CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. Một số phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.

I. Các phương pháp phân tích cơ bản

1.1. Phương pháp đặt nhân tử chung

+ Tìm nhân tử chung là những đơn thức, đa thức có mặt trong tất cả các hạng tử.

+ Phân tích mỗi hạng tử thành tích của nhân tử chung và một nhân tử khác.

+ Viết nhân tử chung ra ngoài dấu ngoặc, viết các nhân tử còn lại của mỗi hạng tử vào trong dấu ngoặc (kể cả dấu của chúng).

Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

$$28a^2b^2-21ab^2+14a^2b=7ab\left(4ab-3b+2a\right)$$

$$2x\left(y-z\right)+5y\left(z-y\right)=2\left(y-z\right)-5y\left(y-z\right)=\left(y-z\right)\left(2-5y\right)$$

$$x^m+x^{m+3}=x^m\left(x^3+1\right)=x^m\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$$

1.2. Phương pháp dùng hằng đẳng thức

+ Dùng các hằng đẳng thức đáng nhớ để phân tích đa thức thành nhân tử.

+ Cần chú ý đến việc vận dụng hằng đẳng thức.

Ví dụ. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

$$9x^2-4=\left(3x\right)^2-2^2=\left(3x-2\right)\left(3x+2\right)$$

$$8-27a^3b^6=2^3-\left(3ab^2\right)^3=\left(2-3ab^2\right)\left(4+6ab^2+9a^2b^4\right)$$

$$25x^4-10x^2y+y^2=\left(5x^2-y\right)^2$$

1.3. Phương pháp nhóm nhiều hạng tử và phối hợp các phương pháp

+ Kết hợp các hạng tử thích hợp thành từng nhóm.

+ Áp dụng liên tiếp các phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức.

Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$2x^3-3x^2+2x-3=\left(2x^3+2x\right)-\left(3x^2+3\right)=2x\left(x^2+1\right)-3\left(x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)\left(2x-3\right)$$

$$x^2-2xy+y^2-16=\left(x-y\right)^2-4^2=\left(x-y-4\right)\left(x-y+4\right)$$

Ví dụ 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$3x^3y-6x^2y-3xy^3-6axy^2-3a^2xy+3xy=3xy\left(x^2-2y-y^2-2ay-a^2+1\right)$$
$$=3xy\left[\left(x^2-2x+1\right)-\left(y^2+2ay+a^2\right)\right]=3xy\left[\left(x-1\right)^2-\left(y+a\right)^2\right]$$
$$=3xy\left[\left(x-1\right)-\left(y+a\right)\right]\left[\left(x-1\right)+\left(y+a\right)\right]=3xy\left(x-1-y-a\right)\left(x-1+y+a\right)$$

1.5. Một số ví dụ minh họa

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $5x^2y^2+20x^2y-35xy^2$ b) $40a^3b^3c^3x+12a^3b^4c^2-16a^4b^5cx$

c) $3x\left(x-2y\right)+6y\left(2y-x\right)$ d) $\left(b-2c\right)\left(a-b\right)-\left(a+b\right)\left(2c-b\right)$

• ***Định hướng tư duy.*** *Quan sát các đa thức ta nhận thấy có nhân tử chung trong đa thức thứ nhất và thứ hai. Với hai đa thức còn lại thì xuất hiện các thừa số đối nhau, như vậy để có nhân tử chung ta có thể đổi dấu một hạng tử. Do đó để phân tích các đa thức trên thành nhân tử ta thực hiện các bước như sau.*

+ Bước 1. Tìm ước chung lớn nhất của các hệ số.

+ Bước 2. Tìm các thừa số chung là đơn thức, đa thức trong mỗi hạng tử của đa thức.

+ Bước 3. Tiến hành đưa nhân tử chung bao gồm ước chung lớn nhất của hệ số và thừa số chung ra ngoài dấu ngoặc.

Lời giải

a) $5x^2y^2+20x^2y-35xy^2=5xy\left(xy+4x-7y\right)$

b) $40a^3b^3c^3x+12a^3b^4c^2-16a^4b^5cx=4a^3b^3c\left(10c^2x+3bc-4ab^2x\right)$

c) $3x\left(x-2y\right)+6y\left(2y-x\right)=3x^2-6xy+12y^2-6xy=3x^2-12xy+12y^2=3\left(x-2y\right)^2$

d) $\left(b-2c\right)\left(a-b\right)-\left(a+b\right)\left(2c-b\right)=\left(b-2c\right)\left(a-b+a+b\right)=2a\left(b-2c\right)$

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

a) $a^2y^2+b^2x^2-2abxy$ b) $100-\left(3x-y\right)^2$

c) $27x^3-a^3b^3$ d) $\left(a+b\right)^3-\left(a-b\right)^3$

e) $\left(7x-4\right)^2-\left(2x+1\right)^2$ f) $\left(x-y+4\right)^2-\left(2x+3y-1\right)^2$

g) $x^2-2xy+y^2-4$ h) $x^2-y^2-2yz-z^2$

i) $3a^2-6ab+3b^2-12c^2$

j) $x^2-2xy+y^2-m^2+2mn-n^2$

k) $a^2-10a+25-y^2-4yz-4z^2$

l) $x^2+3cd(2-3cd)-10xy-1+25y^2$

m) $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$

n) $(4x^2-3x-18)^2-(4x^2+3x)^2$

- ***Định hướng tư duy.*** *Quan sát các đa thức ta nhận thấy có sự xuất hiện của các hằng thức đáng nhớ. Một số đa thức ta thấy được trực tiếp các hằng đẳng thức, Một số đa thức còn lại khi nhóm các hạng tử ta thấy có các hằng đẳng thức đáng nhớ. Do đó ta sẽ sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để phân tích đa thức thành nhân tử.*

Lời giải

a) $a^2y^2+b^2x^2-2abxy=(ay)^2-2(ay)(bx)+(bx)^2=(ay\ -\ bx)^2$

b) $100-(3x-y)^2=10^2-(3x-y)^2=(10-3x+y)(10+3x-y)$

c) $27x^3-a^3b^3=(3x)^3-(ab)^3=(3x-ab)(9x^2+3abx+a^2b^2)$

d) $(a+b)^3-(a-b)^3=(a+b-a+b)\left[(a+b)^2+(a+b)(a-b)+(a-b)^2\right]$

$=2b(a^2+2ab+b^2+a^2-b^2+a^2-2ab+b^2)=2b(3a^2+b^2+4ab)=2b\left[(2a+b)^2-a^2\right]$

$=2b(2a+b-a)(2a+b+a)=2b(a+b)(3a+b)$

e) $(7x-4)^2-(2x+1)^2=(7x-4-2x-1)(7x-4+2x+1)=15(x-1)(3x-1)$

f) $(x-y+4)^2-(2x+3y-1)^2=(x-y+4)(2x+3y-1)$

g) $x^2-2xy+y^2-4=(x-y)^2-4=(x-y-2)(x-y+2)$

h) $x^2-y^2-2yz-z^2=x^2-(y+z)^2=(x-y-z)(x+y+z)$

i) $3a^2-6ab+b^2-12c^2=3\left[(a-b)^2-4c^2\right]=3(a-b-2c)(a-b+2c)$

j) $x^2-2xy+y^2-m^2+2mn-n^2=(x-y)^2-(m-n)^2=(x-y-m+n)(x-y+m-n)$

k) $a^2-10a+25-y^2-4yz-4z^2=(a-5)^2-(y+2z)^2=(a-5-y-2z)(a-5+y-2z)$

l) $x^2+3cd(2-3cd)-10xy-1+25y^2=(x^2-10xy+25y^2)-(9c^2d^2-6cd+1)$

$=(x-5y)^2-(3cd-1)^2=(x-5y-3cd+1)(x-5y+3cd-1)$

m) $4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2=\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)$

$=\left[a^2-\left(b-c\right)^2\right]\left[\left(b+c\right)^2-a^2\right]=\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(b+c+a\right)$

n) $\left(4x^2-3x-18\right)^2-\left(4x^2+3x\right)^2=\left(4x^2-3x-18-4x^2-3x\right)\left(4x^2-3x-18+4x^2+3x\right)$

$=\left(-6x-18\right)\left(8x^2-18\right)=-12\left(x+3\right)\left(4x^2-9\right)=-12\left(x+3\right)\left(2x-3\right)\left(2x+3\right)$

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2-y^2-2x-2y$	b) $3x^2-3y^2-2\left(x-y\right)^2$
c) $x^2\left(x+2y\right)-x-2y$	d) $x^2-2x-4y^2-4y$
e) $x^3-4x^2-9x+36$	f) x^3+2x^2+2x+1
g) x^4+2x^3-4x-4	h) $x^3-4x^2+12x-27$
i) x^4-2x^3+2x-1	j) $a^6-a^4+2a^3+2a^2$
k) $x^4+x^3+2x^2+x+1$	l) $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$
m) $x^2y+xy^2+x^2z+y^2z+2xyz$	n) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

- ***Định hướng tư duy.*** *Quan sát các đa thức ta nhận thấy các đa thức không có sự xuất hiện của nhân tử chung và ta cũng không thể sử dụng ngay hằng thức đáng nhớ để phân tích. Tuy nhiên nếu xét theo nhóm ta thấy có nhân tử chung hoặc có các hằng đẳng thức đáng nhớ. Do vậy ta sẽ sử dụng phương pháp nhóm hạng tử để phân tích các đ thức trên.*

Lời giải

a) $x^2-y^2-2x-2y=\left(x-y\right)\left(x+y\right)-2\left(x+y\right)=\left(x+y\right)\left(x-y-2\right)$

b) $3x^2-3y^2-2\left(x-y\right)^2=3\left(x-y\right)\left(x+y\right)-2\left(x-y\right)^2$

$=\left(x-y\right)\left(3x+3y-2x+2y\right)=\left(x-y\right)\left(x+5y\right)$

c) $x^2\left(x+2y\right)-x-2y=\left(x+2y\right)\left(x^2-1\right)=\left(x+2y\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)$

d) $x^2-2x-4y^2-4y=\left(x^2-4y^2\right)-\left(2x+4y\right)$

$=\left(x-2y\right)\left(x+2y\right)-2\left(x+2y\right)=\left(x+2y\right)\left(x-2y-2\right)$

e) $x^3-4x^2-9x+36=\left(x^3-9x\right)-\left(4x^2-36\right)=x\left(x^2-9\right)-4\left(x^2-9\right)=\left(x-4\right)\left(x-3\right)\left(x+3\right)$

f) $x^3+2x^2+2x+1=\left(x^3+1\right)+\left(2x^2+2x\right)=\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)+2x\left(x+1\right)$

$=(x+1)(x^2-x+1+x+1)=(x+1)(x^2+2)$

g) $x^4+2x^3-4x-4=(x^4-4)+(2x^3-4x)=(x^2-2)(x^2+2)+2x(x^2-2)$

$=(x^2-2)(x^2+2x+2)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2x+2)$

h) $x^3-4x^2+12x-27=(x^3-27)-(4x^2-12x)=(x-3)(x^2+3x+9)-4x(x-3)$

$=(x-3)(x^2+3x+9-4x)=(x-3)(x^2-x+9)$

i) $x^4-2x^3+2x-1=(x^4-1)-(2x^3-2x)=(x^2-1)(x^2+1)-2x(x^2-1)$

$=(x^2-1)(x^2+1-2x)=(x-1)(x+1)(x-1)^2=(x+1)(x-1)^3$

j) $a^6-a^4+2a^3+2a^2=a^4(a-1)(a+1)+2a^2(a+1)=a^2(a+1)(a^3-a^2+2)$

$=a^2(a+1)(a^3+a^2-2a^2+2)=a^2(a+1)\left[a^2(a+1)-2(a+1)(a-1)\right]=a^2(a+1)^2(a^2-2a+2)$

k)

$x^4+x^3+2x^2+x+1=(x^4+2x^2+1)+(x^3+x)=(x^2+1)^2+x(x^2+1)=(x^2+1)(x^2+x+1)$

l) $x^4+2x^3+2x^2+2x+1=(x^4+2x^2+1)+(2x^3+2x)$

$=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)=(x^2+1)(x^2+2x+1)=(x^2+1)(x+1)^2$

m) $x^2y+xy^2+x^2z+y^2z+2xyz=(x^2y+xy^2)+(x^2z+xyz)+(y^2z+xyz)$

$=xy(x+y)+xz(x+y)+yz(x+y)=(x+y)(xy+yz+zx)$

n) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^4+x^2+1)$

Một số bài tập tự luyện

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x^2-6x$ b) $9x^4y^3+3x^2y^4$ c) x^3-2x^2+5x

d) $3x(x-1)+5(x-1)$ e) $2x^2(x+1)+4(x+1)$ f) $-3x-6xy+9xz$

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $2x^2y-4xy^2+6xy$ b) $4x^3y^2-8x^2y^3+2x^4y$

c) $9x^2y^3-3x^4y^2-6x^3y^2+18xy^4$ d) $7x^2y^2-21xy^2z+7xyz-14xy$

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) x^3-2x^2+2x-1 b) $x^2y+xy+x+1$ c) $ax+by+ay+bx$

d) $x^2-(a+b)x+ab$ e) x^2y+xy^2-x-y f) $ax^2+ay-bx^2-by$

Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $ax-2x-a^2+2a$ b) $x^2+x-ax-a$ c) $2x^2+4ax+x+2a$

d) $2xy-ax+x^2-2ay$ e) x^3+ax^2+x+a f) $x^2y^2+y^3+zx^2+yz$

Bài 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2-2x-4y^2-4y$ b) x^4+2x^3-4x-4 c) $x^3+2x^2y-x-2y$

d) $3x^2-3y^2-2(x-y)^2$ e) $x^3-4x^2-9x+36$ f) $x^2-y^2-2x-2y$

Bài 6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(x-3)(x-1)-3(x-3)$ b) $(x-1)(2x+1)+3(x-1)(x+2)(2x+1)$

c) $6x+3-(2x-5)(2x+1)$ d) $(x-5)^2+(x+5)(x-5)-(5-x)(2x+1)$

e) $(3x-2)(4x-3)-(2-3x)(x-1)-2(3x-2)(x+1)$

Bài 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(a-b)(a+2b)-(b-a)(2a-b)-(a-b)(a+3b)$ b) $5xy^3-2xyz-15y^2+6z$

c) $(x+y)(2x-y)+(2x-y)(3x-y)-(y-2x)$ d)

$ab^3c^2-a^2b^2c^2+ab^2c^3-a^2bc^3$

Bài 8. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x^2-12x+9$ b) $4x^2+4x+1$ c) $1+12x+36x^2$

d) $9x^2-24xy+16y^2$ e) $\frac{x^2}{4}+2xy+4y^2$ f) $-x^2+10x-25$

g) $-16a^4b^6-24a^5b^5-9a^6b^4$ h) $25x^2-20xy+4y^2$ i) $25x^4-10x^2y+y^2$

Bài 9. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(3x-1)^2-16$ b) $(5x-4)^2-49x^2$ c) $(2x+5)^2-(x-9)^2$

d) $(3x+1)^2-4(x-2)^2$ e) $9(2x+3)^2-4(x+1)^2$ f)

$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$

g) $(ax+by)^2-(ay+bx)^2$ h) $(a^2+b^2-5)^2-4(ab+2)^2$ i) $(4x^2-3x-18)^2-(4x^2+3x)^2$

k) $9(x+y-1)^2-4(2x+3y+1)^2$ l) $-4x^2+12xy-9y^2+25$

m) $x^2-2xy+y^2-4m^2+4mn-n^2$

Bài 10. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $8x^3-64$ b) $1+8x^6y^3$ c) $125x^3+1$

d) $8x^3-27$ e) $27x^3+\frac{y^3}{8}$ f) $125x^3+27y^3$

Bài 11. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3+6x^2+12x+8$ b) x^3-3x^2+3x-1 c) $1-9x+27x^2-27x^3$

d) $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$ e) $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

Bài 12. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2-4x^2y^2+y^2+2xy$ b) x^6-y^6

c) $25-a^2+2ab-b^2$ d) $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-4c^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x^2-6x=2x(2x-3)$

b) $9x^4y^3+3x^2y^4=3x^2y^3(3x^2+y)$

c) $x^3-2x^2+5x=x(x^2-2x+5)$

d) $3x(x-1)+5(x-1)=(x-1)(3x+5)$

e) $2x^2(x+1)+4(x+1)=2(x+1)(x^2+2)$

f) $-3x-6xy+9xz=-3x(1+2y+3z)$

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $2x^2y-4xy^2+6xy=2xy(x-2y+3)$

b) $4x^3y^2 - 8x^2y^3 + 2x^4y = 2x^2y\left(xy - 4y^2 + x^2\right)$

c) $9x^2y^3 - 3x^4y^2 - 6x^3y^2 + 18xy^4 = 3xy^2\left(3xy - x^3 - 2x^2 + 6y^2\right)$

d) $7x^2y^2 - 21xy^2z + 7xyz - 14xy = 4xy\left(xy - 3yz + z - 2\right)$

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = \left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right) - 2x\left(x-1\right) = \left(x-1\right)\left(x^2-x+1\right)$

b) $x^2y + xy + x + 1 = xy\left(x+1\right) + x + 1 = \left(x+1\right)\left(xy+1\right)$

c) $ax + by + ay + bx = \left(a+b\right)\left(x+y\right)$

d) $x^2 - \left(a+b\right)x + ab = \left(x-a\right)\left(x-b\right)$

e) $x^2y + xy^2 - x - y = xy\left(x+y\right) - \left(x+y\right) = \left(xy-1\right)\left(x+y\right)$

f) $ax^2 + ay - bx^2 - by = a\left(x^2+y\right) - b\left(x^2+y\right) = \left(a-b\right)\left(x^2+y\right)$

Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $ax - 2x - a^2 + 2a = x\left(a-2\right) - a\left(a-2\right) = \left(x-a\right)\left(a-2\right)$

b) $x^2 + x - ax - a = x\left(x+1\right) - a\left(x+1\right) = \left(x+1\right)\left(x-a\right)$

c) $2x^2 + 4ax + x + 2a = 2x\left(x+2a\right) + \left(x+2a\right) = \left(x+2a\right)\left(2x+1\right)$

d) $2xy - ax + x^2 - 2ay = x\left(2y+x\right) - a\left(2y+x\right) = \left(x-a\right)\left(x+2y\right)$

e) $x^3 + ax^2 + x + a = x\left(x^2+1\right) + a\left(x^2+1\right) = \left(x^2+1\right)\left(x+a\right)$

f) $x^2y^2 + y^3 + zx^2 + yz = y^2\left(x^2+y\right) + z\left(x^2+y\right) = \left(x^2+y\right)\left(y^2+z\right)$

Bài 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y = \left(x+2y\right)\left(x-2y\right) - 2\left(x+2y\right) = \left(x+2y\right)\left(x-2y-2\right)$

b) $x^4 + 2x^3 - 4x - 4 = \left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right) + 2x\left(x^2-2\right) = \left(x^2-2\right)\left(x^2+2x+2\right)$

c) $x^3 + 2x^2y - x - 2y = x\left(x-1\right)\left(x+1\right) + 2y\left(x-1\right)\left(x+1\right) = \left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2y\right)$

d) $3x^2 - 3y^2 - 2\left(x-y\right)^2 = 3\left(x-y\right)\left(x+y\right) - 2\left(x-y\right)^2 = \left(x-y\right)\left(x+5y\right)$

e) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = x^2\left(x-4\right) - 9\left(x-4\right) = \left(x-4\right)\left(x-3\right)\left(x+3\right)$

f) $x^2 - y^2 - 2x - 2y = \left(x-y\right)\left(x+y\right) - 2\left(x+y\right) = \left(x+y\right)\left(x-y-2\right)$

Bài 6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(x-3)(x-1)-3(x-3)=(x-3)(x-4)$

b) $(x-1)(2x+1)+3(x-1)(x+2)(2x+1)=(x-1)(2x+1)(3x+7)$

c) $6x+3-(2x-5)(2x+1)=(2x+1)(7-2x)$

d) $(x-5)^2+(x+5)(x-5)-(5-x)(2x+1)=(x-5)(4x-9)$

e) $(3x-2)(4x-3)-(2-3x)(x-1)-2(3x-2)(x+1)=3(3x-2)(x-2)$

Bài 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(a-b)(a+2b)-(b-a)(2a-b)-(a-b)(a+3b)=2(a-b)^2$

b) $5xy^3-2xyz-15y^2+6z=5y^2(xy-3)-2z(xy-3)=(xy-3)(5y^2-2z)$

c) $(x+y)(2x-y)+(2x-y)(3x-y)-(y-2x)=(2x-y)(4x+1)$

d) $ab^3c^2-a^2b^2c^2+ab^2c^3-a^2bc^3=abc(b^2c-abc+bc^2-ac^2)=abc^2(b-a)(b-c)$

Bài 8. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$

b) $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$

c) $1+12x+36x^2=(1+6x)^2$

d) $9x^2-24xy+16y^2=(3x-4y)^2$

e) $\dfrac{x^2}{4}+2xy+4y^2=\left(\dfrac{x}{2}+2y\right)^2$

f) $-x^2+10x-25=-(x-5)^2$

g) $-16a^4b^6-24a^5b^5-9a^6b^4=-a^4b^4(3a+4b)^2$

h) $25x^2-20xy+4y^2=(5x-2y)^2$

i) $25x^4-10x^2y+y^2=(5x^2-y)^2$

Bài 9. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(3x-1)^2-16=(3x-1-4)(3x-1+4)=3(3x-5)(x+1)$

b) $(5x-4)^2-49x^2=(5x-4-7x)(5x-4+7x)=-(3x+4)(12x-4)$

c) $(2x+5)^2-(x-9)^2=[(2x+5)+(x-9)][(2x+5)-(x-9)]=(3x-4)(x+14)$

d) $(3x+1)^2-4(x-2)^2=[(3x+1)-2(x-2)][(3x+1)+2(x-2)]=(x+5)(3x-3)$

e) $9(2x+3)^2-4(x+1)^2=[3(2x+3)-2(x+1)][3(2x+3)+2(x+1)]=(4x+7)(8x+11)$

f) $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=\left[2ab-(b^2+c^2-a^2)\right]\left[2bc+(b^2+c^2-a^2)\right]$

$=\left[a^2-(b-c)^2\right]\left[(b+c)^2-a^2\right]=(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+b+c)$

g) $(ax+by)^2-(ay+bx)^2=[(ax+by)-(ay+bx)][(ax+by)+(ay+bx)]$

$=(ax+by-ay-bx)(ax+by+ay+bx)=(a-b)(x-y)(a+b)(x+y)$

h) $(a^2+b^2-5)^2-4(ab+2)^2=\left[a^2+b^2-5-2(ab+2)\right]\left[a^2+b^2-5+2(ab+2)\right]$

$=\left[(a-b)^2-9\right]\left[(a+b)^2-1\right]=(a-b-3)(a-b+3)(a+b-1)(a+b+1)$

$(4x^2-3x-18)^2-(4x^2+3x)^2=-6(x+3)(8x^2-18)=12(x+3)(3-2x)(2x+3)$

l) $-4x^2+12xy-9y^2+25=25-(2x-3y)^2=(5-2x+3y)(5+2x-3y)$

Bài 10. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $8x^3-64=(2x-4)(4x^2+8x+16)$

b) $1+8x^6y^3=(1+2x^2y)(1-2x^2y+4x^4y^2)$

c) $125x^3+1=(5x+1)(25x^2-5x+1)$

d) $8x^3-27=(2x-3)(4x^2+6x+9)$

e) $27x^3+\dfrac{y^3}{8}=\left(3x+\dfrac{y}{3}\right)\left(9x^2+xy+\dfrac{y^2}{9}\right)$

f) $125x^3+27y^3=(5x+3y)(25x^2-15xy+9y^2)$

Bài 11. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3$

b) $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$

c) $1-9x+27x^2-27x^3=(1-3x)^3$

d) $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^3$

e) $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3=(3x-2y)^3$

Bài 12. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2-4x^2y^2+y^2+2xy=(x+y)^2-(2xy)^2=(x+y-2xy)(x+y+2xy)$

b) $x^6-y^6=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

c) $25-a^2+2ab-b^2=25-(a-b)^2=(5-a+b)(5+a-b)$

d) $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-4c^2=(a+b+c)^2+(a+b-3c)(a+b+c)$

$$=(a+b+c)(a+b-3c+1)$$

CHUYÊN ĐỀ PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

B. Một số phương pháp nâng cao

Chúng ta đã biết các phương pháp cơ bản để phân tích một đa thức thành nhân tử là đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm các hạng tử và phối hợp các phương pháp đó. Tuy nhiên có những đa thức mặc dù rất đơn giản, nếu chỉ biết dùng ba phương pháp đó thôi thì không thể phân tích thành nhân tử được. Do đó trong chuyên đề này chúng ta sẽ xét thêm một số phương pháp khác để phân tích đa thức thành nhân tử .

- Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử.
- Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử.
- Phương pháp đổi biến.
- Phương pháp đồng nhất hệ số.
- Phương pháp xét giá trị riêng của các biến.

1. Phương pháp tách hạng tử

1.1. Đối với đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ***có nghiệm.***

Phương pháp chung.

+ Bước 1. Tìm tích ac rồi phân tích ac ra tích của hai thừa số nguyên bằng mọi cách $a.c = a_1.c_1 = a_2.c_2 = a_3.c_3 = \ldots = a_i.c_i = \ldots$

+ Bước 2. Chọn hai thừa số trong các tích trên có tổng bằng b, chẳng hạn ta chọn tích $a.c = a_i.c_i$ *với* $b = a_i + c_i$

+ Bước 3. Tách $bx = a_ix + c_ix$ *. Từ đó nhóm hai số hạng thích hợp để phân tích tiếp.*

Ví dụ 1. Phân tích đa thức $f(x) = 3x^2 + 8x + 4$ thành nhân tử.

+ Cách 1 (tách hạng tử bậc nhất bx)

Hướng dẫn

+ Phân tích $ac = 12 = 3.4 = (-3).(-4) = 2.6 = (-2).(-6) = 1.12 = (-1).(-12)$

+ Tích của hai thừa số có tổng bằng b = 8 là tích $a.c = 2.6\left(a.c = a_i.c_i\right)$.

+ Tách $8x = 2x + 6x\left(bx = a_ix + c_ix\right)$

Lời giải

$$3x^2+8x+4=3x^2+2x+6x+4=\left(3x^2+2x\right)+\left(6x+4\right)$$
$$=x\left(3x+2\right)+2\left(3x+2\right)=\left(x+2\right)\left(3x+2\right)$$

Ngoài cách làm như trên ta cũng có thể thực hiện một số cách tách hạng tử khác

+ Cách 2. Tách hạng tử bậc hai ax^2 làm xuất hiện các nhóm có nhân tử chung hoặc hẳng đẳng thức.

Làm xuất hiện hiệu hai bình phương

$$f\left(x\right)=\left(4x^2+8x+4\right)-x^2=\left(2x+2\right)^2-x^2=\left(2x+2-x\right)\left(2x+2+x\right)=\left(x+2\right)\left(3x+2\right)$$

Tách thành 4 hạng tử rồi nhóm

$$f\left(x\right)=4x^2-x^2+8x+4=\left(4x^2+8x\right)-\left(x^2-4\right)$$
$$=4x\left(x+2\right)-\left(x-2\right)\left(x+2\right)=\left(x+2\right)\left(3x+2\right)$$

+ Cách 3. Tách hạng tử tự do c làm xuất hiện các nhóm có nhân tử chung hoặc hẳng đẳng thức.

$$f\left(x\right)=3x^2+8x+16-12=\left(3x^2-12\right)+\left(8x+16\right)=\ldots=\left(x+2\right)\left(3x+2\right)$$

+ Cách 4. Tách nhiều hạng tử cùng một lúc.

$$f\left(x\right)=\left(3x^2+12x+12\right)-\left(4x+8\right)=3\left(x+2\right)^2-4\left(x+2\right)=\left(x+2\right)\left(3x-2\right)$$

$$f\left(x\right)=\left(x^2+4x+4\right)+\left(2x^2+4x\right)=\left(x+2\right)^2+2x\left(x+2\right)=\left(x+2\right)\left(3x+2\right)$$

- ***Nhân xét.***

+ *Các đa thức bậc hai một biến* $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ *chỉ phân tích được thành nhân tử khi và chỉ khi đa thức có nghiệm.*

+ *Nếu* $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ *có dạng* $A^2\pm 2AB+c$ *thì ta tách như sau*

$$f\left(x\right)=A^2\pm 2AB+B^2-B^2+c=\left(A\pm B\right)^2-\left(B^2-c\right)$$

Ví dụ 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) x^2-6x+5 b) x^2-x-12 c) $x^2+8x+15$

Lời giải

a) $x^2-6x+5=x^2-x-5x+5=x\left(x-1\right)-5\left(x-1\right)=\left(x-5\right)\left(x-1\right)$

b) $x^2-x-12=x^2+3x-4x-12=x\left(x+3\right)-4\left(x+3\right)=\left(x-4\right)\left(x+3\right)$

c) $x^2+8x+15=x^2+3x+5x+15=x(x+3)+5(x+3)=(x+5)(x+3)$

1.2. Đối với đa thức hai biến dạng $f(x;y)=ax^2+bxy+cy^2$.

Phương pháp chung.

+ Phương pháp 1. *Xem đa thức* $f(x;y)=ax^2+bxy+cy^2$ *là đa thức một biến x. Khi đó các hệ số lần lượt là* $a;by;cy^2$ *và ta áp dụng phương pháp như với đa thức bậc hai một biến.*

+ Phương pháp 2. *Viết đa thức về dạng* $f(x;y)=y^2\left[a\left(\frac{x}{y}\right)^2+b\left(\frac{x}{y}\right)+c\right]$. *Đặt* $t=\frac{x}{y}$ *và phân tích đa thức* at^2+bt+c *theo phương pháp như với đa thức bậc hai một biến.*

Với dụ 1. Phân tích đa thức $2x^2-5xy+2y^2$ thành nhân tử.

Lời giải

+ Cách 1. Xét đa thức $f(x)=2x^2-5xy+2y^2$. Khi đó ta có $a=2;b=-5y;c=2y^2$.

Ta có $ac=4y^2=y.4y=(-y).(-4y)=2y.2y=(-2y)(-2y)=....$

Ta chọn tích $(-y).(-4y)$ vì $(-y)+(-4y)=-5y=b$. Đến đây ta tách hạng tử như sau.

$$\begin{aligned}2x^2-5xy+2y^2&=2x^2-xy-4xy+2y^2=(2x^2-xy)-(4xy-2y^2)\\&=x(2x-y)-2y(2x-y)=(x-2y)(2x-y)\end{aligned}$$

+ Cách 2. Xét đa thức $f(x;y)=2x^2-5xy+2y^2=y^2\left(2.\frac{x^2}{y^2}-5.\frac{x}{y}+2\right)$.

Đặt $t=\frac{x}{y}$ và ta có đa thức $2t^2-5t+2=2t^2-t-4t+2=(2t-1)(t-2)$.

Như vậy ta được $f(x;y)=y^2(2t-1)(t-2)=y^2\left(2.\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{x}{y}-2\right)=(2x-y)(x-2y)$

- ***Nhận xét.*** *Các đa thức bậc hai có hai biến* $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ *chỉ phân tích được thành nhân tử khi và chỉ khi đa thức có nghiệm khác* $(x;y)\neq(0;0)$.

Với dụ 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

a) $x^2+7xy+12y^2$ b) $x^2-13xy+36y^2$ c) $x^2-5xy-24y^2$

Lời giải

a) $x^2+7xy+12y^2=x^2+3xy+4xy+12y^2=x\left(x+3y\right)+4y\left(x+3y\right)=\left(x+4y\right)\left(x+3y\right)$

b) $x^2-13xy+36y^2=x^2-4xy-9xy+36y^2=x\left(x-4y\right)-9y\left(x-4y\right)=\left(x-4y\right)\left(x-9y\right)$

c) $x^2-5xy-24y^2=x^2+3xy-8xy-24y^2=x\left(x+3y\right)-8y\left(x+3y\right)=\left(x-8y\right)\left(x+3y\right)$

Ví dụ 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $\left(x^2+x\right)^2-2\left(x^2+x\right)-15$ b) $\left(x^2+x\right)^2+9x^2+9x+14$

c) $x^2+2xy+y^2+2x+2y-15$ d) $x^2+2xy+y^2-x-y-12$

• ***Định hướng tư duy. Các đ****a thức cho trên nếu quan sát kĩ ta thấy có dạng đa thức bậc hai một biến, chẳng hạn đa thức thứ nhất là đa thức bậc hai đối với biến là* x^2+x*, đ thức thứ ba là đa thức bậc hai đối với biến* $x+y$ *. Do đó ta có thể áp dụng quy tắc phân tích như trên để phân tích các đa thức thành nhân tử.*

Lời giải

a) $\left(x^2+x\right)^2-2\left(x^2+x\right)-15=\left(x^2+x-1\right)^2-16=\left(x^2+x-5\right)\left(x^2+x+4\right)$

b) $\left(x^2+x\right)^2+9x^2+9x+14=\left(x^2+x\right)^2+2\left(x^2+x\right)+7\left(x^2+x\right)+14$

$=\left(x^2+x\right)\left[\left(x^2+x\right)+2\right]+7\left[\left(x^2+x\right)+2\right]=\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+x+7\right)$

c)

$x^2+2xy+y^2+2x+2y-15=\left(x+y\right)^2+2\left(x+y\right)-15=\left(x+y\right)^2-3\left(x+y\right)+5\left(x+y\right)-15$

$=\left(x+y\right)\left(x+y-3\right)+5\left(x+y-3\right)=\left(x+y+5\right)\left(x+y-3\right)$

d) $x^2+2xy+y^2-x-y-12=\left(x+y\right)^2-\left(x+y\right)-12=\left(x+y\right)^2+3\left(x+y\right)-4\left(x+y\right)-12$

$=\left(x+y\right)\left(x+y+3\right)-4\left(x+y+3\right)=\left(x+y-4\right)\left(x+y+3\right)$

• ***Nhân xét.*** *Trong hai ý đầu các đa thức bậc hai sau lần phân tích thứ nhất không phân tích được nữa vì các đa thức đó vô nghiêm. Ta cũng có thể đổi biến để qua về đa thức bậc hai, chẳng hạn như đặt* $t=x^2+x$ *thì đa thức thứ nhất trở thành* $t^2-2t-15$.

1.2. Đối với đa thức bậc từ 3 trở lên

• **Định lí.** Nếu đa thức $f\left(x\right)$ với hệ số nguyên có nghiệm $x=a$ thì $f\left(a\right)=0$. Khi đó $f\left(x\right)$ có một nhân tử là $x-a$ và $f\left(x\right)$ có thể viết dưới dạng $f\left(x\right)=\left(x-a\right).q\left(x\right)$.

Lúc đó tách các số hạng của $f(x)$ thành các nhóm, mỗi nhóm đều chứa nhân tử là $x-a$. Cũng cần lưu ý rằng nghiệm nguyên của đa thức (nếu có) phải là một ước của hệ số tự do.

Ví dụ 1. Phân tích đa thức $f(x)=x^3+x^2+4$ thành nhân tử.

• ***Định hướng tư duy.*** *Đa thức $f(x)$ có hệ số cao nhất là 1 và nhận thấy trong các ước nguyên của đa thức có -2 là một nghiệm. Như vậy khi phân tích đa thức $f(x)$ thành nhân tử thì đa thức có chứa nhân tử $x+2$. Do đó ta cần tách hạng tử lâm xuất hiện nhân tử $x+2$. Ngoài ra nhân tử còn lại sau phép phân tích thứ nhất có bậc hai nên ta có thể sử dụng phương pháp phân tích cho đa thức bậc hai một biến.*

Lời giải

Nhẩm thấy $x=-2$ là một nghiệm của $f(x)$ nên đa thức $f(x)$ chứa nhân tử $x+2$, từ đó ta có các cách tách như sau

+ Cách 1. $f(x)=x^3+2x^2-x^2+4=(x^3+2x^2)-(x^2-4)=(x+2)(x^2-x+2)$

+ Cách 2. $f(x)=(x^3+8)+(x^2-4)=(x+2)(x^2-x+2)$

+ Cách 3. $f(x)=(x^3+4x^2+4x)-(3x^2+6x)+(2x+4)=(x+2)(x^2-x+2)$

+ Cách 4. $f(x)=(x^3-x^2+2x)+(2x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x+2)$

• ***Nhận xét.*** *Từ định lí trên ta có các hệ quả sau.*

+ *Hệ quả 1.* *Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì $f(x)$ có một nghiệm là $x=1$. Từ đó $f(x)$ có một nhân tử là $x-1$.*

Chẳng hạn, đa thức $f(x)=x^3-5x^2+8x-4$ có $1+(-5)+8+(-4)=0$ nên $x=1$ là một nghiệm của đa thức. Đa thức có một nhân tử là $x-1$. Ta phân tích như sau.

$$f(x)=(x^3-x^2)-(4x^2-4x)+(4x-4)=x^2(x-1)-4x(x-1)+4(x-1)=(x-1)(x-2)^2$$

+ *Hệ quả 2.* *Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số của các luỹ thừa bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các luỹ thừa bậc lẻ thì $f(x)$ có một nghiệm là $x=-1$. Từ đó $f(x)$ có một nhân tử là $x+1$. Từ đó f(x) có một nhân tử là $x+1$.*

Chẳng hạn đa thức $f(x)=x^3-5x^2+3x+9$ *có* $1+3=-5+9$ *nên* $x=-1$ *là một nghiệm của đa thức. Đa thức có một nhân tử là* $x+1$*. Ta phân tích như sau.*

$$f(x)=(x^3+x^2)-(6x^2+6x)+(9x+9)=x^2(x+1)-6x(x+1)+9(x+1)=(x+1)(x-3)^2$$

+ Hệ quả 3. *Nếu* $f(x)$ *có nghiệm nguyên* $x=a$ *và* $f(\pm1)\neq 0$ *thì* $\frac{f(1)}{a-1}$ *và* $\frac{f(-1)}{a+1}$ *đều là số nguyên.*

Chứng minh. Đa thức $f(x)$ có nghiệm $x=a$ nên $f(x)$ có một nhân tử là $x-a$. Do đó $f(x)$ có dạng $f(x)=(x-a).q(x)$.

Khi đó ta có $f(1)=(1-a).q(1)$. Do $f(1)$ khác 0 nên $a\neq 1$ suy ra $q(1)=\frac{f(1)}{a-1}$. Vì $f(x)$ là đa thức có hệ số nguyên nên $q(1)$ là số nguyên. Do đó $\frac{f(1)}{a-1}$ là số nguyên.

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{f(-1)}{a+1}$ là số nguyên.

Ví dụ. Với đa thức $f(x)=4x^3-13x^2+9x-18$.

Các ước của 18 là $\pm1;\pm2;\pm3;\pm6;\pm9;\pm18$. Dễ thấy $f(1)=-18;f(-1)=-44$ nên $x=\pm1$ không phải là nghiệm của $f(x)$. Lại thấy $\frac{-18}{-3-1};\frac{-18}{\pm6-1};\frac{-18}{\pm9-1};\frac{-18}{\pm18-1}$ không phải là số nguyên nên $-3;\pm6;\pm9;\pm18$ không là nghiệm của $f(x)$. Chỉ còn ±2 và 3 thì kiểm tra ta thấy 3 là nghiệm của $f(x)$. Do đó ta tách các hạng tử như sau

$$\begin{aligned}f(x)&=4x^3-13x^2+9x-18=4x^3-12x^2-x^2+3x+6x-18\\&=4x^2(x-3)-x(x-3)+6(x-3)=(x-3)(4x^2-x+6)\end{aligned}$$

+ Hệ quả 4. *Nếu* $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$ *(với* $a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0$ *là các số nguyên) có nghiệm hữu tỉ* $x=\frac{p}{q}$ *với* $p,q\in Z$ *và* $(p;q)=1$*, thì* p *là ước của* a_0 *và* q *là ước dương của* a_n.

Chứng minh. Ta thấy $f(x)$ có nghiệm $x=\frac{p}{q}$ nên nó có một nhân tử là $(qx-p)$. Do các hệ số của $f(x)$ đều nguyên nên $f(x)$ có dạng

$$f(x)=(qx-p)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1x+b_0)$$

Đồng nhất hai vế ta được $qb_{n-1}=a_n;-pb_0=a_0$. Từ đó suy ra p là ước của a_0 và q là ước dương của a_n.

Ví dụ. Với đa thức $f(x)=3x^3-7x^2+17x-5$ ta có các ước của –5 là ± 1, ± 5. Thử trực tiếp ta thấy các số này không là nghiệm của $f(x)$. Như vậy $f(x)$ không có nghiệm nghuyên. Xét các số $\pm\frac{1}{3},\pm\frac{5}{3}$ ta thấy $\frac{1}{3}$ là nghiệm của đa thức. Do đó đa thức có một nhân tử là $3x-1$. Ta phân tích như sau.

$$f(x)=(3x^3-x^2)-(6x^2-2x)+(15x-5)=(3x-1)(x^2-2x+5)$$

Ví dụ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử $f(x)=x^4+6x^3+13x^2+12x+4$

- ***Định hướng tư duy.*** *Đa thức $f(x)$ có hệ số cao nhất là 1 và nhận thấy trong các ước nguyên của đa thức có -1 là một nghiệm. Như vậy khi phân tích đa thức $f(x)$ thành nhân tử thì đa thức có chứa nhân tử $x+1$. Do đó ta cần tách hạng tử lầm xuất hiện nhân tử $x+1$. Tuy nhên nhân tử còn lại sau phép phân tích thứ nhất có bậc ba nên để phân tích được tiếp tâ cần nhẩm được thêm một nghiệm nữa. Nhẩm tiếp các ước của hệ số tự do ta thấy -2 cũng là một nghiệm. Do vậy đa thức $f(x)$ chứa thêm nhân tử $x+2$. Từ đó ta phân tích được đa thức $f(x)$ thành nhân tử.*

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
&x^4+6x^3+13x^2+12x+4=(x^4+x^3)+(5x^3+5x^2)+(8x^2+8x)+(4x+4)\\
&=x^3(x+1)+5x^2(x+1)+8x(x+1)+4(x+1)=(x+1)(x^3+5x^2+8x+4)\\
&=(x+1)\left[(x^3+2x^2)+(3x^2+6x)+(2x+4)\right]=(x+1)\left[x^2(x+2)+3x(x+2)+2(x+2)\right]\\
&=(x+1)(x+2)(x^2+3x+2)=(x+1)(x+2)(x+1)(x+2)=(x+1)^2(x+2)^2
\end{aligned}$$

1.3. Đối với đa thức nhiều biến.

Ví dụ . Phân tích các đa thức sau thành nhân tử $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

- ***Định hướng tư duy.*** *Đa thức đã cho có nhiều biến và các hạng tử lại cho dưới dạng tích, do đó thông thường ta nhân các hạng tử ra để nhóm các hạng từ làm xuất hiện nhân tử* *chung hoặc sử dụng hằng đẳng thức. Tuy nhiên quan sát kĩ các hạng tử trên ta để ý đến phép tách hạng tử* $z-x=(z-y)-(y-x)=-(x-y)-(y-z)$*, như vậy ta có thể tách đa thức từ ba hạng tử thành bốn hạng tử và nhóm để làm xuất hiện nhân tử chung.*

Lời giải

Để ý rằng $z-x=(z-y)-(y-x)=-(x-y)-(y-z)$. Vì vậy ta tách hạng tử thứ hai của đa thức đã cho

$$\begin{aligned}
&x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=x^2(y-z)-y^2(y-z)-y^2(x-y)+z^2(x-y)\\
&=(y-z)(x^2-y^2)-(x-y)(y^2-z^2)=(y-z)(x-y)(x+y)-(x-y)(y-z)(y+z)\\
&=(x-y)(y-z)(x-z)
\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử $4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2(c-b)-4c^2a^2(2a+c)$

- ***Định hướng tư duy.*** *Đa thức đã cho trên cũng có nhiều biến và các hạng tử lại cho dưới dạng tích nhưng phức tạp hơn. Tương tự ý tưởng như ví dụ trên ta để ý đến phép tách hạng tử* $c-b=(2a+c)-(2a+b)$ *để có thể tách đa thức từ ba hạng tử thành bốn hạng tử và nhóm làm xuất hiện nhân tử chung.*

Lời giải

Để ý rằng $c-b=(2a+c)-(2a+b)$. Vì vậy ta tách hạng tử thứ hai của đa thức đã cho

$$\begin{aligned}
&4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2(c-b)-4c^2a^2(2a+c)\\
&=4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2\left[(2a+c)-(2a+b)\right]-4c^2a^2(2a+c)\\
&=4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2(2a+c)-b^2c^2(2a+b)-4c^2a^2(2a+c)\\
&=b^2(2a+b)(4a^2-c^2)+c^2(2a+c)(b^2-4a^2)\\
&=b^2(2a+b)(2a-c)(2a+c)-c^2(2a+c)(2a-b)(2a+b)\\
&=(2a+c)(2a+b)(2ab^2-b^2c-2ac^2+bc^2)\\
&=(2a+c)(2a+b)(b-c)(2ab+2ac-bc)
\end{aligned}$$

- ***Nhân xét.*** *Qua các ví dụ trên ta thấy, với một số đa thức khi áp dụng các phương pháp phân tích cơ bản mà không thể phân tích được đa thức thì ta có thể áp dụng phương pháp tách hạng tử. Có nhiều cách tách hạng tử để tạo nhóm, tuy nhiên cần chú ý là nhóm được tạo ra phải có nhân tử chung hoặc hằng đẳng thức và sau quá trình phân tích nhóm thì phải hình thành nhân tử chung mới hoặc các hằng đẳng thức mới. Một kinh nghiệm khi sử dụng* *phương pháp tách hạng tự là nhẩm nghiệm của đa thức trước để có phép phân tích dễ dàng hơn.*

2. Phương pháp thêm và bớt cùng một hạng tử.

Với một số đa thức không thể sử dụng các phương pháp như đặt nhân tử chung, sử dụng hằng đẳng thức, nhóm hạng tử cũng như phép tách hạng tử để phân tích thành nhân tử. Khi đó ta có thể sử dụng phép thêm bớt cùng một hạng tử với mục đích làm xuất hiện nhân tử chung hoặc xuất hiện các hằng đẳng thức.

2.1. Thêm và bớt cùng một số các hạng tử làm xuất hiện các hằng đẳng thức.

Ví dụ 1. Phân tích đa thức thành nhân tử $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

- ***Định hướng tư duy.*** *Đa thức $f(x)$ đã cho trên là đa thức một biến và có hệ số cao nhất là 1, tuy nhiên đa thức lại không có nghiệm. Để ý ta thấy nếu thêm vào đa thức $f(x)$ một hạng tử x^2 thì ta thấy xuất hiện hằng đẳng thức $(x^2+1)^2$ và khi bớt đi hạng tử x^2 thì đa thức có dạng $A^2 - B^2$. Ngoài ra nếu ta thêm bớt nhân tử x^3 thì đa thức lại xuất hệ hằng đẳng thức $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ và khi nhóm các hạng tử còn lại của đa thức thì có nhân tử $x^2 - x + 1$. Như vậy ta có thể phân tích được đa thức.*

Lời giải

+ Cách 1. $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

+ Cách 2. $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 - x^3 + x^2) + (x^3 + 1) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

- ***Nhận xét.*** *Các đa thứ $x^2 - x + 1$ và $x^2 + x + 1$ không phân tích được nữa vì các đa thức đó vô nghiệm.*

Ví dụ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử $f(x) = 4x^4 + 81$.

- ***Định hướng tư duy.*** *Để ý rằng $f(x) = 4x^4 + 81 = (2x^2)^2 + 9^2$ và $2.(2x^2).9 = (6x)^2$ nên ta sử dụng phương pháp thêm bớt một hạng tử như trên.*

Lời giải

Ta có

$$4x^4+81=(2x^2)^2+9^2=(2x^2)^2+9^2+2.2x^2.9-2.2x^2.9=(2x^2+9)^2-36x^2$$
$$=(2x^2+9)^2-(6x)^2=(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$$

- ***Nhận xét.*** *Các đa thứ* $2x^2+6x+9$ *và* $2x^2-6x+9$ *không phân tích được nữa vì các đa thức đó vô nghiệm.*

Ví dụ 3. Phân tích đa thức thành nhân tử $A=64x^4+y^4$

- ***Định hướng tư duy.*** *Để ý rằng* $A=64x^4+y^4=(8x^2)^2+(y^2)^2$ *và* $2.(8x^2).y^2=(4xy)^2$ *nên ta sử dụng phương pháp thêm bớt một hạng tử như trên.*

Lời giải

Ta có

$$64x^4+y^4=(8x^2)^2+(y^2)^2+2.8x^2.y^2-2.8x^2.y^2=(8x^2+y^2)^2-16x^2y^2$$
$$=(8x^2+y^2)^2-(4xy)^2=(8x^2+4xy+y^2)(8x^2-4xy+y^2)$$

- ***Nhận xét.*** *Các đa thứ* $8x^2+4xy+y^2$ *và* $8x^2-4xy+y^2$ *không phân tích được nữa vì*

$$8x^2+4xy+y^2=4x^2+(2x+y)^2\ge 0;8x^2-4xy+y^2=4x^2+(2x-y)^2\ge 0$$

Nghĩa là hai đa thức trên không có nghiệm nào khác $(x;y)=(0;0)$.

Ví dụ 4. Phân tích đa thức thành nhân tử $A=a^3+b^3+c^3-3abc$

- ***Định hướng tư duy.*** *Đa thức A đã cho trên có ba biến và lại có bậc 3 do đó ta nghĩ đến sử dụng hằng đẳng thức bậc ba. Tuy nhiên nhân thấy rằng nếu sử dụng phép phân tích trực tiếp thì ta không phân tích được. Do đó ta sẽ biến đổi đa thức A về đa thứ có chứa hạng tử* $(a+b)^3+c^3$*, khi đó nếu phân tích thì ta có nhân tử* $a+b+c$. *Như vậy ta cần thêm vào nhóm* $3a^2b+3ab^2$. *Để ý tiếp ta thấy sau khi bớt đi nhóm* $3a^2b+3ab^2$ *thì kết hợp với* $3abc$ *thì ta cũng thấy có nhân tử* $a+b+c$. *Do vậy ta sử dụng phép thêm bớt để phân tích đa thức A thành nhân tử.*

Lời giải

$$A=a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$$
$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=(a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2\right]-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\right]=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

2.2. Thêm và bớt cùng một số hạng tử làm xuất hiện nhân tử chung.

Ví dụ 1. Phân tích đa thức thành nhân tử $f(x)=x^5+x-1$

- ***Định hướng tư duy.*** *Đa thức* $f(x)$ *đã cho trên có bậc 5 và không nhẩm được nghiệm, do đó ta không thể dự đoán được nhân tử khi phân tích. Trong đa thức cung không thấy xuất hiện các hằng đẳng thức. Do vậy ta nghĩ đến phương pháp thêm bớt một số hạng tử.*

+ Hướng thứ nhất là ta thêm bớt các hạng tử để đa thức có các hạng tử có bậc đầy đủ từ 5 đến 0, từ đó tùy thuộc vào số dấu dương và dấu âm trước các hạng từ mà chia nhóm cho phù hợp.

+ Thêm bớt hạng tử x^2 *để nhóm với* x^5 *để tạo ra nhân tử* $x^3\pm 1$ *và nhóm với* $x-1$ *để tạo ra nhân tử* $x^2\pm x+1$.

Lời giải

+ Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned}x^5+x-1&=x^5-x^4+x^3+x^4-x^3+x^2-x^2+x-1\\&=x^3\left(x^2-x+1\right)-x^2\left(x^2-x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)=\left(x^2-x+1\right)\left(x^3-x^2-1\right)\end{aligned}$$

+ Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned}x^5+x-1&=\left(x^5+x^2\right)+\left(-x^2+x-1\right)=x^2\left(x^3+1\right)-\left(x^2-x+1\right)\\&=x^2\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)=\left(x^2-x+1\right)\left(x^3+x^2-1\right)\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử $f(x)=x^7+x^5+1$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}f(x)&=x^7+x^5+1=x^7+x^5+(x^2+x)+1-x^2-x=\left(x^7-x\right)+\left(x^5-x^2\right)+\left(x^2+x+1\right)\\&=x\left(x^6-1\right)+x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)=x\left(x^3+1\right)\left(x^3-1\right)+x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)\\&=x\left(x^3+1\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)\\&=\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^2-x\right)+\left(x^3-x^2\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)\\&=\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^2-x+x^3-x^2+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^3-x+1\right)\end{aligned}$$

- ***Nhân xét.*** *Các đa thức có dạng* $x^{3m+1}+x^{3n+2}+1$ *như* $x^7+x^2+1;x^7+x^5+1;x^8+x^4+1$ $x^5+x+1;x^8+x+1;...$ *khi phân tích đều có nhân tử chung là* x^2+x+1.

3. Phương pháp đổi biến.

Với một số đa thức có bậc cao hoặc có cấu tạo phức tạp mà khi thự hiện theo các phương pháp như trên gây ra nhiều khó khăn. Khi đó thông qua phép đổi biết ta đưa được về đa thức có bậc thấp hơn goặc đơn giản hơn để thuận tiện cho việc phân tích thành nhân tử. Sau khi phân tích thành nhân tử đối với đa thức mới ta thay trở lại biến cũ để được đa thức với biến cũ.

Ví dụ 1. Phân tích đa thức thành nhân tử $A=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)-12$

- ***Định hướng tư duy.*** *Nhận thấy đa thức A đã cho trên nếu khai triển sẽ được một đa thức bậc 4 và có hệ số tự do là* -10, *do đó để phân tích được ta phải nhẩm được ít nhất hai nghiệm phân biệt hoặc sử dụng phương pháp hệ số bất định. Thử các ước của hệ số tự do ta được* $x=1$ *và* $x=-2$ *nên ta sẽ phân tích được đa thức A. Ngoài ra để ý đến sự lặp lại của* x^2+x *nên ta có thể đổi biến và đưa đa thức về đa thức mới có bậc hai.*

Lời giải

Đặt $x^2+x=t$ khi đó đa thức A được viết lại thành

$$A=\left(t+1\right)\left(t+2\right)-12=t^2+3t-10=\left(t-2\right)\left(t+5\right)$$

Thay $x^2+x=t$ trở lại đa thức A ta được

$$A=\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+x+5\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x^2+x+5\right)$$

Ví dụ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử $B=\left(x^2+2x+7\right)-\left(x^2+2x+4\right)\left(x^2+2x+3\right)$

- ***Định hướng tư duy.*** *Nhận thấy sự lặp lại của* x^2+2x *nên ta có thể đổi biến và đưa đa thức về đa thức mới có bậc hai.*

Lời giải

Đặt $x^2+2x=t$, khi đó đa thức B được viết lại thành

$$B=\left(t+7\right)-\left(t+4\right)\left(t+3\right)=t+7-t^2-7t-12=-t^2-6t-5=-\left(t+1\right)\left(t+5\right)$$

Thay $t=x^2+2x$ trở lại đa thức B ta được

$$B=-\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+2x+5\right)=-\left(x+1\right)^2\left(x^2+2x+5\right)$$

Ví dụ 3. Phân tích đa thức sau thành nhân tử $A=x\left(x+4\right)\left(x+6\right)\left(x+10\right)+128$

- ***Định hướng tư duy.*** *Đa thức A đã cho là đa thức bậc bốn, do đó để phân tích được đa thức A thành nhân tử ta cần nhân đa thức ra và thu gọn rồi nhẩm nghiệm. Tuy nhiên trong qua trình nhân đa thức ta nhân thấy giữa hai tích* $x(x+10)$ *và* $(x+4)(x+6)$ *có chung nhóm* x^2+10*. Do đó ta sẽ sử dụng phép đổi biến để phân tích đa thức A thành nhân tử.*

Lời giải

Ta có $x(x+4)(x+6)(x+10)+128=(x^2+10x)(x^2+10x+24)+128$

Đặt $x^2+10x+12=y$, đa thức đã cho có dạng

$$\begin{aligned}&(y-12)(y+12)+128=y^2-16=(y+4)(y-4)\\&=(x^2+10x+16)(x^2+10x+8)=(x+2)(x+8)(x^2+10x+8)\end{aligned}$$

- ***Nhận xét.*** *Nhờ phương pháp đổi biến ta đưa đa thức bậc 4 đối với x thành đa thức bậc 2 đối với y. Trong lời giải trên ta không đổi biến* $y=x^2+10x$ *mà đổi biến* $y=x^2+10+12$ *để làm xuất hiện hằng đẳng thức* y^2-16*. Nếu đổi biến* $y=x^2+10x$ *thì ta có đa thức bậc hai biến y mới là* $y^2+24y+128$ *và để phân tichsta sử dụng phương pháp tách hạng tử như sau*

Đặt $y=x^2+10x$*. Khi đó đa thức trở thành*

$$y(t+24)+128=y^2+16y++8y+128=y(y+16)+8(y+16)=(y+8)(y+16)$$

Thay t trở lại đa thức ta đươc

$$A=(x^2+10x+8)(x^2+10x+16)=(x^2+10x+8)(x+2)(x+8)$$

Ví dụ 4. Phân tích đa thức thành nhân tử $B=(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)+1$

- ***Định hướng tư duy.*** *Tương tự như ví dụ trên ta thấy giữa hai tích* $(a+1)(a+4)$ *và* $(a+2)(a+3)$ *có chung nhóm* a^2+5a*. Do đó ta sẽ sử dụng phép đổi biến để phân tích đa thức B thành nhân tử.*

Lời giải

Ta có $B=(a+1)(a+4)(a+2)(a+3)+1=(a^2+5a+4)(a^2+5a+6)+1$

Đặt $t=a^2+5a+5$. Khi đó đa thức B trở thành $B=(t-1)(t+1)+1=t^2$

Thay $t=a^2+5a+5$ ta được $B=\left(a^2+5a+5\right)^2$.

- ***Nhân xét.*** *Các đa thức bậc bốn trong hai ví dụ có dạng tổng quát là*

$$\left(x+a\right)\left(x+b\right)\left(x+c\right)\left(x+d\right)+e$$

Trong đó $a+d=b+c$.

Khi đó ta sử dụng phép đặt ẩn phụ $t=x^2+\left(a+d\right)x+k=x^2+\left(b+c\right)x+k$ *với kđược xác định là* $k=\frac{1}{2}\left(ad+bc\right)$.

Ví dụ 5. Phân tích đa thức thành nhân tử $A=\left(3x+2\right)\left(3x-5\right)\left(x-1\right)\left(9x+10\right)+24x^2$

- ***Định hướng tư duy.*** *Tương tự như ví dụ trên ta thấy giữa hai tích* $\left(3x+2\right)\left(3x-5\right)$ *và* $\left(x-1\right)\left(9x+10\right)$ *có chung nhóm* $9x^2-10$. *Do đó ta sẽ sử dụng phép đổi biến để phân tích đa thức B thành nhân tử.*

Lời giải

Ta có $A=\left(3x+2\right)\left(3x-5\right)\left(x-1\right)\left(9x+10\right)+24x^2=\left(9x^2+x-10\right)\left(9x^2-9x-10\right)+24x^2$.

Đặt $y=9x^2-9x-10$. Khi đó đa thức A được viết lại thành

$$A=y\left(y+10x\right)+24x^2=y^2+10xy+24y^2=y^2+4xy+6xy+24x^2=\left(y+4x\right)\left(y+6x\right)$$

Thay lại $y=9x^2-9x-10$ vào đa thức ta được $A=\left(9x^2-3x-10\right)\left(9x^2-5x-10\right)$

Ví dụ 6. Phân tích đa thức thành nhân tử $B=\left(x-18\right)\left(x+35\right)\left(x-7\right)\left(x+90\right)-76x^2$

- ***Định hướng tư duy.*** *Tương tự như ví dụ trên ta thấy giữa hai tích* $\left(3x+2\right)\left(3x-5\right)$ *và* $\left(x-1\right)\left(9x+10\right)$ *có chung nhóm* $9x^2-10$. *Do đó ta sẽ sử dụng phép đổi biến để phân tích đa thức B thành nhân tử.*

Lời giải

Ta có $B=\left(x-18\right)\left(x+35\right)\left(x-7\right)\left(x+90\right)-76x^2=\left(x^2-17x-630\right)\left(x^2-83x-630\right)-76x^2$.

Đặt $y=x^2-50x-630$. Khi đó đa thức A được viết lại thành

$$A=\left(y-33x\right)\left(y+33x\right)-76x^2=y^2-1089x^2-76x^2=y^2-1156x^2=\left(y-34x\right)\left(y+34x\right)$$

Thay lại $y=x^2-50x-630$ vào đa thức ta được

$$A=\left(x^2-50x-630-34x\right)\left(x^2-50x-630+34x\right)=\left(x^2-84x-630\right)\left(x^2-16x-630\right)$$

- ***Nhận xét.*** *Các đa thức bậc bốn trong hai ví dụ có dạng tổng quát là*

$$\left(x+a\right)\left(x+b\right)\left(x+c\right)\left(x+d\right)+ex^2$$

Trong đó $ad=bc$.

Khi đó ta sử dụng phép đặt ẩn phụ $t=x^2+kx+ad=x^2+kx+bc$ *với k được xác định là* $k=\frac{1}{2}\left(a+b+c+d\right)$.

Ví dụ 7. Phân tích đa thức sau thành nhân tử $A=x^4+6x^3+7x^2-6x+1$

- ***Định hướng tư duy.*** *Quan sát đa thức A ta nhân thấy các hệ số có tính đối xứng, do đó nếu đưa* x^2 *ra ngoài thì thừa số còn lại là* $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x-\frac{1}{x}\right)+7$. *Đến đây ta có thể sử dụng phép đổi biến* $y=x-\frac{1}{x}$ *để đưa nhân tử trên về đa thức bậc hai.*

Lời giải

Giả sử $x\neq 0$. Ta viết đa thức dưới dạng

$$A=x^2\left(x^2+6x+7-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x-\frac{1}{x}\right)+7\right].$$

Đặt $x-\frac{1}{x}=y$ thì $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$. Do đó

$$A=x^2\left(y^2+2+6y+7\right)=x^2\left(y+3\right)^2=\left(xy\ +\ 3x\right)^2=\left[x\left(x-\frac{1}{x}\right)+3x\right]^2=\left(x^2+\ 3x-1\right)^2$$

- ***Nhận xét.*** *Ta cũng có thể phân tích đa thức A thành nhân tử như sau*

$$A=x^4+6x^3-2x^2+9x^2-6x+1=x^4+\left(6x^3-2x^2\right)+\left(9x^2-6x+1\right)$$
$$=x^4+2x^2\left(3x-1\right)+\left(3x-1\right)^2=\left(x^2+3x-1\right)^2$$

Ví dụ 8. Phân tích đa thức thành nhân tử $x^4-7x^3+14x^2-7x+1$

- ***Định hướng tư duy.*** *Quan sát đa thức A ta nhân thấy các hệ số có tính đối xứng, do đó nếu đưa* x^2 *ra ngoài thì thừa số còn lại là* $x^2+\frac{1}{x^2}-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14$. *Đến đây ta có thể sử dụng phép đổi biến* $y=x+\frac{1}{x}$ *để đưa nhân tử trên về đa thức bậc hai.*

Lời giải

Ta có $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=x^2\left(x^2-7x+14+\frac{-7}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left[x^2+\frac{1}{x^2}-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14\right]$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t$ suy ra $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Đa thức trên trở thành

$$x^2\left(t^2-2-7t+14\right)=x^2\left(t^2-7t+12\right)=x^2\left(t-3\right)\left(t-4\right)$$

Thay t trở lại ta được

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}-3\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)=x^2\left(\frac{x^2-3x+1}{x}\right)\left(\frac{x^2-4x+1}{x}\right)=\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2-4x+1\right)$$

Vậy $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2-4x+1\right)$.

- ***Nhân xét.*** *Các đa thức bậc bốn trong hai ví dụ có dạng tổng quát là*

$$A=ax^4\pm bx^3+cx^2\pm dx+e$$

Khi đó ta biến đổi và sử dụng phép đặt ẩn phụ $t=x\pm\frac{1}{x}$..

Ví dụ 9. Phân tích đa thức sau thành nhân tử $A=\left(x-y\right)^3+\left(y-z\right)^3+\left(z-x\right)^3$.

- ***Định hướng tư duy.*** *Đa thức A đã cho là đa thức bậc ba và ba biến, do đó để phân tích được đa thức A thành nhân tử ta cần nhân đa thức ra và thu gọn rồi mới tiến hành phân tích được. Để ý đến câu tạo của đa thức ta có thể đổi biến* $a=x-y;b=y-z;c=z-x$*, khi đó ta được thêm giả thiết* $a+b+c=0$ *và cần phân tích đa thức* $A=a^3+b^3+c^3$.

Lời giải

Đặt $a=x-y;b=y-z;c=z-x$, khi đó ta có $a+b+c=0$ và đa thức đã cho trở thành $A=a^3+b^3+c^3$. Từ $a+b+c=0$ ta có

$$a+b=-c\Leftrightarrow\left(a+b\right)^3=-c^3\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2=0\Leftrightarrow a^3+b^3+c^2=3abc$$

Đến đây thay lại $a=x-y;b=y-z;c=z-x$ ta được

$$A=\left(x-y\right)^3+\left(y-z\right)^3+\left(z-x\right)^3=3\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)$$

Ví dụ 10. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$B=8\left(x+y+z\right)^3-\left(x+y\right)^3-\left(y+z\right)^3-\left(z+x\right)^3$$

- ***Định hướng tư duy.*** *Đa thức B đã cho trên có bậc 3 và nếu khai triển các hạng tử bậc ba trên rồi phân tích thành nhân tử thì khá phức tạp. Chú ý đến cấu tạo của đa thức B ta có thể sử dụng phép đổi biến* $a = x + y; b = y + z; c = x + y$*, khi đó ta có* $a + b + c = 2(x + y + z)$ *và đa thức trở thành* $B = (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$*. Đến đây ta có thể sở dụng hằng đẳng thức đáng nhớ để phân tích đa thức B.*

Lời giải

Đặt $a = x + y; b = y + z; c = x + y$. Khi đó ta có $a + b + c = 2(x + y + z)$ và đa thức trở thành $B = (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$. Ta có

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = \left[(a+b)+c\right]^3 - a^3 - b^3 - c^3 \\
&= (a+b)^3 + c^3 + 3c(a+b)(a+b+c) - a^3 - b^3 - c^3 \\
&= (a+b)^3 + 3c(a+b)(a+b+c) - (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\
&= (a+b)\left[(a+b)^2 + 3c(a+b+c) - (a^2 - ab + b^2)\right] \\
&= 3(a+b)(ab + bc + ca + c^2) = 3(a+b)(b+c)(c+a)
\end{aligned}$$

Thay lại $a = x + y; b = y + z; c = x + y$ vào kết quả trên ta được

$$B = 8(x+y+z)^3 - (x+y)^3 - (y+z)^3 - (z+x)^3 = 3(x+2y+z)(y+2z+x)(z+2x+y)$$

Ví dụ 11. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$C = (a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$$

Lời giải

Ta có $C = (a+b+c)^3 - \left[(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3\right]$.

Đặt $x = a + b - c; y = b + c - a; z = c + a - b$. Khi đó ta được $x + y + z = a + b + c$. Ta có

$$\begin{aligned}
&(x+y+z)^3 = (x+y)^3 + 3(x+y)^2 z + 3(x+y)z^2 + z^3 \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3zx^2 + 6xyz + 3y^2z + 3z^2x + 3yz^2 \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + (3x^2y + 3zx^2) + (3xyz + 3z^2x) + (3xy^2 + 3xyz) + (3yz^2 + 3y^2z) \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + (3x^2 + 3zx + 3xy + 3yz)(y+z) \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3\left[x(z+x) + y(z+x)\right](y+z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= (x+y+z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) - x^3 - y^3 - z^3 \\
&= 3(x+y)(y+z)(z+x)
\end{aligned}$$

Thay lại $x=a+b-c; y=b+c-a; z=c+a-b$ ta được $C=24abc$.

Ví dụ 12. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$D=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x+y+z\right)^2+\left(xy+yz+zx\right)^2$$

Lời giải

Ta có $\left(x^2+y^2+z^2\right)\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\left(xy+yz+zx\right)\right]+\left(xy+yz+zx\right)^2$

Đặt $a=x^2+y^2+z^2; b=xy+yz+zx$. Khi đó đa thức D được viết lại thành

$$D=a\left(a+2b\right)+b^2=a^2+2ab+b^2=\left(a+b\right)^2=\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)^2$$

Ví dụ 13. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$P=2\left(x^4+y^4+z^4\right)-\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x+y+z\right)^2+\left(x+y+z\right)^4$$

Lời giải

Đặt $a=x^4+y^4+z^4; b=x^2+y^2+z^2; c=x+y+z$. Khi đó ta có

$$P=2a-b^2-2bc^2+c^4=2a-2b^2+b^2-2bc^2+c^4=2\left(a-b^2\right)+\left(b-c^2\right)^2$$

Lại có $a-b^2=-2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$ và $b-c^2=-2\left(xy+yz+zx\right)$.

Thay vào ta được $P=-4\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+4\left(xy+yz+zx\right)^2=8xyz\left(x+y+z\right)$.

- ***Nhận xét.*** *Phép đổi biến trong phân tích đa thức thành nhân tử giúp ta biến đa thức có cấu tạo phức tạp thành đa thức có cấu tạo đơn giản hơn và dễ sử dụng các phương phép phân tích tiếp theo hơn.*

4. Phương pháp hệ số bất định

Ví dụ 1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử $x^4-6x^3+12x^2-14x-3$.

- ***Định hướng tư duy.*** *Thử với* $x=\pm1;\pm3$ *không là nghiệm của đa thức nên đa thức không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỷ. Như vậy đa thức trên phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng*

$$\begin{aligned}\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)&=x^4+\left(a+c\right)x^3+\left(ac+b+d\right)x^2+\left(ad+bc\right)x+bd\\&=x^4-6x^3+12x^2-14x-3\end{aligned}$$

Đến đây để xác định hệ các hệ số a, b, c, d ta đồng nhất hệ số hai vế và phương pháp này gọi là phương pháp hệ số bất định.

Lời giải

Thử với $x = \pm1; \pm3$ không là nghiệm của đa thức nên đa thức không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỷ. Như vậy đa thức trên phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng

$$\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)=x^4+\left(a+c\right)x^3+\left(ac+b+d\right)x^2+\left(ad+bc\right)x+bd$$
$$=x^4-6x^3+12x^2-14x-3$$

Đồng nhất các hệ số ta được $\begin{cases} a+c=-6 \\ ac+b+d=12 \\ ad+bc=-14 \\ bd=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=-6 \\ ac=8 \\ a+3c=-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \\ c=-4 \\ d=1 \end{cases}$

Vậy $x^4-6x^3+12x^2-14x+3=\left(x^2-2x\ +\ 3\right)\left(x^2-4x\ +\ 1\right)$.

- ***Nhận xét.*** *Phương pháp hệ số bất định thường áp dụng cho các đa thức* $f\left(x\right)$ *bậc chẵn và không nhẩm được nghiệm.*

Ví dụ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử $A=12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3$

Lời giải

Chú ý hệ số tự do -3 ta nhận thấy khi phân tích đa thức A thành hai đa thức bậc hai thì hệ số tự do tương ứng của hai đa thức đó lần lượt là -1 và 2. Giả sử đa thức A phân tích được $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3=\left(ax+by+3\right)\left(cx+dy-1\right)$.

Khi đó

$$12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3=acx^2+\left(ad+bc\right)xy+bdy^2+\left(3c-a\right)x+\left(3d-b\right)y-3$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta có $\begin{cases} ac=12 \\ ad+bc=-10 \\ bd=-12 \\ 3c-a=5 \\ 3d-b=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-6 \\ c=3 \\ d=2 \end{cases}$

Vậy ta được $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3=\left(4x-6y+3\right)\left(3x+2y-1\right)$

- ***Nhân xét.*** *Để giảm bớt các hệ số cần tìm trong phương pháp hệ số bất định ta cần chú ý đến hệ số cao nhất hoặc hệ số tự do. Chẳng hạn nếu hệ số tự do là* -3 *như trên thì có thể tách thành cặp số* -1 *và 3 hoặc 1 và* -3*, hai trường hợp này khi phân tích cho kết quả như* *nhau. Ngoài ra để tìm các hệ số ta cần kết hợp giải hệ điều kiện khi đồng nhất hệ số với việc nhẩm các giá trị đặc biệt rồi thay vào cho đến khi tìm được hết các hệ số.*

Ví dụ 3. Phân tích đa thức thành nhân tử $A = 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3$.

- ***Định hướng tư duy.*** *Đa thức đã cho có hai biết và có bậc hai đối với mỗi biến và các hạng tử bậc hai đứng độc lập với mỗi biến. Do đó khi phân tích đa thức A thành nhân tử thì được các đa thức bậc nhất đối với mỗi biến. Ngoài ra để ý đến hệ số tự do -3 của đa thức A thì ta dự đoán A phân tích được về dạng $(ax + by + 3)(cx + dy - 1)$. Để xác định các hệ số ta sử dụng phương pháp hệ số bất định.*

Giả sử đa thức A phân tích được

$$12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (ax + by + 3)(cx + dy - 1)$$

Khi đó ta được

$$12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = acx^2 + (3c - a)x + bdy^2 + (3d - b)y + (bc + ad)xy - 3$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta được $\begin{cases} ac = 12 \\ bc + ad = -10 \\ 3c - a = 5 \\ bd = -12 \\ 3d - b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 3 \\ b = -6 \\ d = 2 \end{cases}$

Do vây ta được $12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (4x - 6y + 3)(3x + 2y - 1)$

5. Phương pháp xét giá trị riêng

Trong phương pháp này, trước hết ta xác định dạng các nhân tử chứa biến của đa thức, rồi gán cho các biến các giá trị cụ thể để xác định các nhân tử còn lại.

Ví dụ 1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử $P = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$

Lời giải

Thay x bởi y thì $P = y^2(y - z) + y^2(z - y) = 0$. Như vậy P chứa thừa số $(x - y)$. Ta thấy nếu thay x bởi y hoặc thay y bởi z hoặc thay z bởi x thì $P = 0$ không đổi (đa thức P có thể hoán vị vòng quanh). Do đó nếu P đã chứa thừa số $(x - y)$ thì do vai trò của các biến x, y, z suy ra P cũng chứa thừa số $(y - z)$ và $(z - x)$. Do đó đa thức P có dạng $k(x - y)(y - z)(z - x)$. Ta thấy k phải là hằng số vì P có bậc 3 đối với mỗi biến trong x, y, z và tích $\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)$ cũng có bậc 3 đối với mỗi biến trong x, y, z. Vì đẳng thức $x^2\left(y-z\right)+y^2\left(z-x\right)+z^2\left(x-y\right)=k\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)$ đúng với mọi x, y, z nên ta gán cho các biến x ,y, z các giá trị riêng, chẳng hạn $x=2; y=1; z=0$ thì được $4.1+1.\left(-2\right)+0=k.1.1.\left(-2\right)$ suy ra $k=-1$.

Vậy $P=-\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)=\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(x-z\right)$

MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x^2-12x-16$ b) $3x^2+13x-10$ c) $2x^2-7x+3$

d) $3x^2-16x+5$ e) $2x^2-5x-12$ f) $3x^2-13x+36$

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) x^4-7x^2+6 b) x^4+2x^2-3 c x^4+x^2+1

d) x^3-2x^2+5x-4 e) x^3-x^2+x+3 f) $2x^3-35x+75$

g) $3x^3-4x^2+13x-4$ h) $6x^3+x^2+x+1$ i) $4x^3+6x^2+4x+1$

Bài 3. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^3+4x^2-29x+24$ b) $x^3+6x^2+11x+6$

c) $3x^3-7x^2+17x-5$ d) $2x^3-5x^2+8x-3$

e) $3x^3-14x^2+4x+3$ f) x^3+5x^2+8x+4

Bài 4. Phân tích các đa thức thành nhân tử

a) $x^4+2019x^2+2018x+2019$ b) $x^4+2004x^2+2003x+2004$

Bài 5. Phân tích các đa thức thành nhân tử

a) $x^4+6x^3+7x^2-6x+1$ b) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

c) $(x^2-4)(x^2-10)-72$ d) $x^4+6x^3-11x^2+6x+1$

e) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$ f) $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)-4$

g) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$ h) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)-5$

Bài 6. Phân tích các đa thức thành nhân tử

a) $x^4+x^3+2x^2+x+1$ b) $6a^4+7a^3-37a^2-8a+12$

c) $x^4+6x^3+13x^2+12x+4$ d) $(x^2+3x-4)(x^2+x-6)-24$

e) $x^4+10x^3+26x^2+10x+1$ f) $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)-1680$

g) $x^4+x^3-4x^2+x+1$

Bài 7. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $4x^4+81$ b) $64x^4+y^4$ c) $4x^4+y^4$

d) $4x^8+1$ e) x^4y^4+4 f) x^4+324

Bài 9. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) x^4+64 b) $81x^4+4y^4$ c) $4x^4y^4+1$

d) $4x^4+81$ e) a^4+64 f) a^4+4b^2

Bài 10. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) x^8+x+1 b) $x^{64}+x^{32}+1$ c) $a^{10}+a^5+1$

Bài 11. Phân tích đa thức thành nhân tử $x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1$.

Ta có $\left(x^7+x^5+x^3\right)+\left(x^4+x^2+1\right)=x^3\left(x^4+x^2+1\right)+\left(x^4+x^2+1\right)=\left(x^4+x^2+1\right)\left(x^3+1\right)$
$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=\left(x^2-x+1\right)^2\left(x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

Bài 12. Phân tích đa thức thành nhân tử $x^{11}+x^{10}+x^9+...+x^2+x+1$

Bài 13. Phân tích đa thức thành nhân tử x^8+14x^4+1

Bài 14. Phân tích đa thức thành nhân tử $2x^5-3x^4+6x^3-8x^2+3$.

Bài 15. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2+y^2-z^2+2xy-2z-1$ b) $x^2-y^2+z^2-2xz+2y-1$

c) $x^6-2x^4-x^3y^3+2xy^3$ d) $x^6-x^4-9x^3+9x^2$

Bài 16. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $\left(a+b+c\right)^2+\left(a-b+c\right)^2-4b^2$ b) $a\left(b^2-c^2\right)-b\left(c^2-a^2\right)+c\left(a^2-b^2\right)$

Bài 17. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $xy\left(x+y\right)+yz\left(y+z\right)+zx\left(x+z\right)+3xyz$

b) $xy\left(x+y\right)-yz\left(y+z\right)-zx\left(z-x\right)$

c) $x^4\left(y-z\right)+y^4\left(z-x\right)+z^4\left(x-y\right)$

d) $x\left(y^3-z^3\right)+y\left(z^3-x^3\right)+z\left(x^3-y^3\right)$

Bài 18. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-abc$

b) $a^2\left(b-c\right)+b^2\left(c-a\right)+c^2\left(a-b\right)$

c) $-c^2\left(a-b\right)+b^2\left(a-c\right)-a^2\left(b-c\right)$

d) $ab\left(a+b\right)-bc\left(b+c\right)-ac\left(c-a\right)$

Bài 19. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $(x-y)z^3+(y-z)x^3+(z-x)y^3$

b) $(x-y)-x^3(1-y)+y^3(1-x)$

c) $bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)+ab(c+d)(a-b)$

d) $(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3$

Bài 20. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

a) $A=(x+y)(x^2-y^2)+(y+z)(y^2-z^2)+(z+x)(z^2-x^2)$

b) $B=x^3(z-y^2)+y^3(x-z^2)+z^3(y-z^2)+xyz(xyz-1)$.

Bài 21. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

a) $a(b+c)^2(b-c)+b(c+a)^2(c-a)+c(a+b)^2(a-b)$

b) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

c) $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$

d) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-2abc-a^3-b^3-c^3$

a) $a(b^2+c^2+bc)+b(c^2+a^2+ca)+c(a^2+b^2+ab)$

Bài 22. Phân tích đa thức thành nhân tử $(x^2+y^2+xy)^2-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2$.

Bài 23. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $81x^4(z^2-y^2)-z^2+y^2$

b) $x^6+x^4+x^2y^2+y^4-y^6$

c) $(x+1)^4+(x^2+x+1)^2$

d) $(x+y)^5-x^5-y^5$

Bài 24. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^4-6x^3+12x^2-14x+3$

b) $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3$

c) $4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$

d) $x^4+8x+63$

Bài 25. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $A=a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$

b) $B=a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$

Bài 26. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $B=x(x+2y)^3-y(y+2x)^3$

b) $C=x^4+(x+y)^4+y^4$

c) $D=a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

d) $A=a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a) $4x^2-12x-16=4(x^2-3x-4)=4(x^2+x-4x-4)$

$=4[x(x+1)-4(x+1)]=4(x-4)(x+1)$

b) $3x^2+13x-10=3x^2-2x+15x-10=x(3x-2)+5(3x-2)=(x+5)(3x-2)$

c) $2x^2-7x+3=2x^2-6x-x+3=2x(x-3)-(x-3)=(2x-1)(x-30)$

d) $3x^2-16x+5=3x^2-x-15x+5=x(3x-1)-5(3x-1)=(x-5)(3x-1)$

j) $2x^2-5x-12=2x^2-8x+3x-12=2x(x-4)+3(x-4)=(2x+3)(x-4)$

Bài 2.

a) $x^4-7x^2+\ 6=x^4-x^2-6x^2+6=x^2(x^2-1)-6(x^2-1)=(x-1)(x+1)(x^2-6)$

b) $x^4+2x^2-3=x^4-x^2+3x^2-3=x^2(x^2-1)+3(x^2-1)$

$=(x^2-1)(x^2+3)=(x-1)(x+1)(x^2+3)$

c) $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

d) $x^3-2x^2+5x-4=x^3-x^2-x^2+x+4x-4$

$=x^2(x-1)-x(x-1)+4(x-1)=(x-1)(x^2-x+4)$

e) $x^3-x^2+x+3=x^3+x^2-2x^2-2x+3x+3$

$=x^2(x+1)-2x(x+1)+3(x+1)=(x+1)(x^2-2x+3)$

f) $2x^3-35x+75=2x^3-50x+15x+75=2x(x^2-25)+15(x+5)$

$=2x(x-5)(x+5)+15(x+5)=(x+5)(2x^2-10x+15)$

g) $3x^3-4x^2+13x-4=3x^3-x^2-3x^2+x+12x-4$

$= x^2(3x-1) - x(3x-1) + 4(3x-1) = (3x-1)(x^2 - x + 4)$

h) $6x^3 + x^2 + x + 1 = 6x^3 + 3x^2 - 2x^2 - x + 2x + 1$

$= 3x^2(2x+1) - x(2x+1) + (2x+1) = (2x+1)(3x^2 - x + 1)$

i) $4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 4x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 2x + 2x + 1$

$= 2x^2(2x+1) + 2x(2x+1) + (2x+1) = (2x^2 + 2x + 1)(2x+1)$

Bài 3.

a) Ta có

$$x^3 + 4x^2 - 29x + 24 = (x^3 - x^2) + (5x^2 - 5x) + (-24 + 24)$$
$$= x^2(x-1) + 5x(x-1) - 24(x-1) = (x-1)(x^2 + 5x - 24) = (x-1)(x-3)(x+8)$$

b) Ta có $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3)$

c) Ta có

$$3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5$$
$$= x^2(3x-1) - 2x(3x-1) + 5(3x-1) = (3x-1)(x^2 - 2x + 5)$$

d) Ta có

$$2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = 2x^3 - x^2 - 4x^2 + 2x + 6x - 3$$
$$= x^2(2x-1) - 2x(2x-1) + 3(2x-1) = (2x-1)(x^2 - 2x + 3)$$

e) Ta có

$$3x^3 - 14x^2 + 4x + 3 = 3x^3 + x^2 - 15x^2 - 5x + 9x + 3$$
$$= x^2(3x+1) - 5x(3x+1) + 3(3x+1) = (3x+1)(x^2 - 5x + 3)$$

f) Ta có $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x+2)^2$

Bài 4.

a) Ta có

$$x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019 = (x^4 + x^2 + 1) + (2018x^2 + 2018x + 2018)$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1996(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2019)$$

b) Ta có

$$x^4+2004x^2+2003x+2004=x^4+2004x^2+2004x-x+2004$$
$$=\left(x^4-x\right)+2004\left(x^2+x+1\right)=x\left(x^3-1\right)+2004\left(x^2+x+1\right)$$
$$=x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+2004\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2004\right)$$

Bài 5.

a) Ta có $x^4+6x^3+7x^2-6x+1=x^2\left(x^2+6x+7+\frac{-6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left[x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x-\frac{1}{x}\right)+7\right]$

Đặt $x-\frac{1}{x}=t$ nên ta được $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$. Đa thức đã cho trở thành

$$x^2\left(t^2+2+6t+7\right)=x^2\left(t^2+6t+9\right)=x^2\left(t+3\right)^2$$

Thay t trở lại ta được : $x^2\left(x-\frac{1}{x}+3\right)^2=x^2\left(\frac{x^2-1+3x}{x}\right)^2=\left(x^2+3x-1\right)^2$

Vậy $x^4+6x^3+7x^2-6x+1=\left(x^2+3x-1\right)^2$

b) Ta có $\left(x+1\right)\left(x+7\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)+15=\left(x^2+8x+7\right)\left(x^2+8x+15\right)+15$

Đặt $x^2+8x=t$. Khi đó đa thức đa cho trở thành

$$\left(t+7\right)\left(t+15\right)+15=t^2+22t+105+15=t^2+22t+120=\left(t+10\right)\left(t+12\right)$$
$$=\left(x^2+8x+10\right)\left(x^2+8x+12\right)=\left(x^2+8x+10\right)\left(x+6\right)\left(x+2\right)$$

c) Đặt $x^2-4=t$ khi đó đa thức đã cho trở thành

$$t\left(t-6\right)-72=t^2-6t-72=\left(t-12\right)\left(t+6\right)=\left(x^2-16\right)\left(x^2+2\right)=\left(x-4\right)\left(x+4\right)\left(x^2+2\right)$$

d) Ta có $x^4+6x^3+7x^2+6x+1=x^2\left(x^2+6x+7+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left[x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x+\frac{1}{x}\right)+7\right]$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t$ suy ra $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Đa thức đã cho trở thành

$$x^2\left(t^2-2+6t+7\right)=x^2\left(t^2+6t+5\right)=x^2\left(t+1\right)\left(t+5\right)$$

Thay t trở lại ta được

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)=x^2\left(\frac{x^2+1+x}{x}\right)\left(\frac{x^2+1+5x}{x}\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+5x+1\right)$$

Vậy $x^4+6x^3+7x^2-6x+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+5x+1\right)$.

e) Ta có $\left(x+2\right)\left(x+5\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)-24=\left(x^2+7x+10\right)\left(x^2+7x+12\right)-24$

Đặt $x^2+7x+11=t$. Khi đó đa thức đã cho trở thành

$$\begin{aligned}&(t-1)(t+1)-24=t^2-25=(t-5)(t+5)\\&=(x^2+7x+6)(x^2+7x+16)=(x+1)(x+6)(x^2+7x+16)\end{aligned}$$

f) Ta có $(4x+1)(3x+2)(12x-1)(x+1)-4=(12x^2+11x+2)(12x^2+11x-1)-4$.

Đặt $12x^2+11x=t$. Khi đó đa thức trở thành

$$(t+2)(t-1)-4=t^2+t-6=(t-2)(t+3)=(12x^2+11x-2)(12x^2+11x+3)$$

g) Ta có

$$\begin{aligned}&4(x+5)(x+12)(x+6)(x+10)-3x^2=4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60)-3x^2\\&=x^2\left[4\left(x+17+\frac{60}{x}\right)\left(x+16+\frac{60}{x}\right)-3\right]\end{aligned}$$

Đặt $x+\dfrac{60}{x}=t$. Khi đó đa thức trở thành

$$\begin{aligned}&x^2\left[4(t+17)(t+16)-3\right]=x^2(4t^2+132t+1085)=x^2(2t+31)(2t+35)\\&=x^2\left(2x+\frac{120}{x}+31\right)\left(2x+\frac{120}{x}+35\right)=(2x^2+31x+120)(2x^2+35x+120)\end{aligned}$$

h) Đặt $x^2+3x=t$. Khi đó đa thức trở thành

$$\begin{aligned}&(t+1)(t-3)-5=t^2-2t-8=(t+2)(t-4)\\&=(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)=(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)\end{aligned}$$

Bài 6.

a) Ta có $(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)=x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^2+1)$

b) Ta có

$$\begin{aligned}&6a^4+7a^3-37a^2-8a+12=(6a^4-12a^3)+(19a^3-38a^2)+(a^2-2a)-(6a-12)\\&=6a^3(a-2)+19a^2(a-2)+a(a-2)-6(a-2)=(a-2)(6a^3+19a^2+a-6)\\&=(a-2)(a+3)(2a-1)(3a+2)\end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}&x^4+6x^3+13x^2+12x+4=(x^4+x^3)+(5x^3+5x^2)+(8x^2+8x)+(4x+4)\\&=x^3(x+1)+5x^2(x+1)+8x(x+1)+4(x+1)\\&=(x+1)(x^3+5x^2+8x+4)=(x+1)^2(x+2)^2\end{aligned}$$

d) Ta có

$$\left(x^2+3x-4\right)\left(x^2+x-6\right)-24=\left(x-1\right)\left(x+4\right)\left(x-2\right)\left(x+3\right)-24$$
$$=\left(x-2\right)\left(x+4\right)\left(x-1\right)\left(x+3\right)-24=\left(x^2+2x-8\right)\left(x^2+2x-3\right)-24$$

Đặt $x^2+2x=t$, khi đó đa thức trở thành $\left(t-8\right)\left(t-3\right)-24=t^2-11t=t\left(t-11\right)$.

Thay t trở lại ta được $\left(x^2+2x\right)\left(x^2+2x-11\right)=x\left(x+2\right)\left(x^2+2x-11\right)$.

e) $x^4+10x^3+26x^2+10x+1=x^2\left(x^2+10x+26+\dfrac{10}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=x^2\left[x^2+\dfrac{1}{x^2}+10\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+26\right]$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t$ suy ra $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$. Đa thức trên trở thành

$$x^2\left(t^2-2+10t+26\right)=x^2\left(t^2+10t+24\right)=x^2\left(t+4\right)\left(t+6\right)$$

Thay t trở lại ta được

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}+4\right)\left(x+\frac{1}{x}+6\right)=x^2\left(\frac{x^2+4x+1}{x}\right)\left(\frac{x^2+6x+1}{x}\right)=\left(x^2+4x+1\right)\left(x^2+6x+1\right)$$

Vậy $x^4+10x^3+26x^2+10x+1=\left(x^2+4x+1\right)\left(x^2+6x+1\right)$

f) Ta có $\left(x-4\right)\left(x-7\right)\left(x-5\right)\left(x-6\right)-1689=\left(x^2-11x+28\right)\left(x^2-11x+30\right)-1680$

Đặt $x^2-11x+29=t$. Khi đó đa thức trở thành

$$\left(t-1\right)\left(t+1\right)-1680=t^2-1681=\left(t-41\right)\left(t+41\right)$$

Thay t trở lại đa thức ta được

$$\left(x^2-11x-12\right)\left(x^2-11x+70\right)=\left(x-12\right)\left(x+1\right)\left(x^2-11x+70\right).$$

g) Ta có $x^4+x^3-4x^2+x+1=x^2\left(x^2+x-4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=x^2\left[x^2+\dfrac{1}{x^2}+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4\right]$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t$ suy ra $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$. Đa thức trên trở thành

$$x^2\left(t^2-2+t-4\right)=x^2\left(t^2+t-6\right)=x^2\left(t-2\right)\left(t+3\right)$$

Thay t trở lại ta được

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}+3\right)=x^2\left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right)\left(\frac{x^2+3x+1}{x}\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2+3x+1\right)$$

Vậy $x^4+x^3-4x^2+x+1=\left(x-1\right)^2\left(x^2+3x+1\right)$.

Bài 7.

a) Ta có $4x^4+81=\left(2x^2\right)^2+9^2+2.2x^2.9-2.2x^2.9=\left(2x^2+9\right)^2-36x^2$

$$=\left(2x^2+9\right)^2-\left(6x\right)^2=\left(2x^2+6x+9\right)\left(2x^2-6x+9\right)$$

b) Ta có $64x^4+y^4=\left(8x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.8x^2.y^2-2.8x^2.y^2=\left(8x^2+y^2\right)^2-16x^2y^2$

$$=\left(8x^2+y^2\right)^2-\left(4xy\right)^2=\left(8x^2+4xy+y^2\right)\left(8x^2-4xy+y^2\right)$$

c) Ta có $4x^4+y^4=\left(2x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2=\left(2x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.2x^2.y^2-4x^2y^2$

$$=\left(2x^2+y^2\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(2x^2+y^2+2xy\right)\left(2x^2+y^2-2xy\right)$$

d) Ta có $4x^8+1=\left(2x^4\right)^2+1+2.2x^4.1-4x^4$

$$=\left(2x^4+1\right)^2-\left(2x^2\right)^2=\left(2x^4+2x^2+1\right)\left(2x^4-2x^2+1\right)$$

e) Ta có $x^4y^4+4=\left(x^2y^2\right)^2+2^2=\left(x^2y^2\right)^2+2^2+2.x^2.y^2.2-4x^2y^2$

$$=\left(x^2y^2+2\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(x^2y^2-2xy+2\right)\left(x^2y^2+2xy+2\right)$$

Bài 8.

a) Ta có $64x^4+y^4=\left(8x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.8x^2y^2-16x^2.y^2=\left(8x^2+y^2\right)^2-\left(4xy\right)^2$

$$=\left(8x^2+y^2-4xy\right)\left(8x^2+y^2+4xy\right)$$

b) Ta có $4x^4+y^4=\left(2x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2=\left(2x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.2x^2.y^2-4x^2y^2$

$$=\left(2x^2+y^2\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(2x^2+y^2-2xy\right)\left(2x^2+y^2+2xy\right)$$

c) Ta có $x^4+324=\left(x^2\right)^2+\left(18\right)^2=\left(x^2\right)^2+\left(18\right)^2+2.x^2.18-36x^2$

$$=\left(x^2+18\right)^2-\left(6x\right)^2=\left(x^2+18+6x\right)\left(x^2+18-6x\right)$$

Bài 9.

a) Ta có $x^4+64=\left(x^2\right)^2+8^2=\left(x^2\right)^2+8^2+2.x^2.8-16x^2$

$$=\left(x^2+8\right)^2-\left(4x\right)^2=\left(x^2+8-4x\right)\left(x^2+8+4x\right)$$

b) Ta có $81x^4+4y^4=\left(9x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2=\left(9x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2+2.9x^2.2y^2-36x^2y^2$

$$=\left(9x^2+2y^2\right)-\left(6xy\right)^2=\left(9x^2+2y^2-6xy\right)\left(9x^2+2y^2+6xy\right)$$

c) Ta có $4x^4y^4+1=\left(2x^2y^2\right)^2+1=\left(2x^2y^2\right)^2+1+2.2x^2y^2-4x^2y^2$

$$=\left(2x^2y^2+1\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(2x^2y^2+1+2xy\right)\left(2x^2y^2+1-2xy\right)$$

d) Ta có $4x^4+81=\left(2x^2\right)^2+9^2=\left(2x^2\right)^2+9^2+2.2x^2.9-36x^2$

$$=\left(2x^2+9\right)^2-\left(6x\right)^2=\left(2x^2+9+6x\right)\left(2x^2+9-6x\right)$$

e) Ta có $a^4+64=\left(a^2\right)^2+8^2=\left(a^2\right)^2+8^2+2.a^2.8-16a^2$

$$=\left(a^2+8\right)^2-\left(4a\right)^2=\left(a^2+8+4a\right)\left(a^2+8-4a\right)$$

f) Ta có $a^4+4b^4=\left(a^2\right)^2+\left(2b^2\right)^2+2.a^2.2b^2-4a^2.b^2$

$$=\left(a^2-2b^2\right)^2-\left(2ab\right)^2=\left(a^2-2b^2+2ab\right)\left(a^2-2b^2-2ab\right)$$

Bài 10.

a) Ta có $x^8+x+1=\left(x^8-x^2\right)+\left(x^2+x+1\right)=x^2\left(x^6-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$$=x^2\left(x^3+1\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^6-x^5+x^3-x^2+1\right)$$

b) Ta có $x^{64}+x^{32}+1=x^{64}+2.x^{32}+1-x^{32}=\left(x^{32}+1\right)^2-x^{32}=\left(x^{32}+1+x^{16}\right)\left(x^{32}+1-x^{16}\right)$

c) Ta có

$$a^{10}+a^5+1=\left(a^{10}-a\right)+\left(a^5-a^2\right)+\left(a^2+a+1\right)=a\left(a^9-1\right)+a^2\left(a^3-1\right)+\left(a^2+a+1\right)$$

$$=a\left(a^9-1\right)+a^2\left(a^3-1\right)+\left(a^2+a+1\right)=a\left(a^3-1\right)\left(a^6+2a^3+1\right)+a^2\left(a^3-1\right)+\left(a^2+a+1\right)$$
$$=\left(a^7+2a^4+a\right)\left(a-1\right)\left(a^2+a+1\right)+a^2\left(a-1\right)\left(a^2+a+1\right)+\left(a^2+a+1\right)$$
$$=\left(a^2+a+1\right)\left[\left(a^7+2a^4+a\right)\left(a-1\right)+\left(a^3-a^2\right)+1\right]$$

Bài 11. Ta có

$$\left(x^7+x^5+x^3\right)+\left(x^4+x^2+1\right)=x^3\left(x^4+x^2+1\right)+\left(x^4+x^2+1\right)=\left(x^4+x^2+1\right)\left(x^3+1\right)$$
$$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=\left(x^2-x+1\right)^2\left(x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$$

Bài 12. Ta có

$$x^{11}+x^{10}+x^9+...+x^2+x+1=\left(x^{11}+x^{10}+x^9\right)+\left(x^8+x^7+x^6\right)+...+\left(x^2+x+1\right)$$
$$=x^9\left(x^2+x+1\right)+x^6\left(x^2+x+1\right)+...+\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^9+x^6+x^3+1\right)$$
$$=\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$$

Bài 13. Ta có

$$x^8+2x^4+1+12x^4=\left(x^4+1\right)^2+12x^4=\left(x^4+1\right)^2+2.\left(x^4+1\right).2x^2+4x^4-4x^2\left(x^4+1\right)+8x^4$$
$$=\left(x^4+1+2x^2\right)^2-\left(2x^3-2x\right)^2=\left(x^4+1+2x^2-2x^3+2x\right)\left(x^4+1+2x^2+2x^3-2x\right)$$

Bài 14. Ta có

$$2x^5-3x^4+6x^3-8x^2+3=2x^5-2x^4-x^4+x^3+5x^3-5x^2-3x^2+3$$
$$=2x^4\left(x-1\right)-x^3\left(x-1\right)+5x^2\left(x-1\right)-3\left(x^2-1\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2+3\right)\left(2x+1\right)$$

Bài 15.

a) Ta có

$$x^2+y^2-z^2+2xy-2z-1=\left(x^2+2xy+y^2\right)-\left(z^2+2z+1\right)=\left(x+y\right)^2-\left(z+1\right)^2$$
$$=\left(x+y+z+1\right)\left(x+y-z-1\right)$$

b) Ta có

$$x^2-y^2+z^2-2xz+2y-1=\left(x^2-2xz+z^2\right)-\left(y^2-2y+1\right)$$
$$=\left(x-z\right)^2-\left(y-1\right)^2=\left(x-z+y-1\right)\left(x-z-y+1\right)$$

c) Ta có

$$x^6-2x^4-x^3y^3+2xy^3=x\left(x^5-2x^3-x^2y^3+2y^3\right)=x\left[x^3\left(x^2-2\right)-y^3\left(x^2-2\right)\right]$$
$$=x\left(x^3-y^3\right)\left(x^2-2\right)=x\left(x-y\right)\left(x^2-2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$$

d) Ta có

$$x^6-x^4-9x^3+9x^2=x^2\left(x^4-x^2-9x+9\right)=x^2\left[x^2\left(x^2-1\right)-9\left(x-1\right)\right]=$$
$$=x^2\left[x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)-9\left(x-1\right)\right]=x^2\left(x-1\right)\left(x^3+x^2-9\right)$$

Bài 16.

a) Ta có

$$\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)+\left(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac\right)-4b^2$$
$$=\left(2a^2+2c^2-2b^2+4ac\right)=2\left(a^2+2ac+c^2-b^2\right)=2\left[\left(a+c\right)^2-b^2\right]$$
$$=2\left(a+c+b\right)\left(a+c-b\right)$$

b) Ta có

$$ab^2 - ac^2 - bc^2 + a^2b + a^2c - b^2c = a^2(b+c) + b^2(a-c) - c^2(a+b)$$
$$= a^2(b+c) + b^2\left[(a+b)-(b+c)\right] - c^2(a+b)$$
$$= a^2(b+c) + b^2(a+b) - b^2(b+c) - c^2(a+b)$$
$$= (b+c)(a-b)(a+b) + (a+b)(b-c)(b+c)$$
$$= (a+b)(b+c)(a-b+b-c) = (a+b)(b+c)(a-c)$$

Bài 17.

a) Ta có

$$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(x+z) + 3xyz$$
$$= \left[xy(x+y) + xyz\right] + \left[yz(y+z) + xyz\right] + \left[zx(z+x) + xyz\right]$$
$$= xy(x+y+z) + yz(x+y+z) + zx(x+y+z) = (x+y+z)(xy+yz+zx)$$

b) Ta có

$$xy(x+y) - yz(y+z) - zx(z-x) = xy(x+y) - yz(y+z) - zx\left[(y+z)-(x+y)\right]$$
$$= xy(x+y) - yz(y+z) - zx(y+z) + zx(x+y)$$
$$= x(x+y)(y+z) - z(y+z)(x+y) = (x+y)(y+z)(x-z)$$

c) Ta có

$$x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y) = x^4(y-z) + y^4\left[-(y-z)-(x-y)\right] + z^4(x-y)$$
$$= x^4(y-z) - y^4(y-z) - y^4(x-y) + z^4(x-y) = (y-z)(x^4-y^4) - (x-y)(y^4-z^4)$$
$$= (y-z)(x-y)(x+y)(x^2+y^2) - (x-y)(y-z)(y+z)(y^2+z^2)$$
$$= (x-y)(y-z)\left[(x+y)(x^2+y^2) - (y+z)(y^2+z^2)\right]$$
$$= (x-y)(y-z)(x^3 + xy^2 + x^2y + y^3 - y^3 - yz^2 - y^2z - z^3)$$
$$= (x-y)(y-z)\left[x^3 - z^3 + y^2(x-z) + y(x^2-z^2)\right]$$
$$= (x-y)(y-z)\left[(x-z)(x^2+xz+z^2) + y^2(x-z) + y(x-z)(x+z)\right]$$
$$= (x-y)(y-z)(x-z)(x^2+xz+z^2+y^2+xy+yz)$$

d) Ta có

$$x(y^3-z^3) + y(z^3-x^3) + z(x^3-y^3) = xy^3 - xz^3 + yz^3 - x^3y + x^3z - y^3z$$
$$= x^3(z-y) + y^3(x-z) + z^3(y-x) = x^3(z-y) + y^3\left[-(z-y)-(y-x)\right] + z^3(y-x)$$
$$= x^3(z-y) - y^3(z-y) - y^3(y-x) + z^3(y-x) = (z-y)(x^3-y^3) + (y-x)(z^3-y^3)$$
$$= (z-y)(x-y)(x^2+xy+y^2) + (y-x)(z-y)(z^2+yz+y^2)$$
$$= (z-y)(x-y)(x^2+xy+y^2-z^2-yz-y^2)$$
$$= (z-y)(x-y)(x^2-z^2+xy-yz) = (z-y)(x-y)(x-z)(x+y+z)$$

Bài 18.

a) Ta có

$$\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-abc=a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+ac^2-abc$$
$$=\left(a^2b+ab^2+abc\right)+\left(b^2c+bc^2+abc\right)+a^2c+ca^2=ab\left(a+b+c\right)+bc\left(a+b+c\right)+ac\left(a+c\right)$$
$$=b\left(a+b+c\right)\left(a+c\right)+ac\left(a+c\right)=\left(a+c\right)\left(ab+b^2+bc+ac\right)=\left(a+c\right)\left(b+c\right)\left(a+b\right)$$

b) Ta có

$$a^2\left(b-c\right)+b^2\left(c-a\right)+c^2\left(a-b\right)=a^2\left(b-c\right)+b^2\left[-\left(b-c\right)-\left(a-b\right)\right]+c^2\left(a-b\right)$$
$$=a^2\left(b-c\right)-b^2\left(b-c\right)-b^2\left(a-b\right)+c^2\left(a-b\right)=\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left(a+b\right)-\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(b+c\right)$$
$$=\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left(a+b-b-c\right)=\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(a-c\right)$$

c) Ta có

$$-c^2\left(a-b\right)+b^2\left(a-c\right)-a^2\left(b-c\right)=-c^2\left(a-b\right)+b^2\left[\left(a-b\right)+\left(b-c\right)\right]-a^2\left(b-c\right)$$
$$=-c^2\left(a-b\right)+b^2\left(a-b\right)+b^2\left(b-c\right)-a^2\left(b-c\right)=\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(b+c\right)+\left(b-c\right)\left(b-a\right)\left(b+a\right)$$
$$=\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(b+c-a-b\right)=\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)$$

d) Ta có

$$ab\left(a+b\right)-bc\left(b+c\right)-ac\left(c-a\right)=ab\left(a+b\right)-bc\left[\left(a+b\right)+\left(c-a\right)\right]-ac\left(c-a\right)$$
$$=ab\left(a+b\right)-bc\left(a+b\right)-bc\left(c-a\right)-ac\left(c-a\right)$$
$$=b\left(a+b\right)\left(a-c\right)-c\left(c-a\right)\left(b+a\right)=\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(a-c\right)$$

Bài 19.

a) Ta có

$$\left(x-y\right)z^3+\left(y-z\right)x^3+\left(z-x\right)y^3=z^3\left(x-y\right)+x^3\left[-\left(x-y\right)-\left(z-x\right)\right]+y^3\left(z-x\right)$$
$$=z^3\left(x-y\right)-x^3\left(x-y\right)+y^3\left(z-x\right)-x^3\left(z-x\right)=\left(x-y\right)\left(z^3-x^3\right)+\left(z-x\right)\left(y^3-x^3\right)$$
$$=\left(x-y\right)\left(z-x\right)\left(z^2+zx+x^2\right)+\left(z-x\right)\left(y-x\right)\left(y^2+xy+x^2\right)$$
$$=\left(x-y\right)\left(z-x\right)\left(z^2+zx+x^2-y^2-xy-x^2\right)=\left(x-y\right)\left(z-x\right)\left(z-y\right)\left(z+y-x\right)$$

b) Ta có

$$\left(x-y\right)-x^3\left(1-y\right)+y^3\left(1-x\right)=\left(x-y\right)-x^3\left[\left(x-y\right)+\left(1-x\right)\right]+y^3\left(1-x\right)$$
$$=\left(x-y\right)-x^3\left(x-y\right)-x^3\left(1-x\right)+y^3\left(1-x\right)=\left(x-y\right)\left(1-x^3\right)-\left(1-x\right)\left(x^3-y^3\right)$$
$$=\left(x-y\right)\left(1-x\right)\left(1+x+x^2\right)-\left(1-x\right)\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$$
$$=\left(x-y\right)\left(1-x\right)\left(1+x+x^2-x^2-xy-y^2\right)=\left(x-y\right)\left(1-x\right)\left(1-y\right)\left(x+y+1\right)$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}
&bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)+ab(c+d)(a-b)\\
&=bc(ab-ac+bd-dc)-ac(ab-bc+ad-dc)+ab(ac-bc+ad-bd)\\
&=bc(ab-ac+bd-dc)-ac\left[(ab-ac+bd-dc)+(ac-bc+ad-bd)\right]\\
&\qquad +ab(ac-bc+ad-bd)\\
&=(ab-ac+bd-dc)(bc-ac)-(ac-bc+ad-bd)(ac-ab)\\
&=(a+d)(b-c)c(b-a)-(c+d)(a-b)a(c-b)\\
&=(b-c)(b-a)(ac+dc-ca-ad)=(b-c)(b-a)(c-a).d
\end{aligned}$$

d) Ta có

$$\begin{aligned}
&(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3=y^3(a-x)-x^3\left[(a-x)+(x-y)\right]+a^3(x-y)\\
&=y^3(a-x)-x^3(a-x)-x^3(x-y)+a^3(x-y)=(a-x)(y^3-x^3)-(x-y)(x^3-a^3)\\
&=(x-a)(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x-y)(x-a)(x^2+xa+a^2)\\
&=(x-a)(x-y)(x^2+xy+y^2-x^2-xa-a^2)=(x-a)(x-y)(y-a)(y+a+x)
\end{aligned}$$

Bài 20.

a) Ta có $A=(x+y)(x^2-y^2)+(y+z)(y^2-z^2)+(z+x)(z^2-x^2)$

$$\begin{aligned}
A&=(x+y)(x^2-y^2)+(y+z)(y^2-z^2)+(z+x)(z^2-x^2)\\
&=(x+y)(x^2-y^2)-(y+z)(x^2-y^2+z^2-x^2)+(z+x)(z^2-x^2)\\
&=(x^2-y^2)(x-z)+(z^2-x^2)(x-y)=(x-y)(z-x)(y-z)
\end{aligned}$$

e) Ta có $B=x^3(z-y^2)+y^3(x-z^2)+z^3(y-z^2)+xyz(xyz-1)$.

$$\begin{aligned}
B&=x^3(z-y^2)+y^3(x-z^2)+z^3(y-x^2)+xyz(xyz-1)\\
&=x^3z-x^3y^2+y^3x-y^3z^2+z^3y-z^3x^2+x^2y^2z^2-xyz\\
&=(x^2y^2z^2-y^3z^2)-(z^3x^2-z^3y)-(x^3y^2-xy^3)+(x^3z-xyz)\\
&=y^2z^2(x^2-y)-z^3(x^2-y)-xy^2(x^2-y)+xz(x^2-y)\\
&=(x^2-y)(y^2z^2-z^3-xy^2+xz)=(x^2-y)\left[(y^2z^2-z^3)-(xy^2-xz)\right]\\
&=(x^2-y)\left[z^2(y^2-z)-x(y^2-z)\right]=(x^2-y)(y^2-z)(y^2-z)
\end{aligned}$$

Bài 21.

a) Sử dụng phép tách hạng tử $c-a=-\left[(b-c)+(a-b)\right]$ ta có

$$\begin{aligned}&a(b+c)^2(b-c)-b(c+a)^2\left[(b-c)+(a-b)\right]+c(a+b)^2(a-b)\\&=(b-c)\left[a(b+c)^2-b(c+a)^2\right]+(a-b)\left[c(a+b)^2-b(c+a)^2\right]\\&=(b-c)(ab^2+ac^2-bc^2-ba^2)+(a-b)(ca^2+cb^2-bc^2-ba^2)\\&=(b-c)\left[ab(b-a)+c^2(a-b)\right]+(a-b)\left[a^2(c-b)+bc(b-c)\right]\\&=(a-b)(b-c)(c^2-ab-a^2+bc)=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\end{aligned}$$

b) Sử dụng hằng đẳng thức $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

$$\begin{aligned}A&=a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=a(b-c)^3-b\left[(b-c)-(a-b)\right]^3+c(a-b)^3\\&=a(b-c)^3-b\left[(b-c)^3+3(b-c)(a-b)(c-a)+(a-b)^3\right]+c(a-b)^3\\&=(b-c)^3(a-b)-3b(b-c)(a-b)(c-a)-(a-b)^3(b-c)\\&=(b-c)(a-b)\left[(b-c)^2-3b(a-c)-(a-b)^2\right]\\&=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\end{aligned}$$

c) Sử sụng pháp tách hạng tử $c-a=-\left[(b-c)+(a-b)\right]$ ta có

$$\begin{aligned}&a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)\\&=a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)-c^2a^2\left[(b-c)+(a-b)\right]\\&=(b-c)(b^2c^2-c^2a^2)+(a-b)(a^2b^2-c^2a^2)\\&=c^2(b-c)(b-a)(a+b)+a^2(a-b)(b-c)(b+c)\\&=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

d) Biến đổi và sử dụng hằng đẳng thức $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ ta được.

$$\begin{aligned}&a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-2abc-a^3-b^3-c^3\\&=a(b-c)^2+b(c+a)^2+c(a-b)^2-a^3-b^3-c^3\\&=a\left[(b-c)^2-a^2\right]+b\left[(c+a)^2-b^2\right]+c\left[(a-b)^2-c^2\right]\\&=a\left[(b-c)^2-a^2\right]+b(a+c-b)(a+c+b)+c\left[(a-b)^2-c^2\right]\\&=(a+c-b)(b+a-c)(c+b-a)\end{aligned}$$

e) Ta có

$$\begin{aligned}&a(b^2+c^2+bc)+b(c^2+a^2+ca)+c(a^2+b^2+ab)\\&=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+3abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

Bài 22.

$$\left(x^2+y^2+xy\right)^2-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2$$
$$=x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2xy^3+2x^3y-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2$$
$$=x^4+y^4+2x^2y^2+2xy\left(x^2+y^2\right)-z^2\left(x^2+y^2\right)=\left(x^2+y^2\right)^2+2xy\left(x^2+y^2\right)-z^2\left(x^2+y^2\right)$$
$$=\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+2xy-z^2\right)=\left(x^2+y^2\right)\left[\left(x+y^2\right)-z^2\right]=\left(x^2+y^2\right)\left(x+y+z\right)\left(x+y-z\right)$$

Bài 23.

a) Ta có

$$81x^4\left(z^2-y^2\right)-z^2+y^2=81x^4\left(z^2-y^2\right)-\left(z^2-y^2\right)=\left(z^2-y^2\right)\left(81x^4-1\right)$$
$$=\left(z-y\right)\left(z+y\right)\left(9x^2-1\right)\left(9x^2+1\right)=\left(z-y\right)\left(z+y\right)\left(3x+1\right)\left(3x-1\right)\left(9x^2+1\right)$$

b) Ta có

$$x^6+x^4+x^2y^2+y^4-y^6=x^6-y^6+x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$
$$=\left(x^3\right)^2-\left(y^3\right)^2+\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)+\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)$$
$$=\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)+\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)$$
$$=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2-y^2+1\right)$$

c) Ta có

$$\left(x+1\right)^4+\left(x^2+x+1\right)^2=\left(x+1\right)^4+\left[x\left(x+1\right)+1\right]^2=\left(x+1\right)^4+x^2\left(x+1\right)^2+2x\left(x+1\right)+1$$
$$=\left(x+1\right)^2\left[\left(x+1\right)^2+x^2\right]+\left(2x^2+2x+1\right)=\left(2x^2+2x+1\right)\left[\left(x+1\right)^2+1\right]$$
$$=\left(x^2+2x+2\right)\left(2x^2+2x+1\right)$$

d) Ta có

$$\left(x+y\right)^5-x^5-y^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5-x^5-y^5$$
$$=5xy\left(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3\right)=5xy\left[\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)+2xy\left(x+y\right)\right]$$
$$=5xy\left(x+y\right)\left(x^2+y^2+xy\right)$$

Bài 24.

a) Ta có $x^4-6x^3+12x^2-14x+3=\left(x^2+ax+1\right)\left(x^2+bx+3\right)$

Hoặc $x^4-6x^3+12x^2-14x+3=\left(x^2+ax-1\right)\left(x^2+bx-3\right)$

Giả sử ta có $x^4-6x^3+12x^2-14x+3=x^4+\left(a+b\right)x^3+\left(4+ab\right)x^2+\left(3a+b\right)x+3$

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases}a+b=-6\\4+ab=12\\3a+b=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\b=-2\end{cases}.$

Vậy $x^4-6x^3+12x^2-14x+3=\left(x^2-4x+1\right)\left(x^2-2x+3\right)$

a) Ta có $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3=\left(ax+by+3\right)\left(cx+dy-1\right)$

Hay $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3=acx^2+\left(ad+bc\right)xy+bdy^2+\left(3c-a\right)x+\left(3d-b\right)y-3$

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases}ac=12\\ad+bc=-10\\bd=-12\\3c-a=5\\3d-b=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=-6\\c=3\\d=2\end{cases}$.

Do vậy ta được $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3=\left(4x-6y+3\right)\left(3x+2y-1\right)$

d) Ta có $4x^4+4x^3+5x^2+2x+1=\left(ax^2+bx+1\right)\left(cx^2+dx+1\right)$.

Đồng nhất hệ số hai vế ta được $4x^4+4x^3+5x^2+2x+1=\left(2x^2+x+1\right)^2$

d) Ta có $x^4+8x+63=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$.

Khai triển và đồng nhất hệ số hai vế ta được $x^4+8x+63=\left(x^2-4x+7\right)\left(x^2+4x+9\right)$

Bài 25.

a. Đặt $x=a^3-b^3;y=b^3-c^3$. Khi đó ta có $x+y=a^3-c^3$. Do vậy

$$\begin{aligned}A&=ay-b\left(x+y\right)+cx=y\left(a-b\right)-x\left(b-c\right)=\left(b^3-c^3\right)\left(a-b\right)-\left(a^3-b^3\right)\left(b-c\right)\\&=\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left(b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2\right)\\&=\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left(bc-ab+c^2-a^2\right)=\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left(c-a\right)\left(a+b+c\right)\end{aligned}$$

b) Đặt $x=a^2-b^2;y=b^2-c^2$. Khi đó ta có $x+y=a^2-c^2$. Do vậy

$$\begin{aligned}B&=a^3y-b^3\left(x+y\right)+c^3x=y\left(a^3-b^3\right)-x\left(b^3-c^3\right)\\&=\left(b^2-c^2\right)\left(a^3-b^3\right)-\left(a^2-b^2\right)\left(b^3-c^3\right)\\&=\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left[\left(b+c\right)\left(a^2+ab+b^2\right)-\left(a+b\right)\left(b^2+bc+c^2\right)\right]\\&=\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left[b\left(a^2+ab+b^2-b^2-bc-c^2\right)+\left(a^2c+abc+b^2c-ab^2-abc-ac^2\right)\right]\\&=\left(a-c\right)\left(ab+b^2+bc+ac-b^2\right)=\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(a-c\right)\left(ab+bc+ca\right)\end{aligned}$$

Do vậy ta được $B=\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(a-c\right)\left(ab+bc+ca\right)$.

Bài 26.

a) Đặt $m=x+y$. Khi đó ta có

$$B = x(m+y)^3 - y(m+x)^3 = x\left[m^3 + 3my(m+y) + y^3\right] - y\left[m^3 + 3mx(m+x) + x^3\right]$$
$$= m^3(x-y) - xy(x^2-y^2) - 3mxy(m+x-m-y) = (x-y)\left[m^3 - xy(x+y) - 3mxy\right]$$
$$= m(x-y)(m^2-4xy) = m(x-y)\left[(x+y)^2 - 4xy\right] = m(x-y)^3 = (x+y)(x-y)^3$$

b) Đặt $m = x+y$. Khi đó ta có

$$C = (m-y)^4 + m^4 + y^4 = m^4 - 4m^3y + 6m^2y^2 - 4my^3 + y^4 + m^4 + y^4$$
$$= 2(m^4 + 2m^2y^2 + y^4) - 4my(m^2+y^2) + 2m^2y^2$$
$$= 2(m^2 + y^2 - my)^2 = 2\left[(x+y)^2 + y^2 - (x+y)y\right]^2 = 2(x^2+xy+y^2)^2$$

d. Đặt $m = a^2 + b^2 + c^2$. Khi đó ta có

$$D = (a^2+b^2+c^2)^2 - 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$
$$= m^2 - 4\left[b^2(a^2+c^2) + c^2a^2\right] = m^2 - 4\left[b^2(m-b^2) + c^2a^2\right]$$
$$= (m-2b^2)^2 - (2ca)^2 = (m-2b^2-2ca)(m-2b^2+2ca)$$
$$= (a^2+b^2+c^2-2b^2-2ca)(a^2+b^2+c^2-2b^2+2ca)$$
$$= \left[(a-c)^2 - b^2\right]\left[(a+c)^2 - b^2\right] = (a-c-b)(a-c+b)(a+c-b)(a+b+c)$$

d) Đặt $m = x+y+z; a+b-c = x; b+c-a = y; c+a-b = z$.

Khi đó ta có $2a = y+z; 2b = z+x; 2c = x+y$. Do đó ta được

$$2A = (y+z)x^2 + (z+x)y^2 + (x+y)z^2 + 2xyz$$
$$= xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz = (x+y)(y+z)(z+x)$$

Do vậy ta được $A = 4abc$

C. Một số ứng dụng của phép phân tích đa thức thành nhân tử.

Trong các nội dung trên ta được biết về các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử. Tuy nhiên một câu hỏi được đặt ra là phân tích thành nhân tử được ứng dụng để giải các dạng bài tập toán nào. Ta có thể kể ra một số ứng dụng của phép phân tích thành nhân tử như

+ Vận dụng để tích giá trị các biểu thức.

+ Vận dụng để tìm giá trị của biến khi biết giá trị của biểu thức.

+ Chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức.

+ Vận dụng giải các bài toán số học và tổ hợp suy luận.

+ Một số dạng bài tập toán khác.

Bài 1. Thực hiện phép tính bằng cách hợp lí.

a) $A = 202^2 - 54^2 + 256.352$ b) $B = \dfrac{43^2 - 11^2}{(36.5)^2 + (37.5)^2}$ c) $C = \dfrac{97^3 + 83^3}{180} - 97.83$

• ***Định hướng tư duy.*** *Để tính giá trị của biểu thức số trên ta sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ và phép phân tích đa thức thành nhân tử.*

Lời giải

a) $A = 202^2 - 54^2 + 256.352 = (202-54)(202+54) + 256.352 = 148.256 + 256.352$

$= 256(148 + 352) = 256.500 = 128000$

b) $B = \dfrac{43^2 - 11^2}{(36.5)^2 - (27.5)^2} = \dfrac{43^2 - 11^2}{5^2(36^2 - 27^2)} = \dfrac{(43-11)(43+11)}{5^2(36-27)(36+27)} = \dfrac{32.54}{25.9.63}$

c) $C = \dfrac{97^3 + 83^3}{180} - 97.83 = \dfrac{(97+83)(97^2 - 97.83 + 83^2)}{180} - 97.83 = 97^2 - 97.83 + 83^2 - 97.83$

$= 97^2 - 2.97.83 + 83^2 = (97-83)^2 = 14^2 = 196$

Bài 2. Tìm các giá trị x biết.

a) $4x^2 - 25 - (2x-5)(2x+7) = 0$ b) $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$

• ***Định hướng tư duy.*** *Để ý đến vế trái của của đẳng thức trên ta thấy các đa thức đó có thể phân tích thành nhân tử, do đó ta biến đổi đa thức trái về dạng tích và sử dụng tính chất* $A.B = 0$ *thì* $A = 0$ *hoặc* $B = 0$.

Lời giải

a) Ta có $4x^2 - 25 - (2x-5)(2x+7) = (2x-5)(2x+5) - (2x-5)(2x+7) = -2(2x-5)$.

Do đó $4x^2-25-(2x-5)(2x+7)=0 \Leftrightarrow 2x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

b) Ta có $2x^3+3x^2+2x+3=x^2(2x+3)+(2x+3)=(2x+3)(x^2+1)$.

Do đó $2x^3+3x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow 2x+3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$.

Bài 3. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=10$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=(xy+yz+zx)^2+(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2$$

- ***Định hướng tư duy.*** *Để tính giá trị của biểu thức P ta cần biến đổi biểu thức P làm xuất hiện dạng* $x^2+y^2+z^2$.

Lời giải

Biến đổi biểu thức P và áp dụng $x^2+y^2+z^2=10$ ta được

$$\begin{aligned}P&=(xy+yz+zx)^2+(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2\\&=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xzy(x+y+z)+x^4+y^2z^2+y^4\\&\qquad+z^2x^2+z^4+x^2y^2-2xyz(x+y+z)\\&=x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=(x^2+y^2+z^2)^2=10^2=100\end{aligned}$$

Bài 4. Cho các số thực a, b, c khác nhau theo từng đôi một thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tính giá trị biểu thức

$$A=\frac{a^2(a-bc)+b^2(b-ca)+c^2(c-ab)}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$$

- ***Định hướng tư duy.*** *Để tính giá trị của biểu thức A ta cần biến đổi biểu thức A làm xuất hiện dạng* $a+b+c$.

Lời giải

Biến đổi biểu thức A và sử dụng $a+b+c=3$ ta được

$$\begin{aligned}A&=\frac{a^2(a-bc)+b^2(b-ca)+c^2(c-ab)}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}=\frac{a^3+b^3+c^3-abc(a+b+c)}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}\\&=\frac{a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3-3abc-3ab(a+b)}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}=\frac{(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}\\&=\frac{(a+b+c)\left[(a+b)^2-c(a+b)+c^2\right]-9ab}{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}=\frac{3(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Bài 5. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3abc$. Tính giá trị biểu thức

$$A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$$

• ***Định hướng tư duy.*** *Sử dụng phép phân tích đa thức thành nhân tử ta biến đổi giả thiết về dạng* $(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$. *Để ý rằng* $a+b+c\neq 0$ *nên ta suy ra được* $a=b=c$. *Đến đây thay vào biểu thức A và tính giá trị biểu thức A.*

Lời giải

Ta có $a^3+b^3+c^3=3abc$ nên $a^3+b^3+c^3-3abc=0$. Ta có

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3-3abc-3ab(a+b)\\&=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=(a+b+c)\left[(a+b)^2-c(a+b)+c^2\right]-3ab(a+b+c)\\&=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\end{aligned}$$

Do đó từ $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ ta được $(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$.

Hay ta được $a+b+c=0$ hoặc $a=b=c$.

+ Nếu $a+b+c=0$ thì $a+b=-c; b+c=-a; c+a=-b$. Khi đó ta có

$$A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=-1$$

+ Nếu $a=b=c$ thì ta được $A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)=2.2.2=8$

Bài 6. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $ab+bc+ca=0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$$

• ***Định hướng tư duy.*** *Sử dụng phép phân tích đa thức thành nhân tử ta biến đổi giả thiết về dạng* $a^2=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$. *Áp dụng tương tự ta tính được giá trị của biểu thức A.*

Lời giải

Do a, b, c khác 0 và $ab+bc+ca=0$ nên $a^2+ab+bc+ca=a^2$ hay $a^2=(a+b)(a+c)$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $b^2=(a+b)(b+c)$ và $c^2=(b+c)(c+a)$.

Do đó ta được $a^2b^2c^2=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$ hay $(a+b)(b+c)(c+a)=\pm abc$.

Ta có $A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\pm 1$.

Bài 7. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$ và $x^3+y^3=z(3xy-z^2)$. Tính giá trị biểu thức $A=673(x^{2020}+y^{2020}+z^{2020})+1$.

• ***Định hướng tư duy.*** *Biến đổi giả thiết ta được* $x^3+y^3+z^3=3xyz$*, sử dụng phép phân tích đa thức thành nhân tử kết hợp với* $x+y+z=3$ *ta suy ra được* $x=y=z=1$*. Đến đây ta tính được giá trị của biểu thức A.*

Lời giải

Từ $x^3+y^3=z(3xy-z^2)$ ta được $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Tương tự như trên và kết hợp với $x+y+z=3$ ta được $x=y=z$. Do vậy suy ra $x=y=z=1$.

Thay $x=y=z=1$ vào biểu thức đã cho ta được $A=673.3+1=2020$.

Bài 8. Chứng minh rằng giá trị của các đa thức sau đây luôn không âm với mọi giá trị của biến.

a) $A=(x-y)^2(z^2-2z+1)-2(z-1)(x-y)^2+(x-y)^2$

b) $B=(x^2+y^2)(z^2-4z+4)-2(z-2)(x^2+y^2)+x^2+y^2$

• ***Định hướng tư duy.*** *Quan sát các biểu thức A và B ta thấy để chứng minh A và B không âm ta phân tích A và B về dạng các bình phương.*

Lời giải

a) Biến đổi biểu thức A ta được

$$\begin{aligned}A&=(x-y)^2(z^2-2z+1)-2(z-1)(x-y)^2+(x-y)^2\\&=(x-y)^2(z-1)^2-2(z-1)(x-y)^2+(x-y)^2\\&=(x-y)^2\left[(z-1)^2-2(z-1)+1\right]=(x-y)^2(z-2)^2\end{aligned}$$

Do $(x-y)^2\ge 0$ và $(z-2)^2\ge 0$ nên $A\ge 0$. Bài toán được chứng minh hoàn tất.

b) Biến đổi biểu thức A ta được

$$\begin{aligned}B &= \left(x^2+y^2\right)\left(z^2-4z+4\right)-2\left(z-2\right)\left(x^2+y^2\right)+x^2+y^2\\ &= \left(x^2+y^2\right)\left(z-2\right)^2-2\left(z-2\right)\left(x^2+y^2\right)+x^2+y^2\\ &= \left(x^2+y^2\right)\left[\left(z-2\right)^2-2\left(z-2\right)+1\right]=\left(x^2+y^2\right)\left(z-3\right)^2\end{aligned}$$

Do $x^2+y^2\ge 0$ và $\left(z-3\right)^2\ge 0$ nên $B\ge 0$. Bài toán được chứng minh hoàn tất.

Bài 9. Cho a, b, c là các số hữu tỉ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)$ là bình phương của một số hữu tỉ.

- ***Định hướng tư duy.*** *Do* $ab+bc+ca=1$ *nên ta được* $a^2+1=\left(a+b\right)\left(c+a\right)$. *Áp dụng tương tự ta phân tích* $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)=\left[\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\right]^2$.

Lời giải

Do $ab+bc+ca=1$ nên ta có $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=\left(a+b\right)\left(c+a\right)$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $b^2+1=\left(a+b\right)\left(b+c\right)$ và $c^2+1=\left(c+a\right)\left(b+c\right)$.

Do vậy $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)=\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(c+a\right)^2=\left[\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\right]^2$.

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Bài 10. Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$. Chứng minh rằng $a=b=c=d$.

- ***Định hướng tư duy.*** *Để ý rằng* $A^2+B^2=0$ *khi* $A=B=0$ *ta biến đổi và phân tích được giả thiết về dạng* $\left(a^2-b^2\right)^2+\left(c^2-d^2\right)^2+2\left(ab-cd\right)^2=0$. *Đến đây ta có điều cần chứng minh.*

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned}&a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd \Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0\\ &\Leftrightarrow a^4+b^4-2a^2b^2+c^4+d^4-2c^2d^2+2\left(a^2b^2-2abcd+c^2d^2\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)^2+\left(c^2-d^2\right)^2+2\left(ab-cd\right)^2=0\end{aligned}$$

Do $\left(a^2-b^2\right)^2\ge 0;\left(c^2-d^2\right)^2\ge 0;\left(ab-cd\right)^2\ge 0$. Nên từ đẳng thức trên ta được

$$\begin{cases}\left(a^2-b^2\right)^2=0\\ \left(c^2-d^2\right)^2=0\\ \left(ab-cd\right)^2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2-b^2=0\\ c^2-d^2=0\\ ab-cd=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2=b^2\\ c^2=d^2\\ ab=cd\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\pm b\\ c=\pm d\\ ab=cd\end{cases} \Rightarrow a=b=c=d$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Bài 11. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)=xyz$. Chứng minh rằng:

$$x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=\left(x+y+z\right)^{2019}$$

- ***Định hướng tư duy.*** *Biến đổi giả thiết về dạng* $\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)=0$. *Từ đó suy ra trong ba số x, y, z có hai số đối nhau. Từ đó ta có điều cần chứng minh.*

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned}&x^2y+xy^2+y^2z+zy^2+z^2x+zx^2+3xyz=xyz\\ \Leftrightarrow &\left(x^2y+xy^2\right)+\left(y^2z+xyz\right)+\left(z^2y+z^2x\right)+\left(zx^2+xyz\right)=0\\ \Leftrightarrow &xy\left(x+y\right)+yz\left(x+y\right)+z^2\left(x+y\right)+zx\left(x+y\right)=0\\ \Leftrightarrow &\left(x+y\right)\left(z^2+xy+yz+zx\right)=0 \Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)=0\end{aligned}$$

Do vậy ta được $x=-y$ hoặc $y=-z$ hoặc $z=-x$.

Dễ thấy khi $x=-y$ ta được $x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=\left(x+y+z\right)^{2019}$. Các trường hợp còn lại hoàn toàn tương tự.

Bài 12. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=2019$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2-bc}{a^2+2019}+\frac{b^2-ca}{b^2+2019}+\frac{c^2-ab}{c^2+2019}=0$$

- ***Định hướng tư duy.*** *Để ý đến phép biến đổi* $a^2+2019=a^2+ab+bc+ca=\left(a+b\right)\left(a+c\right)$ *ta quy đồng biểu thức P và chứng minh bài toán.*

Lời giải

Để ý rằng $a^2+2019=a^2+ab+bc+ca=\left(a+b\right)\left(a+c\right)$.

Do đó $\dfrac{a^2-bc}{a^2+2019}=\dfrac{a^2-bc}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}$. Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$P=\frac{a^2-bc}{a^2+2019}+\frac{b^2-ca}{b^2+2019}+\frac{c^2-ab}{c^2+2019}=\frac{a^2-bc}{(a+b)(c+a)}+\frac{b^2-ca}{(b+c)(a+b)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(b+c)}$$
$$=\frac{(a^2-bc)(b+c)+(b^2-ca)(c+a)+(c^2-ab)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{a^2b+a^2c-b^2c-bc^2+b^2c+b^2a-c^2a-ca^2+c^2a+c^2b-a^2b-ab^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$$

Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất.

Bài 13. Cho a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng $A=ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ chia hết cho 30.

• ***Định hướng tư duy.*** *Bài toán cho trên là một bài toán số học. Để chứng minh A chia hết cho 30 ta đo chứng minh A chia hết cho 5 và 6. Để ý phân tích biểu thức A ta được*

$$ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a^2+b^2)[ab(a-1)(a+1)-ab(b-1)(b+1)]$$

Như vậy ta thấy A chia hết cho 6. Do đó ta cần chứng minh A chia hết cho 5. Để ý rằng Một số chính phương khi chia cho 5 có các số dư là 0, 1, 4. Do đó ta xét số dư của a và b khi chia cho 5 để chứng minh A chia hết cho 5.

Lời giải

Biến đổi biểu thức A ta có

$$A=ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a^2+b^2)[ab(a^2-1)-ab(b^2-1)]$$
$$=(a^2+b^2)[ab(a-1)(a+1)-ab(b-1)(b+1)]$$

• Với mọi số nguyên a và b thì $ab(a-1)(a+1)$ và $ab(b-1)(b+1)$ luôn chia hết cho 6.

• Để chứng minh $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ chia hết cho 30 ta cần chứng minh được $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ chia hết cho 5. Xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1. Nếu trong hai số nguyên a và b có một số chia hết cho 5, khi đó $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ chia hết cho 5.

+ Trường hợp 2. Nếu a và b có cùng số dư khi chia cho 5 thì ta được $a-b$ chia hết cho 5 nên $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ chia hết cho 5.

+ **Trường hợp 3.** Nếu a và b có số dư khác nhau khi chia cho 5 thì ta được a^2+b^2 chia hết cho 5. Từ đó ta suy ra được $ab\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)$ chia hết cho 5.

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có $ab\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)$ chia hết cho 5.

Do 5 và 6 nguyên tố cùng nhau nên từ các kết quả trên ta suy ra A chia hết cho 30.

Bài 14. Chứng minh biểu thức $S=n^3\left(n+2\right)^2+\left(n+1\right)\left(n^2-5n+1\right)-2n-1$ chia hết cho 120 với n là số nguyên.

- ***Định hướng tư duy.***. *Để chứng minh S chia hết cho120 ta đo chứng minh A chia hết cho 3, 5 và 8. Để ý phân tích biểu thức A ta được*

Lời giải

Dễ thấy $120=3.5.8$ và $\left(3;5\right)=\left(5;8\right)=\left(3;8\right)=1$ nên ta đi chứng minh S chia hết cho 3, 5, 8. Mặt khác khai triển S ta được $S=n^5+5n^4+5n^3-5n^2-6n$.

- Biến đổi biểu thức S ta được

$$\begin{aligned}S&=n^5+5n^4+5n^3-5n^2-6n=n^5-n^3+6n^3+5\left(n^4-n^2\right)-6n\\&=n^2\left(n-1\right)n\left(n+1\right)+6n^3+5n\left(n-1\right)n\left(n+1\right)-6n\end{aligned}$$

Do $\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\vdots 3$ nên ta suy ra được S chia hết cho 3.

- Ta có $S=n^5+5n^4+5n^3-5n^2-6n=n^5-n+5\left(n^4+n^3-n^2-n\right)$. Mặt khác lại có

$$\begin{aligned}n^5-n&=n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n^2+1\right)=n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n^2-4+5\right)\\&=n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n^2-4\right)+5n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\\&=\left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right)+5n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $n^5-n\vdots 5$ nên S chia hết cho 5.

- Ta có $S=n^5+5n^4+5n^3-5n^2-6n=4n^3\left(n+1\right)+n\left(n+1\right)\left(n^3+n-6\right)$

+ Nếu $n=2k\left(k\in Z\right)$ thì ta được $S=32k^5+80k^4+40k^3-8k^2-12k\left(k+1\right)$, Từ đó suy ra S chia hết cho 8.

+ Nếu $n=2k+1\left(k\in Z\right)$ thì ta được $S=4n^3\left(n+1\right)+n\left(n+1\right)\left(n^3+n-6\right)$

Ta có $4n^3\left(n+1\right)=8\left(2k+1\right)^3\left(k+1\right)$ chia hết cho 8.

Lại có $n\left(n+1\right)\left(n^3+n-6\right)=\left(2k+1\right)\left(2k+2\right)\left(8k^3+12k^2+8k-4\right)\vdots 8$.

Do đó S chia hết cho 8.

Từ các kết quả trên suy ra S chia hết cho 120 với mọi số nguyên n.

Bài 15. Cho a và b là các số nguyên sao cho tồn tại hai số nguyên liên tiếp c và d thỏa mãn điều kiện $a-b=a^2c-b^2d$. Chứng minh rằng $|a-b|$ là một số chính phương.

- ***Định hướng tư duy.*** *Biến đổi giả thiết của bài toán ta được*

$$a-b=a^2c-b^2d \Leftrightarrow a-b=a^2c-b^2(c+1) \Leftrightarrow a-b=c(a^2-b^2)-b^2$$
$$\Leftrightarrow a-b=c(a-b)(a+b)-b^2 \Leftrightarrow (a-b)\left[c(a+b)+1\right]=b^2$$

Để chứng minh $|a-b|$ *là số chính phương ta cần chứng minh được hai số* $a-b$ *và* $c(a+b)+1$ *nguyên tố cùng nhau.*

Lời giải

Do c và d là hai số nguyên liên tiếp nên ta có $d=c+1$. Từ đó ta được

$$a-b=a^2c-b^2d \Leftrightarrow a-b=a^2c-b^2(c+1) \Leftrightarrow a-b=c(a^2-b^2)-b^2$$
$$\Leftrightarrow a-b=c(a-b)(a+b)-b^2 \Leftrightarrow (a-b)\left[c(a+b)+1\right]=b^2$$

Gọi d là ước chung lớn nhất của $a-b$ và $c(a+b)+1$

Khi đó ta có $\begin{cases} a-b \vdots d \\ c(a+b)+1 \vdots d \end{cases}$, nên ta được $(a-b).\left[c(a+b)+1\right] \vdots d^2$

Do đó từ $(a-b)\left[c(a+b)+1\right]=b^2$ ta suy ra được $b^2 \vdots d^2 \Rightarrow b \vdots d$

Mà ta có $a-b \vdots d$ nên suy ra được $a \vdots d$. Do đó $a+b \vdots d$

Kết hợp với $c(a+b)+1 \vdots d$ ta suy ra được $1 \vdots d$ nên $d=1$.

Từ đó ta có $(a-b, c(a+b)+1)=1$. Do đó $|a-b|$ là một số chính phương.

Bài 16. Cho a, b, c là các số nguyên khác không và $a \neq c$ thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2$ không phải là số nguyên tố.

- ***Định hướng tư duy.*** *Biến đổi giả thiết của bài toán ta được*

$$\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2} \Leftrightarrow a(c^2+b^2)=c(a^2+b^2) \Leftrightarrow (a-c)(b^2-ac)=0$$

Để chứng minh $a^2+b^2+c^2$ *là không thể là số nguyên tố ta cần chứng minh được* $a^2+b^2+c^2$ không thể có hai ước là 1 và chính nó.*hai số* $a-b$ *và* $c(a+b)+1$ *nguyên tố cùng nhau.*

Lời giải

Ta có $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2} \Leftrightarrow a(c^2+b^2)=c(a^2+b^2) \Leftrightarrow (a-c)(b^2-ac)=0$.

Do a khác c nên ta được $b^2-ac=0$ hay $b^2=ac$. Từ đó ta được

$$a^2+b^2+c^2=a^2+ac+c^2=a^2+2ac+c^2-ac=(a+c)^2-b^2=(a-b+c)(a+b+c)$$

Do a, b, c là các số nguyên và a khác c nên suy ra $a^2+b^2+c^2>0$. Do đó nếu $a^2+b^2+c^2$ là một số nguyên tố thì có bốn trường hợp sau xẩy ra.

- **Trường hợp 1.** Với $a-b+c=1$ và $a+b+c=a^2+b^2+c^2$

Khi đó ta được $a+c=b+1$ nên suy ra $a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$

Từ đó ta suy ra $(a-1)^2+(c-1)^2+b^2=0$ nên $a=c=1$, điều này trái với giả thiết a và c khác nhau.

- **Trường hợp 2.** Với $a+b+c=1$ và $a-b+c=a^2+b^2+c^2$.

Khi đó ta được $a+c-1=-b$ nên suy ra $a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$

Từ đó ta suy ra $(a-1)^2+(c-1)^2+b^2=0$ hay $a=c=1$, điều này trái với giả thiết a và c khác nhau.

- **Trường hợp 3.** Với $a-b+c=-1$ và $-(a+b+c)=a^2+b^2+c^2$

Khi đó ta được $a+c=b-1$ nên suy ra $a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$

Từ đó ta suy ra $(a+1)^2+(c+1)^2+b^2=0$ hay $a=c=-1$, điều này trái với giả thiết a và c khác nhau.

- **Trường hợp 4.** Với $a+b+c=-1$ và $-(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

Khi đó ta được $a+c=-b-1$ nên suy ra $a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$

Từ đó ta suy ra $(a+1)^2+(c+1)^2+b^2=0$ hay $a=c=-1$, điều này trái với giả thiết a và c khác nhau.

Như vậy nếu nếu $a^2+b^2+c^2$ là một số nguyên tố thì tất cả các trường hợp đều mâu thuẫn với giả thiết $a \neq c$. Do đó $a^2+b^2+c^2$ không thể là một số nguyên tố.

Bài 17. Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2+b^2+ab=c^2+d^2+cd$. Chứng minh rằng $a+b+c+d$ là hợp số.

Lời giải

Ta có $a^2+b^2+ab=c^2+d^2+cd \Leftrightarrow (a+b)^2-ab=(c+d)^2-cd$.

Hay ta được $(a+b)^2-(c+d)^2=ab-cd \Leftrightarrow (a+b+c+d)(a+b-c-d)=ab-cd$.

Để chứng minh $a+b+c+d$ là hợp số ta sử dụng phương pháp phản chứng.

Thật vậy, giả sử $a+b+c+d$ là số nguyên tố. Đặt $a+b+c+d=p$.

Khi đó $p(a+b-c-d)=ab-cd$ nên ta suy ra được $(ab-cd)\,\vdots\, p$

Do đó ta được $(ab-cd)+c(a+b+c+d)\,\vdots\, p$ hay $ab+c(a+b+c)\,\vdots\, p \Leftrightarrow (a+c)(b+c)\,\vdots\, p$.

Mặt khác do p là số nguyên tố và $a,b,c,d>0$ nên $0<c+a, c+b<p$.

Từ đó ta được $(c+a,p)=(b+c,p)=1$, điều này làm cho $(a+c)(b+c)\,\vdots\, p$ mâu thuẫn.

Do đó điều giả sử trên là sai hay $a+b+c+d$ là hợp số.

Bài 18. Người ta viết lên bảng dãy số $\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};...;\frac{1}{2016}$. Mỗi lần xóa đi hai số bất kì x, y trên bảng thì lại viết thêm số $x+y+xy$. Sau một số lần thực hiện như vậy thì trên bảng còn lại một số. Tìm số còn lại đó.

Lời giải

Thực hiện cộng mỗi số trên bảng với 1 ta được dãy số $\frac{1}{1}+1;\frac{1}{2}+1;\frac{1}{3}+1;...;\frac{1}{2016}+1$.

Đặt $x+y+xy=m$, khi đó ta được $m+1=(x+1)(y+1)$. Như vậy sau mối lần xóa đi hai số $x+1$ và $y+1$ của dãy thì lại thay bởi số $(x+1)(y+1)$. Do đó lúc đầu ta có dãy số $x;y;a;b;c;...$ và sau khi xóa đi hai số x và y ta được dãy số $m;a;b;c;...$.

Chú ý rằng $(x+1)(y+1)(a+1)(b+1)(c+1)...=(m+1)(a+1)(b+1)(c+1)...$.

Như vậy sau mỗi lần xóa thì tích trên không thay đổi.

Gọi k là số cuối cùng trên bảng sau khi xóa thì ta được

$$k+1=\left(\frac{1}{1}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)...\left(\frac{1}{2016}+1\right)=2017$$

Do đó ta được $k=2016$ hay số cuối cùng còn lại trên bảng là 2016.

• ***Nhận xét.*** *Ta phát hiện ra tính chất bất biến nhờ đẳng thức* $xy+x+y+1=(x+1)(y+1)$. *Như vậy nếu giữ nguyên đẳng thức này và thay đổi dãy số trên thì ta tìm được bài toán mới hoặc thay đổi đẳng thức trên ta cũng được bài toán mới. Người ta viết lên bảng dãy số* $1;2;3;...;2016$. *Mỗi lần xóa đi hai số bất kì x, y trên bảng thì lại viết thêm số* $x+y+xy$. *Sau một số lần thực hiện như vậy thì trên bảng còn lại một số. Tìm số còn lại đó.*

• *Người ta viết lên bảng dãy số* $\frac{1007}{1};\frac{1007}{2};\frac{1007}{3};...;\frac{1007}{2013}$. *Mỗi lần xóa đi hai số bất kì x, y trên bảng thì lại viết thêm số* $2xy-x-y+1$. *Sau một số lần thực hiện như vậy thì trên bảng còn lại một số. Tìm số còn lại đó.*

MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài . Tính giá trị của biểu thức sau $A=\frac{x^{16}-1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}$ với $x=2020$

Ta có $x^{16}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$ nên ta được

$$A=\frac{x^{16}-1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}=x-1$$

Do đó với $x=2020$ ta được $A=2019$

Bài . Cho $(x+3y)^3-6(x+3y)^2+12(x+3y)=-19$. Tìm giá trị của biểu thức $x+3y$

Biến đổi giả thiết của bài toán ta được

$$(x+3y)^3-6(x+3y)^2+12(x+3y)-8=-27\Leftrightarrow(x+3y-2)^3=(-3)^3$$

Do đó $x+3y-2=-3$ hay $x+3y=-1$

Bài . Cho $a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=1$. Tính giá trị của $S=a^2+b^{2019}+c^{2020}$.

Ta có $a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=1$ nên $a;b;c\in[-1;1]$.

Do đó $a^3+b^3+c^3-(a^2+b^2+c^2)=a^2(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1)\le 0$.

Suy ra $a^3+b^3+c^3\le 1$ nên a, b, c chỉ nhận một trong hai giá trị là 0 hoặc 1 .

Do đó $b^{2019}=b^2;c^{2020}=c^2$. Kết hợp với giả thiết ta được $S=a^2+b^{2012}+c^{2013}=1$.

Bài . Cho a, b, c là các số khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2c^2}{a}+\frac{c^2a^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}=3abc$$

Đặt $\frac{1}{a}=x;\frac{1}{b}=y;\frac{1}{c}=z$, khi đó thì $x+y+z=0$. Ta có

$$\frac{b^2c^2}{a}+\frac{c^2a^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}=a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^2b^2c^2.\left(x^3+y^3+z^3\right)$$

Từ $x+y+z=0$ hay $x+y=-z$ nên ta được

$$x^3+y^3+3xy\left(x+y\right)=\left(-z\right)^3 \Leftrightarrow x^3+y^3-3xyz=-z^3 \Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$$

Vậy $\frac{b^2c^2}{a}+\frac{c^2a^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}=3abc$.

Bài . Cho a, b, c là các số khác 0 thỏa mãn $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=3a^2b^2c^2$. Tính giá trị biểu thức $P=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$.

Đặt $ab=x;bc=y;ca=z$ ta được.

Biến đổi $x^3+y^3+z^3=3xyz$ ta được $x+y+z=0$ hoặc $x=y=z$.

+ Với $x+y+z=0$ ta được $ab+bc+ca=0$. Từ đó biến đổi biểu thức P ta được

$$P=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)=\frac{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}{abc}=\frac{\left(ab+bc\right)\left(cb+ca\right)\left(ac+ab\right)}{\left(abc\right)^2}=-1$$

+ Với $x=y=z$ ta được $ab=bc=ca$ hay $a=b=c$. Từ đó biến biểu thức P ta được

$$P=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)=2.2.2=8$$

Bài . Cho các số x, y, z thỏa $x+y+z=1$ và $x^3+y^3+z^3=1$.

Tính giá trị của biểu thức $A=x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}$.

Từ $x+y+z=1$ ta được $\left(x+y+z\right)^3=1$. Kết hợp với $x^3+y^3+z^3=1$ ta được

$$\left(x+y+z\right)^3-\left(x^3+y^3+z^3\right)=0 \Leftrightarrow \left(x+y+z\right)^3-x^3-y^3-z^3=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)^3-z^3-\left(x^3+y^3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+y+z-z\right)\left[\left(x+y+z\right)^2+\left(x+y+z\right)z+z^2\right]-\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz+xz+yz+z^2+z^2-x^2+xy-y^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(3z^2+3xy+3yz+3xz\right)=0 \Leftrightarrow 3\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(x+z\right)=0$$

Do đó trong ba số x, y, z có hai số đối nhau và một số bằng 1. Từ đó ta được $A=1$.

Bài . Với giá trị nào của a và b thì đa thức $\left(x-a\right)\left(x-10\right)+1$ phân tích thành tích của một đa thức bậc nhất có hệ số nguyên.

Giả sử $\left(x-a\right)\left(x-10\right)+1=\left(x-m\right)\left(x-n\right)$ với m và n là các số nguyên.

Khi đó khai triển ta được $x^2-\left(a+10\right)x+10a+1=x^2-\left(m+n\right)x+mn$.

Đồng nhất hệ số hai vế ta được $\begin{cases} m+n=a+10 \\ mn=10a+1 \end{cases}$. Do đó khử hệ số a ta có

$$mn=10\left(m+n-10\right)+1 \Leftrightarrow mn-10m-10n+100=1 \Leftrightarrow m\left(n-10\right)-10\left(n-10\right)=1$$

Vì m và n là các số nguyên ta có $\begin{cases} m-10=1 \\ n-10=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m-10=-1 \\ n-10=-1 \end{cases}$.

Đến đây ta được $a=8$ hoặc $a=12$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài . Cho a, b, c là các số đôi một khác nhau thỏa mãn $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=x$. Tính giá trị của biểu thức $P=x.abc$.

Ta có $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}$ nên $a-b=\frac{b-c}{bc}$. Tương tự ta có $b-c=\frac{c-a}{ac}$ và $c-a=\frac{a-b}{ab}$.

Do đó ta được $\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)=\frac{b-c}{bc}.\frac{c-a}{ac}.\frac{a-b}{ab} \Leftrightarrow \left(abc\right)^2=1 \Leftrightarrow abc=\pm 1$.

+ Nếu $abc=1$ thì ta có $P=x$. Khi đó giả thiết trở thành $a+ac=b+ba=c+cb=x$.

$$\begin{cases} x^3=\left(a+ac\right)\left(b+ba\right)\left(c+cb\right)=abc\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)=\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right) \\ a+b+c+ab+ac+cb=3x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3=abc+ab+ac+bc+1+a+b+c=ab+ac+bc+a+b+c+2 \\ a+b+c+ab+ac+cb=3x \end{cases}$$

Do vậy $x^3 = 3x + 2 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}$. Dễ thấy khi $x = 2$ thì suy ra $a = b = c = 1$. Tr]ơngf hợp này loại do a, b, c đôi một khác nhau. Từ đó ta được $x = -1$ nên ta tính được $P = -1$

+ Nếu $abc = -1$, biến đổi hoàn toàn tương tự $a - ac = b - ba = c - cb = x$. Do đó

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = (a - ac)(b - ba)(c - cb) = abc(a - 1)(b - 1)(c - 1) = (a - 1)(b - 1)(c - 1) \\ a + b + c - ac - ba - cb = 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = abc - ab - ac - bc - 1 + a + b + c = -ab - ac - bc + a + b + c - 2 \\ a + b + c - ac - ba - cb = 3x \end{cases}$$

Từ đó ta được $x^3 = 3x - 2 \Leftrightarrow x \in \{1; -2\}$. Dễ thấy khi $x = -2$ thì suy ra $a = b = c = -1$.

Tr]ơngf hợp này loại do a, b, c đôi một khác nhau. Từ đó ta được $x = 1$ nên ta tính được $P = -1$

Vậy giá trị của P là $P = -1$.

Bài 23. Cho ba số a, b, c thoả các điều kiện $a - b = 7; b - c = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a^2 - c^2 - 2ab + 2bc}$.

Nhìn vào tử số của P ta có biến đổi quen thuộc

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2}$$

Từ đây phải biến đổi giả thiết để xuất hiện thêm $c - a$.

Ta có $c - a = -(b - c) - (a - b) = -3 - 7 = -10$.

Đặt T là tử của của P ta được T = 79. Đặt M là mẫu của P, khi đó M cũng có thể phân tích thành tích được thành

$$M = (a - c)(a + c - 2b) = (a - c)(a - b + c - b) = 40$$

Vậy ta được $P = \dfrac{79}{40}$.

Bài 26. Cho các số a, b, c khác 0 và khác nhau đôi một thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \dfrac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \dfrac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$.

Do $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ ta suy ra được $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$.

Do $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca>0$ với a, b, c đôi một khác nhau nên $a+b+c=0$.

Khi đó $\dfrac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}=\dfrac{ab^2}{a^2+(b-c)(b+c)}=\dfrac{ab^2}{a^2+(b-c)(-a)}=\dfrac{b^2}{a+c-b}=\dfrac{b^2}{-b-b}=\dfrac{b}{-2}$

Tương tự $\dfrac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}=\dfrac{c}{-2}$ và $\dfrac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}=\dfrac{a}{-2}$. Cộng theo vế các đẳng thức trên ta

được $P=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}+\dfrac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}=\dfrac{b}{-2}+\dfrac{c}{-2}+\dfrac{a}{-2}=-\dfrac{1}{2}(a+b+c)=0$.

Bài . Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Tính giá trị biểu thức:

a) $A=\dfrac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$

b) $B=\dfrac{(a^2+2bc-1)(b^2+2ca-1)(c^2+2ab-1)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$

a) Ta có $1+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c)$

Tương tự ta có $1+b^2=(a+b)(b+c)$ và $1+c^2=(b+c)(c+a)$.

Do đó $A=\dfrac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}=\dfrac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}=1$.

b) Ta có $a^2+2bc-1=a^2+2bc-ab-bc-ca=(a-b)(a-c)$.

Tương tự $b^2+2ca-1=(b-c)(b-a)$ và $c^2+2ab-1=(c-a)(c-b)$.

Do đó $B=\dfrac{(a^2+2bc-1)(b^2+2ca-1)(c^2+2ab-1)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}=\dfrac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}=1$.

Bài . Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=18$ và

$xyz=-1$. Tính giá trị của $S=\dfrac{1}{xy+z-1}+\dfrac{1}{yz+x-1}+\dfrac{1}{zx+y-1}$.

Ta có $xy+z-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$

Tương tự $yz+x-1=(y-1)(z-1)$ và $zx+y-1=(z-1)(x-1)$. Suy ra ta được

$$S=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}=\frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}$$
$$=\frac{-1}{xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1}=\frac{1}{xy+yz+zx}$$

Ta có $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ nên $xy+yz+zx=-7$

Suy ra ta được $S=-\frac{1}{7}$.

Bài . Cho các số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn các điều kiện

$$x^3=3x-1;\ y^3=3y-1;\ z^3=3z-1$$

Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2=6$.

Từ $x^3=3x-1;\ y^3=3y-1;\ z^3=3z-1$ ta được

$$\begin{cases} x^3-y^3=3(x-y) \\ y^3-z^3=3(y-z) \\ z^3-x^3=3(z-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y^2+yz+z^2=3 \\ z^2+zx+x^2=3 \end{cases}$$

Do đó ta được $x^2-z^2+xy-yz=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+z)=0 \Leftrightarrow x+y+z=0$.

Công theo vế các đẳng thức trên ta được $2\left(x^2+y^2+z^2\right)+(xy+yz+zx)=9$.

Hay ta được $\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{1}{2}(x+y+z)^2=9$ do đó $x^2+y^2+z^2=6$.

Bài . Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{1+c^2}+\frac{b-c}{1+a^2}+\frac{c-a}{1+b^2}=0$$

Ta có $1+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c)$. Hoàn toàn tương tự ta có

$1+b^2=ab+bc+ca+b^2=(b+a)(b+c)$ và $1+c^2=ab+bc+ca+c^2=(c+a)(c+b)$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{a-b}{1+c^2}=\dfrac{a-b}{(c+a)(c+b)}=\dfrac{a+c-b-c}{(c+a)(c+b)}=\dfrac{1}{c+b}-\dfrac{1}{c+a} \\ \dfrac{b-c}{1+a^2}=\dfrac{b-c}{(a+b)(a+c)}=\dfrac{b+a-a-c}{(a+b)(a+c)}=\dfrac{1}{a+c}-\dfrac{1}{a+b} \\ \dfrac{c-a}{1+b^2}=\dfrac{c-a}{(b+c)(b+a)}=\dfrac{c+b-a-b}{(b+c)(b+a)}=\dfrac{1}{b+a}-\dfrac{1}{b+c} \end{cases}$

Do đó ta được $\dfrac{a-b}{1+c^2}+\dfrac{b-c}{1+a^2}+\dfrac{c-a}{1+b^2}=\dfrac{1}{c+b}-\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+c}-\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+a}-\dfrac{1}{b+c}=0$.

Bài . Cho ba số a, b, c thỏa mãn $c^2+2(ab-bc-ac)=0, b\neq c$ và $a+b\neq c$. Chứng minh rằng $\dfrac{2a^2-2ac+c^2}{2b^2-2bc+c^2}=\dfrac{a-c}{b-c}$.

Ta có $c^2+2(ab-bc-ac)=0$ nên ta được

$$\begin{aligned} a^2 &= a^2+c^2+2(ab-bc-ac)=(a^2-2ac+c^2)+2(ab-bc) \\ &=(a-c)^2+2b(a-c)=(a-c)(a-c+2b) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} 2a^2-2ac+c^2 &= (a^2-2ac+c^2)+a^2=(a-c)^2+a^2 \\ &=(a-c)^2+(a-c)(a-c+2b)=2(a-c)(a+b-c) \end{aligned}$$

Tương tự ta có $2b^2-2bc+c^2=2(b-c)(a+b-c)$.

Do đó $\dfrac{2a^2-2ac+c^2}{2b^2-2bc+c^2}=\dfrac{2(a-c)(a+b-c)}{2(b-c)(a+b-c)}=\dfrac{a-c}{b-c}$.

Bài . Cho các số thực a, b, x, y thỏa mãn $x+y=a+b$ và $x^2+y^2=a^2+b^2$. Chứng minh rằng $x^n+y^n=a^n+b^n$ với n là một số nguyên dương.

Ta có $x^2+y^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow (x-a)(x+a)+(y-b)(y+b)=0$.

Mà $x-a=b-y$ thay vào trên ta được $(b-y)(x+a-b-y)=0$.

+ Nếu $b-y=0$ thì ta được $b=y$. Do đó từ giả thiết của bài toán ta được $a=x$.

Như vậy ta được $x^n+y^2=a^n+b^2$

+ Nếu $x+a-b-y=0 \Leftrightarrow x-y=b-a \Leftrightarrow 2x=2b \Leftrightarrow x=b$ do đó $y=a$. Do vậy ta được $x^n+y^n=a^n+b^n$.

Bài . Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $2x^3+\frac{1}{4}y^3-xyz=-\frac{2}{27}z^3$. Tính giá trị của biểu thức $N=\left(1-\frac{6x+3y-2z}{6x-3y+2z}\right)^{2020}$

Ta có $2x^3+\frac{1}{4}y^3-xyz=\frac{-2z^3}{27}\Leftrightarrow(6x)^3+(3y)^3+(2z)^3=108xyz$.

Đặt $a=6x;b=3y;c=2z$. Khi đó giả thiết trở thành $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Biến đổi giả thiết ta được $(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$.

Do x, y, z là các số dương nên a, b, c cũng là các số dương, suy ra $a+b+c>0$. Do đó từ đẳng thức trên ta được $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ nên $a=b=c$. Như vậy ta được $6x=3y=2z$. Do đó suy ra

$$N=\left(2-\frac{6x+3y-2z}{6x-3y+2z}\right)^{2020}=\left(2-\frac{2z+2z-2z}{2z-2z+2z}\right)^{2020}=1$$

Bài . Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn x khác y và

$$x\left(y^2-xz\right)(1-yz)=y\left(x^2-yz\right)(1-xz)$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=x+y+z$.

Biến đổi giả thiết của bài toán ta được

$$\begin{aligned}
&\left(x^2-yz\right)y(1-xz)=x(1-yz)\left(y^2-xz\right)\\
&\Leftrightarrow x^2y-x^3yz-y^2z+xy^2z^2=xy^2-x^2z-x^2yz^2\\
&\Leftrightarrow x^2y-x^3yz-y^2z+xy^2z^2-xy^2+x^2z+xy^3z-x^2yz^2=0\\
&\Leftrightarrow xy(x-y)-xyz\left(yz+y^2-xz-x^2\right)+z\left(x^2-y^2\right)=0\\
&\Leftrightarrow (x-y)\left[xy-xyz(x+y+z)+xz+yz\right]=0
\end{aligned}$$

Do x khác y nên suy ra $xy+xz+yz-xyz(x+y+z)=0$.

Hay $xy+xz+yz=xyz(x+y+z)$. Lại do x, y, z khác 0 nên ta được

$$xy+xz+yz=xyz(x+y+z)\Leftrightarrow x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài . Chứng minh với mọi số nguyên n thì n^3-n chia hết cho 6.

Ta có $n^3 - n = n(n^2-1) = (n-1)n(n+1)$. Biểu thức là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên suy ra $(n^3 - n) \vdots 6$.

Bài . Chứng minh rằng $n^6 - n^4 - n^2 + 1$ chia hết cho 128 với n là số lẻ.

Ta có $n^6 - n^4 - n^2 + 1 = n^4(n^2-1) - (n^2-1) = (n^2-1)(n^4-1) = (n^2-1)^2(n^2+1)$

Vì n là số lẻ nên đặt tồn tại số nguyên k để $n = 2k+1$. Khi đó ta có

$$(n^2-1)^2 = \left[(2k+1)^2 - 1\right]^2 = (4k^2+4k)^2 = \left[4k(k+1)\right]^2$$

Ta có $k(k+1)$ chia hết cho 2 nên nên $\left[4k(k+1)\right]^2 \vdots 64$.

Mặt khác $n^2 + 1 = (2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2+2k+1)$ chia hết cho 2.

Do đó ta được $n^6 - n^4 - n^2 + 1 = (n^2-1)^2(n^2+1) \vdots 128$.

Bài 34. Chữ số hàng đơn vị trong hệ thập phân của số $M = a^2 + ab + b^2$ (với a, b là các số tự nhiên khác 0) là 0.

a) Chứng minh M chia hết cho 20.

b) Tìm chữ số hàng chục của M.

Lời giải

a) Vì chứ số tận cùng của M là 0 nên M chia hết cho 5. Xét các trường hợp sau

+ Cả a và b đều là số lẻ nên a^2 và b^2 đều là số lẻ, suy ra M là số lẻ, trường hợp này không xẩy ra

+ Một trong hai số a và b có một số chẵn và một số lẻ, không mất tính tổng quát ta giả sử a là số lẻ, b là số chẵn. Khi đó a^2 là số lẻ và b^2 là số chẵn nên M là số lẻ, trường hợp này cũng không xẩy ra.

Do đó cả hai số a và b đều là số chẵn. Khi đó M chia hết cho 4, từ đó suy ra M chia hết cho 20

b) Ta có $(a^2 + ab + b^2)(a-b) = a^3 - b^3 \vdots 5$ nên $(a^3 - b^3)(a^3 + b^3) \vdots 5$

Lại có $a^6 - a^2 = a^2(a-1)(a+1)(a^2+1) \vdots 5$. Tương tự ta có $b^6 - b^2 \vdots 5$.

Do đó ta được $a^2 - b^2 \vdots 5$, từ đó ta được $ab(a-b) \vdots 5$ nên ta có

$$ab(a-b)(a-b)\vdots 5 \Leftrightarrow ab(a^2-2ab+b^2)\vdots 5$$

Suy ra $abM\vdots 5$. Từ đó suy ra $ab.3ab\vdots 5$ nên $ab\vdots 5$

Ta có $M=a^2+ab+b^2\vdots 5$ suy ra $bM=ab(a+b)+b^3\vdots 5$. Mà $ab(a+b)\vdots 5$ nên $b^3\vdots 5$ hay $b\vdots 5$

Suy ra $a^2=M-b(a+b)\vdots 5$ nên $a^2\vdots 5$ hay $a\vdots 5$ nên $M\vdots 25$.

Lại có 4 và 25 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $M\vdots 100$ hay chứ số hàng chục của M là 0.

Bài 83. Cho p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^4+2019q^4$ chia hết cho 20.

Trích đề TS lớp 10 trường THPT Chuyên Thành phố Hà Nội năm học 2018 – 2019

Lời giải

+ Lời giải 1. Ta có $p^4+2019q^4=p^4-q^4+2020q^4$. Do đó đến chứng minh $p^4+2019q^4$ chia hết cho 20 ta cần chứng minh p^4-q^4 chia hết cho 20. Để ý rằng ta có $20=4.5$ và $(4,5)=1$ nên ta đi chứng minh p^4-q^4 chia hết cho 4 và 5.

◦ Ta có $p^4-1=(p-1)(p+1)(p^2+1)$ và $q^4-1=(q-1)(q+1)(q^2+1)$. Do p Do p và q là các số nguyên tố lớn hơn 5 nên p và q là các số nguyên tố lẻ nên $(p-1)(p+1)$ và $(q-1)(q+1)$ cùng chia hết cho 4. Điều này dẫn đến p^4-1 và q^4-1 cùng chia hết cho 4.

Đến đây ta suy ra được $p^4-q^4=(p^4-1)-(q^4-1)$ chia hết cho 4.

◦ Ta có

$$p^4-1=(p-1)(p+1)(p^2+1)=(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)+5(p-1)(p+1)(p^2+1).$$

Để ý rằng $(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$ chia hết cho 5. Mà do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên không chia hết cho 5, do vậy ta có $(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$ chia hết cho 5. Từ đây suy ra p^4-1 chia hết cho 5. Lập luận hoàn toàn tương tự ta cũng có q^4-1 chia hết cho 5. Đến đây ta suy ra p^4-q^4 chia hết cho 5.

Kết hợp các kết quả trên ta có điều phải chứng minh.

Bài 88. Cho hai số nguyên dương m, n thỏa mãn $m+n+1$ là một ước nguyên tố của $2\left(m^2+n^2\right)-1$. Chứng minh rằng $m.n$ là một số chính phương.

Trích đề TS lớp 10 trườngTH PT Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An năm học 2018 – 2019

Lời giải

Giả sử m và n là hai số nguyên dương khác nhau. Khi đó ta có

$$\left(m+n\right)^2-1=\left(m+n-1\right)\left(m+n+1\right)\vdots\left(m+n+1\right)$$

Mà theo giả thiết ta có $2\left(m^2+n^2\right)-1$ chia hết cho $m+n+1$

Do đó ta có $2\left(m^2+n^2\right)-1-\left[\left(m+n\right)^2-1\right]\vdots\left(m+n+1\right)$. Do đó ta được

$\left(m-n\right)^2\vdots\left(m+n+1\right)$.

Lại do $m+n+1$ là một số nguyên tố nên từ trên ta suy ra được $\left|m-n\right|\vdots\left(m+n+1\right)$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $m>n$, khi đó ta có $m-n\vdots\left(m+n+1\right)$.

Từ đó suy ra $m-n\ge m+n+1\Leftrightarrow 2n+1\le 0$, điều này vô lí vì n là số nguyên dương.

Do vậy điều giả sử m và n khác nhau là sai nên suy ra $m=n$. Từ đó ta có $m.n=m^2$ là một số chính phương.

Bài 94. Đặt $N=a_1+a_2+a_3+...+a_{2017}+a_{2018}$ và $M=a_1^5+a_2^5+a_3^5+...+a_{2017}^5+a_{2018}^5$, trong đó $a_1;a_2;a_3;...;a_{2018}$ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu N chia hết cho 30 thì M chia hết cho 30.

Trích đề TS lớp 10 trườngTHPT Chuyên Tỉnh Hải Dương năm học 2018 – 2019

Lời giải

Với a là số tự nhiên ta có

$$\begin{aligned}a^5-a&=a\left(a-1\right)\left(a+1\right)\left(a^2+1\right)=a\left(a-1\right)\left(a+1\right)\left(a^2-4+5\right)\\&=a\left(a-1\right)\left(a+1\right)\left(a^2-4\right)+5a\left(a-1\right)\left(a+1\right)\\&=a\left(a-1\right)\left(a+1\right)\left(a-2\right)\left(a+2\right)+5a\left(a-1\right)\left(a+1\right)\end{aligned}$$

Để ý rằng $\left(a-2\right)\left(a-1\right)a\left(a+1\right)\left(a+2\right)$ và $5\left(a-1\right)a\left(a+1\right)$ chia hết cho 2, 3 và 5. Mà ta có 2, 3, 5 nguyên tố với nhau theo từng đôi một nên ta có

$\left(a-2\right)\left(a-1\right)a\left(a+1\right)\left(a+2\right)$ và $5\left(a-1\right)a\left(a+1\right)$ chia hết cho 30. Do vậy a^5-a chia hết cho 30. Ta có

$$\begin{aligned}M-N&=\left(a_1^5+a_2^5+a_3^5+...+a_{2017}^5+a_{2018}^5\right)-\left(a_1+a_2+a_3+...+a_{2017}+a_{2018}\right)\\&=\left(a_1^5-a_1\right)+\left(a_2^5-a_2\right)+\left(a_3^5-a_3\right)+...+\left(a_{2018}^5-a_{2018}\right)\end{aligned}$$

Áp dụng cách chứng minh như trên ta có

$\left(a_1^5-a_1\right);\left(a_2^5-a_2\right);\left(a_3^5-a_3\right);...;\left(a_{2018}^5-a_{2018}\right)$ cùng chia hết cho 30. Do vậy $M-N$ chia hết cho 30. Mà ta có N chia hết cho 30 nên suy ra M chia hết cho 30.

Bài . Cho biểu thức $A=2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4$. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác tam giác thì A nhận giá trị dương.

Ta có

$$\begin{aligned}A&=2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4=4a^2b^2-\left(2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2+a^4+b^4+c^4\right)\\&=-\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-4b^2c^2\right]=-\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)-2bc\right]\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)+2bc\right]\\&=-\left[\left(b-c\right)^2-a^2\right]\left[\left(b+c\right)^2-a^2\right]=-\left(b-c-a\right)\left(b-c+a\right)\left(b+c-a\right)\left(b+c-a\right)\\&=\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\left(a+b-c\right)\left(a+b+c\right)\end{aligned}$$

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên $a+b-c>0; b+c-a>0; c-a+b>0$.

Do vậy A nhận giá trị dương.

Bài 18. Trên bảng cho 2014 số tự nhiên từ 1 đến 2014. Thực hiện liên tiếp phép biến đổi sau: Mỗi lần xoá đi hai số bất kỳ a, b có trên bảng rồi viết thêm số $a+b-\frac{1}{2}ab$ vào bảng. Khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số thì dừng lại. Tìm số còn lại đó.

Lời giải

Trong quá trình biến đổi, giả sử trên bảng có dãy số $a_1;\ a_2;\ ...;\ a_n$

Ta xét biểu thức sau $P=\left|\left(a_1-2\right)\left(a_2-2\right)...\left(a_n-2\right)\right|$. Ta chứng minh su mỗi lần xóa thì giá trị biểu thức P giảm đi hai lần.

Giả sử ta xóa đi hai số a và b khi đó tích P mất đi thừa số $\left(a-2\right)\left(b-2\right)$ nhưng khi thay bằng $a+b-\frac{1}{2}ab$ thì tích P có thêm thừa số $\left|a+b-\frac{1}{2}ab-2\right|=\frac{\left|\left(a-2\right)\left(b-2\right)\right|}{2}$

giảm đi một nửa nên P giảm đi một nửa. Khi xóa đi hai số và thay bằng một số nên sau mỗi lần xóa trên bảng giảm đi một số.

Mà trên bảng có 2014 số nên sau 2013 lần xóa thì P giảm đi 2^{2013} lần.

Khi đó ta có giá trị $P=\left|(1-2)(2-2)...(2014-2)\right|=0$

Giả sử số còn lại trên bảng là x khi đó ta có $P=\left|x-2\right|=0$ hay $x=2$.

Vậy số cuối cùng trên bảng là 2.

Bài 3. Người ta viết trên bảng dãy các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100. Thực hiện trò chơi như sau: Tiến hành xóa hai số a, b bất kì trong dãy số trên và viết lại một số là a^3+b^3. Thực hiện trò chơi như trên cho đến khi trên bảng còn lại một số. Hỏi số còn lại trên bảng có thể là 9876543212016 không.

Bài 3. Với dãy số tự nhiên từ 1 đến 100 ta có tổng

$$1+2+3+...+100=\frac{(100+1).100}{2}=5050$$

Tiến hành xóa hai số a, b bất kì trong dãy số trên và viết lại một số là a^3+b^3. Khi đó tổng dãy số trên bảng tăng một đại lượng $\left(a^3+b^3\right)-\left(a+b\right)$.

Ta thấy $1+2+3+...+100=5050$ chia 3 có số dư là 1.

Lại thấy $\left(a^3+b^3\right)-\left(a+b\right)=\left(a-1\right)a\left(a+1\right)+\left(b-1\right)b\left(b+1\right)$.

Do đó đại lượng tăng lên luôn chia hết cho 3. Như vậy sau mỗi lần tiến hành trò chơi thì tổng dãy số trên bảng luôn chia cho 3 có số dư là 1. Mà ta lại có 9876543212016 chia hết cho 3. Do đó sau một số lần tiến hành trò chơi thì trên bảng không thể còn lại số 9876543212016.