

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN CHỨA THAM SỐ

A. Tóm tắt lý thuyết

Cho hệ phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} (*)$

1. Để giải hệ phương trình (*) ta thường dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số
2. Từ 2 phương trình của hệ phương trình (*), sau khi dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số, ta thu được một phương trình mới (một ẩn). Khi đó số nghiệm của phương trình mới bằng số nghiệm của hệ phương trình đã cho
3. Chú ý: Cách biện luận số nghiệm phương trình bậc nhất một ẩn $ax + b = 0$

- Nếu $a \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{-b}{a}$

- Nếu $a = 0$ ta được: $0x = -b$

+) Nếu $b = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm

+) Nếu $b \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Giải và biện luận hệ phương trình

Cách giải: Để giải và biện luận hệ phương trình (*) ta làm như sau

Bước 1: Từ hai phương trình (*), sau khi dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số, ta thu được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn)

Bước 2: Giải và biện luận phương trình mới, từ đó đi đến kết luận về giải và biện luận hệ phương trình đã cho.

Bài 1:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 2m(1) \\ mx + y = 1 - m(2) \end{cases}$ (m là tham số)

1. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình:
 - a. Có nghiệm duy nhất, tìm nghiệm duy nhất đó
 - b. Vô nghiệm
 - c. Vô số nghiệm
2. Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$

d. Hãy tìm các giá trị m nguyên để x, y cùng nguyên

e. Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y không phụ thuộc vào tham số m

Lời giải

1. Từ (1) có: $x = 2m - my$, thay vào phương trình còn lại $(m^2 - 1)y = 2m^2 + m - 1$ (*)

Số nghiệm của hệ phương trình bằng số nghiệm của phương trình (*)

a. hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \neq \pm 1 \Rightarrow (x; y) = \left(\frac{-m}{m+1}; \frac{2m-1}{m-1}\right)$

b. Vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ 2m^2 + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

c. Vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ 2m^2 + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

2. Với $\Leftrightarrow m \neq \pm 1 \Rightarrow (x; y) = \left(\frac{-m}{m+1}; \frac{2m-1}{m-1}\right)$

d. Ta có: $\begin{cases} x = \frac{-m}{m-1} = -1 - \frac{1}{m-1} \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{2m-1}{m-1} = 2 + \frac{1}{m-1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m-1 = \pm 1 \Rightarrow m \in \{0; 2\}$

e. Hệ thức không phụ thuộc vào m là $x + y = 1$

Bài 2:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx + y = 2 & (1) \\ 8x + my = m + 2 & (2) \end{cases}$ (m là tham số)

1. Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo m

2. Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m

b) Tìm giá trị của m để $4x + 3y = 7$

Lời giải

1) Ta xét các trường hợp sau

- Xét $m = 0 \Rightarrow$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{4}; 2\right)$

- Xét $m \neq 0$

+) Với $\frac{2m}{8} \neq \frac{1}{m} \Leftrightarrow m \neq \pm 2 \Rightarrow$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{2m+4}; \frac{m+4}{m+2}\right)$

+) Với $m = 2 \Rightarrow$ hệ phương trình vô số nghiệm

+) Với $m = -2 \Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm

2) a) Với $m \neq \pm 2 \Rightarrow$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{1}{2m+4}; \frac{m+4}{m+2}\right) \Rightarrow y = 1 + 4x$

b) $4x + 3y = 7 \Leftrightarrow \frac{4}{2m+4} + \frac{3(m+4)}{m+2} = 7 \Leftrightarrow m = 0$

Bài 3:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2m & (1) \\ 4x - my = m + 6 & (2) \end{cases}$ (m là tham số)

1. Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo m .

2. Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$

a. Chứng minh rằng $2x + y = 3$ với mọi giá trị của m

b. Tìm giá trị của m để $6x - 2y = 13$

Lời giải

1. $m \neq \pm 2 \Rightarrow$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{2m+3}{m+2}; \frac{-m}{m+2}\right)$

+) Với $m = -2$ thì hệ vô nghiệm

+) Với $m = 2$ thì hệ phương trình vô số nghiệm

2. Với $m \neq \pm 2$

a. Thay $(x; y) = \left(\frac{2m+3}{m+2}; \frac{-m}{m+2}\right)$ vào $2x + y = 3$ (thỏa mãn)

b. $6x - 2y = 13 \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{2m+3}{m+2} - 2 \cdot \frac{-m}{m+2} = 13 \Leftrightarrow m = 8$.

Bài 4:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 2 & (1) \\ mx - y = m & (2) \end{cases}$ (m là tham số)

1. Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo m .

2. Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$

a. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m

b. Tìm điều kiện của m để $x > 1$ và $y > 0$

Lời giải

1. Với $m \neq \frac{-1}{2}$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{2m+2}{2m+1}; \frac{m}{2m+1} \right)$

+) $m = \frac{-1}{2} \Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm

2.

a) Hệ thức cần tìm là $x + 2y = 2$

b) $x > 1; y > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2m+1} > 0; \frac{m}{2m+1} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Dạng 2: Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước

Cách giải: Một số bài toán thường gặp của dạng này là

Bài toán 1: Tìm điều kiện nguyên của tham số để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ trong đó x và y cùng là những số nguyên.

Bài toán 2: Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức cho trước

Bài 1:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx - 5y = -2 & (1) \\ 5x - 2my = 3 - 2m & (2) \end{cases}$

1. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

2. Tìm m nguyên để nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x và y cùng nguyên.

Lời giải

1. Từ phương trình thứ nhất ta có: $y = \frac{2mx+2}{5}$ thay vào phương trình còn lại ta được:

$$(25 - 4m^2)x = 15 - 6m \quad (*)$$

+) Với $m = \frac{-5}{2} \Rightarrow 0x = 0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm.

+) Với $m = \frac{5}{2} \Rightarrow$ Hệ phương trình $\Leftrightarrow x - y = \frac{-2}{5} \Rightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm.

+) Với $m \neq \frac{\pm 5}{2}$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (\frac{3}{2m+5}; 1 - \frac{3}{2m+5})$

Khi đó $x, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (2m+5) \in U(3) \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1\} \Rightarrow (-1; 2); (-3; 4); (3; -2); (1; 0)$

Bài 2:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 3 \\ 4x + my = 6 \end{cases}$ (m là tham số)

Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x > 2; y > 0$.

Lời giải

Từ $mx + y = 3 \Rightarrow y = 3 - mx$ thay vào phương trình $4x + my = 6$ ta được:

$$4x + m(3 - mx) = 6 \Leftrightarrow 4x + 3m - m^2x = 6 \Leftrightarrow (4 - m^2)x = -3m + 6$$

+) Với $m = -2 \Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm

+) Với $m = 2 \Rightarrow$ hệ phương trình có dạng $2x + y = 3$, mà $x > 2; y > 0 \Rightarrow 2x + y > 4 \Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm.

+) Với $m \neq \pm 2 \Rightarrow$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(\frac{3}{m+2}; \frac{6}{m+2})$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x > 2 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < \frac{-1}{2}$$

Bài 3:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m-1)x - my = 3m-1 \\ 2x - y = m+5 \end{cases}$ (m là tham số)

Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ sao cho biểu thức $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

*) Với $m \neq -1 \Rightarrow$ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(m+1; m-3)$.

$$\text{Khi đó } S = x^2 + y^2 = 2(m-1)^2 + 8 \geq 8 \Rightarrow S_{\min} = 8 \Leftrightarrow m = 1$$

Bài 4:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$

b) Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x - y = 2$

Lời giải

a) Với $m = 1$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} -2x + y = 5 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 5 \\ 2x + 6y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy với $m = 1$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-2; 1)$

b) Ta tìm được $m = \frac{-2}{3}$.

Bài 5:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 4 & (1) \\ 2x - y = m & (2) \end{cases}$ (m là tham số)

a. Giải hệ phương trình khi $m = 5$

b. Tìm m nguyên sao cho hệ có nghiệm $x, y < 1$

c. Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng $3x + 2y = 4$; $2x - y = m$ và $x + 2y = 3$ đồng quy.

Lời giải

a. Với $m = 5$ ta giải được: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

b. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 4x - 2y = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2m+4}{7} \\ y = \frac{-3m+8}{7} \end{cases}$

$\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m+4}{7} < 1 \\ \frac{-3m+8}{7} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+4 < 7 \\ -3m+8 < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m < \frac{3}{2}$

c. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow I(\frac{1}{2}; \frac{5}{4})$

Ba đường thẳng đã cho đồng quy thì $y = 2x - m$ đi qua $I(\frac{1}{2}; \frac{5}{4})$, nghĩa là: $2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$

Bài 6:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x - my = -9 & (1) \\ mx + 2y = 16 & (2) \end{cases}$ (m là tham số)

- Giải hệ phương trình khi $m = 5$
- Chứng minh rằng hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi m .
- Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để hai đường thẳng của hệ cắt nhau tại 1 điểm nằm trong góc phần tư thứ IV trên mặt phẳng tọa độ
- Với giá trị nào của m hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x + y = 7$

Lời giải

$$b. \begin{cases} 3x - my = -9 \\ mx + 2y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + 6)x = -18 + 16m \\ 3x - my = -9 \end{cases}$$

Ta có: $m^2 + 6 > 0$ với mọi m

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất với mọi m

$$x = \frac{16m - 18}{m^2 + 6}; y = \frac{18m + 96}{m^2 + 6}$$

$$c. \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16m - 18}{m^2 + 6} > 0 \\ \frac{18m + 96}{m^2 + 6} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m - 18 > 0 \\ 18m + 96 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

$$d. x + y = 7 \Leftrightarrow 2m + 78 = 7(m^2 + 6) \Leftrightarrow 7m^2 - 2m - 36 = 0 \Leftrightarrow m = \dots$$

Bài 7:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m-1)x + y = m & (1) \\ x + (m-1)y = 2 & (2) \end{cases}$ (m là tham số)

Giả sử hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$

- Tìm đẳng thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m
- Tìm giá trị của m thỏa mãn $2x^2 - 7y = 1$
- Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $\frac{2x - 3y}{x + y}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

Từ (1) $\Rightarrow y = m - (m-1)x$ thay vào (2) ta được:

$$x + (m-1)[m - (m-1)x] = 2 \Leftrightarrow (m^2 - 2m)x = m^2 - m - 2 \Leftrightarrow m(m-2)x = (m-2)(m+1)$$

$$\text{Hệ có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{m+1}{m}; y = \frac{1}{m}$$

a. $x - y = 1$ là hệ thức cần tìm.

$$\text{b. Ta có: } x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1 \text{ do đó: } 2x^2 - 7y = 1 \Leftrightarrow 2(y+1)^2 - 7y = 1 \Leftrightarrow 2y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{+) Với } y = 1 \Rightarrow \frac{1}{m} = 1 \Leftrightarrow m = 1$$

$$\text{+) Với } y = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 2 (\text{loại})$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm

$$\text{c. Ta có: } \frac{2x-3y}{x+y} = \frac{2(y+1)-3y}{2y+1} = \frac{2-y}{2y+1} = \frac{2m-1}{m+2} = 2 - \frac{5}{m+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (m+2) \in U(5) \Rightarrow m \in \{-1; -3; -7; 3\}$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1:

$$\text{Cho hệ phương trình } \begin{cases} mx + 2my = m + 1 & (1) \\ x + (m+1)y = 2 & (2) \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

a. Giải và biện luận hệ phương trình đã cho

b. Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$, gọi $M(x; y)$ là điểm tương ứng với nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình

- Chứng minh M luôn nằm trên đường thẳng cố định khi m thay đổi

- Tìm các giá trị của m để M thuộc góc phần tư thứ nhất

- Xác định giá trị của m để M thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

$$\text{a. Với } m \neq 0; m \neq -1 \text{ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất } \left(\frac{m-1}{m}; \frac{1}{m} \right)$$

+) Với $m = 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm

+) Với $m=1$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm $(2-y; y)$ với mọi m thuộc $\mathbb{R}$

b) Ta tìm được hệ thức liên hệ giữa x, y không phụ thuộc m là $y = -x + 1$.

Vậy M chạy trên đường thẳng có phương trình: $y = -x + 1$

- M thuộc góc phần tư thứ nhất khi $x, y > 0$. Vậy $m > 1$

$$- M \in (0; \sqrt{5}) \Leftrightarrow OM = \sqrt{5} \Rightarrow m \in \left\{ -1; \frac{-1}{2} \right\}$$

Bài 2:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases} (I)$ (m là tham số)

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$

b. Tìm m để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x = y$

c. Tìm m để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $S = (x + y)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

d. Tìm m để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $xy > 0$

e. Tìm m nguyên để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x, y nguyên.

f. Khi hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa x và y mà không phụ thuộc vào giá trị của m

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Với } m=1 \text{ hệ phương trình trở thành } \begin{cases} x + 4y = 9 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) Từ: } x + my = 4 \Rightarrow x = 4 - my \Rightarrow m(4 - my) + 4y = 10 - m \Leftrightarrow 4m - m^2y + 4y = 10 - m$$

$$\Leftrightarrow (4 - m^2)y = 10 - 5m$$

- Với $m = 2 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ hệ phương trình có vô số nghiệm

- Với $m = -2 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm

$$\text{- Với } m \neq \pm 2 \Rightarrow y = \frac{10 - 5m}{4 - m^2} = \frac{5(2 - m)}{(2 - m)(2 + m)} = \frac{5}{2 + m} \Rightarrow x = 4 - m \cdot \frac{5}{2 + m} = \frac{8 + 4m - 5m}{2 + m} = \frac{8 - m}{m + 2}$$

$$\text{Đề } x = y \Leftrightarrow \frac{8-m}{m+2} = \frac{5}{m+2} \Leftrightarrow m = 3$$