì $b=\dfrac{3+\sqrt{73}}{8}m\le 1 \Leftrightarrow m\le \dfrac{-3+\sqrt{73}}{8}$ (4). Kết hợp (3) và (4) có: $0<m\le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Nếu $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\le m<0$ (5): Dấu $g'(x)$ trên trục số như sau:



Để thỏa mãn điều kiện (2) thì $a=\dfrac{3-\sqrt{73}}{8}m\le 1 \Leftrightarrow m\ge \dfrac{-3-\sqrt{73}}{8}$ (6). Kết hợp (5) và (6) có: $\dfrac{-3-\sqrt{73}}{8}\le m<0$.

Vậy các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài là $\dfrac{-3-\sqrt{73}}{8}\le m\le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, suy ra các giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài là $m=-1, m=0$, do đó $S=-1$.

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-4;4)$ để hàm số $y=\left|\dfrac{1}{3}x^3-x^2+mx+1\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+mx+1 \Rightarrow f'(x)=x^2-2x+m$. Ta có: $\Delta'=1-m$

Trường hợp 1: $\Delta'\le 0 \Leftrightarrow 1-m\le 0 \Leftrightarrow m\ge 1$. Suy ra $f'(x)\ge 0, \forall x\in(1;+\infty)$.

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ \dfrac{1}{3} + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \geq -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$.

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-4;4)$ ta được $m \in \{-3;-2;-1;0;1\}$. Ta có 5 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 1$. Suy ra $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ x_1 < x_2 \leq 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ f'(1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - 1 < 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ f'(1) > 0 \\ 1 - 1 < 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \varnothing$

Vậy tất cả có 5 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Gọi $S = [a\,; +\infty)$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 + mx + 3m + 1\right|$ đồng biến trên khoảng $(-2\,; +\infty)$. Khi đó a bằng

A. -3. **B.** 19. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx + 3m + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + m$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-2\,; +\infty) \\ f(-2) \geq 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-2\,; +\infty) \\ f(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + m \geq 0, \forall x \in (-2\,; +\infty) \\ m \geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3x^2 + 6x, \forall x \in (-2\,; +\infty) \\ m \geq 19 \end{cases}$

$\begin{cases} m \geq \max\limits_{x \in (-2;+\infty)} \left(-3x^2 + 6x\right) \\ m \geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 19$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (-2\,; +\infty) \\ f(-2) \leq 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (-2\,; +\infty) \\ f(-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + m \leq 0, \forall x \in (-2\,; +\infty) \\ m - 19 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3x^2 + 6x, \forall x \in (-2\,; +\infty) \\ m \leq 19 \end{cases}$

$\begin{cases} m \leq \min\limits_{(-2;+\infty)} \left(-3x^2 + 6x\right) \\ m \leq 19 \end{cases}$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^2+6x\right)=-\infty \Rightarrow$ hàm số $y=-3x^2+6x$ không có giá trị nhỏ nhất. Vì vậy TH2 không có giá trị m thỏa mãn. Vậy tập các giá trị m cần tìm là $S=\left[19\,;+\infty\right)$.

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-2x+2m+2}{x-1}\right|$ đồng biến trên $\left[3;+\infty\right)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2m+2}{x-1}$ có $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-2m}{(x-1)^2}$

Khi đó $y=\left|f(x)\right|=\sqrt{f^2(x)}\Rightarrow y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

Hàm số đồng biến trên $\left[3;+\infty\right)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in\left[3;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f'(x).f(x)\ge 0\\ f(x)\ne 0\end{cases},\forall x\in\left[3;+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ f'(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in\left[3;+\infty\right)$ (vì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$)

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2-2x+2m+2}{x-1}>0\\ \dfrac{x^2-2x-2m}{(x-1)^2}\ge 0\end{cases},\forall x\in\left[3;+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+2m+2>0\\ x^2-2x-2m\ge 0\end{cases},\forall x\in\left[3;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2m+2>-x^2+2x\\ 2m\le x^2-2x\end{cases},\forall x\in\left[3;+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2m+2>\max\limits_{[3;+\infty)}\left(-x^2+2x\right)\\ 2m\le\min\limits_{[3;+\infty)}\left(x^2-2x\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m+2>-3\\ 2m\le 3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{5}{2}\\ m\le\dfrac{3}{2}\end{cases}$. Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y=\left|x+1+\dfrac{m^2-2m-1}{x+1}\right|$ đồng biến trên $\left(2;+\infty\right)$ là $\left[a;b\right]$.Tính $a.b$.

A. -10. **B.** -9. **C.** 2. **D.** -7.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=x+1+\dfrac{m^2-2m-1}{x+1}$. Ta có $f'(x)=1-\dfrac{m^2-2m-1}{(x+1)^2}$

Khi đó $y=\left|x+1+\dfrac{m^2-2m-1}{x+1}\right|=\left|f(x)\right|=\sqrt{f^2(x)}$ nên $y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0$ với $\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x).f(x)\ge 0\\ f(x)\ne 0\end{cases},\forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x)>0\\ f(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in(2;+\infty)$ (vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$)

$\Leftrightarrow\begin{cases} x+1+\dfrac{m^2-2m-1}{x+1}>0\\ 1-\dfrac{m^2-2m-1}{(x+1)^2}\ge 0\end{cases},\forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases} m^2-2m-1>-(x+1)^2\\ m^2-2m-1\le(x+1)^2\end{cases},\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow\begin{cases} m^2-2m-1\ge \max\limits_{(2;+\infty)}\left[-(x+1)^2\right]=-9\\ m^2-2m-1\le\min\limits_{(2;+\infty)}(x+1)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m^2-2m+8\ge 0\\ m^2-2m-10\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 1-\sqrt{11}\le m\le 1+\sqrt{11}$

Câu 11: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+x+2m-3}{x-1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 7 . **B.** 5 . **C.** 4 . **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x)=\dfrac{x^2+x+2m-3}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x^2-2x+2-2m}{(x-1)^2}$

Khi đó $y=\left|f(x)\right|=\sqrt{f^2(x)}\Rightarrow y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi $y'\ge 0,\forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}\ge 0,\forall x\in(3;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x).f(x)\ge 0\\ f(x)\ne 0\end{cases},\forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\ge 0\\ f'(x)\ge 0,\forall x\in(3;+\infty),\text{do } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ f(x)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(3)\ge 0\\ f'(x)\ge 0,\forall x\in(3;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{9+2m}{2}\ge 0\\ x^2-2x+2-2m\ge 0,\forall x\in(3;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge -\dfrac{9}{2}\\ x^2-2x+2\ge 2m,\forall x\in(3;+\infty)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\dfrac{9}{2} \\ x^2 - 2x + 2 \geq 2m, \forall x \in (3;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\dfrac{9}{2} \\ m \leq \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{9}{2} \leq m \leq \dfrac{5}{2}$$

Ta có $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \left|\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} + \dfrac{m}{2}x - 1\right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$

A. 4 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} + \dfrac{m}{2}x - 1$. Ta có $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} + \dfrac{m}{2}$

Do hàm số liên tục tại $x = 0; x = 1$ nên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ \dfrac{m}{2} \geq -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} \leq \min\limits_{x\in[0;1]} \left\{\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}\right\} \\ m \geq -2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{3} \leq m \leq 0$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} \geq \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} \geq \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ \dfrac{m}{2} \leq -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} \geq \max\limits_{x\in[0;1]} \left\{\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}\right\} \\ \dfrac{m}{2} \leq -\sqrt{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ m \leq -2\sqrt{3} \end{cases}$ (vô nghiệm). Do m nguyên nên m nhận các giá trị sau $-3;-2;-1;0$

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \left|\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x + m\right|$, trong đó m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. Số phần tử của tập S là

A. 2018. **B.** 2017. **C.** 2019. **D.** 4039.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x+m$ trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Ta có, $g'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}<0,\forall x>-1$

(Do $x+1-\sqrt{x^2+2x+2}=(x+1)-\sqrt{(x+1)^2+1}<0,\forall x>-1$)

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Suy ra, hàm số $f(x)=|g(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)\Leftrightarrow g(x)\le 0,\forall x>-1\ (1)$

Do hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1;+\infty)$.

Vậy $(1)\Leftrightarrow \max\limits_{[-1;+\infty)} g(x)\le 0\Leftrightarrow g(-1)=m+2\le 0\Leftrightarrow m\le -2$. Vậy $S=\{-2019;-2018;...;-2\}$

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-5;5]$ để hàm số $y=\left|\cos^3 x-3m^2\cos x\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. 1. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 6

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\cos x$, vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$. Vì $t=\cos x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m nguyên thuộc $[-5;5]$ để hàm số $y=\left|t^3-3m^2t\right|$ đồng biến trên $(0;1)$. Xét $f(t)=t^3-3m^2t^2;t\in(0;1)$; $f'(t)=3t^2-3m^2$.

Trường hợp 1: Nếu $m=0\Rightarrow f'(t)>0;\forall t\in(0;1)\Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;1)$.

Mà $f(0)=0\Rightarrow y=|f(t)|$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)\Rightarrow y=|f(t)|$ đồng biến trên $(0;1)$.

Do đó $m=0$ thỏa mãn bài toán (1).

Trường hợp 2: $m\ne 0\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=m\\t=-m\end{array}\right.$; $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-m\sqrt{3}\\t=0\\t=m\sqrt{3}\end{array}\right.$

Với $m>0$, ta có BBT sau:

t	0		m		$m\sqrt{3}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$\lvert f(t)\rvert$	0	$\nearrow$	$2m^3$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=|f(t)|$ đồng biến trên $(0;m)$.

Yêu cầu bài toán tương đương $(0;1)\subset(0;m)\Leftrightarrow m\ge 1\ (2)$.

Với $m<0$, ta có bảng biến thiên sau:

t	0		$-m$		$-m\sqrt{3}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$\lvert f(t)\rvert$	0	$\nearrow$	$-2m^3$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = \lvert f(t) \rvert$ đồng biến trên $(0;-m)$.

Yêu cầu bài toán tương đương $(0;1) \subset (0;-m) \Leftrightarrow m \le -1\,(3)$.

Từ $(1);(2);(3)$ vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $y = \left|9^x + 3^x - m + 1\right|$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $3^x = t \Rightarrow t \in [1;3]$ vì $x \in [0;1]$.

$$\Rightarrow y = \left|t^2 + t - m + 1\right| = \sqrt{\left(t^2 + t - m + 1\right)^2} \Rightarrow y' = \frac{2.\left(t^2 + t - m + 1\right)'.\left(t^2 + t - m + 1\right)}{2.\left|t^2 + t - m + 1\right|}$$

Để hàm số đồng biến trên đoạn $t \in [1;3]$ thì $y' = \dfrac{(2t+1).\left(t^2 + t - m + 1\right)}{\left|t^2 + t - m + 1\right|} \ge 0 \quad \forall t \in [1;3]$

Với mọi giá trị của $t \in [1;3]$ thì $2t + 1 > 0$ nên

Để $y' \ge 0\ \forall t \in [1;3]$ thì: $t^2 + t - m + 1 \ge 0 \quad \forall t \in [1;3] \quad \Rightarrow \quad m - 1 \le t^2 + t = g(t) \quad \forall t \in [1;3]$

$\Rightarrow m - 1 \le \min\limits_{[1;3]} g(t) = 2 \Rightarrow m \le 3$. Vậy có 3 giá trị nguyên $\{1;2;3\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương và nhỏ hơn 2020 để hàm số $y = \left|4^x - m.2^{x+1} + m + 2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = 4^x - m.2^{x+1} + m + 2$ (1) trên khoảng $(0;1)$. Đặt $t = 2^x$, $t \in (1;2)$.

Hàm số (1) trở thành $h(t) = t^2 - 2m.t + m + 2$ trên khoảng $(1;2)$. Suy ra $h'(t) = 2t - 2m$.

Ta có $y = \left|f(x)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \text{ ñoàng bieán treân } (0;1) \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \text{ nghòch bieán treân } (0;1) \\ f(0) \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$ (*).

Vì hàm số $t = 2^x$ đồng biến trên $(0;1)$.

Do đó, $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}h(t)\ \text{ñoàng bieán treân } (1;2)\\ 3-m\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}h(t)\ \text{nghòch bieán treân } (1;2)\\ 3-m\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2t-2m\ge 0\,\forall t\in(1;2)\\ 3-m\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}2t-2m\le 0\,\forall t\in(1;2)\\ 3-m\le 0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le 1\\ m\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge 2\\ m\ge 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le 1\\ m\ge 3\end{array}\right.$. Vậy có 2018 số nguyên dương nhỏ hơn 2020 thỏa ycbt.

Câu 17: Cho hàm số $y=\left|e^{\frac{2x+2}{x-1}}+3e^{\frac{x+1}{x-1}}-2m+5\right|$ (1). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$?

A. 234. **B.** Vô số. **C.** 40. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=e^{\frac{x+1}{x-1}}$, ta có $t'=e^{\frac{x+1}{x-1}}.\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)'=e^{\frac{x+1}{x-1}}.\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0\ \forall x\in(2;3)\Rightarrow t\in\left(e^2;e^3\right)$, đồng thời x và t sẽ ngược chiều biến thiên.

Khi đó hàm số trở thành $y=\left|t^2+3t-2m+5\right|=\sqrt{\left(t^2+3t-2m+5\right)^2}$ (2)

Ta có: $y'=\dfrac{2\left(t^2+3t-2m+5\right).(2t+3)}{2\sqrt{\left(t^2+3t-2m+5\right)^2}}=\dfrac{\left(t^2+3t-2m+5\right).(2t+3)}{\sqrt{\left(t^2+3t-2m+5\right)^2}}$.

Hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(2;3)\Leftrightarrow$ hàm số (2) đồng biến trên khoảng $\left(e^2;e^3\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\left(t^2+3t-2m+5\right).(2t+3)}{2\sqrt{\left(t^2+3t-2m+5\right)^2}}\ge 0\ \forall t\in\left(e^2;e^3\right)\Leftrightarrow t^2+3t-2m+5>0\ \forall t\in\left(e^2;e^3\right)$

$\Leftrightarrow m<\dfrac{t^2+3t+5}{2}=g(t)\ \forall t\in\left(e^2;e^3\right)$.

Có $g'(t)=\dfrac{2t+3}{2}>0\ \forall t\in\left(e^2;e^3\right)\Rightarrow \dfrac{e^4+3e^2+5}{2}<\ g(t)<\dfrac{e^6+3e^4+5}{2}\Rightarrow m\le\dfrac{e^4+3e^2+5}{2}$.

Với điều kiện m là số nguyên dương ta tìm được 40 giá trị của m.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\left|8^{\tan x}+3.2^{\tan x}-m+2\right|$ đồng biến trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\le\dfrac{29}{8}$. **B.** $m>\dfrac{29}{8}$. **C.** $m<\dfrac{29}{8}$. **D.** $m\ge\dfrac{29}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $2^{\tan x}=t$ vì $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $\tan x\ge -1$ nên $t\ge\frac{1}{2}$. Khi đó ta có hàm số: $y=\left|t^3+3t-m+2\right|$ (1).

Để hàm số ban đầu đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số (1) phải đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t-m+2$. Ta có: $f'(t)=3t^2+3>0,\forall t$.

Khi đó $y=\left|f(t)\right|=\sqrt{f^2(t)}$ nên $y'=\dfrac{f'(t).f(t)}{\sqrt{f^2(t)}}$.

Hàm số đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow f(t)\ge 0,\forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow t^3+3t-m+2\ge 0,\forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

$\Leftrightarrow m\le t^3+3t+2,\forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right),\ (*)$.

Xét hàm số: $g(t)=t^3+3t+2,\forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

$g'(t)=3t^2+3>0,\ \forall t$. Vậy hàm số $g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $g(t)\ge g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Từ $(*)$ suy ra: $m\le g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{29}{8}$.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-100;100)$ của tham số m để hàm số $y=\left|\ln 3x-4x^2+m\right|$ đồng biến trên đoạn $\left[1;e^2\right]$?

A. 101. **<u>B</u>.** 102. **C.** 103. **D.** 100.

Lời giải

Chọn B

$y=\left|\ln 3x-4x^2+m\right|$. Điều kiện $x>0$. Xét hàm số $g(x)=\ln 3x-4x^2+m$ trên $\left[1;e^2\right]$.

$\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x}-8x=\frac{1-8x^2}{x}<0,\forall x\in\left[1;e^2\right]\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $\left[1;e^2\right]$.

x	1		e^2
$g'(x)$		$-$	0
$g(x)$	$\ln 3-4+m$	$\searrow$	$\ln 3-4e^4+2+m$

$\Rightarrow$ hàm số $y=\left|g(x)\right|=\left|\ln 3x-4x^2+m\right|$ đồng biến trên đoạn $\left[1;e^2\right]$

$\Leftrightarrow \ln 3-4+m\le 0\Leftrightarrow m\le 4-\ln 3$.

Mà m nguyên thuộc khoảng $(-100;100)$ nên $m\in\{-99;-98;...;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 102 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2020;2020)$ để hàm số $y=\left|\ln\left(x^2+2x-m\right)-2mx^2-1\right|$ luôn đồng biến trên $(0;10)$.

A. 4038. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn C

Ta xét hàm số $f(x)=\ln\left(x^2+2x-m\right)-2mx^2-1$ trên $(0;10)$.

Điều kiện hàm số có nghĩa là $x^2+2x-m>0,\forall x\in(0;10)\Leftrightarrow x^2+2x>m,\forall x\in(0;10)$ (1)

Ta lại có $x^2+2x=x(x+2)>0$ với mọi $x\in(0;10)$ nên điều kiện (1) cho ta $m\le 0$ (2)

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x-m}-4mx$ do $m\le 0$ và $x\in(0;10)$ nên $\dfrac{2x+2}{x^2+2x-m}>0;-4mx\ge 0$ suy ra $f'(x)>0$ hàm số đồng biến trên $(0;10)$.

Từ đó để hàm số $y=\left|\ln\left(x^2+2x-m\right)-2mx^2-1\right|=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên $(0;10)$ điều kiện đủ là $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in(0;10)$ (3).

Trường hợp 1 : $m=0$ khi đó $f(x)=\ln\left(x^2+2x\right)-1$ có $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ không thỏa mãn (3)

Trường hợp 2 : Xét $m<0$, do hàm số $f(x)$ đồng biến nên ta chỉ cần $f(0)\ge 0$ $\Leftrightarrow \ln(-m)-1\ge 0\Leftrightarrow -m\ge e\Leftrightarrow m\le -e$.

Từ đó ta được: $\begin{cases}-2020<m\le -e\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\{-2019;-2018;-2017;....;-3\}$ có 2017 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 21: Có bao nhiêu số nguyên của tham số m trong đoạn $[-3;3]$ để hàm số $y=\left|\ln\left(x^3+mx+2\right)\right|$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;3)$?

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x^3+mx+2>0$.

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(x^3+mx+2\right)$. Ta có: $f'(x)=\dfrac{3x^2+m}{x^3+mx+2}$.

Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1;3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f'(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in[1;3)\ (1)\\ \begin{cases}f(x)\le 0\\ f'(x)\le 0\end{cases},\forall x\in[1;3)\ (2)\end{array}\right.$.

Trường hợp 1:

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln\left(x^3+mx+2\right)\ge 0\\ \dfrac{3x^2+m}{x^3+mx+2}\ge 0\end{cases},\forall x\in[1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+mx+2\ge 1\\ 3x^2+m\ge 0\\ x^3+mx+2>0\end{cases},\forall x\in[1;3)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -x^2-\dfrac{1}{x}\\ m\ge -3x^2\end{cases},\forall x\in[1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge \max\limits_{[1;3)}\left(-x^2-\dfrac{1}{x}\right)=-2\\ m\ge \max\limits_{[1;3)}\left(-3x^2\right)=-3\end{cases}\Leftrightarrow m\ge -2.$$

Trường hợp 2:

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln\left(x^3+mx+2\right)\le 0\\ \dfrac{3x^2+m}{x^3+mx+2}\le 0\end{cases},\forall x\in[1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+mx+2\le 1\\ 3x^2+m\le 0\\ x^3+mx+2>0\end{cases},\forall x\in[1;3)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -x^2-\dfrac{1}{x}\\ m\le -3x^2\\ m>-x^2-\dfrac{2}{x}\end{cases},\forall x\in[1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}m<-\dfrac{28}{3}\\ m<-27\\ m>\max\limits_{[1;3)}\left(-x^2-\dfrac{2}{x}\right)=-3\end{cases}\Rightarrow m\in\varnothing.$$

Từ hai trường hợp suy ra $m\ge -2$. Vì chỉ lấy $m\in[-3;3]$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2;3\}$.

Câu 22: Cho hàm số $y=\left|\ln\left(x^2-mx-m\right)-1\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$?

A. 10. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=\ln\left(x^2-mx-m\right)-1$.

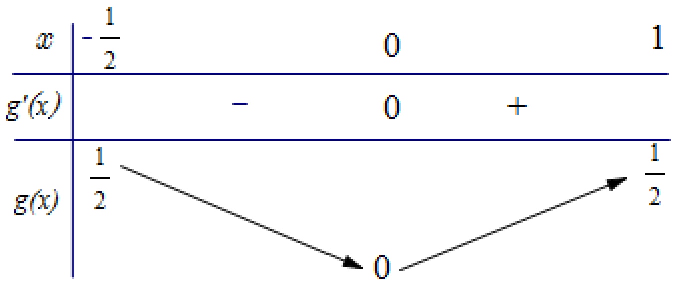
Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-mx-m>0,\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\\ f'(x)\ge 0,\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\\ f(x)\ge 0,\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\end{cases}\quad(1)\\ \begin{cases}x^2-mx-m>0,\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\\ f'(x)\le 0,\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\\ f(x)\le 0,\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\end{cases}\quad(2)\end{array}\right.$.

Xét $x^2-mx-m>0,\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow x^2>m(x+1),\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow m<\dfrac{x^2}{x+1},\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Đặt $g\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x+1}$. Khi đó, $m<\dfrac{x^2}{x+1},\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow g\left(x\right)>m,\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Ta có: $g\left(x\right)=x-1+\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow g'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}$; $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\\ x=-2\notin\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=g\left(x\right)$ trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.



Từ bảng biến thiên của hàm số $y=g\left(x\right)$ suy ra $g\left(x\right)>m\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow m<g\left(0\right)=0$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{2x-m}{x^2-mx-m}$.

$$\left(1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ 2x\geq m,\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\\ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}f\left(x\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m\leq-1\\ \ln\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}m\right)-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq-1\\ \ln\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{m}{2}\right)\geq 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq-1\\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{m}{2}\geq e\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq-1\\ m\leq\dfrac{1-4e}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow m\leq\dfrac{1-4e}{2}.$$

$$\left(2\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ 2x\leq m\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\\ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}f\left(x\right)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m\geq 2\\ \ln\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{m}{2}\right)-1\leq 0\end{cases}\quad \text{suy ra không tồn tại } m.$$

Vậy $m\leq\dfrac{1-4e}{2}$. Mà m nguyên, $-10<m<10$ nên có 5 giá trị m thỏa mãn bài toán

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số $y=\left|\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\right|$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$.

A. 13. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f\left(x\right)=\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)$ nên $f'\left(x\right)=\dfrac{3x^2+2x-m}{\left(x^3+x^2-mx+1\right)\ln 3}$.

Hàm số đồng biến trên $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f\left(x\right)\geq 0\\ f'\left(x\right)\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}f\left(x\right)\leq 0\\ f'\left(x\right)\leq 0\end{cases}\end{array}\right.,\forall x\in\left[1;+\infty\right)$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases}f\left(x\right)\geq 0\\ f'\left(x\right)\geq 0\end{cases},\forall x\in\left[1;+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\geq 0\\ x^3+x^2-mx+1>0\\ 3x^2+2x-m\geq 0\end{cases},\forall x\in\left[1;+\infty\right).$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+x^2-mx+1\geq 1\\ 3x^2+2x\geq m\end{cases},\forall x\in\left[1;+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq x^2+x\\ m\leq 3x^2+2x\end{cases},\forall x\in\left[1;+\infty\right).$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq\min\limits_{\left[1;+\infty\right)}\left(x^2+x\right)\\ m\leq\min\limits_{\left[1;+\infty\right)}\left(3x^2+2x\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 2\\ m\leq 5\end{cases}\Leftrightarrow m\leq 2.$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}f\left(x\right)\leq 0\\ f'\left(x\right)\leq 0\end{cases},\forall x\in\left[1;+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\leq 0\\ x^3+x^2-mx+1>0\\ 3x^2+2x-m\leq 0\end{cases},\forall x\in\left[1;+\infty\right).$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+x^2-mx+1\leq 1\\ x^3+x^2-mx+1>0,\forall x\in\left[1;+\infty\right)\\ 3x^2+2x\leq m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x\leq m\\ x^2+x+\dfrac{1}{x}>m,\forall x\in\left[1;+\infty\right)\\ 3x^2+2x\leq m\end{cases}.$$

Ta có: $m\geq x^2+x,\forall x\in\left[1;+\infty\right)\Leftrightarrow m\geq\max\limits_{\left[1;+\infty\right)}\left(x^2+x\right),\qquad(*)$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x\right)=+\infty$ nên không tồn tại m thỏa mãn $(*)$. Do đó trường hợp 2 không tồn tại giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Suy ra $m\leq 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Mặt khác $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in\left[-10;10\right]\end{cases}$ nên có 13 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24: Tổng các giá trị nguyên của m trên $\left[-10;10\right]$ để hàm số $y=g(x)=\left|\ln\left(x^2+x+m\right)+x\right|$ đồng biến trên $\left(-1;3\right)$ là

A. 50. **B.** 100. **C.** 52. **D.** 105.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(x^2+x+m\right)+x$ trên khoảng $(-1;3)$.

Điều kiện xác định là: $x^2+x+m>0$ với mọi $x\in(-1;3)$.

Khi đó $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+m}+1=\dfrac{x^2+3x+m+1}{x^2+x+m}$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1;3)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+x+m>0\\ x^2+3x+m+1\ge 0 & (1)\\ \ln\left(x^2+x+m\right)+x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+x+m>0\\ x^2+3x+m+1\le 0 & (2)\\ \ln\left(x^2+x+m\right)+x<0\end{cases}\end{array}\right.$ với mọi $x\in(-1;3)$.

Xét hệ bất phương trình (1): $\begin{cases}x^2+x+m>0\\ x^2+3x+m+1\ge 0\\ \ln\left(x^2+x+m\right)+x\ge 0\end{cases}$ đúng với mọi $x\in(-1;3)$.

Ta có: $x^2+x+m>0,\ \forall x\in(-1;3)\Leftrightarrow m>-x^2-x,\ \forall x\in(-1;3)$.

Khảo sát tính biến thiên của hàm số $y=-x^2-x$ trên khoảng $(-1;3)$ ta suy ra

Với $m>\max\limits_{(-1;3)}\left(-x^2-x\right)\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$

Lại có $x^2+3x+m+1\ge 0,\ \forall x\in(-1;3)\Leftrightarrow m\ge -x^2-3x-1,\ \forall x\in(-1;3)$.

Khảo sát tính biến thiên của hàm số $y=-x^2-3x-1$ trên khoảng $(-1;3)$ ta suy ra:

$$m\ge \max\limits_{[-1;3]}\left(-x^2-3x-1\right)\Leftrightarrow m\ge 1$$

Ngoài ra $\ln\left(x^2+x+m\right)+x\ge 0,\forall x\in(-1;3)\Leftrightarrow m\ge -x^2-x+e^{-x},\forall x\in(-1;3)$.

Đặt $k(x)=-x^2-x+e^{-x}$, $k'(x)=-e^{-x}-2x-1\le 0,\forall x\in(-1;3)$.

Do đó $m\ge -x^2-x+e^{-x},\forall x\in(-1;3)\Leftrightarrow m\ge e$.

Vậy (1) tương đương $m\ge e$.

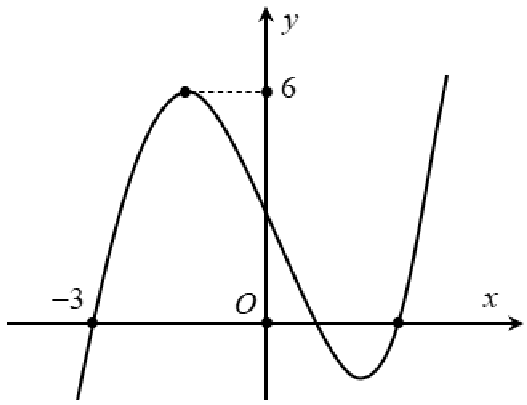
Với hệ bất phương trình (2) ta cũng làm tương tự như trên thì được

$$\begin{cases}x^2+x+m>0\\ x^2+3x+m+1\le 0 \quad \forall x\in(-1;3)\\ \ln\left(x^2+x+m\right)+x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{1}{4}\\ m\le -19\\ \ln\left(x^2+x+m\right)+x<0\end{cases}\Leftrightarrow m\in\varnothing.$$

Vậy hàm số $y=g(x)=\left|\ln\left(x^2+x+m\right)+x\right|$ đồng biến trên $(-1;3)$ khi và chỉ khi $m\ge e$, mà m là số nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m\in\{3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Do đó tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn là 52.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0;23]$ để hàm số $y = \left|f(x) - 2m^2x + m - 1\right|$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$? Biết rằng tọa độ điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $(-3;5)$?

A. 1. **B.** 22. **C.** 3. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(x) - 2m^2x + m - 1$ có $g'(x) = f'(x) - 2m^2$.

Do hàm số $y == f(x)$ có điểm cực tiểu là $(-3;5)$ nên ta có $f(-3) = 5$.

Để hàm số $y = |g(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ thì xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} g'(x) \ge 0 \\ g(-3) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) - 2m^2 \ge 0 \\ f(-3) + 6m^2 + m - 1 \ge 0 \end{cases}, \forall x \in (-3;0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 \le f'(x) \\ 6m^2 + m + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 \le 0 \\ 6m^2 + m + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$

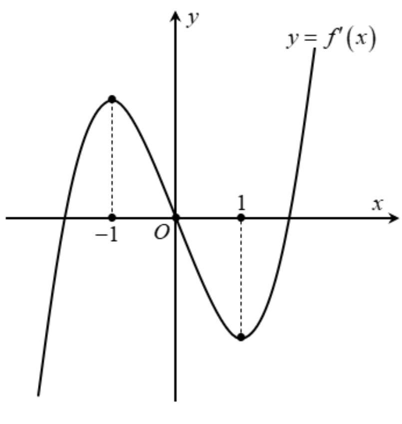
Trường hợp 2: $\begin{cases} g'(x) \le 0 \\ g(-3) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) - 2m^2 \le 0 \\ f(-3) + 6m^2 + m - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 \ge f'(x) \\ 6m^2 + m + 4 \le 0 \end{cases}$

Do $6m^2 + m + 4 > 0, \forall m$ nên trường hợp 2 không thỏa mãn.

Kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [0;23]$ suy ra $m \in \{0\}$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $f(1)=1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2023;2023]$ để hàm số $y=\left|4f(\ln x)-\ln^2 x+1-2m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;e)$.

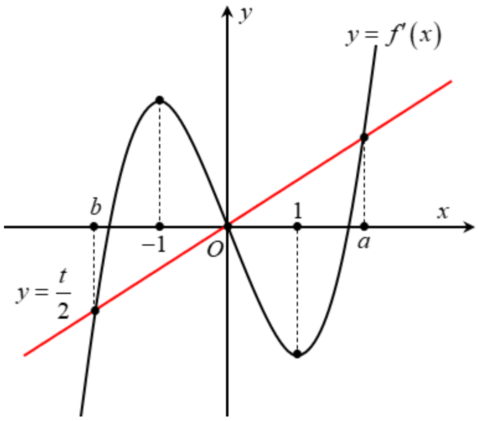
A. 2023. **B.** 2014. **C.** 2026. **D.** 4042.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=4f(\ln x)-\ln^2 x+1-2m$ với $x>0$.

Ta có $g'(x)=4f'(\ln x).\dfrac{1}{x}-2\ln x.\dfrac{1}{x}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(\ln x)=\dfrac{\ln x}{2}$. Đặt $t=\ln x$ ta có $f'(t)=\dfrac{t}{2}$



Dựa vào đồ thị phương trình $f'(t)=\dfrac{t}{2}$ có ba nghiệm lần lượt là $t=b<-1$; $t=0$ và $t=a>1$.

Suy ra $g'(x)=0$ có ba nghiệm lần lượt là $x=e^b<\dfrac{1}{e}$; $x=1$ và $x=e^a>e$.

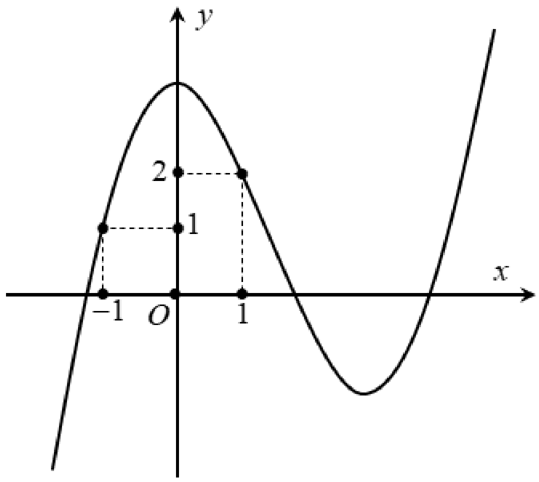
Bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$.

x	0		e^b		1		e		e^a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0		
$g(x)$	↘			↗		↘	$g(e)$ ↘			↗	

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g(e)=4-2m\ge 0\Leftrightarrow m\le 2\xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\,m\in[-2023;2023]}-2023\le m\le 2$.

Suy ra có tất cả 2026 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-23;23]$ để hàm số $y = \left|2f(2-x) - mx^2 + 2(3m+1)x + m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$?

A. 43. **B.** 41. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = 2f(2-x) - mx^2 + 2(3m+1)x + m$

Ta có: $g'(x) = -2f'(2-x) - 2mx + 2(3m+1) = 2\left[-f(2-x) - mx + 3m + 1\right]$.

Khi đó: $g(3) = 2f(-1) - 9m + 2(3m+1).3 + m = 10m + 8$.

Đặt $t = 2 - x \Rightarrow t \in (-1;1)$

Để hàm số $y = |g(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ thì xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} g'(3) \geq 0 \\ g(3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -f'(2-x) - mx + 3m + 1 \geq 0, \forall x \in (1;3) \\ 10m + 8 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m(2-x) + m + 1 \geq f'(2-x), \forall x \in (1;3) \\ m \leq -\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Xét phương trình $mt + m + 1 \geq f'(t), \forall t \in (-1;1) \Rightarrow \begin{cases} m(-1) + m + 1 \geq 1 \\ m(-1) + m + 1 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2m + 1 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{2}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} m \geq \dfrac{1}{2} \\ m \leq -\dfrac{4}{5} \end{cases}$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\begin{cases} g'(3) \leq 0 \\ g(3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -f'(2-x) - mx + 3m + 1 \leq 0, \forall x \in (1;3) \\ 10m + 8 \geq 0 \end{cases}$

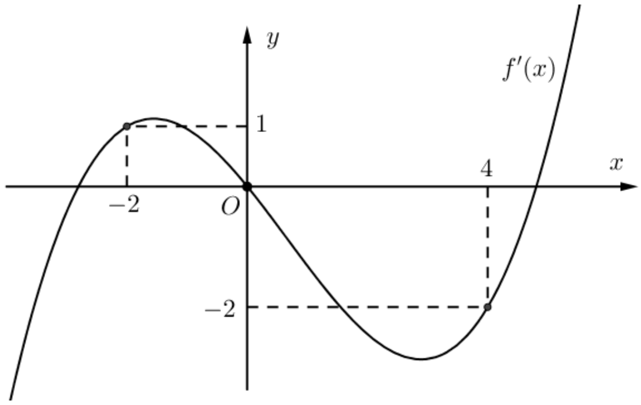
$\Leftrightarrow \begin{cases} m(2-x) + m + 1 \leq f'(2-x), \forall x \in (1;3) \\ m \geq -\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Xét phương trình $mt+m+1\le f'(t),\forall t\in(-1;1)\Rightarrow\begin{cases}m(-1)+m+1\le 1\\2m+1\le 2\end{cases}\Leftrightarrow m\le\frac{1}{2}$

Từ đó suy ra $\begin{cases}m\le\frac{1}{2}\\m\ge-\frac{4}{5}\end{cases}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z};m\in[-23;23]}-\frac{4}{5}\le m\le\frac{1}{2}\Rightarrow m\in\{0\}$.

Vậy có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và luôn dương trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $0\le m<20$ để hàm số $y=\left|4f(|x-m|)+x^2-2mx+2023\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=4f(|x-m|)+x^2-2mx+2023=4f(|x-m|)+(x-m)^2-m^2+2023$.

Đạo hàm: $g'(x)=(x-m)\left(4f(|x-m|)+2|x-m|\right)$

Theo giả thiết $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $m\in[0;20)$ suy ra $g(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ $(*)$

Để hàm số $y=|g(x)|$ đồng biến trên $(1;2)$ thì $g(x).g'(x)\ge 0,\forall x\in(1;2)$

Mặt khác $g(x)>0\Rightarrow g'(x)\ge 0\Leftrightarrow(x-m)\left(4f(|x-m|)+2|x-m|\right)\ge 0,\forall x\in(1;2)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-m\ge 0\\4f(|x-m|)+2|x-m|\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}x-m\le 0\\4f(|x-m|)+2|x-m|\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-m\ge 0\\4f(|x-m|)+2|x-m|\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}x-m\le 0\\4f(|x-m|)+2|x-m|\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le 1\\|x-m|\ge 4\end{cases}\xrightarrow{x\in(1;2)}m\in\varnothing\\\begin{cases}m\ge 2\\|x-m|\le 4\end{cases}\Rightarrow 2\le m\le 5\end{array}\right.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^2-2x+3$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $g(x)=f\left(\left|\sin^2x+3\sin x-m\right|\right)+m^2+2$ đồng biến trên $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 14. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g(x)=f\left(\left|\sin^2 x+3\sin x-m\right|\right)+m^2+2$.

Đặt $t=\sin x$ với $x\in\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$ thì $t\in\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Xét hàm số $g(t)=f\left(\left|t^2+3t-m\right|\right)+m^2+2$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$ thì hàm số $g(t)$ phải nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Đặt $u=t^2+3t$ với $u\in\left(\frac{7}{4};\frac{3+\sqrt{6}}{4}\right)$

Xét hàm số $h(u)=f\left(\left|u-m\right|\right)+m^2+2$ nghịch biến trên $\left(\frac{7}{4};\frac{3+\sqrt{6}}{4}\right)$

Đạo hàm: $h'(u)=\dfrac{f'\left(\left|u-m\right|\right)(u-m)}{\left|u-m\right|}\le 0,\forall u\in\left(\frac{7}{4};\frac{3+\sqrt{6}}{4}\right)$

Với $u>m$, ta có $\dfrac{f'(u-m)(u-m)}{(u-m)}\le 0\Leftrightarrow f'(u-m)\le 0,\forall u\in\left(\frac{7}{4};\frac{3+\sqrt{6}}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}u-m\le -3\\ u-m\ge 1\end{array}\right.\\ m\le\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}u\le m-3\\ u\ge m+1\end{array}\right.\\ m\le\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\frac{3+6\sqrt{3}}{4}\le m-3\\ m+1\le\frac{7}{4}\end{array}\right.\\ m\le\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge\frac{15+6\sqrt{3}}{4}\\ m\le\frac{3}{4}\end{array}\right.\\ m\le\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow m\le\frac{3}{4}$$

Với $u<m$, ta có: $\begin{cases}\dfrac{f'(m-u)(m-u)}{(u-m)}\le 0\\ m\ge\dfrac{3+\sqrt{6}}{4}\end{cases},\forall u\in\left(\frac{7}{4};\frac{3+\sqrt{6}}{4}\right)$.

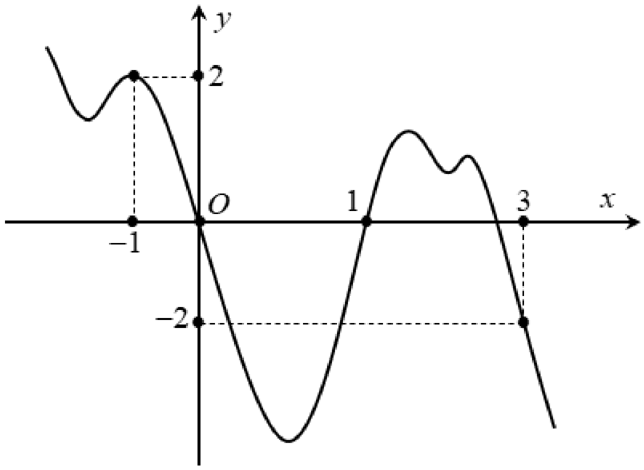
$$\Leftrightarrow\begin{cases}f'(m-u)\ge 0\\ m\ge\frac{3+\sqrt{6}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le m-u\le 3\\ m\ge\frac{3+\sqrt{6}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u\ge m-1\\ m\ge\frac{3+\sqrt{6}}{4}\\ u\le m+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-1\le\frac{7}{4}\\ m\ge\frac{3+\sqrt{6}}{4}\\ \frac{3+\sqrt{6}}{4}\le m+3\end{cases},\forall u\in\left(\frac{7}{4};\frac{3+\sqrt{6}}{4}\right)$$

$\Rightarrow$khi $u<m$ thì không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Do $m\in\mathbb{Z},m\in[-10;10]$ nên suy ra $-10\le m\le 0\Rightarrow m\in\{-10;-9;...;0\}$

Vậy có tất cả 11 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số đạo hàm $y=f'(x)$ như sau:



Hàm số ho hàm số $g\left(x\right)=2f\left(\left|x-1\right|\right)+x^2-2x-2\left|x-1\right|+2023$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

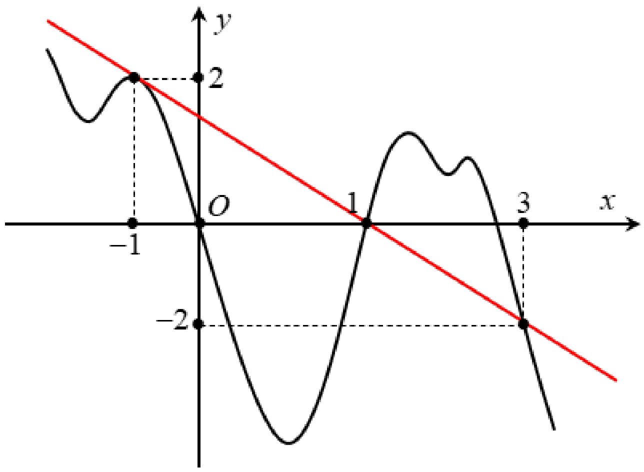
Ta có $g\left(x\right)=2f\left(\left|x-1\right|\right)+x^2-2x-2\left|x-1\right|+2023$

$\Leftrightarrow g(x)=2f\left(\sqrt{(x-1)^2}\right)+x^2-2x-2\sqrt{(x-1)^2}+2023$

$\Rightarrow g'\left(x\right)=2\dfrac{x-1}{\left|x-1\right|}\left[f'\left(\left|x-1\right|\right)+\left|x-1\right|-1\right],\ \forall x\neq 1 \Leftrightarrow g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow f'\left(\left|x-1\right|\right)=-\left|x-1\right|+1$

Đặt $t=\left|x-1\right|$ với $t\geq 0$, ta được phương trình $f'\left(t\right)=-t+1$ (1)

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'\left(t\right)$ và đường thẳng $y=-t+1$.



Vì $t\geq 0$ nên $f'\left(t\right)=-t+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x-1\right|=1 \\ \left|x-1\right|=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \\ x=4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên $(1;2)$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3)=0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=\left|2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)\right|$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $h(x)=2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)$. Khi đó $g(x)=|h(x)|$.

Ta có $h(x)=2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]$.

Suy ra $h'(x)=12(x+1)^5-12(x+1)-3\left[-4(x+1)^3+4(x+1)\right]f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]$.

Hay $h'(x)=12(x+1)\left[(x+1)^4-1\right]+12(x+1)\left[(x+1)^2-1\right]f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]$.

Hay $h'(x)=12(x+1).\left[(x+1)^2-1\right].\left\{(x+1)^2+1+f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]\right\}$.

Hay $h'(x)=12(x+1).(x+2)x.\left\{(x+1)^2+1+f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]\right\}$.

Ta có $-(x+1)^4+2(x+1)^2-3=-\left[(x+1)^2-1\right]^2-2\le -2, \forall x$.

Từ bảng xét dấu suy ra $f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]\ge 0, \forall x$.

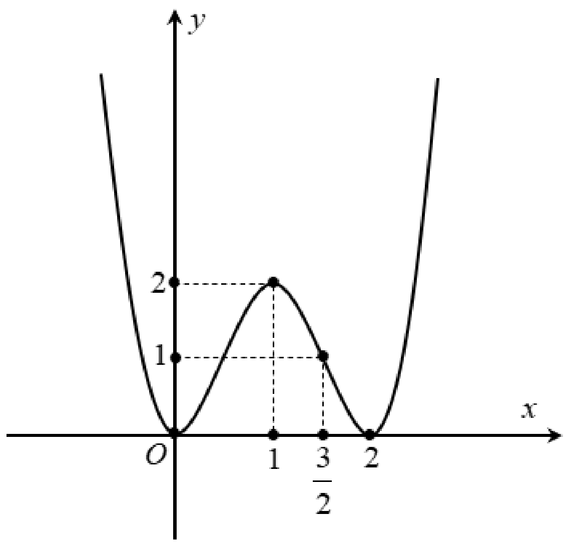
Do đó, $(x+1)^2+1+f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]>0, \forall x$.

Vậy $h'(x)=0 \Leftrightarrow 12(x+1).(x+2)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$		$-4-3f(-2)$		0		$-4-3f(-2)$		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	0	$4+3f(-2)$		0		$4+3f(-2)$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên có thể khẳng định hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=f(2x-2)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Gọi S là tập tất cả các số nguyên của tham số a để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-(a+1)^2\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tổng các phần tử của tập S là:

A. 2. **B.** -3. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(2x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow f'(-2)=0 \\ x=1 \Rightarrow f'(0)=0 \\ x=2 \Rightarrow f'(2)=0 \end{array}\right.$

Từ đó, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-2		0	1	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2 $\searrow$	1	$\searrow$ 0	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $h(x)=4f(\sin x)+\cos 2x-(a+1)^2$

Khi đó $h'(x)=4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x$

Với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\cos x,\sin 2x>0\\ \sin x\in(0;1)\Rightarrow f'(\sin x)<0\end{cases}\Rightarrow h'(x)<0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Suy ra hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

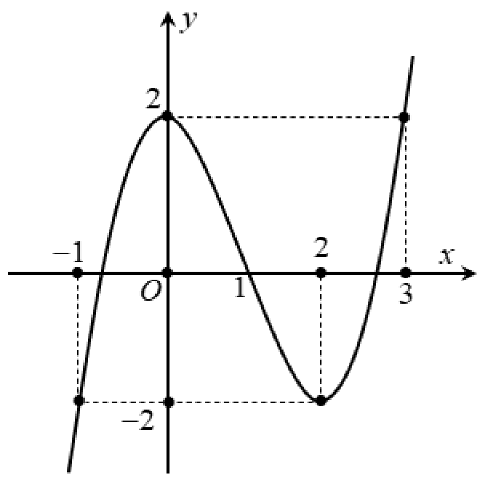
Do đó, hàm số $y=|h(x)|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow h(x)\ge 0\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\ge 0\Leftrightarrow 4f(1)-1-(a+1)^2\ge 0\Leftrightarrow 3-(a+1)^2\ge 0$

$\Rightarrow -2,73\le a\le 0,73\xrightarrow{a\in\mathbb{Z}}a\in\{-2;-1;0\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(5)>8$ và $f(1)=0$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $g(x)=\left|f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{x^2}{8}\right|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-8;-4)$ **B.** $(4;+\infty)$ **C.** $(2;4)$ **<u>D</u>.** $(-10;-8)$

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Xét hàm số $h(x)=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{x^2}{8}$

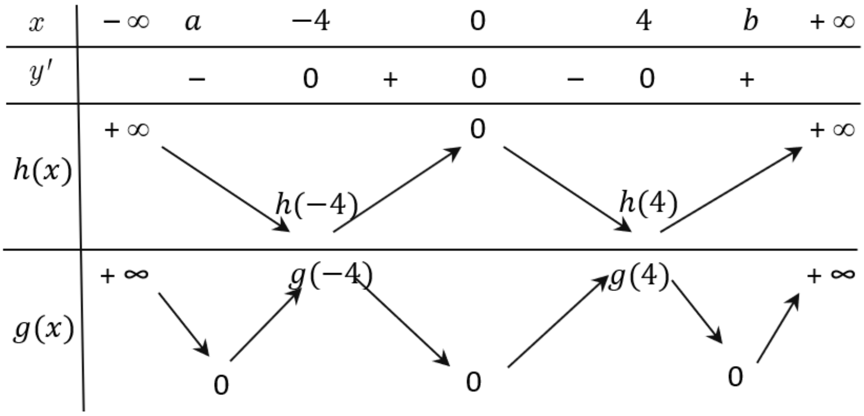
Ta có $h'(x)=-\dfrac{1}{2}f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{x}{4}=0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}\left(f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{x}{2}\right)=0$ (3)

Đặt $1-\dfrac{x}{2}=t \Rightarrow \dfrac{x}{2}=1-t$

Khi đó (3) $\Leftrightarrow f'(t)-(t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$

Ta có $h(0)=f(1)-0=f(1)=0$; suy ra $h(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=0 \\ x=b(a<0<b) \end{array}\right.$

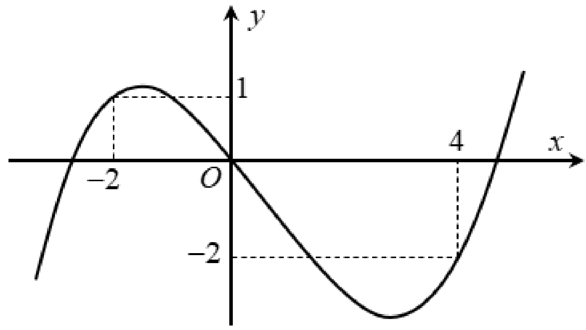
Ta có bảng biến thiên của hàm số là



Ta có $h(-8)=f\left(1-\dfrac{-8}{2}\right)-\dfrac{(-8)^2}{8}=f(5)-8>0$, vì $f(5)>8$, suy ra $-8<a$.

Từ đó ta có hàm số nghịch biến trên $(-10;-8)$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên không quá 100 của m sao cho hàm số $g(x)=f(|m-2x|)+x^2-mx$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Số phần tử của tập S bằng:



A. 95. **B.** 96. **C.** 100. **D.** 99.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Ta có: $g'(x)=\dfrac{2(2x-m)}{|2x-m|}f'(|2x-m|)+(2x-m)=(2x-m)\left[\dfrac{2f'(|2x-m|)}{|2x-m|}+1\right]$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow (2x-m)\left[\dfrac{2f'(|2x-m|)}{|2x-m|}+1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{m}{2} \\ 2f'(|2x-m|)+|2x-m|=0 \quad (*) \end{array}\right.$

Đặt $t = |2x - m|$ thì phương trình $(*)$ trở thành $2f'(t) + t = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -\dfrac{t}{2}$

Kẻ đường thẳng $y = -\dfrac{t}{2}$ với đồ thị $f'(x)$ ta được $\left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |2x - m| = -2 \ (vo\ nghiem) \\ |2x - m| = 0 \ \ (nghiem\ kep) \\ |2x - m| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{m}{2} + 2 \\ x = \dfrac{m}{2} - 2 \end{array}\right. \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\dfrac{m}{2}-2$		$\dfrac{m}{2}$		$\dfrac{m}{2}+2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Nhận xét: khi $x \to +\infty$ thì $(2x - m) > 0$ và $|2x - m| \to +\infty$ nên $f(t) + t > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$.

Để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$ thì

$$\left[\begin{array}{l} (0;1) \in \left(-\infty; \dfrac{m}{2} - 2\right) \\ (0;1) \in \left(\dfrac{m}{2}; \dfrac{m}{2} + 2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le m \le \dfrac{m}{2} - 2 \\ \dfrac{m}{2} \le 0 < 1 \le \dfrac{m}{2} + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 6 \\ -2 \le m \le 0 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{N}$ và $m \le 100$ nên suy ra $m \in \{0;6;7;8;...;100\}$.

Vậy có tất cả 96 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Ta có: $g(x) = f(|m - 2x|) + x^2 - mx \Rightarrow g'(x) = \dfrac{(2x - m)\left[2f'(|m - 2x|) + |m - 2x|\right]}{|m - 2x|}$.

Để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ thì $g'(x) \le 0, \forall x \in (0;1)$

Trường hợp 1: $m - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{m}{2}$

Ta có $g'(x) = -\left[2f'(m - 2x) + (m - 2x)\right] \le 0 \Leftrightarrow 2f'(m - 2x) + (m - 2x) \ge 0$

$$\Leftrightarrow f'(m - 2x) \ge -\dfrac{(m - 2x)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -2 \le m - 2x \le 1 \\ m - 2x \ge 4 \end{array}\right. \\ \dfrac{m}{2} \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m - 1 \le 2x \le m + 2 \\ m - 4 \ge 2x \end{array}\right. \\ \dfrac{m}{2} \ge 1 \end{cases}, \forall x \in (0;1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1\le 0 \\ m+2\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow 0\le m\le 1 \\ m-4\ge 2 \end{array}\right. \\ m\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} 0\le m\le 1\\ m\ge 6\end{array}\right. \\ m\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow m\ge 6.$$

Trường hợp 2: $m-2x<0 \Leftrightarrow x>\dfrac{m}{2}$

Ta có $g'(x)=2f'(2x-m)+(2x-m)\le 0 \Leftrightarrow f'(2x-m)\le -\dfrac{(2x-m)}{2}, \forall x\in(0;1)$

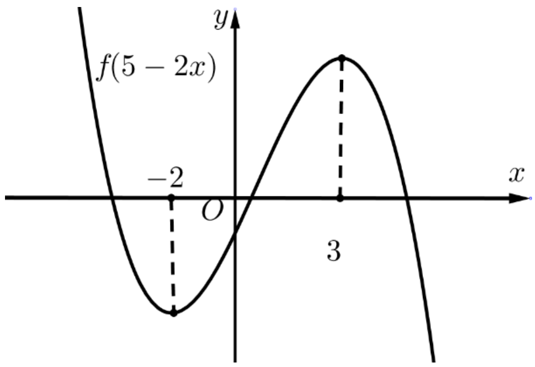
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} 2x-m\le -2 \\ 0\le 2x-m\le 4\end{array}\right. \\ m\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m-2\ge 2x \\ m\le 2x\le m+4\end{array}\right. \\ m\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m-2\ge 2 \\ \begin{cases} m\le 0 \\ m+4\ge 2\end{cases}\end{array}\right. \\ m\le 0\end{cases}, \forall x\in(0;1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ -2\le m\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow -2\le m\le 0 \\ m\le 0\end{cases}$$

Từ hai trường hợp và điều kiện $m\in\mathbb{N}$ và $m\le 100$ nên suy ra $m\in\{0;6;7;8;...;100\}$.

Vậy có tất cả 96 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35: Cho đồ thị hàm số $y=f(5-2x)$ như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-23;23]$ để hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 23. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ được vẽ lại như sau:

x	$-\infty$		-1		9		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

$$g(x)=f\left(\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\right) \Rightarrow g'(x)=\frac{(3x^2-3)(x^3-3x+m)}{\left|x^3-3x+m\right|}.f'\left(\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\right)$$

Nhận xét: $\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\ge -1,\forall x\in\mathbb{R}$ và $\left(3x^2-3\right)=3\left(x^2-1\right)<0,\forall x\in\left(0;1\right)$.

Hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$ khi và chỉ khi $g'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\left(0;1\right)$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-3x+m\right).f'\left(\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\right)\le 0,\forall x\in\left(0;1\right)$$

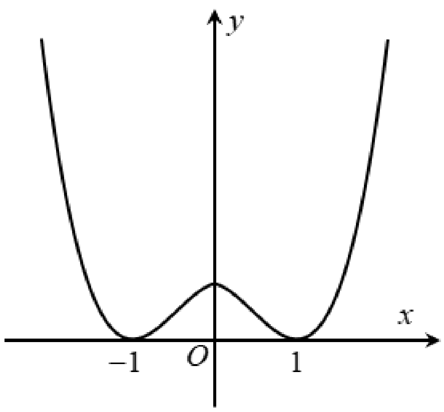
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\in\left[-1;9\right]\\ x^3-3x+m\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\ge 9\\ x^3-3x+m\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1\le x^3-3x+m+m^2-1\le 9\\ x^3-3x\ge -m\end{cases}\\ \begin{cases}-\left(x^3-3x+m\right)+m^2-1\ge 9\\ x^3-3x\le -m\end{cases}\end{array}\right., \forall x\in\left(0;1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m^2-m\le x^3-3x\le 10-m^2\\ x^3-3x\ge -m\end{cases}\\ \begin{cases}m^2-m-10\ge x^3-3x\\ x^3-3x\le -m\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m^2-m\le -2\\ 10-m^2\ge 0\end{cases}\\ -m\le -2\\ \begin{cases}m^2-m-10\ge 0\\ -m\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le -2\end{array}\right.\\ -\sqrt{10}\le m\le\sqrt{10}\end{cases}\\ m\ge 2\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\le\dfrac{1-\sqrt{41}}{2}\\ m\ge\dfrac{1+\sqrt{41}}{2}\end{array}\right.\\ m\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\le m\le\sqrt{10}\\ m\le\dfrac{1-\sqrt{41}}{2}\end{array}\right.\xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\,m\in\left[-23;23\right]} m\in\left\{-23;-22;....;-3;\,2;3\right\}$$

Vậy có tất cả 23 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[0;23\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x^2-2x\right|+m\right)+2023$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$?

A. 23. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Lời giải:

Chọn A

Để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^2-2x\right|+m\right)+2023$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì

$$g'(x)=\frac{(2x-2)\left(x^2-2x\right)}{\left|x^2-2x\right|}f'\left(\left|x^2-2x\right|+m\right)\ge 0,\ \forall x\in(2;+\infty)$$

Mà $\dfrac{(2x-2)\left(x^2-2x\right)}{\left|x^2-2x\right|}>0,\forall x\in(2;+\infty)\Rightarrow f'\left(\left|x^2-2x\right|+m\right)\ge 0,\ \forall x\in(2;+\infty)$

Từ đồ thị, hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[-1;0]$ và $[1;+\infty)$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\left|x^2-2x\right|+m\ge 1\\ -1\le\left|x^2-2x\right|+m\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^2-2x\right|\ge 1-m\\ -1-m\le\left|x^2-2x\right|\le -m\end{array}\right.,\ \forall x\in(2;+\infty)$.

Nhận xét: Ta thấy $\left|x^2-2x\right|\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)\Rightarrow 0\ge 1-m\Leftrightarrow m\ge 1\xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\,m\in[0;23]}1\le m\le 23$.

Vậy có tất cả 23 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.