VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A. Tóm tắt lý thuyết

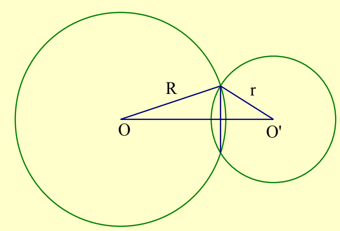
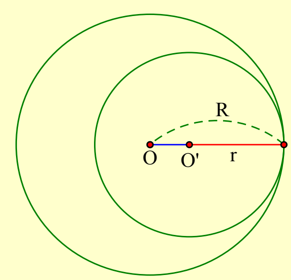
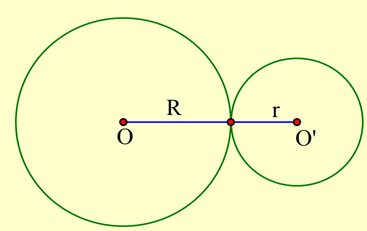
1. Tính chất của đường nối tâm

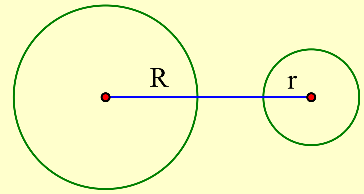
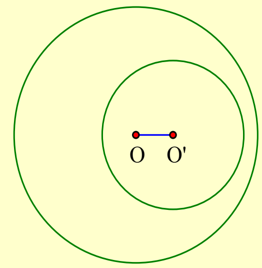
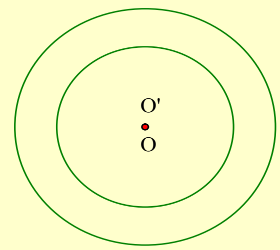
- Đường nối tâm (Đường thẳng đi qua tâm 2 đường tròn) là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn

Chú ý:

- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung

2. Liên hệ giữa vị trí của hai đường tròn với đoạn nối tâm d và các bán kính R, r

<table>
<tr><th colspan="2">Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)(R \geq r)$</th><th>Số điểm chung</th><th>Hệ thức</th><th>Hình vẽ</th></tr>
<tr><td colspan="2">Cắt nhau</td><td>2</td><td>$R - r < OO' < R + r$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tiếp xúc</td><td>Tiếp xúc trong</td><td rowspan="2">1</td><td>$OO' = R - r > 0$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Tiếp xúc ngoài</td><td>$OO' = R + r$</td><td>
</td></tr>
</table>

Không cắt nhau	Ngoài nhau	0	$OO' > R + r$	
	Đựng nhau		$0 \ne OO' < R - r$	
			$OO' \equiv O$	

3. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó

a) Hai đường tròn cắt nhau có hai tiếp tuyến chung ngoài

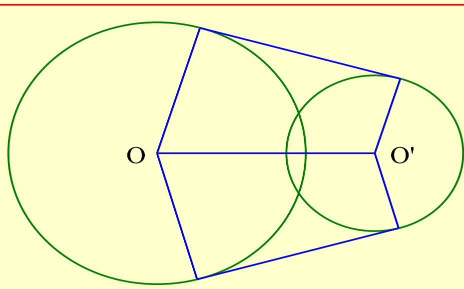
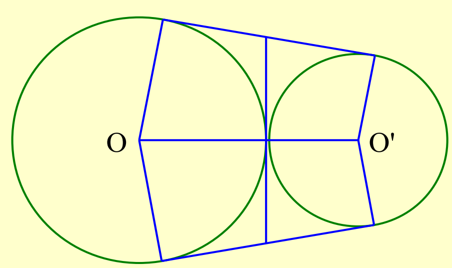
b) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài có hai tiếp tuyến chung ngoài và một tiếp tuyến chung (hình vẽ b)

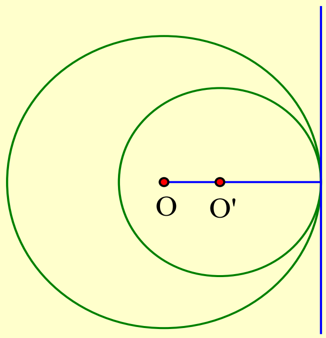
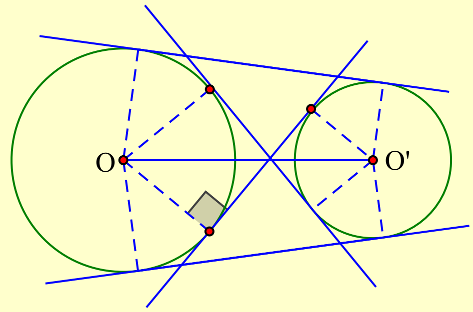
c) Hai đường tròn tiếp xúc trong chỉ có một tiếp tuyến chung (hình c)

d) Hai đường tròn ngoài nhau có hai tiếp tuyến chung ngoài và hai tiếp tuyến chung trong (hình vẽ d)

e) Hai đường tròn chứa nhau không có tiếp tuyến chung

f) Hai đường tròn đồng tâm không có tiếp tuyến chung

	 Hình b

Hình a	
 Hình c	 Hình d

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Các bài toán liên quan đến hai đường tròn tiếp xúc nhau

Cách giải: Áp dụng các kiến thức về vị trí tương đối của hai đường tròn liên quan đến trường hợp hai đường tròn tiếp xúc nhau $\widehat{ABH} = \widehat{ANH}$

Bài 1:

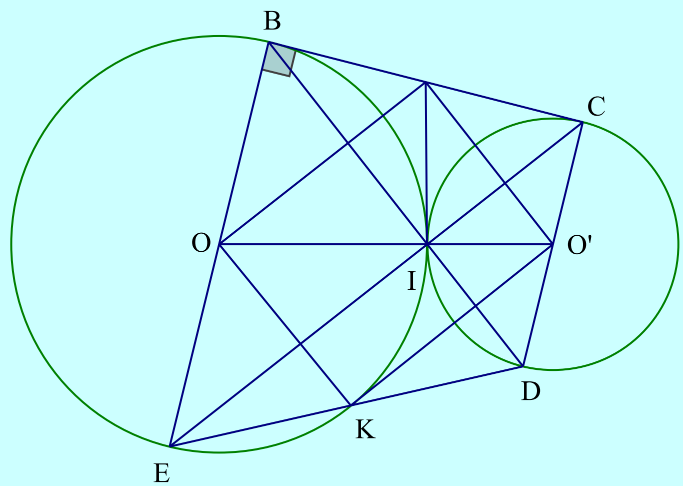
Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC với B thuộc (O), C thuộc (O'). Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I

a. Vẽ đường kính BOD và $CO'E$. Chứng minh các bộ ba điểm B, A, E và C, A, D thẳng hàng

b. Chứng minh $\Delta BAC, \Delta DAE$ có diện tích bằng nhau

c. Gọi K là trung điểm của DE. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\Delta OKO'$ tiếp xúc với BC

d. Cho $OA = 4,5cm; O'A = 2cm$. Tính AI, BC, CA



Lời giải

a. Xét ΔABC, có $BI = IC = AI \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $A \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$

Lại có: $\widehat{BAD} = \widehat{CAE} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

b. Ta có: $\Delta BAD \# \Delta EAC(gg) \Rightarrow AD.AE = AB.AC \Rightarrow S_{ABC} = S_{DAE}$

c. Có $\lozenge OIO'K$ là hình chữ nhật (hình bình hành có 1 góc vuông)

Vậy đường tròn ngoại tiếp $\Delta OKO'$ chính là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật, có đường kính là IK mà: $IK \perp BC \equiv I$

d. Ta có: $AI^2 = OA.O'A = 4,5.2 = 9 \Rightarrow AI = 3cm$

Xét $\Delta BCD(\hat{B} = 90^0) \Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BD^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36} \Rightarrow AB = 2,68cm$

Xét $\Delta ABC(\hat{A} = 90^0) \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow CA^2 = BC^2 - AB^2 = 36 - 7,2 \Rightarrow AC = 5,4cm$

Bài 2:

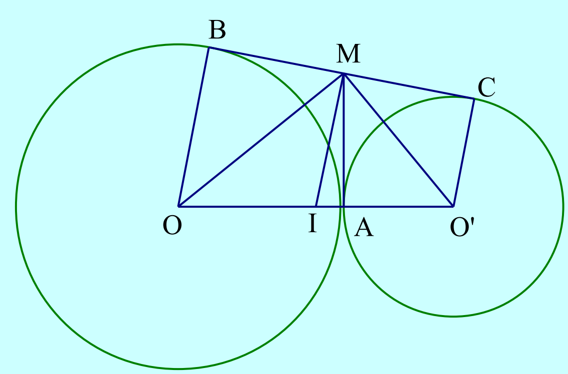
Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC với $B \in (O), C \in (O')$. Đường thẳng vuông góc với OO' kẻ từ A cắt BC ở M

a) Tính MA theo R và r

b) Tính diện tích tứ giác $BCO'O$ theo R và r

c) Tính diện tích ΔBAC theo R và r

d) Gọi I là trung điểm của OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(I;IM)$



Lời giải

a) Chứng minh được: $\widehat{O'MO} = 90^0$

Aps dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta tính được: $MA = \sqrt{Rr}$

b) Chứng minh $S_{BCOO'} = (R + r)\sqrt{Rr}$

c) Chứng minh được: $\Delta BAC \# \Delta OMO' \Rightarrow \frac{S_{BAC}}{S_{OMO'}} = \left(\frac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{S_{OMO'}.BC^2}{(OO')^2} = \frac{4Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$

d) Tứ giác $OBCO'$ là hình thang vuông tại B và C có IM là đường trung bình $\Rightarrow IM \perp BC = \{M\}$.

Bài 3:

Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính AOB, $AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn. Gọi M là giao điểm của BD và CE

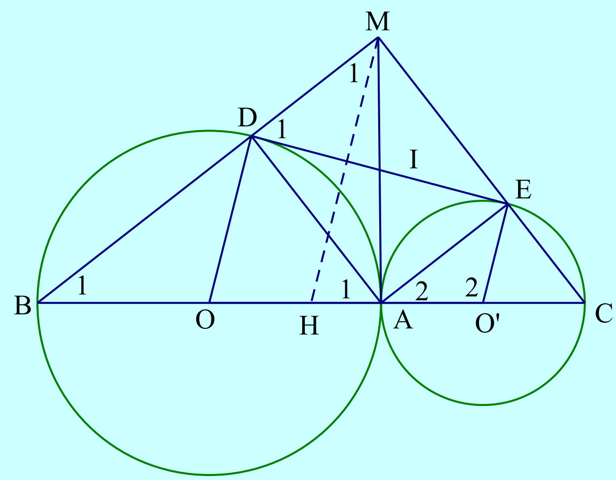
a. Tính $\widehat{DAE}$

b. $\Diamond ADME$ là hình gì ? Vì sao ?

c. Chứng minh rằng MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn

d. Chứng minh: $MD.MB = ME.MC$

e. Gọi H là trung điểm của BC, chứng minh rằng $MH \perp DE$



Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} \widehat{A_1} = \left(180^0 - \widehat{O_1}\right):2 \\ \widehat{A_2} = \left(180^0 - \widehat{O_2}\right):2 \end{cases} \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^0 \Rightarrow \widehat{DAE} = 90^0$

b) Có $\Diamond ADME$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông là hình chữ nhật)

c) Gọi I là giao điểm của DE và $AM \Rightarrow ID = IA$

$\Delta IAO = \Delta IDO(ccc) \Rightarrow \widehat{IAO} = \widehat{IDO} = 90^0 \Rightarrow MA \perp OA \equiv A \in (O)$

Chứng minh tương tự: $MA \perp O'A \equiv A \in (O')$

Vậy MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn

d. Ta có: $\Delta MAB(\widehat{A} = 90^0), AD \perp MB \Rightarrow MA^2 = MD.MB$

$\Delta MAC(\widehat{A} = 90^0), AE \perp MC \Rightarrow MA^2 = ME.MC \Rightarrow MB.MD = ME.MC$

e) $\widehat{M_1} + \widehat{D_1} = \widehat{B_1} + \widehat{BMA} = 90^0 \Rightarrow MH \perp DE$

Bài 4:

Cho ba điểm J, I, J' cùng nằm trên 1 đường thẳng theo thứ tự đó. Cho biết $IJ = 10cm$, $IJ' = 4CM$. Vẽ đường tròn (O) đường kính IJ và đường tròn (O') đường kính IJ'

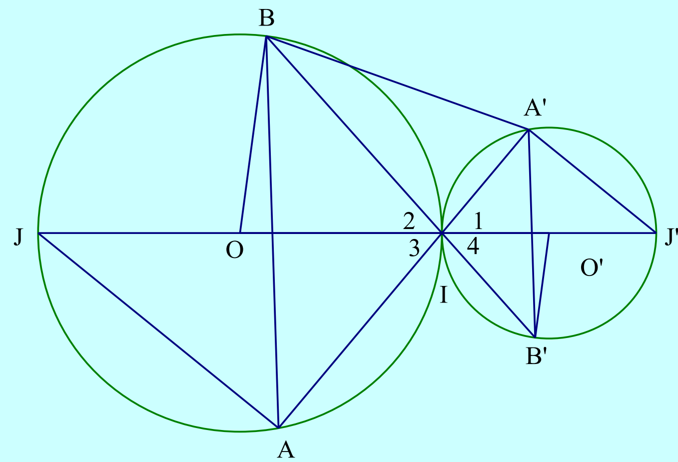
a. Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc ngoài ở I

b. Gọi A là 1 điểm trên đường tròn (O), tia AI cắt (O') ở A'. Chứng minh rằng $\Delta AIJ\# \Delta A'IJ'$

c. Qua điểm I kẻ 1 cát tuyến cắt (O) ở B (B và A thuộc hai nửa mặt phẳng bờ IJ), cắt đường tròn (O') ở B'. Chứng minh: $\Delta IAB\# \Delta IA'B'$

d. Chứng minh rằng: $\Delta OAB\# \Delta O; A'B'$

e. $\lozenge ABA'B'$ là hình gì vì sao ?



Lời giải

a) Ta có: $OO' = OI + O'I$. Vậy Hai đường tròn tiếp xúc ngoài tại I

b) Xét ΔAIJ và $\Delta A'IJ'$ có: $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^0 \\ \widehat{I_1} = \widehat{I_2} \end{cases} \Rightarrow \Delta AII\# \Delta A'IJ'$

c) $\Delta AII\# \Delta A'IJ'(gg) \Rightarrow \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{IJ}{JI'} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}\ (1)$

$\Delta OIB\# \Delta O'IB'(gg) \Rightarrow OB // O'B' \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_1'} \Rightarrow \dfrac{IB}{IB'} = \dfrac{OB}{O'B'} = \dfrac{5}{2}\ (2)$

Từ $(1)(2) \Rightarrow \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{IB}{IB'} = \dfrac{5}{2}; \widehat{AIB} = \widehat{A'IB} \Rightarrow \Delta IAB\# \Delta IA'B'(cgc)$

d)

$\Delta IAB\sim\Delta IA'B'(cgc)\Rightarrow\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{IA}{IA'}=\dfrac{5}{2};\dfrac{OA}{O'A'}=\dfrac{OB}{O'B'}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow\dfrac{OA}{O'A'}=\dfrac{OB}{O'B'}=\dfrac{AB}{A'B'}\Rightarrow\Delta AOB\sim\Delta A'O'B'$

e) $\Delta AOB\#\,\Delta A'O'B'\Rightarrow\widehat{OBA}=\widehat{O'B'A'};\widehat{OBI}=\widehat{O'B'I'}\Rightarrow\widehat{ABI}=\widehat{AB'I'}\Rightarrow AB//A'B'$

Tứ giác $ABA'B'$ có hai cạnh đối song song vậy là hình thang.

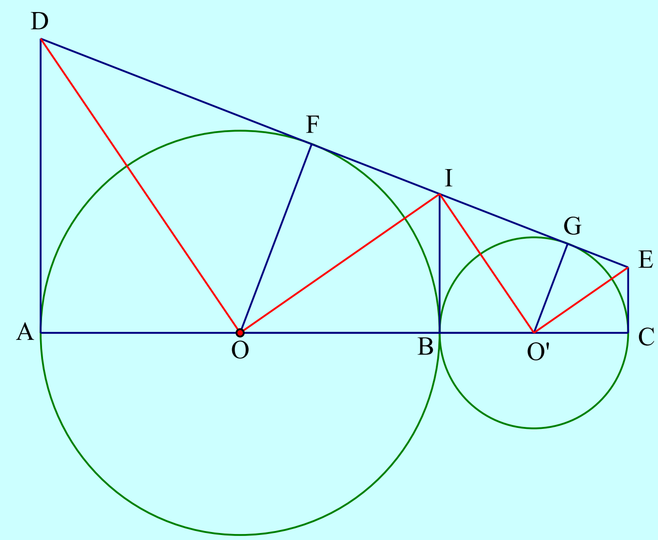
Bài 5:

Cho 3 điểm A,B,C theo thứ tự đó trên một đường thẳng và $AB=4BC$. Trên cùng một nửa măt phẳng bờ AC vẽ nửa đường tròn tâm O đường kính AB và nửa đường tròn tâm O' có đường kính BC. Tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn có tiếp điểm với đường tròn (O) ở F với nửa đường tròn (O') ở G, cắt các tiếp tuyến vẽ từ A và C của hai nửa đường tròn đó ở D và E. Tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn ở B cắt DE ở I

a. Chứng minh các tam giác OIO', OID, $O'IE$ là các tam giác vuông

b. Đặt $O'C=a$ (a là độ dài cho trước). Tính BI,EG và AD theo a

c. Tính diện tích tứ giác $ADEC$ theo a



Lời giải

a. Theo tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù ta có: $\Delta IOO'$ vuông tại I , ΔOID vuông tại $O,\Delta IO'E$ vuông tại O'

b. Ta có: $OB=2BC=4a$

$\Delta IOO'(\hat{I}=90^0)\Rightarrow IB\perp OO'\Rightarrow IB^2=OB.O'B=4a^2\Rightarrow IB=2a$

$\Delta IO'E(\widehat{O'}=90^0) \Rightarrow O'G^2 = EG.GI \Rightarrow GE = \dfrac{O'G^2}{GI} = \dfrac{a^2}{2a} = \dfrac{a}{2}\left(IG = IB = IF = 2a\right) \Rightarrow AD = 8a$

c) Ta có: $S_{ACED} = \dfrac{1}{2}(EC + AD).AC = \dfrac{1}{2}(8a + \dfrac{a}{2}).10a = 42,5a^2$

Dạng 2: Các bài toán liên quan đến hai đường tròn cắt nhau

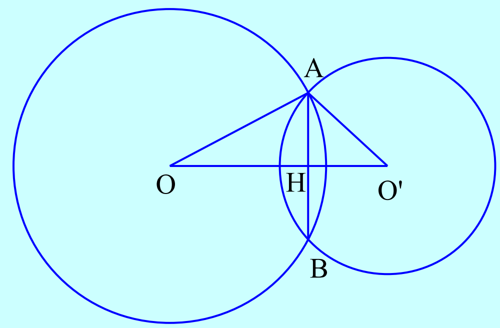
Cách giải : Áp dụng các kiến thức về vị trí tương đối của hai đường tròn liên quan đến trường hợp hai đường tròn cắt nhau

Bài 1:

Cho hai đường tròn $(O;12cm)$ và $(O';5cm)$, $OO'=13cm$

a) Chứng tỏ rằng hai đưuòng tròn (O) và (O') cắt nhua tại hai điểm phân biệt

b) Gọi A,B là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O'). Chứng minh rằng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O'), OA là tiếp tuyến của đường tròn (O). Tính độ dài AB



Lời giải

a) Ta có: $12-5<13<12+5\left(R-R'<d<R+R'\right)$ nên hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt

b) $OA^2+O'A^2=12^2+5^2=169;O'O^2=13^2=169$

$\Delta OAO'$ có: $OA^2+O'A^2=O'O^2$, theo định lý Pytago đảo tam giác $\Delta OAO'$ vuông tại A

Có $OA\perp O'A$ do đó OA là tiếp tuyến của đường tròn (O') và $O'A$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$O'O$ là đường trung trực của đoạn AB

Gọi H là giao điểm của $O'O$ và AB nên $AH.O'O=OA.O'A\Rightarrow AH=\dfrac{OA.O'A}{O'O}=\dfrac{12.5}{13}=\dfrac{60}{13}(cm)$

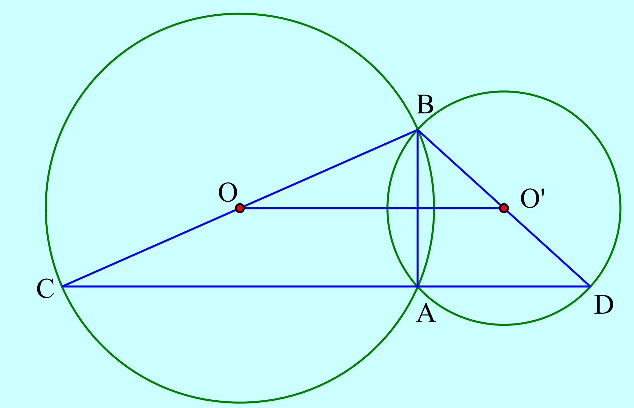
Vậy $AB=2AH=\dfrac{120}{13}(cm)$.

Bài 2:

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B (O và O' thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Kẻ các đường kính BOC và $BO'D$

a. Chứng minh rằng ba điểm C, A, D thẳng hàng

b. Biết $OO' = 5cm, OB = 4cm, O'B = 3cm$. Tính diện tích tam giác BCD



Lời giải

a. Cách 1: $\Delta BAC(AO = \frac{1}{2}BC) \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

Cách 2: ΔBCD có OO' là đường trung bình $\Rightarrow OO'//CD$ (1)

ΔABC có OI là đường trung bình $\Rightarrow OO'//CA$ (2)

Từ $(1)(2) \Rightarrow C, A, D$ thẳng hàng.

b) Ta có: $\Delta OBO'$ vuông tại $B \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại $B \Rightarrow S_{BCD} = \frac{1}{2}.BC.BD = \frac{1}{2}.8.6 = 24(cm^2)$

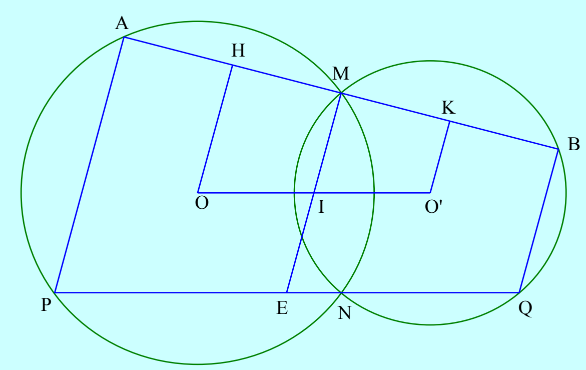
Bài 3:

Cho hai đường tròn (O) và (O') giao nhau tại M và N. Gọi I là trung điểm của OO'. Đường thẳng kẻ qua M vuông góc MI cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt ở A và B. Hai đường thẳng vuông góc với AB tại A và B cắt đường tròn (O) ở P, (O') ở Q

a. Chứng minh rằng M là trung điểm của AB

b. MI cắt PQ ở E, chứng minh: $EP = EQ$

c. Chứng minh: $IH = IK$



Lời giải

a. Kẻ: $OH \perp AM; O'K \perp MB \Rightarrow OH // O'K$

Tứ giác $HKOO'$ là hình thang, $MI \perp AB \Rightarrow \begin{cases} MI // OH \\ IO // IO' \end{cases} \Rightarrow MH = MK$

Ta lại có: $OH \perp AM \Rightarrow HA = HM = MK = KB \Rightarrow$ đpcm

b. Ta có ME là đường trung bình của hình thang $ABQP \Rightarrow EP = EQ$

c. Xét ΔHIK, có IM là đường trung tuyến, đường cao $\Rightarrow \Delta HIK$ cân tại I (đpcm).

Bài 4:

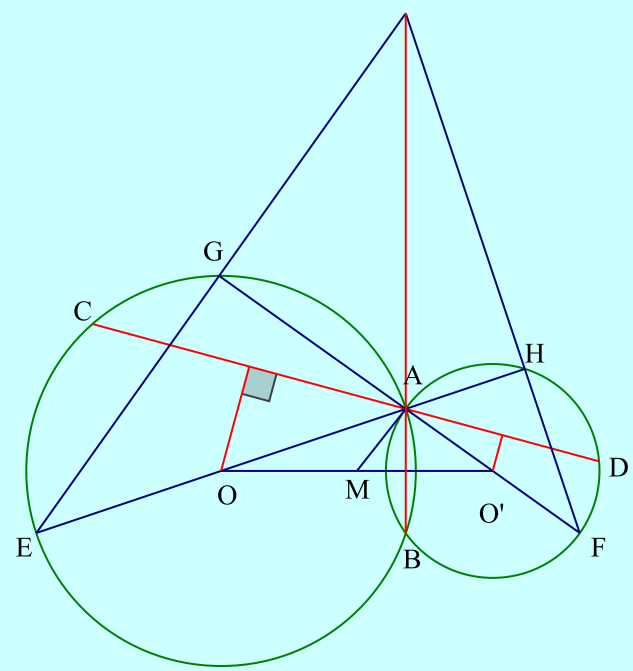
Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi M là trung điểm của OO'. Đường thẳng qua A cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt ở C và D

a. Khi $CD \perp AB$. Chứng minh: $AC = AD$

b. Khi CD đi qua A và không vuông góc với MA

- Vẽ đường kính AE của (O), AE cắt (O') ở H. Vẽ đường kính AF của (O'), AF cắt (O) ở G. Chứng minh AB, EG, FH đồng quy

- Tìm vị trí của CD để đoạn CD có độ dài lớn nhất



Lời giải

Vẽ $OP \perp AC; O'Q \perp AD \Rightarrow \lozenge OPO'Q$ là hình thang vuông tại P và Q

a. Kẻ $OP, O'Q \perp CD \Rightarrow MA \perp CD$ và M là trung điểm của OO'

b. Xét ΔEAF có AB, FG, EH là ba đường cao nên đồng quy tại 1 điểm .

+) Ta có: $CD = 2PQ$

Hình thang $OPQO'$ vuông tại P và Q nên $OO' > PQ$

Vậy PQ lớn nhất khi $PQ // OO'$ hay tứ giác $OPQO'$ là hình chữ nhật.

Bài 5:

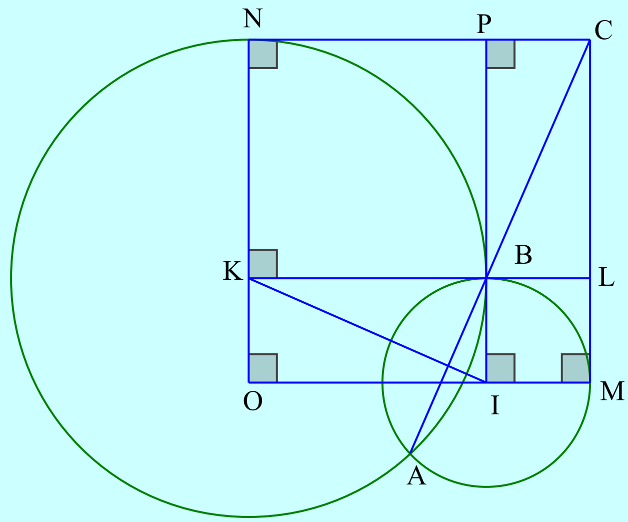
Cho góc vuông xOy. Lấy các điểm I và K lần lượt trên các tia Ox, Oy. Đường tròn $(I;OK)$ cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M), đường tròn $(K;OI)$ cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N)

a. Chứng minh (I) và (K) luôn cắt nhau

b. Tiếp tuyến tại M của (I), tiếp tuyến tại N của (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác $OMCN$ là hình vuông

c. Gọi A, B là các giao điểm của (I) và (K) trong đó B ở miền trong góc xOy. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng

d. Giả sử I và K theo thứ tự di động trên các tia Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải

a) $|OI - OK| < IK < OI + OK \Rightarrow$ Ta có (I) và (K) luôn cắt nhau

b. Do $OI = NK; OK = IM \Rightarrow OM = ON$

Mặt khác $OMCN$ là hình chữ nhật $OMCN$ là hình vuông

c. Gọi L là giao điểm của KB và MC; P là giao điểm của IB và $NC \Rightarrow OBKI$ là hình chữ nhật và $BLMI$ là hình vuông $\Rightarrow \Delta BLC = \Delta KIO \Rightarrow \widehat{LBC} = \widehat{OKI} = \widehat{BIK}$

Mà: $\widehat{BIK} + \widehat{IBA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{LBC} + \widehat{IBA} = 90^0$, có: $\widehat{LBC} + \widehat{LBI} + \widehat{IBA} = 180^0$

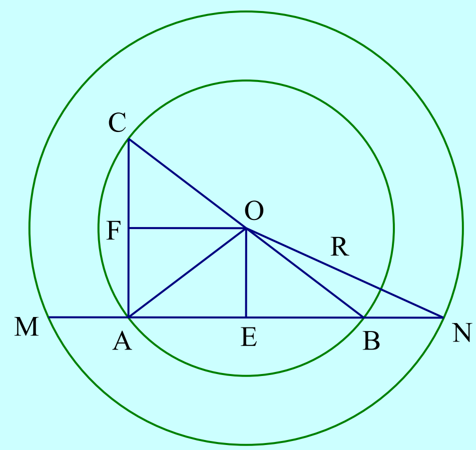
d) Có $OMCN$ là hình vuông cạnh a cố định $\Rightarrow C$ cố định và AB luôn đi qua C

Dạng 3: Các bài toán về hai đường tròn không cắt nhau

Cách giải: Áp dụng các kiến thức về vị trí tương đối của hai đường tròn liên quan đến trường hợp hai đường tròn không giao nhau

Bài 1:

Cho hai đường tròn đồng tâm O, có bán kính lần lượt là R và r. Dây MN của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại A và B. Gọi BC là đường kính của đường tròn nhỏ. Tính giá trị của biểu thức $\left(AC^2+AM^2+AN^2\right)$ theo R và r



Lời giải

Kẻ $OE\perp AB; OF\perp AC$. Đặt $AC=a, AM=b, AN=c$

Ta có: $r^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{c-b}{2}\right)^2; R^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{c+b}{2}\right)^2$

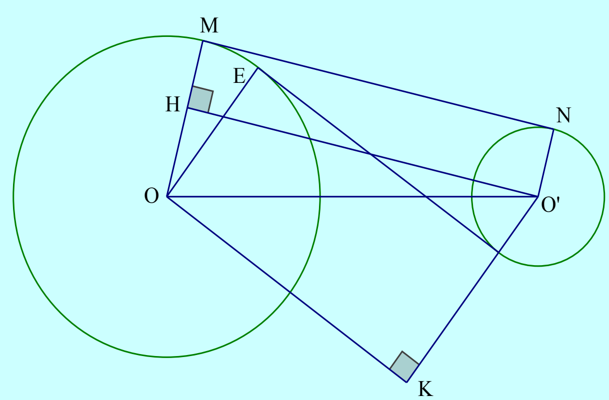
Chứng minh được: $a^2+b^2+c^2=2\left(r^2+R^2\right)$

Bài 2:

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ ở ngoài nhau. Gọi MN là tiếp tuyến chung ngoài, EF Là tiếp tuyến chung trong (M và E thuộc (O), N và F thuộc $(O;)$). Tính bán kính của đường tròn (O) và (O') trong các trường hợp sau:

a) $OO'=10cm, MN=8cm, EF=6cm$

b) $OO'=13cm, MN=12cm, EF=5cm$



Lời giải

a) Kẻ $O'H \perp OM; OK \perp O'F$

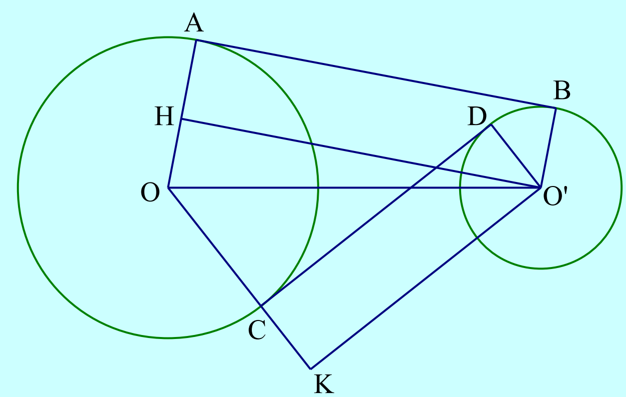
Ta có: $OH = R - r; O'K = R + r$,

mà $OH^2 = O'O^2 - MN^2 = 36; O'K^2 = O'O^2 - EF^2 = 64 \Rightarrow OH = 6; O'K = 8 \Rightarrow R = 7cm; r = 1cm$

b) Tương tự tính được: $R = \dfrac{17}{2}cn, r = \dfrac{7}{2}cm$

Bài 3:

Cho hai đường tròn $(O;6cm)$ và $(O';2cm)$ nằm ngoài nhau. Gọi AB là tiếp tuyến chung ngoài, CD là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn $(A,C \in (O); B,D \in (O'))$. Biết $AB = 2CD$, tính độ dài đoạn nối tâm OO'



Lời giải

a) Kẻ $O'H \perp OA; O'K \perp OC$

Tính được: $OH = 4cm, OK = 8cm$,

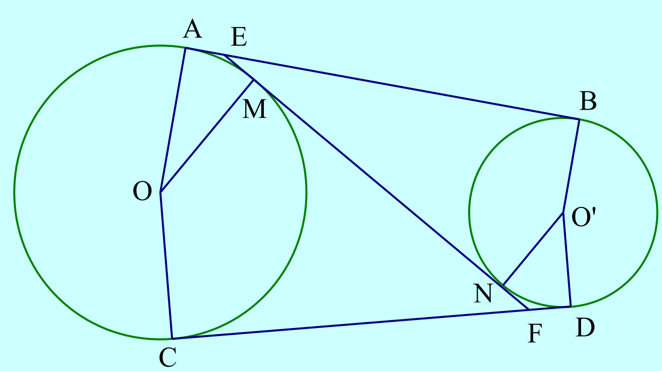
Đặt $CD = x \Rightarrow AB = 2x; O'O^2 = 64 + x^2$ và $O'O^2 = 16 + 4x^2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow OO' = \sqrt{80}cm$.

Bài 4:

Cho hai đường tròn (O) và (O') nằm ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD $(A,C \in (O); B,D \in (O'))$. Tiếp tuyến chung trong MN cắt AB,CD theo thứ tự tại E,F, $(M \in (O), N \in (O'))$. Chứng minh:

a) $AB = EF$

b) $EM = FN$



Lời giải

a) Ta có: $AB = AE + BE = EM + EN$ và $CD = FD + FC = NF + NE$

$\Rightarrow AB + CD = 2EF \Rightarrow AB = EF$

b) Ta có: $EM = AB - EB = EF - EN = NF$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại A,B. Khẳng định nào sau đây đúng

A) AB là đường trung trực của OO'

B) OO' là đường trung trực của dây AB

C) $\lozenge OAO'B$ là hình thoi

D) Cả A, B, C đều đúng

Chọn đáp án B

Giải thích:

Ta có: $OA = OB = R; O'A = O'B = R'$

Do đó O,O' thuộc đường trung trực của AD

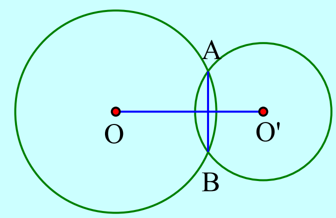
Vậy OO' là đường trung trực của dây AB.

*) Chú ý: Ta có $OA = OB = R; O'A = O'B = R'$

Mà R,R' chưa chắc đã bằng nhau nên

$OA \neq O'A; OB \neq O'B$

Vậy AB không phải đường trung trực của OO' nên $\lozenge OAO'B$ không phải hình thoi.



Câu 2: Cho hai đường tròn $(O;13cm)$ và $(O';15cm)$ cắt nhau tại A,B sao cho $AB = 24(cm)$.

Tính độ dài $O'O$

A) $11(cm)$

B) $13(cm)$

C) $14(cm)$

D) $15(cm)$

Chọn đáp án C

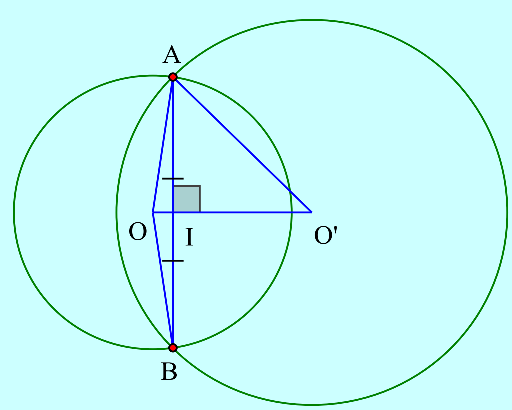
Giải thích:

Gọi $I = OO' \cap AB \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AIO} = \widehat{AIO'} = 90^0 \\ IA = IB = \dfrac{1}{2}AB = 12(cm) \end{cases}$

Từ ΔAIO vuông tại I, ta có:

$OI = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5(cm)$

Từ $\Delta AIO'$ vuông tại I, ta có:



$O'I=\sqrt{15^2-12^2}=\sqrt{81}=9(cm)$

Do đó $OO'=5+9=14(cm)$.

Câu 3: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A,B. Gọi I là trung điểm của OO'. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA cắt (O) tại C và cắt (O') tại D. So sánh AC và AD

A) $AC=AD$	B) $AC<AD$
C) $AC>AD$	D) Không so sánh được

Chọn đáp án A

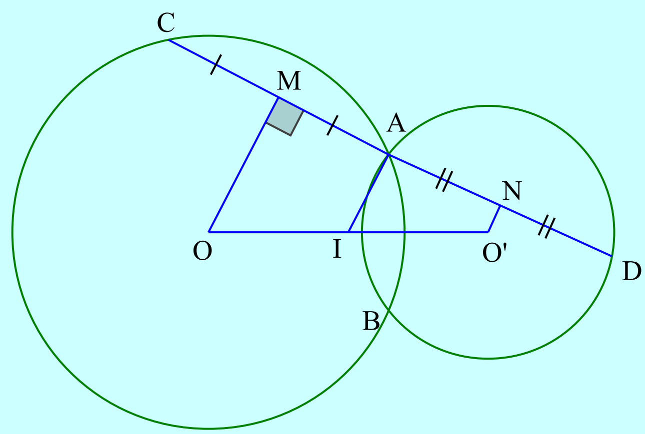
Giải thích:

Vẽ $OM\perp AC=M\Rightarrow MA=MC=\frac{1}{2}AC(1)$

$O'N\perp AD=N\Rightarrow NA=ND=\frac{1}{2}AD\ (2)$

Hình thang $OO'NM$ có: $IO=IO'$ và $IA//OM//O'N\Rightarrow MA=NA$

Từ $(1)(2)\Rightarrow AC=AD$



Câu 4: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ hai bán kính OM và $O'N$ song song với nhau thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ OO'. Tam giác MAN là tam giác gì?

A) Tam giác cân	B) Tam giác vuông
C) Tam giác đều	D) Tam giác vuông cân

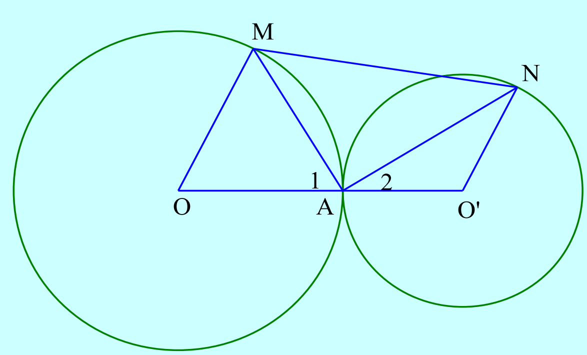
Chọn đáp án B

Giải thích:

Ta có ΔOAM cân tại $O\Rightarrow \widehat{AOM}=180^0-2\widehat{A_1}\ (1)$

$\Delta O'AN$ cân tại $O'\Rightarrow \widehat{AO'N}=180^0-2\widehat{A_2}\ (2)$

Cộng $(1)(2)$ theo vế, ta được:



$\widehat{AOM} + \widehat{AO'N} = 360^0 - 2\left(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}\right)$

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \dfrac{360^0 - \left(\widehat{AOM} + \widehat{AO'N}\right)}{2}$ (3)

Mà $\widehat{AOM} + \widehat{AO'N} = 180^0$

Từ $(3) \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \dfrac{360^0 - 180^0}{2} = 90^0$

Ta có: $\widehat{MAN} = 180^0 - \left(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}\right) = 90^0$

Vậy ΔMAN vuông tại A

Câu 5: Cho hai đường tròn $(O;8cm)$ và $(O';5cm)$ tiếp xúc ngoài tại M. Gọi AB là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $\left(A \in (O); B \in (O')\right)$. Tính độ dài AB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

A) $8,75(cm)$

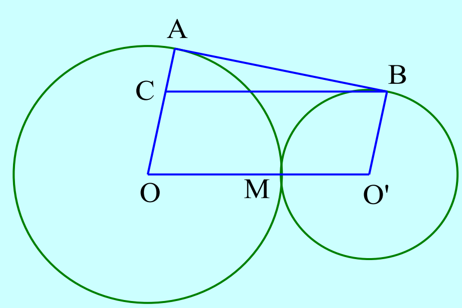
B) $10,85(cm)$

C) $12,65(cm)$

D) $14,08(cm)$

Chọn đáp án C

Giải thích:



Vẽ $BC // OO' (C \in OA)$ (1)

Ta có: $OA // O'B (\perp AB)$ (2)

Từ $(1)(2) \Rightarrow OCBO'$ là hình bình hành

Do đó $OC = O'B = 5(cm); BC = OO' = 13(cm)$

Có: $AC = OA - OC = 8 - 5 = 3(cm)$

ΔABC vuông tại $A \Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$

$= \sqrt{13^2 - 3^2} \approx 12,65(cm)$

Câu 6: Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vẽ các đường tròn $(O;OA)$ và $(B;BA)$. Kẻ một đoạn thẳng qua A cắt hai đường tròn (O) và (B) theo thứ tự tại C và D. Khẳng định nào sau đây đúng

A) Hai đường tròn (O) và (B) tiếp xúc tại A

B) $AB = CD$

C) $OC // BD$

D) Cả A, B, C đều đúng

Chọn đáp án D

Giải thích:

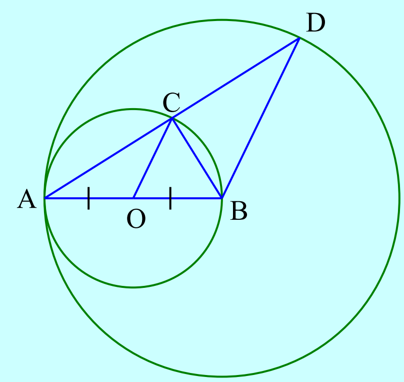
A) Ta có A, O, B thẳng hàng (1)

$OB = AB - OA$ (2)

Từ $(1)(2) \Rightarrow (O; OA)$ và $(B; BA)$ tiếp xúc tại A

B) ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có cạnh AB là đường kính nên tam giác này vuông tại $C \Rightarrow BC \perp AD \Rightarrow AC = CD$

OC là đường trung bình của $\Delta ABD \Rightarrow OC // BD$



Câu 7: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng đi qua A (không đi qua hai tâm) cắt (O) tại C và cắt (O') tại D. Vẽ các đường kính AOE và $AO'F$. Khẳng định nào sau đây sai

A) Ba điểm E, B, F thẳng hàng

B) $EC // FD$

C) $OO' = \frac{1}{3}EF$

D) A, B đúng, C sai

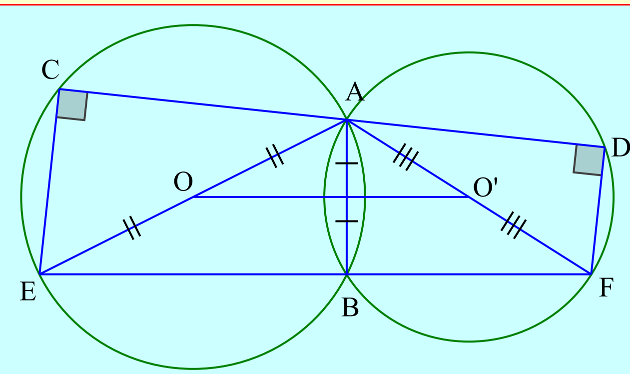
Chọn đáp án C

Giải thích:

A) ΔABE nội tiếp đường tròn (O) có cạnh AE là đường kính nên $\widehat{ABE} = 90^0$

Tương tự: $\widehat{ABF} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{EBF} = \widehat{ABE} + \widehat{ABF} = 180^0$



Vậy E,B,F thẳng hàng.

B) Tương tự ta có:

$\widehat{ACE} = \widehat{ADF} = 90^0 \Rightarrow EC \perp CD; FD \perp CD$

$\Rightarrow EC//FD(\perp CD)$

C) Ta có: $OA = OE; O'A = O'F$

$\Rightarrow OO'$ là đường trung bình của

$\Delta AEF \Rightarrow OO' = \frac{1}{2}EF$

Câu 8: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau tại A và B sao cho tâm đường tròn này nằm trên đường tròn kia. Tính theo R diện tích tứ giác $OAO'B$

A) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

B) $\frac{R^2\sqrt{3}}{3}$

C) $R^2\sqrt{5}$

D) $\frac{R^2\sqrt{5}}{2}$

Chọn đáp án A

Giải thích:

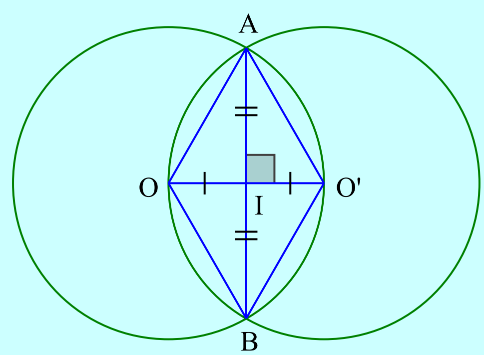
Ta có: $OA = OB = O'A = O'B = R$

$\lozenge OAO'B$ là hình thoi $\Rightarrow S_{OAO'B} = \frac{OO'.AB}{2}$

$\Delta OAO'$ là tam giác đều có AI là đường cao

$AI = \frac{OA.\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}; AB = 2AI = R\sqrt{3}$

Do đó: $S_{OAO'B} = \frac{R.R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$.



Câu 9: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ tiếp xúc ngoài tại M. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB và CD với $A,C \in (O)$ và $B,D \in (O')$. Khẳng định nào sau đây sai

A) $\Delta IBD \# \Delta IAC$

B) $\Delta BO'D \# \Delta AOC$

C) $BD//AC$

D) A,C đúng, B sai

Chọn đáp án D

Giải thích:

A) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $IB = ID; IA = IC$

Hai tam giác IBD và IAC cùng cân tại I

Hai tam giác này có góc ở đỉnh chung là góc

$\widehat{AIC} \Rightarrow \Delta IBD \# \Delta IAC$

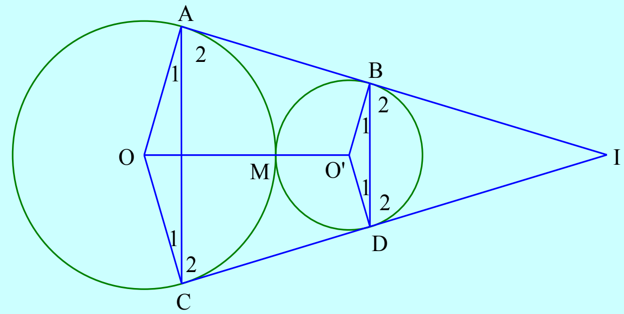
B) Do $\Delta IBD \# \Delta IAC \Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{A_2}$

$\Rightarrow \underbrace{90^0 - \widehat{B_2}}_{\widehat{B_1}} = \underbrace{90^0 - \widehat{A_2}}_{\widehat{A_1}} \left(\widehat{B} = \widehat{A} = 90^0\right)$

Hai tam giác cân $BO'D$ và AOC có một góc ở đáy bằng nhau ($\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$) nên

$\Delta BO'D \# \Delta AOC$

C) Ta có: $\widehat{B_2} = \widehat{A_2}$, hai góc này ở vị trí đồng vị và bằng nhau nên $BD // AC$



Câu 10: Cho hai đường tròn $(O;5cm)$ và $(O';3cm)$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài $BC\left(B \in (O); C \in (O')\right)$. Vẽ đường tròn $(I;r)$ tiếp xúc với BC tại M và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O') tại N và P. Tính độ dài r (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai). Khẳng định nào sau đây đúng

A) $0,75(cm)$

B) $0,95(cm)$

C) $1,24(cm)$

D) $1,83(cm)$

Chọn đáp án B

Giải thích:

Qua I vẽ $EF//BC$

$$\Rightarrow BC = EF = \sqrt{(R+R')^2-(R-R')^2} = 2\sqrt{RR'}\ (1)$$

$$IE = \sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}\ \ (2)$$

$$IF = \sqrt{(R'+r)^2-(R'-r)^2} = 2\sqrt{R'r}\ \ (3)$$

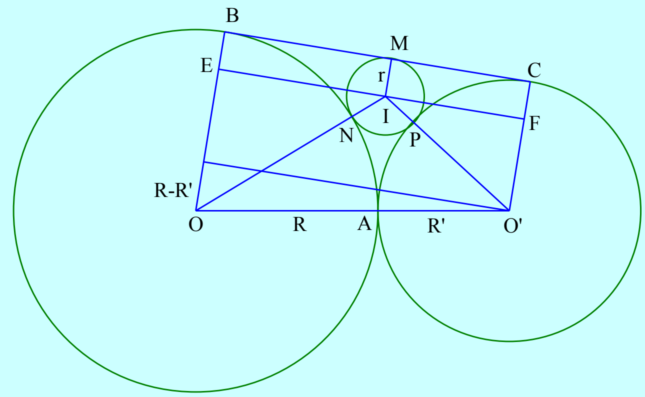
Cộng vế theo vế của $(1)(2)(3)$ ta được:

$$IE + IF = EF \Leftrightarrow 2\sqrt{Rr} + 2\sqrt{R'r} = 2\sqrt{RR'}$$

$$\Rightarrow \sqrt{r}\left(\sqrt{R}+\sqrt{R'}\right) = \sqrt{RR'} \Rightarrow r\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2 = 5.3$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{15}{8+2\sqrt{15}} = \frac{15}{15,75} = 0,95(cm)$$

Vậy $r = 0,95(cm)$.



BÀI TẬP VỀ NHÀ

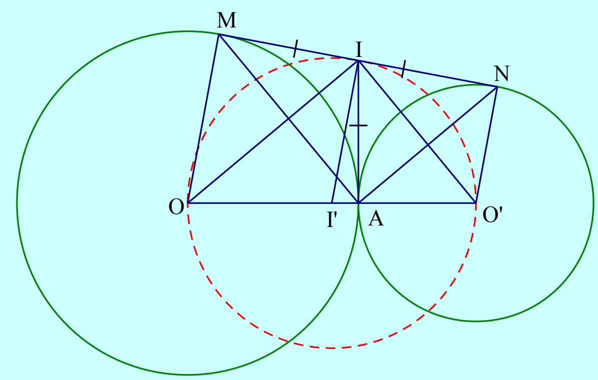
Bài 1:

Cho hai đường tròn tâm O_1 và tâm O_2 tiếp xúc ngoài tại A. Tiếp tuyến chung ngoài có tiếp điểm với hai đường tròn lần lượt ở M và N. Tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tại A cắt MN tại I

a) Chứng minh tam giác MAN và OIO' là các tam giác vuông

b) Xác định vị trí tường đối của đường thẳng MN với đường tròn đường kính OO'

c) Tính $S_{OIO'}$ biết bán kính của hai đường tròn tâm O và O' lần lượt bằng $48cm$ và $27cm$.



Lời giải

a) Ta có: $IM = IA$ và $IN = IA$ nên $IM = IA = IN$

Tam giác MAN là tam giác vuông ở đỉnh A

Do đó OI và OI' lần lượt là phân giác của hai góc kề bù $\widehat{MIA}$ và $\widehat{AIN}$ nên $OI \perp IO' = I$

Tam giác IOO' vuông tại đỉnh I

b) Gọi I' là trung điểm của OO' thì $II' = IO' = I'O'$, nên II' là bán kính của đường tròn qua ba điểm O, I, O'

Mặt khác tứ giác $OMNO'$ là hình thang, II' là đường trung bình của hình thang này, do đó $II'//OM; OM \perp MN \Rightarrow II' \perp MN = I$

Vậy đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn qua ba điểm O, I, O' tại điểm I

c) Tam giác OIO' vuông tại I ta có đường cao IA, nên ta có:

$IA^2 = OA.O'A = 48.27 \Longrightarrow IA = 36(cm)$

Diện tích tam giác OIO' là: $S_{OIO'} = \dfrac{OO'.IA}{2} = \dfrac{75.36}{2} = 1350(cm^2)$.

Bài 2:

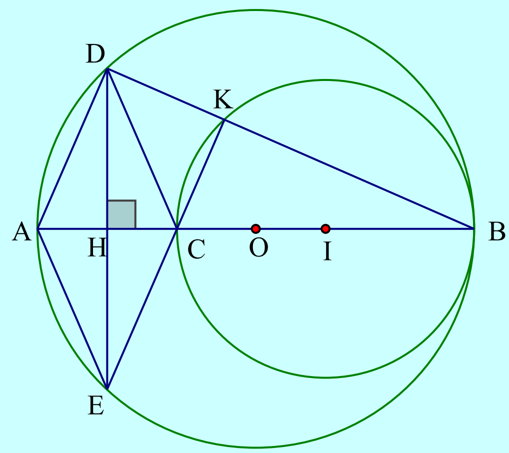
Cho đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn tâm (I) có đường kính CB

a) Xét vị trí tương đối của (I) và (O)

b) Kẻ dây DE của (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giác $ADCE$ là hình gì?

c) Gọi K là giao điểm của đoạn thẳng DB và (I). Chứng minh ba điểm E,C,K thẳng hàng

d) Chứng minh HK là tiếp tuyến của (I)



Lời giải

a) Ta có (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau

b) Tứ giác $ADCE$ là hình thoi

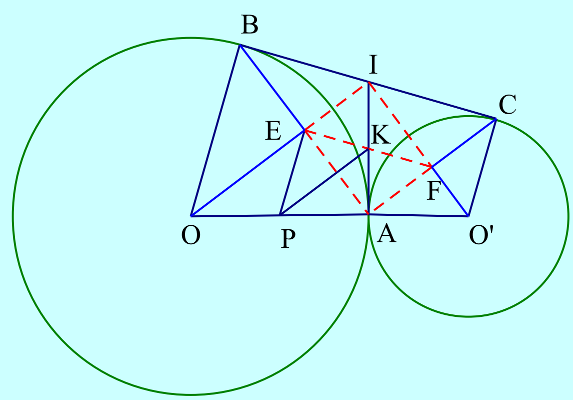
c) Có: $CK \perp AB, AD \perp DB \Rightarrow CK // AD$, mà $CE // AD \Rightarrow B,K,D$ thẳng hàng

d) Ta có: $\widehat{HKD} = \widehat{HDK}; \widehat{IKB} = \widehat{IBK} \Rightarrow \widehat{HKD} + \widehat{IKB} = \widehat{HDK} + \widehat{IBK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{IKH} = 90^0$ đpcm

Bài 3:

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc (O) và (O') lần lượt ở B và C. Tiếp tuyến chung trong cắt BC ở I. Gọi E,F thứ tự là giao điểm của IO với AB của IO' với AC

a) Chứng minh bốn điểm A,E,I,F cùng thuộc một đường tròn, xác định tâm K của đường tròn này



b) Chứng minh: $IE.IO + IF.I'O = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right)$ c) Gọi P là trung điểm của OA. Chứng minh PE tiếp xúc với (K) d) Cho OO' cố định và có độ dài $2a$. Tìm điều kiện của R và R' để diện tích tam giác ABC lớn nhất.	

Lời giải

a) Chứng minh được tứ giác $AEIF$ là hình chữ nhật và K là trung điểm của AI

b) Có: $IE.IO = IB^2 = \frac{BC^2}{4}; IF.IO' = IC^2 = \frac{BC^2}{4} \Rightarrow 2\left(IE.IO + IF.IO'\right) = AB^2 + AC^2$

c) PK là đường trung bình của ΔAOI và trung trực của EA

Ta có: $\Delta PEK = \Delta PAK \Rightarrow \widehat{PEK} = \widehat{PAK} \Rightarrow \widehat{PEK} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

d) $\Delta ABC \# \Delta IOO' \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{IOO'}} = \left(\frac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{S_{IOO'}.BC^2}{O'O^2}$

mà $BC = 2IA; O'O = 2a; S_{OIO'} = \frac{1}{2}.2a.IA = a.IA \Rightarrow S_{ABC} = \frac{IA^2}{a}$

$IA^2 = R.R' \le \left(\frac{R+R'}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow IA$ lớn nhất bằng a khi $R = R'$.

Bài 4:

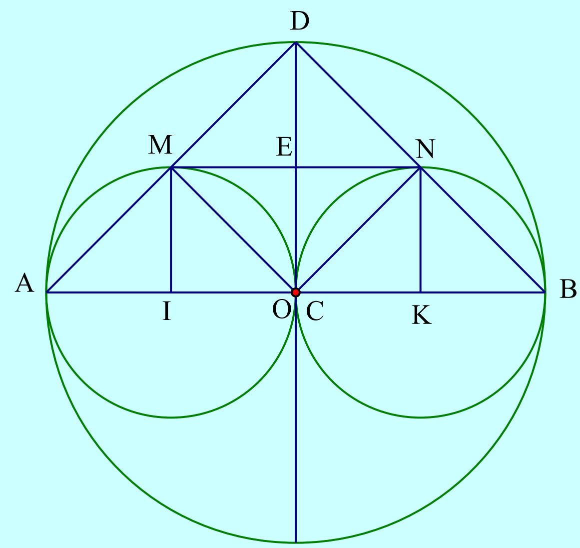
Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, C là một điểm bất kỳ nằm giữa A và B. Vẽ đường tròn tâm I, đường kính CA; đường tròn tâm (K), đường kính CB

a) Hai đường tròn (I) và (K) có vị trí như thế nào đối với nhau

b) Đường vuông góc với AB tại C cắt đường tròn (O) ở D và E. DA cắt đường tròn (I) ở M, DB cắt đường tròn (K) ở N

c) Xác định vị trí của C trên đường kính AB sao cho MN có độ dài lớn nhất

d) Xác định vị trí của điểm C trên đường kính AB sao cho tứ giác $DMCN$ có diện tích lớn nhất.



Lời giải

a) Đường tròn (I) và đường tròn (K) tiếp xúc ngoài nhau tại C (vì $IK = IC + CK$)

b) Vì AC là đường kính của (I) nên ΔAMC vuông tại M

Tương tự ta có ΔBNC vuông tại N; ΔDAB vuông tại D

Suy ra tứ giác $DMCN$ là hình chữ nhật

Gọi E là giao điểm của MN và DC. Ta có $\Delta EMC, \Delta IMC$ cân

$\Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{ECM}; \widehat{IMC} = \widehat{ICM}$

Mà $\widehat{ICM} + \widehat{ECM} = \widehat{ACD} = 90^0$, do đó $\widehat{IMN} = 90^0 \Rightarrow MN \perp IM$

Tương tự ta cũng có $MN \perp NK \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

c) Vì $DMCN$ là hình chữ nhật nên $MN = CD \Rightarrow MN$ có độ dài lớn nhất khi CD có độ dài lớn nhất

Ta có $CD \le OD = R$ (không đổi), dấu "=" xảy ra khi $C \equiv O$

Vậy khi $C \equiv O$ thì MN có độ dài lớn nhất là R

d) $S_{DMCN} = DM.CN$, ΔCAD có $\widehat{ACD} = 90^0; CM \perp AD; DC^2 = DM.DA \Rightarrow DM = \dfrac{DC^2}{DA}$

ΔDCB có $DN = \dfrac{DC^2}{DB}$. Do đó $S_{DMCN} = \dfrac{DC^2}{DA}.\dfrac{DC^2}{DB} = \dfrac{DC^4}{DA.DB}$

Lại có $DA.DB = DC.AB\left(= 2S_{ADB}\right) \Rightarrow S_{DMCN} = \dfrac{DC^4}{DC.DB} = \dfrac{DC^3}{2R} \le \dfrac{R^3}{2R} = \dfrac{R^2}{2}\left(CD \le R\right)$

Vậy diện tích tứ giác $DMCN$ lớn nhất khi điểm C trùng với điểm O.