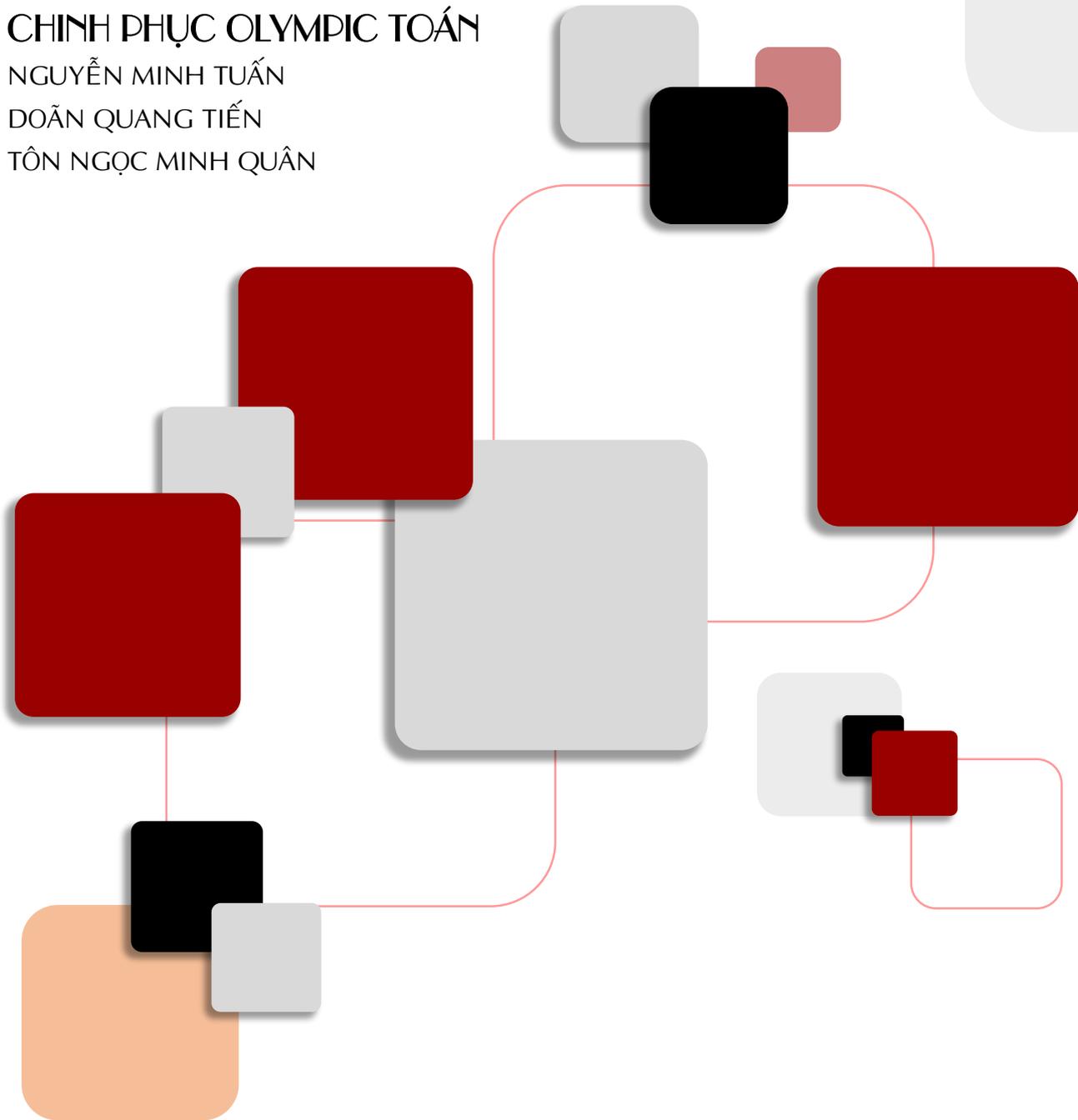
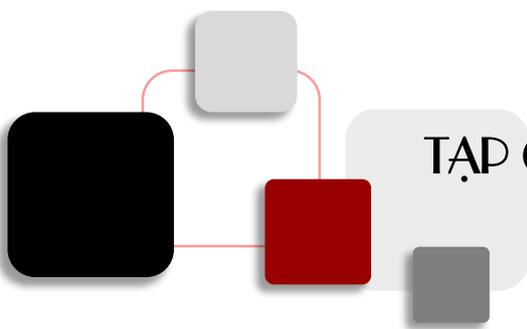


CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN
NGUYỄN MINH TUẤN
DOÃN QUANG TIẾN
TÔN NGỌC MINH QUÂN



PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN TẬP RỜI RẠC

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC



Littited
Edition

Chuyên đề
Bồi dưỡng
Học sinh giỏi

Phương trình hàm Trên tập rời rạc

Chinh phục Olympic toán

Copyright © 2019 by Tap chi va tu lieu toan hoc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or distributed in any form or by any means, or stored in data base or a retrieval system, without the prior written permission of the author.

LỜI GIỚI THIỆU

Những bài toán phương trình hàm ngày nay đã trở nên rất phổ biến đối với các bạn học sinh yêu Toán vì chúng đã xuất hiện thường xuyên trong các đề thi học sinh giỏi các cấp cũng như kì thi chọn đội tuyển quốc gia, VMO hay các kì thi khu vực và quốc tế mà ta được biết đến. Đặc biệt, trong các lớp dạng phương trình hàm, thì dạng phương trình hàm trên các tập rời rạc là một mảng được ít các học sinh chú ý tới bởi độ khó và chưa được tiếp xúc nhiều đồng thời ngoài việc sử dụng các kĩ thuật xử lý phương trình hàm cơ bản chúng ta còn phải sử dụng các tính chất số học rất đặc sắc của tập rời rạc như là: tính chia hết, tính chất của số nguyên tố, của số chính phương,... Trong ebook này chúng tôi sẽ mang tới cho bạn đọc tuyển tập các bài toán phương trình hàm trên tập rời rạc và một số bài toán phương trình hàm khác hay và khó với những lời giải vô cùng đặc sắc nhằm giúp bạn đọc có thể có nhiều cách nhìn khác về mảng toán này đồng thời cũng như chuẩn bị cho các kì học sinh giỏi, olympic.

Mình xin gửi lời cảm ơn tới

1. Thầy Huỳnh Kim Linh – THPT chuyên Lê Quý Đôn – Khánh Hòa – Đã góp ý giúp bọn mình về phần nội dung.
2. Bạn La Thị Đông Phương – Đại học Hoa Sen – Đã giúp bọn mình chỉnh sửa bản thảo để hoàn thiện hơn.

Một lần nữa gửi lời cảm ơn các bạn, các thầy cô đã ủng hộ và theo dõi fanpage suốt thời gian qua. Hy vọng ebook này sẽ giúp ích được cho mọi người. Thank you!

Nhóm tác giả

Nguyễn Minh Tuấn

Doãn Quang Tiến

Tôn Ngọc Minh Quân



Chuyên đề

PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN TẬP RỜI RẠC

Tạp chí và tư liệu toán học

Để giải quyết các bài toán phương trình hàm trên tập rời rạc mà có thể giải bằng các tính chất số học thì nên lưu ý đến một số dấu hiệu sau:

- Nếu xuất hiện các biểu thức tuyến tính chứa lũy thừa, có thể nghĩ đến các bài toán liên quan đến cấp của phần tử, các phương trình đặc biệt như phương trình Pell hay phương trình Pythagore,...hay đưa về việc xử lý các phương trình vô định nghiệm nguyên.
- Nếu hàm số đã cho là hàm nhân tính, ta thường hay xét đến giá trị hàm số tại các điểm là số nguyên tố hoặc dãy vô hạn các số nguyên tố.
- Sử dụng các đẳng thức và bất đẳng thức số học.
- Và đặc biệt nhất, trong một số bài toán, hệ cơ số đếm có thể dùng để xây dựng nhiều dãy số có tính chất số học thú vị. Trong hệ cơ số 10 chúng ta có thể rất khó nhận ra quy luật của dãy, nhưng nếu chọn được hệ cơ số phù hợp thì bài toán có thể giải quyết đơn giản hơn rất nhiều.

Nếu $g \geq 2, g \in \mathbb{N}$, với g là cơ số đếm, thì mọi số nguyên dương M đều biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$$M = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}_g = a_1 g^{n-1} + a_2 g^{n-2} + \dots + a_{n-1} g + a_n \text{ với } 1 \leq a_1 \leq g-1; 0 \leq a_i \leq g-1, \forall i = \overline{2, n}.$$

Cơ số đếm mà hay được sử dụng trong các bài toán phương trình hàm trên tập rời rạc là 2 và 3.

Sau đây, chúng tôi sẽ đề cập đến các bài toán phương trình hàm mà sử dụng các tính chất cũng như các phương pháp trong số học để giải, nhằm giúp bạn đọc hiểu rõ hơn và có một cái nhìn mới mẻ hơn về các phương pháp khác để giải phương trình hàm, bên cạnh đó chúng tôi cũng sẽ giới thiệu cho bạn đọc các bài toán phương trình hàm và khó trong tài liệu này. Nào cùng bắt đầu nhé!



I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$3f(n) - 2f(f(n)) = n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Câu 2. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$(m+n)f(m^2+n^2) = mf(n) + nf(m), \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Câu 3. Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(n+1) > f(f(n)), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Chứng minh rằng $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 4. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$x^2 + f(y) \mid f^2(x) + y, \forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad (+)$$

Câu 5. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f^2(m) + f(n) \mid (m^2 + n)^2, \forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad (*)$$

Câu 6. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn tồn tại số $k \in \mathbb{N}$ và số nguyên tố p sao cho với mọi $n \geq k, f(n+p) = f(n)$ và nếu $m \mid n$ thì $f(m+1) \mid f(n)+1$.

Câu 7. Cho p là số nguyên tố lẻ. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $f(m) = f(n)$ với $m \equiv n \pmod{p}$

ii) $f(mn) = f(m)f(n), \forall m, n \in \mathbb{Z}$

Câu 8. Tìm số nguyên không âm n nhỏ nhất sao cho tồn tại hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow [0, +\infty)$ khác hằng số thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$

ii) $2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) \in \{0, 1, \dots, n\}, \forall x, y \in \mathbb{Z}$

Với số n tìm được, hãy tìm tất cả các hàm số thỏa mãn.

Câu 9. Giả sử hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$f(1) = 1 \text{ và } f(n) = \begin{cases} 1 + f\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{if } n = 2m+1 \\ 1 + f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{if } n = 2m \end{cases}$$

Tìm các giá trị của n sao cho $f(n) = 2019$.

Câu 10. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện sau:



$$\begin{cases} f(1) = 1, f(3) = 3 \\ f(2n) = f(n) \\ f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n) \\ f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n) \end{cases} \quad \text{với mọi số nguyên dương } n.$$

Câu 11. Cho hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

- $f(n)$ là ước của n^{2018} với mọi n
- $f(a) \cdot f(b) = f(c)$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ và $a^2 + b^2 = c^2$

a) Chứng minh rằng nếu n lẻ hoặc $n:4$ thì $f(n) = 1$

b) Gọi A là tập hợp giá trị có thể có của $f(2) + f(2018)$. Tính $|A|$

Câu 12. Có tồn tại hàm số $f: S \rightarrow S$ thỏa mãn điều kiện

$$f(a)f(b) = f(a^2b^2), \forall a, b \in S, a \neq b \text{ không, trong đó } S = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}?$$

Câu 13. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Câu 14. Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) Tập hợp $I = \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \mid x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \right\}$ là một khoảng

Câu 15. Tìm các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $f^2(m) + f(n) \mid (m^2 + n)^2, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$

Câu 16. Cho hàm $f(x, y)$ thỏa mãn các điều kiện:

- $f(0, y) = y + 1; f(x + 1, 0) = f(x, 1)$
- $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$

Với mọi số nguyên không âm x, y . Tìm $f(4, 1981)$?

Câu 17. Cho hàm $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- $f(n+1) > f(n); \forall n \in \mathbb{Z}^+$
- $f(f(n)) = 3n, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

Hãy tính $f(2003)$.

Câu 18. Cho $f(n)$ là hàm số xác định với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và lấy giá trị không âm thỏa mãn tính chất:

- $\forall n, m \in \mathbb{N}^* : f(m+n) - f(m) - f(n)$ lấy giá trị 0 hoặc 1
- $f(2) = 0$ và $f(3) > 0$.
- $f(9999) = 3333$.



Tính $f(2000)$.

Câu 19. Cho f, g là các hàm xác định trên \mathbb{R} thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Chứng minh rằng nếu $f(x) \neq 0$ và $|f(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $|g(y_0)| = a > 1$

Câu 20. Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa 2 điều kiện

i) $f(x) \geq 1+x; \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x+y) \geq f(x) \cdot f(y); \forall x, y \in \mathbb{R}$

Chứng minh rằng không thể tồn tại hai số $a, b \in \mathbb{R}$ mà $f(a) \cdot f(b) \leq 0$

Câu 21. Cho $f(x, y) = \sqrt{\frac{2003}{2}} \cos 2(x+y) + a \cos(x+y+\alpha)$ với $a, \alpha \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $\min(f(x, y))^2 + (\max f(x, y))^2 \geq 2003$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}, \forall x \neq 0$.

Giả sử $f_0(x) = x$ và $f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \neq 0$.

Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \neq -1, 0, 1 \cdot \frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = 1 + \frac{1}{f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2n}}$

Câu 23. Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ là hàm số thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $f(1, 1) = 2$

ii) $f(m+1, n) = f(m, n) + m, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$

iii) $f(m, n+1) = f(m, n) - n, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$

Tìm tất cả các cặp số (p, q) sao cho $f(p, q) = 2019$.

Câu 24. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $0 \leq f(x) \leq x^2, \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $f(x) - f(y)$ chia hết cho $x - y$ với mọi $x, y \in \mathbb{N}, x > y$

Câu 25. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q}_+^* \rightarrow \mathbb{Q}_+^*$ mà tập $\mathbb{Q}_+^* = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$ thỏa mãn:

$$f(x) + f(y) + 2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)}, \forall x, y \in \mathbb{Q}_+^* \quad (1)$$

Câu 26. Cho hàm $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn với mọi $n > 1$ thì có một số nguyên

tố p là ước của n sao cho: $f(n) + f(p) = f\left(\frac{n}{p}\right) \quad (1)$ và

$$f(3^{2018}) + f(5^{2019}) + f(7^{2020}) = 2017.$$



Hãy tính giá trị của biểu thức $G = f(2018^{2018}) + f(2019^{2019}) + f(2020^{2020})$

Câu 27. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$2f^3(m^2 + n^2) = f^2(m)f(n) + f(m)f^2(n), \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Câu 28. Giả sử $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục và giảm sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$ ta có

$$f(x+y)f(f(x)+f(y)) + f(y+f(x))$$

Chứng minh rằng $f(f(x)) = x$.

Câu 29. Cho song ánh $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Chứng minh rằng tồn tại vô số bộ (a, b, c) với $a, b, c \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $a < b < c$ và $2f(b) = f(a) + f(c)$.

Câu 30. Có bao nhiêu hàm $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

a) $f(1) = 1$

b) $f(n)f(n+2) = 9(f(n+1))^2 + 1997, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 31. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ sao cho.

a) $f(2) = 2$

b) $f(m.n) = f(m).f(n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$, $UCLN(m, n) = 1$

c) $f(m) < f(n) \forall m, n \in \mathbb{N}^*, m < n$.

Câu 32. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(m+n) + f(mn) = f(m)f(n) + 1, \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Câu 33. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(0) = 2$ và

$$f(x + f(x + 2y)) = f(2x) + f(2y), \forall x, y \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Câu 34. Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$

Câu 35. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(m + f(n)) = n + f(m + b), \forall m, n \in \mathbb{N}^* (b \in \mathbb{Z}) \quad (i)$$

Câu 36. Hãy xác định tất cả hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đẳng thức:

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2).f(n+3) - a \quad (1)$$

Với a là số tự nhiên thỏa mãn $a-1$ là số nguyên tố.

Câu 37. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $f_t(n) + (a-1).f(n) = an + (t+a)k$ với

$$f_t(n) = \underbrace{f(f(\dots f(n)))}_t \text{ với } a, t \text{ là số tự nhiên tùy ý thỏa mãn } k(2t-1) < a-1.$$

Câu 38. Cho hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} (f(2n+1) + f(2n+1))(f(2n+1) - f(2n) - 1) = 3(1 + 2f(n)) \\ f(2n) \geq f(n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$



Tìm n sao cho $f(n) \leq 2009$.

Câu 39. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{3}f(xy) + \frac{1}{3}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{9}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Câu 40. Cho $n \in \mathbb{N} (n > 2)$ và hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ sao cho:

$$f(x^n + y) = x^{n-1}f(x)f(f(y)); \forall x, y \in \mathbb{Q} (*)$$

a) Giả sử rằng $f(2002) \neq 0$. Tính $f(2002)$.

b) Tìm hàm số f .

Câu 41. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f(x + y^2 + z^3) = f(x) + f^2(y) + f^3(z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{N}$$

Câu 42. Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

a) $f(ab) = f([a, b])f((a, b))$ với mọi $a, b \in \mathbb{N}^*, a \neq b$; trong đó $[a, b], (a, b)$ lần lượt là bội chung nhỏ nhất, ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a, b ;

b) $f(p+q+r) = f(p) + f(q) + f(r)$ với mọi số nguyên tố p, q, r .

Tính giá trị của $f(2013)$? Kí hiệu \mathbb{N}^* là tập hợp tất cả các số nguyên dương.

Câu 43. Đặt $F = f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ và $n \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c thỏa mãn điều kiện

$$\int_0^1 f(\sqrt[n]{x}) dx \leq c \int_0^1 f(x) dx$$

Với $f \in F$ và f là hàm liên tục.

Câu 44. Tìm tất cả các hàm $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục, thỏa mãn:

$$f(x) = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), \forall x \in [-1, 1]$$

Câu 45. Có thể tồn tại hay không một hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn điều kiện: Với mọi số thực x , ta có $f(x)$ là số hữu tỉ khi và chỉ khi $f(x+1)$ là số vô tỉ.

Câu 46. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(t) = f(y) + f(z)$ với mọi số hữu tỉ $x < y < z < t$ và x, y, z, t theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Câu 47. Giả sử $r, s \in \mathbb{Q}$ là hai số cho trước. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện $f(x + f(y)) = f(x+r) + y + s, \forall x, y \in \mathbb{Q}$?

Câu 48. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho với tất cả các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$, đẳng thức sau là đúng:

$$(f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

Câu 49. Tìm tất cả các hàm $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm trên \mathbb{R}^+ thỏa mãn

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x}; \quad g'(x) = -\frac{f(x)}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$



Câu 50. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm trên \mathbb{R}_+^* thỏa mãn

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad (1)$$

Câu 51. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f(f(n)) = n + b \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

trong đó b là số nguyên dương chẵn.

Câu 52. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

i) $f(xf(y)) = yf(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Câu 53. Chứng minh rằng tồn tại song ánh $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$f(3mn + m + n) = 4f(m)f(n) + f(m) + f(n) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

Câu 54. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa:

$$3f(f(f(n))) + 2f(f(n)) + f(n) = 6n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Câu 55. Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(f(x)) = yf(yf(x)) \quad \forall x, y \in (0; +\infty) \quad (1)$$

Câu 56. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một hàm số f xác định trên tập các số thực dương, nhận giá trị thực dương và thỏa mãn $f(f(x)) = 6x - f(x)$.

Câu 57. Hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i): $f(f(n)) = n, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1)$

(ii): $f(f(n+2)+2) = n, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2)$

(iii): $f(0) = 1 \quad (3)$

Tìm giá trị $f(1995), f(-2007)$

Câu 58. Tìm $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(xyz) = xf(x) + yf(y) + zf(z) \quad \forall x, y, z \in (0, 1)$

Câu 59. Tìm tất cả các hàm f xác định trên \mathbb{N} và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 2f(n)f(k+n) - 2f(k-n) = 3f(n)f(k), k \geq n \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Câu 60. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

$$\begin{cases} f(f(n)) = n + 2k, \forall n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^* \\ f(n+1) \geq f(n), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Câu 61. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

$$\begin{cases} f(2013) = 2016 \\ f(f(n)) = n + 4, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Câu 62. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:



$$f(n) + f(n+1) = f(n+1) \cdot f(n+3), \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Câu 63. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$$

Câu 64. Tìm số nguyên dương m nhỏ nhất sao cho tồn tại hàm số $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$

thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

i) $f(m) = f(2015), f(m+1) = f(2016);$

ii) $f(n+m) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}, n=1,2,\dots$

Câu 65. Xác định hàm số $f(x)$ liên tục $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

- $f(2x) = 2f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+, (1)$
- $f(f^3(x)(e^{f(x)} - 1)) = x^2(e^x - 1)f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+, (2)$
- $f(e-1) = (e-1)f(1), (3)$
- $f(k)$ là số nguyên dương với mọi số nguyên dương $k, (4)$

Câu 66. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- Với mọi cặp a, b nguyên dương không nguyên tố cùng nhau, có $f(a) \cdot f(b) = f(ab)$
- Với mọi bộ a, b nguyên dương tồn tại một tam giác không suy biến có độ dài ba cạnh là $f(a), f(b)$ và $f(a+b-1)$.

Câu 67. Tìm các hàm số $f: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x) - f(y) = (y-x)f(xy) \text{ với mọi } x, y > 1 \quad (1)$$

Câu 68. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đẳng thức:

$$f(f^2(m) + 2f^2(n)) = m^2 + 2n^2, \text{ với mọi } m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Câu 69. Tìm tất cả các số nguyên không âm n sao cho tồn tại một hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow [0; +\infty)$ khác hằng thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau

i) $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$

ii) $\{2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \{0; 1; 2; \dots; n\}.$

Câu 70. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện:

$$2(f(m^2 + n^2))^3 = f^2(m) \cdot f(n) + f^2(n) \cdot f(m), \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Câu 71. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

- $f(0) = c$
- $f(n+1) = \frac{\sqrt{3}f(n)+1}{\sqrt{3}-f(n)}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$



Câu 72. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa:

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Câu 73. Có tồn tại hay không hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho

$$f(m + f(n)) = f(m) - n, \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Câu 74. Cho hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ là hàm số thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) $f(mn) = f(m)f(n), \forall m, n \in \mathbb{N}$
- ii) $(m+n)$ là ước của $f(m) + f(n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$

Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên lẻ k sao cho $f(n) = n^k, \forall n \in \mathbb{N}$.

Câu 75. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- i) $f(0) = 0, f(1) = 1$
- ii) $f(0) \leq f(1) \leq f(2) \leq \dots$
- iii) $f(x^2 + y^2) = f^2(x) + f^2(y), \forall x, y \in \mathbb{N}^*$

Câu 76. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) Nếu $a|b$ thì $f(a) \geq f(b)$
- ii) $f(ab) + f(a^2 + b^2) = f(a) + f(b), \forall a, b \in \mathbb{N}$

Câu 77. Tồn tại hay không hàm số $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện:

- i) f là hàm đơn ánh
- ii) $f(ab) = f(a) + f(b)$ với mọi $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ và $ab \leq n$

Câu 78. Giả sử Josephus có $(n-1)$ người bạn, n người này đứng thành một vòng tròn đánh số từ 1 đến n theo chiều kim đồng hồ, tự sát theo nguyên tắc, người thứ nhất cầm dao đếm 1 rồi tự sát, người thứ hai đếm 2 rồi tự sát, ... Quá trình dừng lại khi còn một người. Gọi $f(n)$ là hàm số biểu thị vị trí của người sống sót đó. Câu hỏi đặt ra là, hãy tính $f(n)$?

Câu 79. Cho hai hàm số $f, g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ là hai hàm số thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

- i) g là hàm số toàn ánh
- ii) $2f^2(n) = n^2 + g^2(n), \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Nếu $|f(n) - n| \leq 2019\sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ thì f có vô số điểm bất động.

Câu 80. Tìm tất cả các hàm số $g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$g(g(n) - n) + g(n + 1) = 3 + n + g(n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Câu 81. Cho ba số thực a, b, c không âm, phân biệt sao cho tồn tại hàm $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa

mãn $af(xy) + bf\left(\frac{x}{y}\right) = cf(x) + g(y)$ với mọi số thực dương $x > y$.



Chứng minh rằng tồn tại hàm $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho:

$$f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right) = 2f(x) + h(y), \forall x > y > 0$$

Câu 82. Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn:

$$n! + f(m)! \mid f(n)! + f(m!), \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Câu 83. Tồn tại hay không hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(f(n)) + 3n = 2f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Câu 84. Tìm tất cả các hàm số tăng thực sự $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(n + f(n)) = 2f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Câu 85. Tìm tất cả các toàn ánh $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn:

$$f(m) \mid f(n) \Leftrightarrow m \mid n$$



II. LỜI GIẢI.

Câu 1. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$3f(n) - 2f(f(n)) = n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Lời giải

Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Đặt $g(n) = f(n) - n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, thì ta được $2g(f(n)) = 2[f(f(n)) - f(n)] = f(n) - n = g(n), \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

Áp dụng liên tiếp (1) ta được

$$g(n) = 2g(f(n)) = 2^2 g(f(f(n))) = \dots = 2^m g(f(f(\dots f(n)\dots))), \text{ trong đó có } m \text{ dấu } f.$$

Như vậy thì $g(n)$ chia hết cho $2^m, \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow g(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ hay $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$

Thử lại thì thấy hàm số $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài là: $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Nhận xét. Việc đặt hàm phụ $g(n) = f(n) - n, \forall n \in \mathbb{N}$ giúp ta đưa phương trình hàm ban đầu về dạng mới đẹp hơn. Và khi đó ta phát hiện ra thêm được các tính chất của hàm mới $g(n)$ để từ đó ta áp dụng liên tiếp các tính chất ấy và kết hợp với các tính chất số học chia hết để suy ra được hàm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 2. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$(m+n)f(m^2+n^2) = mf(n) + nf(m), \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Lời giải

Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Kí hiệu $P(u, v)$ là phép thế u, v vào (1) thì ta được:

$$P(0, n) \Rightarrow nf(n^2) = nf(0), \forall n \in \mathbb{N}$$

Do đó $f(n^2) = f(0), \forall n \in \mathbb{N}$.

Đặt $g(n) = f(n) - f(0), \forall n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, ta thay vào (1) ta được $(m+n)g(m^2+n^2) = mg(n) + ng(m), \forall m, n \in \mathbb{N}$ (2)

Hơn nữa, ta còn có $g(0) = 0$ và $g(n^2) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Kí hiệu $Q(u, v)$ là phép thế $m = u, n = v$ vào (2) thì

$$Q(n, n) \Rightarrow 2ng(2n^2) = 2ng(n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Do đó ta được $g(2n^2) = g(n), \forall n \in \mathbb{N}$ và

$$Q(2n^2, n^2) \Rightarrow 3n^2 g(5n^4) = n^2 g(n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Từ đó suy ra $g(n) = 3g(5n^4), \forall n \in \mathbb{N}$

Từ đây ta áp dụng liên tục các tính chất trên, thì ta đó ta suy ra

$$g(n): 3^k, \forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra: $g(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ hay $f(n) = f(0) = \text{const}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Thử lại thì ta thấy hàm này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(n) = f(0) = \text{const}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Nhận xét. Cũng tương tự như **bài toán 1** ta nhìn phương trình hàm ban đầu dưới một hàm phụ khác, bằng các phép thế cơ bản ta phát hiện ra được một số tính chất sơ khai ban đầu. Và bằng phép đặt $g(n) = f(n) - n, \forall n \in \mathbb{N}$ ta được một phương trình hàm có dạng y chang phương trình hàm ban đầu, nhưng ta lại được thêm các điều kiện ràng buộc là $g(0) = 0$ và $g(n^2) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ nên từ đó ta đã được thêm các ràng buộc, thuận lợi cho việc giải phương trình. Phép đặt này rất hay, nó vừa bảo toàn phương trình hàm có dạng y chang ban đầu và kèm theo là các điều kiện ràng buộc mà phương trình hàm ban đầu không có. Từ đấy, tương tự **bài toán 1**, ta phát hiện các tính chất của hàm $g(n)$ và sử dụng liên tục chúng và kết hợp cùng với các tính chất chia hết để suy ra hàm số cần tìm.

Câu 3. Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(n+1) > f(f(n)), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Chứng minh rằng $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

IMO 1977

Lời giải

Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Đặt $d = \min\{f(n), n \in \mathbb{N}^*\}$, theo **nguyên lý cực hạn** thì d tồn tại và duy nhất.

Gọi $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $f(m) = d$.

Nếu $m > 1$ thì $d = f(m) > f(f(m-1))$, mâu thuẫn.

Do đó $f(n)$ đạt giá trị nhỏ nhất duy nhất tại $n = 1$

Lập luận tương tự thì ta có $f(2) = \min\{f(n), n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2\}$

Và lập luận lại quá trình tương tự như trên ta được:

$$f(1) < f(2) < f(3) \dots < f(n) < \dots$$

Ta có $f(1) \geq 1$ nên $f(n) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ mà $f(n_0) > n_0$ thì $f(n_0) \geq n_0 + 1$.



Suy ra $f(f(n_0)) \geq f(n_0 + 1)$, mâu thuẫn

Do đó, $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, thử lại thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nhận xét. Đây là một bài toán phương trình hàm trong kì thi Toán Quốc Tế - IMO năm 1977, một bài toán phương trình hàm với điều kiện ràng buộc là ở dạng bất đẳng thức, rất lạ và mới. Làm ta nảy ra ý tưởng sử dụng nguyên lý cực hạn để đánh giá để có điều vô lý và suy ra được hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$x^2 + f(y) \mid f^2(x) + y, \forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad (+)$$

Lời giải

Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Trong (+) ta thế $x = y = 1$ ta được $1 + f(1) \mid f^2(1) + 1 \Rightarrow f(1) = 1$

Trong (+) ta thế $x = 1$ ta được $1 + f(y) \mid f^2(1) + y = 1 + y, \forall y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow y \geq f(y), \forall y \in \mathbb{N}^* \quad (1)$

Trong (+) ta thế $y = 1$ ta được

$$x^2 + f(1) \mid f^2(x) + 1, \forall x, y \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow x^2 + 1 \mid f^2(x) + 1, \forall x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{N}^*$, thử lại ta thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{N}^*$.

Nhận xét. Đây là một bài toán phương trình hàm trên tập rời rạc, mà cho dưới dạng chia hết. Bằng các phép thế đơn giản cùng với các đánh giá số học không quá khó khan, ta có thể nhanh chóng đánh giá được biên của hàm f và để từ đó ta suy ra được hàm số thỏa mãn đề bài.

Câu 5. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f^2(m) + f(n) \mid (m^2 + n)^2, \forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad (*)$$

IMO Shortlist 2004

Lời giải

Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Trong (*) ta thế $m = n = 1$ ta được:

$$f^2(1) + f(1) \mid (1^2 + 1)^2 = 4 \Rightarrow f(1) = 1, \text{ do } f(1) \in \mathbb{N} \text{ và } f(1) \geq 1$$

Trong (*) ta thế $m = 1$ ta được:

$$f^2(1) + f(n) \mid (1^2 + n)^2, \forall m, n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 1 + f(n) \mid (1 + n)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Trong (*) ta thế $n = 1$ ta được:

$$f^2(m) + f(1) \mid (m^2 + 1)^2, \forall m \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow f^2(m) + 1 \mid (m^2 + 1)^2, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Với p là một số nguyên tố bất kì thì:

Trong (*) ta thế $m = 1, n = p - 1$ ta được:

$$1 + f(p-1) \mid p^2 \Rightarrow \begin{cases} 1 + f(p-1) = p \\ 1 + f(p-1) = p^2 \end{cases}$$

Trường hợp 1. $1 + f(p-1) = p^2 \Rightarrow f(p-1) = p^2 - 1$.

Ta thế $m = p - 1, n = 1$ vào (*) ta được:

$$f^2(p-1) + 1 \mid ((p-1)^2 + 1)^2 \Leftrightarrow (p^2 - 1)^2 + 1 \mid ((p-1)^2 + 1)^2$$

Mà ta lại có đánh giá sau đây:

$$(p^2 - 1)^2 + 1 > (p-1)^2(p+1)^2 > p^2(p-1)^2 = (p^2 - p)^2 > ((p-1)^2 + 1)^2, \text{ mâu thuẫn}$$

Do đó, ta phải xảy ra trường hợp còn lại.

Trường hợp 2. $1 + f(p-1) = p \Rightarrow f(p-1) = p - 1$, với mọi p là số nguyên tố

Hay tồn tại k sao cho $f(k) = k$.

Với mỗi k như thế và số tự nhiên $n \neq 0$ bất kì thì ta có:

$$k^2 + f(n) \mid (k^2 + n)^2 \Rightarrow k^2 + f(n) \mid ((p-1)^2 + f(n))((p-1)^2 + 2n - f(n)) + (f(n) - n)^2$$

Khi ta chọn k là một số đủ lớn thì ta bắt buộc phải có: $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, thử lại thỏa.

Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nhận xét. Cũng tương tự như ở **bài toán 4**, đây là một bài phương trình hàm trên tập rời rạc có dạng chia hết. Cũng tương tự ở bài trên, ta cũng thế bằng các phép thế đơn giản để phát hiện một số tính chất của đề bài. Nhưng ở **bài toán 5** này khó hơn ở **bài toán 4** rất nhiều, vì từ các tính chất ta tìm được, ta không thể chặn được khoảng của hàm f để rồi suy ra $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ như ở bài toán trên được. Vì thế mà ta phải xét giá trị của hàm số f tại các giá trị là số nguyên tố để xử lý bài toán và bằng một số kiến thức đơn giản về giới hạn ta có thể suy ra được $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ một cách dễ dàng, từ đó kết thúc bài toán.



Câu 6. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn tồn tại số $k \in \mathbb{N}$ và số nguyên tố p sao cho với mọi $n \geq k$, $f(n+p) = f(n)$ và nếu $m|n$ thì $f(m+1) | f(n)+1$.

Iran TST 2005

Lời giải

Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Giả sử $n \geq k$ và p không chia hết cho $n-1$ thì khi đó tồn tại k sao cho $n-1 | n+kp$.

Suy ra ta được $f(n) | f(n+kp)+1$

Mặt khác ta lại có $f(n) = f(n+kp)$ nên $f(n) | f(n)+1 \Rightarrow f(n) | 1 \Rightarrow f(n) = 1$

Với $n > 1$ bất kì thì $n-1 | (n-1)kp \Rightarrow f(n) | f((n-1)kp)+1 = 2$

Do đó với $n > 1$ thì ta có: $f(n) \in \{1, 2\}$.

Bây giờ ta sẽ xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $f(n) = 2, \forall n \geq k$ và $p | n-1$.

Xác định $n \geq k$ và p không chia hết cho $n-1$ khi đó tồn tại m sao cho: $n-1 | m$ và $p | m-1$.

Suy ra $f(n) | f(m)+1 = 3$ hay $f(n) = 1$

Ta xác định hàm f như sau:

- $f(n) = 2, \forall n \geq k$ và $p | n-1$.
- $f(n) = 1, \forall n > k$ và p không là ước của $n-1$.
- $f(i) = f(i+p), \forall i < k$.

Trường hợp 2. $f(n) = 1, \forall n \geq k$ và $p | n-1$.

Trong trường hợp này $f(n) = 1, \forall n \geq k$ và nếu giả sử $S = \{a | f(a) = 2\}$ thì sẽ không tồn tại $m, n \in S$ thỏa mãn $m-1 | n$.

Ta xác định hàm f như sau $f(n) = \{1, 2\}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Với S là một tập con vô hạn của \mathbb{N} sao cho không tồn tại $m, n \in S$ thỏa mãn $m-1 | n$ và với $n > 1$ thì $f(n) = 2 \Leftrightarrow n \in S; f(x) = 1$, với các giá trị $x \neq 1$ còn lại và $f(1)$ là một số bất kì xác định bởi $f(2) | f(1)+1$.

Từ đây ta thử lại đề bài và thấy thỏa mãn nên ta hoàn thành bài toán.

Nhận xét. Đây là một bài toán phương trình hàm trên tập rời rạc khó và điều kiện ràng buộc khá là khó chịu. Và bằng các phép thế để tìm ra các tính chất của hàm, cùng với các kĩ thuật xử lý rất khó khan, chúng ta đã xử lý được bài toán. Đây là một bài toán khó, các bạn đọc cần nghiên cứu và đọc thật kĩ.



Câu 7. Cho p là số nguyên tố lẻ. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $f(m) = f(n)$ với $m \equiv n \pmod{p}$

ii) $f(mn) = f(m)f(n), \forall m, n \in \mathbb{Z}$

USA TST

Lời giải

Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Với $k \in \mathbb{Z}$, thì ta có $f(p(k+1)) = f(pk) \Leftrightarrow f(p)(f(k+1) - f(k)) = 0$

Bây giờ ta sẽ xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1. $f(p) \neq 0$

Để thấy nếu $f(1) = 0$ thì $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, mâu thuẫn với $f(p) \neq 0$.

Xét riêng khi $f(1) = 1$.

Với mỗi $x \in \mathbb{Z}$ và p không chia hết cho x ta có $y \in \mathbb{Z}$ sao cho $xy \equiv 1 \pmod{p}$.

Do đó ta có $f(x)f(y) = f(xy) = f(1) = 1, \forall x, y \notin \mathbb{Z}$

Suy ra: $f(n) = \pm 1$ và p không chia hết cho n .

Mặt khác ta lại có $f(n^2) = f^2(n) = 1$ với p không chia hết cho n nên $f(m) = 1$, nếu m là một số chính phương mod p và p không chia hết cho m .

Nếu không tồn tại i , với p không chia hết cho i sao cho $f(i) = -1$ thì ta có ngay $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$ và p không chia hết cho n .

Xét i là một số không chính phương mod p và k là một số không chính phương mod p và p không chia hết cho k bất kì thì ta suy ra ik là số chính phương mod p .

Mặt khác ta lại có $f(k) = -f(i)f(k) = -f(ik) = -1$

Hay

- $f(x) = 1$, nếu x là một số chính phương mod p và p không chia hết cho x
- $f(x) = -1$, nếu x là một số không chính phương mod p

Xét số x_0 sao cho $f(x_0) = -1$.

Bây giờ từ điều kiện **ii**) ta thay $m = x_0, n = p$ ta được:

$$f(p) = f(px_0) = f(p)f(x_0) \text{ hay } f(p) = 1$$

Suy ra:

- $f(x) = 1$, nếu x là số chính phương mod p
- $f(x) = -1$, nếu x là một số không chính phương mod p

Trường hợp 2. $f(p) = 0$ suy ra $f(n) = 0, \forall p|n$.

Khả năng 1. Nếu $f(1) = 0$ thì $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.



Khả năng 2. Nếu $f(1) \neq 0$

Giả sử tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) = 0$ và p không chia hết cho x_0

Suy ra $f(nx_0) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$

Ta có dãy $\{x_0, 2x_0, \dots, (p-1)x_0\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ mod p

Suy ra $f(1) = 0$, điều này mâu thuẫn.

Vậy ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow p|x$ và $f(x) = 1$, với các giá trị x còn lại.

Từ các kết quả trên đây, ta thấy có 4 hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán:

$$f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \qquad f(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } p|n \\ 1 & \text{if } n \not\equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

$$f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z} \qquad f(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ là một số chính phương mod } p \\ -1 & \text{if } n \text{ không là một số chính phương mod } p \end{cases}$$

Vậy đây là tất cả các hàm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Đây là một bài toán khó, với điều kiện hàm rất khó xử lý, một bài toán khó trong kì thi chọn đội tuyển **IMO** của **Mỹ**, và việc ứng dụng sâu sắc các kiến thức Số Học tổng hợp trong lời giải, nó có vẻ khá phức tạp. Mong bạn đọc suy nghĩ và đọc thật kĩ, và mong bạn đọc có một lời giải khác ngắn gọn và hay hơn cho bài toán.

Câu 8. Tìm số nguyên không âm n nhỏ nhất sao cho tồn tại hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow [0, +\infty)$ khác hằng số thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$

ii) $2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) \in \{0, 1, \dots, n\}, \forall x, y \in \mathbb{Z}$

Với số n tìm được, hãy tìm tất cả các hàm số thỏa mãn.

Lời giải

Với $n = 1$ xét hàm f được xác định như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } p|x \\ 1 & \text{if } x \not\equiv 0 \pmod{p} \end{cases}, \text{ với } p \text{ là số nguyên tố có dạng } 4k + 3$$

Hiển nhiên hàm số trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử với $n = 0$ thì cũng tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Khi đó thì ta có:

$$2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) = 0, \forall x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2f(x^2 + y^2) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z} \quad (+)$$

Từ điều kiện i) ta thế $x = y = 0$ ta được:

$$f(0) = f^2(0) \Rightarrow f(0) = 0 \text{ hoặc } f(0) = 1$$

Trường hợp 1. $f(0) = 1$



Ta thế $y = 0$ vào (+) thì ta được $2f(x^2) = f(x) + f(0) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{Z}$

Mà $f(x^2) = f^2(x), \forall x \in \mathbb{Z}$ nên ta suy ra:

$$2f^2(x) = 2f(x^2) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{Z}, \text{ do } f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{Z}$$

Điều này lại trái với giả thiết f khác hằng số.

Trường hợp 2. $f(0) = 0$

Ta thế $y = 0$ vào (+) thì ta được $2f(x^2) = f(x) + f(0) = f(x), \forall x \in \mathbb{Z}$

Mà $f(x^2) = f^2(x), \forall x \in \mathbb{Z}$ nên ta suy ra $2f^2(x) = 2f(x^2) = f(x), \forall x \in \mathbb{Z}$

Suy ra với mỗi $x \in \mathbb{Z}$ thì ta phải có $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = \frac{1}{2}$.

Nếu tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) = \frac{1}{2}$.

Ta thế $x = y = x_0$ vào (+) thì ta được:

$$2f(2x_0) = 2f(2)f(x_0) = 2f(x_0^2 + x_0^2) = f(x_0) + f(x_0) = 2f(x_0) \quad (++)$$

Từ (+) ta thay $x = 1, y = 0$ thì ta được: $f(1) = 0$.

Từ (+) ta thay $x = 1, y = 1$ thì ta được: $f(2) = 0$.

Từ đây ta thay $f(2) = 0$ vào (++) thì ta được:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}, \text{ điều này lại mâu thuẫn với } f \text{ khác hằng số.}$$

Vậy từ đây ta khẳng định được rằng $n = 1$ là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Khi ta tìm được $n = 1$ ta sẽ quay lại việc giải quyết bài toán đề bài.

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow [0, +\infty)$ khác hằng số thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$

ii) $2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) \in \{0, 1\}, \forall x, y \in \mathbb{Z}$

Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ta dễ dàng chứng minh được rằng: $f(0) = 0, f(1) = 1$.

Trong **i)** ta thế $y = x$ thì ta được $f(x^2) = f^2(x), \forall x \in \mathbb{Z}$

Trong **ii)** ta thế $y = 0$ thì ta được

$$2f(x^2) - f(x) = 2f^2(x) - f(x) \in \{0, 1\} \Rightarrow f(x) \in \{0, 1\}$$

Trong **i)** ta thế $x = y = -1$ thì ta được

$$f^2(-1) = f(1) = 1 \Rightarrow f(-1) = 1$$

Trong **i)** ta thế $x = -1, y = -x$ thì ta được:



$$f(x) = f(-1)f(-x), \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{Z}$$

Trường hợp 1. Tồn tại số nguyên tố p sao cho $f(p) = 0$.

Giả sử cũng tồn tại số nguyên tố $q \neq p$ sao cho $f(q) = 0$.

Trong **ii)** ta thế $x = p, y = q$ thì ta được

$$2f(p^2 + q^2) - f(p) - f(q) = 0 \Rightarrow f(p^2 + q^2) = 0$$

Do đó với mỗi $a, b \in \mathbb{Z}$ thì ta luôn có:

$$2f(a^2 + b^2)f(p^2 + q^2) = 2f((a^2 + b^2)(p^2 + q^2)) = 2f((ap + bq)^2 + (aq - bp)^2) = 0$$

Lưu ý rằng. $(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (ap + bq)^2 + (aq - bp)^2$ là **đẳng thức Brahmagupta - Fibonacci** nổi tiếng, cũng đã được đề cập đến trong nhiều cuốn sách, mong bạn đọc lưu ý chi tiết này để giải toán.

Vì $0 \leq f(x) + f(y) \leq 2f(x^2 + y^2)$ nên $f(aq - bp) = 0$.

Do $(p, q) = 1$ nên tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho $aq - bp = 1$.

Suy ra được $1 = f(1) = f(aq - bp) = 0$, điều này là vô lý.

Vậy tồn tại duy nhất số nguyên tố p sao cho $f(p) = 0$.

Khả năng 1. Nếu p là số nguyên tố có dạng $4k + 1, k \in \mathbb{Z}$ thì tồn tại $a \in \mathbb{Z}$ sao cho $p \mid a^2 + 1$ hay $f(a^2 + 1) = 0$.

Lưu ý rằng. Kết quả này các bạn có thể tham khảo trong phần chuyên đề **Thặng dư bình phương**.

Mặt khác, trong **ii)** ta thế $x = 1, y = a$ thì ta được:

$$2f(1^2 + a^2) - f(1) - f(a) = 2f(a^2 + 1) - f(1) - f(a) = 1 \Rightarrow f(a^2 + 1) = 1,$$

Điều này là mâu thuẫn.

Vậy từ đây chỉ xảy ra khả năng còn lại.

Khả năng 2. Nếu p là số nguyên tố có dạng $4k + 3$ thì

Từ đó ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow p \mid x$ và $f(x) = 1$ với các giá trị x còn lại.

Trường hợp 2. $f(p) = 1$ với mọi số nguyên tố p .

Khi đó $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Vậy từ đó có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } p \mid x \\ 1 & \text{if } x \not\mid p \end{cases}$, trong đó p là một số nguyên tố bất kì có dạng $4k + 3, k \in \mathbb{Z}$.
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$

Nhận xét. Đây là một bài toán phương trình hàm trên tập rời rạc phải nói là rất rất khó, sử dụng rất nhiều kiến thức trong Số Học cũng như kỹ năng phán đoán và biến đổi thuần



thực. Sử dụng rất nhiều các mạng kiến thức liên quan đến số nguyên tố, thặng dư bình phương hay các đẳng thức rất nổi tiếng trong Toán học. Thực sự đây là một bài hàm liên quan đến số học tổng hợp, rất hay và thú vị, mong bạn đọc nghiên cứu thật kĩ càng và cẩn thận bài toán này.

Câu 9. Giả sử hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$f(1) = 1 \text{ và } f(n) = \begin{cases} 1 + f\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{if } n = 2m+1 \\ 1 + f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{if } n = 2m \end{cases}$$

Tìm các giá trị của n sao cho $f(n) = 2019$.

Lời giải

Từ cách xác định của hàm f ta dễ dàng tính được:

$$f(2) = f(3) = 2; f(4) = f(5) = f(6) = f(7) = 3$$

Bây giờ ta sẽ viết dưới dạng nhị phân như sau:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(\overline{1}_2) = 1; f(2) = f(\overline{10}_2) = 2; f(3) = f(\overline{11}_2) = 2 \\ f(4) &= f(\overline{100}_2) = 3; f(5) = f(\overline{101}_2) = 3; f(6) = f(\overline{110}_2) = 3; \dots \end{aligned}$$

Từ cách viết dưới dạng nhị phân như trên, ta dự đoán $f(n)$ là số chữ số trong biểu diễn nhị phân của số n .

Ta sẽ chứng minh dự đoán này bằng quy nạp như sau.

Thật vậy, ta thấy khẳng định đúng với $n = 1, n = 2$.

Giả sử khẳng định đúng đến n . Ta sẽ chứng minh khẳng định đúng đến $n + 1$.

Nếu n là số chẵn thì $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 0}_2 \Rightarrow f(n) = k + 1$.

Khi đó thì ta có $n + 1 = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 1}_2$

Từ đây ta có $\frac{n}{2} = \overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1)}_2 \Rightarrow f\left(\frac{n}{2}\right) = k \Rightarrow f(n) = 1 + f\left(\frac{n}{2}\right) = k + 1$, tức là bằng số chữ số trong biểu diễn nhị phân của số n .

Nếu n là số lẻ thì bằng cách làm tương tự ta cũng được kết quả tương tự.

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta suy ra $f(n)$ là số chữ số trong biểu diễn nhị phân của n .

Ta đó ta suy ra nếu $f(n) = 2019$ thì biểu diễn của n trong hệ nhị phân chứa đúng 2019 chữ số.

Vậy từ đó ta suy ra: $2^{2018} \leq n \leq 2^{2019}$.

Nhận xét. Đây là một bài toán khá hay, với tư tưởng giải là đưa về hệ nhị phân. Bằng cách biểu thị bình thường thì ta không thể tìm ra được tính chất của dãy, bởi điều kiện nó xen kẽ với tính chẵn lẻ, rất khó chịu và phức tạp. Mà chỉ bằng cách đưa về hệ nhị phân ta đã



nắm được quy luật của dãy số mà tác giả đã ẩn đi trong bài toán, và từ đó ta nảy ra ý tưởng giải và chỉ việc đi triển khai, cuối cùng ta thu được kết quả của bài toán.

Câu 10. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} f(1) = 1, f(3) = 3 \\ f(2n) = f(n) \\ f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n) \\ f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n) \end{cases} \quad \text{với mọi số nguyên dương } n.$$

IMO 1988

Lời giải

Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Một số nguyên dương k chỉ có thể có một trong bốn dạng sau:

$$k = 4n, k = 4n+1, k = 4n+2, k = 4n+3; k, n \in \mathbb{N}$$

Do đó, từ giả thiết của bài toán, hàm số f được xác định một cách duy nhất. Ta sẽ sử dụng biểu diễn cơ số 2 để tìm biểu diễn của hàm số f .

Ta có các nhận xét sơ bộ như sau:

$$\begin{aligned} f(\overline{1_2}) &= f(1) = 1 = \overline{1_2}, f(\overline{10_2}) = f(2) = 1 = \overline{01_2} \\ f(\overline{11_2}) &= f(3) = 3 = \overline{11_2}, f(\overline{100_2}) = f(4) = 1 = \overline{001_2}, \dots \end{aligned}$$

Từ đây ta thấy được quy luật như sau:

Quy luật. Biểu diễn của $f(n)$ trong hệ cơ số 2 chính là cách viết ngược lại của biểu diễn của n trong hệ cơ số 2 tức là $f(\overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_2}) = \overline{(a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)_2}$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh dự đoán này bằng quy nạp như sau.

Chứng minh.

Với $n = 1, 2, 3, 4$ thì hiển nhiên đúng, do ta đã thử kiểm tra ở trên.

Giả sử tính chất đã đúng cho với mọi $k < n$. Ta sẽ chứng minh tính chất cũng đúng với n .

Trường hợp 1. Nếu $n = 2m$ thì theo giả thiết ta có $f(m) = f(n)$. Vì $n = 2m$ nên nếu m được biểu diễn trong hệ cơ số 2 dưới dạng $m = \overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_2}$ thì $n = \overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 0)_2}$.

Mà theo giả thiết quy nạp thì ta có:

$$f(\overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 0)_2}) = f(n) = f(m) = f(\overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_2}) = \overline{(a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)_2} = \overline{(0 a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)_2}$$

Từ đây, trong trường hợp này, tính chất được chứng minh.

Trường hợp 2. Nếu $n = 4m+1$ với $m = \overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_2}$ thì $n = \overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 01)_2}$ và $2m+1 = \overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 1)_2}$.

Mà theo giả thiết quy nạp thì ta có:



$$\begin{aligned}
 f\left(\overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 01)}_2\right) &= f(n) = f(4m+1) = 2f(2m+1) - f(m) \\
 &= 2f\left(\overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 1)}_2\right) - f\left(\overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)}_2\right) \\
 &= 2\overline{(1a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)}_2 - \overline{(a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)}_2 \\
 &= \overline{(1a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k 0)}_2 - \overline{(a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)}_2 \\
 &= \overline{(10 \dots 0)}_2 + \overline{(a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k 0)}_2 - \overline{(a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)}_2 \\
 &= \overline{(10 \dots 0)}_2 + \overline{(a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)}_2 = \overline{(10a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)}_2.
 \end{aligned}$$

Từ đây, trong trường hợp này, tính chất được chứng minh.

Trường hợp 3. Nếu $n = 4m + 3$ với $m = \overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)}_2$ thì $n = \overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 11)}_2$ và $2m + 1 = \overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 1)}_2$.

Mà theo giả thiết quy nạp thì ta có:

$$\begin{aligned}
 f\left(\overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 11)}_2\right) &= f(n) = f(4m+3) = 3f(2m+1) - 2f(m) \\
 &= f(2m+1) + 2f(2m+1) - 2f(m) \\
 &= \overline{(1a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)}_2 + \overline{(1a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k 0)}_2 - \overline{(a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)}_2 \\
 &= \overline{(1a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)}_2 + \overline{(10 \dots 0)}_2 \\
 &= \overline{(11a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)}_2.
 \end{aligned}$$

Từ đây, trong trường hợp này, tính chất được chứng minh.

Vậy theo nguyên lý quy nạp thì **quy luật** của chúng ta đã được chứng minh.

Vậy tất cả các hàm $f(n)$ thỏa mãn đề bài là:

$$f\left(\overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)}_2\right) = \overline{(a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)}_2,$$

trong đó $n = \overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)}_2$ là biểu diễn của số n trong hệ cơ số 2.

Nhận xét. Cũng với ý tưởng tương tự như ở **bài toán 9** là sử dụng hệ nhị phân để tìm ra quy luật của dãy số. Nhưng ở **bài toán 10** thì khó hơn ở các bài trước rất nhiều, do điều kiện của đề bài khá nhiều, làm ta khá hoang mang, và khá nhiều trường hợp cần xét của n nên lời giải có vẻ phức tạp. Ở bài này, các bạn cần có một cách nhìn tổng quan để khám phá ra quy luật và kiểm nghiệm sự chính xác của nó, và từ đó đi chứng minh phỏng đoán đó bằng phương pháp quy nạp, bên cạnh đó cũng cần sự biến đổi điều luyện và thật chính xác thì mới thu được kết quả của bài toán.



Câu 11. Cho hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

- $f(n)$ là ước của n^{2018} với mọi n
- $f(a) \cdot f(b) = f(c)$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ và $a^2 + b^2 = c^2$

a) Chứng minh rằng nếu n lẻ hoặc $n:4$ thì $f(n) = 1$

b) Gọi A là tập hợp giá trị có thể có của $f(2) + f(2018)$. Tính $|A|$

Lời giải

a) Nếu $n \equiv 1 \pmod{2}$ ta chọn $(a, b, c) = \left(n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}\right) \Rightarrow f(n) | f\left(\frac{a^2+1}{2}\right) | \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^{2018}$

Ta có $f(n) | n^{2018} \Rightarrow f(n) | \gcd\left(n^{2018}, \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^{2018}\right) = \gcd^{2018}\left(n, \left(\frac{n^2+1}{2}\right)\right) = 1 \Rightarrow f(n) = 1$

Nếu $n \equiv 0 \pmod{4}$ ta chọn $(a, b, c) = (4k, 4k^2-1, 4k^2+1) \Rightarrow f(4k) | f(4k^2+1) | (4k^2+1)^{2018}$

Ta có $f(4k) | (4k)^{2018} \Rightarrow f(4k) | \gcd\left((4k)^{2018}, (4k^2+1)^{2018}\right) = 1$

b) Theo câu a, ta có $f(2) | 2^{2018} \Rightarrow f(2) \in \{2^0, 2^1, \dots, 2^{2018}\}$

Với $(a, b, c) = (2018, 1018080, 1009^2+1)$ ta có $\begin{cases} f(2018) = f(1009^2+1) | (1009^2+1)^{2018} \\ f(2018) | 2018^{2018} \end{cases}$

$\Rightarrow f(2018) | \gcd^{2018}(2018, 1009^2+1) = 2^{2018} \Rightarrow f(2018) \in \{2^0, 2^1, \dots, 2^{2018}\}$

Với (a, b, c) thoả $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 & (*) \\ \gcd(a, b, c) = 1 \end{cases}$

- Nếu a, b lẻ, c chẵn.

Do $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow (2a)^2 + (2b)^2 = (2c)^2$ nên $1 = f(2c) = f(2a)f(2b)$.

Mà $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ nên $f(2a) = f(2b) = f(2c) = 1$.

- Nếu $\begin{cases} a \equiv c \equiv 1 \pmod{2} \\ b \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$.

Khi đó: $f(2c) = f(2a)f(2b) = f(2a), \forall a, c > 1$ lẻ thỏa mãn (*).

Do đó $f(2c) = f(2a)(**) \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{Z}^+ : a^2 + b^2 = c^2, \forall a, c > 1$.

Ta có $f(2018)$ thoả (**) với bộ $(a, b, c) = \left(\frac{2018}{2}, \frac{1018080}{2}, \frac{1009^2+1}{2}\right)$ mà $f(2)$ không thoả

(**) do $a, c > 1$ nên $f(2) \neq f(2018)$

Để dàng chứng minh được $2^a + 2^b \neq 2^c + 2^d$ với $(a, b) \neq (c, d)$ bằng cách chia cả hai vế cho

2^α với $\alpha = \min\{a, b, c, d\}$ nên $|T| = C_{2019}^2$.



Câu 12. Có tồn tại hàm số $f : S \rightarrow S$ thỏa mãn điều kiện

$$f(a)f(b) = f(a^2b^2), \forall a, b \in S, a \neq b \text{ không, trong đó } S = \mathbb{N}^* \setminus \{1\} ?$$

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta sẽ tìm tính chất đặc biệt của hàm số f

Xét hai biểu thức sau $f(a)f(d)f(c), f(a)f(b)f(c)$.

Ta có $f(a)f(d)f(c) = f(a^2d^2)f(c) = f(a^4d^4c^2)$ và

$$f(a)f(b)f(c) = f(a)f(b^2c^2) = f(a^2b^4c^4).$$

Ta sẽ chọn c, d sao cho $a^4d^4c^2 = a^2b^4c^4 \Leftrightarrow a^2d^4 = b^4c^2 \Leftrightarrow ad^2 = b^2c$ (1).

Với c, d thỏa mãn (1) thì

$$f(a^4d^4c^2) = f(a^2b^4c^4) \Leftrightarrow f(a)f(d)f(c) = f(a)f(b)f(c) \Leftrightarrow f(b) = f(d) \quad (2)$$

Tất nhiên ta cần chọn $d \neq b$ và c thỏa mãn (1) chẳng hạn $d = b^2, c = ab^2$.

Nên từ (2) ta được $f(b) = f(b^2), \forall b \in S$ (3).

Từ tính chất (3) ta có

$$f(a)f(b) = f(a^2b^2), \forall a, b \in S, a \neq b \Leftrightarrow f(a)f(b) = f(ab), \forall a, b \in S, a \neq b \quad (4)$$

Sử dụng tính chất (3), (4) ta được $f(16) = f(4^2) = f(4) = f(2^2) = f(2)$.

Mặt khác $f(16) = f(2.8) = f(2)f(8)$.

Từ hai đẳng thức trên ta được $f(2)f(8) = f(2) \Leftrightarrow f(8) = 1$ (vô lí).

Vậy không tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải

Với dạng toán mà giả thiết về bất đẳng thức thì việc dự đoán được nghiệm đóng vai trò quan trọng trong việc định hướng lời giải. Việc dự đoán nghiệm thường ta thông qua việc tính các giá như $f(1), f(2), f(3), \dots$

Thay $n = 1$ vào phương trình ban đầu ta được $0 < f(1)f(f(1)) < 2 \Rightarrow f(1) = 1$.

Thay $n = 2$ vào phương trình ban đầu ta được $1 < f(2)f(f(2)) < 6$.

Từ bất đẳng thức này suy ra $f(2) > 1$, nếu $f(2) \geq 3$.

Từ điều kiện ban đầu ta thay n bởi $f(n)$ thu được

$$(f(n)-1)^2 < f(f(n))f(f(f(n))) < f(n)^2 + f(n), \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1).$$

Từ (1), thay $n = 2$ ta được $(f(2)-1)^2 < f(f(2))f(f(f(2))) < f(2)^2 + f(2)$



$$\Rightarrow 4 \leq (f(2)-1)^2 < f(f(2))f(f(f(2))) \Rightarrow f(f(2)) \geq 2$$

Điều này mâu thuẫn với $1 < f(2)f(f(2)) < 6$. Do đó $f(2) = 2$.

Do đó ta dự đoán $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Giả sử $f(1) = 1, f(2) = 2, \dots, f(n-1) = n-1$. Ta chứng minh $f(n) = n$

Với mỗi số nguyên dương n , đặt $f(n) = m$. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m \leq n-1 \Rightarrow f(n)f(f(n)) = mf(m) = m^2 \leq (n-1)^2$ vô lí.
- Nếu $f(n) = m \geq n+1 \Rightarrow (n+1)f(f(n)) \leq f(n)f(f(n)) < n^2 + n \Rightarrow f(f(n)) < n$

$$f(f(f(n))) = f(f(n)) \Rightarrow f(f(n)) \cdot f(f(f(n))) = (f(f(n)))^2 < n^2,$$

Kết hợp với $f(f(f(n)))f(f(n)) > (f(n)-1)^2$ ta được $n^2 > (f(n)-1)^2 \Rightarrow f(n) < n+1$ vô lí.

Do đó $f(n) = n$. Vậy $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 14. Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) Tập hợp $I = \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \mid x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \right\}$ là một khoảng

Lời giải

Phân tích. Điểm mấu chốt để giải bài toán chính là hiểu và tận dụng được giả thiết ii).

Tập hợp I là một khoảng có nghĩa là nếu $a, b \in I, a < b$ thì $[a, b] \subset I$.

Từ điều này ta suy ra tính chất quan trọng của tập hợp I là nếu có số thực $a \notin I$ thì hoặc là $x > a, \forall x \in I$ hoặc là $x < a, \forall x \in I$.

Khi đó ta có lời giải sau.

Để ý rằng nếu $f(x) - f(y) = x - y$ thì $x = y$ (do i).

Do đó $1 \notin I$.

Giả sử $t \in I$. Khi đó $t \neq 1$ và tồn tại $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ sao cho $f(x) - f(y) = t(x - y)$.

Vì $x \neq y$ nên $f(y + f(x)) \neq f(x + f(y))$ và

$$\frac{f(y + f(x)) - f(x + f(y))}{(y + f(x)) - (x + f(y))} = \frac{y - x}{y - x + t(x - y)} = \frac{1}{1 - t}.$$

Do đó $\frac{1}{1-t} \in I$. Mà I là một khoảng nên mọi phần tử x nằm giữa t và $\frac{1}{1-t}$ cũng thuộc I

Nếu $t > 1$ thì $\frac{1}{1-t} < 0$ (mâu thuẫn vì khi đó ta lại có $1 \in I$)

Do đó $t < 1$. Tương tự ta cũng có $\frac{1}{1-t} < 1$, tức là $t < 0$.



Như vậy ta đã chứng minh được rằng nếu $t \in I$ thì $\frac{1}{1-t} \in I$ và $t < 0$.

Mà khi $t < 0$ thì $\frac{1}{1-t} > 0$ nên ta có mâu thuẫn.

Như vậy I phải là tập rỗng mà rõ ràng $I \neq \emptyset$, chẳng hạn $(f(1) - f(0)) \in I$.

Do đó không tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ngoài ra ta cũng có thể giải bài toán này như sau.

Đặt $F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$.

Tương tự cách đầu, ta có $F(x, y) \neq 1, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$

Nếu tồn tại $x \neq y$ sao cho $F(x, y) = 0$ thì $F(y + f(x), x + f(x)) = 1$ (vô lý).

Do đó $F(x, y) \in \{0; 1\}, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ (*)

Suy ra f là đơn ánh. Do đó với mọi $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ ta có

$$f(x + f(y)) - f(y + f(y)) = f(y + f(x)) - f(y + f(y)) + x - y$$

Hay $F(x + f(y), y + f(y)) = F(y + f(x), y + f(y))F(x, y) + 1$

Từ đây, kết hợp với (*) và ii) ta suy ra $F(x, y) > 1, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$

Suy ra f đơn điệu tăng trên \mathbb{R} .

- Nếu $x > y$ thì $f(x) - f(y) > x - y$ hay $y + f(x) > x + f(y)$.

Suy ra $f(y + f(x)) > f(x + f(y))$, kết hợp với i), ta được $x < y$.

- Tương tự nếu $x < y$ ta cũng có mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. Tìm các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $f^2(m) + f(n) \mid (m^2 + n)^2, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán

Ta có $f^2(1) + f(1) \mid 4 \Rightarrow f(1) = 1$

Thay $m = 1 \Rightarrow 1 + f(n) \mid (1 + n)^2, \forall n \in \mathbb{N}$

Thay $m = 1, n = p - 1 (p \in P) \Rightarrow 1 + f(p - 1) \mid p^2 \Rightarrow \begin{cases} f(p - 1) + 1 = p \\ f(p - 1) + 1 = p^2 \end{cases}$

Nếu $\exists p \in P: f(p - 1) = p^2 - 1$.

Thay $m = p - 1, n = 1 \Rightarrow f^2(p - 1) + 1 \mid ((p - 1)^2 + 1)^2$

Suy ra $(p^2 - 1)^2 + 1 \mid (p^2 - 2p + 2)^2$



Có $p^2 - 1 > p^2 - 2p + 2$ nên có mâu thuẫn

Vậy $f(p-1) = p-1, \forall p \in P$

Thay $m = p-1 \Rightarrow (p-1)^2 + f(n) \mid [(p-1)^2 + n]^2$

Suy ra $(n + (p-1)^2)^2 \equiv 0 \pmod{(p-1)^2 + f(n)}$

Mà $(f(n) - n)^2 \equiv 0 \pmod{(p-1)^2 + f(n)}$

Suy ra $(f(n) - n)^2 \equiv 0 \pmod{(p-1)^2 + f(n)}$

Nếu $f(n) \neq n$, khi đó ta có $(f(n) - n)^2 \geq f(n) + (p-1)^2, \forall p \in P^*$

Mà tập các số nguyên tố là vô hạn nên $f(n) + (p-1)^2 \rightarrow \infty$.

Mà $(f(n) - n)^2$ cố định với n xác định.

Do đó chỉ cần chọn p nguyên tố đủ lớn ta có mâu thuẫn (*).

Vậy $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (thử lại thỏa mãn)

Câu 16. Cho hàm $f(x, y)$ thỏa mãn các điều kiện:

- $f(0, y) = y + 1; f(x + 1, 0) = f(x, 1)$
- $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$

Với mọi số nguyên không âm x, y . Tìm $f(4, 1981)$

Lời giải

Ta có $f(1, n) = f(0, f(1, n-1)) = 1 + f(1, n-1)$

Do đó $f(1, n) = n + f(1, 0) = n + f(0, 1) = n + 2$

Ta lại có $f(2, n) = f(1, f(2, n-1)) = f(2, n-1) + 2$

Do đó $f(2, n) = 2n + f(2, 0) = 2n + f(1, 1) = 2n + 3$

Bây giờ $f(3, n) = f(2, f(3, n-1)) = 2f(3, n-1) + 3$

Đặt $u_n = 2u_{n-1}$ và $u_0 = f(3, 0) + 3 = f(2, 1) + 3 = 0$

Do vậy $u_n = 2^{n+3} f(3, n) = 2^{n+3} - 3$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(4, n) = f(3, f(4, n-1)) = 2^{f(4, n-1)+3} - 3 \\ f(4, 0) = f(3, 1) = 2^4 - 3 = 13 \\ f(4, 2) = 2^{224} - 3 \end{cases}$$

Bằng qui nạp ta chứng minh được $f(4, n) = 2^{22 \cdot 24} - 3$

Trong đó số mũ chứa $(n+2)$ chữ số 2. Từ đó $f(4, 1981) = 2^{22 \cdot 24} - 3$ với số mũ chứa 1983 chữ số 2.



Câu 17. Cho hàm $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn các điều kiện sau:

iii) $f(n+1) > f(n); \forall n \in \mathbb{Z}^+$

iv) $f(f(n)) = 3n, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

Hãy tính $f(2003).$

Lời giải

Từ (i), (ii) $\Rightarrow f(1) < f(f(1)) = 3 \Rightarrow f(1) = 2$

Ta có $f(2) = f(f(1)) = 3.1 = 3$

$f(3) = f(f(2)) = 3.2$

$f(2.3) = f(f(3)) = 3.3 = 3^2$

.....

Suy ra $f(2.3^n) = 3^{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+; f(3^n) = 2.3^n; \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Nên có $f(3^{n+1}) = f(f(2.3^n)) = 2.3^{n+1}$ và $f(2.3^{n+1}) = f(f(3^{n+1})) = 3.3^{n+1} = 3^{n+2}$

Do đó khẳng định đúng với mọi n

Ta có $(3^n - 1)$ số nguyên m nằm giữa 3^n và 2.3^n và do giả thiết (i) $f(n+1) > f(n)$ nên có $(3^n - 1)$ số nguyên m nằm giữa $f(3^n)$ và $f(2.3^n)$ suy ra $0 < m < 3^n \Rightarrow f(3^n + m) = 2.3^n + 3m.$

Do giả thiết (ii) suy ra $f(2.3^n + m) = f(f(3^n + m)) = 3(3^n + m)$

Vậy $f(2.3^n + m) = 3(3^n + m)$ với $0 < m < 3^n$

Suy ra $n = 2003 = 2.3^6 + 545 \Rightarrow f(2003) = 3(3^6 + 545) = 3822.$

Câu 18. Cho $f(n)$ là hàm số xác định với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và lấy giá trị không âm thỏa mãn tính chất:

- $\forall n, m \in \mathbb{N}^* : f(m+n) - f(m) - f(n)$ lấy giá trị 0 hoặc 1
- $f(2) = 0$ và $f(3) > 0.$
- $f(9999) = 3333.$

Tính $f(2000).$

Lời giải

Vì $f(m+n) - f(m) - f(n)$ lấy giá trị 0 hoặc 1 nên ta suy ra $f(m+n) \geq f(m) + f(n)$
 $\Rightarrow f(2) \geq 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(3) = 1$

Ta có $f(6) \geq f(3) + f(3) = 2$

$f(9) \geq f(6) + f(3) \geq 3$

.....

$f(9999) \geq f(9996) + f(3) \geq 3333$



Vì giả thiết cho $f(9999) = 3333$ nên ta có dấu “=” ở các bất đẳng thức trên xảy ra, tức là

$$f(3n) = n, \forall n = 1, 2, \dots, 3333 \Rightarrow f(1998) = 666, f(2001) = 667$$

Mặt khác nếu $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $a > b \Rightarrow f(a) \geq f(b) + f(a-b) \geq f(b)$.

$$\Rightarrow 666 \leq f(2000) \leq 667 \Rightarrow f(2000) = 666 \text{ hoặc } 667$$

Giả sử $f(2000) = 667 \Rightarrow f(4000) \geq 1334 \Rightarrow f(6000) \geq 1334 + 667 = 2001$.

Mà $f(6000) = 2000$, mâu thuẫn. Vậy $f(2000) = 666$.

Câu 19. Cho f, g là các hàm xác định trên \mathbb{R} thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Chứng minh rằng nếu $f(x) \neq 0$ và $|f(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $|g(y_0)| = a > 1$

Lời giải

Ta dùng phương pháp phản chứng

Giả sử lại một điểm $y_0 \in \mathbb{R} : |g(y_0)| = a > 1$

Ta lấy $x_0 : f(x_0) \neq 0$ và xây dựng dãy $x_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ như sau:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + y_0, & \text{khi } |f(x_k + y_0)| \geq |f(x_k - y_0)| \\ x_k - y_0, & \text{khi } |f(x_k + y_0)| < |f(x_k - y_0)| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Theo giả thiết ta có } 2|f(x_{k+1})| &> |f(x_k + y_0)| + |f(x_k - y_0)| \geq |f(x_k + y_0)| + |f(x_k - y_0)| \\ &= 2|f(x_k)| |g(y_0)| = 2a|f(x_k)| \end{aligned}$$

Nên $|f(x_{k+1})| \geq a|f(x_k)|$ với $a > 1; k = 1, 2, 3, \dots$

Do đó ta có: $|f(x_k)| \geq a^k |f(x_0)|$.

Nhưng vì $|f(x_0)| \neq 0$ và $a > 1$ nên có thể chọn k sao cho $a^k |f(x_0)| > 1$ đó đó $|f(x_k)| > 1$

Mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy $|g(y)| \leq 1, \forall y \in \mathbb{R}$

Câu 20. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa 2 điều kiện

iii) $f(x) \geq 1 + x; \forall x \in \mathbb{R}$

iv) $f(x+y) \geq f(x) \cdot f(y); \forall x, y \in \mathbb{R}$

Chứng minh rằng không thể tồn tại hai số $a; b \in \mathbb{R}$ mà $f(a) \cdot f(b) \leq 0$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Thật vậy! Với $|x| < 1$ thì theo điều kiện (i) ta có ngay $f(x) > 0$

 Bồi dưỡng học sinh giỏi

Với $|x| < 1$, trước hết ta sẽ chứng minh bất đẳng thức:

$$f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right]^{2^n}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Với $n = 0$ thì bất đẳng thức đúng!

Giả sử (1) đúng với $n - k > 0$ tức $f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right]^{2^k} \quad (2)$

Ta có $\left[f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right]^{2^k} = f\left(\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{x}{2^{k+1}}\right) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right]^{2^{k+1}} = f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$ tức (1) đúng với $n = k + 1$

Theo nguyên lý quy nạp toán học bất đẳng thức (1) đúng.

Bây giờ chọn n đủ lớn để $|x| < 2^n, x \in \mathbb{R}$ tùy ý, khi đó $\left| \frac{x}{2^n} \right| < 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{2^n}\right) > 0$

Do đó $\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right]^{2^n} > 0$ tức $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Như vậy không thể tồn tại hai số $a, b \in \mathbb{R}$ mà $f(a) \cdot f(b) \leq 0$.

Câu 21. Cho $f(x, y) = \sqrt{\frac{2003}{2}} \cos 2(x+y) + a \cos(x+y+\alpha)$ với $a, \alpha \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $\min(f(x, y))^2 + (\max f(x, y))^2 \geq 2003$.

Lời giải

Ta có $f(0, 0) + f\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{2003}{2}}$

Nên $\max f(x, y) \geq \max\left\{f(0, 0), f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\} \geq \sqrt{\frac{2003}{2}} (\forall x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\max f(x, y))^2 > \frac{2003}{2}$

Ta lại có $f\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{2003}{2}} - a \cdot \sin \alpha, f\left(-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{2003}{2}} + a \cdot \sin \alpha$

Nên $f\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) + f\left(-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{2003}{2}}$.

Suy ra $\min f(x, y) \leq \min\left\{f\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right), f\left(-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)\right\} \leq -\sqrt{\frac{2003}{2}} (\forall x, y \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow (\min(f(x, y))^2) \geq \frac{2003}{2}.$$

Do đó $\min(f(x, y))^2 + (\max f(x, y))^2 \geq 2003$.



Câu 22. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}, \forall x \neq 0$.

Giả sử $f_0(x) = x$ và $f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \neq 0$.

Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \neq -1, 0, 1, 1 \frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = 1 + \frac{1}{f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2^n}}$

Lời giải

Đặt $p_n(x) = \frac{1}{2}[(x+1)^{2^n} + (x-1)^{2^n}]$ và $q_n(x) = \frac{1}{2}[(x+1)^{2^n} - (x-1)^{2^n}], \forall x, y \in \mathbb{N}$

Ta có:
$$\begin{cases} p_{n+1}(x) = p_n^2(x) + q_n^2(x) \\ q_{n+1}(x) = 2p_n(x)q_n(x), \forall x, y \in \mathbb{N} \\ f_0(x) = x = \frac{x}{1} = \frac{p_0(x)}{q_0(x)}, \forall x \neq 0 \end{cases}$$

Giả sử $f_k(x) = \frac{p_k(x)}{q_k(x)} \Rightarrow f_{k+1}(x) = \frac{\left[\frac{p_k(x)}{q_k(x)}\right]^2 + 1}{2 \cdot \frac{p_k(x)}{q_k(x)}} = \frac{p_k^2(x) + q_k^2(x)}{2p_k(x)q_k(x)} = \frac{p_{k+1}(x)}{q_{k+1}(x)}$

Do đó $f_n(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \neq 0$

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \neq -1, 0, 1$ thì có:

$$\begin{aligned} \frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} &= \frac{\left[\frac{(x+1)^{2^n} + (x-1)^{2^n}}{(x+1)^{2^n} - (x-1)^{2^n}}\right] \left[\frac{(x+1)^{2^{n+1}} - (x-1)^{2^{n+1}}}{(x+1)^{2^{n+1}} + (x-1)^{2^{n+1}}}\right]}{\left[\frac{(x+1)^{2^n} + (x-1)^{2^n}}{(x+1)^{2^n} - (x-1)^{2^n}}\right] \left[\frac{(x+1)^{2^{n+1}} + (x-1)^{2^{n+1}}}{(x+1)^{2^{n+1}} - (x-1)^{2^{n+1}}}\right]} \\ &= \frac{\left[\frac{(x+1)^{2^n} + (x-1)^{2^n}}{(x+1)^{2^n} - (x-1)^{2^n}}\right]^2}{\frac{(x+1)^{2^{n+1}} + (x-1)^{2^{n+1}}}{(x+1)^{2^{n+1}} - (x-1)^{2^{n+1}}}} = 1 + \frac{2(x+1)^{2^n}(x-1)^{2^n}}{(x+1)^{2^{n+1}} + (x-1)^{2^{n+1}}} = 1 + \frac{1}{f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2^n}} \end{aligned}$$

Câu 23. Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ là hàm số thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- i) $f(1, 1) = 2$
- ii) $f(m+1, n) = f(m, n) + m, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$
- iii) $f(m, n+1) = f(m, n) - n, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$

Tìm tất cả các cặp số (p, q) sao cho $f(p, q) = 2019$.

Doãn Quang Tiến

Lời giải

Áp dụng điều kiện ii) ta có:



$$f(p, q) = f(p-1, q) + (p-1) = f(p-2, q) + (p-2) + (p-1) = \dots = f(1, q) + \frac{p(p-1)}{2}$$

$$= f(1, q-1) - (q-1) + \frac{p(p-1)}{2} = \dots = f(1, 1) - \frac{q(q-1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} = 2019, \text{ áp dụng điều kiện}$$

iii)

Từ điều kiện i) ta có $f(1, 1) = 4$ nên từ đẳng thức trên ta suy ra:

$$f(1, 1) - \frac{q(q-1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} = 2 - \frac{q(q-1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} = 2019$$

$$\Leftrightarrow \frac{p(p-1)}{2} - \frac{q(q-1)}{2} = 2017 \Leftrightarrow (p-q)(p+q-1) = 2 \cdot 2017$$

Vì 2017 là số nguyên tố và $(p-q) < (p+q-1)$ nên có thể xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $p-q=1$ và $p+q-1=4034$ thì từ đó ta được: $p=2018, q=2017$.

Trường hợp 2. $p-q=2$ và $p+q-1=2017$ thì từ đó ta được: $p=1010, q=1008$.

Vậy tất cả các cặp số (p, q) sao cho $f(p, q) = 2019$ là: $(p, q) = (2018, 2017), (1010, 1008)$.

Câu 24. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $0 \leq f(x) \leq x^2, \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $f(x) - f(y)$ chia hết cho $x - y$ với mọi $x, y \in \mathbb{N}, x > y$

Lời giải

Ta sẽ phải xét hai trường hợp dưới đây.

Trường hợp 1. f là hàm số hằng.

Giả sử $f(x) = c = \text{const}, c$ là hằng số thuộc \mathbb{N} .

Cho $x=0$ thì từ i) ta suy ra: $0 \leq f(0) \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Vậy $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{N}$.

Trường hợp 2. f không là hàm số hằng.

Vì $f(0) = 0$ nên khi cho $y=0$ thì từ điều kiện ii) ta được: $x | f(x), \forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Với $x=1$ thì từ điều kiện i) ta suy ra: $f(1) = 0$ hoặc $f(1) = 1$.

Khả năng 1. $f(1) = 0$.

Cho $y=1$ thì từ điều kiện ii) ta suy ra: $(x-1) | f(x), \forall x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Mà ta đã có $x | f(x), \forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ và $(x, x-1) = 1$

Nên $x(x-1) | f(x) \Rightarrow x(x-1) = x^2 - x \leq f(x)$

$$\text{Mặt khác ta có } \begin{cases} f(x) \leq x^2 \\ x | f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 - x \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

Ta loại trường hợp $f(x) = x^2$ vì $f(1) = 1 \neq 0$.



Vậy trong *khả năng 1* này chỉ có hàm số $f(x) = x^2 - x, \forall x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Khả năng 2. $f(1) = 1$.

Khi $x|f(x), \forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ và $(x-1)|f(x), \forall x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ thì ta lấy k tùy ý sao cho $f(k) = mk$, với m tùy ý

Từ điều kiện **ii)** có $(k-1)|(mk-1) \Rightarrow (k-1)|(mk-1) - (mk-m) = m-1 \Rightarrow (k-1)|(m-1)$

Mà từ điều kiện **i)** ta được $f(k) \leq k^2 \Rightarrow mk \leq k^2 \Rightarrow m \leq k$

Mặt khác ta lại có $\begin{cases} (k-1)|(m-1) \\ (m-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k-1 \leq m-1 \Rightarrow k \leq m$

Do đó $m-1=0$ nên suy ra: $m=1$ hoặc $m=k$.

Vậy từ đó ta được $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{N}$ hoặc $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{N}$.

Thử lại thì thấy các hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = 0, f(x) = x, f(x) = x^2, f(x) = x^2 - x, \forall x \in \mathbb{N}.$$

Câu 25. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q}_+^* \rightarrow \mathbb{Q}_+^*$ mà tập $\mathbb{Q}_+^* = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$ thỏa mãn:

$$f(x) + f(y) + 2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)}, \forall x, y \in \mathbb{Q}_+^* \quad (1)$$

Lời giải

Ta sẽ giải bài toán này thông qua ba bước sau đây.

Bước 1. Ta sẽ chứng minh $f(1) = 1$.

Thật vậy, cho $y = 1$ vào (1) và đặt $f(1) = a$ thì ta được

$$f(x) + a + 2xf(x) = \frac{f(x)}{f(x+1)} \Rightarrow f(x+1) = \frac{f(x)}{(1+2x)f(x)+a} \quad (2)$$

Từ đó ta suy ra $f(2) = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}, f(3) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}+a} = \frac{1}{5+4a}, f(4) = \frac{1}{7+5a+4a^2}$ (*)

Mặt khác, ta cho $x = y = 2$ vào (1) thì ta được $2f(2) + 8f(4) = \frac{f(4)}{f(4)} = 1$

Mà từ (*) ta suy ra $2 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{7+5a+4a^2} = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(1) = 1$.

Từ đây ta xong **bước 1**.

Bước 2. Ta sẽ chứng minh $f(x+n) = \frac{f(x)}{(n^2+2nx)f(x)+1}, \forall n = \overline{1, \infty}$ (3)

Ta sẽ dùng phương pháp quy nạp để chứng minh khẳng định này.

 Bồi dưỡng học sinh giỏi

Từ (2) suy ra (3) đúng khi $n = 1$. Giả sử đúng đến $n = k$.

$$\begin{aligned} \text{Thì ta có } f(x+k+1) &= \frac{f(x+k)}{(1+2(x+k))f(x+k)+1} \\ &= \frac{f(x)}{\left(\frac{(k^2+2kx)f(x)+1}{(k^2+2kx)f(x)+1}\right)} = \frac{f(x)}{\left(\frac{(1+2(x+k))f(x)}{(k^2+2kx)f(x)+1}+1\right)} = \frac{f(x)}{\left(\frac{(k+1)^2+2(k+1)x}{(k^2+2kx)f(x)+1}f(x)+1\right)} \end{aligned}$$

Từ đây theo nguyên lý quy nạp ta suy ra điều phải chứng minh.

Vậy khẳng định ở **bước 2** được chứng minh.

$$\text{Vậy từ đó ta suy ra } f(n+1) = \frac{f(1)}{(n^2+2n)f(1)+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \text{ hay } f(n) = \frac{1}{n^2}, \forall n = \overline{1, \infty}$$

$$\text{Bước 3. Ta sẽ chứng minh: } f\left(\frac{1}{n}\right) = n^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}, \forall n = \overline{1, \infty} \quad (4)$$

$$\text{Thật vậy, trong (3) ta thay } x = \frac{1}{n} \text{ thì được } f\left(n + \frac{1}{n}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{(n^2+2)f\left(\frac{1}{n}\right)+1}$$

$$\text{Tiếp theo, ta thay } y = \frac{1}{x} \text{ vào (1) thì được } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + 2 = \frac{1}{f\left(x + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{Vậy } f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right) + 2 = \frac{1}{f\left(n + \frac{1}{n}\right)} = n^2 + 2 + \frac{1}{f\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\text{Mà ta có: } f(n) = \frac{1}{n^2} \text{ nên suy ra: } f\left(\frac{1}{n}\right) = n^2.$$

Nên từ đây **bước 3** được chứng minh hoàn toàn.

Thử lại thì thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là } f(n) = \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{Q}_+^*.$$



Câu 26. Cho hàm $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn với mọi $n > 1$ thì có một số nguyên tố p là ước của n sao cho: $f(n) + f(p) = f\left(\frac{n}{p}\right)$ (1) và

$$f(3^{2018}) + f(5^{2019}) + f(7^{2020}) = 2017.$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $G = f(2018^{2018}) + f(2019^{2019}) + f(2020^{2020})$

Doãn Quang Tiến

Lời giải

Thay $n = p$ vào (1) thì ta được $f(p) = f(1) - f(p) \Rightarrow f(p) = \frac{f(1)}{2}$

Thay n bởi p^n thì ta được $f(p^n) = f(p^{n-1}) - f(p)$

Bằng phương pháp quy nạp thì ta chứng minh được.

$$f(p^n) = \left(\frac{2-n}{2}\right)f(1) \quad (*)$$

Thật vậy, thì (*) đúng với $n = 1$.

Giả sử (*) đúng với $n = k \geq 1$.

Ta sẽ chứng minh (*) cũng đúng với $n = k + 1$ hay ta có

$$f(p^{k+1}) = f(p^k) - f(p) = \left(\frac{2-k}{2}\right)f(1) - \frac{f(1)}{2} = \left(\frac{2-(k+1)}{2}\right)f(1)$$

Từ đây ta suy ra (*) cũng đúng trong trường hợp $n = k + 1$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp thì (*) đúng với mọi n .

Khi đó thì ta suy ra

$$\begin{aligned} f(3^{2018}) + f(5^{2019}) + f(7^{2020}) &= 2017 \\ \Rightarrow \left(\frac{2-2018}{2}\right)f(1) + \left(\frac{2-2019}{2}\right)f(1) + \left(\frac{2-2020}{2}\right)f(1) &= 2017 \\ \Rightarrow \frac{-6051}{2}f(1) = 2017 \Rightarrow f(1) &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Từ $f(1) = -\frac{2}{3}$ và $f(p) = \frac{f(1)}{2}$ suy ra: $f(p) = -\frac{1}{3}$.

Khi $f(p) = -\frac{1}{3}$ thì (1) được viết lại như sau $f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$ (2)

Cho k là số các thừa số nguyên tố của n , khi đó số lượng thừa số nguyên tố của $\left(\frac{n}{p}\right)$ là $(k-1)$.

- Với $k = 1$ thì ta chọn $n = 2$ thì theo (2) ta được: $f(2) = -\frac{1}{3} + \frac{1-2}{3}$.

► Bồi dưỡng học sinh giỏi

- Với $k = 2$ thì ta chọn $n = 10 = 2.5$ thì theo (2) ta được:

$$f(10) = f\left(\frac{10}{2}\right) + \frac{1}{3} = f(5) + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 = \frac{2-2}{3}$$

- Với $k = 3$ thì ta chọn $n = 12 = 2.3.4$ thì theo (2) ta được:

$$f(12) = f\left(\frac{12}{2}\right) + \frac{1}{3} = f(6) + \frac{1}{3} = f\left(\frac{6}{3}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = f(2) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{3-2}{3}$$

Từ đó, bằng phương pháp quy nạp ta suy ra được:

$$f(n) = \frac{k-2}{3}, \text{ với } k \text{ là số các thừa số nguyên tố của } n (**)$$

Mà lưu ý rằng $2018 = 2.1009$, $2019 = 3.673$, $2020 = 2^2.5.101$.

Do đó suy ra: 2018^{2018} có 4036 thừa số nguyên tố, 2019^{2019} có 4038 thừa số nguyên tố, 2020^{2020} có 8080 thừa số nguyên tố.

Từ đây theo công thức (**) ta suy ra được:

$$G = f(2018^{2018}) + f(2019^{2019}) + f(2020^{2020}) = \frac{4036-2}{3} + \frac{4038-2}{3} + \frac{8080-2}{3} = \frac{16148}{3}.$$

Vậy từ đây ta có kết quả của bài toán.

Nhận xét. Một điều thú vị là khi ta thay 2017, 2018, 2019, 2020 bằng $\{x-1, x, x+1, x+2\}$ thì ta được kết quả của $f(1) = -\frac{2}{3}$ không thay đổi.

Câu 27. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$2f^3(m^2 + n^2) = f^2(m)f(n) + f(m)f^2(n), \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 1. Nếu f là hàm số hằng.

Tức là $f(n) = \text{const} = c$, với c là hằng số thì hiển nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Nếu f không là hàm số hằng.

Nếu tồn tại $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(m) \neq f(n)$ thì ta gọi a, b là hai số thỏa mãn:

$$|f(a) - f(b)| = \min |f(m) - f(n)|, \forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Giả sử $f(a) > f(b)$ thì ta có $2f^3(b) < f^2(a)f(b) + f(a)f^2(b) < 2f^3(a)$

Suy ra $f(b) < f(a^2 + b^2) < f(a) \Rightarrow f(a^2 + b^2) - f(b) < f(a) - f(b)$

Từ đó thì ta suy ra $|f(a) - f(b)| = f(a) - f(b) > f(a^2 + b^2) - f(b) = |f(a^2 + b^2) - f(b)| \quad (2)$

Rõ ràng thì ta thấy (2) mâu thuẫn với (1).



Do đó chỉ có f là hàm số hằng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tất các hàm số thỏa mãn đề bài là: $f(n) = \text{const} = c$, với c là hằng số.

Câu 28. Giả sử $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục và giảm sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$ ta có

$$f(x+y)f(f(x)+f(y))+f(y+f(x))$$

Chứng minh rằng $f(f(x)) = x$

Lời giải

Cho $y = x$ ta được: $f(2x) + f(2f(x)) = f(2f(x+f(x)))$

Thay x bằng $f(x)$ ta có $f(2f(x)) + f(2f(f(x))) = f(2f(f(x)+f(f(x))))$

Trừ hai phương trình trên ta suy ra:

$$f(2f(f(x))) - f(2x) = f(2f(f(x)+f(f(x)))) - f(2f(x+f(x))))$$

Nếu $f(f(x)) > x$, vế trái của phương trình trên âm, do đó:

$$f(f(x)+f(f(x))) > f(x+f(x)) \text{ và } f(x)+f(f(x)) < x+f(x)$$

là điều mâu thuẫn.

Tương tự, ta cũng có điều mâu thuẫn xảy ra khi $f(f(x)) < x$

Vậy $f(f(x)) = x$, điều phải chứng minh.

Câu 29. Cho song ánh $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Chứng minh rằng tồn tại vô số bộ (a, b, c) với $a, b, c \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $a < b < c$ và $2f(b) = f(a) + f(c)$

Lời giải

Ta xây dựng dãy $\{a_n\}$ như sau:

Trong các số từ $0, 1, 2, \dots$, m chọn số a_1 sao cho $f(a_1) > f(i) \quad \forall i = \overline{0; a_1} (m \in \mathbb{N})$

Chọn $a_2 > a_1$ sao cho $f(a_2) > f(i), \forall i = \overline{0; a_2}$

Chọn $a_k > a_{k-1}$ sao cho $f(a_k) > f(i), \forall i = \overline{0; a_k}$

Vậy ta có dãy $a_1 < a_2 < \dots < a_k < a_{k+1}$ và $f(a_1) < f(a_2) < \dots < f(a_k) < f(a_{k+1})$

Trong đó $a_i \in \mathbb{N}$ và $f(a_i) > f(j) \quad \forall j = \overline{0; a_i}$

Vì f là song ánh nên $f(a_{k+1}) = f(a_k) + p, p \in \mathbb{N}^*$

Và $\exists c \in \mathbb{N}$ để $f(c) = f(a_{k+1}) + p > f(a_{k+1})$

Mặt khác $\begin{cases} a_{k+1} > a_i, \forall i = \overline{1, k} \\ f(a_{k+1}) > f(i), \forall i = \overline{1, a_{k+1}} \end{cases}$



$$\text{Nên } c > a_{k+1} \Rightarrow \begin{cases} p(a_k) = f(a_{k+1}) - p \\ f(c) = f(a_{k+1}) + p \end{cases} \Rightarrow 2f(a_{k+1}) = f(a_k) + f(c)$$

Do cách xây dựng, dãy $\{a_n\}$ là dãy vô hạn nên tồn tại vô số bộ (a, b, c) thỏa điều kiện đã nêu.

Câu 30. Có bao nhiêu hàm $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

a) $f(1) = 1$

b) $f(n)f(n+2) = 9(f(n+1))^2 + 1997, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Lời giải

Gọi D là tập hợp tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.

Theo giả thiết b) ta có

- $f(n)f(n+2) = (f(n+1))^2 + 1997;$
- $f(n+1)f(n+3) = (f(n+2))^2 + 1997$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } f(n)f(n+2) - (f(n+1))^2 &= f(n+1)f(n+3) - (f(n+2))^2 = 1997 \\ \Rightarrow \frac{f(n)+f(n+2)}{f(n+1)} &= \frac{f(n+1)+f(n+3)}{f(n+2)}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

$$\text{Vì vậy ta có } \frac{f(1)+f(3)}{f(2)} = \frac{f(2)+f(4)}{f(3)} = \dots = \frac{f(n)+f(n+2)}{f(n+1)} = \dots$$

$$\text{Đặt } c = \frac{f(1)+f(3)}{f(2)} \text{ (1) suy ra } f(n+2) = cf(n+1) - f(n), \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ (2)}$$

Ta chứng minh $c \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, nếu $c = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}$ và $(p, q) = 1$ thì từ (2) ta có

$$q(f(n) + f(n+2)) = pf(n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra $q|f(n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay $q^2|f(n)f(n+2), \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq 2$.

$$\text{Vì } 1997 = (f(n)f(n+2) - (f(n+1))^2):q^2.$$

Mà 1997 là số nguyên tố nên $q^2 = 1$ hay $q = 1$ suy ra $c \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \text{Gọi } f(2) = a, \text{ do (1) ta có } ac = 1 + f(3) \text{ suy ra } ac - 1 = f(3) = f(1)f(3) &= (f(2))^2 + 1997 \\ \Rightarrow ac - 1 = a^2 + 1997 \Leftrightarrow a(c - a) &= 1998 \end{aligned}$$

Ta được $a|1998$, hay $f(2)$ là một ước dương của 1998.

Ngược lại với mỗi ước dương a của 1998 ta xây dựng hàm $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ như sau

$$f(1) = 1; f(2) = a$$

$$f(n+2) = (a+b)f(n+1) - f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*; \text{ trong đó } b = \frac{1998}{a} \in \mathbb{N}^*.$$



Ta chứng minh f thoả mãn điều kiện đề bài, nghĩa là $f \in D$.

Thật vậy

$$\begin{aligned} f(n+1)f(n+3) - (f(n+2))^2 &= f(n+1)((a+b)f(n+2) - f(n+1)) - (f(n+2))^2 \\ &= (a+b)f(n+1)f(n+2) - (f(n+1))^2 - (f(n+2))^2 \\ &= f(n+2)((a+b)f(n+1) - f(n+2)) - (f(n+1))^2 \\ &= f(n+2)f(n) - (f(n+1))^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Suy ra $f(n+1)f(n+3) - (f(n+2))^2 = f(n+2)f(n) - (f(n+1))^2$

...

$$= f(3)f(1) - (f(2))^2 = f(3) - (f(2))^2$$

Từ đó ta có $f(n)f(n+2) - (f(n+1))^2 = f(3) - (f(2))^2$

$$\begin{aligned} &= (a+b)f(2) - f(1) - (f(2))^2 = (a+b)a - 1 - a^2 \\ &= ab - 1 = 1998 - 1 = 1997. \end{aligned}$$

Vậy ta được $f(n)f(n+1) = (f(n+1))^2 + 1997$ hay $f \in D$

Ta có tương ứng, mỗi $f \in D$ với một giá trị $f(2) \mid 1998$ là một song ánh giữa D và tập các ước dương của 1998.

Do đó số phần tử của D là: $|D| = d(1998) = d(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = (1+1)(3+1)(1+1) = 16$.

Vì vậy có tất cả 16 hàm số thoả mãn đề bài.

Câu 31. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ sao cho.

- $f(2) = 2$
- $f(m.n) = f(m).f(n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$, $UCLN(m, n) = 1$
- $f(m) < f(n) \forall m, n \in \mathbb{N}^*, m < n$.

Lời giải

Chọn $n = 1$, thay vào $f(m.n) = f(m).f(n) \Rightarrow f(1) = 1$.

Ta để ý rằng $f(3).f(5) = f(15) < f(2).f(9) < f(2).f(10) = f(2).f(2).f(5)$.

Vậy $f(3) < f(2).f(2) = 4$. Mà $2 = f(2) < f(3) < 4$ nên $f(3) = 3$.

Từ đó ta tính được $f(4) = 4, f(5) = 5, f(6) = 6, f(7) = 7, f(8) = 8, f(9) = 9, f(10) = 10$.

Dự đoán $f(n) = n$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Giả sử $f(k) = k$ với $\forall k \in \mathbb{N}^*, 10 \leq k \leq n$. Ta chứng minh điều khẳng định vẫn còn đúng với $k = n+1$.

Nếu k là số chẵn, ta xét hai trường hợp sau:

- $k = 2^\alpha (2l+1); \alpha, l \in \mathbb{N}^*$.



Bồi dưỡng học sinh giỏi

Lúc này $f(k) = f(2^\alpha(2l+1)) = f(2^\alpha)f(2l+1) = 2^\alpha(2l+1) = k$.

- $k = 2^\alpha; \alpha \in \mathbb{N}^*$

Lúc này $f(k+2) = f(2^\alpha+2) = f(2(2^{\alpha-1}+1)) = f(2)f(2^{\alpha-1}+1) = 2(2^{\alpha-1}+1) = k+2$.

Mặt khác $k-1 = f(k-1) < f(k) < f(k+1) < f(k+2) = k+2$.

Do đó $f(k) = k, f(k+1) = k+1$.

Nếu k là số lẻ thì $k+1$ là số chẵn, ta xét hai trường hợp sau:

- $k+1 = 2^\alpha(2l+1); \alpha, l \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $0 < 2^\alpha \leq n, 0 < 2l+1 \leq n$.

Theo giả thiết quy nạp $f(k+1) = f(2^\alpha(2l+1)) = f(2^\alpha)f(2l+1) = 2^\alpha(2l+1) = k+1$.

Mà $k-1 = f(k-1) < f(k) < f(k+1) = k+1 \Rightarrow f(k) = k$.

- $k+1 = 2^\alpha; \alpha \in \mathbb{N}^*$. Lúc này

$f((k+1)+2) = f(2^\alpha+2) = f(2(2^{\alpha-1}+1)) = f(2)f(2^{\alpha-1}+1) = 2(2^{\alpha-1}+1) = k+3$

Mặt khác $k-1 = f(k-1) < f(k) < f(k+1) < f(k+2) < f(k+3) = k+3$.

Do đó $f(k) = k, f(k+1) = k+1, f(k+2) = k+2$.

Theo nguyên lý quy nạp $f(n) = n$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 32. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(m+n) + f(mn) = f(m)f(n) + 1, \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Lời giải

Thay $m = n = 0$ vào (1) ta được $2f(0) = f^2(0) + 1 \Rightarrow f(0) = 1$

Thay $m = 1, n = -1$ vào (1) ta lại có $f(-1) = f(1)f(-1) + 1$

Vậy $f(-1) = 0$. hoặc $f(1) = 1$

- Xét $f(1) = 1$. Thay $n = 1$ vào (1) ta có: $f(m+1) + f(m) = f(m) + 1, \forall m \in \mathbb{Z}$

Suy ra $f(m+1) = 1, \forall m \in \mathbb{Z}$ hay $f(m) = 1, \forall m \in \mathbb{Z}$. Thử lại thỏa mãn.

- Xét $f(-1) = 0$

Thay $n = -1$ vào (1) ta được $f(m-1) + f(-m) = 1, \forall m \in \mathbb{Z} \quad (2)$

Thay $n = 1$ vào (1) ta lại được $f(m+1) + f(m) = f(1)f(m) + 1, \forall m \in \mathbb{Z}$

Đặt $a = f(1)$ thì phương trình trên trở thành $f(m+1) + f(m) = af(m) + 1, \forall m \in \mathbb{Z} \quad (3)$

+ Với $a \neq 2$. Nếu $a = 1$ thì dẫn tới $f(1) = 1$ (trường hợp này đã giải ở trên)

Do đó ta xét $a \neq 1$.

Khi đó (3) $\Leftrightarrow f(m+1) - \frac{1}{2-a} = (a-1) \left[f(m) - \frac{1}{2-a} \right], \forall m \in \mathbb{Z}$



$$\Leftrightarrow f(n) - \frac{1}{2-a} = (a-1) \left[f(n-1) - \frac{1}{2-a} \right], \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow f(n) - \frac{1}{2-a} = (a-1)^{n+1} \left[f(-1) - \frac{1}{2-a} \right], \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{1 - (a-1)^{n+1}}{2-a}, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

Đặt $b = a - 1 \Rightarrow b \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}, f(n) = \frac{1 - b^{n+1}}{1-b}, \forall n \in \mathbb{Z}.$

Thay vào (2) ta được $\frac{1-b^m}{1-b} + \frac{1-b^{1-m}}{1-b} = 1, \forall m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1-b^m + 1-b^{1-m} = 1-b, \forall m \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow b^m + b^{1-m} = b+1, \forall m \in \mathbb{Z} \quad (5)$

Thay $m = 2$ vào (5) ta được $b^2 + \frac{1}{b} = b+1 \Leftrightarrow (b-1)^2 (b+1) = 0 \Leftrightarrow b = -1 \quad (b \neq 1)$

Từ đó suy ra $f(n) = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}, \forall n \in \mathbb{Z}$, hay $f(n) = 0$ khi n lẻ và $f(n) = 1$ khi n chẵn.

Thử lại thỏa mãn.

+ Với $a = 2$ thì $f(1) = 2$.

Thay $n = 1$ vào (1) ta được $f(m+1) = f(m) + 1, \forall m \in \mathbb{Z} \quad (6)$

Từ $f(1) = 2$ và (6) ta dùng phương pháp quy nạp toán học thì sẽ chứng minh được

$$f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(n) = 1, f(n) = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}, f(n) = n + 1 \text{ với } \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Câu 33. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(0) = 2$ và

$$f(x + f(x + 2y)) = f(2x) + f(2y), \forall x, y \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Lời giải

Thay $x = y = 0$ vào (1) ta được $f(f(0)) = 2f(0) \Rightarrow f(2) = 4$

Thay $x = 0$ và $y = 1$ ta được $f(f(2)) = 2 + f(2) \Rightarrow f(4) = 6$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng với $\forall x \in \mathbb{Z}$ thì $f(2x) = 2x + 2 \quad (2)$

Theo trên thì (2) đúng khi $x = 0$.

Giả sử (2) đúng tới $x = k (k \in \mathbb{Z}, k \geq 0)$.

Thay $x = 0, y = k$ vào (1) ta được $f(f(2k)) = f(0) + f(2k) \Rightarrow f(2(k+1)) = 2(k+1) + 2$

Vậy (2) cũng đúng khi $x = k + 1$, suy ra (2) đúng với $\forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 0$.

Với $\forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 0$, thay $(x, y) \rightarrow (2x, -x)$ vào (1) ta được



$$\begin{aligned} f(2x + f(0)) &= f(4x) + f(-2x), \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 0 \\ \Rightarrow f(2(x+1)) &= f(2(2x)) + f(-2x), \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 0 \\ \Rightarrow 2(x+1) + 2 &= 2(2x) + 2 + f(-2x), \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 0 \\ \Rightarrow f(-2x) &= -2x + 2, \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 0 \\ \Rightarrow f(2x) &= 2x + 2, \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 0 \\ \Rightarrow f(2x) &= 2x + 2, \forall x \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Do đó (1)(1) $\Leftrightarrow f(x + f(x+2y)) = 2x + 2y + 4, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ (3)

Ta sẽ chứng minh nếu x là số nguyên lẻ thì $f(x)$ cũng là số nguyên lẻ.

Thật vậy, nếu $f(x) = 2k$, với $k \in \mathbb{Z}$, thay $x \rightarrow x - 2k$ (với x lẻ) và $y = k$ ta được :

$$\begin{aligned} f(x - 2k + f(x)) &= 2(x - 2k) + 2k + 4, \forall x \in \mathbb{Z}, x \text{ lẻ} \\ \Rightarrow f(x) &= 2x - 2k + 4, \forall x \in \mathbb{Z}, x \text{ lẻ} \\ \Rightarrow 2k &= 2x - 2k + 4, \forall x \in \mathbb{Z}, x \text{ lẻ} \end{aligned}$$

Do đó $4k = 2x + 4$, với mọi số nguyên lẻ x .

Điều này vô lí vì $2x + 4$ không phải lúc nào cũng chia hết cho 4.

Như vậy nếu x lẻ thì $f(x)$ lẻ.

Từ đó nếu x lẻ thì $x + 2y$ lẻ, dẫn đến $f(x + 2y)$ lẻ, do đó $x + f(x + 2y)$ chẵn

Do đó $f(x + f(x + 2y)) = x + f(x + 2y) + 2$.

Kết hợp với (3) ta được $x + f(x + 2y) + 2 = 2x + 2y + 4 \Rightarrow f(x + 2y) = x + 2y + 2, \forall x, y \in \mathbb{Z}, x \text{ lẻ}$
 $\Rightarrow f(x) = x + 2, \forall x \in \mathbb{Z}$

Thử lại thỏa mãn.

Câu 34. Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3, \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm số $f(n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cho $n = 0$, từ (1) có $f(f(0)) + f(0) = 3 \Rightarrow 0 \leq f(n) \leq 3$ (2)

Nếu $f(0) = 0$ thì $f(f(0)) + f(0) = 0$ mâu thuẫn (2). Vậy $f(0) \neq 0$

Nếu $f(0) = 2$ thì từ (2) ta có

$$\begin{aligned} f(f(0)) = 1 &\Rightarrow f(2) = f(f(0)) = 1 \Rightarrow f(1) = f(f(2)) = 2.2 + 3 - f(2) = 6 \\ &\Rightarrow f(6) = f(f(1)) = 2.1 + 3 - f(1) = -1 \end{aligned}$$

Suy ra $f(6) \notin \mathbb{N}$, loại.

Như vậy $f(0) \neq 2$. Tương tự cũng có $f(0) \neq 3$.



Do đó $f(0) = 1$. Khi đó từ (2) ta có

$$f(1) = f(f(0)) = 2 \Rightarrow f(2) = f(f(1)) = 2.1 + 3 - f(1) = 3$$

Ta sẽ chứng minh hàm cần tìm là $f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$ bằng quy nạp toán học.

Thật vậy. Với $n = 0$ thì $f(0) = 1 = 0 + 1$.

Giả sử khẳng định đúng tới $n = k, (k \in \mathbb{N})$. Tức là: $f(k) = k + 1$

Với $n = k + 1$ ta có $f(k + 1) = f(f(k)) = 2k + 3 - f(k) = 2k + 3 - (k + 1) = (k + 1) + 1$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$

Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có $f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Thử lại hàm tìm được thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(m + f(n)) = n + f(m + b), \forall m, n \in \mathbb{N}^* (b \in \mathbb{Z}) \quad (i)$$

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm số $f(n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta chứng minh f là đơn ánh.

Thật vậy, giả sử $f(n_1) = f(n_2), \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$.

Từ (i) ta có $f(m + f(n_1)) = f(m + f(n_2)) \Rightarrow n_1 + f(m + b) = n_2 + f(m + b) \Rightarrow n_1 = n_2$

Vậy f là đơn ánh.

Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có $f(f(1) + f(n)) = n + f(f(1) + b) = n + 1 + f(b + b) = f(b + f(n + 1))$

$\Rightarrow f(n + 1) + b = f(n) + f(1)$, vì f là đơn ánh

$\Rightarrow f(n + 1) - f(n) = f(1) - b = a$, với $a = f(1) - b$.

Suy ra $f(n) - f(n - 1) = \dots = f(2) - f(1) = f(1) - b = a, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Từ đó: $f(n) - b = na \Rightarrow f(n) = na + b, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lúc này $f(m + f(n)) = n + f(m + b) \Rightarrow f(m + na + b) = n + (m + b)a + b$

$\Rightarrow (m + na + b)a + b = n + ma + ba + b$

$\Rightarrow na^2 = n \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$, vì nếu $a = -1$ thì $f(n) \notin \mathbb{N}^*$ khi $n \geq b$.

Suy ra $f(n) = n + b, \forall n \in \mathbb{N}^* (b \in \mathbb{Z})$.

Thử lại hàm vừa tìm được thỏa mãn yêu cầu đề.



Câu 36. Hãy xác định tất cả hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đẳng thức:

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2) \cdot f(n+3) - a \quad (1)$$

Với a là số tự nhiên thỏa mãn $a-1$ là số nguyên tố

Lời giải

Giả sử phương trình có nghiệm.

Thay n bởi $(n+1)$ lúc đó (1) trở thành $f(n+1) + f(n+2) = f(n+3) \cdot f(n+4) - a \quad (2)$

Lấy (2) - (1) vế với vế ta được: $f(n+2) - f(n) = f(n+3)(f(n+4) - f(n+2)) \quad (3)$

Thay n bởi 1 lúc này (3) trở thành: $f(3) - f(1) = f(4)(f(5) - f(3))$

Thay n bởi 2 lúc này (3) trở thành: $f(4) - f(2) = f(5)(f(6) - f(4))$

Thay n bởi 3 lúc này (3) trở thành: $f(5) - f(3) = f(6)(f(7) - f(5))$

Thay n bởi 4 lúc này (3) trở thành: $f(6) - f(4) = f(7) \cdot (f(8) - f(6))$

Từ đây ta đã nhận ra quy luật đặc biệt của bài toán này đó chính là nếu thay n bởi số lẻ thì ta luôn biểu thị được: $f(3) - f(1) = f(4) \cdot f(6) \dots f(2n) \cdot (f(2n+1) - f(2n-1)) \quad (4)$

Nếu thay n bởi các số chẵn ta sẽ được một đặc biệt khác

$$f(4) - f(2) = f(5) \cdot f(7) \dots f(2n+1) \cdot (f(2n+2) - f(2n)) \quad (5)$$

- Nếu $f(1) > f(3)$ thì lúc này ta sẽ lập tức có ngay $f(2n-1) < f(2n+1)$ lúc này sẽ có vô số số bé hơn $f(1)$ mà $f(1)$ là 1 số hữu hạn. Suy ra vô lí. Tức là $f(3) \geq f(1)$.

Tương tự ta cũng sẽ có $f(4) \geq f(2)$.

- Nếu $f(1) < f(3)$ và $f(2) < f(4)$ lúc này $f(2n-1) < f(2n+1)$ và $f(2n) < f(2n+2)$. Suy ra $f(3) - f(1)$ và $f(4) - f(2)$ sẽ có vô số ước số khác nhau (vô lí).

Từ đó chúng ta sẽ có 3 trường hợp

Trường hợp 1. $\begin{cases} f(3) = f(1) \\ f(4) = f(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2n+1) = f(2n-1) \\ f(2n+2) = f(2n) \end{cases}$, lúc này $\begin{cases} f(1) = f(2n-1) \\ f(2) = f(2n) \end{cases}$

Thay bởi 1 vào phương trình (1) lúc này $f(1) + f(2) = f(3) \cdot f(4) - a$

Mà lại có $\begin{cases} f(3) = f(1) \\ f(4) = f(2) \end{cases} \Rightarrow f(1) + f(2) = f(2) \cdot f(1) - a \Rightarrow (f(1) - 1)(f(2) - 1) = a - 1$

Mà lại có $a-1$ là số nguyên tố nên ta có $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) = \begin{cases} 2 & \text{khi } n = 2k \\ a & \text{khi } n = 2k+1 \end{cases} \\ f(n) = \begin{cases} a & \text{khi } n = 2k \\ 2 & \text{khi } n = 2k+1 \end{cases} \end{cases}$

Trường hợp 2. $\begin{cases} f(1) = f(3) \\ f(2) < f(4) \end{cases}$ lúc này $f(1) = f(2n-1)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.



Thay vào (5) ta được
$$\begin{cases} f(2n+2) > f(2n) \\ f(4) - f(2) = (f(1))^{n-1} (f(2n+2) - f(2n)) \end{cases}$$

Lúc này $f(4) - f(2)$ có vô số các ước số nguyên dương đôi một khác nhau, điều này không thể xảy ra nên phải có $f(1) = 1$.

Thay n bởi 1 vào phương trình (1) thì ta sẽ có được $f(1) + f(2) = f(3) \cdot f(4) - a$

Mà lại có $f(2n-1) = 1$

$$\Rightarrow f(4) - f(2) = a + 1 \Rightarrow f(2n+2) - f(2n) = a + 1 \Rightarrow f(n) = \begin{cases} 1 & (n = 2k + 1) \\ x + \frac{(a+1)(n-2)}{2} & (n = 2k) \end{cases}$$

Với $x \in \mathbb{N}^*$

Trường hợp 3. Nếu $\begin{cases} f(2) = f(4) \\ f(1) < f(3) \end{cases}$.

Lập luận tương tự như trên $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n = 2k \\ y + \frac{(a+1)(n-1)}{2} & \text{khi } n = 2k + 1 \end{cases}$ trong đó $y \in \mathbb{N}^*$.

Câu 37. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $f_t(n) + (a-1) \cdot f(n) = an + (t+a)k$ với $f_t(n) = \underbrace{f(f(\dots f(n)))}_t$ với a, t là số tự nhiên tùy ý thỏa mãn $k(2t-1) < a-1$.

Lời giải

Đặt $f(n) = n + k + a_n$. Ta sẽ chứng minh $a_n = 0$ với mọi số tự nhiên dương n bất kì

Từ giả thiết ta suy ra

$$(a-1)f(n) < an + (t+a)k \Rightarrow f(n) < \frac{an}{a-1} + \frac{(t+a-1)k}{a-1} = n + \frac{(t+a-1)k}{a-1} \quad (1)$$

Với $n \leq 2a-2-tk$ thì

$$n + (t-1+a)k \leq 2a-2+ak-k \Rightarrow \frac{n+(t-1+a)k}{a-1} \leq 2+k \Rightarrow f(n) < n+k+2$$

Như vậy với $n \leq 2a-2-tk \Rightarrow f(n) \leq n+k+1$

Khi đó với $n \leq 2a-1-2kt+k-t$ thì $f(n) \leq n+k+1 \leq 2a-2kt+2k-t < 2a-2-tk$ lúc đó ta

cũng có $f(f(f(2))) \leq f(f(n)) + k + 1 \leq f(n) + 2(k+1)$

Tiếp tục làm như thế cho đến lần thứ $t-1$ lúc đó ta sẽ có

$$f_{(t-1)}(n) \leq n + (t-1)(k+1) \leq 2a-2-tk$$

Và cuối cùng $f_t(n) = f(f_{(t-1)}(n)) \leq f_{(t-1)}(n) + k + 1 \leq n + t(k+1)$

Lại có với $n \leq (t-1)k$ thì $(a-1)f(n) < f_t(n) + (a-1)f(n) \leq n + t(k+1) + (a-1)f(n)$

Mà $f_t(n) = an + (t+a-1)k - (a-1)f(n)$ nên bất đẳng thức trên cho ta

$$(a-1)(n+k+a_n) < an + (t+a-1)k \leq n+t(k+1) + 97(n+2+a_n) \quad (2)$$

Từ (1) ta có $(a-1)a_n - (a-1)k < n + (t-1+a)k \Rightarrow a_n < \frac{tk+n}{a-1} \leq \frac{k(2t-1)}{a-1} < 1$ ($k(2t-1) < a-1$)

Mà từ (2) ta có

$$(a-1)a_n + (a-1)k + t(k+1) > (t+a-1)k \Rightarrow (a-1)a_n > -t \Rightarrow a_n > \frac{-t}{a-1} \Rightarrow a_n \geq 0$$

Từ đó ta sẽ có $a_n = 0$.

Xét với $n > (t-1)k$. Ta sẽ chứng minh phần này của bài toán bằng phương pháp quy nạp.

Giả sử bài toán đúng đến $m < n$. Khi đó

$$f_{(t-1)}(n-(t-1)k) = f_{(t-2)}(n-(t-2)k) = f_{(t-3)}(n-(t-3)k) = \dots = f(n-2) = n$$

$$f(n) = f(f_{(t-1)}(n-(t-1)k)) = f_t(n-(t-1)k) = a(n-(t-1)k) + (t-1+a)k - (a-1)f(n-(t-1)k)$$

Theo giả thiết quy nạp $f(n-(t-1)k) = n-(t-2)k$

$$\text{Do đó } f(n) = an - a(t-1)k + tk + ak - k - an + a(t-2)k + n - (t-2)k = n+k$$

Vậy $f(n) = n+k$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Câu 38. Cho hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} (f(2n+1) + f(2n) + 1)(f(2n+1) - f(2n) - 1) = 3(1 + 2f(n)), n \in \mathbb{N} \\ f(2n) \geq f(n) \end{cases}$$

Tìm n sao cho $f(n) \leq 2009$.

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn đề bài

Vì $3(1+2f(n))$ là số nguyên dương lẻ $f(2n+1) - f(2n) - 1$ là số nguyên dương lẻ

$$\Rightarrow f(2n+1) \geq f(2n) + 2 > f(n)$$

$$\Rightarrow f(2n+1) + f(2n) + 1 > 2f(n) + 1 \Rightarrow \begin{cases} f(2n+1) - f(2n) - 1 = 1 \\ f(2n+1) + f(2n) + 1 = 3(1 + 2f(n)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2n+1) = f(2n) + 2 \\ 2(f(2n) + 1) = 2(3f(n) + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2n+1) = f(2n) + 2 \\ f(2n) = 3f(n) \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh $f(n) < f(n+1)$ (1)

$$\text{Với } n=1 \Rightarrow f(1) = f(0) + 2 > f(0)$$

Giả sử $f(n) < f(n+1)$ đúng tới k ($k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow f(0) < f(1) < f(2) < \dots < f(k)$

- Nếu k chẵn. Đặt $k = 2m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow f(k+1) = f(2m+1) = f(2m) + 2 > f(2m) = f(k)$

- Nếu k lẻ. Đặt $k = 2m+1$ ($m \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow f(k+1) = f(2m+2) = 3f(m+1) > 3f(m) + 2 = f(2m) + 2 = f(2m+1) = f(k)$$

Như vậy trong mọi trường hợp khẳng định (2) đúng



Do đó $f(0) = 3f(0) \Rightarrow f(0) = 0, f(1) = 2; f(2) = 3f(1) = 6$
 $f(3) = f(2) + 2 = 8, f(13) = f(12) + 2 = 9f(3) + 2 = 74, f(27) = 3f(13) + 2 = 224$
 $f(53) = 9f(13) + 2 = 668, f(107) = 3f(53) + 2 = 2006, f(108) = 9f(27) = 2016$
 $\Rightarrow f(107) < 2009 < f(108)$
 Do $f(n) < 2009 \Rightarrow n \in \{0; 1; 2; \dots; 107\}$

Câu 39. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn:

$$\frac{1}{3}f(xy) + \frac{1}{3}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{9}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Cho $x = y = z = 0$ thì $\frac{1}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(0) - f^2(0) \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(f(0) - \frac{1}{3}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{3}$.

Cho $x = y = z = 1$ thì $\frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(1) - f^2(1) \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(f(1) - \frac{1}{3}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{3}$.

Cho $y = z = 0$ thì $\frac{2}{3}f(0) - f(x)f(0) \geq \frac{1}{9}$.

Do $f(0) = \frac{1}{3}$ nên $f(x) \leq \frac{1}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$. (1)

Cho $y = z = 1$, ta có $\frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(x) - f(x)f(1) \geq \frac{1}{9}$.

Do $f(1) = \frac{1}{3}$ nên $f(x) \geq \frac{1}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $f(x) = \frac{1}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 40. Cho $n \in \mathbb{N} (n > 2)$ và hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ sao cho:

$$f(x^n + y) = x^{n-1}f(x)f(f(y)); \forall x, y \in \mathbb{Q} (*)$$

a) Giả sử rằng $f(2002) \neq 0$. Tính $f(2002)$.

b) Tìm hàm số f .

Lời giải

a) Từ (*) ta được

- Với $x = 0; f(y) = f(f(y)), \forall y \in \mathbb{Q}$
- Với $x = 1; y = 0: f(f(0)) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.
- Với $x = 1, y \in \mathbb{Q}: f(1+y) = f(1) + f(y)$. (1)

Do đó, chứng minh bằng quy nạp ta được $f(n) = nf(1), \forall n \in \mathbb{N}$ (2)

Từ (1) ta có $f(0) = f(1) + f(-1) \Rightarrow f(-1) = f(0) - f(1) = -f(1); f(x-1) = f(x) - f(1)$.

Do đó, chứng minh bằng quy nạp ta được $f(-n) = -nf(1), \forall n \in \mathbb{N}$ (3)



Bồi dưỡng học sinh giỏi

Từ (2),(3) ta được $f(n) = nf(1), \forall n \in \mathbb{Z}$ (4)

Đặt $f(1) = \frac{p}{q}; p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$ và ta được $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và n chia hết p nên $nf(1) \in \mathbb{Z}$.

Do đó ta được $f(f(n)) = f(n) \Leftrightarrow n[f(1)]^2 = nf(1) \Leftrightarrow [f(1)]^2 = f(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$.

Do đó, từ (4) ta được $f(2002) = 1$ hay $f(2002) = 0$ (loại).

Vậy $f(2002) = 2002$.

b) Từ (*) ta được $y = 0: f(x^n) = x^{n-1}f(x), \forall x \in \mathbb{Q}$ (1)

- Nếu n chẵn: $\forall x \neq 0: f(x) = \frac{f(x^n)}{x^{n-1}}, f(-x) = \frac{f(x^n)}{-x^{n-1}} = -f(x)$
- Nếu n lẻ thì từ (*) và (1) ta được $f(x^n + y) = f(x^n) + f(y)$ (2)

Suy ra $f(-x^n) + f(x^n) = 0 \Rightarrow f(-x) = \frac{f((-x)^n)}{(-x)^{n-1}} = \frac{-f(x^n)}{x^{n-1}} = -f(x)$.

Do đó $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{Q}$

Từ (2), chứng minh bằng quy nạp ta được $f(px^n) = pf(x^n), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}$

Có $\forall p \in \mathbb{N}^*: f(-px^n) = -f(px^n) = -pf(x^n)$

Vậy $f(px^n) = pf(x^n), \forall p \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Q}$ (3)

Từ (3) ta có $\forall \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} (u \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{N}^*)$ ta được $f\left(\frac{u}{v}\right) = f\left(\frac{u \cdot v^{n-1}}{v^n}\right) = uv^{n-1}f\left(\frac{1}{v^n}\right)$

Mà $f(1) = f\left(\frac{u^n}{v^n}\right) = v^n f\left(\frac{1}{v^n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{v^n}\right) = \frac{f(1)}{v^n}$

Vậy $f\left(\frac{u}{v}\right) = u \cdot v^{n-1} \frac{f(1)}{v^n} = \frac{u}{v} f(1)$ (4)

Ta có $f(1) = 0$ hay $f(1) = 1$ từ (4) suy ra $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Q}$ hay $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$

Thử lại thỏa mãn (*).

Vậy $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Q}$.

Câu 41. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f(x + y^2 + z^3) = f(x) + f^2(y) + f^3(z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{N}$$

Lời giải

Đặt $P(u, v, t)$ là phép thế x bởi u , y bởi v , z bởi t , ta có:

- $P(0, 0, 0) \Rightarrow f(0) = 0$
- $P(x, 1, 0) \Rightarrow f(x+1) = f(x) + f(1)^2$



$$\bullet \quad P(0, y, z) \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Với $f(1) = 1$, ta chứng minh $f(x) = xf^2(1), \forall x \in \mathbb{N}$

Giả sử điều phải chứng minh đúng đến $x = k, \forall k \in \mathbb{N}: f(k) = kf^2(1)$

Ta chứng minh đúng đến $x = k + 1 \forall k \in \mathbb{N}$, thực vậy:

$$f(k+1) = f(k) + f^2(1) = kf^2(1) + f^2(1) = (k+1)f^2(1)$$

Với $f(1) = 0$, ta chứng minh bằng quy nạp $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

Thế vào giả thiết ban đầu, ta nhận được hai hàm thỏa đề: $f(x) = 0$ và $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{N}$.

Câu 42. Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

a) $f(ab) = f([a, b])f((a, b))$ với mọi $a, b \in \mathbb{N}^*, a \neq b$; trong đó $[a, b], (a, b)$ lần lượt là bội chung nhỏ nhất, ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a, b ;

b) $f(p+q+r) = f(p) + f(q) + f(r)$ với mọi số nguyên tố p, q, r .

Tính giá trị của $f(2013)$? Kí hiệu \mathbb{N}^* là tập hợp tất cả các số nguyên dương.

Lời giải

Đặt $f(2) = a, f(3) = b$. Khi đó ta có các đẳng thức sau:

$$f(7) = f(2+2+3) = 2f(2) + f(3) = 2a + b$$

$$f(8) = f(2+3+3) = f(2) + 2f(3) = a + 2b$$

$$f(16) = f(7+7+2) = 2f(7) + f(2) = 2(2a + b) + a = 5a + 2b$$

$$f(16) = f(2)f(8) = a(a + 2b).$$

Do đó ta có $5a + 2b = a^2 + 2ab$ (1).

Mặt khác ta có các đẳng thức sau:

$$f(12) = f(2+3+7) = f(2) + f(3) + f(7) = 3a + 2b$$

$$f(12) = f(2)f(6) = a(f(2+2+2)) = 3a^2$$

Suy ra $3a + 2b = 3a^2$ (2).

$$\text{Từ (1), (2) ta có } \begin{cases} 5a + 2b = a^2 = 2ab \\ 3a + 2b = 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow f(7) = 7, f(8) = 8$$

Ta có 2003 là số nguyên tố nên

$$f(2013) = f(2003 + 3 + 7) = f(2003) + f(3) + f(7) = f(2003) + 10 \quad (3)$$

$$f(2025) = f(2003 + 5 + 17) = f(2003) + f(5) + f(17) \quad (4)$$

$$f(9) = 3f(3) = 9 = f(5 + 2 + 2) = f(5) + 2f(2) \Rightarrow f(5) = 5$$

$$f(17) = f(7 + 7 + 3) = 2f(7) + f(3) = 17$$

Kết hợp với (4) ta được $f(2003) = f(2025) - 22$ (5)



$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } f(2025) &= f(9.9.25) = f(9)f(9.25) = 9.f(5.5.9) = 9f(5)f(45) \\ &= 9f(5)f(3.15) = 45f(3)f(15) = 45f(3)(f(7+5+3)) \\ &= 45.3(f(7)+f(5)+f(3)) = 2025 \end{aligned}$$

Do đó $f(2025) = 2025$, kết hợp với (5) ta được $f(2003) = 2003$.

Do đó từ đẳng thức (3) ta được $f(2013) = 2013$.

Câu 43. Đặt $F = f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ và $n \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c thỏa mãn điều kiện

$$\int_0^1 f(\sqrt[n]{x}) dx \leq c \int_0^1 f(x) dx$$

Với $f \in F$ và f là hàm liên tục.

Lời giải

Ta có $\int_0^1 f(\sqrt[n]{x}) dx = n \int_0^1 y^{n-1} f(y) dy = n \int_0^1 x^{n-1} f(x) dx \leq n \int_0^1 f(x) dx \quad (x \in [0, 1])$, vậy $c \leq n$.

Với $p > 0$, ta chọn hàm $f(x) = x^p$, khi đó: $c \geq \frac{n(p+1)}{n+p}$

$$\text{Do đó: } c \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{n(p+1)}{n+p} = n$$

Vậy $c = n$, lại có $n \leq 2$ nên giá trị c cần tìm là 2.

Câu 44. Tìm tất cả các hàm $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục, thỏa mãn:

$$f(x) = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), \forall x \in [-1, 1]$$

Lời giải

Đặt $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Bài toán trở thành: $f(x) = f(g(x))$ với mọi $-1 \leq x \leq 1$.

Ta chứng minh bài toán nhỏ: Gọi dãy số $a_n = g(a_{n-1})$. Khi đó, với mọi giá trị dương

$0 < a_1 < 1$, ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

Chứng minh. Với mọi số thực $0 < a < 1$, ta có: $a < \frac{2a}{1+a^2} \Rightarrow a < g(a)$.

Lại có, với mọi $0 < a < 1$, ta thấy $0 < g(a) < 1$.

Vì vậy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng nghiêm ngặt và có giới hạn.

Đặt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Ta có: $L = g(L) = \frac{2L}{1+L^2} \Rightarrow L = 1$

Do $L > 0$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$



Vì f là hàm liên tục nên: $\lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) = f(1)$, nói cách khác với mọi $\epsilon > 0$ luôn tồn tại δ sao cho với mọi $0 < h < \delta$: $|f(1-h) - f(1)| < \epsilon$

Đặt $x \leq 1 - \delta$, từ chứng minh trên ta có các hàm $x, g(x), g^2(x), \dots$ đều tiến đến 1.

Vậy tồn tại số nguyên dương k sao cho $g^k(x) > 1 - \delta$. Điều này đồng nghĩa:

$$|f(g^k(x)) - f(1)| < \epsilon$$

Vì $f(x) = f(g^k(x))$ nên $|f(x) - f(1)| < \epsilon$, do ϵ có thể chọn giá trị vô cùng bé, ta được:

$$|f(x) - f(1)| = 0 \Rightarrow f(x) = f(1) \text{ với mọi } 0 < x < 1.$$

Chứng minh tương tự, ta được $f(x) = f(-1)$ với mọi $-1 < x < 0$

Vì f là hàm liên tục nên $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(1) = f(-1) = f(0)$

Vậy $f(x) = c$ với c là hằng số bất kỳ.

Câu 45. Có thể tồn tại hay không một hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn điều kiện: Với mọi số thực x , ta có $f(x)$ là số hữu tỉ khi và chỉ khi $f(x+1)$ là số vô tỉ.

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f(x+1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (*)$$

Xét các hàm số $g(x) = f(x+1) - f(x)$, $h(x) = f(x+1) + f(x)$

Khi đó g và h là những hàm số liên tục trên \mathbb{R} . Ta có g và h không thể đồng thời là hàm hằng. Thực vậy, giả sử $g(x) \equiv C_1, h(x) \equiv C_2$. Khi đó:

$$2f(x) \equiv C_2 - C_1 \Leftrightarrow f(x) \equiv C \text{ (C là hằng số)}$$

Vì thế với $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $f(\alpha) = f(\alpha+1) = C$, điều này mâu thuẫn với (*).

Giả sử h không là hàm hằng, không mất tính tổng quát, khi đó tồn tại $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$ sao cho $h(x_1) < h(x_2)$.

Lúc này tồn tại số hữu tỉ $r \in [h(x_1), h(x_2)]$.

Ta có $[h(x_1) - r][h(x_2) - r] \leq 0$

Lại có $h(x) - r$ là hàm liên tục với mọi x thuộc \mathbb{R} nên phương trình $h(x) - r = 0$ có nghiệm, tức là tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $h(x_0) = r$, từ đó $f(x_0+1) + f(x_0) = r$.

Mà $r \in \mathbb{Q}$ nên $f(x_0+1), f(x_0)$ hoặc đồng thời hữu tỉ hoặc đồng thời vô tỉ, điều này mâu thuẫn với (*).

Vậy không tồn tại hàm số thỏa đề.



Câu 46. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(t) = f(y) + f(z)$ với mọi số hữu tỉ $x < y < z < t$ và x, y, z, t theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

USAJMO 2015

Lời giải

Do x, y, z, t theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $x + t = y + z$, kết hợp với phương trình đã cho ta được $f(x) + f(y + z - x) = f(y) + f(z)$ (1) với mọi $x < y < z$ và x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Thay $x = 0$ vào (1) ta được $f(0) + f(y + z) = f(y) + f(z)$ với mọi $0 < y < z$.

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$ ta được $g(y + z) = g(y) + g(z) \quad \forall 0 < y < z$ (2)

Với số nguyên dương $n \geq 3$, ta sẽ tìm cách biểu diễn $g(n)$ theo $g(1), g(2)$.

Ta có $g(3) = g(1) + g(2), g(4) = g(3) + g(1) + g(2) + 2g(1)$, dùng quy nạp ta chứng minh được $g(n) = g(2) + (n - 2)g(1)$ (3).

Lấy $2 < y < z$ là các số nguyên dương ta được:

$$g(y) = g(2) + (y - 2)g(1), g(z) = g(2) + (z - 2)g(1), g(y + z) = g(2) + (y + z - 2)g(1),$$

Thay vào (2) ta được

$$g(2) + (y + z - 2)g(1) = g(2) + (y - 2)g(1) + g(2) + (z - 2)g(1) \Leftrightarrow g(2) = 2g(1). (*)$$

Kết hợp với (3) ta được $g(n) = ng(1)$

Ta biểu diễn $g(nx)$ theo $g(x), g(2x)$.

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh $g(nx) = g(2x) + (n - 2)g(x)$ (4).

Lấy $2 < n < m$ là các số nguyên dương, thực hiện các thao tác như (*) ta được

$$g(2x) + (m + n - 2)g(x) = g(2x) + (n - 2)g(x) + g(2x) + (m - 2)g(x) \Leftrightarrow g(2x) = 2g(x)$$

Kết hợp với (4) ta được $g(nx) = ng(x)$ (5)

Vậy với m, n nguyên dương: $g(m) = ng\left(\frac{m}{n}\right) \Rightarrow g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}g(1) \Rightarrow g(x) = xg(1)$, với $x \in \mathbb{Q}^+$

Do $f(x) + f(t) = f(y) + f(z) \Rightarrow g(x) + g(t) = g(y) + g(z) \quad \forall x < y < z < t$ lập thành CSC

Với $x < 0$ bất kỳ, ta xét CSC $x < 0 < y < z$ ta được

$$g(x) + g(t) = g(0) + g(z) \Rightarrow g(x) + tg(1) = g(0) + zg(1) \Rightarrow g(x) = g(0) + zg(1) - tg(1) = xg(1)$$

Vậy $g(x) = xg(1), \forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = f(0) + x(f(1) - f(0)) = ax + b$ với $x, a, b \in \mathbb{Q}$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn.



Câu 47. Giả sử $r, s \in \mathbb{Q}$ là hai số cho trước. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện $f(x + f(y)) = f(x + r) + y + s, \forall x, y \in \mathbb{Q}$

Romania 2006

Lời giải

Thay $x = 0$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(f(y)) = f(r) + y + s, \forall y \in \mathbb{Q} \quad (1)$$

Thay y bởi $f(y)$ thu được:

$$\begin{aligned} f(x + f(f(y))) &= f(x + r) + f(y) + s, \forall x, y \in \mathbb{Q} \\ \Leftrightarrow f(x + f(r) + y + s) &= f(x + r) + f(y) + s, \forall x, y \in \mathbb{Q} \\ \Leftrightarrow f(x + r + y + f(r) - r + s) &= f(x + r) + f(y) + s, \forall x, y \in \mathbb{Q} \\ \Rightarrow f(x + y + f(r) - r + s) &= f(x) + f(y) + s, \forall x, y \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Đặt $a = f(r) - r + s$ thay vào phương trình trên ta được:

$$f(x + y + a) = f(x) + f(y) + s, \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (2)$$

Thay $y = 0$ vào phương trình (2) ta được: $f(x + a) = f(x) + f(0) + s, \forall x \in \mathbb{Q} \quad (3)$.

Từ (2), (3) ta được:

$$\begin{aligned} f(x + y) + f(0) + s &= f(x) + f(y) + s, \forall x, y \in \mathbb{Q} \\ \Leftrightarrow f(x + y) + f(0) &= f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q} \\ \Leftrightarrow f(x + y) - f(0) &= f(x) - f(0) + f(y) - f(0), \forall x, y \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Đặt $f(x) - f(0) = g(x), \forall x \in \mathbb{Q}$ và thay vào phương trình trên ta được

$$g(x + y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (4)$$

Từ (4), theo kết quả về phương trình hàm Cauchy ta được $g(x) = bx, \forall x, b \in \mathbb{Q}$

Từ cách xác định hàm số g ta được $f(x) = bx + f(0) = bx + c \quad (5)$

Từ (5) thay lại vào phương trình ban đầu ta được:

$$\begin{aligned} b(x + by + c) + c &= b(x + r) + y + s + c, \forall x, y \in \mathbb{Q} \\ \Leftrightarrow bx + b^2y + bc + c &= bx + y + br + s + c, \forall x, y \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ bc + c = br + s + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = r + s \\ b = -1 \\ c = r - s \end{cases}$$

Vậy bài toán có hai nghiệm $f(x) = x + r + s, f(x) = -x + r - s, \forall x \in \mathbb{Q}$.



Câu 48. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho với tất cả các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$, đẳng thức sau là đúng:

$$(f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

IMO 2012

Lời giải

Lời giải 1. Tôn Ngọc Minh Quân

Giả sử hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Cho $a=b=c=0$, ta được $f(0)=0$.

Cho $a=n, b=-n, c=0 (n \in \mathbb{Z})$ ta được $f(-n)=f(n)$. Đặt $f(1)=t (t \in \mathbb{Z})$.

Cho $a=2, b=-1, c=-1$ ta có $f(2)=0$ hoặc $f(2)=4t$.

- **Trường hợp 1.** $f(2)=0 \Rightarrow f(3)=t$

Ta có $(f(4))^2 + (f(2))^2 + (f(2))^2 = 2f(2)f(4) + 2f(2)f(4) + 2f(2)f(2) \Rightarrow f(4)=0$

Giả sử $f(2i)=0, f(2i+1)=t (1 \leq i \leq k)$

$$\Rightarrow (f(2k+2))^2 + (f(2k))^2 + (f(2))^2 = 0 \Rightarrow f(2k+2)=0$$

Ta có $(f(2k+3))^2 + (f(2k))^2 + (f(3))^2 = 2f(3)f(2k+3) \Rightarrow f(2k+3)=f(3)=t$

Vậy $f(2i)=0, f(2i+1)=t, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow f(2i)=0, f(2i+1)=t, \forall i \in \mathbb{Z}$

- **Trường hợp 2.** $f(2)=4t (t \in \mathbb{Z}, t \neq 0)$

Ta có $(f(3))^2 + (f(2))^2 + (f(1))^2 = 2f(1)f(2) + 2f(1)f(3) + 2f(2)f(3)$

Suy ra $f(3)=t$ hoặc $f(3)=9t$

a) $f(3)=9t, f(2)=4t, f(1)=t$. Ta chứng minh $f(n)=n^2t, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Thật vậy mệnh đề đúng với $n=1, 2, 3$. Giả sử mệnh đề đúng đến $n \geq 3$

Ta có $(f(n+1))^2 + (f(n))^2 + (f(1))^2 = 2f(1)f(n) + 2f(1)f(n+1) + 2f(n)f(n+1)$

$$\Rightarrow (f(n+1))^2 - 2t(n^2+1)f(n+1) + t^2(n^2-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow f(n+1)=t(n+1)^2 \text{ hoặc } f(n+1)=t(n-1)^2$$

Giả sử $f(n+1)=t(n-1)^2 = f(n-1)$

Ta có $(f(n-1))^2 + (f(2))^2 + (f(n+1))^2 = 2f(2)f(n-1) + 2f(2)f(n+1) + 2(f(n-1))^2$

$$\Rightarrow (f(2))^2 = 2f(2)(f(n-1) + f(n+1))$$

$$\Rightarrow 16t^2 = 8t \cdot 2(n-1)^2 t \Rightarrow 16t^2 = 16t^2(n-1)^2.$$

Đó là điều vô lý (vì $n \geq 3$).

Vậy $f(n)=n^2t, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n)=n^2t, \forall n \in \mathbb{Z}$

b) $f(3)=t, f(0)=0, f(1)=t, f(2)=4t$



$$(f(4))^2 + (f(2))^2 + (f(2))^2 = 2f(2)f(2) + 2f(2)f(4) + 2f(2)f(4)$$

$$\Rightarrow f(4) = 0 \text{ hoặc } f(4) = 16t$$

Giả sử $f(4) = 16t$. Ta có $(f(4))^2 + (f(3))^2 + (f(1))^2 = 2f(1)f(4) + 2f(3)f(4) + 2f(1)f(3)$

$$\Rightarrow 256t^2 + 2t^2 = 32t^2 + 32t^2 + 2t^2 \Rightarrow 192t^2 = 0 \text{ (vô lý).}$$

Vậy $f(4) = 0$.

Ta có $(f(5))^2 + (f(4))^2 + (f(1))^2 = 2f(1)f(5) \Rightarrow f(5) = f(1) = t$,

$$(f(6))^2 + (f(4))^2 + (f(2))^2 = 2f(2)f(6) \Rightarrow f(6) = f(2) = 4t,$$

$$(f(7))^2 + (f(4))^2 + (f(3))^2 = 2f(3)f(7) \Rightarrow f(7) = f(3) = t,$$

$$(f(8))^2 + (f(4))^2 + (f(4))^2 = 0 \Rightarrow f(8) = 0$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được

$$f(4i+1) = t \quad \forall i \in \mathbb{N}; \quad f(4i+3) = t \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$f(4i) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}; \quad f(4i+2) = 4t \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Thật vậy giả sử $f(4k) = 0, f(4k+1) = t, f(4k+2) = 4t, f(4k+3) = t (k \in \mathbb{N})$

Ta có $(f(4k+1))^2 + (f(4k))^2 + (f(1))^2 = 2f(1)f(4k) + 2f(4k)f(4k+1) + 2f(1)f(4k+1)$

$$\Rightarrow f(4k+1) = f(1)$$

$$(f(4k+2))^2 + (f(4k))^2 + (f(2))^2 = 2f(2)f(4k) + 2f(4k)f(4k+2) + 2f(2)f(4k+2)$$

$$\Rightarrow f(4k+2) = f(2) = 4t$$

$$(f(4k+3))^2 + (f(4k))^2 + (f(3))^2 = 2f(3)f(4k) + 2f(4k)f(4k+3) + 2f(3)f(4k+3)$$

$$\Rightarrow f(4k+3) = f(3) = t$$

$$(f(4k+4))^2 + (f(4k))^2 + (f(4))^2 = 2f(4)f(4k) + 2f(4k)f(4k+4) + 2f(4)f(4k+4)$$

$$\Rightarrow f(4k+4) = f(4) = 0.$$

Suy ra $f(4i) = 0, f(4i+1) = t, f(4i+2) = 4t, f(4i+3) = t (t \in \mathbb{Z}, t \neq 0) \forall i \in \mathbb{Z}$

Ngược lại, giả sử hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(2i) = 0, f(2i+1) = t (t \in \mathbb{Z})$ với mọi $i \in \mathbb{Z}$

Giả sử $a, b, c \in \mathbb{Z}, a+b+c=0$. Suy ra trong 3 số a, b, c có ít nhất một số chẵn

+) Nếu a, b, c cùng chẵn thì $f(a) = f(b) = f(c) = 0$

$$\Rightarrow (f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

+) Nếu a chẵn và b, c lẻ thì $f(a) = 0, f(b) = f(c) = t$

$$\Rightarrow (f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2t^2$$

$$2(f(a)f(b) + f(a)f(c) + f(b)f(c)) = 2t^2$$

$$\Rightarrow (f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$



Tương tự nếu b chẵn a, c lẻ hoặc c chẵn a, b lẻ thì ta cũng có:

$$(f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

Vậy hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho $f(2i) = 0, f(2i+1) = t (t \in \mathbb{Z})$ với mọi $i \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

- Xét hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(n) = n^2 t (t \in \mathbb{Z}, t \neq 0) \forall n \in \mathbb{Z}$

Giả sử $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a + b + c = 0$

Ta có $f(a) = a^2 t, f(b) = b^2 t, f(c) = c^2 t$

Suy ra $(f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = (a^4 + b^4 + c^4) t^2$

Có $a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2ab - 2bc - 2ca$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2a^2 c^2 = 4a^2 b^2 + 4b^2 c^2 + 4a^2 c^2 + 8abc(a + b + c)$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2a^2 c^2$

$\Rightarrow (f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2a^2 b^2 t^2 + 2b^2 c^2 t^2 + 2a^2 c^2 t^2$

$= 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$

Vậy hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho $f(n) = n^2 t (t \in \mathbb{Z}, t \neq 0) \forall n \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn đề bài.

- Xét hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(4i+1) = t, f(4i+2) = 4t, f(4i+3) = t, f(4i) = 0 (t \in \mathbb{Z}, t \neq 0) \forall i \in \mathbb{Z}$$

Giả sử $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sao cho $a + b + c = 0$

+ Nếu $a = 4i (i \in \mathbb{Z}) \Rightarrow b + c \equiv 0 \pmod{4}$

+ Nếu b, c đều chia hết cho 4 thì $f(a) = f(b) = f(c) = 0$

$$\Rightarrow (f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a) (= 0)$$

+ Nếu $b \equiv 2 \pmod{4}$ và $c \equiv 2 \pmod{4}$ thì $f(a) = 0, f(b) = 4t, f(c) = 4t$

$$\Rightarrow (f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 32t^2$$

$$2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a) = 32t^2$$

$$\Rightarrow (f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

+ Nếu $b \equiv 1 \pmod{4}$ và $c \equiv 3 \pmod{4}$ thì $f(b) = t, f(c) = t$

$$\Rightarrow (f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2t^2$$

$$2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a) = 2t^2$$

$$\Rightarrow (f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

+ Nếu $a \equiv 1 \pmod{4}, b \equiv 0 \pmod{4}$ và $c \equiv 3 \pmod{4}$, tương tự như trên ta cũng có:

$$(f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

+ Nếu $a \equiv 1 \pmod{4}, b \equiv 3 \pmod{4}$ và $c \equiv 0 \pmod{4}$, tương tự như trên ta cũng có:



$$(f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

+ Nếu $a \equiv 1 \pmod{4}$, $b \equiv 2 \pmod{4}$ và $c \equiv 1 \pmod{4}$

$$\Rightarrow f(a) = t, f(b) = 4t, f(c) = t \Rightarrow (f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 18t^2$$

$$2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a) = 8t^2 + 8t^2 + 2t^2 = 18t^2$$

$$\Rightarrow (f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

+ Nếu $a \equiv 1 \pmod{4}$, $b \equiv 1 \pmod{4}$ và $c \equiv 2 \pmod{4}$, tương tự như trên ta cũng có:

$$(f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

+ Nếu $a \equiv 2 \pmod{4}$, $b \equiv 0 \pmod{4}$ và $c \equiv 2 \pmod{4}$ hoặc $a \equiv 2 \pmod{4}$, $b \equiv 1 \pmod{4}$ và $c \equiv 1 \pmod{4}$; hoặc $a \equiv 3 \pmod{4}$, $b \equiv 0 \pmod{4}$ và $c \equiv 1 \pmod{4}$ hoặc $a \equiv 3 \pmod{4}$, $b \equiv 1 \pmod{4}$ và $c \equiv 0 \pmod{4}$, tương tự như trên ta cũng có:

$$(f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

+ Nếu $a \equiv 3 \pmod{4}$, $b \equiv 3 \pmod{4}$, $c \equiv 2 \pmod{4}$ thì $f(a) = f(b) = t, f(c) = 4t$

$$\Rightarrow (f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 18t^2; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a) = 18t^2$$

$$\Rightarrow (f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

Vậy tất cả các hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn đề bài là:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}: f(2i) = 0, f(2i+1) = t \quad (t \in \mathbb{Z}) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}: f(n) = n^2 t \quad (t \in \mathbb{Z}, t \neq 0) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}: f(4i) = 0, f(4i+1) = t, f(4i+2) = 4t, f(4i+3) = t \quad (t \in \mathbb{Z}, t \neq 0) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Cách 2.

Thay $a = b = c = 0$ vào phương trình ban đầu ta được:

$$f(0)^2 + f(0)^2 + f(0)^2 = 2f(0)f(0) + 2f(0)f(0) + 2f(0)f(0) \Rightarrow 3f(0)^2 = 6f(0)^2 \Rightarrow f(0) = 0$$

Thay $b = -a, c = 0$ vào phương trình ban đầu ta được:

$$f(a)^2 + f(-a)^2 + f(0)^2 = 2f(a)f(-a) + 2f(-a)f(0) + 2f(0)f(a)$$

$$\Rightarrow f(a)^2 + f(-a)^2 = 2f(a)f(-a) \Rightarrow f(a)^2 - 2f(a)f(-a) + f(-a)^2 = 0 \Rightarrow f(a) = f(-a)$$

Ta có thể viết lại phương trình ban đầu dưới dạng:

$$f(c)^2 - 2f(c)(f(a) + f(b)) + (f(a) - f(b))^2 = 0$$

$$\Rightarrow f(c) = f(-c) = f(a+b) = \frac{2(f(a) + f(b)) \pm \sqrt{4(f(a) + f(b))^2 - 4(f(a) - f(b))^2}}{2}$$

$$\Rightarrow f(a+b) = f(a) + f(b) \pm 2\sqrt{f(a)f(b)}$$

Nếu $f(b) = 0$: $f(a+b) = f(a) = f((a) \pmod{b})$

Trường hợp 1. $f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \forall x$.



Trường hợp 2. $f(1) \neq 0$, ta có $f(2) = f(1) + f(1) \pm 2\sqrt{f(1)f(1)} \Rightarrow f(2) = 0$ or $f(2) = 4f(1)$

Ta xét hai trường hợp nhỏ:

Trường hợp 2.1: $f(1) \neq 0, f(2) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x \bmod 2) \Rightarrow f(x) = f(1)$ nếu x lẻ và $f(x) = 0$ nếu x chẵn.

Trường hợp 2.2: $f(1) \neq 0, f(2) = 4f(1) \Rightarrow f(3) = f(2) + f(1) \pm 2\sqrt{f(2)f(1)}$
 $\Rightarrow f(3) = 5f(1) \pm 4f(1) \Rightarrow f(3) = f(1) \vee 9f(1)$

- Nếu $f(1) \neq 0, f(2) = 4f(1), f(3) = f(1)$:
 $\Rightarrow f(4) = f(1) + f(3) \pm 2\sqrt{f(1)f(3)}$ và $f(4) = f(2) + f(2) \pm 2\sqrt{f(2)f(2)}$
 $\Rightarrow f(4) = f(1)$ hoặc 0 và $f(4) = 16f(1)$ hoặc 0
 $\Rightarrow f(4) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x \bmod 4)$.
- Nếu $f(1) \neq 0, f(2) = 4f(1), f(3) = 9f(1)$:
 $\Rightarrow f(4) = f(1+3) = f(1) + f(3) \pm 2\sqrt{f(1)f(3)} = 16f(1)$ hoặc $4f(1)$
 và $f(4) = f(2) + f(2) \pm 2\sqrt{f(2)f(2)} = 16f(1)$ hoặc $0 \Rightarrow f(4) = 16f(1)$
- Nếu $x \leq 4$, khi đó $f(x) = f(1)x^2$
 Dùng quy nạp, ta chứng minh: $f(x) = f(1)x^2 \forall x$
- Nếu $x \leq m$, khi đó $f(x) = f(1)x^2 \forall x$, đúng với một số giá trị m .
 Giả sử điều phải chứng minh đúng với $m = k$:
 $\Rightarrow f(k+1) = f(k) + f(1) \pm 2\sqrt{f(k)f(1)} = f(1)(k+1)^2$ hoặc $f(1)(k-1)^2$
 Và $f(k+1) = f(k-1) + f(2) \pm 2\sqrt{f(k-1)f(2)} = f(1)(k+1)^2$ hoặc $f(1)(k-3)^2$
 $f(k+1) = f(1)(k+1)^2$.

Vậy điều phải chứng minh đúng với $m = k+1$.

Vì nó vẫn đúng với $m = 4$, theo quy nạp toán học ta có thể kết luận $f(x) = f(1)x^2 \forall x$.

Câu 49. Tìm tất cả các hàm $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm trên \mathbb{R}^+ thỏa mãn

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x}; g'(x) = -\frac{f(x)}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Lời giải

Ta có $[x \cdot (f(x) + g(x))]' = x(f'(x) + g'(x)) + f(x) + g(x)$

$$= x \left(-\frac{g(x)}{x} - \frac{f(x)}{x} \right) + f(x) + g(x) = 0, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow x[f(x) + g(x)] = a \forall x > 0 \Rightarrow f(x) + g(x) = \frac{a}{x} \quad \forall x > 0 \quad (1)$$



Tương tự ta có $\left[\frac{f(x)-g(x)}{x}\right]' = 0, \forall x > 0 \Rightarrow f(x)-g(x) = bx, \forall x > 0 \quad \forall x > 0 \quad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} + bx\right); g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} - bx\right), \forall x > 0, a, b \in \mathbb{R}$

Câu 50. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm trên \mathbb{R}_+^* thỏa mãn

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad (1)$$

Lời giải

Lấy đạo hàm hai vế (1) lần lượt theo biến x, y ta có

$$yf'(xy) = f'(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

$$xf'(xy) = f'(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow x \cdot f'(x) = y \cdot f'(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow x \cdot f'(x) = a \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow f(x) = a \cdot \ln x + b \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

Thử lại $\Rightarrow b = 0$.

Vậy $f(x) = a \cdot \ln x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Câu 51. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f(f(n)) = n + b \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

trong đó b là số nguyên dương chẵn.

Lời giải

Giả sử f thỏa mãn đề bài. Dễ thấy f đơn ánh

Trong (1) thay n bởi $f(n)$ ta được $f[f(f(n))] = f(n) + b$

Suy ra $f(n+b) = f(n) + b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Vậy nếu $m = qb + r, 0 \leq r \leq b-1$ thì $f(m) = f(qb+r) = f((q-1)b+r) + b = f(r) + qb$

Bây giờ ta chỉ cần xác định hàm f trên tập $A = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Xét $x \in A$, đặt $f(x) = y$ thì $f(y) = x + b$

Giả sử $y = qb + r$ thì $f(y) = f(r) + qb$ suy ra $x + b = f(r) + qb \Rightarrow qb < x + b < 2b$ nên $q = 0$

hoặc $q = 1$.

Do đó nếu $x \in A$ thì

i) $f(x) = r + b, r \in A, f(r) = x$

ii) $f(x) = r, r \in A, f(r) = x + b$

Vậy hàm f được xác định như sau
$$\begin{cases} f(qb+r) = qb + f(r) \\ f(a_i) = b_i \\ f(b_i) = a_i + b \end{cases} \quad \text{với } \{a_i\} \cap \{b_i\} = A.$$



Câu 52. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

i) $f(xf(y)) = yf(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

IMO 1983

Lời giải

Thế $x = 1$ ta được $f(f(y)) = yf(1)$

Nếu $f(a) = f(b)$, thì $af(1) = f(f(a)) = f(f(b)) = bf(1) \Rightarrow a = b$ vì $f(1)$ tiến tới số nguyên dương. Vì vậy hàm f đơn ánh.

Thế $x = y$ ta được $f(xf(x)) = xf(x)$

Vậy $xf(x)$ là điểm bất động của hàm f .

Khi đó, thay $y = 1$ thu được $f(xf(1)) = f(x) \Rightarrow f(1) = 1$ vì x khác 0 nên 1 là điểm bất động của hàm f . Ta chứng minh 1 là điểm bất động duy nhất của hàm f .

Giả sử tồn tại a, b là điểm bất động của f , ta có $f(a) = a$ và $f(b) = b$.

Khi đó, thế $x = a, y = b$ vào (i) ta được $f(ab) = f(af(b)) = bf(a) = ab$

Suy ra ab cũng là điểm bất động của f .

Thế $x = \frac{1}{a}, y = a$ thu được $1 = f(1) = f\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) = f\left(\frac{1}{a} \cdot f(a)\right) = af\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$

Vậy $\frac{1}{a}$ là điểm bất động của f .

Nếu $f(a) = a$ với $a > 1$, khi đó $f(a^n)$ là điểm bất động của f , mâu thuẫn (ii)

Nếu $f(a) = a$ với $0 < a < 1$, khi đó $f\left(\frac{1}{a^n}\right) = \frac{1}{a^n}$ là điểm bất động của f , mâu thuẫn (ii)

Từ các kết quả trên ta thu được điểm bất động duy nhất là 1, suy ra $xf(x) = 1 \Leftrightarrow f(a) = \frac{1}{x}$.

Câu 53. Chứng minh rằng tồn tại song ánh $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$f(3mn + m + n) = 4f(m)f(n) + f(m) + f(n) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

IMO Shortlist 1996

Lời giải

Xét hàm $g: 3\mathbb{Z}^+ + 1 \rightarrow 4\mathbb{Z}^+ + 1$ thỏa mãn: $g(x) = 4f\left(\frac{x-1}{3}\right) + 1$ thì ta có g là song ánh và

$$g((3m+1)(3n+1)) = g(3m+1)g(3n+1) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Thật vậy $g((3m+1)(3n+1)) = g(3(3mn + m + n) + 1) = 4f(3mn + m + n) + 1$

$$= 4(4f(m)f(n) + f(m) + f(n)) + 1 = (4f(m) + 1)(4f(n) + 1) = g(3m+1)g(3n+1)$$

Vậy với mọi $x, y \in 3\mathbb{Z}^+ + 1$, ta có $g(xy) = g(x) \cdot g(y)$



Như thế, ta chỉ cần chỉ ra một song ánh g là đủ, vì khi đó $f(x) = \frac{g(3x+1)-1}{4}$ thỏa mãn đề bài.

Xét P_1, P_2 là tập các số nguyên tố dạng $3k+1, 3k+2$ tương ứng và Q_1, Q_2 là tập các số nguyên tố dạng $4k+1, 4k+3$ tương ứng, ta xét song ánh $h: P_1 \cup P_2 \rightarrow Q_1 \cup Q_2$

Sao cho $h(P_1) = Q_1, h(P_2) = Q_2$ và xác định g như sau:

- $g(1) = 1$
- nguyên tố thì $g(n) = \prod h(p_i)$

Rõ ràng song ánh g như vậy thỏa mãn đề bài.

Câu 54. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa:

$$3f(f(f(n))) + 2f(f(n)) + f(n) = 6n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lời giải

Đặt $a_k = f^k(n) = f(f(\dots(f(n))))$ (lặp k lần).

Ta lập được dãy $3a_k + 2a_{k-1} + a_{k-2} = 6a_{k-3}$ với mọi n

Xét tập $S = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ vì đây là tập các số nguyên dương nên sẽ tồn tại một phần tử có giá trị nhỏ nhất. Đặt j là số sao cho a_j là giá trị nhỏ nhất trong tập S .

Ta có bất đẳng thức $3a_k + 2a_{k-1} + a_{k-2} = 6a_{k-3} \geq 6a_j$

Đẳng thức xảy ra khi $a_k = a_{k-1} = a_{k-2} = a_j$

Lại có khi đặt $k = j + 3$ thì đẳng thức xảy ra, vậy ta có $a_j = a_{j+1} = a_{j+2} = a_{j+3}$.

Tịnh tiến giá trị ta thu được $a_k = a_j$ với mọi $k \geq j$.

Thực hiện tương tự cho tịnh tiến lùi, lưu ý rằng $a_k = \frac{3a_{k+3} + 2a_{k+2} + a_{k+1}}{6}$, ta thu được $a_k = a_j$

với mọi $k < j$. Vậy $a_k = a_j$ với mọi $k \geq 0$.

Từ chứng minh trên dẫn đến $a_1 = a_0$ hay $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Câu 55. Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(f(x)) = yf(yf(x)) \quad \forall x, y \in (0; +\infty) \quad (1)$$

Lời giải

Với mọi $t \in (0; +\infty)$, ta chọn tùy ý một x_0 cố định và $u = f(x_0), v = tf(x_0)$ thì $t = \frac{f(u)}{f(v)}$

Ta thay trong (1) y bởi $\frac{1}{f(y)}$ ta có $f(f(x)) = \frac{1}{f(y)} f\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)$



Hay $f\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = f(y) \cdot f(f(x))$ (2)

Trong (1), thay y bởi $\frac{1}{f(x)}$ ta được $f(f(x)) = \frac{1}{f(x)} f(1) \forall x \in (0; +\infty)$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $f\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = f(1) \cdot \frac{f(y)}{f(x)}$

Do đó $f\left(\frac{f(u)}{f(v)}\right) = f(1) \cdot \frac{f(v)}{f(u)}$

Do vậy, $f(t) = f(1) \cdot \frac{1}{t} \forall t \in (0; +\infty)$.

Thử lại, hàm cần tìm là $f(x) = \frac{a}{x} \forall x \in (0; +\infty)$ ở đó $a > 0$ là hằng số.

Câu 56. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một hàm số f xác định trên tập các số thực dương, nhận giá trị thực dương và thỏa mãn $f(f(x)) = 6x - f(x)$.

Putnam 1988

Lời giải

Với mỗi số thực dương x_0 cố định, ta xây dựng dãy $\{f_n\}_{n \geq 1}$ như sau:

$$f_1 = x_0, f_2 = f(x_0), f_{n+1} = f(f_n(x_0)).$$

Khi đó, từ đẳng thức ở giả thiết ta suy ra dãy $\{f_n\}_{n \geq 1}$ thỏa mãn phương trình truy hồi

$$f_{n+2} = 6f_n - f_{n+1},$$

Hay $f_{n+2} + f_{n+1} - 6f_n = 0$.

Đến đây, giải phương trình đặc trưng của dãy $\{f_n\}_{n \geq 1}$, ta được hai nghiệm là 2 và -3.

Do đó, $f_n = a \cdot 2^n + b \cdot (-3)^n$, trong đó, các hằng số a, b tìm được phụ thuộc vào f_1, f_2 .

Tuy nhiên, nếu $b \neq 0$, thì tồn tại n đủ lớn sao cho $f_n < 0$ (ta có thể thấy được dễ dàng bằng cách chọn n chẵn đủ lớn nếu $b < 0$, và chọn n lẻ đủ lớn nếu $b > 0$).

Do vậy, $b = 0$. Thành ra $f_n = a \cdot 2^n$

Suy ra $f(f(x_0)) = a \cdot 2^3, f(x_0) = a \cdot 2^2$, thay hai giá trị này vào đẳng thức

$$f(f(x_0)) = 6x_0 - f(x_0)$$

Ta được $2a = x_0$. Dẫn đến $f(x_0) = 2x_0$

Và vì điều này đúng với mọi x_0 dương nên $f(x) = 2x, \forall x > 0$.



Câu 57. Hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$(i): f(f(n)) = n, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$(ii): f(f(n+2)+2) = n, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$(iii): f(0) = 1 \quad (3)$$

Tìm giá trị $f(1995), f(-2007)$

Olympic Ukraine 1995

Lời giải

Cũng nhận xét và lý luận như các ví dụ trước, ta đưa đến $f(n)$ phải có dạng: $f(n) = an + b$

Khi đó điều kiện (i) trở thành: $a^2n + ab + b = n, \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\text{Đồng nhất các hệ số, ta được } \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ ta được $f(n) = n$. Trường hợp này loại vì không thỏa mãn (ii)

Với $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$ ta được $f(n) = -n + b$

Từ điều kiện (iii) cho $n = 0$ ta được $b = 1$

$$\text{Vậy } f(n) = -n + 1 \quad (4)$$

Hiển nhiên hàm số này thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ta phải chứng minh $f(n) = -n + 1$ là hàm duy nhất thỏa mãn điều kiện bài toán

Thật vậy giả sử tồn tại hàm $g(n)$ khác $f(n)$ cũng thỏa mãn điều kiện bài toán.

$$\text{Từ (iii) suy ra } f(0) = g(0) = 1$$

$$\text{Từ (iii) suy ra } f(1) = g(1) = 0$$

$$\text{Sử dụng điều kiện (i), (ii) ta nhận được } g(g(n)) = g(g(n+2)+2) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Dno đó } g(g(g(n))) = g(g(g((n+2)+2))) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Hay } g(n) = g(n+2) + 2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Giả sử } n_0 \text{ là số tự nhiên bé nhất làm cho } f(n_0) \neq g(n_0) \quad (5)$$

Do $f(n)$ cũng thỏa mãn (4) nên ta có

$$g(n_0 - 2) = g(n_0) + 2 = f(n_0) + 2 = f(n_0 - 2)$$

$$\Leftrightarrow g(n_0 - 2) = f(n_0 - 2)$$

Mâu thuẫn với điều kiện n_0 là số tự nhiên bé nhất thỏa mãn (5)

$$\text{Vậy } f(n) = g(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Chứng minh tương tự ta cũng được $f(n) = g(n)$ với mọi n nguyên âm.



Bồi dưỡng học sinh giỏi

Vậy $f(n) = 1 - n$ là nghiệm duy nhất.

Từ đó tính được $f(1995), f(-2007)$.

Câu 58. Tìm $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xyz) = xf(x) + yf(y) + zf(z) \quad \forall x, y, z \in (0,1)$$

Lời giải

Chọn $x = y = z$ ta được $f(x^3) = 3xf(x)$

Thay x, y, z bởi x^2 ta được $f(x^6) = 3x^2f(x^2)$

Mặt khác $f(x^6) = f(x \cdot x^2 \cdot x^3) = xf(x) + x^2f(x^2) + x^3f(x^3)$

Hay $3x^2f(x^2) = xf(x) + x^2f(x^2) + 3x^4f(x)$

$$\Rightarrow 2x^2f(x^2) = xf(x) + 3x^4f(x) \Rightarrow f(x^2) = \frac{3x^3 + 1}{2}f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Thay x bởi x^3 ta được $f(x^9) = \frac{3x^9 + 1}{2}f(x^3), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3x^2f(x^2) = \frac{3x^9 + 1}{2}3xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 3x^2 \frac{3x^3 + 1}{2}f(x) = \frac{3x^9 + 1}{2}3xf(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \neq 0$$

Vậy $f(x) = 0$ với mọi $x \in (0;1)$.

Câu 59. Tìm tất cả các hàm f xác định trên \mathbb{N} và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 2f(n)f(k+n) - 2f(k-n) = 3f(n)f(k), k \geq n \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Lời giải

Cho $k = n = 0 \Rightarrow 2f^2(0) - 2f(0) = 3f^2(0) \Leftrightarrow f(0) = 0 \vee f(0) = -2$

Nếu $f(0) = 0$ chọn $n = 0$ ta được: $-2f(k) = 0$ do đó $f(k) = 0$ với mọi k

Chọn $k = 1$ ta được $f(1) = 0$ mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy $f(0) = -2$

Chọn $n = 1$ ta được phương trình $2f(1)f(k+1) - 2f(k-1) = 3f(1)f(k), \forall k$

$$\Leftrightarrow 2f(k+1) - 2f(k-1) = 3f(k), \forall k$$

Đặt $x_k = f(k)$ ta có phương trình sai phân $2x_{k+1} - 3x_k - 2x_{k-1} = 0$

Phương trình đặc trưng là $2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \wedge \lambda = -\frac{1}{2}$

Vậy $f(n) = c_1 2^n + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.



Ta tìm c_1, c_2 từ điều kiện $f(0) = -2, f(1) = 1$.

Dễ tìm được $c_1 = 0, c_2 = -2$

$$\text{Vậy } f(n) = -2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n.$$

Câu 60. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

$$\begin{cases} f(f(n)) = n + 2k, \forall n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^* \\ f(n+1) \geq f(n), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Lời giải

Giả sử có hàm f thỏa mãn các điều kiện (1), (2).

Ta chứng minh hàm f là một đơn ánh.

Thật vậy, với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $m \neq n$, nếu có $f(m) = f(n)$ thì do (1) suy ra

$$f(f(m)) = f(f(n)) \Leftrightarrow m + 2k = n + 2k \Leftrightarrow m = n \text{ (vô lý)}$$

Suy ra f là đơn ánh. Do (2) $\Rightarrow f(n+1) > f(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ suy ra

$$\begin{aligned} & f(n+1) \geq f(n) + 1 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \\ \Rightarrow & f(f(n+1)) \geq f(f(n) + 1) \geq 1 + f(f(n)) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \\ \Rightarrow & f(f(n+1)) \geq 1 + f(f(n)) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow & n + 1 + 2k = 1 + n + 2k \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow & f(f(n+1)) = f(f(n) + 1) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow & f(n+1) = f(n) + 1 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \text{ (do } f \text{ là đơn ánh)} \\ \Rightarrow & f(n) = f(n-1) + 1 \text{ với mọi } n \geq 2; n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Truy hồi ta được

$$\begin{aligned} & f(n) = n - 1 + f(1) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \\ \Rightarrow & f(f(n)) = f(n - 1 + f(1)) = n - 2 + 2f(1) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow & n + 2k = n - 2 + 2f(1) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow & f(1) = k + 1 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Suy ra $f(n) = n - 1 + k + 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow f(n) = n + k$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Thử lại $f(n) = n + k$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện (1), (2)

Vậy các hàm f cần tìm thỏa mãn đề bài là $f(n) = n + k$ với $n \in \mathbb{N}^*$.



Câu 61. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

$$\begin{cases} f(2013) = 2016 \\ f(f(n)) = n + 4, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Lời giải

Giả sử có hàm f thỏa mãn các điều kiện (1),(2).

Từ điều kiện (1) ta dễ dàng chứng minh được f là một đơn ánh.

Từ (1) ta suy ra $f(f(f(n))) = f(n+4)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f(n) + 4 = f(n+4) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Với $n = 4k+r$ với $k \in \mathbb{N}; r \in \{0,1,2,3\}$

Từ (3) ta suy ra $f(4k+r)+4 = 4k+f(r)$ với mọi $k \in \mathbb{N}$

- Tính $f(1)$. Do $2013 = 4 \cdot 503 + 1$ nên $f(2013) = 2012 + f(1) = 2016 \Leftrightarrow f(1) = 4$
- Tính $f(0)$. Ta có $f(f(0)) = 4 = f(1) \Rightarrow f(0) = 1$ (do f là đơn ánh)
- Tính $f(2)$ và $f(3)$. Giả sử $f(2) = 4m+r$ với $m \in \mathbb{N}$ và $r \in \{0,1,2,3\}$

Do (1) mà ta có $f(f(2)) = 6 = 2 + 4 \Leftrightarrow f(f(2)) = f(4m+r) = 4m + f(r) = 6;$

Mà $f(r) \geq 0 \Rightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$

+ Với $m = 0$, thì $f(r) = 6$ và $f(f(2)) = f(r) \Leftrightarrow f(2) = r$

+ Với $m = 1$, thì $f(r) = 2$ và $f(2) = 4+r$

Trường hợp 1. Xét $m = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(r) = 6 \\ f(2) = r \quad (r \in \{0,1,2,3\}) \end{cases}$

+ Với $r = 0$ thì $\begin{cases} f(0) = 6 \\ f(2) = 0 \end{cases}$ vô lý do $f(0) = 1$

+ Với $r = 1$ thì $\begin{cases} f(1) = 6 \\ f(2) = 1 \end{cases}$ vô lý do $f(1) = 4$

+ Với $r = 2$ thì $\begin{cases} f(2) = 6 \\ f(2) = 2 \end{cases}$ vô lý

+ Với $r = 3$ thì $\begin{cases} f(2) = 6 \\ f(3) = 2 \end{cases}$ vô lý

Vậy khi $m = 0$ ta có $f(0) = 1; f(1) = 2; f(2) = 3; f(3) = 6$

Trường hợp 2. Xét $m = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(r) = 2 \\ f(2) = r + 4 \quad (r \in \{0,1,2,3\}) \end{cases}$

+ Với $r = 0$ thì $f(0) = 2$ vô lý do $f(0) = 1$

+ Với $r = 1$ thì $f(1) = 2$ vô lý do $f(1) = 4$



+ Với $r = 2$ thì $\begin{cases} f(2) = 2 \\ f(2) = 6 \end{cases}$ vô lý

+ Với $r = 2$ thì $\begin{cases} f(2) = 7 \\ f(3) = 2 \end{cases}$ vô lý

Vậy khi $m = 1$ ta có $f(0) = 1; f(1) = 4; f(2) = 7; f(3) = 2$

Suy ra $f(n) = \begin{cases} n+1, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ n+3, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ n+5, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ n-1, & n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$

Thử lại: $f(n)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện (1) và (2) nên $f(n)$ là các hàm cần tìm.

Câu 62. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(n) + f(n+1) = f(n+1) \cdot f(n+3), \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Lời giải

Giả sử có hàm f thỏa mãn các điều kiện (1).

Ta lập dãy (a_n) với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta đặt $a_n = f(n)$ khi đó (1) trở thành

$$a_n + a_{n+2} = a_{n+1} a_{n+3}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Thay $n \rightarrow n+2$ trong phương trình (2) ta được $a_{n+2} + a_{n+4} = a_{n+3} a_{n+5}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (3)$

Trừ từng vế của (2), (3) ta được $a_{n+4} - a_n = a_{n+3}(a_{n+5} - a_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$.

Thay n lần lượt bởi $0, 1, 2, 3, \dots$ ta có $\begin{cases} a_4 - a_0 = a_3(a_5 - a_1) \\ a_5 - a_1 = a_4(a_6 - a_2) \\ a_6 - a_2 = a_5(a_7 - a_3) \\ \dots \end{cases}$

Suy ra $a_4 - a_0 = a_3 a_4 a_5 \dots a_{n+2} (a_{n+4} - a_n), \forall n \in \mathbb{N} \quad (4)$

Ta chứng minh rằng $a_{n+4} = a_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(n+4) = f(n), \forall n \in \mathbb{N} \quad (5)$

Hay f là hàm tuần hoàn với chu kỳ 4.

Thật vậy. Giả sử tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}^*$ mà $a_{n_0+4} \neq a_{n_0}; n \geq n_0$

Do $a_n \in \mathbb{N}^*$ với $\forall n \in \mathbb{N}$ nên $|a_{n_0+4} - a_{n_0}| \geq 1$ suy ra

$$|a_4 - a_0| = a_3 a_4 a_5 \dots a_{n_0+2} (a_{n_0+4} - a_{n_0}) \geq a_3 a_4 a_5 \dots a_{n_0+2}$$

Do $a_n + a_{n+2} = a_{n+1} a_{n+3}$ với $\forall n \in \mathbb{N}$, nên với 4 số liên tiếp $a_{n_0-1}, a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}$ phải có ít nhất một số lớn hơn 1.

Do đó khi $n \rightarrow +\infty$ thì $a_3 a_4 a_5 \dots a_{n_0+2} \rightarrow +\infty$ suy ra $|a_{n_0+4} - a_{n_0}| \rightarrow +\infty$ (vô lý)



Bồi dưỡng học sinh giỏi

Suy ra $a_4 - a_0 = 0 \Leftrightarrow a_{4n} - a_n = 0$ với $\forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(n+4) = f(n)$ với $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ trong đó f là hàm tuần hoàn chu kỳ 4.

Hàm f được xác định khi ta tính được $f(0) = a_0; f(1) = a_1; f(2) = a_2; f(3) = a_3$ bởi vì từ

$$(2) \text{ ta có } \begin{cases} a_0 + a_2 = a_3 a_4 \\ a_1 + a_3 = a_4 a_2 = a_0 a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_2 = a_1 a_3 \\ a_0 a_2 = a_1 + a_3 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} (a_0 - 1)(a_2 - 1) = a_0 a_2 - (a_0 + a_2) + 1 \\ (a_1 - 1)(a_3 - 1) = a_1 a_3 - (a_1 + a_3) + 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (a_0 - 1)(a_2 - 1) + (a_1 - 1)(a_3 - 1) = 2 \quad (6)$$

Do đó có các khả năng xảy ra.

$$\text{Khả năng 1. } \begin{cases} (a_0 - 1)(a_2 - 1) = 0 \\ (a_1 - 1)(a_3 - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \text{ v } a_1 = 3 \\ a_3 = 3 \text{ v } a_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \text{ v } a_0 = 5 \\ a_2 = 1 \text{ v } a_2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (f(0); f(1); f(2); f(3)) = (a_0; a_1; a_2; a_3) \in \{(1; 2; 5; 3), (1; 3; 5; 2), (5; 2; 1; 3), (5; 3; 1; 2)\}$$

Ta tìm được 4 hàm cần tìm với $f(n)$ với $f(n)$ xác định bởi

$$f(n) = \begin{cases} f(0), n \equiv 0 \pmod{4} \\ f(1), n \equiv 1 \pmod{4} \\ f(2), n \equiv 2 \pmod{4} \\ f(3), n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \quad (7)$$

đều thỏa mà điều kiện 1.

$$\text{Khả năng 2. } \begin{cases} (a_0 - 1)(a_2 - 1) = 1 \\ (a_1 - 1)(a_3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 2 \Leftrightarrow (a_0; a_1; a_2; a_3) = (2; 2; 2; 2)$$

Suy ra $f(n) = 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Khả năng 3. } \begin{cases} (a_0 - 1)(a_2 - 1) = 2 \\ (a_1 - 1)(a_3 - 1) = 0 \end{cases}$$

Lập luận tương tự như khả năng 1 ta được

$$(f(0); f(1); f(2); f(3)) = (a_0; a_1; a_2; a_3) \in \{(2; 1; 3; 5), (3; 1; 2; 5), (2; 5; 3; 1), (3; 5; 2; 1)\}$$

Ta được 4 hàm $f(n)$ cần tìm và cả 4 hàm đều thỏa mãn điều kiện (1).

Với $f(n)$ xác định bởi (7).

Vậy có 9 hàm f thỏa mãn là nghiệm của phương trình (1).

Câu 63. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$$

Lời giải

Ta để ý rằng: $f(a + f(b) + f(c)) = fa + f(b) + c + f(c) = f(a + b + c) + f(b) + f(c)$



Thế y bởi $y + f(z)$ ta được:

$$f(x + f(y + f(z))) = f(x + f(y + z) + f(z)) = f(x + y + 2z) + f(y + z) + f(z)$$

Và $f(x + y + f(z)) + f(y + f(z)) = f(x + y + z) + f(z) + f(y + z) + f(z)$

Thu được: $f(x + y + 2z) = f(x + y + z) + f(z)$ với mọi $x, y, z > 0$

Với giá trị của y , ta chọn x sao cho $x \neq y, f(y)$, từ đó ta có kết quả $f(f(y)) = 2f(y)$

Thế $y = x$ vào phương trình ban đầu $f(x + f(x)) = f(2x) + f(x)$

Để nhận thấy $f(x) \neq x$, vì vậy: $f(x) + f(f(x)) = f(2x) + f(x), f(f(x)) = f(2x)$

Theo phương trình hàm Cauchy, ta được $f(x) = 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Câu 64. Tìm số nguyên dương m nhỏ nhất sao cho tồn tại hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$

thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

i) $f(m) = f(2015), f(m+1) = f(2016);$

ii) $f(n+m) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}, n = 1, 2, \dots$

Lời giải

Ta có $f(n+2m) = -\frac{1}{f(n)} \Rightarrow f(n+4m) = f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$

Với $m = 1$, ta có $f(n+4) = f(n) \Rightarrow f(n+4k) = f(n), \forall k, n \in \mathbb{N}^*$

Ta có $f(n+2) = -\frac{1}{f(n)}; f(n+1) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$f(1) = f(2015) = f(4.503+3) = f(3) = -\frac{1}{f(1)}$: vô lý.

Với $m = 2$, ta có $f(n+8) = f(n) \Rightarrow f(n+8k) = f(n), \forall n, k \in \mathbb{N}^*$

và $f(n+4) = -\frac{1}{f(n)}; f(n+2) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có $f(2) = f(2015) = f(251.8+7) = f(7) = -\frac{1}{f(3)}$;

$$f(3) = f(2016) = f(251.8+8) = f(8) = -\frac{1}{f(4)}$$

$$\Rightarrow f(2) = f(4) = \frac{f(2)-1}{f(2)+1} \Rightarrow (f(2))^2 = -1$$

Điều mâu thuẫn trên dẫn đến $m \geq 3$.

Với $m = 3$, ta xây dựng được vô số hàm f thỏa yêu cầu bài toán như sau



Bồi dưỡng học sinh giỏi

Cho $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, đặt $f(1) = a; f(2) = \frac{1+a}{1-a}; f(3) = -\frac{1}{a}$; và $f(n+3) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}, \forall n \geq 1$

Khi đó, chứng minh quy nạp thì hàm số xác định trên \mathbb{N}^* và $f(n) \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Hơn nữa theo chứng minh trên $f(n+6) = -\frac{1}{f(n)}, f(n+12k) = f(n), \forall n, k \in \mathbb{N}^*$

Khi đó $f(2015) = f(167 \cdot 12 + 11) = f(11) = -\frac{1}{f(5)} = \frac{1+f(2)}{1-f(2)} = -\frac{1}{a} = f(3)$

$$f(2016) = f(167 \cdot 12 + 12) = f(12) = -\frac{1}{f(6)} = \frac{1+f(3)}{1-f(3)} = \frac{a-1}{a+1} = f(4)$$

Vậy hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 65. Xác định hàm số $f(x)$ liên tục $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

- $f(2x) = 2f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+, (1)$
- $f(f^3(x)(e^{f(x)} - 1)) = x^2(e^x - 1)f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+, (2)$
- $f(e-1) = (e-1)f(1), (3)$
- $f(k)$ là số nguyên dương với mọi số nguyên dương $k, (4)$

Lời giải

Với $a, b \in \mathbb{R}^+$ và $f(a) = f(b)$, suy ra $f^3(a)(e^{f(a)} - 1) = f^3(b)(e^{f(b)} - 1)$. Do đó

$$f(f^3(a)(e^{f(a)} - 1)) = f(f^3(b)(e^{f(b)} - 1))$$

Hay $a^2(e^a - 1)f(a) = b^2(e^b - 1)f(b)$. Vì $f(a) = f(b) > 0$ nên ta suy ra $a^2(e^a - 1) = b^2(e^b - 1)$.

Xét hàm số $h(x) = x^2(e^x - 1)$ trên \mathbb{R}^+ , ta có $h'(x) = 2x(e^x - 1) + x^2e^x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Do đó hàm số $h(x) = x^2(e^x - 1)$ đồng biến trên \mathbb{R}^+ .

Do đó từ $a^2(e^a - 1) = b^2(e^b - 1)$, ta suy ra $h(a) = h(b)$ hay $a = b$.

Vậy $f(x)$ là đơn ánh. Kết hợp với $f(x)$ liên tục ta suy ra $f(x)$ là hàm đơn điệu thực sự.

Mặt khác, theo giả thiết $f(2) = 2f(1) > f(1)$ nên ta suy ra $f(x)$ là hàm tăng thực sự trên tập \mathbb{R}^+ .

Từ (2) ta cho $x = 1$ thì $f(f^3(1)(e^{f(1)} - 1)) = (e-1)f(1)$.

Kết hợp với (3) ta suy ra $f(f^3(1)(e^{f(1)} - 1)) = f(e-1)$.

Vì $f(x)$ là hàm tăng thực sự trên \mathbb{R}^+ nên ta suy ra $f^3(1)(e^{f(1)} - 1) = e-1$.

Xét hàm số $g(x) = x^3(e^x - 1)$ trên \mathbb{R}^+ , ta có $g'(x) = 3x^2(e^x - 1) + x^3e^x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Do đó hàm số $g(x) = x^3(e^x - 1)$ đồng biến trên \mathbb{R}^+ .



Do đó từ $f^3(1)(e^{f(1)} - 1) = e - 1$, ta suy ra $g(f(1)) = g(1)$ hay $f(1) = 1$.

Vì $f(2x) = 2f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ và $f(1) = 1$ nên theo quy nạp ta có $f(2^n) = 2^n$ với mọi số tự nhiên n .

Với mọi số tự nhiên n , ta có

$$2^n = f(2^n) < f(2^n + 1) < f(2^n + 2) < \dots < f(2^n + 2^n - 1) < f(2^{n+1}) = 2^{n+1}$$

Vì điều kiện (4) nên $f(2^n + 1), f(2^n + 2), \dots, f(2^n + 2^n - 1)$ đều là các số nguyên dương.

Do đó ta suy ra $f(2^n + 1) = 2^n + 1, f(2^n + 2) = 2^n + 2, \dots, f(2^n + 2^n - 1) = 2^n + 2^n - 1$.

Vậy $f(n) = n$ với mọi số nguyên dương n .

Từ $f(2x) = 2f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Ta suy ra $f(2^n x) = 2^n f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Cho với mọi $x = \frac{m}{2^n}$ với mọi m, n là số nguyên dương ta suy ra $f(m) = 2^n f\left(\frac{m}{2^n}\right)$.

Do đó $m = 2^n f\left(\frac{m}{2^n}\right)$ hay $f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \frac{m}{2^n}$ mọi số nguyên dương m, n .

Với mỗi $x \in \mathbb{R}^+$ tùy ý cho trước đều tồn tại dãy số $\{q_k\}$, q_k có dạng $\frac{m}{2^n}$ hội tụ đến x .

Vì $f(x)$ là hàm liên tục nên $x = \lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f(q_k) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} q_k\right) = f(x)$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = x$ thỏa mãn mọi điều kiện của bài ra.

Câu 66. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- Với mọi cặp a, b nguyên dương không nguyên tố cùng nhau, có $f(a) \cdot f(b) = f(ab)$
- Với mọi bộ a, b nguyên dương tồn tại một tam giác không suy biến có độ dài ba cạnh là $f(a), f(b)$ và $f(a+b-1)$.

Lời giải

Từ điều kiện (2), với mọi bộ a, b nguyên dương, ta có
$$\begin{cases} f(a) + f(b) > f(a+b-1); \\ f(a) + f(a+b-1) > f(b); \\ f(a+b-1) + f(b) > f(a); \end{cases}$$

Nếu $a = b = 2$: $f(4) = f(2)^2$; $2f(2) > f(3)$.

Nếu $a = 3; b = 2$: $f(2) + f(3) > f(4)$

Ta có $f(2)^2 = f(4) < f(2) + f(3) < f(2) + 2f(2) = 3f(2) \Rightarrow f(2) = 1$ or $f(2) = 2$.

Nếu $f(2) = 1$. Do $2f(2) > f(1) \Rightarrow f(1) = 1$.



Bồi dưỡng học sinh giỏi

Quy nạp chứng minh $f(n) = 1$ với mọi n nguyên dương.

Cho $a = n, b = 2: f(n+1) < f(n) + f(2) = 2 \Rightarrow f(n+1) = 1$.

Nếu $f(2) = 2$, bằng quy nạp chứng minh được $f(2^k) = f(2) \cdot f(2^{k-1}) = \dots = f(2)^k = 2^k$.

Do $f(4) - f(2) < f(3) < 2f(2) \Rightarrow f(3) = 3$

Quy nạp chứng minh $f(n) = n, \forall n \geq 2$

Cho $a = n-1, b = 2: f(n) < f(n-1) + f(2) = n+1 \Rightarrow f(n) \leq n$.

Lấy r là số nguyên lớn nhất sao cho 2^r không vượt quá n .

Nếu $2^r = n$ thì theo chứng minh trên có $f(n) = n$.

Nếu $n = 2^r + s$ với $1 \leq s < 2^r$.

Với $a = n = 2^r + s; b = 2^r - s + 1$. Ta có

$$f(2^r - s + 1) = 2^r - s + 1 \Rightarrow f(n) + f(2^r - s + 1) > f(2^r + s + 2^r - s + 1 - 1)$$

$$f(n) > f(2^{r+1}) - f(2^r - s + 1) = 2^{r+1} - (2^r - s + 1) = 2^r + s - 1 = n - 1 \Rightarrow f(n) \geq n$$

Vậy $f(n) = n, \forall n \geq 2$.

Do $f(1) < 2f(2) = 4$ nên $f(1)$ bằng 1, 2 hoặc 3.

Vậy $f(n) = 1$ với mọi n nguyên dương hoặc $f(n) = n, \forall n \geq 2; f(1) \in \{1; 2; 3\}$.

Câu 67. Tìm các hàm số $f: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$$f(x) - f(y) = (y - x)f(xy) \text{ với mọi } x, y > 1 \quad (1)$$

Lời giải

Với mọi $t > 1$, thay $(x; y) = (t; 2), (t; 4)$ và $(2t; 2)$ vào (1) ta được:

$$\begin{cases} f(t) - f(2) = (2-t)f(2t) \\ f(t) - f(4) = (4-t)f(4t) \\ f(2t) - f(2) = (2-2t)f(4t) \end{cases} \Rightarrow f(4) + (t-3)f(2) = t(2t-5)f(4t), \forall t > 1 \quad (2)$$

$$\text{Lấy } t = \frac{5}{2} \Rightarrow f(4) = \frac{1}{2}f(2)$$

$$\text{Thay vào (2) ta được } \left(t - \frac{5}{2}\right)f(2) = t(2t-5)f(4t)$$

$$\text{Do đó với mọi } t > 1, t \neq \frac{5}{2} \Rightarrow f(4t) = \frac{f(2)}{2t}$$

$$\text{Từ (1) ta có } f(t) = f(4) + (4-t)f(4t) = \frac{2f(2)}{t} \text{ với } t > 1, t \neq \frac{5}{2}.$$

Với $t = \frac{5}{2}$, từ (1) thay $x = \frac{5}{2}, y = 2$ ta có:



$$f\left(\frac{5}{2}\right) = f(2) - \frac{1}{2}f(5) = \frac{4f(2)}{5} = \frac{2f(2)}{\frac{5}{2}} \Rightarrow f(t) = \frac{2f(2)}{t}, \forall t > 1$$

Đặt $c = 2f(2) \Rightarrow f(x) = \frac{c}{x}$ với $x > 1$.

Thử lại thỏa mãn điều kiện (1).

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = \frac{c}{x}$.

Câu 68. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đẳng thức:

$$f(f^2(m) + 2f^2(n)) = m^2 + 2n^2, \text{ với mọi } m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải

Nếu $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(m_1) = f(m_2)$

$$\Rightarrow f(f^2(m_1) + 2f^2(n)) = f(f^2(m_2) + 2f^2(n)) \Rightarrow m_1^2 + 2n^2 = m_2^2 + 2n^2,$$

Suy ra $m_1 = m_2$ hay f là đơn ánh.

$$\text{Từ đó } f(m)^2 + 2f(n)^2 = f(p)^2 + 2f(q)^2 \Leftrightarrow m^2 + 2n^2 = p^2 + 2q^2 \quad (1)$$

$$\text{Để thấy với mọi } n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3 \text{ ta có } (n+2)^2 + 2(n-1)^2 = (n-2)^2 + 2(n+1)^2 \quad (2)$$

Chú ý. Điều này vẫn đúng nếu ta nhân cả 2 vế với cùng một thừa số

Đặt $f(1) = a \Rightarrow f(3a^2) = 3$. Theo (1) suy ra:

$$f(5a^2)^2 + 2f(a^2)^2 = f(3a^2)^2 + 2f(3a^2)^2 = 3f(3a^2)^2 = 27$$

Vì phương trình $x^2 + 2y^2 = 27$ chỉ có nghiệm nguyên dương là $(x; y) = (3, 3)$ hoặc $(5, 1)$

nên ta có $f(a^2) = 1, f(5a^2) = 5$.

$$\text{Cũng từ (1) ta có } 2f(4a^2)^2 - 2f(2a^2)^2 = f(5a^2)^2 - f(a^2)^2 = 24.$$

Vì phương trình $x^2 - y^2 = 12$ chỉ có nghiệm nguyên dương là (x, y) là $(4, 2)$ nên

$$f(4a^2) = 4, f(2a^2) = 2$$

Từ (1) ta có $f((k+4)a^2)^2 = 2f((k+3)a^2)^2 - 2f((k+1)a^2)^2 + f(ka^2)^2$, suy ra từ khai triển (2)

Vì vậy theo các kết quả trên và phép quy nạp ta suy ra $f(ka^2) = k$, với mọi k là số nguyên dương. Do đó $f(a^3) = a = f(1)$ mà f đơn ánh nên $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $f(n) = n$ với mọi n nguyên dương. Thử lại thỏa mãn bài toán.



Câu 69. Tìm tất cả các số nguyên không âm n sao cho tồn tại một hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow [0; +\infty)$ khác hằng thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau

i) $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$

ii) $\{2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \{0; 1; 2; \dots; n\}.$

Lời giải

Với $a \in \mathbb{Z}$ bất kì, bằng cách thay $x = y = a^k; k \in \mathbb{N}^*$ vào i) được

$$2f(a)^k [f(2)f(a)^k - 1] \in \{0; 1; 2; \dots; n\} \quad (1)$$

- Nếu $f(2) = 0$ thì $-2f(a)^k \in \{0; 1; 2; \dots; n\} \Rightarrow f(a) = 0$
- Nếu $f(2) > 0$ thì ta thấy $f(a) = 0$ hoặc $f(a) = 1$.

Thật vậy, nếu $f(a) > 1$ thì bằng cách cho $k \rightarrow +\infty$, ta thấy $2f(a)^k [f(2)f(a)^k - 1] \rightarrow +\infty$.

Nên (1) không thể xảy ra, còn nếu $0 < f(a) < 1$ thì với k đủ lớn ta có

$$2f(a)^k [f(2)f(a)^k - 1] < 0$$

Nên (1) cũng không thể xảy ra.

Thành thử, ta đã chứng minh được với mọi a thì $f(a) = 0$ hoặc $f(a) = 1$.

Từ đó suy ra $[2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y)] \in \{0; 1; 2\}; \forall x, y \in \mathbb{Z} \quad (2)$

Do đó, $n \leq 2$.

Nếu $n = 0$, thì $2f(x^2 + y^2) = f(x) + f(y); \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

Vì f khác hằng nên tồn tại $x_0 \in \mathbb{Z}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$.

Khi đó $f(x_0) = f(x_0)f(1) \Rightarrow f(1) = 1$.

Do f khác hằng nên tồn tại $x_1 \in \mathbb{Z}$ sao cho $f(x_1) \neq 1$.

Từ i), ta có $f(0) = f(x_1) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

Bây giờ, sử dụng (2) ta được $2 = 2f(1^2 + 0^2) = f(1) + f(0) = 1$.

Điều vô lí này chứng tỏ $n = 0$ không thỏa mãn.

- Nếu $n = 1$ thì hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$.

Thỏa mãn đề bài. Do đó $n = 1$ thỏa mãn đề bài.

- Nếu $n = 2$ thì ta thấy không thể tồn tại 2 số $p, q \in \mathbb{Z}; (p, q) = 1$ sao cho $f(p^2 + q^2) = 0$.

Thật vậy, nếu trái lại, thì $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ ta có

$$0 = f(p^2 + q^2)f(x^2 + y^2) = f((p^2 + q^2)(x^2 + y^2)) = f((xp + yq)^2 + (xq - yp)^2)$$



Kết hợp với (2) suy ra $f(xp + yq) = f(xp - yq) = 0$. Thế nhưng, do $(p, q) = 1$ nên tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}$ để $xp + yq = 1$. Do đó $1 = f(xp + yq) = 0$.

Điều vô lí này chứng tỏ $f(x^2 + y^2) = 1; \forall x, y \in \mathbb{Z}; (x, y) = 1$.

Bây giờ, ta xét hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \begin{cases} p|x \\ q|x \end{cases} \\ 1 & \text{if } \begin{cases} p \nmid x \\ q \nmid x \end{cases} \end{cases}$, trong đó p, q là 2 số nguyên tố phân biệt có

dạng $4k + 3$. Ta sẽ chứng minh hàm $f(x)$ xây dựng như trên thỏa mãn 2 điều kiện:

i) $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$

ii) $\{2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) | x, y \in \mathbb{Z}\} = \{0; 1; 2; \dots; n\}$.

- Kiểm tra điều kiện i)

Nếu $\begin{cases} p|xy \\ q|xy \end{cases}$ thì hiển nhiên $f(xy) = 0 = f(x)f(y)$.

Nếu $\begin{cases} pq \nmid x \\ pq \nmid y \end{cases}$ thì $f(xy) = 1 = f(x)f(y)$

- Kiểm tra điều kiện ii)

Vì $f(x) \in \{0; 1\}$ nên $\{2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) | x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{0; 1; 2\}$

$$\text{Để thấy } \begin{cases} 2f(1 + p^2) - f(1) - f(p) = 1 \\ 2f(p^2 + q^2) - f(p) - f(q) = 2 \\ 2f(0) - f(0) - f(0) = 0 \end{cases} \text{ nên } \{2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) | x, y \in \mathbb{Z}\} = \{0; 1; 2\}$$

Vậy $n = 1, n = 2$ là tất cả các giá trị thỏa mãn đề bài.

Câu 70. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện:

$$2(f(m^2 + n^2))^3 = f^2(m).f(n) + f^2(n).f(m), \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.

Nếu $f(n) = c$, với c là hằng số thì hiển nhiên thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Nếu tồn tại $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(m) \neq f(n)$ thì ta gọi a, b là 2 số thỏa mãn

$$|f(a) - f(b)| = \min |f(m) - f(n)|, m, n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Giả sử $f(a) > f(b)$. Ta có $2f^3(b) < f^2(a).f(b) + f^2(b).f(a) < 2f^3(a)$.

Vậy $f(b) < f(a^2 + b^2) < f(a) \Rightarrow f(a^2 + b^2) - f(b) < f(a) - f(b)$.

 Bồi dưỡng học sinh giỏi

Từ đó $|f(a) - f(b)| = f(a) - f(b) > f(a^2 + b^2) - f(b) = |f(a^2 + b^2) - f(b)|$ (2)

Rõ ràng (2) mâu thuẫn với (1).

Do đó $f(n) = c$, với c là hằng số là tất cả các hàm cần tìm.

Câu 71. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

- $f(0) = c$
- $f(n+1) = \frac{\sqrt{3}f(n)+1}{\sqrt{3}-f(n)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Lời giải

$$\text{Từ (1) ta có } f(n+1) = \frac{f(n) + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}f(n)} = \frac{f(n) + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - f(n) \tan \frac{\pi}{6}} \Rightarrow f(1) = \frac{f(0) + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - f(0) \tan \frac{\pi}{6}}$$

Do đó ta đặt $f(0) = c = \tan \alpha$ thì $f(1) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$

$$f(2) = \frac{f(1) + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - f(1) \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \tan \frac{\pi}{6}} = \tan\left(\alpha + \frac{2\pi}{6}\right)$$

Ta chứng minh quy nạp công thức $f(n) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6}n\right), n \in \mathbb{N}$ (2)

Thật vậy, với $n = 0, 1, 2$ công thức (2) đúng.

Giả sử $f(n) = \tan\left(\alpha + \frac{n\pi}{6}\right)$

$$\text{Ta có } f(n+1) = \frac{f(n) + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - f(n) \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\tan\left(\alpha + \frac{n\pi}{6}\right) + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan\left(\alpha + \frac{n\pi}{6}\right) \tan \frac{\pi}{6}} = \tan\left(\alpha + (n+1)\frac{\pi}{6}\right)$$

Hay (2) đúng với $n+1$.

Nghiệm của bài toán là $f(n) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6}n\right), n \in \mathbb{N}$.

Câu 72. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa:

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

International Mathematical Olympiad 2019

Lời giải – Trần Bá Đạt

Lần lượt thay $a = 0, b = 0$ ta được:



$$f(0) + 2f(b) = f(f(b)), f(2a) + 2f(0) = f(f(a)), \text{ với } a, b \in \mathbb{Z}$$

Do đó $f(2a) = 2f(a) - f(0)$, với mọi $a \in \mathbb{Z}$

Thay vào phương trình đề bài ta được $2f(a) + 2f(b) - f(0) = f(f(a+b))$

Cho $a=0, b=a+b$ trong phương trình trên ta được: $f(0) + 2f(a+b) = f(f(a+b))$

Do đó: $f(a) + f(b) = f(a+b) + f(0)$

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$ suy ra $g(a) + g(b) = g(a+b) \Rightarrow g(x) = cx$ hay $f(x) = cx + d \forall x \in \mathbb{Z}$.

Thay vào phương trình ban đầu và cân bằng hệ số cho $a+b$ ta thu được: $c = d = 0$ hoặc $c = 2$.

Vậy $f \equiv 0$ hoặc $f(x) = 2x + d$.

Câu 73. Có tồn tại hay không hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho

$$f(m + f(n)) = f(m) - n, \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm f thoả mãn đề bài.

Từ (1) cho $m=0$ ta có $f(f(n)) = f(0) - n$ (2).

Với $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ mà $f(n_1) = f(n_2)$ thì $f(f(n_1)) = f(f(n_2))$

Từ (2) suy ra $f(0) - n_1 = f(0) - n_2$, do đó $n_1 = n_2$ nên f là đơn ánh.

Cho $n=0$ từ (1) ta có $f(m + f(0)) = f(m) \Leftrightarrow m + f(0) = m$

Từ đó ta được $f(0) = 0$ thay vào (2) có $f(f(n)) = -n, \forall n \in \mathbb{Z}$ (3).

Từ (1) thay m bằng $f(m)$ và áp dụng (3) ta được $f(f(m)) + f(n) = -m - n$.

Xét m, n, p, q là các số nguyên sao cho $m + n = p + q$, khi đó

$$f(f(m) + f(n)) = -m - n = -p - q = f(f(p) + f(q))$$

Theo chứng minh trên f là đơn ánh, nên suy ra $f(m) + f(n) = f(q) + f(p)$

Do đó với mọi $n \in \mathbb{Z}$ ta có

$$\begin{aligned} f(n+1) + f(n-1) &= f(n) + f(n) \Leftrightarrow f(n+1) - f(n) = f(n) - f(n-1) \\ \Rightarrow f(n+1) - f(n) &= f(n) - f(n-1) = \dots = f(2) - (1) = f(1) - f(0) \end{aligned}$$

Nên $\{f(n)\}$ là một cấp số cộng với số hạng đầu là $U_1 = f(0) = 0$ và công sai $d = f(1)$ suy ra $f(n) = U_{n+1} = U_1 + nd = nd, \forall n \geq 0$.

Ta xét với hai số $n > 0, m \geq 0$ sao cho $m + nd \geq 0$ thay vào (1) được

$$f(m + f(n)) = f(m + nd) = f(m) - n \Leftrightarrow f(m + nd) = md - n \Leftrightarrow (m + nd)d = md - n$$

Từ đó có $d^2 = -1$, điều này vô lý do vậy không tồn tại hàm f thoả mãn yêu cầu của đề bài.



Câu 74. Cho hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ là hàm số thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) $f(mn) = f(m)f(n), \forall m, n \in \mathbb{N}$
- ii) $(m+n)$ là ước của $f(m) + f(n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$

Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên lẻ k sao cho $f(n) = n^k, \forall n \in \mathbb{N}$.

India National Olympiad 2018

Lời giải

Gọi $P(x, y)$ là phép thế $m = x, n = y$ vào điều kiện i)

và $Q(x, y)$ là phép thế $m = x, n = y$ vào điều kiện ii)

Thế $P(1, 1)$ thì ta được $f(1.1) = f(1)f(1) \Rightarrow f(1) = 1$ vì $f \in \mathbb{N}$

Thế $Q(2, 2)$ thì ta được:

$$(2+2) \mid (f(2) + f(2)) \Rightarrow 2 \mid f(2) \Rightarrow f(2) = 2^k q, k \in \mathbb{N}, (2, q) = 1$$

Giả sử ta xét với $q > 1$ thì tồn tại một số nguyên tố p sao cho $p \mid q$ suy ra p là một số nguyên tố lẻ.

Từ $f(2) = 2^k q, k \in \mathbb{N}, (2, q) = 1$ nên ta suy ra: $p \mid f(2)$.

Thế $P\left(2, \frac{p-1}{2}\right)$ thì ta được $f\left(2 \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)\right) = f(p-1) = f(2)f\left(\frac{p-1}{2}\right)$

Từ $p \mid f(2)$ nên ta suy ra: $p \mid f(p-1)$.

Thế $Q(1, p-1)$ thì ta được:

$$1 + (p-1) \mid f(1) + f(p-1) \Leftrightarrow p \mid f(1) + f(p-1) \Leftrightarrow p \mid 1 + f(p-1) \Rightarrow p \mid 1$$

Điều này là hoàn toàn vô lý, do đó ta phải có $q = 1 \Rightarrow f(2) = 2^k$.

Thế $Q(2, 1)$ thì ta được:

$$2 + 1 \mid f(2) + f(1) \Leftrightarrow 3 \mid 2^k + 1 \Rightarrow 2^k + 1 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow (-1)^k + 1 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow k \text{ phải là số lẻ.}$$

Từ điều kiện i) thì ta được:

$$\begin{aligned} f(2.2\dots 2) &= f(2)f(2)\dots f(2) = 2^k.2^k\dots 2^k, \text{ trong đó } m \text{ lần số } 2 \\ &\Rightarrow f(2^m) = (2^k)^m = 2^{km}. \end{aligned}$$

Từ đây, ta thế $Q(n, 2^m)$ thì ta được:

$$n + 2^m \mid f(n) + f(2^m) \Leftrightarrow n + 2^m \mid f(n) + 2^{km} \quad (1)$$

Mà ta biết rằng: $(x+y) \mid (x^k + y^k)$ khi k là số lẻ.

Từ đó ta suy ra:

$$n + 2^m \mid n^k + (2^m)^k \quad (2)$$

Từ (1) và (2) thì ta được:



$$n + 2^m \mid (f(n) + 2^{km}) - (n^k + 2^{km}), \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 2^m \mid f(n) - n^k, \forall m \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Khi đó, với m là một số tự nhiên đủ lớn thì (3) xảy ra khi:

$$f(n) = n^k, \forall n \in \mathbb{N}, k \text{ là số tự nhiên lẻ.}$$

Vậy từ đây ta suy ra được điều phải chứng minh.

Câu 75. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- i) $f(0) = 0, f(1) = 1$
- ii) $f(0) \leq f(1) \leq f(2) \leq \dots$
- iii) $f(x^2 + y^2) = f^2(x) + f^2(y), \forall x, y \in \mathbb{N}^*$

Baltic MO

Lời giải

Ta có:

$$f(2) = f(1^2 + 1^2) = f^2(1) + f^2(1) = 2, f(5) = f(1^2 + 2^2) = f^2(1) + f^2(2) = 5, \dots, f(x_n) = x_n$$

Ở đây $x_0 = 1, x_{n+1} = x_n^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Hiển nhiên thì ta có: $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

Từ đây suy ra nếu $f(m) = f(m+1)$ thì:

$$\begin{aligned} f((m+1)^2 + 1^2) &= f^2(m+1) + f^2(1) = 1 + f^2(m+1) = 1 + f^2(m) = f(m^2 + 1) \\ \Rightarrow f(m^2 + k) &= f(m^2 + 1), \forall k = \overline{1, 2m+2} \end{aligned}$$

Quy nạp lên thì ta có tồn tại vô hạn số m sao cho $f(m^2 + k) = f(m^2 + 1), \forall k = \overline{1, 2m+2}$

Ta chọn m đủ lớn sao cho tồn tại n để $a_n, a_{n+1} \in [m^2 + 1, m^2 + 2m + 2]$

Khi đó thì $a_n = a_{n+1}$ điều này hoàn toàn vô lý nên suy ra f là hàm số tăng thực sự.

Từ đó thì hiển nhiên ta có: $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, thử lại thì thấy thỏa mãn.

Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 76. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) Nếu $a \mid b$ thì $f(a) \geq f(b)$
- ii) $f(ab) + f(a^2 + b^2) = f(a) + f(b), \forall a, b \in \mathbb{N}$

Mathlinks Contest

Lời giải

Trước hết, ta có một nhận xét nhỏ sau đây.

Nếu $f(x)$ là một nghiệm hàm thì $f(x) + c$ cũng là một nghiệm hàm thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Do đó ta có thể giả sử rằng $f(1) = 0$. Chú ý rằng từ $1|n$ thì $f(n) \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ta sẽ giải bài toán này thông qua các bước sau đây.

- **Bước 1.** Từ $f(1.1) + f(1+1) = f(1) + f(1)$ suy ra $f(2) = f(1)$ hoặc $f(2) = 0$.
- **Bước 2.** Gọi n là số nguyên sao cho -1 là số chính phương modulo n . Do đó tồn tại số a thỏa mãn: $a^2 = -1 + kn$.

Suy ra:

$$f(a) + f(a^2 + 1) = f(a) + f(1) \Leftrightarrow f(a^2 + 1) = f(kn) = f(1) = 0$$

Nhưng $f(n) \geq f(kn) = f(a^2 + 1)$ và $f(n) \leq f(1)$ nên $f(n) = f(1) = 0$.

Do đó nếu tồn tại u sao cho $u^2 \equiv -1 \pmod{n}$ thì $f(n) = 0$.

- **Bước 3.** Từ **bước 2** dễ thấy $f(p) = 0$ với mọi p là số nguyên tố và $p \equiv 1 \pmod{4}$.
- **Bước 4.** Giả sử $f(a) = f(b) = 0$ và $f(ab) < f(a) = f(b) = 0$ thì $f(a^2 + b^2) > 0$, vô lý.

Do đó nếu $f(a) = f(b) = 0$ thì $f(ab) = 0$.

- **Bước 5.** Gọi a, b là hai số nguyên thỏa mãn $(a, b) = 1$, khi đó gọi p là một ước của $a^2 + b^2$ thì ta có: $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$.

Mà ta có một bổ đề quen thuộc sau. Nếu p là một số nguyên tố có dạng $4k + 3$ thì với mọi bộ số a, b thỏa mãn $p | a^2 + b^2$ thì ta sẽ có $p | a$ và $p | b$.

Vì $(a, b) = 1$ nên nếu $p | a^2 + b^2$ thì p chỉ có dạng $4k + 1$.

Từ **bước 4** thì ta có:

$$a^2 + b^2 \text{ là tích của các số nguyên tố } p_i \text{ thỏa mãn } f(p_i) = 0 \text{ nên } f(a^2 + b^2) = 0.$$

Mà từ $f(ab) + f(a^2 + b^2) = f(a) + f(b), \forall a, b \in \mathbb{N}$ ta có $(a, b) = 1 \Rightarrow f(ab) = f(a) + f(b)$.

- **Bước 6.** Cho $a = bc$ vào phương trình đã cho thì ta được:

$$f(b^2c) + f(b^2(c^2 + 1)) = f(bc) + f(b)$$

Nhưng do $f(b) \geq f(b^2(c^2 + 1))$ và $f(bc) \geq f(b^2c)$

Do đó thì ta có: $f(bc) = f(b^2c)$ (*)

Thế $c = 1$ vào (*) thì được: $f(b) = f(b^2)$.

Thế $c = b$ vào (*) thì được: $f(b^2) = f(b^3)$.

Từ đây, bằng phép quy nạp thì ta được $f(b^k) = f(b), \forall k \geq 1$

- **Bước 7.** Sử dụng **bước 5** và **bước 6** thì ta có:

$$f\left(\prod p_i^{n_i}\right) = \sum f(p_i) \text{ ở đây } p_i \text{ là các số nguyên tố}$$

Xét hàm số $f(x)$ xác định bởi:

$$* f(1) = 0, f(2) = 0$$



* $f(p) = 0$ với các số nguyên tố p sao cho $p \equiv 1 \pmod{4}$ và $p = 2$.

* $f(p) = a_p \leq 0$ với mọi số nguyên tố p còn lại, ở đây a_p là các số nguyên không dương.

* $f\left(\prod p_i^{n_i}\right) = \sum f(p_i)$ ở đây p_i là các số nguyên tố.

Ta có thể chứng minh $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

Hiển nhiên nếu $a|b$ thì $f(a) \geq f(b)$.

$$f(1.1) + f(1+1) = f(1) + f(1) = 0$$

$$f(a.1) + f(a^2 + 1) = f(a) + f(1)$$

Ta có mọi ước nguyên tố p của $a^2 + 1$ đều thỏa mãn $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Với hai số nguyên $a, b > 1$ bất kì, ta gọi:

p_i là các ước nguyên tố của a không chia hết cho b .

q_i là các ước nguyên tố của b không chia hết cho a .

r_i là các ước nguyên tố của a và b .

$$f(a) = \sum f(p_i) + \sum f(r_i)$$

$$f(b) = \sum f(q_i) + \sum f(r_i)$$

$$f(ab) = \sum f(p_i) + \sum f(q_i) + \sum f(r_i)$$

$$f(a^2 + b^2) = \sum f(r_i) + \sum f(s_i), \text{ ở đây } s_i \text{ là các ước nguyên tố của } A = \left(\frac{a}{(a,b)}\right)^2 + \left(\frac{b}{(a,b)}\right)^2.$$

Nhưng tương tự **bước 5** ta có:

Các ước nguyên tố của A là các số nguyên tố thỏa mãn $s_i \equiv 1 \pmod{4}$ và do đó $f(A) = 0$.

$$\text{Suy ra } f(a^2 + b^2) = \sum f(r_i)$$

$$\text{Hay ta có } f(ab) + f(a^2 + b^2) = f(a) + f(b), \forall a, b \in \mathbb{N}$$

Và ta có nghiệm của phương trình hàm là:

Cho M là một số nguyên, hàm f được xác định như sau:

$$* f(1) = M$$

$$* f(2) = M$$

$$* f(p) = M \text{ với mọi số nguyên tố } p \text{ thỏa mãn } p \equiv 1 \pmod{4}.$$

$$* f(p) = M + a_p \text{ với mọi số nguyên tố } p \text{ còn lại, ở đây } a_p \text{ là các số nguyên không dương.}$$

$$* f\left(\prod p_i^{n_i}\right) = M + \sum (f(p_i) - M) \text{ ở đây } p_i \text{ là các số nguyên tố.}$$



Câu 77. Tồn tại hay không hàm số $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện:

- i) f là hàm đơn ánh
- ii) $f(ab) = f(a) + f(b)$ với mọi $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ và $ab \leq n$

Lời giải

Ta có thể chỉ ra hàm số f như sau:

Kí hiệu các số nguyên tố bé hơn hoặc bằng n theo thứ tự tăng dần là: p_1, p_2, \dots, p_k .

Khi đó nếu $a = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}, \alpha_i \in \mathbb{N}, \alpha_i < n+1$ thì $f(p_i) = (n+1)^i, f(a) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (n+1)$

Ta sẽ chứng minh hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Thật vậy, với $a = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ và $b = \prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i}$ có ít nhất một giá trị α_i và β_j khác nhau.

Thì $f(a) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (n+1)$ và $f(b) = \sum_{i=1}^k \beta_i (n+1)$

Hiển nhiên ta chỉ có thể biểu thị $f(a), f(b)$ một cách duy nhất sang hệ cơ số $(n+1)$ và vì thế $f(a) \neq f(b)$.

Mặt khác ta có $f(ab) = f\left(\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i + \beta_i}\right) = \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i) f(p_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(p_i) + \sum_{i=1}^k \beta_i f(p_i) = f(a) + f(b)$

Hay ta có: $f(ab) = f(a) + f(b)$, đúng theo giả thiết đề bài.

Vậy từ đó hàm số xây dựng như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 78. Giả sử Josephus có $(n-1)$ người bạn, n người này đứng thành một vòng tròn đánh số từ 1 đến n theo chiều kim đồng hồ, tự sát theo nguyên tắc, người thứ nhất cầm dao đếm 1 rồi tự sát, người thứ hai đếm 2 rồi tự sát, ... Quá trình dừng lại khi còn một người. Gọi $f(n)$ là hàm số biểu thị vị trí của người sống sót đó. Câu hỏi đặt ra là, hãy tính $f(n)$?

Bài toán cổ Josephus

Lời giải

Ta sẽ xét hai khả năng của n là chẵn và lẻ.

Khả năng 1. Khi số n là số chẵn, tức $n = 2k$. Sau vòng 1 thì còn người ở vị trí lẻ. Số người này đánh lại thành $1, 2, \dots, k$.

Nếu lượt trước người đó có số $2i-1$ thì sau đó mang số i . Người sống sót có số cũ là $f(2k)$ sau mang số mới là $f(k)$. Vậy từ đây ta có $f(2k) = 2f(k) - 1$

Khả năng 2. Khi số n là số lẻ, tức là $n = 2k + 1$. Sau vòng 1 ta ngầm hiểu rằng có $2k + 2$ người bằng cách tính trùng người thứ 1 thành $2k + 2$, còn lại những người số $3, 5, \dots, 2k + 1$ đánh số lại là $1, 2, \dots, k$.



Nếu lượt trước người đó có số $2i+1$ thì sau đó mang số i . Người sống sót có số cũ là $f(2k+1)$ sau mang số mới là $f(k)$. Vậy từ đây ta có $f(2k+1) = 2f(k) + 1$

Như vậy thì $f(1) = 1, f(2k) = 2f(k) - 1, f(2k+1) = 2f(k) + 1$

Ta chứng minh bằng quy nạp rằng.

Nếu biểu diễn trong cơ số 2 của n là: $n = \overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1)}_2, a_k = 1$, với $i \neq k$ và $a_i \in \{0, 1\}$

Thì $f(n) = \overline{(a_{k-1} \dots a_1 a_k)}_2$. Thật vậy:

Với $n = 1$ thì ta thấy hiển nhiên đúng.

Giả sử với mọi $k < n$ thì mệnh đề đúng. Ta sẽ xét hai trường hợp sau đây:

Trường hợp 1. Nếu n là số chẵn, đặt $n = 2m$.

Khi đó nếu như: $m = \overline{(b_k b_{k-1} \dots b_1)}_2$ thì $2m = \overline{(b_k b_{k-1} \dots b_1 0)}_2$

Và $f(2m) = 2f(m) - 1 = 2(b_{k-1}2^k + \dots + b_1 \cdot 2 + 1) - 1 = \overline{(b_{k-1} \dots b_1 01)}_2$

Vậy trong trường hợp 1 thì mệnh đề đúng.

Trường hợp 2. Nếu n là số lẻ, đặt $n = 2m + 1$.

Khi đó nếu như: $m = \overline{(b_k b_{k-1} \dots b_1)}_2$ thì $2m + 1 = \overline{(b_k b_{k-1} \dots b_1 1)}_2$

Và $f(2m + 1) = 2f(m) + 1 = 2(b_{k-1}2^k + \dots + b_1 \cdot 2 + 1) + 1 = \overline{(b_{k-1} \dots b_1 11)}_2$

Vậy trong trường hợp 2 thì mệnh đề đúng.

Từ đó, theo nguyên lý quy nạp thì mệnh đề ban đầu đúng và từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

Câu 79. Cho hai hàm số $f, g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ là hai hàm số thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) g là hàm số toàn ánh

ii) $2f^2(n) = n^2 + g^2(n), \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Nếu $|f(n) - n| \leq 2019\sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ thì f có vô số điểm bất động.

Lời giải

Đầu tiên ta có **định lý Dirichlet** về số nguyên tố thì dãy số (p_i) với p_i là các số nguyên tố có dạng $8k + 3$ là một dãy vô hạn.

Từ đó với mọi n , theo công thức của **kí hiệu Legendre** ta có:

$$\left(\frac{2}{p_n}\right) = (-1)^{\frac{p_n-1}{8}} = -1$$

Sử dụng điều kiện i) thì ta tìm được dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sao cho $g(x_n) = p_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Ta có $2f^2(x_n) = x_n^2 + p_n^2 \Rightarrow 2f^2(x_n) \equiv x_n^2 \pmod{p_n}$

Vì $\left(\frac{2}{p_n}\right) = -1$ nên suy ra: $\begin{cases} p_n | f(n) \\ p_n | x_n \end{cases}$



Suy ra tồn tại hai dãy số nguyên dương (a_n) và (b_n) sao cho $\begin{cases} x_n = a_n p_n \\ f(x_n) = b_n p_n \end{cases}$

Từ điều kiện **ii)** thì ta được $2b_n^2 = a_n^2 + 1$

Cuối cùng, sử dụng giả thiết: $|f(n) - n| \leq 2019\sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ thì ta có:

$$\frac{2019}{\sqrt{x_n}} \geq \left| \frac{f(x_n)}{x_n} - 1 \right| = \left| \frac{b_n}{a_n} - 1 \right| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_n^2 + 1}}{a_n} = \sqrt{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Suy ra tồn tại N_0 sao cho $a_n = b_n = 1, \forall n \geq N_0$

Vậy từ đó $f(p_n) = p_n, \forall n \geq N_0$.

Và từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Câu 80. Tìm tất cả các hàm số $g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$g(g(n) - n) + g(n + 1) = 3 + n + g(n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Doãn Quang Tiến

Lời giải

Đặt $g(n) = f(n) + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì thay vào phương trình hàm ban đầu ta được:

$$\begin{aligned} f(f(n)) + f(n) + f(n + 1) + (n + 1) &= 3 + n + f(n) + n, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow f(f(n)) + f(n + 1) &= n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1) \end{aligned}$$

Từ đây, ta đã chuyển bài toán ban đầu thành một bài toán khác có vẻ gọn đẹp hơn rất nhiều.

Thay $n = 1$ vào (1) thì ta được $f(f(1)) + f(2) = 3$

Từ đó ta suy ra: $f(2) \leq 2$ và $f(f(1)) \leq 2$. Từ đó ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $f(2) = 1$ và $f(f(1)) = 2$.

Bây giờ ta đặt $f(1) = k \Rightarrow f(k) = 2$

Thay $n = 2$ vào (1) thì ta được $f(f(2)) + f(3) = 4$

Từ đây suy ra $f(3) = 4 - f(2) = 4 - 1 = 3$

Từ $f(3) \geq 1$ nên suy ra: $k \leq 3$.

Nếu $k = 1$ thì ta có: $2 = f(f(1)) = f(k) = f(1) = 1$, điều này cũng mâu thuẫn.

Nếu $k = 2$ thì ta cũng có: $2 = f(f(1)) = f(k) = f(2) = 1$, điều này cũng mâu thuẫn.

Nếu $k = 3$ thì ta có: $2 = f(f(1)) = f(k) = f(3) = 4 - k = 4 - 3 = 1$, điều này cũng mâu thuẫn.

Vậy tóm lại không có giá trị nào của k thỏa mãn nên **trường hợp 1** không xảy ra.

Trường hợp 2. $f(2) = 2$ và $f(f(1)) = 1$.

Thay $n = 2$ vào (1) thì ta được $f(f(2)) + f(3) = 4$

Từ đó thì ta dễ thấy $f(3) = 2$ và ta tính toán được các giá trị sau:



$$f(4) = 5 - f(f(3)) = 5 - f(2) = 3$$

$$f(5) = 6 - f(f(4)) = 6 - f(3) = 4$$

$$f(6) = 7 - f(f(5)) = 7 - f(4) = 4$$

Từ đây ta dự đoán được rằng, hàm số $f(n)$ được xác định như sau:

$$f(n) = \lfloor \alpha n \rfloor - n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ trong đó } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng, hàm số này là hàm số thỏa mãn (1) để rồi từ đó suy ra công thức của hàm $g(n)$ và từ đó ta hoàn tất bài toán.

Mà trước tiên, để chứng minh nhận định đó, ta cần phải có hai **bổ đề** sau:

Bổ đề 1. Với mỗi số $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có $\lfloor \alpha(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1) \rfloor = \begin{cases} n \\ n + 1 \end{cases}$

Chứng minh

Trước hết ta có $\lfloor \alpha(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1) \rfloor < \alpha(\alpha n - n + 1) = \alpha + \alpha n(\alpha - 1) = n + \alpha < n + 2$

Và $\lfloor \alpha(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1) \rfloor > \alpha(\alpha n - 1 - n + 1) - 1 = \alpha n(\alpha - 1) - 1 = n - 1$

Do lưu ý rằng: $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \alpha - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ nên suy ra: $\alpha(\alpha - 1) = 1$.

Vậy từ đó ta thấy **bổ đề 1** được chứng minh.

Bổ đề 2. Với mỗi số $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có $\lfloor \alpha(n + 1) \rfloor = \begin{cases} \lfloor \alpha n \rfloor + 2 & \text{if } \lfloor \alpha(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1) \rfloor = n \\ \lfloor \alpha n \rfloor + 1 & \text{otherwise} \end{cases}$

Chứng minh

Hiển nhiên thì ta có $\lfloor \alpha(n + 1) \rfloor$ bằng $\lfloor \alpha n \rfloor + 1$ hoặc $\lfloor \alpha n \rfloor + 2$

Giả sử $\lfloor \alpha(n + 1) \rfloor = \lfloor \alpha n \rfloor + 1$ thì từ đó ta có:

$$\lfloor \alpha(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1) \rfloor = \lfloor \alpha(\lfloor (n + 1)\alpha \rfloor - n) \rfloor > \alpha((n + 1)\alpha - 1 - n) - 1 = \alpha(n + 1)(\alpha - 1) - 1 = n$$

Và như trên thì ta có $\lfloor \alpha(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1) \rfloor < \alpha(\alpha n - n + 1) = \alpha + \alpha n(\alpha - 1) = n + \alpha < n + 2$

Từ đó thì ta suy ra được: $\lfloor \alpha(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1) \rfloor = n + 1$.

Giả sử $\lfloor \alpha(n + 1) \rfloor = \lfloor \alpha n \rfloor + 2$ thì từ đó ta có:

$$\lfloor \alpha(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1) \rfloor = \lfloor \alpha(\lfloor (n + 1)\alpha \rfloor - n - 1) \rfloor < \alpha((n + 1)\alpha - n - 1) = n + 1$$

Từ đó thì theo **bổ đề 1** thì ta thu được: $\lfloor \alpha(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1) \rfloor = n$.

Vậy từ đó thì **bổ đề 2** được chứng minh.

Quay trở lại với việc giải bài toán

Ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh kết quả ban đầu.

Với $n = 1$ thì $f(1) = \lfloor \alpha \cdot 1 \rfloor - 1 + 1 = 1$.



Với $n = 2$ thì $f(2) = \lfloor \alpha \cdot 2 \rfloor - 2 + 1 = 2$.

Giả sử kết quả đúng với $1 \leq j \leq n$. Sử dụng (1) thì ta có:

$$f(n+1) = n+2 - f(f(n)) = n+2 - f(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1) = n+2 - \left(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1 \right) + \left(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1 \right) - 1$$

Mà từ $\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1 < 2n - n + 1 = n + 1$ ta có $f(n+1) = \lfloor \alpha n \rfloor + 2 - \left\lfloor \alpha \left(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1 \right) \right\rfloor$

Giả sử n thỏa mãn: $\left\lfloor \alpha \left(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1 \right) \right\rfloor = n$ thì từ đó ta có: $\lfloor \alpha(n+1) \rfloor = \lfloor \alpha n \rfloor + 2$

Và do đó ta suy ra được $f(n+1) = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor - n$

Nếu n không thỏa mãn $\left\lfloor \alpha \left(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1 \right) \right\rfloor = n$ thì tức là chỉ có thể xảy ra:

$$\left\lfloor \alpha \left(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1 \right) \right\rfloor = n + 1.$$

Và theo **bổ đề 2** thì ta được: $\lfloor \alpha(n+1) \rfloor = \lfloor \alpha n \rfloor + 1$

Và từ đó ta suy ra được:

$$f(n+1) = \lfloor \alpha n \rfloor + 2 - \left\lfloor \alpha \left(\lfloor \alpha n \rfloor - n + 1 \right) \right\rfloor = \lfloor \alpha n \rfloor + 2 - (n+1) = \lfloor \alpha n \rfloor + 1 - n = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor - n$$

Vậy từ đó theo nguyên lý quy nạp thì mệnh đề (1) được chứng minh hoàn toàn.

Từ đây suy ra tất cả các hàm số thỏa mãn (1) là

$$f(n) = \lfloor \alpha n \rfloor - n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ trong đó } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Hay từ đây ta suy ra được hàm $g(n)$ mà chúng ta cần tìm là:

$$g(n) = f(n) + n = \lfloor \alpha n \rfloor - n + 1 + n = \lfloor \alpha n \rfloor + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ trong đó } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Câu 81. Cho ba số thực a, b, c không âm, phân biệt sao cho tồn tại hàm $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

thỏa mãn $af(xy) + bf\left(\frac{x}{y}\right) = cf(x) + g(y)$ với mọi số thực dương $x > y$.

Chứng minh rằng tồn tại hàm $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho:

$$f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right) = 2f(x) + h(y), \forall x > y > 0$$

Iran TST 2019

Lời giải

Đặt $P(x, y)$ là phép thế cho phương trình: $af(xy) + bf\left(\frac{x}{y}\right) = cf(x) + g(y)$

Trường hợp 1: Nếu $a + b - c \neq 0$:

Ta có $P(x, 1) \Rightarrow f(x) = \frac{g(1)}{a+b-c}$ là hằng số, vậy: $f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right) = 2f(x)$

Suy ra $h(y) = 0 \forall y$, thỏa mãn.



Trường hợp 2: Nếu $a + b - c = 0$:

Ta có $a(f(xy) - f(x)) + b\left(f\left(\frac{x}{y}\right) - f(x)\right) = g(y)$ và đặt phép thế là $Q(x, y)$

Lấy $Q(1, y) - Q(x, y)$ ta được

$$a(f(xy) - f(x) - f(y) + f(1)) + b\left(f\left(\frac{x}{y}\right) - f(x) - f\left(\frac{1}{y}\right) + f(1)\right) = 0 \quad (1)$$

Thế $y \rightarrow \frac{1}{y}$ vào (1) ta được:

$$a\left(f\left(\frac{x}{y}\right) - f(x) - f\left(\frac{1}{y}\right) + f(1)\right) + b(f(xy) - f(x) - f(y) + f(1)) = 0$$

Do $a \neq b$, $a + b - c \neq 0 \Rightarrow a^2 - b^2 \neq 0$, vì vậy:

$$f(xy) = f(x) + f(y) - f(1), \forall x, y > 0$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) - f(1), \forall x, y > 0$$

Cộng hai phương trình với nhau $f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right) = 2f(x) + f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) - 2f(1)$

Vậy $h(y) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) - 2f(1) \forall y$, thỏa mãn.

Câu 82. Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn:

$$n! + f(m)! \mid f(n)! + f(m!), \forall m, n \in \mathbb{N}$$

BMO Shortlist 2018

Lời giải

Đặt phép thế $P(m, n)$ cho phương trình ban đầu

$$P(1, 1) \Rightarrow 1 + f(1)! \mid f(1)! + f(1)! \Rightarrow f(1)! + 1 \mid f(1) - 1, \text{ từ đây hiển nhiên } f(1) = 1$$

$$P(1, n) \Rightarrow n! + 1 \mid f(n)! + 1 \Rightarrow f(n)! \geq n! \Rightarrow f(n) \geq n$$

Gọi p là số nguyên tố tùy ý, ta có $P(1, p-1) \Rightarrow (p-1)! + 1 \mid f(p-1)! + 1$.

Theo định lý Wilson trong số học ta được $p \mid (p-1)! + 1$, suy ra $p \mid f(p-1)! + 1$

Lưu ý rằng nếu $f(p-1) > p-1$ thì $f(p-1)!$ là tích của ít nhất p thừa số nguyên dương và là một số chia hết cho p , do đó $f(p-1)! + 1 \equiv 1 \pmod{p}$ - mâu thuẫn chứng minh trên.

Vậy $f(p-1) \leq p-1$, lại có $f(n) \geq n$ nên $f(p-1) = p-1$ với mọi số nguyên tố p .

$$\text{Lại có } P(m, p-1) \Rightarrow (p-1)! + f(m)! \mid f(m)! + (p-1)! \Rightarrow (p-1)! + f(m)! \mid f(m)! - f(m)!$$



Bồi dưỡng học sinh giỏi

Với giá trị m bất kỳ, ta chọn p đủ lớn để thu được: $f(m!) = f(m)!$, sử dụng kết quả này ta được: $n! + f(m)! | f(n)! + f(m)!$ tương đương $n! + f(m)! | f(n)! - n!$

Thay $m = p - 1$ với p đủ lớn vào phương trình trên ra được $f(n)! = n!$ với mọi n .

Vậy $f(n) = n$ là hàm số cần tìm.

Câu 83. Tồn tại hay không hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(f(n)) + 3n = 2f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với mỗi $i \in \mathbb{N}^*$ ta xây dựng dãy số như sau $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sao cho: $a_1 = i, a_{n+1} = f(a_n)$

Khi đó thì ta có $a_{n+1} = f(a_n) = f(f(a_{n-1})) = 2f(a_{n-1}) - 3a_{n-1} = 2a_n - 3a_{n-1}$

Hay ta có $a_{n+1} + 4a_n + 3a_{n-1} = 0, \forall n \geq 1$

Do $a_n > 0, \forall n \geq 1$ nên đẳng thức không thể xảy ra.

Nên từ đó ta kết luận rằng không tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 84. Tìm tất cả các hàm số tăng thực sự $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(n + f(n)) = 2f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Lời giải

Do f là hàm số tăng thực sự nên ta có:

$$f(n+1) \geq f(n) + 1 \text{ hay } f(n+1) - n - 1 \geq f(n) - n$$

Suy ra: $f(n) - n$ là hàm số tăng.

Mặt khác ta đặt $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + f(a_n)$

Từ đó ta suy ra $a_0 < a_1 < \dots$ và $f(a_{n+1}) = 2f(a_n)$

Do đó $f(a_{n+1}) - a_{n+1} = f(a_n) - a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Suy ra có vô hạn bộ số (m, n) sao cho: $f(m) - m = f(n) - n$

Suy ra $f(n) - n = c$, với c là hằng số.

Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $f(n) = n + c, \forall n \in \mathbb{N}^*, c$ là hằng số.

Câu 85. Tìm tất cả các toàn ánh $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn:

$$f(m) | f(n) \Leftrightarrow m | n$$

Lời giải

Kí hiệu $P \subset \mathbb{N}$ là tập tất cả các số nguyên tố.

Xét đơn ánh $g: P \rightarrow P$ thì nếu $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ thì $f(n) = \prod_{i=1}^k g(p_i)^{\alpha_i}$.



Kí hiệu $\tau(n)$ là số ước nguyên dương của n .

Mà ta có nhận xét sau: $\tau(n) = f(\tau(n))$ do f là toàn ánh.

Với mỗi số nguyên tố p thì $f(p)$ chỉ có đúng hai ước nguyên tố nên nó cũng là số nguyên tố.

Xác định hàm g như trên thì từ đó ta có: $f(p) = g(p)$ nên ta sẽ chứng minh g là song ánh.

Thật vậy, do f là toàn ánh nên g là toàn ánh nên g là song ánh.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $f(p^k) = g(p)^k$ với k là số nguyên dương bằng quy nạp

Ta thấy rằng, với $k = 1$ thì hiển nhiên đúng.

Giả sử mệnh đề đúng với $k - 1$.

Ta có $f(p^k)$ chia hết cho $1, g(p), g(p)^2, \dots, g(p)^{k-1}$ và ngoài ra không chia hết cho số nguyên dương nào khác.

Do đó $\tau(f(p^k)) = \tau(p^k) = k + 1$.

Nếu $k > 1$ khi $f(p^k)$ có thêm một ước nguyên tố nữa thì $\tau(f(p^k)) \geq 2k > k + 1$, vô lý.

Từ đó $f(p^k)$ là lũy thừa của $g(p)$ và nó có $k + 1$ ước nên $f(p^k) = g(p)^k$.

Giả sử n là một số nguyên dương, p là một số nguyên tố không chia hết cho n .

Bây giờ ta sẽ đi chứng minh $f(n)f(p^k) = f(np^k), \forall k \in \mathbb{Z}$

Từ $(n, p^k) = 1$ nên ta có: $\tau(n)\tau(p^k) = \tau(np^k)$

Mặt khác $g(p)^k \mid f(np^k)$ và $g(p)f(n)$

Do vậy mọi ước của $f(n)$ và $g(p)^k$ chia hết cho $f(np^k)$ và mọi ước của $g(p)^k$ và $f(n)$ là ước của $f(np^k)$.

Lại có $\tau(f(n)f(p^k)) = \tau(np^k) = \tau(f(np^k))$

Nếu $f(np^k)$ có ước khác với các ước của $f(n)$ và $g(p)^k$ thì

$$\tau(f(n)f(p^k)) > \tau(f(np^k)), \text{ vô lý.}$$

Vậy từ đó ta có kết quả $f(np^k) = f(n)g(p)^k = f(n)f(p^k)$

Từ các nhận xét trên ta có hàm f được xây dựng như trên là duy nhất.

Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là các hàm như trên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Dưới đây là các tài liệu mà ebook này có tham khảo và đồng thời có cả những tài liệu mà bạn mình đề xuất cho bạn đọc

- [1]. Nguyễn Văn Mậu (1997), 00 Phương trình hàm 00, NXB Giáo dục.
- [2]. Nguyễn Trọng Tuấn (2004), “Bài toán hàm số qua các kì thi Olympic”, NXB Giáo dục.
- [3]. Nguyễn Tài Chung, Lê Hoàn Phò (2013), “Chuyên khảo phương trình hàm” Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội.
- [4]. J.Aczel (1966), “Lectures on functional equations and their applications”, ACADEMIC PRESS New York San Francisco London.
- [5]. Stevo Stevic (2004), “Periodic Character of a Class of Difference Equation”, Taylor & Francis Group.
- [6]. Valentine Boju, Luis Funar - The Math Problems Notebook.
- [7]. Titu Andreescu, Razvan Gelca – Birkhauser Mathematical Olympiad Challenges.
- [8]. Edward Lozansky , Cecil Rousseau – Winning Solutions.
- [9]. The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959 – 2009 – Djukic D., Vladimir Jankovic, Ivan Matic, Nikola Petrovic – Springer (2011).
- [10]. Trần Nam Dũng, Dương Bửu Lộc – Chuyên đề Phương trình hàm trên tập số nguyên .
- [11]. (Developments in Mathematics 39) Saïd Abbas, Mouffak Benchohra – Advanced.
- [12]. Functional Evolution Equations and Inclusions-Springer International Publishing (2015)
- [13]. Aczel – Lectures on functional equations and their applications – Academic Press (1966).
- [14]. An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities – Marek Kuczma.
- [15]. Analytic Solutions of Functional Equations – Sui Sun Cheng, Wenrong Li.
- [16]. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations – Haim Brezis.
- [17]. Topics in Algebra and Analysis Preparing for the Mathematical Olympiad –Radmila.
- [18]. Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega, Rogelio Valdez Delgado-Birkhäuser Basel (2015).
- [19]. Kỹ yếu gỡ gỡ toán học và các kỹ yếu từ hội thảo chuyên đề các tỉnh.
- [20]. The art of Mathematics.
- [21]. 101 Problems in Algebra from the training of the USA IMO team – T Andreescu, Z Feng.
- [22]. Problem Primer for the Olympiad – C. R. Pranesachar, B. J. Venkatachala, C. S. Yogananda
- [23]. <https://artofproblemsolving.com>

HẾT

TẠP CHÍ VÀ TỰ LIỆU TOÁN HỌC

Thôn 6 – Thạch Hòa – Thạch Thất – Hà Nội

Điện thoại: 0343763310; Email: tuangenk@gmail.com

Fanpage: <https://www.facebook.com/OlympiadMathematical/>

CHỊU TRÁCH NHIỆM NỘI DUNG

DOÃN QUANG TIẾN
NGUYỄN MINH TUẤN
TÔN NGỌC MINH QUÂN

BIÊN TẬP

NGUYỄN MINH TUẤN

TRÌNH BÀY BẢN THẢO

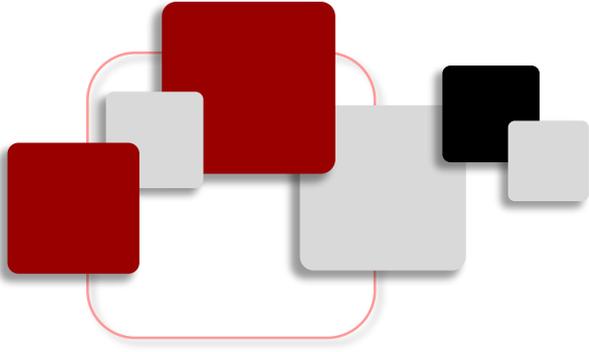
NGUYỄN MINH TUẤN
LA THỊ ĐÔNG PHƯƠNG

PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN TẬP RỜI RẠC

Đề nghị quý bạn đọc tôn trọng bản quyền của tác giả, không sao chép bản phụ.

Mọi ý kiến thắc mắc đóng góp vui lòng gửi về địa chỉ đã cung cấp ở trên.

Phiên bản sách điện tử được phát hành vào ngày 20/8/2019.



CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

MỌI Ý KIẾN THẮC MẮC XIN VUI LÒNG GỬI VỀ ĐỊA CHỈ

NGUYỄN MINH TUẤN

- ☎ 0343763310
- ✉ tuangenk@gmail.com
- 🌐 Lovetoan.wordpress.com
- 🏠 Đại học FPT Hà Nội

**PHIÊN BẢN
ĐẶC BIỆT**

