ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ GIỎI

PHÁT TRIỂN CÁC CÂU VD-VDC ĐỀ THAM KHẢO THI TN THPT BGD 2022

* CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT
* CHIA PHẦN BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI RIÊNG

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2022

Câu 39. (ĐTK BGD 2022) Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(4^x-5.2^{x+2}+64\right)\sqrt{2-\log(4x)}\ge 0$?

A. 22. **B.** 25. **C.** 23. **D.** 24.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}2-\log(4x)\ge 0\\4x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 25$

Ta có:

$\left(4^x-5.2^{x+2}+64\right)\sqrt{2-\log(4x)}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-\log(4x)=0(1)\\4^x-5.2^{x+2}+64\ge 0(2)\end{array}\right.$

+ (1) $\Leftrightarrow \log(4x)=2\Leftrightarrow 4x=10^2\Leftrightarrow x=25(tm)$

+(2) $\Leftrightarrow 2^{2x}-20.2^x+64\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x\ge 16\\2^x\le 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 4\\x\le 2\end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện, ta có các giá trị

Nguyên thỏa mãn trong trường hợp này là $x\in\{1;2\}\cup\{4;5;6;...;25\}$.

Vậy có 24 số nguyên x thỏa mãn đề bài.

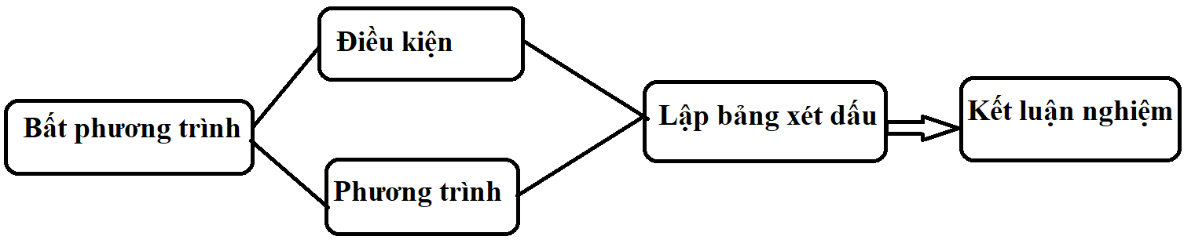
- ❖ **Bình luận thêm**: Bất phương trình ở dạng tích, có cả mũ và logarit. Học sinh cần nhận biết và giải đủ các điều kiện. Phù hợp mức trên dưới 8 điểm cho học sinh khá.
- ❖ **Đề xuất cách xử lý bằng máy tính Casio:**

Vào Chức năng Mode 8, nhập $f(x)$ là vế trái của bất phương trình.

Giá trị bắt đầu = 1; Giá trị kết thúc = 45; Bước = 1.

Quan sát cột $f(x)$ để đếm số nghiệm nguyên.

- ❖ **Đề xuất các giải bất phương trình bằng cách giải phương trình**



Điều kiện: $\begin{cases}2-\log(4x)\ge 0\\4x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 25$ (*0

Xét phương trình: $\left(4^x-5.2^{x+2}+64\right)\sqrt{2-\log(4x)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-\log(4x)=0(1)\\4^x-5.2^{x+2}+64=0(2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=25\\x=2\\x=4\end{array}\right.$ (**)

Từ (*) và (**) ta lập bảng xét dấu cho VT của bất phương trình.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left(4^x-7.2^x+12\right)\sqrt{1-\log x}\ge 0$?

A.7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 2. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn bất phương trình $8^x.2^{1-x^2}>\left(\sqrt{2}\right)^{2x}$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left(4^x-5.2^x+1\right)\sqrt{3-\log_2 x}\ge 0$?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left(9^x-9.3^{x+2}+729\right)\sqrt{2-\log(2x)}\ge 0$?

A. 52. **B.** 25. **C.** 50. **D.** 49.

Câu 5. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left(4^x-5.2^{x+2}+64\right)\sqrt{2-\log_3 x}\ge 0$?

A. 5. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(4^x-65.2^x+64\right)\left[2-\log_3(x+3)\right]\ge 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\sqrt{3^{x+1}-1}\le 0$ chứa bao nhiêu số nguyên ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 8. Bất phương trình $\left(x^3-9x\right)\ln(x+5)\le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** Vô số.

Câu 9. Cho bất phương trình $(\log x+1)(4-\log x)>0$. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn bất phương trình trên.

A. 10000. **B.** 10001. **C.** 9998. **D.** 9999.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right)\le 0$ có đúng 5 nghiệm nguyên phân biệt?

A. 65021. **B.** 65024 **C.** 65022. **D.** 65023.

Câu 11. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(4^x-65.2^x+64\right)\left[2-\log_3(x+3)\right]\ge 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** Vô số

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\sqrt{3^{x+1}-1}\le 0$ chứa bao nhiêu số nguyên ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 13. Bất phương trình $\left(x^3-9x\right)\ln(x+5)\le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** Vô số.

Câu 14. Cho bất phương trình $(\log x+1)(4-\log x)>0$. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn bất phương trình trên.

A. 10000. **B.** 10001. **C.** 9998. **D.** 9999.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-2m\right)<0$ khác rỗng và chứa không quá 9 số nguyên?

A. 3281. **B.** 3283. **C.** 3280. **D.** 3279.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right)\le 0$ có đúng 5 nghiệm nguyên phân biệt?

A. 65021. **B.** 65024 **C.** 65022. **D.** 65023.

Câu 17. **(ĐTK2021)** Có bao nhiêu số nguyên $a\,(a\ge 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn:

$\left(a^{\log x}+2\right)^{\log a}=x-2$

A. 8. **B.** 9. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 18. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2\le x\le 2021$ và $2^y-\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=2x-y$?

A. 2020. **B.** 9. **C.** 2019. **D.** 10.

Câu 19. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0<y<2020$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$.

A. 2020 **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 20. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $x\le 2020$ thỏa mãn
$$2(3x-y)=3(1+9^y)-\log_3(2x-1)$$
A. 1010. **B.** 2020. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 21. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $1\le a\le 100$ và $2^a<3^b<2^{a+1}$?
A. 163. **B.** 63. **C.** 37. **D.** 159.

Câu 22. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ với $1<a<b<100$ để phương trình $a^x\ln b=b^x\ln a$ có nghiệm nhỏ hơn 1?
A. 2. **B.** 4751. **C.** 4656. **D.** 4750.

Câu 23. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $4^{x+y}=3^{x^2+y^2}$?
A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 24. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ với $1\le a\le 100$; $1\le b\le 100$ sao cho tồn tại đúng 2 số thực x thỏa mãn $a^{-x}+\dfrac{1}{b}=b^{-x}+\dfrac{1}{a}$?
A. 9704. **B.** 9702. **C.** 9698. **D.** 9700.

Câu 25. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1\le x\le 2020$, $y\ge 2$ và $x^2+x-xy=x\log_2(xy-x)-2^x$
A. 2021. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 11.

Câu 26. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le y\le 2020$ và $\log_3\left(\dfrac{2^x-1}{y}\right)=y+1-2^x$?
A. 2019. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

Câu 27. **(ĐTK2021)** Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(2^x-y\right)<0$?
A. 1024. **B.** 2047. **C.** 1022. **D.** 1023.

Câu 28. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $0<y<2020$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$?
A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 2019.

Câu 29. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn $0<x\le 2020$ và $3^x(x+1)=27^y y$.
A. 2020. **B.** 673. **C.** 672. **D.** 2019.

Câu 30. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_2(2x+2)+x=3y+8^y$?
A. 2021. **B.** 2020. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 31. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=-3x^2+y^2+2x-y+1$. Biết $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn
$$\log_2\frac{x^2+2x+2}{y^2-y+1}+2x^2-y^2+4x+y+4=0.$$
A. $P_{\max}=12$. **B.** $P_{\max}=13$. **C.** $P_{\max}=14$. **D.** $P_{\max}=10$.

Câu 32. Cho hai số thực x, y thỏa mãn
$$\log_{\sqrt{3}}(y^2+8y+16)+\log_2\left[(5-x)(1+x)\right]=2\log_3\frac{5+4x-x^2}{3}+\log_2(2y+8)^2.$$
Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|\sqrt{x^2+y^2}-m\right|$ không vượt quá 10. Hỏi S có bao nhiêu tập con không phải là tập rỗng?
A. 2047. **B.** 16383. **C.** 16384. **D.** 32.

Câu 33. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số

Câu 34. Cho $0\le x\le 2020$ và $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 35. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{3}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{9}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{9}$.

Câu 36. Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_3(x+2y)=\log_2(x^2+y^2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** vô số.

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của c để tồn tại các số thực $a,b>1$ thỏa mãn $\log_9 a=\log_{12} b=\log_{16}\dfrac{5b-a}{c}$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 38. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le y\le 2020$ và $\log_3\left(\dfrac{2^x-1}{y}\right)=y+1-2^x$?

A. 2019. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y$, đồng thời thỏa mãn $\log_3^2(3x+2y-1)-(m+6)\log_3 x+m^2+9=0$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 40. **(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2)$

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 41. Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2)\ge 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

A. $S=\{-5;-1;1;5\}$. **B.** $S=\{-1;1\}$.

C. $S=\{-5;5\}$. **D.** $S=\{-7-5;-1;1;5;7\}$.

Câu 42. Có bao nhiêu cặp số nguyên $x;y$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_4(512x+768)+2x-1=2y+16^y$?

A. 2019 **B.** 0 **C.** 2020 **D.** 1

Câu 43. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $2016^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+2017}{y^2+2017}$; $3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1$

A. 2 **B.** 1

C. 3 **D.** 0

Câu 44. Xét các số thực x, y $(x\ge 0)$ thỏa mãn

$$2018^{x+3y}+2018^{xy+1}+x+1=2018^{-xy-1}+\frac{1}{2018^{x+3y}}-y(x+3).$$

Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+2y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m\in(0;1)$. **B.** $m\in(1;2)$.

C. $m\in(2;3)$. **D.** $m\in(-1;0)$.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2^{2x^2+y^2}=3^{x+y}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_3\left(x+2y\right)=\log_2\left(x^2+y^2\right)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** vô số.

Câu 47. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy.$

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 48. Cho $0\le x\le 2020$ và $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$.Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 49. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $3^y-x=27^x-\dfrac{y}{3}$ và $0\le y\le 101$.

A. 102. **B.** 101. **C.** 34. **D.** 33.

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right]\le 0$

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 25.

Câu 51. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_2(x+30)-5\right]\le 0$?

A. 30. **B.** Vô số. **C.** 31. **D.** 29.

Câu 52. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_2\left(x+14\right)-4\right]\le 0$?

A. 14. **B.** 13. **C.** Vô số. **D.** 15.

Câu 53. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right]\le 0$?

A. 24. **B.** Vô số. **C.** 25. **D.** 26.

Câu 54. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 28.

Câu 55. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+21\right)\right]\left(16-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. 17. **B.** 18. **C.** 16. **D.** Vô số.

Câu 56. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2(x^2+1)-\log_2(x+21)\right](16-2^{x-1})\ge 0$?

A. Vô số. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 18.

Câu 57. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+21\right)\right]\left(16-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. 17. **B.** 18. **C.** 16. **D.** Vô số.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left(4^x-7.2^x+12\right)\sqrt{1-\log x}\ge 0$?

A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $\begin{cases}1-\log x\ge 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 10$.

Bpt tương đương

$$\left[\begin{array}{l}4^x-7.2^x+12\ge 0\\ 1-\log x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(2^x\right)^2-7.2^x+12\ge 0\\ x=10\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x\le 3\\ 2^x\ge 4\\ x=10\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le \log_2 3\\ x\ge 2\\ x=10\end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được: $\left[\begin{array}{l}x=1\\ 2\le x\le 10\end{array}\right.$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của x thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn bất phương trình $8^x.2^{1-x^2}>\left(\sqrt{2}\right)^{2x}$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $8^x.2^{1-x^2}>\left(\sqrt{2}\right)^{2x}\Leftrightarrow 2^{3x}.2^{1-x^2}>2^x\Leftrightarrow 2^{3x+1-x^2}>2^x$

$\Leftrightarrow 3x+1-x^2>x\Leftrightarrow x^2-2x-1<0\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$.

Suy ra các giá trị nguyên dương thuộc S là $\{1;2\}$.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left(4^x-5.2^x+1\right)\sqrt{3-\log_2 x}\ge 0$?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $\begin{cases}3-\log_2 x\ge 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 8$.

Bpt tương đương

$$\left[\begin{array}{l}4^x-5.2^x+1\ge 0\\ 3-\log_2 x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(2^x\right)^2-.52^x+1\ge 0\\ x=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x\le 1\\ 2^x\ge 4\\ x=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge 2\\ x=8\end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được: $2\le x\le 8$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của x thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left(9^x-9.3^{x+2}+729\right)\sqrt{2-\log(2x)}\ge 0$?

A. 52. **B.** 25. **C.** 50. **D.** 49.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $\begin{cases}2-\log(2x)\ge 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 50$.

Bpt tương đương

$$\left[\begin{array}{l}9^x-9.3^{x+2}+729\ge 0\\2-\log(2x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(3^x\right)^2-90.2^x+729\ge 0\\2x=100\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x\le 9\\3^x\ge 81\\x=50\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 2\\x\ge 4\\x=50\end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được: $\left[\begin{array}{l}0<x\le 2\\4\le x\le 50\end{array}\right.$.

Vậy có 49 giá trị nguyên của x thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left(4^x-5.2^{x+2}+64\right)\sqrt{2-\log_3 x}\ge 0$?

A. 5. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $\begin{cases}2-\log_3(x)\ge 0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 9$.

Bpt tương đương

$$\left[\begin{array}{l}4^x-5.2^{x+2}+64\ge 0\\2-\log_3 x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(2^x\right)^2-20.2^x+64\ge 0\\x=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x\le 4\\2^x\ge 16\\x=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 2\\x\ge 4\\x=9\end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được: $\left[\begin{array}{l}0<x\le 2\\4\le x\le 9\end{array}\right.$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của x thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(4^x-65.2^x+64\right)\left[2-\log_3(x+3)\right]\ge 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$\left(4^x-65.2^x+64\right)\left[2-\log_3(x+3)\right]\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4^x-65.2^x+64\le 0\\2-\log_3(x+3)\le 0\end{cases}\\\begin{cases}4^x-65.2^x+64\ge 0\\2-\log_3(x+3)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\le 2^x\le 64\\x\ge 6\end{cases}\\\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2^x\ge 64\\2^x\le 1\end{array}\right.\\-3<x\le 6\end{cases}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0\le x\le 6\\x\ge 6\end{cases}\\\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 6\\x\le 0\end{array}\right.\\-3<x\le 6\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\-3<x\le 0\end{array}\right..$$

$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-2;-1;0;6\}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình có 4 giá trị nguyên.

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\sqrt{3^{x+1}-1}\le 0$ chứa bao nhiêu số nguyên ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $3^{x+1}-1\ge 0\Leftrightarrow 3^{x+1}\ge 1\Leftrightarrow x\ge -1$.

Ta có $x=-1$ là một nghiệm của bất phương trình.

Với $x>-1$, bất phương trình tương đương với $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\le 0$.

Đặt $t=3^x>0$, ta có $(t^2-9)(t-\frac{1}{27})\le 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+3)(t-\frac{1}{27})\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le -3 \\ \frac{1}{27}\le t\le 3 \end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện $t=3^x>0$ ta được nghiệm $\frac{1}{27}\le t\le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{27}\le 3^x\le 3 \Leftrightarrow -3\le x\le 1$. Kết hợp điều kiện $x>-1$ ta được $-1<x\le 1$ suy ra trường hợp này bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Vậy bất phương trình đã cho có tất cả 3 nghiệm nguyên.

Câu 8. Bất phương trình $\left(x^3-9x\right)\ln\left(x+5\right)\le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>-5$.

Cho $\left(x^3-9x\right)\ln\left(x+5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-9x=0 \\ \ln\left(x+5\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=0 \\ x=3 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-5		-4		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f\left(x\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\le x\le -3 \\ 0\le x\le 3 \end{array}\right.$.

Vì $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\left\{-4;-3;0;1;2;3\right\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của x thỏa bài toán.

Câu 9. Cho bất phương trình $\left(\log x+1\right)\left(4-\log x\right)>0$. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn bất phương trình trên.

A. 10000. **B.** 10001. **C.** 9998. **D.** 9999.

Lời giải

Chọn D

$\left(\log x+1\right)\left(4-\log x\right)>0 \ (1)$

Điều kiện: $x>0$.

Khi ấy $(1) \Leftrightarrow -1<\log x<4 \Leftrightarrow \frac{1}{10}<x<10000$. Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\left\{1;2;3;...;9999\right\}$

Vậy có tất cả 9999 số nguyên x thoả mãn bất phương trình trên.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right)\le 0$ có đúng 5 nghiệm nguyên phân biệt?

A. 65021. **B.** 65024. **C.** 65022. **D.** 65023.

Lời giải

Chọn B

$\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right)\le 0$

Th1: Xét $3^{x^2-x}-9=0 \Leftrightarrow x^2-x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ là nghiệm của bất phương trình.

Th2: Xét $3^{x^2-x}-9>0 \Leftrightarrow x^2-x>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow 2^{x^2} \le m \Leftrightarrow x^2 \le \log_2 m$ (2)

Nếu $m<1$ thì vô nghiệm.

Nếu $m \ge 1$ thì (2) $\Leftrightarrow -\sqrt{\log_2 m} \le x \le \sqrt{\log_2 m}$.

Do đó, có 5 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \left((-\infty;-1)\cup(2;+\infty)\right)\cap\left[-\sqrt{\log_2 m};\sqrt{\log_2 m}\right]$ có 3 giá trị nguyên $\sqrt{\log_2 m}\in[3;4) \Leftrightarrow 512 \le m < 65536$. Suy ra có 65024 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Th3: Xét $3^{x^2-x}-9<0 \Leftrightarrow x^2-x<2 \Leftrightarrow -1<x<2$. Vì $(-1;2)$ chỉ có hai số nguyên nên không có giá trị m nào để bất phương trình có 5 nghiệm nguyên.

Vậy có tất cả 65024 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Câu 11. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(4^x-65.2^x+64\right)\left[2-\log_3(x+3)\right]\ge 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** Vô số

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(4^x-65.2^x+64\right)\left[2-\log_3(x+3)\right]\ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4^x-65.2^x+64\le 0 \\ 2-\log_3(x+3)\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4^x-65.2^x+64\ge 0 \\ 2-\log_3(x+3)\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1\le 2^x\le 64 \\ x\ge 6 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2^x\ge 64 \\ 2^x\le 1 \end{array}\right. \\ -3<x\le 6 \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0\le x\le 6 \\ x\ge 6 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge 6 \\ x\le 0 \end{array}\right. \\ -3<x\le 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ -3<x\le 0 \end{array}\right..$$

$x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\{-2;-1;0;6\}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình có 4 giá trị nguyên.

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\sqrt{3^{x+1}-1}\le 0$ chứa bao nhiêu số nguyên ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $3^{x+1}-1\ge 0 \Leftrightarrow 3^{x+1}\ge 1 \Leftrightarrow x\ge -1$.

Ta có $x=-1$ là một nghiệm của bất phương trình.

Với $x>-1$, bất phương trình tương đương với $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\le 0$.

Đặt $t=3^x>0$, ta có $(t^2-9)(t-\frac{1}{27})\le 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+3)(t-\frac{1}{27})\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le -3 \\ \frac{1}{27}\le t\le 3 \end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện $t=3^x>0$ ta được nghiệm $\frac{1}{27}\le t\le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{27}\le 3^x\le 3 \Leftrightarrow -3\le x\le 1$. Kết hợp điều kiện $x>-1$ ta được $-1<x\le 1$ suy ra trường hợp này bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Vậy bất phương trình đã cho có tất cả 3 nghiệm nguyên.

Câu 13. Bất phương trình $\left(x^3-9x\right)\ln\left(x+5\right)\le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>-5$.

Cho $\left(x^3-9x\right)\ln\left(x+5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-9x=0 \\ \ln\left(x+5\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=0 \\ x=3 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-5		-4		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f\left(x\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\le x\le -3 \\ 0\le x\le 3 \end{array}\right.$.

Vì $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\left\{-4;-3;0;1;2;3\right\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của x thỏa bài toán.

Câu 14. Cho bất phương trình $\left(\log x+1\right)\left(4-\log x\right)>0$. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn bất phương trình trên.

A. 10000. **B.** 10001. **C.** 9998. **D.** 9999.

Lời giải

$\left(\log x+1\right)\left(4-\log x\right)>0 \ (1)$

Điều kiện: $x>0$.

Khi ấy $(1) \Leftrightarrow -1<\log x<4 \Leftrightarrow \frac{1}{10}<x<10000$. Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\left\{1;2;3;...;9999\right\}$

Vậy có tất cả 9999 số nguyên x thoả mãn bất phương trình trên.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-2m\right)<0$ khác rỗng và chứa không quá 9 số nguyên?

A. 3281. **B.** 3283. **C.** 3280. **D.** 3279.

Lời giải

Chọn C

Do m là số nguyên dương nên 2m >1 => $\log_3 2m>0$.

$3^{x+2}-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow 3^{x+2}=3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

$3^x-2m=0 \Leftrightarrow x=\log_3 2m$.

Lập bảng biến thiên, ta kết luận: tập nghiệm bất phương trình này là $\left(-\frac{3}{2};\log_3 2m\right)$

Suy ra, $\log_3 2m\le 8 \Leftrightarrow 2m\le 3^8 \Leftrightarrow m\le \frac{6561}{2}=3280.5$ =>

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right)\le 0$ có đúng 5 nghiệm nguyên phân biệt?

A. 65021. **B.** 65024 **C.** 65022. **D.** 65023.

Lời giải

Chọn B

$\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right)\le 0$

Th1: Xét $3^{x^2-x}-9=0 \Leftrightarrow x^2-x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ là nghiệm của bất phương trình.

Th2: Xét $3^{x^2-x}-9>0 \Leftrightarrow x^2-x>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow 2^{x^2}\le m \Leftrightarrow x^2 \le \log_2 m$ (2)

Nếu $m<1$ thì vô nghiệm.

Nếu $m\ge 1$ thì (2) $\Leftrightarrow -\sqrt{\log_2 m}\le x \le \sqrt{\log_2 m}$.

Do đó, có 5 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \left((-\infty;-1)\cup(2;+\infty)\right)\cap\left[-\sqrt{\log_2 m};\sqrt{\log_2 m}\right]$ có 3 giá trị nguyên $\sqrt{\log_2 m}\in[3;4) \Leftrightarrow 512\le m<65536$. Suy ra có 65024 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Th3: Xét $3^{x^2-x}-9<0 \Leftrightarrow x^2-x<2 \Leftrightarrow -1<x<2$. Vì $(-1;2)$ chỉ có hai số nguyên nên không có giá trị m nào để bất phương trình có 5 nghiệm nguyên.

Vậy có tất cả 65024 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Câu 17. **(ĐTK2021)** Có bao nhiêu số nguyên $a\,(a\ge 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn:

$\left(a^{\log x}+2\right)^{\log a}=x-2$

A. 8.	**B.** 9.	**C.** 1.	**D.** Vô số.

Lời giải:

Chọn A

Điều kiện: $x>2$. Đặt $m=\log a>0$

Khi đó phương trình trở thành: $\left(x^m+2\right)^m=x-2$.

Đặt $y=x^m+2$, $y>2$ thì ta có hệ phương trình

$\begin{cases} y^m=x-2 & (1) \\ x^m=y-2 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) – (2) vế theo vế ta được

$y^m+y=x^m+x \quad (3)$

Xét hàm $f(t)=t^m+t$ với $m>0; t>0$ có $f'(t)=m.t^{m-1}+1>0,\ \forall t>0$

$\Rightarrow f(t)=t^m+t$ đồng biến $(0;+\infty)$.

Do đó $(3)\Leftrightarrow y=x$

$\Leftrightarrow x^m=x-2$

$\Leftrightarrow m.\log x=\log(x-2)$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{\log(x-2)}{\log x}<1$

$\Rightarrow \log a<1$

$\Rightarrow a<10$.

Do đó, mọi số $a\in\{2;3;4;...;9\}$ đều thỏa mãn.

Câu 18. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2\le x\le 2021$ và $2^y-\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=2x-y$?

A. 2020.	**B.** 9.	**C.** 2019.	**D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=t$. Suy ra $x+2^{y-1}=2^t$, $x=2^t-2^{y-1}$.

Phương trình đã cho trở thành: $2^y-t=2\left(2^t-2^{y-1}\right)-y \Leftrightarrow 2.2^y+y=2.2^t+t$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=2.2^x+x$ có $g'\left(x\right)=2.2^x\ln 2+1>0,\forall x$ nên hàm số $y=g\left(x\right)$ luôn đồng biến.

Khi đó $2.2^y+y=2.2^t+t \Leftrightarrow y=t$ hay $y=\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$.

Suy ra $x+2^{y-1}=2^y \Leftrightarrow x=2^y-2^{y-1}=2^{y-1}$.

Mà $2\le x\le 2021$ nên $2\le 2^{y-1}\le 2021 \Leftrightarrow 1\le y-1\le \log_2 2021$ hay $2\le y\le \left(\log_2 2021\right)+1$.

Lại có y là số nguyên nên $y\in\left\{2,3,...,11\right\}$ tức 10 giá trị thỏa mãn.

Xét biểu thức $x=2^{y-1}$, mỗi giá trị nguyên của y cho tương ứng 1 giá trị nguyên của x nên có 10 cặp số nguyên $\left(x,y\right)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 19. Có bao nhiêu cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $0<y<2020$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$.

A. 2020 **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có:
$3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3 \Leftrightarrow 3^x+3\left(x-2\right)=9y+3\log_3 y \Leftrightarrow 3^x+3\left(x-2\right)=3^{2+\log_3 y}+3\log_3 y\ (*)$.

Xét hàm số: $f\left(t\right)=3^t+3\left(t-2\right)$.

Ta có: $f'\left(t\right)=3^t.\ln 3+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $y=f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow f\left(x\right)=f\left(2+\log_3 y\right)\Leftrightarrow x=2+\log_3 y \Leftrightarrow y=3^{x-2}$.

Do $0<y<2020$ và x,y nguyên nên:
$1\le 3^{x-2}<2020 \Leftrightarrow 2\le x<2+\log_3 2020 \Rightarrow x\in\left\{2;3;4;5;6;7;8\right\}$.

Ứng với mỗi giá trị x có một giá trị của y nên có 7 cặp số $\left(x;y\right)$ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ với $x\le 2020$ thỏa mãn

$2\left(3x-y\right)=3\left(1+9^y\right)-\log_3\left(2x-1\right)$

A. 1010. **B.** 2020. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_3\left(2x-1\right)=t \Rightarrow 2x=3^t+1$, ta được $3\left(3^t+1\right)-2y=3\left(1+3^{2y}\right)-t \Leftrightarrow 3.3^t+t=3.3^{2y}+2y$ (*).

Xét hàm số $f\left(u\right)=3.3^u+u \Rightarrow f'\left(u\right)=3.3^u\ln 3+1>0,\forall u\in\mathbb{R} \Rightarrow f\left(u\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow t=2y$, vậy nên $2x=3^{2y}+1 \Leftrightarrow 9^y=2x-1$.

Vì $x\le 2020 \Rightarrow 9^y\le 4039 \Leftrightarrow y\le \log_9 4039$. Vì y nguyên dương nên $y\in\left\{1;2;3\right\}$. Ta thấy với mỗi giá trị nguyên của y thì tìm được 1 giá trị nguyên của x. Vậy có 3 cặp $\left(x;y\right)$ thỏa mãn.

Câu 21. Có bao nhiêu cặp số nguyên $\left(a;b\right)$ thỏa mãn $1\le a\le 100$ và $2^a<3^b<2^{a+1}$?

A. 163. **B.** 63. **C.** 37. **D.** 159.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^a < 3^b < 2^{a+1} \Leftrightarrow \log_3 2^a < b < \log_3 2^{a+1} \Leftrightarrow a\log_3 2 < b < (a+1)\log_3 2$.

Với $\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a\log_3 2 \notin \mathbb{Z} \\ (a+1)\log_3 2 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

Do đó với mỗi $a \in \{1;2;3;...;100\}$ thì sẽ có $[(a+1)\log_3 2] - [a\log_3 2]$ số nguyên b thỏa mãn.

Vậy theo qui tắc cộng có tất cả $\sum_{a=1}^{100}\left([(a+1)\log_3 2] - [a\log_3 2]\right) = 63$ cặp số nguyên thỏa mãn.

Chú ý: giữa hai số thực $x > y$ (không nguyên) sẽ có tất cả $[x]-[y]$ số nguyên.

Câu 22. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ với $1 < a < b < 100$ để phương trình $a^x \ln b = b^x \ln a$ có nghiệm nhỏ hơn 1?

A. 2. **B.** 4751. **C.** 4656. **D.** 4750.

Lời giải

Chọn B

Ta có $a^x \ln b = b^x \ln a \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{\ln a}{\ln b} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{a}{b}}\left(\dfrac{\ln a}{\ln b}\right)$.

Với $1 < a < b < 100 \Rightarrow \dfrac{a}{b} \in (0;1)$ do đó $\log_{\frac{a}{b}}\left(\dfrac{\ln a}{\ln b}\right) < 1 \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{\ln b} > \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{a} > \dfrac{\ln b}{b}$.

Hàm số $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ có $g'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow g'(x) > 0$, $\forall x \in (0;e)$ và $g'(x) < 0$, $\forall x \in (e;+\infty)$.

$g(2) = g(4) = \dfrac{\ln 2}{2}$.

Vì vậy $\dfrac{\ln 3}{3} > \dfrac{\ln 4}{4} = \dfrac{\ln 2}{2} > \dfrac{\ln 5}{5} > ... > \dfrac{\ln 98}{98} > \dfrac{\ln 99}{99}$.

Trường hợp 1: $a = 2 \Rightarrow b \in \{5;6;...;99\}$ trường hợp này có 95 cặp số thỏa mãn.

Trường hợp 2: $a = 3 \Rightarrow b \in \{4;5;...;99\}$ trường hợp này có 96 cặp số thỏa mãn.

Trường hợp 3: $a = 4 \Rightarrow b \in \{5;6;...;99\}$ trường hợp này có 95 cặp số thỏa mãn.

Trường hợp 4: với mỗi $a = k \in \{5;6;...98\}$ thì $b \in \{k+1;...;99\}$ có $99-k$ cách chọn b, trường hợp này có tất cả $\sum_{5}^{98}(99-k) = 4465$ cặp số thỏa mãn.

Vậy có tất cả $95+96+95+4465 = 4751$ cặp số thỏa mãn.

Câu 23. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $4^{x+y} = 3^{x^2+y^2}$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Đặt $4^{x+y} = 3^{x^2+y^2} = t$, $t > 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \log_4 t \\ x^2+y^2 = \log_3 t \end{cases}$.

Vì $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) \Rightarrow \log_4^2 t \le 2\log_3 t \Leftrightarrow \dfrac{\ln^2 t}{\ln^2 4} \le 2\dfrac{\ln t}{\ln 3} \Leftrightarrow 0 \le \ln t \le \dfrac{2\ln^2 4}{\ln 3}$.

Suy ra $x^2+y^2 = \dfrac{\ln t}{\ln 3} \le \dfrac{2\ln^2 4}{\ln^2 3} = 2\left(\dfrac{\ln 4}{\ln 3}\right)^2 \approx 3{,}18 \Rightarrow x^2 \le 3{,}18 \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x \in \{-1;0;1\}$.

• Nếu $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0+y = \log_4 t \\ 0^2+y^2 = \log_3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ t = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn).

• Nếu $x=1 \Rightarrow \begin{cases} 1+y=\log_4 t \\ 1^2+y^2=\log_3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\ln t}{\ln 4}-1 \\ \left(\dfrac{\ln t}{\ln 4}-1\right)^2+1=\dfrac{\ln t}{\ln 3} \end{cases} \Rightarrow \exists t \Rightarrow \exists y$ (thỏa mãn).

• Nếu $x=-1 \Rightarrow \begin{cases} -1+y=\log_4 t \\ (-1)^2+y^2=\log_3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\ln t}{\ln 4}+1 \\ \left(\dfrac{\ln t}{\ln 4}+1\right)^2+1=\dfrac{\ln t}{\ln 3} \end{cases} \Rightarrow \nexists t \Rightarrow \nexists y$ (loại).

Vậy $x \in \{0;1\}$.

Câu 24. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ với $1 \le a \le 100$; $1 \le b \le 100$ sao cho tồn tại đúng 2 số thực x thỏa mãn $a^{-x}+\dfrac{1}{b}=b^{-x}+\dfrac{1}{a}$?

A. 9704. **B.** 9702. **C.** 9698. **D.** 9700.

Lời giải

Chọn D

a) Xét $a=1$ hoặc $b=1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$ hoặc vô số nghiệm (loại).

b) Xét $a>1$; $b>1$.

* Nếu $a=b$ có vô số nghiệm (loại).

* Vì vai trò của a, b như nhau ta chỉ cần tìm cặp số nguyên $(a;b)$ với $a>b>1$ (rồi suy ra số cặp nguyên $(a;b)$ với $b>a>1$) sao cho phương trình $a^{-x}+\dfrac{1}{b}=b^{-x}+\dfrac{1}{a} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^x}-\dfrac{1}{b^x}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{a^x}-\dfrac{1}{b^x}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ có $f(1)=0$ và $f'(x)=-\left(\dfrac{1}{a}\right)^x \ln a+\left(\dfrac{1}{b}\right)^x \ln b$

và $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{\ln b}{\ln a} \Leftrightarrow x=x_0=\log_{\frac{b}{a}}\left(\dfrac{\ln b}{\ln a}\right)$.

Ta cũng có $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>x_0$; $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<x_0$.

+ Nếu $x_0=1 \Leftrightarrow \log_{\frac{b}{a}}\left(\dfrac{\ln b}{\ln a}\right)=1 \Leftrightarrow \dfrac{\ln b}{\ln a}=\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow \dfrac{\ln b}{b}=\dfrac{\ln a}{a} \Leftrightarrow (a;b)=(4;2)$.

Chú ý: Xét hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$ có $\dfrac{\ln 3}{3}>\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{\ln 4}{4}>\dfrac{\ln 5}{5}>\ldots>\dfrac{\ln 100}{100}$.

Khi đó $f(x) \ge f(x_0)=f(1)=0 \Rightarrow f(x)=0$ có đúng một nghiệm $x=1$.

+ Nếu $x_0 \ne 1 \Leftrightarrow (a;b) \ne (4;2)$ khi đó kẻ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta có phương trình $f(x)=0$ luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

Với mỗi $b=k \in \{2;3;\ldots;99\} \Rightarrow a \in \{k+1;\ldots;100\}$ tức có $100-k$ cách chọn a.

Vậy có cặp với và loại đi cặp có cặp thỏa mãn.

Câu 25. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1 \le x \le 2020$, $y \ge 2$ và $x^2+x-xy=x\log_2(xy-x)-2^x$

A. 2021. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_2(xy-x)=t \Leftrightarrow xy-x=2^t$. Khi đó giả thiết trở thành $x^2-2^t=xt-2^x \Leftrightarrow 2^x+x.x=2^t+x.t$

$\Leftrightarrow x=t \Leftrightarrow xy-x=2^x \Leftrightarrow y=1+\dfrac{2^x}{x}$.

Vì $1\le x\le 2020$, $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}$ nên $2^x \vdots x$ suy ra $x\in\left\{2^0,2^1,2^2,...,2^{10}\right\}$.

Khi đó $y=1+\dfrac{2^x}{x}$ có duy nhất một cách chọn.

Vậy có tất cả 11 cặp số nguyên thỏa mãn.

Câu 26. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le y\le 2020$ và $\log_3\left(\dfrac{2^x-1}{y}\right)=y+1-2^x$?

A. 2019. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} y\ne 0 \\ \dfrac{2^x-1}{y}>0 \Leftrightarrow 2^x>1 \Leftrightarrow x>0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Ta có: PT $\Leftrightarrow \log_3\left(2^x-1\right)+2^x-1=\log_3 y+y$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên $(0;+\infty)$

Khi đó $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0$ do đó hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

(*) có dạng $f\left(2^x-1\right)=f(y)\Leftrightarrow y=2^x-1$

Vì $0\le y\le 2020 \Leftrightarrow 0\le 2^x-1\le 2020 \Leftrightarrow 1\le 2^x\le 2021 \Leftrightarrow 0\le x\le \log_2(2021)$

$\begin{cases} 0\le x\le \log_2(2021) \\ x\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Vậy có 11 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 27. **(ĐTK2021)** Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(2^x-y\right)<0$?

A. 1024. **B.** 2047. **C.** 1022. **D.** 1023.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(2^{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(2^x-y\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{x+1}-\sqrt{2}<0 \\ 2^x-y>0 \end{cases} (I) \\ \begin{cases} 2^{x+1}-\sqrt{2}>0 \\ 2^x-y<0 \end{cases} (II) \end{array}\right.$

+ Xét hệ (I): $\begin{cases} 2^{x+1}-\sqrt{2}<0 \\ 2^x-y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1<\dfrac{1}{2} \\ x>\log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{1}{2} \\ x>\log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \log_2 y<x<-\dfrac{1}{2} \Rightarrow y<2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Trường hợp này loại vì không có số nguyên dương y thỏa mãn.

+ Xét hệ $(II):\begin{cases}2^{x+1}-\sqrt{2}>0\\2^x-y<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>\dfrac{1}{2}\\x<\log_2 y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\x<\log_2 y\end{cases}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}<x<\log_2 y$.

Để mỗi giá trị y, bất phương trình có không quá 10 nghiệm nguyên x thì $\log_2 y\le 10\Leftrightarrow y\le 2^{10}\Leftrightarrow y\le 1024$.

Kết hợp điều kiện y nguyên dương, suy ra có 1024 số y thỏa mãn bài toán.

Câu 28. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $0<y<2020$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$

$\Leftrightarrow 3^x+3x-6=9y+3\log_3 y$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}+x-2=3y+\log_3 y$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}+x-1=3y+\log_3(3y)$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}+x-1=3^{\log_3(3y)}+\log_3(3y)\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=3^t+t$. Ta có: $f'(t)=1+3^t.\ln 3>0,\ \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(x-1)=f(\log_3(3y))\Leftrightarrow x-1=\log_3(3y)\Leftrightarrow x-2=\log_3 y\Leftrightarrow y=3^{x-2}$.

Vì $y\in(0;2020)$ nên $3^{x-2}<2020\Leftrightarrow x-2<\log_3 2020\Leftrightarrow x<2+\log_3 2020$

Do $x;y\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{2;3;4;5;6;7;8\}$.

Ứng với mỗi giá trị nguyên của x cho ta 1 giá trị nguyên của y.

Vậy có 7 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn $0<x\le 2020$ và $3^x(x+1)=27^y y$.

A. 2020. **B.** 673. **C.** 672. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^x.(x+1)=27^y.y\Leftrightarrow\log_3\left[3^x.(x+1)\right]=\log_3(27^y.y)$

$\Leftrightarrow x+\log_3(x+1)=3y+\log_3 y\Leftrightarrow(x+1)+\log_3(x+1)=3y+\log_3 y+\log_3 3$

$\Leftrightarrow(x+1)+\log_3(x+1)=3y+\log_3(3y)$. (*)

Xét hàm số $f(t)=t+\log_3 t$, với $t\in(1;2021]$.

$f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 3}>0,\ \forall t\in(1;2021]$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(0;2021)$.

Mà $(*)\Leftrightarrow f(x+1)=f(3y)\Leftrightarrow x+1=3y\Leftrightarrow x=3y-1$.

Vì $0<x\le 2020\Leftrightarrow 0<3y-1\le 2020\Leftrightarrow 1<3y\le 2021\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}<y\le\dfrac{2021}{3}$.

Do $y\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow y\in\{1;2;3;...;673\}$. Ứng với mỗi giá trị y cho ta một x nguyên dương.

Vậy có 673 cặp $(x;y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 30. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_2(2x+2)+x=3y+8^y$?

A. 2021.   **B.** 2020.   **C.** 3.   **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_2(2x+2)+x=3y+8^y$. ĐK: $x>-1$.

Khi đó: $\log_2(2x+2)+x=3y+8^y \Leftrightarrow (x+1)+\log_2(x+1)=3y+2^{3y}$. (1)

Đặt $t=\log_2(x+1) \Leftrightarrow x+1=2^t$ khi đó (1) trở thành $t+2^t=3y+2^{3y} \Leftrightarrow f(t)=f(3y)$ (*)

Xét hàm số $f(u)=u+2^u$ liên tục trên $\mathbb{R}$

$f'(u)=1+2^u\ln 2>0, \forall u\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(u)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (*) $\Rightarrow t=3y$ hay $\log_2(x+1)=3y \Rightarrow y=\frac{1}{3}\log_2(x+1)$

Theo giả thiết $0\le x\le 2020 \Leftrightarrow 1\le x+1\le 2021 \Leftrightarrow 0\le\frac{1}{3}\log_2(x+1)\le\frac{1}{3}\log_2 2021$

$\Leftrightarrow 0\le y\le\frac{1}{3}\log_2 2021$. Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{0;1;2;3\}$.

Ứng với mỗi giá trị của y có duy nhất một giá trị của x thỏa điều kiện.

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 31. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=-3x^2+y^2+2x-y+1$. Biết $x, y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\log_2\frac{x^2+2x+2}{y^2-y+1}+2x^2-y^2+4x+y+4=0$.

A. $P_{\max}=12$.   **B.** $P_{\max}=13$.   **C.** $P_{\max}=14$.   **D.** $P_{\max}=10$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2\frac{x^2+2x+2}{y^2-y+1}+2x^2-y^2+4x+y+4=0$, $(x,y\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2+2x+2)-\log_2(y^2-y+1)+2x^2-y^2+4x+y+4=0$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2+2x+2)+2x^2+4x+5=\log_2(y^2-y+1)+(y^2-y+1)$

$\Leftrightarrow \log_2(2x^2+4x+4)+(2x^2+4x+4)=\log_2(y^2-y+1)+(y^2-y+1)$.(*)

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$, $t\in[1;+\infty)$.

$f'(t)=\frac{1}{t.\ln 2}+1>0$, $\forall t\ge 1$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Mà (*)$(*)\Leftrightarrow f(2x^2+4x+4)=f(y^2-y+1) \Leftrightarrow 2x^2+4x+4=y^2-y+1$

$\Leftrightarrow 2x^2+4x+3=y^2-y$.(1)

Khi đó $P=-3x^2+y^2+2x-y+1=-x^2+6x+4=13-(x^2-6x+9)=13-(x-3)^2\le 13$.

Vậy $P_{\max}=13$ đạt được khi $x=3$ và $y=\frac{1\pm\sqrt{133}}{2}$.

Câu 32. Cho hai số thực x, y thỏa mãn

$\log_{\sqrt{3}}(y^2+8y+16)+\log_2[(5-x)(1+x)]=2\log_3\frac{5+4x-x^2}{3}+\log_2(2y+8)^2$.

Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|\sqrt{x^2+y^2}-m\right|$ không vượt quá 10. Hỏi S có bao nhiêu tập con không phải là tập rỗng?

A. 2047. **B.** 16383. **C.** 16384. **D.** 32.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $-1<x<5$, $y\neq -4$. Ta có:

$\log_{\sqrt{3}}\left(y^2+8y+16\right)+\log_2\left[(5-x)(1+x)\right]=2\log_3\dfrac{5+4x-x^2}{3}+\log_2(2y+8)^2$.

$\Leftrightarrow 2\log_3\left(y^2+8y+16\right)-2\log_3\left(5+4x-x^2\right)=\log_2\left(y^2+8y+16\right)-\log_2\left(5+4x-x^2\right)$

$\Leftrightarrow (\log_3 4-1).\log_2\left(y^2+8y+16\right)=(\log_3 4-1).\log_2\left(5+4x-x^2\right)$

$\Leftrightarrow y^2+8y+16=5+4x-x^2$ (vì hàm $f(t)=(\log_3 4-1).\log_2 t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$).

$\Rightarrow \left(x^2+y^2+11\right)^2=(4x-8y)^2\leq 80\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow \left(x^2+y^2\right)^2-58\left(x^2+y^2\right)+121\leq 0$

$\Rightarrow 29-12\sqrt{5}\leq x^2+y^2\leq 29+12\sqrt{5}\Rightarrow \sqrt{29-12\sqrt{5}}\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq\sqrt{29+12\sqrt{5}}$.

Đặt $a=\sqrt{29-12\sqrt{5}}$, $b=\sqrt{29+12\sqrt{5}}$, ta có: $\max\limits_{[a;b]}P=\max\left\{|a-m|,|b-m|\right\}$.

Do đó, $\max\limits_{[a;b]}P\leq 10\Leftrightarrow \begin{cases}|a-m|\leq 10\\|b-m|\leq 10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-10\leq m\leq a+10\\b-10\leq m\leq b+10\end{cases}\Rightarrow b-10\leq m\leq a+10$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $S=\{-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\}$.

Câu 33. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện $x+y>0; x^2+y^2>0$.

Đặt $t=\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)$. Ta có $\begin{cases}x+y=3^t\\x^2+y^2=4^t\end{cases}$ (1)

Vì $(x+y)^2\leq 2\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow \left(3^t\right)^2\leq 2.4^t\Rightarrow t\leq\log_{\frac{9}{4}}2$

Thế thì $x^2+y^2=4^t\leq 4^{\log_{\frac{9}{4}}2}\approx 3,27$, vì x nguyên vậy nên $x^2\in\{0;1\}$.

- Với $x=0$, ta có hệ $\begin{cases}y=3^t\\y^2=4^t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\y=1\end{cases}$

- Với $x=1$, ta có hệ $\begin{cases}y=3^t-1\\y^2=4^t-1\end{cases}$. Hệ này có nghiệm $\begin{cases}t=0\\y=0\end{cases}$.

- Với $x=-1$, ta có hệ $\begin{cases}y=3^t+1\\y^2=4^t-1\end{cases}$. Ta có phương trình $\left(3^t+1\right)^2=4^t-1\Leftrightarrow 9^t+2.3^t-4^t+2=0\,(*)$

Đặt $f(t)=9^t+2.3^t-4^t+2$, ta có

Với $t\geq 0\Rightarrow 9^t\geq 4^t\Rightarrow f(t)>0$

Với $t<0\Rightarrow 4^t<2\Rightarrow f(t)>0$

Vậy phương trình $(*)$ vô nghiệm

Kết luận: Vậy $x\in\{0;1\}$

Câu 34. Cho $0 \le x \le 2020$ và $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Do $0 \le x \le 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa.

Ta có $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+x+1=3y+2^{3y}$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+2^{\log_2(x+1)}=3y+2^{3y}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t+2^t$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và $f'(t)=1+2^t\ln 2 \Rightarrow f'(t)>0\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (1) $\Leftrightarrow \log_2(x+1)=3y \Leftrightarrow y=\log_8(x+1)$.

Ta có $0 \le x \le 2020$ nên $1 \le x+1 \le 2021$ suy ra $0 \le \log_8(x+1) \le \log_8 2021 \Leftrightarrow 0 \le y \le \log_8 2021$.

Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{0;1;2;3\}$.

Vậy có 4 cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0;0)$, $(7;1)$, $(63;2)$, $(511;3)$.

Câu 35. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{3}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{9}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\dfrac{1-y}{x+3xy}>0$ và $x>0, y>0$ hay $\begin{cases} x>0 \\ 0<y<1 \end{cases}$.

Ta có $\log_3\dfrac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4 \Leftrightarrow \dfrac{1-y}{x+3xy}=3^{3xy+x+3y-4} \Leftrightarrow \dfrac{3(1-y)}{x+3xy}=3^{3xy+x+3y-3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(1-y)}{x+3xy}=\dfrac{3^{3xy+x}}{3^{3-3y}} \Leftrightarrow (3-3y).3^{3-3y}=(3xy+x).3^{3xy+x}$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t.3^t$ với $t>0$. Ta có $f'(t)=3^t+t.3^t.\ln 3>0$ với $\forall t>0$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow 3-3y=3xy+x \Leftrightarrow y=\dfrac{3-x}{3(x+1)}$.

Ta có $P=x+y=x+\dfrac{3-x}{3(x+1)}=(x+1)+\left(\dfrac{3-x}{3(x+1)}+\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{4}{3}$

$P=(x+1)+\dfrac{4}{3(x+1)}-\dfrac{4}{3}\ge 2\sqrt{(x+1).\dfrac{4}{3(x+1)}}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

Vậy $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\dfrac{4}{3(x+1)}\\ y=\dfrac{3-x}{3(x+1)}\\ x>0;0<y<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}\\ y=\dfrac{2\sqrt{3}-1}{3}\end{cases}$.

Câu 36. Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_3(x+2y)=\log_2(x^2+y^2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_3(x+2y)=\log_2(x^2+y^2)=t\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3^t\\ x^2+y^2=2^t\end{cases}$ (*)

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $\Delta: x+2y-3^t=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=\left(\sqrt{2^t}\right)^2$ có điểm chung $\Leftrightarrow d(O,\Delta)\le R\Leftrightarrow\dfrac{\left|0+0-3^t\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}\le\sqrt{2}^t\Leftrightarrow 3^t\le\sqrt{5}.\sqrt{2}^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{9}{2}\right)^t\le 5\Leftrightarrow t\le\log_{\frac{9}{2}}5$.

Do $x^2+y^2=2^t$ nên $|y|\le\sqrt{2}^t\Rightarrow|y|\le\sqrt{2}^{\log_{\frac{9}{2}}5}\approx 1,448967...$

Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{-1;0;1\}$.

Thử lại:

- Với $y=-1$, hệ (*) trở thành $\begin{cases}x-1=3^t\\ x^2+1=2^t\end{cases}\Rightarrow\left(3^t+1\right)^2+1=2^t\Leftrightarrow 9^t+2.3^t-2^t+2=0$ (**)

Nếu $t<0$ thì $2-2^t>0\Rightarrow 9^t+2.3^t-2^t+2>0$.
Nếu $t\ge 0\Rightarrow 9^t-2^t\ge 0\Rightarrow 9^t+2.3^t-2^t+2>0$.
Vậy (**) vô nghiệm.

- Với $y=0$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases}x=3^t\\ x^2=2^t\end{cases}\Rightarrow 9^t=2^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{9}{2}\right)^t=1\Leftrightarrow t=0\Rightarrow x=1$.

- Với $y=1$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases}x+1=3^t\\ x^2+1=2^t\end{cases}\Rightarrow\left(3^t-1\right)^2=2^t-1\;(***)$.

Dễ thấy (***) luôn có ít nhất một nghiệm $t=0\Rightarrow x=0$.
Vậy có 2 giá trị nguyên của y thỏa mãn là $y=0$, $y=1$.

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của c để tồn tại các số thực $a,b>1$ thỏa mãn $\log_9 a=\log_{12}b=\log_{16}\dfrac{5b-a}{c}$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16} \dfrac{5b-a}{c} = t > 0$. Khi đó $\begin{cases} a = 9^t \\ b = 12^t \\ \dfrac{5b-a}{c} = 16^t \end{cases}$ $(*) \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^t = u \in (0;1)$

Từ (*) suy ra $5.12^t - 9^t = c.16^t \Leftrightarrow 5\left(\dfrac{3}{4}\right)^t - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t} = c$

Suy ra $c = -u^2 + 5u = f(u)$

Ta có $f'(u) = -2u + 5 > 0\ \forall u \in (0;1)$

Bảng biến thiên của $f(u)$ trên $(0;1)$ là

u	0		1
$f'(u)$		$+$	
$f(u)$	0	$\nearrow$	4

Để tồn tại a, b thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (*) phải có nghiệm

$\Leftrightarrow c = f(u)$ có nghiệm $u \in (0;1)$

$\Leftrightarrow 0 < c < 4$.

Do $c \in \mathbb{N}^*$ nên $c \in \{1;2;3\}$

Câu 38. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \le y \le 2020$ và $\log_3\left(\dfrac{2^x-1}{y}\right) = y + 1 - 2^x$?

A. 2019. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} y \ne 0 \\ \dfrac{2^x-1}{y} > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Ta có: PT $\Leftrightarrow \log_3(2^x-1) + 2^x - 1 = \log_3 y + y \quad (*)$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0;+\infty)$

Khi đó $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0$ do đó hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

(*) có dạng $f(2^x-1) = f(y) \Leftrightarrow y = 2^x - 1$

Vì $0 \le y \le 2020 \Leftrightarrow 0 \le 2^x - 1 \le 2020 \Leftrightarrow 1 \le 2^x \le 2021 \Leftrightarrow 0 \le x \le \log_2(2021)$

$\begin{cases} 0 \le x \le \log_2(2021) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Vậy có 11 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $e^{3x+5y} - e^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y$, đồng thời thỏa mãn $\log_3^2(3x+2y-1) - (m+6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y \Leftrightarrow e^{3x+5y}+(3x+5y)=e^{x+3y+1}+(x+3y+1)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=e^t+1>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(3x+5y)=f(x+3y+1) \Leftrightarrow 3x+5y=x+3y+1 \Leftrightarrow 2y=1-2x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được $\log_3^2 x-(m+6)\log_3 x+m^2+9=0$ (2)

Đặt $t=\log_3 x$. Số nghiệm của phương trình (2) chính là số nghiệm của phương trình

$t^2-(m+6)t+m^2+9=0$ (3)

Phương trình (3) có nghiệm khi $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow -3m^2+12m\ge 0 \Leftrightarrow 0\le m\le 4$.

Do đó có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 40. **(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2)$

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2)=t$. Điều kiện: $x+y>0$.

Suy ra $\begin{cases}x+y=3^t\\x^2+y^2=4^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=3^t\\(x+y)^2-2xy=4^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=3^t\\xy=\dfrac{9^t-4^t}{2}\end{cases}$ nên $S=3^t$ và $P=\dfrac{9^t-4^t}{2}$.

Để tồn tại x,y thì $S^2\ge 4P \Leftrightarrow (x+y)^2\ge 4xy$ nên $9^t\ge 4\left(\dfrac{9^t-4^t}{2}\right) \Leftrightarrow 9^t\le 2.4^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{9}{4}\right)^t\le 2$.

Khi đó $t\le \log_{\frac{9}{4}} 2$.

Ta có: $\log_4(x^2+y^2)=t\le \log_{\frac{9}{4}}2 \Leftrightarrow x^2+y^2\le 4^{\log_{\frac{9}{4}}2}\approx 3,27$.

Mặt khác x là số nguyên nên $x=-1; x=0, x=1$.

Thử lại:

Với $x=-1$ ta có $\begin{cases}y=3^t+1\\y^2+1=4^t\ge 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t\ge 0\\y\ge 2\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2\ge 5$. Suy ra loại $x=-1$.

Với $x=0$ ta có $\begin{cases}y=3^t\\y^2=4^t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=0\\y=1\end{cases}$. Suy ra nhận $x=0$.

Với $x=1$ ta có $\begin{cases}y=3^t-1\\y^2=4^t-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=0\\y=2\end{cases}$. Suy ra nhận $x=1$.

Vậy có hai giá trị nguyên của x thỏa yêu cầu bài toán là $x=0$ và $x=1$.

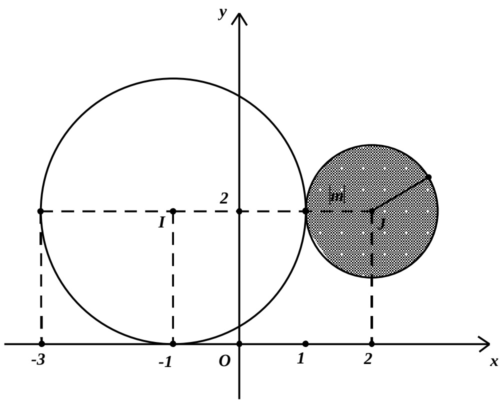
Câu 41. Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2)\ge 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

A. $S=\{-5;-1;1;5\}$. **B.** $S=\{-1;1\}$.

C. $S=\{-5;5\}$. **D.** $S=\{-7-5;-1;1;5;7\}$.

Lời giải

Chọn B



Nhận thấy $x^2+y^2+2>1$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ nên:

$\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right)\ge 1\Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2\ge x^2+y^2+2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+8-m^2\le 0\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2\le m^2$ (*).

Khi $m=0$ thì (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$. Cặp $(2;2)$ không là nghiệm của phương trình $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

Khi $m\ne 0$, tập hợp các điểm $(x;y)$ thỏa mãn (*) là hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính là $|m|$. Trường hợp này, yêu cầu bài toán trở thành tìm m để đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính 2 và hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính $|m|$ có đúng một điểm chung (hình vẽ)

Điều này xảy ra khi $|m|=1\Leftrightarrow m=\pm 1$ (thỏa mãn $m\ne 0$).

Vậy $S=\{-1;1\}$.

Câu 42. Có bao nhiêu cặp số nguyên $x;y$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_4(512x+768)+2x-1=2y+16^y$?

A. 2019 **B.** 0 **C.** 2020 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\log_4(512x+768)+2x-1=2y+16^y$

$\Leftrightarrow \log_4 256(2x+3)+2x-1=2y+4^{2y}$

$\Leftrightarrow \log_4(2x+3)+(2x+3)=2y+4^{2y}$.

Xét hàm số $f(t)=t+4^t$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(t)=1+4^t\ln 4>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó: $\log_4(2x+3)=2y\Leftrightarrow 2x+3=16^y\Leftrightarrow x=\dfrac{16^y-3}{2}$.

Vì: $0\le x\le 2020\Leftrightarrow 0\le\dfrac{16^y-3}{2}\le 2020\Leftrightarrow 3\le 16^y\le 4043\Leftrightarrow \log_{16}3\le y\le\log_{16}4043$.

Mà $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{1;2\}$.

Với $y=1\Rightarrow x=\dfrac{13}{2}(l)$.

Với $y=2\Rightarrow x=\dfrac{253}{2}(l)$.

Vậy không có cặp số $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 43. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $2016^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+2017}{y^2+2017}$; $3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1$

A. 2 **B.** 1
C. 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases}2016^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+2017}{y^2+2017} & (1)\\ 3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1 & (2)\end{cases}$.

Điều kiện $\begin{cases}x+2y+6>0\\ x+y+2>0\end{cases}$.

$(1)\Leftrightarrow \log_{2016}2016^{y^2-x^2}=\log_{2016}\dfrac{x^2+2017}{y^2+2017}$

$\Leftrightarrow y^2-x^2=\log_{2016}\left(x^2+2017\right)-\log_{2016}\left(y^2+2017\right)$.

$\Leftrightarrow y^2+\log_{2016}\left(y^2+2017\right)=x^2+\log_{2016}\left(x^2+2017\right)\ (3)$

Xét hàm số $f(t)=t^2+\log_{2016}\left(t^2+2017\right)$ trên $[0,+\infty)$. Ta có.

$f'(t)=2t+\dfrac{2t}{\left(t^2+2017\right)\ln 2016}\geq 0,\forall t\in[0,+\infty)$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0,+\infty)$.

Do đó $(3)\Leftrightarrow y^2=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x\\ y=-x\end{array}\right.$.

Với $y=x$ thay vào phương trình (2) ta được.

$3\log_3(3x+6)=2\log_2(2x+2)+1$

.

$\Leftrightarrow 3[1+\log_3(x+2)]=2[1+\log_2(x+1)]+1\Leftrightarrow 3\log_3(x+2)=2\log_2(x+1)$.

Đặt $\begin{cases}t=3\log_3(x+2)\\ t=2\log_2(x+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2=3^{\frac{t}{3}}\\ x+1=2^{\frac{t}{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=\left(\sqrt[3]{3}\right)^t\ (4)\\ x+1=\left(\sqrt{2}\right)^t\ (5)\end{cases}$.

Lấy (5) thay vào (4), ta được $\left(\sqrt{2}\right)^t+1=\left(\sqrt[3]{3}\right)^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^t+\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^t=1\Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $t=6$. Suy ra phương trình có nghiệm $x=7$. Suy ra nghiệm của hệ phương trình là $(7;7)$.

Với $y=-x$ thay vào phương trình (2) ta được.

$3\log_3(y+6)=3\Leftrightarrow\log_3(y+6)=1\Rightarrow y=-3,x=3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(3;-3)$, $(7;7)$.

Câu 44. Xét các số thực x, y $(x\geq 0)$ thỏa mãn

$2018^{x+3y}+2018^{xy+1}+x+1=2018^{-xy-1}+\dfrac{1}{2018^{x+3y}}-y(x+3)$.

Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+2y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m\in(0;1)$. **B.** $m\in(1;2)$.

C. $m\in(2;3)$. **D.** $m\in(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2018^{x+3y}+2018^{xy+1}+x+1=2018^{-xy-1}+\dfrac{1}{2018^{x+3y}}-y(x+3)$

$\Leftrightarrow 2018^{x+3y}-2018^{-x-3y}+x+3y=2018^{-xy-1}-2018^{xy+1}-xy-1$

$\Leftrightarrow f(x+3y)=f(-xy-1)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2018^{t}-2018^{-t}+t$, với $t\in\mathbb{R}$ ta có

$f'(t)=2018^{t}\ln 2018+2018^{-t}\ln 2018+1>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(1)\Leftrightarrow x+3y=-xy-1$

$\Leftrightarrow y(x+3)=-x-1\Rightarrow y=-\dfrac{x+1}{x+3}\Rightarrow T=x-\dfrac{2(x+1)}{x+3}$.

Xét hàm số $f(x)=x-\dfrac{2(x+1)}{x+3}$, với $x\in[0;+\infty)$ có

$f'(x)=1-\dfrac{4}{(x+3)^2}=\dfrac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}>0$, $\forall x\in(0;+\infty)$.

Do đó $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)\Rightarrow f(x)\geq f(0)=-\dfrac{2}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0\Rightarrow m=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2^{2x^2+y^2}=3^{x+y}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Đặt $2^{2x^2+y^2}=3^{x+y}=t$, suy ra $\begin{cases}2x^2+y^2=\log_2 t\\ x+y=\log_3 t\end{cases}$.

Ta có $(x+y)^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}x+1.y\right)^2\leq\left(\dfrac{1}{2}+1\right)(2x^2+y^2)$ nên suy ra:

$\log_3^2 t\leq\dfrac{3}{2}\log_2 t=\dfrac{3}{2}\log_2 3.\log_3 t\Rightarrow\log_3 t\leq\dfrac{3}{2}\log_2 3\approx 2,74$.

Do đó $2x^2+y^2=\log_2 t=\log_2 3.\log_3 t\leq 3,7$.

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-1;0;1\}$.

+ Với $x=0$, ta có $\begin{cases}y^2=\log_2 t=\log_2 3.\log_3 t\\ y=\log_3 t\end{cases}$, suy ra $y^2=y.\log_2 3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=\log_2 3\end{array}\right.$.

+ với $x=1$, ta có $\begin{cases}2+y^2=\log_2 t=\log_2 3.\log_3 t\\ 1+y=\log_3 t\end{cases}$, suy ra

$2+y^2=\log_2 3.(1+y)\Leftrightarrow y^2-\log_2 3.y+2-\log_2 3=0$ phương trình có nghiệm.

+ Với $x=-1$, ta có $\begin{cases}2+y^2=\log_2 t=\log_2 3.\log_3 t\\ -1+y=\log_3 t\end{cases}$, suy ra

$2+y^2=\log_2 3.(-1+y)\Leftrightarrow y^2-\log_2 3.y+2+\log_2 3=0$ phương trình vô nghiệm.

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_3(x+2y)=\log_2(x^2+y^2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_3(x+2y)=\log_2(x^2+y^2)=t\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3^t\\ x^2+y^2=2^t\end{cases}$ (*)

Ta có $(x+2y)^2\le(1+4)(x^2+y^2)=5(x^2+y^2)$ nên: $9^t\le 5.2^t\Leftrightarrow\left(\frac{9}{2}\right)^t\le 5\Leftrightarrow t\le\log_{\frac{9}{2}}5$.

Suy ra $x^2+y^2=2^t\le 2^{\log_{\frac{9}{2}}5}\approx 2.1$.

Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{-1;0;1\}$.

+Với $y=-1$, hệ (*) trở thành $\begin{cases}x-1=3^t\\ x^2+1=2^t\end{cases}\Rightarrow(3^t+1)^2+1=2^t\Leftrightarrow 9^t+2.3^t-2^t+2=0$ (**)

Nếu $t<0$ thì $2-2^t>0\Rightarrow 9^t+2.3^t-2^t+2>0$.

Nếu $t\ge 0\Rightarrow 9^t-2^t\ge 0\Rightarrow 9^t+2.3^t-2^t+2>0$.

Vậy (**) vô nghiệm.

- Với $y=0$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases}x=3^t\\ x^2=2^t\end{cases}\Rightarrow 9^t=2^t\Leftrightarrow\left(\frac{9}{2}\right)^t=1\Leftrightarrow t=0\Rightarrow x=1$.

- Với $y=1$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases}x+1=3^t\\ x^2+1=2^t\end{cases}\Rightarrow(3^t-1)^2=2^t-1$ (***).

Dễ thấy (***) luôn có ít nhất một nghiệm $t=0\Rightarrow x=0$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của y thỏa mãn là $y=0$, $y=1$.

Câu 47. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}>0\Leftrightarrow x+y>0.$

$\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)-2\log_3(x^2+y^2+xy+2)=x^2+y^2+xy-3x-3y$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)+2-2\log_3(x^2+y^2+xy+2)=x^2+y^2+xy+2-3x-3y$

$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y)+(3x+3y)=2\log_3(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=2\log_3 t+t,\ t\in(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\frac{2}{t.\ln 3}+1>0,\forall t\in(0;+\infty)$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Phương trình $\Leftrightarrow f(3x+3y)=f(x^2+y^2+xy+2)\Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2=3x+3y$

$\Leftrightarrow x^2+(3-y)x+y^2-3y+2=0$.

Điều kiện của y để phương trình có nghiệm là $(3-y)^2-4(y^2-3y+2)\geq 0$

$\Leftrightarrow -3y^2+6y+1\geq 0\Leftrightarrow \frac{3-2\sqrt{2}}{3}\leq y\leq \frac{3+2\sqrt{2}}{3}$.

Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{0;1;2\}$.

+ Với $y=0$, ta được $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

+ Với $y=1$, ta được $x^2+2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

+ Với $y=2$, ta được $x^2+x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$.

Vậy có 6cặp số thỏa mãn đề bài.

Câu 48. Cho $0\leq x\leq 2020$ và $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$.Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Do $0\leq x\leq 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa.

Ta có $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+x+1=3y-2^{3y}$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+2^{\log_2(x+1)}=3y+2^{3y}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t+2^t$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và $f'(t)=1+2^t\ln 2 \Rightarrow f'(t)>0\ \ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $(1)\Leftrightarrow \log_2(x+1)=3y \Leftrightarrow x+1=2^{3y}$

$\Leftrightarrow y=\log_8(x+1)$.

Ta có $0\leq x\leq 2020$ nên $1\leq x+1\leq 2021$ suy ra $0\leq \log_8(x+1)\leq \log_8 2021$.

Lại có $\log_8 2021\approx 3,66$ nên nếu $y\in\mathbb{Z}$ thì $y\in\{0;1;2;3\}$.

Vậy có 4 cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0;0)$, $(7;1)$, $(63;2)$, $(511;3)$.

Câu 49. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $3^y-x=27^x-\frac{y}{3}$ và $0\leq y\leq 101$.

A. 102. **B.** 101. **C.** 34. **D.** 33.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^y-x=27^x-\frac{y}{3}\Leftrightarrow 3.3^y+y=3.27^x+3x\Leftrightarrow 3^{y+1}+(y+1)=3^{3x+1}+(3x+1)$.(*)

Xét hàm số $f(t)=t+3^t$ xá định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f'(t)=1+3^t.\ln 3>0,\forall t\Rightarrow$hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Mà $(*) \Leftrightarrow f\left(y+1\right)=f\left(3x+1\right) \Leftrightarrow y+1=3x+1 \Leftrightarrow y=3x$.

Với $0 \le y \le 101 \Leftrightarrow 0 \le 3x \le 101 \Leftrightarrow 0 \le x \le \dfrac{101}{3}$.

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0;1;2;...;33\}$. Với mỗi giá trị x tương ứng duy nhất 1 giá trị y.

Vậy có 34 cặp $(x;y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right]\le 0$

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 25.

Lời giải

Chọn C

Ta có điều kiện xác định của bất phương trình là $x>-25$.

Đặt $A(x)=\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right], x>-25$.

$3^{x^2}-9^x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$.

$\log_3\left(x+25\right)-3=0 \Leftrightarrow x=2$.

Ta có bảng xét dấu $A(x)$ như sau

x	-25		0		2		$+\infty$
$A(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ đó, $A(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ -25<x\le 0\end{array}\right. \Rightarrow x\in\{-24;-23;...;0;2\}$ (do $x\in\mathbb{Z}$).

Kết luận: có 26 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Câu 51. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_2(x+30)-5\right]\le 0$?

A. 30. **B.** Vô số. **C.** 31. **D.** 29.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x>-30$. Đặt $f(x)=\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_2\left(x+30\right)-5\right]$

Xét phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2}=9^x \\ \log_2(x+30)=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2x \\ x+30=2^5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \text{ (kép)}\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu:

x	-30		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	

Suy ra bất phương trình $f(x)\le 0$ có tập nghiệm là: $S=(-30;0]\cup\{2\}$

Với $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-29;-28;...;-2;-1;0;2\}$.

Vậy có 31 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 52. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_2\left(x+14\right)-4\right]\le 0$?

A. 14. **B.** 13. **C.** Vô số. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Cách 1

• Trường hợp 1:

$$\begin{cases} 2^{x^2}-4^x\le 0 \\ \log_2(x+14)-4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2}\le 2^{2x} \\ x+14\ge 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x\le 0 \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

• Trường hợp 2:

$$\begin{cases} 2^{x^2}-4^x\ge 0 \\ \log_2(x+14)-4\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x\ge 0 \\ -14<x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x\ge 2 \end{array}\right. \\ -14<x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -14<x\le 0 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Vậy có 15 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Điều kiện xác định: $x>-14$. Đặt $f(x)=\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_2(x+14)-4\right]$

Xét phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2}=4^x \\ \log_2(x+14)=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2x \\ x+14=2^4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \text{ (kép)} \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu:

x	-14		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$+$	

Suy ra bất phương trình $f(x)\le 0$ có tập nghiệm là: $S=(-14;0]\cup\{2\}$.

Do $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-13;-12;...;-2;-1;0;2\}$.

Vậy có 15 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 53. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$?

A. 24. **B.** Vô số. **C.** 25. **D.** 26.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có điều kiện xác định của bất phương trình là $x>-25$.

Đặt $A(x)=\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right], x>-25$.

$2^{x^2}-4^x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$.

$\log_3(x+25)-3=0 \Leftrightarrow x=2$.

Ta có bảng xét dấu $A(x)$ như sau

x	-25		0		2		$+\infty$
$A(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ đó, $A(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ -25<x\le 0 \end{array}\right. \Rightarrow x\in\{-24;-23;...;0;2\}$ (do $x\in\mathbb{Z}$)

Kết luận: có 26 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Cách 2:

• Trường hợp 1:

$$\begin{cases} 2^{x^2}-4^x\le 0 \\ \log_3(x+25)-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2}\le 2^{2x} \\ x+25\ge 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x\le 0 \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

• Trường hợp 2:

$$\begin{cases} 2^{x^2}-4^x\ge 0 \\ \log_3(x+25)-3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x\ge 0 \\ -25<x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x\ge 2 \end{array}\right. \\ -25<x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -25<x\le 0 \vee x=2.$$

• Vậy có 26 giá trị nguyên của x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$.

Câu 54. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 28.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x+31>0 \Leftrightarrow x>-31$.

Đặt $f(x)=\left[\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)$.

Ta có $\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2\left(x+31\right)=0 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+1\right)=\log_2\left(x+31\right)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+31>0 \\ x^2+1=x+31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-31 \\ x^2-x-30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-31 \\ \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-5 \end{array}\right..$$

$32-2^{x-1}=0 \Leftrightarrow x-1=\log_2 32 \Leftrightarrow x-1=5 \Leftrightarrow x=6$.

Bảng xét dấu:

x	-31		-5		6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Khi đó $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow -31<x\le -5$.

Và $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\{-30;-29;...;-5\}$ nên có 26 giá trị nguyên của x.

Câu 55. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+21\right)\right]\left(16-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. 17. **B.** 18. **C.** 16. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>-21$.

Cho: $\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+21\right)=0 \Leftrightarrow x^2+1=x+21 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=5 \end{array}\right.$ và $16-2^{x-1}=0 \Leftrightarrow x=5$.

Bảng xét dấu:

x	-21		-2		5		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$-$	

Nghiệm của bất phương trình $S=(-21;-2]\cup\{5\}$. Suy ra có 18 giá trị nguyên thỏa ycbt.

Câu 56. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2(x^2+1)-\log_2(x+21)\right](16-2^{x-1})\ge 0$?

A. Vô số. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 18.

Lời giải

Điều kiện: $x+21>0 \Leftrightarrow x>-21$

Đặt $f(x)=\left[\log_2(x^2+1)-\log_2(x+21)\right](16-2^{x-1})$

Ta có: $\log_2(x^2+1)-\log_2(x+21)=0 \Leftrightarrow \log_2(x^2+1)=\log_2(x+21)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-21 \\ x^2+1=x+21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-21 \\ x^2-x-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-21 \\ \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

$16-2^{x-1}=0 \Leftrightarrow 2^{x-1}=16 \Leftrightarrow 2^{x-1}=2^4 \Leftrightarrow x-1=4 \Leftrightarrow x=5$

Bảng xét dấu:

x	-21		-4		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta có: $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow -21<x\leq -4$

Vì $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\{-20;-19;-18...;-4\}$

Vậy, có 17 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 57. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+21\right)\right]\left(16-2^{x-1}\right)\geq 0$?

A. 17. **B.** 18. **C.** 16. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>-21$.

Cho: $\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+21\right)=0 \Leftrightarrow x^2+1=x+21 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=5 \end{array}\right.$ và $16-2^{x-1}=0 \Leftrightarrow x=5$.

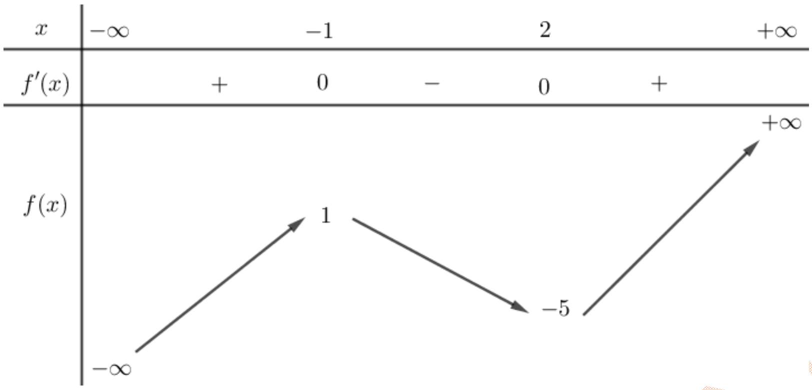
Bảng xét dấu:

x	-21		-2		5		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$-$	

Nghiệm của bất phương trình $S=(-21;-2]\cup\{5\}$. Suy ra có 18 giá trị nguyên thỏa ycbt.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2022

Câu 40. (ĐTK BGD 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)) = 0$ là:

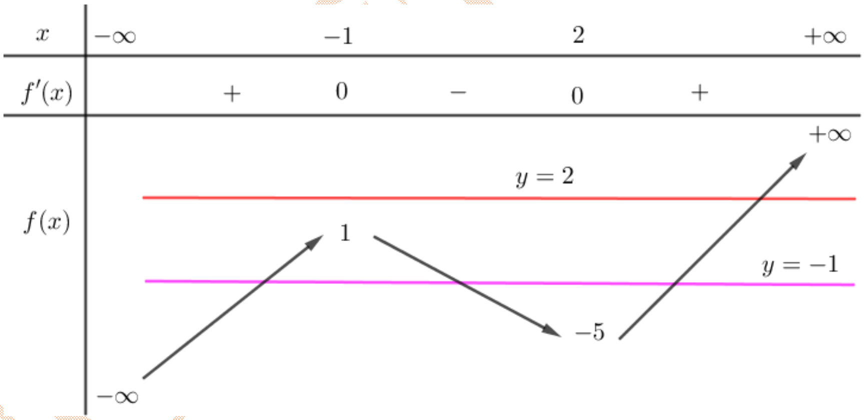
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Suy ra: $f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -1 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.$

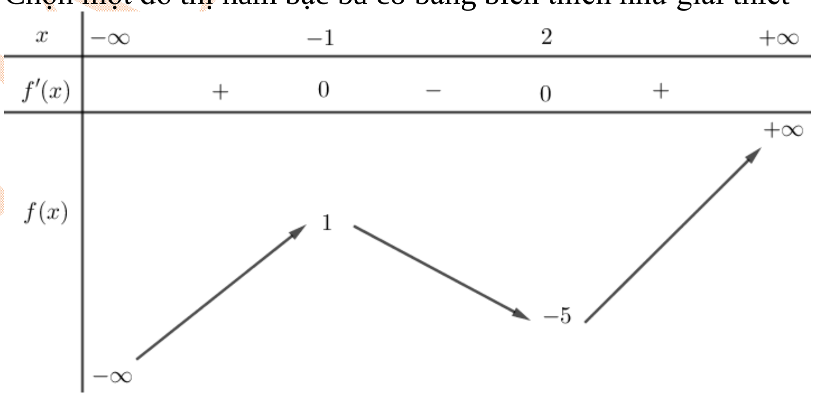


Phương trình $f(x) = -1$ cho ta ba nghiệm, phương trình $f(x) = 2$ cho ta một nghiệm.

Vậy tổng phương trình có bốn nghiệm.

❖ **Đề xuất phương pháp chọn đồ thị đặc biệt.**

Chọn một đồ thị hàm bậc ba có bảng biến thiên như giải thiết



Do $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ nên $f'(x) = a(x+1)(x-2)$($a > 0$)

$$f'(x)=a\left(x^2-x-2\right)\Rightarrow f(x)=a\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)+c$$

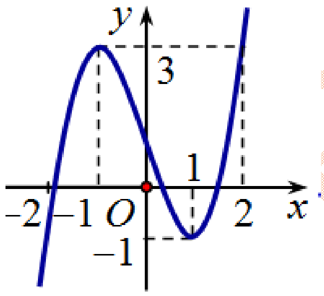
$$f(-1)=\frac{7a}{6}+c=1$$

$$f(2)=-\frac{10}{3}a+c=-5$$

$$\begin{cases} a=\frac{4}{3} \\ c=-\frac{5}{9} \end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{4}{3}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)-\frac{5}{9}$$

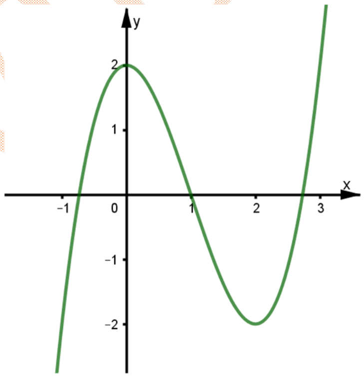
BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)=0$.



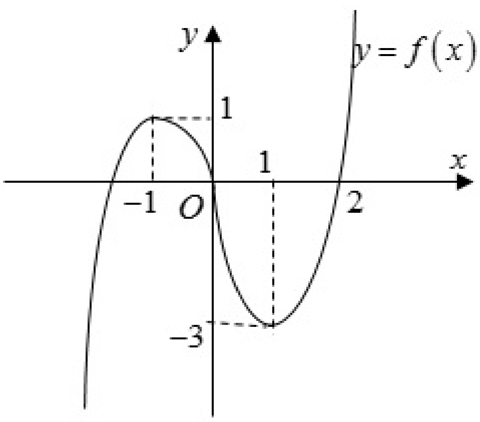
A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)=1$.



A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

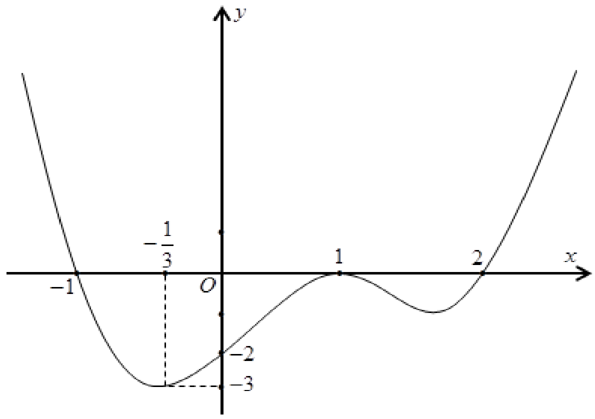
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Số nghiệm của phương trình $f\left(2+f\left(e^{x}\right)\right)=1$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

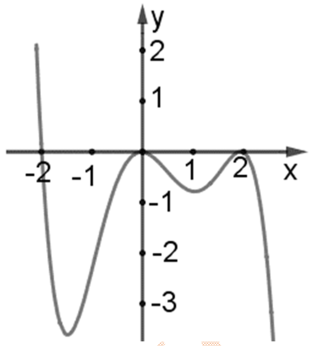
Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'\left(x\right)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g\left(x\right)=f\left(f'\left(x\right)-1\right)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'\left(x\right)=0$. Số phần tử của tập S là

A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 5. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$. Hỏi phương trình $g'\left(x\right)=0$ có mấy nghiệm thực phân biệt?



A. 14. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f'\left(5-3f(x)\right)=0$ là

A. 11. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f'(|f(x)|)=0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-5	↗	$+\infty$

Biết $f(0)=-2$. Số nghiệm thực của phương trình $f'\left(f\left(|x|\right)\right)=0$ là

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

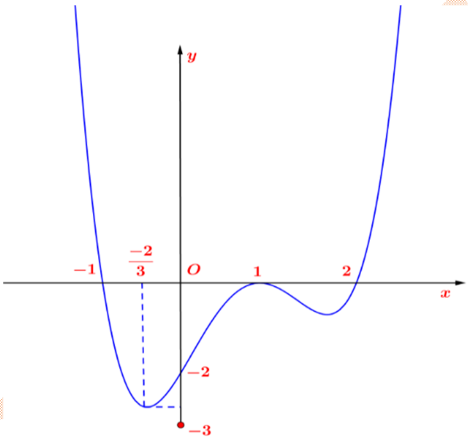
Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-5	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $f'\left(f(x)-m\right)=0$ có 5 nghiệm thực?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

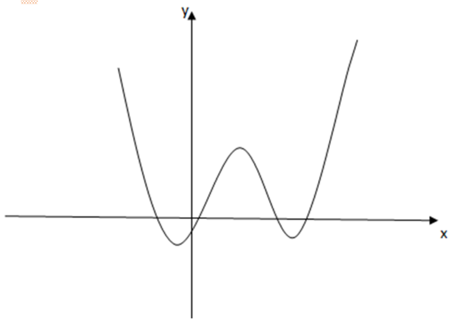
Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên R và có đồ thị $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=f(f'(x)-1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x)=0$. Số phần tử của tập S là

A. 8 **B.** 6 **C.** 10 **D.** 9

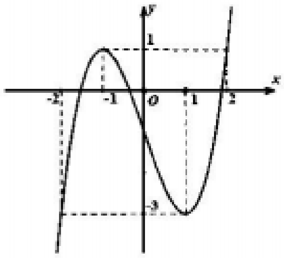
Câu 11. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho như hình vẽ sau



Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là:

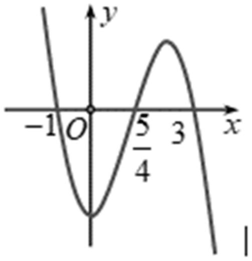
A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4 .

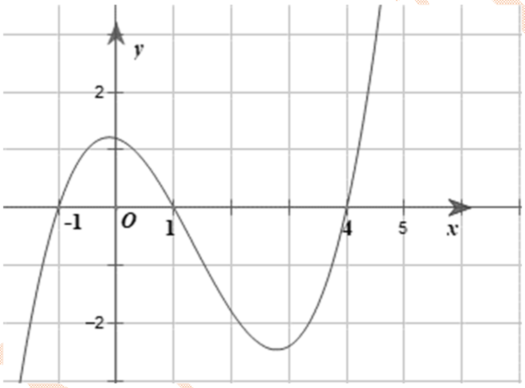
Câu 13. Cho hàm số $f\left(x\right)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$,. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=r$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

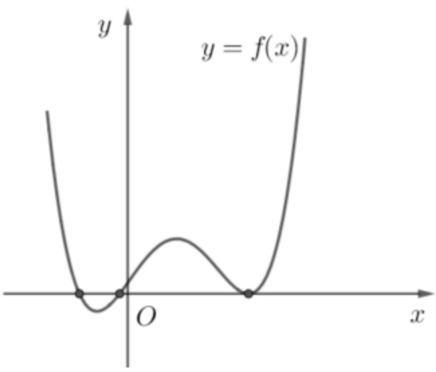
Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m,n,p,q,r\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ như hình vẽ dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=16m+8n+4p+2q+r$ có tất cả bao nhiêu phần tử.

A. 4 . **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

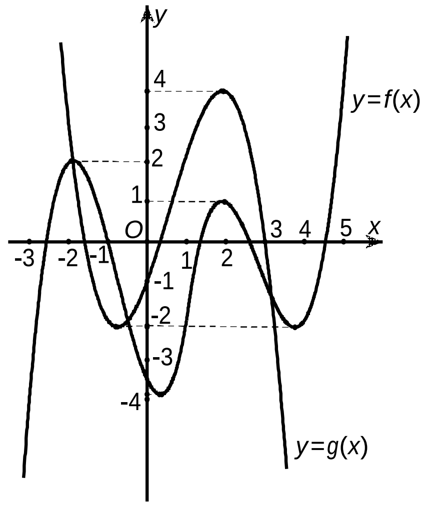
Câu 15. Cho $f\left(x\right)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $\left[f'(x)\right]^2 = f(x).f''(x)$ có số phần tử là

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 0.

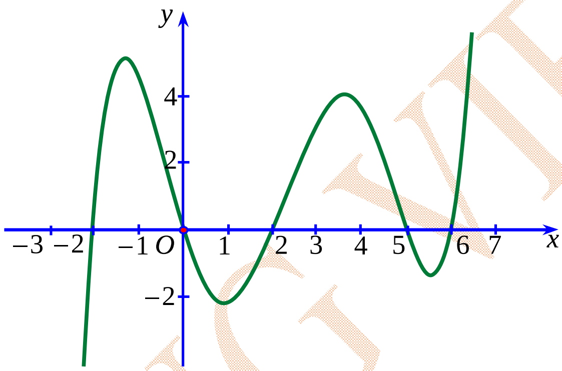
Câu 16. Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị như hình sau:



Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là

A. 25. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 26.

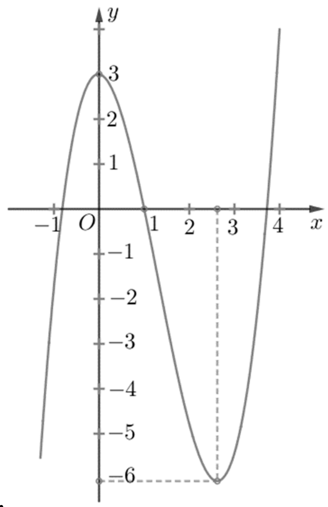
Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-2;6]$ của phương trình $f(x) = f(0)$ là

A. 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

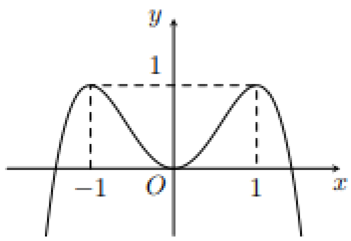
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



.

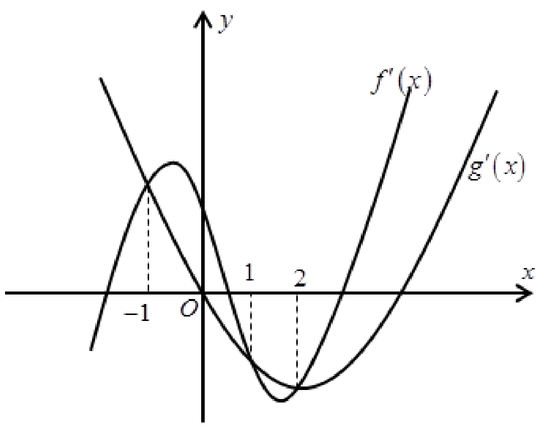
A. 2 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 6

Câu 19. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a,b,c,d,e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f\left(x\right)}\right)+f\left(x\right)+2\sqrt{f\left(x\right)}-1=0$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

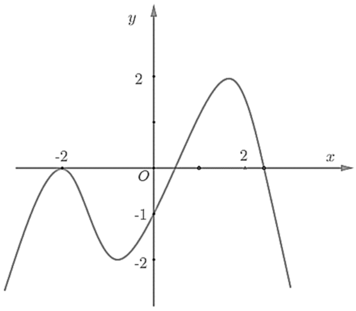
Câu 20. Cho các hàm số $f\left(x\right)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ và $g\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$, $\left(n,n,p,q,r,a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $f\left(0\right)=g\left(0\right)$. Các hàm số $f'\left(x\right),g'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 21. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)+1=0$ có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

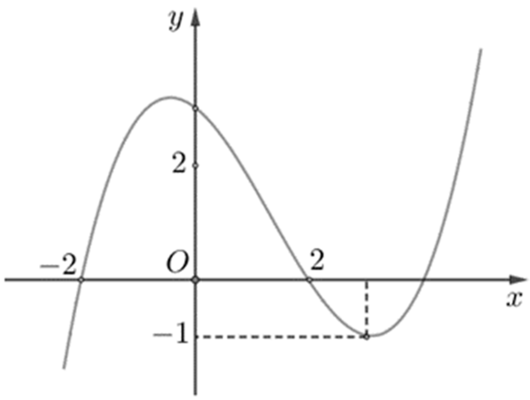
Câu 22. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

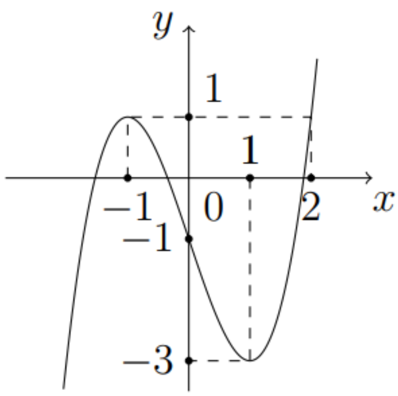
Câu 23. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ là

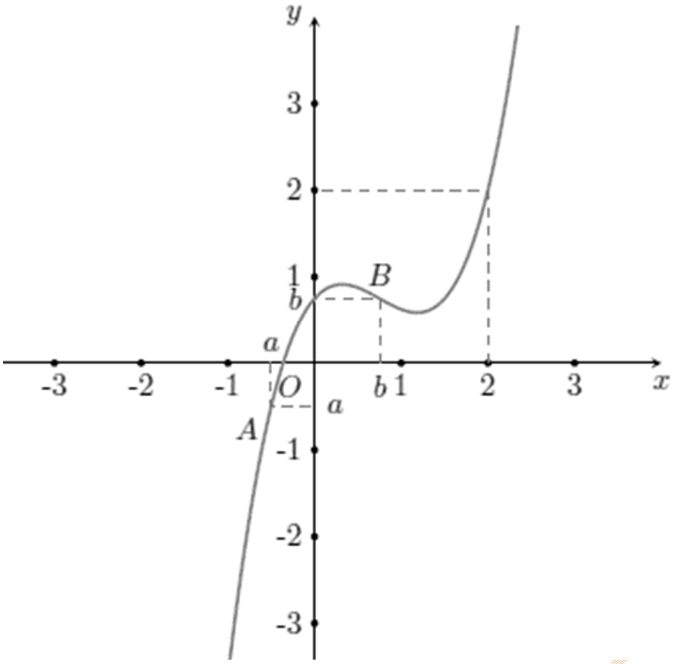
A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 24. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left[f\left(\cos x\right)-1\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$?



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

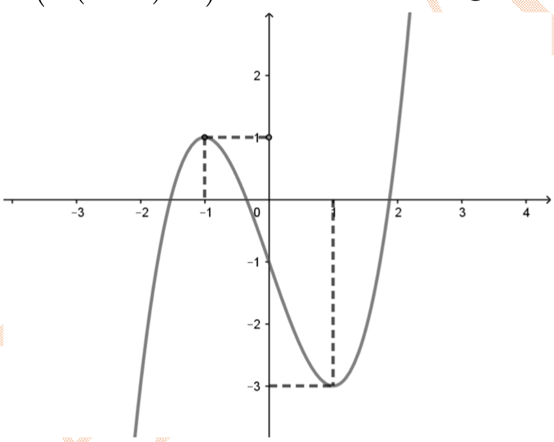
Câu 25. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình $f(\cos x+1)=\cos x+1$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 26. Cho $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(f(\cos x)-1)=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;3\pi]$?



A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

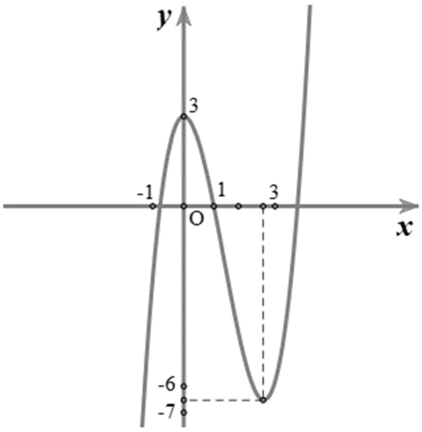
Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $\left|f(3x+1)-2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.

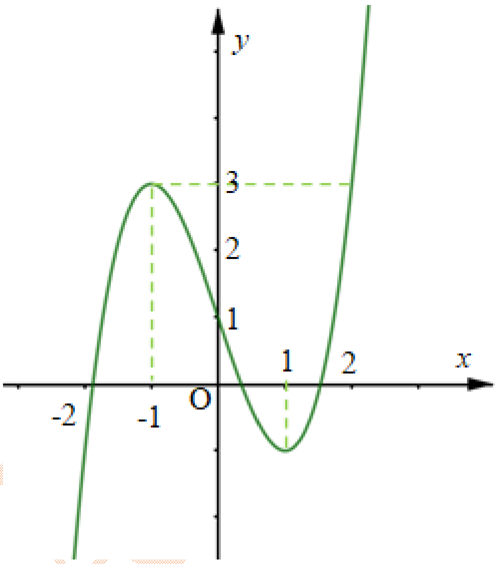


A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f\left(f(x)-1\right)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là

A. 6. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên

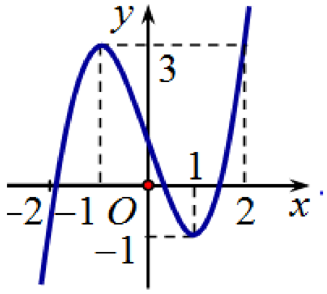


Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x))=0$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$.



A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $t=f\left(x\right)$, phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ trở thành $f\left(t\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_1\in\left(-2;-1\right) \\ t=t_2\in\left(0;1\right) \\ t=t_3\in\left(1;2\right) \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta có:

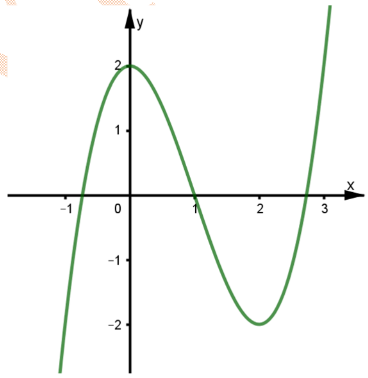
+ Phương trình $f\left(x\right)=t_1\in\left(-2;-1\right)$ có 1 nghiệm.

+ Phương trình $f\left(x\right)=t_2\in\left(0;1\right)$ có 3 nghiệm.

+ Phương trình $f\left(x\right)=t_3\in\left(1;2\right)$ có 3 nghiệm.

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có 7 nghiệm.

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$.



A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

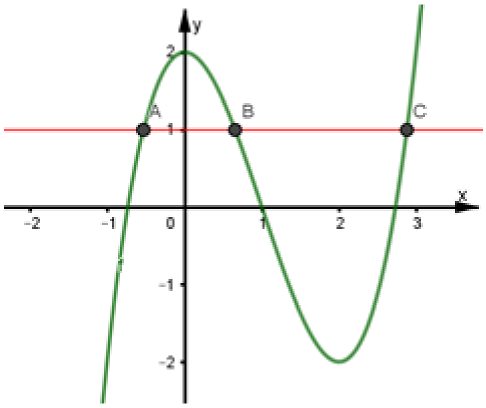
Lời giải

Chọn C

Đặt: $t=f\left(x\right)$, phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$ trở thành $f\left(t\right)=1$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt đường thẳng $y=1$ tại ba điểm có hoành độ:

$x=x_1\in\left(-1;0\right)$, $x=x_2\in\left(0;1\right)$, $x=x_3\in\left(\frac{5}{2};3\right)$.



Do đó: $f\left(t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=t_1\in\left(-1;0\right)\\t=t_2\in\left(0;1\right)\\t=t_3\in\left(\dfrac{5}{2};3\right)\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta có:

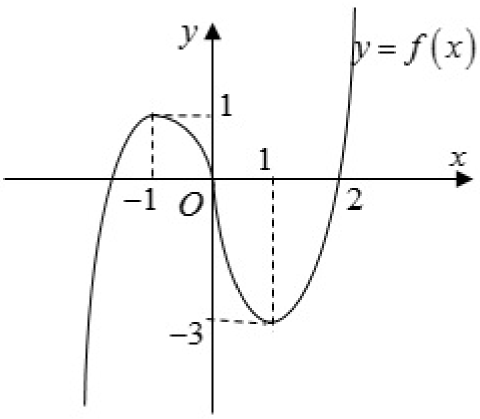
+ Phương trình $f\left(x\right)=t_1\in\left(-1;0\right)$ có 3 nghiệm.

+ Phương trình $f\left(x\right)=t_2\in\left(0;1\right)$ có 3 nghiệm.

+ Phương trình $f\left(x\right)=t_3\in\left(\dfrac{5}{2};3\right)$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$ có 7 nghiệm.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Số nghiệm của phương trình $f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

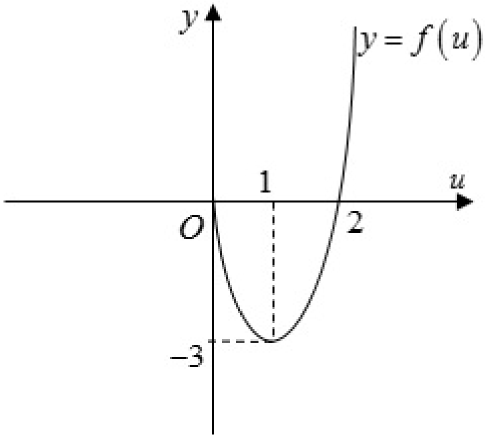
Đặt $u=e^x>0$, từ đồ thị suy ra: $f\left(u\right)\ge-3,\forall u>0$.

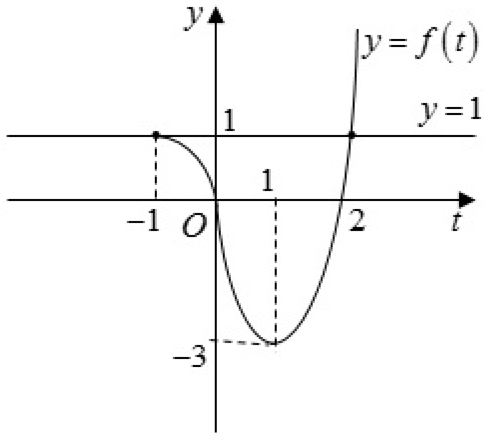
Đặt $t=2+f\left(u\right)$, $t\ge-1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t=-1$, có một nghiệm $u=1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t\in\left(-1;2\right)$, có hai nghiệm $u\in\left(0;2\right)$.

Ứng với mỗi nghiệm $t>2$, có một nghiệm $u>2$.

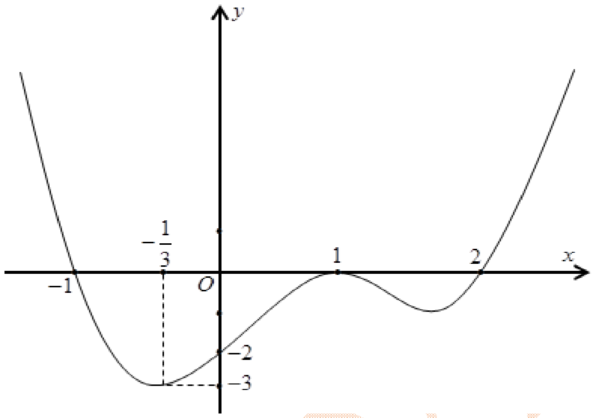




Phương trình $f(t)=1$ có một nghiệm $t=-1$ và một nghiệm $t>2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=f(f'(x)-1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x)=0$. Số phần tử của tập S là

A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ và $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Do đó, tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=f''(x).f'(f'(x)-1)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x)=0 \\ f'(f'(x)-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1}{3} \\ x=1 \\ x=x_0\in(1\,;2) \\ f'(x)-1=-1 \\ f'(x)-1=1 \\ f'(x)-1=2 \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta cũng có:

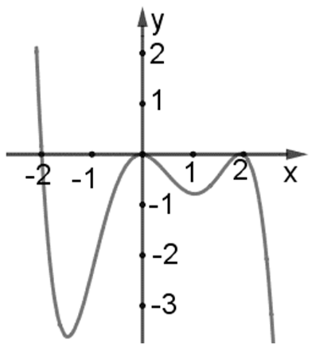
□ $f'(x)-1=-1 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

□ $f'(x)-1=1 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \in (-\infty\,;-1) \\ x=x_2 \in (2\,;+\infty) \end{array}\right.$.

□ $f'(x)-1=2 \Leftrightarrow f'(x)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_3 \in (-\infty\,;x_1) \\ x=x_4 \in (x_2\,;+\infty) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm.

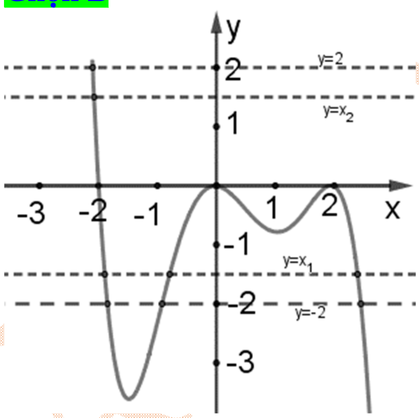
Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(f(x))$. Hỏi phương trình $g'(x)=0$ có mấy nghiệm thực phân biệt?



A. 14. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B



Ta có $g'(x)=f'(f(x)).f'(x)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x))=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$

Có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1,(-2<x_1<-1) \\ x=0 \\ x=x_2,(1<x_2<2) \\ x=2 \end{array}\right.$; $f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x_1 \\ f(x)=0 \\ f(x)=x_2 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta thấy:

$f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x=-2, x=0, x=2$, trong đó có 2 nghiệm trùng với nghiệm của $f'(x)=0$.

$f(x)=x_1$ có 3 nghiệm phân biệt $x_3\in(-2;-1), x_4\in(-1;1), x_5\in(2;+\infty)$.

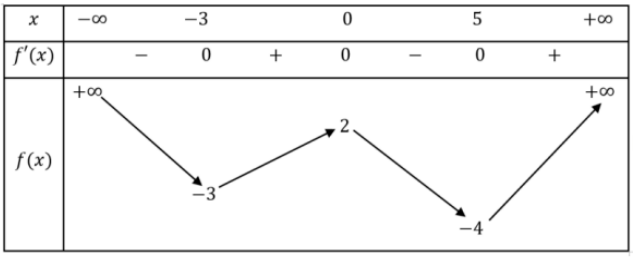
$f(x)=x_2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_6\in(-\infty;-2)$.

$f(x)=2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_7\in(-\infty;-2)$.

Cũng từ đồ thị có thể thấy các nghiệm $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,-2,0,2$ đôi một khác nhau.

Vậy $g'(x)=0$ có tổng cộng 10 nghiệm phân biệt.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thực của phương trình $f'(5-3f(x))=0$ là

A. 11. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=-3 \\ f'(x)=0 \\ f'(x)=5 \end{array}\right.$

Khi đó $f'(5-3f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5-3f(x)=-3 \\ 5-3f(x)=0 \\ 5-3f(x)=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{8}{3} \\ f(x)=\dfrac{5}{3} \\ f(x)=0 \end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiết ta thấy:

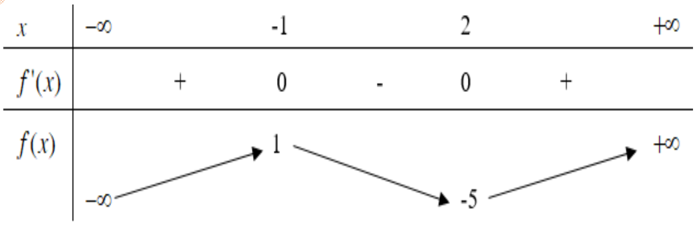
Phương trình $f(x)=\dfrac{8}{3}$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=\dfrac{5}{3}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f'(5-3f(x))=0$ có 10 nghiệm phân biệt.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thực của phương trình $f'(|f(x)|)=0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=-1 \\ f'(x)=2 \end{array}\right.$

Khi đó $f'(|f(x)|)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |f(x)|=-1 \\ |f(x)|=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2 \\ f(x)=-2 \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiết ta thấy:
Phương trình $f(x)=2$ có 1 nghiệm phân biệt.
Phương trình $f(x)=-2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f'(|f(x)|)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-5	↗	$+\infty$

Biết $f(0)=-2$. Số nghiệm thực của phương trình $f'(f(|x|))=0$ là

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=-1 \\ f'(x)=2 \end{array}\right.$

Khi đó $f'(f(|x|))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(|x|)=-1 \\ f(|x|)=2 \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiết ta thấy:
Phương trình $f(|x|)=-1$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(|x|)=2$ có 2 nghiệm phân biệt

Vậy phương trình $f'(f(|x|))=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-5	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $f'(f(x)-m)=0$ có 5 nghiệm thực?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x)=0$ có hai nghiệm $x=-1$ hoặc $x=2$

Từ đó $f'\left(f(x)-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-m=-1 \\ f(x)-m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=m-1 & (1) \\ f(x)=m+2 & (2) \end{array}\right.$

Dễ thấy phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung với mọi giá trị của tham số m.

Để phương trình có 5 nghiệm phân biệt thì có hai trường hợp

Trường hợp 1: Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khi

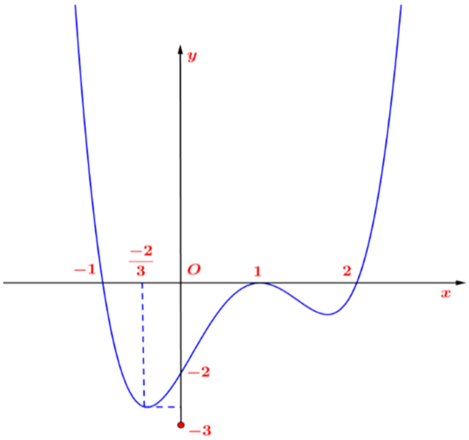
$$\left\{\begin{array}{l} -5<m-1<1 \\ \left[\begin{array}{l} m+2=1 \\ m+2=-5 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m=-1.$$

Trường hợp 2: Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt và phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt khi

$$\left\{\begin{array}{l} -5<m+2<1 \\ \left[\begin{array}{l} m-1=1 \\ m-1=-5 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m=-4.$$

Vậy có hai giá trị của tham số m thỏa mãn đó là $m=-1; m=-4$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên R và có đồ thị $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=f(f'(x)-1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x)=0$. Số phần tử của tập S là

A. 8 **B.** 6 **C.** 10 **D.** 9

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g(x)=f(f'(x)-1) \Rightarrow g'(x)=f''(x).f'(f'(x)-1)$

Phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f'(x)-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x)=0 \\ f'(x)-1=-1 \\ f'(x)-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x)=0 \\ f'(x)=0 \\ f'(x)=3 \end{array}\right.$

Ta có đồ thị $y=f'(x)$ có cực trị tại $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-2}{3} \\ x=x_0\in(1;2) \end{array}\right.$

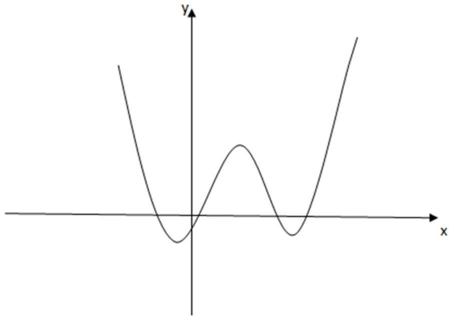
$\Rightarrow \begin{cases} f''(1)=0 \\ f''\left(\dfrac{-2}{3}\right)=0 \\ f''(x_0)=0 \end{cases} \Rightarrow f''(x)=0$ có 3 nghiệm $x=1; x=-\dfrac{2}{3}; x=x_0$ cùng với $x=1$ là nghiệm bội chẵn

Tại phương trình $f'(x)=0$ ta thấy có 2 nghiệm bội lẻ $x=-1, x=2$ và nghiệm bội chẵn $x=1$

Tại phương trình $f'(x)=3$ ta thấy có 2 nghiệm mà đường thẳng $y=3$ cắt đồ thị $y=f'(x)$ đó là hai điểm $x=x_1\in(-\infty;-1)$ và $x=x_2\in(2;+\infty)$

Vậy từ đó ta thấy phương trình $g'(x)=0$ tổng cộng có tất cả 10 nghiệm.

Câu 11. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho như hình vẽ sau



Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là:

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4), a\neq 0, x_1<x_2<x_3<x_4$.

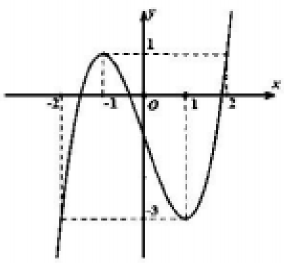
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là

$\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)=0\Rightarrow\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]'=0\Rightarrow\left[\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{1}{x-x_3}+\dfrac{1}{x-x_4}\right]'=0$

$-\dfrac{1}{(x-x_1)^2}-\dfrac{1}{(x-x_2)^2}-\dfrac{1}{(x-x_3)^2}-\dfrac{1}{(x-x_4)^2}=0$ vô nghiệm.

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là 0.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(f(x)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4 .

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-2;-1) \\ x=x_2\in(-1;0) \\ x=x_3\in(1;2) \end{array}\right.$

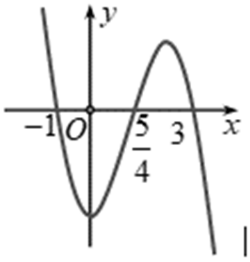
Khi đó: $f\left(f(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=x_1\in(-2;-1) \\ f(x)-1=x_2\in(-1;0) \\ f(x)-1=x_3\in(1;2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1+x_1\in(-1;0) \\ f(x)=1+x_2\in(0;1) \\ f(x)=1+x_3\in(2;3) \end{array}\right.$

+ Ta thấy hai phương trình $f(x)=1+x_1\in(-1;0)$; $f(x)=1+x_2\in(0;1)$ đều có ba nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=1+x_3\in(2;3)$ có một nghiệm.

Vậy phương trình $f\left(f(x)-1\right)=0$ có 7 nghiệm.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$,. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$ (1)

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\frac{5}{4}$, 3.

Do đó $f'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m\neq 0$. Hay $f'(x)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$ (2)

.

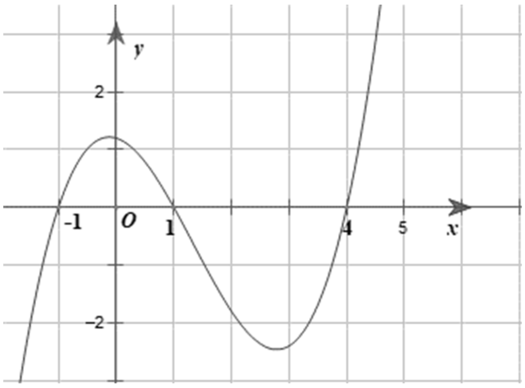
Từ (1) và (2) suy ra $n=-\frac{13}{3}m$, $p=-m$ và $q=15m$.

Khi đó phương trình $f(x)=r \Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=0 \Leftrightarrow m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^4-13x^3-3x^2+45x=0 \Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-\frac{5}{3} \vee x=3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ là $S=\left\{-\frac{5}{3};0;3\right\}$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m,n,p,q,r\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ như hình vẽ dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=16m+8n+4p+2q+r$ có tất cả bao nhiêu phần tử.

A. 4 . **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta thấy $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=1\vee x=4$

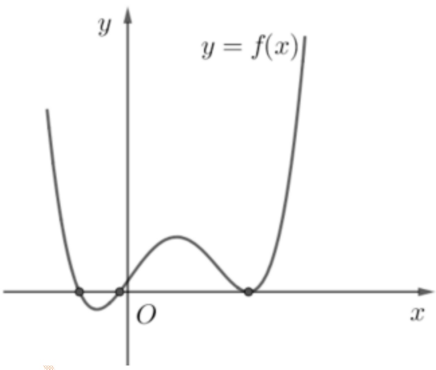
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1	2	4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘	↗	$f(2)$		↘	

Phương trình $f\left(x\right)=16m+8n+4p+2q+r\Leftrightarrow f\left(x\right)=f\left(2\right)$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có 4 nghiệm.

Câu 15. Cho $f\left(x\right)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $\left[f'\left(x\right)\right]^2=f\left(x\right).f''\left(x\right)$ có số phần tử là

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\left[f'\left(x\right)\right]^2=f\left(x\right).f''\left(x\right)$ (1)

Do $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm $x_1,x_2,x_2\left(x_1<x_2<x_3\right)$ và $f'\left(x_3\right)=0$ suy ra x_3 là một nghiệm của (1)

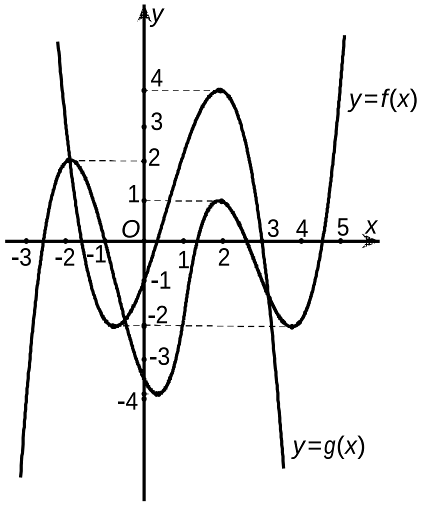
Ta có $f\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)^2,\left(a\neq 0\right)$

Với $x \neq x_3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x-x_1} + \dfrac{1}{x-x_2} + \dfrac{2}{x-x_3}\right)' = 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{(x-x_1)^2} - \dfrac{1}{(x-x_2)^2} - \dfrac{2}{(x-x_3)^2} = 0$ vô nghiệm.

Vậy, phương trình (1) có đúng một nghiệm $x = x_3$.

Câu 16. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị như hình sau:



Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là

A. 25. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 26.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị ta thấy: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1\,(-3 < x_1 < -2) \\ x = -1 \\ x = x_2\,(1 < x_2 < 2) \\ x = x_3\,(2 < x_3 < 3) \\ x = x_4\,(4 < x_4 < 5) \end{array}\right.$.

Do đó: $f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = x_1\,(1) \\ g(x) = -1\,(2) \\ g(x) = x_2\,(3) \\ g(x) = x_3\,(4) \\ g(x) = x_4\,(5) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm; Phương trình (2) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (3) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (4) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (5) có đúng 1 nghiệm. Tất cả các nghiệm trên đều phân biệt nên phương trình $f(g(x)) = 0$ có đúng 11 nghiệm.

Quan sát đồ thị ta thấy: $g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_5\,(-2 < x_5 < -1) \\ x = x_6\,(0 < x_6 < 1) \\ x = 3 \end{array}\right.$

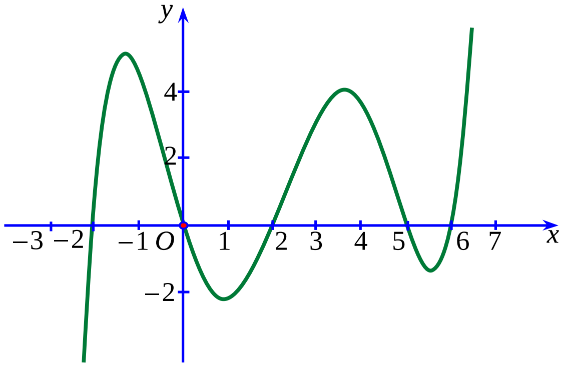
Do đó $g\left(f\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=x_5\left(6\right) \\ f\left(x\right)=x_6\left(7\right) \\ f\left(x\right)=3\left(8\right) \end{array}\right.$

Phương trình $\left(6\right)$ có 5 nghiệm; Phương trình $\left(7\right)$ có 5 nghiệm; Phương trình $\left(8\right)$ có 1 nghiệm.

Tất cả các nghiệm này đều phân biệt nên phương trình $g\left(f\left(x\right)\right)=0$ có đúng 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của hai phương trình $f\left(g\left(x\right)\right)=0$ và $g\left(f\left(x\right)\right)=0$ là 22 nghiệm.

Câu 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;6\right]$ của phương trình $f\left(x\right)=f\left(0\right)$ là

A. 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ ta có BBT

x	$-\infty$		-2		0		2		5		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-2\right)$	$\nearrow$	$f\left(0\right)$	$\searrow$	$f\left(2\right)$	$\nearrow$	$f\left(5\right)$	$\searrow$	$f\left(6\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'\left(x\right); y=0; x=0; x=2$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'\left(x\right); y=0; x=2; x=5$

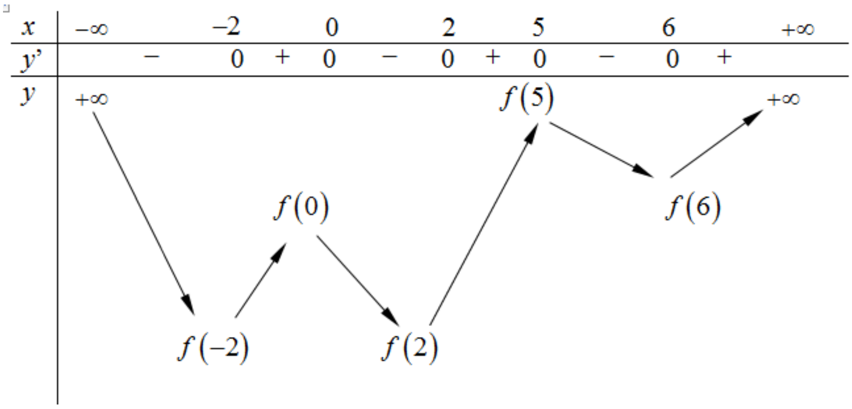
Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'\left(x\right); y=0; x=5; x=6$

$S_1=-\int\limits_0^2 f'\left(x\right)dx=f\left(0\right)-f\left(2\right)$; $S_2=\int\limits_2^5 f'\left(x\right)dx=f\left(5\right)-f\left(2\right)$; $S_3=-\int\limits_5^6 f'\left(x\right)dx=f\left(5\right)-f\left(6\right)$

Từ đồ thị ta thấy $S_2>S_1 \Rightarrow f\left(5\right)-f\left(2\right)>f\left(0\right)-f\left(2\right) \Rightarrow \boxed{f\left(5\right)>f\left(0\right)}$

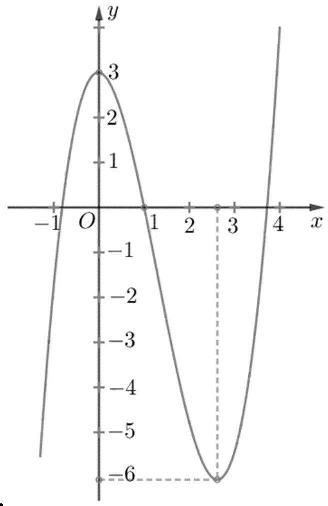
và $S_1+S_3<S_2 \Rightarrow f\left(0\right)-f\left(2\right)+f\left(5\right)-f\left(6\right)<f\left(5\right)-f\left(2\right) \Rightarrow \boxed{f\left(6\right)>f\left(0\right)}$

Khi đó ta có BBT chính xác (dạng đồ thị chính xác) như sau:



Vậy phương trình $f(x) = f(0)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-2;6]$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



.

A. 2 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải.

Ta có: $g'(x) = f'(x)\,f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{array}\right.$ $(*)$.

Theo đồ thị hàm số suy ra.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a_1 \end{array}\right.$, với $2 < a_1 < 3$.

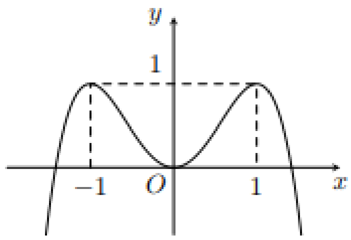
$f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \ ,(1) \\ f(x) = a_1 \ ,(2) \end{array}\right.$.

Phương trình (1): $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình $(*)$.

Phương trình (2): $f(x) = a_1$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình (1) và phương trình $(*)$.

Vậy phương trình ban đầu có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a, b, c, d, e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta có dạng đồ thị của hàm trùng phương nên $b=d=0 \Rightarrow f(x)=ax^4+cx^2+e$

Ta có $f'(x)=4ax^3+2cx.$

Từ đồ thị $\Rightarrow \begin{cases} f'(1)=0 \\ f(0)=0 \\ f(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2c=0 \\ e=0 \\ a+c+e=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ e=0 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^4+2x^2.$

$\Rightarrow f\left(\sqrt{x}\right)=x^2+2x$ và $f\left(\sqrt{f(x)}\right)=f^2(x)+2f(x).$

Như vậy phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0.$

$\Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ với $f(x)\geq 0.$

Đặt $t=f(x)(t\geq 0)$ ta được phương trình $g(t)=0$ với $g(t)=t^2-3t-2\sqrt{t}+1.$

Nhận thấy: Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $g(0).g(1)<0$

$\Rightarrow g(t)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

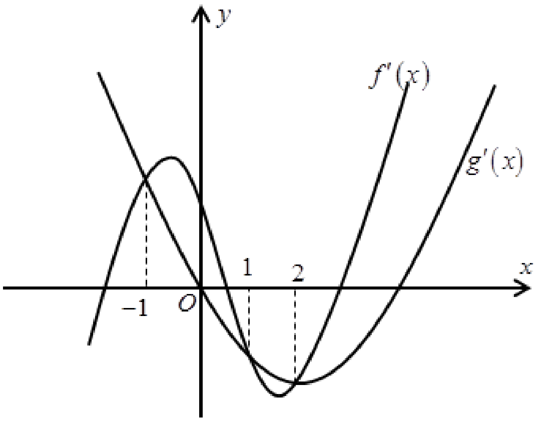
Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $g(1).g(4)<0$

$\Rightarrow g(t)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;4)$.

Mà $g(t)=0$ là phương trình bậc hai chỉ có tối hai nghiệm nên $g(t)=0$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$. Suy ra $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ có duy nhất một nghiệm $f(x)\in(0;1).$

Suy ra phương trình $f(x)=a$ với $a\in(0;1)$ luôn có 4 nghiệm x phân biệt.

Câu 20. Cho các hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ và $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(n,n,p,q,r,a,b,c,d\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0)=g(0)$. Các hàm số $f'(x), g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

+) Từ giả thiết $f(0)=g(0)$ suy ra $r=d$ do đó phương trình $f(x)=g(x)$ tương đương với:

$$x\left[mx^3+(n-a)x^2+(p-b)x+(q-c)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ mx^3+(n-a)x^2+(p-b)x+(q-c)=0 \end{array}\right.$$

+) Từ đồ thị của các hàm số $f'(x), g'(x)$ suy ra $m\neq 0$ và

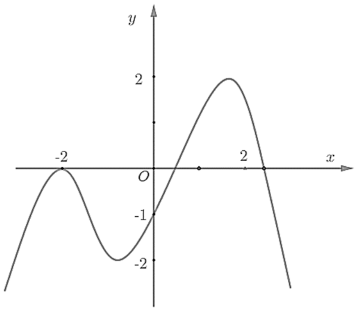
$$\begin{cases} f'(-1)=g'(-1) \\ f'(1)=g'(1) \\ f'(2)=g'(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m+3(n-a)-2(p-b)+q-c=0 \\ 4m+3(n-a)+2(p-b)+q-c=0 \\ 32m+12(n-a)+4(p-b)+q-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-a=-\dfrac{8}{3}m \\ p-b=-2m \\ q-c=8m \end{cases}.$$

Từ đó ta có phương trình: $mx^3-\dfrac{8}{3}mx^2-2mx+8m=0 \Leftrightarrow x^3-\dfrac{8}{3}x^2-2x+8=0$.

Sử dụng máy tính Casio ta được phương trình có 1 nghiệm và nghiệm đó khác 0.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ có 2 phần tử.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f(f(x))+1=0$ có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có $f\left(f\left(x\right)\right)+1=0$ $f\left(f\left(x\right)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=a<-2 \\ f\left(x\right)=b\in\left(-2;-1\right) \\ f\left(x\right)=0 \\ f\left(x\right)=c>2 \end{array}\right.$.

+ Với $f\left(x\right)=a<-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1<-2 \\ x=x_2>2 \end{array}\right.$.

+ Với $f\left(x\right)=b\in\left(-2;-1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_3<-2 \\ x=x_4\in\left(-2;-1\right) \\ x=x_5\in\left(-1;0\right) \\ x=x_6>2 \end{array}\right.$.

+ Với $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_7=-2 \\ x=x_8\in\left(0;1\right) \\ x=x_9\in\left(2;3\right) \end{array}\right.$.

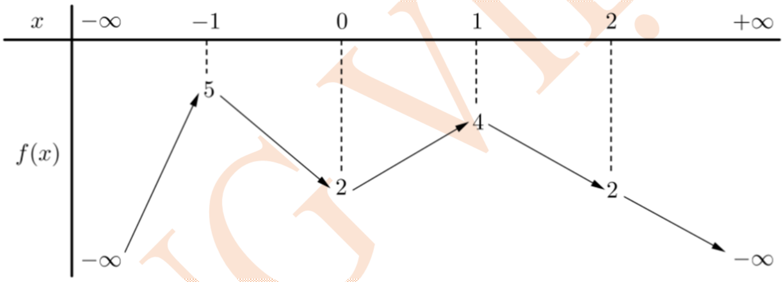
+ Với $f\left(x\right)=c>2$ vô nghiệm.

Ta thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ đơn điệu trên $\left(-\infty;-2\right)$, $f\left(x_1\right)=a\neq b=f\left(x_3\right)$ nên $x_1\neq x_3$.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ đơn điệu trên $\left(2;+\infty\right)$, $f\left(x_6\right)=b\neq 0=f\left(x_9\right)$ nên $x_6\neq x_9$.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 22. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên



Phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Trước hết, xét hàm số $t=t\left(x\right)=\sqrt{2x-x^2}$, $x\in\left[0;2\right]$.

Ta có $t'\left(x\right)=\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$, $x\in\left(0;2\right)$. $t'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1\in\left(0;2\right)$.

Bảng biến thiên của $t\left(x\right)$:

x	0		1		2
$t'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$t(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$\Rightarrow 0 \le t \le 1,\ \forall x \in [0;2]$.

Lúc này, phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ trở thành $f(t)=3$ (1) với $t\in[0;1]$.

Theo bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;1]$ thì đường thẳng $y=3$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại đúng 1 điểm có hoành độ thuộc khoảng $(0;1)$ nên phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $t=t_0$ với $t_0\in(0;1)$.

t	0		t_0		1
$y=f(t)$	2	$\nearrow$	3	$\nearrow$	4
			$y=3$		

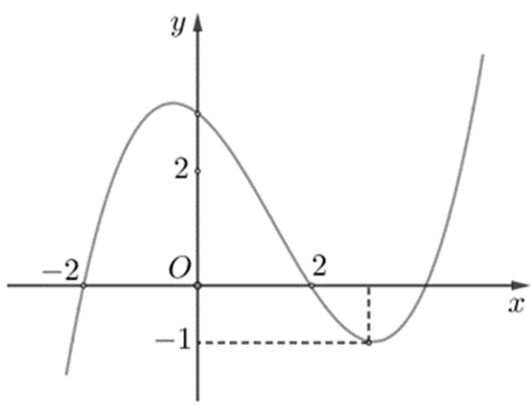
Khi đó, phương trình $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2}=t_0$ (2), $t_0\in(0;1)$.

Mặt khác, theo bảng biến thiên của hàm số $t(x)$, với mỗi $t_0\in(0;1)$ thì đường thẳng $y=t_0$ cắt đồ thị hàm số $y=t(x)$ tại đúng 2 điểm phân biệt nên phương trình (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt.

x	0		1		2
$t'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$y=t(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
			$y=t_0\in(0;1)$		

Vậy phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có đúng 2 nghiệm.

Câu 23. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ (1)

Đặt $t=x^3-3x$, ta có bảng biến thiên của hàm số $t=g(x)=x^3-3x$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ Với mỗi $t_0>2$ hoặc $t_0<-2$, phương trình $t_0=x^3-3x$ có một nghiệm;

+ Với mỗi $-2<t_0<2$, phương trình $t_0=x^3-3x$ có 3 nghiệm.

Khi đó, (1) trở thành $|f(t)|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t)=1 \\ f(t)=-1 \end{array}\right.$

* TH 1: $f(t)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_1\in(-2;0) \\ t=t_2\in(0;2) \\ t=t_3\in(2;+\infty) \end{array}\right.$

+ Với $t=t_1\in(-2;0) \Rightarrow$ Phương trình $t_1=x^3-3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t=t_2\in(0;2) \Rightarrow$ Phương trình $t_2=x^3-3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t=t_3\in(2;+\infty) \Rightarrow$ Phương trình $t_3=x^3-3x$ có 1 nghiệm;

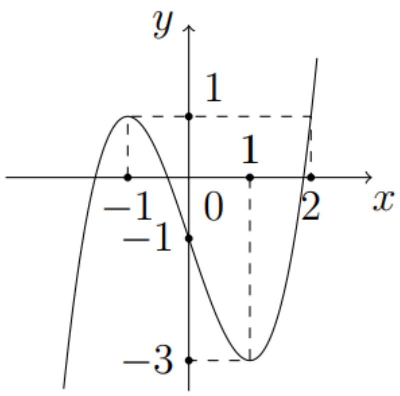
* TH 2: $f(t)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_4\in(-\infty;-2) \\ t=t_5\in(2;+\infty) \end{array}\right.$

+ Với $t=t_4\in(-\infty;-2) \Rightarrow$ Phương trình $t_4=x^3-3x$ có 1 nghiệm;

+ Với $t=t_5\in(2;+\infty) \Rightarrow$ Phương trình $t_5=x^3-3x$ có 1 nghiệm.

Mặt khác, các nghiệm này đều phân biệt. Vậy phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ có 9 nghiệm phân biệt.

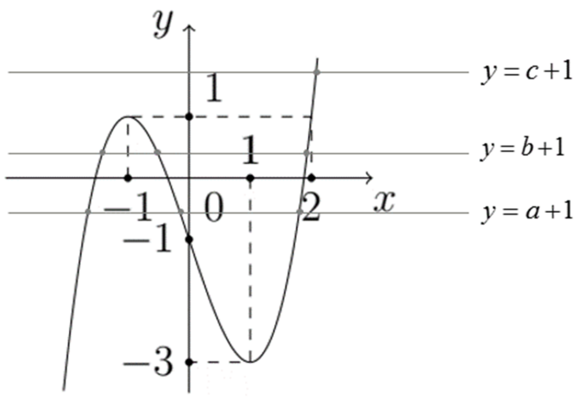
Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left[f(\cos x)-1\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$?



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

$$f\left[f(\cos x)-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x)-1=a\in(-2;-1) \\ f(\cos x)-1=b\in(-1;0) \\ f(\cos x)-1=c\in(1;2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x)=a+1\in(-1;0) \\ f(\cos x)=b+1\in(0;1) \\ f(\cos x)=c+1\in(2;3) \end{array}\right.$$

• Xét phương trình $f(\cos x)=a+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=\alpha_1<-1 & (1) \\ \cos x=\alpha_2\in(-1;0) & (2) \\ \cos x=\alpha_3>1 & (3) \end{array}\right.$

Vì $\cos x\in[-1;1]$ nên phương trình $(1),(3)$ vô nghiệm và phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

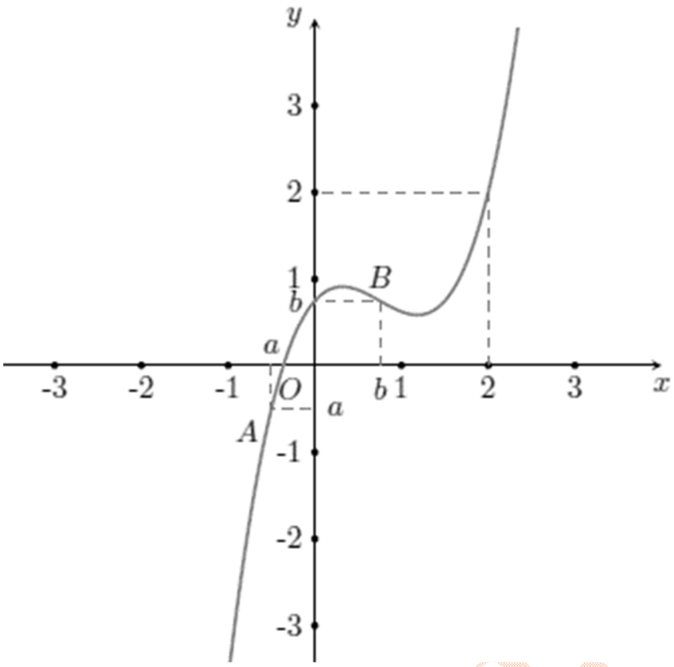
• Xét phương trình $f(\cos x)=b+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=\beta_1<-1 & (4) \\ \cos x=\beta_2\in(-1;0) & (5) \\ \cos x=\beta_3>1 & (6) \end{array}\right.$

Vì $\cos x\in[-1;1]$ nên phương trình $(4),(6)$ vô nghiệm và phương trình (5) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

• Xét phương trình $f\left(\cos x\right)=c+1 \Leftrightarrow \cos x=t>2$ (vô nghiệm)

Nhận xét hai nghiệm của phương trình $\left(5\right)$ không trùng với nghiệm nào của phương trình $\left(2\right)$ nên phương trình $f\left[f\left(\cos x\right)-1\right]=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 25. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ:

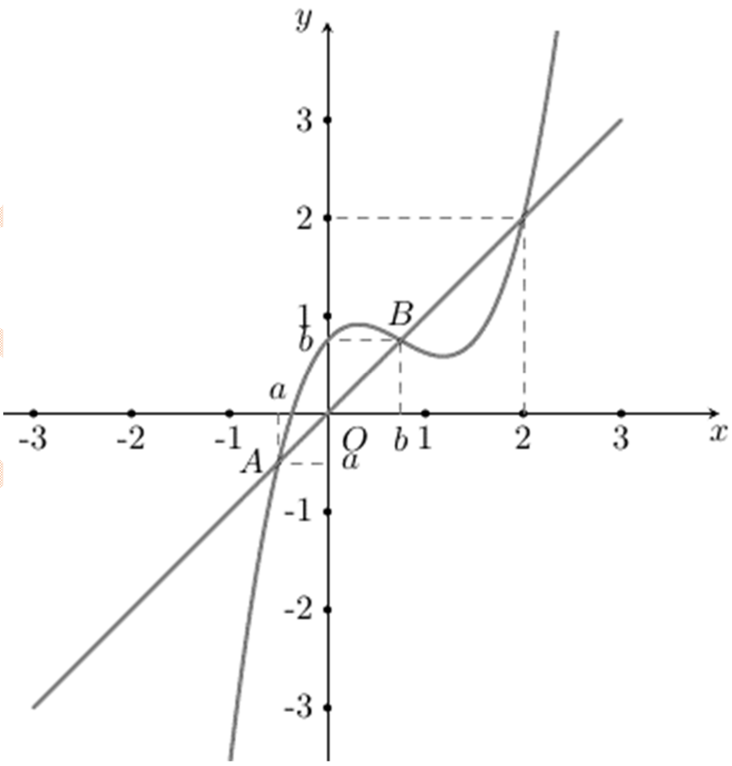


Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình $f\left(\cos x+1\right)=\cos x+1$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C



Từ đồ thị ta có $f\left(x\right)=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in\left(-\infty;0\right) \\ x=b\in\left(0;1\right) \\ x=2 \end{array}\right.$

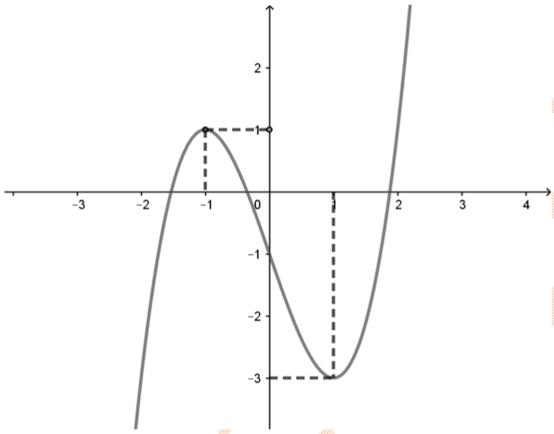
Do đó $f\left(\cos x+1\right)=\cos x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x+1=a\in\left(-\infty;0\right) \\ \cos x+1=b\in\left(0;1\right) \\ \cos x+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=a-1=t_1\in\left(-\infty;-1\right) & (VN) \\ \cos x=b-1=t_2\in\left(-1;0\right) & (1) \\ \cos x=1 & (2) \end{array}\right.$

Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Phương trình (2) có 2nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 5 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

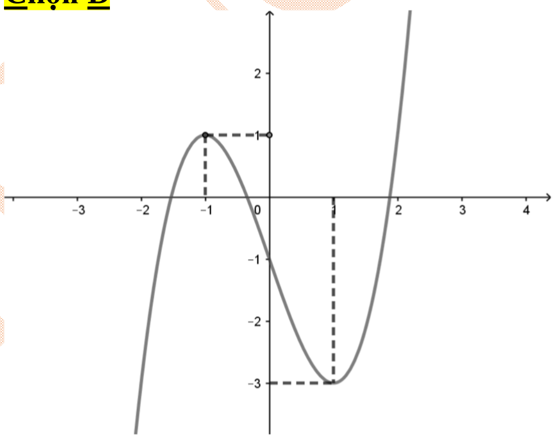
Câu 26. Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)-1\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\pi\right]$?



A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D



Đặt $t=\cos x$, với $x\in\left[0;3\pi\right]\Rightarrow t\in\left[-1;1\right]$.

Với $t=1$, phương trình $t=\cos x$ có hai nghiệm $x\in\left[0;3\pi\right]$.

Với $t=-1$, phương trình $t=\cos x$ có hai nghiệm $x\in\left[0;3\pi\right]$.

Với $-1<t<1$, phương trình $t=\cos x$ có ba nghiệm $x\in[0;3\pi]$.

Thay $t=\cos x$ vào phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)-1\right)=0$, ta được phương trình:

$$f\left(f\left(t\right)-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(t\right)-1=a\in\left(-2;-1\right)\\ f\left(t\right)-1=b\in\left(-1;0\right)\\ f\left(t\right)-1=c\in\left(1;2\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f\left(t\right)=a+1\in\left(-1;0\right) & (1)\\ f\left(t\right)=b+1\in\left(0;1\right) & (2)\\ f\left(t\right)=c+1\in\left(2;3\right) & (3)\end{array}\right..$$

Từ đồ thị ta có:

+) Phương trình (1) có 1 nghiệm $t\in\left(-1;0\right)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (2) có 1 nghiệm $t\in\left(-1;0\right)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (3) có 1 nghiệm $t>1$, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 27. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Phương trình $\left|f\left(3x+1\right)-2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left|f\left(3x+1\right)-2\right|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(3x+1\right)-2=5\\ f\left(3x+1\right)-2=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(3x+1\right)=7\ \ (1)\\ f\left(3x+1\right)=-3\left(2\right)\end{array}\right..$

Dựa vào bảng biến thiên,

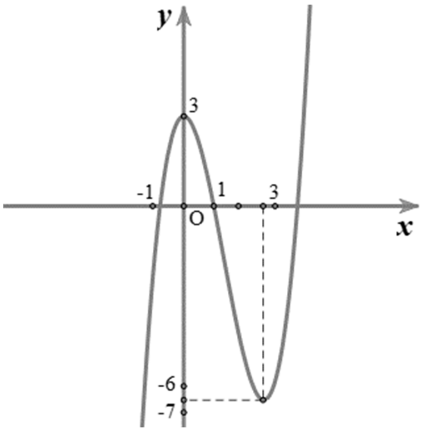
+ Phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $3x+1=a>3\Leftrightarrow x=\frac{a-1}{3}>\frac{2}{3}$.

+ Phương trình $\left(2\right)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases}3x_1+1=3\\ 3x_2+1=b<-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{2}{3}\\ x_2=\frac{b-1}{3}<-\frac{2}{3}\end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 28. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đặt $g\left(x\right)=f\left[f\left(x\right)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'\left(x\right)=0$.



A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x).f'\left[f(x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left[f(x)\right] = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = m \in (1;3) \end{array}\right.$.

Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm

Phương trình $f(x) = m \in (1;3)$ có 3 nghiệm

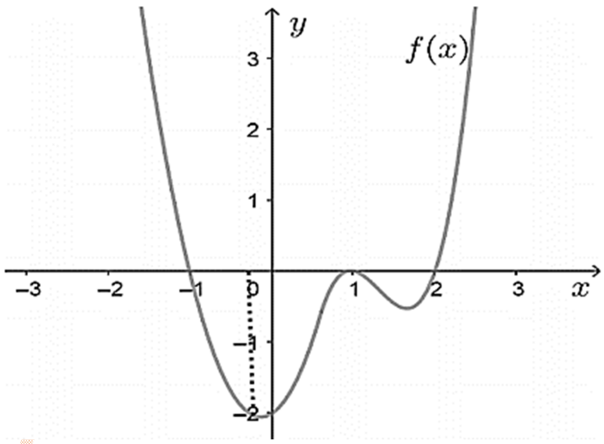
Vậy phương trình có 8 nghiệm.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(f(x) - 1)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

A. 6. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C



Ta có $g'(x) = f'(x).f'(f(x) - 1)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x).f'(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'(f(x) - 1) = 0 \end{array}\right.$.

+) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a_1\ (a_1 \in (-1;0)) \\ x = 1 \\ x = a_2\ (a_2 \in (1;2)) \end{array}\right.$

+) $f'\left(f\left(x\right)-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)-1=a_1 \\ f\left(x\right)-1=1 \\ f\left(x\right)-1=a_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f\left(x\right)=a_1+1\in\left(0;1\right) & (1) \\ f\left(x\right)=2 & (2) \\ f\left(x\right)=a_2+1\in\left(2;3\right) & (3) \end{array}\right.$

Từ đồ thị suy ra

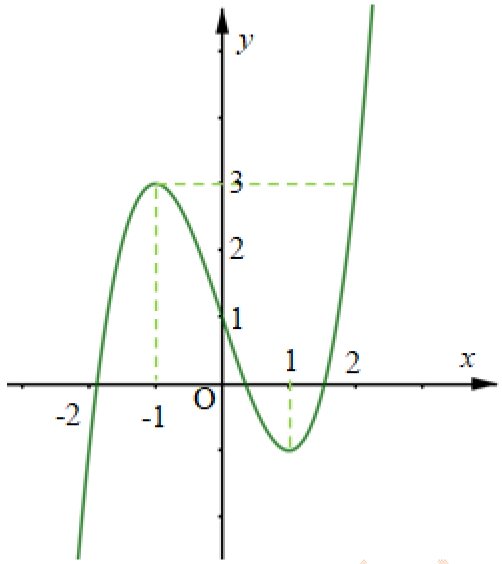
□ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $b_1\in\left(-2;-1\right);b_2\in\left(2;3\right)$

□ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $c_1\in\left(-2;b_1\right);c_2\in\left(b_2;3\right)$

□ phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $d_1\in\left(-2;c_1\right);d_2\in\left(c_2;3\right)$

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x))=0$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(\cos x)=t$ ta được phương trình $f(t)=0$.

Quan sát đồ thị $y=f(x)$ ta suy ra $f(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_1\in\in(-2;-1) \\ t=t_2\in(0;1) \\ t=t_3\in(1;2) \end{array}\right.$.

* Với $t=t_1$ ta có $f(\cos x)=t_1$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=t_1\in\left(-2;-1\right)\Rightarrow f(\cos x)=t_1\Leftrightarrow \cos x=x_1<-1$ nên phương trình vô nghiệm.

* Với $t=t_2$ ta có $f(\cos x)=t_2$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=t_2\in\left(0;1\right)\Rightarrow f(\cos x)=t_2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=x_2<-1 \\ \cos x=x_3\in(0;1) \\ \cos x=x_4\in(1;2) \end{array}\right.$.

Chỉ có $\cos x=x_3$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 3 giá trị $x\in\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x=x_3$.

* Với $t = t_3$ tương tự ta có $\left[\begin{array}{l} \cos x = x_5 < -1 \\ \cos x = x_6 \in (-1;0) \\ \cos x = x_7 > 1 \end{array}\right.$.

Chỉ có $\cos x = x_6$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 2 giá trị $x \in \left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x = x_6$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2022

Câu 41. **(ĐTK BGD 2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 7.

Phân tích

Đây là bài toán tìm nguyên hàm thỏa mãn điều kiện.

Kiến thức sử dụng là tìm nguyên hàm của các hàm số cơ bản và $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Sai lầm thường gặp: Học sinh nhớ nhầm công thức nguyên hàm, thường cho hệ số $C = 0$ khi tìm một nguyên hàm mà bỏ qua điều kiện.

Hướng phát triển: Thay hàm số ban đầu bởi các hàm số khác, có thể phức tạp hơn và tìm nguyên hàm bằng các phương pháp khác, thay đổi điều kiện ban đầu …

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int (12x^2 + 2)dx = 4x^3 + 2x + C$.

Với $f(1) = 3 \Rightarrow 4.1^3 + 2.1 + C = 3 \Rightarrow C = -3$. Vậy $f(x) = 4x^3 + 2x - 3$.

Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int (4x^3 + 2x - 3)dx = x^4 + x^2 - 3x + C'$

Với $F(0) = 2 \Rightarrow 0^4 + 0^2 - 3.0 + C' = 2 \Rightarrow C' = 2$.

Vậy $F(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$. Khi đó $F(1) = 1^4 + 1^2 - 3.1 + 2 = 1$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1. Biết hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f''(x) = 4e^{2x}$, $f'(0) = 2$ và $f(0) = 0$. Giá trị của $f(\ln 3)$ bằng

A. 4. **B.** 12. **C.** 16. **D.** 8.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 8x^3 + 6x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng

A. $\frac{17}{5}$. **B.** 15. **C.** 19. **D.** $\frac{12}{5}$.

Câu 3. Một ôtô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 6t\,(m/s)$. Đi được $10\,s$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ôtô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -60\,(m/s^2)$. Tính quãng đường S đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $300(m)$. **B.** $330(m)$. **C.** $350(m)$. **D.** $400(m)$.

Câu 4. Một vật đang chuyển động với vận tốc $10\left(m/s\right)$ thì tăng tốc với gia tốc $a\left(t\right)=2t+\frac{1}{3}t^2\left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi quãng đường vật đi được trong thời gian 12 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu mét?

A. $1272\left(m\right)$. **B.** $456\left(m\right)$. **C.** $1172\left(m\right)$. **D.** $1372\left(m\right)$.

Câu 5. Một vật chuyển động với gia tốc $a\left(t\right)=6t\left(m/s^2\right)$. Vận tốc của vật tại thời điểm $t=2$ giây là $17m/s$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là:

A. $1014m$. **B.** $1200m$. **C.** $36m$. **D.** $966m$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ và $f\left(0\right)=1$. Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=k$ với mọi $k\in\mathbb{Z}$. Tính $F\left(0\right)+F\left(\pi\right)+F\left(2\pi\right)+...+F\left(10\pi\right)$.

A. 55. **B.** 44. **C.** 45. **D.** 0.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=e^{2x}\left(2\sin x+\cos x\right),\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=0$. Biết $F\left(x\right)=e^{2x}\left(a\sin x+b\cos x\right)+\frac{2}{5}$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+2b-1$.

A. $\frac{2}{5}$. **B.** -1. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** 1.

Câu 8. Cho hàm số $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $\left(0;\pi\right)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F\left(x\right)$ trên khoảng $\left(0;\pi\right)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$ **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$

Câu 9. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-2\right\}$ thoả mãn $f'\left(x\right)=\frac{3x-1}{x+2}$, $f\left(0\right)=1$ và $f\left(-4\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f\left(2\right)+f\left(-3\right)$ bằng

A. 12. **B.** $\ln 2$. **C.** $10+\ln 2$. **D.** $3-20\ln 2$.

Câu 10. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\frac{1}{x-1}$, $f\left(0\right)=2017$, $f\left(2\right)=2018$. Tính $S=f\left(3\right)-f\left(-1\right)$.

A. $S=\ln 4035$. **B.** $S=4$. **C.** $S=\ln 2$. **D.** $S=1$.

Câu 11. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-2;2\right\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\frac{4}{x^2-4}$, $f\left(0\right)=2$ và $f\left(-3\right)+f\left(3\right)=0$. Tính giá trị biểu thức $P=2f\left(-1\right)+f\left(4\right)$.

A. $3+\ln 2$. **B.** $4+\ln 3$. **C.** $\ln 2-3$. **D.** $\ln 3+2$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\backslash\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3)+f(-3)=4$ và $f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{-1}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-5)+f(0)+f(2)$ bằng

A. $5-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **B.** $6-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **C.** $5+\dfrac{1}{2}\ln 2$. **D.** $6+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$. **B.** $\ln 80+1$. **C.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{4}{5}+\ln 2+1$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}+1$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ 4x+2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(-2)=5$. Biết rằng $F(1)+3F(-1)=ae^2+b$ (trong đó a,b là các số hữu tỉ). Khi đó $a+b$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{8}{3}$ và $f'(x)=16\cos 4x.\sin^2 x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{31}{18}$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. $\dfrac{16}{3}$. **B.** $\dfrac{64}{27}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{31}{8}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{27}{8}$ và $f'(x)=12\sin 2x.\cos^2 3x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. 0. **B.** $-\dfrac{87}{64}$. **C.** $-\dfrac{21}{8}$. **D.** $\dfrac{87}{64}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=-\dfrac{121}{225}$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. $\dfrac{242}{225}$. **B.** $\dfrac{208}{225}$. **C.** $\dfrac{121}{225}$. **D.** $\dfrac{149}{225}$.

Câu 18. Hãy xác định hàm số $F(x)=ax^3+bx^2+cx+1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(1)=2$, $f(2)=3$ và $f(3)=4$.

A. $F(x)=x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+1$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+2x+1$.

C. $F(x)=x+1$. **D.** $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+1$.

Câu 19. Hàm số $F(x)=(ax+b)\sqrt{4x+1}$ (a,b là các hằng số thực) là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{12x}{\sqrt{4x+1}}$. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 20. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2019)+F(2020)+F(2021)$

A. $T=1011.\dfrac{2^{2021}+1}{\ln 2}$. **B.** $T=2^{2021.2022}$. **C.** $T=\dfrac{2^{2020}-1}{\ln 2}$. **D.** $T=\dfrac{2^{2022}-1}{\ln 2}$.

Câu 21. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm $f(x)=x^2e^{\alpha x}$ $(\alpha\neq 0)$ sao cho $F\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=F(0)+1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1<\alpha<2$. **B.** $\alpha<-2$. **C.** $\alpha\geq 3$. **D.** $0<\alpha\leq 1$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ và $f'(x)=\sin x.\sin^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{104}{225}$. **B.** $-\dfrac{104}{225}$. **C.** $\dfrac{121}{225}$. **D.** $\dfrac{167}{225}$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=\dfrac{1}{21}$ và $f'(x)=\sin 3x.\cos^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{137}{441}$. **B.** $-\dfrac{137}{441}$. **C.** $\dfrac{247}{441}$. **D.** $\dfrac{167}{882}$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=-\dfrac{121}{225}$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. $\dfrac{242}{225}$. **B.** $\dfrac{208}{225}$. **C.** $\dfrac{121}{225}$. **D.** $\dfrac{149}{225}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=\dfrac{1}{21}$ và $f'(x)=\sin 3x.\cos^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{137}{441}$. **B.** $-\dfrac{137}{441}$. **C.** $\dfrac{247}{441}$. **D.** $\dfrac{167}{882}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ và $f'(x)=\sin x.\sin^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{104}{225}$. **B.** $-\dfrac{104}{225}$. **C.** $\dfrac{121}{225}$. **D.** $\dfrac{167}{225}$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{27}{8}$ và $f'(x)=12\sin 2x.\cos^2 3x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. 0. **B.** $-\dfrac{87}{64}$. **C.** $-\dfrac{21}{8}$. **D.** $\dfrac{87}{64}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{8}{3}$ và $f'(x)=16\cos 4x.\sin^2 x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{31}{18}$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. $\dfrac{16}{3}$. **B.** $\dfrac{64}{27}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{31}{8}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)<0, \forall x>0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)f^2(x), \forall x>0$ và $f(1)=-\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1)+f(2)+...+f(2020)$ bằng

A. $-\dfrac{2020}{2021}$. **B.** $-\dfrac{2015}{2019}$. **C.** $-\dfrac{2019}{2020}$. **D.** $-\dfrac{2016}{2021}$.

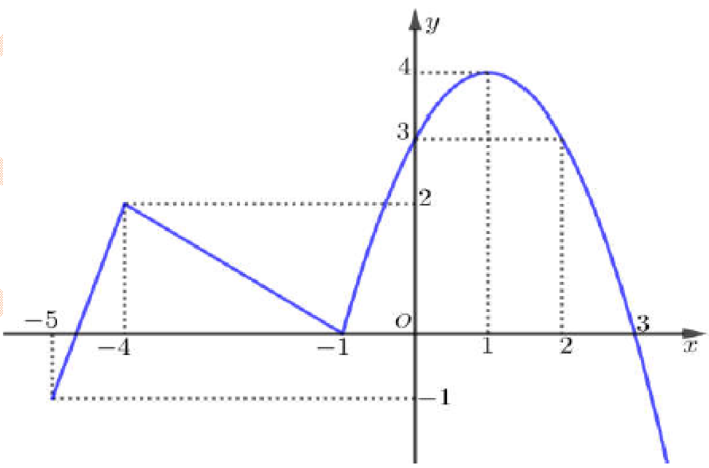
Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\dfrac{-3}{16}$. **B.** $T=\dfrac{21}{16}$. **C.** $T=\dfrac{3}{2}$. **D.** $T=0$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và $(x^2+1)^2 f'(x)=\left[f(x)\right]^2(x^2-1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $\dfrac{2}{5}$ **B.** $-\dfrac{2}{5}$ **C.** $-\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{5}{2}$

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-5;3]$ như hình vẽ.



Biết $f(0)=0$, giá trị của $2f(-5)+3f(2)$ bằng

A. 33. **B.** $\dfrac{109}{3}$. **C.** $\dfrac{35}{3}$. **D.** 11.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1042}{225}$. **B.** $\frac{208}{225}$. **C.** $\frac{242}{225}$. **D.** $\frac{149}{225}$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=\frac{1}{21}$ và $f'(x)=\sin 3x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{137}{441}$. **B.** $-\frac{137}{441}$. **C.** $\frac{247}{441}$. **D.** $\frac{167}{882}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ và $f'(x)=\sin x.\sin^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{104}{225}$. **B.** $-\frac{104}{225}$. **C.** $\frac{121}{225}$. **D.** $\frac{167}{225}$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{27}{8}$ và $f'(x)=12\sin 2x.\cos^2 3x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{27}{64}$. **B.** $-\frac{87}{64}$. **C.** 0. **D.** $\frac{87}{64}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{8}{3}$ và $f'(x)=16\cos 4x.\sin^2 x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{64}{27}$. **C.** $-\frac{128}{3}$. **D.** 0.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right), \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{18}$. **B.** $\frac{10}{9}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** 0.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ và $f'(x)=\frac{\sin x+\sin 3x}{2\sin^4 x.\cos x}, \forall x\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$. Khi đó $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** 0.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Biết hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f''(x)=4e^{2x}$, $f'(0)=2$ và $f(0)=0$. Giá trị của $f(\ln 3)$ bằng

A. 4. **B.** 12. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int 4e^{2x}\mathrm{d}x=2e^{2x}+C_1$. Do đó $f'(0)=2\Rightarrow C_1=0\Rightarrow f'(x)=2e^{2x}$.

Ta có $\int 2e^{2x}dx = e^{2x} + C_2$. Do đó $f(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -1 \Rightarrow f(x) = e^{2x} - 1$.

Khi đó $F(\ln 3) = e^{2\ln 3} - 1 = 8$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 8x^3 + 6x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng

A. $\frac{17}{5}$. **B.** 15. **C.** 19. **D.** $\frac{12}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f'(x)dx = \int (8x^3 + 6x)dx = 2x^4 + 3x^2 + C_1$.

Với $f(1) = 3 \Rightarrow 2.1^4 + 3.1^2 + C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = -2$. Vậy $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2$.

Ta có $\int f(x)dx = \int (2x^4 + 3x^2 - 2)dx = \frac{2}{5}x^5 + x^3 + C_2$.

Với $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$.

Vậy $F(x) = \frac{2}{5}x^5 + x^3 + 2$. Khi đó $F(1) = \frac{17}{5}$.

Câu 3. Một ôtô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 6t\,(m/s)$. Đi được 10 s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ôtô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -60\,(m/s^2)$. Tính quãng đường S đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $300(m)$. **B.** $330(m)$. **C.** $350(m)$. **D.** $400(m)$.

Lời giải

Chọn B

Trong $10s$, đầu tiên ôtô đi được quãng đường $\int_0^{10} v(t)dt = \int_0^{10} 6tdt = 3t^2\Big|_0^{10} = 300(m)$

Khi đi được $10s$, vận tốc ôtô đó đạt được là $v(10) = 60(m/s)$

Thời điểm vật bắt đầu phanh gấp, vật chuyển động với vận tốc: $\int -60dt = -60t + C\,(m)$

Khi $t = 10s$, vật đang chuyển động với vận tốc $60(m/s) \Rightarrow -60t + C = 60 \Rightarrow C = 660$

Khi dừng hẳn $v(t) = 0(m/s) \Rightarrow -60t + 660 = 0 \Leftrightarrow t = 11(s)$

Nên quãng đường từ lúc bắt đầu phanh gấp đến khi dừng hẳn là:

$\int_{10}^{11} v(t)dt = \int_{10}^{11} (-60t + 660)dt = (-30t^2 + 660t)\Big|_{10}^{11} = 30(m)$.

Vậy quãng đường S đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

$S = 300 + 30 = 330(m)$.

Câu 4. Một vật đang chuyển động với vận tốc $10\left(m/s\right)$ thì tăng tốc với gia tốc $a\left(t\right)=2t+\frac{1}{3}t^2\left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi quãng đường vật đi được trong thời gian 12 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu mét?

A. $1272\left(m\right)$. **B.** $456\left(m\right)$. **C.** $1172\left(m\right)$. **D.** $1372\left(m\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $v\left(t\right)=\int\left(2t+\frac{1}{3}t^2\right)\mathrm{d}t=t^2+\frac{t^3}{9}+C$.

Vận tốc ban đầu của chuyển động là $10\left(m/s\right)$ nên:

$v\left(0\right)=10\Leftrightarrow C=10\Rightarrow v\left(t\right)=t^2+\frac{t^3}{9}+10\ \left(m/s\right)$.

Do đó quãng đường vật đi được trong thời gian 12 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là:

$s=\int_0^{12}\left(t^2+\frac{t^3}{9}+10\right)\mathrm{d}t=1272\ \left(m\right)$.

Câu 5. Một vật chuyển động với gia tốc $a\left(t\right)=6t\left(m/s^2\right)$. Vận tốc của vật tại thời điểm $t=2$ giây là $17m/s$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là:

A. $1014m$. **B.** $1200m$. **C.** $36m$. **D.** $966m$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $v\left(t\right)=\int 6t\,dt=3t^2+C$.

$v\left(2\right)=17\Rightarrow 12+C=17\Rightarrow C=5$.

Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là $s=\int_4^{10}\left(3t^2+5\right)dt=966\left(m\right)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},\forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ và $f\left(0\right)=1$. Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=k$ với mọi $k\in\mathbb{Z}$. Tính $F\left(0\right)+F\left(\pi\right)+F\left(2\pi\right)+...+F\left(10\pi\right)$.

A. 55. **B.** 44. **C.** 45. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{2\sin x\mathrm{d}x}{\cos^3 x}=-\int\frac{2\mathrm{d}\left(\cos x\right)}{\cos^3 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+C$.

Do $f\left(0\right)=1\Rightarrow C=0$ hay $f\left(x\right)=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Ta có $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\tan x+C$.

Suy ra $F(x)=\begin{cases}\tan x+C_0, & x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\\ \tan x+C_1, & x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\\ \tan x+C_2, & x\in\left(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)\\ ... \\ \tan x+C_9, & x\in\left(\frac{17\pi}{2};\frac{19\pi}{2}\right)\\ \tan x+C_{10}, & x\in\left(\frac{19\pi}{2};\frac{21\pi}{2}\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F\left(\frac{\pi}{4}+0\pi\right)=1+C_0=0\Rightarrow C_0=-1\\ F\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=1+C_1=1\Rightarrow C_1=0\\ F\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=1+C_2=2\Rightarrow C_0=1\\ ...\\ F\left(\frac{\pi}{4}+9\pi\right)=1+C_9=9\Rightarrow C_9=8\\ F\left(\frac{\pi}{4}+10\pi\right)=1+C_{10}=10\Rightarrow C_{10}=9.\end{cases}$

Vậy $F(0)+F(\pi)+F(2\pi)+...+F(10\pi)=\tan 0-1+\tan\pi+\tan 2\pi+1+...+\tan 10\pi+9=44.$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=e^{2x}(2\sin x+\cos x),\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Biết $F(x)=e^{2x}(a\sin x+b\cos x)+\frac{2}{5}$ là một nguyên hàm của $f(x)$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+2b-1$.

A. $\frac{2}{5}$. **B.** -1. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int e^{2x}(2\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=e^{2x}.\sin x+C$.

Do $f(0)=0\Rightarrow C=0$ hay $f(x)=e^{2x}.\sin x$.

Hàm số $f(x)$ xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $F'(x)=2e^{2x}(a\sin x+b\cos x)+e^{2x}(a\cos x-b\sin x)=e^{2x}\left[(2a-b)\sin x+(a+2b)\cos x\right]$

$F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow e^{2x}\left[(2a-b)\sin x+(a+2b)\cos x\right]=e^{2x}\sin x,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b=1\\a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{5}\\b=-\frac{1}{5}\end{cases}.$

Vậy $T=a+2b-1=\frac{2}{5}+2.\left(-\frac{1}{5}\right)-1=-1.$

Câu 8. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$ **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có:

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x}-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ với mọi $x\in(0;\pi)$.

Xét hàm số $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ xác định và liên tục trên $(0;\pi)$.

$F'(x)=f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$

Xét $F'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, phương trình $F'(x)=0$ có một nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$-\sqrt{3}+C$	$\searrow$	

$$\max_{(0;\pi)}F(x)=F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}+C$$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ thoả mãn $f'(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$, $f(0)=1$ và $f(-4)=2$. Giá trị của biểu thức $f(2)+f(-3)$ bằng

A. 12. **B.** $\ln 2$. **C.** $10+\ln 2$. **D.** $3-20\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{3x-1}{x+2}\mathrm{d}x=\int\left(3-\dfrac{7}{x+2}\right)\mathrm{d}x=3x-7\ln|x+2|+C$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

+ Xét trên khoảng $(-2;+\infty)$ ta có: $f(0)=1\Leftrightarrow -7\ln 2+C=1\Rightarrow C=1+7\ln 2$.

Do đó, $f(x)=3x-7\ln|x+2|+1+7\ln 2$, với mọi $x\in(-2;+\infty)$.

Suy ra $f(2)=7-7\ln 4+7\ln 2=7-7\ln 2$.

+ Xét trên khoảng $(-\infty;-2)$ ta có: $f(-4)=2\Leftrightarrow -12-7\ln 2+C=2\Rightarrow C=14+7\ln 2$.

Do đó, $f(x)=3x-7\ln|x+2|+14+7\ln 2$, với mọi $x\in(-\infty;-2)$.

Suy ra $f(-3)=5+7\ln 2$.

Vậy $f(2)+f(-3)=7+7\ln 2+5-7\ln 2=12$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=\ln 4035$. **B.** $S=4$. **C.** $S=\ln 2$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có $\int f'(x)dx=\int\dfrac{1}{x-1}dx=\ln(x-1)+C_1 \Rightarrow f(x)=\ln(x-1)+C_1$.

Mà $f(2)=2018\Rightarrow C_1=2018$.

Trên khoảng $(-\infty;1)$ ta có $\int f'(x)dx=\int\dfrac{1}{x-1}dx=\ln(1-x)+C_2 \Rightarrow f(x)=\ln(1-x)+C_2$.

Mà $f(0)=2017 \Rightarrow C_2=2017$.

Vậy $f(x)=\begin{cases}\ln(x-1)+2018 & \text{khi } x>1\\ \ln(1-x)+2017 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Suy ra $f(3)-f(-1)=1$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$, $f(0)=2$ và $f(-3)+f(3)=0$. Tính giá trị biểu thức $P=2f(-1)+f(4)$.

A. $3+\ln 2$. **B.** $4+\ln 3$. **C.** $\ln 2-3$. **D.** $\ln 3+2$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $f(x)=\int\dfrac{4}{x^2-4}\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln\dfrac{x-2}{x+2}+C_1 & khi\ x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)\\ \ln\dfrac{2-x}{x+2}+C_2 & khi\ x\in(-2;2)\end{cases}$.

Theo giả thiết có $f(0)=2\Rightarrow C_2=2$

và $f(-3)+f(3)=0\Rightarrow \ln 5+C_1+\ln\dfrac{1}{5}+C_1=0\Leftrightarrow C_1=0$.

Suy ra $f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{x-2}{x+2} & khi\ x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)\\ \ln\dfrac{2-x}{x+2}+2 & khi\ x\in(-2;2)\end{cases}$.

Vậy $P=2f(-1)+f(4)=2(\ln 3+2)+\ln\dfrac{1}{3}=\ln 3+4$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3)+f(-3)=4$ và $f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{-1}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-5)+f(0)+f(2)$ bằng

A. $5-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **B.** $6-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **C.** $5+\dfrac{1}{2}\ln 2$. **D.** $6+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}\Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=\int\dfrac{1}{x^2-1}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$ với $x\in R\setminus\{-1;1\}$.

Khi đó: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_1 & khi\ \ x>1\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_2 & khi\ \ -1<x<1\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_3 & khi\ \ x<-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(3)+f(-3)=C_1+C_3=4\\ f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{-1}{3}\right)=2C_2=2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_3=4\\ C_2=1\end{cases}$

Vậy $f(-5)+f(0)+f(2)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}+C_3+C_2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3}+C_1=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}+5=5-\dfrac{1}{2}\ln 2$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$. **B.** $\ln 80+1$. **C.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{4}{5}+\ln 2+1$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}+1$.

Lời giải

$$f(x)=\int\frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_1,\forall x\in(-\infty;-2)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_2,\forall x\in(-2;1)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_3,\forall x\in(1;+\infty)\end{cases}.$$

Ta có $f(-3)=\dfrac{1}{3}\ln 4+C_1,\forall x\in(-\infty;2)$, $f(0)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_1,\forall x\in(-2;1)$,

$f(3)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}+C_3,\forall x\in(1;+\infty)$,

Theo giả thiết ta có $f(0)=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow C_2=\dfrac{1}{3}(1+\ln 2)$.

$\Rightarrow f(-1)=\dfrac{2}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$.

Và $f(-3)-f(3)=0\Leftrightarrow C_1-C_3=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{10}$.

Vậy $f(-4)+f(-1)-f(4)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{2}+C_1+\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln 2-C_2=\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ 4x+2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(-2)=5$. Biết rằng $F(1)+3F(-1)=ae^2+b$ (trong đó a,b là các số hữu tỉ). Khi đó $a+b$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Vì F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}}{2}+x+C_1 & \text{khi } x\ge 0 \\ 2x^2+2x+C_2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

Ta có: $F(-2)=5 \Leftrightarrow 4+C_2=5 \Leftrightarrow C_2=1$.

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=2$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $F(x)$ liên tục tại $x=0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)=F(0) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}+C_1=C_2$, mà $C_2=1$ nên $C_1=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $F(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}}{2}+x+\dfrac{1}{2} & \text{khi } x\ge 0 \\ 2x^2+2x+1 & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

Ta có: $F(1)+3F(-1)=\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{3}{2}+3.1=\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{9}{2}$. Suy ra $a=\dfrac{1}{2};b=\dfrac{9}{2}$. Vậy $a+b=5$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{8}{3}$ và $f'(x)=16\cos 4x.\sin^2 x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{31}{18}$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. $\dfrac{16}{3}$. **B.** $\dfrac{64}{27}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{31}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=16\cos 4x.\sin^2 x, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 16\cos 4x.\sin^2 x\mathrm{d}x=\int 16.\cos 4x.\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\int 8.\cos 4x\mathrm{d}x-\int 8\cos 4x.\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$=8\int \cos 4x\mathrm{d}x-8\int(\cos 6x+\cos 2x)\mathrm{d}x=2\sin 4x-\frac{4}{3}\sin 6x-4\sin 2x+C.$$

Suy ra $f(x)=2\sin 4x-\dfrac{4}{3}\sin 6x-4\sin 2x+C$. Mà $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{8}{3}\Rightarrow C=0$.

Do đó. Khi đó:

$F(\pi)-F(0)=\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(2\sin 4x-\frac{4}{3}\sin 6x-4\sin 2x+\right)\mathrm{d}x$

$=\left(-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{2}{9}\cos 6x+2\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi}=0$

$F(\pi)=F(0)+0=\frac{31}{18}$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{27}{8}$ và $f'(x)=12\sin 2x.\cos^2 3x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. 0. **B.** $-\frac{87}{64}$. **C.** $-\frac{21}{8}$. **D.** $\frac{87}{64}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=12\sin 2x.\cos^2 3x, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có

$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 12\sin 2x.\cos^2 3x\mathrm{d}x=\int 12.\sin 2x.\frac{1+\cos 6x}{2}\mathrm{d}x=\int 6.\sin 2x\mathrm{d}x+\int 6\sin 2x.\cos 6x\mathrm{d}x$

$=6\int\sin 2x\mathrm{d}x+3\int(\sin 8x-\sin 4x)\mathrm{d}x=-3\cos 2x-\frac{3}{8}\cos 8x+\frac{3}{4}\cos 4x+C$.

Suy ra $f(x)=-3\cos 2x-\frac{3}{8}\cos 8x+\frac{3}{4}\cos 4x+C$. Mà $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{27}{8}\Rightarrow C=0$.

Do đó. Khi đó:

$F(\pi)-F(0)=\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(-3\cos 2x-\frac{3}{8}\cos 8x+\frac{3}{4}\cos 4x\right)\mathrm{d}x$

$=\left(-\frac{3}{2}\sin 2x-\frac{3}{64}\sin 8x+\frac{3}{16}\sin 4x\right)\Big|_0^{\pi}=0$

$\Rightarrow F(\pi)=F(0)+0=-\frac{21}{8}+0=-\frac{21}{8}$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=-\frac{121}{225}$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. $\frac{242}{225}$. **B.** $\frac{208}{225}$. **C.** $\frac{121}{225}$. **D.** $\frac{149}{225}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \cos x.\cos^2 2x\mathrm{d}x=\int \cos x.\dfrac{1+\cos 4x}{2}\mathrm{d}x=\int \dfrac{\cos x}{2}\mathrm{d}x+\int \dfrac{\cos x.\cos 4x}{2}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{2}\int \cos x\mathrm{d}x+\dfrac{1}{4}\int(\cos 5x+\cos 3x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{20}\sin 5x+\dfrac{1}{12}\sin 3x+C$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{20}\sin 5x+\dfrac{1}{12}\sin 3x+C,\forall x\in\mathbb{R}$. Mà $f(0)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{20}\sin 5x+\dfrac{1}{12}\sin 3x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$F(\pi)-F(0)=\int\limits_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi}\left(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{20}\sin 5x+\dfrac{1}{12}\sin 3x\right)\mathrm{d}x$

$=\left.\left(-\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{100}\cos 5x-\dfrac{1}{36}\cos 3x\right)\right|_0^{\pi}=\dfrac{242}{225}$.

$\Rightarrow F(\pi)=F(0)+\dfrac{242}{225}=-\dfrac{121}{225}+\dfrac{242}{225}=\dfrac{121}{225}$

Câu 18. Hãy xác định hàm số $F(x)=ax^3+bx^2+cx+1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(1)=2$, $f(2)=3$ và $f(3)=4$.

A. $F(x)=x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+1$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+2x+1$.

C. $F(x)=x+1$. **D.** $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+1$.

Lời giải

Chọn C

$f(x)=3ax^2+2bx+c$.

Theo đề $\begin{cases}3a+2b+c=2\\12a+4b+c=3\\27a+6b+c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=\dfrac{1}{2}\\c=1\end{cases}$.

Vậy $f(x)=x+1$.

Câu 19. Hàm số $F(x)=(ax+b)\sqrt{4x+1}$ (a,b là các hằng số thực) là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{12x}{\sqrt{4x+1}}$. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F'(x)=a\sqrt{4x+1}+(ax+b).\dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}=\dfrac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}}$.

Để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $\frac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}}=\frac{12x}{\sqrt{4x+1}} \Leftrightarrow \begin{cases}6a=12\\ a+2b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}$.

Do đó $a+b=1$.

Câu 20. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2019)+F(2020)+F(2021)$

A. $T=1011.\frac{2^{2021}+1}{\ln 2}$. **B.** $T=2^{2021.2022}$. **C.** $T=\frac{2^{2020}-1}{\ln 2}$. **D.** $T=\frac{2^{2022}-1}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2^x\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}+C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, ta có $F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}+C$ mà $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow C=0 \Rightarrow F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$.

$T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2019)+F(2020)+F(2021)$

$=\frac{1}{\ln 2}\left(1+2+2^2+...+2^{2018}+2^{2019}+2^{2020}+2^{2021}\right)=\frac{1}{\ln 2}.\frac{2^{2022}-1}{2-1}=\frac{2^{2022}-1}{\ln 2}$

Câu 21. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm $f(x)=x^2e^{\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$ sao cho $F\left(\frac{1}{\alpha}\right)=F(0)+1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1<\alpha<2$. **B.** $\alpha<-2$. **C.** $\alpha \geq 3$. **D.** $0<\alpha \leq 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x)=\int x^2e^{\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\int x^2\mathrm{d}\left(e^{\alpha x}\right)=\frac{1}{\alpha}\left[x^2e^{\alpha x}-\int e^{\alpha x}2x\mathrm{d}x\right]$.

$=\frac{1}{\alpha}\left(x^2e^{\alpha x}-\frac{2}{\alpha}\int x\mathrm{d}\left(e^{\alpha x}\right)\right)=\frac{1}{\alpha}\left(x^2e^{\alpha x}-\frac{2}{\alpha}\left(xe^{\alpha x}-\int e^{\alpha x}\mathrm{d}x\right)\right)$.

$=\frac{1}{\alpha}\left(x^2e^{\alpha x}-\frac{2}{\alpha}xe^{\alpha x}+\frac{2}{\alpha^2}e^{\alpha x}\right)+C$.

$F\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2}e-\frac{2}{\alpha^2}e+\frac{2}{\alpha^2}e\right)+C=\frac{1}{\alpha^3}e+C$.

$F(0)=\frac{1}{\alpha}.\frac{2}{\alpha^2}+C$.

Theo giả thiết $F\left(\frac{1}{\alpha}\right)-F(0)=\frac{e-2}{\alpha^3}=1 \Rightarrow \alpha^3=e-2 \Rightarrow \alpha=\sqrt[3]{e-2} \Rightarrow 0<\alpha \leq 1$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ và $f'(x)=\sin x.\sin^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{104}{225}$. **B.** $-\frac{104}{225}$. **C.** $\frac{121}{225}$. **D.** $\frac{167}{225}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=\sin x.\sin^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \sin x.\sin^2 2x\mathrm{d}x=\int \sin x.\frac{1-\cos 4x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{2}\mathrm{d}x-\int\frac{\sin x.\cos 4x}{2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int\sin x\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int(\sin 5x-\sin 3x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x+C$.

Suy ra $f(x)=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x+C, \forall x\in\mathbb{R}$. Mà $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left.\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{100}\sin 5x-\frac{1}{36}\sin 3x\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{104}{225}.$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F(0)-\frac{104}{225}=0-\frac{104}{225}=-\frac{104}{225}$$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=\frac{1}{21}$ và $f'(x)=\sin 3x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{137}{441}$. **B.** $-\frac{137}{441}$. **C.** $\frac{247}{441}$. **D.** $\frac{167}{882}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=\sin 3x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\sin 3x.\cos^2 2x\mathrm{d}x=\int\sin 3x.\frac{1+\cos 4x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin 3x}{2}\mathrm{d}x+\int\frac{\sin 3x.\cos 4x}{2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int\sin 3x\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int(\sin 7x-\sin x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{28}\cos 7x+\frac{1}{4}\cos x+C$.

Suy ra $f(x)=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{28}\cos 7x+\frac{1}{4}\cos x+C, \forall x\in\mathbb{R}$. Mà $f(0)=\frac{1}{21}\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{28}\cos 7x+\frac{1}{4}\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{28}\cos 7x+\frac{1}{4}\cos x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{1}{18}\sin 3x-\frac{1}{196}\sin 7x+\frac{1}{4}\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{137}{441}.$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F(0)+\frac{137}{441}=0+\frac{137}{441}=\frac{137}{441}$$

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=-\frac{121}{225}$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. $\frac{242}{225}$. **B.** $\frac{208}{225}$. **C.** $\frac{121}{225}$. **D.** $\frac{149}{225}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \cos x.\cos^2 2x\mathrm{d}x=\int \cos x.\frac{1+\cos 4x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{2}\mathrm{d}x+\int\frac{\cos x.\cos 4x}{2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int\cos x\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int(\cos 5x+\cos 3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x+C$.

Suy ra $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x+C,\forall x\in\mathbb{R}$. Mà $f(0)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$$F(\pi)-F(0)=\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{100}\cos 5x-\frac{1}{36}\cos 3x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{242}{225}.$$

$$\Rightarrow F(\pi)=F(0)+\frac{242}{225}=-\frac{121}{225}+\frac{242}{225}=\frac{121}{225}$$

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=\frac{1}{21}$ và $f'(x)=\sin 3x.\cos^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{137}{441}$. **B.** $-\frac{137}{441}$. **C.** $\frac{247}{441}$. **D.** $\frac{167}{882}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=\sin 3x.\cos^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\sin 3x.\cos^2 2x\mathrm{d}x=\int\sin 3x.\frac{1+\cos 4x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin 3x}{2}\mathrm{d}x+\int\frac{\sin 3x.\cos 4x}{2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int \sin 3x dx+\frac{1}{4}\int (\sin 7x-\sin x)dx=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{28}\cos 7x+\frac{1}{4}\cos x+C$.

Suy ra $f(x)=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{28}\cos 7x+\frac{1}{4}\cos x+C,\forall x\in\mathbb{R}$. Mà $f(0)=\frac{1}{21}\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{28}\cos 7x+\frac{1}{4}\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{28}\cos 7x+\frac{1}{4}\cos x\right)dx$$

$$=\left(-\frac{1}{18}\sin 3x-\frac{1}{196}\sin 7x+\frac{1}{4}\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{137}{441}.$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F(0)+\frac{137}{441}=0+\frac{137}{441}=\frac{137}{441}$$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ và $f'(x)=\sin x.\sin^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{104}{225}$. **B.** $-\frac{104}{225}$. **C.** $\frac{121}{225}$. **D.** $\frac{167}{225}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=\sin x.\sin^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có $\int f'(x)dx=\int \sin x.\sin^2 2x dx=\int \sin x.\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\int\frac{\sin x}{2}dx-\int\frac{\sin x.\cos 4x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int \sin x dx-\frac{1}{4}\int(\sin 5x-\sin 3x)dx=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x+C$.

Suy ra $f(x)=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x+C,\forall x\in\mathbb{R}$. Mà $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x\right)dx$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{100}\sin 5x-\frac{1}{36}\sin 3x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{104}{225}.$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F(0)-\frac{104}{225}=0-\frac{104}{225}=-\frac{104}{225}$$

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{27}{8}$ và $f'(x)=12\sin 2x.\cos^2 3x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. 0. **B.** $-\frac{87}{64}$. **C.** $-\frac{21}{8}$. **D.** $\frac{87}{64}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=12\sin 2x.\cos^2 3x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 12\sin 2x.\cos^2 3x\mathrm{d}x=\int 12.\sin 2x.\frac{1+\cos 6x}{2}\mathrm{d}x=\int 6.\sin 2x\mathrm{d}x+\int 6\sin 2x.\cos 6x\mathrm{d}x$$

$$=6\int \sin 2x\mathrm{d}x+3\int(\sin 8x-\sin 4x)\mathrm{d}x=-3\cos 2x-\frac{3}{8}\cos 8x+\frac{3}{4}\cos 4x+C.$$

Suy ra $f(x)=-3\cos 2x-\frac{3}{8}\cos 8x+\frac{3}{4}\cos 4x+C$. Mà $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{27}{8}\Rightarrow C=0$.

Do đó. Khi đó:

$$F(\pi)-F(0)=\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(-3\cos 2x-\frac{3}{8}\cos 8x+\frac{3}{4}\cos 4x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left.\left(-\frac{3}{2}\sin 2x-\frac{3}{64}\sin 8x+\frac{3}{16}\sin 4x\right)\right|_0^{\pi}=0$$

$$\Rightarrow F(\pi)=F(0)+0=-\frac{21}{8}+0=-\frac{21}{8}$$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{8}{3}$ và $f'(x)=16\cos 4x.\sin^2 x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=\frac{31}{18}$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{64}{27}$. **C.** 0. **D.** $\frac{31}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=16\cos 4x.\sin^2 x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 16\cos 4x.\sin^2 x\mathrm{d}x=\int 16.\cos 4x.\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\int 8.\cos 4x\mathrm{d}x-\int 8\cos 4x.\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$=8\int \cos 4x\mathrm{d}x-8\int(\cos 6x+\cos 2x)\mathrm{d}x=2\sin 4x-\frac{4}{3}\sin 6x-4\sin 2x+C.$$

Suy ra $f(x)=2\sin 4x-\frac{4}{3}\sin 6x-4\sin 2x+C$. Mà $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{8}{3}\Rightarrow C=0$.

Do đó. Khi đó:

$F(\pi)-F(0)=\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(2\sin 4x-\frac{4}{3}\sin 6x-4\sin 2x+\right)\mathrm{d}x$

$=\left(-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{2}{9}\cos 6x+2\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi}=0$

$F(\pi)=F(0)+0=\frac{31}{18}$

.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)<0,\forall x>0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)f^2(x),\forall x>0$ và $f(1)=-\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1)+f(2)+...+f(2020)$ bằng

A. $-\frac{2020}{2021}$. **B.** $-\frac{2015}{2019}$. **C.** $-\frac{2019}{2020}$. **D.** $-\frac{2016}{2021}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$f'(x)=(2x+1)f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x\Rightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C$.

Mà $f(1)=-\frac{1}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{x^2+x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

$$\begin{cases} f(1)=\frac{1}{2}-1 \\ f(2)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2} \\ f(3)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3} \\ \vdots \\ f(2020)=\frac{1}{2021}-\frac{1}{2020} \end{cases}\Rightarrow f(1)+f(2)+....+f(2020)=-1+\frac{1}{2021}=-\frac{2020}{2021}.$$

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\frac{-3}{16}$. **B.** $T=\frac{21}{16}$. **C.** $T=\frac{3}{2}$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$

$\Leftrightarrow f'(x)+\frac{x+2}{x(x+1)}f(x)=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{x+1}f'(x)+\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]' = \frac{x^2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x) = \int \frac{x^2}{x+1}dx \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c\right)$.

Ta có $f(1) = 2\ln 2 + 1 \Leftrightarrow c = 1$.

Từ đó $f(x) = \frac{x+1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + 1\right)$, $f(2) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\ln 3$. Nên $\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$.

Vậy $T = a^2 - b = -\frac{3}{16}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $(x^2+1)^2 f'(x) = [f(x)]^2(x^2-1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $-\frac{2}{5}$ **C.** $-\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có: $f'(x) = [f(x)]^2 . \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} > 0$ với mọi $x \in (1;2]$.

Do đó $f(x) \geq f(1) = 1 > 0$ với mọi $x \in [1;2]$.

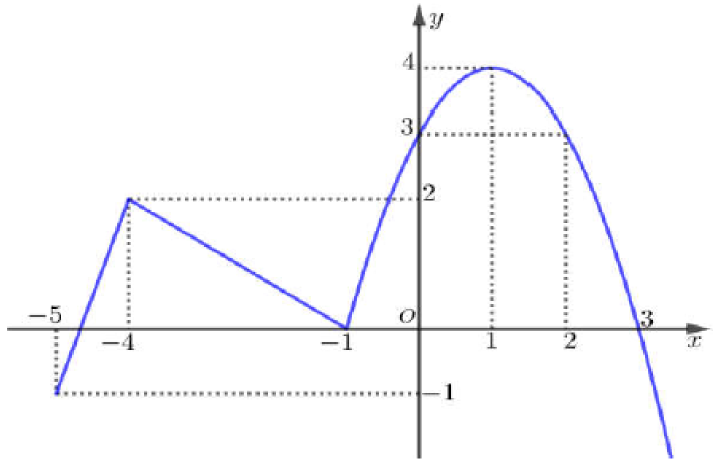
Xét với mọi $x \in [1;2]$ ta có:

$(x^2+1)f'(x) = [f(x)]^2(x^2-1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{x+\frac{1}{x}} + C$.

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Leftrightarrow C = 0$. Vậy $f(x) = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow f(2) = \frac{5}{2}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5;3]$ như hình vẽ.



Biết $f(0)=0$, giá trị của $2f(-5)+3f(2)$ bằng

A. 33. **B.** $\frac{109}{3}$. **C.** $\frac{35}{3}$. **D.** 11.

Lời giải

Chon C

*)Parabol $y=ax^2+bx+c$ qua các điểm $(2;3),(1;4),(0;3),(-1;0),(3;0)$ nên xác định được $y=-x^2+2x+3, \forall x\geq -1$ suy ra $f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x+C_1$. Mà $f(0)=0 \Rightarrow C_1=0$, $f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x$.

Có $f(-1)=-\frac{5}{3}$; $f(2)=\frac{22}{3}$

*)Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-4;-1]$ qua các điểm $(-4;2),(-1;0)$ nên $f'(x)=\frac{-2}{3}(x+1) \Rightarrow f(x)=\frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+C_2$.

Mà $f(-1)=-\frac{5}{3} \Leftrightarrow C_2=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)=-2 \Rightarrow f(x)=\frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-2$, hay $f(-4)=\frac{-14}{3}$.

*) Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-5;-4]$ qua các điểm $(-4;2),(-5;-1)$ nên $f'(x)=3x+14 \Rightarrow f(x)=\frac{3x^2}{2}+14x+C_3$.

Mà $f(-4)=\frac{-14}{3} \Leftrightarrow \frac{3.(-4)^2}{2}+14.(-4)+C_3=\frac{-14}{3}$ suy ra $C_3=\frac{82}{3}$.

Ta có $f(x)=\frac{3x^2}{2}+14x+\frac{82}{3} \Rightarrow f(-5)=-\frac{31}{6}$.

Từ và ta được $2f(-5)+3f(2)=-\frac{31}{3}+22=\frac{35}{3}$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\pi} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1042}{225}$. **B.** $\frac{208}{225}$. **C.** $\frac{242}{225}$. **D.** $\frac{149}{225}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có $\int f'(x)dx=\int \cos x.\cos^2 2xdx=\int \cos x.\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\int\frac{\cos x}{2}dx+\int\frac{\cos x.\cos 4x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int\cos xdx+\frac{1}{4}\int(\cos 5x+\cos 3x)dx=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x+C$.

Suy ra $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x+C, \forall x\in\mathbb{R}$. Mà $f(0)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$$\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x\right)dx=\left(-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{100}\cos 5x-\frac{1}{36}\cos 3x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{242}{225}.$$

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=\frac{1}{21}$ và $f'(x)=\sin 3x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{137}{441}$. **B.** $-\frac{137}{441}$. **C.** $\frac{247}{441}$. **D.** $\frac{167}{882}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=\sin 3x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có $\int f'(x)dx=\int \sin 3x.\cos^2 2xdx=\int \sin 3x.\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\int\frac{\sin 3x}{2}dx+\int\frac{\sin 3x.\cos 4x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int\sin 3xdx+\frac{1}{4}\int(\sin 7x-\sin x)dx=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{28}\cos 7x+\frac{1}{4}\cos x+C$.

Suy ra $f(x)=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{28}\cos 7x+\frac{1}{4}\cos x+C, \forall x\in\mathbb{R}$. Mà $f(0)=\frac{1}{21}\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{28}\cos 7x+\frac{1}{4}\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{28}\cos 7x+\frac{1}{4}\cos x\right)dx=\left(-\frac{1}{18}\sin 3x-\frac{1}{196}\sin 7x+\frac{1}{4}\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{137}{441}.$$

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ và $f'(x)=\sin x.\sin^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{104}{225}$. **B.** $-\frac{104}{225}$. **C.** $\frac{121}{225}$. **D.** $\frac{167}{225}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=\sin x.\sin^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \sin x.\sin^2 2x\mathrm{d}x=\int \sin x.\frac{1-\cos 4x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{2}\mathrm{d}x-\int\frac{\sin x.\cos 4x}{2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int \sin x\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int(\sin 5x-\sin 3x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x+C$.

Suy ra $f(x)=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x+C,\forall x\in\mathbb{R}$. Mà $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{100}\sin 5x-\frac{1}{36}\sin 3x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{104}{225}$

.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{27}{8}$ và $f'(x)=12\sin 2x.\cos^2 3x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{27}{64}$. **B.** $-\frac{87}{64}$. **C.** 0. **D.** $\frac{87}{64}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=12\sin 2x.\cos^2 3x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có

$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 12\sin 2x.\cos^2 3x\mathrm{d}x=\int 12.\sin 2x.\frac{1+\cos 6x}{2}\mathrm{d}x=\int 6.\sin 2x\mathrm{d}x+\int 6\sin 2x.\cos 6x\mathrm{d}x$

$=6\int\sin 2x\mathrm{d}x+3\int(\sin 8x-\sin 4x)\mathrm{d}x=-3\cos 2x-\frac{3}{8}\cos 8x+\frac{3}{4}\cos 4x+C$.

Suy ra $f(x)=-3\cos 2x-\frac{3}{8}\cos 8x+\frac{3}{4}\cos 4x+C$. Mà $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{27}{8}\Rightarrow C=0$.

Do đó. Khi đó:

$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(-3\cos 2x-\frac{3}{8}\cos 8x+\frac{3}{4}\cos 4x\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{3}{2}\sin 2x-\frac{3}{64}\sin 8x+\frac{3}{16}\sin 4x\right)\Big|_0^{\pi}=0$

.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{8}{3}$ và $f'(x)=16\cos 4x.\sin^2 x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{64}{27}$. **C.** $-\frac{128}{3}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=16\cos 4x.\sin^2 x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có

$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 16\cos 4x.\sin^2 x\mathrm{d}x=\int 16.\cos 4x.\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\int 8.\cos 4x\mathrm{d}x-\int 8\cos 4x.\cos 2x\mathrm{d}x$

$=8\int\cos 4x\mathrm{d}x-8\int(\cos 6x+\cos 2x)\mathrm{d}x=2\sin 4x-\frac{4}{3}\sin 6x-4\sin 2x+C$.

Suy ra $f\left(x\right)=2\sin 4x-\frac{4}{3}\sin 6x-4\sin 2x+C$. Mà $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{8}{3}\Rightarrow C=0$.

Do đó. Khi đó:

$$\int\limits_{0}^{\pi} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\pi}\left(2\sin 4x-\frac{4}{3}\sin 6x-4\sin 2x+\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{2}{9}\cos 6x+2\cos 2x\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=0$$

.

Câu 38. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=0$ và $f'\left(x\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{18}$. **B.** $\frac{10}{9}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'\left(x\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f'\left(x\right)$.

$$\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x=\int\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}x=I$$

Đặt $t=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$

Ta có $I=\int\left(1-2t^2\right)\mathrm{d}t=t-\frac{2}{3}t^3+c=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{2}{3}\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow f\left(x\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{2}{3}\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{2}{3}\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\frac{2}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=1+\frac{2}{3}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3}\cos^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=1+\frac{2}{3}\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{9}$$

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ và $f'(x)=\frac{\sin x+\sin 3x}{2\sin^4 x.\cos x},\forall x\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$. Khi đó $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\frac{\sin x+\sin 3x}{2\sin^4 x.\cos x},\forall x\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$

$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x+\sin 3x}{2\sin^4 x.\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{2\sin 2x.\cos x}{2\sin^4 x.\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{2\sin x.\cos x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x=\int\frac{2\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$

$=\int\frac{2}{\sin^3 x}\mathrm{d}(\sin x)=\frac{-1}{\sin^2 x}+C$

Do đó $f(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}+C$ mà $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\Rightarrow C=0$ khi đó $f(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$

Vậy $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}-\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=-2$

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2022

Câu 42. (ĐTK BGD 2022) Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có $AC=4a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với nhau. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{16\sqrt{2}}{3}a^3$. **B.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$. **C.** $16a^3$. **D.** $\frac{16}{3}a^3$.

Phân tích

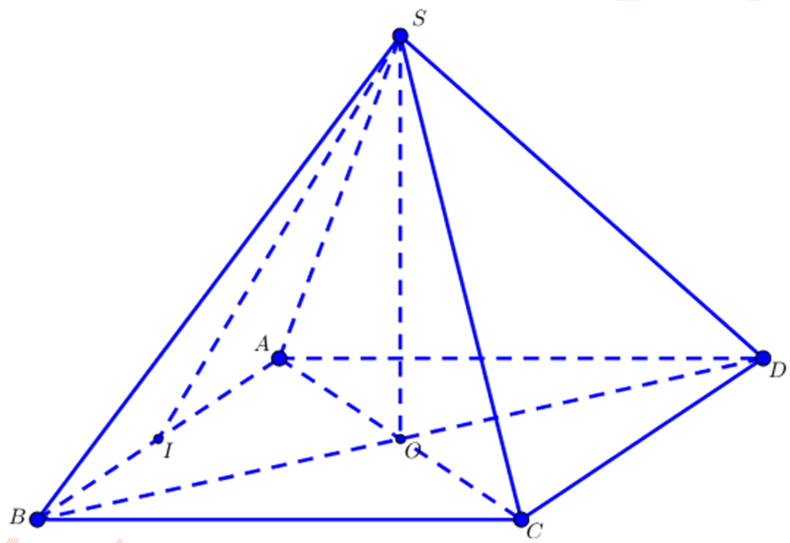
Đây là bài toán tính thể tích của một khối chóp với điều kiện về góc giữa hai mặt phẳng.

Kiến thức sử dụng là xác định góc giữa hai mặt phẳng và tính thể tích khối chóp.

Sai lầm thường gặp: Học sinh xác định sai góc giữa hai mặt phẳng và sai công thức thể tích.

Hướng phát triển: Thay khối chóp đều bởi khối lăng trụ hoặc các khối chóp khác, thay góc giữa hai mặt phẳng khác, thay kết quả cần tính …

Lời giải



Cách 1: Sử dụng hình học thuần túy.

Gọi O là tâm hình vuông suy ra $SO\perp(ABCD)$

Ta có $(SAB)\cap(SCD)=Sx//AB//CD$

Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $SI\perp AB\Rightarrow SI\perp Sx\Rightarrow SI\perp(SCD)\Rightarrow SI\perp SD$

$AC=4a\Rightarrow AD=2\sqrt{2}a\Rightarrow DI=a\sqrt{10}$

Đặt $SD=x\Rightarrow SI=\sqrt{x^2-2a^2}$. Ta có hệ thức $x^2-2a^2+x^2=10a^2\Rightarrow x^2=6a^2\Rightarrow x=a\sqrt{6}$.

Từ đó ta tính được $SO=a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\left(2\sqrt{2}a\right)^2=\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$.

Cách 2: Sử dụng áp hệ trục tọa độ.

Đặt hệ trục tọa độ gốc O và các trục tọa độ. Đặt $SO=t>0$. Khi đó ta được tọa độ các điểm

$A(2a;0;0), B(0;2a;0), C(-2a;0;0), D(0;-2a;0), S(0;0;t)$.

$(SAB): \frac{x}{2a}+\frac{y}{2a}+\frac{z}{t}=1 \Leftrightarrow tx+ty+2az-2at=0$.

$(SCD): \frac{x}{-2a}+\frac{y}{-2a}+\frac{z}{t}=1 \Leftrightarrow tx+ty-2az+2at=0$.

Do (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với nhau nên $2t^2-4a^2=0 \Rightarrow t=a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\left(2\sqrt{2}a\right)^2=\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy (ABC). Các mặt bên (SAB), (SBC) tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng 60º. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Câu 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA=a\sqrt{11}$, côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $3a^3$. **B.** $12a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $9a^3$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $3a$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$, góc giữa (SAB) và (SCB) bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$. **D.** $\frac{9\sqrt{2}a^3}{8}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=2a$ và $BC=2a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của S xuống mặt đáy là điểm H nằm trên AM thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{HM}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{8a^3}{3}$. **D.** $\frac{8a^3}{9}$.

Câu 5. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ, với $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{2a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $a^3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, tam giác SBA vuông tại B, tam giác SAC vuông tại C. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\sqrt{3}a^3$. **B.** $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{18}$.

Câu 8. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=3a^3$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\frac{a^3}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm của tam giác ABD. Cạnh SD tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{9}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 10. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AB. Biết rằng $SC=a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{5}}{4}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. **D.** $V=\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=3, BC=4, AC=5$. Các mặt bên $(SAB),(SAC),(SBC)$ đều cùng hợp với mặt đáy (ABC) một góc $60°$ và hình chiếu H của S lên (ABC) nằm khác phía với A đối với đường thẳng BC. Thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$ và $AD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{15}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $V=\frac{4a^3\sqrt{15}}{15}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA\perp(ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30^0. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{8a^3}{9}$. **B.** $\frac{8a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{4a^3}{9}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AB=2a$, $AC=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $ABCD$ bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính thể tích khối chóp $S.ADNM$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{16}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **C.** $V=\frac{3a^3\sqrt{6}}{16}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên đáy là điểm H trên cạnh AC sao cho $AH=\frac{2}{3}AC$; mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là?

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 18. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Câu 19. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=3a^3$ **B.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **C.** $V=a^3$ **D.** $V=\frac{a^3}{3}$

Câu 20. **(Mã 123 2017)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{2a^3}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$ **D.** $\sqrt{2}a^3$

Câu 21. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $\widehat{ACB}=60°$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và SB hợp với mặt đáy một góc $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $V=\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$ và $AD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{15}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $V=\frac{4a^3\sqrt{15}}{15}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA\perp(ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30^0. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{8a^3}{9}$. **B.** $\frac{8a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{4a^3}{9}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AB=2a$, $AC=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC=2a$, $\widehat{BAC}=120°$, biết $SA\perp(ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a^3}{9}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a$, $AD=2a$; SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích của khối chóp theo a.

A. $\frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$. **B.** $\frac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{45}a^3$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $ABCD$ bằng 60^0. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,SC. Tính thể tích khối chóp $S.ADNM$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{16}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **C.** $V=\frac{3a^3\sqrt{6}}{16}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 28. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\sqrt{3}a^3$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{18}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, góc BAD bằng 120^0, $AB=a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy là 60^0. Tính thể tích V của chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{2a^3\sqrt{15}}{15}$. **B.** $V=\frac{a^3}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{13}}{12}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{36}$

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h=\dfrac{4}{3}a$ **B.** $h=\dfrac{3}{2}a$ **C.** $h=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$ **D.** $h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BC=\dfrac{1}{2}AD=a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α sao cho $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$ theo a.

A. $V_{S.ACD}=\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ACD}=\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ACD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V_{S.ACD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật; $AB=a; AD=2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mp$(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến (SAC).

A. $d=\dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$. **B.** $d=\dfrac{2a\sqrt{1315}}{89}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{1315}}{89}$. **D.** $d=\dfrac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA=3HD$. Biết rằng $SA=2a\sqrt{3}$ và SC tạo với đáy một góc bằng $30°$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=8\sqrt{6}a^3$. **B.** $V=\dfrac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V=8\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=\dfrac{8\sqrt{6}a^3}{9}$.

Câu 37. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AD; gọi M là trung điểm của CD; cạnh bên SB hợp với đáy góc 60°. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABM$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên đáy là điểm H trên cạnh AC sao cho $AH=\dfrac{2}{3}AC$; mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, $\widehat{SAB}=30^0$, $SA=2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{9}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{3}$.

Câu 40. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Câu 41. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{10}}{6}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{30}}{2}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{30}}{6}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{10}}{3}$

Câu 42. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA=a$. Gọi D,E lần lượt là trung điểm của SA,SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a, biết BD vuông góc với AE.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{54}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{7}}{27}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{27}$.

Câu 43. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $AB=a$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 44. **(ĐTK2021)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) là 45^o (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 45. **(Mã 105 2017)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\dfrac{a^3}{3}$ **B.** a^3 **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$ **D.** $\dfrac{a^3}{2}$

Câu 46. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $3a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $6a^3\sqrt{3}$. **C.** $12a^3$. **D.** $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 47. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB=6a$, $AC=7a$ và $AD=4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V=7a^3$ **B.** $V=14a^3$ **C.** $V=\dfrac{28}{3}a^3$ **D.** $V=\dfrac{7}{2}a^3$

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB=a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IH}$, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $3a$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$, góc giữa (SAB) và (SCB) bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{24}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{2}a^3}{8}$.

Câu 50. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=a\sqrt{2}$, $A'B$ tạo với đáy một góc bằng 60^0. Thể tích của khối lăng trụ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Câu 51. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông tại A. Cho $AC=AB=2a$, góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) bằng $30°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 52. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA=BC=a$, biết $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Câu 53. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 54. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=4a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $16a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 55. **(Mã 104 2017)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{3a^3}{8}$ **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$ **C.** $V=\dfrac{a^3}{8}$ **D.** $V=\dfrac{3a^3}{4}$

Câu 56. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $30°$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $8\sqrt{3}$. **B.** 8. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{2}$.

Câu 57. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

A. $\frac{3a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 58. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng (A_1BC) tạo với đáy góc $30°$ và tam giác A_1BC có diện tích bằng 8. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = 64\sqrt{3}$. **B.** $V = 2\sqrt{3}$. **C.** $V = 16\sqrt{3}$. **D.** $V = 8\sqrt{3}$.

Câu 59. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên đáy $(A'B'C')$ trùng với trung điểm M của cạnh $B'C'$. Góc nhị diện giữa hai mặt phẳng $(AA'B')$ và (ABC) bằng 60°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{16}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{16}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 60. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 120°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3}{8}a^3$. **B.** $V = \frac{3\sqrt{6}}{8}a^3$. **C.** $V = \frac{3\sqrt{2}}{8}a^3$. **D.** $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Câu 61. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{16}$.

Câu 62. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{8}$. **B.** $V = \frac{9a^3}{8}$. **C.** $V = \frac{a^3}{8}$. **D.** $V = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 63. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm I của BC. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{13}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 64. Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Câu 65. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30^0 và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $8a^2$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $8a^3\sqrt{3}$. **B.** $8a^3$. **C.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{8a^3}{3}$.

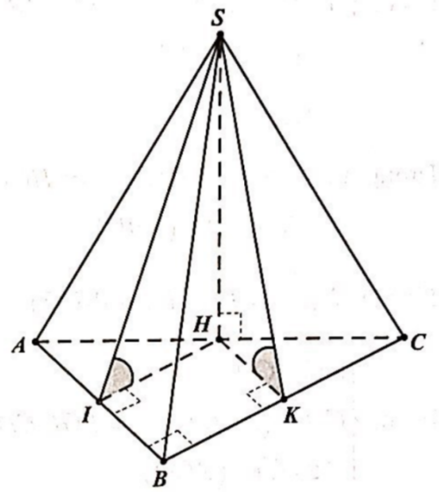
HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy (ABC). Các mặt bên (SAB), (SBC) tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng 60°. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $(SAC)\perp(ABC)$ và $(SAC)\cap(ABC)=AC$.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $SH \perp AC$ thì $SH \perp (ABC)$.

Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh AB và AC thì $\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right)=\widehat{SIH}$ và $\left(\widehat{(SAC),(ABC)}\right)=\widehat{SKH}$. Mà $\widehat{SIH}=\widehat{SKH}=60^\circ$ nên $HI = HK$.

$\Rightarrow$ Tứ giác BIHK là hình vuông $\Rightarrow$H là trung điểm cạnh AC.

Ta có: $AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a$. Khi đó tứ giác BIHK là hình vuông cạnh $\frac{a}{2}$.

$\Rightarrow SH = HI.\tan\widehat{SIH} = \frac{a}{2}.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $3a^3$. **B.** $12a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $9a^3$.

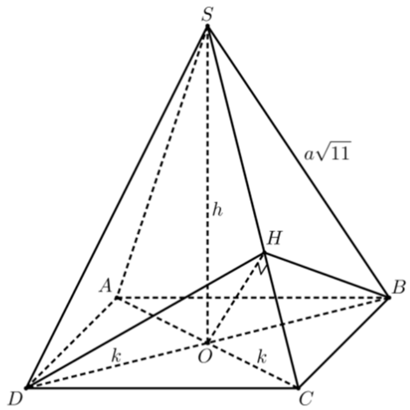
Lời giải

Chọn C

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Đặt $SO = h$, $OA = OB = OC = OD = k$ $(h, k > 0)$. Vì $SA = a\sqrt{11}$ nên $h^2 + k^2 = 11a^2$ (1).

CÁCH 1



Ta có: $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Trong (SAC), kẻ $OH \perp SC$ tại $H \Rightarrow SC \perp (BHD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HB \\ SC \perp HD \end{cases}$.

$\Rightarrow ((SBC),(SCD)) = \widehat{(HB,HD)} \Rightarrow \cos((SBC),(SCD)) = \left|\cos\widehat{BHD}\right| = \dfrac{1}{10}$.

ΔSOC vuông tại O có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \dfrac{SO.OC}{\sqrt{SO^2+OC^2}} = \dfrac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$.

ΔDHO vuông tại O có $DH^2 = DO^2 + OH^2 = k^2 + \dfrac{h^2.k^2}{h^2+k^2} = \dfrac{k^2(2h^2+k^2)}{h^2+k^2}$.

$\Rightarrow \cos^2\widehat{DHO} = \dfrac{OH^2}{DH^2} = \dfrac{h^2}{2h^2+k^2}$.

Vì $\Delta SBC = \Delta SCD$ nên $HB = HD \Rightarrow \Delta BHD$ cân tại $H \Rightarrow HO$ là phân giác của $\widehat{BHD}$.

$\Rightarrow \widehat{BHD} = 2.\widehat{DHO} \Rightarrow \cos\widehat{BHD} = 2\cos^2\widehat{BHO} - 1 = \dfrac{2h^2}{2h^2+k^2} - 1 = \dfrac{-k^2}{2h^2+k^2}$.

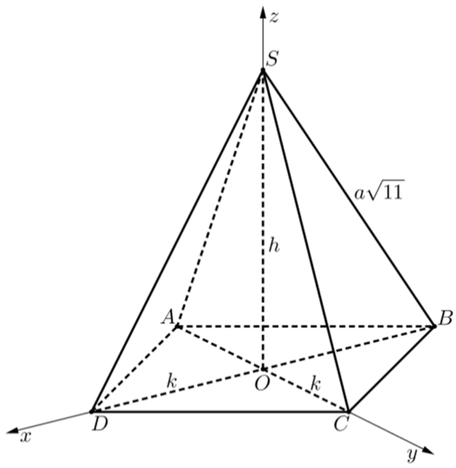
Ta có $\left|\cos\widehat{BHD}\right| = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{k^2}{2h^2+k^2} = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow 9k^2 = 2h^2$ (2).

Từ (1) và (2), ta tìm được $\begin{cases} h^2 = 9a^2 \\ k^2 = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 3a \\ k = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SO = 3a \\ AB = 2a \end{cases}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot 3a.(2a)^2 = 4a^3$.

CÁCH 2

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình sau, với $O(0;0;0)$, $S(0;0;h)$, $D(k;0,0)$, $C(0;k;0)$, $B(-k;0;0)$.



$\Rightarrow \overrightarrow{SC}=(0;k;-h)$, $\overrightarrow{BC}=(k;k;0)$, $\overrightarrow{DC}=(-k;k;0)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BC}\right]=(hk;-hk;-k^2)$, $\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{DC}\right]=(hk;hk;k^2)$.

Đặt $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{n_{(SBC)}}$, $\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{n_{(SCD)}}$.

Khi đó, chọn $\overrightarrow{n_1}=\dfrac{\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BC}\right]}{k}=(h;-h;-k)$, $\overrightarrow{n_2}=\dfrac{\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{DC}\right]}{k}=(h;h;k)$.

Theo giả thiết, $\cos((SBC),(SCD))=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow \dfrac{k^2}{2h^2+k^2}=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow 9k^2=2h^2\ (2)$.

Từ (1) và (2), ta tìm được $\begin{cases}h^2=9a^2\\k^2=2a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}h=3a\\k=a\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}SO=3a\\AB=2a\end{cases}$.

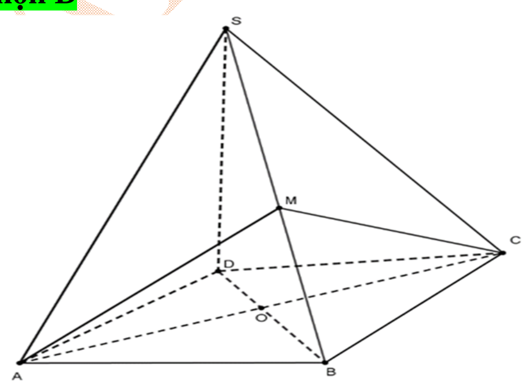
Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot 3a.(2a)^2=4a^3$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $3a$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$, góc giữa (SAB) và (SCB) bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{24}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{2}a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng (ABC) lấy D nằm trên đường trung trực của AC sao cho $SD\perp(ABC)$ và $\widehat{BCD}=\widehat{BAD}=90^0\Rightarrow\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow BD = \dfrac{BC^2}{OB} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow CD = a\sqrt{3}$

Dựng $AM \perp SB$, do $\Delta SAB = \Delta SCB \Rightarrow CM \perp SB \Rightarrow \widehat{((SAB),(SCB))} = \widehat{(AM,CM)}$

+ Nếu $\widehat{AMC} = 60^0 \Rightarrow MC = \dfrac{OC}{\sin 30^0} = 3a = BC$ vô lí vì tam giác MBC vuông tại M

+ Nếu $\widehat{AMC} = 120^0 \Rightarrow MC = \dfrac{OC}{\sin 60^0} = \sqrt{3} \Rightarrow SC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SB = \dfrac{3a\sqrt{6}}{2}$

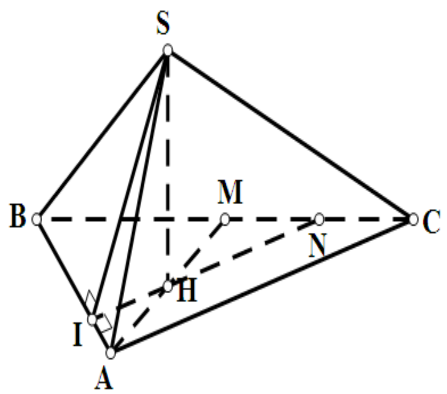
$SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SD = \dfrac{1}{3}.\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{9a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$ và $BC = 2a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của S xuống mặt đáy là điểm H nằm trên AM thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{HM}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{8a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{8a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{12a^2 - 4a^2} = 2a\sqrt{2}$

Vì $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{HM}$ nên H chính là trung điểm của AM.

Kẻ đường thẳng qua H và song song với AC, cắt AB tại I và BC tại N. Vì $HI // AC$ nên $HI \perp AB$. Ta có: $\begin{cases} BI \perp HI \\ BI \perp SH \end{cases} \Rightarrow BI \perp SI$ nên góc giữa (SAB) và (ABC) chính là $\widehat{SIH} = 45°$.

Ta có HN là đường trung bình của tam giác MAC nên $HN = \dfrac{1}{2}AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác ABC, ta có: $\dfrac{IN}{AC} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow IN = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $IH = IN - HN = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2} - a\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SIH vuông tại H và $\hat{I} = 45°$ nên là tam giác cân, do đó $SH = IH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2}.2a.2a\sqrt{2}=\dfrac{2a^3}{3}$

Câu 5. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ, với $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $a^3\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải

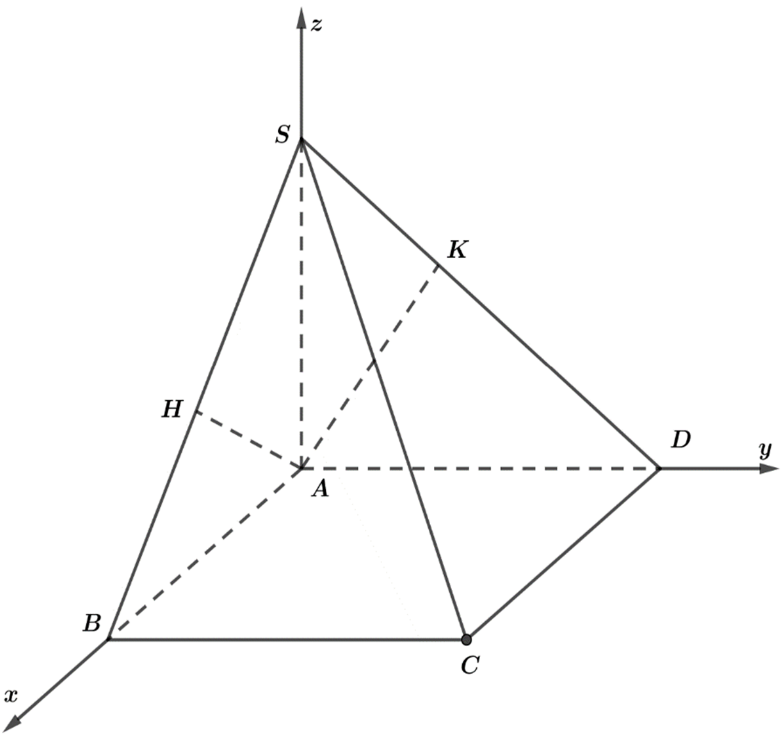
Chọn B

Đặt $AD=x$ với $x>0$.

Trong mặt phẳng (SAC): kẻ $AH\perp SC$ tại H; trong mặt phẳng (SAD): kẻ $AK\perp SD$ tại K.

Dễ dàng chứng minh được $AH\perp(SBC)$, $AK\perp(SCD)$ và H là trung điểm của SB.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ



Ta có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $S(0;0;a)$, $D(0;x;0)$, $H\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{SD}=(0;x;-a)$, $\overrightarrow{AS}=(0;0;a)$, $\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right)$.

Trong tam giác SAD vuông tại A có: $SA^2=SK.SD\Leftrightarrow\dfrac{SK}{SD}=\dfrac{SA^2}{SD^2}=\dfrac{SA^2}{SA^2+AD^2}=\dfrac{a^2}{a^2+x^2}$

$\Rightarrow\overrightarrow{SK}=\dfrac{a^2}{a^2+x^2}\overrightarrow{SD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AS}=\dfrac{a^2}{a^2+x^2}\overrightarrow{SD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}=\dfrac{a^2}{a^2+x^2}\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{AS}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}=\left(0;\dfrac{a^2x}{a^2+x^2};\dfrac{ax^2}{a^2+x^2}\right)$.

Do $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AK}$ lần lượt là hai vec tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) nên:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AK}\right|}{\left|\overrightarrow{AH}\right|.\left|\overrightarrow{AK}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}\left|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AK}\right| = \left|\overrightarrow{AH}\right|.\left|\overrightarrow{AK}\right|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left|\frac{a}{2}.\frac{ax^2}{a^2+x^2}\right| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{\frac{a^4x^2}{(a^2+x^2)^2}+\frac{a^2x^4}{(a^2+x^2)^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2x^2}{a^2+x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{a^2x}{a^2+x^2}.\sqrt{a^2+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x = \sqrt{2}.\sqrt{a^2+x^2} \Leftrightarrow 3x^2 = 2a^2+2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2} = AD.$$

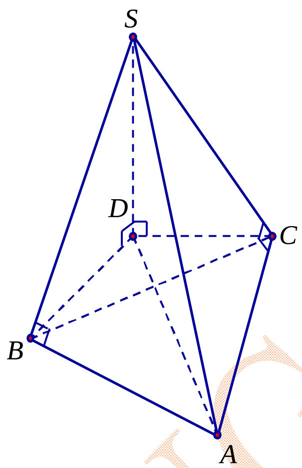
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}SA.AB.AD = \frac{1}{3}.a.a.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, tam giác SBA vuông tại B, tam giác SAC vuông tại C. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), suy ra $SD \perp (ABC)$.

Ta có $SD \perp AB$ và $SB \perp AB$ (gt) suy ra $AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD$.

Tương tự có $AC \perp DC$ hay tam giác ACD vuông ở C.

Dễ thấy $\Delta SBA = \Delta SCA$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông), suy ra $SB = SC$. Từ đó ta chứng minh được $\Delta SBD = \Delta SCD$ nên cũng có $DB = DC$.

Vậy DA là đường trung trực của BC nên cũng là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Ta có $\widehat{DAC} = 30°$, suy ra $DC = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Ngoài ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $\widehat{SBD} = 60°$, suy ra $\tan\widehat{SBD} = \frac{SD}{BD} \Rightarrow SD = BD.\tan\widehat{SBD} = \frac{a}{\sqrt{3}}.\sqrt{3} = a$.

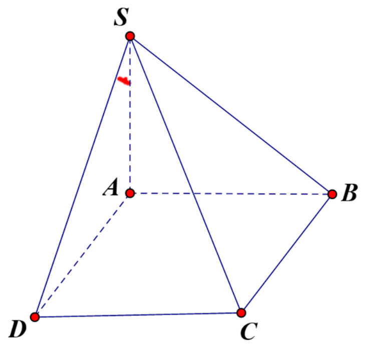
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SD = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\sqrt{3}a^3$. **B.** $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{18}$.

Lời giải

Chọn C



Góc giữa SD và mp (SAB) là $\widehat{DSA}=30^\circ$.

Ta có $SA=\frac{AD}{\tan 30^0}=a\sqrt{3}$.

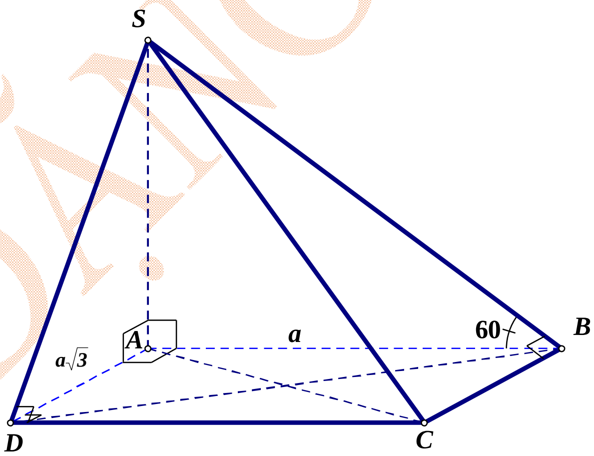
$V=\frac{1}{3}a^2.a\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=3a^3$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $S_{ABCD}=\sqrt{3}a^2$.

Vì $\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC\\ BC\perp SB\subset(SBC)\\ BC\perp AB\subset(ABCD)\end{cases}\Rightarrow \widehat{((SBC),(ABCD))}=\widehat{(SB;AB)}=\widehat{SBA}.$

Vậy $\widehat{SBA}=60^o$

Xét tam giác vuông SAB có: $\tan 60^o=\dfrac{SA}{AB}\Rightarrow SA=AB.\tan 60^o=a\sqrt{3}$

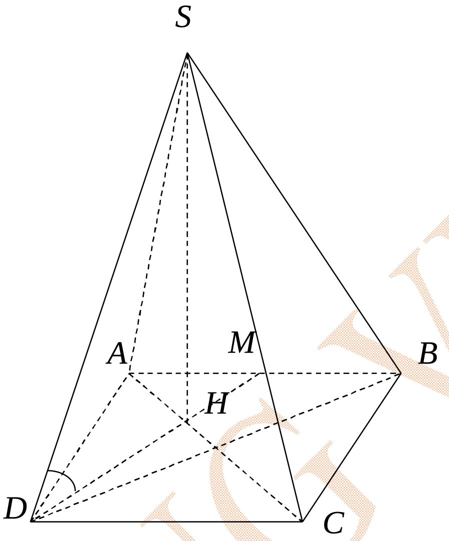
Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\dfrac{1}{3}a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3}=a^3$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm của tam giác ABD. Cạnh SD tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{27}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{9}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có : $DM=\sqrt{AD^2+AM^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\Rightarrow DH=\dfrac{2}{3}DM=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$

$\Rightarrow SH=DH.\tan\widehat{SDH}=\dfrac{a\sqrt{5}}{3}.\tan 60°=\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$.

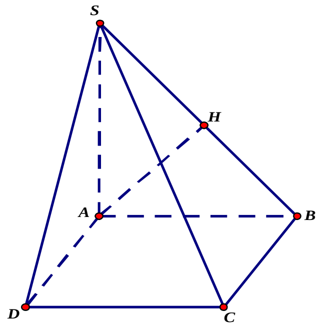
$V_{S.ABCD}=SH.S_{ABCD}=\dfrac{a\sqrt{15}}{3}.a^2=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Câu 10. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp AH$. Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Suy ra $d\left(A;(SBC)\right) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a$.

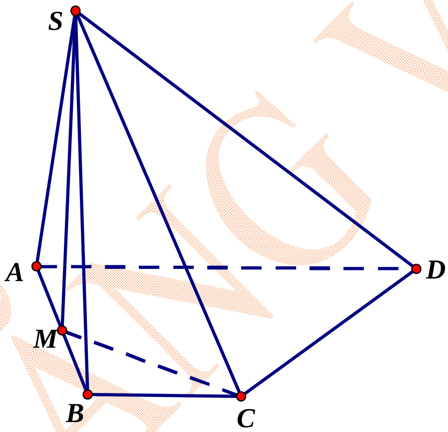
Vậy $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{3}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AB. Biết rằng $SC = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{4}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$. **D.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm AB. Ta có: $MC = \sqrt{BC^2 + MB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ suy ra $SM = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

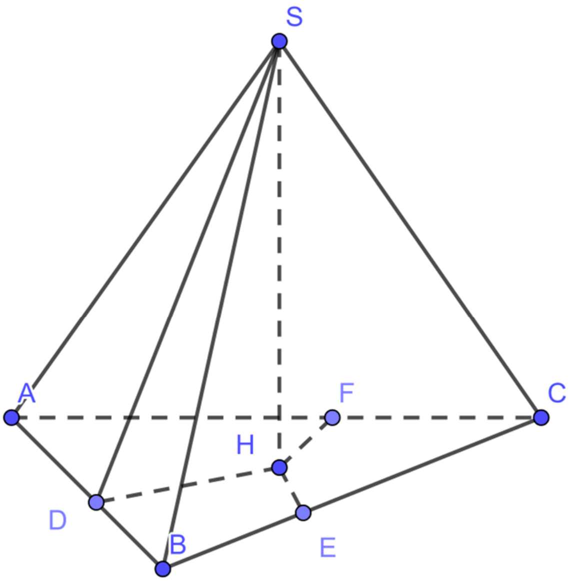
Nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{15}}{2}.\dfrac{(a+2a)a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 3, BC = 4, AC = 5$. Các mặt bên $(SAB),(SAC),(SBC)$ đều cùng hợp với mặt đáy (ABC) một góc $60°$ và hình chiếu H của S lên (ABC) nằm khác phía với A đối với đường thẳng BC. Thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC).

Kẻ $HD \perp AB(D \in AB), HE \perp AC(E \in AC), HF \perp BC(E \in BC)$.

Khi đó ta có $HD = \dfrac{SH}{\tan 30^0} = SH\sqrt{3}, HE = \dfrac{SH}{\tan 45^0} = SH, HF = \dfrac{SH}{\tan 60^0} = \dfrac{SH}{\sqrt{3}}$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ suy ra $\dfrac{1}{2}SH\left(1+\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow SH = \dfrac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

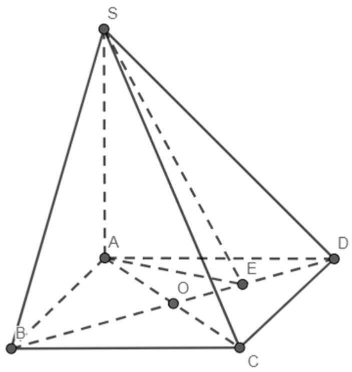
Vậy $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$ và $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{15}$ **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $V = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{15}$ **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn C



Kẻ $AE \perp BD$

$\left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right) = \widehat{SEA} = 60^0$

Xét ΔABD vuông tại A

$$AE = \frac{AD.AB}{\sqrt{AD^2 + AB^2}} = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Xét ΔSAE vuông tại A

$$SA = AE.\tan 60^0 = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.\sqrt{3} = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$$

Khi đó thể tích $S.ABCD$

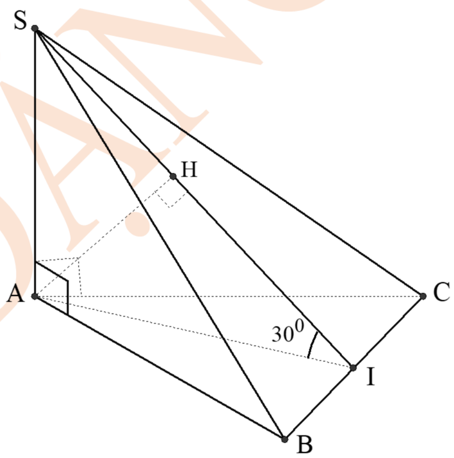
$$V = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{15}}{5}.2a^2 = \frac{4a^3\sqrt{15}}{15}$$

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30^0. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{8a^3}{9}$. **B.** $\frac{8a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{4a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm sủa BC suy ra góc giữa mp(SBC) và mp(ABC) là $\widehat{SIA} = 30^0$.

H là hình chiếu vuông góc của A trên SI suy ra $d(A,(SBC)) = AH = a$.

Xét tam giác AHI vuông tại H suy ra $AI=\dfrac{AH}{\sin 30^0}=2a$.

Giả sử tam giác đều ABC có cạnh bằng x, mà AI là đường cao suy ra $2a=x\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC}=\left(\dfrac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SAI vuông tại A suy ra $SA=AI.\tan 30^0=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

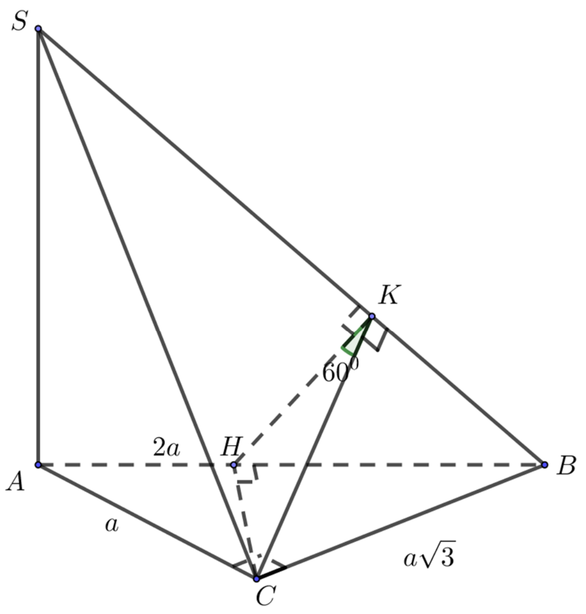
Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SA=\dfrac{1}{3}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}}=\dfrac{8a^3}{9}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AB=2a$, $AC=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60°. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Trong ΔABC kẻ $CH\perp AB\Rightarrow CH\perp(SAB)\Rightarrow CH\perp SB(1)$.

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=a\sqrt{3}$,

$BH.BA=BC^2$,

$\Rightarrow BH=\dfrac{3a}{2}$, $CH=\sqrt{BC^2-BH^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSAB kẻ $HK\perp SB\Rightarrow CK\perp SB(2)$.

Từ $(1),(2)\Rightarrow HK\perp SB$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là $\widehat{CKH}=60°$.

Trong vuông ΔCKH có $HK=CH.\cot 60°=\dfrac{a}{2}$, $BK=\sqrt{BH^2-HK^2}=a\sqrt{2}$.

$\Delta SAB\backsim\Delta HKB(g.g)$ nên $\dfrac{SA}{HK}=\dfrac{AB}{BK}=\dfrac{2a}{a\sqrt{2}}\Rightarrow SA=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

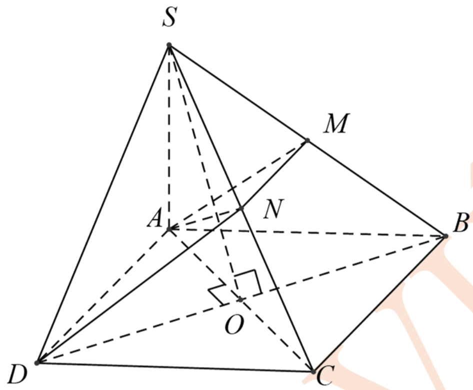
Thể tích hình chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}\dfrac{a}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{2}.a\sqrt{3}.a=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $ABCD$ bằng 60^0. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,SC. Tính thể tích khối chóp $S.ADNM$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{16}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **C.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{16}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O=AC\cap BD$.

$AO\perp BD\Rightarrow SO\perp BD$. Nên góc của (SBD) và $ABCD$ là góc $\widehat{SOA}=60^0$.

$V_{S.ADN}=\dfrac{1}{2}.V_{S.ADC}=\dfrac{1}{4}.V_{S.ABCD}$ và $V_{S.AMN}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}V_{S.ABC}=\dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}$.

$\Rightarrow V_{S.ADMN}=V_{S.ADN}+V_{S.AMN}=\dfrac{3}{8}V_{S.ABCD}$.

$SA=AO.\tan\widehat{SOA}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

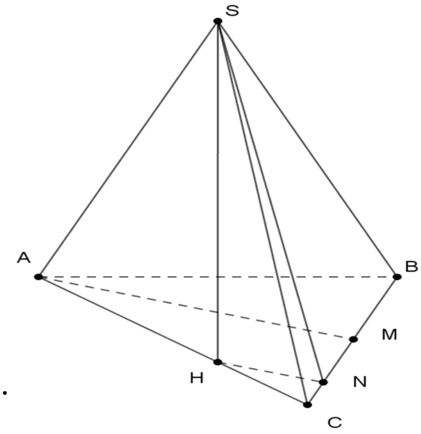
$\Rightarrow V_{S.ADMN}=\dfrac{3}{8}.\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{16}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên đáy là điểm H trên cạnh AC sao cho $AH=\dfrac{2}{3}AC$; mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC.

$N \in CM: \dfrac{CN}{CM} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow HN // AM$. Mà

ΔABC đều nên $AM \perp BC \Rightarrow HN \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHN)$.

Nên $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SN;HN} = \widehat{SNH} = 60^o$.

Do ΔABC đều nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HN = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

ΔSHN vuông tại H có $SH = HN.\sin\widehat{SNH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sin 60^o = \dfrac{a}{4}$.

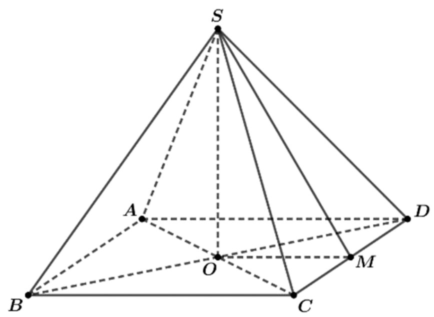
$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Câu 18. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của đáy, gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} SO \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases}$ nên $(SOM) \perp BC$, suy ra $[(SCD),(ABCD)] = (SM, OM) = \widehat{SMO} = 60^0$.

Có $OM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$, $SO = OM\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

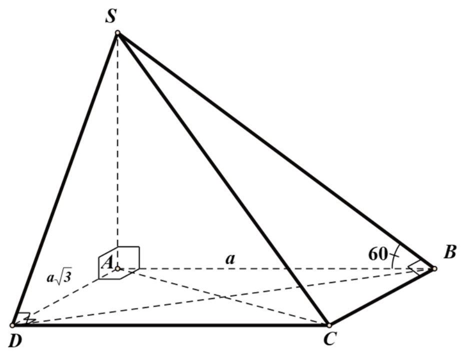
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 19. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 3a^3$ **B.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **C.** $V = a^3$ **D.** $V = \dfrac{a^3}{3}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $S_{ABCD}=\sqrt{3}a^2$.

Vì $\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC\\ BC\perp SB\subset(SBC)\\ BC\perp AB\subset(ABCD)\end{cases}\Rightarrow\widehat{((SBC),(ABCD))}=\widehat{(SB;AB)}=\widehat{SBA}$.

Vậy $\widehat{SBA}=60^o$

Xét tam giác vuông SAB có: $\tan 60^o=\dfrac{SA}{AB}\Rightarrow SA=AB.\tan 60^o=a\sqrt{3}$

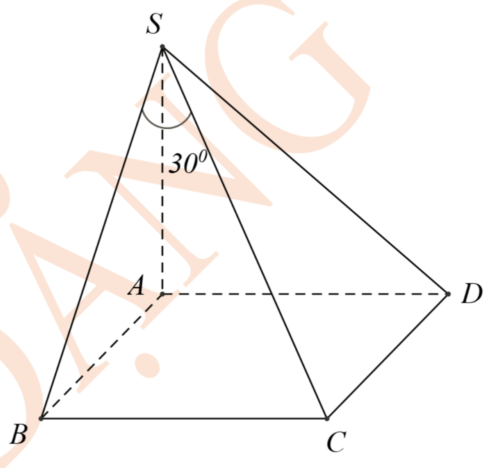
Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\dfrac{1}{3}a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3}=a^3$.

Câu 20. **(Mã 123 2017)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\dfrac{2a^3}{3}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$ **D.** $\sqrt{2}a^3$

Lời giải

Chọn B



+) Do ABCD là hình vuông cạnh a nên: $S_{ABCD}=a^2$

+) Chứng minh được $BC\perp(SAB)\Rightarrow$ góc giữa SC và (SAB) là $\widehat{CSB}=30^0$.

+) Đặt $SA=x\Rightarrow SB=\sqrt{x^2+a^2}$. Tam giác SBC vuông tại B nên $\tan\widehat{CSA}=\tan 30^0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{BC}{SB}$

Ta được: $SB=BC\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+a^2}=a\sqrt{3}\Rightarrow x=a\sqrt{2}$.

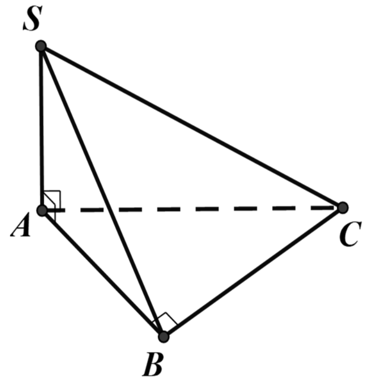
Vậy $V_{SABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ (Đvtt)

Câu 21. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $\widehat{ACB}=60°$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và SB hợp với mặt đáy một góc $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $V=\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Lời giải

Chọn A



ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $\widehat{ACB}=60° \Rightarrow BC=\frac{AB}{\tan 60^0}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

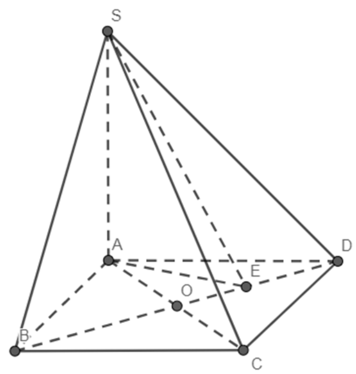
$\widehat{(SB,(ABC))}=\widehat{(SB,AB)}=45^0$ nên tam giác SAB vuông cân tại S $\Rightarrow SA=AB=a$

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}BA.BC.SA=\frac{1}{6}a.a\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$ và $AD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{15}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $V=\frac{4a^3\sqrt{15}}{15}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Lời giải



Chọn C

Kẻ $AE\perp BD$

$\left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right)=\widehat{SEA}=60^0$

Xét ΔABD vuông tại A

$AE=\frac{AD.AB}{\sqrt{AD^2+AB^2}}=\frac{2a^2}{a\sqrt{5}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Xét ΔSAE vuông tại A

$SA=AE.\tan 60^0=\frac{2a\sqrt{5}}{5}.\sqrt{3}=\frac{2a\sqrt{15}}{5}$

Khi đó thể tích $S.ABCD$

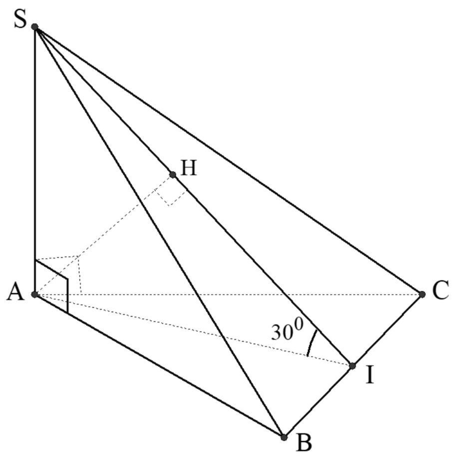
$V=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{15}}{5}.2a^2=\frac{4a^3\sqrt{15}}{15}$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA\perp(ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30^0. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{8a^3}{9}$. **B.** $\dfrac{8a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{4a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm sủa BC suy ra góc giữa mp(SBC) và mp(ABC) là $\widehat{SIA}=30^0$.

H là hình chiếu vuông góc của A trên SI suy ra $d\left(A,(SBC)\right)=AH=a$.

Xét tam giác AHI vuông tại H suy ra $AI=\dfrac{AH}{\sin 30^0}=2a$.

Giả sử tam giác đều ABC có cạnh bằng x, mà AI là đường cao suy ra $2a=x\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC}=\left(\dfrac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SAI vuông tại A suy ra $SA=AI.\tan 30^0=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

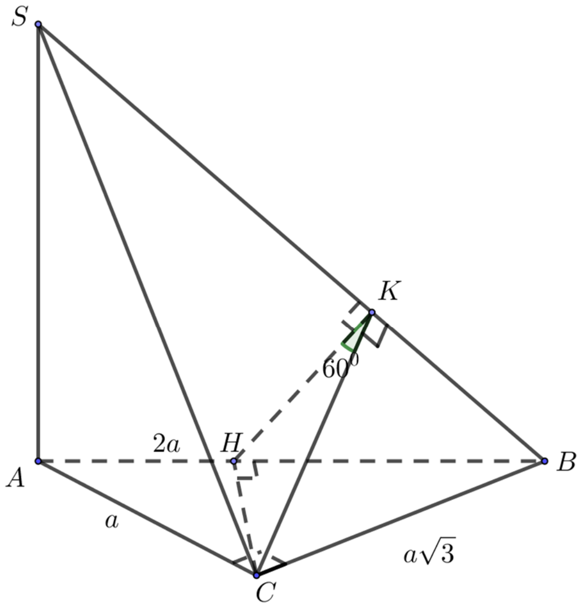
Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SA=\dfrac{1}{3}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}}=\dfrac{8a^3}{9}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AB=2a$, $AC=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Trong ΔABC kẻ $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow CH \perp SB(1)$.

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = a\sqrt{3}$,

$BH.BA = BC^2$,

$\Rightarrow BH = \dfrac{3a}{2}$, $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSAB kẻ $HK \perp SB \Rightarrow CK \perp SB(2)$.

Từ $(1),(2) \Rightarrow HK \perp SB$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là $\widehat{CKH} = 60°$.

Trong vuông ΔCKH có $HK = CH.\cot 60° = \dfrac{a}{2}$, $BK = \sqrt{BH^2 - HK^2} = a\sqrt{2}$.

$\Delta SAB \backsim \Delta HKB(g.g)$ nên $\dfrac{SA}{HK} = \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{2a}{a\sqrt{2}} \Rightarrow SA = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

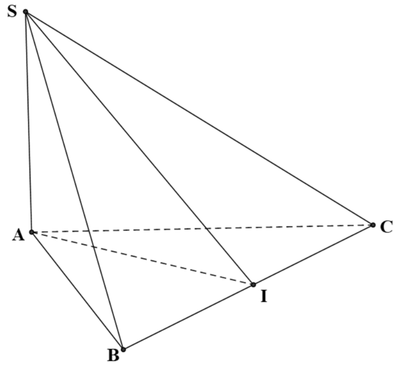
Thể tích hình chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{2}.a.\sqrt{3}.a = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 25. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120°$, biết $SA \perp (ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



➢ Gọi I là trung điểm BC.

+ Do ΔABC cân tại A nên $BC \perp AI$

+ Mặt khác do $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA$

Suy ra $BC \perp SI$.

Do đó góc giữa (SBC) và đáy chính là góc $\widehat{SIA} = 45°$.

➢ Xét ΔAIB vuông tại I có $IB = a$, $\widehat{IAB} = 60°$, suy ra $IA = \dfrac{IB}{\tan 60°} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

ΔSAI vuông tại A có $IA = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $\widehat{SIA} = 45°$ nên ΔSAI vuông cân tại A, do đó $SA = IA = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

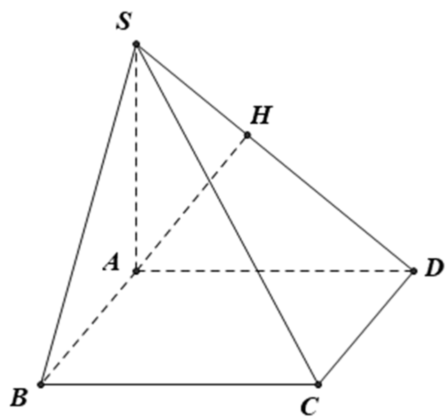
➢ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}BC.AI.SA = \dfrac{a^3}{9}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$; SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích của khối chóp theo a.

A. $\dfrac{4\sqrt{15}}{45}a^3$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{45}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng SD. Ta có

$\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = d\left(A,(SCD)\right)$. Suy ra $AH = \dfrac{a}{2}$.

ΔSAD vuông tại A có đường cao AH nên

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}\Leftrightarrow\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AD^2}=\frac{15}{4a^2}\Rightarrow SA=\frac{2a\sqrt{15}}{15}.$$

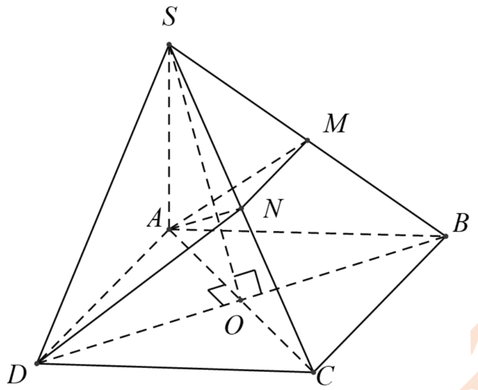
Vậy $V=\frac{1}{3}AB.AD.SA=\frac{1}{3}a.2a.\frac{2a\sqrt{15}}{15}=\frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $ABCD$ bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính thể tích khối chóp $S.ADNM$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{16}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **C.** $V=\frac{3a^3\sqrt{6}}{16}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O=AC\cap BD$.

$AO\perp BD\Rightarrow SO\perp BD$. Nên góc của (SBD) và $ABCD$ là góc $\widehat{SOA}=60^0$.

$V_{S.ADN}=\frac{1}{2}.V_{S.ADC}=\frac{1}{4}.V_{S.ABCD}$ và $V_{S.AMN}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}V_{S.ABC}=\frac{1}{8}V_{S.ABCD}$.

$\Rightarrow V_{S.ADMN}=V_{S.ADN}+V_{S.AMN}=\frac{3}{8}V_{S.ABCD}$.

$SA=AO.\tan\widehat{SOA}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan 60^0=\frac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

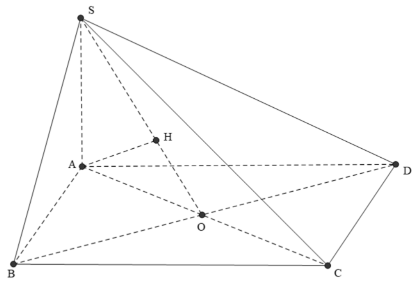
$\Rightarrow V_{S.ADMN}=\frac{3}{8}.\frac{a^3\sqrt{6}}{6}=\frac{a^3\sqrt{6}}{16}$.

Câu 28. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$, gọi H là hình chiếu của A lên SO.
Vì O là trung điểm của AC nên $d\left(C,\left(SBD\right)\right) = d\left(A,\left(SBD\right)\right)$

Ta có: $BD \perp AC; BD \perp SA \Rightarrow BD \perp \left(SAC\right) \Rightarrow \left(SBD\right) \perp \left(SAC\right)$;

$SO = \left(SAC\right) \cap \left(SBD\right)$

$AH \perp SO \Rightarrow AH \perp \left(SBD\right) \Rightarrow AH = d\left(A,\left(SBD\right)\right) = d\left(C,\left(SBD\right)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Ta có: $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác SAO: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AO^2} \Rightarrow SA = a$.

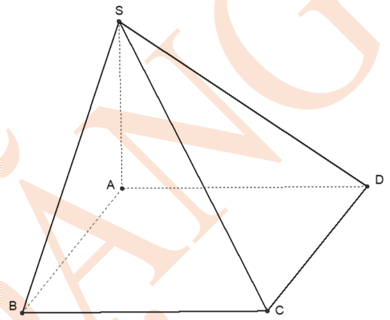
$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \dfrac{a^3}{3}$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng $\left(SAB\right)$ một góc bằng $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \sqrt{3}a^3$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{18}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh, SA vuông góc với mặt đáy nên $DA \perp AB$ và $DA \perp SA$. Suy ra $DA \perp \left(SAB\right)$. Vậy góc giữa SD và mặt phẳng $\left(SAB\right)$ là $\widehat{DSA} = 30°$.

Ta có $SA = AD.\cot 30° = a\sqrt{3}$

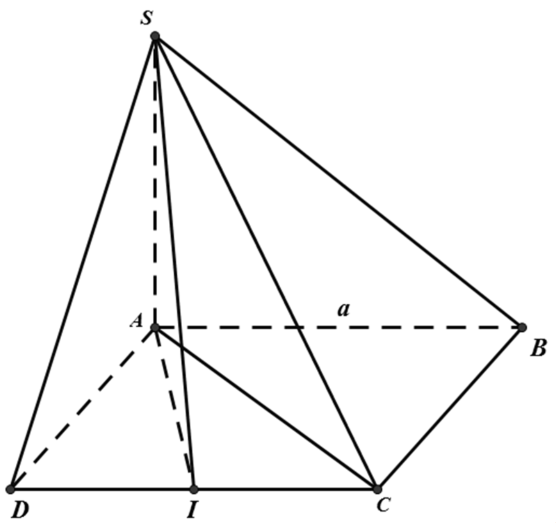
$V = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, góc BAD bằng 120^0, $AB = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy là 60^0. Tính thể tích V của chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{15}}{15}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{12}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{13}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy nên $SA \perp mp(ABCD)$.

Ta có tam giác ABC đều cạnh a, gọi I là trung điểm của BC khi đó: $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Và góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy là $\widehat{SIA} = 60^0$.

Xét tam giác SAI ta có: $\dfrac{SA}{AI} = \tan\left(\widehat{SIA}\right) \Rightarrow SA = AI\tan\left(60^0\right) \Rightarrow SA = \dfrac{3a}{2}$.

Ta có diện tích đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2\left(\dfrac{1}{2}AI.BC\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

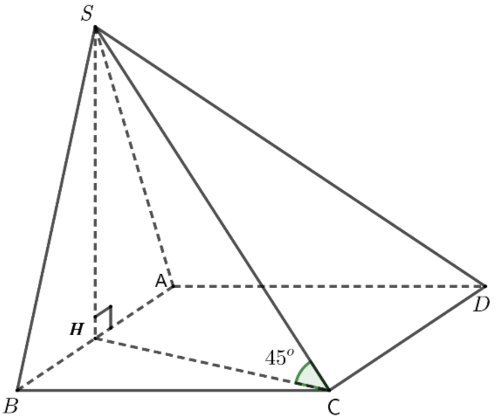
Thể tích của chóp $S.ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của AB, ΔSAB cân tại $S \Rightarrow SH \perp AB$

$$\left.\begin{array}{l}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\SH\subset(SAB);SH\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$$

$\widehat{(SC;(ABCD))}=\widehat{SCH}=45^o \Rightarrow \Delta SHC$ vuông cân tại H

$$\Rightarrow SH=HC=\sqrt{BC^2+BH^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2};\ S_{ABCD}=AB^2=a^2$$

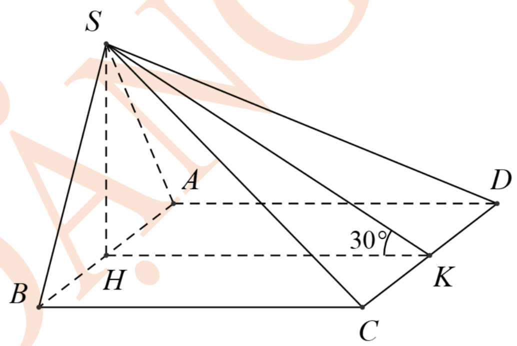
$$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{5}}{2}=\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$$

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{36}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB và CD.

Suy ra $SH\perp(ABCD)$ và $\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=\widehat{SKH}=30°$.

Xét ΔSHK vuông tại H, có $HK=\frac{SH}{\tan 30°}=\frac{a\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3a}{2}$.

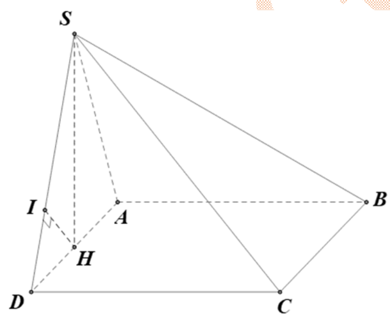
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a.\frac{3a}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h=\frac{4}{3}a$ **B.** $h=\frac{3}{2}a$ **C.** $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$ **D.** $h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của AD. Nên $SH\perp AD$

$$\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\Rightarrow SH\perp(ABCD)\\AD\perp SH\end{cases}$$

Ta có: $S_{ABCD}=2a^2$

$$\Rightarrow SH=\frac{3V}{S_{ABCD}}=\frac{3.4a^3/3}{2a^2}=2a$$

Gọi I là hình chiếu của H lên SD

$d(B;(SCD))=d(A;(SCD))=2d(H;(SCD))=2IH$

Mà $IH=\frac{SH.HD}{SD}=\frac{SH.HD}{\sqrt{SH^2+HD^2}}=\frac{2a.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{2}{3}a$

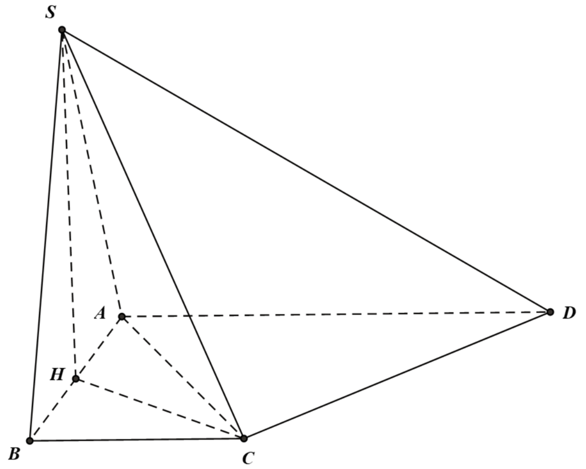
Vậy $d(B;(SCD))=\frac{4}{3}a$

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BC=\frac{1}{2}AD=a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α sao cho $\tan\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$ theo a.

A. $V_{S.ACD}=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AB, từ giả thiết ta có: $SH \perp (ABCD)$, $(SC,(ABCD)) = \widehat{SCH} = \alpha$.

Đặt $AB = x$, ta có: $HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + a^2}$, $SH = HC.\tan\alpha = \sqrt{\frac{x^2}{4} + a^2}.\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Mặt khác $SH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Vậy ta có: $\sqrt{\frac{x^2}{4} + a^2}.\frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = a$.

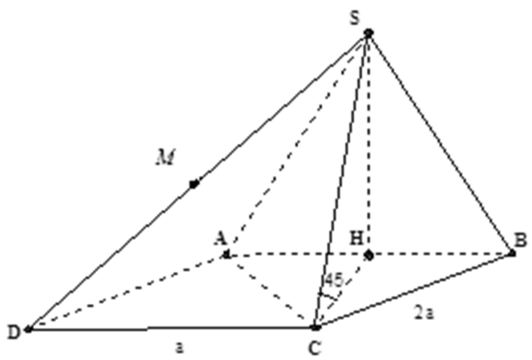
$S_{ABCD} = \frac{(AD+BC).AB}{2} = \frac{3a^2}{2}$; $S_{ACD} = \frac{2}{3}S_{ABCD} = a^2$; $V_{S.ACD} = \frac{1}{3}SH.S_{ACD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật; $AB = a; AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mp$(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến (SAC).

A. $d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$. **B.** $d = \frac{2a\sqrt{1315}}{89}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{1315}}{89}$. **D.** $d = \frac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm đoạn $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Xét $\triangle BCH$ vuông tại B, có: $CH = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Xét $\triangle SHC$ vuông cân tại H, có: $SH = \frac{a\sqrt{17}}{2}; SC = \frac{a\sqrt{34}}{2}$.

Xét $\triangle SAH$ vuông tại H, có: $SA=\sqrt{\frac{17a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B, có: $AC=\sqrt{a^2+4a^2}=a\sqrt{5}$.

$\Rightarrow S_{\triangle SAC}=\frac{\sqrt{89}}{4}a^2$.

Ta có: $V_{S.ABCD}=V=\frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{17}}{3}$; $V_{S.ACD}=\frac{1}{2}V=\frac{a^3\sqrt{17}}{6}$.

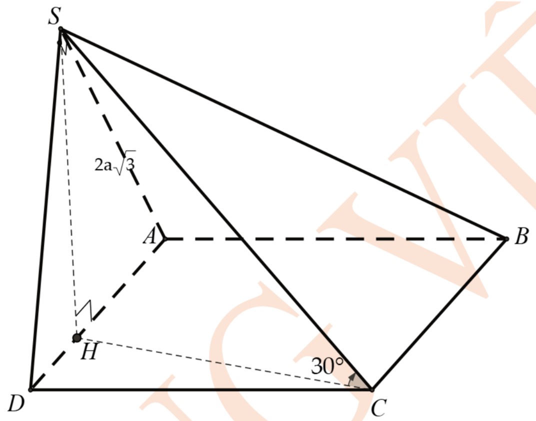
$V_{S.ACM}=\frac{1}{2}V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{17}}{12}$. Mà $V_{S.MAC}=\frac{1}{3}.d.S_{\triangle SAC}=\frac{\sqrt{89}}{12}a^2.d\Rightarrow d=\frac{a\sqrt{1513}}{89}$.

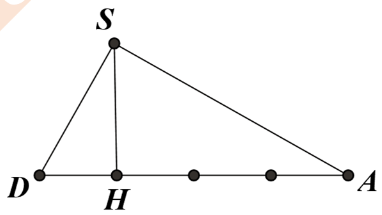
Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA=3HD$. Biết rằng $SA=2a\sqrt{3}$ và SC tạo với đáy một góc bằng $30°$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=8\sqrt{6}a^3$. **B.** $V=\frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V=8\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=\frac{8\sqrt{6}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn B





$SH^2=HD.HA=3HD^2\Rightarrow SH=\sqrt{3}HD$

Có: $\begin{cases}\tan\widehat{SDH}=\frac{SH}{DH}=\sqrt{3}\\ \tan\widehat{SDH}=\frac{SA}{SD}\end{cases}\Rightarrow\frac{SA}{SD}=\sqrt{3}\Rightarrow SD=\frac{SA}{\sqrt{3}}=2a\Rightarrow DA=\sqrt{SD^2+SA^2}=4a$.

$DH=\frac{1}{4}DA=a$.

Tam giác SHC có $\tan\widehat{SCH}=\frac{SH}{HC}\Rightarrow\tan 30°=\frac{SH}{HC}\Rightarrow HC=\frac{SH}{\tan 30°}=3a$.

Tam giác DHC có $DC=\sqrt{DH^2+HC^2}=2\sqrt{2}a$

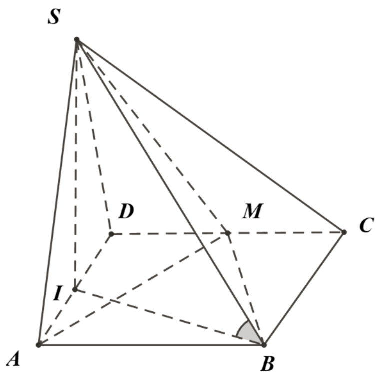
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.AD.DC=\frac{1}{3}.\sqrt{3}a.4a.2\sqrt{2}a=\frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$

Câu 37. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AD; gọi M là trung điểm của CD; cạnh bên SB hợp với đáy góc 60°. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABM$.

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}a^2$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$

$IB = \sqrt{IA^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Ta có IB là hình chiếu vuông góc của SB lên $mp(ABCD) \Rightarrow (SB,(ABCD)) = (SB, IB) = 60^\circ$

Ta có $SI = IB.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{3}.SI.S_{\Delta ABM} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{2}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên đáy là điểm H trên cạnh AC sao cho $AH = \frac{2}{3}AC$; mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là?

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Lời giải

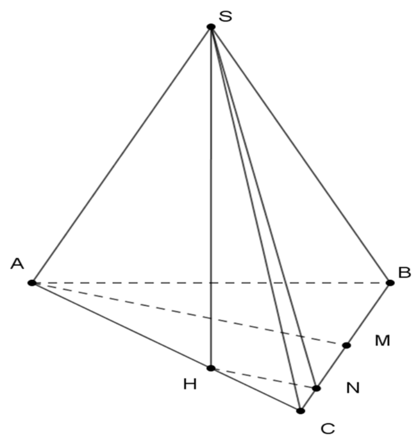
Gọi M là trung điểm của BC.

$N \in CM : \frac{CN}{CM} = \frac{CH}{CA} = \frac{1}{3} \Rightarrow HN // AM$. Mà

ΔABC đều nên $AM \perp BC \Rightarrow HN \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHN)$.

Nên $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SN;HN} = \widehat{SNH} = 60^o$.

Do ΔABC đều nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HN = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.



ΔSHN vuông tại H có $SH = HN.\sin\widehat{SNH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sin 60^o = \dfrac{a}{4}$.

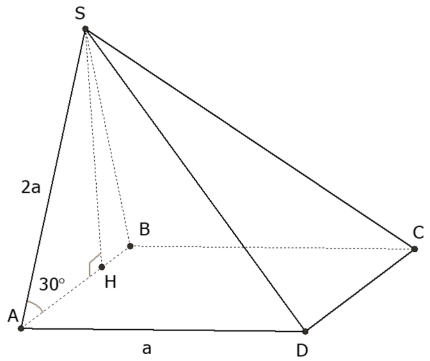
$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, $\widehat{SAB} = 30^0$, $SA = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{9}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên cạnh AB.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAB) \cap (ABCD) = AB$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Xét tam giác SAH vuông tại H ta có: $\sin\widehat{SAB} = \dfrac{SH}{SA} \Rightarrow SH = \sin 30^0.SA = a$.

Mặt khác: $S_{ABCD} = AD^2 = a^2$.

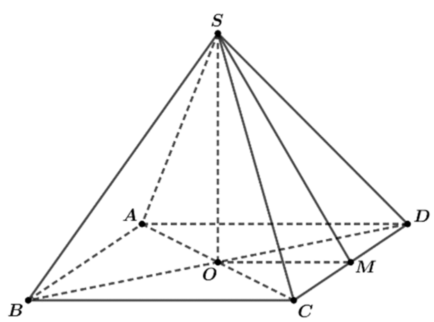
Nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD}.a = \dfrac{1}{3} \cdot a^2.a = \dfrac{a^3}{3}$.

Câu 40. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của đáy, gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} SO \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases}$ nên $(SOM) \perp BC$, suy ra $\left[(SCD),(ABCD)\right] = (SM,OM) = \widehat{SMO} = 60^0$.

Có $OM = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, $SO = OM\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

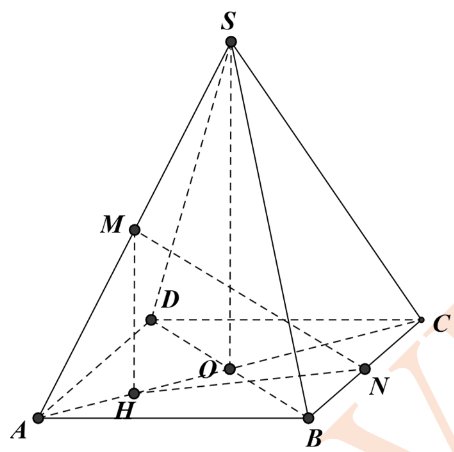
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 41. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{10}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{30}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{30}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{10}}{3}$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm AO. Khi đó góc giữa MN và $(ABCD)$ là $\widehat{MNH}$.

Ta có $HN = \sqrt{CN^2 + CH^2 - 2CN.CH.\cos 45^0} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Suy ra $MH = HN.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{10}}{4}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{30}}{4}$.

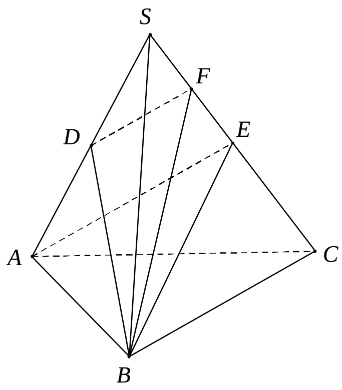
Do đó $SO = 2MH = \frac{a\sqrt{30}}{2}$.

Câu 42. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = a$. Gọi D,E lần lượt là trung điểm của SA,SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a, biết BD vuông góc với AE.

A. $\frac{a^3\sqrt{21}}{54}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{7}}{27}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{21}}{27}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi F là trung điểm $SE \Rightarrow BD \perp DF$; gọi $AB = x$

Ta có $BE^2 = BD^2 = AE^2 = \dfrac{2AS^2 + 2AC^2 - SC^2}{4} = \dfrac{2a^2 + 2x^2 - a^2}{4} = \dfrac{a^2 + 2x^2}{4}$

$$BF^2 = \frac{2BS^2 + 2BE^2 - SE^2}{4} = \frac{2a^2 + \frac{a^2 + 2x^2}{2} - \frac{a^2}{4}}{4} = \frac{9a^2 + 4x^2}{16}$$

$$BF^2 = BD^2 + DF^2 \Leftrightarrow BF^2 = \frac{5BD^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9a^2 + 4x^2}{16} = \frac{5}{4}.\frac{a^2 + 2x^2}{4} \Leftrightarrow 9a^2 + 4x^2 = 5a^2 + 10x^2 \Leftrightarrow 4a^2 = 6x^2 \Rightarrow x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC) khi đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

Tam giác ABC đều có cạnh là $x \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{7}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{54}$

Hoặc sử dụng công thức tính thể tích chóp tam giác ABC đều có cạnh bên bằng a, cạnh đáy bằng x

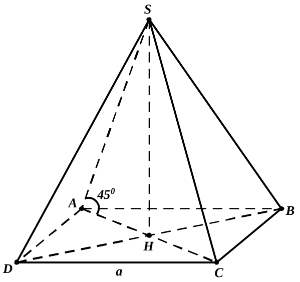
$$V_{S.ABC} = \frac{x^2.\sqrt{3a^2 - x^2}}{12} = \frac{\frac{2a^2}{3}\sqrt{3a^2 - \frac{2a^2}{3}}}{12} = \frac{a^3\sqrt{21}}{54}$$

Câu 43. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và chân đường cao H trùng với tâm của hình vuông $ABCD$.

Diện tích đáy của khối chóp $S.ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

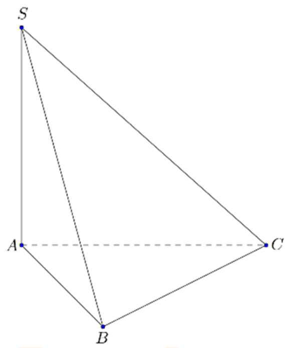
Nhận thấy HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC). Vì thế $(SA,(ABC)) = (SA, HA)$ $= \widehat{SAH}$. Suy ra $\widehat{SAH} = 45°$.

Xét tam giác ABC vuông tại B, ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$. Suy ra $HA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SHA vuông tại H và có $\widehat{SAH} = 45°$ nên là tam giác vuông cân tại H. Suy ra SH $= HA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

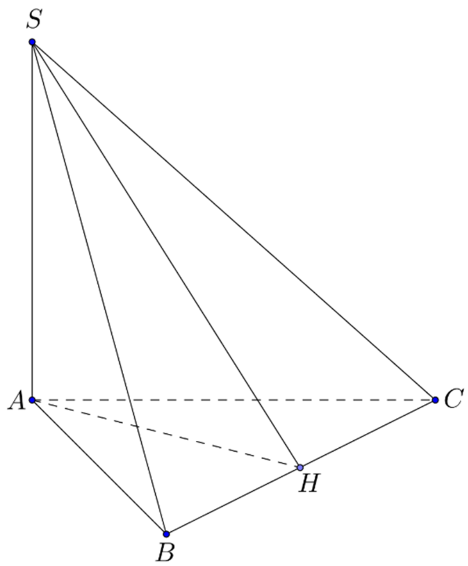
Câu 44. **(ĐTK2021)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) là 45^o (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng



A. $\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là chân đường cao từ đỉnh A của tam giác ABC (H là trung điểm BC).

Từ A dựng AE vuông góc SH trong (SAH)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$

Ta có: đường thẳng SH là hình chiếu của đường thẳng SA lên (SBC)

$\Rightarrow \left[SA,(SBC)\right] = (SA, SH) = \widehat{ASH} = 45^o \Rightarrow \Delta SAH$ vuông cân tại A.

Ta có: AH là đường cao trong tam giác đều ABC $\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow SA = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

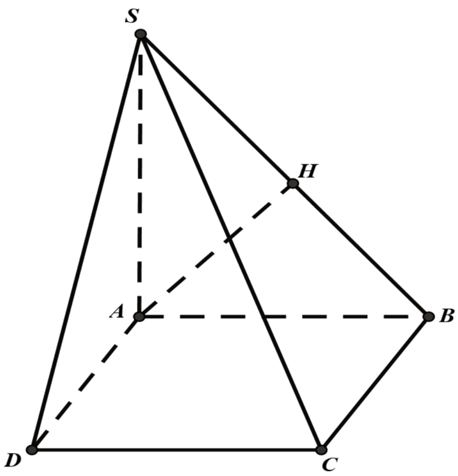
$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} SA.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$.

Câu 45. **(Mã 105 2017)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\dfrac{a^3}{3}$ **B.** a^3 **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$ **D.** $\dfrac{a^3}{2}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp AH$. Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Suy ra $d\left(A;(SBC)\right) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a$.

Vậy $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{3}$.

Câu 46. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $3a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $6a^3\sqrt{3}$. **C.** $12a^3$. **D.** $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.

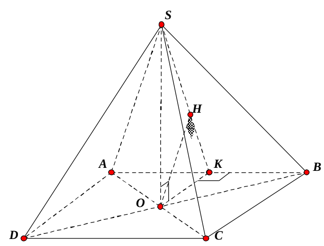
Lời giải

Chọn C

Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có $\begin{cases} CD \,//\, AB \\ AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow d\left(CD, SA\right) = d\left(CD, (SAB)\right) = d\left(D, (SAB)\right) = 2d\left(O, (SAB)\right)$.

Kẻ $\begin{cases} OK \perp AB \\ OH \perp SK \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d\left(O, (SAB)\right) = \dfrac{3a}{2}$.



Xét $\Delta\ SOK$: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OK^2} \Leftrightarrow SO = 3a$.

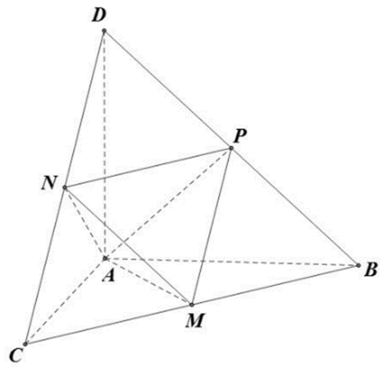
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD: V = \dfrac{1}{3} S_{ABCD}.SO = 12a^3$.

Câu 47. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V = 7a^3$ **B.** $V = 14a^3$ **C.** $V = \dfrac{28}{3}a^3$ **D.** $V = \dfrac{7}{2}a^3$

Lời giải

Chọn A



Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}AB.\frac{1}{2}AD.AC=\frac{1}{6}6a.7a.4a=28a^3$

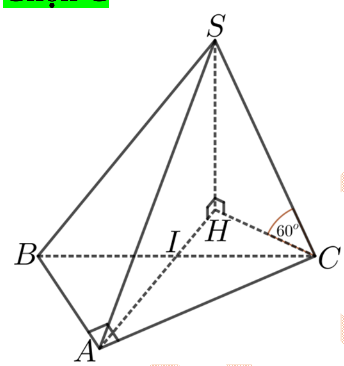
Ta nhận thấy $S_{MNP}=\frac{1}{2}S_{MNPD}=\frac{1}{4}S_{BCD}\Rightarrow V_{AMNP}=\frac{1}{4}V_{ABCD}=7a^3$.

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB=a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IH}$, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2}=a^2$.

$BC=2a,\ IA=a,\ IH=\frac{a}{2}$.

Tam giác HIC vuông tại I ta có $HC^2=HI^2+IC^2=\frac{a^2}{4}+a^2=\frac{5a^2}{4}\Rightarrow HC=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\tan\widehat{SCH}=\frac{SH}{HC}\Leftrightarrow SH=HC.\tan\widehat{SCH}=\frac{a\sqrt{5}}{2}.\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

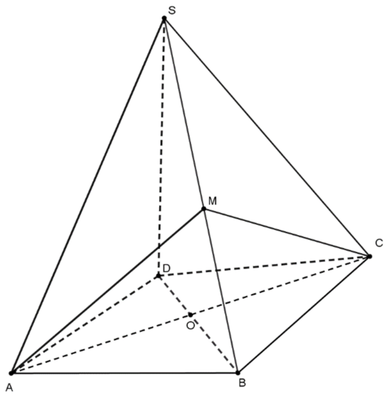
Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $3a$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$, góc giữa (SAB) và (SCB) bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$. **D.** $\frac{9\sqrt{2}a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Trong mặt phẳng (ABC) lấy D nằm trên đường trung trực của AC sao cho $SD \perp (ABC)$ và $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow BD = \dfrac{BC^2}{OB} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow CD = a\sqrt{3}$

Dựng $AM \perp SB$, do $\Delta SAB = \Delta SCB \Rightarrow CM \perp SB \Rightarrow \widehat{((SAB),(SCB))} = \widehat{(AM,CM)}$

+ Nếu $\widehat{AMC} = 60^0 \Rightarrow MC = \dfrac{OC}{\sin 30^0} = 3a = BC$ vô lí vì tam giác MBC vuông tại M

+ Nếu $\widehat{AMC} = 120^0 \Rightarrow MC = \dfrac{OC}{\sin 60^0} = \sqrt{3} \Rightarrow SC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SB = \dfrac{3a\sqrt{6}}{2}$

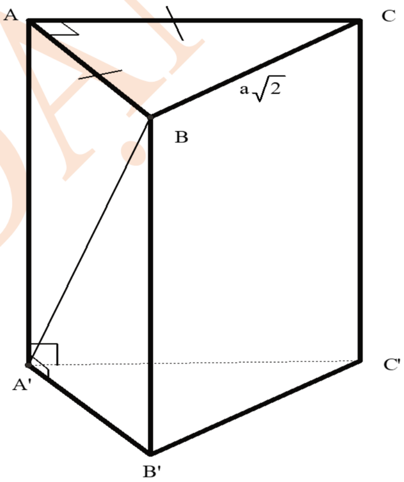
$SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SD = \dfrac{1}{3}.\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{9a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 50. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$, $A'B$ tạo với đáy một góc bằng 60^0. Thể tích của khối lăng trụ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a.a = \frac{1}{2}a^2$.

$A'B$ tạo với đáy một góc bằng $60^0 \Rightarrow \widehat{BA'B'} = 60^0$.

$\Delta_v BA'B'$: $\tan\widehat{BA'B'} = \frac{BB'}{A'B'} = \sqrt{3} \Rightarrow BB' = \sqrt{3}A'B' = a\sqrt{3}.$

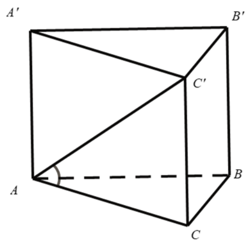
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'} = BB'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{3}.\frac{1}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 51. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông tại A. Cho $AC = AB = 2a$, góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) bằng $30°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 2a^2$.

Hình chiếu vuông góc của AC' lên (ABC) là AC.

$\Rightarrow$ Góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) là góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và AC hay $\widehat{C'AC}$

Theo bài ra có $\widehat{C'AC} = 30°$.

Xét tam giác $C'CA$ vuông tại C có $CC' = AC.\tan 30° = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

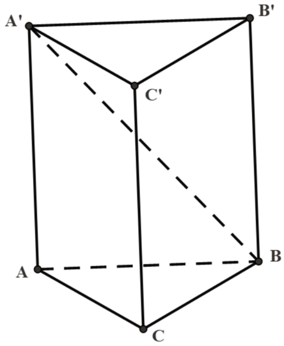
Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{ABC} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.2a^2 = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 52. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{A'BA}=60^0 \Rightarrow A'A = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

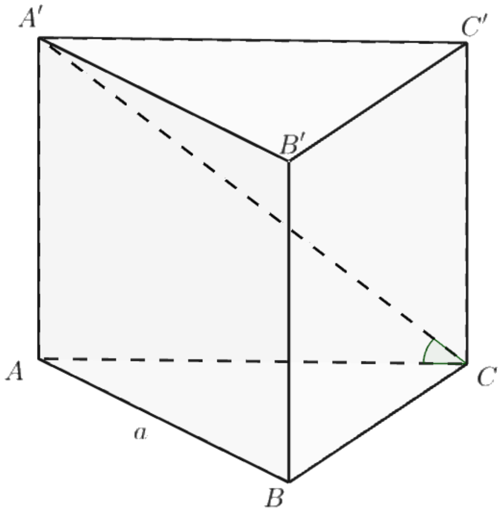
Có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BA.BC=\dfrac{a^2}{2} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.A'A=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 53. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.	**B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.	**C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.	**D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Có: $\widehat{\left(A'C,(ABC)\right)}=\widehat{A'CA}=45°$.

Xét tam giác $A'AC$ vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{A'CA}=\dfrac{AA'}{AC} \Rightarrow AA'=a$.

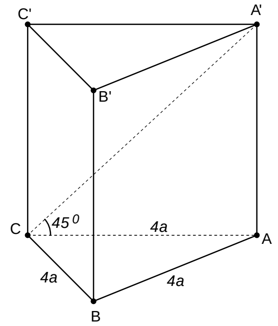
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V=AA'.S_{\Delta ABC}=a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 54. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=4a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.	**B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.	**C.** $16a^3\sqrt{3}$.	**D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và đáy là tam giác đều.

Ta có:

$A'A\perp(ABC)\Rightarrow\left(\widehat{A'C,(ABC)}\right)=\widehat{A'CA}=45^{\circ}\Rightarrow\Delta A'AC$ vuông cân tại $A\Rightarrow A'A=AC=4a$.

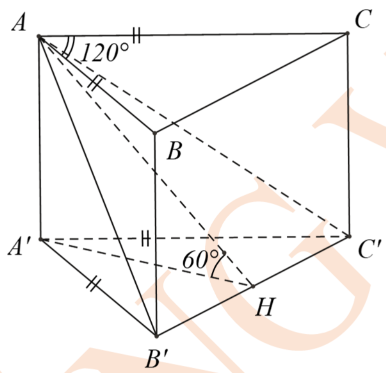
$S_{\Delta ABC}=\dfrac{(AB)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4}=4a^2\sqrt{3}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=4a.4a^2\sqrt{3}=16a^3\sqrt{3}$.

Câu 55. **(Mã 104 2017)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120^{\circ}$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{3a^3}{8}$ **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$ **C.** $V=\dfrac{a^3}{8}$ **D.** $V=\dfrac{3a^3}{4}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $B'C'$, khi đó góc giữa mp $(AB'C')$ và đáy là góc $\widehat{AHA'}=60^{\circ}$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC.AB.\sin120^{\circ}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$B'C'=BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos120^{\circ}}=\sqrt{a^2+a^2-2.a.a.\dfrac{-1}{2}}=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow A'H=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{B'C'}=\dfrac{a}{2}\Rightarrow AA'=A'H.\tan60^{\circ}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

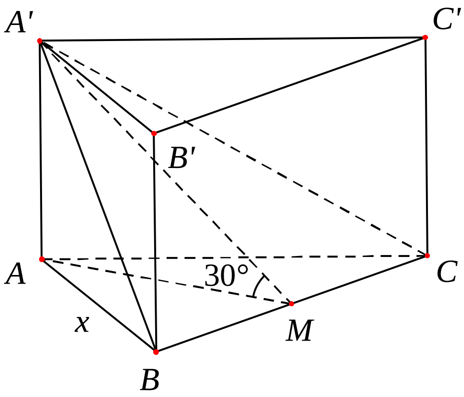
Vậy $V=S_{\Delta ACB}.AA'=\dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 56. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30°, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $8\sqrt{3}$. **B.** 8. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $AB = x, (x > 0)$, gọi M là trung điểm BC.

Ta có $\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ AM \perp BC \\ A'M \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{((A'BC),(ABC))} = \widehat{A'MA} = 30°$.

Xét $\Delta A'AM$, có $A'M = \dfrac{AM}{\cos 30°} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = x$.

$S_{A'BC} = 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} A'M.BC = 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

Suy ra $A'A = AM.\tan 30° = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2$; $S_{ABC} = \dfrac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$.

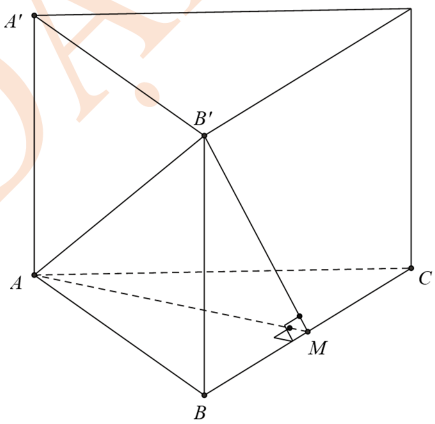
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'A.S_{ABC} = 2.4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Câu 57. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ tam giác đều nên ta có

$AM \perp (BCC'B') \Rightarrow (AB',(BCC'B')) = \widehat{AB'M} = 30°$.

Xét tam giác vuông $AB'M$ ta có $\tan 30° = \dfrac{AM}{AB'} \Leftrightarrow AB' = \dfrac{AM}{\tan 30°} \Leftrightarrow AB' = \dfrac{3a}{2}$.

Xét tam giác vuông $B'BM$ ta có $BB' = \sqrt{B'M^2 - BM^2} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = a\sqrt{2}$.

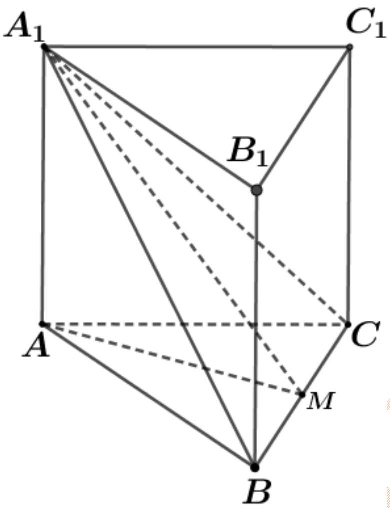
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{2} AB.AC.\sin 60°.BB' = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 58. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng (A_1BC) tạo với đáy góc $30°$ và tam giác A_1BC có diện tích bằng 8. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = 64\sqrt{3}$.	**B.** $V = 2\sqrt{3}$.	**C.** $V = 16\sqrt{3}$.	**D.** $V = 8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: ΔABC là hình chiếu của ΔA_1BC lên mặt phẳng (ABC).

Do đó: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A_1BC}.\cos\alpha$, với $\alpha = \left[\widehat{(A_1BC),(ABC)}\right] = 30° \Rightarrow S_{ABC} = 8\cos 30° = 4\sqrt{3}$.

Mà ΔABC đều $\Rightarrow AB = BC = AC = 4$.

Kẻ AM vuông góc BC tại M.

Khi đó $BC \perp (A_1MA) \Rightarrow \left[\widehat{(A_1BC),(ABC)}\right] = \widehat{A_1MA} = 30°$

$\Rightarrow A_1A = AM.\tan 30° = \dfrac{4\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2$.

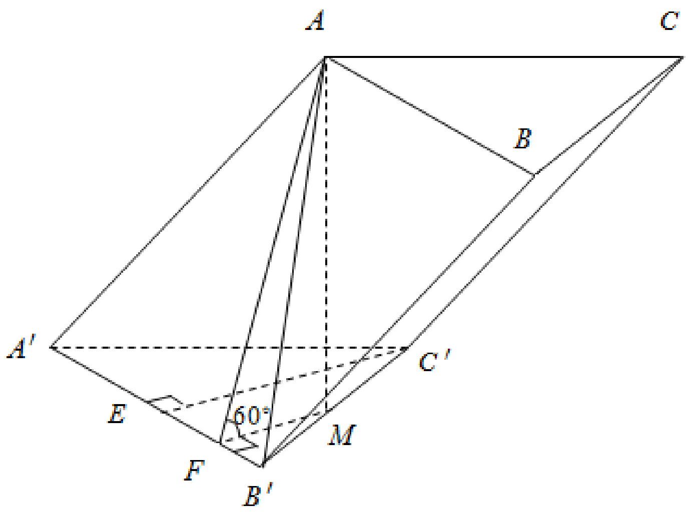
Thể tích lăng trụ đã cho là $V = S_{ABC}.A_1A = 4\sqrt{3}.2 = 8\sqrt{3}$.

Câu 59. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên đáy $(A'B'C')$ trùng với trung điểm M của cạnh $B'C'$. Góc nhị diện giữa hai mặt phẳng $(AA'B')$ và (ABC) bằng 60°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{16}$.	**B.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{16}$.	**C.** $\dfrac{3a^3}{8}$.	**D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Diệt tích đáy lăng trụ là: $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi E và F lần lượt là trung điểm các đoạn $A'B'$ và $B'E$.

Theo giả thiết góc nhị diện giữa hai mặt phẳng $(AA'B')$ và (ABC) bằng 60° nên suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(AA'B')$ và (ABC) cũng bằng 60°.

Vì $(ABC)//(A'B'C')$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(AA'B')$ và $(A'B'C')$ bằng 60°.

Ta có: $A'B'\perp C'E \Rightarrow A'B'\perp MF$ (vì $MF//C'E$)

Mặt khác: $A'B'\perp AM$

Suy ra $A'B'\perp(AMF)\Rightarrow A'B'\perp AF$.

Do vậy góc giữa hai mặt phẳng $(AA'B')$ và (ABC) bằng góc $\widehat{AFM}=60^\circ$.

Có $C'E=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow MF=\dfrac{1}{2}C'E=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Khi đó trong tam giác vuông AMF ta có $AM=FM.\tan\widehat{AFM}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\sqrt{3}=\dfrac{3a}{4}$.

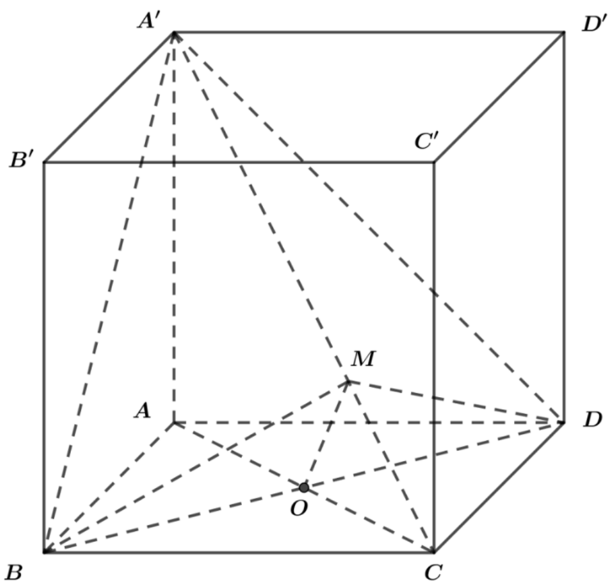
Vậy, thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V=S_{ABC}.AM=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{3a}{4}=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 60. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=120^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$ bằng 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{3}{8}a^3$. **B.** $V=\dfrac{3\sqrt{6}}{8}a^3$. **C.** $V=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}a^3$. **D.** $V=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=120^0$ nên $BD=a$, $AC=a\sqrt{3}$ và $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Gọi $O=AC\cap BD$. Ta có $BD\perp(A'AC)\Rightarrow BD\perp A'C$.

Kẻ $OM\perp A'C$ tại M thì $A'C\perp(BDM)\Rightarrow A'C\perp MD$, do đó góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$ là góc giữa hai đường thẳng MB và MD. Vậy $\widehat{BMD}=60°$ hoặc $\widehat{BMD}=120°$.

TH1: $\widehat{BMD}=60°$ thì do $MB=MD$ nên tam giác BMD là tam giác đều, do đó $OM=a\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow OM=OC$ (vô lý vì ΔOMC vuông tại M).

TH2: $\widehat{BMD}=120°$ thì do tam giác BMD cân tại M nên $\widehat{BMO}=60°$ $\Rightarrow MO=BO.\cot 60°=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, do đó $MC=\sqrt{OC^2-MO^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Có tam giác $AA'C$ đồng dạng với tam giác MOC nên $\frac{AA'}{AC}=\frac{MO}{MC}\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

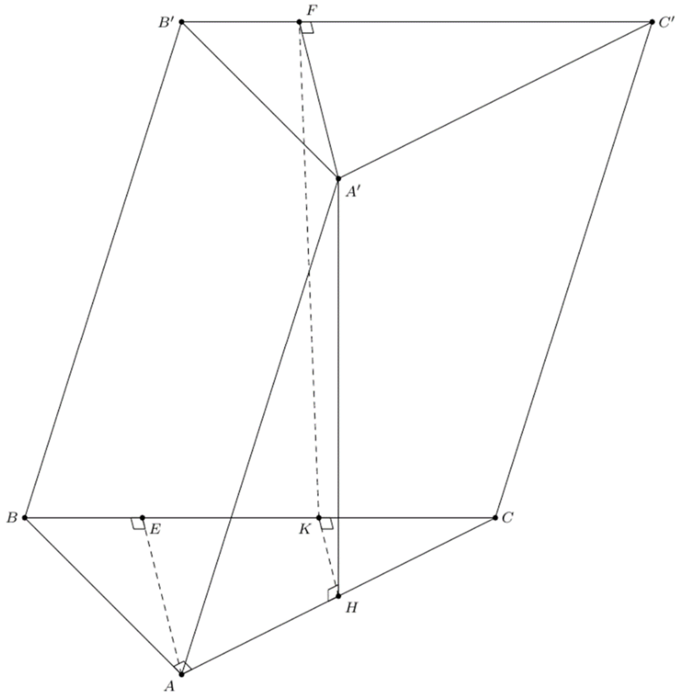
Vậy $V=AA'.S_{ABCD}=\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{8}a^3$.

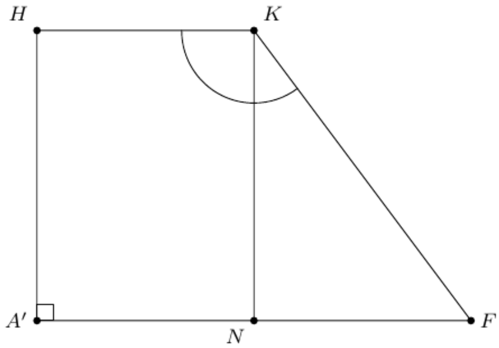
Câu 61. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $BC=2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{16}$.

Lời giải

Chọn C





Dựng $HK \perp BC$ tại K, $A'F \perp B'C'$ tại F, $AE \perp BC$ tại E.

Gọi N là trung điểm $A'F$.

Ta có: $HK = \frac{1}{2}AE$ nên $HK = \frac{1}{2}A'F = A'N \Rightarrow A'HKN$ là hình chữ nhật.

Ta có: $BC \perp (A'HK)$ và $BC \perp A'F$ nên $A'F \subset (A'HK)$.

$((BCB'C');(ABC)) = (HK;KF)$.

Từ giả thiết ta có: $\widehat{HKF} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{NKF} = 30^\circ$.

Ta có: $AC = a\sqrt{3} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $A'H = NK = NF.\tan\widehat{NKF} = HK.\tan\widehat{NKF} = \frac{3a}{4}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

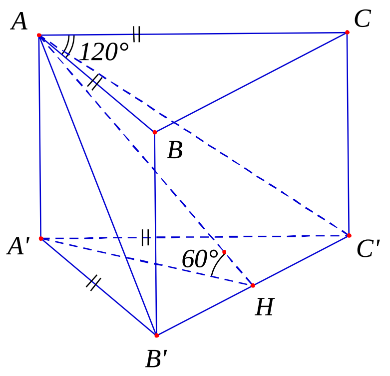
Thể tích lăng trụ $V = A'H.S_{ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 62. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{8}$. **B.** $V = \frac{9a^3}{8}$. **C.** $V = \frac{a^3}{8}$. **D.** $V = \frac{3a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $B'C'$, khi đó góc giữa mp $(AB'C')$ và đáy là góc $\widehat{AHA'} = 60°$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.AB.\sin 120° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$B'C' = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120°} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2.a.a.\frac{-1}{2}} = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A'H = \frac{2S_{\Delta ABC}}{B'C'} = \frac{a}{2} \Rightarrow AA' = A'H.\tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

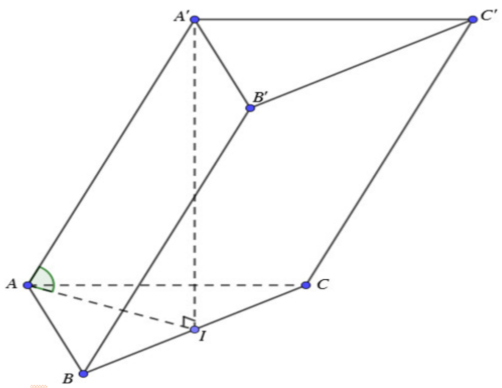
Vậy $V = S_{\Delta ACB}.AA' = \frac{3a^3}{8}$.

Câu 63. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm I của BC. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{13}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $A'I \perp (ABC) \Rightarrow AI$ là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC) nên $\left(\widehat{AA',(ABC)}\right) = \left(\widehat{AA',AI}\right) = \widehat{A'AI} = 30^0$

Ta có $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'I = AI\tan 30^0 = \frac{a}{2}, S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

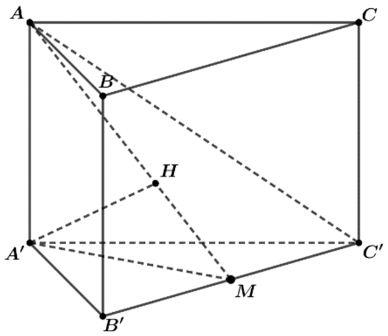
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 64. Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của $B'C'$.

Ta có $\begin{cases} AA' \perp B'C' \\ A'M \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'M) \Rightarrow (AB'C') \perp (AA'M)$ theo giao tuyến AM.

Kẻ $A'H \perp AM$ trong mặt phẳng $(AA'M)$, suy ra $\Rightarrow A'H \perp (AB'C')$.

Vậy khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ là $A'H = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Ta có $\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'M^2} \Rightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{A'H^2} - \frac{1}{A'M^2} = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow A'A = 2a$.

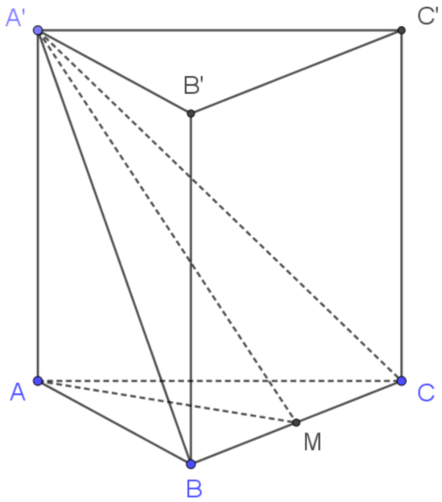
Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{A'B'C'} = 2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 65. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30^0 và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $8a^2$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $8a^3\sqrt{3}$. **B.** $8a^3$. **C.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{8a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC.

Chứng minh được $BC \perp (AA'M)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{A'MA} = 30^0$.

Đặt $AB = x$

Tam giác ABC đều nên $AM = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'M = \frac{AM}{\cos 30^0} = x$

$S_{A'BC} = \frac{1}{2}.A'M.BC = \frac{1}{2}x^2 = 8a^2 \Leftrightarrow x = 4a \Rightarrow S_{ABC} = 4a^2\sqrt{3}$

$\frac{AA'}{A'M} = \sin 30^0 \Leftrightarrow AA' = 2a$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'.} = AA'.S_{ABC} = 8a^3\sqrt{3}$.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2022

Câu 43. (ĐTK BGD 2022) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 8m - 12 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt $z_1; z_2$ thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$?

A. 5 . **B.** 6 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\Delta' = m^2 - 8m + 12$.

TH1: Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 2 \end{array}\right.$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt $z_1; z_2$.

$|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (thoả mãn).

TH2: Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 6$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phức phân biệt $z_1; z_2$ là hai số phức liên hợp của nhau.

Suy ra $|z_1| = |z_2|$.

Do đó, với $2 < m < 6$, phương trình đã cho có hai nghiệm phức phân biệt thoả mãn $|z_1| = |z_2|$. Suy ra $m \in \{3; 4; 5\}$.

Kết hợp 2 trường hợp, suy ra có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1. Trên tập hợp các số phức, gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 2$. Tính S.

A. $S = 6$. **B.** $S = 10$. **C.** $S = -3$. **D.** $S = 7$.

Câu 2. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 7m - 10 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 3|z_1||z_2|$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 3. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m-1)z + m^2 - 3m + 1 = 0$ (m là tham số thực). Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = 6$ bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 4. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 4m - 3 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = 8$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 5. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 - 1 = 0$ (m là tham số thực). Tổng các giá trị của m để phương trình có nghiệm z_o thỏa mãn $|z_o| = 5$ là

A. 10. **B.** $10 - \sqrt{26}$. **C.** $10 + 2\sqrt{11}$. **D.** $10 - 2\sqrt{26}$.

Câu 6. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^3 - 5z^2 + (m+6)z + m = 0$ (m là tham số thực). Tổng các giá trị của tham số m để phương trình đó có ba nghiệm phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 21$?

A. 8. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 18.

Câu 7. Trên tập hợp các số phức, phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$ (với a là số thực) có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết tam giác OMN có một góc bằng 60^0, tính tổng các giá trị của a.

A. -10. **B.** 10. **C.** -4. **D.** 4.

Câu 8. Trên tập hợp các số phức,cho phương trình $z^2+2mz+2m^2+1=0$ (với m là số thực) có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính tích các giá trị của m để diện tích tam giác OMN bằng $2\sqrt{5}$.

A. 0. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 20.

Câu 9. Cho số phức w và hai số thực a,b. Biết $z_1=w+2i$ và $z_2=2w-3$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+az+b=0$. Tìm giá trị $T=a-9b$

A. $T=-91$. **B.** $T=103$. **C.** $T=-103$. **D.** $T=93$.

Câu 10. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+5=0$. Tìm môđun của số phức $w=(1+z_1)^{100}+(1+z_2)^{100}$.

A. $w=2^{50}$. **B.** $w=2^{100}$. **C.** $w=2^{51}$. **D.** $w=2^{101}$.

Câu 11. Trên tập hợp các số phức, biết phương trình $z^2+mz+5=0$, (m là tham số thực) có hai nghiệm phức trong đó có một nghiệm có phần ảo là 1. Tính tổng môđun của hai nghiệm.

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 4. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 12. Trong tập hợp các số phức, cho phương trình $z^2-2(m-1)z+5m-9=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 sao cho $|z_1|=|z_2|$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 13. Trong tập hợp các số phức, cho phương trình $z^2-6z+1-m=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị của m để phương trình có nghiệm thỏa mãn $|z|=5$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 14. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-2mz+4m-3=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=8$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 15. Trên tập hợp các số phức, phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$ (a là tham số thực) có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết rằng có 2 giá trị của tham số a để tam giác OMN có một góc bằng $120°$. Tổng các giá trị đó bằng bao nhiêu?

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -6.

Câu 16. Trên tập hợp các số phức, phương trình $az^2+bz+c=0$, với $a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$ có các nghiệm z_1,z_2 đều không là số thực. Đặt $P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$. **B.** $P=\dfrac{2c}{a}$. **C.** $P=\dfrac{4c}{a}$. **D.** $P=\dfrac{2b^2-4ac}{a^2}$.

Câu 17. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $|z_0|=1$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 20. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 8.

Câu 18. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-(a-3)z+a^2+a=0$ (a là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình có 2 nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 19. Cho số phức w và hai số thực a, b. Biết rằng $w+i$ và $3-2w$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Tổng $S=a+b$ bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 20. Cho phương trình $x^2-4x+\frac{c}{d}=0$ có hai nghiệm phức. Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của hai nghiệm đó trên mặt phẳng Oxy. Biết tam giác OAB đều, tính $P=c+2d$.

A. $P=18$. **B.** $P=-10$. **C.** $P=-14$. **D.** $P=22$.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2+\sqrt{3}z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 với phần ảo khác 0 thỏa mãn $|z_0|=\sqrt{3}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 22. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=7$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 23. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=5$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 24. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+4az+b^2+2=0$, (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 25. **[Mức độ 3]** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3(x^2+1)-\log_3(x+31)\right](32-2^{x-1})\geq 0$?

A. 27. **B.** 26. **C.** Vô số. **D.** 28.

Câu 26. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2az+b^2+2=0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 27. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2az+b^2+2=0$ (a,b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 28. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+4az+b^2+2=0$, (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-4az+b^2+2=0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+2i\,z_2=3+3i$

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 30. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0|=6$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 31. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_o thõa mãn $|z_o|=8$

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Trên tập hợp các số phức, gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=2.$ Tính S.

A. $S=6$. **B.** $S=10$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=7$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi$.

Ta có: $z^2-2z+1-m=0 \Leftrightarrow (z-1)^2=m$ (1)

+) Với $m\ge 0$ thì $(1)\Leftrightarrow z=1\pm\sqrt{m}$. Do $|z|=2\Leftrightarrow |1\pm\sqrt{m}|=2\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=9\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

+) Với $m<0$ thì $(1)\Leftrightarrow z=1\pm i\sqrt{-m}.$

Do $|z|=2\Leftrightarrow |1\pm i\sqrt{-m}|=2\Leftrightarrow 1-m=4\Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn).

Vậy $S=1+9-3=7$.

Câu 2. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+7m-10=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|^2+2|z_2|^2=3|z_1||z_2|$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta'=m^2-7m+10$

Trường hợp 1: $\Delta'>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<2\\ m>5\end{array}\right.$.

Khi đó z_1,z_2 là các nghiệm thực phân biệt nên ta có:

$$|z_1|^2+2|z_2|^2=3|z_1||z_2|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z_1|=|z_2|\\ |z_1|=2|z_2|\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-z_2\\ z_1=2z_2\\ z_1=-2z_2\end{array}\right.$$

+) $|z_1|=|z_2|\Leftrightarrow z_1=-z_2\Leftrightarrow z_1+z_2=0\Leftrightarrow 2m=0\Leftrightarrow m=0$ (nhận)

+) $z_1=2z_2$ không tồn tại m

+) $z_1=-2z_2$ không tồn tại

Trường hợp 2: $\Delta'<0\Leftrightarrow 2<m<5$.

Khi đó các nghiệm phức z_1,z_2 liên hợp nhau nên luôn thỏa $|z_1|=|z_2|$.

Vậy ta có các giá trị nguyên của m là $0,3,4$.

Câu 3. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+m^2-3m+1=0$ (m là tham số thực). Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_1^2+z_2^2=6$ bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Xét $z^2-2(m-1)z+m^2-3m+1=0\,(1)$

Phương trình luôn có nghiệm z_1,z_2 trên tập hợp số phức

Theo vi – et ta có $z_1+z_2=2(m-1),z_1.z_2=m^2-3m+1$

$z_1^2+z_2^2=6\Leftrightarrow(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=6\Rightarrow 2m^2-2m+2=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=2\end{array}\right.$ (thoả mãn)

Vậy tổng các giá trị nguyên của m là $-1+2=1$

Câu 4. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-2mz+4m-3=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=8$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta'=m^2-4m+3$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'\neq0$. Ta xét hai trường hợp

TH1: $\Delta'>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3\\m<1\end{array}\right.$ theo giả thiết thì $\begin{cases}m>3\\m\in\mathbb{Z}^+\end{cases}(*)$. Với (*) khi đó z_1, z_2 là hai nghiệm thực nên $|z_1|+|z_2|=8\Leftrightarrow(|z_1|+|z_2|)^2=64\Leftrightarrow(z_1+z_2)^2-2z_1z_2+2|z_1||z_2|=64$

$4m^2-2(4m-3)+2|4m-3|=64\Leftrightarrow 4m^2=64\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-4\,(l)\end{array}\right.$

TH2: $\Delta'<0\Leftrightarrow 1<m<3$ mà $m\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow m=2$ thay vào phương trình ta có $z^2-4z+5=0\Leftrightarrow z_1=2+i,z_2=2-i$. Khi đó $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{5}$ không thỏa mãn Vậy có một giá trị nguyên dương của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 5. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2-1=0$ (m là tham số thực). Tổng các giá trị của m để phương trình có nghiệm z_o thỏa mãn $|z_o|=5$ là

A. 10. **B.** $10-\sqrt{26}$. **C.** $10+2\sqrt{11}$. **D.** $10-2\sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $w=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ theo bài ra ta có $z_1=w+2i=x+(y+2)i$, $z_2=2w-3=2x-3+2yi$.

Do z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình nên $\overline{z_1}=z_2$

Phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2-1=0$ (1) có $\Delta'=2m+2$.

+ Trường hợp 1: $\Delta'\geq0\Leftrightarrow m\geq-1$.

Phương trình (1) có nghiệm z_o thỏa mãn $|z_o|=5$ suy ra $z_o=5$ hoặc $z_o=-5$.

Nếu $z_o=5$ suy ra $25-10(m+1)+m^2-1=0\Leftrightarrow m^2-10m+14=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=5+\sqrt{11}\\m=5-\sqrt{11}\end{array}\right.$, (chọn).

Nếu $z_o=-5$ suy ra $25+10(m+1)+m^2-1=0\Leftrightarrow m^2+10m+34=0$ vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -1$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $z_o = z_1 = \overline{z_2}$.

Suy ra $|z_o| = 5 \Leftrightarrow z_o.\overline{z_o} = 25 \Leftrightarrow z_1.z_2 = 25 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 25 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{26}$.

Kết hợp điều kiện $m < -1$ suy ra $m = -\sqrt{26}$

Vậy tổng các giá trị là $5 + \sqrt{11} + 5 - \sqrt{11} - \sqrt{26} = 10 - \sqrt{26}$

Câu 6. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^3 - 5z^2 + (m+6)z + m = 0$ (m là tham số thực). Tổng các giá trị của tham số m để phương trình đó có ba nghiệm phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 21$?

A. 8. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 18.

Lời giải

Chọn D

$$z^3 - 5z^2 + (m+6)z + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 \\ z^2 - 6z + m = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Xét (2), ta có $\Delta' = 9 - m$.

Trường hợp 1: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 9$.

Khi đó, (2) có hai nghiệm phân biệt $z_1 = 3 + i\sqrt{m-9}$; $z_2 = 3 - i\sqrt{m-9}$.

$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 21 \Rightarrow 1 + 9 + m - 9 + 9 + m - 9 = 21 \Leftrightarrow m = 10$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 9$.

Khi đó, (2) có 2 nghiệm thực phân biệt $z = 3 \pm \sqrt{9-m}$.

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 9 \\ (-1)^2 - 6\cdot(-1) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 9 \\ m \neq 7 \end{cases}.$$

$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 21 \Rightarrow (-1)^2 + \left(3 + \sqrt{9-m}\right)^2 + \left(3 - \sqrt{9-m}\right)^2 = 21 \Leftrightarrow m = 8$ (thỏa mãn).

Vậy tổng các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $10 + 8 = 18$.

Câu 7. Trên tập hợp các số phức, phương trình $z^2 + (a-2)z + 2a - 3 = 0$ (với a là số thực) có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết tam giác OMN có một góc bằng 60^0, tính tổng các giá trị của a.

A. -10. **B.** 10. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Vì O, M, N không thẳng hàng nên z_1, z_2 không đồng thời là số thực, cũng không đồng thời là số thuần ảo $\Rightarrow z_1$, z_2 là hai nghiệm phức, không phải số thực của phương trình $z^2 + (a-2)z + 2a - 3 = 0$. Do đó, ta phải có: $\Delta = a^2 - 12a + 16 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(6 - 2\sqrt{5};\ 6 + 2\sqrt{5}\right)$.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} z_1 = \dfrac{2-a}{2} - \dfrac{\sqrt{-a^2 + 12a - 16}}{2}i \\ z_1 = \dfrac{2-a}{2} + \dfrac{\sqrt{-a^2 + 12a - 16}}{2}i \end{cases}$.

$\Rightarrow OM = ON = |z_1| = |z_2| = \sqrt{2a-3}$ và $MN = |z_1 - z_2| = \sqrt{-a^2 + 12a - 16}$.

Tam giác OMN cân nên $\widehat{MON}=60°$ $\Rightarrow \frac{OM^2+ON^2-MN^2}{2OM.ON}=\cos 60°$ $\Leftrightarrow \frac{a^2-8a+10}{2(2a-3)}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a^2-10a+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5+2\sqrt{3} \\ a=5-2\sqrt{3} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Suy ra tổng các giá trị cần tìm của a là 10.

Câu 8. Trên tập hợp các số phức,cho phương trình $z^2+2mz+2m^2+1=0$ (với m là số thực) có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M , N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính tích các giá trị của m để diện tích tam giác OMN bằng $2\sqrt{5}$.

A. 0. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Xét $z^2+2mz+2m^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-m-i\sqrt{m^2+1}=z_1 \\ z=-m+i\sqrt{m^2+1}=z_2 \end{array}\right.$

$M(-m;-\sqrt{m^2+1}), N(-m;\sqrt{m^2+1}) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM}(-m;-\sqrt{m^2+1}), \\ \overrightarrow{ON}(-m;\sqrt{m^2+1}) \end{cases}$

Bài ra $S_{\Delta OMN}=2\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{OM}^2.\overrightarrow{ON}^2-\left(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}\right)^2}=2\sqrt{5}$

$|m|.\sqrt{m^2+1}=2\sqrt{5} \Leftrightarrow m^4+m^2-20=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$

Câu 9. Cho số phức w và hai số thực a,b. Biết $z_1=w+2i$ và $z_2=2w-3$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+az+b=0$. Tìm giá trị $T=a-9b$

A. $T=-91$. **B.** $T=103$. **C.** $T=-103$. **D.** $T=93$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $w=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ theo bài ra ta có $z_1=w+2i=x+(y+2)i$, $z_2=2w-3=2x-3+2yi$.

Do z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình nên $\overline{z_1}=z_2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2x-3 \\ -y-2=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow w=3-\frac{2}{3}i \Rightarrow \begin{cases} z_1=w+2i=3+\frac{4}{3}i \\ z_2=2w-3=3-\frac{4}{3}i \end{cases}$

Theo Vi-et $\begin{cases} z_1+z_2=-a=6 \\ z_1z_2=b=\frac{97}{9} \end{cases} \Rightarrow T=-6-9.\frac{97}{9}=-103$.

Câu 10. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+5=0$. Tìm môđun của số phức $w=(1+z_1)^{100}+(1+z_2)^{100}$.

A. $w=2^{50}$. **B.** $w=2^{100}$. **C.** $w=2^{51}$. **D.** $w=2^{101}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z^2+4z+5=0 \Leftrightarrow (z+2)^2=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-2+i \\ z_2=-2-i \end{array}\right.$.

Do đó $w=(-1+i)^{100}+(-1-i)^{100}=\left[(-1+i)^2\right]^{50}+\left[(-1-i)^2\right]^{50}$

$=(-2i)^{50}+(2i)^{50}=2^{50}\left[\left(i^2\right)^{25}+\left(i^2\right)^{25}\right]=-2^{51}$.

Vậy $|w|=\left|-2^{51}\right|=2^{51}$

Câu 11. Trên tập hợp các số phức, biết phương trình $z^2+mz+5=0$, (m là tham số thực) có hai nghiệm phức trong đó có một nghiệm có phần ảo là 1. Tính tổng môđun của hai nghiệm.

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 4. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $w=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ theo bài ra ta có

Ta có $\Delta=m^2-20$

Phương trình có hai nghiệm phức thì $\Delta<0 \Leftrightarrow -2\sqrt{5}<m<2\sqrt{5}$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm là: $z_1=-\frac{m}{2}+\frac{\sqrt{20-m^2}}{2}i$ và $z_2=-\frac{m}{2}-\frac{\sqrt{20-m^2}}{2}i$

Theo bài ra: $\frac{\sqrt{20-m^2}}{2}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-4 \end{array}\right.$ (t/m).

Khi đó phương trình trở thành $\left[\begin{array}{l} z^2+4z+5=0 \\ z^2-4z+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} z_1=-2+i \\ z_2=-2-i \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} z_1=-2+i \\ z_2=-2-i \end{array}\right. \end{array}\right.$

$|z_1|=|z_2|=\sqrt{5}$. Vậy $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{5}$

Câu 12. Trong tập hợp các số phức, cho phương trình $z^2-2(m-1)z+5m-9=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 sao cho $|z_1|=|z_2|$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B.

+ **TH1**: Nếu $\Delta'>0 \Leftrightarrow (m-1)^2-(5m-9)>0 \Leftrightarrow m^2-7m+10>0$

Phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt, khi đó: $|z_1|=|z_2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=z_2\ (loai) \\ z_1=-z_2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow 2(m-1)=0 \Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn).

+ **TH2**: $\Delta'<0 \Leftrightarrow m^2-7m+10<0 \Leftrightarrow m\in(2;5)$.

Khi đó phương trình có 2 nghiệm phức z_1,z_2 là 2 số phức liên hợp của nhau, ta luôn có $|z_1|=|z_2|$.

Với $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{1;3;4\}$.

Câu 13. Trong tập hợp các số phức, cho phương trình $z^2-6z+1-m=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị của m để phương trình có nghiệm thỏa mãn $|z|=5$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn **C.**

+ **TH1**: Nếu $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 9-(1-m)\ge 0\Leftrightarrow m\ge -8$

Phương trình có nghiệm thực z, khi đó: $|z|=5\Leftrightarrow z=\pm 5$

Phương trình có nghiệm $z=5$ hoặc $z=-5$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}25-30+1-m=0\\25+30+1-m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=56\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

+ **TH2**: $\Delta'<0\Leftrightarrow m+8<0\Leftrightarrow m<-8$.

Khi đó phương trình có nghiệm phức $z=3\pm i.\sqrt{-(m+8)}$

Ta có: $|z|=5\Leftrightarrow 9-(m+8)=25\Leftrightarrow m=-24$ (thỏa mãn).

Vậy có 3 giá trị của m.

Câu 14. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-2mz+4m-3=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=8$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta'=m^2-4m+3$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'\ne 0$. Nên để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=8$ ta xét hai trường hợp:

TH1: $\begin{cases}\Delta'>0\\|z_1|+|z_2|=8\end{cases}$, trong trường hợp này z_1, z_2 là hai nghiệm thực nên $\begin{cases}m^2-4m+3>0\\(|z_1|+|z_2|)^2=64\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)\\(z_1+z_2)^2-2z_1z_2+2|z_1z_2|=64\end{cases}\overset{m\in\mathbb{Z}^+}{\Leftrightarrow}\begin{cases}m\in(3;+\infty)\\4m^2-2(4m-3)+2.|4m-3|=64\end{cases}\overset{m\in\mathbb{Z}^+}{\Leftrightarrow}\begin{cases}m\in(3;+\infty)\\4m^2=64\end{cases}$

$\overset{m\in\mathbb{Z}^+}{\Leftrightarrow} m=4$.

TH2: $\begin{cases}\Delta'<0\\|z_1|+|z_2|=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4m+3<0\\\left|m+i\sqrt{-m^2+4m-3}\right|+\left|m-i\sqrt{-m^2+4m-3}\right|=8\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(1;3)\\2\sqrt{m^2+(-m^2+4m-3)}=8\end{cases}\overset{m\in\mathbb{Z}^+}{\Rightarrow}\begin{cases}m=2\\\sqrt{5}=4\end{cases}$, nên không tồn tại số nguyên dương m trong trường hợp này.

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn điều kiện bài ra.

Câu 15. Trên tập hợp các số phức, phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$ (a là tham số thực) có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết rằng có 2 giá trị của tham số a để tam giác OMN có một góc bằng $120°$. Tổng các giá trị đó bằng bao nhiêu?

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -6.

Lời giải

Chọn#A.

Vì O, M, N không thẳng hàng nên z_1, z_2 không đồng thời là số thực, cũng không đồng thời là số thuần ảo $\Rightarrow z_1$, z_2 là hai nghiệm phức, không phải số thực của phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$. Do đó, ta phải có $\Delta=a^2-12a+16<0 \Leftrightarrow a\in\left(6-2\sqrt{5};\,6+2\sqrt{5}\right)$.

Khi đó, ta có $\begin{cases} z_1=\dfrac{2-a}{2}-\dfrac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i \\ z_1=\dfrac{2-a}{2}+\dfrac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i \end{cases}$.

$\Rightarrow OM=ON=|z_1|=|z_2|=\sqrt{2a-3}$ và $MN=|z_1-z_2|=\sqrt{-a^2+12a-16}$.

Tam giác OMN cân nên $\widehat{MON}=120^\circ \Rightarrow \dfrac{OM^2+ON^2-MN^2}{2OM.ON}=\cos 120^\circ \Leftrightarrow \dfrac{a^2-8a+10}{2(2a-3)}=-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a^2-6a+7=0 \Leftrightarrow a=3\pm\sqrt{2}$.

Suy ra tổng các giá trị cần tìm của a bằng 6.

Câu 16. Trên tập hợp các số phức, phương trình $az^2+bz+c=0$, với $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$ có các nghiệm z_1,z_2 đều không là số thực. Đặt $P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$. **B.** $P=\dfrac{2c}{a}$. **C.** $P=\dfrac{4c}{a}$. **D.** $P=\dfrac{2b^2-4ac}{a^2}$.

Lời giải

Chọn **C.**

Cách 1: Tự luận.

Ta có phương trình $az^2+bz+c=0$ có các nghiệm z_1,z_2 đều không là số thực, do đó $\Delta=b^2-4ac<0$. Ta có $\Delta=i^2\left(4ac-b^2\right)$. Khi đó $\begin{cases} z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \\ z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} |z_1+z_2|^2=\dfrac{b^2}{a^2} \\ |z_1-z_2|^2=\dfrac{4ac-b^2}{a^2} \end{cases} \Rightarrow P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=\dfrac{4c}{a}$.

Cách 2: Trắc nghiệm.

Cho $a=1,b=0,c=1$, ta có phương trình $z^2+1=0$ có 2 nghiệm phức là $z_1=i, z_2=-i$. Khi đó $P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=4$.

Thế $a=1,b=0,c=1$ lên các đáp án, ta thấy chỉ có đáp án C cho kết quả giống.

Câu 17. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $|z_0|=1$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 20. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 8.

Lời giải

Chọn **B.**

Xét $9z^2+6z+1-m=0$ $(*)$.

Trường hợp 1: $(*)$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 9-9(1-m)\ge 0 \Leftrightarrow m \ge 1$.

$|z|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-1 \end{array}\right.$.

+ Với $z=1 \Rightarrow m=16$ (thỏa mãn).
+ Với $z=-1 \Rightarrow m=4$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $(*)$ có nghiệm phức $z=a+bi\,(b\ne 0)$ $\Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow 9-9(1-m)<0 \Leftrightarrow m<1$.

Nếu z là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ thì $\bar{z}$ cũng là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$.

Ta có $|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z.\bar{z}=1 \Leftrightarrow \dfrac{c}{a}=1 \Leftrightarrow \dfrac{1-m}{9}=1 \Leftrightarrow m=-8$ (thỏa mãn).

Vậy $S=\{16;4;-8\}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 12.

Câu 18. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-(a-3)z+a^2+a=0$ (a là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn#A.

Ta có $\Delta=-3a^2-10a+9$.

+ **TH1:** $\Delta \ge 0$, phương trình có 2 nghiệm $z_{1,2}=\dfrac{a-3\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, khi đó

$|z_1+z_2|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |a-3|=|\sqrt{\Delta}| \Leftrightarrow (a-3)^2=\Delta \Leftrightarrow 4a^2+4a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-1 \end{array}\right.$. (thỏa mãn điều kiện $\Delta \ge 0$).

+ **TH2:** $\Delta<0$, phương trình có 2 nghiệm $z_{1,2}=\dfrac{a-3\pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$, khi đó

$|z_1+z_2|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |a-3|=|i\sqrt{-\Delta}| \Leftrightarrow (a-3)^2=-\Delta \Leftrightarrow 2a^2+16a-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-9 \end{array}\right.$. (thỏa mãn điều kiện $\Delta<0$).

Vậy có 4 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. Cho số phức w và hai số thực a, b. Biết rằng $w+i$ và $3-2w$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Tổng $S=a+b$ bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn **B.**

Đặt $w=x+yi$ $(x,\, y\in\mathbb{R})$. Vì $a,\, b\in\mathbb{R}$ và phương trình $z^2+az+b=0$ có hai nghiệm là $z_1=w+i$, $z_2=3-2w$ nên $z_1=\overline{z_2} \Leftrightarrow w+i=\overline{3-2w} \Leftrightarrow x+yi+i=\overline{3-2(x+yi)}$

$\Leftrightarrow x+(y+1)i=(3-2x)+2yi \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2x \\ y+1=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

$\Rightarrow w=1+i \Rightarrow \begin{cases} z_1=w+i=1+2i \\ z_2=3-2w=1-2i \end{cases}$.

Theo định lý Viet: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_2.z_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = -a \\ 1+4 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}$.

Vậy $S = a + b = 3$.

Câu 20. Cho phương trình $x^2 - 4x + \frac{c}{d} = 0$ có hai nghiệm phức. Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của hai nghiệm đó trên mặt phẳng Oxy. Biết tam giác OAB đều, tính $P = c + 2d$.

A. $P = 18$. **B.** $P = -10$. **C.** $P = -14$. **D.** $P = 22$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x^2 - 4x + \frac{c}{d} = 0$ có hai nghiệm phức $\Leftrightarrow$ $\Delta' = 4 - \frac{c}{d} < 0$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức $x_1 = 2 + \sqrt{|\Delta'|}\, i$; $x_2 = 2 - \sqrt{|\Delta'|}\, i$.

Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn của x_1; x_2 trên mặt phẳng Oxy ta có:

$A\left(2; \sqrt{|\Delta'|}\right)$; $B\left(2; -\sqrt{|\Delta'|}\right)$.

Ta có: $AB = 2\sqrt{|\Delta'|}$; $OA = OB = \sqrt{4 + |\Delta'|}$.

Tam giác OAB đều khi và chỉ khi $AB = OA = OB \Leftrightarrow 2\sqrt{|\Delta'|} = \sqrt{4 + |\Delta'|} \Leftrightarrow 4|\Delta'| = 4 + |\Delta'|$

$\Leftrightarrow |\Delta'| = \frac{4}{3}$. Vì $\Delta' < 0$ nên $\Delta' = -\frac{4}{3}$ hay $4 - \frac{c}{d} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{16}{3}$.

Từ đó ta có $c = 16$; $d = 3$.

Vậy: $P = c + 2d = 22$.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức z_0 với phần ảo khác 0 thỏa mãn $|z_0| = \sqrt{3}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta = 3 - 4\left(a^2 - 2a\right) = 3 - 4a^2 + 8a$.

Phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức khi và chỉ khi

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 3 - 4a^2 + 8a < 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 8a - 3 > 0 \quad (*)$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau và $|z_1| = |z_2|$.

Ta có

$z_1.z_2 = a^2 - 2a \Rightarrow |z_1.z_2| = |a^2 - 2a| \Leftrightarrow |z_1|.|z_2| = |a^2 - 2a| \Rightarrow |z_0|^2 = |a^2 - 2a|$.

Theo giả thiết có $\left(\sqrt{3}\right)^2 = |a^2 - 2a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 2a = 3 \\ a^2 - 2a = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3 \end{array}\right.$).

Các giá trị của a thỏa mãn điều kiện $(*)$. Vậy có 1 giá trị dương a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 7$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m+1$.

+) Nếu $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm thực. Khi đó $|z_0| = 7 \Leftrightarrow z_0 = \pm 7$.

Thế $z_0 = 7$ vào phương trình ta được: $m^2 - 14m + 35 = 0 \Leftrightarrow m = 7 \pm \sqrt{14}$ (nhận).

Thế $z_0 = -7$ vào phương trình ta được: $m^2 + 14m + 63 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

+) Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm phức $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$ thỏa $z_2 = \overline{z_1}$.

Khi đó $z_1.z_2 = |z_1|^2 = m^2 = 7^2$ hay $m = 7$ (loại) hoặc $m = -7$ (nhận).

Vậy tổng cộng có 3 giá trị của m là $m = 7 \pm \sqrt{14}$ và $m = -7$.

Câu 23. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 5$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta' = 2m+1$.

- **TH1**: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ thì $z_0 = \frac{1}{2}$, suy ra $m = -\frac{1}{2}$ (loại).
- **TH2:** $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$ thì $z_0 = m+1+\sqrt{|2m+1|}.i$ hoặc $z_0 = m+1-\sqrt{|2m+1|}.i$.

Theo đề bài $|z_0| = 5 \Rightarrow (m+1)^2 + (-2m-1) = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \quad (L) \\ m = -5 \, (N) \end{array}\right.$.

- **TH 3:** $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt

Theo đề bài $|z_0| = 5 \Leftrightarrow z_0 = \pm 5$.

+ Khi $z_0 = 5$: thế vào phương trình ta được $m^2 - 10m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = 5 \pm \sqrt{10}$ (nhận).

+ Khi $z_0 = -5$: thế vào phương trình ta được $m^2 + 10m + 35 = 0$ vô nghiệm.

Vậy có ba giá trị của m.

Câu 24. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 + 4az + b^2 + 2 = 0$, (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -4a \\ z_1 z_2 = b^2 + 2 \end{cases}$.

Theo yêu cầu bài toán, phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1,\ z_2$ thỏa mãn

$$z_1+2iz_2=3+3i \Leftrightarrow z_1+2iz_2-3-3i=0 \Leftrightarrow (z_1+2iz_2-3-3i)(z_2+2iz_1-3-3i)=0$$

$$\Leftrightarrow -3z_1z_2-(1+2i)(3+3i)(z_1+z_2)+18i+2i(z_1^2+z_2^2)=0$$

$$\Leftrightarrow -3(b^2+2)+(3-9i)(-4a)+18i+2i\left[(z_1+z_2)^2-2z_1z_2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow -3(b^2+2)+(3-9i)(-4a)+18i+2i\left[16a^2-2(b^2+2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-3(b^2+2)-12a=0\\36a+18+32a^2-4(b^2+2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2+2=-4a\\36a+18+32a^2+16a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2+2=-4a\\32a^2+52a+18=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b^2+2=-4a\\ \left[\begin{array}{l}a=-\dfrac{1}{2}\\ a=-\dfrac{9}{8}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-\dfrac{1}{2};b=0\\ a=-\dfrac{9}{8};b^2=\dfrac{5}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-\dfrac{1}{2};b=0\\ a=-\dfrac{9}{8};b=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy có 3 cặp số thực $(a;b)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 25. **[Mức độ 3]** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3(x^2+1)-\log_3(x+31)\right](32-2^{x-1})\ge 0$?

A. 27. **B.** 26. **C.** Vô số. **D.** 28.

Lời giải

Đặt $h(x)=\left[\log_3(x^2+1)-\log_3(x+31)\right](32-2^{x-1})$.

Điều kiện: $x>-31$.

Ta có: $h(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3(x^2+1)-\log_3(x+31)=0\\32-2^{x-1}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3(x^2+1)=\log_3(x+31)\\2^{x-1}=32\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+1=x+31\\x=6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-x-30=0\\x=6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-5\\x=6\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $h(x)$

x	-31			-5		6		$+\infty$
$h(x)$	||	+	0		−	0	−	

Từ bảng xét dấu của $h(x)$ ta suy ra $\left[\log_3(x^2+1)-\log_3(x+31)\right](32-2^{x-1})\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-31;-5]\cup\{6\}$

Vậy có 27 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 26. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2az+b^2+2=0$ ($a,\ b$ là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $z_1,\ z_2$ là hai nghiệm của phương trình, khi đó $\begin{cases} z_1+z_2=2a \\ z_1.z_2=b^2+2 \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} z_1+2iz_2=3+3i \\ z_1+z_2=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2i)z_2=2a-3-31 \\ z_1+z_2=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2=\dfrac{2a-3-3i}{1-2i} \\ z_1=\dfrac{3+(3-4a)i}{1-21} \end{cases}$

Thay vào $z_1.z_2=b^2+2$ ta có

$\dfrac{2a-3-3i}{1-2i}.\dfrac{3+(3-4a)i}{1-2i}=b^2+2$

$\Leftrightarrow -6a+(18a-8a^2-18)i=(b^2+2)(-3-4i)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6a=-3(b^2+2) \\ 18a-8a^2-18=-4(b^2+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=b^2+2 \\ 4a^2-9a+9=4a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b^2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{9}{4} \\ b^2=\dfrac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{9}{4} \\ b=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy có 3 cặp số thực $(a;b)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 27. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2az+b^2+2=0$ (a,b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=-2a \\ z_1z_2=b^2+2 \end{cases}$ (1).

TH1: z_1,z_2 là các số thực. Khi đó $z_1+2iz_2=3+3i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=3 \\ z_2=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1+z_2=\dfrac{9}{2} \\ z_1z_2=\dfrac{9}{2} \end{cases}$ (2).

Từ và suy ra: $\begin{cases} -2a=\dfrac{9}{2} \\ b^2+2=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{9}{4} \\ b^2=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{9}{4} \\ b=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$.

Suy ra trường hợp này có 2 cặp (a,b) thỏa mãn đề bài.

TH2: z_1,z_2 là các số phức. Khi đó $z_2=\overline{z}_1$. Gọi $z_1=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow z_2=x-yi$.

Ta có $z_1+2iz_2=3+3i \Leftrightarrow (x+yi)+2i(x-yi)=3+3i \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Khi đó $z_1=1+i, z_2=1-i$ (3).

Từ và suy ra: $\begin{cases} -2a = 2 \\ b^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$.

Suy ra trường hợp này có 1 cặp (a,b) thỏa mãn đề bài.

Vậy có tất cả 3 cặp (a,b) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 + 4az + b^2 + 2 = 0$, (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -4a \\ z_1 z_2 = b^2 + 2 \end{cases}$.

Theo yêu cầu bài toán, phương trình đã cho có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn

$z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \Leftrightarrow z_1 + 2iz_2 - 3 - 3i = 0 \Leftrightarrow (z_1 + 2iz_2 - 3 - 3i)(z_2 + 2iz_1 - 3 - 3i) = 0$

$\Leftrightarrow -3z_1z_2 - (1+2i)(3+3i)(z_1 + z_2) + 18i + 2i(z_1^2 + z_2^2) = 0$

$\Leftrightarrow -3(b^2+2) + (3-9i)(-4a) + 18i + 2i\left[(z_1+z_2)^2 - 2z_1z_2\right] = 0$

$\Leftrightarrow -3(b^2+2) + (3-9i)(-4a) + 18i + 2i\left[16a^2 - 2(b^2+2)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3(b^2+2) - 12a = 0 \\ 36a + 18 + 32a^2 - 4(b^2+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 2 = -4a \\ 36a + 18 + 32a^2 + 16a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 2 = -4a \\ 32a^2 + 52a + 18 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 2 = -4a \\ \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{9}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{2}; b = 0 \\ a = -\dfrac{9}{8}; b^2 = \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{2}; b = 0 \\ a = -\dfrac{9}{8}; b = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy có 3 cặp số thực $(a;b)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 29. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 - 4az + b^2 + 2 = 0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + 2i\,z_2 = 3 + 3i$

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

TH1: Nếu z_1 là số thực thì z_2 cũng là số thực.

Khi đó từ $z_1 + 2i\,z_2 = 3 + 3i$ suy ra $\begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = 3/2 \end{cases}$ (1)

Áp dụng viet ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 4a \\ z_1.z_2 = b^2 + 2 \end{cases}$ (2). Thay (1) vào (2) được $\begin{cases} 4a = 9/2 \\ b^2 + 2 = 9/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9/8 \\ b^2 = 5/2 \end{cases}$

Vậy có 2 cặp $(a;b)$ thỏa mãn bài toán

TH2: Nếu z_1 không là số thực, thì z_2 là số phức liên hợp của z_1 (vì hai nghiệm của phương trình bậc hai hệ số thực trong tập số phức khi $\Delta < 0$ là số phức liên hợp của nhau)

Giả sử $z_1 = m + in\ (m, n \in \mathbb{R})$ thay vào $z_1 + 2i\, z_2 = 3 + 3i$ ta được

$m + in + 2i(m - in) = 3 + 3i$

$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$

Vậy có $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 1 - i$.

Với $\begin{cases} z_1 + z_2 = 4a \\ z_1.z_2 = b^2 + 2 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} 4a = 2 \\ b^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 0 \end{cases}$

Vậy có một cặp $(a;b)$

Kết luận: có 3 cặp $(a;b)$ thỏa mãn bài toán

Câu 30. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0| = 6$?

A. 4 . **B.** 1. **C.** 2 . **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$.

+) Nếu $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 2m + 1 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm thực. Khi đó $|z_0| = 6 \Leftrightarrow z_0 = \pm 6$.

* Thay $z_0 = 6$ vào phương trình ta được $36 - 12(m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 24 = 0 \Leftrightarrow m = 6 \pm 2\sqrt{3}$ (thoả mãn).

* Thay $z_0 = -6$ vào phương trình ta được

$36 + 12(m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 48 = 0$ (vô nghiệm).

+) Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm phức $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$ thỏa $z_2 = \overline{z_1}$.

Khi đó $z_1.z_2 = |z_1|^2 = m^2 = 6^2$ hay $m = 6$ (loại) hoặc $m = -6$ (nhận).

Vậy tổng cộng có 3 giá trị của m là $m = 6 \pm 2\sqrt{3}$ và $m = -6$.

Câu 31. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_o thõa mãn $|z_o| = 8$

A. 4 . **B.** 3 . **C.** 2 . **D.** 1 .

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta = 8m + 4$.

Trường hợp 1: $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{2}$ suy ra phương trình có 2 nghiệm thực $\Rightarrow z_o$ là nghiệm thực

$|z_o| = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_o = 8 \\ z_o = -8 \end{array}\right.$ thay vào phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - 16m + 48 = 0 => \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 12 \end{array}\right.(T/M) \\ m^2 + 16m + 80 = 0 (VN) \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$ suy ra phương trình sẽ có 2 nghiệm phức, vì z_o là nghiệm nên suy ra $\overline{z_o}$ cũng là nghiệm

$|z_o| = 8 \Rightarrow |z_o|^2 = 64 \Leftrightarrow z_o.\overline{z_o} = 64 \Leftrightarrow m^2 = 64 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 8 \\ m = -8 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện nên ta nhận $m = -8$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2022

Câu 44. (ĐTK BGD 2022) Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w=\frac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng $\frac{1}{8}$. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1-z_2|=2$, giá trị lớn nhất của $P=|z_1-5i|^2-|z_2-5i|^2$ bằng

A. 16 . **B.** 20 . **C.** 10 . **D.** 32 .

Lời giải

Chọn B

Cách 1 (Sử dụng phương pháp đại số)

ĐK: $|z|-z\neq 0$.

Giả sử $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $w=\frac{1}{|z|-z}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}-(x+yi)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)-yi}=\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)+yi}{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)^2+y^2}$.

$w=\frac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng $\frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)^2+y^2}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=16 \\ \sqrt{x^2+y^2}\neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x\neq 4 \end{cases}$

Gọi $z_1=x_1+y_1 i;\ z_2=x_2+y_2 i \Rightarrow \begin{cases} x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=16 \\ x_1;\ x_2\neq 4 \end{cases}$.

Ta có: $|z_1-z_2|=2 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4 \Rightarrow (y_1-y_2)^2=4-(x_1-x_2)^2$.

Có: $P=|z_1-5i|^2-|z_2-5i|^2=x_1^2+(y_1-5)^2-\left[x_2{}^2+(y_2-5)^2\right]=-10(y_1-y_2)$.

Suy ra $P\leq 10|y_1-y_2|=10\sqrt{4-(x_1-x_2)^2}\leq 20$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2\neq 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 20 .

Cách 2 (Sử dụng phương pháp hình học)

ĐK: $|z|-z\neq 0$.

Giả sử $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$, được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$

Ta có: $w=\frac{1}{|z|-z}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}-(x+yi)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)-yi}=\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)+yi}{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)^2+y^2}$.

$w=\frac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng $\frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)^2+y^2}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=16 \\ \sqrt{x^2+y^2}\neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x\neq 4 \end{cases}$

Suy ra tập hợp các điểm M là đường tròn $(C): x^2+y^2=16$; trừ đi điểm $H(4;0)$.

Giả sử số phức $z_1; z_2$ lần lượt được biểu diễn bởi điểm A, B. Suy ra $OA=OB=4$

Xét $C(0;5)$.

Ta có: $|z_1-z_2|=2\Rightarrow AB=2$.

Ta có:

$P=|z_1-5i|^2-|z_2-5i|^2$

$=AC^2-BC^2=\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)^2-\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)^2=-2\overrightarrow{OC}\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)=2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}$

Ta có: $2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}=2OC\cdot AB\cdot\cos\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{BA}\right)=2\cdot5\cdot2\cdot\cos\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{BA}\right)\le 20$.

Suy ra $P\le 20$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{BA}\right)=1\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{BA}\right)=0^{\circ}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 20 .

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $(z-3+i)\left(\overline{z}-3-i\right)=36$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=2z-5+i$ là đường tròn có tâm $I(x_0;y_0)$ và bán kính z_0. Giá trị của $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. 13. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 2. Cho z_1,z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z_1|=3,|z_2|=5,|z_1-z_2|=6$. Biết điểm biểu diễn số phức z_1+z_2 luôn nằm trên một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 3. Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để có tất cả bốn số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z|=m$ và $3\left|z+\overline{z}\right|+4\left|z-\overline{z}\right|=20$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 4. Gọi S là tập tất cả các số phức z sao cho số phức $w=\dfrac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng $\dfrac{1}{20}$. Xét các số phức $z_1,z_2\in S$ thỏa mãn $|z_1-z_2|=4$. Giá trị lớn nhất của $P=-5|z_1-1-2i|^2+3|z_2-1-2i|^2$ có dạng $a+b\sqrt{2}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $a-b$ là:

A. -290. **B.** -130. **C.** -250. **D.** -170.

Câu 5. Cho z_1,z_2 là hai số phức thỏa mãn $|z_1+5|=3,|z_2+1-3i|=|z_2-3-6i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ là

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{15}{2}$.

Câu 6. Cho số phức $z_1;z_2$ thỏa mãn $|z_1-z_2|=2;|z_1+z_2+1+i|=3$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1|^2+|z_2|^2$. Tính $M+m$?

A. $12\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 15. **D.** $\dfrac{15}{2}$.

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2|z-2-i|+|z-3|+|z-5+2i|$ đạt được khi $z=a+bi$. Tính $a-b$?

A. 3. **B.** $4\sqrt{2}-1$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\overline{z}\right|\le 2$ và $\left|z-\overline{z}\right|\le 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $T=|z-2i|$. Tổng $M+n$ bằng

A. $1+\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{2}+\sqrt{10}$. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 9. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3i+5|=2$ và $|iz_2-1+2i|=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|2iz_1+3z_2|$.

A. $\sqrt{313}+16$. **B.** $\sqrt{313}$. **C.** $\sqrt{313}+8$. **D.** $\sqrt{313}+2\sqrt{5}$.

Câu 10. Cho các số phức z_1,z_2 thỏa mãn: $|z_1|=1$; $w=\overline{z_2}\left[z_2-(1-i)\right]+2-6i$ là một số thực. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z_2|^2-\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right)$ là

A. $18-3\sqrt{2}$. **B.** $18-6\sqrt{2}$. **C.** $18+6\sqrt{2}$. **D.** $19-6\sqrt{2}$.

Câu 11. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=6$ và $|z_1-z_2|=2$. Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$. Khi đó môđun của số phức $z=(a+bi)\left(\sqrt{10}-i\right)$ là

A. $2\sqrt{173}$. **B.** $2\sqrt{209}$. **C.** 26. **D.** 676.

Câu 12. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức $z=i\,\overline{\omega}+1$ sao cho số phức $\left|(\omega+2i-1)^3\right|=8$. Xét các số phức $z_1,z_2\in S$ thỏa mãn $|z_1-z_2|=1$, giá trị lớn nhất của $P=|z_1-1|^2-|z_2-1|^2$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 32.

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $6\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{5}$.

Câu 14. Xét số phức $z=a+bi\,(a,b\in R,b>0)$ thỏa mãn $|z|=1$. Tính $P=2a+4b^2$ khi $|z^3-z+2|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=2+\sqrt{2}$. **B.** $P=2-\sqrt{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=4$.

Câu 15. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=5$ và $|z_1-13-6i|=8-|z_2-1-i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|2z_1+3z_2+10+5i|$ là

A. $3\sqrt{65}$. **B.** $5\sqrt{13}$. **C.** $\frac{45}{13}$. **D.** $\frac{45\sqrt{65}}{13}$.

Câu 16. Giả sử z là số phức thỏa mãn $|iz-2-i|=3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $2|z-4-i|+|z+5+8i|$ bằng

A. $18\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{15}$. **C.** $15\sqrt{3}$. **D.** $9\sqrt{5}$.

Câu 17. Cho số phức z thoả mãn $\left|\frac{(2-i)z-3i-1}{z-i}\right|=2$. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức $w=\frac{1}{iz+1}$. Xét các số phức $w_1,w_2\in S$ thỏa mãn $|w_1-w_2|=2$, giá trị lớn nhất của $P=|w_1-4i|^2-|w_2-4i|^2$ bằng.

A. $4\sqrt{29}$. **B.** $4\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{29}$.

Câu 18. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $W=\frac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Xét các số phức $z_1,z_2\in S$ thỏa mãn.., giá trị lớn nhất của $P=|z_1+6|^2-|z_2+6|^2$ bằng.

A. $2\sqrt{78}$. **B.** $4\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{78}$. **D.** $2\sqrt{15}$.

Câu 19. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2$.

A. $P=9$. **B.** $P=10$. **C.** $P=8$. **D.** $P=12$.

Câu 20. Cho hai số phức z_1; z_2 thỏa mãn $|z_1-1-2i|=1$; $|z_2-2-8i|=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1-5-2i|+2|z_2-6-8i|+4|z_1-z_2|$.

A. 30. **B.** 25. **C.** 35. **D.** 20.

Câu 21. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w=\dfrac{z+3}{z+1}$ có phần thực bằng 2. Xét các số phức $z_1,z_2\in S$ thỏa mãn $|3z_1-4z_2|=2$, giá trị lớn nhất của $P=|z_1-3i|^2-|z_2-4i|^2$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 32.

Câu 22. Giả sử z_1,z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$ **B.** $20-4\sqrt{21}$ **C.** $20-4\sqrt{22}$ **D.** $5-\sqrt{22}$

Câu 23. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\ge 2$. Tính tỉ số $\dfrac{M}{m}$.

A. $\dfrac{M}{m}=3$. **B.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{M}{m}=2$.

Câu 24. Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2+7-24i|$ nằm trong khoảng nào?

A. $(0;1009)$. **B.** $(1009;2018)$. **C.** $(2018;4036)$. **D.** $(4036;+\infty)$.

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z}.\left((1-2i)|z|-3+i\right)-2\sqrt{10}=0$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z+5|^2-|z+i|^2$. Tìm mô đun của số phức $w=M+mi$.

A. $8\sqrt{31}$. **B.** $8\sqrt{13}$. **C.** $4\sqrt{26}$. **D.** $8\sqrt{26}$.

Câu 26. **(Đề Tham Khảo 2018)** Xét số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=8$ **B.** $P=10$ **C.** $P=4$ **D.** $P=6$

Câu 27. **(Đề Tham Khảo 2017)** Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=m+M$.

A. $P=\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$ **B.** $P=5\sqrt{2}+\sqrt{73}$ **C.** $P=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$ **D.** $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$

Câu 28. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau $|z-1|=\sqrt{34},|z+1+mi|=|z+m+2i|$ (trong đó m là số thực) và sao cho $|z_1-z_2|$ là lớn nhất. Khi đó giá trị $|z_1+z_2|$ bằng

A. $\sqrt{2}$ **B.** 10 **C.** 2 **D.** $\sqrt{130}$

Câu 29. Cho số phức z thoả mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\bar{z}+1+i|$.

A. $\sqrt{13}+3$. **B.** $\sqrt{13}+5$. **C.** $\sqrt{13}+1$. **D.** $\sqrt{13}+6$.

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $|z-6|+|z+6|=20$. Gọi M, n lần lượt là môđun lớn nhất và nhỏ nhất của z. Tính $M-n$

A. $M-n=2$. **B.** $M-n=4$. **C.** $M-n=7$. **D.** $M-n=14$.

Câu 31. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-1|=\sqrt{34}$ và $|z+1+mi|=|z+m+2i|$, (trong đó $m\in\mathbb{R}$). Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1-z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng

A. 2 **B.** 10 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{130}$

Câu 32. Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z-3\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, $|w-4\sqrt{2}i|=2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z=z_0$, $w=w_0$. Tính $|3z_0-w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 33. Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8-6i$ và $|z-w|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z|+|w|$ bằng

A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Câu 34. Cho số phức z thoả mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Câu 35. Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|z-1-2i|+|z+2-3i|=\sqrt{10}$ và có mô đun nhỏ nhất. Tính $S=7a+b$?

A. 7. **B.** 0. **C.** 5. **D.** -12.

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+2|z-\bar{z}|=8$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-3i|$. Tính $M+m$.

A. $\sqrt{10}+\sqrt{34}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}+\sqrt{58}$. **D.** $\sqrt{5}+\sqrt{58}$.

Câu 37. Cho số phức z có $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z^2-z|+|z^2+z+1|$.

A. $\frac{13}{4}$ **B.** 3 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\frac{11}{4}$

Câu 38. Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$ **B.** $20-4\sqrt{21}$ **C.** $20-4\sqrt{22}$ **D.** $5-\sqrt{22}$

Câu 39. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i|\le|z-4i|$ và $|z-3-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2|$ là:

A. $\sqrt{13}+1$. **B.** $\sqrt{10}+1$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 40. Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1-i|+|z-5-2i|$ bằng

A. $1+\sqrt{10}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{17}$ **D.** 5.

Câu 41. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là

A. $|w|=3\sqrt{137}$. **B.** $|w|=\sqrt{1258}$. **C.** $|w|=2\sqrt{309}$. **D.** $|w|=2\sqrt{314}$.

Câu 42. Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w+i|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-1-2i|+|z-5-2i|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$. **B.** $4+2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{53}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

Câu 43. Xét các số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3-2i|=2$. Tính $a+b$ khi $|z+1-2i|+2|z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $4-\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $4+\sqrt{3}$.

Câu 44. Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3-4i|=1$ và $|z_2-3-4i|=\frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a-2b=12$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_1|+|z-2z_2|+2$ bằng:

A. $P_{\min}=\frac{\sqrt{9945}}{11}$. **B.** $P_{\min}=5-2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=\frac{\sqrt{9945}}{13}$. **D.** $P_{\min}=5+2\sqrt{5}$.

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 46. Cho số phức z thỏa mãn : $|\bar{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-i|+|z-4|$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 6.

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min|w|$, với $w=z-2+2i$.

A. $\min|w|=\frac{1}{2}$. **B.** $\min|w|=1$. **C.** $\min|w|=\frac{3}{2}$. **D.** $\min|w|=2$.

Câu 48. Xét các số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2-3i|=2\sqrt{2}$. Tính $P=2a+b$ khi $|z+1+6i|+|z-7-2i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=3$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=1$. **D.** $P=7$.

Câu 49. **(ĐTK2021)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$ và $(z+2i)(\bar{z}-2)$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 50. **(Mã 110 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Câu 51. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$ **B.** $P=-5$ **C.** $P=3$ **D.** $P=7$

Câu 52. **(Mã 104 2018)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Câu 53. **(Mã 103 2018)** Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$?

A. 1 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

Câu 54. **(Mã 105 2017)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính $|z|$.

A. $|z|=17$ **B.** $|z|=\sqrt{17}$ **C.** $|z|=\sqrt{10}$ **D.** $|z|=10$

Câu 55. **(Mã105 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

Câu 56. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=|z_2|=2$ và $|z_1+2z_2|=4$. Giá trị của $|2z_1-z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Câu 57. Có bao nhiêu số phức z thỏa $|z+1-2i|=|\overline{z}+3+4i|$ và $\frac{z-2i}{\overline{z}+i}$ là một số thuần ảo

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 58. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3|=|z-1|$ và $(z+2)(\overline{z}-i)$ là số thực. Tính $a+b$.

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 59. Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m\in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=6$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A. 10. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 8.

Câu 60. Cho số phức z thỏa mãn $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$. Môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 16. **D.** 4.

Câu 61. Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn: $|z_1|=2\sqrt{3}$, $|z_2|=3\sqrt{2}$. Hãy tính giá trị biểu thức $P=|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2$.

A. $P=60$. **B.** $P=20\sqrt{3}$. **C.** $P=30\sqrt{2}$. **D.** $P=50$.

Câu 62. **(Mã 104 2017)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=1$ và $|z-\sqrt{3}+i|=m$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 63. **(Mã 103 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+2i)(z-2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 4 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 2

Câu 64. **(Đề Tham Khảo 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(-1;-1)$ **D.** $(1;-1)$

Câu 65. **(Mã 101 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 26. **D.** 34.

Câu 66. **(Mã 102 - 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 20. **C.** 12. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đó?

A. $I(3;-2)$. **B.** $I(-3;2)$. **C.** $I(3;2)$. **D.** $I(-3;-2)$.

Câu 68. Xét các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 69. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1-3i|=2$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(2-i)z-3i+5$ là một đường tròn. Xác định tâm I và bán kính của đường tròn trên.

A. $I(-6;-4), R=2\sqrt{5}$. **B.** $I(6;4), R=10$.

C. $I(6;4), R=2\sqrt{5}$. **D.** $I(-6;4), R=2\sqrt{5}$.

Câu 70. Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$, đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

A. $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$. **B.** $(x-10)^2+(y-6)^2=36$.

C. $(x-10)^2+(y-6)^2=16$. **D.** $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=9$.

Câu 71. Xét số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=3$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(12-5i)\overline{z}+4i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=13$. **B.** $r=39$. **C.** $r=17$ **D.** $r=3$.

Câu 72. Cho số phức z thảo mãn $(z+1-3i)(\overline{z}+1+3i)=25$. Biết tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 7.

Câu 73. **(Đề Tham Khảo 2018)** Xét số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=8$ **B.** $P=10$ **C.** $P=4$ **D.** $P=6$

Câu 74. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5}-2$. **B.** $\sqrt{5}-1$. **C.** $\sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{5}+2$.

Câu 75. Cho số phức z thoả mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$.

A. $\sqrt{13}+3$. **B.** $\sqrt{13}+5$. **C.** $\sqrt{13}+1$. **D.** $\sqrt{13}+6$.

Câu 76. Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2+7-24i|$ nằm trong khoảng nào?

A. $(0;1009)$. **B.** $(1009;2018)$. **C.** $(2018;4036)$. **D.** $(4036;+\infty)$.

Câu 77. Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=4$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-2i|$. Đặt $A=M+m$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $A\in\left(\sqrt{34};6\right)$. **B.** $A\in\left(6;\sqrt{42}\right)$. **C.** $A\in\left(2\sqrt{7};\sqrt{33}\right)$. **D.** $A\in\left[4;3\sqrt{3}\right)$.

Câu 78. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $-\frac{3}{10}$.

Câu 79. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là

A. $|w|=3\sqrt{137}$. **B.** $|w|=\sqrt{1258}$. **C.** $|w|=2\sqrt{309}$. **D.** $|w|=2\sqrt{314}$.

Câu 80. Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=\sqrt{5}$. Gọi a và b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức a^2-b^2 bằng

A. 40. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $(z-3+i)(\overline{z}-3-i)=36$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=2z-5+i$ là đường tròn có tâm $I(x_0;y_0)$ và bán kính z_0. Giá trị của $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. 13. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z=a+bi\ (a;b\in\mathbb{R})$ và $w=x+yi\ (x;y\in\mathbb{R})$.

+) $(z-3+i)(\overline{z}-3-i)=36 \Leftrightarrow [a-3+(b+1)i][a-3-(b+1)i]=36$

$\Leftrightarrow (a-3)^2+(b+1)^2=36\ (1)$

Theo giả thiết: $w=2z-5+i \Leftrightarrow x+yi=2(a+bi)-5+i \Leftrightarrow x+yi=2a-5+(2b+1)i$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2a-5 \\ y=2b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x+5}{2} \\ b=\dfrac{y-1}{2} \end{cases} (2).$$

Thay (2) vào (1) ta được: $\left(\dfrac{x+5}{2}-3\right)^2+\left(\dfrac{y-1}{2}+1\right)^2=36 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=144$.

Suy ra, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường có tròn tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R=12$.

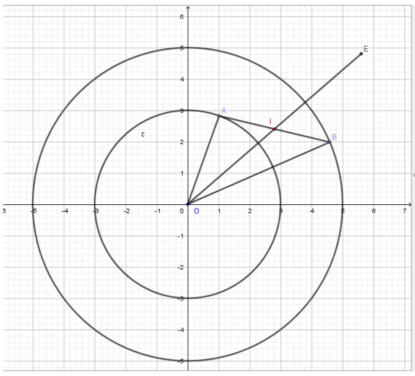
Vậy $x_0+y_0+z_0=1+(-1)+12=12$.

Câu 2. Cho z_1,z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z_1|=3,|z_2|=5,|z_1-z_2|=6$. Biết điểm biểu diễn số phức z_1+z_2 luôn nằm trên một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2.

Ta có $|z_1|=3; |z_2|=5; |z_1-z_2|=6$, suy ra điểm A, B nằm trên đường tròn tâm O bán kính lần lượt là $OA=3; OB=5$ và $AB=6$.

Gọi I là trung điểm của AB.

Ta có $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$; $OI=\sqrt{\dfrac{OA^2+OB^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4}}=2\sqrt{2}$.

Gọi E điểm biểu diễn số phức $z_1+z_2 \Rightarrow \overrightarrow{OE}=(x_1+x_2;y_1+y_2)=2\overrightarrow{OI} \Rightarrow OE=4\sqrt{2}$

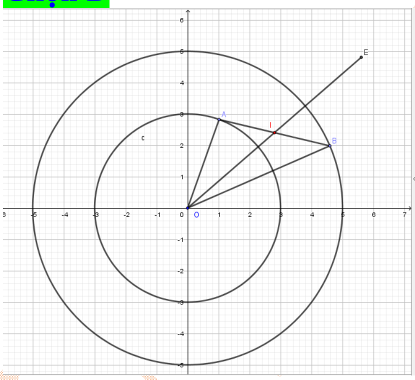
Vậy điểm E nằm trên đường tròn tâm O bán kính $OE=4\sqrt{2}$.

Câu 3. Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để có tất cả bốn số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z|=m$ và $3|z+\overline{z}|+4|z-\overline{z}|=20$?

A. 1.　　　　**B.** 2.　　　　**C.** 4.　　　　**D.** 3.

Lời giải

Chọn D



Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$.

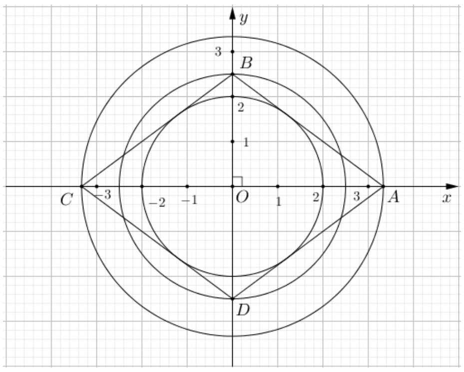
Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=m\\ 3|x+yi+x-yi|+4|x+yi-x+yi|=20\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=m^2\\ 6|x|+8|y|=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3|x|+4|y|=10\,(1)\\ x^2+y^2=m^2\,(2)\end{cases}$$

Tập hợp các điểm M thỏa mãn (1) là hình thoi $ABCD$ với $A\left(\dfrac{10}{3};0\right), B\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$, $C\left(-\dfrac{10}{3};0\right), D\left(0;-\dfrac{5}{2}\right)$.

Tập hợp các điểm M thỏa mãn (2) là đường tròn (C) tâm $O(0;0), R = m$ $(m > 0)$.



Có đúng 4 số phức thỏa mãn đề khi và chỉ khi (C) có đúng 4 điểm chung với các cạnh hình thoi.

TH1: (C) là đường tròn nội tiếp hình thoi.

Khi đó ta có $R = d(O, AB) \Leftrightarrow m = 2$.

TH2: (C) nằm giữa hai đường tròn: đường tròn đường kính BD và đường tròn đường kính AC .

Khi đó ta có $\frac{BD}{2} < R < \frac{AC}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{10}{3}$. Do m nguyên dương nên $m = 3$.

Vậy có tất cả 2 số nguyên thỏa mãn.

Câu 4. Gọi S là tập tất cả các số phức z sao cho số phức $w = \frac{1}{|z| - z}$ có phần thực bằng $\frac{1}{20}$. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của $P = -5|z_1 - 1 - 2i|^2 + 3|z_2 - 1 - 2i|^2$ có dạng $a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a - b$ là:

A. -290. **B.** -130. **C.** -250. **D.** -170.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. ĐK: $z - |z| \neq 0$.

Ta có: $w = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2} - x - yi} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x + yi}{\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right)^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x + yi}{2x^2 + 2y^2 - 2x\sqrt{x^2+y^2}}$.

Phần thực của w bằng $\frac{1}{20}$ ta có:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{2x^2 + 2y^2 - 2x\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right)2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+y^2} = 20$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 100.$$

Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 10$.

Gọi $M(x_1; y_1)$ là điểm biểu diễn số phức z_1, $N(x_2; y_2)$ là điểm biểu diễn số phức z_2.

Ta có: $|z_1 - z_2| = 4 \Leftrightarrow MN = 4$. Và ta có điểm $A(1;2)$,

$P = -5|z_1 - 1 - 2i|^2 + 3|z_2 - 1 - 2i|^2$

$P = -5MA^2 + 3NA^2 = -5\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{NA}^2$

$P = -5\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OA}\right)^2$

$P = -5MO^2 + 3NO^2 - 2OA^2 - 2\overrightarrow{OA}.\left(-5\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{ON}\right)$

$P = -2R^2 - 2OA^2 - 2\overrightarrow{OA}.\left(-5\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{ON}\right)$

$P = -210 - 2\overrightarrow{OA}.\left(-5\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{ON}\right)$

Ta có $\left|-5\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{ON}\right|^2 = 25.OM^2 + 9.ON^2 - 15.2.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$

Mặt khác:

$\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\right)^2 = \overrightarrow{NM}^2 = MN^2$

$\Leftrightarrow OM^2 + ON^2 - 2.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = MN^2$

$\Leftrightarrow 2.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 2R^2 - MN^2$.

Khi đó: $\left|-5\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{ON}\right|^2 = 34R^2 - 15.\left(2R^2 - MN^2\right)$

$\left|-5\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{ON}\right|^2 = 34.100 - 15(2.100 - 16) = 640$.

$P = -210 - 2.OA.\left|\vec{a}\right|.\cos\left(\overrightarrow{OA}, \vec{a}\right)$, Với $\vec{a} = -5\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{ON}$.

$P = -210 - 2.OA.\left|\vec{a}\right|.\cos\left(\overrightarrow{OA}, \vec{a}\right) \le -210 + 2.\sqrt{5}.\sqrt{640} = -210 + 80\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\left(\overrightarrow{OA}, \vec{a}\right) = 180^0$.

Vậy $a = -210, b = 80 \Rightarrow a - b = -290$.

Câu 5. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $|z_1 + 5| = 3, |z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{15}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in R$.

Điểm $M(x_1; y_1)$ là biểu diễn cho số phức z_1, điểm $N(x_2; y_2)$ là biểu diễn cho số phức z_2.

Ta có:

$|z_1 + 5| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + 5)^2 + y_1^2} = 3 \Leftrightarrow (x_1 + 5)^2 + y_1^2 = 9$.

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z_1 thuộc đường tròn (C) tâm $I(-5;0)$, bán kính $R = 3$.

$|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i| \Leftrightarrow \sqrt{(x_2 + 1)^2 + (y_2 - 3)^2} = \sqrt{(x_2 - 3)^2 + (y_2 - 6)^2}$

$\Leftrightarrow 8x_2 + 6y_2 - 35 = 0$

Tập hợp các điểm N biểu diễn cho số phức z_2 thuộc đường thẳng $(\Delta): 8x + 6y - 35 = 0$.

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = MN$.

Ta thấy $d\left(I,\Delta\right)=\frac{75}{10}>R$.

Nên độ dài MN nhỏ nhất bằng $d\left(I,\Delta\right)-R=\frac{75}{10}-3=\frac{9}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi N là hình chiếu của I trên Δ và I,M,N thẳng hàng, M nằm giữa I và N.

Câu 6. Cho số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $\left|z_1-z_2\right|=2; \left|z_1+z_2+1+i\right|=3$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2$. Tính $M+m$?

A. $12\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 15. **D.** $\frac{15}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=\left(z_1+z_2\right)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)+\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=2\left(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}\right)=2\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)$

Suy ra $P=\frac{1}{2}\left(\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2\right)=\frac{1}{2}\left(4+\left|z_1+z_2\right|^2\right)$.

Gọi M là điểm biểu diễn cho số phức z_1+z_2.

Ta có: $\left|z_1+z_2+1+i\right|=3\Rightarrow M$ thuộc đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(-1;-4\right)$ và bán kính $R=3$.

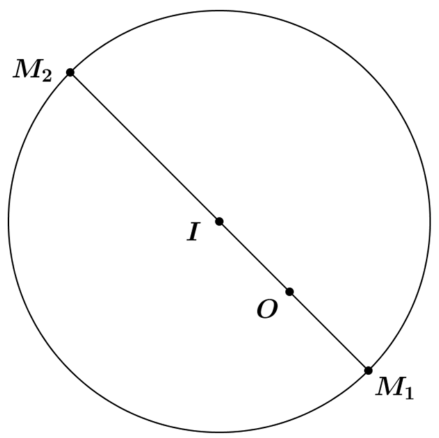
Ta có $P=\frac{1}{2}\left(4+\left|z_1+z_2\right|^2\right)=\frac{1}{2}\left(4+OM^2\right)$.

Vì $OI=\sqrt{2}<R$ nên O nằm trong $\left(C\right)$.

Ta có: $3-\sqrt{2}=IM-OI\le OM\le OI+IM=3+\sqrt{2}$.

$\Rightarrow\left(3-\sqrt{2}\right)^2\le OM^2\le\left(3+\sqrt{2}\right)^2$

$\Rightarrow\frac{15-6\sqrt{2}}{2}\underset{(1)}{\le}P\underset{(2)}{\le}\frac{15+6\sqrt{2}}{2}$



Dấu "=" tại (1) xảy ra $\Leftrightarrow M\equiv M_1$ (với M_1 là giao điểm của tia IO với $\left(C\right)$).

Dấu "=" tại (2) xảy ra $\Leftrightarrow M\equiv M_2$ (với M_2 là giao điểm của tia OI với $\left(C\right)$).

Vậy $M=\frac{15+6\sqrt{2}}{2}; m=\frac{15-6\sqrt{2}}{2}\Rightarrow M+m=15$.

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2|z-2-i|+|z-3|+|z-5+2i|$ đạt được khi $z=a+bi$. Tính $a-b$?

A. 3. **B.** $4\sqrt{2}-1$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Gọi M là các điểm biểu diễn cho số phức z.

Ta có $|z-1-2i|=4 \Leftrightarrow MI=4$ (với $I(1;4)$).

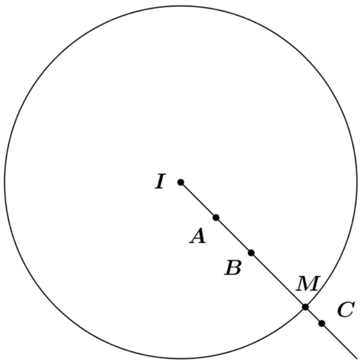
Suy ra M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=4$.

Xét $A(2;1)$; $B(3;0)$; $C(5;-2)$.

Ta có: $AI: x+y-3=0 \Rightarrow B, C \in AI$.

Ta lại có: $IA=\sqrt{2}<R$; $IB=2\sqrt{2}<R$; $CI=4\sqrt{2}>R$.

Suy ra A, B nằm trong (C) và C nằm ngoài (C).



Có

$$P=2MA+MB+MC$$
$$\geq 2(IM-IA)+(IM-IB)+(IC-IM)$$
$$=2IM-2IA-IB+IC$$
$$=2\cdot 4-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}=8$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của đoạn IC với (C).

Khi đó ta có $IM=4; IC=4\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{IM}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{IC} \Rightarrow M\left(1+2\sqrt{2};2-2\sqrt{2}\right)$.

Suy ra $a=1+2\sqrt{2}; b=2-2\sqrt{2} \Rightarrow a-b=4\sqrt{2}-1$.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}|\leq 2$ và $|z-\overline{z}|\leq 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $T=|z-2i|$. Tổng $M+n$ bằng

A. $1+\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{2}+\sqrt{10}$. **C.** 4. **D.** 1.

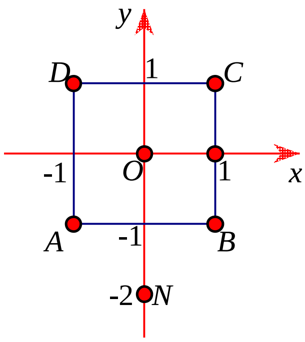
Lời giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi$, $x, y\in\mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases}|2x|\leq 2\\ |2yi|\leq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|\leq 1\\ |y|\leq 1\end{cases}$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Khi đó tập hợp các điểm M là hình vuông $ABCD$ (hình vẽ).



Điểm $N(0;-2)$ biểu diễn số phức, khi đó $T=|z-2i|=MN$.

Dựa vào hình vẽ ta có $MN \ge d(N,AB)=1$ nên $m=\min T=1$, $MN \le NC=\sqrt{10}$ nên $M=\max T=\sqrt{10}$, do đó $M+m=1+\sqrt{10}$.

Câu 9. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3i+5|=2$ và $|iz_2-1+2i|=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|2iz_1+3z_2|$.

A. $\sqrt{313}+16$. **B.** $\sqrt{313}$. **C.** $\sqrt{313}+8$. **D.** $\sqrt{313}+2\sqrt{5}$.

Lời giải

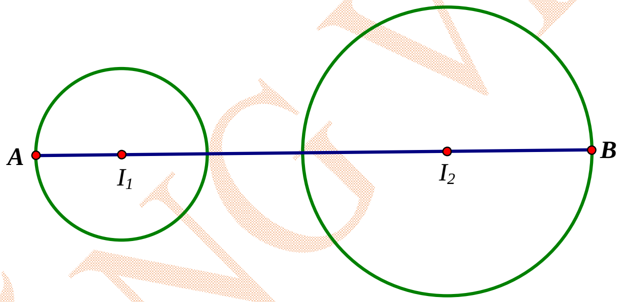
Chọn A

Ta có $|z_1-3i+5|=2 \Leftrightarrow |2iz_1+6+10i|=4$ (1);

$|iz_2-1+2i|=4 \Leftrightarrow |(-3z_2)-6-3i|=12$ (2).

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$.

Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I_1(-6;-10)$ và bán kính $R_1=4$; điểm B nằm trên đường tròn tâm $I_2(6;3)$ và bán kính $R_2=12$.



Ta có $T=|2iz_1+3z_2|=AB \le I_1I_2+R_1+R_2=\sqrt{12^2+13^2}+4+12=\sqrt{313}+16$.

Vậy $\max T=\sqrt{313}+16$.

Câu 10. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn: $|z_1|=1$; $w=\overline{z_2}\left[z_2-(1-i)\right]+2-6i$ là một số thực. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z_2|^2-\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right)$ là

A. $18-3\sqrt{2}$. **B.** $18-6\sqrt{2}$. **C.** $18+6\sqrt{2}$. **D.** $19-6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z_1=a+bi; z_2=x+yi; (a,b,x,y\in\mathbb{R})$;

$M(a;b), N(x;y)$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trong hệ tọa độ Oxy.

Ta có $|z_1|=1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn (T) có tâm O bán kính $R=1$

$z_2 = x + yi$

$w = \overline{z_2}\left[z_2 - (1-i)\right] - 6 + 2i = (x - yi)\left[(x-1) + (y+1)i\right] + 2 - 6i$

$= x(x-1) + y(y+1) + 2 + \left[x(y+1) - y(x-1) - 6\right]i$

w là số thực $\Leftrightarrow x(y+1) - y(x-1) - 6 = 0 \Leftrightarrow x + y - 6 = 0$

$\Rightarrow N$ thuộc đường thẳng $\Delta : x + y - 6 = 0$

$d(O,\Delta) = \frac{|-6|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} > 1$ nên Δ và (T) không có điểm chung.

$z_1\overline{z_2} = ax + by + (bx - ay)i$

$\overline{z_1}z_2 = ax + by + (ay - bx)i$

$\Rightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2(ax + by)$

$P = x^2 + y^2 - 2(ax + by) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - 1 = MN^2 - 1$ (vì $a^2 + b^2 = 1$)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên $\Delta : x + y + 2 = 0 \Rightarrow H(3;3)$

Đoạn OH cắt đường tròn (T) tại điểm $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Với N thuộc Δ, M thuộc đường tròn (T), ta có:

$MN \ge ON - OM \ge OH - OI = IH = 3\sqrt{2} - 1$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv I, N \equiv H$

$P \ge \left(3\sqrt{2} - 1\right)^2 - 1 = 18 - 6\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i; z_2 = 3 + 3i$.

Vậy $\min P = 18 - 3\sqrt{2}$.

Câu 11. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = 6$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$. Khi đó môđun của số phức $z = (a + bi)\left(\sqrt{10} - i\right)$ là

A. $2\sqrt{173}$. **B.** $2\sqrt{209}$. **C.** 26. **D.** 676.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z_1 = a + bi; z_2 = x + yi; (a, b, x, y \in \mathbb{R})$;

Ta gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2.

Từ giả thiết $|z_1 + z_2| = 6 \Rightarrow \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = 6 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OI}\right| = 3$ với I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

$|z_1 - z_2| = 2 \Rightarrow \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right| = 2 \Leftrightarrow AB = 2$.

Ta có $OA^2 + OB^2 = 2OI^2 + \frac{AB^2}{2} = 20$.

$P = |z_1| + |z_2| = OA + OB \Rightarrow P^2 \le \left(1^2 + 1^2\right)\left(OA^2 + OB^2\right) = 40$.

Vậy $\max P = 2\sqrt{10} = a$.

Mặt khác, $P = |z_1| + |z_2| = \left|\overrightarrow{OA}\right| + \left|\overrightarrow{OB}\right| \ge \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = 6$.

Vậy $\min P = 6 = b$.

Suy ra $z=\left(2\sqrt{10}+6i\right)\left(\sqrt{10}-i\right)=26+4\sqrt{10}i$

$\Rightarrow\left|z\right|=\left|\bar{z}\right|=\left|26+4\sqrt{10}i\right|=\sqrt{676+160}=\sqrt{836}=2\sqrt{209}$.

Câu 12. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức $z=i\,\overline{\omega}+1$ sao cho số phức $\left|\left(\omega+2i-1\right)^3\right|=8$. Xét các số phức $z_1,z_2\in S$ thỏa mãn $\left|z_1-z_2\right|=1$, giá trị lớn nhất của $P=\left|z_1-1\right|^2-\left|z_2-1\right|^2$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 32.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi;\omega=a+bi$.

$$\Rightarrow\begin{cases}x+yi=1+i\left(a-bi\right)\\ \left(\sqrt{\left(a-1\right)^2+\left(b+2\right)^2}\right)^3=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=y\\ b=x-1\\ \left(a-1\right)^2+\left(b+2\right)^2=4\end{cases}\Rightarrow\left(x+1\right)^2+y^2=4.$$

Gọi $z_1=x_1+y_1i;\ z_2=x_2+y_2i\Rightarrow(x_1+1)^2+y_1^2=4;(x_2+1)^2+y_2^2=4$

Ta có: $\left|z_1-z_2\right|=1\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2=1$

$P=\left|z_1-1\right|^2-\left|z_2-1\right|^2=-4\left(x_1-x_2\right)$

$\Rightarrow P\le 4\left|x_1-x_2\right|=4\sqrt{1-\left(y_1-y_2\right)^2}\le 4$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $y_1=y_2$ và $x_2-x_1=1$.

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|1+z\right|+2\left|1-z\right|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $6\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Theo giả thiết, ta có $\left|z\right|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Suy ra $-1\le x\le 1$.

Khi đó, $P=\left|1+z\right|+2\left|1-z\right|=\sqrt{\left(x+1\right)^2+y^2}+2\sqrt{\left(x-1\right)^2+y^2}=\sqrt{2x+2}+2\sqrt{2-2x}$.

Suy ra $P\le\sqrt{\left(1^2+2^2\right)\left[\left(2x+2\right)+\left(2-2x\right)\right]}$ hay $P\le 2\sqrt{5}$, với mọi $-1\le x\le 1$.

Vậy $P_{\max}=2\sqrt{5}$ khi $2\sqrt{2x+2}=\sqrt{2-2x}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{5},\ y=\pm\frac{4}{5}$.

Câu 14. Xét số phức $z=a+bi\left(a,b\in R,b>0\right)$ thỏa mãn $\left|z\right|=1$. Tính $P=2a+4b^2$ khi $\left|z^3-z+2\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=2+\sqrt{2}$. **B.** $P=2-\sqrt{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=4$.

Lời giải

Chọn C

$$\left|z\right|=1\Rightarrow\left|z\right|^2=1\Rightarrow\begin{cases}\bar{z}=\dfrac{1}{z}\\ a^2+b^2=1\end{cases}.$$

Do $b>0$ và $b^2=1-a^2\Rightarrow -1<a<1$.

Ta có: $\left|z^3-z+2\right|=\dfrac{\left|z^3-z+2\right|}{\left|z^2\right|}=\left|z-\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{z^2}\right|=\left|z-\bar{z}+2\bar{z}^2\right|=2\left|bi+\left(a-bi\right)^2\right|$

$=2\left|bi+a^2-b^2-2abi\right| =2\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b-2ab\right)^2} =2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2+b^2-4ab^2}$

$=2\sqrt{b^2-4ab^2+1} =2\sqrt{1-a^2-4a\left(1-a^2\right)+1} =2\sqrt{4a^3-a^2-4a+2}$.

Xét hàm số $f\left(a\right)=4a^3-a^2-4a+2$ miền $-1<a<1$ có $f'\left(a\right)=12a^2-2a-4$.

$$f'\left(a\right)=0 \Leftrightarrow 12a^2-2a-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\dfrac{1}{2} \\ a=\dfrac{2}{3} \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

a	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$	1	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	1

Biểu thức trên đạt GTLN trên miền $-1<a<1$ khi $a=\dfrac{-1}{2} \Rightarrow b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (do $b>0$)

Vậy $P=2a+4b^2=2$

Câu 15. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left|z_1-z_2\right|=5$ và $\left|z_1-13-6i\right|=8-\left|z_2-1-i\right|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|2z_1+3z_2+10+5i\right|$ là

A. $3\sqrt{65}$. **B.** $5\sqrt{13}$. **C.** $\dfrac{45}{13}$. **D.** $\dfrac{45\sqrt{65}}{13}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức $z_1; z_2$.

Ta có $AB=\left|z_1-z_2\right|=5\left(1\right)$.

Gọi $C\left(13;6\right); D\left(1;1\right) \Rightarrow \overrightarrow{CD}\left(-12;-5\right) \Rightarrow CD=13$.

Suy ra ta có $\left|z_1-13-6i\right|=CA; \left|z_2-1-i\right|=BD$.

Từ đó ta có $CA=8-BD \Rightarrow CA+BD=8\left(2\right)$.

Từ $\left(1\right),\left(2\right)$ suy ra $CA+AB+BD=13$.

Mà $CA+AB+BD \geq CD=13$ nên suy ra A, B thuộc đoạn CD và A thuộc đoạn CB.

Có: $P=\left|2z_1+3z_2+10+5i\right|=\left|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OK}\right|$ (với $K\left(2;1\right)$).

Lấy điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Rightarrow P=\left|5\overrightarrow{OI}+5\overrightarrow{OK}\right|=5\left|\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OK}\right|$.

Đường thẳng CD có phương trình: $\begin{cases} x=1+12t \\ y=1+5t \end{cases}$.

$I \in AB \Rightarrow I \in CD \Rightarrow I\left(1+12t, 1+5t\right)$.

Vì I thuộc đoạn $CD \Rightarrow 1 \le 1+12t \le 13 \Rightarrow 0 \le t \le 1$.

Ta có $BI = \frac{2}{5}AB \Rightarrow DI \ge 2 \Rightarrow (12t)^2 + (5t)^2 \ge 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge \frac{2}{13} \\ t \le -\frac{2}{13} \end{array}\right.$. Do vậy ta có $\frac{2}{13} \le t \le 1$.

Có

$$P^2 = 25\left(OI^2 + OK^2 + 2\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OK}\right)$$
$$= 25\left[(1+12t)^2 + (1+5t)^2 + 5 + 2(29t+3)\right]$$
$$= 25\left(169t^2 + 92t + 13\right)$$

Xét $f(t) = 25\left(169t^2 + 92t + 13\right)$ liên tục trên $\left[\frac{2}{13};1\right]$.

Có $f'(t) = 25(338t + 92) > 0\ \forall t \in \left[\frac{2}{13};1\right]$.

Suy ra $f(t)$ liên tục, đồng biến trên $\left[\frac{2}{13};1\right] \Rightarrow \min\limits_{\left[\frac{2}{13};1\right]} f(t) = f\left(\frac{2}{13}\right) = \frac{10125}{13}$.

Do vậy $\min P = \sqrt{\frac{10125}{13}} = \frac{45\sqrt{65}}{13}$.

Câu 16 Cho 2 số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $\left|z_1 - \overline{z_1} + 2i\right| = \left|3z_1 + \overline{z_1} + 4 - 2i\right|$ và $\left|\overline{z_2} - 4 - i\right| = 2$. Gọi $A,\ B$ là các điểm biểu diễn các số phức $z_1,\ z_2$ trong mặt phẳng tọa độ. Độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng:

A. $2\sqrt{5} - 2$. **B.** $2\sqrt{2} - 2$. **C.** $2\sqrt{3} - 2$. **D.** $2\sqrt{6} - 2$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z_1 = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$, ta có:

$$\left|z_1 - \overline{z_1} + 2i\right| = \left|3z_1 + \overline{z_1} + 4 - 2i\right| \Leftrightarrow |a + bi - a + bi + 2i| = |3a + 3bi + a - bi + 4 - 2i|$$

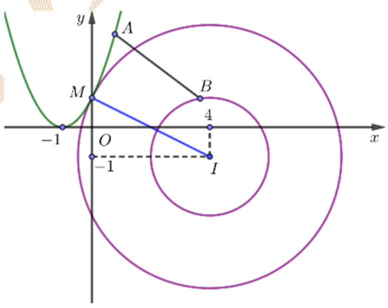
$$\Leftrightarrow |(2b+2)i| = |4a + 4 + (2b-2)i| \Leftrightarrow (2b+2)^2 = (4a+4)^2 + (2b-2)^2 \Leftrightarrow b = a^2 + 2a + 1$$

$\Rightarrow$ Điểm A luôn thuộc parabol $(P): y = x^2 + 2x + 1$

Đặt $z_2 = c + di\ (c, d \in \mathbb{R})$, ta có:

$$\left|\overline{z_2} - 4 - i\right| = 2 \Leftrightarrow |c - di - 4 - i| = 2 \Leftrightarrow (c-4)^2 + (d+1)^2 = 4$$

$\Rightarrow$ Điểm B luôn thuộc đường tròn $(C): (x-4)^2 + (y+1)^2 = 4$ với tâm $I(4;-1)$ và bán kính $r = 2$



Gọi (C') là đường tròn tâm $I(4;-1)$, bán kính R tiếp xúc với parabol $(P): y = x^2 + 2x + 1$ tại M.

Ta có: $(C'):(x-4)^2+(y+1)^2=R^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C') và (P) là: $(x-4)^2+(x^2+2x+1+1)^2=R^2$

$\Leftrightarrow (x-4)^2+(x^2+2x+2)^2=R^2$

Đặt $f(x)=(x-4)^2+(x^2+2x+2)^2$

$f'(x)=2(x-4)+2(2x+2)(x^2+2x+2)=4x^3+12x^2+18x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	20	$\nearrow$	$+\infty$

Vì (C') và (P) tiếp xúc nhau nên $R^2=20 \Rightarrow R=2\sqrt{5} \Rightarrow IM=2\sqrt{5}$.

Ta có: $AB \ge IA-IB$ (Quy tắc 3 điểm)

Mà $IA \ge IM$ nên $AB \ge IM-IB \Rightarrow AB \ge 2\sqrt{5}-2$.

Câu 17 Cho các số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=5$, $|z_1|>|z_2|$, $\dfrac{(z_1z_2)^2+36}{z_1z_2}$ là số thực. Tìm giá trị lớn nhất của $|2z_1+3z_2-7i|$.

A. 15. **B.** 18. **C.** 19. **D.** 21.

Lời giải

Chọn C

Đặt

$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$; $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

$w=z_1z_2=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Suy ra $\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{r}(\cos\varphi-i\sin\varphi)$.

$\dfrac{(z_1z_2)^2+6}{z_1z_2}=\dfrac{w^2+36}{w}=w+\dfrac{36}{w}=\left(r+\dfrac{36}{r}\right)\cos\varphi+i\left(r-\dfrac{36}{r}\right)\sin\varphi$ là số thực khi và chỉ khi

$\begin{cases} r-\dfrac{36}{r}=0 \\ r>0 \end{cases} \Leftrightarrow r=6 \Leftrightarrow r_1r_2=6$.

Mà $|z_1|+|z_2|=5$, $|z_1|>|z_2|$ tương đương $r_1+r_2=5$, $r_1>r_2$ nên suy ra $r_1=3$, $r_2=2$.

Do đó $z_1=3(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$; $z_2=2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$

$|2z_1+3z_2-7i| \le |2z_1+3z_2|+|7i|=|2z_1+3z_2|+7$

$|2z_1+3z_2|=6\sqrt{(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)^2+(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)^2}=6\sqrt{2+2\cos(\varphi_1-\varphi_2)} \le 6\sqrt{2+2}=12$ Vậy

$\max(|2z_1+3z_2-7i|)=19$. Đạt được khi $z_1=-3i$; $z_2=-2i$.

Câu 16. Giả sử z là số phức thỏa mãn $|iz-2-i|=3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $2|z-4-i|+|z+5+8i|$ bằng

A. $18\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{15}$. **C.** $15\sqrt{3}$. **D.** $9\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|iz-2-i|=3 \Leftrightarrow |i|.\left|z-\dfrac{2+i}{i}\right|=3 \Leftrightarrow |z-1+2i|=3(1)$

Gọi $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Từ (1), ta có $(a-1)^2+(b+2)^2=9 \Rightarrow \begin{cases} a=1+3\sin t \\ b=-2+3\cos t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Suy ra $z=(1+3\sin t)+(-2+3\cos t)i$.

Đặt $P=2|z-4-i|+|z+5+8i|$. Khi đó:

$$P=2\sqrt{(-3+3\sin t)^2+(-3+3\cos t)^2}+\sqrt{(6+3\sin t)^2+(6+3\cos t)^2}$$
$$=6\sqrt{3-2\sin t-2\cos t}+3\sqrt{9+4\sin t+4\cos t}$$
$$=6\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}+3\sqrt{9+4\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Đặt $u=\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $u\in[-1;1]$.

Xét hàm số $f(u)=6\sqrt{3-2\sqrt{2}u}+3\sqrt{9+4\sqrt{2}u}$ trên đoạn $[-1;1]$

$f'(u)=\dfrac{-6\sqrt{2}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}u}}+\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{9+4\sqrt{2}u}}$. Cho $f'(u)=0\Rightarrow u=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(u)$:

u	-1		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		1
f'(u)		+	0	—	
f(u)	$12\sqrt{2}+3$	↗	$9\sqrt{5}$	↘	$12\sqrt{2}-3$

Do vậy giá trị lớn nhất của P là $9\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra khi

$$u=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ t=-\pi+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2-2i \\ z=1-5i \end{array}\right.$$

Cách khác: Sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki đánh giá

$$P=6\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}+3\sqrt{9+4\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$=3\sqrt{2}\sqrt{6-4\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}+3\sqrt{9+4\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\le\sqrt{(18+9)(6+9)}=9\sqrt{5}.$$

Câu 17. Cho số phức z thoả mãn $\left|\dfrac{(2-i)z-3i-1}{z-i}\right|=2$. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức $w=\dfrac{1}{iz+1}$. Xét các số phức $w_1,w_2\in S$ thỏa mãn $|w_1-w_2|=2$, giá trị lớn nhất của $P=|w_1-4i|^2-|w_2-4i|^2$ bằng.

A. $4\sqrt{29}$. **B.** $4\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{29}$.

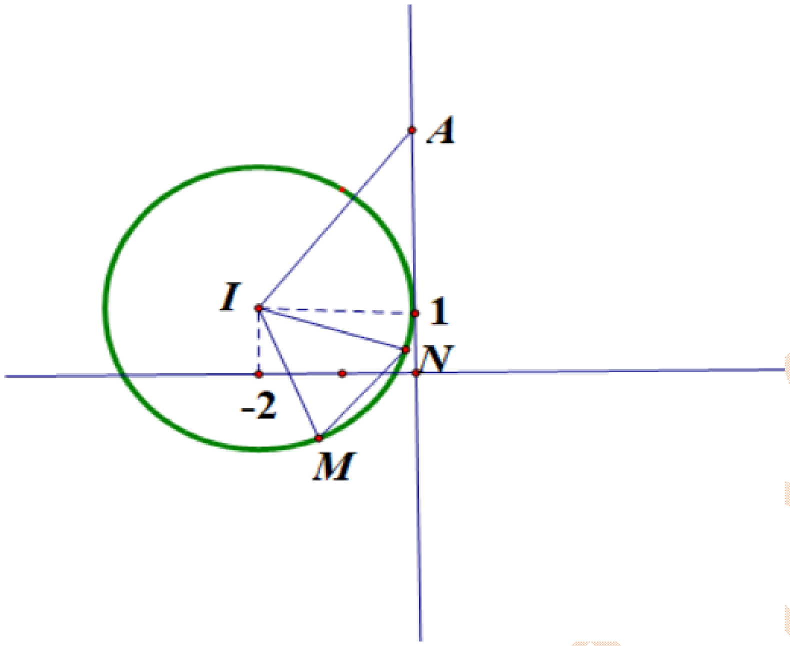
Lời giải

Chọn B.

$+\left|\dfrac{(2-i)z-3i-1}{z-i}\right|=2\Leftrightarrow\left|2-i-\dfrac{i}{z-i}\right|=2\Leftrightarrow\left|2-i+\dfrac{1}{iz+1}\right|=2\Leftrightarrow|w+2-i|=2$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn (C) tâm $I(-2;1)$, bán kính $R=2$.

+ $w_1, w_2 \in S$ được biểu diễn bởi M, N nên M, N thuộc đường tròn (C) và $|w_1 - w_2| = MN = 2$. Gọi $A(0;4)$.



+ $P = |w_1 - 4i|^2 - |w_2 - 4i|^2 = MA^2 - NA^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{NA}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA}\right)^2$

$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 - NI^2 - 2\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{IA} - IA^2 = 2\overrightarrow{IA}\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{NI}\right) = 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MN}$

$P = 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MN} = 2IA.MN.\cos\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{MN}\right) \le 2IA.MN$

Dấu "=" xảy ra khi $\overrightarrow{IA}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MN}$

Ta có. $IA = \sqrt{13} \Rightarrow P \le 2.\sqrt{13}.2 = 4\sqrt{13}$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $4\sqrt{13}$.

Nếu HS nhầm $A(0;-4)$ thì có đáp án là $4\sqrt{29}$

Câu 18. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $W = \dfrac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn.., giá trị lớn nhất của $P = |z_1 + 6|^2 - |z_2 + 6|^2$ bằng.

A. $2\sqrt{78}$. **B.** $4\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{78}$. **D.** $2\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn#A.

Đặt $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Có $w = \dfrac{z+2}{z-2i} = \dfrac{a+2+bi}{a+(b-2)i} = \dfrac{(a+2+bi)\left[a-(b-2)i\right]}{a^2+(b-2)^2}$

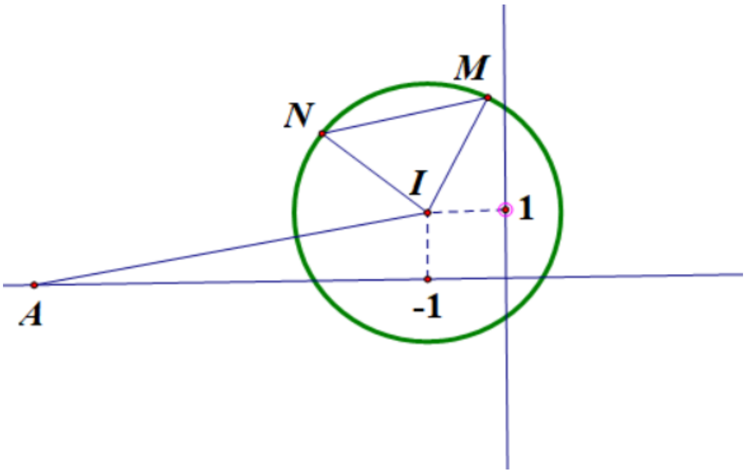
$= \dfrac{a(a+2)+b(b-2)+\left[-(a+2)(b-2)+ab\right]i}{a^2+(b-2)^2}$

w là số thuần ảo $\Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2)+b(b-2)=0 \quad (1) \\ a^2+(b-2)^2 \ne 0 \end{cases}$

Có $(1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2a - 2b = 0$.

Suy ra M thuộc đường tròn (C) tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

□ $z_1, z_2 \in S$ được biểu diễn bởi M, N nên M, N thuộc đường tròn (C) và $|z_1 - z_2| = MN = \sqrt{3}$. Gọi $A(-6;0)$



$$P = |z_1+6|^2 - |z_2+6|^2 = MA^2 - NA^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{NA}^2 = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}\right)^2$$

$$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 - NI^2 - 2\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{IA} - IA^2 = 2\overrightarrow{IA}\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{NI}\right) = 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MN}$$

$$P = 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MN} = 2IA.MN.\cos\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{MN}\right) \le 2IA.MN$$

Dấu "=" xảy ra khi $\overrightarrow{IA}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MN}$

Ta có. $IA = \sqrt{26} \Rightarrow P \le 2.\sqrt{26}.\sqrt{3} = 2\sqrt{78}$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $2\sqrt{78}$.

Nếu HS nhầm $A(6;0)$ thì có đáp án là $4\sqrt{15}$

Câu 19. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2$.

A. $P = 9$. **B.** $P = 10$. **C.** $P = 8$. **D.** $P = 12$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$; $C(x_3;y_3)$ là các điểm lần lượt biễu diễn các số phức z_1; z_2; z_3.

vì $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ suy ra A; B; C thuộc đường tròn tâm O bán kính bằng 1.

Ta có $|z_1 - z_2| = AB$; $|z_2 - z_3| = BC$ $|z_3 - z_1| = AC$.

Suy ra $P = |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = AB^2 + BC^2 + AC^2$
$= \left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)^2 = 6 - 2\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\right)$

Mặt khác $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\right)$

$P = 9 - \left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2 = 9 - \left(3\overrightarrow{OG}\right)^2 = 9 - 9OG^2 \le 9$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

Dấu “ = “ xảy ra khi $G \equiv O$, hay ΔABC đều.

Câu 20. Cho hai số phức z_1; z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 - 2i| = 1$; $|z_2 - 2 - 8i| = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - 5 - 2i| + 2|z_2 - 6 - 8i| + 4|z_1 - z_2|$.

A. 30. **B.** 25. **C.** 35. **D.** 20.

Lời giải

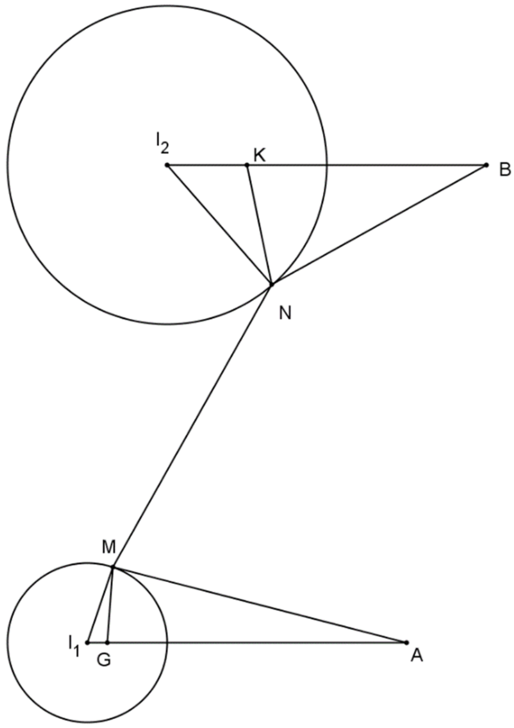
Chọn B

Gọi điểm $M(x_1; y_1)$; $N(x_2; y_2)$ lần lượt biểu diễn các số phức z_1; z_2.

Gọi $A(5;2)$; $B(6;8)$

Từ gt$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn tâm $I_1(1;2)$, bán kính $R_1 = 1$; N thuộc đường tròn tâm $I_2(2;8)$, bán kính $R_2 = 2$

Mà $I_1A = 4 = 4R_1$; $I_2B = 4 = 2R_2$



Lấy các điểm G; K sao cho $\overrightarrow{I_1G} = \frac{1}{16}\overrightarrow{I_1A}$; $\overrightarrow{I_2K} = \frac{1}{4}\overrightarrow{I_2B} \Rightarrow G\left(\frac{5}{4};2\right)$; $K(3;8)$

Dễ thấy $\Delta I_1MG \sim \Delta I_1AM \Rightarrow \frac{AM}{MG} = \frac{I_1A}{I_1M} = 4 \Rightarrow AM = 4GM$

$\Delta I_2NK \sim \Delta I_2BN \Rightarrow \frac{BN}{KN} = \frac{I_2B}{I_2N} = 2 \Rightarrow NB = 2NK$

Do đó $P = AM + 2BN + 4MN = 4GM + 4MN + 4NK = 4(GM + MN + NK) \geq 4GK = 25$.

Vậy $\min P = 25$.

Dấu "=" xay ra khi G, M, N, K thẳng hàng.

Câu 21. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w = \dfrac{z+3}{z+1}$ có phần thực bằng 2. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|3z_1 - 4z_2| = 2$, giá trị lớn nhất của $P = |z_1 - 3i|^2 - |z_2 - 4i|^2$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 32.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $w = \dfrac{z+3}{z+1} = \dfrac{(z+3)(\overline{z}+1)}{(z+1)(\overline{z}+1)} = \dfrac{|z|^2 + 4x + 3 - 2iy}{|z|^2 + 2x + 1}$

$\Rightarrow w$ có phần thực là $\dfrac{|z|^2 + 4x + 3}{|z|^2 + 2x + 1} = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

$P = |z_1 - 3i|^2 - |z_2 - 4i|^2 = (z_1 - 3i)(\overline{z_1} + 3i) - (z_2 - 4i)(\overline{z_2} + 4i) = i\left(3z_1 - 4z_2 - \overline{3z_1 - 4z_2}\right)$

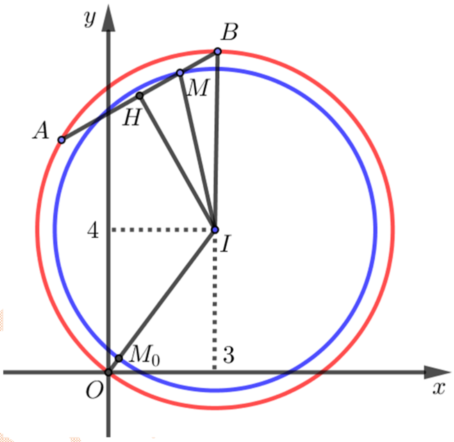
$P = i\left(3z_1 - 4z_2 - \overline{3z_1 - 4z_2}\right) \le |i|\left(|3z_1 - 4z_2| + \left|\overline{3z_1 - 4z_2}\right|\right) = 4$

Câu 22. Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng

A. $5 - \sqrt{21}$ **B.** $20 - 4\sqrt{21}$ **C.** $20 - 4\sqrt{22}$ **D.** $5 - \sqrt{22}$

Lời giải

Chọn C



Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2. Suy ra $AB = |z_1 - z_2| = 4$.

* Ta có $(z-6)(8+\overline{zi}) = [(x-6)+yi].[(8-y)-xi] = (8x+6y-48) - (x^2+y^2-6x-8y)i$.

Theo giả thiết $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực nên ta suy ra $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. Tức là các điểm A, B thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;4)$, bán kính $R = 5$.

* Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OM}$. Gọi H là trung điểm AB. Ta tính được $HI^2 = R^2 - HB^2 = 21; IM = \sqrt{HI^2 + HM^2} = \sqrt{22}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3;4)$, bán kính $r = \sqrt{22}$.

* Ta có $\left|z_1+3z_2\right|=\left|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|=\left|4\overrightarrow{OM}\right|=4OM$, do đó $\left|z_1+3z_2\right|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

Ta có $(OM)_{\min}=OM_0=\left|OI-r\right|=5-\sqrt{22}$.

Vậy $\left|z_1+3z_2\right|_{\min}=4OM_0=20-4\sqrt{22}$.

Câu 23. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\ge 2$. Tính tỉ số $\dfrac{M}{m}$.

A. $\dfrac{M}{m}=3$. **B.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{M}{m}=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|=\dfrac{|2z+i|}{|z|}\Rightarrow\dfrac{|2z|-|i|}{|z|}\le P\le\dfrac{|2z|+|i|}{|z|}\Leftrightarrow 2-\dfrac{1}{|z|}\le P\le 2+\dfrac{1}{|z|}\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}\le P\le\dfrac{5}{2}$.

Vậy $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$.

Câu 24. Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z^2+7-24i\right|$ nằm trong khoảng nào?

A. $(0;1009)$. **B.** $(1009;2018)$. **C.** $(2018;4036)$. **D.** $(4036;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $1=|z-3i+4|\ge\left||z|-|3i-4|\right|=\left||z|-5\right|\Rightarrow -1\le|z|-5\le 1\Rightarrow 4\le|z|\le 6$.

Đặt $z_0=4-3i\Rightarrow|z_0|=5, z_0^{\ 2}=7-24i$.

Ta có $A=\left|z^2+7-24i\right|^2=\left|z^2+z_o^{\ 2}\right|^2=\left(z^2+z_o^{\ 2}\right)\left(\overline{z}^2+\overline{z_o}^2\right)=|z|^4+|z_o|^4+\left(z.\overline{z_o}+z_o.\overline{z}\right)^2-2\left|z.z_o\right|^2$

Mà $(z+z_o)\left(\overline{z}+\overline{z_o}\right)=1\Rightarrow z.\overline{z_o}+z_o.\overline{z}=1-|z|^2-|z_o|^2$

Suy ra $A=|z|^4+|z_o|^4+\left(1-|z|^2-|z_o|^2\right)^2-2|z.z_o|^2=2|z|^4-2|z|^2+1201$.

Hàm số $y=2t^4-2t^2+1201$ đồng biến trên $[4;6]$ nên $A\ge 2.4^4-2.4^2+1201=1681$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}|z|=4\\|z+4-3i|=1\end{cases}$.

Do đó $\left|z^2+7-24i\right|$ nằm trong khoảng $(1009;2018)$.

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}.\left((1-2i)|z|-3+i\right)-2\sqrt{10}=0$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z+5|^2-|z+i|^2$. Tìm mô đun của số phức $w=M+mi$.

A. $8\sqrt{31}$. **B.** $8\sqrt{13}$. **C.** $4\sqrt{26}$. **D.** $8\sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có;

$\overline{z}.\left((1-2i)|z|-3+i\right)-2\sqrt{10}=0\Leftrightarrow(1-2i)|z|-3+i=\dfrac{2\sqrt{10}}{\overline{z}}\Leftrightarrow\left(|z|-3\right)+\left(1-2|z|\right)i=\dfrac{2\sqrt{10}}{\overline{z}}$.

Lấy mô đun hai vế ta được:

$\sqrt{\left(|z|-3\right)^2+\left(1-2|z|\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{\left|\overline{z}\right|}\Leftrightarrow\sqrt{\left(|z|-3\right)^2+\left(1-2|z|\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{|z|}\Leftrightarrow|z|=2.$

Gọi $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow x^2+y^2=4$.

$P=|z+5|^2-|z+i|^2=\left(x+5\right)^2+y^2-x^2-\left(y+1\right)^2=10x-2y+24.$

Áp dụng bất đẳng thức **B.**N.K ta có:

$\left(P-24\right)^2=\left(10x-2y\right)^2\le\left(10^2+2^2\right).\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow\left(P-24\right)^2\le416\Leftrightarrow24-4\sqrt{26}\le P\le24+4\sqrt{26}.$

Vậy $M=24+4\sqrt{26};m=24-4\sqrt{26}\Rightarrow|w|=|M+mi|=\sqrt{M^2+m^2}=8\sqrt{31}.$

CÂU 49_ĐTK2021 Xét hai số phức $z_1;z_2$ thỏa mãn $|z_1|=1;|z_2|=2$ và $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của $|3z_1+z_2-5i|$ bằng

A. $5-\sqrt{19}$. **B.** $5+\sqrt{19}$. **C.** $-5+2\sqrt{19}$. **D.** $5+2\sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A là điểm biểu diễn số phức z_1;

B là điểm biểu diễn số phức z_2;

C là điểm biểu diễn số phức $\omega=3z_1+z_2$; điểm $M=(0;5)$

Ta có: $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\Rightarrow OC^2=9OA^2+OB^2+6\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2}=19$

$\Rightarrow|\omega|=\sqrt{19}$

Ta nhận thấy $MC\le OM+OC$

Lúc này $P=|3z_1+z_2-5i|$ lớn nhất $\Leftrightarrow MC$ lớn nhất $\Leftrightarrow O,M,C$ thẳng hàng (O nằm giữa M và C).Suy ra $MaxP=OM+R=5+\sqrt{19}$.

Câu 26. **(Đề Tham Khảo 2018)** Xét số phức $z=a+bi$ $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

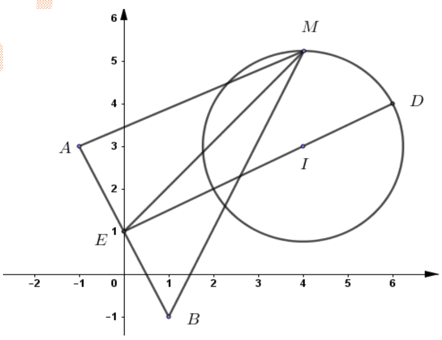
A. $P=8$ **B.** $P=10$ **C.** $P=4$ **D.** $P=6$

Lời giải

Chọn B

Goi $M\left(a;b\right)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Theo giả thiết ta có: $|z-4-3i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left(a-4\right)^2+\left(b-3\right)^2=5\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(4;3\right)$ bán kính $R=\sqrt{5}$



Gọi: $\begin{cases} A(-1;3) \\ B(1;-1) \end{cases} \Rightarrow Q = |z+1-3i| + |z-1+i| = MA + MB$

Gọi E là trung điểm của AB, kéo dài EI cắt đường tròn tại D

Ta có: $Q^2 = MA^2 + MB^2 + 2MA.MB$

$\Leftrightarrow Q^2 \le MA^2 + MB^2 + MA^2 + MB^2 = 2\left(MA^2 + MB^2\right)$

Vì ME là trung tuyến trong $\Delta MAB \Rightarrow ME^2 = \dfrac{MA^2+MB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

$\Rightarrow Q^2 \le 2\left(2ME^2 + \dfrac{AB^2}{2}\right) = 4ME^2 + AB^2$. Mặt khác $ME \le DE = EI + ID = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$\Rightarrow Q^2 \le 4.\left(3\sqrt{5}\right)^2 + 20 = 200$

$\Rightarrow Q \le 10\sqrt{2} \Rightarrow Q_{max} = 10\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB \\ M \equiv D \end{cases}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EI} = 2\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2(x_D - 4) \\ 2 = 2(y_D - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 6 \\ y_D = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \Rightarrow M(6;4) \Rightarrow P = a + b = 10$

Cách 2: Đặt $z = a + bi$. Theo giả thiết ta có: $(a-4)^2 + (b-5)^2 = 5$.

Đặt $\begin{cases} a - 4 = \sqrt{5}\sin t \\ b - 3 = \sqrt{5}\cos t \end{cases}$. Khi đó:

$Q = |z+1-3i| + |z-1+i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t + 5\right)^2 + 5\cos^2 t} + \sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t + 3\right)^2 + \left(\sqrt{5}\cos t + 4\right)^2}$

$= \sqrt{30 + 10\sqrt{5}\sin t} + \sqrt{30 + 2\sqrt{5}\left(3\sin t + 4\cos t\right)}$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$Q \le \sqrt{2\left(60 + 8\sqrt{5}\left(2\sin t + \cos t\right)\right)} \le \sqrt{2\left(60 + 8\sqrt{5}.\sqrt{5}\right)} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

$\Rightarrow Q \le 10\sqrt{2} \Rightarrow Q_{max} = 10\sqrt{2}$

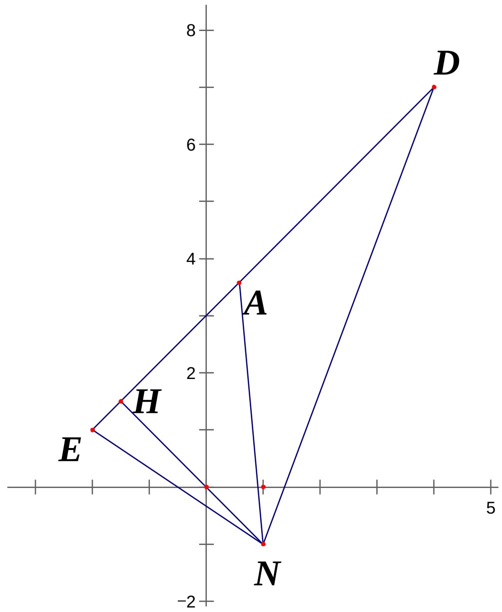
Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \sin t = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos t = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = 10.$

Câu 27. **(Đề Tham Khảo 2017)** Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \dfrac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$ **B.** $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$ **C.** $P = \dfrac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$ **D.** $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$

Lời giải

Chọn A



Gọi A là điểm biểu diễn số phức z, $E(-2;1)$, $F(4;7)$ và $N(1;-1)$.

Từ $AE+AF=|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $EF=6\sqrt{2}$ nên ta có A thuộc đoạn thẳng EF.

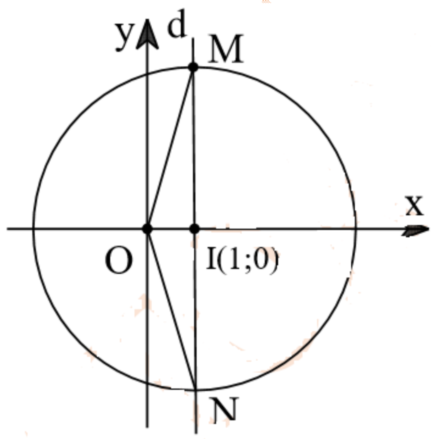
Gọi H là hình chiếu của N lên EF, ta có $H\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. Suy ra $P=NH+NF=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

Câu 28. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau $|z-1|=\sqrt{34},|z+1+mi|=|z+m+2i|$ (trong đó m là số thực) và sao cho $|z_1-z_2|$ là lớn nhất. Khi đó giá trị $|z_1+z_2|$ bằng

A. $\sqrt{2}$ **B.** 10 **C.** 2 **D.** $\sqrt{130}$

Lời giải

Chọn C



Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1,z_2

Gọi $z=x+iy,(x,y\in\mathbb{R})$

Ta có $|z-1|=\sqrt{34}\Rightarrow M,N$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$, bán kính $R=\sqrt{34}$

Mà $|z+1+mi|=|z+m+2i|\Leftrightarrow|x+yi+1+mi|=|x+yi+m+2i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y+m)^2}=\sqrt{(x+m)^2+(y+2)^2}$

$\Leftrightarrow 2(m-1)x+2(m-2)y-3=0$

Suy ra M,N thuộc đường thẳng $d: 2(m-1)x+2(m-2)y-3=0$

Do đó M,N là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (C)

Ta có $|z_1-z_2|=MN$ nên $|z_1-z_2|$ lớn nhất khi và chỉ khi MN lớn nhất

$\Leftrightarrow MN$ đường kính của (C). Khi đó $|z_1+z_2|=2OI=2$

$|z-i|=|(z-2-2i)+(2+i)|\ge ||z-2-2i|-|2+i||=\sqrt{5}-1$

Câu 29. Cho số phức z thoả mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$.

A. $\sqrt{13}+3$. **B.** $\sqrt{13}+5$. **C.** $\sqrt{13}+1$. **D.** $\sqrt{13}+6$.

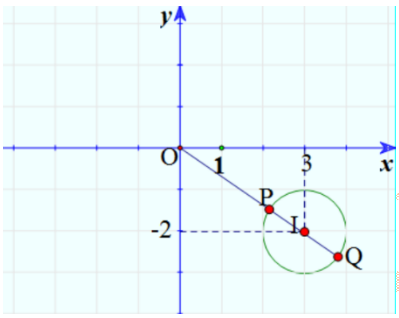
Lời giải

Chọn C

Ta có $1=|z-2-3i|^2=(z-2-3i).\overline{(z-2-3i)}=(z-2-3i)(\overline{z}-2+3i)$

$\Leftrightarrow 1=|(z-2-3i)(\overline{z}-2+3i)|\Leftrightarrow|\overline{z}-2+3i|=1 \Leftrightarrow |\overline{z}+1+i-3+2i|=1 (*)$.

+Đặt $w=\overline{z}+1+i$, khi đó $\Leftrightarrow |w-3+2i|=1$.



Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\overline{z}+1+i$ là đường tròn $(I;1)$ và $|w|$ là khoảng cách từ gốc tọa độ đến 1 điểm trên đường tròn. Do đó giá trị lớn nhất của $|w|$ chính là đoạn OQ.

$\Rightarrow |w|_{max}=1+\sqrt{3^2+2^2}=1+\sqrt{13}$.

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $|z-6|+|z+6|=20$. Gọi M, n lần lượt là môđun lớn nhất và nhỏ nhất của z. Tính $M-n$

A. $M-n=2$. **B.** $M-n=4$. **C.** $M-n=7$. **D.** $M-n=14$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết, ta có $|z-6|+|z+6|=20$.

$\Leftrightarrow |x-6+yi|+|x+6+yi|=20 \Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2+y^2}+\sqrt{(x+6)^2+y^2}=20 \quad (*)$.

Gọi $M(x;y)$, $F_1(6;0)$ và $F_2(-6;0)$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow MF_1+MF_2=20>F_1F_2=12$ nên tập hợp các điểm E là đường elip (E) có hai tiêu điểm F_1 và F_2. Và độ dài trục lớn bằng 20.

Ta có $c=6$; $2a=20\Leftrightarrow a=10$ và $b^2=a^2-c^2=64\Rightarrow b=8$.

Do đó, phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$.

Suy ra $\max|z| = OA = OA' = 10$ khi $z = \pm 10$ và $\min|z| = OB = OB' = 8$ khi $z = \pm 8i$.

Vậy $M - n = 2$.

Câu 31. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-1| = \sqrt{34}$ và $|z+1+mi| = |z+m+2i|$, (trong đó $m \in \mathbb{R}$). Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1 - z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng

A. 2 **B.** 10 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{130}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó

$|z-1| = \sqrt{34} \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 34$; $|z+1+mi| = |z+m+2i| \Leftrightarrow 2(m-1)x + 2(2-m)y + 3 = 0$.

Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là giao điểm của đường tròn $(C): (x-1)^2 + y^2 = 34$ và đường thẳng $d: 2(m-1)x + 2(2-m)y + 3 = 0$.

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn z_1 và z_2. Suy ra $(C) \cap d = \{A, B\}$.

Mặt khác $|z_1 - z_2| = AB \le 2R = 2\sqrt{34}$ do đó $\max|z_1 - z_2| = 2\sqrt{34} \Leftrightarrow AB = 2R \Leftrightarrow I(1;0) \in d$.

Từ đó ta có $m = -\frac{1}{2}$ nên $d: 3x - 5y - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 6 + 3i \\ z_2 = -4 - 3i \end{array}\right.$.

Vậy $|z_1 + z_2| = 2$.

Câu 32. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0$, $w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $6\sqrt{2}$.

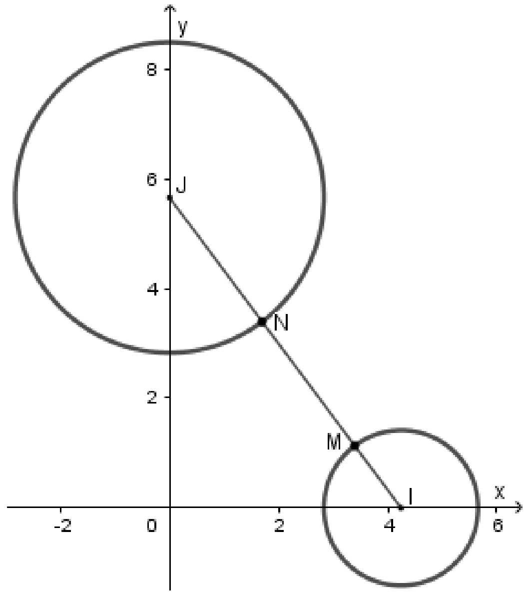
Lời giải

Ta có: + $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(3\sqrt{2}; 0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

+ $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J(0; 4\sqrt{2})$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $\min|z - w| = \min MN$.

+ $IJ = 5\sqrt{2}; IM = r = \sqrt{2}; NJ = R = 2\sqrt{2}$.



Mặt khác $IM+MN+NJ\geq IJ \Rightarrow MN\geq IJ-IM-NJ$ hay $MN\geq 5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN=2\sqrt{2}$ khi I,M,N,J thẳng hàng và M,N nằm giữa I,J (Hình vẽ).

Cách 1:

Khi đó ta có: $|3z_0-w_0|=|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|$ và $IN=3\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{IM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{IN}=\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Mặt khác $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$; $3\overrightarrow{OM}=3\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)=3\left(\overrightarrow{OI}+\frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\right)=3\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Suy ra $|3z_0-w_0|=|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|=\left|3\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}-\left(\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\right)\right|=|2\overrightarrow{OI}|=6\sqrt{2}$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{IN}=3\overrightarrow{IM} \Rightarrow 3\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}=\vec{0}$.

Do đó $|3z_0-w_0|=|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|=\left|3\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)-\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\right)\right|=|2\overrightarrow{OI}|=2.OI=2.3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

Cách 3:

+) $\overrightarrow{IM}=\frac{IM}{IJ}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow \begin{cases} x_M=\frac{12\sqrt{2}}{5} \\ y_M=\frac{4\sqrt{2}}{5}\end{cases} \Rightarrow z_0=\frac{12\sqrt{2}}{5}+\frac{4\sqrt{2}}{5}i$.

+) $\overrightarrow{IN}=\frac{IN}{IJ}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow \overrightarrow{IN}=\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow \begin{cases} x_N=\frac{6\sqrt{2}}{5} \\ y_N=\frac{12\sqrt{2}}{5}\end{cases} \Rightarrow w_0=\frac{6\sqrt{2}}{5}+\frac{12\sqrt{2}}{5}i$.

Suy ra $|3z_0-w_0|=|6\sqrt{2}|=6\sqrt{2}$.

Câu 33. Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8-6i$ và $|z-w|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z|+|w|$ bằng

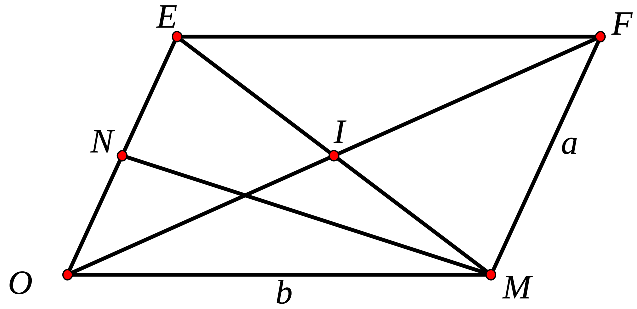
A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử M,N lần lượt là các điểm biểu diễn cho z và w. Suy ra $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OI}$, $|z-w|=MN=4$ và $OF=2OI=10$.

Đặt $|z|=ON=\frac{a}{2};|w|=OM=b$. Dựng hình bình hành $OMFE$



Ta có $\begin{cases}\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{ME^2}{4}=25\\ \frac{b^2+ME^2}{2}-\frac{a^2}{4}=16\end{cases}\Rightarrow a^2+2b^2=\frac{264}{3}$

$$\left(|z|+|w|\right)^2=\left(\frac{a}{2}+b\right)^2\le\left(a^2+2b^2\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=66$$

Suy ra $a+b\le\sqrt{66}$, dấu "=" xảy ra khi $a=b=\frac{2\sqrt{66}}{3}$.

Vậy $(a+b)_{\max}=\sqrt{66}$.

Câu 34. Cho số phức z thoả mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Thay $|z|^2=1$ vào P ta có

$$P=|z+1|+|z^2-z+1|=\left|z+1\right|+\left|z^2-z+|z|^2\right|=|z+1|+|z^2-z+z.\bar{z}|=|z+1|+|z||z+\bar{z}-1|$$
$$=|z+1|+|z+\bar{z}-1|.$$

Mặt khác $|z+1|^2=(z+1)(\bar{z}+1)=2+z+\bar{z}$.

Đặt $t=z+\bar{z}$ do $|z|=1$ nên điều kiện $t\in[-2;2]$.

Suy ra $P=\sqrt{t+2}+|t-1|$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+2}+|t-1|$ với $t\in[-2;2]$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}+1$ với $t>1$. Suy ra $f'(t)>0$ với $t>1$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}-1$ với $t<1$. Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

t	-2		$-\frac{7}{4}$		1		2
$f'(t)$	|	+	0	−	||	+	|
$f(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3

Từ bảng biến thiên suy ra $M=\dfrac{13}{4}$ tại $t=\dfrac{-7}{4}$ và $m=\sqrt{3}$ tại $t=2$.

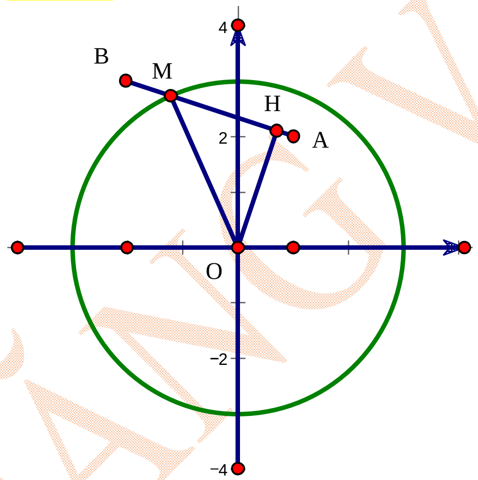
Vậy $M.m=\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 35. Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|z-1-2i|+|z+2-3i|=\sqrt{10}$ và có mô đun nhỏ nhất. Tính $S=7a+b$?

A. 7. **B.** 0. **C.** 5. **D.** -12.

Lời giải

Chọn A



Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$

$A(1;2)$ là điểm biểu diễn số phức $(1+2i)$

$B(-2;3)$ là điểm biểu diễn số phức $(-2+3i)$, $AB=\sqrt{10}$

$|z-1-2i|+|z+2-3i|=\sqrt{10}$ trở thành $MA+MB=AB$

$\Leftrightarrow M, A, B$ thẳng hàng và M ở giữa A và B

Gọi H là điểm chiếu của O lên AB, phương trình $(AB): x+3y-7=0$, $(OH): 3x-y=0$

Tọa độ điểm $H\left(\dfrac{7}{10};\dfrac{21}{10}\right)$, Có $\overrightarrow{AH}=\left(-\dfrac{3}{10};\dfrac{1}{10}\right)$, $\overrightarrow{BH}=\left(\dfrac{27}{10};-\dfrac{9}{10}\right)$ và $\overrightarrow{BH}=-9\overrightarrow{AH}$

Nên H thuộc đoạn AB

$|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhât, mà M thuộc đoạn AB

$\Leftrightarrow M \equiv H\left(\dfrac{7}{10};\dfrac{21}{10}\right)$

Lúc đó $S = 7a + b = \dfrac{49}{10} + \dfrac{21}{10} = 7$. Chọn A

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\bar{z}\right| + 2\left|z-\bar{z}\right| = 8$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = |z-3-3i|$. Tính $M+m$.

A. $\sqrt{10}+\sqrt{34}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}+\sqrt{58}$. **D.** $\sqrt{5}+\sqrt{58}$.

Giải:

Chọn D

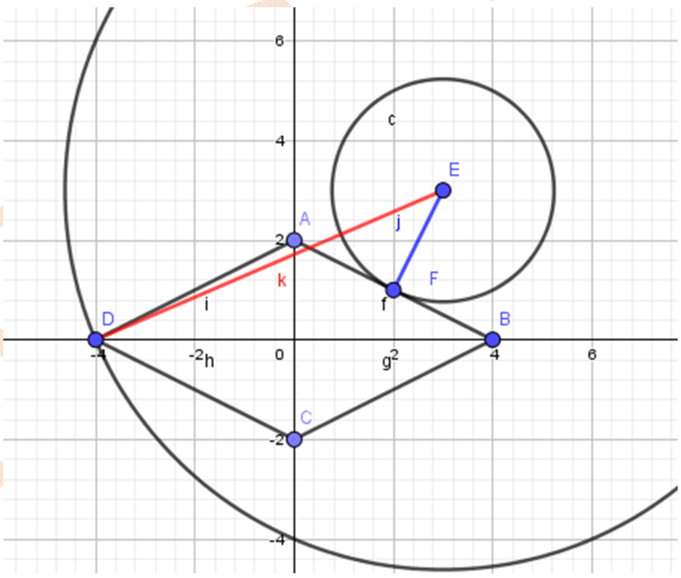
Gọi $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$, ta có $\left|z+\bar{z}\right| + 2\left|z-\bar{z}\right| = 8 \Leftrightarrow |x| + 2|y| = 4 \Rightarrow \begin{cases} |x| \le 4 \\ |y| \le 2 \end{cases}$, tập hợp $K(x;y)$ biểu diễn số phức z thuộc cạnh các cạnh của trong hình thoi $ABCD$ như hình vẽ.

$P = |z-3-3i|$ đạt giá trị lớn nhất khi KM lớn nhất, theo hình vẽ ta có KM lớn nhất khi $K \equiv D$ hay $K(-4;0)$ suy ra $M = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

$P = |z-3-3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi KM nhỏ nhất, theo hình vẽ ta có KM nhỏ nhất khi $K \equiv F$ (F là hình chiếu của E trên AB.

Suy ra $F(2;1)$ do $AE = AB$ nên F là trung điểm của AB.

Suy ra $m = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Vậy $M + m = \sqrt{58} + \sqrt{5}$



Câu 37. Cho số phức z có $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$.

A. $\dfrac{13}{4}$ **B.** 3 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{11}{4}$

Lời giải

Chọn A

$P=\left|z^2-z\right|+\left|z^2+z+1\right|=|z||z-1|+\left|z^2+z+1\right|=|z-1|+\left|z^2+z+1\right|$

Do $|z|=1$ nên ta đặt $z=\cos x+i.\sin x$. Khi đó

$P=|z-1|+\left|z^2+z+1\right|=|\cos x+i.\sin x-1|+|\cos 2x+i\sin 2x+\cos x+i\sin x+1|$

$=\sqrt{(\cos x-1)^2+\sin^2 x}+\sqrt{(\cos 2x+\cos x+1)^2+(\sin 2x+\sin x)^2}$

$=\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{3+4\cos x+2\cos 2x}$

$=\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{4\cos^2 x+4\cos x+1}$

$=\sqrt{2-2\cos x}+|2\cos x+1|$

Đặt $t=\cos x,\ t\in[-1;1]$. Xét hàm $y=\sqrt{2-2t}+|2t+1|$

Với $t\ge -\frac{1}{2}$ thì $y=\sqrt{2-2t}+2t+1,\ y'=\frac{-1}{\sqrt{2-2t}}+2$

$y'=0\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{2-2t}}+2=0\Leftrightarrow t=\frac{7}{8}$

$y(1)=3;\ y\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{13}{4};\ y\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$

Với $t<-\frac{1}{2}$ thì $y=\sqrt{2-2t}-2t-1,\ y'=\frac{-1}{\sqrt{2-2t}}-2$

$y'=0\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{2-2t}}-2=0\Leftrightarrow \sqrt{2-2t}=-\frac{1}{2}$ (phương trình vô nghiệm)

$y(-1)=3;\ y\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$

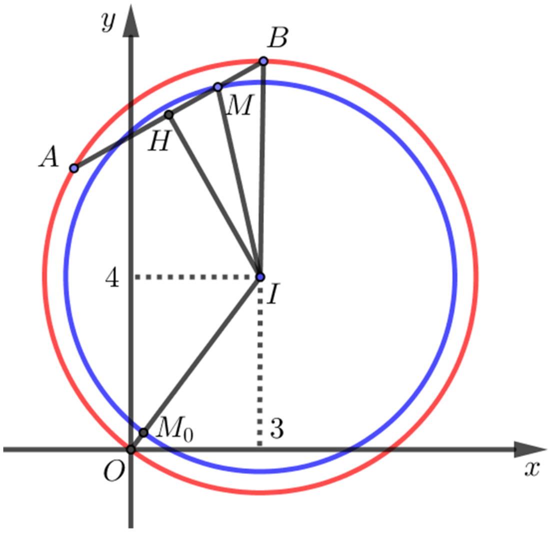
Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y=\frac{13}{4}$. Do đó giá trị lớn nhất của $P=\left|z^2-z\right|+\left|z^2+z+1\right|$ là $\frac{13}{4}$.

Câu 38. Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)\left(8+\overline{zi}\right)$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$ **B.** $20-4\sqrt{21}$ **C.** $20-4\sqrt{22}$ **D.** $5-\sqrt{22}$

Lời giải

Chọn C



Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ .Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2. Suy ra $AB = |z_1 - z_2| = 4$.

* Ta có $(z-6)(8+\overline{zi}) = [(x-6)+yi].[(8-y)-xi] = (8x+6y-48)-(x^2+y^2-6x-8y)i$.

Theo giả thiết $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực nên ta suy ra $x^2+y^2-6x-8y=0$. Tức là các điểm A, B thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=5$.

* Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$ .Gọi H là trung điểm AB. Ta tính được $HI^2 = R^2 - HB^2 = 21; IM = \sqrt{HI^2+HM^2} = \sqrt{22}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3;4)$, bán kính $r = \sqrt{22}$.

* Ta có $|z_1+3z_2| = |\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}| = |4\overrightarrow{OM}| = 4OM$, do đó $|z_1+3z_2|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

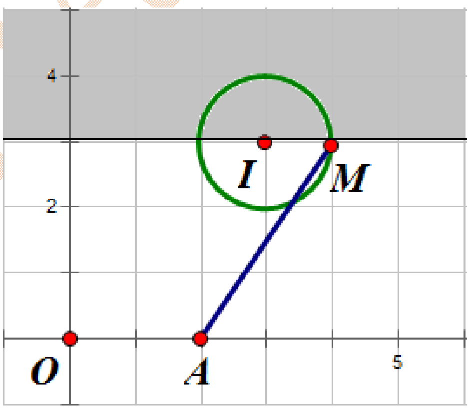
Ta có $(OM)_{\min} = OM_0 = |OI - r| = 5-\sqrt{22}$.

Vậy $|z_1+3z_2|_{\min} = 4OM_0 = 20-4\sqrt{22}$.

Câu 39. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i| \le |z-4i|$ và $|z-3-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2|$ là:

A. $\sqrt{13}+1$. **B.** $\sqrt{10}+1$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải



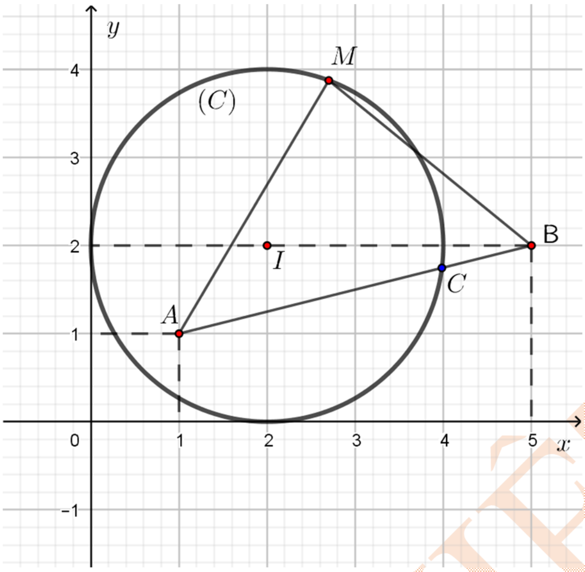
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có: $|z-2i| \le |z-4i| \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2 \le x^2+(y-4)^2$

$\Leftrightarrow y \le 3$; $|z-3-3i|=1 \Leftrightarrow$ điểm M nằm trên đường tròn tâm $I(3;3)$ và bán kính bằng 1. Biểu thức $P=|z-2|=AM$ trong đó $A(2;0)$, theo hình vẽ thì giá trị lớn nhất của $P=|z-2|$ đạt được khi $M(4;3)$ nên $\max P=\sqrt{(4-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$.

Câu 40. Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1-i|+|z-5-2i|$ bằng

A. $1+\sqrt{10}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{17}$ **D.** 5.

Lời giải



Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Do $|z-2-2i|=2$ nên tập hợp điểm M là đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Các điểm $A(1;1)$, $B(5;2)$ là điểm biểu diễn các số phức $1+i$ và $5+2i$. Khi đó, $P=MA+MB$.

Nhận thấy, điểm A nằm trong đường tròn (C) còn điểm B nằm ngoài đường tròn (C), mà $MA+MB\ge AB=\sqrt{17}$. Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của đoạn AB với (C).

Ta có, phương trình đường thẳng $AB: x-4y+3=0$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và đường tròn (C) là nghiệm của hệ với $1<y<5$

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=4\\ x-4y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(4y-5)^2+(y-2)^2=4\\ x=4y-3\end{cases}$$

Ta có $(4y-5)^2+(y-2)^2=4 \Leftrightarrow 17y^2-44y+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{22+\sqrt{59}}{17}\,(N)\\ y=\dfrac{22-\sqrt{59}}{17}\,(L)\end{array}\right.$

Vậy $\min P=\sqrt{17}$ khi $z=\dfrac{37+4\sqrt{59}}{17}+\dfrac{22+\sqrt{59}}{17}i$

Câu 41. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là

A. $|w|=3\sqrt{137}$. **B.** $|w|=\sqrt{1258}$. **C.** $|w|=2\sqrt{309}$. **D.** $|w|=2\sqrt{314}$.

Lời giải

- Đặt $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|(x-3)+(y-4)i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5$, hay tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$, bán kính $r=\sqrt{5}$.

- Khi đó : $P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3$

$\Rightarrow 4x+2y+3-P=0$, kí hiệu là đường thẳng Δ.

- Số phức z tồn tại khi và chỉ khi đường thẳng Δ cắt đường tròn (C)

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)\le r\Leftrightarrow\dfrac{|23-P|}{2\sqrt{5}}\le\sqrt{5}\Leftrightarrow|P-23|\le 10\Leftrightarrow 13\le P\le 33$

Suy ra $M=33$ và $m=13\Rightarrow w=33+13i$.

Vậy $|w|=\sqrt{1258}$.

Câu 42. Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w+i|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-1-2i|+|z-5-2i|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$. **B.** $4+2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{53}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

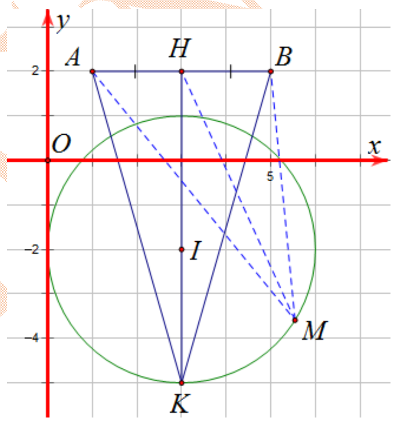
Lời giải

Gọi $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Theo giả thiết, $5w=(2+i)(z-4)\Leftrightarrow 5(w+i)=(2+i)(z-4)+5i\Leftrightarrow(2-i)(w+i)=z-3+2i$

$\Leftrightarrow|z-3+2i|=3$. Suy ra $M(x;y)$ thuộc đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+2)^2=9$.

Ta có $P=|z-1-2i|+|z-5-2i|=MA+MB$, với $A(1;2)$ và $B(5;2)$.



Gọi H là trung điểm của AB, ta có $H(3;2)$ và khi đó:

$P=MA+MB\le\sqrt{2\left(MA^2+MB^2\right)}$ hay $P\le\sqrt{4MH^2+AB^2}$.

Mặt khác, $MH \le KH$ với mọi $M \in (C)$ nên $P \le \sqrt{4KH^2 + AB^2} = \sqrt{4(IH+R)^2 + AB^2} = 2\sqrt{53}$

.

Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{53}$ khi $\begin{cases} M \equiv K \\ MA = MB \end{cases}$ hay $z = 3 - 5i$ và $w = \frac{3}{5} - \frac{11}{5}i$.

Câu 43. Xét các số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 2$. Tính $a + b$ khi $|z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $4 - \sqrt{3}$. **B.** $2 + \sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $4 + \sqrt{3}$.

Lời giải

Cách 1:

Đặt $z - 3 - 2i = w$ với $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Theo bài ra ta có $|w| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$.

Ta có $P = |z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i| = |w + 4| + 2|w + 1 - 3i| = \sqrt{(x+4)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$

$= \sqrt{20 + 8x} + 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = 2\sqrt{5 + 2x} + 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$

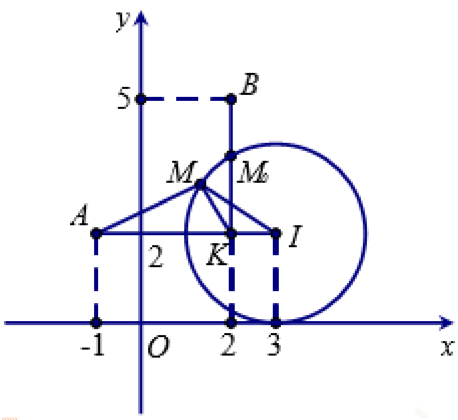
$= 2\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}\right) = 2\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}\right)$

$\ge 2(|y| + |y - 3|) \ge 2|y + 3 - y| = 6$.

$P = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y(3 - y) \ge 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$.

Vậy GTNN của P là bằng 6 đạt được khi $z = 2 + \left(2 + \sqrt{3}\right)i$.

Cách 2:



$|z - 3 - 2i| = 2 \Rightarrow MI = 2 \Rightarrow M \in (I; 2)$ với $I = (3; 2)$.

$P = |z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i| = MA + 2MB$ với $A = (1; 2)$, $B = (2; 5)$.

Ta có $IM = 2$; $IA = 4$. Chọn $K(2; 2)$ thì $IK = 1$. Do đó ta có $IA.IK = IM^2 \Rightarrow \frac{IA}{IM} = \frac{IM}{IK}$

$\Rightarrow \Delta IAM$ và ΔIMK đồng dạng với nhau $\Rightarrow \frac{AM}{MK} = \frac{IM}{IK} = 2 \Rightarrow AM = 2MK$.

Từ đó $P = MA + 2MB = 2(MK + MB) \ge 2BK$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, K, B thẳng hàng và M thuộc đoạn thẳng BK.
Từ đó tìm được $M=\left(2;2+\sqrt{3}\right)$.

Cách 3:

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$. Đặt $I=(3;2)$, $A(-1;2)$ và $B(2;5)$.

Ta xét bài toán: Tìm điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm I, bán kính $R=2$ sao cho biểu thức $P=MA+2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trước tiên, ta tìm điểm $K(x;y)$ sao cho $MA=2MK\ \forall M\in(C)$.

Ta có $MA=2MK\Leftrightarrow MA^2=4MK^2\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IK}\right)^2$

$\Leftrightarrow MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=4\left(MI^2+IK^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}\right)\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IK}\right)=3R^2+4IK^2-IA^2\ (*)$.

$(*)$ luôn đúng $\forall M\in(C)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IK}=\vec{0}\\3R^2+4IK^2-IA^2=0\end{cases}$.

$\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IK}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}4(x-3)=-4\\4(y-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$.

Thử trực tiếp ta thấy $K(2;2)$ thỏa mãn $3R^2+4IK^2-IA^2=0$.

Vì $BI^2=1^2+3^2=10>R^2=4$ nên B nằm ngoài (C).

Vì $KI^2=1<R^2=4$ nên K nằm trong (C).

Ta có $MA+2MB=2MK+2MB=2(MK+MB)\geq 2KB$.

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng BK.
Do đó $MA+2MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của (C) và đoạn thẳng BK.

Phương trình đường thẳng $BK: x=2$.

Phương trình đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-2)^2=4$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=2\\(x-3)^2+(y-2)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2+\sqrt{3}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=2\\y=2-\sqrt{3}\end{cases}$.

Thử lại thấy $M\left(2;2+\sqrt{3}\right)$ thuộc đoạn BK.

Vậy $a=2$, $b=2+\sqrt{3}\Rightarrow a+b=4+\sqrt{3}$.

Câu 44. Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3-4i|=1$ và $|z_2-3-4i|=\frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a-2b=12$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_1|+|z-2z_2|+2$ bằng:

A. $P_{\min}=\frac{\sqrt{9945}}{11}$. **B.** $P_{\min}=5-2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=\frac{\sqrt{9945}}{13}$. **D.** $P_{\min}=5+2\sqrt{5}$.

Lời giải

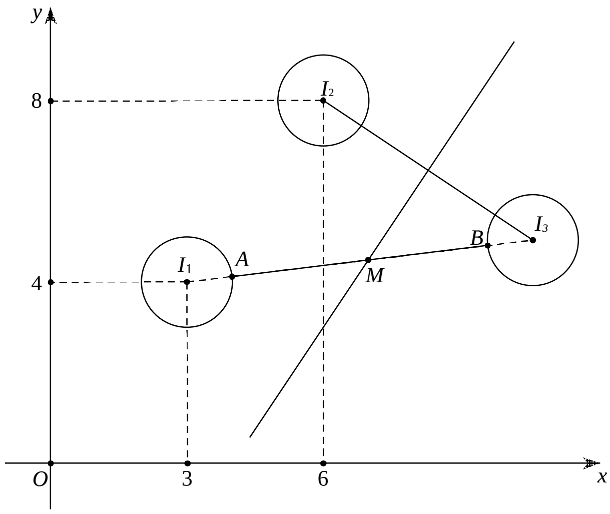
Gọi M_1, M_2, M lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức z_1, $2z_2$, z trên hệ trục tọa độ Oxy.

Khi đó quỹ tích của điểm M_1 là đường tròn (C_1) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=1$;

quỹ tích của điểm M_2 là đường (C_2) tròn tâm $I(6;8)$, bán kính $R=1$;

quỹ tích của điểm M là đường thẳng $d: 3x-2y-12=0$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của MM_1+MM_2+2.



Gọi (C_3) có tâm $I_3\left(\frac{138}{13};\frac{64}{13}\right)$, $R=1$ là đường tròn đối xứng với (C_2) qua d. Khi đó $\min(MM_1+MM_2+2)=\min(MM_1+MM_3+2)$ với $M_3\in(C_3)$.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng I_1I_3 với (C_1), (C_3). Khi đó với mọi điểm $M_1\in(C_1)$, $M_3\in(C_3)$, $M\in d$ ta có $MM_1+MM_3+2\ge AB+2$, dấu "=" xảy ra khi $M_1\equiv A, M_3\equiv B$. Do đó $P_{\min}=AB+2=I_1I_3-2+2=I_1I_3=\frac{\sqrt{9945}}{13}$.

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi;\ (x;y\in\mathbb{R})$.

$|z|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x\in[-1;1]$.

Ta có: $P=|1+z|+3|1-z|=\sqrt{(1+x)^2+y^2}+3\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2(1+x)}+2\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2(1+x)}+2\sqrt{2(1-x)};\ x\in[-1;1]$.

Hàm số liên tục trên $[-1;1]$ và với $x\in(-1;1)$ ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\dfrac{2}{\sqrt{2(1-x)}}$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\frac{2}{\sqrt{2(1-x)}}=0\Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}\in(-1;1).$$

$$f(1)=2;\ f(-1)=4;\ f\left(-\frac{3}{5}\right)=2\sqrt{5}.$$

$$\Rightarrow\max_{x\in[-1;1]}f(x)=2\sqrt{5}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$ bằng $2\sqrt{5}$ khi $x=-\dfrac{3}{5},\ y=\pm\dfrac{4}{5}$.

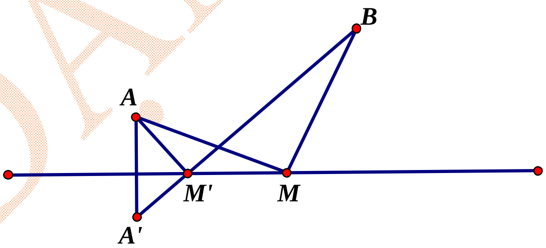
Câu 46. Cho số phức Z thỏa mãn : $|\bar{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-i|+|z-4|$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức Z. Ta có $|\bar{z}|=|z+2i|\Leftrightarrow y+1=0$, tức biểu diễn hình học của số phức thỏa mãn giả thiết là đường thẳng $y+1=0$. Xét điểm $A(0;1)$ và $B(4;0)$ thì $P=|z-i|+|z-4|=MA+MB$. Dễ thấy A,B cùng phía với đường thẳng $y+1=0$ nên $MA+MB$ nhỏ nhất bằng BA' trong đó $A'(0;-3)$ đối xứng với A qua đường thẳng $y+1=0$.



Do đó $MA+MB$ nhỏ nhất bằng $BA'=5$.

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min|w|$, với $w=z-2+2i$.

A. $\min|w|=\dfrac{1}{2}$. **B.** $\min|w|=1$. **C.** $\min|w|=\dfrac{3}{2}$. **D.** $\min|w|=2$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, $\left|z^2-2z+5\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|$

$\Leftrightarrow \left|(z-1+2i)(z-1-2i)\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|$

$\Leftrightarrow |z-1+2i|.\left(|z-1-2i|-|z-1+3i|\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}|z-1+2i|=0 & (1)\\ |z-1-2i|=|z-1+3i| & (2)\end{array}\right.$.

$(1)\Leftrightarrow z-1+2i=0\Leftrightarrow z=1-2i$. Khi đó, $|w|=|1-2i-2+2i|=1$ (3).

Đặt $z=x+yi$ ($x,\ y\in\mathbb{R}$). Khi đó, $(2)\Leftrightarrow \left|(x-1)+(y-2)i\right|=\left|(x-1)+(y+3)i\right|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow (y-2)^2=(y+3)^2 \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow z=x-\dfrac{1}{2}i$.

$\Rightarrow |w|=\left|(x-2)+\dfrac{3}{2}i\right|=\sqrt{(x-2)^2+\dfrac{9}{4}}\ge\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}\ \forall x\in\mathbb{R}$. (4).

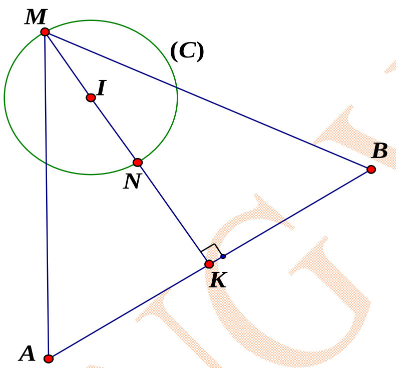
Từ (3) và $(4)\Rightarrow \min|w|=1$.

Câu 48. Xét các số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2-3i|=2\sqrt{2}$. Tính $P=2a+b$ khi $|z+1+6i|+|z-7-2i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=3$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=1$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $A(-1;-6),B(7;2)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(8;8)$ và trung điểm của AB là $K(3;-2)$.

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có: $(a+2)^2+(b-3)^2=8$.

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-2;3)$, bán kính $R=\sqrt{8}$.

Ta thấy $\overrightarrow{IK}=(5;-5)\Rightarrow \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow I$ nằm trên đường thẳng trung trực của AB.

Xét tam giác $MAB\Rightarrow MA^2+MB^2=2MK^2+\dfrac{AB^2}{2}$.

$\Rightarrow 2\left(MA^2+MB^2\right)=4MK^2+AB^2\ge(MA+MB)^2\Rightarrow MA+MB\le\sqrt{4MK^2+AB^2}$.

Ta có $|z+1+6i|+|z-7-2i|$ là tổng khoảng cách từ điểm M trên đường tròn (C) tới hai điểm A và B.

Vậy $MA+MB$ lớn nhất khi: $\begin{cases} MA=MB \\ MK\max \end{cases}$. Điều này xảy ra khi M là giao điểm của IK với đường tròn (C) và M nằm ngoài đoạn IK.

Ta có phương trình của đường thẳng $IK:\begin{cases} x=-2+t \\ y=3-t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của IK với đường tròn (C) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3-t \\ (x+2)^2+(y-3)^2=8 \end{cases} \Rightarrow 2t^2=8 \Rightarrow t=\pm 2.$$

Vậy điểm M cần tìm ứng với $t=-2$ khi đó

$$M(-4;5) \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow P=2a+b=-8+5=-3$$

Câu 49. **(ĐTK2021)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$ và $(z+2i)(\overline{z}-2)$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z=a+bi$ $(a;b\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=a-bi$

Ta có: $(z+2i)(\overline{z}-2)=\left[a+(b+2)i\right](a-2-bi)=a(a-2)+b(b+2)+\left[-ab+(a-2)(b+2)\right]i$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2} \\ a(a-2)+b(b+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2 \\ a^2+b^2-2a+2b=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2 \\ 2-2a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b+1)^2+b^2=2 \\ a=b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2+2b-1=0 \\ a=b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ b=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \\ b=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50. **(Mã 110 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Gọi số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$, vì $(z-1)^2=\left[(x-1)^2-y^2\right]+2(x-1)yi$ là số thuần ảo nên theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2=8 & (1) \\ (x-1)^2=y^2 & (2) \end{cases}$

Từ (2) suy ra: $y=\pm(x-1)$

• Với $y=x-1$, thay vào (1), ta được: $(x+2)^2+(x-2)^2=8 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

Suy ra: $z=-i$.

• Với $y=-(x-1)$, thay vào (1), ta được:

$(x+2)^2+(-x)^2=8 \Leftrightarrow 2x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}$.

Suy ra: $z=\left(-1+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)i$; $z=\left(-1-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

Câu 51. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$ **B.** $P=-5$ **C.** $P=3$ **D.** $P=7$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z+2+i-|z|(1+i)=0 \Leftrightarrow a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}(1+i)=0$

$$\Leftrightarrow a+2-\sqrt{a^2+b^2}+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0\ (1) \\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0\ (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $a-b+1=0 \Leftrightarrow b=a+1$. Thế vào (1) ta được:

$$a+2-\sqrt{a^2+(a+1)^2}=0 \Leftrightarrow a+2=\sqrt{2a^2+2a+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ a^2+4a+4=2a^2+2a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ a^2-2a-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ \left[\begin{array}{ll} a=3 & (tm) \\ a=-1 & (tm) \end{array}\right. \end{cases}$$

Với $a=3 \Rightarrow b=4$; $a=-1 \Rightarrow b=0$.

Vì $|z|>1 \Rightarrow z=3+4i \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow P=a+b=3+4=7$.

Câu 52. **(Mã 104 2018)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z \Leftrightarrow \left(|z|-6+i\right)z=5|z|+\left(|z|-2\right)i\ \ (1)$

Lấy môđun hai vế của (1) ta có:

$$\sqrt{\left(|z|-6\right)^2+1}.|z|=\sqrt{25|z|^2+\left(|z|-2\right)^2}$$

Bình phương và rút gọn ta được:

$$|z|^4-12|z|^3+11|z|^2+4|z|-4=0 \Leftrightarrow \left(|z|-1\right)\left(|z|^3-11|z|^2+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z|=1 \\ |z|^3-11|z|^2+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z|=1 \\ |z|=10,9667... \\ |z|=0,62... \\ |z|=-0,587... \end{array}\right.$$

Do $|z|\ge 0$, nên ta có $|z|=1$, $|z|=10,9667...$, $|z|=0,62...$. Thay vào (1) ta có 3 số phức thỏa mãn đề bài.

Câu 53. **(Mã 103 2018)** Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$?

A. 1 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Đặt $|z|=a\ge 0, a\in\mathbb{R}$, khi đó ta có

$|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z \Leftrightarrow a(z-6-i)+2i=(7-i)z \Leftrightarrow (a-7+i)z=6a+ai-2i$

$\Leftrightarrow (a-7+i)z=6a+(a-2)i \Leftrightarrow |(a-7+i)||z|=|6a+(a-2)i|$

$\Leftrightarrow \left[(a-7)^2+1\right]a^2=36a^2+(a-2)^2 \Leftrightarrow a^4-14a^3+13a^2+4a-4=0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^3-13a^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a^3-12a^2+4=0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(a)=a^3-13a^2\ (a\ge 0)$, có bảng biến thiên là

a	0		$\frac{26}{3}$		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{8788}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đường thẳng $y=-4$ cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại hai điểm nên phương trình $a^3-12a^2+4=0$ có hai nghiệm khác 1 (do $f(1)\ne 0$). Mỗi giá trị của a cho ta một số phức z.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn điều kiện.

Câu 54. **(Mã 105 2017)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính $|z|$.

A. $|z|=17$ **B.** $|z|=\sqrt{17}$ **C.** $|z|=\sqrt{10}$ **D.** $|z|=10$

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi; x,y\in\mathbb{R}$

Theo bài ra ta có $\begin{cases} (x+3)^2+y^2=25 \\ x^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2+y^2=25 \\ -4x+4=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=9 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 3 \\ x=1 \end{cases}$. Vậy $|z|=\sqrt{10}$

Câu 55. **(Mã105 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\dfrac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$

Ta có $|z+3i|=\sqrt{13}\Leftrightarrow|a+bi+3i|=\sqrt{13}\Leftrightarrow a^2+(b+3)^2=13$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+6b-4=0\Leftrightarrow a^2+b^2=4-6b\,(1)$

$$\frac{z}{z+2}=1-\frac{2}{z+2}=1-\frac{2}{a+2+bi}=1-\frac{2(a+2-bi)}{(a+2)^2+b^2}.$$

$$=\frac{(a+2)^2+b^2-2a-4}{(a+2)^2+b^2}+\frac{2b}{(a+2)^2+b^2}i=\frac{a^2+b^2+2a}{(a+2)^2+b^2}+\frac{2b}{(a+2)^2+b^2}i$$

Do $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo nên $\frac{a^2+b^2+2a}{(a+2)^2+b^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+2a=0\,(2)\\ a\neq-2\\ b\neq0\end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta có $4-6b+2a=0\Leftrightarrow a=3b-2$ thay vào (1) ta có

$$(3b-2)^2+b^2-4+6b=0\Leftrightarrow10b^2-6b=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0(L)\\ b=\frac{3}{5}\Rightarrow a=\frac{-1}{5}\end{array}\right.$$

Vậy có một số phức cần tìm.

Câu 56. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=|z_2|=2$ và $|z_1+2z_2|=4$. Giá trị của $|2z_1-z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Lời giải

Giả sử $z_1=a+bi$, $(a,\ b\in\mathbb{R})$; $z_2=c+di$, $(c,\ d\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}|z_1|=2\\ |z_2|=2\\ |z_1+2z_2|=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4\\ c^2+d^2=4\\ (a+2c)^2+(b+2d)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4 & (1)\\ c^2+d^2=4 & (2)\\ a^2+b^2+4(c^2+d^2)+4(ac+bd)=16 & (3)\end{cases}$$

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta được $ac+bd=-1\ (4)$.

Ta có $|2z_1-z_2|=\sqrt{(2a-c)^2+(2b-d)^2}=\sqrt{4(a^2+b^2)+(c^2+d^2)-4(ac+bd)}\ (5)$.

Thay $(1),(2),(4)$ vào (5) ta có $|2z_1-z_2|=2\sqrt{6}$.

Câu 57. Có bao nhiêu số phức z thỏa $|z+1-2i|=|\bar{z}+3+4i|$ và $\frac{z-2i}{\overline{z+i}}$ là một số thuần ảo

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$

Theo bài ra ta có

$\left|x+1+(y-2)i\right|=\left|x+3+(4-y)i\right|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=(x+3)^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow y=x+5$

Số phức $w=\dfrac{z-2i}{\bar{z}+i}=\dfrac{x+(y-2)i}{x+(1-y)i}=\dfrac{x^2-(y-2)(y-1)+x(2y-3)i}{x^2+(y-1)^2}$

w là một số ảo khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2-(y-2)(y-1)=0 \\ x^2+(y-1)^2>0 \\ y=x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{12}{7} \\ y=\dfrac{23}{7} \end{cases}$

Vậy $z=-\dfrac{12}{7}+\dfrac{23}{7}i$.Vậy chỉ có 1 số phức z thỏa mãn.

Câu 58. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3|=|z-1|$ và $(z+2)(\bar{z}-i)$ là số thực. Tính $a+b$.

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$.

+) $|z-3|=|z-1| \Leftrightarrow |a-3+bi|=|a-1+bi| \Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2+b^2}=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$

$\Leftrightarrow (a-3)^2+b^2=(a-1)^2+b^2 \Leftrightarrow -4a+8=0 \Leftrightarrow a=2$.

+) $(z+2)(\bar{z}-i)=(a+bi+2)(a-bi-i)=[(a+2)+bi][a-(b+1)i]$

$=a(a+2)+b(b+1)-(a+2b+2)i$.

$(z+2)(\bar{z}-i)$ là số thực $\Leftrightarrow a+2b+2=0$.

Thay $a=2$ tìm được $b=-2$. Vậy $a+b=0$.

Câu 59. Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m\in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=6$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A. 10. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Cách 1:

Gọi $z=x+iy$ với $x,y\in\mathbb{R}$ ta có $\dfrac{z}{z-4}=\dfrac{x+iy}{x-4+iy}=\dfrac{(x+iy)(x-4-iy)}{(x-4)^2+y^2}=\dfrac{x(x-4)+y^2-4iy}{(x-4)^2+y^2}$

là số thuần ảo khi $x(x-4)+y^2=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4$

Mà $|z-m|=6 \Leftrightarrow (x-m)^2+y^2=36$

Ta được hệ phương trình

$\begin{cases} (x-m)^2+y^2=36 \\ (x-2)^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-2m)x=36-m^2 \\ y^2=4-(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{36-m^2}{4-2m} \\ y^2=4-\left(\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2\right)^2 \end{cases}$

Ycbt $\Leftrightarrow 4-\left(\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2\right)^2=0 \Leftrightarrow 2=\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2$ hoặc $-2=\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2$

$\Leftrightarrow m=10$ hoặc $m=-2$ hoặc $m=\pm 6$

Vậy tổng là $10-2+6-6=8$.

Câu 60. Cho số phức z thỏa mãn $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$. Môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 16. **D.** 4.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i \Leftrightarrow z(1+3i)-4+4i=(1+i)|z|$

$\Leftrightarrow (a+bi)(1+3i)-4+4i=(1+i)\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a-3b-4+(3a+b+4)i=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b-4=\sqrt{a^2+b^2} \\ 3a+b+4=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3b-4=\sqrt{a^2+b^2} \\ a=-2b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5b-8=\sqrt{5b^2+16b+16} \\ a=-2b-4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5b-8\ge 0 \\ 20b^2+64b+48=0 \\ a=-2b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\le -\dfrac{8}{5} \\ \left[\begin{array}{l} b=-2\,(N) \\ b=-\dfrac{6}{5}\,(L) \end{array}\right. \\ a=-2b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=0 \end{cases}.$$

Vậy $|z|=2$.

Câu 61. Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn: $|z_1|=2\sqrt{3}$, $|z_2|=3\sqrt{2}$. Hãy tính giá trị biểu thức $P=|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2$.

A. $P=60$. **B.** $P=20\sqrt{3}$. **C.** $P=30\sqrt{2}$. **D.** $P=50$.

Lời giải

Đặt $z_1=a+bi,\ z_2=c+di\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$

Theo đề: $\begin{cases} |z_1|=2\sqrt{3} \\ |z_2|=3\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=12 \\ c^2+d^2=18 \end{cases}$

Vậy

$P=|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2$

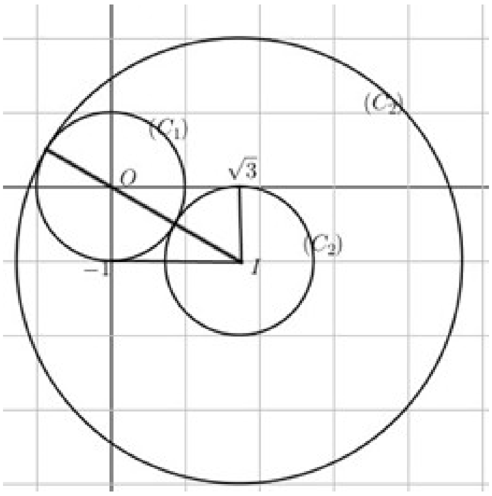
$=(a-c)^2+(b-d)^2+(a+c)^2+(b+d)^2=2(a^2+b^2+c^2+d^2)=60$

Câu 62. **(Mã 104 2017)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ và $|z-\sqrt{3}+i|=m$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$, ta có hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \ (1) \\ \left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y+1)^2 = m^2 \ (m \geq 0) \end{cases}$

Ta thấy $m = 0 \Rightarrow z = \sqrt{3} - i$ không thỏa mãn $z.\overline{z} = 1$ suy ra $m > 0$.

Xét trong hệ tọa độ Oxy tập hợp các điểm thỏa mãn (1) là đường tròn (C_1) có $O(0;0), R_1 = 1$, tập hợp các điểm thỏa mãn (2) là đường tròn (C_2) tâm $I\left(\sqrt{3};-1\right), R_2 = m$, ta thấy $OI = 2 > R_1$ suy ra I nằm ngoài (C_1).

Để có duy nhất số phức z thì hệ có nghiệm duy nhất khi đó tương đương với $(C_1),(C_2)$ tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong, điều này xảy ra khi $OI = R_1 + R_2 \Leftrightarrow m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $R_2 = R_1 + OI \Leftrightarrow m = 1 + 2 = 3$

Câu 63. **(Mã 103 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z} + 2i)(z - 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 4 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Vì $(\overline{z} + 2i)(z - 2) = \left[x + (2-y)i\right]\left[(x-2) + yi\right] = \left[x(x-2) - y(2-y)\right] + \left[xy + (x-2)(2-y)\right]i$ là số thuần ảo nên có phần thực bằng không do đó $x(x-2) - y(2-y) = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$. Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 64. **(Đề Tham Khảo 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $(z + 2i)\left(\overline{z} + 2\right)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(-1;-1)$ **D.** $(1;-1)$

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi$

$(z + 2i)\left(\overline{z} + 2\right)$

$= z.\overline{z} + 2z + 2i\overline{z} + 4i$

$= x^2 + y^2 + 2(x+yi) + 2i(x-yi) + 4i$

$= x^2 + y^2 + 2x + 2y + (2x+2y+4)i$

$(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có tâm là $I(-1;-1)$.

Câu 65. **(Mã 101 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 26. **D.** 34.

Lời giải

Chọn B

$w = \dfrac{4+iz}{1+z} \Leftrightarrow (1+z)w = 4+iz \Leftrightarrow z(w-i) = 4-w$

$\Leftrightarrow |z|.|w-i| = |4-w| \Leftrightarrow \sqrt{2}.|w-i| = |4-w|$ (*)

Gọi $w = x+yi,\ (x, y \in \mathbb{R})$ khi đó thay vào (*) ta có:

$\sqrt{2}.|x+yi-i| = |4-x-yi| \Leftrightarrow 2\left[x^2 + (y-1)^2\right] = (x-4)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 4y - 14 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 = 34$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{34}$.

Câu 66. **(Mã 102 - 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 20. **C.** 12. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $w = \dfrac{3+iz}{1+z} \Leftrightarrow w + wz = 3 + iz \Leftrightarrow w - 3 = (i-w)z$.

$\Rightarrow |w-3| = |(i-w)z| \Leftrightarrow |w-3| = |(i-w)||z|$.

Gọi $w = x+yi,\ (x, y \in \mathbb{R})$.

Do đó, $|w-3| = |(i-w)||z| \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (1-y)^2}.\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 2x^2 + 2(1-y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ là đường tròn có tâm $I(-3;2)$ và bán kính bằng $2\sqrt{5}$.

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (2-i)z$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đó?

A. $I(3;-2)$. **B.** $I(-3;2)$. **C.** $I(3;2)$. **D.** $I(-3;-2)$.

Lời giải

Cách 1.

Đặt $w = x + yi$ .Ta có $w = 3 - 2i + (2 - i)z$.

$\Leftrightarrow x + yi = 3 - 2i + (2 - i)z$.

$\Leftrightarrow (2 - i)z = (x - 3) + (y + 2)i$.

$\Leftrightarrow (4 - i^2)z = [(x - 3) + (y + 2)i].(2 + i)$.

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2x - y - 8}{5} + \dfrac{x + 2y + 1}{5}i$.

Vì $|z| = 2$ nên $\left(\dfrac{2x - y - 8}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{x + 2y + 1}{5}\right)^2 = 4$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 20$.

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 20$.

Vậy tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(3;-2)$.

Cách 2.

Đặt $z = a + bi; w = x + yi$.

Vì $|z| = 2$ nên $a^2 + b^2 = 4$.

Ta có $w = 3 - 2i + (2 - i)z$.

$\Leftrightarrow x + yi + 2i - 3 = (2 - i)(a + bi)$.

$\Leftrightarrow (x - 3) + (y + 2)i = (2a + b) + (2b - a)i$.

$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = (2a + b)^2 + (2b - a)^2$.

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5(a^2 + b^2)$.

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 20$.

Vậy tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(3;-2)$.

Câu 68. Xét các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z + 2}{z - 2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Có $w = \dfrac{z + 2}{z - 2i} = \dfrac{a + 2 + bi}{a + (b - 2)i} = \dfrac{(a + 2 + bi)[a - (b - 2)i]}{a^2 + (b - 2)^2}$

$= \dfrac{a(a + 2) + b(b - 2) + [-(a + 2)(b - 2) + ab]i}{a^2 + (b - 2)^2}$

w là số thuần ảo $\Leftrightarrow \begin{cases} a(a + 2) + b(b - 2) = 0 \ (1) \\ a^2 + (b - 2)^2 \neq 0 \end{cases}$

Có $(1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2a - 2b = 0$.

Suy ra M thuộc đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Câu 69. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 3i| = 2$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (2 - i)z - 3i + 5$ là một đường tròn. Xác định tâm I và bán kính của đường tròn trên.

A. $I(-6;-4), R = 2\sqrt{5}$. **B.** $I(6;4), R = 10$.

C. $I(6;4), R = 2\sqrt{5}$. **D.** $I(-6;4), R = 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có: $w = (2-i)z - 3i + 5 \Leftrightarrow w = (2-i)(z + 1 - 3i) + 6 + 4i$

$\Leftrightarrow w - 6 - 4i = (2-i)(z + 1 - 3i)$

$\Rightarrow |w - 6 - 4i| = |(2-i)(z + 1 - 3i)| = 2\sqrt{5}$

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = x + yi \ (x; y \in \mathbb{R})$

$|w - 6 - 4i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-6) + (y-4)i| = 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-4)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$

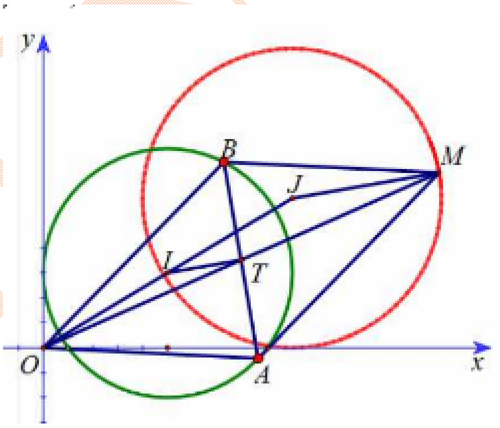
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số w là đường tròn tâm $I(6;4)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Câu 70. Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$, đồng thời $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

A. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. **B.** $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 36$.

C. $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 16$. **D.** $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$.

Lời giải



Gọi A, B, M là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, w. Khi đó A, B thuộc đường tròn $(C): (x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$ và $AB = |z_1 - z_2| = 8$.

(C) có tâm $I(5;3)$ và bán kính $R=5$, gọi T là trung điểm của AB khi đó T là trung điểm của OM và $IT=\sqrt{IA^2-TA^2}=3$.

Gọi J là điểm đối xứng của O qua I suy ra $J(10;6)$ và IT là đường trung bình của tam giác OJM, do đó $JM=2IT=6$.

Vậy M thuộc đường tròn tâm J bán kính bằng 6 và có phương trình $(x-10)^2+(y-6)^2=36$.

Câu 71. Xét số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=3$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(12-5i)\overline{z}+4i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=13$. **B.** $r=39$. **C.** $r=17$ **D.** $r=3$.

Lời giải

Gọi số phức $w=x+yi$, với $x,y\in R$, biểu diễn bởi $M(x;y)$

$$w=(12-5i)\overline{z}+4i \Leftrightarrow x+yi=(12-5i)\overline{z}+4i \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{x+(y-4)i}{12-5i}$$

$$\Rightarrow z=\frac{x-(y-4)i}{12+5i}$$

Ta có : $|z-3i+4|=3 \Leftrightarrow \left|\frac{x-(y-4)i}{12+5i}-3i+4\right|=3$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x+63-(y+12)i}{12+5i}\right|=3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x+63)^2+(y+12)^2}}{\sqrt{12^2+5^2}}=3 \Leftrightarrow (x+63)^2+(y+12)^2=39^2$$

Vậy $r=39$.

Câu 72. Cho số phức z thảo mãn $(z+1-3i)(\overline{z}+1+3i)=25$. Biết tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(z+1-3i)(\overline{z}+1+3i)=25 \Leftrightarrow z.\overline{z}+(z+\overline{z})+(z-\overline{z})3i=15$ $(*)$.

Đặt $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ khi đó $\begin{cases} z.\overline{z}=x^2+y^2 \\ z+\overline{z}=2x \\ z-\overline{z}=2yi \end{cases}$.

Thay vào $(*)$ ta được $x^2+y^2+2x-6y-15=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn z thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-1;3)$ và bán kính $R=5$.

Suy ra $\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}$. Vậy $a+b+c=7$.

Cách 2:

Đặt $z_0=-1+3i$ và $R=5$.

Ta có $|z-z_0||\overline{z}-\overline{z}_0|=|z-z_0||\overline{z-z_0}|=|z-z_0|^2$.

Suy ra $|z-z_0||\overline{z}-\overline{z}_0|=R^2 \Leftrightarrow |z-z_0|^2=R^2 \Leftrightarrow |z-z_0|=R$, với $R>0$.

Vậy tập hợp biểu diễn số phức z thuộc đường tròn tâm $I(-1;3)$, bán kính $R=5$.

Suy ra $\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}$. Vậy $a+b+c=7$.

Câu 73. **(Đề Tham Khảo 2018)** Xét số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

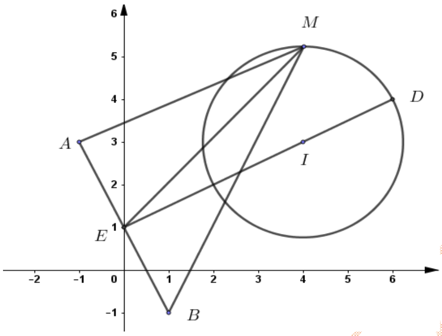
A. $P=8$ **B.** $P=10$ **C.** $P=4$ **D.** $P=6$

Lời giải

Chọn B

Goi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Theo giả thiết ta có: $|z-4-3i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (a-4)^2+(b-3)^2=5 \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(4;3)$ bán kính $R=\sqrt{5}$



Gọi: $\begin{cases} A(-1;3) \\ B(1;-1) \end{cases} \Rightarrow Q=|z+1-3i|+|z-1+i|=MA+MB$

Gọi E là trung điểm của AB, kéo dài EI cắt đường tròn tại D

Ta có: $Q^2=MA^2+MB^2+2MA.MB$

$\Leftrightarrow Q^2 \le MA^2+MB^2+MA^2+MB^2=2\left(MA^2+MB^2\right)$

Vì ME là trung tuyến trong $\Delta MAB \Rightarrow ME^2=\dfrac{MA^2+MB^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2+MB^2=2ME^2+\dfrac{AB^2}{2}$

$\Rightarrow Q^2 \le 2\left(2ME^2+\dfrac{AB^2}{2}\right)=4ME^2+AB^2$. Mặt khác $ME \le DE=EI+ID=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

$\Rightarrow Q^2 \le 4.\left(3\sqrt{5}\right)^2+20=200$

$\Rightarrow Q \le 10\sqrt{2} \Rightarrow Q_{max}=10\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} MA=MB \\ M\equiv D \end{cases}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EI}=2\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} 4=2(x_D-4) \\ 2=2(y_D-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=6 \\ y_D=4 \end{cases} \Leftrightarrow M(6;4) \Rightarrow P=a+b=10$

Cách 2:Đặt $z=a+bi$. Theo giả thiết ta có: $(a-4)^2+(b-5)^2=5$.

Đặt $\begin{cases} a-4=\sqrt{5}\sin t \\ b-3=\sqrt{5}\cos t \end{cases}$. Khi đó:

$$Q=|z+1-3i|+|z-1+i|=\sqrt{(a+1)^2+(b-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t+5\right)^2+5\cos^2 t}+\sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t+3\right)^2+\left(\sqrt{5}\cos t+4\right)^2}$$

$$=\sqrt{30+10\sqrt{5}\sin t}+\sqrt{30+2\sqrt{5}\left(3\sin t+4\cos t\right)}$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$$Q\le\sqrt{2\left(60+8\sqrt{5}\left(2\sin t+\cos t\right)\right)}\le\sqrt{2\left(60+8\sqrt{5}.\sqrt{5}\right)}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow Q\le 10\sqrt{2}\Rightarrow Q_{max}=10\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \sin t=\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos t=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=6 \\ b=4 \end{cases}\Rightarrow P=a+b=10.$

Câu 74. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5}-2$. **B.** $\sqrt{5}-1$. **C.** $\sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{5}+2$.

Lời giải

Cách 1:

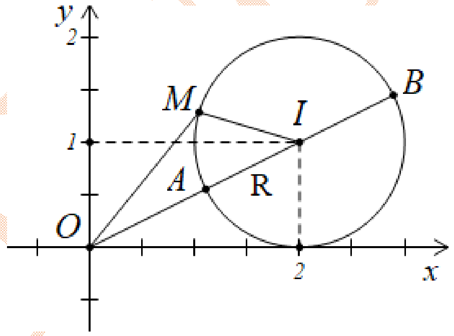
Đặt $w=z-i\Rightarrow z=w+i$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức w.

Từ giả thiết $|z-2-2i|=1$ ta được:

$$|w+i-2-2i|=1\Leftrightarrow|w-2-i|=1\Leftrightarrow|(x-2)+(y-1)i|=1\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2=1.$$

Suy ra tập hợp những điểm $M(x;y)$ biểu diễn cho số phức w là đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ bán kính $R=1$.



Giả sử OI cắt đường tròn (C) tại hai điểm A,B với A nằm trong đoạn thẳng OI.

Ta có $|w|=OM$

Mà $OM+MI\ge OI \Leftrightarrow OM+MI\ge OA+AI \Leftrightarrow OM\ge OA$

Nên $|w|$ nhỏ nhất bằng $OA=OI-IA=\sqrt{5}-1$ khi $M\equiv A$.

Cách 2:

Từ $|z-2-2i|=1\Rightarrow(a-2)^2+(b-2)^2=1$ với $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$

$a-2=\sin x;\ b-2=\cos x\ \Rightarrow a=2+\sin x,\ b=2+\cos x$

Khi đó: $|z-i|=|2+\sin x+(2+\cos x)i-i|$ $=\sqrt{(2+\sin x)^2+(1+\cos x)^2}$

$=\sqrt{6+(4\sin x+2\cos x)}$

$\geq\sqrt{6-\sqrt{(4^2+2^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)}}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$

Nên $|z-i|$ nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}-1$ khi $\begin{cases}4\cos x=2\sin x\\4\sin x+2\cos x=-2\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\\cos x=\dfrac{-\sqrt{5}}{5}\end{cases}$

Ta được $z=\left(2-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\left(2-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)i$

Cách 3:

Sử dụng bất đẳng thức $||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

$|z-i|=|(z-2-2i)+(2+i)|\geq||z-2-2i|-|2+i||=\sqrt{5}-1$

Câu 75. Cho số phức z thoả mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$.

A. $\sqrt{13}+3$. **B.** $\sqrt{13}+5$. **C.** $\sqrt{13}+1$. **D.** $\sqrt{13}+6$.

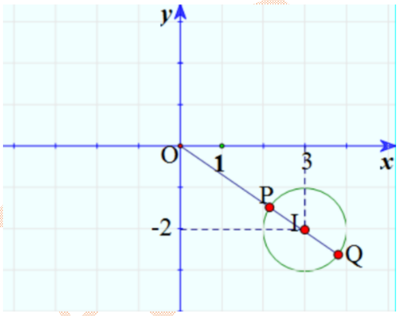
Lời giải

Chọn C

Ta có $1=|z-2-3i|^2=(z-2-3i).\overline{(z-2-3i)}=(z-2-3i)(\overline{z}-2+3i)$

$\Leftrightarrow 1=|(z-2-3i)(\overline{z}-2+3i)|\Leftrightarrow|\overline{z}-2+3i|=1\Leftrightarrow|\overline{z}+1+i-3+2i|=1(*)$.

+Đặt $w=\overline{z}+1+i$, khi đó $\Leftrightarrow|w-3+2i|=1$.



Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\overline{z}+1+i$ là đường tròn $(I;1)$ và $|w|$ là khoảng cách từ gốc tọa độ đến 1 điểm trên đường tròn. Do đó giá trị lớn nhất của $|w|$ chính là đoạn OQ.

$\Rightarrow|w|_{max}=1+\sqrt{3^2+2^2}=1+\sqrt{13}$.

Câu 76. Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2+7-24i|$ nằm trong khoảng nào?

A. $(0;1009)$. **B.** $(1009;2018)$. **C.** $(2018;4036)$. **D.** $(4036;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $1=|z-3i+4|\geq||z|-|3i-4||=||z|-5|\Rightarrow-1\leq|z|-5\leq1\Rightarrow4\leq|z|\leq6$.

Đặt $z_0 = 4-3i \Rightarrow |z_0| = 5, z_0^{\,2} = 7-24i$.

Ta có $A = \left|z^2+7-24i\right|^2 = \left|z^2+z_o^{\,2}\right|^2 = \left(z^2+z_o^{\,2}\right)\left(\overline{z}^2+\overline{z_o}^2\right) = |z|^4+|z_o|^4+\left(z.\overline{z_o}+z_o.\overline{z}\right)^2-2\left|z.z_o\right|^2$

Mà $\left(z+z_o\right)\left(\overline{z}+\overline{z_o}\right)=1 \Rightarrow z.\overline{z_o}+z_o.\overline{z}=1-|z|^2-|z_o|^2$

Suy ra $A=|z|^4+|z_o|^4+\left(1-|z|^2-\left|\overline{z_o}\right|^2\right)^2-2\left|z.z_o\right|^2=2|z|^4-2|z|^2+1201$.

Hàm số $y=2t^4-2t^2+1201$ đồng biến trên $[4;6]$ nên $A \ge 2.4^4-2.4^2+1201=1681$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}|z|=4\\|z+4-3i|=1\end{cases}$.

Do đó $\left|z^2+7-24i\right|$ nằm trong khoảng $(1009;2018)$.

Câu 77. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=4$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-2i|$. Đặt $A=M+m$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

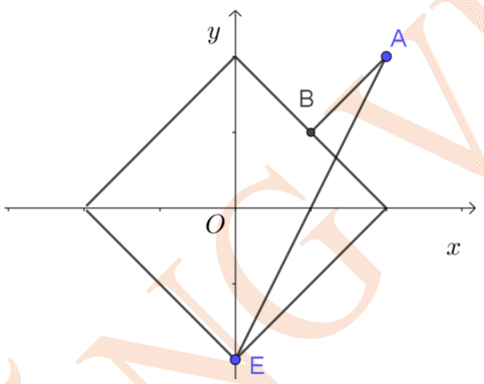
A. $A\in\left(\sqrt{34};6\right)$. **B.** $A\in\left(6;\sqrt{42}\right)$. **C.** $A\in\left(2\sqrt{7};\sqrt{33}\right)$. **D.** $A\in\left[4;3\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Đặt $z=x+iy$ và gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của $z=x+iy$

ta có: $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=4 \Leftrightarrow |x|+|y|=2$

Gọi $A(2;2)$ và $P=MA$



* Theo hình vẽ, $\min P=d(A,\Delta)$, với $\Delta: x+y=2$

và $\min P=\dfrac{|2+2-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\max P=AE=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, với $E(0;-2)$

Vậy $M+m=\sqrt{2}+2\sqrt{5}\simeq 5,88$

Câu 78. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=\left|\overline{z}+1-2i\right|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\dfrac{3}{10}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $-\dfrac{3}{5}$. **D.** $-\dfrac{3}{10}$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$.

$|z-1+i|=|\bar{z}+1-2i| \Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=|(x+1)-(y+2)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2} \Leftrightarrow 4x+2y+3=0 \Leftrightarrow y=-2x-\frac{3}{2}$.

<u>Cách 1:</u>

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(-2x-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{5x^2+6x+\frac{9}{4}}=\sqrt{5\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{20}}\ge\frac{3\sqrt{5}}{10}, \forall x$.

Suy ra $min|z|=\frac{3\sqrt{5}}{10}$ khi $x=-\frac{3}{5}; y=-\frac{3}{10}$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

<u>Cách 2:</u>

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: 4x+2y+3=0$
.

Ta có $|z|=OM$. $|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của O trên d.

Phương trình đường thẳng OM đi qua O và vuông góc với d là: $x-2y=0$.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}4x+2y+3=0\\x-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=-\frac{3}{10}\end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{5};-\frac{3}{10}\right)$

. Hay $z=-\frac{3}{5}-\frac{3}{10}i$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

<u>Nhận xét:</u> Ta có thể tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z như sau:

$|z-1+i|=|\bar{z}+1-2i| \Leftrightarrow |z-(1-i)|=|z-(-1-2i)|$ (*)

Gọi M biểu diễn số phức z, điểm $A(1;-1)$ biểu diễn số phức $1-i$, điểm $B(-1;-2)$ biểu diễn số phức $-1-2i$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow MA=MB$. Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình $d: 4x+2y+3=0$.

Câu 79. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là

A. $|w|=3\sqrt{137}$. **<u>B.</u>** $|w|=\sqrt{1258}$. **C.** $|w|=2\sqrt{309}$. **D.** $|w|=2\sqrt{314}$.

Lời giải

- Đặt $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-3)+(y-4)i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5$, hay tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$, bán kính $r=\sqrt{5}$.

- Khi đó : $P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3$

$\Rightarrow 4x+2y+3-P=0$, kí hiệu là đường thẳng Δ.

- Số phức z tồn tại khi và chỉ khi đường thẳng Δ cắt đường tròn (C)

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)\le r \Leftrightarrow \dfrac{|23-P|}{2\sqrt{5}}\le\sqrt{5} \Leftrightarrow |P-23|\le 10 \Leftrightarrow 13\le P\le 33$

Suy ra $M=33$ và $m=13$ $\Rightarrow w=33+13i$.

Vậy $|w|=\sqrt{1258}$.

Câu 80. Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=\sqrt{5}$. Gọi a và b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức a^2-b^2 bằng

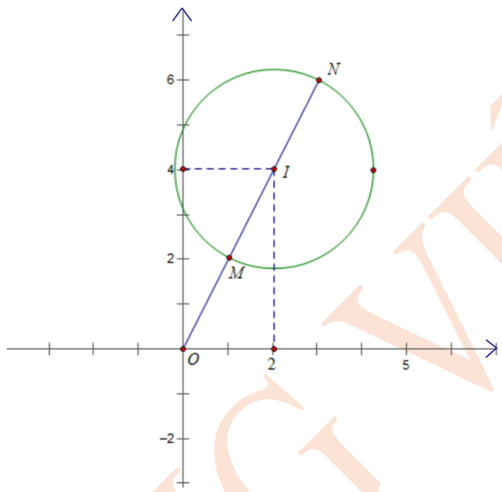
A. 40. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z-2-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=5\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(2;4)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.



Kẻ đường thẳng đi qua 2 điểm O và I cắt đường tròn tại 2 điểm M và N như hình vẽ.

$OI=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$; $IM=IN=R=\sqrt{5}$.

Từ hình vẽ ta thấy:

$|z|_{\min}=OM=OI-IM=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}=b$.

$|z|_{\max}=ON=OI+IN=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}=a$.

Vậy $a^2-b^2=40$.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2022

Câu 45. **(ĐTK BGD 2022)** Cho hàm số $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có ba điểm cực trị là -2, -1 và 1. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng

A. $\dfrac{500}{81}$. **B.** $\dfrac{36}{5}$. **C.** $\dfrac{2932}{405}$. **D.** $\dfrac{2948}{405}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c$

Theo bài ra, ta có: $\begin{cases}12a-4b+c=96\\3a-2b+c=12\\3a+2b+c=-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=8\\b=-6\\c=-24\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x+d$

Giả sử $y=g(x)=ax^2+bx+c$

$\Rightarrow\begin{cases}g(-2)=8+d\\g(-1)=13+d\\g(1)=-19+d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a-2b+c=8+d\\a-b+c=13+d\\a+b+c=-19+d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-7\\b=-16\\c=4+d\end{cases}$

$\Rightarrow y=g(x)=-7x^2-16x+4+d$

Xét $f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow 3x^4+8x^3+x^2-8x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{2}{3}\\x=-1\\x=-2\end{array}\right.$

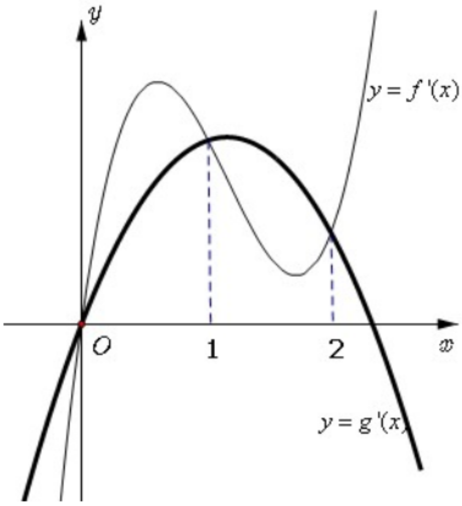
Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_{-2}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-2}^{1}\left|3x^4+8x^3+x^2-8x-4\right|dx$

$=\int_{-2}^{-1}\left|3x^4+8x^3+x^2-8x-4\right|dx+\int_{-1}^{-\frac{2}{3}}\left|3x^4+8x^3+x^2-8x-4\right|dx+\int_{-\frac{2}{3}}^{1}\left|3x^4+8x^3+x^2-8x-4\right|dx$

$=\dfrac{2948}{405}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

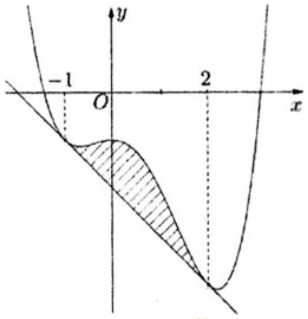
Câu 1. Cho hai hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ g'(x)=qx^2+nx+p$ với $a,q\neq 0$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f'(x), y = g'(x)$ bằng 10 và $f(2) = g(2)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

A. $\frac{17}{3}$. **B.** $\frac{14}{3}$. **C.** 5. **D.** $\frac{16}{3}$.

Câu 2. Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 1; g(x) = ex - 2\left(a,b,c,d,e \in \mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-1; 2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

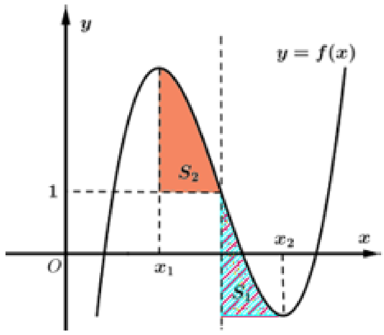


A. $\frac{81}{20}$. **B.** $\frac{81}{4}$. **C.** $\frac{81}{10}$. **D.** $\frac{81}{40}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ có đồ thị (C). Gọi E là một điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại E cắt (C) tại điểm thứ hai F và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng EF với (C) bằng $\frac{27}{64}$. Tiếp tuyến của (C) tại F cắt (C) tại điểm thứ hai Q. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng FQ với (C) bằng

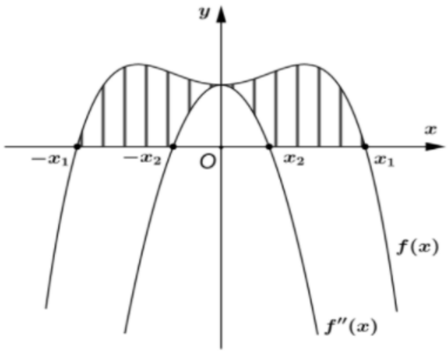
A. $\frac{27}{8}$. **B.** $\frac{27}{4}$. **C.** $\frac{459}{64}$. **D.** $\frac{135}{64}$.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 1$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$



A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{5}{8}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+1\left(a\neq 0;a,b\in\mathbb{R}\right)$ mà đồ thi hàm số $f''(x)$ và đồ thị hàm số $f(x)$ có một điểm chung duy nhất là nằm trên trục Oy (hình vẽ), trong đó $\pm x_1$ là nghiệm của $f(x)$ và $\pm x_2$ là nghiệm của $f''(x),\left(x_1,x_2>0\right)$. Biết $x_1=3x_2$, tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $f(x), f''(x)$ và trục Ox.



A. $\frac{152}{45}$. **B.** $\frac{73}{15}$. **C.** $\frac{152}{15}$. **D.** $\frac{73}{45}$.

Câu 6. Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và $g\left(x\right)=mx^3+nx^2-x$, với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f\left(x\right)-g\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'\left(x\right)$ và $y=g'\left(x\right)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{71}{9}$. **C.** $\frac{71}{6}$. **D.** $\frac{64}{9}$.

Câu 7. Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+x$ và $g\left(x\right)=mx^3+nx^2-2x$ với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f\left(x\right)-g\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là $-1,2,3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'\left(x\right)$ và $y=g'\left(x\right)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{71}{12}$. **D.** $\frac{71}{6}$.

Câu 8. **[Mức độ 3]** Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g\left(x\right)=mx^3+nx^2-2x$ với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f\left(x\right)-g\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'\left(x\right)$ và $y=g'\left(x\right)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{71}{9}$. **C.** $\frac{71}{6}$. **D.** $\frac{64}{9}$.

Câu 9. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$; với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có 3 điểm cực trị là – 1, 2, 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{71}{6}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{71}{12}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $\ln 10$. **D.** $\ln 7$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 2$. **C.** $\ln 15$. **D.** $3\ln 2$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $2\ln 2$.

Câu 13. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$, với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,\ 2$ và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{71}{9}$. **C.** $\frac{71}{6}$. **D.** $\frac{64}{9}$.

Câu 14. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$ với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,2,3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{71}{12}$. **D.** $\frac{71}{6}$.

Câu 15. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$ với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,\ 2$ và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{71}{9}$. **C.** $\frac{71}{6}$. **D.** $\frac{64}{9}$.

Câu 16. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$; với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có 3 điểm cực trị là – 1, 2, 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{71}{6}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{71}{12}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $\ln 10$. **D.** $\ln 7$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 2$. **C.** $\ln 15$. **D.** $3\ln 2$.

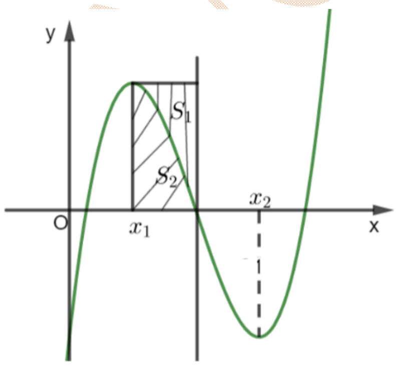
Câu 19. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $2\ln 2$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

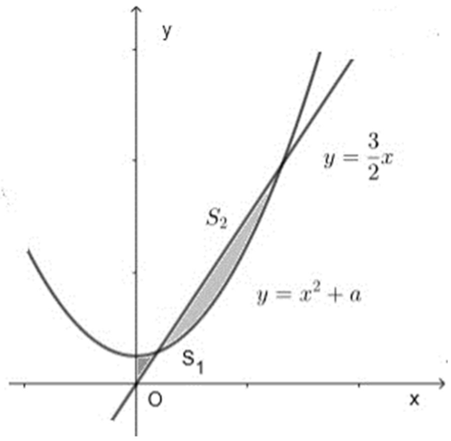
A. $2\ln 2$. **B.** $\ln 6$. **C.** $3\ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Câu 21. **(ĐTK2021)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:



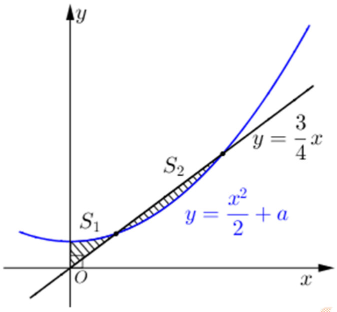
A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 22. **(Mã 104 - 2019)** Cho đường thẳng $y=\frac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 , S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(0;\frac{2}{5}\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)$ **C.** $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$ **D.** $\left(\frac{9}{20};\frac{1}{2}\right)$

Câu 23. **(Mã 102 - 2019)** Cho đường thẳng $y=\frac{3}{4}x$ và parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{7}{32};\frac{1}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{32}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{16}\right)$.

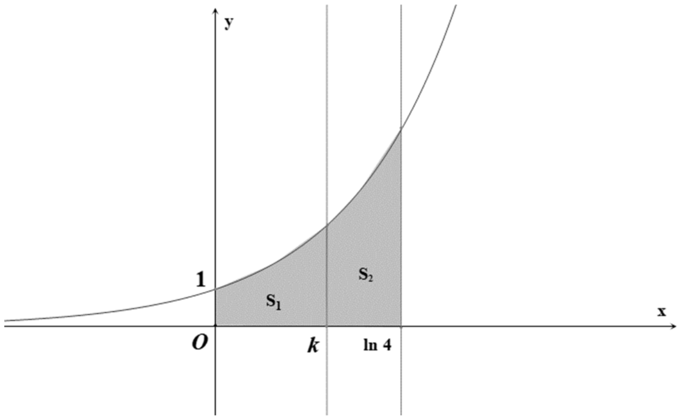
Câu 24. Cho parabol $(P_1): y=-x^2+2x+3$ cắt trục hoành tại hai điểm A,B và đường thẳng $d: y=a$ $(0<a<4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A,B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y=a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d .Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1=S_2$, tính $T=a^3-8a^2+48a$.

A. $T=99$. **B.** $T=64$. **C.** $T=32$. **D.** $T=72$.

Câu 25. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my=x^2$, $mx=y^2$ $(m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$.

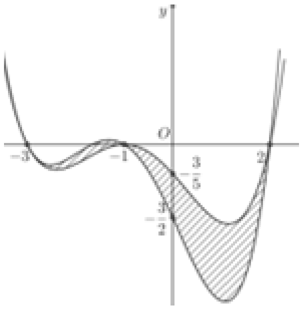
A. $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=3$ **D.** $m=4$

Câu 26. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



A. $k=\frac{4}{3}\ln 2$. **B.** $k=\ln\frac{8}{3}$. **C.** $k=\ln 2$. **D.** $k=\ln 3$.

Câu 27. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Biết rằng đồ thị cảu hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;-1;\ 2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

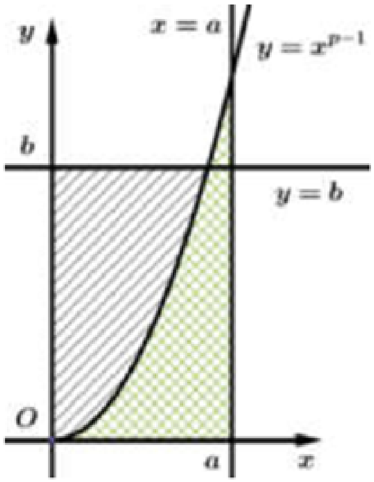


A. 3,11 **B.** 2,45 **C.** 3,21 **D.** 2,95

Câu 28. Cho hàm số $y=x^4-6x^2+m$ có đồ thị (C_m). Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m=\frac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên, $b>0$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $S=a+b$ là:

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 29. Cho các số p,q thỏa mãn các điều kiện: $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ và các số dương a,b. Xét hàm số: $y=x^{p-1}\ (x>0)$ có đồ thị là (C). Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, đường thẳng $x=a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, đường thẳng $y=b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x=a$, $y=b$. Khi so sánh S_1+S_2 và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?

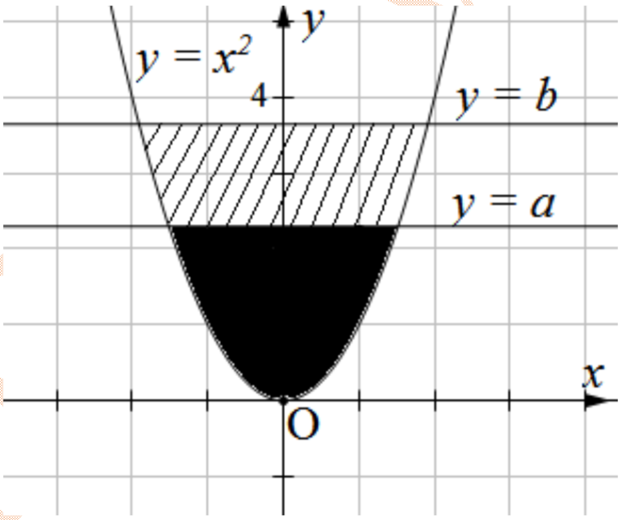


A. $\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}\le ab$ **B.** $\dfrac{a^{p-1}}{p-1}+\dfrac{b^{q-1}}{q-1}\ge ab$. **C.** $\dfrac{a^{p+1}}{p+1}+\dfrac{b^{q+1}}{q+1}\le ab$. **D.** $\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}\ge ab$.

Câu 30. Cho parabol $(P): y=x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB=2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d. Tìm giá trị lớn nhất S_{max} của S.

A. $S_{max}=\dfrac{2018^3+1}{6}$. **B.** $S_{max}=\dfrac{2018^3}{3}$. **C.** $S_{max}=\dfrac{2018^3-1}{6}$. **D.** $S_{max}=\dfrac{2018^3}{3}$.

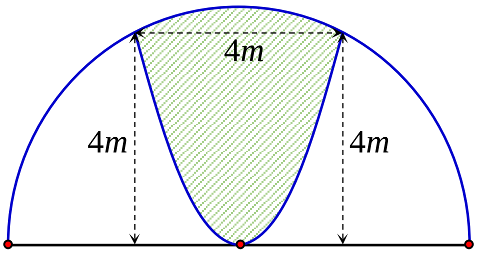
Câu 31. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và hai đường thẳng $y=a$, $y=b$ $(0<a<b)$ (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1=S_2$?



A. $b=\sqrt[3]{4}a$. **B.** $b=\sqrt[3]{2}a$. **C.** $b=\sqrt[3]{3}a$. **D.** $b=\sqrt[3]{6}a$.

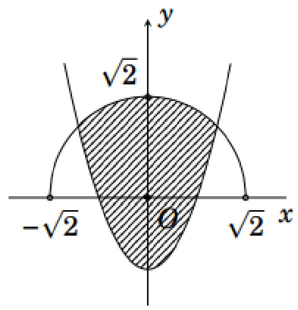
Câu 32. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng $4(m)$. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là

150.000 đồng/m^2 và 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 3.738.574 **(đồng).** **B.** 1.948.000 (đồng). **C.** 3.926.990 (đồng). **D.** 4.115.408 (đồng).

Câu 33. Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu (phần được gạch chéo trên hình vẽ). Biết rằng phần gạch chéo là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=2x^2-1$ và nửa trên của đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}(m)$ Tính số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu biết rằng để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng.



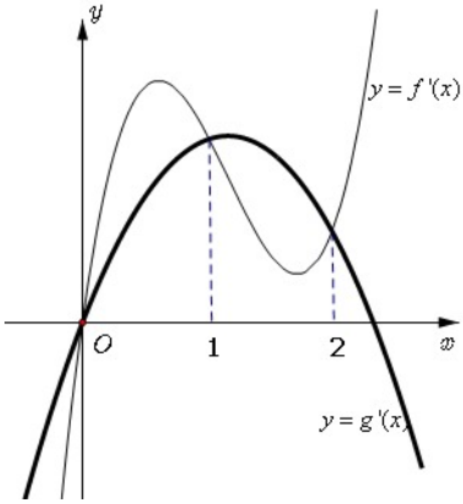
A. $\frac{3\pi-2}{6}\times 250000$. **B.** $\frac{3\pi+10}{6}\times 250000$. **C.** $\frac{3\pi+10}{3}\times 250000$. **D.** $\frac{3\pi+2}{6}\times 250000$

Câu 34. Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là 8 m và 4 m, F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 250.000 đ và 150.000 đ. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).

A. 5.676.000 đ. **B.** 4.766.000 đ. **C.** 4.656.000 đ. **D.** 5.455.000 đ.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)=ax^3+bx^2+cx+d, g'(x)=qx^2+nx+p$ với $a,q\neq 0$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f'(x), y=g'(x)$ bằng 10 và $f(2)=g(2)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng

A. $\frac{17}{3}$.   **B.** $\frac{14}{3}$.   **C.** 5.   **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị và giả thiết suy ra: $f'(x)-g'(x)=ax(x-1)(x-2), a>0$.

Mà $\int_0^2 \left|f'(x)-g'(x)\right|dx=10 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|a|=10 \Leftrightarrow a=10.$

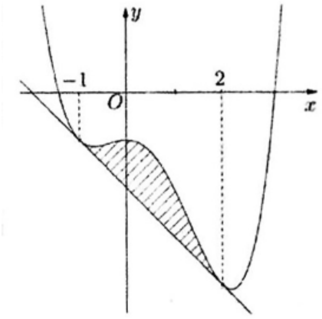
Ta có: $\int (f'(x)-g'(x))dx=20\int x(x-1)(x-2)dx \to f(x)-g(x)=5x^4-20x^3+20x^2+C.$

Theo giải thiết: $f(2)-g(2)=0 \to C=0 \to f(x)-g(x)=5x^4-20x^3+20x^2.$

$f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow 5x^4-20x^3+20x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Do đó: diện tích hình phẳng cần tính bằng $\int_0^2 \left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_0^2\left|5x^4-20x^3+20x^2\right|dx=\frac{16}{3}.$

Câu 2. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx-1; g(x)=ex-2\,(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ tiếp xúc nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-1;2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{81}{20}$. **B.** $\dfrac{81}{4}$. **C.** $\dfrac{81}{10}$. **D.** $\dfrac{81}{40}$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có:

$$f(x)-g(x)=k(x+1)^2(x-2)^2;\ f(0)-g(0)=-1-(-2)=1=4k\Rightarrow k=\frac{1}{4}.$$

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2(x-2)^2;S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|=\int_{-1}^{2}\left|\frac{1}{4}(x+1)^2(x-2)^2\right|=\frac{81}{40}.$$

Câu 3. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3$ có đồ thị (C). Gọi E là một điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại E cắt (C) tại điểm thứ hai F và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng EF với (C) bằng $\dfrac{27}{64}$. Tiếp tuyến của (C) tại F cắt (C) tại điểm thứ hai Q. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng FQ với (C) bằng

A. $\dfrac{27}{8}$. **B.** $\dfrac{27}{4}$. **C.** $\dfrac{459}{64}$. **D.** $\dfrac{135}{64}$.

Lời giải

Chọn B

Bổ đề. Ta có:

$$I=\int_a^b(x-a)^2(x-b)dx=\frac{(x-a)^2(x-b)^2}{2}\Big|_a^b-\int_a^b(x-a)(x-b)^2dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)^2dx$$

$$\rightarrow 2I=\int_a^b(x-a)(x-b)(b-a)dx$$

$$TH:b>a\rightarrow\int_a^b\left|(x-a)(x-b)\right|=\sqrt{\frac{\Delta^3}{36}}=\sqrt{\frac{\left[(a+b)^2-4ab\right]^3}{36}}=\frac{|b-a|^3}{6}\Rightarrow I=-\frac{(b-a)^4}{12}$$

$$TH:b<a\rightarrow-\int_a^b\left|(x-a)(x-b)\right|=\sqrt{\frac{\Delta^3}{36}}=\sqrt{\frac{\left[(a+b)^2-4ab\right]^3}{36}}=\frac{|b-a|^3}{6}\Rightarrow I=-\frac{(b-a)^4}{12}$$

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=(x-a)^2(x-b)$, trục Ox, đường thẳng $x=a;x=b$

là $S=\left|\int_a^b (x-a)^2(x-b)\right|=-I=\dfrac{(b-a)^4}{12}$

Phương trình tiếp tuyến tại E là $y=f'(x_E)(x-x_E)+f(x_E)$

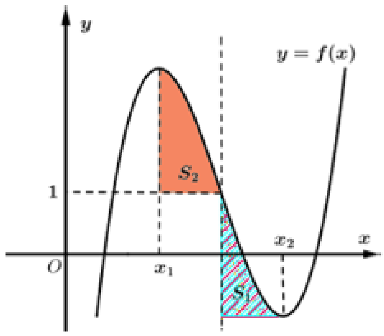
Tiếp tuyến cắt đồ thị tại điểm F, vì tiếp tuyến tại E tiếp xúc với đồ thị nên có nghiệm kép là x_E.

$x^3-3x^2+3=f'(x_E)(x-x_E)+f(x_E)\Rightarrow(x-x_E)^2(x+2x_E-3)=0\Rightarrow x_F+2x_E-3=0$

Ta có:

$S=\dfrac{27}{64}\Rightarrow\dfrac{(3x_C-3)^4}{12}=\dfrac{27}{64}\Rightarrow(x_C-1)^4=\dfrac{1}{16};S_1=\dfrac{(3x_D-3)^4}{12}=\dfrac{(3(3-2x_C)-3)^4}{12}=\dfrac{6^4(x_C-1)^4}{12}=\dfrac{27}{4}$

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=1$. Gọi S_1,S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$



A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Điểm uốn của đồ thị hàm số là điểm A

$\begin{cases}x_2-x_1=2\\ f(x_1)+f(x_2)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_A=1+x_1\\ f(x_A)=1\end{cases}$

Tịnh tiến điểm A về gốc tọa độ

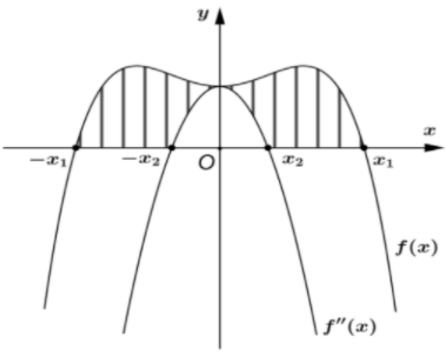
Ta được đồ thị hàm số mới

$x_1=-1;x_2=1$

$$g'(x)=k\left(x^2-1\right)\to g(x)=\frac{kx^3}{3}-kx+C$$

$$g(0)=0\Rightarrow C=0;g(1)=\frac{-2k}{3}\to\frac{S_2}{S_1}=\frac{\int\limits_{-1}^{0}\left|\frac{kx^3}{3}-kx\right|}{\left|\frac{-2k}{3}.1\right|-\int\limits_{-1}^{0}\left|\frac{kx^3}{3}-kx\right|}=\frac{5:12}{2:3-5:12}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5}.$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+1\left(a\neq 0;a,b\in\mathbb{R}\right)$ mà đồ thi hàm số $f''(x)$ và đồ thị hàm số $f(x)$ có một điểm chung duy nhất là nằm trên trục Oy (hình vẽ), trong đó $\pm x_1$ là nghiệm của $f(x)$ và $\pm x_2$ là nghiệm của $f''(x),\left(x_1,x_2>0\right)$. Biết $x_1=3x_2$, tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $f(x),f''(x)$ và trục Ox.



A. $\frac{152}{45}$. **B.** $\frac{73}{15}$. **C.** $\frac{152}{15}$. **D.** $\frac{73}{45}$.

Lời giải

Chọn A

$$f(x)=ax^4+bx^2+1;\ f''(x)=12ax^2+2b;\ f(0)=f''(0)=1\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_2^2=\frac{4}{9}\Rightarrow a=\frac{-3}{16};x_2=\frac{2}{3};x_1=2$$

$$S=\int\limits_{-2}^{2}f(x)-\int\limits_{\frac{-2}{3}}^{\frac{2}{3}}f''(x)=\frac{152}{45}.$$

$$\begin{cases}12ax_2^2+1=0\\ ax_1^4+\frac{1}{2}x_1^2+1=0\\ x_1^2=9x_2^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12ax_2^2+1=0\\ 81ax_2^4+\frac{1}{2}9x_2^2+1=0\end{cases}\Rightarrow 27x_2^2-18x_2^2-4=0$$

Câu 6. Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và $g\left(x\right)=mx^3+nx^2-x$, với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f\left(x\right)-g\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'\left(x\right)$ và $y=g'\left(x\right)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{71}{9}$. **C.** $\frac{71}{6}$. **D.** $\frac{64}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+3$ và $g'(x)=3mx^2+2nx-1$.

Suy ra: $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $-1,\ 2$ và 3.

Nên $f'(x)-g'(x)=4a(x+1)(x-2)(x-3)\ \ (*)$.

Thay $x=0$ vào hai vế của $(*)$ ta được: $f'(0)-g'(0)=4 \Leftrightarrow a=\frac{1}{6}$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn: $S=\int_{-1}^{3}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|dx=\frac{71}{9}$.

Câu 7. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$ với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,2,3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{71}{12}$. **D.** $\frac{71}{6}$.

Lời giải

Vì hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,2,3$ nên hàm số $y'=f'(x)-g'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+3$ có ba nghiệm là $-1,2,3$. Suy ra, tồn tại số thực k để $y'=k(x+1)(x-2)(x-3)$.

Ta có $f'(0)=3$ nên $k=\frac{1}{2}$. Do đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng: $\int_{-1}^{3}|y'(x)|dx=\int_{-1}^{3}\left|\frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-3)\right|dx=\frac{71}{12}$.

Câu 8. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$ với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,\ 2$ và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{71}{9}$. **C.** $\frac{71}{6}$. **D.** $\frac{64}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=f(x)-g(x)=ax^4+(b-m)x^3+(c-n)x^2+4x$

$\Rightarrow y'=f'(x)-g'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+4$

Vì hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,\ 2$ và 3 nên

$y'=f'(x)-g'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+4=4a(x+1)(x-2)(x-3)$

Đồng nhất hệ số, ta suy ra: $4=24a\Leftrightarrow a=\frac{1}{6}$

Do đó: $f'(x)-g'(x)=\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ là:

$$S=\int_{-1}^{3}\left|f'(x)-g'(x)\right|dx=\int_{-1}^{3}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|dx=\frac{71}{9}.$$

Câu 9. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$; với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có 3 điểm cực trị là – 1, 2, 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{71}{6}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{71}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f(x)-g(x)=ax^4+(b-m)x^3+(c-n)x^2+3x$

$\Rightarrow h'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+3\ (1)$.

Vì hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị là – 1, 2, 3 nên phương trình $h'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là – 1, 2, 3.

Suy ra $h'(x)$ có dạng $h'(x)=A(x+1)(x-2)(x-3)\ (2)$.

Từ (1) ta có $x=0\Rightarrow h'(0)=3$.

Thế vào $(2)\Rightarrow h'(0)=A(1)(-2)(-3)=3\Rightarrow A=\frac{1}{2}\Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-3)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f'(x)$ và $g'(x)$ là

$$S=\int_{-1}^{3}\left|f'(x)-g'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{3}\left|h'(x)\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\left|(x+1)(x-2)(x-3)\right|\mathrm{d}x=\frac{71}{12}.$$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $\ln 10$. **D.** $\ln 7$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=x^3+(a+3)x^2+(2a+b+6)x+(2a+b+c)$

$g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=3x^2+2ax+b+6x+2a+6$

$=3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)$.

Vì $y=g(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2 nên $g'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với $g(x_1)=-5,g(x_2)=2$.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1 \Leftrightarrow \frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}=0 \Leftrightarrow \frac{3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)}{g(x)+6}=0 \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)+6}=0.$$

Phương trình này cũng có hai nghệm phân biệt x_1, x_2

Như vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln|2+6|-\ln|-5+6|\right|=3\ln 2.$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 2$. **C.** $\ln 15$. **D.** $3\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a$, $f'''(x)=6$.

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x) \Rightarrow g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=f'(x)+f''(x)+6$.

Do $g(x)$ có hai cực trị là -5 và 3 nên $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$ với $g(x_1)=-5$, $g(x_2)=3$.

Ta có: $\frac{f(x)}{g(x)+6}=1 \Leftrightarrow \frac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)dx\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}dx\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{g(x)+6}d\left(g(x)+6\right)\right|=\left|\left(\ln\left|g(x)+6\right|\right)\Big|_{x_1}^{x_2}\right|$$

$$=\left|\ln\left|g(x_2)+6\right|-\ln\left|g(x_1)+6\right|\right|=\left|\ln 1-\ln 9\right|=2\ln 3.$$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$f'(x)=3x^2+2ax+b$;

$f''(x)=6x+2a$;

$f'''(x)=6$;

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)\Rightarrow g'(x)=f'(x)+f''(x)+6$.

Vì $g(x)$ có hai giá trị cực trị là là -3 và 6 nên không giảm tổng quát, $g(x)$ có hai điểm cực trị là x_1,x_2 và $g(x_1)=-3$, $g(x_1)=6$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là $\dfrac{f(x)}{g(x)+6}=1$

$\Leftrightarrow f(x)=g(x)+6$

$\Leftrightarrow f(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+6$

$\Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+6=0$

$\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=x_1\\ x=x_2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là:

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-g'(x)}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln 12-\ln 3\right|=2\ln 2.$$

Câu 13. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$, với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. **B.** $\dfrac{71}{9}$. **C.** $\dfrac{71}{6}$. **D.** $\dfrac{64}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+3$ và $g'(x)=3mx^2+2nx-1$.

Suy ra: $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là -1, 2 và 3.

Nên $f'(x)-g'(x)=4a(x+1)(x-2)(x-3)$ $(*)$.

Thay $x=0$ vào hai vế của $(*)$ ta được: $f'(0)-g'(0)=4\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{6}$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn: $S=\displaystyle\int_{-1}^{3}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|\mathrm{d}x=\frac{71}{9}$.

Câu 14. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$ với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,2,3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{71}{12}$. **D.** $\frac{71}{6}$.

Lời giải

Vì hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,2,3$ nên hàm số $y'=f'(x)-g'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+3$ có ba nghiệm là $-1,2,3$. Suy ra, tồn tại số thực k để $y'=k(x+1)(x-2)(x-3)$.

Ta có $f'(0)=3$ nên $k=\frac{1}{2}$. Do đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng: $\int_{-1}^{3}|y'(x)|dx=\int_{-1}^{3}\left|\frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-3)\right|dx=\frac{71}{12}$.

Câu 15. **[Mức độ 3]** Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$ với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{71}{9}$. **C.** $\frac{71}{6}$. **D.** $\frac{64}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=f(x)-g(x)=ax^4+(b-m)x^3+(c-n)x^2+4x$

$\Rightarrow y'=f'(x)-g'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+4$

Vì hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3 nên

$y'=f'(x)-g'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+4=4a(x+1)(x-2)(x-3)$

Đồng nhất hệ số, ta suy ra: $4=24a\Leftrightarrow a=\frac{1}{6}$

Do đó: $f'(x)-g'(x)=\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ là:

$S=\int_{-1}^{3}|f'(x)-g'(x)|dx=\int_{-1}^{3}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|dx=\frac{71}{9}$.

Câu 16. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$; với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có 3 điểm cực trị là – 1, 2, 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{71}{6}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{71}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f(x)-g(x)=ax^4+(b-m)x^3+(c-n)x^2+3x$

$\Rightarrow h'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+3$ (1).

Vì hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị là – 1, 2, 3 nên phương trình $h'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là – 1, 2, 3.

Suy ra $h'(x)$ có dạng $h'(x)=A(x+1)(x-2)(x-3)$ (2).

Từ (1) ta có $x=0\Rightarrow h'(0)=3$.

Thế vào $(2)\Rightarrow h'(0)=A(1)(-2)(-3)=3\Rightarrow A=\frac{1}{2}\Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-3)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f'(x)$ và $g'(x)$ là

$$S=\int_{-1}^{3}\left|f'(x)-g'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{3}\left|h'(x)\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\left|(x+1)(x-2)(x-3)\right|\mathrm{d}x=\frac{71}{12}.$$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $\ln 10$. **D.** $\ln 7$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=x^3+(a+3)x^2+(2a+b+6)x+(2a+b+c)$

$g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=3x^2+2ax+b+6x+2a+6$

$=3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)$.

Vì $y=g(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2 nên $g'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với $g(x_1)=-5,g(x_2)=2$.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\frac{3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\frac{g'(x)}{g(x)+6}=0.$$

Phương trình này cũng có hai nghệm phân biệt x_1,x_2

Như vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln|2+6|-\ln|-5+6|\right|=3\ln 2.$$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 2$. **C.** $\ln 15$. **D.** $3\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a$, $f'''(x)=6$.

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x) \Rightarrow g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=f'(x)+f''(x)+6$.

Do $g(x)$ có hai cực trị là -5 và 3 nên $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$ với $g(x_1)=-5$, $g(x_2)=3$.

Ta có: $\dfrac{f(x)}{g(x)+6}=1 \Leftrightarrow \dfrac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{g(x)+6}\mathrm{d}\left(g(x)+6\right)\right|=\left|\left(\ln\left|g(x)+6\right|\right)\Big|_{x_1}^{x_2}\right|$$

$$=\left|\ln\left|g(x_2)+6\right|-\ln\left|g(x_1)+6\right|\right|=\left|\ln 1-\ln 9\right|=2\ln 3.$$

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$f'(x)=3x^2+2ax+b$;

$f''(x)=6x+2a$;

$f'''(x)=6$;

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x) \Rightarrow g'(x)=f'(x)+f''(x)+6$.

Vì $g(x)$ có hai giá trị cực trị là là -3 và 6 nên không giảm tổng quát, $g(x)$ có hai điểm cực trị là x_1,x_2 và $g(x_1)=-3$, $g(x_1)=6$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là $\dfrac{f(x)}{g(x)+6}=1$

$\Leftrightarrow f(x)=g(x)+6$

$\Leftrightarrow f(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+6$

$\Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+6=0$

$\Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là:

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-g'(x)}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln 12-\ln 3\right|=2\ln 2.$$

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 2$. **B.** $\ln 6$. **C.** $3\ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=x^3+(a+3)x^2+(2a+b+6)x+(2a+b+c)$

$g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=3x^2+2ax+b+6x+2a+6$

$=3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)$.

Do $g(x)$ có hai cực trị là -5 và 3 nên $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$ với $g(x_1)=-4$, $g(x_2)=2$.

Phương trình hoành độ giao điểm

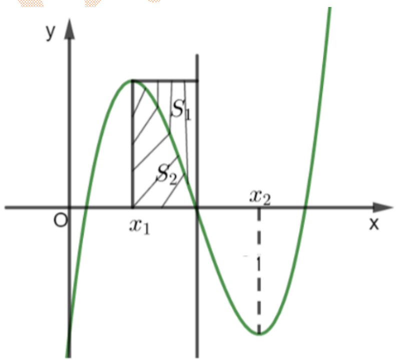
$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\frac{3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\frac{g'(x)}{g(x)+6}=0$$

Phương trình này cũng có hai nghệm phân biệt x_1,x_2

Như vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln\left|2+6\right|-\ln\left|-4+6\right|\right|=2\ln 2.$$

Câu 21. **(ĐTK2021)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng:

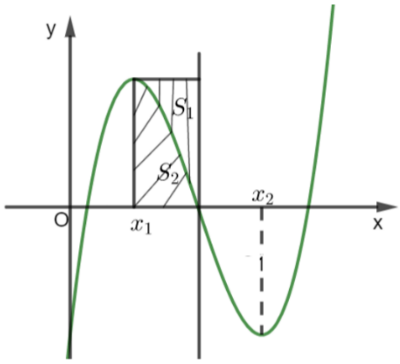


A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Tịnh tiến điểm uốn về gốc tọa độ, ta được hình vẽ bên dưới.

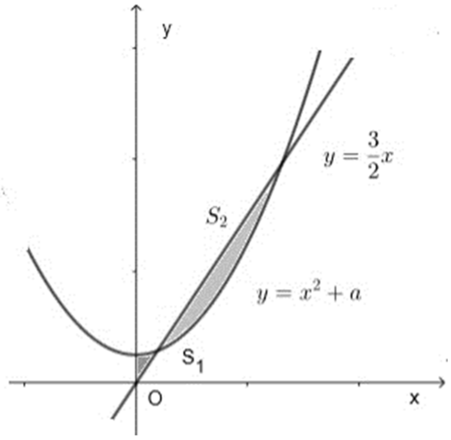


Khi đó, do $f(x)$ là hàm bậc ba, nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng nên $x_1 = -1; x_2 = 1$.

Chọn $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x$.

Nên $S_2 = \int_{-1}^{0}(x^3 - 3x)dx = \frac{5}{4}$; $S_1 + S_2 = 2 \Rightarrow S_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$.

Câu 22. **(Mã 104 - 2019)** Cho đường thẳng $y=\frac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(0;\frac{2}{5}\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)$ **C.** $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$ **D.** $\left(\frac{9}{20};\frac{1}{2}\right)$

Lời giải

Chọn C

Giải toán:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+a=\frac{3}{2}x\Leftrightarrow 2x^2-3x+2a=0$

Để phương trình có 2 nghiệm dương thì $\begin{cases}a>0\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ a<\frac{9}{16}\end{cases}$.

Gọi hai nghiệm đó là $0<x_1<x_2$ thì $x_2=\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}$.

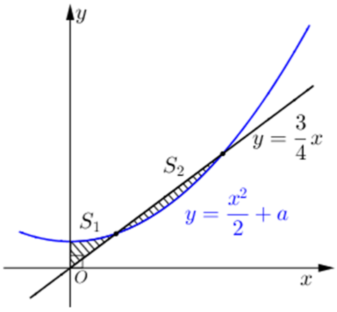
Để $S_1=S_2$ khi và chỉ khi $\int\limits_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)dx=0$

Ta có: $\int\limits_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\frac{x_2^3}{3}+ax_2-\frac{3}{4}x_2^2=0$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}\right)^3}{3}+a\cdot\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}\right)^2=0$$

Giải nhanh bằng máy tính cho kết quả $x=0,421875$ thuộc khoảng $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$.

Câu 23. **(Mã 102 - 2019)** Cho đường thẳng $y=\frac{3}{4}x$ và parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{7}{32};\frac{1}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{32}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{16}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x+4a=0$.

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0<x_1<x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{3}{2} & (*) \\ x_1x_2=2a & (**) \end{cases}$.

$S_1-S_2=0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1}\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a\right|dx+\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a\right|dx=0 \Leftrightarrow \int_0^{x_2}\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a\right|dx=0$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{8}x^2+ax\right|\Bigg|_0^{x_2}=0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{6}x_2^3-\frac{3}{8}x_2^2+ax_2\right|=0 \Rightarrow a=-\frac{x_2^2}{6}+\frac{3x_2}{8}$ $(***)$.

Từ $(*)\Rightarrow x_1=\frac{3}{2}-x_2$, thay vào $(**)\Rightarrow\left(\frac{3}{2}-x_2\right)x_2=-\frac{x_2^2}{3}+\frac{3x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{3}-\frac{3x_2}{4}=0 \Rightarrow x_2=\frac{9}{8}$

$\xrightarrow{(***)} a=\frac{27}{128}$. Vậy $a\in\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right)$.

Câu 24. Cho parabol $(P_1): y=-x^2+2x+3$ cắt trục hoành tại hai điểm A,B và đường thẳng $d: y=a$ $(0<a<4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A,B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y=a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d. Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1=S_2$, tính $T=a^3-8a^2+48a$.

A. $T=99$. **B.** $T=64$. **C.** $T=32$. **D.** $T=72$.

Lời giải

Để việc tính toán trở nên đơn giản, ta tịnh tiến hai parabol sang trái một đơn vị.

Khi đó, phương trình các parabol mới là $(P_1): y=-x^2+4$, $(P_2): y=-\frac{a}{4}x^2+a$.

Gọi A,B là các giao điểm của (P_1) và trục $Ox \Rightarrow A(-2;0), B(2;0) \Rightarrow AB=4$.

Gọi A,B là giao điểm của (P_1) và đường thẳng $d \Rightarrow M\left(-\sqrt{4-a};a\right), N\left(\sqrt{4-a};a\right)$.

Ta có $S_1 = 2\int\limits_a^4 \sqrt{4-y}.dy = -\frac{4}{3}\left((4-y)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_a^4 = \frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a}$

$S_2 = 2\int\limits_a^2 \left(-\frac{a}{4}x^2 + a\right).dx = 2\left(-\frac{ax^3}{12} + ax\right)\Big|_0^2 = \frac{8a}{3}$.

Theo giả thiết $S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a} = \frac{8a}{3} \Leftrightarrow (4-a)^3 = 4a^2 \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64$

Vậy $T = 64$.

Câu 25. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2$ $(m > 0)$. Tìm giá trị của m để $S = 3$.

A. $m = 1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 4$

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} my = x^2 & (1) \\ mx = y^2 & (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) ta được: $mx = \left(\frac{x^2}{m}\right)^2 \Leftrightarrow m^3x - x^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m > 0 \end{array}\right.$

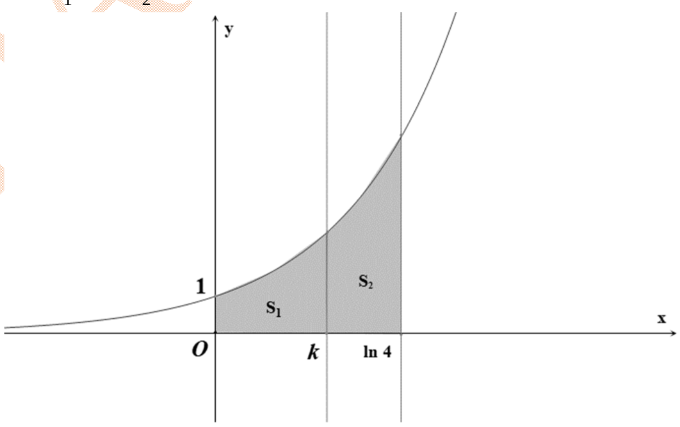
Vì $y = \frac{x^2}{m} > 0$ nên $mx = y^2 \xleftrightarrow{y>0} y = \sqrt{mx}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int\limits_0^m \left|\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m}\right| dx = \left|\int\limits_0^m \left(\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m}\right) dx\right|$

$= \left|\left(\frac{2\sqrt{m}}{3}.x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3m}\right)\Big|_0^m\right| = \left|\frac{1}{3}m^2\right| = \frac{1}{3}m^2$

Yêu cầu bài toán $S = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}m^2 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 9 \xleftrightarrow{m>0} m = 3$

Câu 26. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ $(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k=\frac{4}{3}\ln 2$. **B.** $k=\ln\frac{8}{3}$. **C.** $k=\ln 2$. **D.** $k=\ln 3$.

Lời giải

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$ là

$$S=\int_0^{\ln 4} e^x dx = e^x\Big|_0^{\ln 4} = e^{\ln 4}-e^0=4-1=3\,(\text{đvdt}).$$

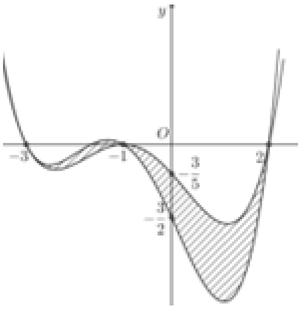
Ta có $S=S_1+S_2=S_1+\frac{1}{2}S_1=\frac{3}{2}S_1$. Suy ra $S_1=\frac{2S}{3}=\frac{2.3}{3}=2$ (đvdt).

Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=k$ nên

$$2=S_1=\int_0^k e^x dx = e^x\Big|_0^k = e^k-e^0=e^k-1.$$

Do đó $e^k=3 \Leftrightarrow k=\ln 3$.

Câu 27. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Biết rằng đồ thị cảu hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;-1;2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?



A. 3,11 **B.** 2,45 **C.** 3,21 **D.** 2,95

Lời giải

Chọn A

$f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-2)=(ax+3a)(x^2-x-2)=ax^3-ax^2-2ax+3ax^2-3ax-6a$

$=ax^3+2ax^2-5ax-6a$

$f(0)-g(0)=-6a$, quan sát hình vẽ ta có $f(0)-g(0)=-\frac{3}{5}+\frac{3}{2}=\frac{9}{10}$

Nên $-6a=\frac{9}{10}\Rightarrow a=\frac{-3}{20}$ $S=\int_{-3}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-3}^{2}\left|\frac{-3}{20}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx=\frac{253}{80}=3.1625$

Câu 28. Cho hàm số $y=x^4-6x^2+m$ có đồ thị (C_m). Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m=\frac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên, $b>0$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $S=a+b$ là:

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-6x^2+m=0$ (1).

Đặt $t=x^2$ $(t\geq 0)$ (1) trở thành $t^2-6t+m=0$ (2).

(C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt hay phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (-3)^2 - m > 0 \\ P = m > 0 \\ S = 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 9\ (*)$.

Gọi $t_1,\ t_2\ (0 < t_1 < t_2)$ là hai nghiệm của phương trình (2). Lúc đó phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt theo thứ tự tăng dần là: $x_1 = -\sqrt{t_2}$; $x_2 = -\sqrt{t_1}$; $x_3 = \sqrt{t_1}$; $x_4 = \sqrt{t_2}$.

Do tính đối xứng của đồ thị (C_m) nên có $\int\limits_0^{x_3} (x^4 - 6x^2 + m)\mathrm{d}x = \int\limits_{x_3}^{x_4} (-x^4 + 6x^2 - m)\mathrm{d}x$

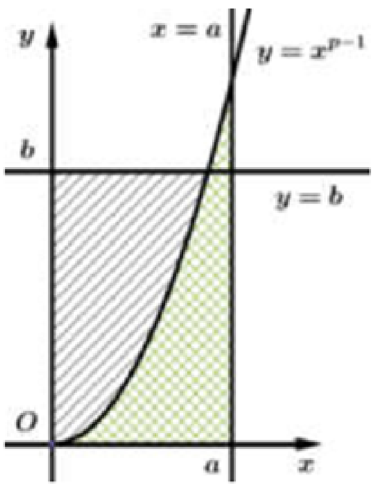
$\Rightarrow \dfrac{x_4^5}{5} - 2x_4^3 + mx_4 = 0 \Leftrightarrow x_4^5 - 10x_4^3 + 5mx_4 = 0$.

Từ đó có x_4 là nghiệm của hệ phương trình: $\Leftrightarrow \begin{cases} x_4^4 - 6x_4^2 + m = 0 & (3) \\ x_4^4 - 10x_4^2 + 5m = 0 & (4) \end{cases}$

Lấy $(3)-(4) \Rightarrow x_4^2 = m$, thay $x_4^2 = m$ vào (3) có: $m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m = 0 \vee m = 5$.

Đối chiếu điều kiện $(*)$ ta có $m = 5 \Rightarrow a = 5$ và $b = 1$. Vậy $S = 6$.

Câu 29. Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện: $p > 1,\ q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b. Xét hàm số: $y = x^{p-1}\ (x > 0)$ có đồ thị là (C). Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a$, $y = b$. Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



A. $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \le ab$ **B.** $\dfrac{a^{p-1}}{p-1} + \dfrac{b^{q-1}}{q-1} \ge ab$. **C.** $\dfrac{a^{p+1}}{p+1} + \dfrac{b^{q+1}}{q+1} \le ab$. **D.** $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \ge ab$.

Lời giải

Ta có: $S \le S_1 + S_2$.

$$S_1=\int_0^a\left(x^{p-1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^p}{p}\right)\Bigg|_0^a=\frac{a^p}{p};\ S_2=\int_0^b\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1}\right)\Bigg|_0^b=\left(\frac{y^q}{q}\right)\Bigg|_0^b=\frac{b^q}{q}.$$

Vì: $\dfrac{1}{p-1}+1=\dfrac{p}{p-1}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{p}}=\dfrac{1}{\frac{1}{q}}=q$. Vậy $\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}\ge ab$.

Câu 30. Cho parabol $(P): y=x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB=2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d. Tìm giá trị lớn nhất S_{max} của S.

A. $S_{max}=\dfrac{2018^3+1}{6}$. **B.** $S_{max}=\dfrac{2018^3}{3}$. **C.** $S_{max}=\dfrac{2018^3-1}{6}$. **D.** $S_{max}=\dfrac{2018^3}{3}$.

Lời giải

Giả sử $A(a;a^2);\ B(b;b^2)(b>a)$ sao cho $AB=2018$.

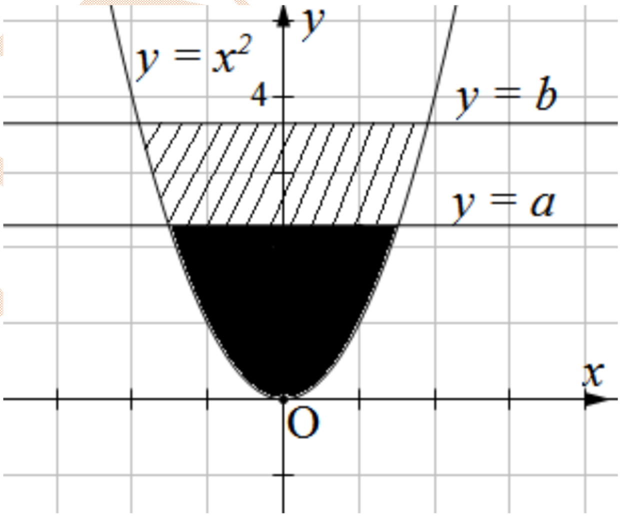
Phương trình đường thẳng d là: $y=(a+b)x-ab$. Khi đó

$$S=\int_a^b\left|(a+b)x-ab-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_a^b\left((a+b)x-ab-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(b-a)^3.$$

Vì $AB=2018\Leftrightarrow(b-a)^2+\left(b^2-a^2\right)^2=2018^2\Leftrightarrow(b-a)^2\left(1+(b+a)^2\right)=2018^2$.

$\Rightarrow(b-a)^2\le 2018^2\Rightarrow|b-a|=b-a\le 2018\Rightarrow S\le\dfrac{2018^3}{6}$. Vậy $S_{\max}=\dfrac{2018^3}{6}$ khi $a=-1009$ và $b=1009$.

Câu 31. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và hai đường thẳng $y=a$, $y=b$ $(0<a<b)$ (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1=S_2$?



A. $b=\sqrt[3]{4}a$. **B.** $b=\sqrt[3]{2}a$. **C.** $b=\sqrt[3]{3}a$. **D.** $b=\sqrt[3]{6}a$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = b$ là

$x^2 = b \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{b}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = a$ là

$x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = b$ là

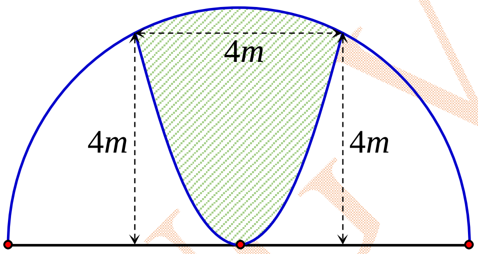
$$S = 2\int_0^{\sqrt{b}} (b - x^2)\,dx = 2\left(bx - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{b}} = 2\left(b\sqrt{b} - \frac{b\sqrt{b}}{3}\right) = \frac{4b\sqrt{b}}{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = a$ (phần tô màu đen)

là $S_1 = 2\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\,dx = 2\left(ax - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a}} = 2\left(a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3}\right) = \frac{4a\sqrt{a}}{3}$.

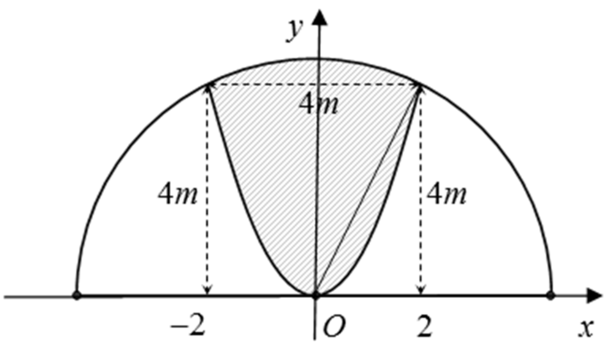
Do đó $S = 2S_1 \Leftrightarrow \frac{4b\sqrt{b}}{3} = 2.\frac{4a\sqrt{a}}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{b}\right)^3 = 2\left(\sqrt{a}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt{b} = \sqrt[3]{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{4}a$.

Câu 32. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng $4(m)$. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m^2 và 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 3.738.574 **(đồng).** **B.** 1.948.000 (đồng). **C.** 3.926.990 (đồng). **D.** 4.115.408 (đồng).

Lời giải



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, ta có bán kính của đường tròn là $R = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

Phương trình của nửa đường tròn (C) là: $x^2 + y^2 = 20, y \ge 0 \Rightarrow y = \sqrt{20 - x^2}$.

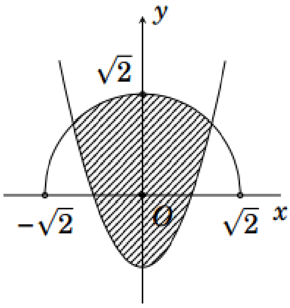
Parabol (P) có đỉnh $O(0;0)$ và đi qua điểm $(2;4)$ nên có phương trình: $y=x^2$.

Diện tích phần tô màu là: $S_1=\int_{-2}^{2}\left[\sqrt{20-x^2}-x^2\right]dx\approx 11,94\ (m^2)$.

Diện tích phần không tô màu là: $S_2=\frac{1}{2}.\pi.\left(2\sqrt{5}\right)^2-S_1\approx 10\pi-11,94\ (m^2)$.

Số tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó là:
$150000.11,94+100000.(10\pi-11,94)\approx 3.738.593$.

Câu 33. Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu (phần được gạch chéo trên hình vẽ). Biết rằng phần gạch chéo là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=2x^2-1$ và nửa trên của đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}(m)$ Tính số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu biết rằng để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng.



A. $\frac{3\pi-2}{6}\times 250000$. **B.** $\frac{3\pi+10}{6}\times 250000$. **C.** $\frac{3\pi+10}{3}\times 250000$. **D.** $\frac{3\pi+2}{6}\times 250000$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình đường tròn tâm gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}(m)$ $x^2+y^2=2$.

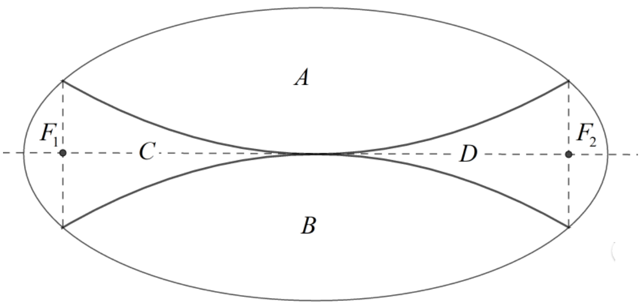
Tọa độ giao điểm của Parabol và đường tròn là nghiệm hệ $\begin{cases} y=\sqrt{2-x^2} \\ y=2x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=1 \\ x=1, y=1 \end{array}\right.$

Diện tích vườn hoa là $S=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1\right)dx=\frac{3\pi+10}{6}$.

số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu là $\frac{3\pi+10}{6}\times 250000$.

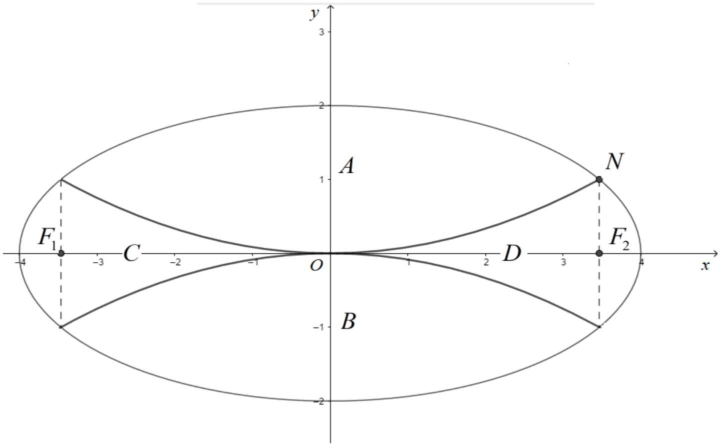
Câu 34. Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là 8 m và 4 m, F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 250.000 đ và 150.000 đ. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).

A. 5.676.000 đ. **B.** 4.766.000 đ. **C.** 4.656.000 đ. **D.** 5.455.000 đ.



Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Do elip có độ dài trục lớn $2a=8\Leftrightarrow a=4$, độ dài trục nhỏ $2b=4\Leftrightarrow b=2$.

Diện tích của (E) là: $S_{(E)}=\pi ab=8\pi$.

Phương trình chính tắc (E) là: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Suy ra $y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$.

Ta có $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{3}\Rightarrow F_2\left(2\sqrt{3};\ 0\right)$.

Do N và F_2 có cùng hoành độ $\Rightarrow N\left(2\sqrt{3};\ 1\right)$.

Gọi $(P): y=kx^2$ là parabol nằm ở phía trên trục Ox.

Do $N\in(P)$ ta có $1=k\left(2\sqrt{3}\right)^2\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{12}$. Suy ra $(P): y=\dfrac{1}{12}x^2$.

Diện tích phần A là $S_A=\displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}-\frac{1}{12}x^2\right)dx=2\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}-\frac{1}{12}x^2\right)dx$

$=\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}\,dx-\frac{1}{6}\int_0^{2\sqrt{3}}x^2dx$.

* Xét $I_1=\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}\,dx$. Đặt $x=4\sin t\Rightarrow dx=4\cos t\,dt$.

Đổi cận:

x	0	$2\sqrt{3}$
t	0	$\dfrac{\pi}{3}$

Khi đó $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t\mathrm{d}t \; =16\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\mathrm{d}t \; =8\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t \; =8\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=8\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

* Ta có $I_2=\frac{1}{6}\int_0^{2\sqrt{3}}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{18}x^3\Big|_0^{2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra: $S_A=I_1-I_2=\frac{8\pi+2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow S_A+S_B=2S_A=\frac{16\pi+4\sqrt{3}}{3}$.

Tổng diện tích phần C , D là: $S_C+S_D=S_{(E)}-\left(S_A+S_B\right)=\frac{8\pi-4\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó tổng số tiền để hoàn thành vườn hoa trên là: $\frac{16\pi+4\sqrt{3}}{3}.250000+\frac{8\pi-4\sqrt{3}}{3}.150000\approx 5676000$ đ.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2022

Câu 46. (ĐTK BGD – 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4;-3;3)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Đường thẳng đi qua A, cắt trục Oz và song song với (P) có phương trình là:

A. $\frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-3}{-7}$.
B. $\frac{x+4}{-4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-3}{1}$.
C. $\frac{x+4}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-3}{1}$.
D. $\frac{x+8}{4}=\frac{y+6}{3}=\frac{z-10}{-7}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta \cap Oz = B \Rightarrow B(0;0;t)$

$\overrightarrow{AB}=(4;3;t-3)$

Mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{n_P}(1;1;1)$ là vec tơ pháp tuyến.

Do $d//(P)$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}=0 \Leftrightarrow 4+3+t-3=0 \Leftrightarrow t=-4 \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(4;3;-7)$.

Vậy đường thẳng cần tìm $d: \frac{x+4}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-3}{-7}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$
B. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+3t \end{cases}$
C. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$
D. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+2t \end{cases}$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$
B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{1}$
C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$
D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$

Câu 3. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-4t \\ z=-3t \end{cases}$
B. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+4t \\ z=2+t \end{cases}$
C. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-4t \\ z=2-3t \end{cases}$
D. $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2+6t \\ z=2+t \end{cases}$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{-2}$, $d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Phương trình đường thẳng qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 là

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{3}$. **B.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{4}$.

C. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{3}$. **D.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-1}$.

Câu 5. Cho hai đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$ và $(d_2):\frac{x}{1}=\frac{y-7}{-3}=\frac{z}{-1}$. Đường thẳng (Δ) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2). Phương trình nào sau đâu là phương trình của (Δ)

A. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-2}$. **B.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{-2}$. **D.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;1);B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-11=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+b+c=5$. **B.** $a+b+c=15$. **C.** $a+b+c=-5$. **D.** $a+b+c=-15$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x-3y+2z-1=0$, $(Q):x-z+2=0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là

A. $x+y+z-3=0$ **B.** $x+y+z+3=0$ **C.** $-2x+z+6=0$ **D.** $-2x+z-6=0$

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;0)$, $C(-2;0;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A, trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $4x-2y-z+4=0$. **B.** $4x-2y+z+4=0$. **C.** $4x+2y+z-4=0$. **D.** $4x+2y-z+4=0$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M,N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM=2ON$

A. $(P):3x+y+2z-6=0$ **B.** $(P):2x+3y-z-4=0$

C. $(P):2x+y+z-4=0$ **D.** $(P):x+2y-z-2=0$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x+2y-2z+1=0$, $(Q):x+my+(m-1)z+2019=0$. Khi hai mặt phẳng (P), (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì mặt phẳng (Q) đi qua điểm M nào sau đây?

A. $M(2019;-1;1)$ **B.** $M(0;-2019;0)$ **C.** $M(-2019;1;1)$ **D.** $M(0;0;-2019)$

Câu 11. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2t\\z=t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+3t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2t\\z=3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+2t\end{cases}$

Câu 12. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{1}$; $d_2:\frac{x-5}{-3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$ **B.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{3}$

C. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{3}$ **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$

Câu 13. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là.

A. $\begin{cases}x=2t\\y=-3+4t\\z=3t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+t\\z=3+3t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+3t\\z=3+2t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=2t\\y=-3+3t\\z=2t\end{cases}$

Câu 14. **(Mã 103 2018)** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+1=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=-1+t\\y=-4t\\z=-3t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2+4t\\z=2+t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2-4t\\z=2-3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=3+2t\\y=-2+6t\\z=2+t\end{cases}$

Câu 15. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):x-2y-z+3=0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-3\\y=-t\\z=2t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-1}$, $d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Phương trình đường thẳng d đi qua A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt thẳng d_2.

A. $\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{2}$. **B.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{3}$.

C. $\frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-3}{3}$. **D.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2t\\z=t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+3t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2t\\z=3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+2t\end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Gọi $M=\Delta\cap Ox$. Suy ra $M(a;0;0)$. $\overrightarrow{AM}=(a-1;-2;-3)$.

d có VTCP: $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-2)$.Vì $\Delta\perp d$ nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 2a-2-2+6=0\Leftrightarrow a=-1$.

Vậy Δ qua $M(-1;0;0)$ và có VTCP $\overrightarrow{AM}=(-2;-2;-3)=-(2;2;3)$

Nên Δ có phương trình $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2t\\z=3t\end{cases}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$ **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{1}$ **C.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$ **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$

Lời giải

Chọn D

Cách 1

Đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;2)$

Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d, nên nhận véc tơ chỉ phương của d là vecto pháp tuyến $(P):1(x-1)+y+2(z-2)=0\Leftrightarrow x+y+2z-5=0$

Gọi B là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng $d\Rightarrow B(1+t;t;-1+2t)$

Vì $B\in(P)\Leftrightarrow(1+t)+t+2(-1+2t)-5=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow B(2;1;1)$

Ta có đường thẳng Δ đi qua A và nhận vecto $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ là véc tơ chỉ phương có dạng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

Cách 2

Gọi $d\cap\Delta=B\Rightarrow B(1+t;t;-1+2t)$

$\overrightarrow{AB}=(t;t;-3+2t)$, Đường thẳng d có VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(1;1;2)$

Vì $d\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_d}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow t+t+2(-3+2t)=0\Leftrightarrow t=1$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$.Ta có đường thẳng Δ đi qua $A(1;0;2)$ và nhận véc tơ $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ là véc tơ chỉ phương có dạng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Câu 3. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+1=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=-1+t\\y=-4t\\z=-3t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2+4t\\z=2+t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2-4t\\z=2-3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=3+2t\\y=-2+6t\\z=2+t\end{cases}$

Lời giải

Chọn C

$d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=-t\\z=-2+2t\end{cases}$.

Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d . $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}\right]=(-1;4;3)$

Gọi A là giao điểm của d và (P). Tọa độ A là nghiệm của phương trình:

$(-1+2t)+(-t)-(-2+2t)+1=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow A(3;-2;2)$

Phương trình Δ qua $A(3;-2;2)$ có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;4;3)$ có dạng: $\begin{cases}x=3+t\\y=-2-4t\\z=2-3t\end{cases}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$, $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Phương trình đường thẳng qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 là

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{4}$.

C. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là đường thẳng qua A và d cắt d_2 tại K. Khi đó $K(2+t;-1-t;1+t)$.

Ta có $\overrightarrow{AK}=(1+t;-t;t-2)$.

Đường $AK\perp d_1\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_1}=0$, với $\vec{u}_1=(1;4;-2)$ là một vectơ chỉ phương của d_1.

Do đó $1+t-4t-2t+4=0\Leftrightarrow t=1$, suy ra $\overrightarrow{AK}=(2;-1;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-1}$.

Câu 5. Cho hai đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$ và $(d_2):\frac{x}{1}=\frac{y-7}{-3}=\frac{z}{-1}$. Đường thẳng (Δ) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2). Phương trình nào sau đâu là phương trình của (Δ)

A. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-2}$. **B.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{-2}$. **D.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.

Lời giải

Chọn A

Lấy điểm $M\in(d_1)$: $M(2+t_1;1+t_1;1+t_1)$; $N\in(d_2)$: $N(t_2;7-3t_2;-t_2)$

$\overrightarrow{MN}=(t_2-t_1-2;-3t_2-t_1+6;-t_2-t_1-1)$

Đường thẳng MN là đường vuông góc chung $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_2+t_1=1\\11t_2+3t_1=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_2=2\\t_1=-1\end{cases}$

Suy ra $M(1;0;0),N(2;1;-2)$ và $\overrightarrow{MN}(1;1;-2)$.

Phương trình đường thẳng (Δ) đi qua M,N là: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-2}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;1);B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-11=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+b+c=5$. **B.** $a+b+c=15$. **C.** $a+b+c=-5$. **D.** $a+b+c=-15$.

Lời giải

Chọn A

Vì (Q) vuông góc với (P) nên (Q) nhận vtpt $\vec{n}=(1;-3;2)$ của (P) làm vtcp

Mặt khác (Q) đi qua A và B nên (Q) nhận $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$ làm vtcp

(Q) nhận $\overrightarrow{n_Q}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(0;8;12)$ làm vtpt

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q):0(x+1)+8(y-1)+12(z-3)=0$, hay $(Q):2y+3z-11=0$

Vậy $a+b+c=5$. Chọn A

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x-3y+2z-1=0$, $(Q):x-z+2=0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là

A. $x+y+z-3=0$ **B.** $x+y+z+3=0$ **C.** $-2x+z+6=0$ **D.** $-2x+z-6=0$

Lời giải

Chọn A

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$, (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;0;-1)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) nên (α) có một vectơ pháp tuyến là

$\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(3;3;3)=3(1;1;1)$.

Vì mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 nên (α) đi qua điểm $M(3;0;0)$.

Vậy (α) đi qua điểm $M(3;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;1)$

nên (α) có phương trình $x+y+z-3=0$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;0)$, $C(-2;0;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A, trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $4x-2y-z+4=0$. **B.** $4x-2y+z+4=0$. **C.** $4x+2y+z-4=0$. **D.** $4x+2y-z+4=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;-1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;6;-8)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x+6y-8z+10=0$.

Phương trình mặt phẳng qua B và vuông góc với AC là: $2x+y+z-2=0$.

Phương trình mặt phẳng qua C và vuông góc với AB là: $2x-3y-2z+6=0$.

Giao điểm của ba mặt phẳng trên là trực tâm H của tam giác ABC nên $H\left(-\frac{22}{101};\frac{70}{101};\frac{176}{101}\right)$.

Mặt phẳng (P) đi qua A, H nên $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{22}{101};-\frac{31}{101};-\frac{26}{101}\right)=-\frac{1}{101}(22;31;26)$.

Mặt phẳng $(P)\perp(ABC)$ nên $\overrightarrow{n_P}\perp\vec{n}_{(ABC)}=(1;6;-8)$.

Vậy $\left[\vec{n}_{(ABC)};\vec{u}_{AH}\right]=(404;-202;-101)$ là một vectơ pháp tuyến của (P).

Chọn $\vec{n}_P=(4;-2;-1)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là $4x-2y-z+4=0$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M,N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM=2ON$

A. $(P):3x+y+2z-6=0$

B. $(P):2x+3y-z-4=0$

C. $(P):2x+y+z-4=0$

D. $(P):x+2y-z-2=0$

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Giả sử (P) đi qua 3 điểm $M(a;0;0)$, $N(0;b;0)$, $P(0;0;c)$

Suy ra $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Mà (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ nên ta có hệ $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\\ \frac{2}{b}+\frac{2}{c}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ \frac{2}{b}+\frac{2}{c}=1\end{cases}$

Theo giả thuyết ta có $OM=2ON \Leftrightarrow |a|=2|b| \Leftrightarrow |b|=1$

TH1. $b=1 \Rightarrow c=-2$ suy ra $(P):x+2y-z-2=0$

TH1. $b=-1 \Rightarrow c=-\frac{2}{3}$ suy ra $(P):x-2y+3z-2=0$

Cách 2. Thử đáp án bằng cách tìm giao điểm của đường thẳng với Ox, Oy…

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x+2y-2z+1=0$, $(Q):x+my+(m-1)z+2019=0$. Khi hai mặt phẳng (P), (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì mặt phẳng (Q) đi qua điểm M nào sau đây?

A. $M(2019;-1;1)$ **B.** $M(0;-2019;0)$ **C.** $M(-2019;1;1)$ **D.** $M(0;0;-2019)$

Lời giải

Chọn C

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

Khi đó:

$$\cos\varphi=\frac{|1.1+2.m-2.(m-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}.\sqrt{1^2+m^2+(m-1)^2}}=\frac{1}{3\sqrt{2m^2-2m+2}}$$

$$=\frac{1}{3.\sqrt{2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}}\le\frac{1}{3\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Góc φ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $\cos\varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $m=\frac{1}{2}$.

Khi $m=\frac{1}{2}$ thì $(Q):x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z+2019=0$, đi qua điểm $M(-2019;1;1)$.

Câu 11. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+3t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+2t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Gọi $M=\Delta\cap Ox$. Suy ra $M\left(a;0;0\right)$.

$\overrightarrow{AM}=\left(a-1;-2;-3\right)$.

d có VTCP: $\overrightarrow{u_d}=\left(2;1;-2\right)$.

Vì $\Delta\perp d$ nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 2a-2-2+6=0\Leftrightarrow a=-1$.

Vậy Δ qua $M\left(-1;0;0\right)$ và có VTCP $\overrightarrow{AM}=\left(-2;-2;-3\right)=-\left(2;2;3\right)$ nên Δ có phương trình:

$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$.

Câu 12. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$; $d_2:\dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $\left(P\right):x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với $\left(P\right)$, cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$ **B.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$

C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $d_1:\begin{cases} x=3-t_1 \\ y=3-2t_1 \\ z=-2+t_1 \end{cases}$ và $d_2:\begin{cases} x=5-3t_2 \\ y=-1+2t_2 \\ z=2+t_2 \end{cases}$.

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ.

Giả sử đường thẳng Δ cắt đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại A, B.

Gọi $A\left(3-t_1;3-2t_1;-2+t_1\right)$, $B\left(5-3t_2;-1+2t_2;2+t_2\right)$.

$\overrightarrow{AB}=\left(2-3t_2+t_1;-4+2t_2+2t_1;4+t_2-t_1\right)$.

Vectơ pháp tuyến của $\left(P\right)$ là $\vec{n}=\left(1;2;3\right)$.

Do $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}$ cùng phương nên $\dfrac{2-3t_2+t_1}{1}=\dfrac{-4+2t_2+2t_1}{2}=\dfrac{4+t_2-t_1}{3}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-3t_2+t_1}{1}=\dfrac{-4+2t_2+2t_1}{2} \\ \dfrac{-4+2t_2+2t_1}{2}=\dfrac{4+t_2-t_1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=2 \\ t_2=1 \end{cases}$. Do đó $A(1;-1;0)$, $B(2;-1;3)$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;-1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{n}=(1;2;3)$ là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.

Câu 13. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là.

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=-3+4t \\ z=3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \\ z=3+3t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+3t \\ z=3+2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=2t \\ y=-3+3t \\ z=2t \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ

$d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$ có VTCP $\vec{u}=(1;-2;2)$.

Gọi $M(0;m;0)\in Oy$, ta có $\overrightarrow{AM}=(-2;m-1;-3)$

Do $\Delta\perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow -2-2(m-1)-6=0 \Leftrightarrow m=-3$

Ta có Δ có VTCP $\overrightarrow{AM}=(-2;-4;-3)$ nên có phương trình $\begin{cases} x=2t \\ y=-3+4t \\ z=3t \end{cases}$.

Câu 14. **(Mã 103 2018)** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+1=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-4t \\ z=-3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+4t \\ z=2+t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-4t \\ z=2-3t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2+6t \\ z=2+t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

$d:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-t \\ z=-2+2t \end{cases}$

Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d.

$\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}\right]=(-1;4;3)$

Gọi A là giao điểm của d và (P). Tọa độ A là nghiệm của phương trình:

$(-1+2t)+(-t)-(-2+2t)+1=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow A(3;-2;2)$

Phương trình Δ qua $A(3;-2;2)$ có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;4;3)$ có dạng: $\begin{cases}x=3+t\\y=-2-4t\\z=2-3t\end{cases}$

Câu 15. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x-2y-z+3=0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-3\\y=-t\\z=2t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=1+t\end{cases}$

Gọi $M=\Delta\cap(P)\Rightarrow M\in\Delta\Rightarrow M(t;2t-1;t+1)$

$M\in(P)\Rightarrow t-2(2t-1)-(t+1)+3=0\Leftrightarrow 4-4t=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(1;1;2)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;-2;-1)$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(1;2;1)$

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ

$\Rightarrow$ Đường thẳng d nhận $\dfrac{1}{2}\left[\vec{n},\vec{u}\right]=(0;-1;2)$ làm véc tơ chỉ phương và $M(1;1;2)\in d$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$, $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Phương trình đường thẳng d đi qua A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt thẳng d_2.

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-3}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(2+t;-1-t;1+t)=d\cap d_2$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(1+t;-t;-2+t)$ và $\overrightarrow{u_1}=(3;3;-1)$ là vectơ chỉ phương của d_1

Mặt khác $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_1}=0$ nên $3.(1+t)+3.(-t)-1.(-2+t)=0\Leftrightarrow t=5$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(6;-5;3)$ là 1 vectơ chỉ phương của d .

Vậy phương trình đường thẳng d : $\frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-3}{3}$.

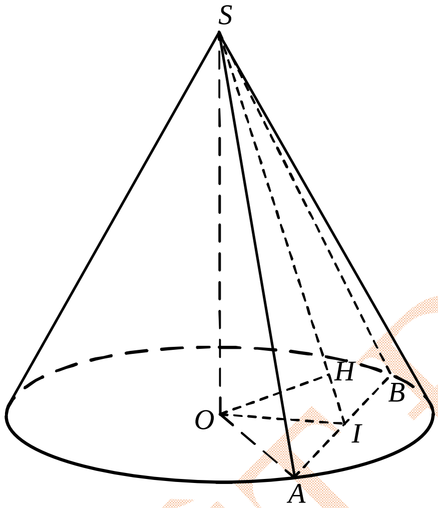
PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2022

Câu 47. (ĐTK BGD 2022) Cho khối nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=4a$. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $2a$, thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. **B.** $4\sqrt{6}\pi a^3$. **C.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. **D.** $8\sqrt{2}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$.
Gọi H là hình chiếu của O lên $SI \Rightarrow OH \perp SI$.
Ta có: $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOI) \Rightarrow (SOI) \perp (SAB)$

Mà $(SOI) \cap (SAB) = SI$ nên từ O dựng $OH \perp SI$ thì $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O,(SAB)) = 2a$

Xét tam giác AOI ta có: $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = 2\sqrt{2}a$

Xét tam giác SOI ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{8a^2} = \frac{1}{8a^2}$

$\Rightarrow SO^2 = 8a^2 \Rightarrow SO = 2\sqrt{2}a = h$, $r = 2\sqrt{3}a$

Vậy thể tích của khối nón đã cho bằng: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(2\sqrt{3}a\right)^2 2\sqrt{2}a = 8\sqrt{2}\pi a^3$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=4a$. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $2a$, độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

A. $l=2\sqrt{3}a$. **B.** $l=2\sqrt{5}a$. **C.** $l=\sqrt{5}a$. **D.** $l=\sqrt{3}a$.

Câu 2. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=4a$. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $2a$, diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{15}\pi a^2$. **B.** $2\sqrt{15}\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{15}\pi a^2$. **D.** $6\sqrt{15}\pi a^2$.

Câu 3. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=4a$. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $2a$, diện tích toàn phần của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{15}\pi a^2$. **B.** $4\pi a^2\left(\sqrt{15}+3\right)$. **C.** $8\sqrt{15}\pi a^2$. **D.** $8\pi a^2\left(\sqrt{15}+3\right)$.

Câu 4. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng $4a$. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng $2a$. Tính diện tích của thiết diện đó.

A. $4a^2$. **B.** $8a^2\sqrt{3}$. **C.** $8a^2$. **D.** $4a^2\sqrt{3}$.

Câu 5. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng $4a$. Biết diện tích của thiết diện bằng $8a^2$, khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng

A. $2a\sqrt{3}$. **B.** $4a$. **C.** $4a\sqrt{3}$. **D.** $2a$.

Câu 6. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO}=30^0, \widehat{SAB}=60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Câu 7. Cho hình nón có chiều cao $h=20$, bán kính đáy $r=25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S=500$. **B.** $S=400$. **C.** $S=300$. **D.** $S=406$

Câu 8. Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 1. Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 1. Khoảng cách từ tâm của đáy tới mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$

CÂU 9. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, bán kính R. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng $60°$, khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$. Đường cao h của hình nón bằng

A. $h=R\sqrt{3}$. **B.** $h=R\sqrt{2}$. **C.** $h=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h=\frac{R\sqrt{6}}{4}$.

Câu 10. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{10}\pi a^2$. **B.** $2\sqrt{10}\pi a^2$. **C.** $\sqrt{10}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{10}\pi a^2$

Câu 11. Cho hình nón đỉnh S có đường tròn đáy tâm O, bán kính bằng $3a$. Mặt phẳng (P) qua S cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác đều. Biết khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{4\sqrt{33}}{15}a$, thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $2a^3\pi$. **B.** $15a^3\pi$. **C.** $12\sqrt{2}a^3\pi$. **D.** $15\sqrt{2}a^3\pi$.

Câu 12. Cho hình nón đỉnh S có đường tròn đáy tâm O, bán kính bằng $4a$. Mặt phẳng (P) qua S cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông. Biết khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{2\sqrt{7}}{5}a$, thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $16a^3\pi$. **B.** $12a^3\pi$. **C.** $\frac{16}{3}a^3\pi$. **D.** $4a^3\pi$.

Câu 13. Cho hình nón đỉnh S có đường tròn đáy tâm O, bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (P) qua S hợp với đáy một góc α sao cho $\tan\alpha=\sqrt{2}$ và cắt đáy theo dây cung AB với $\widehat{ASB}=60^0$.Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3\pi$. **B.** $2\sqrt{2}a^3\pi$. **C.** $2\sqrt{6}a^3\pi$. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}a^3\pi$.

Câu 14. Cho hình nón đỉnh S có đường cao SO, Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho tam giác OAB vuông. Biết $AB=a\sqrt{2}$ và $\widehat{SAO}=60^0$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3\pi}{3}$. **B.** $\frac{a^3\pi}{3}$. **C.** $\sqrt{3}a^3\pi$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3\pi}{9}$.

Câu 15. Cho hình nón có chiều cao $h=20cm$, bán kính đáy $r=25cm$. Một thiết diện qua đỉnh có khoảng cách từ tâm đáy đến thiết diện là $12cm$. Tính diện tích của thiết diện.

A. $500cm^2$. **B.** $500cm^2$. **C.** $500cm^2$. **D.** $500cm^2$.

Câu 16. Cho hình nón đỉnh S có đường tròn đáy tâm O, độ dài đường sinh $SA=a$, đường kính đáy AB. Thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60^0 và cắt đường tròn đáy theo dây cung $MN=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ (M,N không trùng với hai điểm A,B). Biết rằng khoảng cách từ A tới MN bằng a. Tính thể tích khối nón

A. $\frac{\sqrt{2}a^3\pi}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3\pi}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3\pi}{12}$. **D.** $\frac{a^3\pi}{9}$.

Câu 17. Cho hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O sao cho $SO=a\sqrt{5}$, một mặt phẳng (α) cắt mặt nón theo hai đường sinh $SA,\ SB$. Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng $2\sqrt{5}$ và diện tích tam giác SAB bằng 360. Tính thể tích khối nón

A. $1325\pi\sqrt{5}$. **B.** $265\pi\sqrt{5}$. **C.** $1325\sqrt{5}$. **D.** $265\sqrt{5}$.

Câu 18. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO}=30^0,\widehat{SAB}=60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Câu 19. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, bán kính R. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng $60°$, khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$. Thể tích của khối nón bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi R^3$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi R^3$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{4}\pi R^3$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{12}\pi R^3$

Câu 20. Cho hình nón có chiều cao $6a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và có khoảng cách đến tâm là $3a$, thiết diện thu được là một tam giác vuông cân. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $150\pi a^3$. **B.** $96\pi a^3$. **C.** $108\pi a^3$. **D.** $120\pi a^3$.

Câu 21. Cho một hình nón có bán kính đáy bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh (S) của hình nón, cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB=2a\sqrt{3}$, khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\frac{8\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$.

Câu 22. Cắt khối nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 60^0 ta thu được thiết diện là một tam giác đều cạnh $4a$. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $\frac{7}{3}\pi a^3$. **B.** $7\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $21\pi a^3$. **D.** $7\pi a^3$.

Câu 23. Cắt khối nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng $60°$ ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $\frac{7}{8}\pi a^3$. **B.** $\frac{21}{8}\pi a^3$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}}{8}\pi a^3$. **D.** $\frac{21\sqrt{3}}{8}\pi a^3$.

Câu 24. Cắt khối nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 30^0, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $\frac{13\sqrt{3}}{6}\pi a^3$. **B.** $\frac{13}{3}\pi a^3$. **C.** $13\sqrt{3}\pi a^3$. **D.** $\frac{13\sqrt{3}}{3}\pi a^3$

Câu 25. Cắt khối nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng $30°$, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $\frac{13\sqrt{3}}{8}\pi a^3$ **B.** $\frac{13\sqrt{3}}{24}\pi a^3$ **C.** $\frac{13}{24}\pi a^3$ **D.** $\frac{13\sqrt{3}}{12}\pi a^3$

Câu 26. Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích khối trụ được giới han bởi hình trụ đã cho bằng

A. $216\pi a^3$. **B.** $150\pi a^3$. **C.** $54\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Câu 27. Cắt một hình trụ bằng mặt phẳng (α) vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 16. Biết khoảng cách từ tâm đáy hình trụ đến mặt phẳng (α) bằng 3. Tính thể tích khối trụ.

A. $2\sqrt{3}\pi$. **B.** $\frac{52\pi}{3}$. **C.** 52π. **D.** 13π.

Câu 28. Khi cắt khối trụ (T) bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục của trụ (T) một khoảng bằng $a\sqrt{3}$ ta được thiết diện là hình vuông có diện tích bằng $4a^2$. Tính thể tích V của khối trụ (T).

A. $V=7\sqrt{7}\pi a^3$. **B.** $V=\frac{7\sqrt{7}}{3}\pi a^3$. **C.** $V=\frac{8}{3}\pi a^3$. **D.** $V=8\pi a^3$.

Câu 29. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD=a\sqrt{2}$, $\widehat{DAC}=60^\circ$. Tính thể tích khối trụ.

A. $\frac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$.

Câu 30. Cho hình trụ có đường cao bằng $8a$. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục hình trụ $3a$, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông. Diện tích xung quanh và thể tích khối trụ bằng

A. $S=80\pi a^2, V=200\pi a^3$. **B.** $S=60\pi a^2, V=200\pi a^3$.

C. $S=80\pi a^2, V=180\pi a^3$. **D.** $S=60\pi a^2, V=180\pi a^3$.

Câu 31. Một hình trụ có bán kính đáy $r=5\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy $h=7\text{cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm. Diện tích của thiết diện được tạo thành là:

A. $S=56\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $S=55\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $S=53\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $S=46\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 32. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy (O,R) và (O',R), chiều cao $h=\sqrt{3}R$. Đoạn thẳng AB có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy hình trụ sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là $\alpha=30^0$. Thể tích tứ diện $ABOO'$ là

A. $\frac{3R^3}{2}$. **B.** $\frac{3R^3}{4}$. **C.** $\frac{R^3}{4}$. **D.** $\frac{R^3}{2}$.

Câu 33. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $36a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $4\sqrt{13}\pi a^2$. **B.** $12\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $6\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 34. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\frac{16\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{12}\pi a^2$. **C.** $\frac{8\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 35. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $8\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. **C.** $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. **D.** $16\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 36. [Mức độ 3] Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $36a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $12\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $36\sqrt{2}\pi a^2$. **C.** $24\sqrt{2}\pi a^2$. **D.** $18\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 37. Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn (O,R) và (O',R). Biết rằng tồn tại dây cung AB của đường tròn (O,R) sao cho tam giác $O'AB$ đều và góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và mặt phẳng chứa đường tròn (O,R) bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đã cho.

A. $4\pi R^2$ **B.** $2\sqrt{3}\pi R^2$ **C.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}\pi R^2$ **D.** $\frac{6\sqrt{7}}{7}\pi R^2$

Câu 38. Một khối trụ có bán kính đáy $r=2a$. O,O' lần lượt là tâm đường tròn đáy. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục $\frac{a\sqrt{15}}{2}$, cắt đường tròn (O') tại hai điểm A,B. Biết thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Độ dài đường cao của hình trụ bằng

A. a. **B.** $6a$. **C.** $3a$. **D.** $2a$.

Câu 39. Cho hình trụ có chiều cao bằng $8a$. Biết hai điểm A,C lần lượt nằm trên hai đáy thỏa $AC=10a$, khoảng cách giữa AC và trục của hình trụ bằng $4a$. Thể tích của khối trụ đã cho là

A. $128\pi a^3$. **B.** $320\pi a^3$. **C.** $80\pi a^3$. **D.** $200\pi a^3$.

Câu 40. Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $10\sqrt{3}\pi$. **B.** $5\sqrt{39}\pi$. **C.** $20\sqrt{3}\pi$. **D.** $10\sqrt{39}\pi$.

Câu 41. Cho hình trụ có O,O' là tâm hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A,B cùng thuộc (O) và C,D cùng thuộc (O') sao cho $AB=a\sqrt{3}$, $BC=2a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc $60°$. Thể tích khối trụ bằng

A. $\pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2\pi a^3\sqrt{3}$.

Câu 42. Cho khối trụ có hai đáy là (O) và (O'). AB,CD lần lượt là hai đường kính của (O) và (O'), góc giữa AB và CD bằng $30°$, $AB=6$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 30. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. 180π. **B.** 90π. **C.** 30π. **D.** 45π.

Câu 43. Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', chiều cao $h=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc $30°$, cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$.

Câu 44. Cho hình trụ và hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Hai đỉnh liên tiếp A,B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thức hai, mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy một góc $45°$. Khi đó thể tích khối trụ là

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 45. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $3\sqrt{2}a$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A nằm trên đường tròn đáy và cắt đáy còn lại của hình trụ theo dây cung BC, $BC=8a$. Biết khoảng cách từ tâm đáy chưa BC đến mặt phẳng (P) bằng a. Tính thể tích khối trụ.

A. $72\sqrt{2}a^3\pi$. **B.** $31\sqrt{2}a^3\pi$. **C.** $24\sqrt{2}a^3\pi$. **D.** $12\sqrt{2}a^3\pi$.

Câu 46. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và lần lượt tâm của hai đáy là O,O'. Điểm A thuộc vào đường tròn đáy tâm O'. Mặt phẳng (P) đi qua A,O cắt hình trụ đã cho theo một thiết diện là nửa hình elip có tiêu điểm thuộc đoạn thẳng OA. Biết rằng tiêu cự của thiết diện này gấp đôi độ dài trục nhỏ. Tính thể tích khối trụ đó

A. $2a^3\pi$. **B.** $\sqrt{5}a^3\pi$. **C.** $\sqrt{2}a^3\pi$. **D.** $\sqrt{3}a^3\pi$.

Câu 47. Cho hình trụ có đường cao $h=5(cm)$. Mặt phẳng (P) song song với trụ của hình trụ và cách trục hình trụ một khoảng $2(cm)$ cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích $S=10\sqrt{5}\left(cm^2\right)$. Tính thể tích khối trụ.

A. 45π. **B.** 20π. **C.** 24π. **D.** 48π.

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=BC=AC=BD=2a, AD=a\sqrt{3}$; hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{64\pi a^2}{27}$ **B.** $\frac{4\pi a^2}{27}$ **C.** $\frac{16\pi a^2}{9}$ **D.** $\frac{64\pi a^2}{9}$

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$ và $\widehat{ASB}=60°$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S=\dfrac{13\pi a^2}{2}$. **B.** $S=\dfrac{13\pi a^2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{11\pi a^2}{2}$. **D.** $S=\dfrac{11\pi a^2}{3}$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB=2a,\ AD=a.$ Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{57}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{19}}{4}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{5a^2\pi}{12}$. **B.** $\dfrac{5a^2\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{5a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{5a^2}{12}$.

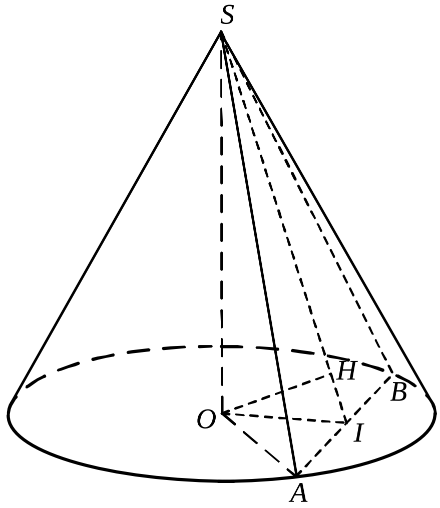
HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 4a$. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $2a$, độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

A. $l = 2\sqrt{3}a$. **B.** $l = 2\sqrt{5}a$. **C.** $l = \sqrt{5}a$. **D.** $l = \sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn B



Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI \Rightarrow OH \perp SI$.

Ta có: $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOI) \Rightarrow (SOI) \perp (SAB)$

Mà $(SOI) \cap (SAB) = SI$ nên từ O dựng $OH \perp SI$ thì $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O,(SAB)) = 2a$

Xét tam giác AOI ta có: $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = 2\sqrt{2}a$

Xét tam giác SOI ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{8a^2} = \frac{1}{8a^2}$

$\Rightarrow SO^2 = 8a^2 \Rightarrow SO = 2\sqrt{2}a = h$, $r = 2\sqrt{3}a$

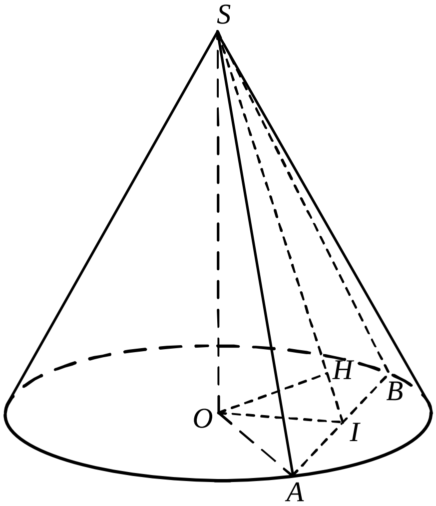
Vậy độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng: $l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{5}a$

Câu 2. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 4a$. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $2a$, diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{15}\pi a^2$. **B.** $2\sqrt{15}\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{15}\pi a^2$. **D.** $6\sqrt{15}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI \Rightarrow OH \perp SI$.

Ta có: $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOI) \Rightarrow (SOI) \perp (SAB)$

Mà $(SOI) \cap (SAB) = SI$ nên từ O dựng $OH \perp SI$ thì $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O,(SAB)) = 2a$

Xét tam giác AOI ta có: $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = 2\sqrt{2}a$

Xét tam giác SOI ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{4a^2} - \dfrac{1}{8a^2} = \dfrac{1}{8a^2}$

$\Rightarrow SO^2 = 8a^2 \Rightarrow SO = 2\sqrt{2}a = h$, $r = 2\sqrt{3}a \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{5}a$

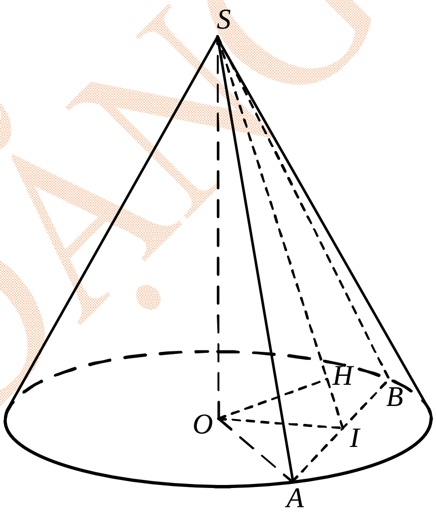
Vậy diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng: $V = \pi rl = \pi.2\sqrt{3}a.2\sqrt{5}a = 4\sqrt{15}\pi a^2$.

Câu 3. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 4a$. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $2a$, diện tích toàn phần của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{15}\pi a^2$. **B.** $4\pi a^2\left(\sqrt{15}+3\right)$. **C.** $8\sqrt{15}\pi a^2$. **D.** $8\pi a^2\left(\sqrt{15}+3\right)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI \Rightarrow OH \perp SI$.

Ta có: $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOI) \Rightarrow (SOI) \perp (SAB)$

Mà $(SOI) \cap (SAB) = SI$ nên từ O dựng $OH \perp SI$ thì $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O,(SAB)) = 2a$

Xét tam giác AOI ta có: $OI=\sqrt{OA^2-AI^2}=2\sqrt{2}a$

Xét tam giác SOI ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{OS^2}\Rightarrow\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{8a^2}=\frac{1}{8a^2}$

$\Rightarrow SO^2=8a^2\Rightarrow SO=2\sqrt{2}a=h$, $r=2\sqrt{3}a\Rightarrow l=\sqrt{h^2+r^2}=2\sqrt{5}a$

Vậy diện tích toàn phần của hình nón đã cho bằng:

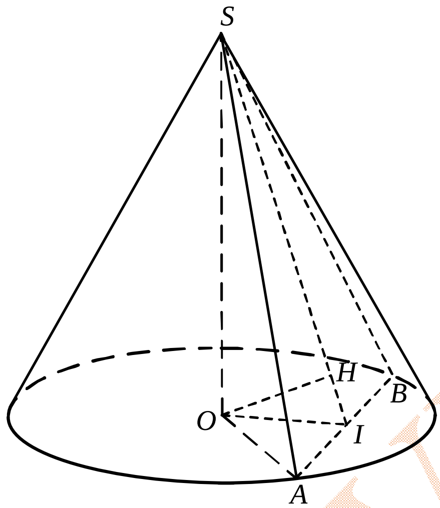
$V=\pi rl+\pi r^2=\pi.2\sqrt{3}a.2\sqrt{5}a+\pi\left(2\sqrt{3}a\right)^2=4\pi a^2\left(\sqrt{15}+3\right)$.

Câu 4. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng $4a$. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng $2a$. Tính diện tích của thiết diện đó.

A. $4a^2$. **B.** $8a^2\sqrt{3}$. **C.** $8a^2$. **D.** $4a^2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử thiết diện cắt đường tròn đáy theo dây cung $AB=4a$.

Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow OI\perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI\Rightarrow OH\perp SI$.

Ta có: $SO\perp AB$ nên $AB\perp(SOI)\Rightarrow(SOI)\perp(SAB)$

Mà $(SOI)\cap(SAB)=SI$ nên từ O dựng $OH\perp SI$ thì $OH\perp(SAB)\Rightarrow OH=d\left(O,(SAB)\right)=2a$

Xét tam giác AOI ta có: $OI=\sqrt{OA^2-AI^2}=2\sqrt{2}a$

Xét tam giác SOI ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{OS^2}\Rightarrow\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{8a^2}=\frac{1}{8a^2}$

$\Rightarrow SO^2=8a^2\Rightarrow SO=2\sqrt{2}a\Rightarrow SI=\sqrt{SO^2+OI^2}=4a$

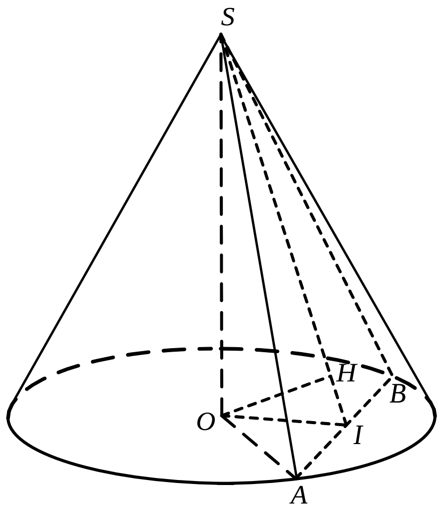
Vậy diện tích thiết diện bằng: $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}.SI.AB=\frac{1}{2}.4a.4a=8a^2$.

Câu 5. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng $4a$. Biết diện tích của thiết diện bằng $8a^2$, khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng

A. $2a\sqrt{3}$. **B.** $4a$. **C.** $4a\sqrt{3}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử thiết diện cắt đường tròn đáy theo dây cung $AB = 4a$.

Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI \Rightarrow OH \perp SI$.

Ta có: $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOI) \Rightarrow (SOI) \perp (SAB)$

Mà $(SOI) \cap (SAB) = SI$ nên từ O dựng $OH \perp SI$ thì $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O,(SAB))$

Xét tam giác AOI ta có: $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = 2\sqrt{2}a$

Theo giả thiết: $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}.SI.AB \Rightarrow SI = \frac{2S_{\Delta SAB}}{AB} = \frac{2.8a^2}{4a} = 4a$

Xét tam giác SOI ta có: $SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = 2\sqrt{2}a = OI$ nên ΔSOI vuông cân tại O

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}SI = 2a.$

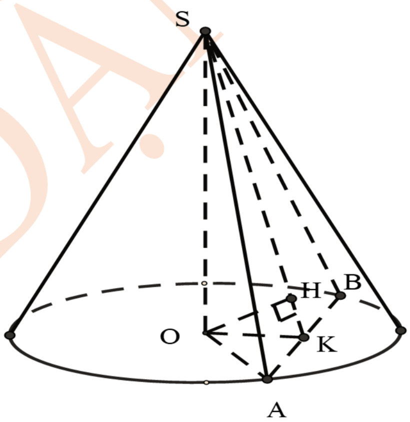
Vậy khoảng cách từ tâm O của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng $2a$.

Câu 6. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO} = 30^0, \widehat{SAB} = 60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK \perp AB$ vì tam giác OAB cân tại O

Mà $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOK) \Rightarrow (SOK) \perp (SAB)$ mà $\Rightarrow (SOK) \cap (SAB) = SK$ nên từ O dựng $OH \perp SK$ thì $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d\left(O,(SAB)\right)$

Xét tam giác SAO ta có: $\sin\widehat{SAO} = \dfrac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \dfrac{SA}{2}$

Xét tam giác SAB ta có: $\sin\widehat{SAB} = \dfrac{SK}{SA} \Rightarrow SK = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SOK ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{SK^2 - SO^2} + \dfrac{1}{SO^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{\frac{SA^2}{4}} + \dfrac{1}{\frac{3SA^2}{4} - \frac{SA^2}{4}} = \dfrac{4}{SA^2} + \dfrac{2}{SA^2} \Rightarrow \dfrac{6}{SA^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow SA = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$

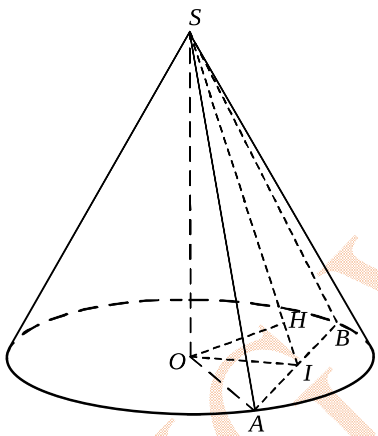
Câu 7. Cho hình nón có chiều cao $h = 20$, bán kính đáy $r = 25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S = 500$. **B.** $S = 400$. **C.** $S = 300$. **D.** $S = 406$

Lời giải

Chọn A

Giả sử hình nón đỉnh S, tâm đáy O và có thiết diện qua đỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là ΔSAB (hình vẽ).



Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI \Rightarrow OH \perp SI$.

Ta chứng minh được $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = 12$.

Xét tam giác vuông SOI có

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{12^2} - \dfrac{1}{20^2} = \dfrac{1}{225}$.

$\Rightarrow OI^2 = 225 \Rightarrow OI = 15$.

Xét tam giác vuông SOI có $SI = \sqrt{OS^2 + OI^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

Xét tam giác vuông OIA có $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \Rightarrow AB = 40$.

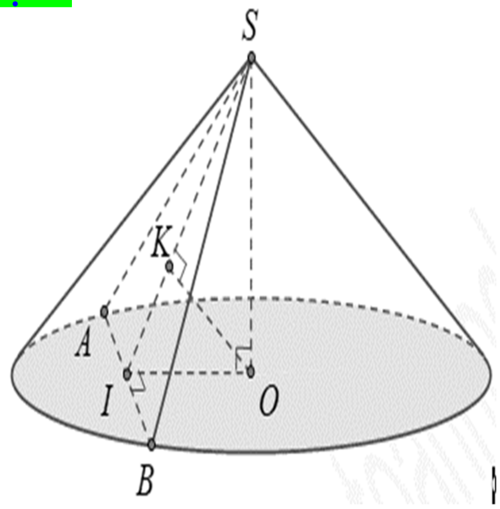
Ta có $S = S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.SI = \dfrac{1}{2}.40.25 = 500$.

Câu 8. Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 1. Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 1. Khoảng cách từ tâm của đáy tới mặt phẳng (P) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $l = h = 1$

Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung AB có độ dài bằng 1. I, K là hình chiếu O lên AB; SI. Ta có $AB \perp (SIO) \Rightarrow OK \perp (SAB)$

ta có $IO = \sqrt{R^2 - OA^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

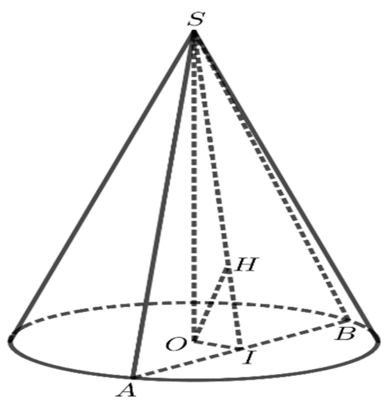
$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow OK = \frac{OI.SO}{\sqrt{OI^2 + OS^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 9. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, bán kính R. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng $60°$, khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$. Đường cao h của hình nón bằng

A. $h = R\sqrt{3}$. **B.** $h = R\sqrt{2}$. **C.** $h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h = \frac{R\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm AB. Kẻ OH vuông góc với SI.

$d(O,(SAB)) = OH = \frac{R}{2}$. Ta có cung AB bằng $60°$ nên $\widehat{AOB} = 60°$.

Tam giác AOI vuông tại I, ta có $\cos\widehat{IOA} = \frac{OI}{OA} \Leftrightarrow OI = OA.\cos 30° = \frac{\sqrt{3}R}{2}$.

Tam giác SOI vuông tại O, ta có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}\Leftrightarrow\frac{1}{SO^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2}=\frac{8}{3R^2}$$

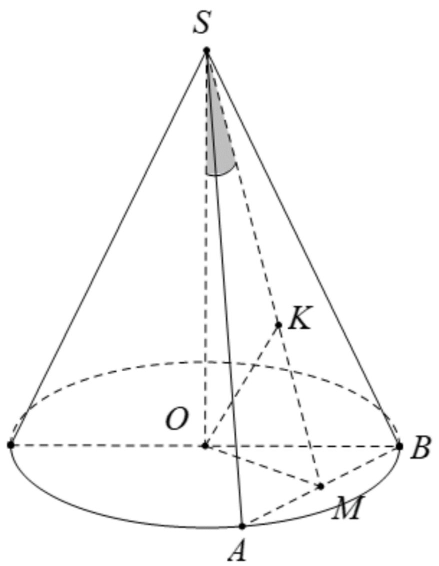
$\Rightarrow SO=\frac{\sqrt{6}R}{4}$.

Câu 10. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{10}\pi a^2$. **B.** $2\sqrt{10}\pi a^2$. **C.** $\sqrt{10}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{10}\pi a^2$

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của AB, tam giác OAB cân đỉnh O nên $OM\perp AB$ và $SO\perp AB$ suy ra $AB\perp(SOM)$. Dựng $OK\perp SM$.

Theo trên có $OK\perp AB$ nên $OK\perp(SAB)$.

Vậy góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{OSM}=30°$.

Tam giác vuông cân SAB có diện tích bằng $4a^2$ suy ra $\frac{1}{2}SA^2=4a^2\Rightarrow SA=2a\sqrt{2}$ $\Rightarrow AB=4a\Rightarrow SM=2a$.

Xét tam giác vuông SOM có $\cos\widehat{OSM}=\frac{SO}{SM}\Rightarrow SO=\frac{\sqrt{3}}{2}.2a=\sqrt{3}a$.

Cuối cùng $OB=\sqrt{SB^2-SO^2}=a\sqrt{5}$.

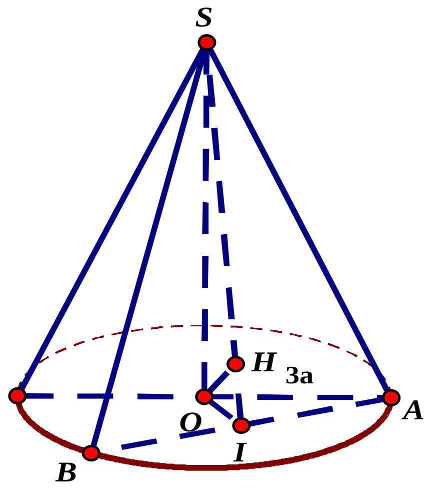
Vậy diện tích xung quanh của hình nón bằng $S_{xq}=\pi rl=\pi.a\sqrt{5}.2a\sqrt{2}=2a^2\sqrt{10}\pi$.

Câu 11. Cho hình nón đỉnh S có đường tròn đáy tâm O, bán kính bằng $3a$. Mặt phẳng (P) qua S cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác đều. Biết khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{4\sqrt{33}}{15}a$, thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $2a^3\pi$. **B.** $15a^3\pi$. **C.** $12\sqrt{2}a^3\pi$. **D.** $15\sqrt{2}a^3\pi$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $SA = x \Rightarrow AI = \frac{x}{2}$

Xét $\Delta OSA\left(\widehat{O} = 1v\right): SO^2 = x^2 - 9a^2$

Xét $\Delta IOA\left(\widehat{I} = 1v\right): OI^2 = 9a^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{36a^2 - x^2}{4}$

Xét $\Delta OSI\left(\widehat{O} = 1v\right): \frac{75}{176a^2} = \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{3x^2}{\left(x^2 - 9a^2\right)\left(36a^2 - x^2\right)} \Leftrightarrow x = 5a$

$\Delta OSA\left(\widehat{O} = 1v\right): SO = \sqrt{25a^2 - 9a^2} = 4a$

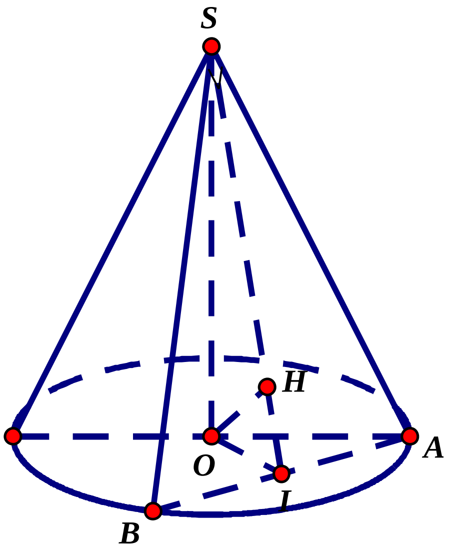
Vậy $V = \frac{1}{3}\pi.OA^2.OS = \frac{1}{3}\pi.(3a)^2.4a = 12a^3\pi$

Câu 12. Cho hình nón đỉnh S có đường tròn đáy tâm O, bán kính bằng $4a$. Mặt phẳng (P) qua S cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông. Biết khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{2\sqrt{7}}{5}a$, thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $16a^3\pi$. **B.** $12a^3\pi$. **C.** $\frac{16}{3}a^3\pi$. **D.** $4a^3\pi$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $SA = x \Rightarrow AI = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$

Xét $\Delta OSA\left(\widehat{O} = 1v\right): SO^2 = x^2 - 16a^2$

Xét $\Delta IOA\left(\widehat{I} = 1v\right): OI^2 = 16a^2 - \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{32a^2 - x^2}{2}$

Xét $\Delta OSI\left(\widehat{O} = 1v\right): \dfrac{25}{28a^2} = \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{x^2}{\left(x^2 - 16a^2\right)\left(32a^2 - x^2\right)} \Leftrightarrow x = 5a$

$\Delta OSA\left(\widehat{O} = 1v\right): SO = \sqrt{25a^2 - 16a^2} = 3a$

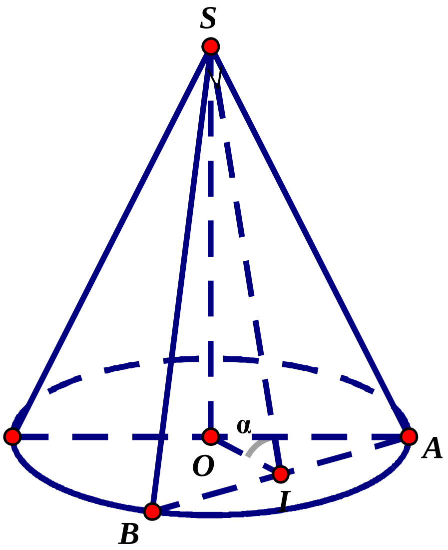
Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi.OA^2.OS = \dfrac{1}{3}\pi.(4a)^2.3a = 16a^3\pi$

Câu 13. Cho hình nón đỉnh S có đường tròn đáy tâm O, bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (P) qua S hợp với đáy một góc α sao cho $\tan\alpha = \sqrt{2}$ và cắt đáy theo dây cung AB với $\widehat{ASB} = 60^0$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^3\pi$. **B.** $2\sqrt{2}a^3\pi$. **C.** $2\sqrt{6}a^3\pi$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a^3\pi$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $SO = x$

Xét $\Delta OSA\left(\hat{O} = 1v\right): SA = \sqrt{x^2 + 2a^2}$

Xét $\Delta OSI\left(\hat{O} = 1v\right): \tan\alpha = \frac{OS}{OI} \Rightarrow OI = \frac{x}{\sqrt{2}}$

Xét $\Delta IOA\left(\hat{I} = 1v\right): IA = \sqrt{2a^2 - \frac{x^2}{2}}$

Xét $\Delta ISA\left(\hat{O} = 1v\right): \sin\widehat{ISA} = \frac{IA}{SA} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \sin 30^0 = \frac{\sqrt{2a^2 - \frac{x^2}{2}}}{\sqrt{x^2 + 2a^2}} \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$

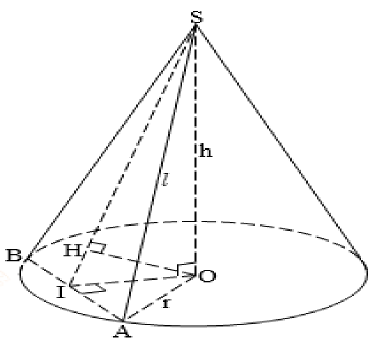
Vậy $V = \frac{1}{3}\pi.OA^2.OS = \frac{1}{3}\pi.\left(\sqrt{2}a\right)^2.\sqrt{2}a = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3\pi$

Câu 14. Cho hình nón đỉnh S có đường cao SO, Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho tam giác OAB vuông. Biết $AB = a\sqrt{2}$ và $\widehat{SAO} = 60^0$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3\pi}{3}$. **B.** $\frac{a^3\pi}{3}$. **C.** $\sqrt{3}a^3\pi$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3\pi}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Vì tam giác OAB vuông cân tại O nên: $OA^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow 2OA^2 = 2a^2 \Rightarrow OA = a$

Xét tam giác SOA vuông tại O có: $SO = AO.\tan\widehat{SAO} = a\sqrt{3}$

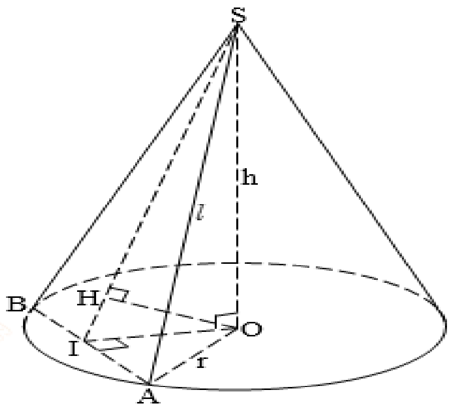
Vậy $V = \frac{1}{3}\pi.OA^2.OS = \frac{1}{3}\pi.a^2.a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}a^3\pi}{3}$

Câu 15. Cho hình nón có chiều cao $h=20cm$, bán kính đáy $r=25cm$. Một thiết diện qua đỉnh có khoảng cách từ tâm đáy đến thiết diện là $12cm$. Tính diện tích của thiết diện.

A. $500cm^2$.	**B.** $500cm^2$.	**C.** $500cm^2$.	**D.** $500cm^2$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử hình nón có đỉnh S, chiều cao SO, thiết diện là tam giác $\triangle SAB$.

+ Ta có $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}AB.SI=\frac{1}{2}2IA.SI=IA.SI$

+ Xét tam giác vuông SOI, ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{OS^2}\Rightarrow\frac{1}{12^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{20^2}\Rightarrow OI=15\,(cm).$$

+ Mặt khác, xét tam giác vuông SOI thì:

$$OI.OS=SI.OH\Rightarrow SI=\frac{OI.OS}{OH}=\frac{20.15}{12}=25(cm).$$

+ Trong tam giác vuông AIO, ta có:

$$IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20(cm).$$

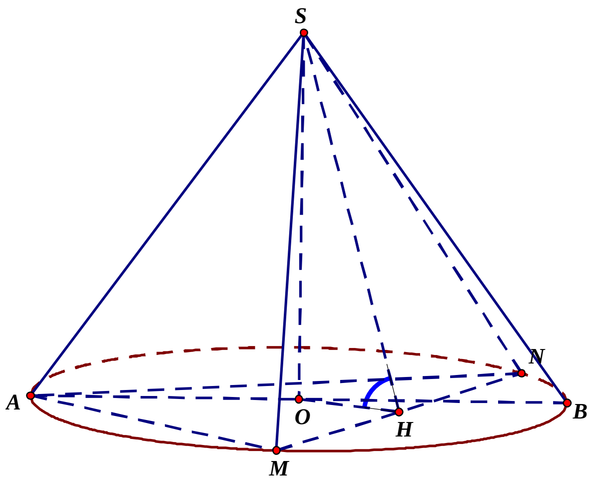
+ Từ đó suy ra: $S_{\Delta SAB}=IA.SI=20.25=500\left(cm^2\right)$.

Câu 16. Cho hình nón đỉnh S có đường tròn đáy tâm O, độ dài đường sinh $SA=a$, đường kính đáy AB. Thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60^0 và cắt đường tròn đáy theo dây cung $MN=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ (M,N không trùng với hai điểm A,B). Biết rằng khoảng cách từ A tới MN bằng a. Tính thể tích khối nón

A. $\frac{\sqrt{2}a^3\pi}{6}$.	**B.** $\frac{\sqrt{3}a^3\pi}{8}$.	**C.** $\frac{\sqrt{2}a^3\pi}{12}$.	**D.** $\frac{a^3\pi}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của MN, Đặt $OM = x \Rightarrow OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{3}}$

$SO = OH.\tan 60^0 = \sqrt{3x^2 - a^2}$.

Mặt khác $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

$\Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{3x^2 - a^2} \Rightarrow 4x^2 = 2a^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

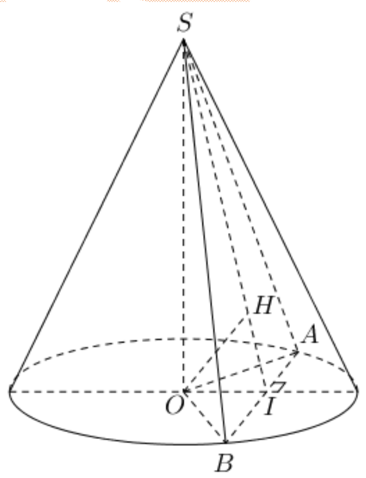
$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi.OM^2.OS = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}a^3\pi}{12}$.

Câu 17. Cho hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O sao cho $SO = a\sqrt{5}$, một mặt phẳng (α) cắt mặt nón theo hai đường sinh $SA,\ SB$. Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng $2\sqrt{5}$ và diện tích tam giác SAB bằng 360. Tính thể tích khối nón

A. $1325\pi\sqrt{5}$. **B.** $265\pi\sqrt{5}$. **C.** $1325\sqrt{5}$. **D.** $265\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



2H2.1.I.B47

Kẻ $OI \perp AB, OH \perp SI \Rightarrow OH = d\left(O,(\alpha)\right) = 2\sqrt{5}$

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}\Rightarrow\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OH^2}+\frac{1}{SO^2}=\frac{1}{\left(2\sqrt{5}\right)^2}-\frac{1}{\left(6\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2}{45}\Rightarrow OI=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$SI=\sqrt{SO^2+OI^2}=\sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2}=\frac{9\sqrt{10}}{2}$$

$$S_{SAB}=\frac{1}{2}.SI.AB=SI.IA\Rightarrow IA=\frac{S_{SAB}}{SI}=\frac{360}{\left(\frac{9\sqrt{10}}{2}\right)}=8\sqrt{10}$$

$$r=\sqrt{OI^2+IA^2}=\sqrt{\left(8\sqrt{10}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{106}}{2}$$

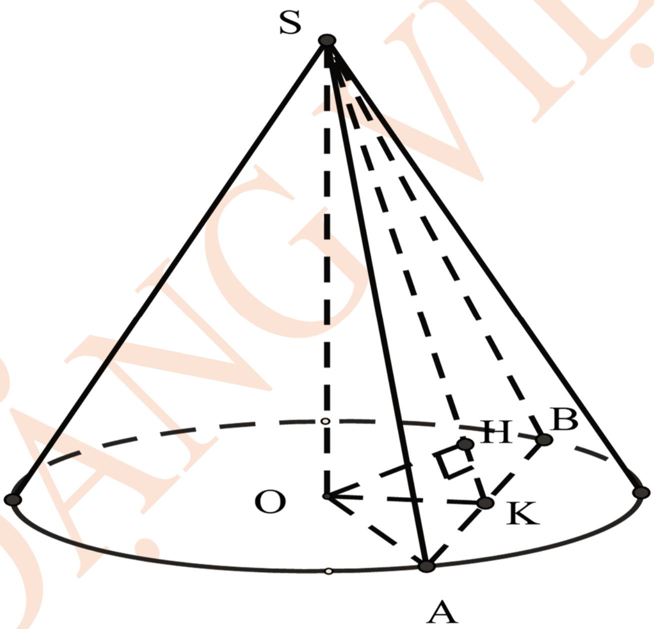
$$V=\frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{5\sqrt{106}}{2}\right)^2.6\sqrt{5}=1325\pi\sqrt{5}$$

Câu 18. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO}=30^0, \widehat{SAB}=60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A



Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK\perp AB$ vì tam giác OAB cân tại O

Mà $SO\perp AB$ nên $AB\perp(SOK)$ $\Rightarrow(SOK)\perp(SAB)$ mà $\Rightarrow(SOK)\cap(SAB)=SK$ nên từ O dựng $OH\perp SK$ thì $OH\perp(SAB)\Rightarrow OH=d\left(O,(SAB)\right)$

Xét tam giác SAO ta có: $\sin\widehat{SAO}=\frac{SO}{SA}\Rightarrow SO=\frac{SA}{2}$

Xét tam giác SAB ta có: $\sin\widehat{SAB} = \frac{SK}{SA} \Rightarrow SK = \frac{SA\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SOK ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{SK^2 - SO^2} + \frac{1}{SO^2}$

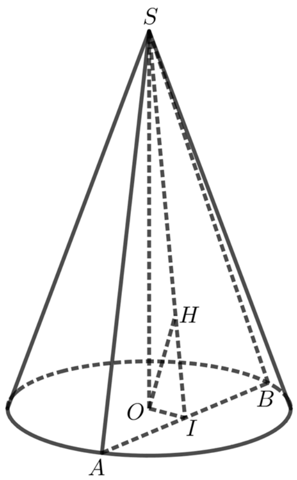
$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\frac{SA^2}{4}} + \frac{1}{\frac{3SA^2}{4} - \frac{SA^2}{4}} = \frac{4}{SA^2} + \frac{2}{SA^2} \Rightarrow \frac{6}{SA^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow SA = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$

Câu 19. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm $O,$ bán kính $R.$ Dựng hai đường sinh SA và $SB,$ biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng $60°,$ khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}.$ Thể tích của khối nón bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi R^3$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi R^3$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{4}\pi R^3$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{12}\pi R^3$

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm $AB.$

Kẻ OH vuông góc với $SI.$

$d\left(O, (SAB)\right) = OH = \frac{R}{2}.$

Ta có cung AB bằng $60°$ nên $\widehat{AOB} = 60°.$

Tam giác AOI vuông tại $I,$ ta có $\cos\widehat{IOA} = \frac{OI}{OA} \Leftrightarrow OI = OA.\cos 30° = \frac{\sqrt{3}R}{2}.$

Tam giác SOI vuông tại $O,$ ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2} = \frac{8}{3R^2} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{6}R}{4}.$$

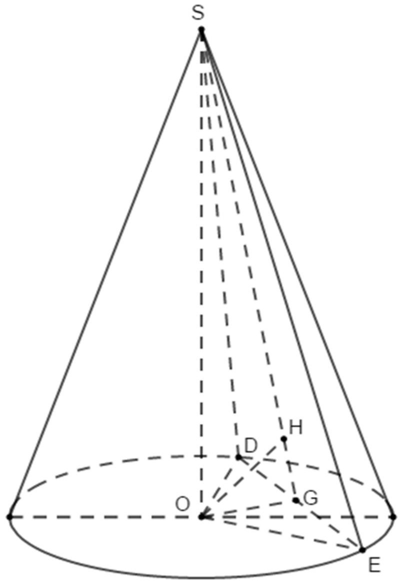
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.R^2.\frac{\sqrt{6}R}{4} = \frac{\sqrt{6}}{12}\pi R^3.$$

Câu 20. Cho hình nón có chiều cao $6a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và có khoảng cách đến tâm là $3a$, thiết diện thu được là một tam giác vuông cân. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $150\pi a^3$. **B.** $96\pi a^3$. **C.** $108\pi a^3$. **D.** $120\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SDE. Theo giả thiết, tam giác SDE vuông cân tại đỉnh S. Gọi G là trung điểm DE, kẻ $OH \perp SG \Rightarrow OH = 3a$.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OG^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OG^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{SO^2} \Rightarrow OG = 2a\sqrt{3}$.

Do $SO.OG = OH.SG \Rightarrow SG = \dfrac{SO.OG}{SG} = \dfrac{6a.2a\sqrt{3}}{3a} = 4a\sqrt{3}$ $\Rightarrow DE = 8a\sqrt{3}$.

$OD = \sqrt{OG^2 + DG^2} = \sqrt{12a^2 + 48a^2} = 2\sqrt{15}a$.

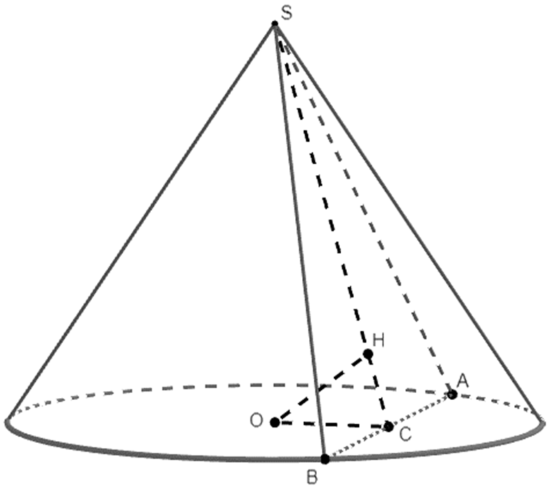
Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{15}a\right)^2 \cdot 6a = 120\pi a^3$

Câu 21. Cho một hình nón có bán kính đáy bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh (S) của hình nón, cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2a\sqrt{3}$, khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{8\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Chọn B



Gọi C là trung điểm của AB, O là tâm của đáy. Khi đó $\begin{cases} SO \perp AB \\ OC \perp AB \end{cases} \Rightarrow (SOC) \perp AB$. Gọi H là hình chiếu của O lên SC thì $OH \perp (SAB)$ nên $OH = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$OB = 2a, BC = a\sqrt{3} \Rightarrow OC = a$. Xét tam giác vuông $SOC: \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow SO = a$.

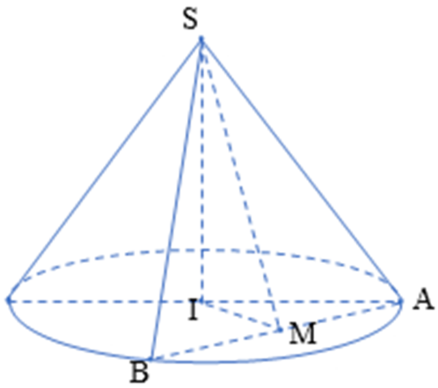
Vậy thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho là $\dfrac{1}{3}\pi.(2a)^2.a = \dfrac{4\pi a^3}{3}$.

Câu 22. Cắt khối nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 60^0 ta thu được thiết diện là một tam giác đều cạnh $4a$. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $\dfrac{7}{3}\pi a^3$. **B.** $7\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $21\pi a^3$. **D.** $7\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là tâm đáy nón. Ta có thiết diện qua đỉnh là tam giác SBA.

Gọi M là trung điểm của AB. Suy ra $\widehat{SMI} = 60^0$.

Do tam giác SAB đều cạnh $4a$ $\Rightarrow SM = \dfrac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SIM vuông tại I ta có $SI = 3a; IM = a\sqrt{3}$.

Xét ΔIMA vuông tại M ta có $IA=\sqrt{IM^2+MA^2}=\sqrt{3a^2+(2a)^2}=a\sqrt{7}$.

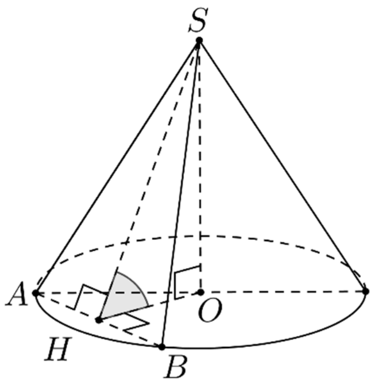
Khi đó $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(a\sqrt{7}\right)^2.3a=7\pi a^3$.

Câu 23. Cắt khối nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng $60°$ ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a.$ Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $\frac{7}{8}\pi a^3$. **B.** $\frac{21}{8}\pi a^3$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}}{8}\pi a^3$. **D.** $\frac{21\sqrt{3}}{8}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều SAB cạnh $2a\Rightarrow AB=2a.$

Kẻ $OH\perp AB$ tại $H\Rightarrow AH=a,SH=a\sqrt{3}.$

Góc giữa mặt phẳng (SAB) với mặt đáy bằng $60°\Rightarrow\widehat{SHO}=60°\Rightarrow SO=SH.\sin 60°=\frac{3a}{2}.$

Mà $OH=\frac{SO}{\tan 60°}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow r=\sqrt{AH^2+OH^2}=\frac{a\sqrt{7}}{2}\Rightarrow SA=\sqrt{h^2+r^2}=4a.$

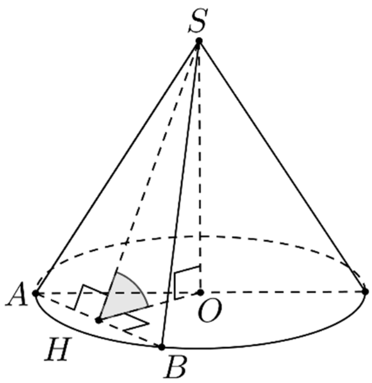
Vậy $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2.\frac{3a}{2}=\frac{7}{8}\pi a^3.$

Câu 24. Cắt khối nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng $30^0,$ ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a.$ Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $\frac{13\sqrt{3}}{6}\pi a^3$. **B.** $\frac{13}{3}\pi a^3$. **C.** $13\sqrt{3}\pi a^3$. **D.** $\frac{13\sqrt{3}}{3}\pi a^3$

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm đáy nón, đỉnh nón là S, thiết diện là tam giác đều SAB.

Kẻ $OH \perp AB$, H là trung điểm $AB \Rightarrow \widehat{SHO} = 30^0$.

$\Rightarrow SH = 2a\sqrt{3}, HA = 2a.$

Ta có: $OH = SH.\cos 30^0 = 3a; SO = SH.\sin 30^0 = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow r = \sqrt{HO^2 + HA^2} = \sqrt{9a^2 + 4a^2} = a\sqrt{13}.$

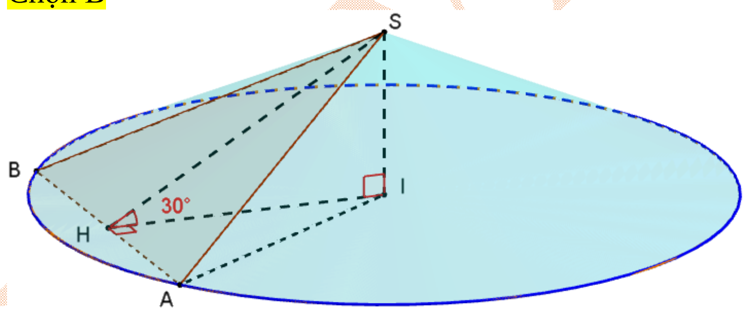
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(a\sqrt{13}\right)^2.a\sqrt{3} = \frac{13\sqrt{3}}{3}\pi a^3.$

Câu 25. Cắt khối nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng $30°$, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $\frac{13\sqrt{3}}{8}\pi a^3$ **B.** $\frac{13\sqrt{3}}{24}\pi a^3$ **C.** $\frac{13}{24}\pi a^3$ **D.** $\frac{13\sqrt{3}}{12}\pi a^3$

Lời giải

Chọn B



• Ta có: ΔSAB đều cạnh $2a \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$

• Góc giữa thiết diện và mặt phẳng đáy là $\widehat{SHI} = 30°.$

• Xét ΔSHI vuông tại I, ta có

$HI = SH.\cos 30° = a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}; SI = SH.\sin 30° = a\sqrt{3}.\frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

• Xét ΔAHI vuông tại H: $AI = \sqrt{AH^2 + HI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$

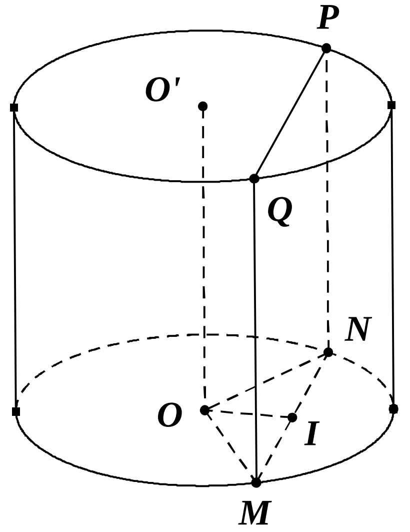
• Vậy: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{13}}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{13\sqrt{3}}{24}\pi a^3.$

Câu 26. Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích khối trụ được giới han bởi hình trụ đã cho bằng

A. $216\pi a^3$. **B.** $150\pi a^3$. **C.** $54\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



.

Thiết diện $MNPQ$ là hình vuông nên $MI = \frac{MN}{2} = 3a$

Mặt phẳng $(MNPQ)$ cách trục một khoảng bằng $3a$ nên $OI = 3a$

Suy ra tam giác OIM vuông cân tại I. Khi đó $OM = 3\sqrt{2}a$

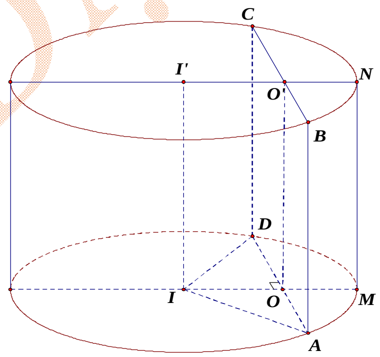
Vậy $V = \pi R^2 h = \pi\left(3\sqrt{2}a\right)^2.6a = 108\pi a^3$.

Câu 27. Cắt một hình trụ bằng mặt phẳng (α) vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 16. Biết khoảng cách từ tâm đáy hình trụ đến mặt phẳng (α) bằng 3. Tính thể tích khối trụ.

A. $2\sqrt{3}\pi$. **B.** $\frac{52\pi}{3}$. **C.** 52π. **D.** 13π.

Lời giải

Chọn C



.

Dựng các dữ kiện bài toán theo hình vẽ trên.

Mặt phẳng (α) vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 16 $\Rightarrow$ Cạnh hình vuông bằng 4.

Khoảng cách từ tâm I đáy hình trụ đến mặt phẳng (α) bằng $3 \Rightarrow IO = 3$.

Ta có $IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

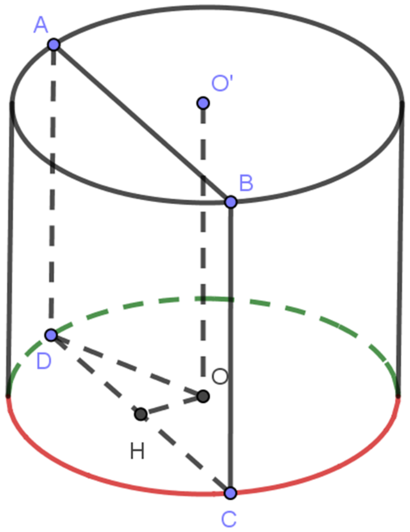
Vậy thể tích khối trụ trên là: $V = \pi.\left(\sqrt{13}\right)^2.4 = 52\pi\left(dvtt\right)$.

Câu 28. Khi cắt khối trụ (T) bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục của trụ (T) một khoảng bằng $a\sqrt{3}$ ta được thiết diện là hình vuông có diện tích bằng $4a^2$. Tính thể tích V của khối trụ (T).

A. $V = 7\sqrt{7}\pi a^3$. **B.** $V = \dfrac{7\sqrt{7}}{3}\pi a^3$. **C.** $V = \dfrac{8}{3}\pi a^3$. **D.** $V = 8\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Thiết diện là hình vuông $ABCD$. $S_{ABCD} = 4a^2 \Rightarrow AD = CD = 2a$

Gọi H là trung điểm CD $\Rightarrow OH \perp CD \Rightarrow OH \perp (ABCD) \Rightarrow OH = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow OD = \sqrt{DH^2 + OH^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

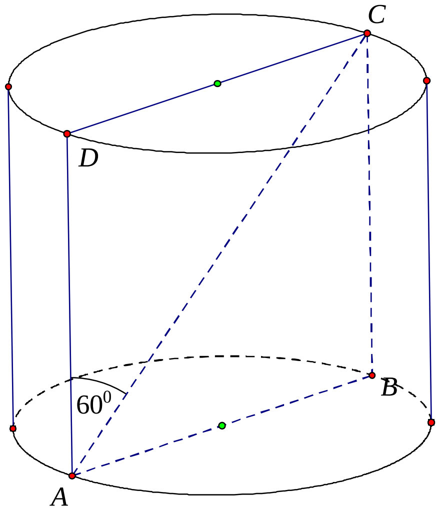
$h = AD = 2a, r = OD = 2a \Rightarrow V = \pi r^2 h = 8\pi a^3$.

Câu 29. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD = a\sqrt{2}$, $\widehat{DAC} = 60^\circ$. Tính thể tích khối trụ.

A. $\dfrac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên tam giác ADC vuông tại D và $BD = AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông ADC có

$\sin\widehat{DAC} = \frac{DC}{AC} \Leftrightarrow DC = AC\sin\widehat{DAC} \Leftrightarrow DC = a\sqrt{2}.\sin 60° \Leftrightarrow DC = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow$ bán kính mặt đáy của hình trụ là $r = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

$\cos\widehat{DAC} = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow AD = AC\cos\widehat{DAC} \Leftrightarrow AD = a\sqrt{2}\cos 60° \Leftrightarrow AD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ chiều cao của hình trụ là $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

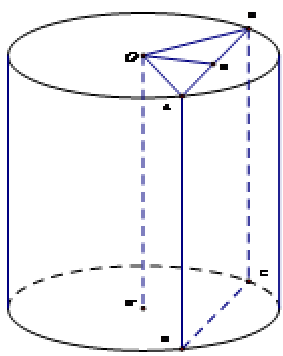
Câu 30. Cho hình trụ có đường cao bằng $8a$. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục hình trụ $3a$, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông. Diện tích xung quanh và thể tích khối trụ bằng

A. $S = 80\pi a^2, V = 200\pi a^3$. **B.** $S = 60\pi a^2, V = 200\pi a^3$.

C. $S = 80\pi a^2, V = 180\pi a^3$. **D.** $S = 60\pi a^2, V = 180\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Thiết diện $ABCD$ là hình vuông có cạnh là $8a$ $(h = 8a)$.

Khoảng cách từ trục đến mặt phẳng $(ABCD)$ là $d = 3a$

Suy ra bán kính đường tròn đáy $r=\sqrt{d^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}=5$

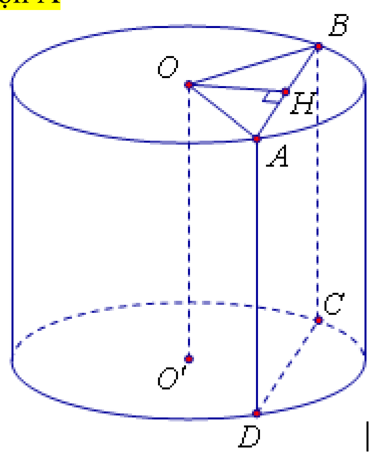
Vậy $S_{xq}=2\pi rh=80\pi a^2$, $V_{tr}=\pi r^2h=200\pi a^3$.

Câu 31. Một hình trụ có bán kính đáy $r=5\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy $h=7\text{ cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm. Diện tích của thiết diện được tạo thành là:

A. $S=56\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $S=55\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $S=53\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $S=46\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O,O' là tâm của hai đáy của hình trụ và (P) là mặt phẳng song song với trục và cách trục OO' một khoảng 3cm.

Mp(P) cắt hai hình tròn đáy $(O),(O')$ theo hai dây cung lần lượt là AB,CD và cắt mặt xung quanh theo hai đường sinh là AD,BC. Khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật.

Gọi H là trung điểm của AB. Ta có $OH\perp AB;OH\perp AD\Rightarrow OH\perp(ABCD)$

$\Rightarrow d\left(OO',(P)\right)=d\left(O,(ABCD)\right)=OH=3\text{cm}$.

Khi đó: $AB=2AH=2\sqrt{OA^2-OH^2}=2\sqrt{5^2-3^2}=8$; $AD=OO'=h=7\text{cm}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S_{ABCD}=AB.AD=56\left(cm^2\right)$.

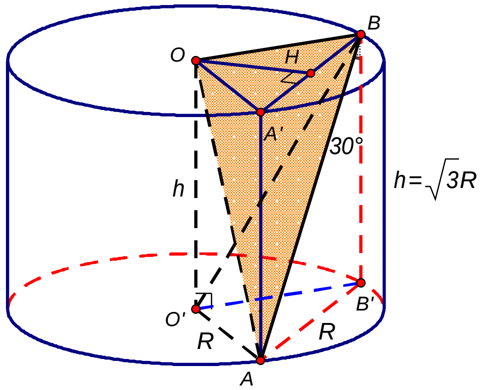
Câu 32. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy (O,R) và (O',R), chiều cao $h=\sqrt{3}R$. Đoạn thẳng AB có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy hình trụ sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là $\alpha=30^0$. Thể tích tứ diện $ABOO'$ là

A. $\frac{3R^3}{2}$. **B.** $\frac{3R^3}{4}$. **C.** $\frac{R^3}{4}$. **D.** $\frac{R^3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có hình vẽ như sau:



Ta có: $O'O \parallel BB'$ nên $\left(\widehat{AB,O'O}\right) = \left(\widehat{AB,BB'}\right) = \widehat{ABB'} = 30^0$.

Đặt $V = V_{OA'B.O'AB'}$

Ta có $V_{ABOO'} = V_{B.AOO'} = V_{B.A'AO} = V_{A.A'BO} = \dfrac{1}{3}V$ vì $S_{\Delta AOO'} = S_{\Delta A'AO}$

Ta có $OB = R,\ A'B = R\sqrt{3}\tan 30^0 = R$ nên $\Delta OA'B$ đều, $S_{\Delta OA'B} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

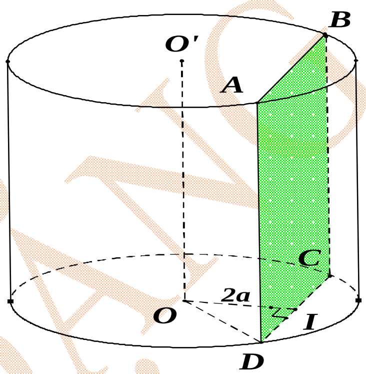
$V_{O'OAB} = \dfrac{1}{3}V = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}R\left(\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{R^3}{4}$.

Câu 33. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $36a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $4\sqrt{13}\pi a^2$. **B.** $12\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $6\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục OO' ta được thiết diện là một hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng $36a^2$. Suy ra $S_{ABCD} = CD^2 = 36a^2 \Rightarrow CD = AD = 6a$.

Gọi I là trung điểm của CD, ta có:

$$\begin{cases} OI \perp CD \\ OI \perp AD \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI = d\left(O,(ABCD)\right) = d\left(OO',(ABCD)\right) = 2a.$$

ΔOID vuông tại I có $ID = \dfrac{CD}{2} = 3a; OI = 2a \Rightarrow OD^2 = OI^2 + ID^2 = 13a^2 \Rightarrow OD = a\sqrt{13}$.

Suy ra $r = OD = a\sqrt{13}$.

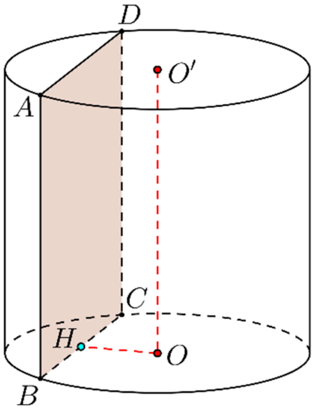
Diện tích xung quanh của hình trụ (T) là $S_{xq}=2\pi rl=2\pi.a\sqrt{13}.6a=12\sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 34. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\frac{16\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{12}\pi a^2$. **C.** $\frac{8\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Thiết diện là hình vuông $ABCD$ và $d\left(OO';(ABCD)\right)=OH$.

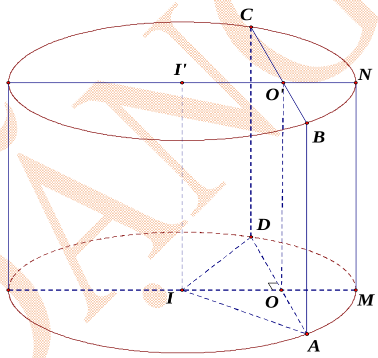
Ta có: $S_{ABCD}=16a^2\Rightarrow BC=h=4a$ và $OH=3a$, suy ra: $R=\sqrt{BH^2+OH^2}=\sqrt{13}a$.

Diện tích xung quanh: $S_{xq}=2\pi Rh=8\pi\sqrt{13}a^2$.

Câu 35. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $8\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. **C.** $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. **D.** $16\sqrt{2}\pi a^2$.

Lời giải



Gọi I,I' lần lượt là tâm hai đường tròn đáy. Suy ra trục của (T) là II'.

Thiết diện là hình vuông $ABCD$. $S_{ABCD}=16a^2\Rightarrow l=AB=AD=4a$.

Gọi $O,\ O'$ lần lượt trung điểm của $AD,\ BC$ $\Rightarrow OA=2a$.

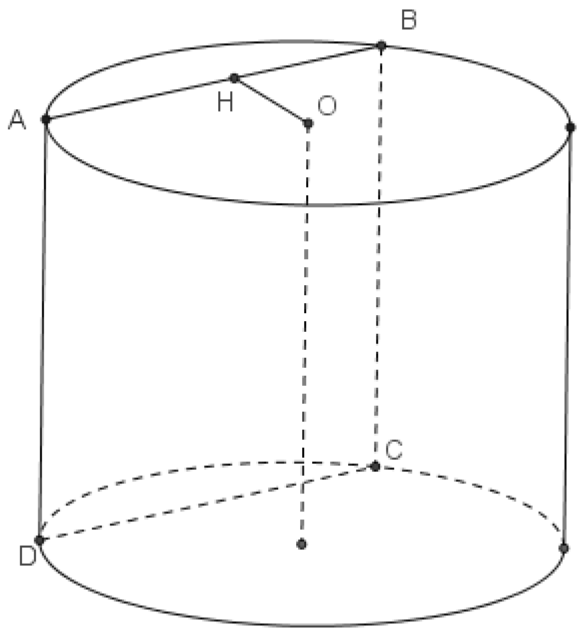
$d(II',(ABCD))=d\left(I,(ABCD)\right)=IO=2a\Rightarrow R=IA=\sqrt{IO^2+OA^2}=\sqrt{4a^2+4a^2}=2\sqrt{2}a.$

Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng: $S=2\pi.R.l=2\pi.2\sqrt{2}a.4a=16\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 36. [Mức độ 3] Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $36a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $12\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $36\sqrt{2}\pi a^2$. **C.** $24\sqrt{2}\pi a^2$. **D.** $18\sqrt{2}\pi a^2$.

Lời giải



Gọi thiết diện của hình trụ được cắt bởi mặt phẳng sog song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$ là hình vuông $ABCD$ (hình vẽ). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

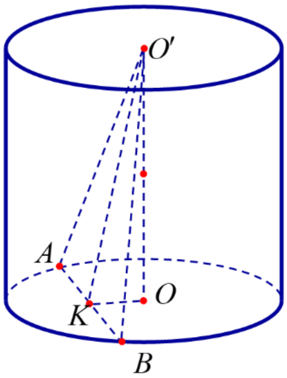
Từ giả thiết suy ra $AB = 6a, OH = 3a \Rightarrow OA = 3a\sqrt{2} \Rightarrow S_{xq} = 2\pi Rl = 36\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 37. Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn (O,R) và (O',R). Biết rằng tồn tại dây cung AB của đường tròn (O,R) sao cho tam giác $O'AB$ đều và góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và mặt phẳng chứa đường tròn (O,R) bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đã cho.

A. $4\pi R^2$ **B.** $2\sqrt{3}\pi R^2$ **C.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}\pi R^2$ **D.** $\frac{6\sqrt{7}}{7}\pi R^2$

Lời giải

Chọn D



Gọi K là trung điểm AB, đặt $AB = 2a$.

Ta có : $AB \perp OK$ và $AB \perp OO'$ nên $\widehat{OKO'} = 60^\circ$ $\Rightarrow O'K = 2OK$ $\Rightarrow O'K^2 = 4OK^2$

$\Rightarrow 3a^2 = 4\left(R^2 - a^2\right) \Rightarrow a^2 = \dfrac{4R^2}{7}$

Mặt khác : $OO'^2 = O'B^2 - OB^2 = 4a^2 - R^2 = 4.\dfrac{4R^2}{7} - R^2 = \dfrac{9R^2}{7} \Rightarrow O'O = \dfrac{6\sqrt{7}\pi R}{7}$

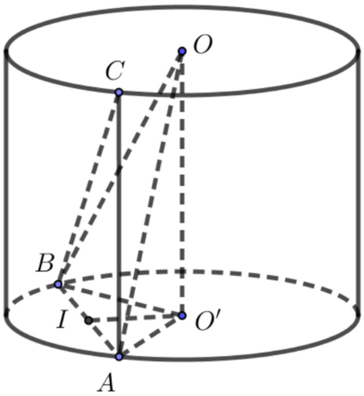
Vậy diện tích xung quanh hình trụ đã cho là : $S_{xq} = 2\pi Rl = \dfrac{6\sqrt{7}\pi R^2}{7}$.

Câu 38. Một khối trụ có bán kính đáy $r = 2a$. O, O' lần lượt là tâm đường tròn đáy. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$, cắt đường tròn (O') tại hai điểm A, B. Biết thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Độ dài đường cao của hình trụ bằng

A. a. **B.** $6a$. **C.** $3a$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn C



Vẽ đường sinh AC, khi đó mặt phẳng (ABC) song song với OO' và cách OO' một khoảng $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Gọi I là trung điểm AB, ta có $d\left(OO',(ABC)\right) = d\left(O',(ABC)\right) = O'I = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Bán kính $O'A = 2a$ suy ra $BA = 2IA = 2\sqrt{O'A^2 - O'I^2} = 2\sqrt{4a^2 - \frac{15a^2}{4}} = a$.

Thể tích tứ diện $OO'AB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$ nên ta có : $\frac{1}{6}.OO'.IO'.AB = \frac{a^3\sqrt{15}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{6}.OO'.\frac{a\sqrt{15}}{2}.a = \frac{a^3\sqrt{15}}{4} \Leftrightarrow OO' = 3a$.

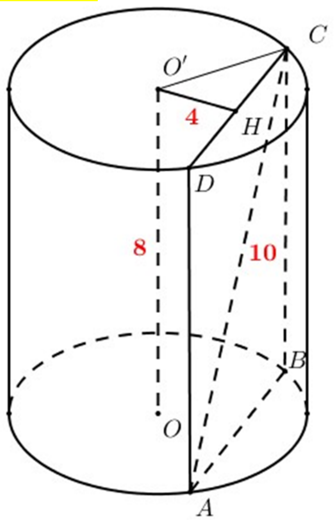
Vậy hình trụ có chiều cao $OO' = 3a$.

Câu 39. Cho hình trụ có chiều cao bằng $8a$. Biết hai điểm A, C lần lượt nằm trên hai đáy thỏa $AC = 10a$, khoảng cách giữa AC và trục của hình trụ bằng $4a$. Thể tích của khối trụ đã cho là

A. $128\pi a^3$. **B.** $320\pi a^3$. **C.** $80\pi a^3$. **D.** $200\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $(O),(O')$ lần lượt là hai đường tròn đáy. $A \in (O), C \in (O')$.

Dựng AD, CB lần lượt song song với OO' ($D \in (O'), B \in (O)$. Dễ dàng có $ABCD$ là hình chữ nhật.

Do $AC = 10a, AD = 8a \Rightarrow DC = 6a$.

Gọi H là trung điểm của DC.

$\begin{cases} O'H \perp DC \\ O'H \perp AD \end{cases} \Rightarrow O'H \perp (ABCD)$.

Ta có $OO' // (ABCD) \Rightarrow d(OO', AC) = d(OO', (ABCD)) = O'H = 4a$.

$O'H = 4a, CH = 3a \Rightarrow R = O'C = 5a$.

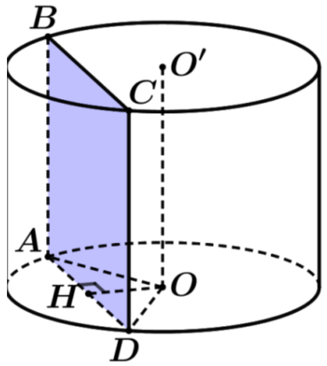
Vậy thể tích của khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi (5a)^2 8a = 200\pi a^3$.

Câu 40. Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $10\sqrt{3}\pi$. **B.** $5\sqrt{39}\pi$. **C.** $20\sqrt{3}\pi$. **D.** $10\sqrt{39}\pi$.

Lời giải

Chọn C



Gọi hình trụ có hai đáy là O, O' và bán kính R.

Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục nên thiết diện thu được là hình chữ nhật $ABCD$ với AB là chiều cao khi đó $AB = CD = 5\sqrt{3}$ suy ra $AD = BC = \dfrac{30}{5\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Gọi H là trung điểm của AD ta có $OH = 1$ suy ra $R = \sqrt{OH^2 + \dfrac{AD^2}{4}} = \sqrt{1 + \dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4}} = 2$.

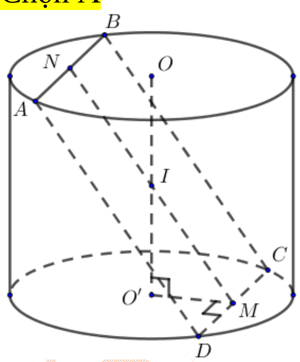
Vậy diện tích xung quanh hình trụ là $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.2.5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\pi$.

Câu 41. Cho hình trụ có O, O' là tâm hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A, B cùng thuộc (O) và C, D cùng thuộc (O') sao cho $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc $60°$. Thể tích khối trụ bằng

A. $\pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2\pi a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB và I là trung điểm của OO'.

Suy ra góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng đáy là $\widehat{IMO'} = 60°$.

Ta có $IM = \dfrac{1}{2}MN = \dfrac{1}{2}BC = a$.

Xét $\Delta IO'M$ vuông tại O, ta có $IO' = IM.\sin\widehat{IMO'} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = OO' = 2IO' = a\sqrt{3}$;

$O'M = IM.\cos\widehat{IMO'} = \dfrac{a}{2}$.

Xét $\Delta O'MD$ vuông tại M, có $O'M = \dfrac{a}{2}, MD = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow r = O'D = \sqrt{O'M^2 + MD^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow r = a.$$

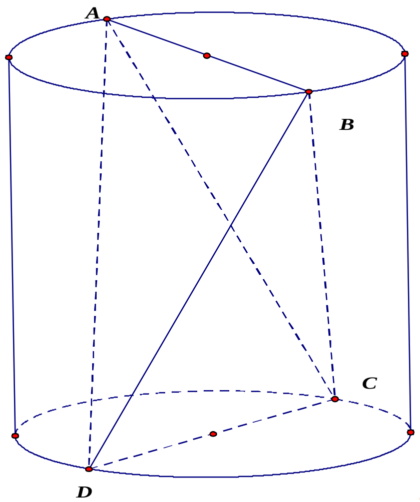
Vậy $V = \pi r^2 h = \pi a^3\sqrt{3}$.

Câu 42. Cho khối trụ có hai đáy là (O) và (O'). AB, CD lần lượt là hai đường kính của (O) và (O'), góc giữa AB và CD bằng $30°$, $AB = 6$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 30. Thể tích khối trụ đã cho bằng

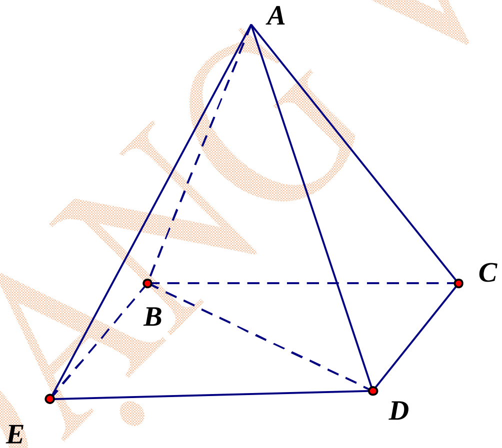
A. 180π. **B.** 90π. **C.** 30π. **D.** 45π.

Lời giải

Chọn B



Ta chứng minh: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d\left(AB, CD\right).\sin\left(AB, CD\right)$.



Lấy điểm E sao cho tứ giác $BCDE$ là hình bình hành.

Khi đó $\left(AB, CD\right) = \left(AB, BE\right) \Rightarrow \sin\left(AB, CD\right) = \sin\left(AB, BE\right)$.

$d\left(D, \left(ABE\right)\right) = d\left(AB, CD\right)$.

$$V_{ABCD} = V_{ABDE} = \frac{1}{3}.d\left(D, \left(ABE\right)\right).S_{ABE} = \frac{1}{6}AB.CD.d\left(AB, CD\right).\sin\left(AB, CD\right)$$

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.d\left(AB,CD\right).\sin\left(AB,CD\right)\Rightarrow d\left(AB,CD\right)=\frac{6V_{ABCD}}{AB.CD.\sin 30^\circ}=\frac{180}{6.6.\frac{1}{2}}=10$.

Chiều cao của lăng trụ bằng $h=d\left(AB,CD\right)=10$.

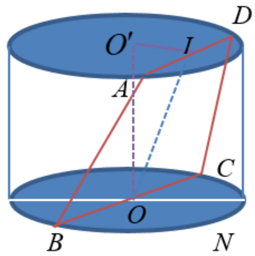
Thể tích lăng trụ: $V=S.h=\pi.3^2.10=90\pi$.

Câu 43. Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', chiều cao $h=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc 30°, cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử $ABCD$ là hình thang mà đề bài đề cập (BC đáy lớn, AD đáy nhỏ) và r là bán kính đáy của hình trụ.

Theo đề: $\begin{cases}BC=2r\\BC=2AD\end{cases}\Rightarrow AD=r$

Kẻ $O'I\perp AD\Rightarrow AD\perp\left(OO'I\right)\Rightarrow\left(ABCD\right)\perp\left(OO'J\right)$

Suy ra góc giữa OO' và $\left(ABCD\right)$ là góc $\widehat{O'OI}$. Theo đề $\widehat{O'OI}=30^\circ$

$\cos\widehat{O'OI}=\frac{OO'}{OI}\Leftrightarrow OI=\frac{OO'}{\cos 30^\circ}=\frac{a\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2a$

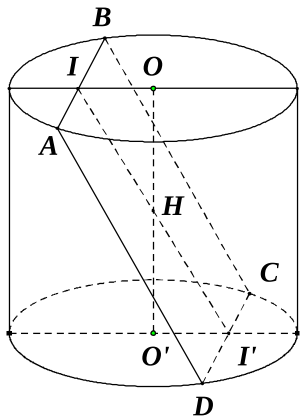
Ta có: $S_{ABCD}=\frac{\left(AD+BC\right).IO}{2}\Leftrightarrow 3a^2=\frac{\left(r+2r\right).2a}{2}\Leftrightarrow r=a$

Thể tích của khối trụ là $V=\pi r^2h=\pi a^2.a\sqrt{3}=\pi a^3\sqrt{3}$

Câu 44. Cho hình trụ và hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Hai đỉnh liên tiếp A,B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thức hai, mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ tạo với đáy một góc 45°. Khi đó thể tích khối trụ là

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải



Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AB, CD; O, O' lần lượt là tâm đường tròn đáy của hình trụ; H là trung điểm của II'.

Khi đó H là trung điểm của OO' và góc giữa $(ABCD)$ tạo với đáy là $\widehat{HI'O} = 45°$.

Do $I'H = \dfrac{a}{2} \Rightarrow O'H = O'I' = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Khi đó $h = OO' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $r = O'C = \sqrt{O'I'^2 + I'C^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

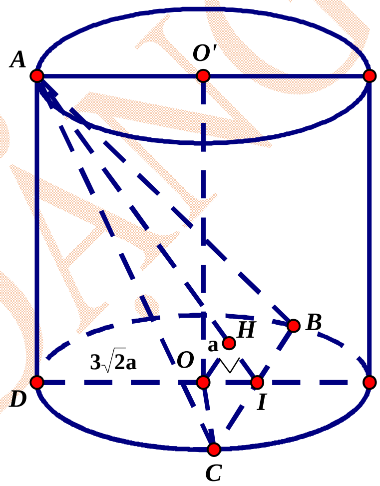
Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 45. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $3\sqrt{2}a$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A nằm trên đường tròn đáy và cắt đáy còn lại của hình trụ theo dây cung BC, $BC = 8a$. Biết khoảng cách từ tâm đáy chưa BC đến mặt phẳng (P) bằng a. Tính thể tích khối trụ.

A. $72\sqrt{2}a^3\pi$. **B.** $31\sqrt{2}a^3\pi$. **C.** $24\sqrt{2}a^3\pi$. **D.** $12\sqrt{2}a^3\pi$.

Lời giải

Chọn A



$BC = 8a \Rightarrow CI = 4a$

Xét $\Delta OCI\left(\hat{I} = 1v\right): OI = \sqrt{18a^2 - 16a^2} = a\sqrt{2}$

Vậy ΔOHI vuông cân tại H

$\Rightarrow AD = DI = 4\sqrt{2}a$

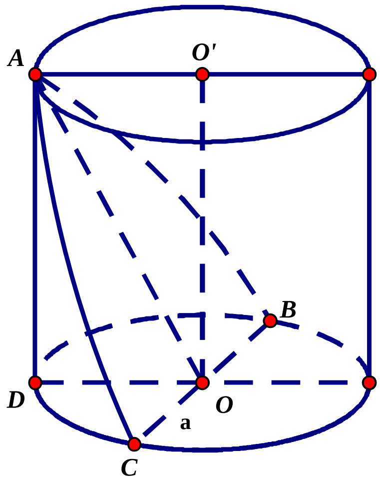
Vậy $V = AD.OD^2\pi = 72\sqrt{2}\pi a^3$

Câu 46. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và lần lượt tâm của hai đáy là O, O'. Điểm A thuộc vào đường tròn đáy tâm O'. Mặt phẳng (P) đi qua A, O cắt hình trụ đã cho theo một thiết diện là nửa hình elip có tiêu điểm thuộc đoạn thẳng OA. Biết rằng tiêu cự của thiết diện này gấp đôi độ dài trục nhỏ. Tính thể tích khối trụ đó

A. $2a^3\pi$. **B.** $\sqrt{5}a^3\pi$. **C.** $\sqrt{2}a^3\pi$. **D.** $\sqrt{3}a^3\pi$.

Lời giải

Chọn A



Do thiết diện là nửa elip và tiêu cự thuộc OA nên trục nhỏ là $OC = a$, trục lớn là OA

Gọi f là tiêu cự: $OA^2 = f^2 + OC^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$

Xét $\Delta OAD\left(\widehat{D} = 1v\right): AD = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$

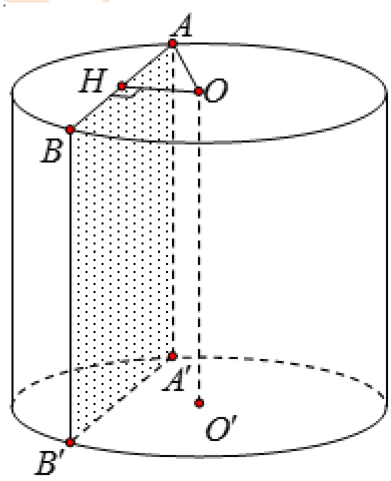
Vậy: $V = AD.OD^2\pi = 2\pi a^3$

Câu 47. Cho hình trụ có đường cao $h = 5(cm)$. Mặt phẳng (P) song song với trụ của hình trụ và cách trục hình trụ một khoảng $2(cm)$ cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích $S = 10\sqrt{5}\left(cm^2\right)$. Tính thể tích khối trụ.

A. 45π. **B.** 20π. **C.** 24π. **D.** 48π.

Lời giải

Chọn A



Giả sử thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$. Ta có $S_{ABB'A'} = AB.AA' = 10\sqrt{5} \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$.

Dựng $OH \perp AB$, khi đó $d\left(OO'; ABB'A'\right) = OH = 2(cm)$

Trong tam giác ΔOHA có $OA = \sqrt{HA^2 + OH^2} = 3(cm)$

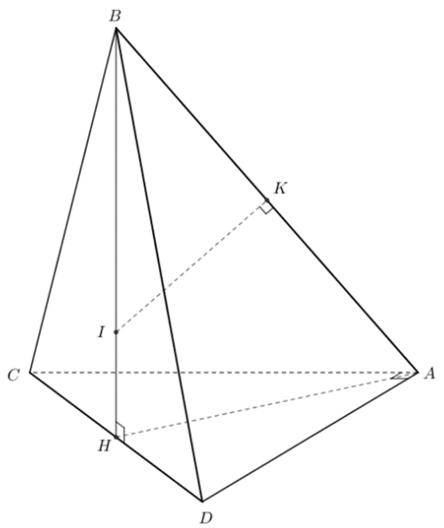
Do đó $V = AA'.OA^2\pi = 5.3^2\pi = 45\pi$.

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = AC = BD = 2a, AD = a\sqrt{3}$; hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{64\pi a^2}{27}$ **B.** $\dfrac{4\pi a^2}{27}$ **C.** $\dfrac{16\pi a^2}{9}$ **D.** $\dfrac{64\pi a^2}{9}$

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm CD $\Rightarrow BH \perp (ACD)$ và tam giác ACD vuông tại#A.

$\Rightarrow CD = \sqrt{CA^2 + AD^2} = a\sqrt{7}$ và $BH = \sqrt{BD^2 - HD^2} = \dfrac{3}{2}a.$

Trong mặt phẳng (BHA) kẻ đường trung trực Δ của cạnh BA và gọi $I = \Delta \cap SH$

Khi đó ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Ta có

$\Delta BIK \sim \Delta BAH \Rightarrow BI = \dfrac{BK.BA}{BH} = \dfrac{BA^2}{2BH} = \dfrac{4}{3}a$.

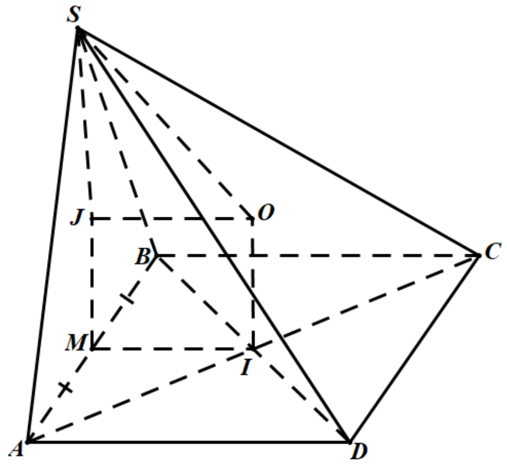
Suy ra bán kính mặt cầu là $R = BI = \dfrac{4}{3}a.$

Vậy diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \dfrac{64\pi a^2}{9}$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a,\ AD = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ASB} = 60°$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S=\dfrac{13\pi a^2}{2}$. **B.** $S=\dfrac{13\pi a^2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{11\pi a^2}{2}$. **D.** $S=\dfrac{11\pi a^2}{3}$.

Lời giải



Gọi I, J là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác ABCD và tam giác SAB. M là trung điểm của AB và O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có: $JM\perp AB$ và $IM\perp AB$ và $mp(SAB)\perp mp(ABCD)$ nên $IM\perp JM$, ngoài ra O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nên $OI\perp(ABCD)\Rightarrow OI\perp IM$; $OJ\perp(SAB)\Rightarrow OJ\perp JM$.

Do đó O, J, M, I đồng phẳng và tứ giác $OJMI$ là hình chữ nhật.

Gọi R, R_b lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Ta có: $R=SO=\sqrt{SJ^2+OJ^2}=\sqrt{R_b^2+IM^2}=\sqrt{R_b^2+IA^2-AM^2}=\sqrt{R_b^2+IA^2-\dfrac{AB^2}{4}}$

Áp dụng định lý Pytago: $IA^2=\dfrac{BD^2}{4}=\dfrac{AB^2+AD^2}{4}=\dfrac{a^2+3a^2}{4}=a^2\Rightarrow IA=a$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác SAB: $R_b=\dfrac{AB}{2\sin\widehat{ASB}}=\dfrac{a}{2.\sin 60^\circ}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Do đó: $R=\sqrt{\dfrac{a^2}{3}+a^2-\dfrac{a^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{13}{12}}a^2\Rightarrow S=4\pi R^2=\dfrac{13}{3}\pi a^2$.

Nhận xét: Bài toán này áp dụng một bổ đề quan trọng sau:

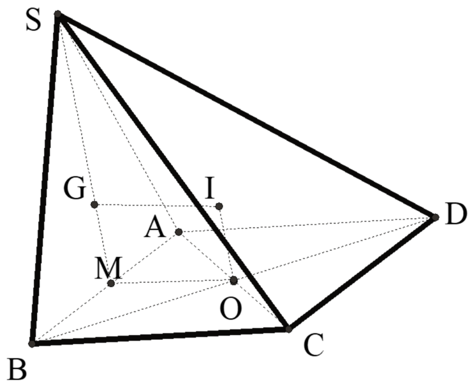
Xét hình chóp đỉnh S, có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng đáy nội tiếp trong đường tròn bán kính R_d, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tam giác SAB là R_b. Khi đó hình chóp này nội tiếp trong 1 mặt cầu có bán kính $R=\sqrt{R_d^2+R_b^2-\dfrac{AB^2}{4}}$

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB=2a,\ AD=a.$ Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{57}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{19}}{4}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của đáy, M là trung điểm của AB và G là tâm của tam giác đều SAB.
Gọi d,Δ lần lượt là trục của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và tam giác SAB.
Do $(SAB)\perp(ABCD),(SAB)\cap(ABCD)=AB, SM\perp AB$ nên $SM\perp(ABCD)$.
Mặt khác $d\perp(ABCD)$ nên $d\,//\,SM$ hay $\Delta\subset mp(d,SM)$, Δ và d cắt nhau tại I.
Ta có I cách đều S,A,B,C,D nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
Tứ giác $GMOI$ có $GM\perp MO, IG\perp GM, SM\,//\,IO$ nên $GMOI$ là hình chữ nhật. $SM=a\sqrt{3}, GM=\frac{1}{3}SM=\frac{a\sqrt{3}}{3}, AO=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

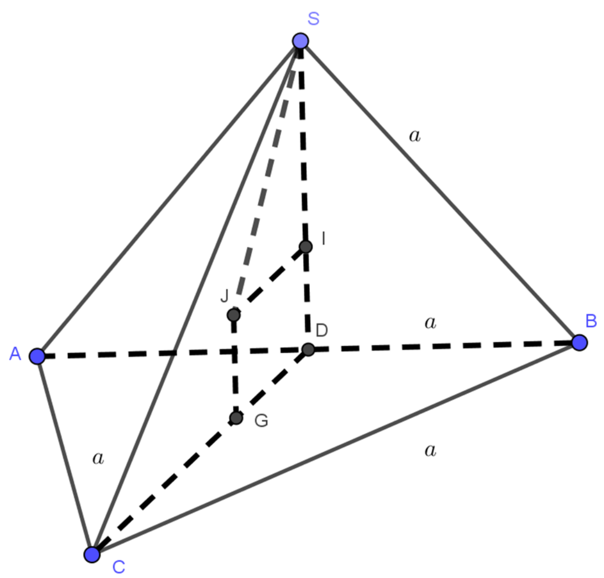
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R=IA=\sqrt{IO^2+AO^2}=\sqrt{\frac{a^2}{3}+\frac{5a^2}{4}}=\frac{\sqrt{57}a}{6}$.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{5a^2\pi}{12}$. **B.** $\frac{5a^2\pi}{3}$. **C.** $\frac{5a^2}{3}$. **D.** $\frac{5a^2}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G,I là lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và SAB.

Trục của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và SAB cắt nhau tại J nên J là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính mặt cầu là $R = SJ$

Ta có $IJ = GD = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $SI = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $R = SJ = \sqrt{SI^2 + JI^2} = \frac{\sqrt{15}a}{6}$

Vậy Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi R^2 = \frac{5\pi a^2}{3}$

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2022

Câu 48. (ĐTK BGD 2022) Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất bốn số nguyên $b\in(-12;12)$ thỏa mãn $4^{a^2+b}\le 3^{b-a}+65$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Phân tích

Một câu liên quan tới dạng toán tìm nghiệm nguyên thỏa bất phương trình mũ – logarit, ta dùng hàm số để xét.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4^{a^2+b}\le 3^{b-a}+65 \Leftrightarrow 4^{a^2+b}-3^{b-a}-65\le 0$

$\Leftrightarrow 4^{a^2}-\dfrac{3^{b-a}}{4^b}-\dfrac{65}{4^b}\le 0 \Leftrightarrow -\left(\dfrac{3}{4}\right)^b.\dfrac{1}{3^a}-65.\left(\dfrac{1}{4}\right)^b+4^{a^2}\le 0$

Xét hàm số $f(b)=-\left(\dfrac{3}{4}\right)^b.\dfrac{1}{3^a}-65.\left(\dfrac{1}{4}\right)^b+4^{a^2}$, $b\in(-12;12)$

Suy ra $\Rightarrow f'(b)=-\ln\left(\dfrac{3}{4}\right).\left(\dfrac{3}{4}\right)^b.\dfrac{1}{3^a}-65\ln\left(\dfrac{1}{4}\right).\left(\dfrac{1}{4}\right)^b>0$. Do đó $f(b)$ đồng biến.

Để $f(b)\le 0$ có ít nhất 4 giá trị nguyên thỏa mãn thì $f(-8)\le 0\Leftrightarrow 4^{a^2-8}\le 3^{-a-8}+65$

$\Rightarrow 4^{a^2-8}\le 65\Rightarrow a^2-8\le\log_4 65$. Do $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in\{-3;-2;...3\}$. Có 7 giá trị nguyên của a.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi số nguyên x có đúng 5 số nguyên y thỏa mãn $3^{y^2-|x-2y|}\le\log_{y^2+3}(|x-2y|+3)$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên dương $\Leftrightarrow 0<m\le 10^{2,01}\approx 102,33$ sao cho ứng với mỗi số $m\in\{1;2;3;...;102\}$ có tối đa 15 số nguyên x thỏa mãn

A. 13. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 15.

Câu 3. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m;n)$ với $m+n\le 16$ sao cho có không quá 4 số nguyên a thỏa mãn $a^{2m}\le n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 112. **B.** 109. **C.** 105. **D.** 98.

Câu 4. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng mỗi y luôn tồn tại không quá 63 số nguyên x thỏa mãn điều kiện $log_{2020}\left(x+y^2\right)+log_{2021}\left(y^2+y+64\right)\ge log_4(x-y)$

A. 602. **B.** 302. **C.** 301. **D.** 2.

Câu 5. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ sao cho x,y thuộc đoạn $[-2;10]$ và thỏa mãn $2^x+y\le\log_2(x-y)$?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 6. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho cứ ứng với mỗi x thì mọi giá trị thực của y đều thỏa mãn $\log_5\left(y^2+2xy+2x^2-1\right)\le 1+\log_3\left(y^2+2y+4\right).\log_5\left(y^2+4\right)$?

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 7. : Có bao nhiêu số nguyên dương $x \in [0;20]$ để tồn tại ít nhất 4 số nguyên dương y thỏa mãn: $\left(1+4^{2x-y^2}\right).5^{1-2x+y^2} \le 1+2^{2x-y^2}$

A. 12. **B.** 14. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 8. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với số nguyên y có tối đa 100 số nguyên x thỏa mãn $3^{y-3x} \ge \log_5(x+y^2)$

A. 20. **B.** 24. **C.** 6. **D.** 16.

Câu 9. Có tất cả bao nhiêu cặp số (a,b) với a,b là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_3(a+b)+(a+b)^3 \le 3\left(a^2+b^2\right)+3ab(a+b-1)+1$

A. 3. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 15.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20;20]$ để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=1-2x-2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_2(x+5)+m^2+9 \le 0$.

A. 23. **B.** 22. **C.** 16. **D.** 25.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [0;100]$ để bất phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}-2^{x+1} > 1-2^{x-2}\left(x^3-6x^2+9x+m\right)$ đúng với mọi $x \in (1;+\infty)$.

A. $P=92$. **B.** $P=90$. **C.** $P=64$. **D.** $P=56$.

Câu 12. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (0;2022)$ sao cho ứng với mỗi số a, tồn tại ít nhất mười số nguyên $b \in (-10;10)$ thỏa mãn $2^b 3^a + 6560 \le 3^{2a^2+b}$?

A. 2021. **B.** 2019. **C.** 2018. **D.** 2020.

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên $x \in (-5;5)$ sao cho ứng với mỗi x, tồn tại ít nhất 5 giá trị nguyên của $y \in (-10;10)$ thỏa mãn $12.6^{2y-x^2}+39.\dfrac{35^y}{6^{x^2}} \le 7^{x^3}.5^{2y}.8$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên a để tồn tại số thực b thỏa mãn $3^{a+b}=4^{a^2+b^2}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a thì mọi số thực dương b đều thỏa $2\left(b^{\log a}+\dfrac{1}{b^{\log a}}+1\right) \le 3\left(b^2+\dfrac{1}{b^2}\right)$?

A. 100. **B.** 900. **C.** 99. **D.** 899.

Câu 16. Gọi S là tập các cặp số thực (x,y) sao cho $x \in [-1;1]$ và $ln(x-y)^x - 2017x = ln(x-y)^y - 2017y + e^{2018}$. Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P = e^{2018x}(y+1) - 2018x^2$ với $(x,y) \in S$ đạt được tại $(x_0;y_0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $x_0 \in (-1;0)$. **B.** $x_0 = -1$. **C.** $x_0 = 1$. **D.** $x_0 \in 0;1)$.

Câu 17. Cho a,b là hai số thực thay đổi thỏa mãn $1 < a < b \le 2$, biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2.log_a(b^2+4b-4) + log^2_{\frac{b}{a}} a$ là $m + 3\sqrt[3]{n}$ với m,n là số nguyên dương. Tính $S = m+n$.

A. S = 9. **B.** S = 18. **C.** S = 54. **D.** S = 15.

Câu 18. Có bao nhiêu số nguyên $y \in (-20;20)$ thỏa mãn $2 + log_{\sqrt{3}}(3x^2+1) \le log_{\sqrt{3}}(yx^2-6x+2y)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10 **D.** 8.

Câu 19. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 50 số nguyên x thỏa mãn $(log_5 x + x - 1)(log_7 x - y) < 0$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 20. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $log_3(x+y) = log_4(x^2+2y^2)$?

A. 3 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

Câu 21. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình sau có đúng 5 nghiệm nguyên: $\log m - \log_2 \left|x^2 - 6x + 5\right| \geq 0$?

A. 210. **B.** 3635. **C.** 3636. **D.** 20.

Câu 22. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi số nguyên x có đúng 5 số nguyên y thỏa mãn $3^{y^2 - |x-2y|} \leq \log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right)$?

A. 10. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 23. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 5 số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x+2} - \sqrt[3]{2}\right)\left(5^x - y\right) < 0$?

A. 125. **B.** 625. **C.** 25. **D.** 4.

Câu 24. Số giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $\left(3^{x+2} - \sqrt{3}\right)\left(3^x - m\right) < 0$ có tập nghiệm chứa không quá 6 số nguyên là

A. 32. **B.** 31. **C.** 243. **D.** 244.

Câu 25. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ với $1 \leq a \leq 100$; $1 \leq b \leq 100$ sao cho tồn tại đúng 2 số thực x thỏa mãn $a^{-x} + \frac{1}{b} = b^{-x} + \frac{1}{a}$?

A. 9704. **B.** 9702. **C.** 9698. **D.** 9700.

Câu 26. **(ĐTK2021)** Có bao nhiêu số nguyên $a\,(a \geq 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn: $\left(a^{\log x} + 2\right)^{\log a} = x - 2$

A. 8. **B.** 9. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 27. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2 \leq x \leq 2021$ và $2^y - \log_2\left(x + 2^{y-1}\right) = 2x - y$?

A. 2020. **B.** 9. **C.** 2019. **D.** 10.

Câu 28. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 < y < 2020$ và $3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3$.

A. 2020 **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 29. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $x \leq 2020$ thỏa mãn $2(3x - y) = 3\left(1 + 9^y\right) - \log_3(2x - 1)$

A. 1010. **B.** 2020. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 30. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $1 \leq a \leq 100$ và $2^a < 3^b < 2^{a+1}$?

A. 163. **B.** 63. **C.** 37. **D.** 159.

Câu 31. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ với $1 < a < b < 100$ để phương trình $a^x \ln b = b^x \ln a$ có nghiệm nhỏ hơn 1?

A. 2. **B.** 4751. **C.** 4656. **D.** 4750.

Câu 32. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $4^{x+y} = 3^{x^2+y^2}$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 33. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$, $y \geq 2$ và $x^2 + x - xy = x\log_2(xy - x) - 2^x$

A. 2021. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 11.

Câu 34. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 2020$ và $\log_3\left(\frac{2^x - 1}{y}\right) = y + 1 - 2^x$?

A. 2019. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi số nguyên x có đúng 5 số nguyên y thỏa mãn $3^{y^2-|x-2y|} \le \log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right)$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

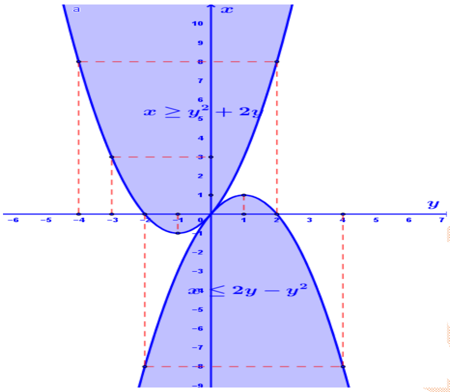
$3^{y^2-|x-2y|} \le \log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right) \Leftrightarrow \dfrac{3^{y^2+3}}{3^{|x-2y|+3}} \le \dfrac{\ln\left(|x-2y|+3\right)}{\ln\left(y^2+3\right)}$

$\Leftrightarrow 3^{y^2+3}\ln\left(y^2+3\right) \le 3^{|x-2y|+3}\ln\left(|x-2y|+3\right)$.

Xét hàm số $f(t)=3^t\ln t$ với $t\ge 3$. $f'(t)=3^t\ln t.\ln t+\dfrac{3^t}{t}>0, \forall t\ge 3 \Rightarrow$ hàm số đb trên $[3;+\infty)$

Ta có: $f\left(y^2+3\right)\le f\left(|x-2y|+3\right) \Leftrightarrow y^2+3\le |x-2y|+3 \Leftrightarrow y^2\le |x-2y|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge y^2+2y=g_1(y) \\ x\le 2y-y^2=g_2(y) \end{array}\right.$



Ta thấy $\left[\begin{array}{l} 3\le x<8 \\ x=0 \\ -8<x\le -3 \end{array}\right.$ thì sẽ có đúng 5 giá trị nguyên của y với mỗi giá trị nguyên của x.

Vậy có tất cả 11 giá trị.

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên dương $\Leftrightarrow 0<m\le 10^{2,01}\approx 102,33$ sao cho ứng với mỗi số $m\in\{1;2;3;...;102\}$ có tối đa 15 số nguyên x thỏa mãn

A. 13. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải

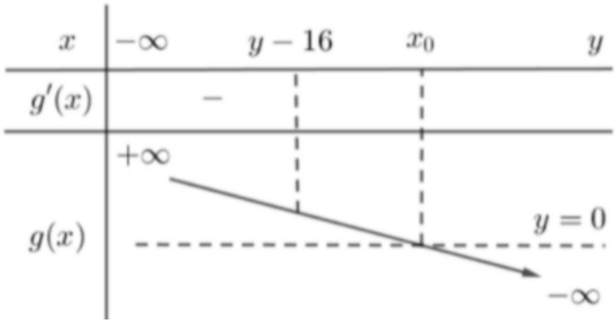
Chọn A

Điều kiện : $y-x>0 \Leftrightarrow x<y$. Bất phương trình tương đương với:

$g(x)=4^{-x}-3x+\log_4(y-x)-2y+2\le 0 \quad (*)$

Có $g'(x)=-4^{-x}\ln 4-3-\dfrac{1}{(y-x)\ln 4}<0, \forall x<y$.

Bảng biến thiên :



Suy ra tập nghiệm của bất phương trình (*) là $S=[x_o;y)$ có chứa tối đa 15 số nguyên là các số :

$y-1, y-2,..., y-15 \Leftrightarrow y-16<x_o \Leftrightarrow g(y-16)>g(x_o)=0$

$\Leftrightarrow 4^{16-y}-5y+52>0 \Rightarrow y\in\{1;2;...;13\}$.

Câu 3. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m;n)$ với $m+n\le 16$ sao cho có không quá 4 số nguyên a thỏa mãn $a^{2m}\le n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

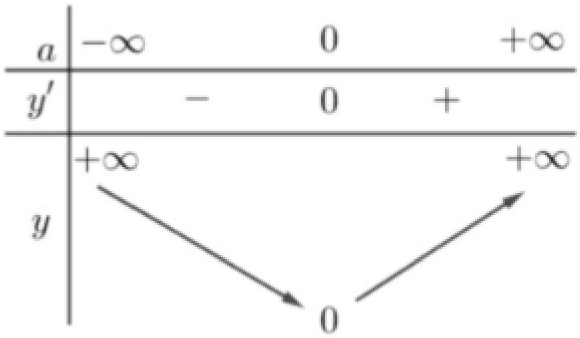
A. 112. **B.** 109. **C.** 105. **D.** 98.

Lời giải

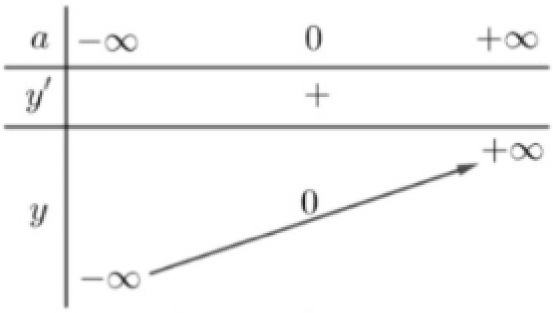
Chọn A

Bất phương trình tương đương với : $g(a)=a^{2m}-n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\le 0$.

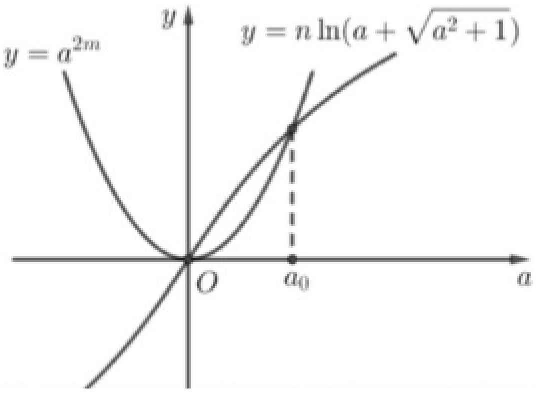
Hàm số $y=a^{2m}$ có $y'=2m.a^{2m-1}=0\Leftrightarrow a=0$. Bảng biến thiên :



Hàm số $y=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$ có $y'=\dfrac{n}{\sqrt{a^2+1}}>0,\ \forall a$. Bảng biến thiên :



Vẽ đồ thị của hai hàm số bên trên lên cùng một hệ trục tọa độ.



Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là : $S = [0; a_0]$ chứa tối đa 4 số nguyên là các số $0,1,2,3$

$\Leftrightarrow a_0 < 4 \Leftrightarrow g(4) > 0 \Leftrightarrow 4^{2m} - n\ln\left(4+\sqrt{17}\right) > 0 \Leftrightarrow n < \dfrac{16^m}{\ln\left(4+\sqrt{17}\right)}$.

Nếu $m = 1 \Rightarrow n < \dfrac{16}{\ln\left(4+\sqrt{17}\right)} \approx 7,64 \Rightarrow n \in \{1,...,7\}$, trường hợp này có 7 cặp.

Với mỗi số nguyên $2 \le m \le 15 \Rightarrow \dfrac{16^m}{\ln\left(4+\sqrt{17}\right)} \ge \dfrac{16^2}{\ln\left(4+\sqrt{17}\right)} \approx 122,2 \Rightarrow n \in \{1,...,16-m\}$ có $16-m$ cách chọn n. Áp dụng quy tắc cộng cho 14 trường hợp của m có tất cả $\sum\limits_{m=2}^{15}(16-m) = 105$ cặp.

Vậy có tất cả 112 cặp thỏa mãn.

Câu 4. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng mỗi y luôn tồn tại không quá 63 số nguyên x thỏa mãn điều kiện $log_{2020}\left(x+y^2\right) + log_{2021}\left(y^2+y+64\right) \ge log_4(x-y)$

A. 602. **B.** 302. **C.** 301. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = log_{2020}\left(x+y^2\right) + log_{2021}\left(y^2+y+64\right) - log_4(x-y)$ (coi y là tham số).

Điều kiện xác định của $f(y)$ là : $\begin{cases} x+y^2 > 0 \\ y^2+y+64 > 0 \\ x-y > 0 \end{cases}$.

Do x, y nguyên nên $x > y \ge -y^2$. Cũng vì x, y nguyên nên ta chỉ cần xét $f(y)$ trên nửa khoảng $[y+1; +\infty)$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\left(x+y^2\right)ln2020} - \dfrac{1}{(x-y)ln4} < 0,\ \forall x \ge y+1$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$y+1$	$y+64$
y'	$-$	
y		$f(y+64)$

Yêu cầu bài toán trở thành:

$f(y+64)<0 \Leftrightarrow log_{2020}\left(y^2+y+64\right)+log_{2021}\left(y^2+y+64\right)<log_4 64$

$\Leftrightarrow log_{2021}\left(y^2+y+64\right).\left(log_{2020}2021+1\right)<3$

$\Leftrightarrow y^2+y+64-2021^{\frac{3}{log_{2020}2021+1}}<0$

$\Rightarrow -301,76<y<300,76$

Mà y nguyên nên $y\in\{-301;-300;...;299;300\}$. Vậy có 602 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu.

Câu 5. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ sao cho x,y thuộc đoạn $[-2;10]$ và thỏa mãn $2^x+y\le\log_2(x-y)$?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

+) Điều kiện $x-y>0$.

+) Vì $x,y\in[-2;10]$ nên $x-y\le 12$. Do đó

$2^x+y\le\log_2(x-y)\le\log_2 12\Rightarrow 2^x\le\log_2 12-y\le\log_2 12+2\approx 5,6$. Suy ra $x\le 2$.

+) $x-y>0\Rightarrow x>y\Rightarrow x\in\{-1;\,0;1;\,2\}$

+) Với $x=-1\Rightarrow 2^{-1}+y\le\log_2(-1-y)$. Điều kiện $-1-y>0\Rightarrow y<-1\Rightarrow y=-2$ (thỏa mãn). Có một nghiệm $(-1;-2)$.

+) Với $x=0\Rightarrow 1+y\le\log_2(-y)$. Điều kiện $-y>0\Rightarrow y<0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2\\y=-1\end{array}\right.$ (thỏa mãn). Có hai nghiệm $(0;-2),(0;-1)$.

+) Với $x=1\Rightarrow 2+y\le\log_2(1-y)$. Điều kiện $1-y>0\Rightarrow y<1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2\,(N)\\y=-1\,(N)\\y=0\,(L)\end{array}\right.$.

Có hai nghiệm $(1;-2),(1;-1)$.

+) Với $x=2\Rightarrow 4+y\le\log_2(2-y)$. Ta có $VT\ge 2, VP\le 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $y=-2$. Có một nghiệm $(2;-2)$.

Vậy bất phương trình có 6 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho cứ ứng với mỗi x thì mọi giá trị thực của y đều thỏa mãn $\log_5\left(y^2+2xy+2x^2-1\right)\le 1+\log_3\left(y^2+2y+4\right).\log_5\left(y^2+4\right)$?

A. 4.   **B.** 7.   **C.** 5.   **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Trước tiên ta phải có $y^2+2xy+2x^2-1>0,\forall y \Leftrightarrow \Delta'_y = x^2-\left(2x^2-1\right)<0 \Leftrightarrow x^2>1$.

Vì bất phương trình đúng với mọi số thực y nên sẽ đúng tại $y=0$. Khi đó :

$\log_5\left(2x^2-1\right)\le 1+\log_3 4.\log_5 4 \Leftrightarrow 0<2x^2-1\le 5^{1+\log_3 4.\log_5 4} \Leftrightarrow x\in\{\pm3;\pm2\}$

Ngược lại với $x\in\{\pm3;\pm2\}$ ta có

$$VP=1+\log_3\left(y^2+2y+4\right).\log_5\left(y^2+4\right)=1+\log_3\left[\underbrace{(y+1)^2+3}_{\ge3}\right].\log_5\left(y^2+4\right)$$

$$\ge 1+\log_5\left(y^2+4\right)=\log_5\left[5\left(y^2+4\right)\right]$$

Và $5\left(y^2+4\right)-\left(y^2+2xy+2x^2-1\right)=4y^2-2xy-2x^2+21=\underbrace{\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2}_{\ge0}+\underbrace{21-\frac{9x^2}{4}}_{\ge0,\forall x\in\{\pm3;\pm2\}}>0$

Vậy tất cả các giá trị $x\in\{\pm3;\pm2\}$ đều thỏa mãn.

Câu 7. **:** Có bao nhiêu số nguyên dương $x\in[0;20]$ để tồn tại ít nhất 4 số nguyên dương y thỏa mãn: $\left(1+4^{2x-y^2}\right).5^{1-2x+y^2}\le 1+2^{2x-y^2}$

A. 12.   **B.** 14.   **C.** 8.   **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

$\left(1+4^{2x-y^2}\right).5^{1-2x+y^2}\le 1+2^{2x-y^2}$

Đặt: $2x-y^2=t$

Ta có: $\left(1+4^t\right).5^{1-t}\le 1+2^t \Leftrightarrow 5.\left(\frac{1}{5}\right)^t+5.\left(\frac{4}{5}\right)^t-2^t-1\le 0$

$$f(t)=5.\left(\frac{1}{5}\right)^t+5.\left(\frac{4}{5}\right)^t-2^t-1$$

Xét hàm số: $f'(t)=5.\left(\frac{1}{5}\right)^t\ln\frac{1}{5}+5.\left(\frac{4}{5}\right)^t\ln\frac{4}{5}-2^t\ln2<0$

$f(1)=0$

$f(t)<0\Leftrightarrow t>1$

Vậy: $2x-y^2>1$

$\Leftrightarrow 2x-1>y^2$

Theo điều kiện: $2x-1>16\Leftrightarrow x>\frac{17}{2}$

Vậy có 12 số thỏa mãn.

Câu 8. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với số nguyên y có tối đa 100 số nguyên x thỏa mãn $3^{y-3x}\ge\log_5(x+y^2)$

A. 20.   **B.** 24.   **C.** 6.   **D.** 16.

Lời giải

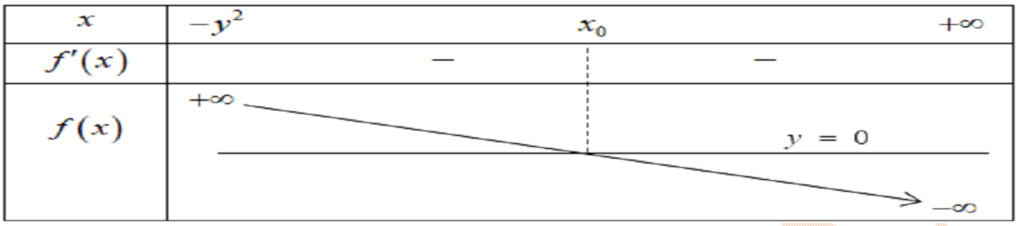
Chọn A

Điều kiện $x > -y^2$ $x > -y^2$

Xét hàm số $f(x) = 3^{y-3x} - \log_5(x + y^2)$

$$f'(x) = -3.3^{y-3x}\ln 3 - \frac{1}{(x+y^2)\ln 5} < 0$$

BBT



Từ BBT ta có tập nghiệm của bất phương trình $(y^2; x_0]$để có tối đa 100 số nguyên x thì

$$f(-y^2 + 101) < 0 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 202 - 3^{\log_5 101} < 0$$

$\Leftrightarrow -10 \le y \le 9$

Vậy có 20 giá trị nguyên của y

Câu 9. Có tất cả bao nhiêu cặp số (a,b) với a,b là các số nguyên dương thỏa mãn

$$\log_3(a+b) + (a+b)^3 \le 3\left(a^2+b^2\right) + 3ab(a+b-1) + 1$$

A. 3. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

Với a,b là các số nguyên dương, ta có

$$\log_3(a+b) + (a+b)^3 \le 3\left(a^2+b^2\right) + 3ab(a+b-1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_3\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2-ab} + a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \le 3\left(a^2+b^2-ab\right) + 3ab(a+b) + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_3\left(a^3+b^3\right) + a^3 + b^3 \le \log_3\left[3\left(a^2+b^2-ab\right)\right] + 3\left(a^2+b^2-ab\right)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0;+\infty)$

$f'(t) = \frac{1}{t\ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Khi đó, phương trình (1) trở thành

$$f\left(a^3+b^3\right) \le f\left[3\left(a^2+b^2-ab\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \le 3\left(a^2+b^2-ab\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2-ab\right)(a+b-3) \le 0$$

$$\Leftrightarrow a + b - 3 \le 0$$

Vậy có ba cặp số (a,b)thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20;20]$ để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_2(x+5) + m^2 + 9 \le 0$.

A. 23. **B.** 22. **C.** 16. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

Ta có $e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=1-2x-2y$

$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=(x+3y-9)-(3x+5y-10)$

$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10}+3x+5y-10=e^{x+3y-9}+x+3y-9$

Xét hàm số $f(t)=e^t+t,\ t\in R$.

Ta có: $f'(t)=e^t+1>0,\ \forall t\in R$ Suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên R.

$\Rightarrow 3x+5y-10=x+3y-9\Leftrightarrow 2y=1-2x$.

Thay vào bất phương trình thứ 2, ta được

$\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_2(x+5)+m^2+9\le 0$

$\Leftrightarrow \log_5^2(x+5)-(m+6)\log_2(x+5)+m^2+9\le 0$

$\Leftrightarrow \log_5^2(x+5)-(m+6)\log_2 5.\log_5(x+5)+m^2+9\le 0\,(1)$.

Đặt $\log_5(x+5)=t\ \ (t\in R,\ x>-5)$. Khi đó bất phương trình (1) trở thành

$t^2-\log_2 5.(m+6)t+m^2+9\le 0$ (2).

Tồn tại x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi bất phương trình (2) có nghiệm nên

$\Delta=(m+6)^2.\log_2^2 5-4(m^2+9)\ge 0\Leftrightarrow(\log_2^2 5-4)m^2+12.\log_2^2 5.m-36(1-\log_2^2 5)\ge 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le m_1 \\ m\ge m_2\end{array}\right.$ với $m_1\approx -43.91$ và $m_2\approx -2.58$

Do $m\in[-20;20]$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;...;19;20\}$.

Vậy có 23 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[0;100]$ để bất phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}-2^{x+1}>1-2^{x-2}(x^3-6x^2+9x+m)$ đúng với mọi $x\in(1;+\infty)$.

A. $P=92$. **B.** $P=90$. **C.** $P=64$. **D.** $P=56$.

Lời giải

Chọn A

Biến đổi đề bài

$2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}-2^{x+1}>1-2^{x-2}(x^3-6x^2+9x+m)$

$\Leftrightarrow 2^{x-2}.2^{\sqrt[3]{m-3x}}+2^{x-2}(x^3-6x^2+9x+m)-2^{x-2}.2^3>1$

$\Leftrightarrow 2^{x-2}\left[2^{\sqrt[3]{m-3x}}+(x^3-6x^2+9x+m)-2^3\right]>1$

$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}}+(x^3-6x^2+12x-8)+m-3x>2^{2-x}$

$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}}+m-3x>2^{2-x}+(2-x)^3$ (*).

Xét hàm số $f(t)=2^t+t^3$.

Tập xác định: $D=R$.

$f'=2^t\ln 2+3t^2>0,\ \forall t\in R$. Do đó, hàm số $f(t)$ đồng biến trên R.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{m-3x}\right)>f(2-x)\Leftrightarrow\sqrt[3]{m-3x}>2-x\Leftrightarrow m>-x^3+6x^2-9x+8$.

Xét hàm số $g(x)=-x^3+6x^2-9x+8$.

Tập xác định: $D=R$.

$g'(x)=-3x^2+12x-9$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+12x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt khi $m>8$.

Vậy có 92 số thỏa mãn.

Câu 1Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_5(x^2+y)\ge\log_2(x+y)$?

A. 1250. **B.** 1249. **C.** 625. **D.** 624.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình đã cho tương đương $\log_2(x+y)-\log_5(x^2+y)\le 0$ (1)

Xét hàm số $f(y)=\log_2(x+y)-\log_5(x^2+y)$.

Tập xác định $D=(-x;+\infty)$

Với mọi $x\in Z$, ta có $x^2\ge x$ nên $f'(y)=\dfrac{1}{(x+y)\ln 2}-\dfrac{1}{(x^2+y)\ln 5}\ge 0,\ \forall x\in D$

$\Rightarrow f(y)$ đồng biến trên khoảng $(-x;+\infty)$

Do y là số nguyên thuộc $(-x;+\infty)$ nên $y=-x+k$, $k\in Z^+$

Giả sử $y=-x+k$ là nghiệm của bất phương trình (1) thì $f(y)=f(-x+k)\le 0$

Mà $-x+1<-x+2<...<-x+k$ và $f(y)$ đồng biến trên khoảng $(-x;+\infty)$, suy ra $f(-x+1)<f(-x+2)<...,f(-x+k)\le 0$, nên các số nguyên $-x+1,\ -x+2,\ldots,\ -x+k$ đều là nghiệm của (1), hay nói cách khác bất phương trình (1) sẽ có k số nguyên y thỏa mãn yêu cầu ứng với mỗi x.

Để có không quá 255 số nguyên y thì $f(-x+256)>0 \Leftrightarrow \log_2 256-\log_5(x^2-x+256)>0$

$\Leftrightarrow x^2-x-390369<0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{1561477}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{1561477}}{2}$

Mà $x\in Z$ nên có 1250 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(0;2022)$ sao cho ứng với mỗi số a, tồn tại ít nhất mười số nguyên $b\in(-10;10)$ thỏa mãn $2^b3^a+6560\le 3^{2a^2+b}$?

A. 2021. **B.** 2019. **C.** 2018. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^b3^a+6560\le 3^{2a^2+b} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^b 3^a+6560\left(\dfrac{1}{3}\right)^b-3^{2a^2}\le 0$

Xét hàm số $f(b)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^b 3^a+6560\left(\dfrac{1}{3}\right)^b-3^{2a^2}$

Bất phương trình trên trở thành $f(b)\le 0$, với $b\in(-10;10)$

Ta có $f'(b)=\ln\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right)^b 3^a+6560\left(\frac{1}{3}\right)^b\ln\left(\frac{1}{3}\right)<0,\ \forall b\in(-10;10)$

Do đó $f(b)$ nghịch biến trên $(-10;10)$ khi đó $f(-9)<f(-8)<...<f(9)$ khi đó để tìm được mười giá trị b nguyên thuộc $(-10;10)$ thỏa mãn $f(b)\le 0$ điều kiện là $3^a+6560\le 3^{2a^2}$

Mặt khác do a nguyên $a\in(0;2022)$ nên $a\ge 1$ suy ra

$6563\le 3^a+6560\le 3^{2a^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a\ge\sqrt{\frac{1}{2}\log_3 6563}>2\\ a\le-\sqrt{\frac{1}{2}\log_3 6563}<-2\end{array}\right.$ mà a nguyên $a\in(0;2022)$ nên có 2019 số nguyên a.

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên $x\in(-5;5)$ sao cho ứng với mỗi x, tồn tại ít nhất 5 giá trị nguyên của $y\in(-10;10)$ thỏa mãn $12.6^{2y-x^2}+39.\frac{35^y}{6^{x^2}}\le 7^{x^3}.5^{2y}.8$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Coi x là tham số, y là biến.

Ta có: $12.6^{2y-x^2}+39.\frac{35^y}{6^{x^2}}\le 7^{x^3}.5^{2y}.8\ (1)$

Nhân cả 2 vế của (1) với 6^{x^2}

$(1)\Leftrightarrow 12.6^{2y}+39.35^y\le 7^{x^3}.6^{x^2}.5^{2y}.8\Leftrightarrow 12.\left(\frac{6}{5}\right)^{2y}+39.\left(\frac{7}{5}\right)^y\le 7^{x^3}.6^{x^2}.8$

$\Leftrightarrow 12.\left(\frac{6}{5}\right)^{2y}+39.\left(\frac{7}{5}\right)^y-7^{x^3}.6^{x^2}.8\le 0\ \ (1)$

Xét hàm số $f(y)=12.\left(\frac{6}{5}\right)^{2y}+39.\left(\frac{7}{5}\right)^y-7^{x^3}.6^{x^2}.8$ trên $(-10;10)$

$f'(y)=12.2.\left(\frac{6}{5}\right)^{2y}.\ln\frac{6}{5}+39.\left(\frac{7}{5}\right)^y.\ln\frac{7}{5}>0$ suy ra $f(y)$ đồng biến trên $(-10;10)$

Suy ra tồn tại ít nhất 5 giá trị nguyên của $y\in(-10;10)$

$\Leftrightarrow f(-5)\le 0\Leftrightarrow\Leftrightarrow 12.\left(\frac{6}{5}\right)^{-10}+39.\left(\frac{7}{5}\right)^{-5}-7^{x^3}.6^{x^2}.8\le 0$

Sử dụng chức năng table suy ra $x\in\{1;2;3;4\}$

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên a để tồn tại số thực b thỏa mãn $3^{a+b}=4^{a^2+b^2}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^{a+b}=4^{a^2+b^2}\ (1)$

$(1)\Leftrightarrow\log_4(3^{x+a})=x^2+a^2$

$\Leftrightarrow(x+a)\log_4 3=x^2+a^2$

$\Leftrightarrow x^2-x\log_4 3+a^2-a\log_4 3=0\ \ (2)$

Suy ra phương trình (2) có nghiệm $\Delta=(\log_4 3)^2-4(a^2-a\log_4 3)\ge 0$

$\Rightarrow -0.164 < a < 0.9567$. Mà $a \in Z$ nên $a = 0$

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a thì mọi số thực dương b đều thỏa $2\left(b^{\log a} + \frac{1}{b^{\log a}} + 1\right) \le 3\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)$?

A. 100. **B.** 900. **C.** 99. **D.** 899.

Lời giải

Chọn A

Xét $g(x) = b^x + \frac{1}{b^x} = b^x + b^{-x} \Rightarrow g'(x) = b^x \ln b - b^{-x}\ln b = \ln b.(b^x - b^{-x}) \ge 0, \forall b > 0; \forall x \ge 0$ (1)

Vì $\begin{cases} 0 < b < 1 \Rightarrow b^x < b^{-x}, (x \ge 0); \ln b < 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \\ b = 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \\ b > 1 \Rightarrow b^x > b^{-x}, (x > 0); \ln b > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) \ge 0, \forall b > 0, \forall x \ge 0$

TH1: Nếu $\log a < 0 \Rightarrow VT - VP = 2[g(\log a) + 1] - 3g(2) = 2 - b^2 - \frac{1}{b^2} = -\frac{(b^2-1)^2}{b^2} \le 0, \forall b > 0$

TH2: Nếu $\log a > 2 \Rightarrow VT - VP = 2\left(b^{\log a} + \frac{1}{b^{\log a}} + 1\right) - 3\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) \to +\infty, (b \to +\infty)$ (loại)

Vậy $\log a \le 2 \Leftrightarrow 0 < a \le 100$

Câu 16. Gọi S là tập các cặp số thực (x, y) sao cho $x \in [-1; 1]$ và $ln(x-y)^x - 2017x = ln(x-y)^y - 2017y + e^{2018}$. Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P = e^{2018x}(y+1) - 2018x^2$ với $(x, y) \in S$ đạt được tại $(x_0; y_0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $x_0 \in (-1; 0)$. **B.** $x_0 = -1$. **C.** $x_0 = 1$. **D.** $x_0 \in 0; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x - y > 0$

Ta có $ln(x-y)^x - 2017x = ln(x-y)^y - 2017y + e^{2018}$

$\Leftrightarrow (x-y)\,ln(x-y) - 2017(x-y) = e^{2018} \Leftrightarrow ln(x-y) - 2017 - \frac{e^{2018}}{x-y} = 0\ (*)$

Xét hàm $f(t) = ln\,t - 2017 - \frac{e^{2018}}{t}$, có $f'(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{2018}}{t^2} > 0$ với $\forall t > 0$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$,

suy ra $(*) \Leftrightarrow f(x-y) = 0 = f(e^{2018}) \Leftrightarrow x - y = e^{2018} \Leftrightarrow y = x - e^{2018}$

Khi đó $P = e^{2018x}(1 + x - e^{2018}) - 2018x^2 = g(x)$

$g'(x) = e^{2018x}(2019 + 2018x - 2018e^{2018}) - 4036x$

$g''(x) = e^{2018x}(2018.2020 + 2018^2x - 2018^2e^{2018}) - 4036$

$\le e^{2018x}(2018.2020 + 2018^2 - 2018^2e^{2018}) - 4036 < 0$ với $\forall x \in [-1; 1]$

Nên $g'(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1; 1]$,

mà $g'(-1) = e^{-2018} + 2018 > 0$, $g'(0) = 2019 - 2018e^{2018} < 0$ nên tồn tại $x_0 \in (-1; 0)$ sao cho $g(x_0) = 0$ và khi đó $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = g(x_0)$

Vậy P lớn nhất tại $x_0 \in (-1; 0)$.

Câu 17. Cho a, b là hai số thực thay đổi thỏa mãn $1 < a < b \le 2$, biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2.\log_a(b^2 + 4b - 4) + \log^2_{\frac{b}{a}} a$ là $m + 3\sqrt[3]{n}$ với m, n là số nguyên dương. Tính $S = m + n$.

A. S = 9. **B.** S = 18. **C.** S = 54. **D.** S = 15.

Lời giải

Chọn D

Ta có $b^2 + 4b - 4 \ge b^3 \Leftrightarrow (b-1)(b^2-4) \le 0$ (điều này đúng vì $1 < b \le 2$).

Nên $P \ge 2.\log_a b^3 + \left(\frac{1}{\log_a b - 1}\right)^2 = 6\log_a b + \left(\frac{1}{\log_a b - 1}\right)^2$.

Đặt $t = \log_a b$. Với $1 < a < b \le 2$ thì $t > 1$.

Đặt $f(t) = 6t + \left(\frac{1}{t-1}\right)^2$ với $t > 1$ thì $P \geq f(t), t > 1$.

Ta có $f'(t) = 6 + 2\left(\frac{1}{t-1}\right)\left(-\frac{1}{(t-1)^2}\right) = 6 - \frac{2}{(t-1)^3} = 2.\frac{3(t-1)^3-1}{(t-1)^3}$.

$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

t	1		$1+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $f\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = 6 + \frac{6}{\sqrt[3]{3}} + \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)}\right)^2 = 6 + 3\sqrt[3]{9}$.

Vậy $m = 6, n = 9 \Rightarrow m + n = 15$.

Câu 18. Có bao nhiêu số nguyên $y \in (-20; 20)$ thỏa mãn $2 + log_{\sqrt{3}}(3x^2 + 1) \leq log_{\sqrt{3}}(yx^2 - 6x + 2y)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 9.	**B.** 11.	**C.** 10	**D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2 + log_{\sqrt{3}}(3x^2 + 1) \leq log_{\sqrt{3}}(yx^2 - 6x + 2y)$ (1) với mọi $x \in \mathbb{R}$.

ĐKXĐ: $yx^2 - 6x + 2y > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ \Delta' = 9 - 2y^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y > \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$$(1) \Leftrightarrow log_{\sqrt{3}}\left(3(3x^2 + 1)\right) \leq log_{\sqrt{3}}(yx^2 - 6x + 2y)$$

$$\Leftrightarrow 3(3x^2 + 1) \leq yx^2 - 6x + 2y \Leftrightarrow (y - 9)x^2 - 6x + 2y - 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ bx + c \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 9 \\ -6x + 15 \geq 0 \forall x \in \text{(Loại)} \end{cases} \\ \begin{cases} y > 9 \\ 9 - (y - 9)(2y - 3) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} y > 9 \\ -2y^2 + 21y - 18 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y \geq \frac{21 + 3\sqrt{33}}{4}$$

Do $\begin{cases} y \in (-20; 20) \\ y \in \mathbb{Z} \\ y > \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y \geq \frac{21+3\sqrt{33}}{4} \end{cases} \Rightarrow y \in \{10; 11; \dots; 18; 19\}$

Vậy có 10 số nguyên y thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 50 số nguyên x thỏa mãn $(log_5 x + x - 1)(log_7 x - y) < 0$?

A. 3.	**B.** 0.	**C.** 2.	**D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$.

Xét hàm số $f(x) = log_5 x + x - 1$ với $x > 0$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{x \ln 5} + 1 > 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Suy ra hàm số f đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lại có $f(1) = 0$.

Từ đó suy ra:

+) $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow x > 1$.
+) $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Ta có: $(log_5 x + x - 1)(log_7 x - y) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} log_5 x + x - 1 > 0 \\ log_7 x - y < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} log_5 x + x - 1 < 0 \\ log_7 x - y > 0 \end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 1 \\ \log_7 x < y \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \log_7 x > y \end{cases} \text{(v« nghiÖm, do } x \in \mathbb{Z}\text{)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 7^y \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 7^y$.

Để với mỗi số nguyên dương y có không quá 50 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán ta cần có $7^y \leq 49 \Leftrightarrow y \leq 2$. Suy ra: $y = 1$ hoặc $y = 2$ thỏa mãn.
Vậy có 2 giá trị của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $log_3(x + y) = log_4(x^2 + 2y^2)$?

A. 3 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} x + y > 0 \\ x^2 + 2y^2 > 0 \end{cases}$

Ta có: $log_3(x + y) = log_4(x^2 + 2y^2) = t \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3^t \\ x^2 + 2y^2 = 4^t \end{cases}$

Theo bất đẳng thức Bunhia-Cốpxki ta có: $(x^2 + 2y^2)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \geq (x + y)^2$

$\Leftrightarrow \left(3^t + 1\right)^2 \leq 4^t . \frac{3}{2} \Leftrightarrow t \leq log_{\frac{9}{4}} \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

Mặt khác $x^2 \leq 4^t \leq 4^{\frac{1}{2}} = 2 \to -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ $Mà\ x \in \mathbb{Z}$ nên x ∈ { -1;0;1}.
Thử lại ta có:

+ Với x = -1 → $\begin{cases} y = 3^t + 1 \\ 2y^2 = 4^t - 1 \end{cases} \to 4^t - 1 = 2 \times \left(3^t + 1\right)^2 \Leftrightarrow 9^t + 2x^{3^t} + 2 - 4^t = 0.$

Xét hàm số $f(t) = 9^t + 2x^{3^t} + 2 - 4^t$. Khi đó $\begin{cases} t < 0 \Rightarrow 2 - 4^t > 0 \\ t \geq 0 \Rightarrow 9^t - 4^t > 0 \end{cases} \to f(t) > 0 \forall t$

$\to f(t) = 0\ vô\ nghiệm\ hay\ x = -1\ không\ thỏa\ mãn.$

+ Với x = 0 → $\begin{cases} y = 3^t \\ y^2 = 4^t \end{cases} \to 4^t = 9^t \Leftrightarrow t = 0 \to$ y = 1 (thỏa mãn).

+ Với x =1 → $\begin{cases} y = 3^t - 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases} \to 4^t - 1 = \left(3^t - 1\right)^2 \Leftrightarrow t = 0 \to$ y = 1 (thỏa mãn).

Vậy có hai giá trị thỏa mãn đề bài là x = 0 và x = 1.

Câu 21. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình sau có đúng 5 nghiệm nguyên: $\log m - \log_2\left|x^2 - 6x + 5\right| \geq 0$?

A. 210. **B.** 3635. **C.** 3636. **D.** 20.

Lời giải

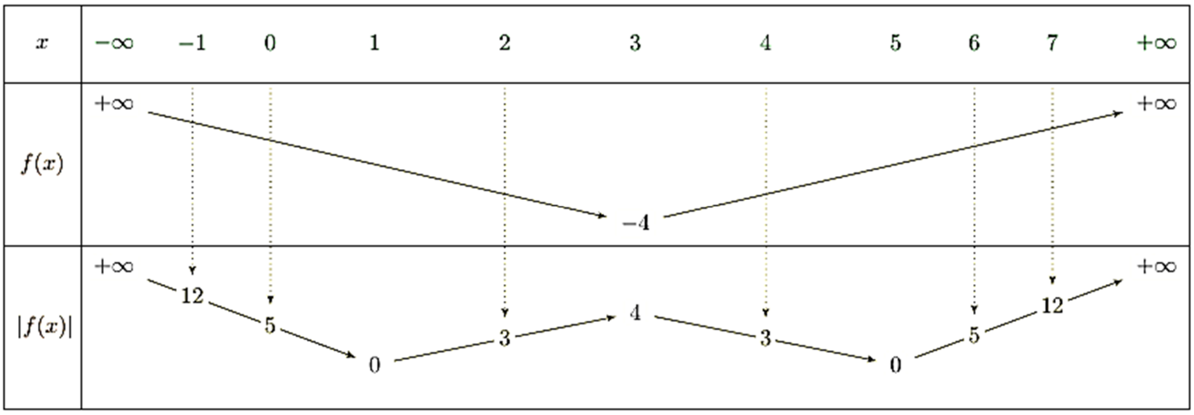
Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 5 \\ m > 0 \end{cases}$.

Ta có $\log m - \log_2\left|x^2 - 6x + 5\right| \geq 0 \Leftrightarrow \log_2\left|x^2 - 6x + 5\right| \leq \log m \Leftrightarrow \left|x^2 - 6x + 5\right| \leq 2^{\log m}$.

Xét hàm số $f(x)=x^2-6x+5$, $f'(x)=2x-6$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$, $f(3)=-4$.

Bảng biến thiên



Để bất phương trình sau có đúng 5 nghiệm nguyên thì điều kiện cần tìm của m là:

$5 \le 2^{\log m} < 12 \Leftrightarrow \log_2 5 \le \log m < \log_2 12 \Leftrightarrow 10^{\log_2 5} \le m < 10^{\log_2 12} \Leftrightarrow 209.8 \le m < 3845.5$.

Do m nguyên suy ra $m \in \{210;211;\ldots;3845\}$ nên có 3636 số thỏa mãn.

Câu 22. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi số nguyên x có đúng 5 số nguyên y thỏa mãn $3^{y^2-|x-2y|} \le \log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right)$?

A. 10. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

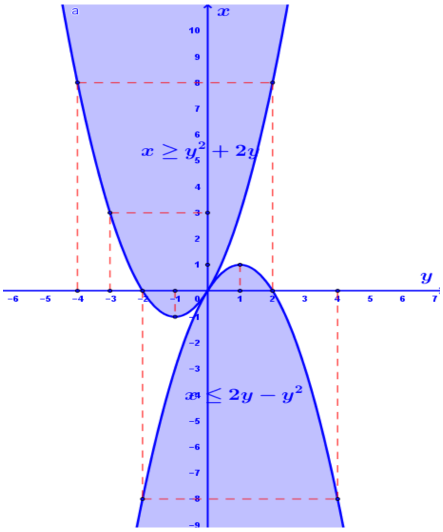
$$3^{y^2-|x-2y|} \le \log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right) \Leftrightarrow \frac{3^{y^2+3}}{3^{|x-2y|+3}} \le \frac{\ln\left(|x-2y|+3\right)}{\ln\left(y^2+3\right)}$$

$\Leftrightarrow 3^{y^2+3}\ln\left(y^2+3\right) \le 3^{|x-2y|+3}\ln\left(|x-2y|+3\right)$. Xét hàm số $f(t)=3^t\ln t$ với $t \ge 3$.

$f'(t)=3^t\ln t.\ln t+\dfrac{3^t}{t}>0, \forall t \ge 3 \Rightarrow$ hàm số đồng trên $[3;+\infty)$.

Ta có: $f\left(y^2+3\right) \le f\left(|x-2y|+3\right) \Leftrightarrow y^2+3 \le |x-2y|+3 \Leftrightarrow y^2 \le |x-2y|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge y^2+2y=g_1(y) \\ x \le 2y-y^2=g_2(y) \end{array}\right.$$



Ta thấy $\left[\begin{array}{l} 3 \leq x < 8 \\ x = 0 \\ -8 < x \leq -3 \end{array}\right.$ thì sẽ có đúng 5 giá trị nguyên của y với mỗi giá trị nguyên của x.

Vậy có tất cả 11 giá trị.

Câu 23. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 5 số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x+2} - \sqrt[3]{2}\right)\left(5^x - y\right) < 0$?

A. 125. **B.** 625. **C.** 25. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(2^{x+2} - \sqrt[3]{2}\right)\left(5^x - y\right) < 0 \Leftrightarrow \left(2^{x+2} - 2^{\frac{1}{3}}\right)\left(5^x - 5^{\log_5 y}\right) < 0 \Leftrightarrow \left(x + 2 - \dfrac{1}{3}\right)\left(x - \log_5 y\right) < 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} < x < \log_5 y$.

Khi đó để với mỗi y có không quá 5 số nguyên x thì $\log_5 y \leq 4 \Leftrightarrow y \leq 625$.

Vậy có 625 số nguyên dương y thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 24. Số giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $\left(3^{x+2} - \sqrt{3}\right)\left(3^x - m\right) < 0$ có tập nghiệm chứa không quá 6 số nguyên là

A. 32. **B.** 31. **C.** 243. **D.** 244.

Lời giải

Chọn C

Trường hợp 1: $\begin{cases} \left(3^{x+2} - \sqrt{3}\right) > 0 \\ \left(3^x - m\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+2} > 3^{\frac{1}{2}} \\ 3^x < m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{3}{2} \\ x < \log_3 m \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} < x < \log_3 m$.

Do yêu cầu bài toán bất phương trình có 6 nghiệm nguyên nên $\begin{cases} \log_3 m \leq 5 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow m \leq 243$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} \left(3^{x+2} - \sqrt{3}\right) < 0 \\ \left(3^x - m\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+2} < 3^{\frac{1}{2}} \\ 3^x > m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{3}{2} \\ x > \log_3 m \end{cases} \Leftrightarrow \log_3 m < x < -\dfrac{3}{2}$.

Do yêu cầu bài toán m nguyên dương nên không tồn tại giá trị m thoản mãn TH2.
Vậy có tất cả 243 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ với $1\le a\le 100$; $1\le b\le 100$ sao cho tồn tại đúng 2 số thực x thỏa mãn $a^{-x}+\frac{1}{b}=b^{-x}+\frac{1}{a}$?

A. 9704. **B.** 9702. **C.** 9698. **D.** 9700.

Lời giải

Chọn D

a) Xét $a=1$ hoặc $b=1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$ hoặc vô số nghiệm (loại).
b) Xét $a>1$; $b>1$.
* Nếu $a=b$ có vô số nghiệm (loại).
* Vì vai trò của a, b như nhau ta chỉ cần tìm cặp số nguyên $(a;b)$ với $a>b>1$ (rồi suy ra số cặp nguyên $(a;b)$ với $b>a>1$) sao cho phương trình $a^{-x}+\frac{1}{b}=b^{-x}+\frac{1}{a}\Leftrightarrow \frac{1}{a^x}-\frac{1}{b^x}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{a^x}-\frac{1}{b^x}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ có $f(1)=0$ và $f'(x)=-\left(\frac{1}{a}\right)^x\ln a+\left(\frac{1}{b}\right)^x\ln b$

và $f'(x)=0\Leftrightarrow\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\ln b}{\ln a}\Leftrightarrow x=x_0=\log_{\frac{b}{a}}\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right)$.

Ta cũng có $f'(x)>0\Leftrightarrow x>x_0$; $f'(x)<0\Leftrightarrow x<x_0$.

+ Nếu $x_0=1\Leftrightarrow\log_{\frac{b}{a}}\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right)=1\Leftrightarrow\frac{\ln b}{\ln a}=\frac{b}{a}\Leftrightarrow\frac{\ln b}{b}=\frac{\ln a}{a}\Leftrightarrow(a;b)=(4;2)$.

Chú ý: Xét hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ có $\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}>\frac{\ln 5}{5}>...>\frac{\ln 100}{100}$.

Khi đó $f(x)\ge f(x_0)=f(1)=0\Rightarrow f(x)=0$ có đúng một nghiệm $x=1$.

+ Nếu $x_0\ne 1\Leftrightarrow(a;b)\ne(4;2)$ khi đó kẻ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta có phương trình $f(x)=0$ luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

Với mỗi $b=k\in\{2;3;...;99\}\Rightarrow a\in\{k+1;...;100\}$ tức có $100-k$ cách chọn a.

Vậy có cặp với và loại đi cặp có cặp thỏa mãn.

Câu 26. **(ĐTK2021)** Có bao nhiêu số nguyên $a\,(a\ge 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn:

$\left(a^{\log x}+2\right)^{\log a}=x-2$

A. 8. **B.** 9. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải:

Chọn A

Điều kiện: $x>2$. Đặt $m=\log a>0$

Khi đó phương trình trở thành: $\left(x^m+2\right)^m=x-2$.

Đặt $y=x^m+2$, $y>2$ thì ta có hệ phương trình

$\begin{cases} y^m = x-2 & (1) \\ x^m = y-2 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) – (2) vế theo vế ta được

$y^m + y = x^m + x \quad (3)$

Xét hàm $f(t) = t^m + t$ với $m > 0; t > 0$ có $f'(t) = m.t^{m-1} + 1 > 0, \ \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t) = t^m + t$ đồng biến $(0; +\infty)$.

Do đó $(3) \Leftrightarrow y = x$

$\Leftrightarrow x^m = x - 2$

$\Leftrightarrow m.\log x = \log(x-2)$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{\log(x-2)}{\log x} < 1$

$\Rightarrow \log a < 1$

$\Rightarrow a < 10.$

Do đó, mọi số $a \in \{2;3;4;...;9\}$ đều thỏa mãn.

Câu 27. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2 \le x \le 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$?

A. 2020. **B.** 9. **C.** 2019. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_2(x + 2^{y-1}) = t$. Suy ra $x + 2^{y-1} = 2^t$, $x = 2^t - 2^{y-1}$.

Phương trình đã cho trở thành: $2^y - t = 2(2^t - 2^{y-1}) - y \Leftrightarrow 2.2^y + y = 2.2^t + t$.

Xét hàm số $g(x) = 2.2^x + x$ có $g'(x) = 2.2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x$ nên hàm số $y = g(x)$ luôn đồng biến.

Khi đó $2.2^y + y = 2.2^t + t \Leftrightarrow y = t$ hay $y = \log_2(x + 2^{y-1})$.

Suy ra $x + 2^{y-1} = 2^y \Leftrightarrow x = 2^y - 2^{y-1} = 2^{y-1}$.

Mà $2 \le x \le 2021$ nên $2 \le 2^{y-1} \le 2021 \Leftrightarrow 1 \le y - 1 \le \log_2 2021$ hay $2 \le y \le (\log_2 2021) + 1$.

Lại có y là số nguyên nên $y \in \{2,3,...,11\}$ tức 10 giá trị thỏa mãn.

Xét biểu thức $x = 2^{y-1}$, mỗi giá trị nguyên của y cho tương ứng 1 giá trị nguyên của x nên có 10 cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 28. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 < y < 2020$ và $3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3$.

A. 2020 **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3 \Leftrightarrow 3^x + 3(x-2) = 9y + 3\log_3 y \Leftrightarrow 3^x + 3(x-2) = 3^{2+\log_3 y} + 3\log_3 y \ (*)$.

Xét hàm số: $f(t) = 3^t + 3(t-2)$.

Ta có: $f'(t) = 3^t.\ln 3 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow f(x) = f(2+\log_3 y) \Leftrightarrow x = 2+\log_3 y \Leftrightarrow y = 3^{x-2}$.

Do $0 < y < 2020$ và x, y nguyên nên: $1 \le 3^{x-2} < 2020 \Leftrightarrow 2 \le x < 2+\log_3 2020 \Rightarrow x \in \{2;3;4;5;6;7;8\}$.

Ứng với mỗi giá trị x có một giá trị của y nên có 7 cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $x \le 2020$ thỏa mãn $2(3x-y) = 3(1+9^y) - \log_3(2x-1)$

A. 1010. **B.** 2020. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_3(2x-1) = t \Rightarrow 2x = 3^t + 1$, ta được $3(3^t+1) - 2y = 3(1+3^{2y}) - t \Leftrightarrow 3.3^t + t = 3.3^{2y} + 2y$ (*).

Xét hàm số $f(u) = 3.3^u + u \Rightarrow f'(u) = 3.3^u \ln 3 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow t = 2y$, vậy nên $2x = 3^{2y} + 1 \Leftrightarrow 9^y = 2x - 1$.

Vì $x \le 2020 \Rightarrow 9^y \le 4039 \Leftrightarrow y \le \log_9 4039$. Vì y nguyên dương nên $y \in \{1;2;3\}$. Ta thấy với mỗi giá trị nguyên của y thì tìm được 1 giá trị nguyên của x. Vậy có 3 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 30. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $1 \le a \le 100$ và $2^a < 3^b < 2^{a+1}$?

A. 163. **B.** 63. **C.** 37. **D.** 159.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^a < 3^b < 2^{a+1} \Leftrightarrow \log_3 2^a < b < \log_3 2^{a+1} \Leftrightarrow a\log_3 2 < b < (a+1)\log_3 2$.

Với $\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a\log_3 2 \notin \mathbb{Z} \\ (a+1)\log_3 2 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

Do đó với mỗi $a \in \{1;2;3;...;100\}$ thì sẽ có $[(a+1)\log_3 2] - [a\log_3 2]$ số nguyên b thỏa mãn.

Vậy theo qui tắc cộng có tất cả $\sum_{a=1}^{100}\left([(a+1)\log_3 2] - [a\log_3 2]\right) = 63$ cặp số nguyên thỏa mãn.

Chú ý: giữa hai số thực $x > y$ (không nguyên) sẽ có tất cả $[x] - [y]$ số nguyên.

Câu 31. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ với $1 < a < b < 100$ để phương trình $a^x \ln b = b^x \ln a$ có nghiệm nhỏ hơn 1?

A. 2. **B.** 4751. **C.** 4656. **D.** 4750.

Lời giải

Chọn B

Ta có $a^x \ln b = b^x \ln a \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{\ln a}{\ln b} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{\ln a}{\ln b}\right)$.

Với $1 < a < b < 100 \Rightarrow \frac{a}{b} \in (0;1)$ do đó $\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{\ln a}{\ln b}\right) < 1 \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} > \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$.

Hàm số $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ có $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow g'(x) > 0$, $\forall x \in (0;\mathrm{e})$ và $g'(x) < 0$, $\forall x \in (\mathrm{e};+\infty)$.

$g\left(2\right)=g\left(4\right)=\dfrac{\ln 2}{2}$.

Vì vậy $\dfrac{\ln 3}{3}>\dfrac{\ln 4}{4}=\dfrac{\ln 2}{2}>\dfrac{\ln 5}{5}>...>\dfrac{\ln 98}{98}>\dfrac{\ln 99}{99}$.

Trường hợp 1: $a=2\Rightarrow b\in\{5;6;...;99\}$ trường hợp này có 95 cặp số thỏa mãn.

Trường hợp 2: $a=3\Rightarrow b\in\{4;5;...;99\}$ trường hợp này có 96 cặp số thỏa mãn.

Trường hợp 3: $a=4\Rightarrow b\in\{5;6;...;99\}$ trường hợp này có 95 cặp số thỏa mãn.

Trường hợp 4: với mỗi $a=k\in\{5;6;...98\}$ thì $b\in\{k+1;...;99\}$ có $99-k$ cách chọn b, trường hợp này có tất cả $\sum\limits_{5}^{98}\left(99-k\right)=4465$ cặp số thỏa mãn.

Vậy có tất cả $95+96+95+4465=4751$ cặp số thỏa mãn.

Câu 32. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $4^{x+y}=3^{x^2+y^2}$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Đặt $4^{x+y}=3^{x^2+y^2}=t$, $t>0$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\log_4 t\\ x^2+y^2=\log_3 t\end{cases}$.

Vì $\left(x+y\right)^2\le 2\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow \log_4^2 t\le 2\log_3 t\Leftrightarrow \dfrac{\ln^2 t}{\ln^2 4}\le 2\dfrac{\ln t}{\ln 3}\Leftrightarrow 0\le \ln t\le \dfrac{2\ln^2 4}{\ln 3}$.

Suy ra $x^2+y^2=\dfrac{\ln t}{\ln 3}\le\dfrac{2\ln^2 4}{\ln^2 3}=2\left(\dfrac{\ln 4}{\ln 3}\right)^2\approx 3{,}18\Rightarrow x^2\le 3{,}18\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{-1;0;1\}$.

- Nếu $x=0\Rightarrow\begin{cases}0+y=\log_4 t\\ 0^2+y^2=\log_3 t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ t=1\end{cases}$ (thỏa mãn).
- Nếu $x=1\Rightarrow\begin{cases}1+y=\log_4 t\\ 1^2+y^2=\log_3 t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{\ln t}{\ln 4}-1\\ \left(\dfrac{\ln t}{\ln 4}-1\right)^2+1=\dfrac{\ln t}{\ln 3}\end{cases}\Rightarrow \exists t\Rightarrow\exists y$ (thỏa mãn).
- Nếu $x=-1\Rightarrow\begin{cases}-1+y=\log_4 t\\ (-1)^2+y^2=\log_3 t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{\ln t}{\ln 4}+1\\ \left(\dfrac{\ln t}{\ln 4}+1\right)^2+1=\dfrac{\ln t}{\ln 3}\end{cases}\Rightarrow \nexists t\Rightarrow\nexists y$ (loại).

Vậy $x\in\{0;1\}$.

Câu 33. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1\le x\le 2020$, $y\ge 2$ và $x^2+x-xy=x\log_2\left(xy-x\right)-2^x$

A. 2021. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_2(xy-x)=t \Leftrightarrow xy-x=2^t$. Khi đó giả thiết trở thành $x^2-2^t=xt-2^x \Leftrightarrow 2^x+x.x=2^t+x.t$

$\Leftrightarrow x=t \Leftrightarrow xy-x=2^x \Leftrightarrow y=1+\dfrac{2^x}{x}$.

Vì $1\le x\le 2020$, $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}$ nên $2^x \vdots x$ suy ra $x\in\left\{2^0,2^1,2^2,...,2^{10}\right\}$.

Khi đó $y=1+\dfrac{2^x}{x}$ có duy nhất một cách chọn.

Vậy có tất cả 11 cặp số nguyên thỏa mãn.

Câu 34. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le y\le 2020$ và $\log_3\left(\dfrac{2^x-1}{y}\right)=y+1-2^x$?

A. 2019. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} y\ne 0 \\ \dfrac{2^x-1}{y}>0 \Leftrightarrow 2^x>1 \Leftrightarrow x>0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Ta có: PT $\Leftrightarrow \log_3(2^x-1)+2^x-1=\log_3 y+y$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên $(0;+\infty)$

Khi đó $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0$ do đó hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

(*) có dạng $f(2^x-1)=f(y)\Leftrightarrow y=2^x-1$

Vì $0\le y\le 2020 \Leftrightarrow 0\le 2^x-1\le 2020 \Leftrightarrow 1\le 2^x\le 2021 \Leftrightarrow 0\le x\le \log_2(2021)$

$\begin{cases} 0\le x\le \log_2(2021) \\ x\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Vậy có 11 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2022

Câu 49. (ĐTK BGD 2022) Trong không gian $0xyz$, cho mặt cầu $(S):(x-4)^2+(y+3)^2+(z+6)^2=50$ và đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục hoành, với hoành độ là số nguyên, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d?

A. 29. **B.** 33. **C.** 55. **D.** 28.

PHÂN TÍCH

Sai lầm thường gặp: không xét trưởng hợp $IM \ge R$

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(a,0,0)\in Ox$, $a\in\mathbb{Z}$. Mặt cầu (S) có tâm $I(4;-3;-6)$, $R=5\sqrt{2}$.

Gọi (α) là mặt phẳng qua M và chứa hai tiếp tuyến của (S) cùng vuông góc với d khi đó $(\alpha):2x+4y-z-2a=0$. Mặt khác, từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d nên (α) và (S) có nhiều hơn một điểm chung và điểm M không chứa trong mặt cầu nên

$$\begin{cases} d(I;(\alpha))<R \\ IM\ge R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|2-2a|}{\sqrt{21}}<5\sqrt{2} \\ \sqrt{(a-4)^2+45}\ge 5\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\frac{5}{2}\sqrt{42}>a>1-\frac{5}{2}\sqrt{42} \\ \left[\begin{array}{l} a\ge 4+\sqrt{5} \\ a\le 4-\sqrt{5} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\in\left(1-\frac{5}{2}\sqrt{42};4-\sqrt{5}\right] \\ a\in\left[4+\sqrt{5};1+\frac{5}{2}\sqrt{42}\right) \end{array}\right.$$

Mà $a\in\mathbb{Z}$ nên $a\in\{-15;-14,...1;7;8;...17\}$. Vậy có 28 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{9}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-5}{4}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc tia Oy, với tung độ là số nguyên, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d?

A. 40. **B.** 46. **C.** 44. **D.** 84.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=25$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục tung, với tung độ là số nguyên, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d?

A. 18. **B.** 19. **C.** 16. **D.** 30.

Câu 3. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+3a+at\\y=-2+t\\z=2+3a+(1+a)t\end{cases}$. Biết khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu cố định đi qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Tìm bán kính của mặt cầu đó.

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua M, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A,B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ.

A. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$. **B.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{3}$.

C. $\frac{x+3}{16}=\frac{y-3}{11}=\frac{z+3}{-10}$. **D.** $\frac{x+3}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{8}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=16$ và điểm $A(m;m;2)$ nằm ngoài mặt cầu. Từ A kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu (S), gọi (P_m) là mặt phẳng chứa các tiếp điểm, biết (P_m) luôn đi qua một đường thẳng d cố định, phương trình đường thẳng d là

A. $(d):\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-1\end{cases}$. **B.** $(d):\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=2\end{cases}$.

C. $(d):\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=2\end{cases}$. **D.** $(d):\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-2\end{cases}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ cắt mặt phẳng $(P):x+2y+z-6=0$ tại điểm M. Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ với $a<0$ thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm A. Tìm tổng $T=a+b+c$ khi biết diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$.

A. $T=-2$. **B.** $T=\frac{1}{2}$. **C.** $T=8$. **D.** $T=0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết rằng $(\alpha):ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng

A. -4. **B.** 8. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 8. Trong không gian $0xyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$. Có tất cả bao nhiêu điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy), với hoành độ, tung độ là các số nguyên, sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua M và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 29. **B.** 18. **C.** 14. **D.** 28.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\y=t\\z=m-1+t\end{cases}$. Gọi T là tập tất cả các giá trị của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các tiếp diện của (S) tại A và B tạo với nhau góc lớn nhất có thể. Tính tổng các phần tử của tập hợp T.

A. 3. **B.** -3. **C.** -5. **D.** -4.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$, mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+z^2=R^2$, hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{-1}$ và $d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{1}$. Gọi d là đường thẳng vuông góc với (P) đồng thời cắt cả d_1, d_2. Biết rằng có số thực R sao cho chỉ có một điểm $M(m;n;p)$ thuộc d sao cho từ M có duy nhất một mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S). Khi đó $m^2+n^2+p^2-R^2$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -3.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3) có phương trình $(d_1):\begin{cases}x=1+2t_1\\y=1+t_1\\z=1-2t_1\end{cases}$, $(d_2):\begin{cases}x=3+t_2\\y=-1+2t_2\\z=2+2t_2\end{cases}$, $(d_3):\begin{cases}x=4+2t_3\\y=4-2t_3\\z=1+t_3\end{cases}$. $S(I;R)$ là mặt cầu tâm I bán kính R tiếp xúc với 3 đường thẳng đó. Giá trị nhỏ nhất của R gần số nào nhất trong các số sau:

A. $2,1$. **B.** $2,2$. **C.** $2,3$. **D.** $2,4$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;0)$, $B(-3;1;4)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{3}$. Xét khối nón (N) có đỉnh có tọa độ nguyên thuộc đường thẳng Δ và ngoại tiếp mặt cầu đường kính AB. Khi (N) có thể tích nhỏ nhất thì tung độ đỉnh của khối nón (N) bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 11.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của (S) tại M cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ mà a,b là các số nguyên dương và $\widehat{AMB}=90°$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=25$. và hai điểm $A(7;9;0)$, $B(0;8;0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$ với M là điểm bất kỳ thuộc mặt cầu (S).

A. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** 10. **D.** $5\sqrt{2}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-3)$, đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+3}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=25$. Mặt phẳng (α) thay đổi, luôn đi qua A và song song với Δ. Trong trường hợp (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất thì (α) có phương trình $ax+by+cz-3=0$. Tính giá trị của biểu thức $S=3a-2b-2c$.

A. 12. **B.** 9. **C.** 4. **D.** $\frac{9}{5}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)\in d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c),(a>0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến $MA,\ MB,\ MC$ đến mặt cầu (S) ($A,\ B,\ C$ là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB}=60^0$, $\widehat{BMC}=60^0$, $\widehat{CMA}=120^0$. Tính $a^3+b^3+c^3$.

A. $a^3+b^3+c^3=\frac{173}{9}$. **B.** $a^3+b^3+c^3=\frac{112}{9}$. **C.** $a^3+b^3+c^3=-8$. **D.** $a^3+b^3+c^3=\frac{23}{9}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30 **B.** 26 **C.** 20 **D.** 21

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\frac{7}{6};\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1):x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM?

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Câu 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c)(a>0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB}=60°$, $\widehat{BMC}=90°$, $\widehat{CMA}=120°$. Tính $Q=a+b+c$.

A. $Q=3$. **B.** $Q=\frac{10}{3}$. **C.** $Q=2$. **D.** $Q=1$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$. **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=14$.

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-14=0$. Điểm M thay đổi trên (S), điểm N thay đổi trên (P). Độ dài nhỏ nhất của MN bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Câu 24. **(ĐTK2021)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A, đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB. Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình dạng $2x+by+cz+d=0$. Giá trị của $b+c+d$ bằng

A. -21. **B.** -12. **C.** -18. **D.** -15.

Câu 25. **(Mã 103 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ và điểm $A(2;3;4)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $2x+2y+2z+15=0$ **B.** $x+y+z+7=0$

C. $2x+2y+2z-15=0$ **D.** $x+y+z-7=0$

Câu 26. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6$. Điểm M luôn thuộc mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-2y-6z+9=0$. **B.** $2x-2y-6z-9=0$.

C. $2x+2y+6z+9=0$. **D.** $2x-2y+6z+9=0$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z-4=0$. **C.** $3x+3y+3z-8=0$. **D.** $3x+3y+3z-4=0$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S): (x+3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$, điểm $M(7;1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng di động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N. Tiếp điểm N di động trên đường tròn (T) có tâm $J(a,b,c)$. Gọi $k=2a-5b+10c$, thì giá trị của k là

A. 45. **B.** 50. **C.** -45. **D.** -50.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P. Tìm c biết rằng $a+b+c<5$

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho $A(-3;1;1), B(1;-1;5)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+11=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T).

A. $r=4$. **B.** $r=2$. **C.** $r=\sqrt{3}$. **D.** $r=\sqrt{2}$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2};\frac{7-\sqrt{3}}{2};3\right)$, $B\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2};\frac{7+\sqrt{3}}{2};3\right)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$. Xét mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$, $(a,b,c,d\in\mathbb{Z}: d<-5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A, B. Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Tính giá trị của $T=|a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

A. $T=4$. **B.** $T=6$. **C.** $T=2$. **D.** $T=12$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+10=0$ và $(\beta): \frac{x}{m}+\frac{y}{1-m}+\frac{z}{1}=1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 12

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a, b, c>0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

A. 14. **B.** $\frac{1}{7}$. **C.** 7. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với B, C, D là các tiếp điểm. Viết phương trình mặt phẳng (BCD).

A. $2x+2y+z-1=0$. **B.** $2x+2y+z-3=0$.
C. $2x+2y+z+1=0$. **D.** $2x+2y+z-5=0$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S): $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ và (S'): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π. Khoảng cách từ O đến (P) bằng

A. $\frac{14}{3}$. **B.** $\frac{17}{7}$. **C.** $\frac{8}{9}$. **D.** $\frac{19}{2}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P): 2mx+(m^2+1)y+(m^2-1)z-10=0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. $10\sqrt{2}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $12\sqrt{2}$. **D.** $10\sqrt{3}$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). M luôn thuộc mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z-4=0$

C. $3x+3y+3z-8=0$. **D.** $3x+3y+3z-4=0$.

Câu 39. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=3$ **B.** $T=4$ **C.** $T=5$ **D.** $T=2$

Câu 40. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, điểm $A(0;0;2)$. Mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất, phương trình (P) là:

A. $(P): x-2y+3z-6=0$. **B.** $(P): x+2y+3z-6=0$.

C. $(P): 3x+2y+2z-4=0$. **D.** $(P): x+2y+z-2=0$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0;0;-4), B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S), là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng:

A. 8. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -4.

Câu 42. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0)$, $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' thỏa $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất?

A. $16x+40y+44z-39=0$ **B.** $16x-40y-44z+39=0$

C. $16x+40y-44z+39=0$ **D.** $16x-40y-44z-39=0$

Câu 43. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (A, B, C không trùng với gốc O) sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $N(0;2;2)$ **B.** $M(0;2;1)$ **C.** $P(2;0;0)$ **D.** $Q(2;0;-1)$

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn $OA^2+OB^2+OC^2=27$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $9\sqrt{3}$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;2), B(1;1;0), C(3;0;1)$ và mặt phẳng $(Q): x+y+z-5=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (Q). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ bằng

A. $\frac{34}{3}$. **B.** $\frac{22}{3}$. **C.** 0. **D.** $\frac{26}{3}$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;-1)$. Điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+2=0$ sao cho $3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất đó bằng

A. $\frac{13}{6}$. **B.** $\frac{17}{2}$. **C.** $\frac{61}{6}$. **D.** $\frac{23}{2}$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-3)$, $B(0;-2;3)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=1$. Xét điểm M thay đổi luôn thuộc mặt cầu (S), giá trị lớn nhất của MA^2+2MB^2 bằng

A. 102. **B.** 78. **C.** 84. **D.** 52.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ với $(S_2): x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là

A. $\sqrt{34}-1$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** 3.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$. Điểm $M\in(S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M cắt các tia Ox; Oy; Oz tại các điểm A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)$ là:

A. 24. **B.** 27. **C.** 64. **D.** 8.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D(2;0;\sqrt{7})$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ thỏa mãn $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$. Biết rằng đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó?

A. $\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $4\sqrt{7}$.

Câu 51. Cho $A(0;8;2)$ và mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $A(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Lúc đó

A. $m.n=4$. **B.** $m.n=2$. **C.** $m.n=-4$. **D.** $m.n=-2$.

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ gọi $(P): ax+by+cz-3=0$ (a,b,c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0;-1;2), N(-1;1;3)$

và không đi qua $H\left(0;0;2\right)$. Biết rằng khoảng cách từ $H\left(0;0;2\right)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tổng $P=a-2b+3c+12$ bằng

A. 8. **B.** 16. **C.** 12. **D.** -16.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-5}{4}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc tia Oy, với tung độ là số nguyên, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d ?

A. 40. **B.** 46. **C.** 44. **D.** 84.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có $I(1;2;-2)$, bán kính $R=5$.

Vì $M\in Oy$ nên $M(0;m;0)$

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng d $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (P) là $9x+y+4z-m=0$.

Khi đó (P) chứa hai tiếp tuyến với mặt cầu kẻ từ M và cùng vuông góc với d

Để tồn tại các tiếp tuyến thỏa mãn bài toán điều kiện là

$$\begin{cases} d\left(I,(P)\right)<R \\ IM\ge R\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|3-m|}{7\sqrt{2}}<5 \\ \sqrt{(m-2)^2+5}\ge 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3-m|<35\sqrt{2} \\ (m-2)^2\ge 20\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -35\sqrt{2}+3<m<35\sqrt{2}+3 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 2+2\sqrt{5} \\ m\le 2-2\sqrt{5}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+2\sqrt{5}\le m<35\sqrt{2}+3 \\ -35\sqrt{2}+3<m\le 2-2\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Vì m nguyên dương nên $m\in\{7;8;....;46\}$. Vậy có 40 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=25$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục tung, với tung độ là số nguyên, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d?

A. 18. **B.** 19. **C.** 16. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-3;3), R=5$.

Ta có: $M\in Oy\Rightarrow M(0;a;0)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai tiếp tuyến từ M đến (S). Khi đó (P) đi qua $M(0;a;0)$, vuông góc với đường thẳng d, phương trình mặt phẳng (P) là:

$$4x-2(y-a)+z=0\Leftrightarrow 4x-2y+z+2a=0.$$

Ta có điểm M thoả mãn giả thiết là điểm nằm ngoài mặt cầu, suy ra

$IM > R \Leftrightarrow (-2)^2 + (a+3)^2 + 9 > 25 \Leftrightarrow (a+3)^2 > 12$ (1)

Các mặt phẳng (P) thoả mãn giả thiết phải cắt mặt cầu nên ta có: $d(I,(P)) < R \Leftrightarrow \dfrac{|8+6+3+2a|}{\sqrt{21}} < 5 \Leftrightarrow |2a+17| < 5\sqrt{21}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\begin{cases} (a+3)^2 > 12 \\ |2a+17| < 5\sqrt{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+6a-3>0 \\ -14 < 2a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > -3+2\sqrt{3} \\ a < -3-2\sqrt{3} \end{array}\right. \\ \dfrac{-5\sqrt{21}-17}{2} < a < \dfrac{5\sqrt{21}-17}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3+2\sqrt{3} < a < \dfrac{5\sqrt{21}-17}{2} \\ \dfrac{-5\sqrt{21}-17}{2} < a < -3-2\sqrt{3} \end{array}\right.$ do $a \in \mathbb{Z}$ nên có $2+17=19$ giá trị của thoả mãn.

Vậy có 19 điểm M thoả mãn.

Câu 3. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+3a+at \\ y = -2+t \\ z = 2+3a+(1+a)t \end{cases}$. Biết khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu cố định đi qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Tìm bán kính của mặt cầu đó.

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

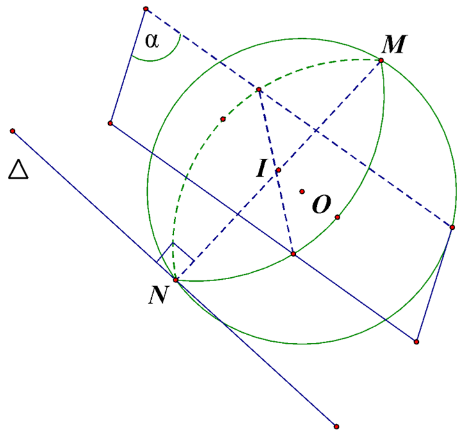
Lời giải

Chọn A

Ta có ptts $\Delta: \begin{cases} x = 1+3a+at \\ y = -2+t \\ z = 2+3a+(1+a)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+(3+t)a \\ y = -2+t \\ z = 2+t+(3+t)a \end{cases}$

Nhận thấy Δ đi qua điểm cố định khi $t=-3$. Điểm cố định N có toạ độ:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2+(-3) \\ z = 2+(-3) \end{cases} \Rightarrow N(1;-5;-1)$



Ta nhận thấy hai điểm M,N cố định nằm trên mặt cầu $\Rightarrow$ Tâm mặt cầu nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn MN. Gọi I là trung điểm của MN $\Rightarrow I(1;-2;0);\overrightarrow{MN}=(0;-6;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(1;-2;0)$ có VTCP $\overrightarrow{MN}=(0;-6;-2)$ có dạng $(P):0(x-1)-6(y+2)-2z=0 \Leftrightarrow 3y+z+6=0$

Gọi $O(a';b';c')$ là tâm mặt cầu $\Rightarrow O\in(P)\Rightarrow 3b'+c'+6=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{ON}=(1-a';-5-b';-1-c')$. VTCP của $\Delta:\overrightarrow{u_\Delta}=(a;1;1+a)$

Lại có, $ON\perp\Delta\Rightarrow \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\Leftrightarrow a(1-a')-5-b'-(1+c')(1+a)=o$

$\Leftrightarrow a(1-a'-1-c)-5-b'-1-c'=0\ \forall a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases}1-a'-1-c'=0\\-5-b'-1-c'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'+b'=0\\a'+b'=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=6\\b'=0\end{cases}$

$\Rightarrow O(6;0;-6)\Rightarrow \overrightarrow{OM}=(-5;1;7)\Rightarrow OM=\sqrt{25+1+49}=5\sqrt{3}\Rightarrow R=5\sqrt{3}.$

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3\,;3\,;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua M, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A,B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ.

A. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$. **B.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{3}$.

C. $\frac{x+3}{16}=\frac{y-3}{11}=\frac{z+3}{-10}$. **D.** $\frac{x+3}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(2\,;3\,;5)$, bán kính $R=10$.

$d(I,(\alpha))=\frac{|2.2-2.3+5+15|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=6<R\Rightarrow(\alpha)\cap(S)=C(H\,;r),H$ là hình chiếu của I lên (α)

.

Gọi Δ_1 là đường thẳng qua I và vuông góc với (α) $\Rightarrow\Delta_1$ có VTCP là $\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=(2;-2;1)$.

$\Rightarrow$ PTTS $\Delta_1:\begin{cases}x=2+2t\\y=3-2t\\z=5+t\end{cases}$. Tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x=2+2t\\y=3-2t\\z=5+t\\2x-2y+z+15=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=7\\z=3\end{cases}\Rightarrow H(-2;7;3)$.

Ta có AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là đường kính của (C) $\Leftrightarrow \Delta\equiv MH$.

Đường thẳng MH đi qua $M(-3;3;-3)$ và có VTCP $\overrightarrow{MH}=(1;4;6)$.

Suy ra phương trình $\Delta:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=16$ và điểm $A(m;m;2)$ nằm ngoài mặt cầu. Từ A kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu (S), gọi (P_m) là mặt phẳng chứa các tiếp điểm, biết (P_m) luôn đi qua một đường thẳng d cố định, phương trình đường thẳng d là

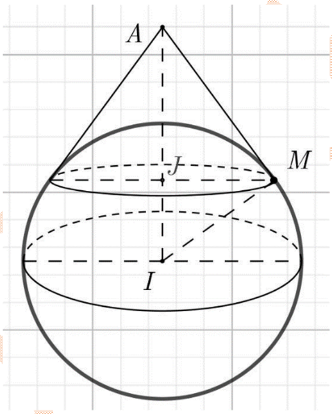
A. $(d):\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-1\end{cases}$. **B.** $(d):\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=2\end{cases}$.

C. $(d):\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=2\end{cases}$. **D.** $(d):\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-2\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-2)$, bán kính $R=4$. Mặt cầu đường kính AI có tâm là trung điểm $H\left(\dfrac{m}{2};\dfrac{m}{2};0\right)$ của AI và bán kính $R'=\dfrac{AI}{2}=\dfrac{\sqrt{2m^2+16}}{2}$ có phương trình là:

$(S'):\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{m}{2}\right)^2+z^2=\dfrac{2m^2+16}{4}\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-mx-my=4$.

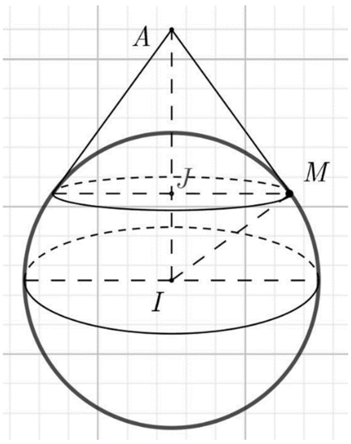
Khi đó các tiếp điểm kẻ từ A đến mặt cầu (S) nằm trên (S') do đó tọa độ các tiếp điểm thỏa mãn hệ phương trình sau:

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+4z-12=0 \\ x^2+y^2+z^2-mx-my-4=0 \end{cases} \Rightarrow mx+my+4z-8=0$.

Do đó mặt phẳng (P_m) có phương trình: $mx+my+4z-8=0$.

Đường thẳng cố định của (P_m) có dạng $\begin{cases} x+y=0 \\ 4z-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2 \end{cases}$

Cách 2:



Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-2)$, bán kính $R=4$.

Mặt cầu tâm $A(m;m;2)$ bán kính $AM=\sqrt{AI^2-R^2}=\sqrt{2m^2}$ có phương trình:

(S'): $(x-m)^2+(y-m)^2+(z-2)^2=2m^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2mx-2my-4z+4=0$.

(P_m) là giao của mặt cầu (S) và (S'):

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+4z-12=0 \\ x^2+y^2+z^2-2mx-2my-4z+4=0 \end{cases} \Rightarrow mx+my+4z-8=0$.

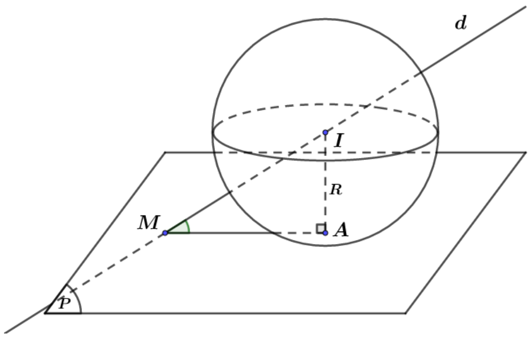
Đường thẳng cố định của (P_m) có dạng $\begin{cases} x+y=0 \\ 4z-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2 \end{cases}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ cắt mặt phẳng $(P): x+2y+z-6=0$ tại điểm M. Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ với $a<0$ thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm A. Tìm tổng $T=a+b+c$ khi biết diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$.

A. $T=-2$. **B.** $T=\frac{1}{2}$. **C.** $T=8$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn D



Đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=-t \end{cases},(t\in\mathbb{R})$ có vtcp $\vec{u}_d=(2;1;-1)$.

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}_P=(1;2;1)$.

Khi đó: Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là $\widehat{IMA}$

$$\sin\widehat{IMA}=\frac{|\vec{u}_d.\vec{n}_P|}{|\vec{u}_d|.|\vec{n}_P|}=\frac{|2.1+1.2-1.1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{IMA}=30°.$$

Ta có: $IA=R\Rightarrow MA=\frac{IA}{\tan 30°}=R\sqrt{3}$.

Mà $S_{\Delta IAM}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}IA.MA=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}R^2=3\sqrt{3}\Leftrightarrow R=\sqrt{6}$.

Mặt khác: $I(1+2t;1+t;-t)\in d$ và $d(I,(P))=R$

$$\Rightarrow\frac{|1+2t+2(1+t)+(-t)-6|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow|3t-3|=6\Leftrightarrow|t-1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=3\Rightarrow I(7;4;-3)(L) \\ t=-1\Rightarrow I(-1;0;1) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow a=-1,b=0,c=1$.

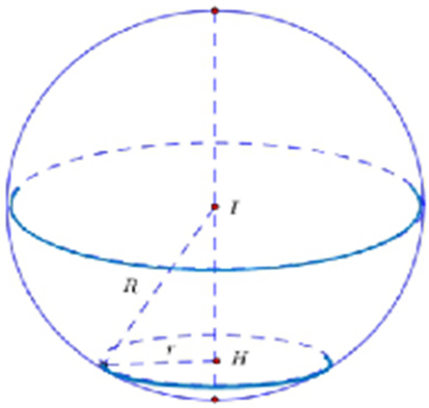
Vậy $T=a+b+c=0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết rằng $(\alpha):ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng

A. -4. **B.** 8. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=3\sqrt{3}$.

Vì $(\alpha): ax+by-z+c=0$ đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ nên $c=-4$ và $a=2$.

Suy ra $(\alpha): 2x+by-z-4=0$

Đặt $IH=x$, với $0<x<3\sqrt{3}$ ta có $r=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{27-x^2}$.

Thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2.IH=\frac{1}{3}\pi\left(27-x^2\right).x=\frac{1}{3\sqrt{2}}\pi\sqrt{\left(27-x^2\right)\cdot\left(27-x^2\right)\cdot 2x^2}\le 18\pi$

$V_{\max}=18\pi$ khi $27-x^2=2x^2 \Leftrightarrow x=3$

Khi đó, $d(I;(\alpha))=\frac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}=3 \Leftrightarrow (2b+5)^2=9\left(b^2+5\right) \Leftrightarrow b=2$.

Vậy $a-b+c=-4$.

Câu 8. Trong không gian $0xyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$. Có tất cả bao nhiêu điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy), với hoành độ, tung độ là các số nguyên, sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua M và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

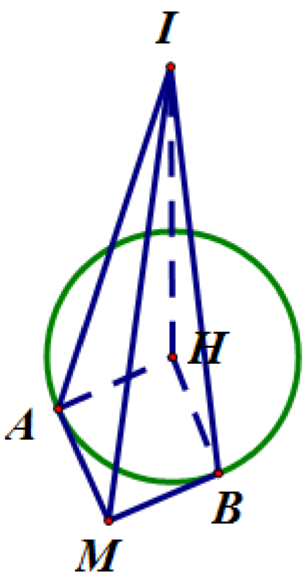
A. 29. **B.** 18. **C.** 14. **D.** 28.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(a,b,0)\in(Oxy)$, $a,b\in\mathbb{Z}$. Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-3)$, $R=3$.

Gọi A,B là tiếp điểm, H là tâm của đường tròn giao tuyến giữa mặt phẳng (MAB) và mặt cầu (S), r là bán kính đường tròn giao tuyến.



Ta có:

$MA = MB = AH = HB = r$

Xét tam giác $\Delta IAM : IM^2 = IA^2 + AM^2 = R^2 + r^2 \le 2R^2$

Mặt khác qua M kẻ được tiếp tuyến đến mặt cầu (S), suy ra $IM \ge R$.

Vậy $R^2 \le IM^2 \le 2R^2$

$\Leftrightarrow 9 \le a^2 + (b-1)^2 + 9 \le 18$

$\Leftrightarrow 0 \le a^2 + (b-1)^2 \le 9$

Mà $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{0; \pm1; \pm2; \pm3\}$.

Nếu $a = 0 \Rightarrow b \in \{1; 2; 3; 4; 0; -1; -2\}$.

Nếu $a = \pm1 \Rightarrow b \in \{1; 2; 3; 0; -1\}$.

Nếu $a = \pm2 \Rightarrow b \in \{1; 2; 3; 0; -1\}$.

Nếu $a = \pm3 \Rightarrow b = 1$.

Vậy có 29 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x = 2-t \\ y = t \\ z = m-1+t \end{cases}$. Gọi T là tập tất cả các giá trị của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các tiếp diện của (S) tại A và B tạo với nhau góc lớn nhất có thể. Tính tổng các phần tử của tập hợp T.

A. 3. **B.** -3. **C.** -5. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=2$.

Đường thẳng d đi qua điểm $N(2;0;m-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;1;1)$.

Điều kiện để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt là $\mathrm{d}\left(I;(d)\right)<R \Leftrightarrow \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IN};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}<2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2m^2+6m+6}}{\sqrt{3}}<2 \Leftrightarrow \dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}<m<\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$.

Khi đó, tiếp diện của (S) tại A và B vuông góc với IA và IB nên góc giữa chúng là góc $(IA;IB)$.

Ta có $0^\circ \le (IA;IB) \le 90^\circ$ nên $(IA;IB)_{\max}=90^\circ \Leftrightarrow IA\perp IB$.

Từ đó suy ra $\mathrm{d}\left(I;(d)\right)=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2m^2+6m+6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow 2m^2+6m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-3 \end{array}\right.$ (thỏa).

Vậy $T=\{-3;0\}$. Tổng các phần tử của tập hợp T bằng -3.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$, mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+z^2=R^2$, hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+4}{-1}$ và $d_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{1}$. Gọi d là đường thẳng vuông góc với (P) đồng thời cắt cả d_1, d_2. Biết rằng có số thực R sao cho chỉ có một điểm $M(m;n;p)$ thuộc d sao cho từ M có duy nhất một mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S). Khi đó $m^2+n^2+p^2-R^2$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

Gọi $A\left(a;2+3a;-4-a\right)$, $B\left(2b;1+b;-3+b\right)$ lần lượt là giao điểm của d với d_1 và d_2. Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-a+2b;-3a+b-1;a+b+1\right)$. Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;1)$ nên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) khi $\dfrac{-a+2b}{1}=\dfrac{-3a+b-1}{1}=\dfrac{a+b+1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=0 \end{cases}$

từ đó ta tính được $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ nên $(d):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{1}$.

Do chỉ có một điểm $M(m;n;p)$ thuộc d sao cho từ M có duy nhất một mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) nên đường thẳng d phải tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $M(m;n;p)$.

Giả sử $M(t;1+t;-3+t)\in d$, đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $M(t;1+t;-3+t)$ khi và chỉ khi phương trình $(t-1)^2+(1+t)^2+(-3+t)^2=R^2$ có nghiệm kép, hay

$3t^2-6t+11-R^2=0$ có nghiệm kép, tức $\Delta'=9-3\left(11-R^2\right)=0 \Leftrightarrow R^2=8$ khi đó $t=1$ nên có duy nhất một điểm $M(1;2;-2)$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài. Khi đó $m=1, n=2, p=-2$ nên $m^2+n^2+p^2-R^2=1$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3) có phương trình $(d_1):\begin{cases}x=1+2t_1\\y=1+t_1\\z=1-2t_1\end{cases}$, $(d_2):\begin{cases}x=3+t_2\\y=-1+2t_2\\z=2+2t_2\end{cases}$, $(d_3):\begin{cases}x=4+2t_3\\y=4-2t_3\\z=1+t_3\end{cases}$. $S(I;R)$ là mặt cầu tâm I bán kính R tiếp xúc với 3 đường thẳng đó. Giá trị nhỏ nhất của R gần số nào nhất trong các số sau:

A. $2,1$. **B.** $2,2$. **C.** $2,3$. **D.** $2,4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: (d_1) đi qua điểm $A(1;1;1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;1;-2)$.

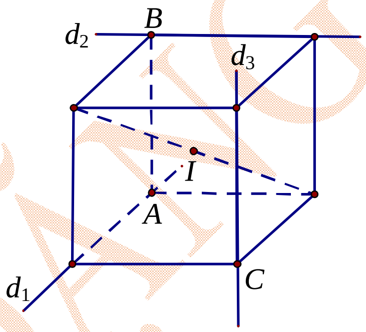
(d_2) đi qua điểm $B(3;-1;2)$ có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(1;2;2)$.

(d_3) đi qua điểm $C(4;4;1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_3}=(2;-2;1)$.

Ta có $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0$, $\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3}=0$, $\overrightarrow{u_3}.\overrightarrow{u_1}=0 \Rightarrow (d_1), (d_2), (d_3)$ đôi một vuông góc với nhau.

$\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{AB}\neq 0$, $\left[\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\right].\overrightarrow{BC}\neq 0$, $\left[\overrightarrow{u_3},\overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{CA}\neq 0 \Rightarrow (d_1), (d_2), (d_3)$ đôi một chéo nhau.

Lại có: $\overrightarrow{AB}=(2;-2;1)$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0$ nên $(d_1), (d_2), (d_3)$ chứa 3 cạnh của hình hộp chữ nhật như hình vẽ.



Vì mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ tiếp xúc với 3 đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ nên bán kính

$R=d(I,d_1)=d(I,d_2)=d(I,d_3) \Leftrightarrow R^2=d^2(I,d_1)=d^2(I,d_2)=d^2(I,d_3)$

$\Leftrightarrow R^2=\left(\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_1}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}\right)^2=\left(\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}\right)^2=\left(\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{CI},\overrightarrow{u_3}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_3}\right|}\right)^2$, ta thấy $\left|\overrightarrow{u_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{u_2}\right|^2=\left|\overrightarrow{u_3}\right|^2=9$ và

$\overrightarrow{AI}=(a-1;b-1;c-1)$, $\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_1}\right]=(-2b-c+3;2a+2c-4;a-2b+1)$.

$\overrightarrow{BI}=(a-3;b+1;c-2)$, $\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{u_2}\right]=(2b-2c+6;-2a+c+4;2a-b-7)$.

$\overrightarrow{CI}=(a-4;b-4;c-1)$, $\left[\overrightarrow{CI},\overrightarrow{u_3}\right]=(b+2c-6;-a+2c+2;-2a-2b+16)$.

$$9R^2=\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_1}\right]\right|^2=\left|\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{u_2}\right]\right|^2=\left|\left[\overrightarrow{CI},\overrightarrow{u_3}\right]\right|^2\Rightarrow 27R^2=\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_1}\right]\right|^2+\left|\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{u_2}\right]\right|^2+\left|\left[\overrightarrow{CI},\overrightarrow{u_3}\right]\right|^2=$$

$$=18(a^2+b^2+c^2)-126a-54b-54c+423=18\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+18\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+18\left(c-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{243}{2}\geq\frac{243}{2}$$

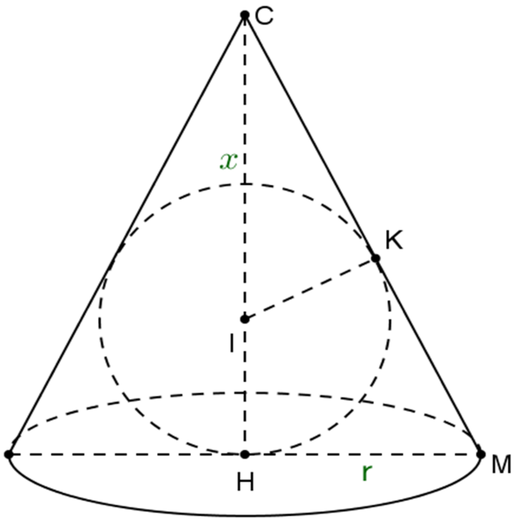
$\Rightarrow R_{\min}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ khi đó $R\approx 2{,}12$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;0), B(-3;1;4)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$. Xét khối nón (N) có đỉnh có tọa độ nguyên thuộc đường thẳng Δ và ngoại tiếp mặt cầu đường kính AB. Khi (N) có thể tích nhỏ nhất thì tung độ đỉnh của khối nón (N) bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(-1;2;2)$, bán kính 3.

Gọi H,r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đáy của (N), C là đỉnh của (N).

Khi đó C,I,H thẳng hàng (I nằm giữa C,H), $IH=IK=3$

Đặt $CI=x$. Ta có ΔCIK đồng dạng ΔCMH nên $\dfrac{IK}{MH}=\dfrac{CK}{CH}\Rightarrow r=HM=\dfrac{IK.CH}{CK}=\dfrac{3(x+3)}{\sqrt{x^2-9}}$

$$V_{(N)}=\frac{1}{3}\pi r^2.CH=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{3(x+3)}{\sqrt{x^2-9}}\right)^2.(x+3)=3\pi\frac{(x+3)^2}{x-3}$$

$V_{(N)}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{x-3}=\dfrac{x^2+6x+9}{x-3}$ nhỏ nhất $(x>3)$.

$f'(x)=\dfrac{x^2-6x-27}{x-3}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=9\end{array}\right.$.

$V_{(N)}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=9$, khi đó $IC=9$ nên $C\in(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=81$

Mặt khác $C\in\Delta$ nên $C(-1;2;11)$ hoặc $C\left(\dfrac{43}{11};-\dfrac{32}{11};-\dfrac{41}{11}\right)$.

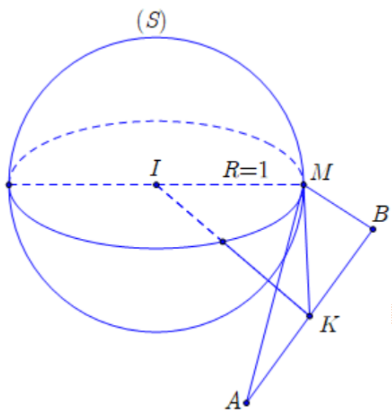
Vì C có tọa độ nguyên nên $C(-1;2;11)$. Vậy Khi (N) có thể tích nhỏ nhất thì tung độ đỉnh của khối nón (N) bằng 2.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của (S) tại M cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ mà a,b là các số nguyên dương và $\widehat{AMB}=90^\circ$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;1)$ và bán kính $R=1=IM$.

Gọi K là trung điểm của $AB\Rightarrow K\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};0\right)$, khi đó $KA=KB=KM$

Ta có $MK=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\Rightarrow MK^2=\dfrac{a^2+b^2}{4}$; $IK^2=\left(\dfrac{a}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{b}{2}-3\right)^2+1$.

Tam giác IMK vuông tại M, suy ra $IM^2+MK^2=IK^2$

$\Leftrightarrow 1+\dfrac{a^2+b^2}{4}=\left(\dfrac{a}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{b}{2}-3\right)^2+1\Leftrightarrow 2a+3b=13$

Vì a,b nguyên dương và $2a+3b=13$ suy ra $\left[\begin{array}{l}a=5,b=1\\a=2,b=3\end{array}\right.$.

Thử lại thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=25$. và hai điểm $A(7;9;0)$, $B(0;8;0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$ với M là điểm bất kỳ thuộc mặt cầu (S).

A. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** 10. **D.** $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $M(x;y;z)$.

Ta có $M\in(S)\Rightarrow(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=25$

Lại có $MA=\sqrt{(x-7)^2+(y-9)^2+z^2}$

$=\sqrt{(x-7)^2+(y-9)^2+z^2+3.25-3.25}$

$=\sqrt{(x-7)^2+(y-9)^2+z^2+3\left[(x-1)^2+(y-1)^2+z^2\right]-3.25}$

$=2\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2+z^2}$

$=2MC$ trong đó $C\left(\frac{5}{2};3;0\right)$, $BC=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

Khi đó $P=2MC+2MB\ge 2CB\Rightarrow P\ge 5\sqrt{5}$

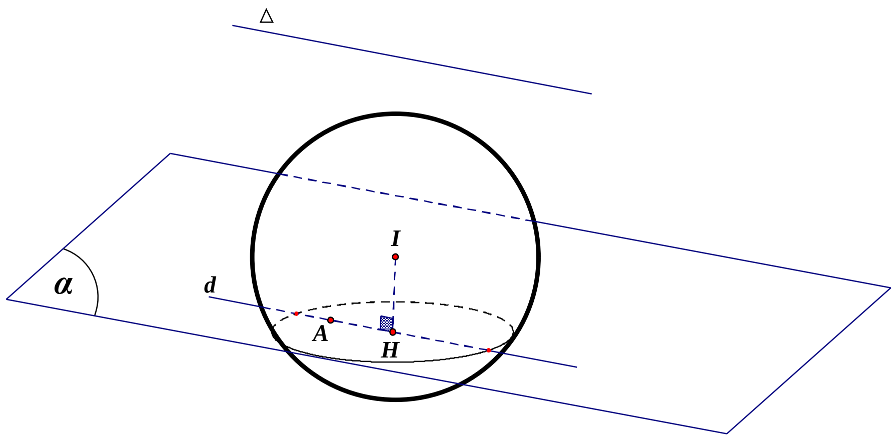
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}M\in(S)\\ \overrightarrow{CM}=k\overrightarrow{CB}\ (k>0)\end{cases}\Rightarrow M(1;6;0)$

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-3)$, đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+3}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=25$. Mặt phẳng (α) thay đổi, luôn đi qua A và song song với Δ. Trong trường hợp (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất thì (α) có phương trình $ax+by+cz-3=0$. Tính giá trị của biểu thức $S=3a-2b-2c$.

A. 12. **B.** 9. **C.** 4. **D.** $\frac{9}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;1)$, bán kính $R=5$.

Dễ thấy A nằm trong mặt cầu (S) nên (α) luôn cắt (S) theo một đường tròn (C).

Đường thẳng d đi qua A và song song với Δ có phương trình là $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của I trên $d \Rightarrow H(3;-1;-1)$.

Gọi r là bán kính của đường tròn (C), ta có: $r^2=R^2-\left[d\left(I,(\alpha)\right)\right]^2 \geq R^2-IH^2=16 \Leftrightarrow r\geq 4$.

Chu vi của (C) nhỏ nhất $\Leftrightarrow r$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d\left(I,(\alpha)\right)=IH \Leftrightarrow H$ là hình chiếu của I trên (α).

Khi đó, (α) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IH}(2;-1;-2)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình:

$2x-y-2z-9=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-3=0$.

Từ đó, suy ra: $a=\frac{2}{3}, b=-\frac{1}{3}, c=-\frac{2}{3} \Rightarrow 3a-2b-2c=4$.

Cách 2. Vì $(\alpha)//\Delta$ nên $a-2b+2c=0$ (1).

Vì $A(2;1;-3)\in(\alpha)$ nên $2a+b-3c-3=0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a=\frac{4c+6}{5}$, $b=\frac{7c+3}{5}$.

Điểm A nằm bên trong mặt cầu (S) nên mặt phẳng (α) luôn cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=\sqrt{25-h^2}$, với $h=\mathrm{d}\left(I(1;0;1), mp(\alpha)\right)$.

Ta có $h=\frac{|a+c-3|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3.\sqrt{\frac{c^2-2c+1}{10c^2+10c+5}}$.

Với mọi $c\in\mathbb{R}$ ta có $(3c+2)^2\geq 0$

$\Leftrightarrow 9c^2+12c+4\geq 0 \Leftrightarrow c^2-2c+1\leq 10c^2+10c+5$ (3).

Mà $10c^2+10c+5>0, \forall c\in\mathbb{R}$, nên $(3)\Leftrightarrow \dfrac{c^2-2c+1}{10c^2+10c+5}\le 1$. Dẫn tới $h\le 3$, từ đó $r=\sqrt{25-h^2}\ge 4$, dấu "=" xảy ra khi $c=-\dfrac{2}{3}$.

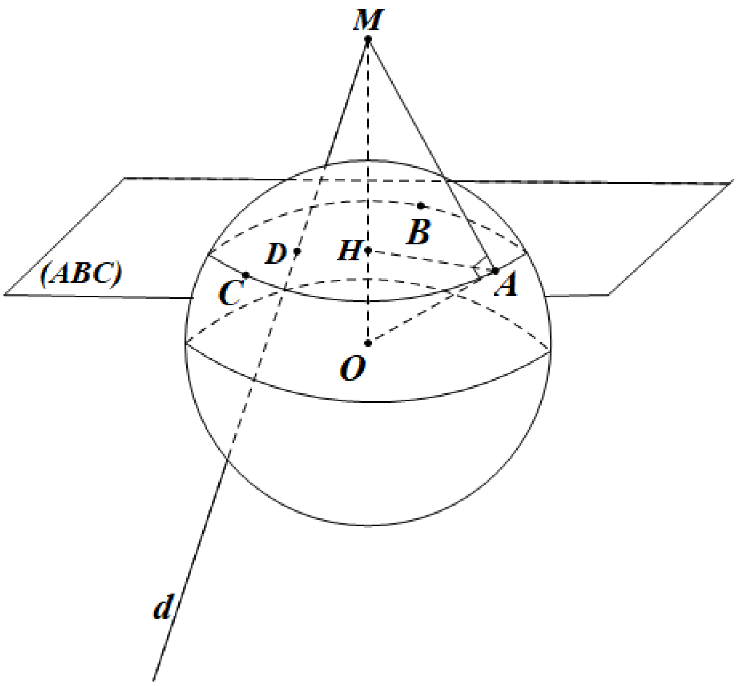
Vậy, đường tròn giao tuyến của (S) và (α) có chu vi nhỏ nhất khi $c=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow a=\dfrac{2}{3}, b=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow S=4$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)\in d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B



* Ta có: $M(x_0;y_0;z_0)\in d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}\Rightarrow x_0+y_0+z_0=4$.

* Mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2=9\Rightarrow$ tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=3$.

* MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu $\Rightarrow MO\perp(ABC)$.

$\Rightarrow (ABC)$ đi qua $D(1;1;2)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OM}(x_0;y_0;z_0)$ có phương trình dạng:

$x_0(x-1)+y_0(y-1)+z_0(z-2)=0$.

* MA là tiếp tuyến của mặt cầu tại $A\Rightarrow \Delta MOA$ vuông tại $A\Rightarrow OH.OM=OA^2=R^2=9$.

Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC) $(OH+OM=HM)$, ta có:

$$d\left(O;(ABC)\right)=OH=\frac{|-x_0-y_0-2z_0|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{|x_0+y_0+z_0+z_0|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{|z_0+4|}{OM}\Rightarrow OH.OM=|z_0+4|.$$

$\Rightarrow |z_0+4|=9\Leftrightarrow z_0=5\vee z_0=-13$.

* Với $z_0=5\Rightarrow M(0;-1;5)\Rightarrow T=26$ nhận do: $OM=\sqrt{26};OH=\dfrac{|z_0+4|}{OM}=\dfrac{9}{\sqrt{26}}$;

$pt(ABC):-y+5z-9=0\Rightarrow MH=d\left(M;(ABC)\right)=\dfrac{17}{\sqrt{26}}$.

$\Rightarrow OH+HM=OM$.

* Với $z_0=-13\Rightarrow M(6;11;-13)\Rightarrow$ loại do: $OM=\sqrt{326};OH=\dfrac{9}{\sqrt{326}}$;

$(ABC):6x+11y-13z+9=0\Rightarrow MH=d\left(M;(ABC)\right)=\dfrac{335}{\sqrt{326}}$.

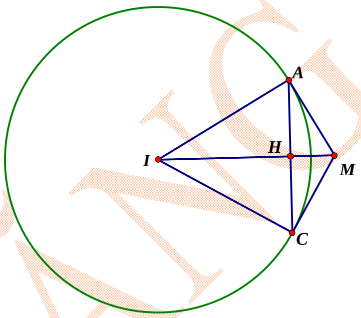
$\Rightarrow OH+HM\neq OM$.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c),(a>0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB}=60^0$, $\widehat{BMC}=60^0$, $\widehat{CMA}=120^0$. Tính $a^3+b^3+c^3$.

A. $a^3+b^3+c^3=\dfrac{173}{9}$. **B.** $a^3+b^3+c^3=\dfrac{112}{9}$. **C.** $a^3+b^3+c^3=-8$. **D.** $a^3+b^3+c^3=\dfrac{23}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2+13}=3\sqrt{3}$

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt cầu (S).

Đặt $MA=MB=MC=x$ khi đó $AB=x;BC=x\sqrt{2};CA=x\sqrt{3}$ do đó tam giác ABC vuông tại B nên trung điểm H của AC là tâm đường tròn (C) và H, I, M thẳng hàng.

Vì $\widehat{AMC}=120^0$ nên tam giác AIC đều do đó $x\sqrt{3}=R\Leftrightarrow x=3$ suy ra $IM=2AM=2x=6$.

Lại có $M\in d$ nên $M\left(-1+t;-2+t;1+t\right),\left(t>1\right)$ mà $IM=6$ nên $\left(t-2\right)^2+\left(t-4\right)^2+\left(t+4\right)^2=36\Leftrightarrow 3t^2-4t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$.

Mà a > 0 nên $t=\dfrac{4}{3}$ suy ra $H\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{3}\right)$ nên $a^3+b^3+c^3=\dfrac{112}{9}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ thuộc $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=1+2t\\ z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng $\left(ABC\right)$ đi qua $D\left(1;1;2\right)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30 **B.** 26 **C.** 20 **D.** 21

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $O\left(0;0;0\right)$ và bán kính R. Gọi $M\left(1+t_0;1+2t_0;2-3t_0\right)\in d$.

Gỉa sử $T\left(x;y;z\right)\in\left(S\right)$ là một tiếp điểm của tiếp tuyến MT với mặt cầu $\left(S\right)$. Khi đó $OT^2+MT^2=OM^2$

$\Leftrightarrow 9+\left[x-\left(1+t_0\right)\right]^2+\left[y-\left(1+2t_0\right)\right]^2+\left(z-\left(2-3t_0\right)\right)^2=\left(1+t_0\right)^2+\left(1+2t_0\right)^2+\left(2-3t_0\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(1+t_0\right)x+\left(1+2t_0\right)+\left(2-3t_0\right)z-9=0$.

Suy ra phương trình mặt phẳng $\left(ABC\right)$ có dạng $\left(1+t_0\right)x+\left(1+2t_0\right)y+\left(2-3t_0\right)z-9=0$

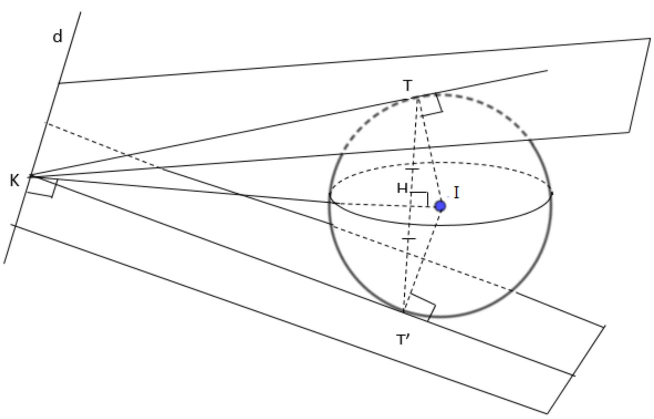
Do $D\left(1;1;2\right)\in\left(ABC\right)$ nên $1+t_0+1+2t_0+2.\left(2-3t\right)-9=0\Leftrightarrow t_0=-1\Rightarrow M\left(0;-1;5\right)$.

Vậy $T=0^2+\left(-1\right)^2+5^2=26$.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right):x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $\left(P\right)$, $\left(P'\right)$ chứa d và tiếp xúc với $\left(S\right)$ tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\dfrac{7}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{6}\right)$.

Lời giải



Mặt cầu (S) tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2-1}=1$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên d.

$K\in d$ nên ta có thể giả sử $K(t;2+t;-t)$

$\overrightarrow{IK}=(t-1;2+t;-t+1)$, $\overrightarrow{u_d}=(1;1;-1)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng d

$IK\perp d\Leftrightarrow \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow t-1+2+t+t-1=0\Leftrightarrow t=0.\Rightarrow K(0;2;0)$

ΔITK vuông tại T có TH là đường cao nên $IT^2=IH.IK$.

$\Leftrightarrow IH=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(IK=\sqrt{6}\right)\Rightarrow \overrightarrow{IH}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{IK}$. Giả sử $H(x;y;z)$

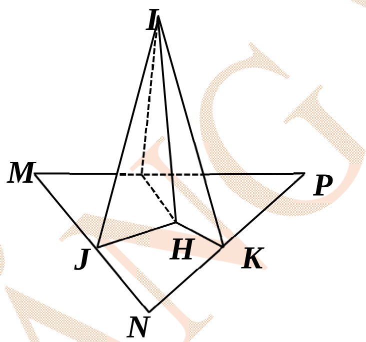
$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\dfrac{1}{6}.(-1)\\ y-0=\dfrac{1}{6}.2\\ z+1=\dfrac{1}{6}.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{6}\\ y=\dfrac{1}{3}\\ z=\dfrac{-5}{6}\end{cases}$ Vậy $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{-5}{6}\right)$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM?

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C



Nếu điểm $A(x;y;z)$ thuộc (C) thì

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0\\ x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0\end{cases}\Rightarrow 3x-2y-z=0$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) chứa đường tròn (C) là $3x-2y-z=0$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $x+y+z-6=0$.

Gọi I là tâm mặt cầu thỏa bài toán, H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (MNP), J, K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các đường thẳng MN, NP, PM. Ta có

$IJ = IK = IL \Rightarrow HJ = HK = HL$.

Suy ra I thuộc đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác MNP và vuông góc với mặt phẳng (MNP).

Hình chóp $O.MNP$ là hình chóp đều nên đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác MNP và vuông góc với mặt phẳng (MNP) cũng chính là đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (MNP).

Phương trình đường thẳng d là $x = y = z$.

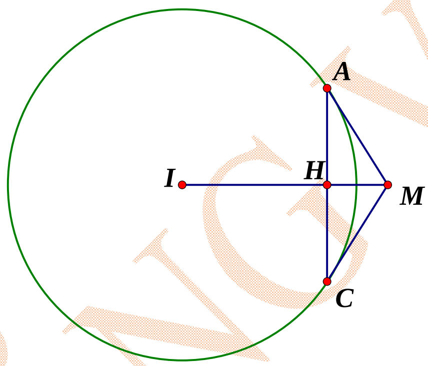
Dễ thấy $d \subset (\alpha)$ suy ra mọi điểm thuộc d đều là tâm của một mặt cầu thỏa bài toán. Vậy có vô số mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

Câu 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c)(a>0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60°$, $\widehat{BMC} = 90°$, $\widehat{CMA} = 120°$. Tính $Q = a + b + c$.

A. $Q = 3$. **B.** $Q = \frac{10}{3}$. **C.** $Q = 2$. **D.** $Q = 1$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2 + 13} = 3\sqrt{3}$.

Gọi đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (ABC) với mặt cầu (S).

Đặt $MA = MB = MC = x$ $(x > 0)$.

Áp dụng định lý cosin trong ΔAMB và ΔCMA, ta có:

$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA.MB.\cos\widehat{AMB} = 2x^2 - 2x^2\cos 60° = x^2 \Rightarrow AB = x$.

$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA.MC.\cos\widehat{AMC} = 2x^2 - 2x^2\cos 120° = 3x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{3}$.

Vì ΔBMC vuông tại M nên: $BC = \sqrt{MB^2 + MC^2} = x\sqrt{2}$.

Mặt khác $AB^2 + BC^2 = x^2 + (x\sqrt{2})^2 = 3x^2 = (x\sqrt{3})^2 = AC^2$ nên ΔABC vuông tại B.

Gọi H là trung điểm của AC thì H là tâm của đường tròn (C) và ba điểm H, I, M thẳng hàng.

Do $\widehat{AMC} = 120°$ nên $\widehat{AIC} = 60°$, suy ra ΔAIC đều và $AC = IA = IC = R = 3\sqrt{3}$.

Suy ra $x\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 3$ và $IA = IM\cos 30° \Leftrightarrow IM = \frac{2IA}{\sqrt{3}} = \frac{2.3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$.

Điểm $M \in d$ nên $M(t-1; t-2; t+1) \Rightarrow IM^2 = (t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 3t^2 - 4t + 36$.

Mà $IM^2 = 36 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 36 = 36 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow M(-1; -2; 1) \\ t = \frac{4}{3} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right) \end{array}\right.$

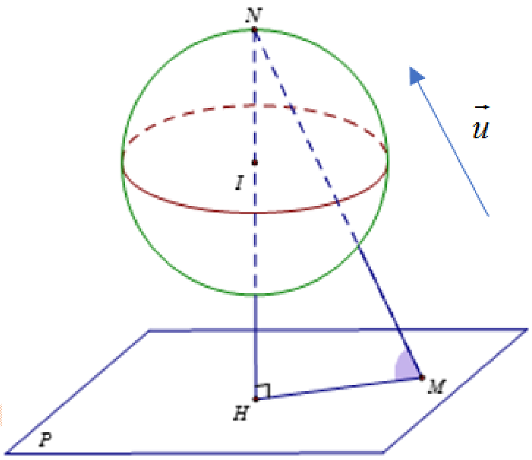
Vì $x_M > 0$ nên điểm cần tìm là $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$, suy ra $Q = 2$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u} = (1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN = 3$. **B.** $MN = 1 + 2\sqrt{2}$. **C.** $MN = 3\sqrt{2}$. **D.** $MN = 14$.

Lời giải.

(S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = 1$. Ta có: $d(I, (P)) = \frac{|-1 - 2.2 + 2.1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2 > R$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (P) và α là góc giữa MN và NH.

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên góc α có số đo không đổi, $\alpha = \widehat{HNM}$.

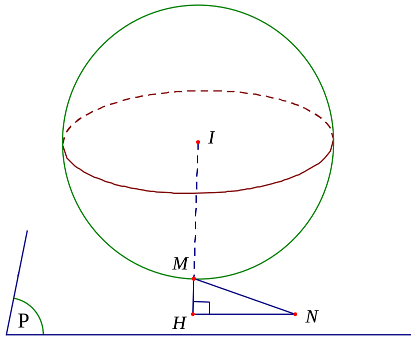
Có $HN = MN.\cos\alpha \Rightarrow MN = \frac{1}{\cos\alpha}.HN$ nên MN lớn nhất $\Leftrightarrow$ HN lớn nhất $\Leftrightarrow$ $HN = d(I, (P)) + R = 3$.

Có $\cos\alpha = \left|\cos\left(\vec{u}, \overrightarrow{n_P}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $MN = \frac{1}{\cos\alpha}HN = 3\sqrt{2}$.

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$. Điểm M thay đổi trên (S), điểm N thay đổi trên (P). Độ dài nhỏ nhất của MN bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$, bán kính $R=3$; $d\left(I;(P)\right)=4>R \Rightarrow$ mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) không có điểm chung.

Dựng $IH\perp(P),(H\in(P))$. Ta có: MN nhỏ nhất khi M là giao điểm của đoạn IH với (S) và $N\equiv H$.

Phương trình đường thẳng IH : $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=-1+2t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$

Điểm $M(1+2t;-2-t;-1+2t)\in(S)$ nên $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$

$\Leftrightarrow(2t)^2+(-t)^2+(2t)^2=9\Leftrightarrow t=\pm1$. Khi đó $M_1(3;-3;1),M_2(-1;-1;-3)$.

Thử lại: $d\left(M_1;(P)\right)=1$; $d\left(M_2;(P)\right)=7>IH=4$.

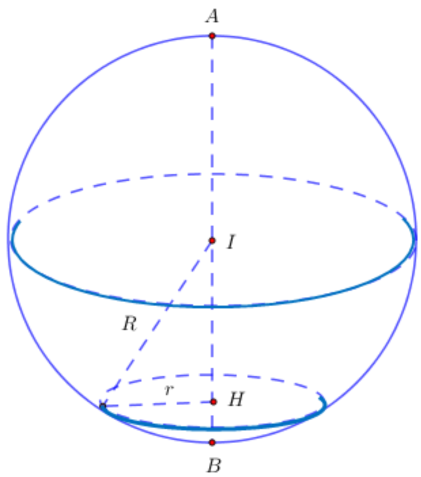
Vậy $MN_{\min}=MH=1$ khi $M(3;-3;1);\mathrm{N}\left(\frac{11}{3};-\frac{10}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Câu 24. **(ĐTK2021)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A, đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB. Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình dạng $2x+by+cz+d=0$. Giá trị của $b+c+d$ bằng

A. -21. **B.** -12. **C.** -18. **D.** -15.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $AB = 6$

Gọi h, r là chiều cao và bán kính đáy hình nón (N), R là bán kính mặt cầu (S) đường kính AB. Gọi I là trung điểm AB và H là tâm đường tròn đáy của (N).

Để thể tích hình nón (N) lớn nhất thì $h \geq R$.

Ta có: $r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - (h-R)^2$

Thể tích khối nón (N): $V = \frac{1}{3}h.\pi r^2 = \frac{1}{3}h.\pi.\left[R^2 - (h-R)^2\right] = \frac{1}{3}\pi\left(2Rh^2 - h^3\right)$

Xét hàm số $f(h) = \frac{1}{3}\pi\left(2Rh^2 - h^3\right)$ với $R \leq h < 2R$ ta suy ra V_{max} khi $h = \frac{4R}{3} \Rightarrow AH = 4, BH = 2$.

Gọi $H(x;y;z)$, khi đó: $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow H = \left(\frac{14}{3};\frac{11}{3};\frac{13}{3}\right)$

Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) đi qua H và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vecto pháp tuyến là: $2\left(x - \frac{14}{3}\right) + 2\left(y - \frac{11}{3}\right) + 1\left(z - \frac{13}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z - 21 = 0 \Rightarrow b + c + d = -18$.

Câu 25. **(Mã 103 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ và điểm $A(2;3;4)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $2x + 2y + 2z + 15 = 0$ **B.** $x + y + z + 7 = 0$

C. $2x + 2y + 2z - 15 = 0$ **D.** $x + y + z - 7 = 0$

Lời giải

Chọn D

Dễ thấy A nằm ngoài mặt cầu (S). Tâm mặt cầu là $I(1;2;3)$.

Đường thẳng AM tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow AM \perp IM \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{IM} = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) + (y-3)(y-2) + (z-4)(z-3) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1-1)(x-1) + (y-2-1)(y-2) + (z-3-1)(z-3) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - (x+y+z-7) = 0$

$\Leftrightarrow x + y + z - 7 = 0$ $(Do\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0)$.

Câu 26. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6$. Điểm M luôn thuộc mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-2y-6z+9=0$. **B.** $2x-2y-6z-9=0$.

C. $2x+2y+6z+9=0$. **D.** $2x-2y+6z+9=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi điểm $M(x;y;z)\in(S)$ là điểm cần tìm.

Khi đó: $x^2+y^2+(z+2)^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4z+4=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=-4z-3 \quad (1)$

Ta có: $\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$ và $\overrightarrow{AM}=(x-2;y+2;z-2)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6 \Leftrightarrow x(x-2)+y(y+2)+z(z-2)=6$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=6 \quad (2)$

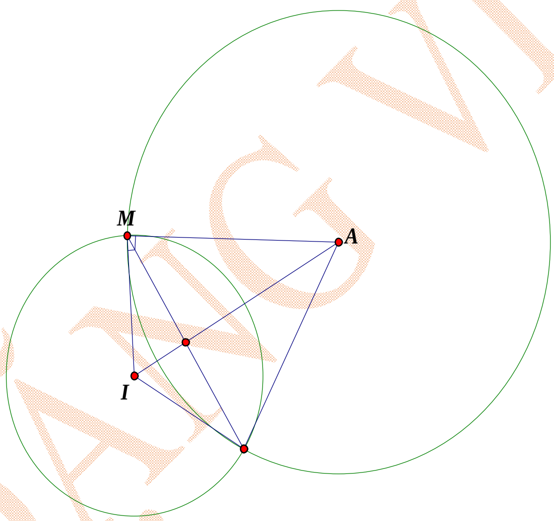
Thay (1) vào (2) ta được

$-4z-3-2x+2y-2z-6=0 \Leftrightarrow 2x-2y+6z+9=0$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z-4=0$. **C.** $3x+3y+3z-8=0$. **D.** $3x+3y+3z-4=0$.

Lời giải



(S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=1$.

Do $IA=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}>R$ nên điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).

ΔAMI vuông tại M: $AM=\sqrt{AI^2-IM^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$.

$\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S') có tâm A bán kính $\sqrt{2}$.

Ta có phương trình $(S'):(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=2$.

Ta có $M\in(S)\cap(S')$.

Tọa độ của M thỏa hệ phương trình $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\\(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=2\end{cases}(I)$.

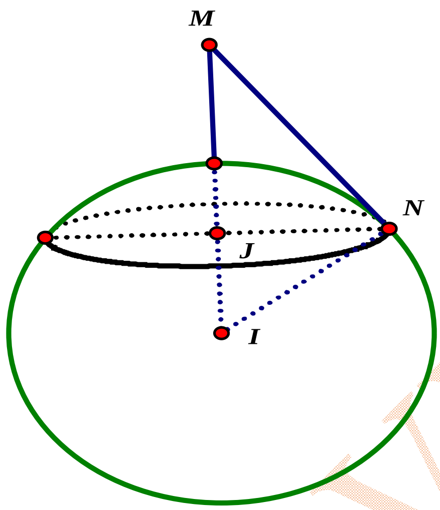
Ta có $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0\\x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z+10=0\end{cases}\Rightarrow 2x+2y+2z-8=0\Leftrightarrow x+y+z-4=0$

Suy ra $M\in(P): x+y+z-4=0$.

Câu 28. Trong không gian *Oxyz*, cho $(S):(x+3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$, điểm $M(7;1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng di động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N. Tiếp điểm N di động trên đường tròn (T) có tâm $J(a,b,c)$. Gọi $k=2a-5b+10c$, thì giá trị của k là

A. 45. **B.** 50. **C.** -45. **D.** -50.

Lời giải



Mặt cầu $(S):(x+3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$ có tâm $I(-3;2;5)$, bán kính $R=6$.

Có $IM=\sqrt{25+16+4}=3\sqrt{5}>6=R$, nên M thuộc miền ngoài của mặt cầu (S).

Có MN tiếp xúc mặt cầu (S) tại N, nên $MN\perp IN$ tại N.

Gọi J là điểm chiếu của N lên MI.

Có $IN^2=IJ.IM$. Suy ra $IJ=\dfrac{IN^2}{IM}=\dfrac{36}{3\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ (không đổi), I cố định.

Suy ra N thuộc (P) cố định và mặt cầu (S), nên N thuộc đường tròn (C) tâm J.

Gọi $N(x;y;z)$, có $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{IJ}{IM}\overrightarrow{IM}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\overrightarrow{IM}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3=8\\y-2=-\dfrac{4}{5}\\z-5=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$

$\Rightarrow N\left(5;\dfrac{6}{5};\dfrac{23}{5}\right)$, $k=2a-5b+10c=50$. Vậy $k=50$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P. Tìm c biết rằng $a+b+c<5$

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ là $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Đk: $a^2+b^2+c^2-d>0$

(S) đi qua các điểm M, N, P và tiếp xúc với mặt phẳng $(Oyz) \Leftrightarrow \begin{cases} -4a-2b-8c+d=-21 \\ -10a+d=-25 \\ -2a+6b-2c+d=-11 \\ R=|a| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a-2b-8c+10a-25=-21 \\ d=10a-25 \\ -2a+6b-2c+10a-25=-11 \\ a^2+b^2+c^2-d=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a-2b-8c=4 \\ d=10a-25 \\ 8a+6b-2c=14 \\ b^2+c^2-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a-2b-8c=4 \\ d=10a-25 \\ 32a+24b-8c=56 \\ b^2+c^2-d=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a-2b-8c=4 \\ d=10a-25 \\ 26a+26b=52 \\ b^2+c^2-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ d=10a-25 \\ b=-a+2 \\ b^2+c^2-d=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (-a+2)^2+(a-1)^2-10a+25=0$

$\Leftrightarrow 2a^2-16a+30=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=5 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=2 \\ d=5 \end{cases} hay \begin{cases} a=5 \\ b=-3 \\ c=4 \\ d=25 \end{cases}$$

Vì $a+b+c<5$ nên chọn $c=2$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Lời giải

□ Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I \in (C)$ và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (MNP).

Ta có: (S) tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM

$\Leftrightarrow d(I,MN)=d(I,NP)=d(I,PM) \Leftrightarrow d(H,MN)=d(H,NP)=d(H,PM)$

$\Leftrightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác MNP.

- (MNP) có phương trình là $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1$ hay $x+y+z-6=0$.
- $(C)=(S_1)\cap(S_2) \Rightarrow$ Tọa độ các điểm thuộc trên (C) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0 \\ x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow 3x-2y-z=0.$$

Do đó, phương trình chứa mặt phẳng chứa (C) là $(\alpha): 3x-2y-z=0$.

- Vì $1.3+1.(-2)+1.(-1)=0 \Rightarrow (MNP)\perp(\alpha)$. (1)
- Ta có: $MN=NP=PM=6\sqrt{2} \Rightarrow \Delta MNP$ đều.

Gọi G là trọng tâm tam giác MNP $\Rightarrow G(2;2;2)$ và G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP. Thay tọa độ của điểm G vào phương trình mặt phẳng (α), ta có: $G\in(\alpha)$.

- Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với (MNP) tại G.

Vì $\begin{cases} (MNP)\perp(\alpha) \\ G\in(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta\subset(\alpha)$.

Khi đó: $\forall I\in\Delta \Rightarrow d(I,MN)=d(I,NP)=d(I,PM)=r$

$\Rightarrow$ Mặt cầu tâm I bán kính r tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

Vậy có vô số mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, MP, PM.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho $A(-3;1;1), B(1;-1;5)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+11=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T).

A. $r=4$. **B.** $r=2$. **C.** $r=\sqrt{3}$. **D.** $r=\sqrt{2}$.

Lời giải

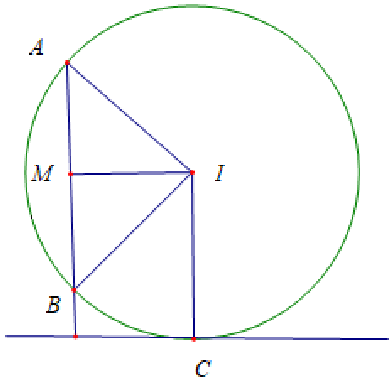
Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;4)$ và mp (P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;2)$. Do đó AB vuông góc với (P).

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B nên ta có

$$\begin{cases} 9+1+1+6a-2b-2c+d=0 \\ 1+1+25-2a+2b-10c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a-2b-2c+d=-11 \\ 2a-2b+10c-d=27 \end{cases}.$$

Suy ra $8a-4b+8c=16 \Leftrightarrow 2a-b+2c=4$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) nên ta có $d(I,(P))=\frac{|2a-b+2c+11|}{3}=5$.

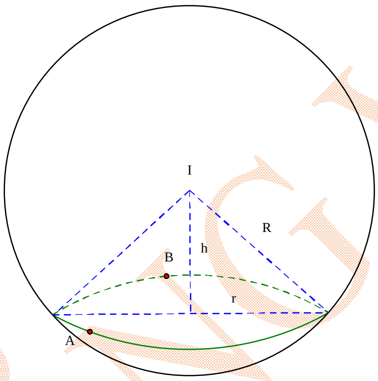


Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;4)\Rightarrow AB=\sqrt{16+4+16}=6$. Gọi M là trung điểm AB ta có $d(C,AB)=IM=\sqrt{5^2-3^2}=4$. Vậy C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định có bán kính $r=4.$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2};\frac{7-\sqrt{3}}{2};3\right)$, $B\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2};\frac{7+\sqrt{3}}{2};3\right)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$. Xét mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$, $(a,b,c,d\in\mathbb{Z}:d<-5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A,B. Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Tính giá trị của $T=|a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

A. $T=4$. **B.** $T=6$. **C.** $T=2$. **D.** $T=12$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

Có $IA=IB=\sqrt{6}$ nên A,B thuộc mặt cầu (S).

$\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{3};\sqrt{3};0\right)=-\sqrt{3}(1;-1;0)=-\sqrt{3}\vec{a}$, $M\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2};3\right)$ là trung điểm của AB.

Gọi $\vec{a}=(1;-1;0)$ và $\vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2>0$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)

Vì $A,B\in(P)$ nên có $\begin{cases}I\in(P)\\ \vec{a}.\vec{n}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5}{2}a+\frac{7}{2}b+3c+d=0\\ a-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=-6a-3c\\ a=b\end{cases}$.

Gọi $h=d(I,(P))$, $(C)=(P)\cap(S)$, r là bán kính đường tròn (C).

$r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{6-h^2}$.

Diện tích thiết diện qua trục của hình nón (N).

$S=\frac{1}{2}.h.2r=h.\sqrt{6-h^2}\le\frac{h^2+6-h^2}{2}=3$.

$MaxS=3$ khi $h^2=6-h^2\Rightarrow h=\sqrt{3}$.

$h=d\left(I,(P)\right)\Leftrightarrow\sqrt{3}=\frac{|a+2b+3c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

$\Leftrightarrow a^2=c^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=c\\a=-c\end{array}\right.$.

Nếu $a=c$ thì $b=a;d=-9a$ và $(P):ax+ay+az-9a=0\Leftrightarrow x+y+z-9=0$ (nhận).

Nếu $a=-c$ thì $b=a;d=-3a$ và $(P):ax+ay-az-3a=0\Leftrightarrow x+y-z-3=0$ (loại).

Vậy $T=|a+b+c+d|=6$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha):2x-y+2z+10=0$ và $(\beta):\frac{x}{m}+\frac{y}{1-m}+\frac{z}{1}=1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 12

Lời giải

Chọn C

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu.

Theo giả thiết ta có $R=d\left(I,(\alpha)\right)=d\left(I,(\beta)\right)$.

Mà $d\left(I,(\beta)\right)=\frac{\left|\frac{a}{m}+\frac{b}{1-m}+c-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(1-m)^2}+1}}$

Ta có

$$\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(1-m)^2}+1}=\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{1-m}\right)^2-2\frac{1}{m}.\frac{1}{1-m}+1}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{1}{m(1-m)}\right]^2-2\frac{1}{m}.\frac{1}{1-m}+1}=\frac{1}{m(1-m)}-1(\text{do } m\in(0;1))$$

Nên

$$R=\frac{\left|\frac{a(1-m)+bm+cm(1-m)-m(1-m)}{m(1-m)}\right|}{\frac{1}{m(1-m)}-1}$$

$$\Leftrightarrow R=\frac{\left|a-am+bm+cm-cm^2-m+m^2\right|}{m^2-m+1}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R-Rm+Rm^2=a-am+bm+cm-cm^2-m+m^2\\-R+Rm-Rm^2=a-am+bm+cm-cm^2-m+m^2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2(R+c-1)+m(a-b-c-R+1)+R-a=0(1)\\m^2(R+c-1)+m(b+c-a-R-1)+R+a=0(2)\end{array}\right.$$

Xét (1) do mặt cầu tiếp xúc với tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ với mọi $m\in(0;1)$ nên pt (1) nghiệm đúng với mọi $m\in(0;1)$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}R+c-1=0\\a-b-c-R+1=0\\R-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=R\\b=R\\c=1-R\end{cases}\Rightarrow I(R;R;1-R).$$

Mà $R=d(I,(\alpha))\Leftrightarrow R=\frac{|2R-R+2(1-R)+10|}{3}\Leftrightarrow 3R=|12-R|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=3\\R=-6(l)\end{array}\right.$

Xét (2) tương tự ta được

$$\Leftrightarrow\begin{cases}R+c-1=0\\b+c-a-R-1=0\\R+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-R\\b=-R\\c=R+1\end{cases}\Rightarrow I(-R;-R;R+1)$$

Mà $R=d(I,(\alpha))\Leftrightarrow R=\frac{|-2R+R+2(1+R)+10|}{3}\Leftrightarrow 3R=|12+R|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=6\\R=-3(l)\end{array}\right.$.

Vậy $R_1+R_2=9$.

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,\ b,\ c>0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

A. 14. **B.** $\frac{1}{7}$. **C.** 7. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì điểm $M\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$ thuộc mặt phẳng (ABC)

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{7}\right)}{a}+\frac{\left(\frac{2}{7}\right)}{b}+\frac{\left(\frac{3}{7}\right)}{c}=1 \Rightarrow \frac{1}{7a}+\frac{2}{7b}+\frac{3}{7c}=1 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$$

Mặt khác mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$

$\Rightarrow$ khoảng cách từ tâm $I(1,2,3)$ của cầu tới mặt phẳng (ABC) là $\sqrt{\frac{72}{7}}$

$$\Rightarrow d(I,(ABC))=\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}} \text{ mà } \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$$

$$\Rightarrow d(I,(ABC))=\frac{|7-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}} \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}.$$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+(z-1)^2=4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với B, C, D là các tiếp điểm. Viết phương trình mặt phẳng (BCD).

A. $2x+2y+z-1=0$. **B.** $2x+2y+z-3=0$.

C. $2x+2y+z+1=0$. **D.** $2x+2y+z-5=0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=2$.

Có $\overrightarrow{IA}=(2;2;1) \Rightarrow IA=3$.

Tam giác ABI vuông tại B nên ta có $AB=\sqrt{IA^2-IB^2}=\sqrt{5}$.

Gọi $H(x;y;z)$ là chân đường cao kẻ từ B của tam giác ABI.

Ta có: $IB^2=IH.IA \Rightarrow IH=\frac{IB^2}{IA}=\frac{4}{3} \Rightarrow IH=\frac{4}{9}.IA$.

Từ suy ra được $\overrightarrow{IH}=\frac{4}{9}\overrightarrow{IA} \Rightarrow \begin{cases} x-0=\frac{4}{9}.2 \\ y-0=\frac{4}{9}.2 \\ z-1=\frac{4}{9}.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{9} \\ y=\frac{8}{9} \\ z=\frac{13}{9} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{8}{9};\frac{8}{9};\frac{13}{9}\right)$.

Mặt phẳng (BCD) vuông góc với đường thẳng IA nên nhận $\overrightarrow{IA}=(2;2;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Hơn nữa mặt phẳng (BCD) đi qua điểm H.

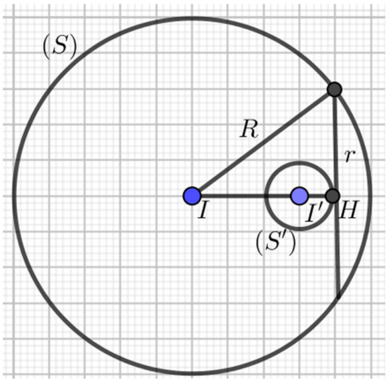
Vậy (BCD) có phương trình: $2.\left(x-\frac{8}{9}\right)+2.\left(y-\frac{8}{9}\right)+1.\left(z-\frac{13}{9}\right)=0 \Leftrightarrow 2x+2y+z-5=0$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S): $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ và (S'): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π. Khoảng cách từ O đến (P) bằng

A. $\frac{14}{3}$. **B.** $\frac{17}{7}$. **C.** $\frac{8}{9}$. **D.** $\frac{19}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=5$, mặt cầu (S') có tâm $I'(1;2;3)$, bán kính $R'=1$

Vì $I'I=3<R-R'=4$ nên mặt cầu (S') nằm trong mặt cầu (S).

Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') $\Rightarrow d(I',(P))=R'=1$; (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π (suy ra bán kính đường tròn là $r=3$) nên $d(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2}=4$.

Nhận thấy $d(I,(P))-d(I',(P))=I'I$ nên tiếp điểm H của (P) và (S') cũng là tâm đường tròn giao của (P) và (S). Khi đó, (P) là mặt phẳng đi qua H, nhận $\overrightarrow{II'}=(1;2;2)$ làm vecto pháp tuyến.

Ta có: $\overrightarrow{IH}=\frac{4}{3}\overrightarrow{II'}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=\frac{4}{3}\\ y_H=\frac{8}{3}\\ z_H=\frac{11}{3}\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3};\frac{11}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (P): $x-\frac{4}{3}+2\left(y-\frac{8}{3}\right)+2\left(z-\frac{11}{3}\right)=0\Leftrightarrow x+2y+2z-14=0$.

Khoảng cách từ O đến (P) là $d(O,(P))=\frac{14}{3}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P):2mx+(m^2+1)y+(m^2-1)z-10=0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. $10\sqrt{2}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $12\sqrt{2}$. **D.** $10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $I(x_0;y_0;z_0)$ là tâm của mặt cầu (S) cố định và R là bán kính của mặt cầu (S).

Ta có:

$$R=d(I,(P))=\frac{\left|2mx_0+(m^2+1)y_0+(m^2-1)z_0-10\right|}{\sqrt{4m^2+(m^2+1)^2+(m^2-1)^2}}=\frac{\left|2mx_0+(m^2+1)y_0+(m^2-1)z_0-10\right|}{\sqrt{2}(m^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2mx_0+(m^2+1)y_0+(m^2-1)z_0-10=R\sqrt{2}(m^2+1)\\2mx_0+(m^2+1)y_0+(m^2-1)z_0-10=-R\sqrt{2}(m^2+1)\end{array}\right.$$ đúng với mọi $\forall m\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(y_0+z_0)m^2+2mx_0+y_0-z_0-10=R\sqrt{2}m^2+R\sqrt{2}\\(y_0+z_0)m^2+2mx_0+y_0-z_0-10=-R\sqrt{2}m^2-R\sqrt{2}\end{array}\right.$$ đúng với mọi $\forall m\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y_0+z_0=R\sqrt{2}\\x_0=0\\y_0-z_0-10=R\sqrt{2}\end{cases}\quad(I)\\\begin{cases}y_0+z_0=-R\sqrt{2}\\x_0=0\\y_0-z_0-10=-R\sqrt{2}\end{cases}\quad(II)\end{array}\right.$$

Từ hệ (I) suy ra $x_0=0;y_0=5+R\sqrt{2};z_0=-5$

Do đó tâm mặt cầu là $I\left(0;5+R\sqrt{2};-5\right)$

Ta có: $R^2=IA^2\Leftrightarrow R^2=4+\left(R\sqrt{2}-6\right)^2$ suy ra $R=2\sqrt{2}$ và $R=10\sqrt{2}$

Hệ (II) suy ra $x_0=0;y_0=5-R\sqrt{2},z_0=-5$

Như vậy, ta có: $R^2=IA^2\Leftrightarrow 4^2+\left(R\sqrt{2}+6\right)^2=R^2$, phương trình không có giá trị R thỏa mãn nên loại.

Vậy tổng hai bán kính của hai mặt cầu là: $12\sqrt{2}$.

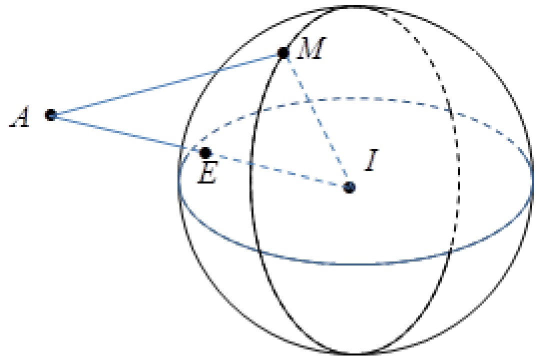
Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). M luôn thuộc mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z-4=0$

C. $3x+3y+3z-8=0$. **D.** $3x+3y+3z-4=0$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=1$. $A(2;2;2)$

Ta luôn có $\widehat{AMI}=90^{\circ}$, suy ra điểm M thuộc mặt cầu (S_1) tâm E là trung điểm của AI đường kính AI.

Với $E\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R_1=IE=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình mặt cầu (S_1): $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$.

Vậy điểm M có tọa độ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\\x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0\\x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0\end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình cho nhau ta được: $x+y+z-4=0$.

Câu 39. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=3$ **B.** $T=4$ **C.** $T=5$ **D.** $T=2$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

Ta có $\begin{cases}A\in(P)\\B\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b+6c-2=0\\b-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-2c\\b=2\end{cases}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2}=\sqrt{25-\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến nhỏ nhất khi và chỉ khi $d\left(I;(P)\right)$ lớn nhất

Ta có $d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|a+2b+3c-2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|2-2c+4+3c-2|}{\sqrt{(2-2c)^2+2^2+c^2}}=\sqrt{\dfrac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}$

Xét $f(c)=\sqrt{\dfrac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}\Rightarrow f'(c)=\dfrac{-48c^2-144c+192}{(5c^2-8c+8)^2\sqrt{\dfrac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}}$

$f'(c)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=1\\c=-4\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy $d\left(I;(P)\right)$ lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi và chỉ khi $c=1\Rightarrow a=0,b=2\Rightarrow a+b+c=3$.

Câu 40. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, điểm $A(0;0;2)$. Mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất, phương trình (P) là:

A. $(P):x-2y+3z-6=0$.

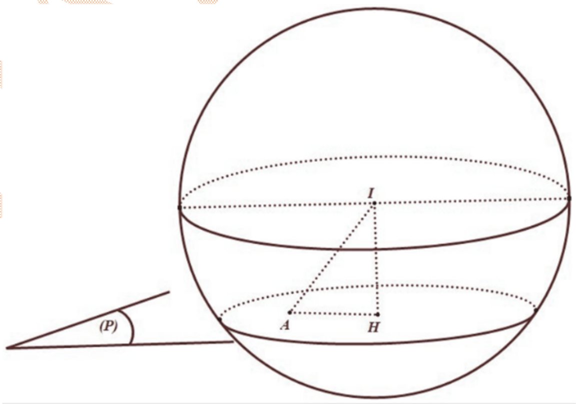
B. $(P):x+2y+3z-6=0$.

C. $(P):3x+2y+2z-4=0$.

D. $(P):x+2y+z-2=0$.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=3$.

Ta có $IA=\sqrt{6}<R\Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S).

Do đó mặt phẳng (P) qua A luôn cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$ (với H là hình chiếu của $I(1;2;3)$ trên (P)).

Ta luôn có $IA\ge IH\Rightarrow\sqrt{R^2-IH^2}\ge\sqrt{R^2-IA^2}\Rightarrow r\ge\sqrt{R^2-IA^2}$.

Diện tích của hình tròn (C) nhỏ nhất khi bán kính r nhỏ nhất, tức là $r=\sqrt{R^2-IA^2}\Leftrightarrow H\equiv A$.

Khi đó $IA\perp(P)\Rightarrow$mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{IA}=(-1;-2;-1)$ làm một VTPT.

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $-x-2y-(z-2)=0\Leftrightarrow x+2y+z-2=0$..

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0;0;-4),B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S), là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng:

A. 8. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

+ Vì (α) qua A ta có: $-(-4)+c=0\Rightarrow c=-4$.

+ Vì (α) qua B ta có: $2a+c=0\Rightarrow a=2$.

$\Rightarrow(\alpha)$: $2x+by-z-4=0$.

+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, $R=3\sqrt{3}$.

+ Chiều cao khối nón: $h=d_{(I,\alpha)}=\dfrac{|2-2b-3-4|}{\sqrt{4+b^2+1}}=\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}$.

+Bán kính đường tròn: $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{27-\left(\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}\right)^2}=\sqrt{27-\dfrac{(2b+5)^2}{b^2+5}}$.

+ Thể tích khối nón: $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\left(27-\dfrac{(2b+5)^2}{b^2+5}\right)\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}$

+ Tới đây ta có thể Thử các trường hợp đáp án.

Hoặc ta làm tự luận như sau:

Đặt $t=\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}$ và xét hàm số $f(t)=(27-t^2)t$ trên đoạn $\left[0;3\sqrt{3}\right]$.

Ta có: $f'(t)=27-3t^2$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-3(l)\end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên:

t	0		3		$3\sqrt{3}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	54	$\searrow$	0

Do đó thể tích khối nón lớn nhất khi và chỉ khi $t=3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow 4b^2+20b+25 = 9b^2+45$

$\Leftrightarrow 5b^2-20b+20=0 \Leftrightarrow b=2$.

Vì vậy $a-b+c=-4$.

Câu 42. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0)$, $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' thỏa $\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất?

A. $16x+40y+44z-39=0$ **B.** $16x-40y-44z+39=0$

C. $16x+40y-44z+39=0$ **D.** $16x-40y-44z-39=0$

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=\dfrac{AB'}{AB}, y=\dfrac{AC'}{AC}, z=\dfrac{AD'}{AD}$. Ta có $\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}=4$. Suy ra

$4=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{xyz}} \Rightarrow xyz \geq \dfrac{27}{64}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1;-1;1); \\ \overrightarrow{AC}=(-2;-2;-1) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(3;-1;-4); \overrightarrow{AD}=(-1;2;3).$$

Thể tích của tứ diện ABCD là $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{17}{6}$

Lại có $V_{AB'C'D'}=xyzV_{ABCD} \Rightarrow$ tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất khi xyz nhỏ nhất

Khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{3}{4} \Rightarrow$ Mặt phẳng mặt phẳng $(B'C'D')$ song song với mặt phẳng (BCD)

và đi qua điểm B'. Vì $\overrightarrow{AB'}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right)$ nên $B'\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{7}{4}\right)$

$\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (-3;-1;-2); \\ \overrightarrow{BD} = (-2;3;2) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right] = (4;10;-11) \Rightarrow (B'C'D')$ nhận VTPT là $\vec{n} = (4;10;-11)$

Suy ra phương trình mặt phẳng $(B'C'D'): 16x + 40y - 44z + 39 = 0$

Câu 43. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (A, B, C không trùng với gốc O) sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $N(0;2;2)$ **B.** $M(0;2;1)$ **C.** $P(2;0;0)$ **D.** $Q(2;0;-1)$

Lời giải

Chọn A

Gọi (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$ $(a, b, c > 0)$

Ta có $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Vì $M \in (P)$ nên ta có $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow abc \ge 54$

Thể tích khối chóp $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc \ge 9$

Dấu bằng xảy ra khi các số tham gia cô si bằng nhau nghĩa là $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{1}{c} \end{cases} \Leftrightarrow a = 3; b = 6; c = 3$

Vậy pt mặt phẳng $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1 \Rightarrow N(0;2;2) \in (P)$

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 27$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $9\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi $H(a;b;c)$ là tiếp điểm của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S). Từ giả thiết ta có a, b, c là các số dương. Mặt khác, $H \in (S)$ nên $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ hay $OH^2 = 3 \Leftrightarrow OH = \sqrt{3}$. (1)

Mặt phẳng (α) đi qua điểm H và vuông góc với đường thẳng OH nên nhận $\overrightarrow{OH}=(a;b;c)$ làm véctơ pháp tuyến. Do đó, mặt phẳng (α) có phương trình là

$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-(a^2+b^2+c^2)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-3=0$

Suy ra: $A\left(\frac{3}{a};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{b};0\right)$, $C\left(0;0;\frac{3}{c}\right)$.

Theo đề: $OA^2+OB^2+OC^2=27 \Leftrightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{9}{b^2}+\frac{9}{c^2}=27 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=9$.

Mặt khác, ta có: $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 9$ và dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$. Suy ra,

$OA=OB=OC=3$ và $V_{O.ABC}=\frac{OA.OB.OC}{6}=\frac{9}{2}$.

Lúc đó: $S_{\Delta ABC}=\frac{3V_{O.ABC}}{OH}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;2), B(1;1;0), C(3;0;1)$ và mặt phẳng $(Q): x+y+z-5=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (Q). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ bằng

A. $\frac{34}{3}$. **B.** $\frac{22}{3}$. **C.** 0. **D.** $\frac{26}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, suy ra $G\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};1\right)$. Khi đó

$P=MA^2+MB^2+MC^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$

$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+GA^2+GB^2+GC^2$

$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$

$\geq 3[d(G,(Q))]^2+GA^2+GB^2+GC^2$.

Dấu bằng xảy ra khi M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Q).

Ta có $d(G,(Q))=\frac{\left|\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+1-5\right|}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\overrightarrow{GA}=\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3};1\right)\Rightarrow GA^2=\frac{26}{9}$; $\overrightarrow{GB}=\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};-1\right)\Rightarrow GB^2=\frac{11}{9}$;

$\overrightarrow{GC}=\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3};0\right)\Rightarrow GC^2=\frac{29}{9}$.

Vậy $\min P=3.\frac{4}{3}+\frac{26}{9}+\frac{11}{9}+\frac{29}{9}=\frac{34}{3}$ khi M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Q).

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;-1)$. Điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+2=0$ sao cho $3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất đó bằng

A. $\frac{13}{6}$. **B.** $\frac{17}{2}$. **C.** $\frac{61}{6}$. **D.** $\frac{23}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là điểm thảo mãn $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_I=\dfrac{3x_A+2x_B+x_C}{6}=-\dfrac{1}{6} \\ y_I=\dfrac{3y_A+2y_B+y_C}{6}=\dfrac{1}{3} \\ z_I=\dfrac{3z_A+2z_B+z_C}{6}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Ta có $3MA^2+2MB^2+MC^2=3\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+2\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)^2$

$=3IA^2+2IB^2+IC^2+6IM^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)$

$=3IA^2+2IB^2+IC^2+6IM^2$.

Do đó $3MA^2+2MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi IM nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên $(P) \Rightarrow M\left(-\dfrac{11}{18};-\dfrac{1}{9};\dfrac{5}{9}\right) \Rightarrow \min\left(3MA^2+2MB^2+MC^2\right)=\dfrac{61}{6}$

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-3)$, $B(0;-2;3)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=1$. Xét điểm M thay đổi luôn thuộc mặt cầu (S), giá trị lớn nhất của MA^2+2MB^2 bằng

A. 102. **B.** 78. **C.** 84. **D.** 52.

Lời giải

Chọn C

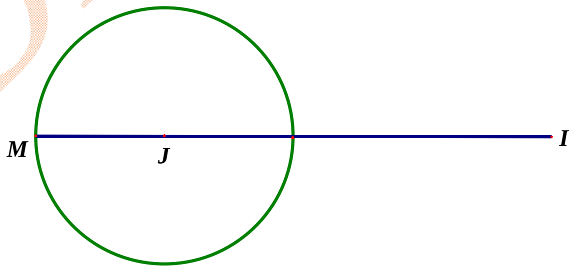
Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Rightarrow I(1;-1;1)$.

Ta có $T=MA^2+2MB^2=\overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=3MI^2+IA^2+2IB^2=3MI^2+36$.

Mặt cầu (S) có tâm $J(-1;0;3)$, bán kính $R=1$.

Ta có: $IJ>R \Rightarrow I$ nằm ngoài mặt cầu (S).



Ta có: T lớn nhất $\Leftrightarrow IM$ lớn nhất.

Mà $IM_{\max}=IJ+R=3+1=4$.

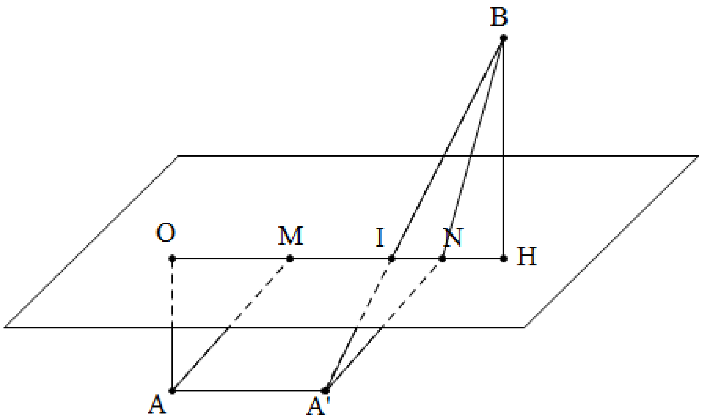
Do đó: $T_{\max}=3.4^2+36=84$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ với $(S_2):x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là

A. $\sqrt{34}-1$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B



Từ $\begin{cases}(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25 & (1)\\(S_2):x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0 & (2)\end{cases}$

Lấy (1) trừ (2), ta được $6z=0$ hay

$(P):z=0$ tức là $(P)\equiv(Oxy)$.

Dễ thấy A, B nằm khác phía đối với (P), hình chiếu của A trên (P) là O, hình chiếu của B trên (P) là $H(3;4;0)$.

Lấy A' sao cho $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}$.

Khi đó $AM+BN=A'N+BN\ge A'B$ và cực trị chỉ xảy ra khi $\overrightarrow{MN}$ cùng phương $\overrightarrow{OH}$.

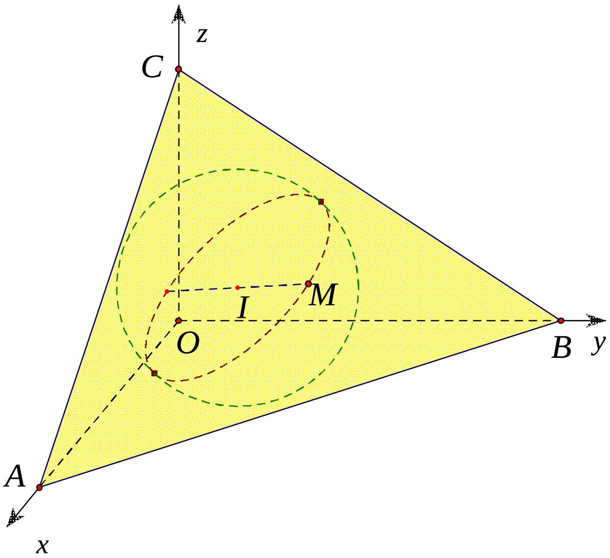
Lấy $\overrightarrow{MN}=\dfrac{\overrightarrow{OH}}{\left|\overrightarrow{OH}\right|}=\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5};0\right)$.

Khi đó vì $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}$ nên $A'\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5};0\right)$. Do đó $AM+BN=A'N+BN\ge A'B=5$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$. Điểm $M\in(S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M cắt các tia Ox; Oy; Oz tại các điểm A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)$ là:

A. 24. **B.** 27. **C.** 64. **D.** 8.

Lời giải



(S) có tâm (O) và bán kính $R=1$.

Theo đề bài ta có $A(a,0,0);B(0,b,0);C(0,0,c);\ (a,b,c>0)$ khi đó phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

(P) tiếp xúc với (S) tại $M\in(S)\Leftrightarrow d(O;(P))=1\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=1$

$\Leftrightarrow abc=\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\ge\sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}}\Rightarrow abc\ge 3\sqrt{3}\quad(1)$ vì $(a,b,c>0)$.

Khi đó: $T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$

$\Rightarrow T=1+a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2c^2=1+a^2+b^2+c^2+2a^2b^2c^2$

Mặt khác $1+a^2+b^2+c^2+2a^2b^2c^2\ge 1+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+2a^2b^2c^2\ge 64\quad(2)\Rightarrow T\ge 64$.

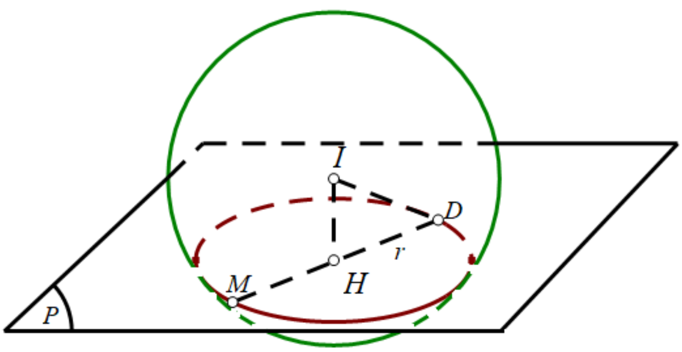
Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 64 khi (1) và (2) xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D(2;0;\sqrt{7})$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ thỏa mãn $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$. Biết rằng đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó?

A. $\sqrt{7}$.   **B.** $2\sqrt{7}$.   **C.** $3\sqrt{7}$.   **D.** $4\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử $M(x;y;z)$, ta có: $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0\,(1)$.

Mà $M\in(S)$ nên ta có: $x^2+y^2+z^2+4x-8y-19=0\,(2)$

Trừ $(1),(2)$ theo vế ta được: $x-y-2=0$.

Suy ra M thuộc đường tròn (T) là giao của (S) với mặt phẳng $(P): x-y-2=0$.

Thay tọa độ của D vào phương trình của (P) và của (S) thấy thỏa mãn nên $D\in(T)$, suy ra giá trị lớn nhất của MD bằng đường kính của (T).

(S) có tâm $I(2;4;0)$ và bán kính $R=\sqrt{39}$.

Khoảng cách từ I với (P) là $h=d(I;(P))=4\sqrt{2}$.

Bán kính của (T) là $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{7}$. Suy ra $\max MD=2r=2\sqrt{7}$.

Câu 51. Cho $A(0;8;2)$ và mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $A(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giải sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Lúc đó

A. $m.n=4$. **B.** $m.n=2$. **C.** $m.n=-4$. **D.** $m.n=-2$.

Lời giải

Chọn C

(P) đi qua điểm $A(0;8;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;m;n)\Rightarrow(P): x+my+nz-8m-2n=0$
.

(P) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Rightarrow \dfrac{|5-11m+5n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=6\sqrt{2}$.

$$d=d(B;(P))=\frac{|9-15m+21n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=\frac{|5-11m+5n+4-4m+16n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}.$$

$$\le \frac{|5-11m+5n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}+4\frac{|1-m+4n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}.$$

$$\le 6\sqrt{2}+4\frac{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}.\sqrt{1+m^2+n^2}}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$$ (Buinhiacôpxki).

$=18\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow d_{\max}=18\sqrt{2}\Leftrightarrow \frac{1}{1}=\frac{-1}{m}=\frac{4}{n}\Rightarrow \begin{cases} m=-1\\ n=4\end{cases}\Rightarrow m.n=-4$$

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ gọi $(P): ax+by+cz-3=0$ (a,b,c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0;-1;2), N(-1;1;3)$ và không đi qua $H(0;0;2)$. Biết rằng khoảng cách từ $H(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tổng $P=a-2b+3c+12$ bằng

A. 8. **B.** 16. **C.** 12. **D.** -16.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $M(0;-1;2), N(-1;1;3)$ nên ta có $\begin{cases} -b+2c-3=0 \\ -a+b+3c-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2c-3 \\ a=5c-6 \end{cases}$ (*).

Mặt khác $d(H;(P))=\dfrac{|2c-3|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (**).

Thay (*) vào (**) ta được $d(H;(P))=\dfrac{|2c-3|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|2c-3|}{\sqrt{30c^2-72c+45}}$.

Xét hàm số $y=\dfrac{2c-3}{\sqrt{30c^2-72c+45}}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=\dfrac{18c-18}{30c^2-72c+45}; y'=0 \Leftrightarrow c=1 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $\lim\limits_{c\to+\infty} y=\dfrac{2}{\sqrt{30}}; \lim\limits_{c\to-\infty} y=-\dfrac{2}{\sqrt{30}}$

$\Rightarrow \min\limits_{D} y=y(1)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Xét hàm số $g(c)=\dfrac{|2c-3|}{\sqrt{30c^2-72c+45}}$

Từ đó suy ra $\max\limits_{\mathbb{R}} g(c)=f(1)=g(1)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ đạt tại $c=1$.

Với $c=1 \Rightarrow a-1; b=-1$.

Vậy $P=a-2b+3c+12=16$

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2022

Câu 50. (Đề TK BGD 2022) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2+10x, \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^4-8x^2+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 16. **B.** 9. **C.** 15. **D.** 10.

Phân tích

- Câu hỏi với mức độ vận dụng cao.
- Nội dung về các yếu tố liên quan đến cực trị hàm hợp chứa tham số.
- Học sinh cần nắm vững các kiến thức:

+ Đạo hàm của hàm hợp.

$$g(x)=f\left[u(x)\right]\Rightarrow g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right].$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'(x)=0\\ f'\left[u(x)\right]=0\end{array}\right..$$

+ Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ khi biết bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$

Bước 1. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với trục hoành

Bước 2. Xét dấu của hàm số $f'(x)$, ta làm như sau

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên trên trục hoành trong khoảng $(a;b)$ thì $f'(x)>0,\ x\in(a;b)$.

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên dưới trục hoành trong khoảng $(a;b)$ thì $f'(x)<0,\ x\in(a;b)$.

+ Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(x)+u(x)$ khi biết bảng biến thiên của $y=f'(x)$

Bước 1. Đạo hàm $g'(x)=f'(x)+u'(x)$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-u'(x)$

Bước 2. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đồ thị hàm số $y=-u'(x)$

Bước 3. Xét dấu của hàm số $y=g'(x)$, ta làm như sau

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên trên đồ thị $-u'(x)$ trong khoảng $(a;b)$ thì $g'(x)>0,\ x\in(a;b)$

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên dưới đồ thị $-u'(x)$ trong khoảng $(a;b)$ thì $g'(x)<0,\ x\in(a;b)$

+ Sự tương giao của hàm số bằng đồ thị hoặc bảng biến thiên.

+ Cực trị của hàm trị tuyệt đối.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = \left(4x^3 - 16x\right) f'\left(x^4 - 8x^2 + m\right)$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x^4 - 8x^2 = -m \\ x^4 - 8x^2 = -m - 10 \end{array}\right.$

Xét $g\left(x\right) = x^4 - 8x^2$, $g'\left(x\right) = 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-16	$\nearrow$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$
								$y = -m$	
								$y = -m - 10$	

Để hàm số $y = f\left(x^4 - 8x^2 + m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị thì

$\begin{cases} -16 < -m - 10 < 0 \\ -m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 < m < 6 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-10; 0\right]$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

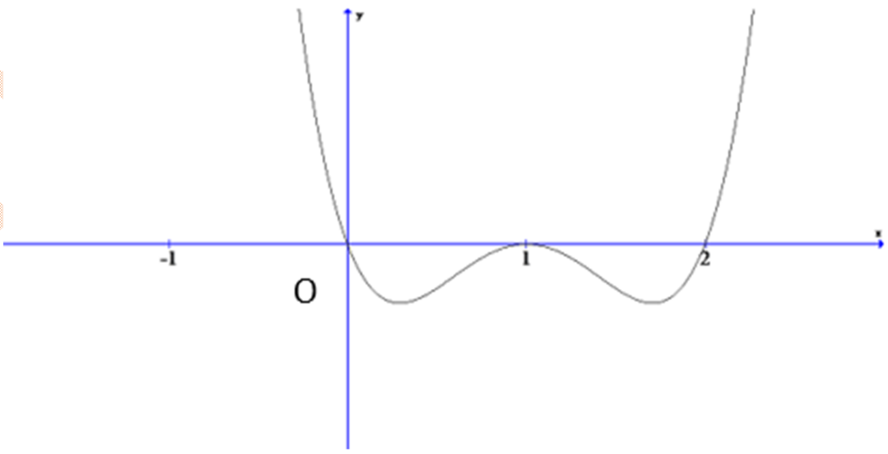
Câu 1. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng xét dấu $f'\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $\left[-10; 10\right]$ để hàm số $g\left(x\right) = f\left(x^2 - 2x - m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 2. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm y = $f'\left(x\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. và có đồ thị như hình vẽ.



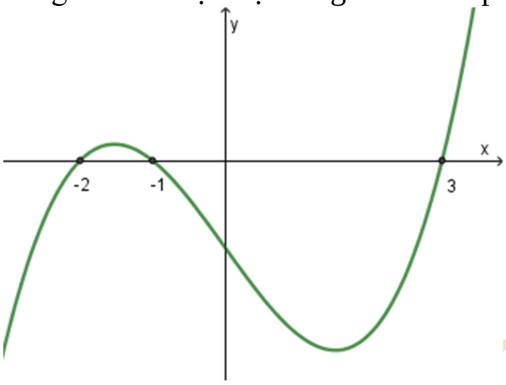
Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)\left(x^2+2mx-2m-1\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m không vượt quá 2019 để hàm số $y=f\left(x^2+1\right)$ có đúng 1 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 1.

Câu 4. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[1;2020]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^4-2x^2+m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng tất cả các phần tử của S là



A. 2041200. **B.** 2041204. **C.** 2041195. **D.** 2041207.

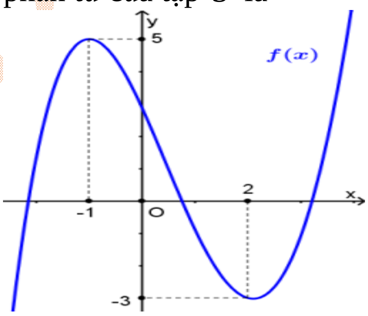
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-3)^{2020}\left(\pi^{2x}-\pi^x+2021\right)\left(x^2-2x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-8x+m\right)$ có đúng 3 cực trị x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=50$. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A. 17. **B.** 33. **C.** 35. **D.** 51.

Câu 6. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$, biết hàm số có ba điểm cực trị $x=-3,\ x=3, x=5$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $g(x)=f\left(e^{x^3+3x^2}-m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2012]$ để hàm số $y=f\left(f(x)-2m+1\right)$ có đúng 4 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là



A. 4029. **B.** 4038. **C.** 4030. **D.** 4028.

Câu 8. Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc ba và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$				-1		

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in\left(-5;5\right)$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)+m\right)$ có 4 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2-2x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 17. **C.** 16 **D.** 18

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2-2x\right)$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3-3x^2+m\right)$ có 8 điểm cực trị là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 11. Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc ba và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$				-1		

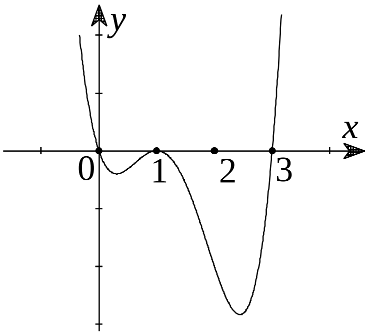
Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in\left(-5;5\right)$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)+m\right)$ có 4 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 12. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2-4x\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m\in(3;+\infty)$. **B.** $m\in[0;3]$. **C.** $m\in[0;3)$. **D.** $m\in(-\infty;0)$.

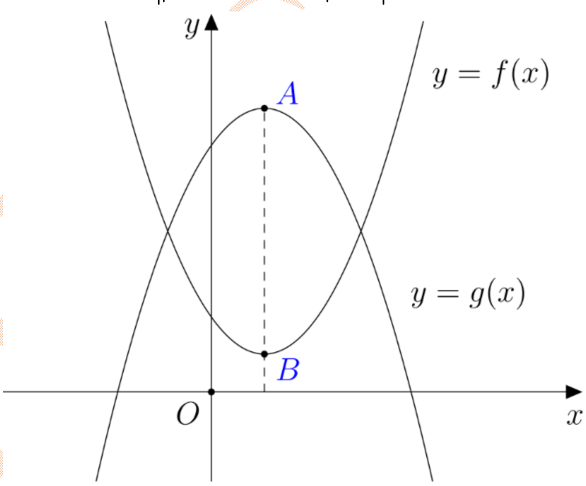
Câu 14. Cho hàm số $f'(x)=(x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 15.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(x-1)(x^2-2(m+1)x+m^2-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

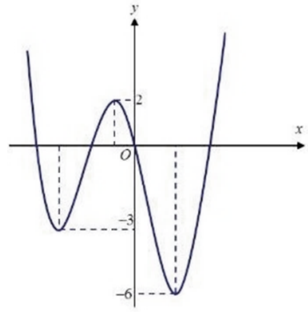
A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 16. Cho hai hàm đa thức $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A, đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB=\frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5;5)$ để hàm số $y=\left||f(x)-g(x)|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?



A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

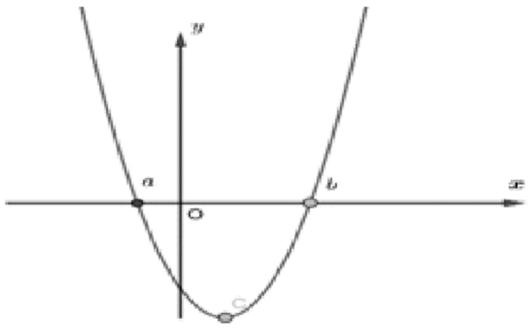
Câu 17. Cho đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x+2018\right)+\frac{1}{3}m^2\right|$ có 5điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng

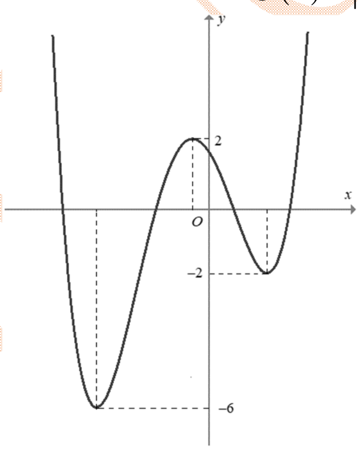
A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 18. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'\left(x\right)$ như hình vẽ và $f\left(b\right)=1$.Số giá trị nguyên của $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị là



A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 19. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x+2020\right)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị?

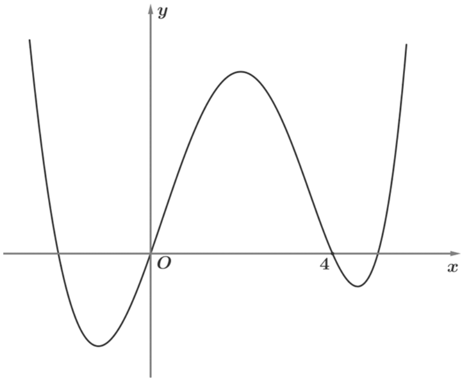


A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 20. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2\left(x+2\right)^4\left(x+4\right)^3\left[x^2+2\left(m+3\right)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f\left(x\right)$ có **đúng** một điểm cực trị?

B. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 21. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x^3 + 3x^2\right)$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

Câu 22. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 23. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2\left[f(x-1)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 9.

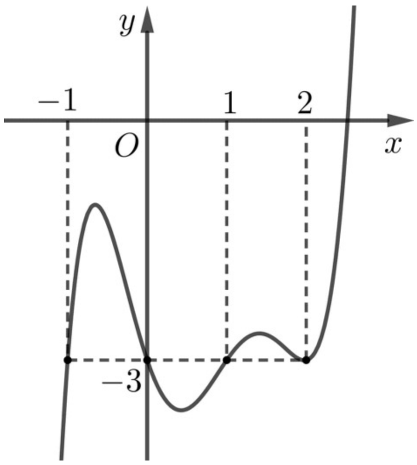
Câu 24. **(ĐTK2021)** Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\dfrac{61}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f(x^3)-3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

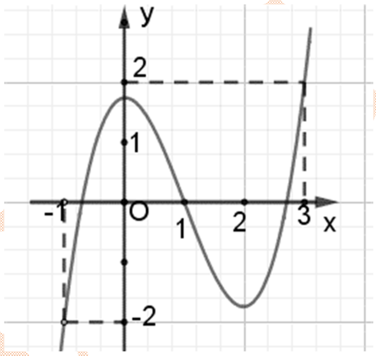
A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 25. Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)<0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=\left|f(x)+3x\right|$ cóbao nhiêu cực trị?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

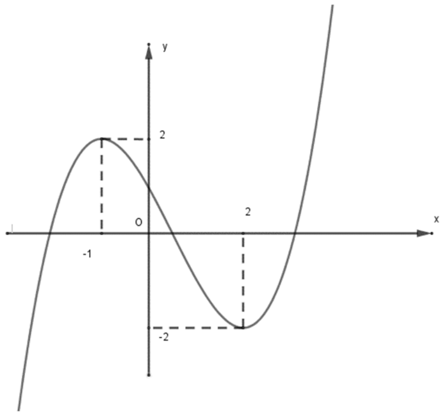
Câu 26. Cho hàm số Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=2f(x)-x^2+2x+2019$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=g(|x|)$ là

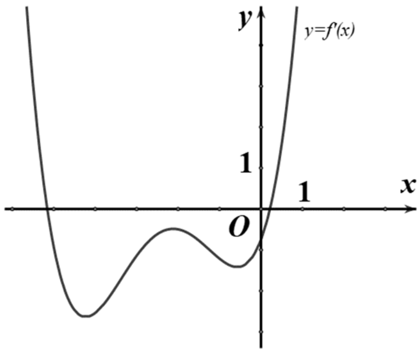
A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x)=\left|[f(x)]^2-4f(x)+1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



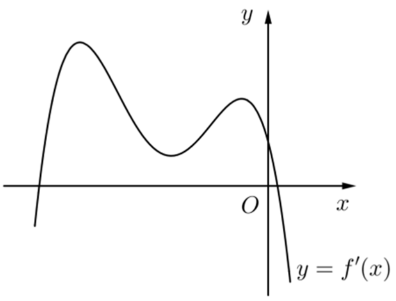
A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 28. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=0$. Biết $y=f'\left(x\right)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-x\right|$ là



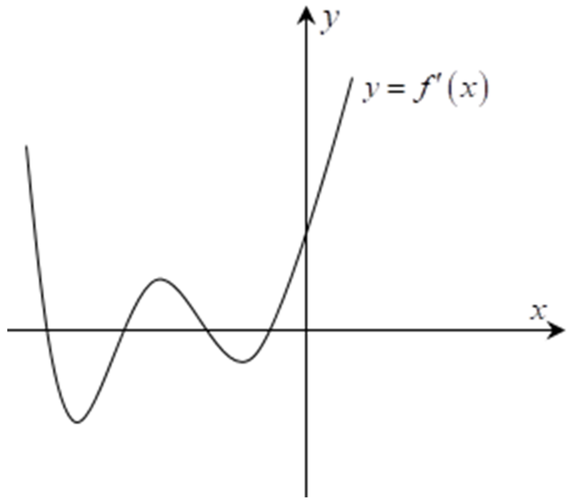
A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 29. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=0$. Biết $y=f'\left(x\right)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x^3\right)+x\right|$ là



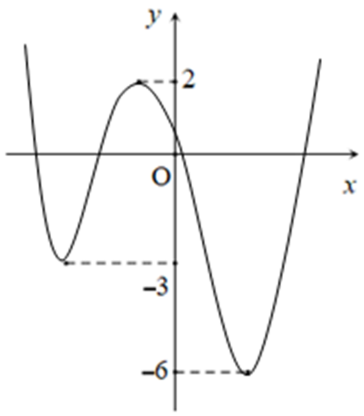
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 30. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=0$. Biết $y=f'\left(x\right)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x^4\right)-x^2\right|$ là



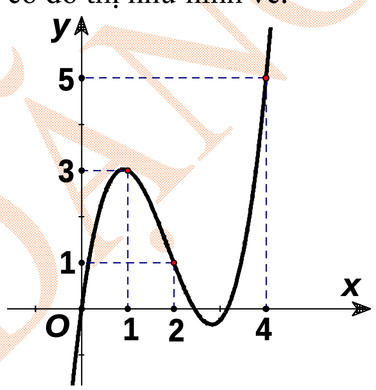
A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 31. Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12;12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị?



A. 13. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 12.

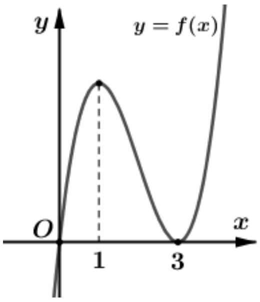
Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0; f(4)>4$. Biết hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left|f(x^2) - 2x\right|$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+2m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>1$ **B.** $m\geq 1$ **C.** $m\leq 2$ **D.** $m>2$

Câu 34. **(Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 5 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 3

Câu 35. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m^2+m-12\right|$ có bảy điểm cực trị

A. 1. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 36. Cho hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m-1\right|$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên trong khoảng $[-2;2]$ của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là

A. 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 1

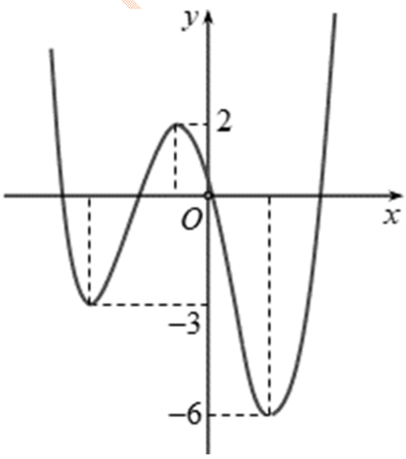
Câu 37. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m-1\right|$ có 7 điểm cực trị là:

A. $(0;6)$ **B.** $(6;33)$ **C.** $(1;33)$ **D.** $(1;6)$

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $\frac{5}{4}<m\leq 2$. **B.** $-2<m<\frac{5}{4}$. **C.** $-\frac{5}{4}<m<2$. **D.** $\frac{5}{4}<m<2$.

Câu 39. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.



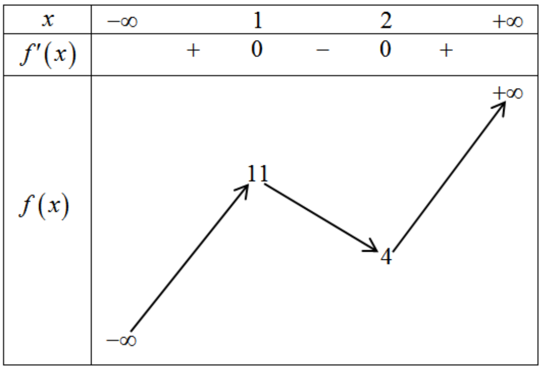
Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x-1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 15.

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 42. **B.** 21. **C.** 40. **D.** 20.

Câu 41. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



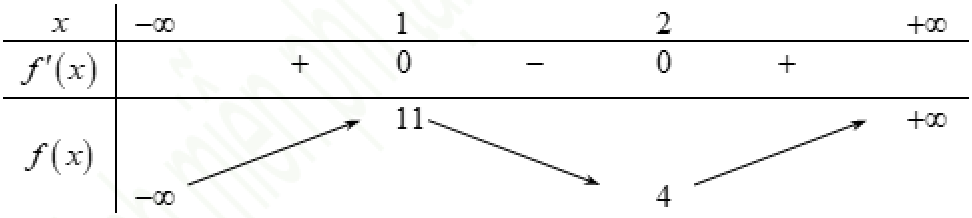
Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m\in\left(4;11\right)$. **B.** $m\in\left(2;\frac{11}{2}\right)$. **C.** $m=3$. **D.** $m\in\left[2;\frac{11}{2}\right]$.

Câu 42. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x-2\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 15. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 12.

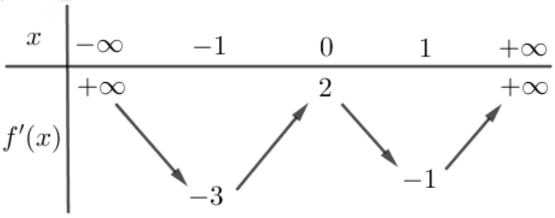
Câu 43. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m\in\left(4;11\right)$. **B.** $m\in\left(2;\frac{11}{2}\right)$. **C.** $m=3$. **D.** $m\in\left[2;\frac{11}{2}\right]$.

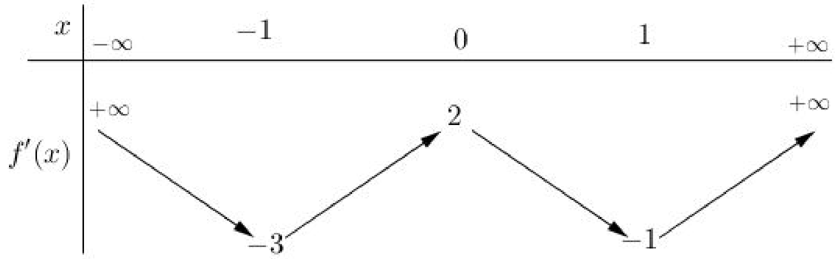
Câu 44. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

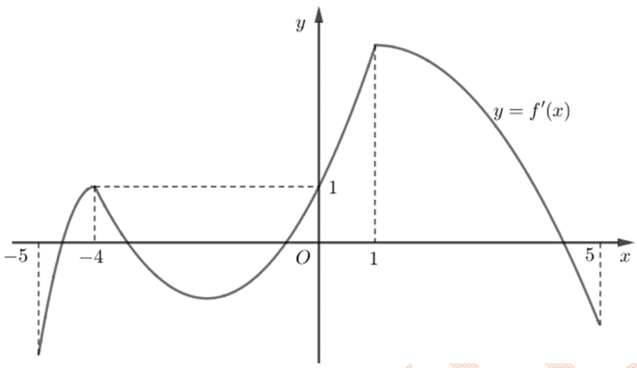
Câu 45. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$, bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(4x^2+4x\right)$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 46. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

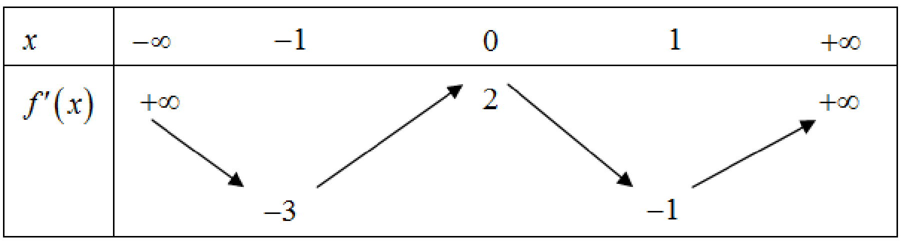
Câu 47. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y=f'(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)+\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

A. $x=3$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=1$.

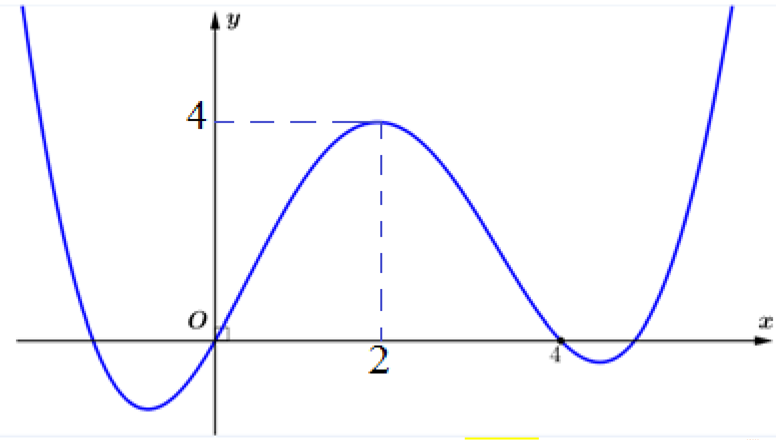
Câu 48. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số cực trị của hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)$ là

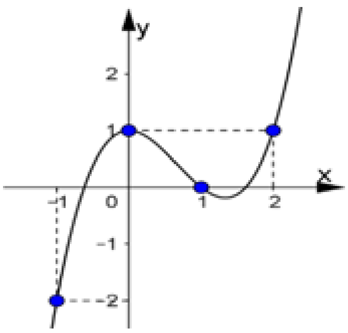
A. 3. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 49. Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)-2x^3-6x^2$ là



A. 5. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



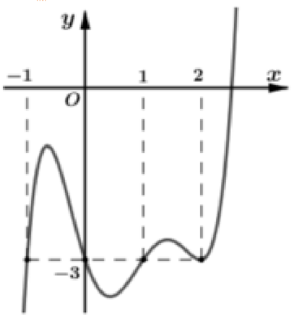
Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x=2$ **B.** $x=0$ **C.** $x=1$ **D.** $x=-1$

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=\left|f(x+2018)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

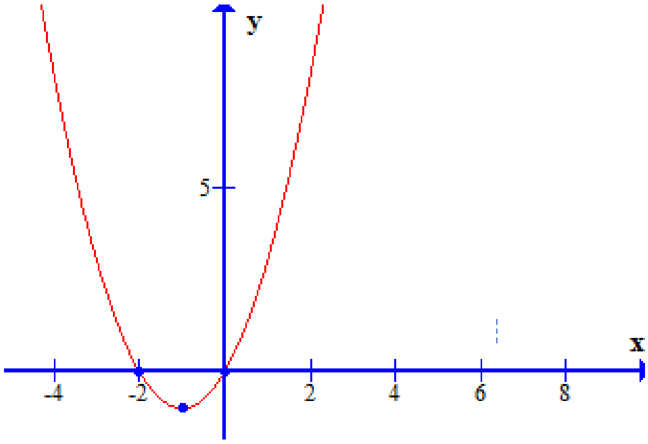
Câu 52. Cho hàm đa thức $y=f(x)$ đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)<0$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x)+3x\right|$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

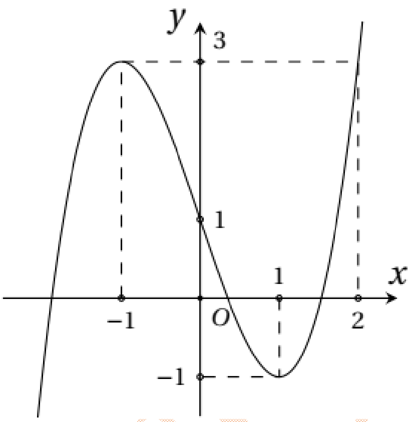
Câu 53. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị là parabol như hình vẽ. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f\left(x\right)+m-4\right|$ trên $\left[-2;1\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. $m=5$. **B.** $m=4$.

C. $m=3$. **D.** $m=1$.

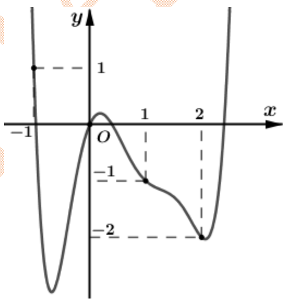
Câu 54. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x=-1, x=1$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x+1\right)+2019$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 55. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x+2\right)+\left(x+1\right)\left(x+3\right)$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=x(x-1)(x^2-2mx+1)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên m không vượt quá 2018 sao cho hàm số $g(x)=f(x^2)$ có 7 điểm cực trị?

A. 2019. **B.** 2016. **C.** 2017. **D.** 2018.

Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

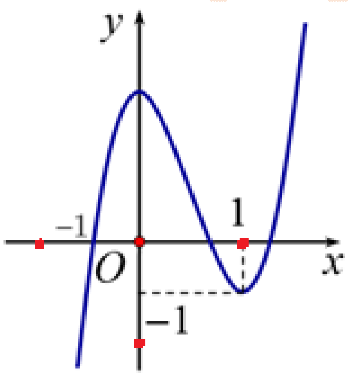
Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3(x^3+3x)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

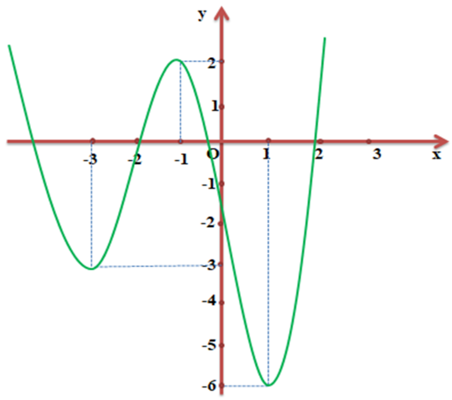
Câu 60. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=\left|f(|x+1|-1)\right|$ có bao nhiêu cực trị?

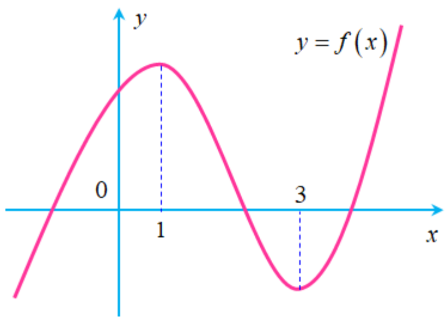
A. 11 **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 61. Hình vẽ là đồ thị hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 9. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 15.

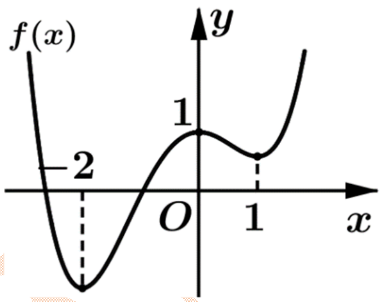
Câu 62. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x+m\right|\right)$ có 5 điểm cực trị?

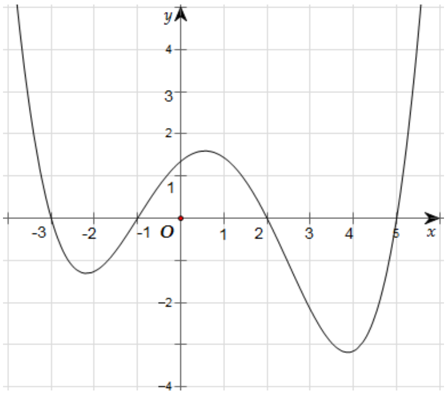
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 63. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f\left(\left|x+1\right|-3\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 64. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|+m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 65. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=\left|f\left(1-3x\right)+1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 66. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Biết đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-m\right|$ có 5 điểm cực trị. Khi đó số các giá trị nguyên của tham số của m là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

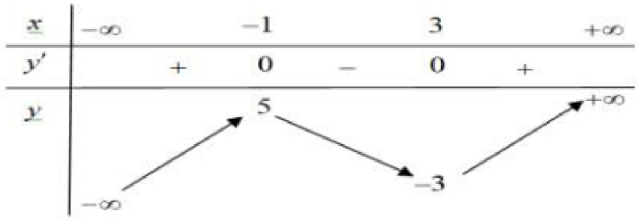
Câu 67. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m\in\left(4;11\right)$. **B.** $m\in\left(2;\frac{11}{2}\right)$. **C.** $m=3$. **D.** $m\in\left[2;\frac{11}{2}\right]$.

Câu 68. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|2x+1|+3\right)$ là

A. 1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 3.

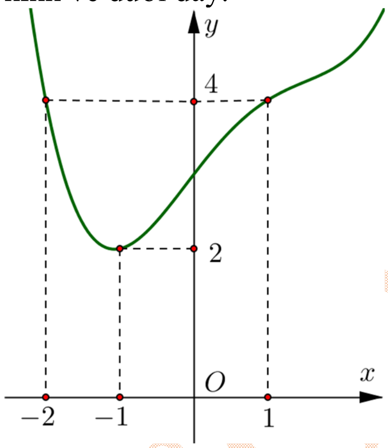
Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=f(|2x-3|-2)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 70. Cho hàm số $y=f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f\left(a\neq 0\right)$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



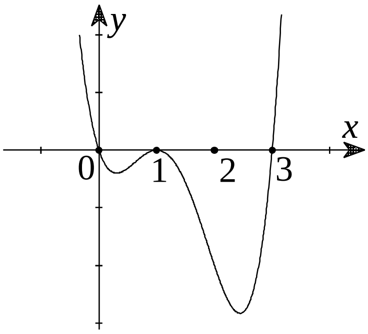
Gọi $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x-m$. Hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị.

A. 5. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 71. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(x)=(x-8)^3.(x^2-8x+15).(x+2)^4$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(-16|x^4-2x^2|+m^2\right)$ có nhiều cực trị nhất?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

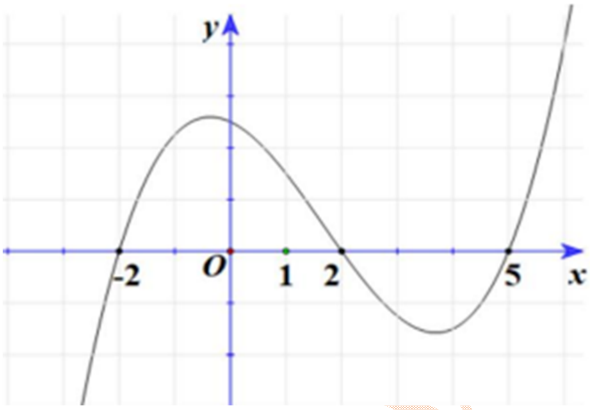


Tìm m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m\in(-\infty;0]$. **B.** $m\in(3;+\infty)$.

C. $m\in[0;3)$. **D.** $m\in(0;3)$.

Câu 73. Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên thuộc đoạn $\left[-10;10\right]$ của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x^2+x-2\right|-m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 6.

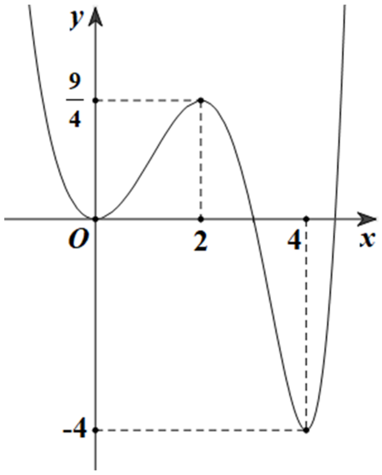
Câu 74. Cho $f\left(x\right)$ là hàm số bậc bốn có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=\dfrac{f\left(-x^2+2x\right)+2021}{f\left(-x^2+2x\right)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

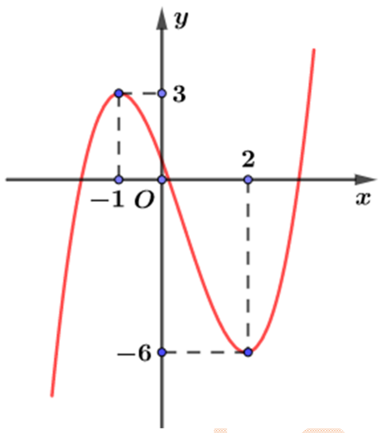
Câu 75. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f\left(5-2x\right)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc khoảng $(-9;9)$ thỏa mãn $2m\in\mathbb{Z}$ và hàm số $y=\left|2f\left(4x^3+1\right)+m-\frac{1}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 24. **B.** 25. **C.** 26. **D.** 27.

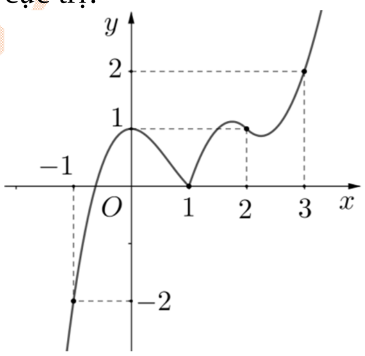
Câu 76. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|f^2(x)-4f(x)-m\right|\right)$ có 17 điểm cực trị là

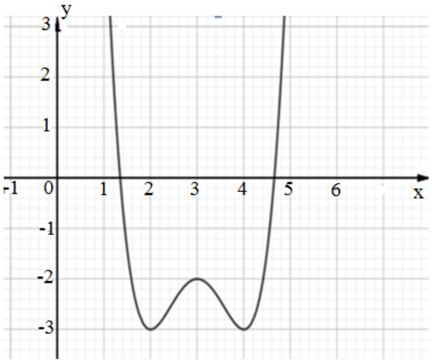
A. 1652. **B.** 1653. **C.** 1654. **D.** 1651.

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có $f(-3)>8$, $f(4)>\frac{9}{2}$, $f(2)<\frac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Câu 78. Cho hàm số $g\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số $f\left(x\right)=g\left(g\left(x\right)\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.



A. 9 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* thuộc $[-10;10]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = 2(x-1)f'(x^2 - 2x - m)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x - m = -1 \\ x^2 - 2x - m = 1 \\ x^2 - 2x - m = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & \\ x^2 - 2x - m + 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 2x - m - 1 = 0 & (2) \\ x^2 - 2x - m - 4 = 0 & (3) \end{array}\right.$$

Nhận xét: Phương trình (2) nếu có nghiệm là nghiệm bội chẵn; phương trình (1) và (3) nếu có nghiệm thì nghiệm không chung nhau.

Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ

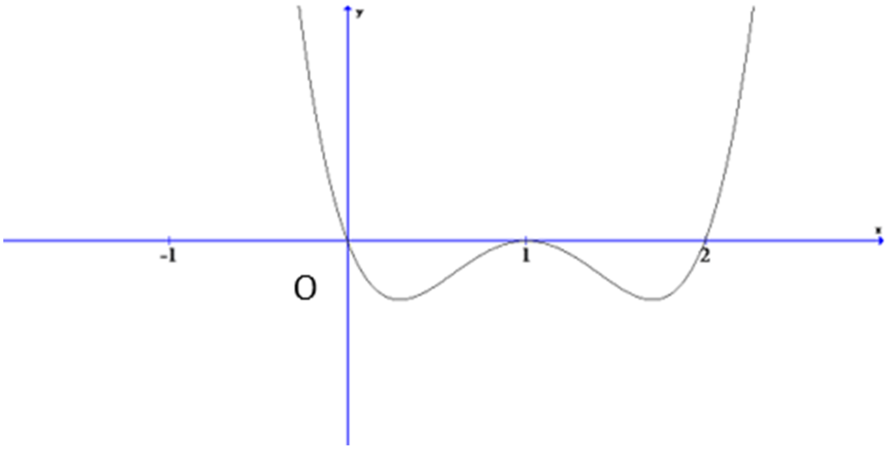
$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) và (3) có hai nghiệm phân biệt, khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)} > 0 \\ \Delta'_{(3)} > 0 \\ VT_{(1)} \neq 0 \\ VT_{(3)} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m + 5 > 0 \\ -m \neq 0 \\ -m - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Vì $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10;10] \end{cases} \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

Vậy có 10 giá trị của tham số *m*.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm y = $f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=2(x-4)f'\left(x^2-8x+m\right)$

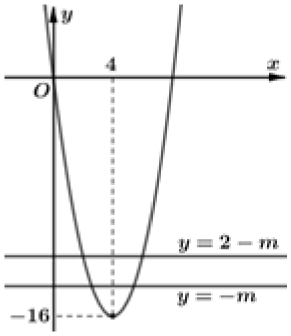
$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2(x-4)f'\left(x^2-8x+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x^2-8x+m=1\ (\text{nghiem boi }2)\\x^2-8x+m=0\quad(1)\\x^2-8x+m=2\quad(2)\end{array}\right..$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. $(*)$

Cách 1: $(*)\ \Leftrightarrow\begin{cases}16-m>0\\16-m+2>0\\m\neq 16\\m\neq 18\end{cases}\Leftrightarrow m<16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa mãn điều kiện.

Cách 2: Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^2-8x$ và hai đường thẳng $d_1: y=-m,\ d_2: y=-m+2$ (hình vẽ).



Khi đó $(*)$ $\Leftrightarrow$ d_1, d_2 cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m > -16 \Leftrightarrow m < 16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa mãn điều kiện.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx-2m-1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m không vượt quá 2019 để hàm số $y = f(x^2+1)$ có đúng 1 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = \left(f(x^2+1)\right)' = 2x.f'(x^2+1) = 2x.(x^2+1)^2(x^2+2)^2\left[(x^2+1)^2+2m(x^2+1)-2m-1\right]$

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ (x^2+1)^2+2m(x^2+1)-2m-1=0 \xrightarrow{t=x^2+1\ (t\ge 1)} t^2+2mt-2m-1=0\ (1) \end{array}\right.$ Ta thấy nghiệm của (1) nếu có sẽ khác 0. Nên $x=0$ là 1 cực trị của hàm số.

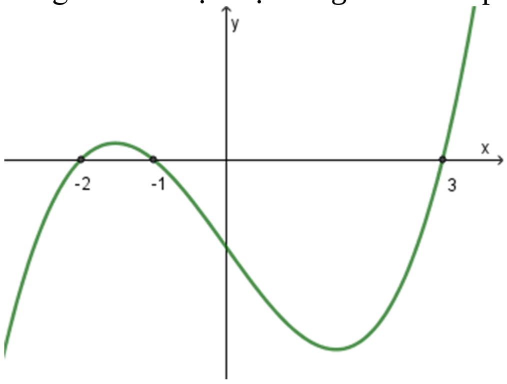
Do đó để hàm số có 1 điểm cực trị thì (1) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, hoặc có 2 nghiệm $t_1;t_2 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 1 \le 0 \\ t_2 - 1 \le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' = m^2+2m+1 \le 0 \\ \begin{cases} \Delta' = m^2+2m+1 > 0 \\ (t_1-1)+(t_2-1) \le 0 \\ (t_1-1)(t_2-1) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ \begin{cases} m \ne -1 \\ t_1+t_2 \le 2 \\ t_1t_2-(t_1+t_2)+1 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ \begin{cases} m \ne -1 \\ -2m \le 2 \\ -2m-1-(-2m)+1 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ \begin{cases} m \ne -1 \\ m \ge -1 \\ 0 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m > -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge -1$$

Vậy tập hợp các giá trị m thỏa đề là $S = \{-1;0;1;...;2019\}$ nên có 2021 giá trị m.

Câu 4. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[1;2020]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^4-2x^2+m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng tất cả các phần tử của S là



A. 2041200. **B.** 2041204. **C.** 2041195. **D.** 2041207.

Lời giải

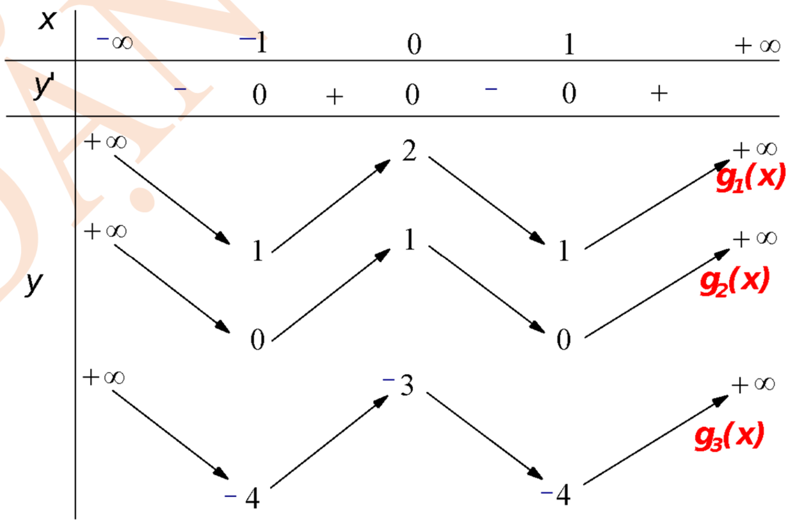
Chọn B

Ta có $g'(x)=\left(4x^3-4x\right)f'\left(x^4-2x^2+m\right)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^3-4x=0\,(1)\\ f'\left(x^4-2x^2+m\right)=0\,(2)\end{array}\right.$

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1.\\ x=0\end{array}\right.$$

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^4-2x^2+m=-2\\ x^4-2x^2+m=-1\\ x^4-2x^2+m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-m=x^4-2x^2+2=g_1(x)\\ -m=x^4-2x^2+1=g_2(x)\\ -m=x^4-2x^2-3=g_3(x)\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên của các hàm số $g_1(x),g_2(x),g_3(x)$ như hình vẽ:



Từ bảng biến trên, ta dễ thấy: với $-m \le -4 \Leftrightarrow m \ge 4$ hàm số $g(x) = f(x^4 - 2x^2 + m)$ có đúng 3 điểm cực trị.

Do đó: $S = \{4; 5; 6; 7; ..; 2020\}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S là $4+5+6+..+2020 = \dfrac{(4+2020)2017}{2} = 2041204$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-3)^{2020}(\pi^{2x} - \pi^x + 2021)(x^2 - 2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 8x + m)$ có đúng 3 cực trị x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 50$. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A. 17. **B.** 33. **C.** 35. **D.** 51.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)^{2020} = 0 \\ \pi^{2x} - \pi^x + 2021 = 0\,(vn) \\ x^2 - 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Dễ thấy $x = 3$ là nghiệm bội chẵn nên không là cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Xét $g(x) = f(x^2 - 8x + m) \Rightarrow g'(x) = (2x-8)f'(x^2 - 8x + m)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ f'(x^2 - 8x + m) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x^2 - 8x + m = 0\,(1) \\ x^2 - 8x + m = 2\,(2) \end{array}\right..$$

Để hàm số $y = f(x^2 - 8x + m)$ có đúng 3 cực trị x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 50$ thì cần 2 cực trị khác 4 thỏa mãn $x_2^2 + x_3^2 = 34$.

TH1. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 4 thỏa mãn $x_2^2 + x_3^2 = 34$ và phương trình (2) có nhiều nhất một nghiệm.

Khi đó $\begin{cases} 16 - m > 0 \\ m \ne 16 \\ m = 15 \\ 18 - m \le 0 \end{cases} \Rightarrow$ không tồn tại m.

TH2. Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 4 thỏa mãn $x_2^2 + x_3^2 = 34$ và phương trình (1) có nhiều nhất một nghiệm.

Khi đó $\begin{cases} 18 - m > 0 \\ m \ne 18 \\ m = 17 \\ 16 - m \le 0 \end{cases} \Rightarrow m = 17.$

Vậy với $m=17$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f\left(x\right)$, biết hàm số có ba điểm cực trị $x=-3,\ x=3, x=5$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $g\left(x\right)=f\left(e^{x^3+3x^2}-m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'\left(x\right)=\left(3x^2+6x\right)e^{x^3+3x^2}.f'\left(e^{x^3+3x^2}-m\right)$

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(3x^2+6x\right)e^{x^3+3x^2}.f'\left(e^{x^3+3x^2}-m\right)=0$$

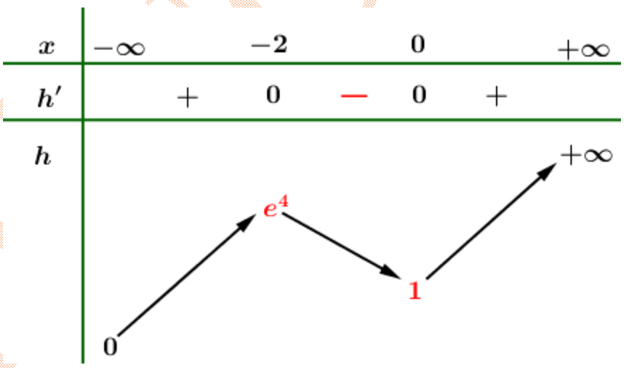
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\e^{x^3+3x^2}-m=-3\\e^{x^3+3x^2}-m=3\\e^{x^3+3x^2}-m=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\e^{x^3+3x^2}=m-3,\ (1)\\e^{x^3+3x^2}=m+3,\ (2)\\e^{x^3+3x^2}=m+5,\ (3)\end{array}\right..$$

Hàm số $g\left(x\right)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi tổng số nghiệm đơn và bội lẻ, khác 0 và -2 của các phương trình $(1),(2),(3)$ là 5.

Xét hàm số $h\left(x\right)=e^{x^3+3x^2}$ có $h'\left(x\right)=\left(3x^2+6x\right)e^{x^3+3x^2}$.

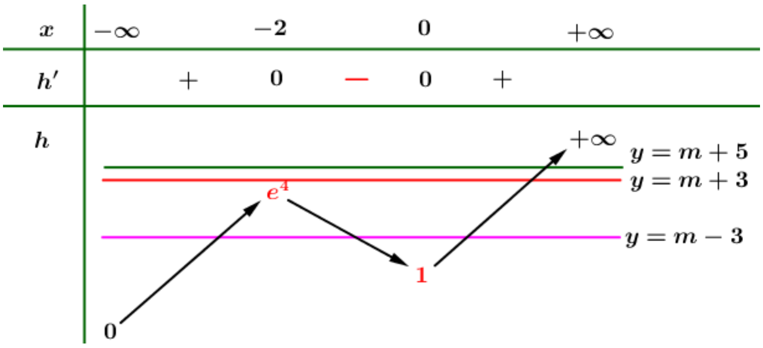
Ta có $h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Khi đó có 3 trường hợp sau:

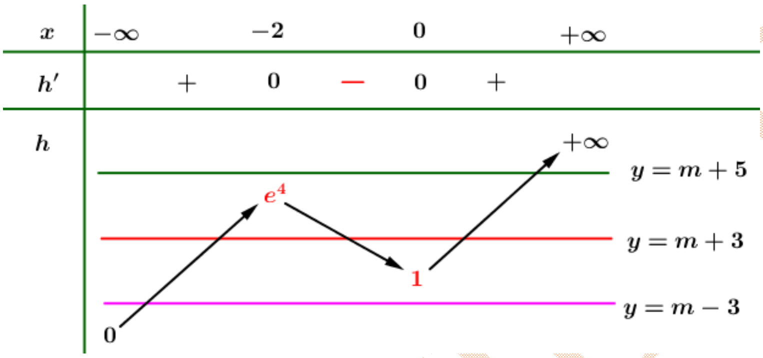
Trường hợp 1:



Khi đó: $\begin{cases} m+3\ge e^4 \\ 1<m-3<e^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge e^4-3\approx 51,6 \\ 4<m<e^4+3\approx 57,6 \end{cases}$

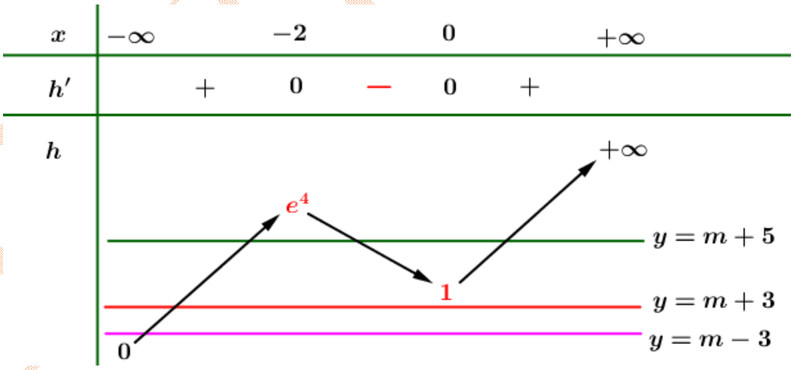
Do m nguyên nên $m\in\{52;53;54;55;56;57\}$.

Trường hợp 2:



Khi đó: $\begin{cases} m+5\ge e^4 \\ 1<m+3<e^4 \\ 0<m-3\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>e^4-5\approx 49,6 \\ -2<m<e^4-3 \\ 3<m\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

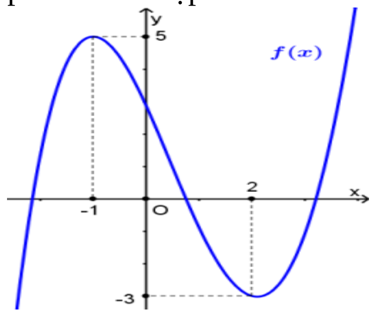
Trường hợp 3:



Khi đó: $\begin{cases} 1<m+5<e^4 \\ m+3\le 1 \\ m-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4<m<e^4-5\approx 49,6 \\ m\le -2 \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2012]$ để hàm số $y = f(f(x) - 2m + 1)$ có đúng 4 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là



A. 4029. **B.** 4038. **C.** 4030. **D.** 4028.

Lời giải

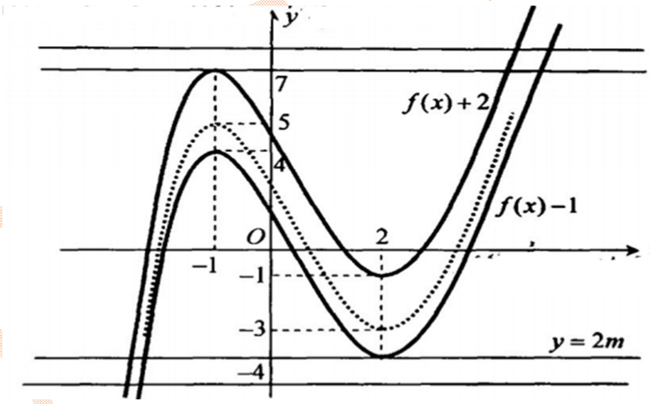
Chọn A

Đặt $g(x) = f(f(x) - 2m + 1) \Rightarrow g'(x) = f'(x) f'(f(x) - 2m + 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \\ f'(f(x) - 2m + 1) = 0 \end{array}\right.$$

Xét phương trình $f'(f(x) - 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) - 2m + 1 = -1 \\ f(x) - 2m + 1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) + 2 = 2m \\ f(x) - 1 = 2m \end{array}\right.$.

Ta áp dụng kĩ năng hợp hàm, tức là xét tương giao của đường thẳng $y = 2m$ và hai đồ thị hàm số $y = f(x) + 2; y = f(x) - 1$



Để hàm số $g(x) = f(f(x) - 2m + 1)$ có 4 điểm cực trị thì đường thẳng $y = 2m$ phải cắt đồ thị 2 hàm số trên tại hai điểm phân biệt (không kể tiếp xúc)

Dựa vào đồ thị ta thấy điều kiện là $\left[\begin{array}{l} 2m \geq 7 \\ 2m \leq -4 \end{array}\right. \xrightarrow{m \in [-2021; 2012]} \left[\begin{array}{l} 4 \leq m \leq 2012 \\ -2021 \leq m \leq -2 \end{array}\right. \Rightarrow$ c ó 4029 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 8. Cho $y = f(x)$ là hàm số bậc ba và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-5;5)$ để hàm số $g(x) = f\left(f(x) + m\right)$ có 4 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

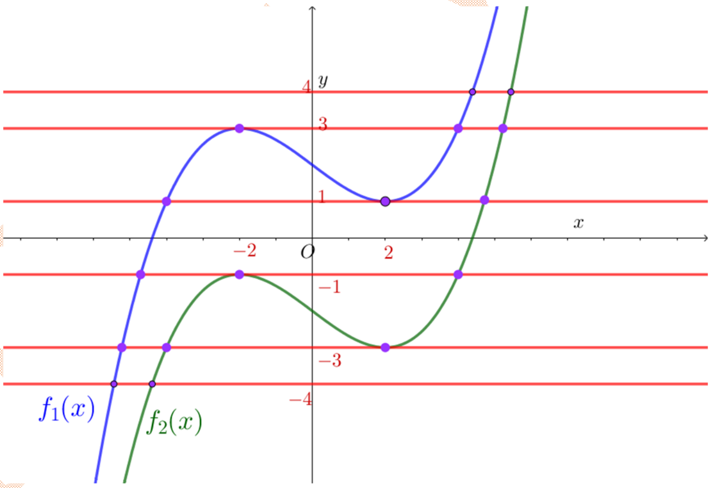
Chọn B

$g'(x) = f'(x).f'\left(f(x) + m\right)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left(f(x) + m\right) = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \\ f(x) + m = -2 \\ f(x) + m = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \\ f(x) + 2 = -m \\ f(x) - 2 = -m \end{array}\right.$, trong đó $x = -2$ và $x = 2$ là hai nghiệm bội lẻ.

Đặt $f_1(x) = f(x) + 2$ và $f_2(x) = f(x) - 2$, ta có đồ thị sau



Với $\begin{cases} m \in (-5;5) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ và nhìn vào đồ thị, ta thấy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $g'(x) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ $m \in \{-4;-3;-1;1;3;4\}$. **Error! Not a valid link.**.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2\left(x^2 - 2x\right)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(x^2 - 8x + m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 17. **C.** 16 **D.** 18

Lời giải

Đặt $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$

$f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x-8)(x^2 - 8x + m - 1)^2(x^2 - 8x + m)(x^2 - 8x + m - 2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 4 & \\ x^2 - 8x + m - 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 8x + m = 0 & (2) \\ x^2 - 8x + m - 2 = 0 & (3) \end{array}\right.$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2 - 8x + m - 1)^2 \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - m > 0 \\ 16 - m + 2 > 0 \\ 16 - 32 + m \ne 0 \\ 16 - 32 + m - 2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \ne 16 \\ m \ne 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ có 8 điểm cực trị là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 6x).f'(x^3 - 3x^2 + m)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 6x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{array}\right..$$

Vì khi đi qua các nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 1$ (nếu có) dấu của $f'(x^3 - 3x^2 + m)$ không đổi nên dấu của $g'(x)$ chỉ phụ thuộc các nghiệm của hai phương trình còn lại.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 8 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ và $x^3 - 3x^2 + m = 2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2).

Xét hàm số $h(x)=-x^3+3x^2$, ta có $h'(x)=-3x^2+6x$; $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ $\searrow$		0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều kiện để mỗi phương trình $-x^3+3x^2=m$ và $-x^3+3x^2=m-2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2) là

$0<m-2<m<4\Leftrightarrow 2<m<4$.

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m=3$.

Câu 11. Cho $y=f(x)$ là hàm số bậc ba và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-5;5)$ để hàm số $g(x)=f\left(f(x)+m\right)$ có 4 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

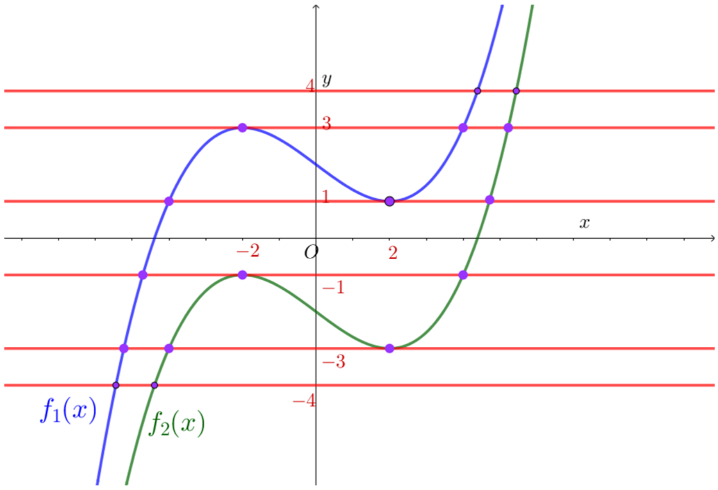
Chọn B

$g'(x)=f'(x).f'\left(f(x)+m\right)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'\left(f(x)+m\right)=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\\f(x)+m=-2\\f(x)+m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\\f(x)+2=-m\\f(x)-2=-m\end{array}\right.$, trong đó $x=-2$ và $x=2$ là hai nghiệm bội lẻ.

Đặt $f_1(x)=f(x)+2$ và $f_2(x)=f(x)-2$, ta có đồ thị sau



Với $\begin{cases} m \in (-5;5) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ và nhìn vào đồ thị, ta thấy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 4 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow m \in \{-4;-3;-1;1;3;4\}$..

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2-4x\right)$.Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Lời giải.

Chọn B

Ta có:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2\left(x^2-4x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

$$g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right) \Rightarrow g'(x)=(4x-12)\,f'\left(2x^2-12x+m\right)$$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow (4x-12)\,f'\left(2x^2-12x+m\right)=0\;(*)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2x^2-12x+m=-1 \\ 2x^2-12x+m=0 \\ 2x^2-12x+m=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=3 & \\ 2x^2-12x+m=-1 & (l) \\ 2x^2-12x=-m & (1) \\ 2x^2-12x=4-m & (2) \end{array}\right.$$

(Điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là nghiệm bội lẻ của phương trình (*) nên ta loại phương trình $2x^2-12x+m=-1$)

Xét hàm số $y=2x^2-12x$ có đồ thị (C).

$y'=4x-12$

Ta có bảng biến thiên

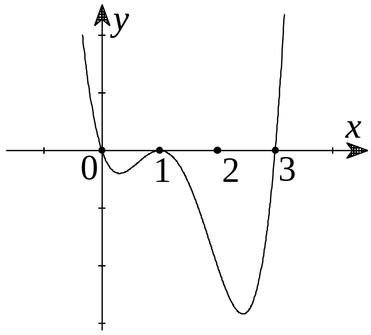
x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

Để $g\left(x\right)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình $\left(1\right);\left(2\right)$ đều có hai nghiệm phân biệt khác 3.

Do đó, mỗi đường thẳng $y=4-m$ và $y=-m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y=4-m$ luôn nằm trên đường thẳng $y=-m$.

Ta có: $-18<-m\Leftrightarrow m<18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương.

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m\in\left(3;+\infty\right)$.　**B.** $m\in\left[0;3\right]$.　**C.** $m\in\left[0;3\right)$.　**D.** $m\in\left(-\infty;0\right)$.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y=f(x^2+m)$ là hàm chẵn nên hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi hàm số này có đúng 1 điểm cực trị dương.

$y=f(x^2+m)\Rightarrow y'=2xf'\left(x^2+m\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+m=0\\x^2+m=1\\x^2+m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-m\\x^2=1-m\\x^2=3-m\end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ là $x=1$ nên các nghiệm của pt $x^2=1-m$ (nếu có) không làm $f'(x^2+m)$ đổi dấu khi x đi qua, do đó các điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2+m)$ là các điểm nghiệm của hệ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m \\ x^2=3-m \end{array}\right.$

Hệ trên có duy nhất nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} -m\le 0 \\ 3-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m<3$.

Câu 14. Cho hàm số $f'(x)=(x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$, $x=2$ là nghiệm kép nên khi qua giá trị $x=2$ thì $f'(x)$ không bị đổi dấu.

Đặt $g(x)=f(x^2-10x+m+9)$ khi đó $g'(x)=f'(u).(2x-10)$ với $u=x^2-10x+m+9$.

Nên $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-10=0 \\ (x^2-10x+m+9-2)^2=0 \\ x^2-10x+m+9=1 \\ x^2-10x+m+9=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ (x^2-10x+m+9-2)^2=0 \\ x^2-10x+m+8=0\ (1) \\ x^2-10x+m+6=0\ (2) \end{array}\right.$

Hàm số $y=f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $g'(x)$ đổi dấu 5 lần

Hay phương trình (1) và phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 5

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1' >0 \\ \Delta_2' >0 \\ h(5)\ne 0 \\ p(5)\ne 0 \end{cases}$, (Với $h(x)=x^2-10x+m+8$ và $p(x)=x^2-10x+m+6$).

$\Leftrightarrow \begin{cases} 17-m>0 \\ 19-m>0 \\ -17+m\ne 0 \\ -19+m\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<17$.

Vậy có 16 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(x-1)(x^2-2(m+1)x+m^2-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào cách vẽ đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)$, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)$ bằng số điểm cực trị dương của đồ thị hàm số $y=f(x)$ cộng thêm 1.

Để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị dương.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2. \\ x^2-2(m+1)x+m^2-1=0 \quad (*) \end{array}\right.$

Có $x=2$ là nghiệm bội 2, $x=1$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x\neq 1$, có một nghiệm $x\leq 0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x=0$ khi đó $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0 \Leftrightarrow m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Với $m=1$, có $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$ (TM)

Với $m=-1$, có $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ (Loại)

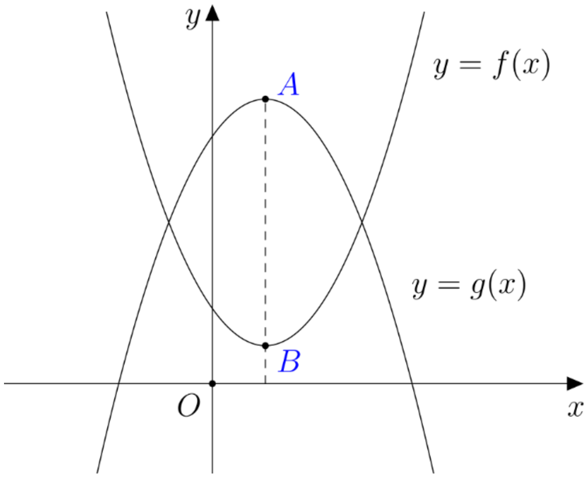
Trường hợp 2: $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x\neq 1$, có một nghiệm âm

Điều kiện tương đương $\begin{cases} m^2-1<0 \\ 1^2-2(m+1).1+m^2-1\neq 0 \end{cases} \begin{cases} m\in(-1;1) \\ m\neq 1\pm\sqrt{3} \end{cases}$

Vì $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=0$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

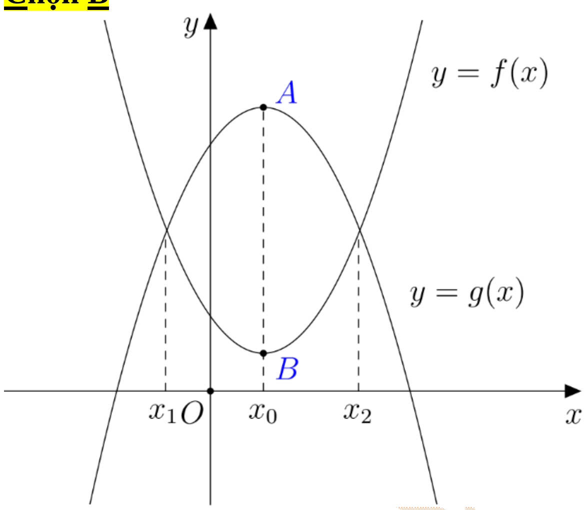
Câu 16. Cho hai hàm đa thức $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A, đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB=\frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5;5)$ để hàm số $y=\left||f(x)-g(x)|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?



A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B



Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$, ta có: $h'(x)=f'(x)-g'(x)$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$;

$h(x)=0 \Leftrightarrow x=x_1$ hoặc $x=x_2$ $(x_1<x_0<x_2)$;

$h(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=-\frac{7}{4}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ là:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{7}{4}$	↗	$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=k(x)=\left|f(x)-g(x)\right|$ là:

x	$-\infty$		x_1		x_0		x_2		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{7}{4}$	↘	0	↗	$+\infty$

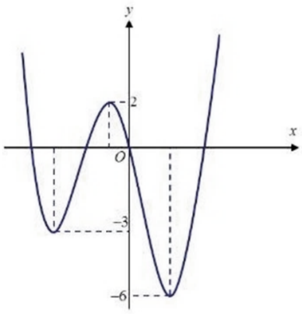
Do đó, hàm số $y=k(x)+m$ cũng có ba điểm cực trị.

Vì số điểm cực trị hàm số $y=|k(x)+m|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=k(x)+m$ và số nghiệm đơn và số nghiệm bội lẻ của phương trình $k(x)+m=0$, mà hàm số $y=k(x)+m$ cũng có ba điểm cực trị nên hàm số $y=\left||f(x)-g(x)|+m\right|$ có đúng năm điểm cực trị khi phương trình $k(x)+m=0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ).

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=k(x)$, phương trình $k(x)+m=0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) khi và chỉ khi $-m\ge\frac{7}{4}\Leftrightarrow m\le-\frac{7}{4}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, $m\le-\frac{7}{4}$ và $m\in(-5;5)$ nên $m\in\{-4;-3;-2\}$.

Câu 17. Cho đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x+2018)+\frac{1}{3}m^2\right|$ có 5điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=\left|f(x+2018)+\frac{1}{3}m^2\right|\Rightarrow g'(x)=\dfrac{f'(x+2018)\left[f(x+2018)+\frac{1}{3}m^2\right]}{\left|f(x+2018)+\frac{1}{3}m^2\right|}$

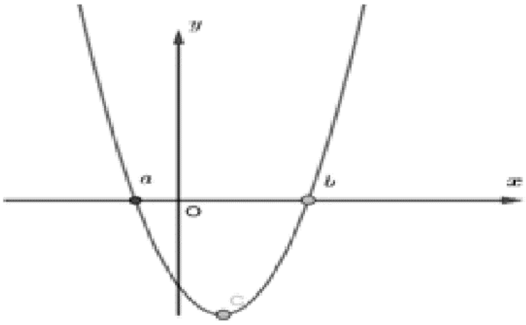
Phương trình $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x+2018)=0\ (1)\\ f(x+2018)=-\dfrac{m^2}{3}\ (2)\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm đơn phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m^2}{3} > 2 \\ -6 < -\dfrac{m^2}{3} \le -3 \end{array}\right.$ $(m \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow m \in \{3;4\}$.

Vậy tổng các phần tử là 7.

Câu 18. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ và $f(b) = 1$. Số giá trị nguyên của $m \in [-5;5]$ để hàm số $g(x) = \left|f^2(x) + 4f(x) + m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị là



A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)=1$	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $h(x) = f^2(x) + 4f(x) + m$

$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x)f(x) + 4f'(x)$

$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x)\left[f(x) + 2\right]$

$h'(x) = 0 \Rightarrow 2f'(x)\left[f(x) + 2\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a; x = b \\ x = c\,(c \langle a) \end{array}\right.$

Pt có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ có 3 điểm cực trị

Xét $h\left(x\right)=0$

$\Leftrightarrow f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)=-m\ (2)$

Để $g\left(x\right)=\left|h\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi PT (2) có 2 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ phân biệt

Xét hàm số $t\left(x\right)=f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)$

Ta có Bảng biến thiên của $t\left(x\right)$:

x	$-\infty$		c		a		b		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$t(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$t(a)$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$
					$y=-m$				

Từ YCBT $\Leftrightarrow t\left(x\right)=-m$ có hai nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ pb

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -m \ge t\left(a\right) > 5 \\ -4 < -m \le 5 \end{array}\right. \\ -5 \le m \le 5; m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le -t\left(a\right) < -5 \\ -4 < -m \le 5 \end{array}\right. \\ -5 \le m \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \le m < 4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m \in \left\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\right\}$.

Cách 2:

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$:

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)=1$	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $h\left(x\right)=f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+m$

$\Rightarrow h^{'}\left(x\right)=2f^{'}\left(x\right)f\left(x\right)+4f^{'}\left(x\right)$

$\Rightarrow h^{'}\left(x\right)=2f^{'}\left(x\right)\left[f\left(x\right)+2\right]$

$h^{'}\left(x\right)=0\Rightarrow 2f^{'}\left(x\right)\left[f\left(x\right)+2\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^{'}\left(x\right)=0\\ f\left(x\right)=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a;x=b\\ x=c\left(c\langle a\right)\end{array}\right.$

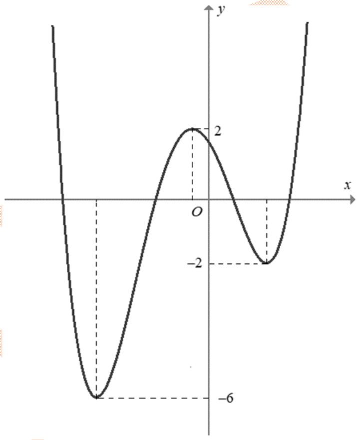
x	$-\infty$		c		a		b		$+\infty$
$h^{'}(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-4+m$	$\nearrow$	$h(a)$	$\searrow$	$5+m$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ YCBT $g\left(x\right)=\left|h\left(x\right)\right|=\left|f^{2}\left(x\right)+4f\left(x\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị khi:

$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}h\left(a\right)\le 0\\ -4+m<0\le 5+m\end{array}\right.\\ m\in\mathbb{Z};m\in\left[-5;5\right]\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m\le f^{2}\left(a\right)+4f(a)<-5\\ -5\le m<4\end{array}\right.\\ m\in\mathbb{Z};m\in\left[-5;5\right]\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m\in\left\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\right\}$

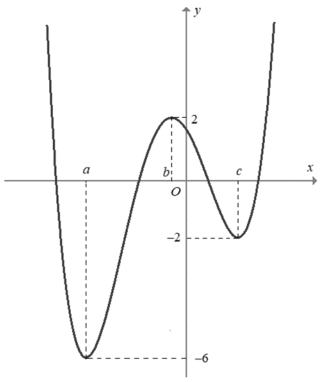
Câu 19. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x+2020\right)+m^{2}\right|$ có 5 điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B



Gọi a,b,c $(a<b<c)$ là ba điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Khi đó: $f(a)=-6; f(b)=-2; f(c)=2$.

Xét hàm $h(x)=f(x+2020)$ với $x\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $h'(x)=f'(x+2020).(x+2020)'=f'(x+2020)$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a-2020\\x=b-2020\\x=c-2020\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$

x	$-\infty$		$a-2020$		$b-2020$		$c-2020$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	-6	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Hàm số $g(x)=\left|f(x+2020)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$Phương trình $f(x+2020)+m^2=0$ có đúng 2 nghiệm không thuộc

$\{a-2020;b-2020;c-2020\}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=2\\m^2=-2\\2<m^2<6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm\sqrt{2}\\-\sqrt{6}<m<-\sqrt{2}\\\sqrt{2}<m<\sqrt{6}\end{array}\right..$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m là $m=2$ và $m=-2$ thì hàm số $g(x)=\left|f(x+2020)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)^4(x+4)^3\left[x^2+2(m+3)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

B. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ (x+2)^4=0 \\ (x+4)^3=0 \\ x^2+2(m+3)x+6m+18=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=-4 \\ x^2+2(m+3)x+6m+18=0 \ (*) \end{array}\right.$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4.

Trường hợp 1. Phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2+24m+36-24m-72=4m^2-36<0$

$\Leftrightarrow -3<m<3 \Rightarrow m\in\{-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\}$

Trường hợp 2. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta=4m^2-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Trường hợp 3. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$. Trong đó $x_1=-4$.

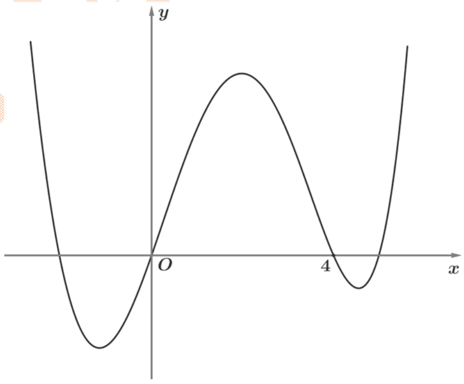
Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2 \Leftrightarrow \Delta=4m^2-36>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>3 \end{array}\right.$.

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} S=x_1+x_2=-4+x_2=-2m-6 \\ P=x_1.x_2=-4.x_2=6m+18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-2m-2 \\ x_2=-\dfrac{3}{2}m-\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m-2=-\dfrac{3}{2}m-\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow m=5$.

Vậy $m\in\{-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;3\,;5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 21. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)$ là



A. 5 . **B.** 3 . **C.** 7 . **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $g(x) = f(x^3+3x^2) \Rightarrow g'(x) = (3x^2+6x).f'(x^3+3x^2)$

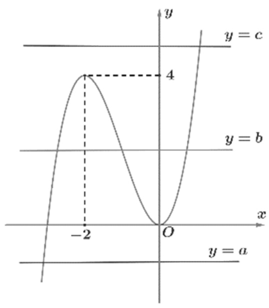
Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+6x=0 \\ f'(x^3+3x^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x^3+3x^2=a;\ a<0 \\ x^3+3x^2=b;\ 0<b<4 \\ x^3+3x^2=c;\ c>4 \end{array}\right.$

Xét hàm số $h(x) = x^3+3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2+6x$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có đồ thị của hàm $h(x) = x^3+3x^2$ như sau



Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3+3x^2)$ có 7 cực trị.

Câu 22. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta chọn hàm $f(x)=5x^4-10x^2+3$.

Đạo hàm

$g'(x)=4x^3\left[f(x+1)\right]^2+2x^4f(x+1)f'(x+1)=2x^3f(x+1)\left[2f(x+1)+xf'(x+1)\right]$.

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3f(x+1)=0 \\ 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x+1)=0 \\ 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \end{array}\right.$.

+) $f(x+1)=0\ (*) \Leftrightarrow 5(x+1)^4-10(x+1)+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1\approx 1,278 \\ x+1\approx 0,606 \\ x+1\approx -0,606 \\ x+1\approx -1,278 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0.

+) $2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \overset{t=x+1}{\Rightarrow} 2(5t^4-10t^2+3)+(t-1)(20t^3-20t)=0$

$\Leftrightarrow 30t^4-20t^3-40t^2+20t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\approx 1,199 \\ t\approx 0,731 \\ t\approx -0,218 \\ t\approx -1,045 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình $(*)$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 9.

Câu 23. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x-1)\right]^4$ là

A. 7 . **B.** 8 . **C.** 5. **D.** 9 .

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=2x.\left[f(x-1)\right]^4+4x^2f'(x-1)\left[f(x-1)\right]^3=2x.\left[f(x-1)\right]^3\left(f(x-1)+2xf'(x-1)\right)$

Vậy $g'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f(x-1)=0\ \ (1)\\ f(x-1)+2xf'(x-1)=0\ \ (2)\end{array}\right.$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

Phương trình (2) có $f(x-1)=-2xf'(x-1)\Rightarrow f(x)=-2(x+1)f'(x)$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm $f(x)$ là bậc bốn trùng phương nên ta có

$f(x)=-3x^4+6x^2-1$ thay vào $f(x)=-2(x+1)f'(x)$ vô nghiệm

Vậy hàm $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 24. **(ĐTK2021)** Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{61}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f(x^3)-3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Do $f(x)$ là hàm bậc bốn và từ bảng biến thiên của $f'(x)$, ta có: $f'(x)$ bậc ba có 2 điểm cực trị là $-3;-1$ nên $f''(x)=a(x+1)(x+3)$.

Suy ra $f'(x)=a\left(\dfrac{x^3}{3}+2x^2+3x\right)+b$.

Do $f'(-3)=-1$ và $f'(-1)=-\dfrac{61}{3}$ nên $\begin{cases} a(-9+18-9)+b=-1 \\ a\left(-\dfrac{1}{3}+2-3\right)+b=-\dfrac{61}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{29}{2} \\ b=-1 \end{cases}$.

Suy ra $f'(x)=\dfrac{29}{2}\left(\dfrac{x^3}{3}+2x^2+3x\right)-1$.

Xét hàm số $h(x)=f(x^3)-3x$, có $h'(x)=3x^2.f'(x^3)-3$;

$h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^3)=\dfrac{1}{x^2}$ (1).

x	$-\infty$		-3		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\dfrac{61}{3}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

+ Với $x\in(-\infty;0)$: $f'(x)<0 \Rightarrow f'(x^3)<0$, mà $\dfrac{1}{x^2}>0$ suy ra (1) vô nghiệm trên $(-\infty;0)$.

+ Trên $(0;+\infty)$: $f'(x)\in(-1;+\infty) \Rightarrow f'(x^3)\in(-1;+\infty)$ đồng biến suy ra $f'(x^3)$ đồng biến mà hàm số $y=\dfrac{1}{x^2}$ nghịch biến nên phương trình (1) có không quá 1 nghiệm. Mặt khác, hàm số $y=f'(x^3)-\dfrac{1}{x^2}$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f'(x^3)-\dfrac{1}{x^2}\right]=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x^3)-\dfrac{1}{x^2}\right]=+\infty$

Nên (1) có đúng 1 nghiệm $x=x_0>0$.

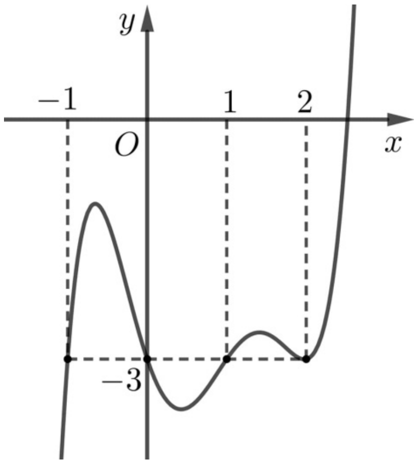
Bảng biến thiên của $h(x)$:

x	$-\infty$		0		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$h(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có $h(x_0)<0$ nên phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt. Mặt khác $g(x)=|h(x)|=\begin{cases} h(x) \text{ khi } h(x)\ge 0 \\ -h(x) \text{ khi } h(x)<0 \end{cases}$.

Từ đó hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 25. Cho hàm số đa thức $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f\left(0\right)<0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'\left(x\right)$. Hỏi hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)+3x\right|$ cóbao nhiêu cực trị?



A. 4.　　**B.** 5.　　**C.** 3.　　**D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $h\left(x\right)=f\left(x\right)+3x$

$h'\left(x\right)=f'\left(x\right)+3$

$h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)+3=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=-3$

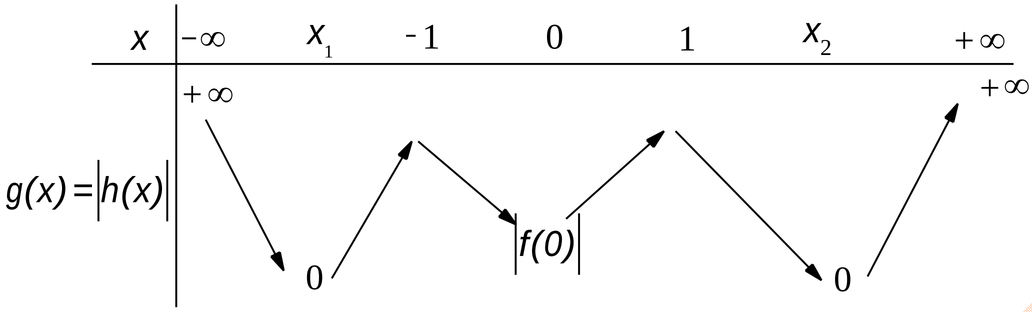
Theo đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ thì phương trình $f'\left(x\right)=-3$ có 4 nghiệm $\left\{-1;0;1;2\right\}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘		↗	$f(0)$	↘		↗		↗	$+\infty$

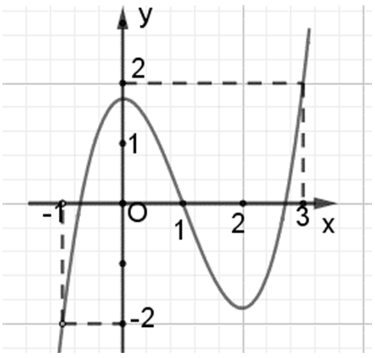
Theo bảng biến thiên ta có phương trình $h\left(x\right)=0$ có hai nghiệm $x_1<-1$; và $x_2>1$ (do có $f\left(0\right)<0$)

Khi đó ta có



Vậy hàm số $g(x)=\left|f(x)+3x\right|$ có 5 cực trị.

Câu 26. Cho hàm số Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=2f(x)-x^2+2x+2019$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=g(|x|)$ là

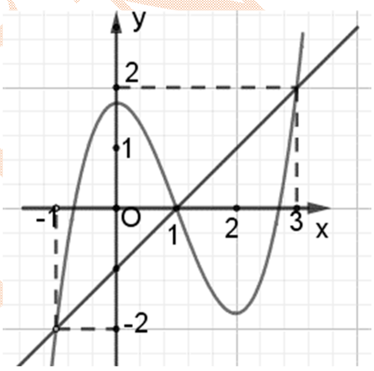
A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

* $g'(x)=2f'(x)-2x+2$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1$

Đường thẳng $y=x-1$ đi qua các điểm $(-1\,;\,-2)$, $(1\,;0)$, $(3\,;2)$



Quan sát vào vị trí tương đối của hai đồ thị trên hình vẽ, ta có BBT của hàm số $y=g'(x)$ như sau

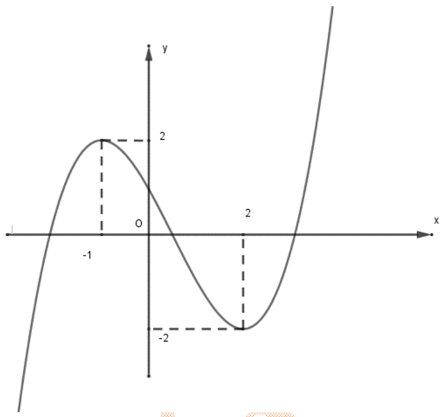
x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	

$*$Đồ thị hàm số $y=g(|x|)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng nên từ BBT trên ta suy ra BBT của hàm số $y=g(|x|)$ như sau

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	

Vậy hàm số $y=g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x)=\left|[f(x)]^2-4f(x)+1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2.   **B.** 3.   **C.** 5.   **D.** 7.

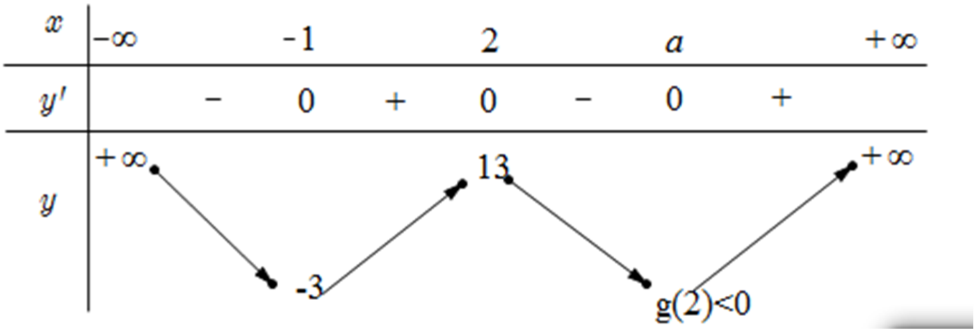
Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=[f(x)]^2-4f(x)+1$.

Khi đó, $g'(x)=2f(x).f'(x)-4f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\,(a>2) \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

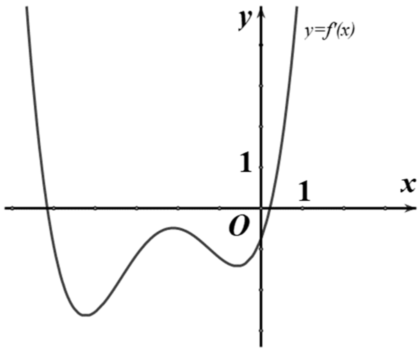
Do đó, ta có bảng biến thiên:



Suy ra đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có ba điểm cực không nằm trên trục hoành và bốn giao điểm với Ox.

Vậy đồ thị hàm số $y=h\left(x\right)=\left|g\left(x\right)\right|$ có số cực trị là $3+4=7$.

Câu 28. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=0$. Biết $y=f'\left(x\right)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-x\right|$ là



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét $h(x)=f\left(x^3\right)-x$

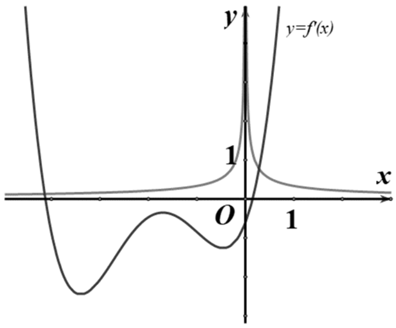
Có $h'\left(x\right)=3x^2f'\left(x^3\right)-1$

$$h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3x^2f'\left(x^3\right)-1=0\Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\frac{1}{3x^2}\quad\left(x\neq 0\right)\quad(1)$$

Đặt $x^3=t\Rightarrow x^2=\sqrt[3]{t^2}$ phương trình (1) trở thành:

$$f'\left(t\right)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\quad\left(t\neq 0\right)\quad(2)$$

Vẽ đồ thị hàm $y=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm $y=f'\left(x\right)$.



Dựa vào đồ thị ta có:

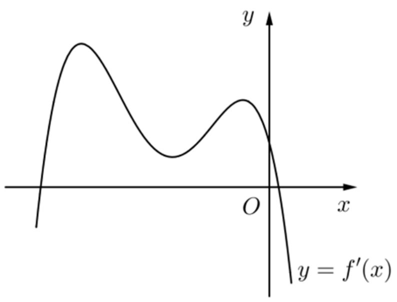
$$f'(t)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=b<0\\t=a>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3=b<0\\x^3=a>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt[3]{b}<0\\x=\sqrt[3]{a}>0\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\sqrt[3]{b}$		0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↗	$f(b)-\sqrt[3]{b}$	↘	0	↘	$f(a)-\sqrt[3]{a}$	↗	
$g(x)=\lvert h(x)\rvert=\lvert f(x^3)-x\rvert$	↘	0 ↗	$f(b)-\sqrt[3]{b}$	↘	0	↗	$-f(a)+\sqrt[3]{a}$	↘ 0	↗

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-x\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 29. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)+x\right|$ là



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x)=f\left(x^3\right)+x\Rightarrow h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)+1=0\Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=-\frac{1}{3x^2}$

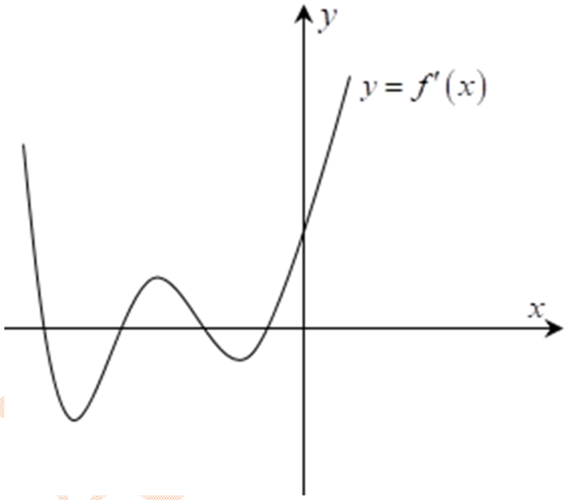
Đặt $t = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{t}$ thế vào phương trình trên ta được $f'(t) = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$

Xét hàm số $y = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow y' = \dfrac{2}{9\sqrt[3]{t^5}}$ đổi dấu khi qua 0 và đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$. Khi vẽ đồ thị trên cùng một mặt phẳng tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(t)$ ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thuộc góc phần tử thứ 3 và 4, gọi 2 giao điểm lần lượt là $t_1 < 0, t_2 > 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{t_1}, x_2 = \sqrt[3]{t_2}$. Như vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	x_1	$+$		$+$	0	$-$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $h(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và hàm số $h(x)$ có 2 điểm cực trị không nằm trên trục hoành, do đó hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 30. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left|f(x^4) - x^2\right|$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

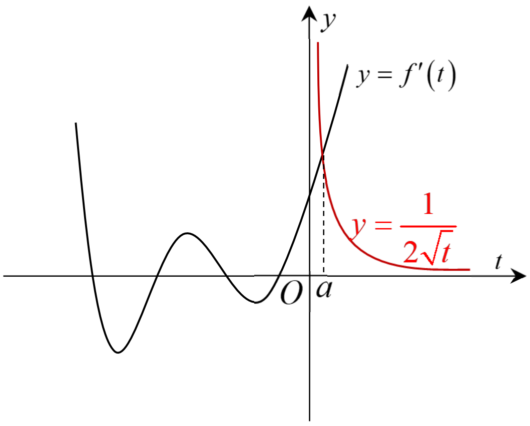
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^4) - x^2$ có $h'(x) = 4x^3 f'(x^4) - 2x$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^4) = \dfrac{1}{2x^2} \quad (*) \end{array}\right.$$

Xét phương trình $(*)$: Đặt $t = x^4$ thì $(*)$ thành $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ với $t > 0$.



Dựa vào đồ thị, phương trình $(*)$ có duy nhất một nghiệm $a > 0$.

Khi đó, ta được $x = \pm\sqrt[4]{a}$.

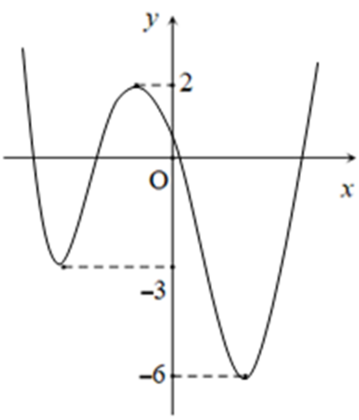
Bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(x^4) - x^2$

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{a}$		0		$\sqrt[4]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $g(x) = \left|f(x^4) - x^2\right|$ bằng số cực trị của hàm $h(x) = f(x^4) - x^2$ và số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình $h(x) = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f(x)$ thì số cực trị của $g(x)$ là 5.

Câu 31. Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12;12]$ để hàm số $g(x) = \left|2f(x-1) + m\right|$ có 5 điểm cực trị?



A. 13. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Đặt $h(x)=2f(x-1)+m \Rightarrow g(x)=|h(x)|$.

□ Số điểm cực trị của $g(x)$ = số điểm cực trị của $y=h(x)$ + số giao điểm của $y=h(x)$ với trục Ox khác với điểm cực trị của $y=h(x)$.

□ Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị. Suy ra hàm số $y=h(x)$ cũng có 3 điểm cực trị.

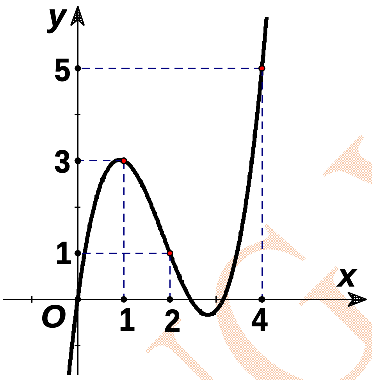
□ Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x-1)=-\dfrac{m}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$.

□ Đồ thị hàm số $y=f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang bên phải 1 đơn vị.

Dựa vào đồ thị, ta được: $-\dfrac{m}{2}\ge 2$ hoặc $-6<-\dfrac{m}{2}\le -3$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -4 \\ 6\le m<12 \end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}\,;\,m\in[-12;12]}$ có 15 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0;\ f(4)>4$. Biết hàm $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^2\right)-2x\right|$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^2\right)-2x$.

Ta có: $h'(x)=2xf'\left(x^2\right)-2$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(x^2\right)=\dfrac{1}{x}$ (vô nghiệm $\forall x\le 0$).

Đặt $t=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{t}, \forall t>0$.

Khi đó: $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ (*). Nhận thấy trên khoảng $(0;1)$ thì $w(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ nghịch biến và $f'(t)$ đồng biến, do đó (*) nếu có nghiệm là duy nhất.

Mặt khác: $h'(0).h'(1)=-2(2f'(1)-2)=-8<0$ và $h'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\exists x_0\in(0;1):h'(x_0)=0$.

Vậy $h'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\in(0;1)$ và $h(x)$ có một điểm cực tiểu (vẽ bảng biến thiên). (1)

Xét phương trình: $h(x)=0\Leftrightarrow f(x^2)-2x=0$ (**).

Ta có: $h(0)=f(0)=0\Rightarrow x=0$ là một nghiệm của (**).

Mặt khác: $h(\sqrt{x_0}).h(2)=(f(x_0)-2\sqrt{x_0})(f(4)-4)<0\Rightarrow\exists x_1\in(\sqrt{x_0};2):h(x_1)=0$.

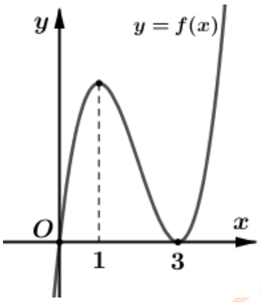
Nên (**) có nghiệm $x_1\in(\sqrt{x_0};2)$.

Vì $h(x)$ có một điểm cực trị, nên (**) có không quá 2 nghiệm.

Vậy $h(x)=f(x^2)-2x=0$ có hai nghiệm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) ta được: hàm số $g(x)=\left|f(x^2)-2x\right|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+2m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>1$ **B.** $m\ge 1$ **C.** $m\le 2$ **D.** $m>2$

Lời giải

Chọn B

Số cực trị của hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+2m\right|$ bằng số cực trị của hàm số $y(x)=f^2(x)+2f(x)+2m$ cộng với số giao điểm (khác điểm cực trị) của đồ thị hàm số $y(x)=f^2(x)+2f(x)+2m$ và $y=0$.

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)+2f(x)+2m$

$g'(x)=2f(x).f'(x)+2f'(x)=2f'(x)\left[f(x)+1\right]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(x)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=\alpha\,(\alpha<0) \end{array}\right.$$

BBT

x	$-\infty$		α		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+2m$	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	$2m$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m\ge 0 \Leftrightarrow m\ge\frac{1}{2}$. Đáp án B là gần kết quả nhất

Câu 34. **(Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 5 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải.

Chọn C

$y=\left|f(x)\right|=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$

Ta có: $f'(x)=12x^3-12x^2-24x$.; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-1$ hoặc $x=2$.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Do hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị nên hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị khi

Phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m-5<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<5$.

Vậy có 4 giá trị nguyên thỏa đề bài là $m=1; m=2; m=3; m=4$.

Câu 35. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m^2+m-12\right|$ có bảy điểm cực trị

A. 1. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m^2+m-12\right|$ có bảy điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m^2+m-12$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $x^4-2mx^2+2m^2+m-12=0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2-\left(2m^2+m-12\right)>0 \\ 2m>0 \\ 2m^2+m-12>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4<m<3 \\ m>0 \\ m<\dfrac{-1-\sqrt{97}}{4} \vee m>\dfrac{-1+\sqrt{97}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{97}}{4}<m<3$$

Vậy không có giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m^2+m-12\right|$ có bảy điểm cực trị.

Câu 36. Cho hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m-1\right|$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên trong khoảng $\left[-2;2\right]$ của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là

A. 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Đặt $f\left(x\right)=x^4-2mx^2+2m-1$, $f'\left(x\right)=4x^3-4mx$, $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$

+ Trường hợp 1: hàm số có một cực trị $\Rightarrow m\in\left[-2;0\right]$.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có một điểm cực trị là $A\left(0;2m-1\right)$.

Do $m\in\left[-2;0\right]\Rightarrow y_A=2m-1<0$ nên đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 3 cực trị $\Rightarrow$ có 3 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

+ Trường hợp 2: hàm số có ba cực trị $\Rightarrow m\in\left(0;2\right]$.

Khi đó đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là $A\left(0;2m-1\right)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2+2m-1\right)$, $C\left(-\sqrt{m};-m^2+2m-1\right)$.

Do $a=1>0$ nên hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 3 điểm cực trị khi hàm số $y=f\left(x\right)$ có $y_B=y_C\ge 0$

$\Leftrightarrow -m^2+2m-1\ge 0 \Leftrightarrow m=1$.

Nếu $y_B=y_C<0$ (trong bài toán này không xảy ra) thì hàm số có ít nhất 5 điểm cực trị.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa ycbt.

Câu 37. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m-1\right|$ có 7 điểm cực trị là:

A. $(0;6)$ **B.** $(6;33)$ **C.** $(1;33)$ **D.** $(1;6)$

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m-1$,

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x\left(x^2-x-2\right)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-6$	$\nearrow$	$m-1$	$\searrow$	$m-33$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y=|f(x)|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m-6<0<m-1\Leftrightarrow 1<m<6$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $\frac{5}{4}<m\le 2$. **B.** $-2<m<\frac{5}{4}$. **C.** $-\frac{5}{4}<m<2$. **D.** $\frac{5}{4}<m<2$.

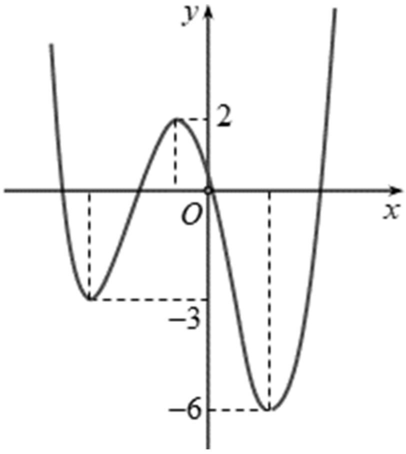
Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-2\left(2m-1\right)x+2-m$

Hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi chi khi hàm số $f(x)$ có hai cực trị dương.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2m-1\right)^2-3\left(2-m\right)>0\\\dfrac{2\left(2m-1\right)}{3}>0\\\dfrac{2-m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-m-5>0\\m>\dfrac{1}{2}\\m<2\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5}{4}<m<2$$

Câu 39. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.



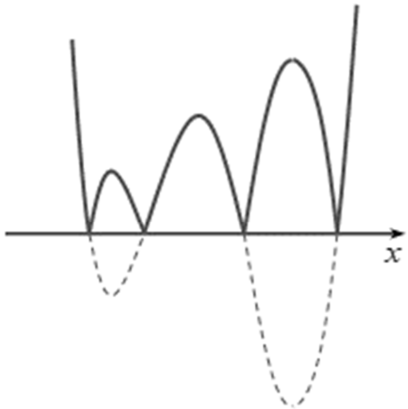
Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x-1\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 15.

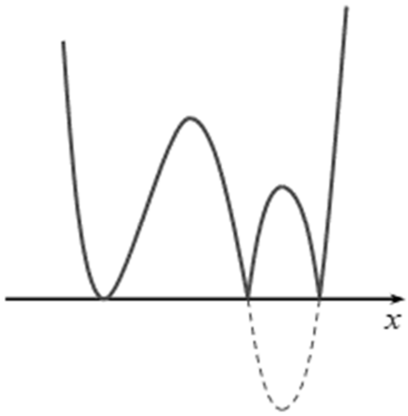
Lời giải

Nhận xét: Số giao điểm của $\left(C\right): y=f\left(x\right)$ với Ox bằng số giao điểm của $\left(C'\right): y=f\left(x-1\right)$ với Ox.

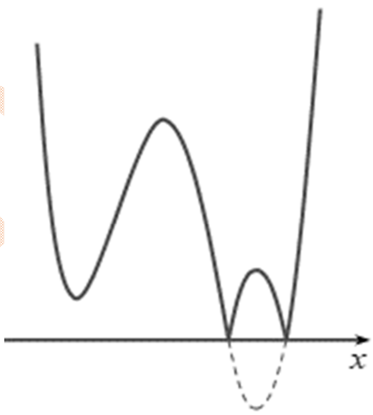
Vì $m>0$ nên $\left(C''\right): y=f\left(x-1\right)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $\left(C'\right): y=f\left(x-1\right)$ lên trên m đơn vị.



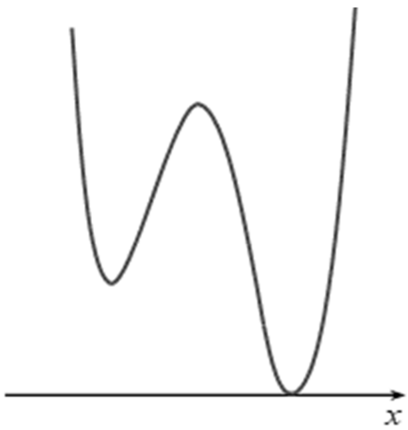
TH1: $0<m<3$



TH2 : $m=3$



TH3: $3<m<6$



TH4 : $m\geq 6$

TH1: $0<m<3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

TH2: $m=3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH3: $3<m<6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH4: $m\ge 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3\le m<6$. Do $m\in\mathbb{Z}^*$ nên $m\in\{3;4;5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

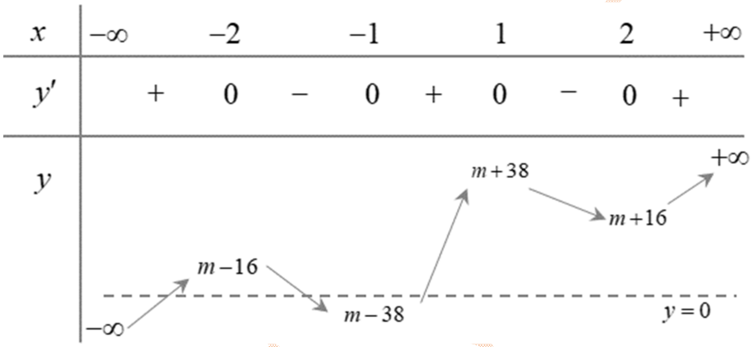
A. 42. **B.** 21. **C.** 40. **D.** 20.

Lời giải

$y=3x^5-25x^3+60x+m$

$\Rightarrow y'=15x^4-75x^2+60$

$$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1\\ x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\Rightarrow y=m-16\\ x=-1\Rightarrow y=m-38\\ x=1\ \ \Rightarrow y=m+38\\ x=2\ \ \Rightarrow y=m+16\end{array}\right.$$

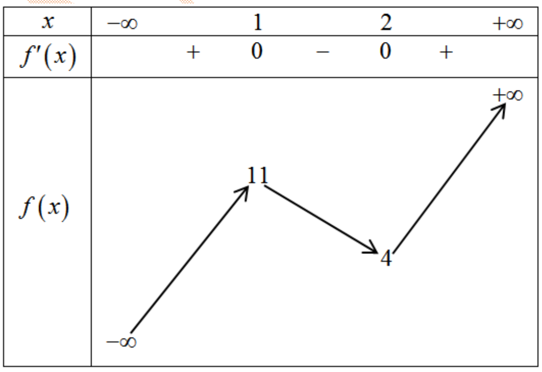


Suy ra $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-38<0<m-16\\ m+16<0<m+38\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 16<m<38\\ -38<m<-16\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\overline{17,37}\\ m=\overline{-37,-17}\end{array}\right.$$

Có tất cả 42 giá trị nguyên của m.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m\in(4;11)$. **B.** $m\in\left(2;\dfrac{11}{2}\right)$. **C.** $m=3$. **D.** $m\in\left[2;\dfrac{11}{2}\right]$.

Lời giải

Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) - 2m$ như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$[f(x)-2m]'$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-2m$	$-\infty$	$\nearrow$	$11-2m$	$\searrow$	$4-2m$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \left|f(x) - 2m\right|$ gồm hai phần:

+ Phần đồ thị của hàm số $y = f(x) - 2m$ nằm phía trên trục hoành.

+ Phần đối xứng với đồ thị của hàm số $y = f(x) - 2m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục Ox.

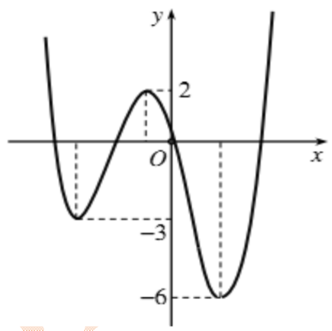
Do đó, đồ thị hàm số $y = \left|f(x) - 2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

$(4-2m)(11-2m) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(2;\dfrac{11}{2}\right)$.

Câu 42. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \left|f(x-2) + m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 15. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải



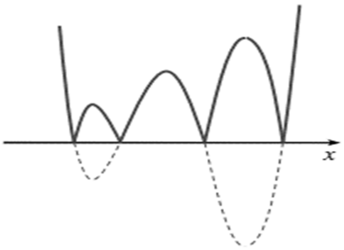
***Cách 1:** dùng đồ thị.*

- Nhận thấy: số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C_1): y = f(x-2)$ với Ox.

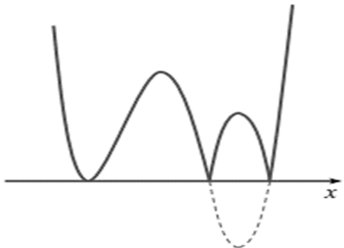
Vì $m > 0$ nên $(C_2): y = f(x-2) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C_1): y = f(x-2)$ lên trên m đơn vị.

- Đồ thị hàm số $y = \left|f(x-2) + m\right|$ có được bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành Ox phần đồ thị (C_2) nằm phía dưới trục Ox và giữ nguyên phần phía trên trục Ox.

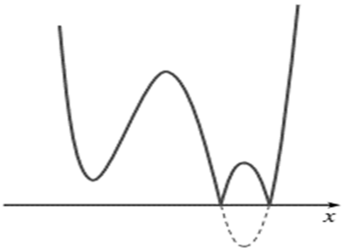
- Ta xét các trường hợp sau:



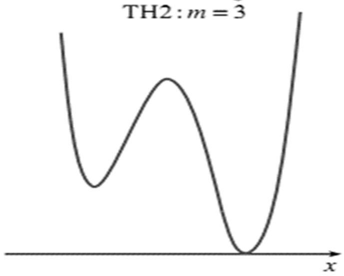
$TH1: 0 < m < 3$



$TH2: m = 3$



$TH3: 3 < m < 6$



$TH4: m \geq 6$

+ Trường hợp 1: $0 < m < 3$: đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị (loại).

+ Trường hợp 2: $m = 3$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).

+ Trường hợp 3: $3 < m < 6$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).

+ Trường hợp 4: $m \geq 6$: đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (loại).

Vậy $3 \leq m < 6$ Do $m \in \mathbb{Z}_+^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$ hay $S = \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

**** Cách 2:** đạo hàm hàm số hợp.*

- Ta có: $y = \left|f(x-2)+m\right| = \sqrt{\left[f(x-2)+m\right]^2} \Rightarrow y' = \dfrac{\left(f(x-2)+m\right).f'(x-2)}{\sqrt{\left[f(x-2)+m\right]^2}}$

- Xét $f'(x-2) = 0 \ (1)$

+ Do phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $f'(x-2) = 0$ cũng có 3 nghiệm phân biệt.

- Xét $f(x-2)+m = 0 \Leftrightarrow f(x-2) = -m \ \ (2)$

+ Nếu $-6 < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < 6$ thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3 nghiệm của (1).

+ Nếu $-m = -3 \Leftrightarrow m = 3$ thì (2) có 3 nghiệm phân biệt (trong đó có 2 nghiệm đơn khác 3 nghiệm của (1) và 1 nghiệm kép trùng với 1 nghiệm của (1))

Tóm lại : với $3 \leq m < 6$ thì hai phương trình (1) và (2) có tất cả 5 nghiệm bội lẻ phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó, hay đồ thị hàm số $y = \left|f(x-2)+m\right|$ có 5 điểm cực trị.

- Lại do $m \in \mathbb{Z}_+^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$ hay $S = \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 43. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m\in\left(4;11\right)$. **B.** $m\in\left(2;\dfrac{11}{2}\right)$. **C.** $m=3$. **D.** $m\in\left[2;\dfrac{11}{2}\right]$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị.

Để đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị $y=f\left(x\right)$ cắt đường thẳng $y=2m$ tại $5-2=3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow 4<2m<11 \Leftrightarrow 2<m<\dfrac{11}{2}$.

Câu 44. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

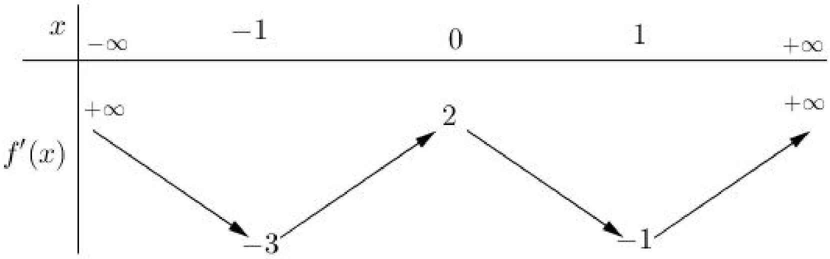
Ta có $y'=2\left(x-1\right).f'\left(x^2-2x\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=a\in\left(-\infty;-1\right)\\ x^2-2x=b\in\left(-1;0\right)\\ x^2-2x=c\in\left(0;1\right)\\ x^2-2x=d\in\left(1;+\infty\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=1 & \\ x^2-2x-a=0,a\in\left(-\infty;-1\right) & (1)\\ x^2-2x-b=0,b\in\left(-1;0\right) & (2)\\ x^2-2x-c=0,c\in\left(0;1\right) & (3)\\ x^2-2x-d=0,d\in\left(1;+\infty\right) & (4)\end{array}\right..$$

Phương trình (1) vô nghiệm, các phương trình $(2),(3),(4)$ đều có hai nghiệm phân biệt khác 1 và do b,c,d đôi một khác nhau nên các nghiệm của phương trình $(2),(3),(4)$ cũng đôi một khác nhau. Do đó $f'\left(x^2-2x\right)=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy $y'=0$ có 7 nghiệm phân biệt, do đó số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là 7.

Câu 45. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$, bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như sau:



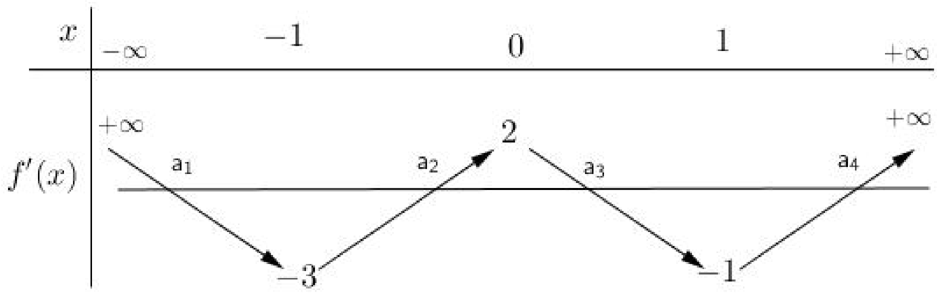
Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(4x^2+4x\right)$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

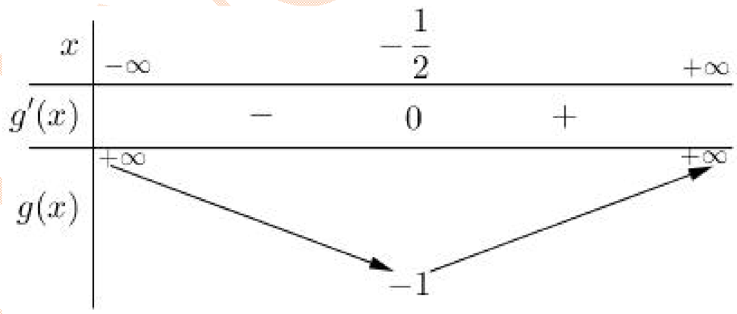
Chọn C

Có $\left(f\left(4x^2+4x\right)\right)' = (8x+4)\,f'\left(4x^2+4x\right)$, $\left(f\left(4x^2+4x\right)\right)' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ f'\left(4x^2+4x\right)=0 \end{array}\right.$.



Từ bảng biến thiên trên ta có $f'\left(4x^2+4x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+4x=a_1 \in (-\infty;-1) \\ 4x^2+4x=a_2 \in (-1;0) \\ 4x^2+4x=a_3 \in (0;1) \\ 4x^2+4x=a_4 \in (1;+\infty) \end{array}\right.$. (1)

Xét $g(x)=4x^2+4x$, $g'(x)=8x+4$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên



Kết hợp bảng biến thiên của $g(x)$ và hệ (1) ta thấy:

Phương trình $4x^2+4x=a_1 \in (-\infty;-1)$ vô nghiệm.

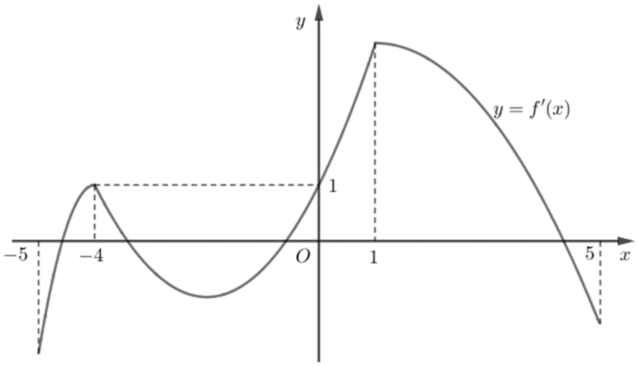
Phương trình $4x^2+4x=a_2 \in (-1;0)$ tìm được hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2+4x=a_2 \in (0;1)$ tìm được thêm hai nghiệm mới phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(1;+\infty)$ tìm được thêm hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y=f\left(4x^2+4x\right)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 46. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?



A. 5.　　　　**B.** 4.　　　　**C.** 6.　　　　**D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$

$\Rightarrow g'(x)=(2x+4)\,f'\left(x^2+4x\right)-(2x+4)=(2x+4)\left[f'\left(x^2+4x\right)-1\right]$.

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2x+4=0 & \\ x^2+4x=-4 & (1)\\ x^2+4x=0 & (2)\\ x^2+4x=a\in(1;5) & (3)\end{array}\right.$.

Xét phương trình $x^2+4x=a\in(1;5)$, ta có BBT của hàm số $y=x^2+4x$ trên $(-5;1)$ như sau:

x	-5		-4		-2		0		1
y'			$-$		0		$+$		
y	5	↘	0	↘	-4	↗	0	↗	5

Suy ra (1) có nghiệm kép $x=-2$, (2) có 2 nghiệm phân biệt $x=-4; x=0$, (3) có 2 nghiệm phân biệt $x=x_1; x=x_2$ khác $-2;\ 0;\ -4$. Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm trong đó có $x=-2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x=-4; x=0; x=x_1; x=x_2$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 47. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y=f'(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)+\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

A. $x=3$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn A

$g'(x)=-f'(1-x)+x^2-4x+3$.

$-f'(1-x)>0 \Leftrightarrow f'(1-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x<-2\\0<1-x<4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\-3<x<1\end{array}\right.$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$-f'(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2-4x+3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		không xác định		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Câu 48. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

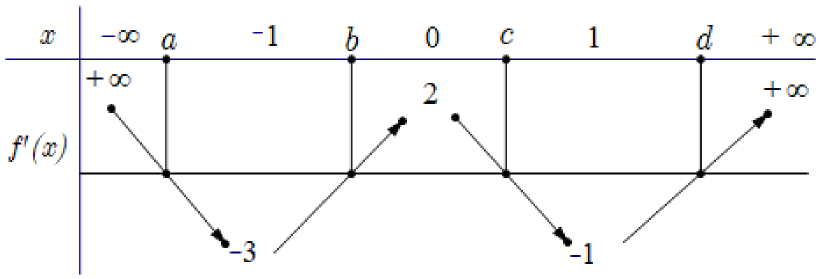
Số cực trị của hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)$ là

A. 3. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên



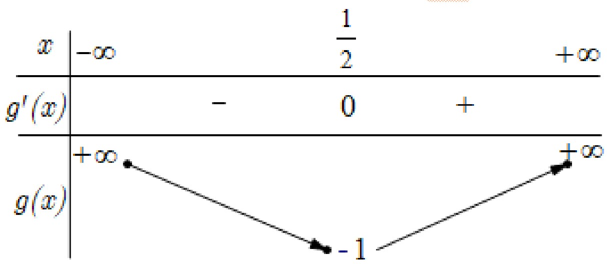
Ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;-1) \\ x=b\in(-1;0) \\ x=c\in(0;1) \\ x=d\in(1;+\infty) \end{array}\right.$

Với $y=f\left(4x^2-4x\right)$, ta có $y'=(8x-4)f'\left(4x^2-4x\right)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x-4=0 \\ f'\left(4x^2-4x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ 4x^2-4x=a\in(-\infty;-1)\ (1) \\ 4x^2-4x=b\in(-1;0)\ (2) \\ 4x^2-4x=c\in(0;1)\ (3) \\ 4x^2-4x=d\in(1;+\infty)\ (4) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=4x^2-4x$, ta có $g'(x)=8x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có:

- Vì $a\in(-\infty;-1)$ nên (1) vô nghiệm.
- Vì $b\in(-1;0)$ nên (2) có 2 nghiệm phân biệt.
- Vì $c\in(0;1)$ nên (3) có 2 nghiệm phân biệt.
- Vì $d\in(1;+\infty)$ nên (4) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)$ có 7 điểm cực trị

Cách khác:

Ta có: $y'=(8x-4).f'(4x^2-4x)$.

$y'=0 \Leftrightarrow (8x-4).f'(4x^2-4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x-4=0 \\ f'(4x^2-4x)=0 \end{array}\right.$

+ $8x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

+ $f'(4x^2-4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-4x=a\,(a<-1)\ (1) \\ 4x^2-4x=b\,(-1<b<0)\ (2) \\ 4x^2-4x=c\,(0<c<1)\ (3) \\ 4x^2-4x=d\,(d>1)\ (4) \end{array}\right.$

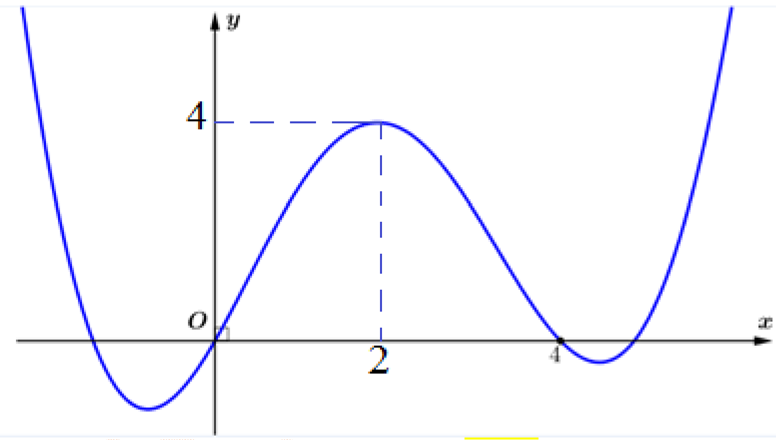
+ Phương trình $4x^2-4x=m \Leftrightarrow 4x^2-4x-m=0$ có nghiệm khi $\Delta'=4-4m\ge 0$ hay $m\le 1$.

Từ đó, ta có phương trình (1); (2); (3) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình (4) vô nghiệm.

Do đó, hàm số đã cho có 7 cực trị.

Câu 49. Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)-2x^3-6x^2$ là



A. 5. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=(3x^2+6x).f'(x^3+3x^2)-6x^2-12x=(3x^2+6x)\left[f'(x^3+3x^2)-2\right]$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+6x=0 \\ f'(x^3+3x^2)=2 \end{array}\right.$.

Phương trình $3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Phương trình $f'\left(x^3+3x^2\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+3x^2=a<0 \\ x^3+3x^2=b\in(0;2) \\ x^3+3x^2=c\in(2;4) \\ x^3+3x^3=d>4 \end{array}\right.$.

Hàm số $h(x)=x^3+3x^2$ có $h'(x)=3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$:

x	$-\infty$	-3		-2		0		1	$+\infty$
$h'(x)$		$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	
$h(x)$	$-\infty$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$+\infty$

Dựa vào bảng biên thiên của hàm $h(x)$, ta có

Phương trình $x^3+3x^2=a<0$ có duy nhất một nghiệm $x_1<-3$.

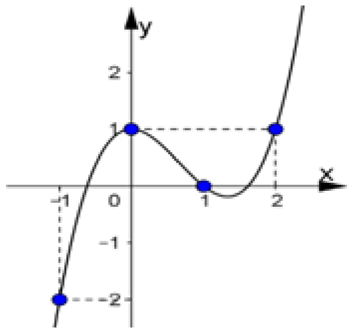
Phương trình $x^3+3x^2=d>4$ có duy nhất một nghiệm $x_2>1$.

Phương trình $x^3+3x^2=b\in(0;2)$ có ba nghiệm phân biệt không trùng với các nghiệm trên.

Phương trình $x^3+3x^2=c\in(2;4)$ có ba nghiệm phân biệt không trùng với các nghiệm trên.

Do đó, phương trình $g'(x)=0$ có mười nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=g(x)$ có mười điểm cực trị.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?

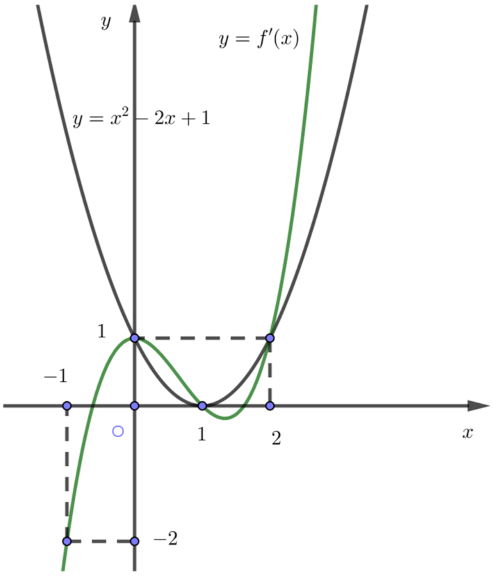
A. $x=2$ **B.** $x=0$ **C.** $x=1$ **D.** $x=-1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$ (Như hình vẽ).



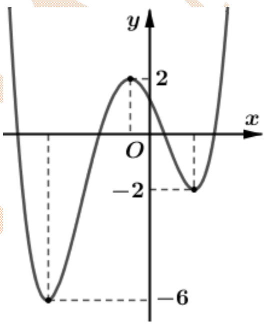
Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ ta suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = \left|f(x + 2018) + m^2\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.



Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x + 2018) + m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

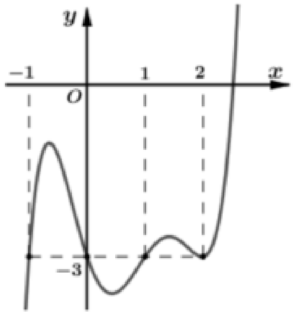
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m^2$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m^2$ với trục hoành là 2, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m^2 \le -2$: vô lý
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị

$\longrightarrow 2 \le m^2 < 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2} \le m < \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} < m \le -\sqrt{2} \end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-2;2\}$. **Chọn B**

Câu 52. Cho hàm đa thức $y = f(x)$ đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x) = f(x) + 3x, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có $h'(x) = f'(x) + 3$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2\,(2n) \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị hàm $f'(x)$ ta có BBT của hàm số $h(x)$ như sau

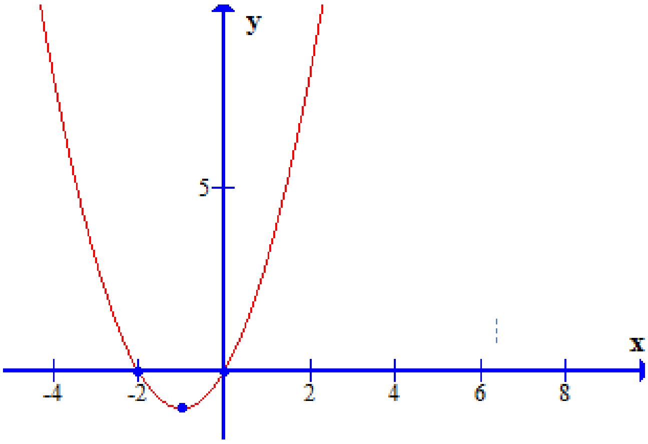
x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$h(-1)$	↗	$h(0)$	↘	$h(1)$	↗		↗	$+\infty$

Ta có $h(0) = f(0) + 3.0 < 0$, suy ra $h(1) < 0$, do đó trong khoảng $(1;+\infty)$ tồn tại giá trị x_0 sao cho $h(x_0) = 0$. Từ đó ta có BBT của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		x_0		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘ 0 ↗	$-h(-1)$	↘	$-h(0)$	↗	$-h(1)$	↘	0	↗	$+\infty$

Suy ra hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị

Câu 53. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị là parabol như hình vẽ. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f\left(x\right)+m-4\right|$ trên $\left[-2;1\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. $m=5$. **B.** $m=4$.

C. $m=3$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $y=\left|\left(x+1\right)^2+m-5\right|$. Đặt $g\left(x\right)=\left(x+1\right)^2+m-5$.

Với $\forall x\in\left[-2;1\right]$ ta có $g\left(x\right)\in\left[m-5;m-1\right]$.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y_{\max}=\max\left\{\left|m-5\right|,\left|m-1\right|\right\}$.

+ Trường hợp 1: $\left|m-5\right|\geq\left|m-1\right|\Leftrightarrow\left(m-5\right)^2\geq\left(m-1\right)^2\Leftrightarrow m\leq 3$.

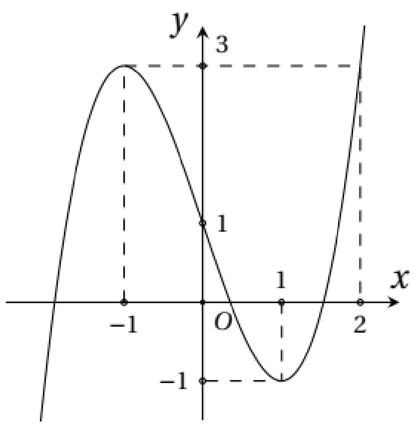
Khi đó $y_{\max}=\left|m-5\right|=5-m\geq 2\ \Rightarrow$ GTLN của hàm số đạt GTNN bằng 2, khi $m=3$.

+ Trường hợp 2: $\left|m-1\right|\geq\left|m-5\right|\Leftrightarrow m\geq 3$.

Khi đó $y_{\max}=\left|m-1\right|=m-1\geq 2\ \Rightarrow$ GTLN của hàm số đạt GTNN bằng 2, khi $m=3$.

Vậy $m=3$.

Câu 54. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x=-1,x=1$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x+1\right)+2019$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.　　　　**B.** 3.　　　　**C.** 1.　　　　**D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $y=f\left(x\right)$ có đúng hai điểm cực trị $x=-1, x=1$ nên phương trình $f'\left(x\right)=0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x=-1, x=1$.

Ta có $y'=\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x+1\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\x^2-2x+1=-1\\x^2-2x+1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Ta có

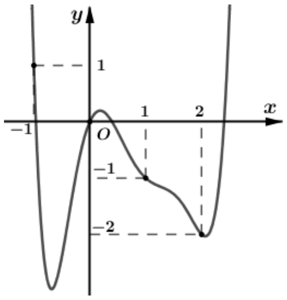
$$y'>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-2>0\\f'(x^2-2x+1)>0\end{cases}\\\begin{cases}2x-2<0\\f'(x^2-2x+1)<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\\left[\begin{array}{l}x^2-2x+1>1\\x^2-2x+1<-1\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}x<1\\-1<x^2-2x+1<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\\left[\begin{array}{l}x>2\\x<0\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}x<1\\0<x<2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\0<x<1\end{array}\right.$$

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y=f\left(x^2-2x+1\right)+2019$ có 3 cực trị. Chọn phương án **B.**

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

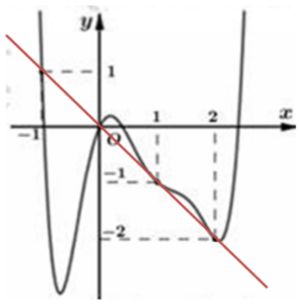
Chọn A

Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2)$.

Đặt $t = x+2$ ta được $f'(t) = -t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d: y = -t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$ ta có

ta có $f'(t) = -t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-2 \\ x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	+	0	+	
$g(x)$		↗		↘		↗				↗	

Vậy đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=x(x-1)(x^2-2mx+1)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên m không vượt quá 2018 sao cho hàm số $g(x)=f(x^2)$ có 7 điểm cực trị?

A. 2019. **B.** 2016. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=2x.f'(x^2)=2x.x^2(x^2-1)(x^4-2mx^2+1)=2x^3(x^2-1)(x^4-2mx^2+1)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x^4-2mx^2+1=0\ (*)\end{array}\right.$$

Do $x=0$ là nghiệm bội lẻ và $x=\pm1$ là các nghiệm đơn nên để $g(x)$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $(*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác ±1, hay phương trình $t^2-2mt+1=0$ phải có 2 nghiệm dương phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-1>0\\S=2m>0\\P=1>0\\1^2-2m.1+1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-1\end{array}\right.\\m>0\\m\neq1\end{cases}\Leftrightarrow m>1.$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên, không vượt quá 2018 suy ra có 2017 giá trị của m.

Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

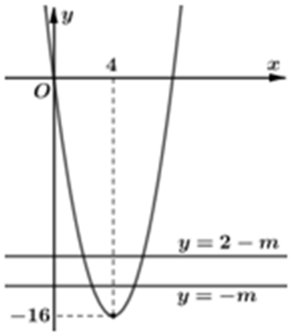
Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x^2-2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ (\text{nghiem boi }2)\\x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Ta có $g'(x)=2(x-4)f'(x^2-8x+m)$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow2(x-4)f'(x^2-8x+m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x^2-8x+m=1\ (\text{nghiem boi }2)\\x^2-8x+m=0\quad(1)\\x^2-8x+m=2\quad(2)\end{array}\right..$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. $(*)$

Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^2-8x$ và hai đường thẳng $d_1: y=-m$, $d_2: y=-m+2$ (như hình vẽ).



Khi đó $(*)$ $\Leftrightarrow d_1, d_2$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m>-16 \Leftrightarrow m<16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa.

Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Có $y'=-(12x^3-24x).f'(-x^4+4x^2-6)+12x^5-12x^3-24x$

$=-12x(x^2-2).f'(-x^4+4x^2-6)+12x\left(x^4-x^2-2\right)$

$=-12x(x^2-2).\left(f'(-x^4+4x^2-6)-\left(x^2+1\right)\right)$.

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(-x^4+4x^2-6)-(x^2+1)=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1 \end{array}\right.$.

Ta có $-x^4+4x^2-6=-(x^2-2)^2-2\le -2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $f'(-x^4+4x^2-6)\le f'(-2)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $x^2+1\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1$ vô nghiệm.

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3(x^3+3x)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=3(3x^2+3)f'(x^3+3x).f^2(x^3+3x)$.

Ta thấy $g'(x)=3(3x^2+3)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f^2(x^3+3x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ chính là dấu của $f'(x^3+3x)$

$$f'(x^3+3x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x=-1\\x^3+3x=0\\x^3+3x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\approx-0,32\\x=0\\x=x_2\approx 0,32\end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên của hàm $f(x)$ ta có $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\x>1\end{array}\right.$

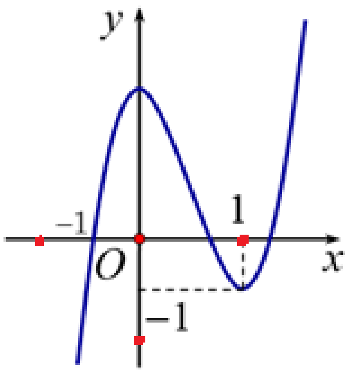
Do đó $f'(x^3+3x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x^3+3x<0\\x^3+3x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1<x<0\\x>x_2\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 60. Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = \left|f\left(|x+1|-1\right)\right|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 11 **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = f\left(|x+1|-1\right)$

Ta có $y' = \dfrac{x+1}{|x+1|} f'\left(|x+1|-1\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x+1|-1=0 \\ |x+1|-1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=-2 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

y' không xác định tại $x=-1$.

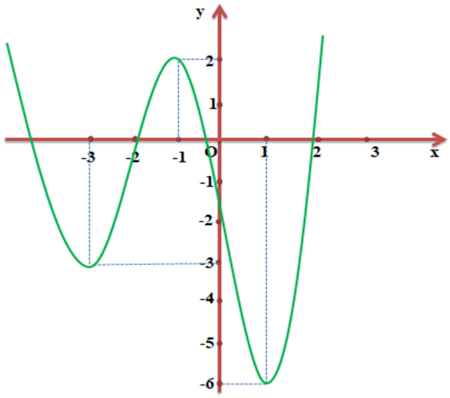
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	||	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$f(0)$	↘	$f(-1)<0$	↗	$f(0)>0$	↘	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT của hàm số $y = f\left(|x+1|-1\right)$ suy ra BBT của hàm số $y = \left|f\left(|x+1|-1\right)\right|$.

Vậy hàm số $y = \left|f\left(|x+1|-1\right)\right|$ có 11 cực trị.

Câu 61. Hình vẽ là đồ thị hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 9.   **B.** 12.   **C.** 18.   **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số có 3 cực trị.

Số cực trị của hàm số $y = f(x-1)+m$ bằng với số cực trị của hàm số $y = f(x-1)$ và bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$.

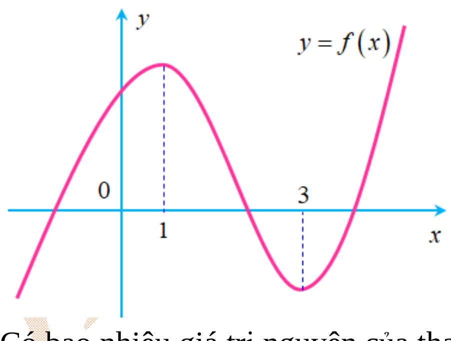
Số cực trị của hàm số $y = |f(x-1)+m|$ bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm đơn của phương trình $f(x-1)+m=0$ (*).

Ta có $f(x-1)+m=0 \Leftrightarrow f(x-1)=-m \Leftrightarrow f(t)=-m$ với $t=x-1$.

Để hàm số $y=|f(x-1)+m|$ có có 5 điểm cực trị thì phương trinh (*) phải có 2 nghiệm đơn phân biệt.

Do đó $-6<-m\le 3$ hoặc $2\le -m \Rightarrow m\in\{3,4,5\} \Rightarrow S=3+4+5=12$.

Câu 62. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x+m\right|\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3.   **B.** 4.   **C.** 5.   **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

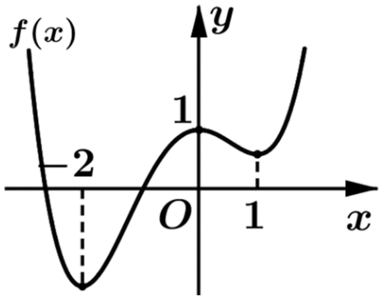
Hàm số $f\left(x\right)$ có 2 **điểm cực trị dương.**

$\longrightarrow f\left(\left|x\right|\right)$ có 5 **điểm cực trị.**

$\longrightarrow f\left(|x+m|\right)$ có 5 **điểm cực trị** với mọi m (vì tịnh tiến sang trái hay sang phải không ảnh hưởng đến **số điểm cực trị** của **hàm số**).

Vậy có vô số giá trị m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(|x+m|\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 63. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f\left(|x+1|-3\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

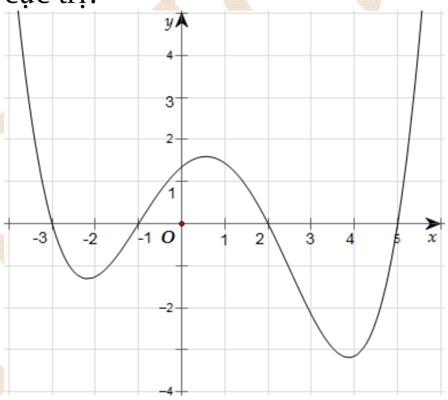
Đồ thị hàm số $y=f\left(|x+1|-3\right)$ được suy từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ bằng cách

• Tịnh tiến sang phải 3 đơn vị;

• Xóa bỏ phần đồ thị phía bên trái trục tung, phần đồ thị phía bên phải trục tung thì lấy đối xứng qua trục tung;

• Cuối cùng tịnh tiến đồ thị sang trái 1 đơn vị.

Câu 64. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g\left(x\right)=f\left(|x|+m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g\left(x\right)=f\left(|x|+m\right)=\begin{cases} f\left(x+m\right)\ , khi\ x\geq 0 \\ f\left(-x+m\right), khi\ x<0 \end{cases}$

Do hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$

Và ta lại có $g(-x) = f(|x| + m) = g(x) \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = g(x)$ đối xứng qua trục Oy.

Hàm số $y = g(x)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị dương, 3 điểm cực trị âm và một điểm cực trị bằng 0 (*)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right.$

Xét trên khoảng $(0; +\infty)$, ta được $g(x) = f(x + m)$

+ Ta có $g'(x) = f'(x + m)$

+ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + m = -3 \\ x + m = -1 \\ x + m = 2 \\ x + m = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m - 3 \\ x = -m - 1 \\ x = -m + 2 \\ x = -m + 5 \end{array}\right.$

+ Nhận thấy $-m - 3 < -m - 1 < -m + 2 < -m + 5$

Theo yêu cầu (*) bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -m - 1 > 0 \\ -m - 3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in \{-3; -2\} \end{cases}$

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = |f(1 - 3x) + 1|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = f(1 - 3x) + 1$.

$\Rightarrow g'(x) = -3.f(1 - 3x)$.

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f(1-3x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-3x=-1\\1-3x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{3}\\x=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Suy ra bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$
$\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	3	$\searrow 0 \nearrow$	5	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Biết đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)-m|$ có 5 điểm cực trị. Khi đó số các giá trị nguyên của tham số của m là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Do hàm $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nên $y=f(x)-m$ có hai điểm cực trị.

Để thoả mãn yêu cầu bài thì số giao điểm của đồ thị $y=f(x)-m$ với trục hoành phải là 3 hay số giao điểm của $y=f(x)$ và $y=m$ phải là 3. $g(x)=f(1-3x)\Rightarrow g'(x)=-3.f'(1-3x)$

Suy ra $4<m<11$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{4,5,6,7,8,9,10\}$ nên chọn đáp án **B.**

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m\in(4;11)$. **B.** $m\in\left(2;\dfrac{11}{2}\right)$. **C.** $m=3$. **D.** $m\in\left[2;\dfrac{11}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Để đồ thị hàm số $y=\left|f(x)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=2m$ tại $5-2=3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow 4<2m<11 \Leftrightarrow 2<m<\dfrac{11}{2}$.

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(\left|2x+1\right|+3\right)$ là

A. 1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

+/ Ta có: Số điểm cực trị của hàm $y=f\left(\left|2x+1\right|+3\right)$ bằng $2\alpha+1$, với α bằng số điểm cực trị lớn hơn $-\dfrac{1}{2}$ của hàm $y=f(2x+1+3)=f(2x+4)$.

+/ Hàm $y=f(2x+4)$ có 2 điểm cực trị là: $\left[\begin{array}{l}2x+4=-1\\2x+4=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{5}{2}\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Vậy: Số điểm cực trị của hàm $y=f\left(\left|2x+1\right|+3\right)$ bằng $2.0+1=1 \Rightarrow$ **Chọn A**

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=f(|2x-3|-2)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

$$g'(x)=(|2x-3|-2)'.f'(|2x-3|-2)=\frac{2(2x-3)}{|2x-3|}.f'(|2x-3|-2)$$

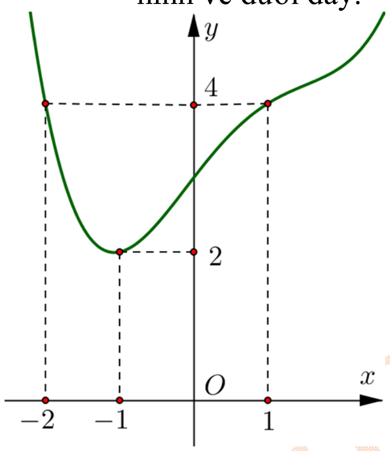
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |2x-3|-2=0 \\ |2x-3|-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5/2 \\ x=1/2 \\ x=7/2 \\ x=-1/2 \end{array}\right.$$

BBT:

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$3/2$		$5/2$		$7/2$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	||	+	0	-	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 70. Cho hàm số $y=f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f\,(a\neq 0)$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x-m$. Hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị.

A. 5. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

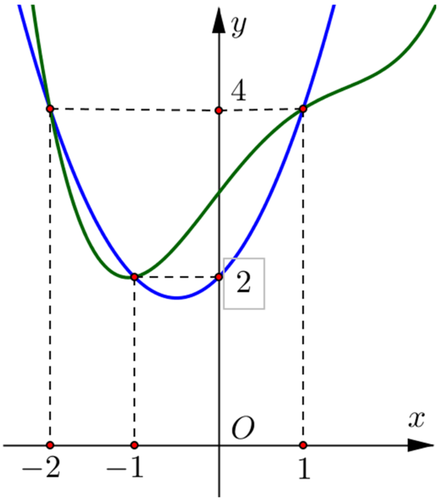
Từ đồ thị $f'(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e$ suy ra $a>0$.

Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2-x-2$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=+\infty$.

Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2-x-2$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x^2+x+2$ (1).

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của hai đồ thị $y=f'(x)$ và đồ thị hs $y=x^2+x+2$.



$g'(x) = f'(x) - x^2 - x - 2$ là đa thức bậc 4 với hệ số lớn nhất $a > 0$.

Dựa đồ thị ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} g'(x) = c < 0$ (với c là hằng số) và $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty$. Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $x_0 > 1$.

Dựa vào đồ thị $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Mà $g'(x) = f'(x) - x^2 - x - 2 = 0$ là phương trình bậc 4 có tối đa 4 nghiệm.

Kết luận: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = x_0 > 1 \end{array}\right.$.

Cũng dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - m$ có 4 cực trị.

Phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - m = 0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt khác với các nghiệm $g'(x) = 0$.

Vậy hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$ có tối đa 9 điểm cực trị.

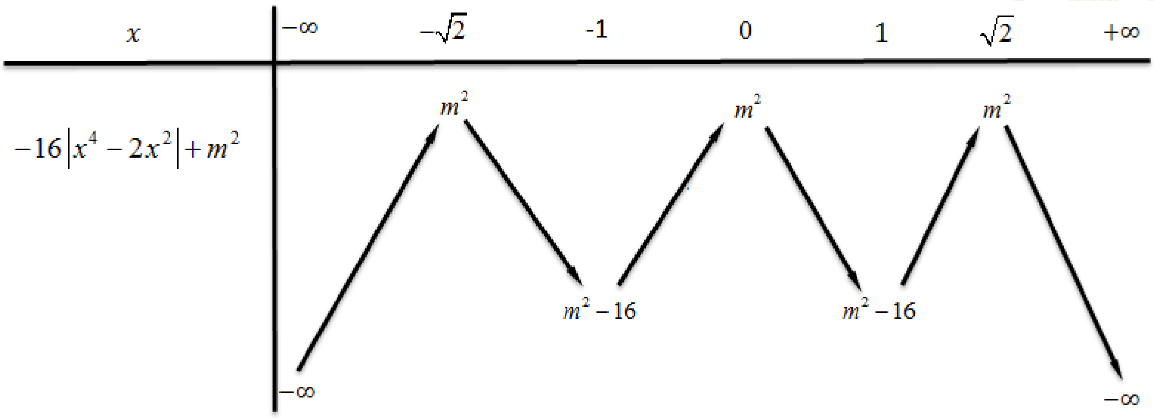
Câu 71. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'\left(x\right)=(x-8)^3.(x^2-8x+15).(x+2)^4$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(-16\left|x^4-2x^2\right|+m^2\right)$ có nhiều cực trị nhất?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

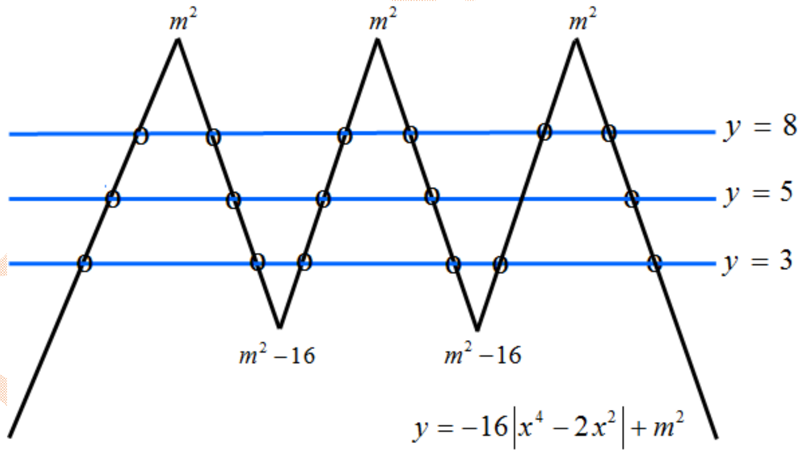
Chọn A

Xét hàm số $y=-16\left|x^4-2x^2\right|+m^2$ có bảng biến thiên có dạng:



Hàm số $f'\left(x\right)=(x-8)^3.(x^2-8x+15).(x+2)^4$ có 3 điểm cực trị là $x=3$, $x=5$; $x=8$.

Số giao điểm tối đa của hàm số $y=-16\left|x^4-2x^2\right|+m^2$ với các đường thẳng $y=3$, $y=5$; $y=8$ thể hiện ở hình vẽ sau:

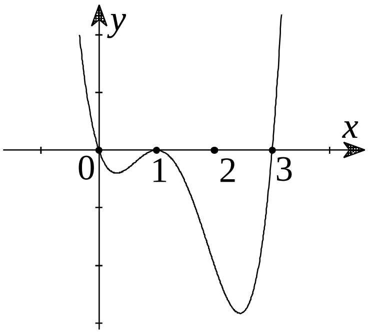


YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2>8 \\ m^2-16<3 \end{cases} \Leftrightarrow 8<m^2<19 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}<\left|m\right|<\sqrt{19}\approx 4{,}36$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-4;-3;3;4\right\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên $m\in\mathbb{Z}$.

Câu 72. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m \in (-\infty; 0]$. **B.** $m \in (3; +\infty)$.

C. $m \in [0; 3)$. **D.** $m \in (0; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y = f(x^2 + m)$ là hàm chẵn nên hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi hàm số này có đúng 1 điểm cực trị dương.

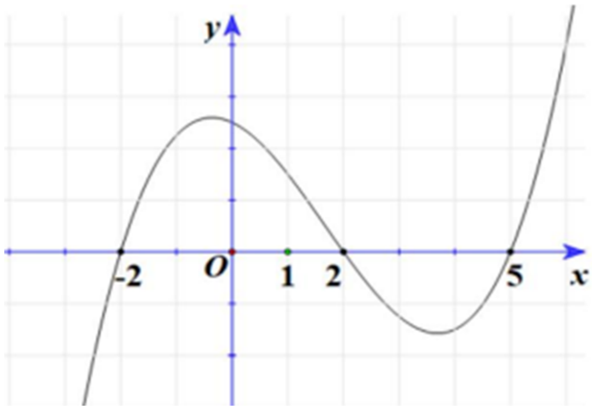
$y = f(x^2 + m) \Rightarrow y' = 2xf'(x^2 + m)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 1 - m \\ x^2 = 3 - m \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ là $x = 1$ nên các nghiệm của pt $x^2 = 1 - m$ (nếu có) không làm $f'(x^2 + m)$ đổi dấu khi x đi qua, do đó các điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + m)$ là các điểm nghiệm của hệ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 3 - m \end{array}\right.$

Hệ trên có duy nhất nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} -m \le 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 3$.

Câu 73. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x^2+x-2\right|-m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=5 \end{array}\right.$$

$$y'=\frac{(2x+1)\left(x^2+x-2\right)}{\left|x^2+x-2\right|}f'\left(\left|x^2+x-2\right|-m\right)$$

Điểm đặc biệt: $y'=0$ hoặc y' không xác định $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=-2 \\ f'\left(\left|x^2+x-2\right|-m\right)=0 \ \ (1) \end{array}\right.$

Ta thấy $x=-\frac{1}{2}; x=1; x=-2$ là các nghiệm đơn của y'.

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^2+x-2\right|-m=-2 \\ \left|x^2+x-2\right|-m=2 \\ \left|x^2+x-2\right|-m=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^2+x-2\right|=m-2 \\ \left|x^2+x-2\right|=m+2 \\ \left|x^2+x-2\right|=m+5 \end{array}\right.$$

Ta có BBT của hàm số $t=\left|x^2+x-2\right|$ như sau:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\left(\left\|x^2+x-2\right\|\right)'$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$\left\|x^2+x-2\right\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số có đúng 3 điểm cực trị thì phương trình (1) không có nghiệm đơn.
Dựa vào BBT trên, phương trình (1) không có nghiệm đơn $\Leftrightarrow m+5\le 0 \;\Leftrightarrow m\le -5$
Vì $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[-10;10]\Rightarrow m\in\{-10;-9;......-5\}$. Vậy tập S có 6 phần tử.

Câu 74. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=\dfrac{f\left(-x^2+2x\right)+2021}{f\left(-x^2+2x\right)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $f\left(-x^2+2x\right)\ne 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+2x\ne 0 \\ -x^2+2x\ne a \quad (a<-1) \\ -x^2+2x\ne b \quad (b>1) \quad (\forall x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ x\ne 2 \\ x\ne 1+\sqrt{1-a} \\ x\ne 1-\sqrt{1-a} \end{cases}$.

Ta có $y=\dfrac{f\left(-x^2+2x\right)+2021}{f\left(-x^2+2x\right)}=1+\dfrac{2021}{f\left(-x^2+2x\right)}\Rightarrow y'=\dfrac{-2021(-2x+2)f'\left(-x^2+2x\right)}{f^2\left(-x^2+2x\right)}$

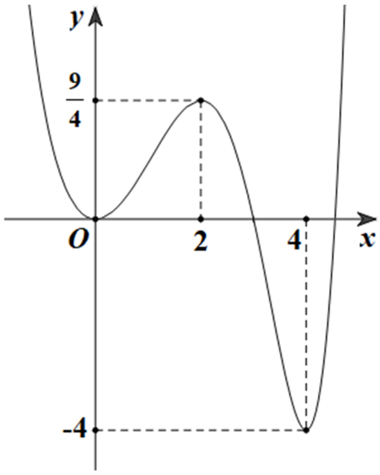
Do đó $y'=0\Leftrightarrow \dfrac{-2021(-2x+2)f'\left(-x^2+2x\right)}{f^2\left(-x^2+2x\right)}=0$

$\Leftrightarrow -2021(-2x+2)f'\left(-x^2+2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ -x^2+2x=-1 \\ -x^2+2x=0 \\ -x^2+2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{2} \\ x=0; x=2\notin TXĐ \\ (x-1)^2=0 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số có 3 cực trị.

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(5-2x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc khoảng $(-9;9)$ thỏa mãn $2m\in\mathbb{Z}$ và hàm số $y=\left|2f\left(4x^3+1\right)+m-\frac{1}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 24. **B.** 25. **C.** 26. **D.** 27.

Lời giải

Chọn C

• Đặt $g(x)=f(5-2x)$, khi đó đồ thị đã cho là của $g(x)$.

Có $f(x)=g\left(\frac{5-x}{2}\right)\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}g'\left(\frac{5-x}{2}\right)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{5-x}{2}=0\\ \frac{5-x}{2}=2\\ \frac{5-x}{2}=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\ x=1\\ x=-3\end{array}\right..$$

• Đặt $h(x)=2f\left(4x^3+1\right)+m-\frac{1}{2}$, có $h'(x)=24x^2f'\left(4x^3+1\right)$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\ 4x^3+1=5\\ 4x^3+1=1\\ 4x^3+1=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1.\\ x=1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

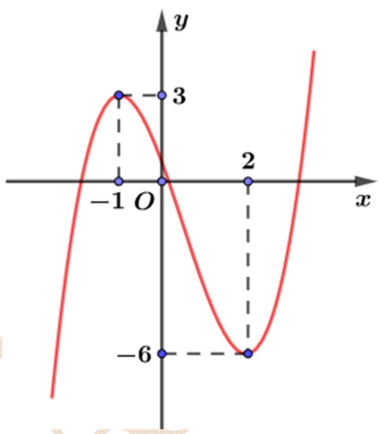
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-\dfrac{17}{2}$	$\nearrow$	$m+4$	$\searrow$	$m-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy $h(x)$ có 3 điểm cực trị, do đó hàm số $y=\left|2f\left(4x^3+1\right)+m-\dfrac{1}{2}\right|=\left|h(x)\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $h(x)=0$ có đúng 2 nghiệm khác các điểm cực trị của $h(x)$. Điều này tương đương với $\left[\begin{array}{l} m+4\le 0 \\ m-\dfrac{17}{2}<0\le m-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\le -4 \\ \dfrac{1}{2}\le m<\dfrac{17}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2m\le -8 \\ 1\le 2m<17 \end{array}\right.$.

Mà $2m\in\mathbb{Z}$, $2m\in(-18;18)$ nên $2m\in\{-17;-16;...;-8\}\cup\{1;2;...;16\}$.

Vậy có 26 giá trị m thỏa mãn.

Câu 76. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|f^2(x)-4f(x)-m\right|\right)$ có 17 điểm cực trị là

A. 1652. **B.** 1653. **C.** 1654. **D.** 1651.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$g'(x)=\frac{f'(x)\left(2f(x)-4\right)\left(f^2(x)-4f(x)-m\right)}{\left|f^2(x)-4f(x)-m\right|}.f'\left(\left|f^2(x)-4f(x)-m\right|\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0\ (1) \\ 2f(x)-4=0\Leftrightarrow f(x)=2\ \ (2) \\ f^2(x)-4f(x)-m=0\Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)=m\ \ (3) \\ \left|f^2(x)-4f(x)-m\right|=-1\ (vo\,ly) \\ \left|f^2(x)-4f(x)-m\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f^2(x)-4f(x)-m=2 \\ f^2(x)-4f(x)-m=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f^2(x)-4f(x)=m+2\ (4) \\ f^2(x)-4f(x)=m-2\ (5)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Dễ thấy (1) có 2 nghiệm đơn (vì có 2 cực trị) và (2) có 3 nghiệm đơn

Vậy tổng số nghiệm đơn của phương trình $(3);(4);(5)$ là 12 thì thỏa mãn

Đặt $u=u(x)=f^2(x)-4f(x)\Rightarrow u'=2f'(x)\left(f(x)-2\right)\Rightarrow u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\in\{-1;2\} \\ x\in\{a;b;c\}\end{array}\right.$.

Các nghiệm trên được sắp thứ tự từ nhỏ đến lớn như sau: $a<-1<b<2<c$.

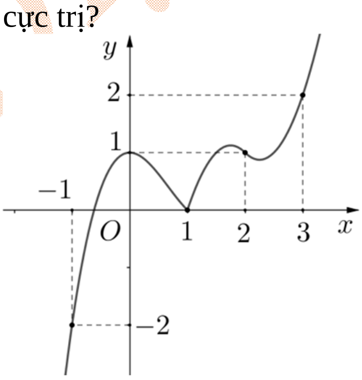
Bảng biến thiên của hàm số $u=f^2(x)-4f(x)$.

x	$-\infty$		a		-1		b		2		c		$+\infty$
u'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$+\infty$		-4		-3		-4		60		-4		$+\infty$

Vậy số giao điểm của các đường thẳng $y=m-2;y=m;y=m+2$ với đồ thị $u(x)$ là 12 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le m-2<60 \\ -3\le m+2<60\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m<58\Rightarrow m\in\{-1;0;1;...;57\}\Rightarrow S=1652.$$

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có $f(-3)>8,\ f(4)>\dfrac{9}{2},\ \ f(2)<\dfrac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



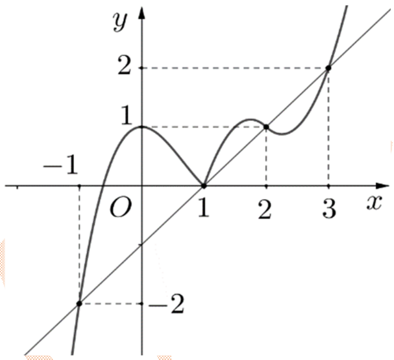
A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$. Ta xác định số điểm cực trị của hàm số $y=|g(x)|$

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(x-1)$



Xét đường thẳng $(d): y=x-1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng (d) có 4 điểm chung có hoành độ lần lượt $-1;1;2;3$ nhưng chỉ các điểm $-1;2;3$ là cực trị hàm số (1).

$g(x)=2f(x)-(x-1)^2$ vì khi x đi qua điểm 1 thì $g'(x)$ không đổi dấu

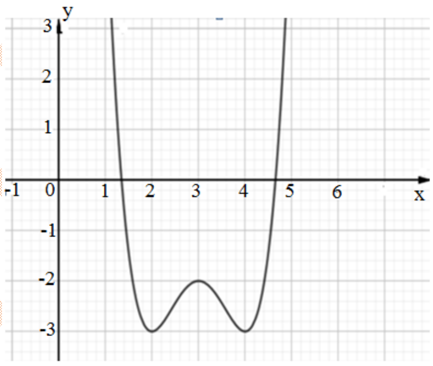
Bảng biến thiên của hàm số *g(x)*

x	$-\infty$	-3	-1		1		2		3		4	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	$-$	0	+		
$g(x)$	↘	$g(-3)$	$g(-1)$	↗			$g(2)$	↘	$g(3)$	↗	$g(4)$	↗

Từ giả thiết ta thấy $g(2)<0$; $g(4)>0, g(-3)>0$ nên phương trình $g(x)=0$ có đúng 2 nghiệm (2)

Từ (1) và (2) suy ra đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 78. Cho hàm số $g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số $f(x)=g(g(x))$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.



A. 9 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \\ x=4. \end{array}\right.$$

Các phương trình $g(x)=2, g(x)=3$ và $g(x)=4$ mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt nằm ngoài khoảng $[2;4]$

$$f'(x)=\left[g\left(g(x)\right)\right]'=0 \Leftrightarrow g'(x).g'\left(g(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g'(x)=0 \\ g'\left(g(x)\right)=0 \end{array}\right.$$

Suy ra: $f'(x)=0$ có tất cả 9 nghiệm đơn nên hàm số $y=f(x)$ có tất cả 9 cực trị.

Mặt khác ta có $f(x)$ là một đa thức bậc 16 có hệ số $a>0$ nên hàm số có đúng **5** điểm cực tiểu.

Vậy số cực tiểu là **5**