Chủ đề: 2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI-ỨNG DỤNG VIÉT

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết

1. Công thức nghiệm:

❍ Phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ có $\Delta = b^2- 4ac$

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Công thức nghiệm thu gọn:

❍ Phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ có $\Delta' = b'^2 - ac$ ($b = 2b'$)

- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm
- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{a}$
- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta'}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta'}}{a}$$

3. Định lí Vi-ét:

❍ ***Định lí :*** Nếu x_1; x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

thì : $S = x_1+x_2 = \frac{-b}{a}$; $P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

❍ ***Định lí: (đảo Vi-ét)***

Nếu hai số x_1; x_2 có $x_1+x_2= S$; $x_1.x_2 = P$ thì x_1; x_2 là nghiệm của phương trình : $x^2- S x+P = 0$, (x_1 ; x_2 tồn tại khi $S^2 - 4P \geq 0$)

➲**Chú ý:**

- Định lí Vi-ét chỉ áp dụng được khi phương trình có nghiệm (tức là $\Delta \geq 0$)
- Nếu a và c trái dấu thì phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu

❹. Ứng dụng Vi-ét: *(nhẩm nghiệm đặc biệt của phương trình bậc hai)*

❍ ***Hệ quả 1:*** Nếu phương trình $ax^2+bx+c = 0$ $(a \neq 0)$ có: $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{c}{a}$

❍ ***Hệ quả 2:*** Nếu phương trình $ax^2+bx+c = 0$ $(a \neq 0)$ có: $a- b+c = 0$ thì phương trình có nghiệm: $x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{-c}{a}$

❺. Các ứng dụng vào giải toán chứa tham số:

🗁 Tìm điều kiện tổng quát để phương trình $ax^2+bx+c = 0$ $(a \neq 0)$ có:

①. Có nghiệm (có hai nghiệm) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

②. Vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$

③. Nghiệm duy nhất (nghiệm kép, hai nghiệm bằng nhau) $\Leftrightarrow \Delta = 0$

④. Có hai nghiệm phân biệt (khác nhau) $\Leftrightarrow \Delta > 0$

⑤. Hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $P > 0$

⑥. Hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \Delta > 0$ và $P < 0 \Leftrightarrow a.c < 0$

⑦. Hai nghiệm dương(lớn hơn 0) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$; $S > 0$ và $P > 0$

⑧. Hai nghiệm âm(nhỏ hơn 0) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$; $S < 0$ và $P > 0$

⑨. Hai nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $S = 0$

⑩. Hai nghiệm nghịch đảo nhau $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $P = 1$

➲***Ghi nhớ:*** $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$; $P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$)

Ⓑ Phân dạng toán cơ bản

❖Dạng ❶ *Giải phương trình quy về bậc nhất*

🗁 ***Phương pháp:***

- Chuyển vế
- Quy đồng (ĐK nếu có)
- Phân phối, thu gọn đưa về phương trình bậc nhất

Ví dụ 1

Giải phương trình: $5x+\frac{1}{x+3}=15+\frac{1}{x+3}$

Lời giải

•Điều kiện: $x\neq -3$

• $5x+\frac{1}{x+3}=15+\frac{1}{x+3}\Leftrightarrow 5x=15\Leftrightarrow x=3$

Ví dụ 2

Giải phương trình: $1+\frac{1}{x-3}=\frac{7-2x}{x-3}$ (1)

Lời giải

• Điều kiện: $x\neq 3$

• $(1)\Leftrightarrow x-3+1=7-2x \quad \Leftrightarrow x=3$ (loại)

• Vậy phương trình vô nghiệm.

Bài tập rèn luyện

❍Giải các phương trình sau:

Câu 1: $x-1=\frac{3x-1}{2}$

Câu 2: $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x^2+x}{x-1}$

Câu 3: $\frac{6}{x^2-1}+\frac{3}{x-1}=\frac{15}{x+1}$

Hướng dẫn giải

Câu 1: $x-1=\frac{3x-1}{2}\Leftrightarrow 2x-2=3x-1\Leftrightarrow x=-1$

• Vậy phương trình có nghiệm x = -1

Câu 2:

•Điều kiện: $x\neq 1$

• $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x^2+x}{x-1}\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

• Đối chiếu điều kiện, phương trình có nghiệm x = -1

Câu 3:

• Điều kiện: $x \neq \pm 1$

• $\frac{6}{x^2-1}+\frac{3}{x-1}=\frac{15}{x+1} \Leftrightarrow 6+3(x+1)=15(x-1) \Leftrightarrow 12x-24=0$

$\Leftrightarrow x = 2$ (nhận)

• Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

❖Dạng 2 Giải phương trình bậc hai

Phương pháp: Áp dụng một trong các cách sau

- Công thức nghiệm
- Nhẫm nghiệm đặc biệt
- Sử dụng các ứng dụng của Vi-ét
- Ẩn phụ

Ví dụ 1

Giải phương trình

a) $x^2 - 49x - 50 = 0$ b) $(2-\sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - 2 - \sqrt{3} = 0$

❒ Lời giải

a) Giải phương trình $x^2 - 49x - 50 = 0$

❍ ***Cách 1:*** Dùng công thức nghiệm $(a = 1; b = -49; c = 50)$

$\Delta = (-49)^2 - 4.1.(-50) = 2601$; $\sqrt{\Delta} = 51$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-(-49)-51}{2} = -1;\quad x_2 = \frac{-(-49)+51}{2} = 50$$

❍ ***Cách 2:*** Ứng dụng của định lí Viet

Do $a - b + c = 1 - (-49) + (-50) = 0$

Nên phương trình có nghiệm: $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{-50}{1} = 50$

❍ ***Cách 3:*** $\Delta = (-49)^2 - 4.1.(-50) = 2601$

Theo định lí Viet ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 49 = (-1) + 50 \\ x_1.x_2 = 49 = -50 = (-1).50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 50 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{-50}{1} = 50$

b) $(2-\sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - 2 - \sqrt{3} = 0$

❍ ***Cách 3:*** Dùng công thức nghiệm ($a = 2-\sqrt{3}$; $b = 2\sqrt{3}$; $c = -2-\sqrt{3}$)

$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4(2-\sqrt{3})(-2-\sqrt{3}) = 16$; $\sqrt{\Delta} = 4$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}+4}{2(2-\sqrt{3})} = 1; \quad x_2 = \frac{-2\sqrt{3}-4}{2(2-\sqrt{3})} = -(7+4\sqrt{3})$$

❍ ***Cách 2:*** Dùng công thức nghiệm thu gọn ($a = 2-\sqrt{3}$; $b' = \sqrt{3}$; $c = -2-\sqrt{3}$)

$\Delta' = (\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3})(-2-\sqrt{3}) = 4$; $\sqrt{\Delta} = 2$

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-\sqrt{3}+2}{2-\sqrt{3}} = 1; \quad x_2 = \frac{-\sqrt{3}-2}{2-\sqrt{3}} = -(7+4\sqrt{3})$$

❍ ***Cách 3:*** Nhẩm nghiệm đặc biệt

Do $a + b + c = 2-\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + (-2-\sqrt{3}) = 0$

Nên phương trình có nghiệm: $x_1 = 1$; $x_1 = -\dfrac{-2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = -(7+4\sqrt{3})$

Ví dụ 2

Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 - 8 = 0$ b) $3x^2 - 5x = 0$

c) $-2x^2 + 3x + 5 = 0$ d) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

❐ Lời giải

a) $2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm 2$

$$b)\ 3x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(3x-5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0; x = \dfrac{5}{3}$

c) $-2x^2 + 3x + 5 = 0$

Nhẩm nghiệm :

Ta có : $a - b + c = -2 - 3 + 5 = 0$

Do đó phương trình có nghiệm : $x_1 = -1; x_2 = -\dfrac{5}{-2} = \dfrac{5}{2}$

d) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

Đặt $t = x^2 (t \ge 0)$. Ta có phương trình : $t^2 + 3t - 4 = 0$

a + b + c = 1 + 3 - 4 = 0

Do đó phương trình có nghiệm : $t_1 = 1 > 0$ (thỏa mãn); $t_2 = -\frac{4}{1} = -4 < 0$ (loại)

Với: $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm 1$

Ví dụ 3

Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x+2}{x-5} + 3 = \frac{6}{2-x}$ b) $2x(x+4) + 7 = (x+2)^2$

❒ Lời giải

a) $\frac{x+2}{x-5} + 3 = \frac{6}{2-x}$ (ĐKXĐ : $x \ne 2; x \ne 5$)

Phương trình : $\frac{x+2}{x-5} + 3 = \frac{6}{2-x}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(2-x)}{(x-5)(2-x)} + \frac{3(x-5)(2-x)}{(x-5)(2-x)} = \frac{6(x-5)}{(x-5)(2-x)}$$

$$\Rightarrow (x+2)(2-x) + 3(x-5)(2-x) = 6(x-5)$$

$$\Leftrightarrow 4 - x^2 + 6x - 3x^2 - 30 + 15x = 6x - 30$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 15x + 4 = 0$$

$$\Delta = 15^2 - 4.(-4).4 = 225 + 64 = 289 > 0; \sqrt{\Delta} = 17$$

Do đó phương trình có hai nghiệm : $x_1 = \frac{-15+17}{2.(-4)} = -\frac{1}{4}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

$x_2 = \frac{-15-17}{2.(-4)} = 4$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = 4$

b) $2x(x+4) + 7 = (x+2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -3$

Bài tập rèn luyện

❍Câu 1: Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - x + 5 = x^2 + 2x - 1$ b) $2x^2 - 9x + 4 = 0$

➲ Hướng dẫn giải

a) $x^2 - x + 5 = x^2 + 2x - 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x - x^2 - 2x = -1 - 5$

$\Leftrightarrow -3x = -6 \Leftrightarrow x = 2$

b) Phương trình $2x^2 - 9x + 4 = 0$ có: $\Delta = (-9)^2 - 4.2.4 = 49 > 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{9-\sqrt{49}}{4} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{9+\sqrt{49}}{4} = 4 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S = \left\{\dfrac{1}{2}; 4\right\}$

❍Câu 2: Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$ b) $x^2 - 2x - 3 = 0.$

c) $x^2 - 4 = 0$ d) $x^2 + 5x = 0$

➲ Hướng dẫn giải

a) •Nhẩm nghiệm đặc biệt:

Phương trình có a+b+c= *1-5+4=0*

Do đó phương trình có hai nghiệm $x = 1; x = 4$

•Cách khác: Ta có $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x(x-4) - (x-4) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 4\}$.

b) $x^2 - 2x - 3 = 0.$

Phương trình đã cho có $a - b + c = 0$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 3$.

c) $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{\pm 2\}$

d) $x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -5 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0; -5\}$

❍Câu 3: Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 12x^2 + 16 = 0.$ b) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

➲ Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = x^2\ (t \geq 0)$.

Phương trình (1) trở thành $t^4 - 12t^2 + 16 = 0\ (2)$, Với $a = 1,\ b = -12,\ c = 16$.

$\Delta' = (-6)^2 - 1.16 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{5}$.

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm $t_1 = 6 + 2\sqrt{5}\,(N), t_2 = 6 - 2\sqrt{5}\,(N)$.

Vậy phương trình (1) có bốn nghiệm

$x_1 = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1,\ x_2 = -\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = -\left(\sqrt{5} + 1\right)$,

$x_3 = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1,\ x_4 = -\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = -\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\sqrt{5} + 1; -\left(\sqrt{5} + 1\right); \sqrt{5} - 1; -\left(\sqrt{5} - 1\right)\right\}$.

b) Đặt: $x^2 = t \geq 0$.

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 20t + 64 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ và $t = 16$.

Với $t = 4$ suy ra $x = 2$ và $x = -2$

Với $t = 16$ suy ra $x = 4$ và $x = -4$

Suy ra phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{\pm 2; \pm 4\}$

❍Câu 4: Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{3}{2x}$. b) $\dfrac{x+2}{x-2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x(x-2)}$

➲ Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq 2$.

Phương trình (1) trở thành $\dfrac{2x(x-2)}{x-1} + \dfrac{2x}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{3(x-1)(x-2)}{2x}$

$\Rightarrow 2x^2 - 4x + 2x = 3x^2 - 9x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$

Vì $a + b + c = 1 - 7 + 6 = 0$. Nên $x_1 = 1\,(L),\ x_2 = 6\,(N)$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 6$.

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$\dfrac{x+2}{x-2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x(x-2)} \Leftrightarrow \dfrac{x(x+2)}{x(x-2)} + \dfrac{x-2}{x(x-2)} = \dfrac{2}{x(x-2)}$

$\Leftrightarrow x(x + 2) + x - 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + x - 2 = 2$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 4\}$.

Dạng 3 Tính giá trị biểu thức nghiệm dùng Vi-ét

Phương pháp:

Sử dụng các dạng phân tích của tổng và tích hai nghiệm:

①. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P$

②. $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3PS$

③. $x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=\left(S^2-2P\right)^2-2P^2$

④. $x_1-x_2=\sqrt{S^2-4P},\ (x_1\ge x_2)$

⑤. $x_1^2-x_2^2=S.\sqrt{S^2-4P},\ (x_1\ge x_2)$

⑥. $x_1^4-x_2^4=\left(S^2-2P\right)\left(S.\sqrt{S^2-4P}\right),\ (x_1\ge x_2)$

⑦. $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=S^2-4P$

⑧. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{S}{P}$

⑨. $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}$

⑩. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{S^2-2P}{P}$

Ví dụ 1

Cho phương trình $x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{5}=0$ có 2 nghiệm là x_1 và x_2 .

Không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức sau:

$A=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}$; $B=x_1^2+x_2^2$; $C=\frac{1}{x_2{}^2}+\frac{1}{x_2{}^2}$; $D=x_1^3+x_2^3$

❒ Lời giải

Do phương trình có 2 nghiệm là x_1 và x_2 nên theo định lí Viet ta có:

$x_1+x_2=-\sqrt{3}$; $x_1.x_2=-\sqrt{5}$

$$A=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}=\frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{15}$$

B = $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-\sqrt{3})^2 - 2(-\sqrt{5}) = 3 + 2\sqrt{5}$

C = $\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 . x_2^2} = \dfrac{3+2\sqrt{5}}{(-\sqrt{5})^2} = \dfrac{1}{5}(3+2\sqrt{5})$;

D = $(x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (-\sqrt{3})[3+2\sqrt{5} - (-\sqrt{5})] = -(3\sqrt{3} + 3\sqrt{15})$

Ví dụ 2

Cho phương trình $x^2 - 8x + 15 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ hãy tính

a) $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$ b) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ c) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$

❒ Lời giải

Ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 8; x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = 15$

a) $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8^2 - 2.15 = 64 - 30 = 34$

b) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{8}{15}$

c) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}{x_1x_2} = \dfrac{34}{15}$

Bài tập rèn luyện

❍Câu 1:

Cho phương trình $8x^2 - 72x + 64 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ hãy tính

a) $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$ b) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

➲ Đáp số:

a) $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 65$ b) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{9}{8}$

❍Câu 2:

Cho phương trình $x^2 - 14x + 29 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ hãy tính

a) $x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3}$ b) $\dfrac{1-x_1}{x_1} + \dfrac{1-x_2}{x_2}$

➲ Đáp số:

a) $x_1^3 + x_2^3 = 1526$ b) $\frac{1-x_1}{x_1} + \frac{1-x_2}{x_2} = \frac{-44}{29}$

❖Dạng 4 Toán tham số m với ứng dụng định lý Vi-ét

Phương pháp: *Sử dụng kết hợp*

①. Định lý Vi-ét

②. Các hệ thức đối xứng

③. Các điều kiện có liên quan đến sự tồn tại nghiệm của phương trình bậc hai

Ví du 1

Cho phương trình ẩn x: $x^2 - 2mx + 4 = 0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho khi m = 3.

b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$.

❐ Lời giải

a) Với m = 3 ta có phương trình: $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Giải ra ta được hai nghiệm: $x_1 = 3+\sqrt{5}$; $x_2 = 3-\sqrt{5}$.

b) Ta có: $\Delta' = m^2 - 4$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$ (*).

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = 4$.

Suy ra: $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$

$\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 8 + 4m = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = -2 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (*) ta thấy chỉ có nghiệm $m_2 = -2$ thỏa mãn. Vậy m = - 2 là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2

Cho phương trình ẩn x: $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b) Tìm các giá trị của m để: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

❐ Lời giải

a) Ta có $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in R$. Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo định lí Vi-ét thì: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1.x_2 = -1$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1.x_2 = 7$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Ví dụ 3

Cho phương trình ẩn x: $x^2 - x + 1 + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho với m = 0.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1x_2.(x_1x_2 - 2) = 3(x_1 + x_2)$.

❐ Lời giải

a) Với m = 0 ta có phương trình $x^2 - x + 1 = 0$

Vì $\Delta = -3 < 0$ nên phương trình trên vô nghiệm.

b) Ta có: $\Delta = 1 - 4(1 + m) = -3 - 4m$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow -3 - 4m \ge 0 \Leftrightarrow 4m \le -3 \Leftrightarrow m \le \frac{-3}{4}$ (1).

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1.x_2 = 1 + m$

Thay vào đẳng thức: $x_1x_2.(x_1x_2 - 2) = 3(x_1 + x_2)$, ta được:

$(1 + m)(1 + m - 2) = 3 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Đối chiếu với điều kiện (1) suy ra chỉ có m = -2 thỏa mãn.

Ví dụ 4

Cho phương trình: $x^2 + 2(m + 1)x + m^2 = 0$. (1)

a) Giải phương trình với m = 5

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng - 2.

❐ Lời giải

a) Với m = 5 ta có phương trình: $x^2 + 12x + 25 = 0$.

$\Delta' = 6^2 - 25 = 36 - 25 = 11$

$x_1 = -6 - \sqrt{11}$; $x_2 = -6 + \sqrt{11}$

b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi:

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-1}{2}$ (*)

Phương trình có nghiệm x = - 2 $\Leftrightarrow$ 4 - 4 (m + 1) + m^2 = 0

$\Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 4 \end{array}\right.$ (thoả mãn điều kiện (*))

Vậy m = 0 hoặc m = 4 là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 5

Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x - m - 3 = 0$ (1)

a) Giải phương trình với m = -3

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm thoả mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc giá trị của m.

❒ Lời giải

a) Với m = - 3 ta có phương trình: $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x + 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -8 \end{array}\right.$

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm khi:

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + (m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m + 4 > 0 \Leftrightarrow (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0$ đúng $\forall m$

Chứng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\forall$ m

Theo hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = -m - 3 & (2) \end{cases}$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$

$\Leftrightarrow 4(m - 1)^2 + 2(m + 3) = 10$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 6m + 10 = 10 \Leftrightarrow 2m(2m - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{array}\right.$

c) Từ (2) ta có $m = -x_1x_2 - 3$ thế vào (1) ta có:

$x_1 + x_2 = 2(-x_1x_2 - 3 - 1) = -2x_1x_2 - 8$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + 8 = 0$

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc m.

Ví dụ 6

Cho phương trình ẩn x: $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 5m = 0$

a) Giải phương trình với m = -2.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm sao cho tích các nghiệm bằng 6.

❒ Lời giải

a) m = - 2, phương trình là: $x^2 + 3x - 6 = 0$; $\Delta = 33 > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$

b) Ta có $\Delta = \left[-(2m+1)\right]^2 - 4(m^2 + 5m) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 20m$

$= 1 - 16m$.

Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 16m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{1}{16}$

Khi đó hệ thức Vi-ét ta có tích các nghiệm là $m^2 + 5m$.

Mà tích các nghiệm bằng 6, do đó $m^2 + 5m = 6$

$\Leftrightarrow m^2 + 5m - 6 = 0$

Ta thấy $a + b + c = 1 + 5 + (-6) = 0$ nên $m_1 = 1$; $m_2 = -6$.

Đối chiếu với điều kiện $m \leq \dfrac{1}{16}$ thì m = - 6 là giá trị cần tìm.

Ví dụ 7

Cho phương trình: $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi m = 2.

b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn đẳng thức $x_1^2 + x_2^2 = 5(x_1 + x_2)$

❒ Lời giải

a) Khi m = 2, PT đã cho trở thành: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Ta thấy: $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$

b) Điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm là: $\Delta' = b'^2 - ac \geq 0 \Leftrightarrow 2^2 - (m+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow 3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$ (1)

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = m+1 \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 = 5(x_1 + x_2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5(x_1 + x_2)$

$\Leftrightarrow 4^2 - 2(m+1) = 5.4 \Leftrightarrow 2(m+1) = -4 \Leftrightarrow m = -3$

Kết hợp với điều kiện (1) , ta có m = - 3

Ví dụ 8

Cho phương trình $x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0$ (1)

a) Giải phương trình với m = 1

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có một nghiệm x = - 2

c) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = 24$

❒ Lời giải

$x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0$ (1)

a) Khi m = 1, ta có phương trình $x^2 - 6x + 5 = 0$

$a + b + c = 1 - 6 + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 5$

b) Phương trình (1) có nghiệm x = - 2 khi:

$(-2)^2 - (m + 5) . (-2) - m + 6 = 0 \Leftrightarrow 4 + 2m + 10 - m + 6 = 0$

$\Leftrightarrow m = - 20$

c) $\Delta = (m + 5)^2 - 4(- m + 6) = m^2 + 10m + 25 + 4m - 24$

$= m^2 + 14m + 1$

Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta = m^2 + 14m + 1 \geq 0$ (*)

Với điều kiện trên, áp dụng định lí Vi-ét, ta có:

$S = x_1 + x_2 = m + 5$; $P = x_1. x_2 = - m + 6$. Khi đó: $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = 24 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1 + x_2) = 24$

$\Leftrightarrow (-m+6)(m+5) = 24 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3; m = -2.$

Giá trị m = 3 thoả mãn, m = - 2 không thoả mãn điều kiện. (*)

Vậy m = 3 là giá trị cần tìm.

Ví dụ 9

Cho phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$ với m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn

$4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 1$.

❐ Lời giải

a) Với $m = 2$, ta có phương trình: $2x^2 + 3x + 1 = 0$. Các hệ số của phương trình thoả mãn $a - b + c = 2 - 3 + 1 = 0$ nên phương trình có các nghiệm: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

b) Phương trình có biệt thức $\Delta = (2m-1)^2 - 4.2.(m-1) = (2m-3)^2 \geq 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m.

Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2m-1}{2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-1}{2} \end{cases}$.

Điều kiện đề bài $4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 1 \Leftrightarrow 4(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 = 1$. Từ đó ta có: $(1-2m)^2 - 3(m-1) = 1 \Leftrightarrow 4m^2 - 7m + 3 = 0$.

Phương trình này có tổng các hệ số $a + b + c = 4 + (-7) + 3 = 0$ nên phương trình này có các nghiệm $m_1 = 1$, $m_2 = \frac{3}{4}$.

Vậy các giá trị cần tìm của m là $m = 1$, $m = \frac{3}{4}$.

Ví dụ 10

Cho phương trình $x^2+ax+b+1=0$ với a,b là tham số.

a) Giải phương trình khi $a=3$ và $b=-5$.

b) Tìm giá trị của a,b để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn điều kiện: $\begin{cases} x_1-x_2=3 \\ x_1^3-x_2^3=9 \end{cases}$.

❐ Lời giải

a) Khi $a=3$ và $b=-5$ ta có phương trình: $x^2+3x-4=0$.
Do a + b + c = 0 nên phương trình có nghiệm $x_1=1,\ x_2=-4$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2 \Leftrightarrow \Delta=a^2-4(b+1)>0$ (*)

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_1x_2=b+1 \end{cases}$ (1).

Bài toán yêu cầu $\begin{cases} x_1-x_2=3 \\ x_1^3-x_2^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2=3 \\ (x_1-x_2)^3+3x_1x_2(x_1-x_2)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2=3 \\ x_1x_2=-2 \end{cases}$ (2).

Từ hệ (2) ta có: $(x_1+x_2)^2=(x_1-x_2)^2+4x_1x_2=3^2+4(-2)=1$, kết hợp với (1) được $\begin{cases} a^2=1 \\ b+1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1,b=-3 \\ a=-1,b=-3 \end{array}\right.$.

Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện (*) nên chúng là các giá trị cần tìm.

Bài tập rèn luyện

Câu 1: Cho phương trình ẩn x: $x^2-x+m=0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho với m = 1.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$(x_1x_2-1)^2=9(x_1+x_2)$.

Hướng dẫn giải

a) Với m = 1, ta có phương trình: $x^2-x+1=0$
Vì Δ = - 3 < 0 nên phương trình trên vô nghiệm.
b)Ta có: $\Delta=1-4m$. Để phương trình có nghiệm thì $\Delta\geq 0$

$\Leftrightarrow 1-4m\geq 0 \Leftrightarrow m\leq \frac{1}{4}$ (1).

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1+x_2=1$ và $x_1.x_2=m$
Thay vào đẳng thức: $(x_1x_2-1)^2=9(x_1+x_2)$, ta được:

$(m-1)^2 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 4 \end{array}\right.$..

Đối chiếu với điều kiện (1) suy ra chỉ có $m = -2$ thỏa mãn.

❍Câu 2: Cho phương trình ẩn x: $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b) Tìm các giá trị của m để: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

➲Hướng dẫn giải

a) Ta có $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in R$. Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo định lí Vi-ét thì: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1.x_2 = -1$. Ta có: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1.x_2 = 7 \Rightarrow 4m^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

❍Câu 3: Cho phương trình: $(x^2 - x - m)(x - 1) = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

➲Hướng dẫn giải

a) Với $m = 2$, ta có phương trình

$(x^2 - x - 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1;\ x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $x \pm 1; x = 2$

b) Vì phương trình (1) luôn có nghiệm $x_1 = 1$ nên phương trình (1) có 2 đúng nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

- Hoặc phương trình $f(x) = x^2 - x - m = 0$ có nghiệm kép khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m = 0 \\ 1 - 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{4}.$$

- Hoặc phương trình $f(x) = x^2 - x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$m = -\dfrac{1}{4}; m = 0$.

❍Câu 4: Cho phương trình: $x^4 - 5x^2 + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi m = 4.

b) Tìm m để phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt.

➲Hướng dẫn giải

a) Với m = 4 ta có $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Đặt $x^2 = t$, với $t \geq 0$ ta có pt $t^2 - 5t + 4 = 0 <=> t_1 = 1; t_2 = 4$

Từ đó, ta được: $\left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x = \pm 1;\ x = \pm 2.$

b) $x^4 - 5x^2 + m = 0$ (1) có dạng $f(y) = y^2 - 5y + m = 0$ (2)

(với $y = x^2$; $y \geq 0$)

Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt ⇔phương trình (2):

1) Hoặc có nghiệm kép khác 0 <=> $\begin{cases} \Delta = 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{25}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{25}{4}$.

2) Hoặc có 2 nghiệm khác dấu $\Leftrightarrow m < 0$.

Vậy $m = \dfrac{25}{4}$ hoặc $m < 0$ thì phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt

❍Câu 5: Cho phương trình: $x^2 - 2x + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi m = - 3.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = 1$.

➲Hướng dẫn giải

a) Vì a - b + c = 1 - (- 2) + (- 3) = 0 nên $x_1 = -1; x_2 = 3$

b) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

Khi đó theo hệ thức Viét, ta có: $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1x_2 = m$ (1)

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = 1 \qquad (2)$$

Từ (1), (2), ta được: $4 - 2m = m^2 <=> m^2 + 2m - 4 = 0$

$\Delta' = 1 + 4 = 5 => \sqrt{\Delta'} = \sqrt{5}$ nên $m = -1 + \sqrt{5}$ (loại); $m = -1 - \sqrt{5}$ (T/m vì $m \leq 1$).

Vậy giá trị m cần tìm là: $m = -1 - \sqrt{5}$

Câu 6: Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 6m = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$

b) Tìm m để phương trình (1) có 1 nghiệm gấp 2 lần nghiệm kia.

Hướng dẫn giải

a) Khi m = 2, phương trình (1) trở thành: $x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Delta' = 16$, pt đã cho có 2 nghiệm: $x = -2$; $x = 6$.

b) Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m$

$\Leftrightarrow m \leq -6;\ m \geq 0$ (2)

Khi đó, theo hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -6m \end{cases}$ (3)

Phương trình có 1nghiệm gấp 2 lần nghiệm kia khi và chỉ khi:

$x_1 = 2x_2;\ x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow (x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 0 \Leftrightarrow 5x_1x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2) = 0$

$\Leftrightarrow 5x_1x_2 - 2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = 0 \Leftrightarrow 9x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)^2 = 0$ (4)

Từ (3), (4), ta có: $-54m - 8m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0;\ m = -\dfrac{27}{4}$ (TMĐK (2))

Vậy các giá trị m cần tìm là $m = 0;\ m = -\dfrac{27}{4}$.

Câu 7: Cho phương trình: $mx^2 - (2m + 3)x + m - 4 = 0$

a) Tìm m để pt có 2 nghiệm phân biệt?

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số m.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (2m+3)^2 - 4m(m-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 28m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{9}{28} \end{cases}$$

Vậy với $0 \neq m > -\dfrac{9}{28}$ thì pt trên có 2 nghiệm phân biệt.

b) Khi đó pt có 2 nghiệm thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m+3}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{m-4}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 + \dfrac{3}{m} \\ x_1x_2 = 1 - \dfrac{4}{m} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_1 + x_2) = 8 + \dfrac{12}{m} \\ 3x_1x_2 = 3 - \dfrac{12}{m} \end{cases}$$

Cộng 2 vế pt trên ta đợc:

$4(x_1+x_2) + 3x_1x_2 = 11$. Đây chính là hệ thức cần tìm.

❍Câu 8: Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x - 3 - m = 0$ (ẩn số x)

a) Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm x_1, x_2 với mọi m

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm

d) Tìm m sao cho nghiệm số x_1, x_2 của phương trình thoả mãn $x_1^2+x_2^2 \geq 10$.

e) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m

f) Hãy biểu thị x_1 qua x_2

➲Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta' = (m-1)^2 - (-3 - m) = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$

Do $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi m; $\frac{15}{4} > 0 \Rightarrow \Delta > 0$ với mọi m

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Hay phương trình luôn có hai nghiệm (đpcm)

b) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow -3 - m < 0 \Leftrightarrow m > -3$

Vậy $m > -3$

c) Theo ý a) ta có phương trình luôn có hai nghiệm

Khi đó theo định lí Viet ta có: $S = x_1 + x_2 = 2(m-1)$ và $P = x_1.x_2 = -(m+3)$

Khi đó phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow S < 0$ và $P > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(m-1) < 0 \\ -(m+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$$

Vậy $m < -3$

d) Theo ý a) ta có phương trình luôn có hai nghiệm

Theo định lí Viet ta có: $S = x_1 + x_2 = 2(m-1)$ và $P = x_1.x_2 = -(m+3)$

Khi đó $A = x_1^2+x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m-1)^2+2(m+3) = 4m^2 - 6m + 10$

Theo bài $A \geq 10 \Leftrightarrow 4m^2 - 6m \geq 0 \Leftrightarrow 2m(2m-3) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \geq 0 \\ 2m - 3 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m \leq 0 \\ 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq \frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \frac{3}{2} \\ m \leq 0 \end{array}\right.$$

Vậy $m \geq \frac{3}{2}$ hoặc $m \leq 0$

e) Theo ý a) ta có phương trình luôn có hai nghiệm

Theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1.x_2 = -(m+3) \end{cases} \Leftrightarrow . \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-2 \\ 2x_1.x_2 = -2m-6 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8$

Vậy $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + 8 = 0$ là hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc m

f) Từ ý e) ta có: $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8 \Leftrightarrow x_1(1+2x_2) = -(8 + x_2) \Leftrightarrow x_1 = -\frac{8+x_2}{1+2x_2}$

Vậy $x_1 = -\frac{8+x_2}{1+2x_2}$ $\left(x_2 \neq -\frac{1}{2}\right)$

❍Câu 9: Cho phương trình bậc hai ẩn x, tham số m: $x^2 + mx + m + 3 = 0$ (1)

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = -3$.

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn : $2x_1 + 3x_2 = 5$.

d) Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1 = -3$. Tính nghiệm còn lại.

e) Lập hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào giá trị của m.

➲Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta = m^2 - 4(m+3) = m^2 - 4m - 12$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 > 0 \Leftrightarrow (m-6)(m+2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 6 \end{array}\right.$.

b) Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên.

Theo định lý Vi-et, ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = m+3 \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-m)^2 - 2(m+3) = m^2 - 2m - 6$

Thay vào ta được:

$m^2 - 2m - 6 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 5 \end{array}\right.$

c) Phương trình có nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m & (1) \\ x_1x_2 = m+3 & (2) \end{cases}$

Hệ thức: $2x_1 + 3x_2 = 5$ (3)

Từ (1) và (3) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = -3m \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3m-5 \\ x_2 = -m - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3m-5 \\ x_2 = 2m+5 \end{cases}$$

Thay $\begin{cases} x_1 = -3m-5 \\ x_2 = 2m+5 \end{cases}$ vào (2) ta có phương trình:

$$(-3m-5)(2m+5) = m+3 \Leftrightarrow -6m^2 - 15m - 10m - 25 = m+3 \Leftrightarrow -6m^2 - 26m - 28 = 0$$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 13m + 14 = 0$

$\Delta_{(m)} = 13^2 - 4.3.14 = 1 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $m_1 = \dfrac{-13+1}{2.3} = -2;$ $m_2 = \dfrac{-13-1}{2.3} = -\dfrac{7}{3}$

Kiểm tra:

Với $m = -2 \Rightarrow \Delta = 0$ (thỏa mãn).

Với $m = \dfrac{-7}{3} \Rightarrow \Delta = \dfrac{25}{9} > 0$ (thỏa mãn).

Vậy với $m = -2;\ m = -\dfrac{7}{3}$ phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn: $2x_1 + 3x_2 = 5$.

d) Phương trình (1) có nghiệm $x_1 = -3$

$\Leftrightarrow (-3)^2 + m.(-3) + m + 3 = 0 \Leftrightarrow -2m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = 6$

Khi đó: $x_1 + x_2 = -m \Leftrightarrow x_2 = -m - x_1 \Leftrightarrow x_2 = -6 - (-3) \Leftrightarrow x_2 = -3$

Vậy với m = 6 thì phương trình có nghiệm: $x_1 = x_2 = -3$.

e) Theo định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x_1 - x_2 \\ m = x_1x_2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = x_1x_2 - 3$

❍Câu 10: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 = 0$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

➲Hướng dẫn giải

a) Ta có $\Delta' = (m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{2}$

b) Theo hệ thức Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) & (1) \\ x_1x_2 = m^2 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có $m = \dfrac{x_1 + x_2}{2} - 1$ thay vào (2) ta được $x_1x_2 = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2} - 1\right)^2$

hay $4x_1x_2 = (x_1 + x_2 - 2)^2$ là hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

Phiếu ôn tập

Phiếu 1

Câu 1: Giải phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$

Câu 2: Giải phương trình $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

Câu 3: Cho phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$. Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$

Câu 4: Cho phương trình: $x^2 + 4x + 2m + 1 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình với $m = 1$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm kép.

Hướng dẫn giải

Câu 1: Phương trình đã cho có $a - b + c = 0$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 3$.

Câu 2: Đặt $t = x^2\ (t \geq 0)$ ta có phương trình:

$t^2 + 5t - 36 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 9t - 4t - 36 = 0 \Leftrightarrow t(t+9) - 4(t+9) = 0$

$\Leftrightarrow (t+9)(t-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 4 = 0 \\ t + 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 4 & (TM) \\ t = -9 & (KTM) \end{array}\right.$

Với $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 2; x = -2$

Câu 3:

$\Delta = (-3)^2 - 4.1.1 = 5 > 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Theo hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1.x_2 = 1 \end{cases}$ (2)

Ta có $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ (3)

Thay (2) vào (3) ta được $A = 3^2 - 2.1 = 7$

Vậy $A = 7$.

Câu 4:

a) Giải phương trình với $m = 1$.

Với $m = 1$, phương trình đã trở thành: $x^2 + 4x + 3 = 0$

Nhận xét: $a-b+c=1-4+3=0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l}x_1=-1\\x_2=-\dfrac{c}{a}=-3\end{array}\right.$

Vậy khi $m=1$ thì tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1;-3\}$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm kép.

Phương trình $x^2+4x+2m+1=0$ có $\Delta'=2^2-(2m+1)=4-2m-1=3-2m$

Để phương trình có nghiệm kép thì $\Delta'=3-2m=0\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$

Vậy với $m=\dfrac{3}{2}$ thì phương trình đã cho có nghiệm kép.

Phiếu 2

Câu 1: Giải phương trình $2x^2-9x+4=0$

Câu 2: Giải phương trình $x^4-12x^2+16=0.$

Câu 3: Cho phương trình ẩn x: $x^2-5x+(m-2)=0\quad(1)$

a) Giải phương trình (1) với $m=6$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn hệ thức $\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 4: Cho phương trình: $x^2-2mx-4m-5=0\ (1)$ (m là tham số).

1. Giải phương trình (1) với $m=-2.$

2. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1 ; x_2 thỏa mãn:

$$\frac{1}{2}x_1^2-(m-1)x_1+x_2-2m+\frac{33}{2}=4059.$$

➲ Hướng dẫn giải

Câu 1: Phương trình $2x^2-9x+4=0$ có: $\Delta=(-9)^2-4.2.4=49>0$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt : $\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{9-\sqrt{49}}{4}=\dfrac{1}{2}\\x_2=\dfrac{9+\sqrt{49}}{4}=4\end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S=\left\{\dfrac{1}{2};4\right\}$

Câu 2:

Đặt $t=x^2\ (t\ge 0)$.

Phương trình (1) trở thành $t^4-12t^2+16=0\ (2)$, Với $a=1,\ b=-12,\ c=16.$

$\Delta' = (-6)^2 - 1.16 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{5}.$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm $t_1 = 6 + 2\sqrt{5}\,(N), t_2 = 6 - 2\sqrt{5}\,(N).$

Vậy phương trình (1) có bốn nghiệm

$x_1 = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1,\; x_2 = -\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = -\left(\sqrt{5} + 1\right),$

$x_3 = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1,\; x_4 = -\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = -\left(\sqrt{5} - 1\right).$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\sqrt{5} + 1; -\left(\sqrt{5} + 1\right); \sqrt{5} - 1; -\left(\sqrt{5} - 1\right)\right\}.$

Câu 3:

a) Giải phương trình (1) với $m = 6$.

Với $m = 6$ phương trình (1) trở thành phương trình: $x^2 - 5x + 4 = 0$ (2)

Ta có: $a + b + c = 1 + (-5) + 4 = 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 4$

Vậy với $m = 6$ thì tập hợp nghiệm của phương trình (1) là $S = \{1; 4\}$

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn hệ thức $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{3}{2}$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ thì:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1.x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-5)^2 - 4(m-2) > 0 \\ 5 > 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 33 - 4m > 0 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{33}{4} \\ m > 2 \end{cases}$$

Vậy với $2 < m < \frac{33}{4}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$

Khi đó áp dụng hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = m - 2 \end{cases}$ (3)

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}} + \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right) = 3\sqrt{x_1.x_2}$

$\Leftrightarrow 4\left(x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1.x_2}\right) = 9x_1.x_2$ (4)

Thay (3) vào (4) ta có:

$4\left(5 + 2\sqrt{m-2}\right) = 9(m-2) \Leftrightarrow 9(m-2) - 8\sqrt{m-2} - 20 = 0$ (5)

Đặt $t = \sqrt{m-2}$ điều kiện $t \geq 0$ khi đó phương trình (5) trở thành phương trình:

$9t^2 - 8t - 20 = 0$ (6)

Giải phương trình (6) ta được $t = 2$ (thỏa mãn) hoặc $t = \frac{-10}{9}$ (không thỏa mãn)

Với $t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{m-2} = 2 \Leftrightarrow m - 2 = 4 \Leftrightarrow m = 6$

Vậy $m = 6$ thì phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn hệ thức $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{3}{2}$.

Câu 4:

1) Với $m=-2$ thì $(1)\Leftrightarrow x^2+4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\end{array}\right.$ (vì: $a-b+c=0$)

Vậy PT có hai nghiệm $x=-1; x=-3$

2) Ta có: $\Delta'=(-m)^2-1.(-4m-5)=m^2+4m+5=(m+2)^2+1>0\ \forall m$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo Vi-Et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1.x_2=-4m-5\end{cases}$

Mà: $\frac{1}{2}x_1^2-(m-1)x_1+x_2-2m+\frac{33}{2}=4059\Leftrightarrow x_1-2(m-1)x_1+2x_2-4m+33=8118$

$\Leftrightarrow x_1^2-2mx_1+2x_1+2x_2-4m-5+38=8118\Leftrightarrow x_1^2-2mx_1-4m-5+2(x_1+x_2)=8080\ (*)$

Do: x_1 là một nghiệm của phương trình (1) nên: $x_1^2-2mx_1-4m-5=0$

$\Rightarrow(*)\Leftrightarrow 2(x_1+x_2)=8080\Leftrightarrow 2.2m=8080$ (Vì: $x_1+x_2=2m$)

$\Leftrightarrow 4m=8080\Leftrightarrow m=2020.$

Vậy $m=2020$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.