MỤC LỤC

PHẦN I - ĐẠI SỐ 1
CHUYÊN ĐỀ 1 - BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI 4
I - KIẾN THỨC CẦN NHỚ 4
1. Định nghĩa căn bậc hai: 4
2. Các công thức vận dụng 4
3. Định nghĩa căn bậc ba 4
4. Tính chất của căn bậc ba 4
II – CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN 5
Dạng 1: Tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa 5
Dạng 2: Căn bậc hai số học 6
Dạng 3: Tính giá trị của biểu thức 6
Dạng 4: Phân tích đa thức thành nhân tử 7
Dạng 5: Tìm x. 8
Dạng 6: So sánh 9
Dạng 7 : Rút gọn biểu thức và các bài tập liên quan đến rút gọn 10
III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN 20
CHUYÊN ĐỀ 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT 30
I - KIẾN THỨC CẦN NHỚ: 30
1. Hàm số bậc nhất 30
1.1- Khái niệm hàm số bậc nhất 30
1.2 - Tính chất 30
1.3 - Đồ thị của hàm số y = ax + b (a $\neq$ 0) 30
1.4 - Cách vẽ đồ thị hàm số y = ax + b (a $\neq$ 0) 30
1.5 - Vị trí t- ơng đối của hai đ- ờng thẳng 30
1.6- Hệ số góc của đ- ờng thẳng y = ax + b (a $\neq$ 0) 30
II. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN 30
Dạng 1: Xác định hàm số đã cho là hàm đồng biến – nghịch biến 31
Dạng 2: Vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất và các bài toán liên quan 32
Dạng 3: Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau, song song, trùng nhau 34
Dạng toán 4: Xác định hàm số bậc nhất 35
Dạng 5: Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng lớn nhất, nhỏ nhất. 37
Dạng 6: Xác định tham số m để đồ thị hàm số y=f(x,m)thỏa mãn một điều kiện cho trước. 38
Dạng 7:Chứng minh 3 điểm thẳng hàng 39
Dạng 8: Tìm m để 3 đường thẳng đồng quy (cùng đi qua một điểm) 40
III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN: 42

CHUYÊN ĐỀ 3 - HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ 47
I - KIẾN THỨC CẦN NHỚ: 47
1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế 47
2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp công đại số 47
II –Các dạng bài tập cơ bản 47
Dạng 1: Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế 47
Dạng 2: Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số 48
Dạng 3: Giải hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ 48
Dạng 4: Xác định giá trị tham số m để hệ phương trình vô nghiệm 49
Dạng 5:Xác định giá trị tham số m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất, tìm nghiệm duy nhất đó 49
Dạng 6:Tìm nghiệm x, y có chứa tham số m sau đó tìm GTLN hoặc GTNN của biểu thức cho trước 50
Dạng 7: Hệ phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối 51
III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN 57
CHUYÊN ĐỀ 4: HÀM SỐ $y = ax^2, (a \neq 0)$ 64
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN 64
I)Hàm số $y = ax^2, (a \neq 0)$ 64
II)Phương trình bậc hai một ẩn 64
1.Định nghĩa: Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng 64
2.Công thức nghiệm của phương trình bậc hai 64
3.C«ng thøc nghiÖm thu gän : 64
4. HÖ thøc Vi-et vµ øng dông: 64
III) Các dạng bài tập cơ bản 65
III - BÀI CÓ LỜI GIẢI 74
IV. Bài tập áp dụng 89
CHUYÊN ĐỀ 5: GIẢI BÀI TOÁN 93
BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG - TRÌNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH 93
I - KIẾN THỨC CẦN NHỚ: 93
1. Phương pháp chung: 93
2. Một số dạng toán thường gặp 93
II - BÀI TẬP MINH HỌA 93
Dạng 1: Bài toán Hình học 93
Dạng 2: Bài toán Tìm số 95
Dạng 3: Bài toán dân số, phần trăm 96
Dạng 4: Bài toán Năng suất 97
Dạng 5: Bài toán Chung - Riêng 99
Dạng 6: Bài toán Chuyển động 102

Dạng 7: Bài toán thực tế vận dụng 109
III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN 112
CHUYÊN ĐỀ 6 121
BẤT ĐẲNG THỨC - TÌM GIÁ TRỊ MIN - MAX CỦA BIỂU THỨC 121
I - KIẾN THỨC CẦN NHỚ 121
1. Phương pháp chung 121
2. Phương pháp riêng: 121
2.1. Sử dụng một số bất đẳng thức cổ điển thông dụng: 121
2.2. Bất đẳng thức Cauchy (Cosi): 121
2.3. Bất đẳng thức Bunhiacopski: 121
2.4. Bất đẳng thức Trê- B- -Sép: 121
II - BÀI TẬP MINH HỌA 121

PHẦN I - ĐẠI SỐ

*****

CHUYÊN ĐỀ 1 - BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

I - KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa căn bậc hai: Với $a \geq 0$**,** $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$

**** Tính chất:***

+ Số âm không có căn bậc hai

+ Số 0 có đúng một căn bậc hai chính là số $0,$ ta viết $\sqrt{0} = 0.$

+ Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau: số dương ký hiệu là $\sqrt{a},$ số âm ký hiệu là $-\sqrt{a}.$

2. Các công thức vận dụng

* Hằng đẳng thức: $\sqrt{A^2} = |A|$

* Khai phương một tích: $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ với $A \geq 0, B \geq 0$

* Khai phương một thương: $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ với $A \geq 0, B > 0$

* Đưa thừa số từ ngoài vào trong và từ trong ra ngoài dấu căn

$A\sqrt{B} = \sqrt{A^2.B}$ với $A \geq 0$ $\left(\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}\right.$ với $\left.A \geq 0\right)$

$A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ với $A < 0$ $\left(\sqrt{A^2B} = -A\sqrt{B}\right.$ với $\left.A < 0\right)$

* Khử mẫu của biểu thức lấy căn: $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{AB}}{|B|}$ với $A.B \geq 0, B \neq 0$

* Trục căn thức ở mẫu:

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \text{ với } B > 0$$

$$\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C\left(\sqrt{A} \mp B\right)}{A - B^2}$$

$$\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right)}{A - B}$$

3. Định nghĩa căn bậc ba

$$x = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow x^3 = a$$

4. Tính chất của căn bậc ba

* $\sqrt[3]{A.B} = \sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}$

* $\sqrt[3]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$ với $B \neq 0$

II – CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1: Tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa

Phương pháp giải:

+) $\sqrt{A}$ để biểu thức có nghĩa thì $A \geq 0$

+) $\dfrac{1}{A}$ để biểu thức có nghĩa thì $A \neq 0$

+) $\dfrac{1}{\sqrt{A}}$ để biểu thức có nghĩa thì $A > 0$

+) ***Định lí về dấu của nhị thức bậc nhất*** : Nhị thức ax+b $(a \neq 0)$ cùng dấu với a với mọi giá trị của x lớn hơn nghiệm của nhị thức, trái dấu với a với mọi giá trị của x nhỏ hơn nghiệm của nhị thức.

Bài 1: Tìm x để căn thức sau có nghĩa

a)$\sqrt{-2x+3}$ b)$\sqrt{\dfrac{2}{x^2}}$ c)$\sqrt{\dfrac{4}{x+3}}$ d)$\sqrt{\dfrac{-5}{x^2+6}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a)$\sqrt{-2x+3}$ Để căn thức có nghĩa thì: $-2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{3}{2}$.

b)$\sqrt{\dfrac{2}{x^2}}$ Để căn thức có nghĩa thì: $\dfrac{2}{x^2} \geq 0$ do $x^2 \geq 0$ nên $\dfrac{2}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

c)$\sqrt{\dfrac{4}{x+3}}$ Để căn thức có nghĩa thì:

$\dfrac{4}{x+3} \geq 0$ do $4 > 0$ nên $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.

d)$\sqrt{\dfrac{-5}{x^2+6}}$ Để căn thức có nghĩa thì $\dfrac{-5}{x^2+6} \geq 0$ do $-5 < 0$ nên $x^2+6 < 0$ (vô lý)

Vậy không tồn tại x để căn thức có nghĩa.

Bài 2: Tìm điều kiện xác định của biểu thức

$a)A = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-1}}$ $b)B = \dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a) Để biểu thức A có nghĩa thì $x^2-2x-1>0$

Cách 1: $x^2-2x-1>0 \Leftrightarrow x^2-2x+1>2 \Leftrightarrow (x-1)^2>2 \Leftrightarrow |x-1|>\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1>\sqrt{2} \\ x-1<-\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{2}+1 \\ x<-\sqrt{2}+1 \end{array}\right.$.

Vậy để biểu thức có nghĩa thì $\left[\begin{array}{l} x > \sqrt{2} + 1 \\ x < -\sqrt{2} + 1 \end{array}\right.$

Cách2: $x^2 - 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 2 > 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow \left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right) > 0$

Bảng xét dấu:

x		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	
$x-1-\sqrt{2}$	-	|	-	0	+
$x-1+\sqrt{2}$	-	0	+	|	+
$\left(x-1-\sqrt{2}\right)\left(x-1+\sqrt{2}\right)$	+	0	-	0	+

Vậy để biểu thức có nghĩa thì $\left[\begin{array}{l} x > \sqrt{2} + 1 \\ x < -\sqrt{2} + 1 \end{array}\right.$

Dạng 2: Căn bậc hai số học

Phương pháp giải

Với $a > 0, \sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a. Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0

Bài 1: Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau:

a) 49 b) 36 c) 64 d) 1,21

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có $\sqrt{49} = 7$ Vì $7 > 0$ và $7^2 = 49$.

Phần b, c, d làm tương tự

Chú ý: Phép tìm căn bậc hai số học của một số không âm được gọi là phép khai phương

Bài 2: Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau:

a) 64 b) 81 c) 1,44 d) 121

HƯỚNG DẪN GIẢI

a) Vì căn bậc hai số học của 64 là 8 nên 64 có 2 căn bậc hai là ± 8

Phần b, c, d làm tương tự

Chú ý: Từ căn bậc hai số học ta suy ra được căn bậc hai của nó

Dạng 3: Tính giá trị của biểu thức

Phương pháp giải:

+ Trục căn

+ Khai phương một tích, một thương

+ Đưa thừa số vào trong, ra ngoài dấu căn

Bài 1: Tính

a) $B = \dfrac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} + \dfrac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$

b) $C = 5.\sqrt{\dfrac{1}{5}} + \dfrac{1}{2}.\sqrt{20} + \sqrt{5}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a) $B = \dfrac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} + \dfrac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \dfrac{(5+\sqrt{5})^2 + (5-\sqrt{5})^2}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}$

$= \dfrac{25+10\sqrt{5}+5+25-10\sqrt{5}+5}{25-5} = \dfrac{60}{20} = 3$

b) $C = 5.\sqrt{\dfrac{1}{5}} + \dfrac{1}{2}.\sqrt{20} + \sqrt{5} = 5.\sqrt{\dfrac{5}{5^2}} + \dfrac{1}{2}.\sqrt{4.5} + \sqrt{5}$

$= \dfrac{5}{5}\sqrt{5} + \dfrac{2}{2}\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Dạng 4: Phân tích đa thức thành nhân tử

Phương pháp giải:

+ Khai phương một tích, một thương

+ Đưa thừa số vào trong, ra ngoài dấu căn

+ Dùng hằng đẳng thức

Bài 1: $a)x^2-3\ b)x^2-9$

$c)x^2+2\sqrt{3}x+3\ d)x^2-2\sqrt{5}x+5$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$a)x^2-3$ ta có $\sqrt{3}^{\,2}=3$ ta dùng hằng đẳng thức phân tích đa thức thành nhân tử:

$x^2-3=x^2-\sqrt{3}^{\,2}=\ x-\sqrt{3}\ \ x+\sqrt{3}\ .$

$b)x^2-9=x^2-3^2=\ x-3\ \ x+3$

$c)x^2+2\sqrt{3}x+3=x^2+2\sqrt{3}x+3=(x+\sqrt{3})^2.$

$d)x^2-2\sqrt{5}x+5=x^2-2\sqrt{5}x+5=\ x+\sqrt{5}\ ^{2}$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử (với a, b, x, y là các số không âm)

$a)ab+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1$

$b)\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}+\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$a)ab+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1$

$=b\sqrt{a^2}+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1$

$=b\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)+\left(\sqrt{a}+1\right)$

$=\left(\sqrt{a}+1\right)\left(b\sqrt{a}+1\right)$

$\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}+\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}$

$=\left(\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}\right)+\left(\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}\right)$

$=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+\sqrt{xy}+y\right)+\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$

$=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+\sqrt{xy}+y+\sqrt{xy}\right)$

$=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}\right)^2$

Dạng 5: Tìm x

Phương pháp giải:

+)Phân tích đa thức thành nhân tử đưa về phương trình tích

+) Với $a\ge 0$, ta có : Nếu $x=\sqrt{a}$ thì $x\ge 0$ và $x^2=a$

Nếu $x\ge 0$ và $x^2=a$ thì $x=\sqrt{a}$

+) $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)\ge 0\\ f(x)=\left(g(x)\right)^2\end{array}\right.$

<u>Bài 1:</u>Tìm x không âm biết

a)$\sqrt{x}=15$ b)$2\sqrt{x}=14$ c)$\sqrt{x}<2$ d)$\sqrt{2x}<4$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a)$\sqrt{x}=15\Leftrightarrow x=15^2\Leftrightarrow x=225$

b)$2\sqrt{x}=14\Leftrightarrow\sqrt{x}=7\Leftrightarrow x=49$

c)$\sqrt{x}<2\Leftrightarrow x<4$

d)$\sqrt{2x}<4\Leftrightarrow 2x<16\Leftrightarrow x<8$

<u>Bài 2:</u> Tìm x

a)$\sqrt{9x^2}=2x+1$ b)$\sqrt{x^2+6x+9}=3x-1$ c)$\sqrt{1-4x+4x^2}=5$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a)$\sqrt{9x^2}=2x+1$

Cách 1:Vì $\sqrt{9x^2}=|3x|$ nên $\sqrt{9x^2}=2x+1\Leftrightarrow|3x|=2x+1$ (1)

TH1:$3x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$, (1) $\Leftrightarrow 3x=2x+1\Leftrightarrow x=1$(TM)

TH2: $3x<0\Leftrightarrow x<0$ (1) $\Leftrightarrow -3x=2x+1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}$(TM)

Vậy $x=1, x=-\frac{1}{5}$ là nghiệm của phương trình

Cách 2:

$$\sqrt{9x^2}=2x+1\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1\geq 0\\ 9x^2=(2x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\frac{-1}{2}\\ 9x^2=4x^2+4x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\frac{-1}{2}\\ 5x^2-4x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{-1}{5}\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện vậy giá trị x cần tìm là $x=1;\ x=\frac{-1}{5}$

$b)\sqrt{x^2+6x+9}=3x-1$ vì $\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x+3)^2}=|x+3|$

Nên $|x+3|=3x-1$ (2)

TH1: $x+3\geq 0\Leftrightarrow x\geq -3$, (2)$\Leftrightarrow x+3=3x-1\Leftrightarrow x=2$ (TM)

TH2: $x+3<0\Leftrightarrow x<-3$,(2)$\Leftrightarrow -x-3=3x-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$(loại)

Vậy $x=2$ là nghiệm của phương trình.

$c)\sqrt{1-4x+4x^2}=5$ vì $\sqrt{1-4x+4x^2}=|1-2x|$

Nên $|1-2x|=5$ (3)

TH1: $1-2x\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{2}$; (3)$\Leftrightarrow 1-2x=5\Leftrightarrow x=-2$ (TM)

TH2: $1-2x<0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$; (3)$\Leftrightarrow 1-2x=-5\Leftrightarrow x=3$ (TM)

Vậy $x=-2; x=3$ là nghiệm của phương trình.

Chú ý: Ở **Bài 2** ta biến đổi làm mất căn thức, rồi đưa về giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối đã học ở lớp 8

Tùy vào từng bài mà có thể áp dụng cách 1 hoặc cách 2 một cách hợp lý.

: Ở các câu hỏi trắc nghiệm có phương án lựa chọn các em thay đáp án vào biểu thức nếu thỏa mãn biểu thức thì đó chính là nghiệm của phương trình.

Dạng 6: So sánh

Phương pháp giải: Với hai số a và b không âm ta có : $a<b\Leftrightarrow\sqrt{a}<\sqrt{b}$

Bài 1: So sánh

a) 4 và $\sqrt{15}$ b) $\sqrt{11}$ và 3 c) $\sqrt{25+9}$ và $\sqrt{25}+\sqrt{9}$ d) $-\sqrt{5}$ và -2

HƯỚNG DẪN GIẢI

a) Ta có : $4^2=16, \sqrt{15^2}=15$ vì $16>15$ nên $4>\sqrt{15}$

b) Tương tự ví dụ 2

c) Ta có $\sqrt{25+9}=6$, $\sqrt{25}+\sqrt{9}=8$ nên $\sqrt{25+9}<\sqrt{25}+\sqrt{9}$

Ta có $-\sqrt{4}=-2$. Vì $5>4$ nên $\sqrt{5}>\sqrt{4} \Rightarrow -\sqrt{5}<-\sqrt{4}$ (suất hiện dấu âm nên bất đẳng thức đổi chiều).

Vậy $-\sqrt{5}<-2$

Chú ý : Ở các câu hỏi trắc nghiệm có phần so sánh các em có thể bấn máy tính rồi so sánh.

Dạng 7 : Rút gọn biểu thức và các bài tập liên quan đến rút gọn

Phương pháp giải : Quy đồng, dùng hằng đẳng thức, trục căn thức…

Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất sau khi rút gọn ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cô – si, ‘với hai số a,b không âm ta có $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ dấu ‘=’ xẩy ra khi a=b”

Bài 1: (Đề tuyển sinh vào 10 Hà Nội 2018-2019).

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\dfrac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x \ge 0; x \ne 1$

a) Tính giá trị của A khi x=9

b) Chứng minh $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $\dfrac{A}{B} \ge \dfrac{x}{4}+5$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a) Vì x=9 thỏa mãn điều kiện nên $A=\dfrac{\sqrt{9}+4}{\sqrt{9}-1}=\dfrac{7}{2}$

b) Với $x \ge 0; x \ne 1$

Ta có:

$$B=\frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-2-1}-\frac{2}{\sqrt{x}+3}=\frac{3\sqrt{x}+1}{(x-1)+(2\sqrt{x}-2)}-\frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\frac{2}{\sqrt{x}+3}=\frac{3\sqrt{x}+1-2\left(\sqrt{x}-1\right)}{(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{1}{(\sqrt{x}-1)}$$

c) Ta có $\dfrac{A}{B} = \dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} : \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+4$

$\dfrac{A}{B} \geq \dfrac{x}{4}+5 \Leftrightarrow \sqrt{x}+4 \geq \dfrac{x}{4}+5\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+4 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)^2 \leq 0$

Vì $\left(\sqrt{x}-2\right)^2 \geq 0; \forall x \geq 0$ nên $\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow x=4$

Kết hợp với điều kiện x=4 thỏa mãn $\dfrac{A}{B} \geq \dfrac{x}{4}+5$.

<u>Bài 2:</u> Cho biểu thức A = $\left(\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút biểu thức A

b) Tìm giá trị của x để A = $\dfrac{1}{3}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = A - 9$\sqrt{x}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Điều kiện $0 < x \neq 1$

Với điều kiện đó, ta có: $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} : \dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

b) Để A = $\dfrac{1}{3}$ thì $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{4}$ (*thỏa mãn điều kiện*)

Vậy $x=\dfrac{9}{4}$ thì A = $\dfrac{1}{3}$.

c) Ta có P = A - 9$\sqrt{x}$ $= \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = -\left(9\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)+1$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có: $9\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{9\sqrt{x}.\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 6$

Suy ra: $P \leq -6+1=-5$. Đẳng thức xảy ra khi $9\sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{9}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=-5$ khi $x=\dfrac{1}{9}$.

<u>Bài 3:</u>a) Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của A khi x = 36

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}+\dfrac{4}{\sqrt{x}-4}\right) : \dfrac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0; x \neq 16$)

c) Với các của biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị của x nguyên để giá trị của biểu thức B.(A - 1) là số nguyên.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Với x = 36 (*thỏa mãn* $x\geq 0$), ta có: $A = \frac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

b) Với $x \geq 0, x \neq 16$ ta có :

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16}\right)\frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$$

c) Ta có: $B(A-1) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}.\left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}-1\right) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}.\frac{2}{\sqrt{x}+2} = \frac{2}{x-16}$.

Để $B(A-1)$ nguyên, x nguyên thì $x-16$ là ước của 2, mà Ư(2) $=\{\pm1;\pm2\}$

Ta có bảng giá trị tương ứng:

$x-16$	1	-1	2	-2
x	17	15	18	14

Kết hợp điều kiện $x\geq 0,\ x\neq 16$, để $B.(A-1)$ nguyên thì $x\in\{14;\ 15;\ 17;\ 18\}$

<u>Bài 4:</u> Cho biểu thức:

$$P = \frac{x}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1-\sqrt{y})} - \frac{y}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+1)} - \frac{xy}{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{y})}$$

a) Tìm điều kiện của x và y để P xác định. Rút gọn P.

b) Tìm x,y nguyên thỏa mãn phương trình P = 2.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Điều kiện để P xác định là: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $y \neq 1$; $x + y \neq 0$.

$$P = \frac{x(1+\sqrt{x}) - y(1-\sqrt{y}) - xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)} = \frac{(x-y) + \left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right) - xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+x-\sqrt{xy}+y-xy\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) - \sqrt{y}\left(\sqrt{x}+1\right) + y\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+y-y\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{y}\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{y}\right) - \sqrt{y}\left(1-\sqrt{y}\right)}{\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$= \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}.$$

Vậy P = $\sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}.$

b) ĐKXĐ: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $y \neq 1$; $x + y \neq 0$

P = 2 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}. = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1+\sqrt{y}\right)-\left(\sqrt{y}+1\right)=1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(1+\sqrt{y}\right)=1$

Ta có: $1+\sqrt{y}\geq 1 \Rightarrow \sqrt{x}-1\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 4 \Rightarrow$ x = 0; 1; 2; 3 ; 4

Thay x = 0; 1; 2; 3; 4 vào ta có các cặp giá trị x=4,vậy x=2, y=2 (*thỏa mãn*).

<u>Bài 5:</u> Cho biểu thức $M=\frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}+\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$

a) Tìm điều kiện của x để M có nghĩa và rút gọn M

b) Tìm x để M = 5

c) Tìm x $\in Z$ để M $\in$ Z

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Điều kiện: $x\geq 0; x\neq 4; x\neq 9$

Rút gọn $M=\frac{2\sqrt{x}-9-\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)+\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$

$M=\frac{x-\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$

$M=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} \Leftrightarrow M=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

b) $M=5 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}=5$

$\Rightarrow \sqrt{x}+1=5\left(\sqrt{x}-3\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=5\sqrt{x}-15$

$\Leftrightarrow 16=4\sqrt{x}$

$\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{16}{4}=4 \Rightarrow x=16$

Đối chiếu điều kiện: $x\geq 0; x\neq 4; x\neq 9$ .Vậy x = 16 thì M = 5.

c) $M=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=\frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3}=1+\frac{4}{\sqrt{x}-3}$

Do $M\in Z$ nên $\sqrt{x}-3$ là ước của 4 $\Rightarrow \sqrt{x}-3$ nhận các giá trị : -4;-2; -1; 1; 2; 4

Lập bảng giá trị ta được $x\in\{1;4;16;25;49\}$ vì $x\neq 4 \Rightarrow x\in\{1;16;25;49\}$

<u>Bài 6:</u> Cho biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2.\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$ Với a > 0, a ≠ 1

a) Rút gọn biểu thức P
b) Tìm a để P < 0

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) $P = (\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}})^2 . (\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}} - \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}})$ Với $a > 0$ và $a \neq 1$

$$P = (\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}})^2.(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1})$$

$$P = (\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}})^2.\frac{(\sqrt{a}-1)^2-(\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}$$

$$P = (\frac{a-1}{2\sqrt{a}})^2.\frac{a-2\sqrt{a}+1-a-2\sqrt{a}-1}{a-1}$$

$$P = \frac{-(a-1)4\sqrt{a}}{4a} = \frac{1-a}{\sqrt{a}}$$

Vậy $P = \frac{1-a}{\sqrt{a}}$

b) Tìm a để $P < 0$

Với $a > 0$ và $a \neq 1$ nên $\sqrt{a} > 0$

⇨ $P = \frac{1-a}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow 1 - a < 0 \Leftrightarrow a > 1$ (TMĐK)

<u>Bài 7:</u>Cho biểu thức: $Q = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - (1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}) : \frac{b}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$

a) Rút gọn Q
b) Xác định giá trị của Q khi a = 3b

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Rút gọn:

$$Q = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - (1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}) : \frac{b}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$Q = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{\sqrt{a^2-b^2}} . \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

$$Q = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$Q = \frac{(\sqrt{a-b})^2}{\sqrt{(a-b)(a+b)}} = \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}$$

b) Khi có a = 3b ta có: $Q = \frac{\sqrt{3b-b}}{\sqrt{3b+b}} = \sqrt{\frac{2b}{4b}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

<u>Bài 8:</u>Cho biểu thức:

$$A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right).\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$$

a) Rút gọn A

b) Biết xy = 16. Tìm các giá trị của x, y để A có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Điều kiện xác định: x > 0 , y > 0

a) $A=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right).\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right]:\frac{\sqrt{x^3}+y\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}}$

$=\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}.\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{x+y}{xy}\right):\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)+\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$=\left(\frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{x+y}{xy}\right):\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)}{\sqrt{xy}(x+y)}$

$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy}.\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}.$

b) Ta có: $\left(\sqrt{\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{y}}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{\sqrt{xy}}\geq 0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}\geq 2\sqrt{\sqrt{xy}}.$

Do đó: $A=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\geq\frac{2\sqrt{\sqrt{xy}}}{\sqrt{xy}}=\frac{2\sqrt{\sqrt{16}}}{\sqrt{16}}=1$ (vì xy = 16)

Vậy min A = 1 khi $\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y}\\ xy=16\end{cases}\Leftrightarrow x=y=4.$

Bài 9: Cho biểu thức: $P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-\frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-x}\right)$

a) Tìm điều kiện để P có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tính giá trị của P với $x=3-2\sqrt{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Biểu thức P có nghĩa khi và chỉ khi : $\begin{cases}\sqrt{x}>0\\ \sqrt{x-1}\geq 0\\ \sqrt{2}-\sqrt{x}\neq 0\\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2}\neq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

b) $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \dfrac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-x}\right)$

$$= \left[\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)} - \frac{(x-3)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)}\right]\left[\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-(x-1)} - \frac{(x-3)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)}{(x-1)-2}\right].\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-x+1} - \frac{(x-3)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)}{x-3}\right).\frac{-\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}$$

$$= \left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}-\sqrt{2}\right).\frac{-1}{\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)(-1)}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

c) Thay $x = 3-2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$ vào biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, ta có:

$$P = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}-\left|\sqrt{2}-1\right|}{\left|\sqrt{2}-1\right|} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

<u>Bài 10:</u>Cho biểu thức:P = $\left(\dfrac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \dfrac{8x}{4-x}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để P = -1

c) Tìm *m* để với mọi giá trị x > 9 ta có: $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 0 \\ 4-x \neq 0 \\ \sqrt{x}-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$

Với x > 0 và $x \neq 4$ ta có:

P = $\left(\dfrac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} - \dfrac{8x}{x-4}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$

$=\dfrac{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)-8x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}:\dfrac{\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x-2})}{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}$

$=\dfrac{4x-8x-8x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}:\dfrac{\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$

$=\dfrac{-4x-8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}:\dfrac{-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$ (*ĐK: $x\neq 9$*)

$=\dfrac{-4\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}.\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{3-\sqrt{x}}$

$=\dfrac{-4\sqrt{x}.\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)}=\dfrac{4x}{\sqrt{x}-3}$

Với x > 0 , x $\neq 4, x\neq 9$ thì P = $\dfrac{4x}{\sqrt{x}-3}$

b) P = - 1 $\Leftrightarrow \dfrac{4x}{\sqrt{x}-3}=-1$ (ĐK: x > 0, $x\neq 4, x\neq 9$)

$\Leftrightarrow 4x=3-\sqrt{x}\Leftrightarrow 4x-3-\sqrt{x}=0$

Đặt $\sqrt{x}=y$ (*y > 0*). Ta có phương trình: $4y^2-y-3=0$

Các hệ số: a + b + c = 4- 1-3 =0

$\Rightarrow y_1=-1$ (*không thoả mãn y > 0*) hoặc $y_2=\dfrac{3}{4}$ (*thoả mãn y > 0*)

Với $y=\dfrac{3}{4}=\sqrt{x}$ thì x = $\dfrac{9}{16}$ (*thỏa mãn đk*). Vậy với x = $\dfrac{9}{16}$ thì P = - 1.

c) $m(\sqrt{x}-3)P>x+1$ (đk: x > 0; $x\neq 4, x\neq 9$)

$\Leftrightarrow m(\sqrt{x}-3)\dfrac{4x}{\sqrt{x}-3}>x+1\Leftrightarrow m.4x>x+1\Leftrightarrow m>\dfrac{x+1}{4x}$

Xét $\dfrac{x+1}{4x}=\dfrac{x}{4x}+\dfrac{1}{4x}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4x}$. Ta có x > 9 (*thoả mãn đk*)

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{9}$ (*Hai phân số dương cùng tử số, phân số nào có mẫu số lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn*)

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4x}<\dfrac{1}{36}\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4x}<\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{36}\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4x}<\dfrac{5}{18}$

Theo kết quả phần trên ta có : $\begin{cases} \dfrac{5}{18} > \dfrac{x+1}{4x} \\ m > \dfrac{x+1}{4x} \end{cases} \Rightarrow m \geq \dfrac{5}{18}$

Vậyvới $m \geq \dfrac{5}{18}, x > 9$ thì $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$.

Bài 11. Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào biến:

$M = \left(1+\dfrac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)\left(1-\dfrac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}\right)+a$ với $a \geq 0; a \neq 1$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Ta có:

$$M = \left(1+\frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)\left(1-\frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}\right)+a$$

$$=\left[1+\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}+1\right)}\right]\left[1-\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)}\right]+a$$

$$=\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)+a$$

$$=1-a+a=1$$

Vậy giá trị biểu thức đã cho không phụ thuộc vào x.

Bài 12. Cho biểu thức: $P = \dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị biểu thức khi $x = \dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$.

c) Tìm x để P = 2

d) Tìm x để P < 1

e) Tìm x nguyên để P có giá trị nguyên

g) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{1}{P}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) ĐK: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}-9-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$P = \dfrac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}$

$P = \dfrac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$

b) Ta có:

$x = \dfrac{2}{3 - \sqrt{5}} = \dfrac{2(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \dfrac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$

$\Rightarrow P = \dfrac{\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2} + 1}{\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2} - 3} = \left(\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2} + 1\right) : \left(\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2} - 3\right)$

$= \dfrac{\sqrt{5} + 3}{2} : \dfrac{\sqrt{5} - 5}{2} = \dfrac{\sqrt{5} + 3}{2} . \dfrac{2}{\sqrt{5} - 5} = \dfrac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{5} - 5} = \dfrac{(\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} + 5)}{(\sqrt{5} - 5)(\sqrt{5} + 5)}$

$= \dfrac{20 + 8\sqrt{5}}{-20} = -\dfrac{5 + 2\sqrt{5}}{5}$

c) $P = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 2(\sqrt{x} - 3)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x} - 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow x = 49$

Vậy x = 49 thì P = 2

d) $P < 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} - 1 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{\sqrt{x} - 3} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 < 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$

Kết hợp với điều kiện $x \ge 0; x \ne 4; x \ne 9$ ta được $0 \le x < 9; x \ne 4$.

Vậy P < 1 khi $0 \le x < 9; x \ne 4$.

e) Ta có $P = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = \dfrac{\sqrt{x} - 3 + 4}{\sqrt{x} - 3} = 1 + \dfrac{4}{\sqrt{x} - 3}$

Để P nguyên thì $\dfrac{4}{\sqrt{x} - 3}$ nguyên $\Leftrightarrow 4 \vdots (\sqrt{x} - 3) \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3) \in Ư(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Ta có bảng sau

$\sqrt{x} - 3$	-4	-2	-1	1	2	4
$\sqrt{x}$	-1 (loại)	1	2	4	5	7

x		1	4 (loại)	16	25	49

Vậy $x \in \{1;16;25;49\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

g) Ta có $\frac{1}{P} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-4}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{4}{\sqrt{x}+1}$

Ta có: $x \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \ge 0 (\forall x \in$ TXĐ)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \ge 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} \le 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{\sqrt{x}+1} \ge -4 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{\sqrt{x}+1} \ge -3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{P} \ge -3$$

Dấu "=" xảy ra khi x = 0.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{P}$ là -3 khi x = 0.

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Đề khảo sát chất lượng học sinh lớp 9 – Hà Nội (2015 – 2016)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} - \frac{x+12\sqrt{x}}{x-16}$ với $x \ge 0; x \ne 4$

1. Tính giá trị của A khi x=4
2. Rút gọn B
3. Tìm x để $\frac{A}{B} = \frac{5}{6}$

Bài 2:Đề thi vào 10 Hà Nội 2017 – 2018

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \ge 0; x \ne 25$.

1. Tính giá trị của A khi x=9
2. Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$
3. Tìm tất cả giá trị của x để A=B.$|x-4|$

Bài 3: Đề thi vào 10 Thái Nguyên 2017 – 2018

1. Không dùng máy tính bỏ túi, rút gọn biểu thức

   $A = \left(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} + 10\sqrt{0,2}\right)$

2. Cho $B = \left(\frac{x}{\sqrt{x}+3} - \frac{x+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{6x+\sqrt{x}}{x-9}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - 1\right)$ với $\begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 9 \end{cases}$

   a.Rút gọn B

   b. Tính giá trị của B khi x= 12+6$\sqrt{3}$.

Bài 4: Đề thi vào 10 Thái Nguyên 2018-2019

1. Không dùng máy tính tính giá trị của biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$
2. Rút gọn: $P=\left(\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-4}\right):\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x>0;x\neq 4$

Bài 5: Đề thi vào 10 Bình Dương 2018-2019

1. Rút gọn biểu thức: $A=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{40}$
2. Rút gọn biểu thức: $B=\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x>0;x\neq 1.$

Bài 6: Đề thi vào 10 Thanh Hóa 2018 – 2019

Cho biểu thức $A=(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4}):\left(\dfrac{x}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{x}{\sqrt{x}+2}\right)$ với x>0

1. Rút gọn A
2. Tìm tất cả các giá trị của x để $A\geq\dfrac{1}{3\sqrt{x}}$

Bài 7: Đề thi vào 10 Nghệ An 2018 – 2019

1. So sánh $2\sqrt{3}+\sqrt{27}$ và $\sqrt{74}$
2. Chứng minh đẳng thức $(\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+2})\dfrac{x-4}{4}=1$ với $x\geq 0;x\neq 4$

Bài 8:

1.Cho $P=\dfrac{(1-2x)^2-16x^2}{1-4x^2};\quad x\neq\pm\dfrac{1}{2}$

a) Chứng minh $P=\dfrac{-2}{1-2x}$

b) Tính P khi $x=\dfrac{3}{2}$

2.Tính $Q=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5-\sqrt{24}}}{\sqrt{12}}$

Bài 9: Cho biểu thức $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{8\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}-x-3}{x-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$

a) Rút gọn B

b) Tính giá trị của B khi $x=3+2\sqrt{2}$

c) Chứng minh rằng $B\leq 1$ với mọi gía trị của x thỏa mãn $x\geq 0;\ x\neq 1$.

Bài 10: Cho biểu thức $M=\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}+1\right)$

a) Tìm TXĐ

b) Rút gọn biểu thức M

c) Tính giá trị của M tại $a=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

Bài 11: Cho biểu thức $A=\left(\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}+1\right)\cdot\left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-1\right)$; $a\ge 0,\ a\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm a ≥ 0 và a$\ne 1$ thoả mãn đẳng thức A= $-a^2$

Bài 12: Cho biểu thức $S=\left(\frac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}\right):\frac{2\sqrt{xy}}{x-y}$; $x>0,\ y>0,\ x\ne y$.

a) Rút gọn biểu thức

b) Tìm giá trị của x và y để S=1

Bài 13: Cho biểu thức $Q=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$; $x>0,\ x\ne 1$.

a) Chứng minh $Q=\frac{2}{x-1}$

b) Tìm số nguyên x lớn nhất để Q có giá trị là số nguyên

Bài 14: Cho biểu thức $A=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}\right)$;$x>0$, $x\ne 1,\ x\ne 4$.

a) Rút gọn A

b) Tìm x để A = 0

Bài 15: Rút gọn biểu thức $A=\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2+a}}+\frac{1}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a^3}-a}{\sqrt{a}-1}$; $a>1$.

Bài 16: Cho biểu thức $T=\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$;$x>0,\ x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức T

b) Chứng minh rằng với mọi $x>0$ và $x\ne 1$ luôn có T<1/3

Bài 17: Cho biểu thức $M=\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}-\frac{1-\left(\sqrt{x}\right)^3}{1+\sqrt{x}+x}$; $x\ge 0;\ x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức M

b) Tìm x để $M\ge 2$

Bài 18: Cho biểu thức $A=\left(\sqrt{m+\frac{2mn}{1+n^2}}+\sqrt{m-\frac{2mn}{1+n^2}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ với $m\ge 0$; $n\ge 1$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị của A với $m=\sqrt{56+24\sqrt{5}}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A

Bài 19: Cho biểu thức $P=\left[\dfrac{a+3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{a-1}\right]:\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm a để $\dfrac{1}{P}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{8}\geq 1$

Bài 20: Cho biểu thức $P=\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1$

a) Tìm ĐKXĐ và rút gọn P

b) Tìm các giá trị nguyên của x để $P-\sqrt{x}$ nhận giá trị nguyên

Bài 21: Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến

$$A=\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{\sqrt{xy}+2\sqrt{x}-3\sqrt{y}-6}-\frac{6-\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+2\sqrt{x}+3\sqrt{y}+6}-\frac{x+9}{x-9}$$

$$B=\frac{2}{\sqrt{xy}}:\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2-\frac{x+y}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}$$

$$C=\left(\frac{1}{2+2\sqrt{x}}+\frac{1}{2-2\sqrt{x}}-\frac{x+1}{1-x^2}\right).\left(1-\frac{1}{x}\right)\quad \text{với } x>0; x\neq 1$$

Bài 22: Cho biểu thức $K=\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x^2-4x-1}{x^2-1}\right).\dfrac{x+2016}{x}$

a) Tìm điều kiện đối với x để K xác định

b) Rút gọn K

c) Với những giá trị nguyên nào của x thì biểu thức K có giá trị nguyên?

Bài 23: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{3+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-3}{x\sqrt{x}-1}\right)\cdot\dfrac{x^2+x\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

a) Tìm điều kiện đối với biến x để biểu thức A được xác định

b) Rút gọn biểu thức A

Bài 24: Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{4\sqrt{a}-4}{4-a}$ $(a>0\,;\,a\neq 4)$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P với $a=9$

Bài 25: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{m}-m-3}{m-1}-\dfrac{1}{\sqrt{m}-1}\right):\left(\dfrac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1}-\dfrac{\sqrt{m}-1}{\sqrt{m}+1}-\dfrac{8\sqrt{m}}{m-1}\right)$

a) Rút gọn A

b) So sánh A với 1

Bài 26: Cho biểu thức A = $\frac{1+\sqrt{1-a}}{1-a+\sqrt{1-a}}+\frac{1-\sqrt{1+a}}{1+a-\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Chứng minh rằng biểu thức A luôn dương với mọi a

Bài 27: Cho biểu thức P = $1:\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right)$.

a) Rút gọn P

b) So sánh P với 3

Bài 28: Cho biểu thức P=$\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+3}{x-9}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}-1\right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để P $<\frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Bài 29: Cho biểu thức P=$\left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9}-1\right):\left(\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}-\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}\right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để P < 1

Bài 30: Cho $M=\frac{-\sqrt{a}-a+6}{3+\sqrt{a}}$

a) Rút gọn M

b) Tìm a để M $\geq$ 1

c) Tìm giá trị lớn nhất của M

Bài 31: Cho biểu thức $A=\left(1+\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$

a) Tìm các giá trị của a để A có nghĩa

b) Rút gọn A

c) Tìm a để A = -5; A = 0; A = 6

d) Tìm a để A^3 = A

e) Với giá trị nào của a thì $|A| = A$

Bài 32: Cho biểu thức $Q=\frac{1}{2\sqrt{x}-2}+\frac{1}{2\sqrt{x}+2}+\frac{x}{1-x}$

a) Tìm điều kiện để Q có nghĩa

b) Rút gọn Q

c) Tính giá trị của Q khi $x=\frac{4}{9}$

d) Tìm x để $Q=-\frac{1}{2}$

e) Tìm những giá trị nguyên của x để giá trị của Q nguyên

Bài 33: Cho biểu thức $P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}$

a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa

b) Rút gọn P

c) Tìm x để |P| = P

d) Giải phương trình $P=-2\sqrt{x}$

e) Tìm giá trị x nguyên để giá trị của P nguyên

Bài 34: Cho biểu thức $M=\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị của a để M = - 4

c) Tính giá trị của M khi $a=\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

Bài 35: Cho biểu thức $K=\left(1-a^2\right):\left[\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\right]+1$

a) Rút gọn K

b) Tính giá trị của K khi a=9

c) Với giá trị nào của a thì |K| = K

d) Tìm a để K=1

e) Tím các giá trị tự nhiên của a để giá trị của K là số tự nhiên

Bài 36: Cho biểu thức $T=\left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}+\frac{x+9}{9-x}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)$

a) Rút gọn T

b) Tính giá trị của T khi $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

c) Tìm x để T = 2

d) Với giá trị nào của x thì T < 0

e) Tìm x $\in$ Z để T $\in$ Z

Bài 37: Cho biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$

a) Tìm điều kiện để A có nghĩa

b) Tính giá trị của A khi $a=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}}+\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}}$

c) Tìm các giá trị của a để $\sqrt{A} > A$

d) Tìm a để A= 4; A = -16

e) Giải phương trình: A = a^2 + 3

Bài 38: Cho biểu thức $C = \left(\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} - \frac{3-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} - \frac{4x}{x-9}\right) : \left(\frac{5}{3-\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt{x}+2}{3\sqrt{x}-x}\right)$

a) Rút gọn C

b) Tìm giá trị của C để C > - C

c) Tìm giá trị của C để C^2 = 40C

Bài 39: Cho biểu thức M = $\left(\frac{a-\sqrt{25a}}{a-25} - 1\right) : \left(\frac{25-a}{a+3\sqrt{a}-10} - \frac{\sqrt{a}-5}{2-\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+5}\right)$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị của a để M < 1

c) Tìm giá trị lớn nhất của M

Bài 40: Cho biểu thức P = $1 + \left(\frac{2a+\sqrt{a}-1}{1-a} - \frac{2a\sqrt{a}-\sqrt{a}+a}{1-a\sqrt{a}}\right) . \frac{a-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-1}$

a) Rút gọn P

b) Cho P=$\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$ tìm giá trị của a

c) Chứng minh rằng P > $\frac{2}{3}$

Bài 41: Cho biểu thức A = $\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

a) Tìm điều kiện xác định

b) Chứng minh A = $\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$

c) Tính giá trị của A tại $x = 8 - \sqrt{28}$

d) Tìm Max A

Bài 42: Cho biểu thức $A = \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{6}{x-5\sqrt{x}+6}$

a) Tìm điều kiện để A có nghĩa

b) Rút gọn A

c) Tìm x để A = 1; A = -2

d) Tìm x để $|A| = A$

e) Tìm x∈ Z để T∈ Z

f) Tìm giá trị lớn nhất của A

Bài 43: Cho biểu thức $K = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) . \frac{x^2-1}{x^2-x+1}$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức K xác định

b) Rút gọn biểu thức K

c) Tìm giá trị của x để K đạt giá trị lớn nhất

Bài 44:

a) Cho biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của A khi x = 36

b) Rút gọn biểu thức $B=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}+\frac{4}{\sqrt{x}-4}\right):\frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x\ge 0; x\ne 16$)

c) Với các của biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị của x nguyên để giá trị của biểu thức B.(A – 1) là số nguyên

Bài 45: Thu gọn các biểu thức sau:

$A=\frac{1}{x+\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{x-1}-\frac{1}{x-\sqrt{x}}$ với x > 0; $x\ne 1$

$B=(2-\sqrt{3})\sqrt{26+15\sqrt{3}}-(2+\sqrt{3})\sqrt{26-15\sqrt{3}}$

Bài 46: Cho biểu thức P=$\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{6x-4}{x^2-1}$

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức P

b) Rút gọn P

Bài 47:Rút gọn biểu thức A=$\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$; với $x\ge 0$.

Bài 48: Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{3}{x-\sqrt{x}-2}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right).\left(\sqrt{x}-2\right)$ với $x\ge 0$ và $x\ne 4$.

Bài 49: Cho biểu thức A = $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{a}{b-a}\right):\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A – $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a}$

b) Tính giá trị của A khi a = $7-4\sqrt{3}$ và b = $7+4\sqrt{3}$

Bài 50: Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{1}{2\sqrt{a}-a}+\frac{1}{2-\sqrt{a}}\right):\frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}}$ với $a>0$ và $a\ne 4$.

Bài 51: Cho biểu thức A = $\frac{1}{2+2\sqrt{a}}+\frac{1}{2-2\sqrt{a}}-\frac{a^2+1}{1-a^2}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị của a biết $A<\frac{1}{3}$

Bài 52: Cho biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\frac{1}{2a\sqrt{a}}$, (Với a > 0 , $a\ne 1$)

a) Chứng minh rằng $P = \frac{2}{a-1}$

b) Tìm giá trị của a để P = a

Bài 53: Cho biểu thức $K = 2\left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right):\left(\frac{\sqrt{a}+1}{a^2-a}\right)$ (với $a > 0, a \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức K

b) Tìm a để $K = \sqrt{2016}$

Bài 54: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2}\right).\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn A

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A > \frac{1}{2}$

c) Tìm tất cả các giá trị x để $B = \frac{7}{3}A$ đạt giá trị nguyên.

Bài 55: Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1}\right)$ với x > 0; x ≠ 1

a) Rút gọn Q.

b) Tính giá trị của Q với $x = 7 - 4\sqrt{3}$

Bài 56: Cho biểu thức $A = \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4}\right)\left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

Bài 57: Cho biểu thức: $P = \frac{2a^2+4}{1-a^3} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{1}{1-\sqrt{a}}$

a) Tìm điều kiện của a để P xác định

b) Rút gọn biểu thức P

Bài 58: Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$, với $x > 0, x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức Q

b) Tìm các giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên

Bài 59: Cho biểu thức $M = \frac{1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} - \frac{x+9}{x-9}$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa. Rút gọn biểu thức M

b) Tìm các giá trị của x để M > 1

Bài 60: Cho biểu thức $P = \left(\frac{4a}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}}\right).\frac{\sqrt{a}-1}{a^2}$ với a >0 và $a \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P
b) Với những giá trị nào của a thì P = 3

Bài 61 Cho biểu thức: $B=\dfrac{2(x+4)}{x-3\sqrt{x}-4}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{8}{\sqrt{x}-4}$ với $x\ge 0, x\ne 16$.

a) Rút gọn B
b) Tìm x để giá trị của B là một số nguyên

Bài 62: Cho biểu thức B = $\left(1+\dfrac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\left(1+\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$, với $0\le x\ne 1$

a) Rút gọn B

b) Tính giá trị biểu thức B khi x = $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

Bài 63: Cho biÓu thøc $P=\left(\dfrac{1}{m^2-m}+\dfrac{1}{m-1}\right):\dfrac{m+1}{m^2-2m+1}$ víi $m\ne 0, m\ne \pm 1$

a)Rút gọn P

b) T P khi x=$\dfrac{1}{2}$

Bài 64: Cho biểu thức P $=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right):\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x-1}-1}$

a) Tìm x để biểu thức P có nghĩa
b) Rút gọn P
c) Tìm x để P là một số nguyên

Bài 65: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x-2\sqrt{3x}+3}{x-3}\right)\left(\sqrt{4x}+\sqrt{12}\right)$.

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa
b) Rút gọn biểu thức A
c) Tính giá trị của A khi $x=4-2\sqrt{3}$

Bài 66:

a) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{a-\sqrt{a}-6}{4-a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}-2}$ (với $a\ge 0$ và $a\ne 4$).

b) Cho $x=\dfrac{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}$. Tính giá trị của biểu thức $P=(x^2+2x-1)^{2016}$.

Bài 67: Cho biểu thức $A=\left(\sqrt{x}+2\right):\left[\dfrac{x+8}{x\sqrt{x}+8}+\dfrac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}-\dfrac{1}{2+\sqrt{x}}\right]$ với $x\ge 0$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Đặt $B=\dfrac{8}{x+6-A}+\sqrt{x}$. Tìm x để biểu thức B đạt giá trị nhỏ nhất.

CHUYÊN ĐỀ 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT

I - KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Hàm số bậc nhất

1.1. Khái niệm hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức y = ax + b. Trong đó a, b là các số cho trước và a $\neq 0$

1.2. Tính chất

Hàm số bậc nhất y = ax + b xác định với mọi giá trị của x thuộc R và có tính chất sau:

- Đồng biến trên R khi a > 0
- Nghịch biến trên R khi a < 0

1.3. Đồ thị của hàm số y = ax + b (a $\neq$ 0)

Đồ thị của hàm số $y = ax + b \quad (a \neq 0)$ là một đường thẳng không song song và không trùng với các trục tọa độ. Đường thẳng này luôn song song với $y = ax$ nếu $b \neq 0$ và cắt trục hoành tại $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$ và trục tung tại $B(0;b)$.

1.4. Cách vẽ đồ thị hàm số y = ax + b (a $\neq$ 0)

Bước 1: Cho y = 0 thì x = -b/a ta được điểm $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$ thuộc trục hoành

Cho x = 0 thì y = b ta được điểm $B(0;b)$ thuộc trục tung Oy.

Bước 2: Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A và B ta được đồ thị hàm số $y = ax + b (a \neq 0)$

1.5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng (d): y = a.x + b (a $\neq$ 0) và (d’): y = a’x + b’.
Khi đó

+ $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$

+ $d' \cap d' = \{A\} \Leftrightarrow a \neq a'$

+ $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

+ $d \perp d' \Leftrightarrow a.a' = -1$

1.6. Hệ số góc của đường thẳng y = ax + b (a $\neq$ 0)

- Góc tạo bởi đường thẳng y = ax + b và trục Ox.
- Góc tạo bởi đường thẳng y = ax + b và trục Ox là góc tạo bởi tia Ax và tia AT, trong đó A là giao điểm của đường thẳng y = ax + b với trục Ox, T là điểm thuộc đường thẳng

y = ax + b và có tung độ dương

Hệ số góc của đường thẳng y = ax + b

- Hệ số a trong y = ax + b được gọi là hệ số góc của đường thẳng y = ax +b

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1: Xác định hàm số đã cho là hàm đồng biến – nghịch biến

Phương pháp giải:

+) Cho hàm số $y = f(x)$ Với $x_1; x_2 \in R$:

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì $y = f(x)$ là hàm đồng biến

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì $y = f(x)$ là hàm đồng nghịch biến

+) Cho hàm số bậc nhất y=ax+b xác định với $\forall x \in R$:

Đồng biến trên R khi $a > 0$

Nghịch biến trên R khi $a < 0$

Bài 1: Cho hàm số y=2x, hàm số đã cho là hàm đồng biến hay là hàm nghịch biến? Vì sao?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Cách 1: Hàm số y=2x là hàm đồng biến trên R vì

Xét hàm số $y = f(x) = 2x \ \forall x_1, x_2 \in R$ ta có

$y_1 = f(x_1) = 2x_1$,

Nếu $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$ do đó $y_1 - y_2 = 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2) < 0$

Vậy hàm số y=2x là hàm đồng biến

Cách 2: Hàm số y=2x là hàm số bậc nhất với $a = 2 \neq 0$ xác định với $\forall x \in R$

Mặt khác a=2>0 nên hàm số y=2x là hàm đồng biến

Tương tự ta có hàm số y=-2x là hàm số nghịch biến.

Bài 2: Cho hàm số $y = (1-\sqrt{5})x - 1$

a) Hàm số trên đồng biến hay nghịch biến trên R ? Vì sao ?
b) Tính giá trị của y khi $x = 1 + \sqrt{5}$
c) Tính giá trị của x khi $y = \sqrt{5}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Làm tương tự bài 1

b) Khi $x = 1 + \sqrt{5}$ ta có: $y = (1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) - 1 \Leftrightarrow y = 1 - 5 - 1 \Leftrightarrow y = -5$

c) Khi $y = \sqrt{5}$ ta có: $(1-\sqrt{5})x = \sqrt{5} + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{1-\sqrt{5}} \Leftrightarrow x = \dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{-4}$

Bài 3: Đề thi vào 10 Vĩnh Phúc 2018 – 2019

Tìm m để hàm số $y = (m-4)x + 7$ đồng biến trên R

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Để hàm số đồng biến trên R thì $m-4>0 \Leftrightarrow m>4$

Dạng 2: Vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất và các bài toán liên quan

Phương pháp giải:

Cách vẽ đồ thị hàm số y = ax + b (a $\neq$ 0)

Bước 1: Cho y = 0 thì x = -b/a ta được điểm $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$ thuộc trục hoành

Cho x = 0 thì y = b ta được điểm $B(0;b)$ thuộc trục tung Oy.

Bước 2: Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A và B ta được đồ thị hàm số $y=ax+b(a\neq 0)$

Diện tích tam giác: $S=\frac{1}{2}ah$ với a là cạnh đáy h là chiều cao.

Diện tích hình chữ nhật $S=a.b$ với a là chiều rộng, b là chiều cao.

Diện tích hình vuông $S=a^2$ với a là độ dài một cạnh.

Bài toán 1: Xác định giá trị của tham số m để đường thẳng y=mx+b đi qua A (c; d).

Vì y=mx+b đi qua A (c; d) nên ta có $d=m.c+b$ giải phương trình bậc nhất theo ẩn m ta được $m=\frac{d-b}{c}$

TH1: $c=0$ không tồn tại m

TH2: $c\neq 0$ tồn tại $m=\frac{d-b}{c}$

Tương tự cho trường hợp m nằm ở b.

Bài toán 2:Tìm giao điểm của đồ thị y=ax+b; y=cx+d

+) Giao điểm của hai đồ thị nói trên là nghiệm của phương trình

$$ax+b=cx+d \Leftrightarrow ax-cx=d-b \Leftrightarrow x(a-c)=d-b \Leftrightarrow x=\frac{d-b}{a-c}$$

TH1: $a-c=0$ hai đồ thị trên không có giao điểm

TH2: $a-c\neq 0$ giao điểm của hai đồ thị trên là A$\left(\frac{d-b}{a-c};\frac{ad-ab}{a-c}+b\right)$

Bài toán 3: Hệ số góc của đường thẳng y=ax+b

Ta có hệ số góc của đường thẳng y=ax+b là a ($a=\tan\alpha$ với α là góc tạo bởi đường thẳng với chiều dương trục Ox.

<u>Bài 1:</u> Cho hàm số y= (m-3)x +2

a) Với giá trị nào của m để đồ thị hàm số đi qua A (1 ; 2)
b) Xác định giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua B (1 ;-2)

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Vì đồ thị hàm số đi qua A (1 ;2) nên ta có : $2=(m-3).1+2 \Leftrightarrow m=3$

Vậy m=3 đồ thị hàm số đi qua A (1 ;2).

b) Tương tự a.

<u>Bài 2 :</u> Cho hàm số y=(a-1)x+a

a) Xác định giá trị của a để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

b) Xác định giá trị của a để hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Vì hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên ta có : 2=(a-1).0+a $\Leftrightarrow$ a=2.

b) Vì hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -3 nên ta có: (a-1).(-3)+a=0 $\Leftrightarrow$ a=$\frac{3}{2}$.

<u>Bài 3:</u> a) Vẽ đồ thị của hàm số y=x; y=2x+2 trên cùng mặt phẳng tọa độ

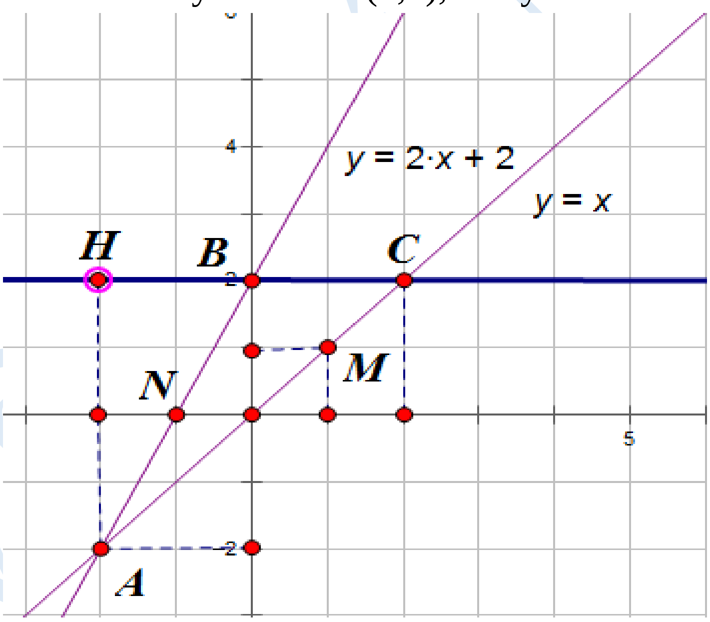
b) Gọi A là giao điểm của hai đồ thị nói trên, tìm tọa độ A

c) Vẽ qua điểm B(0;2) một đường thẳng song song với trục Ox, cắt đường thẳng y=x tại điểm C rồi tính diện tích tam giác ABC

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Cho x=0 thì y=0 ta có O(0;0); cho x=1 thì y=1 ta có M(1;1)

Cho x=0 thì y=2 ta có B(0;2); cho y=0 thì x=-1 ta có N(-1;0)



b) Tọa độ giao điểm của hai đồ thị nói trên là nghiệm của phương trinh $x = 2x + 2 \Leftrightarrow x = -2$ với $x = -2$ ta có $y = -2 \Rightarrow A(-2;-2)$.

Vậy giao điểm của hai đồ thị trên là $A(-2;-2)$.

c) Vì đường thẳng đi qua B(0;2) song song với trục Ox và cắt đường thẳng y=x tại điểm C nên ta có với y=2 thì x=2, Vậy C(2;2).

Dựng $AH \perp BC$ Ta có AH=4. Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}.4.2 = 4$ (dvdt)

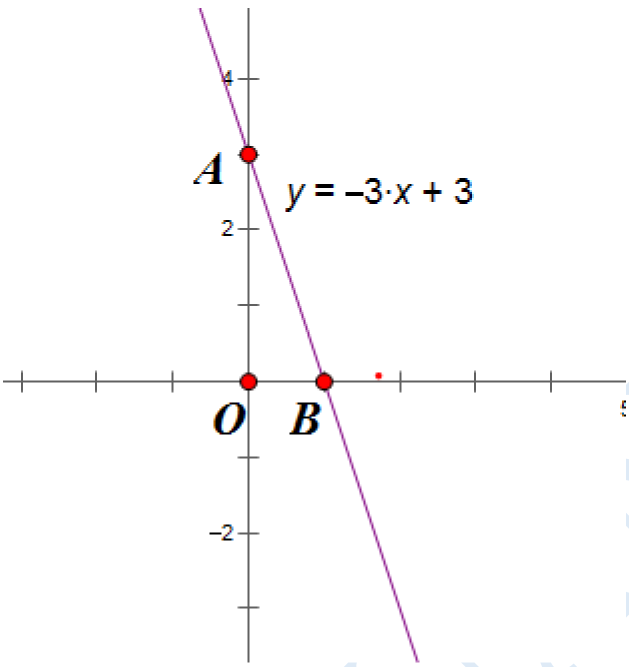
Bài 4: Cho hàm số $y = -3x + 3$

a) Vẽ đồ thị hàm số

b) Tính góc tạo bởi đường thẳng $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3$ với trục Ox

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Làm tương tự phần a bài 3 ta được đồ thị hàm số $y = -3x + 3$ như sau:



Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = -3x + 3$ với trục Ox ta có $\alpha = ABx$

Xét tam giác vuông OAB, ta có $tg\,ABO = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow OBA = 71^o34'$

Vậy $\alpha = 180^o - OBA \approx 108^o26'$.

Bài 5: Đề thi vào 10 Bắc Giang 2018 – 2019.

Tìm tham số m để đường thẳng $y = (m-1)x + 2018$ có hệ số góc là 3

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Vì đường thẳng có hệ số góc là 3 nên ta có: $m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy m=4 thì đường thẳng $y = (m-1)x + 2018$ có hệ số góc là 3.

Dạng 3: Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau, song song, trùng nhau

Phương pháp giải

Cho hai đường thẳng (d): y = a.x + b (a $\neq$ 0) và (d’): y = a’x + b’.

Khi đó:

$$+ \ d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$$

+ $d'\cap d'=\{A\}\Leftrightarrow a\ne a'$

+ $d\equiv d'\Leftrightarrow\begin{cases}a=a'\\b=b'\end{cases}$

+ $d\perp d'\Leftrightarrow a.a'=-1$

Bài 1: Tìm m để hai đường thẳng $y=(m-1)x+3$ và $y=mx+2$, song song, cắt nhau, vuông góc.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

+) Để hai đường thẳng song song với nhau thì $m-1=4m\Leftrightarrow m=\frac{-1}{3}$.

Vậy $m=\frac{-1}{3}$ thì hai đường thẳng song song với nhau.

+) Để hai đường thẳng cắt nhau thì $m-1\ne 4m\Leftrightarrow m\ne\frac{-1}{3}$

Vậy $m\ne\frac{-1}{3}$ thì hai đường thẳng cắt nhau.

+) Để hai đường thẳng vuông góc với nhau thì:

$$(m-1)4m=-1\Leftrightarrow 4m^2-4m+1=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$$

Vậy $m=\frac{1}{2}$ hai đường thẳng vuông góc với nhau

Dạng toán 4: Xác định hàm số bậc nhât

Phương pháp giải:

+)Xác định hàm số bậc nhất đi qua 2 điểm $A(x_1,y_1);B(x_2,y_2)$

Giả sử phương trình đường thẳng là $y=ax+b$ (1). Thay tọa độ $A(x_1,y_1);B(x_2,y_2)$ vào (1) ta được hệ phương trình:

$\begin{cases}y_1=ax_1+b\\y_2=ax_2+b\end{cases}$ giải hệ phương trình tìm được a,b thay vào (1) ta được hàm số bậc nhất

+) Xác định hàm số bậc nhất đi qua $A(x_1;y_1)$ và có hệ số góc là k

Gọi hàm số bậc nhất cần tìm là $y=ax+b$(1). Vì hệ số góc là k nên $a=k$, vì đường thẳng đi qua $A(x_1;y_1)$ nên thay tọa độ A vào (1) tìm được b. Từ a và b vừa tìm được thay vào (1) ta được phương trình đường thẳng cần tìm.

+) Xác định hàm số bậc nhất đi qua $A(x_1;y_1)$và tạo với Ox một góc α.

Gọi hàm số bậc nhất cần tìm là $y=ax+b$(1), vì đường thẳng tạo với trục Ox một góc α nên $a=\tan\alpha$. Thay tọa độ $A\left(x_1;y_1\right)$ vào (1) ta tìm được b. Từ đó kết luận phương trình đường thẳng cần tìm.

+) Xác định hàm số bậc nhất đi qua $A\left(x_1;y_1\right)$ và song song với đường thẳng (d) $y=ax+b$.

Gọi hàm số bậc nhất cần tìm là $y=mx+n$(1). Vì $y=mx+n$ song song với đường thẳng (d) nên $a=m$, thay tọa độ $A\left(x_1;y_1\right)$vào đường thẳng $y_1=ax_1+n$, từ đó tìm được n. Thay m,n vào (1) ta được hàm số bậc nhất

+) Xác định hàm số bậc nhất đi qua $A\left(x_1;y_1\right)$và vuông góc với đường thẳng $y=ax+b$.

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $y=mx+n$(1). Vì $y=mx+n$ song song với đường thẳng (d) nên $m=\frac{-1}{a}$. Thay tọa độ $A\left(x_1;y_1\right)$ vào đường thẳng $y_1=\frac{-1}{a}x_1+n$, giải phương trình tìm n. Thay m và n vừa tìm được vào (1) ta được đường thẳng cần tìm.

<u>Bài 1:</u> Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A(1;-1) và B(2;1)

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $y=ax+b$(1). Thay tọa độ A, B vào (1) ta được $\begin{cases}a+b=-1\\2a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$

Vậy đường thẳng cần tìm là y=2x-3.

<u>Bài 2:</u> Lập phương trình đường thẳng cắt trục tung tại 4 và cắt trục hoành tại -2.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $y=ax+b$(1). Vì đường thẳng cắt trục tung tại 4 nên A(0,4) thuộc đồ thị, và cắt trục tung tại -2 nên B(-2,0) thuộc đồ thị thay tọa độ A, B vào (1) ta được $\begin{cases}b=4\\a=2\end{cases}$

Vậy đường thẳng cần tìm là y=2x+4

<u>Bài 3:</u> Cho đường thẳng $y=\left(m-1\right)x+2n-3$(1). Lập phương trình đường thẳng biết hệ số góc là 3 và đi qua A(2;1)

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Vì hệ số góc là 3 nên $m-1=3\Leftrightarrow m=4$. Vì đường thẳng đi qua A(2;1) thay x=2;y=1 vào (1) ta được $1=4.2+2n-3\Leftrightarrow n=-1$.

Vậy đường thẳng cần tìm là y=3x-1.

Bài 4: Lập phương trình đường thẳng đi qua A(2,1) và tạo với trục Ox một góc 30^0

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi đường thẳng cần tìm là $y = ax + b\,(1)$, vì đường thẳng tạo với trục Ox một góc 30^0 nên $a = \tan 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$, vì đường thẳng đi qua A(2;1) nên thay x=2, y=1 và $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ vào (1) ta được $1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.2 + b \Leftrightarrow b = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy đường thẳng cần tìm là $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$

Bài 5: Cho đường thẳng $y = (m+1)x + 2n - 3\,(1)$. Tìm m, n biết đường thẳng song song với đường thẳng y=x+1 và đi qua A(2;2).

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Vì đường thẳng (1) song song với đường thẳng y=x+1 nên $m+1=1 \Leftrightarrow m=0$

Vì đường thẳng đi qua A(2, 2) nên thay x=2; y=2 vào đường thẳng (1) ta được

$2 = (m+1).2 + 2n - 3 \Leftrightarrow 2m + 2n = 3 \Leftrightarrow n = \frac{3}{2}$.

Vậy $m = 0; n = \frac{3}{2}$ là hai giá trị cần tìm.

Bài 6: Viết phương trình đường thẳng đi qua N(2; -1) và vuông góc với đường thẳng y=4x+5

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$ (d). Vì (d) vuông góc với đường thẳng y=4x+5 nên $a = \frac{-1}{4}$, Vì (d) đi qua N(2; -1) nên thay x=2 và y=-1 vào đường thẳng ta được: $-1 = 2a + b$ mà $a = \frac{-1}{4}$ nên $b = \frac{-1}{2}$.

Vậy đường thẳng cần tìm là $y = \frac{-1}{4}x - \frac{1}{2}$.

Dạng 5: Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng lớn nhất, nhỏ nhất.

Phương pháp giải:

Để tính khoảng cách từ điểm O(0; 0) đến một đường thẳng, ta tìm giao điểm của đường thẳng với hai trục Ox và Oy lần lượt là hai điểm là A và B. Từ O kẻ OH vuông góc với AB rồi tính OH dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông OAB.

Sau khi tính được khoảng cách, ta tìm Min, Max của khoảng cách.

<u>Bài 1:</u> Đề thi vào 10 – Phú Thọ (2017 – 2018)

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua $A(-1;\frac{1}{2}), B(2;2)$

b) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng A và B.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Giả sử phương trình đường thẳng cần tìm đi qua hai điểm A và B là $y = ax + b$ (d). Vì (d) đi qua $A(-1;\frac{1}{2}), B(2;2)$ nên ta có:

$$\begin{cases} -a + b = \frac{1}{2} \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = \frac{3}{2} \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng cần tìm là (d): $y = \frac{1}{2}x + 1$.

b) Ta có (d) cắt trục Oy tại điểm C(0; 1) và cắt trục Ox tại D(-2;0)
Vậy độ dài đoạn OC là 1 và độ dài đoạn OD là 2. Dựng $OH \perp CD$
Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông OCD ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OC^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow OH = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy khoảng cách từ O đến đường thẳng AB là $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Dạng 6: Xác định tham số m để đồ thị hàm số y=f(x,m)thỏa mãn một điều kiện cho trước.

Phương pháp giải:

<u>Bài toán 1:</u> Chứng minh đồ thị hàm số y=f(x,m) luôn đi qua điểm cố định:

Bước 1: Chuyển y=f(x,m) về dạng f(x,m)-y=0

Bước 2: Nhóm các số chưa m lại với nhau: m.f(x)+g(x,y)=0

Bước 3: Đồng nhất thức giải hệ $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ Tìm được (x,,y) từ đó suy ra điểm cố định.

<u>Bài toán 2:</u> Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số y=f(x,m) tạo với trục Ox một góc nhọn hoặc một góc tù.

Góc tạo bởi đường thẳng y=ax+b với trục Ox là α sao cho $\tan\alpha = a$

Nếu $a > 0$, đường thẳng tạo với trục Ox một góc nhọn

Nếu $a < 0$, đường thẳng tạo với trục Ox một góc tù

Góc tạo bởi đường thẳng $y = a_1x + b_1$, với đường thẳng $y = a_2x + b_2$ là góc α

sao cho $\tan\alpha = \left|\dfrac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2}\right|$.

Chú ý: Khi tính góc tạo bởi hai đường thẳng, nếu tính ra góc tù các em phải lấy góc kề bù với góc tù đó, vì góc giữa hai đường thẳng luôn là góc nhọn

Bài 1: Cho hàm số y=(m-2)x+3m-2. Với giá trị nào của m thì đường thẳng trên tạo với trục Ox một góc nhọn, tù

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Vì góc tạo bởi trục Ox và đường thẳng là α, nên $\tan\alpha = m - 2$

Để đường thẳng trên tạo với trục Ox một góc nhọn thì:

$\tan\alpha > 0 \Leftrightarrow m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$

Để đường thẳng tạo với trục Ox một góc tù thì

$\tan\alpha < 0 \Leftrightarrow m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Bài 2: Đề thi vào 10 – Phú Thọ (2016 – 2017)

Cho hàm số y=(2m+1)x+m+4 (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng (d)

Chứng minh rằng khi m thay đổi thì (d) luôn đi qua một điểm cố định

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi $N\left(x_0; y_0\right)$ là điểm cố định mà (d) đi qua. Khi đó ta có

$y_0 = (2m+1)x_0 + m + 4, \forall m$

$\Leftrightarrow (2m+1)x_0 + m + 4 - y_0 = 0, \forall m$

$\Leftrightarrow \left(2x_0 + 1\right)m + x_0 - y_0 + 4 = 0, \forall m$

$$\begin{cases} 2x_0 + 1 = 0 \\ x_0 - y_0 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{-1}{2} \\ y_0 = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy điểm cố định mà (d) luôn đi qua là $N\left(\dfrac{-1}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$.

Dạng 7:Chứng minh 3 điểm thẳng hàng

Phương pháp giải

Bài toán: Chứng minh 3 điểm $A(x_1; y_1), B\left(x_2; y_2\right), C\left(x_3; y_3\right)$ thẳng hàng

+) Viết phương trình đường thẳng đi qua AB, thay tọa độ điểm thứ 3 vào, nếu thỏa mãn thì 3 điểm thẳng hàng, nếu không thỏa mãn thì 3 điểm không thẳng hàng.

Bài 1:

Chứng minh 3 điểm A(1;2), B(-2; 0), C(0; $\dfrac{1}{2}$) thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng đi qua 3 điểm đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B xem **Dạng 4**

(d): y=$\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$, thay tọa độ C vào (d) ta được $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.0+\frac{1}{2}$ luôn đúng nên C nằm trên đường thẳng AB. Vậy 3 điểm A, B, C thẳng hàng và phương trình đường thẳng đi qua 3 điểm là (d): y=$\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

Dạng 8: Tìm m để 3 đường thẳng đồng quy (cùng đi qua một điểm)

Phương pháp giải:

Tìm giao điểm của hai đường thẳng không có tham số m để 3 đường thẳng đồng quy thì giao điểm đó khi thay vào đường thẳng số 3 phải thỏa mãn, từ đó tìm được điểm m.

Bài 1: Tìm m để 3 đường thẳng sau đồng quy.

$(d_1): y=2x-1,(d_2):3x+2,(d_3): y=(m-1)x+3$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Xét hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 ta có: $2x-1=3x+2 \Leftrightarrow x=-3$, với $x=-3 \Rightarrow y=-7$. Vậy giao điểm của d_1 và d_2 là A(-3; -7).

Để 3 đường thẳng đồng quy thì A phải thuộc d_3 nghĩa là:

$-7=(m-1).(-3)+3 \Leftrightarrow m=\frac{13}{3}$. Vậy $m=\frac{13}{3}$ thì 3 đường thẳng đồng quy.

III. BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 1:

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm (1 ; 2) và (-1 ; -4).

b) Tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng trên với trục tung và trục hoành.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Gọi phương trình đường thẳng cần tìm có dạng: y = ax + b.

Do đường thẳng đi qua hai điểm (1;2) và (-1;-4) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2=a+b \\ -4=-a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: y = 3x - 1

b) Đồ thị cắt trục tung (*x = 0*), suy ra có tung độ bằng -1. Giao điểm là (0;-1).

Đồ thị cắt trục hoành (*y = 0*), suy ra có hoành độ bằng $\frac{1}{3}$. Giao điểm là $\left(\frac{1}{3};0\right)$

Bài 2: Cho hàm số y = (m - 2)x + m + 3

a) Tìm điều kiện của m để hàm số luôn nghịch biến

b) Tìm m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3

c) Tìm m để đồ thị của hàm số trên và các đồ thị của các hàm số y = -x + 2; y = 2x - 1 đồng quy

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Hàm số y = (m - 2)x + m + 3 nghịch biến $\Leftrightarrow$ m - 2 < 0 $\Leftrightarrow$ m < 2.

Vậy m < 2 thì hàm số đã cho luôn nghịch biến.

b) Do đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

Suy ra : x= 3 ; y = 0.

Thay x= 3 ; y = 0 vào hàm số y = (m - 2)x + m + 3, ta được $m = \frac{3}{4}$.

c) Giao điểm của hai đồ thị y = -x + 2 ; y = 2x - 1 là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ (x;y) = (1;1).

Để 3 đồ thị y = (m – 2)x + m + 3, y = -x + 2 và y = 2x - 1 đồng quy cần: (x;y) = (1;1) là nghiệm của phương trình (*hay y = (m – 2)x + m + 3 phải đi quan điểm (1;1)*):

y = (m – 2)x + m + 3. Với (x;y) = (1;1) $\Rightarrow$ m = 0.

Vậy khi m = 0 thì 3 hàm số đã cho đồng quy.

Bài 3: Cho hàm số y = (m - 1)x + m + 3.

a) Tìm giá trị của m để đồ thị của hàm số song song với đồ thị hàm số y = -2x + 1

b) Tìm giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm (1;-4)

c) Tìm điểm cố định mà đồ thị của hàm số luôn đi qua với mọi m

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Để hai đồ thị của hàm số song song với nhau cần: m - 1 = - 2 $\Leftrightarrow$ m = -1.

Vậy với m = -1 đồ thị của hàm số song song với đồ thị hàm số y = -2x + 1.

b) Thay (x;y) = (1; -4) vào phương trình: y = (m - 1)x + m + 3. Ta được m = -3.

Vậy với m = -3 thì đồ thị của hàm số đi qua điểm (1;-4).

c) Gọi điểm cố định mà đồ thị luôn đi qua là M(x_0;y_0). Ta có

$y_0 = (m - 1)x_0 + m + 3 \Leftrightarrow (x_0 - 1)m - x_0 - y_0 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ -x_0 - y_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

Vậy với mọi m thì đồ thị luôn đi qua điểm cố định (1;2).

Bài 4: Cho hai điểm A(1 ; 1), B(2 ; -1).

a) Viết phương trình đường thẳng AB.

b) Tìm các giá trị của m để đường thẳng y = (m^2 - 3m)x + m^2 - 2m + 2 song song với đường thẳng AB đồng thời đi qua điểm C(0 ; 2).

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Gọi phương trình đường thẳng AB có dạng : y = ax + b.

Do đường thẳng đi qua hai điểm (1;1) và (2;-1) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 1 = a + b \\ -1 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: y = - 2x + 3.

b) Để đường thẳng y = $(m^2 - 3m)x + m^2 - 2m + 2$ song song với đường thẳng AB đồng thời đi qua điểm C(0;2) ta cần : $\begin{cases} m^2 - 3m = -2 \\ m^2 - 2m + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$ m = 2.

Vậy m = 2 thì đường thẳng y = $(m^2 - 3m)x + m^2 - 2m + 2$ song song với đường thẳng AB đồng thời đi qua điểm C(0 ; 2).

<u>Bài 5</u>: Cho hàm số y = (2m - 1)x + m - 3.

a) Tìm m để đồ thị của hàm số đi qua điểm (2; 5)

b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định với mọi m. Tìm điểm cố định ấy.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) m = 2.

b) Gọi điểm cố định mà đồ thị luôn đi qua là $M(x_0 ;y_0)$. Ta có

$y_0 = (2m - 1)x_0 + m - 3 \Leftrightarrow (2x_0 + 1)m - x_0 - y_0 - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 1 = 0 \\ -x_0 - y_0 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{-1}{2} \\ y_0 = \dfrac{-5}{2} \end{cases}$$

Vậy với mọi m thì đồ thị luôn đi qua điểm cố định $(\frac{-1}{2};\frac{-5}{2})$.

IV - BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

<u>Bài 1:</u> Cho hai hàm số: y = x và y = 3x

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số đó trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy

b) Đường thẳng song song với trục Ox, cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 6, cắt các đường thẳng: y = x và y = 3x lần lượt ở A và B. Tìm tọa độ các điểm A và B. Tính chu vi, diện tích tam giác OAB.

<u>Bài 2:</u> Cho hàm số: y = (m + 4)x - m + 6 (d).

a) Tìm các giá trị của m để hàm số đồng biến, nghịch biến.

b) Tìm các giá trị của m, biết rằng đường thẳng (d) đi qua điểm A(-1; 2). Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị tìm được của m.

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì các đường thẳng (d) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

<u>Bài 3:</u> Cho ba đường thẳng y = -x + 1, y = x + 1 và y = -1.

a) Vẽ ba đường thẳng đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

b) Gọi giao điểm của đường thẳng y = -x + 1 và y = x + 1 là A, giao điểm của đường thẳng y = -1 với hai đường thẳng y = -x + 1 và y = x + 1 theo thứ tự là B và C. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

c) Tam giác ABC là tam giác gì? Tính diện tích tam giác ABC.

<u>Bài 4:</u> Cho đường thẳng (d): y = - 2x + 3.

a) Xác định tọa độ giao điểm A và B của đường thẳng d với hai trục Ox, Oy, tính khoảng cách từ điểm O(0; 0) đến đường thẳng (d).

b) Tính khoảng cách từ điểm C(0; -2) đến đường thẳng (d).

Bài 5: Cho hai đường thẳng: y = (m + 1)x - 3 và y = (2m - 1)x + 4.

a) Chứng minh rằng khi m = 0 thì hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau.

Bài 6: Xác định hàm số y = ax + b trong mỗi trường hợp sau:

a) Khi đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng .

b) Khi a = - 5, đồ thị hàm số đi qua điểm A(- 2; 3).

c) Đồ thị hàm số đi qua hai điểm M(1; 3) và N(- 2; 6).

d) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng và đi qua điểm .

Bài 7: Cho đường thẳng: y = 4x (d).

a) Viết phương trình đường thẳng (d_1) song song với đường thẳng (d) và có tung độ gốc bằng 10.

b) Viết phương trình đường thẳng (d_2) vuông góc với đường thẳng (d) và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng -8.

c) Viết phương trình đường thẳng (d_3) song song với đường thẳng (d) cắt trục Ox tại A, cắt trục Oy tại B và diện tích tam giác AOB bằng 8.

Bài 8: Cho hai đường thẳng: y = (k - 3)x - 3k + 3 (d_1); y = (2k + 1)x + k + 5 (d_2). Tìm các giá trị của k để:

a) (d_1) và (d_2) cắt nhau.

b) (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

c) (d_1) và (d_2) song song với nhau.

d) (d_1) và (d_2) vuông góc với nhau.

e) (d_1) và (d_2) trùng nhau.

Bài 9: Cho hàm số bậc nhất: y = (m + 3)x + n (d).
Tìm các giá trị của m, n để đường thẳng (d):

a) Đi qua điểm A(1; - 3) và B(- 2; 3).

b) Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng x= 2 , cắt trục hoành tại điểm có hoành độ y=4.

c) Cắt đường thẳng 3y - x - 4 = 0.

d) Song song với đường thẳng 2x + 5y = - 1.

e) Trùng với đường thẳng y - 3x - 7 = 0.

Bài 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y=\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng (d): y = mx + n. Tìm các giá trị của m và n biết đường thẳng (d) thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a) Song song với đường thẳng y = x và tiếp xúc với (P)

b) Đi qua điểm A(1,5; -1) và tiếp xúc với (P).

Tìm tọa độ tiếp điểm của (P) và (d) trong mỗi trường hợp trên.

Bài 12: Trong cùng hệ trục tọa độ gọi (P) là đồ thị hàm số $y = ax^2$ và (d) là đồ thị hàm số y = - x + m.

a) Tìm a biết rằng (P) đi qua A(2; -1) và vẽ (P) với a tìm được.

b) Tìm m sao cho (d) tiếp xúc với (P) (ở câu 1) và tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 13: Cho họ đường thẳng có phương trình: mx + (2m - 1)y + 3 = 0 (1).

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua A(2; 1).

b) Chứng minh rằng các đường thẳng trên luôn đi qua một điểm cố định M với mọi m. Tìm tọa độ của M.

Bài 14: Cho parabol (P): $y = x^2 - 4x + 3$

a) Chứng minh đường thẳng y = 2x - 6 tiếp xúc với (P).

b) Giải bằng đồ thị bất phương trình: $x^2 - 4x + 3 >$ 2x - 4.

Bài 15: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

a) Vẽ (P).

b) Gọi A và B là hai điểm nằm trên (P) lần lượt có hoành độ -1 và 2. Chứng minh rằng tam giác OAB vuông.

c) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với AB và tiếp xúc với (P).

Bài 16: Cho hàm số: $y = 2x^2$ (P).

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

b) Tìm quỹ tích các điểm M sao cho qua M có thể kẻ được hai đường thẳng vuông góc và cùng tiếp xúc với (P).

Bài 17: Trong cùng mặt phẳng tọa độ cho parabol (P): $y = -x^2 + 4x - 3$ và đường thẳng (d): 2y + 4x - 17 = 0.

a) Vẽ (P) và (d).

b) Tìm vị trí của A thuộc (P) và B thuộc (d) sao cho độ dài đoạn AB ngắn nhất.

Bài 18: Cho parabol (P): $y = -x^2 + 6x - 5$.

Gọi (d) là đường thẳng đi qua A(3; 2) và có hệ số góc m.

a) Chứng tỏ rằng với mọi m, đường thẳng (d) luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt B, C.

b) Xác định đường thẳng (d) sao cho độ dài đoạn BC đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 19: Cho hai đường thẳng (d1): $y = (m^2 + 2m)x$ và (d2): y = ax (a≠0).

a) Định a để (d2) đi qua A(3; -1).

b) Tìm các giá trị m để cho (d1) vuông góc với (d2) ở câu 1).

Bài 20: Cho hàm số: y = ax + b (d_1).

a) Tìm a và b cho biết đồ thị hàm số đi qua hai điểm M(-1;1) và N(2; 4). Vẽ đồ thị (d_1) của hàm số với a, b tìm được.

b) Xác định m để đồ thị hàm số (d_2): $y=(2m^2-m)x+m^2+m$ là một đường thẳng song song với (d_1). Vẽ (d_2) vừa tìm được.

c) Gọi A là điểm trên đường thẳng (d_1) có hoành độ x = 2. Tìm phương trình đường thẳng (d_3) đi qua A vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2). Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

Bài 21: Cho hàm số: y = mx - 2m - 1 (1) (m≠0).

a) Xác định m để đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ O. Vẽ đồ thị (d_1) vừa tìm được.

b) Tính theo m tọa độ các giao điểm A, B của đồ thị hàm số (1) lần lượt với các trục Ox và Oy. Xác định m để tam giác AOB có diện tích bằng 2 (đ.v.d.t).

c) Chứng minh rằng đồ thị hàm số (1) luôn luôn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.

Bài 22: Cho parabol (P): $y=ax^2$ và hai điểm A(2;3), B(-1;0).

a) Tìm a biết rằng (P) đi qua điểm M(1; 2). Khảo sát và vẽ (P) với a tìm được.

b) Tìm phương trình đường thẳng AB rồi tìm giao điểm của đường thẳng này với (P) (ở câu a).

c) Gọi C là giao điểm có hoành độ dương. Viết phương trình đường thẳng qua C và có với (P) một điểm chung duy nhất.

Bài 23: Cho hàm số: $y=x^2-2x+m-1$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P) khi m = 1.

b) Xác định m để đồ thị (P) của hàm số tiếp xúc với trục hoành.

c) Xác định m để đồ thị (P) của hàm số cắt đường thẳng (d) có phương trình: y = x + 1 tại hai điểm phân biệt.

Bài 24: Cho đường thẳng (d_1): y = mx - 3 và (d_2): y = 2mx + 1 - m.

a) Vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy các đường thẳng (d_1) và (d_2) ứng với m = 1. Tìm tọa độ giao điểm B của chúng.

b) Qua O viết phương trình đường thẳng vuông góc với (d_1) tại A. Xác định A và tính diện tích tam giác AOB.

c) Chứng tỏ rằng các đường thẳng (d_1) và (d_2) đều đi qua những điểm cố định. Tìm tọa độ của điểm cố định.

Bài 25: Cho parabol (P): $y=x^2-4x+3$ và điểm A(2; 1). Gọi (d) là đường thẳng đi qua A và có hệ số góc m.

a) Chứng minh rằng (d) luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt M và N.

b) Xác định m để MN ngắn nhất.

CHUYÊN ĐỀ 3 - HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ

I - KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Dạng hệ phương trình: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1(1) \\ a_2x+b_2y=c_2(2) \end{cases}$

1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Bước 1: Từ phương trình (1) ta rút ẩn x theo y hoặc y theo x.

Bước 2: Thế vào phương trình (2).

Bước 3: Giải phương trình (2) ta tìm được x hoặc y.

Bước 4: Thế nghiệm x hoặc y vừa tìm được vào phương trình (1).

Chú ý: Ta có thể rút từ phương trình (2) rồi thế vào phương trình (1) tùy vào từng bài toán

2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp công đại số

Bước 1: Nhân các vế của phương trình với một số thích hợp để được hệ số nào đó của một ẩn đối dấu nhau.

Bước 2: Cộng hai phương trình với nhau ta được phương trình (3).

Bước 3: Giải phương trình (3).

Bước 4: Thế nghiệm tìm được của phương trình (3) vào phương trình (1) hoặc (2) để tìm ẩn còn lại.

Chú ý: Trong quá trình thế hoặc cộng đại số nếu xuất hiện cả hai vế của phương trình đều bằng 0 thì hệ phương trình đã cho vô số nghiệm, còn nếu một về bằng 0 một vế khác 0 thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

II –Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Phương pháp giải: Đã được trình bày ở phần kiến thức cần nhớ (bạn đọc xem lại).

Bài 1: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

$a)\begin{cases} 4x-5y=3 \\ 3x-y=16 \end{cases}$ $b)\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 7x-3y=5 \\ 4x+y=2 \end{cases}$ $d)\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1 \\ 5x-8y=3 \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

$$a)\begin{cases} 4x-5y=3 \\ 3x-y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-5y=3 \\ y=3x-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-5(3x-16)=3 \\ y=3x-16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-15x+80=3 \\ y=3x-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11x=-77 \\ y=3x-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (x;y)=(7;5)

Câu b, c, d làm tương tự a.

Dạng 2: Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Phương pháp giải: Đã được trình bày ở phần kiến thức cần nhớ (bạn đọc xem lại).

Bài 1: Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

$a)\begin{cases}2x-11y=-7\\10x+11y=31\end{cases}$ $b)\begin{cases}8x-7y=5\\15x+21y=0,5\end{cases}$ $c)\begin{cases}\dfrac{2x+1}{4}-\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{1}{12}\\\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y+7}{3}-4\end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

$$a)\begin{cases}2x-11y=-7\\10x+11y=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12x=24\\10x+11y=31\end{cases}\begin{cases}x=2\\10.2+11y=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (x;y)= (2; 1)

Câu b, c, d làm tương tự a.

Dạng 3: Giải hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp giải:

Tìm mối liên hệ giữa các đại lượng trong hệ phương trình, xem xét các đại lượng giống nhau rồi dặt ẩn. Khi đặt ẩn chú ý điều kiện của ẩn. Rồi giải hệ phương trình mới bằng cộng đại số hoặc thế, sau khi tìm được nghiệm của hệ mới ta thay giá trị vừa tìm được giải hệ ban đầu đặt rồi kết luận.

Bài 1: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn phụ

$a)\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{-3}{2}\\\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{8}{3}\end{cases}$ $b)\begin{cases}\dfrac{2}{x+y-1}-\dfrac{4}{x-y+1}=\dfrac{-14}{5}\\\dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{2}{x-y+1}=\dfrac{-13}{5}\end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

$$a)\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{-3}{2}\\\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{8}{3}\end{cases}\text{(I)}$$

Đặt $\begin{cases}\dfrac{1}{x}=a\\\dfrac{1}{y}=b\end{cases}$ (I) $\Leftrightarrow\begin{cases}3a+5b=\dfrac{-3}{2}\\5a-2b=\dfrac{8}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a+10b=-3\\25a-10b=\dfrac{40}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}31a=\dfrac{31}{3}\\6a+10b=-3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (x;y) = (3; -2)

b) Làm tương tự a

Dạng 4: Xác định giá trị tham số m để hệ phương trình vô nghiệm

Phương pháp giải:

+) *Cách 1*: Hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ vô nghiệm khi $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

+) *Cách 2*:Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số hoặc phương pháp thế rồi dựa vào điều kiện tìm giá trị của m để kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m-1)x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ (I)

a) Giải (I) với m =2

b) Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình (I) vô nghiệm

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Thay m = 2 vào (I) rồi áp dụng quy tắc thế hoặc cộng đại số đã trình bày ở trên giải hệ.

b) Để hệ phương trình (I) vô nghiệm thì:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m-1}{3} = \dfrac{-2}{2} \\ \dfrac{2}{-2} \neq \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Vì $-1 \neq \dfrac{1}{4}$ nên $2m - 2 = -6 \Leftrightarrow 2m = -4 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy m=-2 thì hệ phương trình vô nghiệm

Dạng 5:Xác định giá trị tham số m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất, tìm nghiệm duy nhất đó.

Phương pháp giải:

+) *Cách 1*: Hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ có nghiệm khi $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

+) *Cách 2*: Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số hoặc phương pháp thế rồi dựa vào điều kiện tìm giá trị của m để kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài 1: Đề thi vào 10 Phú Thọ đợt 2 (2008 – 2009)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx+y=1 \\ 2x-(2m+1)y=-1 \end{cases}$ (I) (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình với m =2
b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Thay m=2 vào hệ (I) rồi xem lại cách giải ở dạng 1 và dạng 2
b)

*Cách 1:*Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì:

$$\frac{2m}{2} \neq \frac{1}{-2m-1} \Leftrightarrow 2m^2+m+1 \neq 0 \Leftrightarrow 2\left(m+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8} \neq 0, \forall m$$

Vậy hệ phương trình (I) luôn có nghiệm với $\forall m$

Cách2:

$$\begin{cases} 2mx+y=1 \\ 2x-(2m+1)y=-1 \end{cases} \begin{cases} y=1-2mx \\ 2x-(2m+1)y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2mx \\ 2x-(2m+1)(1-2mx)=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2mx \\ 2x-2m+4m^2x+1-2mx=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2mx \\ x(4m^2-2m+2)=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1-2mx \\ x=\dfrac{-1}{2m^2-m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2mx \\ x=\dfrac{-1}{2(m+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}} \neq 0(\forall m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=(1-2m)(\dfrac{-1}{2(m+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}}) \\ x=\dfrac{-1}{2(m+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất với mọi m.

Chú ý: Khi làm cách 2 ngoài việc chứng minh được phương trình có nghiệm duy nhất thì ta có thể chỉ ra được nghiệm duy nhất đó.

Dạng 6:Tìm nghiệm x, y có chứa tham số m sau đó tìm GTLN hoặc GTNN của biểu thức cho trước

Phương pháp giải

Dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số tìm nghiệm của hệ phương trình đã cho sau đó thay nghiệm x, y vừa tìm được thay vào biểu thức ban đầu Áp dụn bất đẳng thức cau – chy, hoặc đưa về hằng đẳng thức số 1, 2 đánh giá với một số rồi kết luận GTLN hoặc GTNN.

Bài 1:Đề thi vào 10 Vĩnh Phúc (2017 – 2018)

Cho hệ phuong trình $\begin{cases} x-2y=3-m \\ 2x+y=3(m+2) \end{cases} (I)$, m là tham số

a) Giải hệ (I) với m =2
b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất
c) Tính GTNN của biểu thức $A=x^2+y^2$ với (x, y) là nghiệm duy nhất của hệ (I)

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Phần a, b làm theo cách giải đã được trình bày ở trên

$$c)\begin{cases} x-2y=3-m \\ 2x+y=3(m+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-m+2y \\ 6-2m+4y+y=3m+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-m+2y \\ 5y=5m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+m \\ y=m \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (x; y) = (3+m; m).

$$A=x^2+y^2=(3+m)^2+(m)^2=9+6m+2m^2$$

$$=2(m^2+3m+\frac{9}{2})=2\left(m+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\geq\frac{3}{2},\forall m$$

Dấu "=" xẩy ra khi $m+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow m=\frac{-3}{2}$

Vậy GTNN của $A=\frac{3}{2}$ khi $m=\frac{-3}{2}$.

Dạng 7: Hệ phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp giải:

Khử giá trị tuyệt đối sau đó dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số để tìm cặp nghiệm (x; y)

Bài 1: Đề thi vào 10 Hà Nội (2018 – 2019)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x-|y+2|=3 \\ x+2|y+2|=3 \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

$$\begin{cases} 4x-|y+2|=3 \\ x+2|y+2|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-|y+2|=3 \\ 4x+8|y+2|=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9|y+2|=-9 \\ 4x-|y+2|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y+2|=1 \\ 4x-|y+2|=3 \end{cases} (I)$$

TH1: $y+2\geq 0 \Leftrightarrow y\geq -2$ $\begin{cases} y+2=1 \\ 4x-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ (TM)

TH2: $y+2<0 \Leftrightarrow y<-2\begin{cases} y+2=-1 \\ 4x-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ (TM)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (1; 1), (1;-3)

Bài 1: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{6x-3}{y-1}-\dfrac{2y}{x+1}=5 \\ \dfrac{4x-2}{y-1}-\dfrac{4y}{x+1}=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(y-2)=(x+2)(y-4) \\ (x-3)(2y+7)=(2x-7)(y+3) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{6}{x}-\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Đặt $u=\dfrac{2x-1}{y-1}, v=\dfrac{y}{x+1}$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} 3u-2v=5 \\ 2u-4v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{y-1}=2 \\ \dfrac{y}{x+1}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=-1 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy $S=\left\{\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

b)

$$\begin{cases} x(y-2)=(x+2)(y-4) \\ (x-3)(2y+7)=(2x-7)(y+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-2x=xy+2y-4x-8 \\ 2xy-6y+7x-21=2xy-7y+6x-21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-4 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (-2; 2).

c) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{y}=4 \\ \dfrac{6}{x}-\dfrac{2}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{x}=4+1 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{x}=5 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.(*thỏa mãn*)

Vậy hệ có nghiệm (x;y)=(2;1).

Bài 2: a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+3y=4 \end{cases}$

b) Xác định các giá trị của m để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$\begin{cases} (m+2)x+(m+1)y=3 \\ x+3y=4 \end{cases}$ (*m là tham số*)

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x+y=3\\x+3y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=3\\2x+6y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y=5\\x+3y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm là: (1;1)

b) Hệ phương trình vô nghiệm khi:

$$\frac{m+2}{1}=\frac{m+1}{3}\neq\frac{3}{4}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{m+2}{1}=\dfrac{m+1}{3}\\\dfrac{m+1}{3}\neq\dfrac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3m+6=m+1\\4m+4\neq 9\end{cases}\Rightarrow m=-\frac{5}{2}$$

Vậy m = -5/ 2 thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

<u>Bài 3:</u>a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x-2y=1\\-x+3y=2\end{cases}$.

b) Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases}2x-y=m-1\\3x+y=4m+1\end{cases}$

có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện x + y > 1.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}3x-2y=1\\-x+3y=2\end{cases}.\Leftrightarrow\begin{cases}3(3y-2)-2y=1\\x=3y-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7y=7\\x=3y-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=1\end{cases}$$

b) Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases}2x-y=m-1\\3x+y=4m+1\end{cases}$ có nghiệm (x; y) (*tmđ x + y > 1*).

$$\begin{cases}2x-y=m-1\\3x+y=4m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x=5m\\2x-y=m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=m\\2m-y=m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=m\\y=m+1\end{cases}$$

Mà x + y > 1 suy ra m + m + 1 > 1 $\Leftrightarrow$ 2m > 0 $\Leftrightarrow$ m > 0.

Vậy với m > 0 thì hệ phương trình có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện x+y > 1.

<u>Bài 4.</u> Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x-(m+1)y=4m\\x+(m-2)y=2\end{cases}$, với $m\in R$

a) Giải hệ đã cho khi m = -3

b) Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a)Giải hệ đã cho khi m =-3

Ta được hệ phương trình $\begin{cases}-2x+2y=-12\\x-5y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=-6\\x-5y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=1\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ với $(7;1)$

b)Điều kiện có nghiệm duy nhất của hệ phương trình:

$$\frac{m+1}{1} \neq \frac{-(m+1)}{m-2} \Leftrightarrow (m+1)(m-2) \neq -(m+1)$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m-2)+(m+1) \neq 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $m \neq -1$ và $m \neq 1$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x-(m+1)y=4m \\ x+(m-2)y=2 \end{cases}$ khi $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} (m+1)x-(m+1)y=4m \\ x+(m-2)y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=\dfrac{4m}{m+1} \\ x+(m-2)y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+\dfrac{4m}{m+1} \\ y=\dfrac{-2}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4m-2}{m+1} \\ y=\dfrac{-2}{m+1} \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm (x; y) với $\left(\dfrac{4m-2}{m+1};\dfrac{-2}{m+1}\right)$

<u>Bài 5:</u>Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=5m-1 \\ x-2y=2 \end{cases}$ *(m là tham số)*

a) Giải hệ phương trình với $m=1$

b) Tìm *m* để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn: $x^2-2y^2=1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Với $m=1$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=8 \\ x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=10 \\ x-2y=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

b) Giải hệ: $\begin{cases} 2x+y=5m-1 \\ x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=10m-2 \\ x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=10m \\ x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2m \\ y=m-1 \end{cases}$

Ta có: $x^2-2y^2=1 \Leftrightarrow (2m)^2-2(m-1)^2=1 \Leftrightarrow 2m^2+\ 4m-3=0$

Vậy giá trị m thỏa mãn yêu cầu là: $m=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{2}$ và $m=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$

<u>Bài 6:</u> Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x+y=2m+9 \\ x+y=5 \end{cases}$ có nghiệm (x;y).

Tìm m để biểu thức (xy+x-1) đạt giái trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Từ hệ phương trình => x = m + 2 và y = 3 – m

=> A = (xy+x-1) = …= 8 - (m -1)^2

A_{max}= 8 khi m = 1.

Bài 7: a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x+y=3\\x+3y=4\end{cases}$

b) Xác định các giá trị của m để hệ phương trình sau vô nghiệm:
$\begin{cases}(m+2)x+(m+1)y=3\\x+3y=4\end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x+y=3\\x+3y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=3\\2x+6y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y=5\\x+3y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

b) Hệ phương trình vô nghiệm khi:

$$\frac{m+2}{1}=\frac{m+1}{3}\neq\frac{3}{4}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{m+2}{1}=\dfrac{m+1}{3}\\\dfrac{m+1}{3}\neq\dfrac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3m+6=m+1\\4m+4\neq 9\end{cases}\Rightarrow m=-\frac{5}{2}$$

Bài 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x}{y}=3\\x+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y}=3\end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Đặt $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=a\\x+\dfrac{1}{y}=b\end{cases}$ Ta có $\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x}{y}=3\\x+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2-\dfrac{x}{y}=3\\x+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y}=3\end{cases}$

nên $\begin{cases}b^2-a=3\\b+a=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2+b-6=0\\b+a=3\end{cases}\begin{cases}a=6\\b=-3\end{cases}\text{v}\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$

Bài 9: Giải hệ phương trình : $\begin{cases}|x|+|y-3|=1\\y-|x|=3\end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Từ $y-|x|=3\Leftrightarrow y-3=|x|\Rightarrow y-3\geq 0\Rightarrow|y-3|=y-3$

$$\begin{cases}|x|+|y-3|=1\\y-|x|=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|+y-3=1\\y-|x|=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|+y=4\\y-|x|=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2|x|=1\\y=|x|+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{7}{2}\end{cases}(nhận)$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm (x; y) $=(\frac{1}{2};\frac{7}{2}),(-\frac{1}{2};\frac{7}{2})$

Bài 10:

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x-2y=1\\-x+3y=2\end{cases}$.

b) Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases}2x-y=m-1\\3x+y=4m+1\end{cases}$

có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện x + y > 1.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a)Giải hệ phương trình:

$\begin{cases}3x-2y=1\\-x+3y=2\end{cases}. \Leftrightarrow \begin{cases}3(3y-2)-2y=1\\x=3y-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7y=7\\x=3y-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\x=1\end{cases}$

b) Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases}2x-y=m-1\\3x+y=4m+1\end{cases}$

có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện x + y > 1.

$\begin{cases}2x-y=m-1\\3x+y=4m+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x=5m\\2x-y=m-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=m\\2m-y=m-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=m\\y=m+1\end{cases}$

Mà x + y > 1 suy ra m + m + 1 > 1 $\Leftrightarrow$ 2m > 0 $\Leftrightarrow$ m > 0.

Vậy với m > 0 thì hệ phương trình có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện x+y > 1.

<u>Bài 11:</u>Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x-(m+1)y=4m\\x+(m-2)y=2\end{cases}$, với $m\in R$

a) Giải hệ đã cho khi m =-3

b) Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a)Giải hệ đã cho khi m =-3

Ta được hệ phương trình $\begin{cases}-2x+2y=-12\\x-5y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+y=-6\\x-5y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=7\\y=1\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ với $(7;1)$

b)Điều kiện có nghiệm của phương trình

$$\frac{m+1}{1}\neq\frac{-(m+1)}{m-2}\Leftrightarrow(m+1)(m-2)\neq-(m+1)$$

$$\Leftrightarrow(m+1)(m-2)+(m+1)\neq0\Leftrightarrow(m+1)(m-1)\neq0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\neq0\\m-1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-1\\m\neq1\end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $m\neq-1$ và $m\neq1$

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x-(m+1)y=4m\\x+(m-2)y=2\end{cases}$ khi $\begin{cases}m\neq-1\\m\neq1\end{cases}$

$$\begin{cases}(m+1)x-(m+1)y=4m\\ x+(m-2)y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=\dfrac{4m}{m+1}\\ x+(m-2)y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+\dfrac{4m}{m+1}\\ y=\dfrac{-2}{m+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4m-2}{m+1}\\ y=\dfrac{-2}{m+1}\end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm (x; y) với $\left(\dfrac{4m-2}{m+1};\dfrac{-2}{m+1}\right)$

<u>Bài 12:</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+xy-4x=-6\\ y^2+xy=-1\end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Nếu (x;y) là nghiệm của (2) thì $y \neq 0$.

Do đó: (2) $\Leftrightarrow x=\dfrac{-y^2-1}{y}$ (3)

Thay (3) vào (1) và biến đổi, ta được: $4y^3 + 7y^2 + 4y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y + 1)(4y^2 + 3y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow y = -1$

$y = -1 \Rightarrow x = 2$

Vậy hệ có một nghiệm: (x ; y) = (2 ; −1).

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các hệ ph□ơng trình

a. $\begin{cases}(x+2)(y-2)=xy\\ (x+4)(y-3)=xy+6\end{cases}$ b. $\begin{cases}(x-1)(y-2)-(x+1)(y-3)=4\\ (x-3)(y+1)-(x-3)(y-5)=18\end{cases}$ c. $\begin{cases}(x+5)(y-2)=xy\\ (x-5)(y+12)=xy\end{cases}$

d. $\begin{cases}\dfrac{2x-5y-1}{11}+\dfrac{x-2y}{3}=16\\ \dfrac{7x+y}{5}+\dfrac{2(x-1)}{3}=31\end{cases}$ e. $\begin{cases}\dfrac{9x}{7}-\dfrac{2y}{3}=-28\\ \dfrac{3x}{2}+\dfrac{12y}{5}=15\end{cases}$ f. $\begin{cases}x+y=\dfrac{4x-3}{5}\\ x+3y=\dfrac{15-9y}{14}\end{cases}$

g. $\begin{cases}\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{1}{y-1}=10\\ \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{y-1}=18\end{cases}$ h. $\begin{cases}\dfrac{4}{x+2y}-\dfrac{1}{x-2y}=1\\ \dfrac{20}{x+2y}+\dfrac{3}{x-2y}=1\end{cases}$ i. $\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}=\dfrac{13}{36}\\ \dfrac{6}{\sqrt{x}}+\dfrac{10}{\sqrt{y}}=1\end{cases}$

k. $\begin{cases}\dfrac{2}{3x-y}-\dfrac{5}{x-3y}=3\\ \dfrac{1}{3x-y}+\dfrac{2}{x-3y}=\dfrac{3}{5}\end{cases}$ l. $\begin{cases}\dfrac{7}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3}\\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}}+\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{13}{6}\end{cases}$ m. $\begin{cases}\dfrac{3}{x+y-3}-\dfrac{2}{x-y-1}=8\\ \dfrac{3}{x+y-3}+\dfrac{1}{x-y+1}=1,5\end{cases}$

Bài 2. Giải các hệ ph□ơng trình

a. $\begin{cases}|x-1|+|y-2|=1\\|x-1|+3y=3\end{cases}$ b. $\begin{cases}\sqrt{x^2+10x+25}=x+5\\\sqrt{x^2-10x+25}=5-x\end{cases}$ c. $\begin{cases}|x-2|+2|y-1|=9\\x+|y-1|=-1\end{cases}$

d. $\begin{cases}x^2+y^2=2(xy+2)\\x+y=6\end{cases}$ e. $\begin{cases}x+y+xy+1=0\\x^2+y^2-x-y=22\end{cases}$ f. $\begin{cases}x+y+xy=7\\x^2+y^2+xy=13\end{cases}$

g. $\begin{cases}x^2+y^2=10\\x+y=4\end{cases}$ h. $\begin{cases}x^2+y^2=65\\(x-1)(y-1)=18\end{cases}$ i. $\begin{cases}x^2y+xy^2=6\\xy+x+y=5\end{cases}$

k. $\begin{cases}x^3+y^3=1\\x^5+y^5=x^2+y^2\end{cases}$ l. $\begin{cases}x+y=1\\x^3+y^3=x^2+y^2\end{cases}$ m. $\begin{cases}(x+1)(y+1)=10\\(x+y)(xy+1)=25\end{cases}$

n. $\begin{cases}x+y=5\\\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6}\end{cases}$ p. $\begin{cases}x^3+y^3=2\\x^2y+xy^2=2\end{cases}$ q. $\begin{cases}x^4+y^4=97\\xy(x^2+y^2)=78\end{cases}$

Bài 3. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}3x-y=-m\\9x-m^2y=-3\sqrt{3}\end{cases}$

a) Với giá trị nào của m thì hệ phương trình vô nghiệm
b) Với giá trị nào của m thì hệ phương trình có vô số nghiệm? Khi đó hãy tìm dạng tổng quát nghiệm của hệ phương trình
c) Với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất

Bài 4. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình: $\begin{cases}mx+y=4\\x-my=1\end{cases}$ có nghiệm thỏa mãn điều kiện $x+y=\dfrac{8}{m^2+1}$. Khi đó hãy tìm các giá trị của x và y.

Bài 5. Tìm các giá trị nguyên của m để hệ phương trình: $\begin{cases}2mx+3y=m\\x+y=m+1\end{cases}$ có nghiệm nguyên, tìm nghiệm nguyên đó.

Bài 6. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+2y=6\\2x-y=2\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình đã cho bằng phương pháp đồ thị
b) Nghiệm của hệ phương trình đã cho có phải là nghiệm của phương trình: 3x - 7y = - 8 không ?
c) Nghiệm của hệ phương trình đã cho có phải là nghiệm của phương trình: 4,5x + 7,5y = 25 không ?

Bài 7. Cho hai đường thẳng (d_1): 2x - 3y = 8 và (d_2): 7x - 5y = -5
Tìm các giá trị của a để đường thẳng y = ax đi qua giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bài 8. Cho ba đường thẳng: (d_1): y = 2x – 5; (d_2): y = 1; (d_3): y = (2m - 3)x -1
Tìm các giá trị của m để ba đường thẳng đồng quy.

Bài 9. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+ay=2 \\ ax-2y=1 \end{cases}$

Tìm các giá trị của a để hệ phương trình đã cho có nghiệm thỏa mãn điều kiện x > 0, y < 0

Bài 10. Tìm các giá trị của a và b để đồ thị hàm số y = ax + b đi qua điểm A(-5; -3) và điểm B(3; 1)

Bài 11. Tìm các giá trị của m để:

a) Hệ phương trình: $\begin{cases} mx-y=5 \\ 2x+3my=7 \end{cases}$ có nghiệm thỏa mãn điều kiện x >0, y < 0

b) Hệ phương trình: $\begin{cases} mx+y=3 \\ 4x+my=6 \end{cases}$ có nghiệm thoả mãn điều kiện x > 1, y > 0

Bài 12. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx+y=2m \\ x+my=m+1 \end{cases}$

Tìm các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm x, y là các số nguyên.

Bài 13. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m+1)x+my=2m-1 \\ mx-y=m^2-2 \end{cases}$

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện xy đạt giá trị lớn nhất.

Bài 14. Hãy tìm giá trị của m và n sao cho đa thức:
P(x) = $mx^3 + (m + 1)x^2$ - (4n + 3)x + 5n đồng thời chia hết cho (x - 1) và (x + 2).

Bài 15. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m+1)x-y=m+1 \\ x+(m-1)y=2 \end{cases}$

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện: S = x + y đạt giá trị lớn nhất.

Bài 16. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx+my=m \\ mx+y=2m \end{cases}$ *m, n là các tham số*

a) Giải và biện luận hệ phương trình

b) Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất hãy tìm giá trị của m để nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện x > 0, y < 0

Bài 17. Tìm a và b để hệ phương trình sau có nghiệmcó nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

$$\begin{cases} (m+3)x+4y=5a+3b+m \\ x+my=am-2b+3m-1 \end{cases}$$

Bài 18. Tìm tham số a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + a.x \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + ay \end{cases}$$

Bài 19. Biết cặp số (x, y) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = m \\ y^2 + x^2 = -m^2 + 6 \end{cases}$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = xy + 2(x + y).

Bài 20. Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ y^2 + x^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$

Xác định giá trị của tham số a để hệ thỏa mãn tích xy nhỏ nhất.

Bài 21. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} xy = a^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{b} \end{cases}$

Giải và biện luận hệ phương trình biết rằng x, y là độ dài các cạnh của một hình chữ nhất.

Bài 22. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx + 2y = 1 \end{cases}$

a) Giải và biện luận theo tham số m.
b) Tìm các số nguyên m để cho hệ có nghiệm duy nhất (x; y) với x, y là các số nguyên.

Bài 23. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 4 \\ mx + 4y = 10 - m \end{cases}$ (*m là tham số*).

a) Giải và biện luận theo m.
b) Với giá trị nào của số nguyên m, hệ có nghiệm (x; y) với x, y là các số nguyên dương.

Bài 24. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x - my = 3m - 1 \\ 2x - y = m + 5 \end{cases}$

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) mà S = $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 25. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m+1)x + my = 2m - 1 \\ mx - y = m^2 - 2. \end{cases}$

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm (x; y) mà tích P = xy đạt giá trị lớn nhất.

Bài 26. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1. \end{cases}$

a) Giải hệ khi m = -1.
b) Tìm m để hệ có vô số nghiệm, trong đó có nghiệm: x = 1, y = 1.

Bài 27. Giải và biện luận hệ phương trình sau đây theo tham số m:

$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 3. \end{cases}$$

Bài 28. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx - 2y = 1. \end{cases}$

a) Giải hệ khi m = 2.
b) Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) mà x > 0 và y < 0.
c) Tìm số nguyên n để có nghiệm duy nhất (x; y) mà x, y là các số nguyên.

Bài 29. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3. \end{cases}$

a) Giải hệ khi m = - 3.
b) Giải và biện luận hệ đã cho theo m.

Bài 30. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = m \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$ (m là tham số nguyên).

Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) mà x > 0, y < 0.

Bài 31. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5. \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ đã cho.
b) Tìm điều kiện của m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) thỏa mãn hệ thức: $x + y = 1 - \dfrac{m^2}{m^2 + 3}$.

Bài 32. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 2my = m + 1 \\ x + (m+1)y = 2. \end{cases}$

a) Chứng minh rằng nếu hệ có nghiệm duy nhất (x; y) thì điểm M(x; y) luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi m thay đổi.
b) Xác định m để M thuộc góc vuông phần tư thứ nhất.
c) Xác định m để M thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{5}$.

Bài 33. Với giá trị nào của số nguyên m, hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m. \end{cases}$

có nghiệm duy nhất (x; y) với x; y là các số nguyên.

Bài 34. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx + 2y = 1. \end{cases}$

a) Giải và biện luận theo m.
b) Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) với x; y là các số nguyên.
c) Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất (x; y), điểm M(x; y) luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

d) Xác định m để M thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 35. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1. \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình lúc m = 1.

b) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số.

Bài 36. Cho hệ phương trình (m là tham số): $\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + y = -m. \end{cases}$

a) Chứng tỏ lúc m = 1, hệ phương trình có vô số nghiệm.

b) Giải hệ lúc m khác 1.

Bài 37. Với giá trị nào của m, hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ mx - y = 3m - 4 \end{cases}$ có nghiệm?

Bài 38. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ 2xy + 1 = 2a \end{cases}$

Xác định a để hệ có hai nghiệm phân biệt. Tìm các nghiệm đó.

Bài 39. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = m \\ x + y = 8 \end{cases}$.

Xác định m để hệ phương trình có nghiệm kép.

Bài 40. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = m \\ y^2 + x^2 = 1 \end{cases}$.

Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.

Bài 41. Cho x, y là hai số nguyên dương sao cho: $\begin{cases} xy + x + y = 71 \\ x^2y + xy^2 = 880 \end{cases}$.

Tìm giá trị của biểu thức: $M = x^2 + y^2$.

Bài 42. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 3m - 1 \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình trên.

b) Không giải hệ phương trình, cho biết với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất?

Bài 43. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$ (a là tham số).

a) Giải hệ phương trình với a = 2.

b) Giải và biện luận hệ phương trình.

c) Tìm giá trị nguyên của a để hệ phương trình có nghiệm nguyên.

d) Tìm giá trị của a để nghiệm của hệ thỏa mãn điều kiện x + y nhỏ nhất.

Bài 44. Lập phương trình đường thẳng đi qua gốc O và song song với AB biết:

a) A(-1; 1), B(-1; 3).
b) A(1; 2), B(3; 2).
c) A(1; 5), B(4; 3).

Bài 45. Cho ba điểm A(-1; 6), B(-4; 4), C(1; 1).
Tìm tọa độ đỉnh D của hình bình hành ABCD.

Bài 46. Cho bốn điểm: A(0; -5), B(1; -2), C(2; 1), D(2,5; 2,5).
Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Bài 47. Cho bốn điểm A(1; 4), B(3; 5), C(6; 4), D(2; 2).
Hãy xác định tứ giác ABCD là hình gì?

Bài 48. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau vô nghiệm, vô số nghiệm:
$$\begin{cases} 2(m+1)x+(m+2)y=m-3 \\ (m+1)x+my=3m+7 \end{cases}$$

Bài 49. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x+2my+2=0 \\ 2mx+(m-1)y-(m-1)=0 \end{cases}$ (*m là tham số*).

a) Giải hệ phương trình trên.
b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn x < 0, y < 0.

Bài 50. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x+y=3m-4 \\ x+(m-1)y=m \end{cases}$ (*m là tham số*)

a) Giải hệ phương trình.
b) Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm nguyên.
c) Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm dương duy nhất.

Bài 51. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=m+1 \\ mx+y=3m-1 \end{cases}$ (*m là tham số*)

a) Giải hệ phương trình.
b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện xy nhỏ nhất.

Bài 52. Tìm giá trị của a để hệ sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x^2+y^2=2a+1 \\ x+y=4a \end{cases}$

CHUYÊN ĐỀ 4: HÀM SỐ $y = ax^2, (a \neq 0)$
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

I. Hàm số $y = ax^2, (a \neq 0)$.

Cho hàm số $y = ax^2, (a \neq 0)$:

+) Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.

+) Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịc biến khi $x > 0$.

Đồ thị của hàm số $y = ax^2, (a \neq 0)$ là một đường cong đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là một parabol với đỉnh O.

+) Nếu $a > 0$ thì đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.

+) Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

II. Phương trình bậc hai một ẩn

1. Định nghĩa: Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng:

$ax^2 + bx + c$ với x là ẩn, a, b, c là những hệ số cho trước và $a \neq 0$

2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$. Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac$

*) Nếu $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

*) Nếu $\Delta = 0$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

*) Nếu $\Delta < 0$ phương trình vô nghiệm.

3. Công thức nghiệm thu gọn :

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ và $b = 2b'$

$$\boxed{\Delta' = b'^2 - ac}$$

*) Nếu $\Delta' > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

*) Nếu $\Delta' = 0$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b'}{a}$

*) Nếu $\Delta' < 0$ phương trình vô nghiệm.

4. Hệ thức Vi-et và ứng dụng:

Nếu x_1; x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Muốn tìm hai số u và v, biết u + v = S, uv = P, ta giải phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

(Điều kiện để có u và v là $S^2 - 4P \ge 0$ *)*

+ Nếu a + b + c = 0 thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \ne 0)$ có hai nghiệm:

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$$

+ Nếu a – b + c = 0 thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \ne 0)$ có hai nghiệm:

$$x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$$

III. Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2, (a \ne 0)$

Phương pháp giải:

Lập bảng giá trị cho x nhận các giá trị 0, $\pm 1; \pm 2$ tìm các giá trị của y tương ứng. Sau đó vẽ đồ thị đi qua các điểm vừa tìm được.

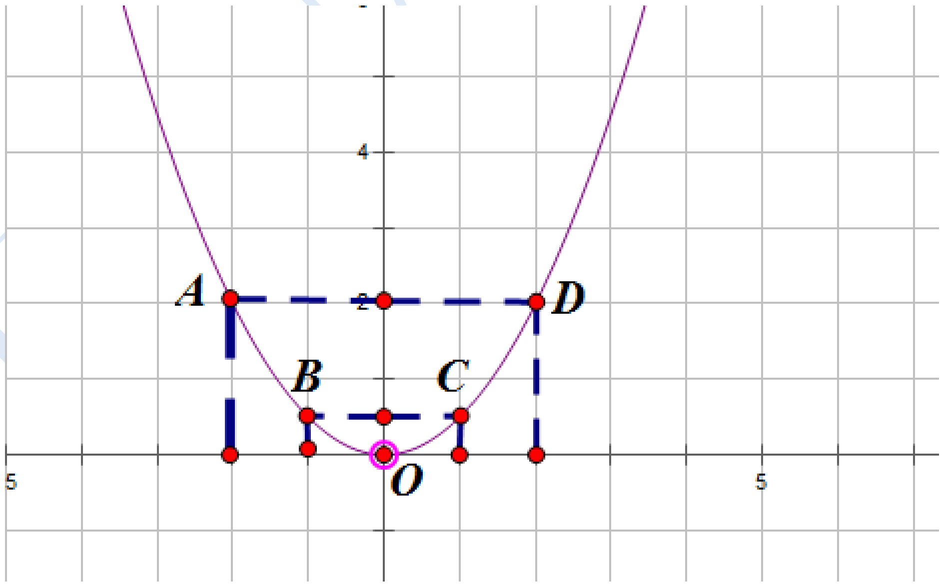
Bài 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Ta có A (-2; 2), B (-1; $\frac{1}{2}$), O (0; 0), C (1; $\frac{1}{2}$), D (2; 2).



Dạng 2: Xác định hệ số a của hàm số bậc hai $y = ax^2, (a \ne 0)$

Bài toán 1: Xác định hệ số a của hàm số bậc hai $y = ax^2, (a \ne 0) (1)$ **đi qua một điểm** $A(x_1; y_1)$.

Hướng dẫn giải: Thay tọa độ A vào (1) ta được $y_1 = a(x_1)^2 \Leftrightarrow a = \dfrac{y_1}{(x_1)^2}$

Bài toán 2: Xác định hệ số a của hàm số bậc hai $y = ax^2, (a \neq 0)$ (1), biết (1) cắt đường thẳng (d): y=cx+d tại điểm A có hoành độ x_1 .

Hướng dẫn giải: vì A thuộc d nên thay x_1 vào (d) ta tìm được y_1

Vậy A$(x_1; y_1)$ sau đó trở thành **bài toán 1** cách làm được trình bày ở trên.

<u>Bài 1</u>: Cho hàm số $y = ax^2$ xác định hệ số của a, biết đi qua A(3; 12).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Vì hàm số $y = ax^2$ đi qua A(3; 12) nên $12 = a.9 \Leftrightarrow a = \dfrac{4}{3}$.

<u>Bài 2</u>: Cho hàm số $y = ax^2$ xác định hệ số của a, biết nó cắt đường thẳng y=-2x+3 tại điểm A có hoành độ bằng 1.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Vì điểm A thuộc đường thẳng y=-2x+3 nên $y = -2.1 + 3 \Leftrightarrow y = 1$, vậy A (1; 1)

Vì A (1; 1) thuộc đường thẳng $y = ax^2, (a \neq 0)$ nên $1 = a.1^2 \Leftrightarrow a = 1$.

<u>Dạng 3</u>: Giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$

Phương pháp giải: Giải theo công thức nghiệm đã được trình bày ở phần lý thuyết

<u>Bài 1</u>:Giải phương trình bậc hai sau

$a) 2x^2 - 5x + 1 = 0$ $\qquad$ $b) 4x^2 + 4x + 1 = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a) Ta có: a=2, b=-5, c=1. $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.2.1 = 17 > 0$

Vì $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{4} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$

b) Ta có a=4, b’=2, c=1. $\Delta = b'^2 - ac = 2^2 - 4.1 = 0$

Vì $\Delta = 0$ nên phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{-b'}{a} = \dfrac{-1}{2}$.

<u>Dạng 4</u>: Phương trình quy về phương trình bậc hai

Phương pháp giải: Rút gọn đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai.

<u>Bài 1</u>: Giải các phương trình sau

$a. (x+2)^2 - 3x - 5 = (1-x)(1+x)$ $\qquad$ $b. x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$a.(x+2)^2-3x-5=(1-x)(1+x) \Leftrightarrow x^2+4x+4-3x-5=1-x^2$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \\ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

$b.x^4-8x^2-9=0,(1)$ Đặt $x^2=t,(t\ge 0)$

$(1)t^2-8t-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-1 \\ t_2=9 \end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện ta có $x^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\pm 3$.

<u>Dạng 5</u>: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $ax^2+bx+c=0$ **có nghiệm thỏa mãn một điều kiện cho trước**

Bài toán 1: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm cùng dấu

Phương pháp giải: Nếu tham số m =a ta xét 2 trường hợp:

TH1: Nếu m=0 thì phương trình có một nghiệm $x=\dfrac{-c}{b}$ (loại).

TH2: Nếu m $\neq 0$ để phương trình có hai nghiệm cùng dấu thì $\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ a.c>0 \end{cases}$

Nếu tham số $m \neq a$ để phương trình có hai nghiệm cùng dấu thì $\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ a.c>0 \end{cases}$

Bài toán 2: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm khác dấu

Phương pháp giải:: Nếu tham số m =a ta xét 2 trường hợp:

+) TH1: Nếu m=0 thì phương trình có một nghiệm $x=\dfrac{-c}{b}$ (loại) .

TH2: Nếu m $\neq 0$ để phương trình có hai nghiệm khác dấu thì $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.c>0 \end{cases}$

+) Nếu tham số $m \neq a$ để phương trình có hai nghiệm khác dấu thì $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.c<0 \end{cases}$

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

+) TH1: Nếu m=0 thì phương trình có một nghiệm $x=\dfrac{-c}{b}$ (loại) .

TH2: Nếu m $\neq 0$ để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt thì:

$$\begin{cases}\Delta > 0 \\ x_1x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0\end{cases}$$

+) Nếu tham số $m \neq a$ để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt thì:

$$\begin{cases}\Delta > 0 \\ x_1x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0\end{cases}$$

Bài toán 4: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt

+) TH1: Nếu m=0 thì phương trình có một nghiệm $x = \frac{-c}{b}$ (loại) .

TH2: Nếu m $\neq 0$ để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt thì $\begin{cases}\Delta > 0 \\ x_1x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0\end{cases}$

+) Nếu tham số $m \neq a$ để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt thì:

$$\begin{cases}\Delta > 0 \\ x_1x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0\end{cases}$$

Bài toán 5: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm đối nhau

+) TH1: Nếu m=0 thì phương trình có một nghiệm $x = \frac{-c}{b}$ (loại) .

TH2: Nếu m $\neq 0$ để phương trình có hai nghiệm đối nhau thì $\begin{cases}\Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = 0\end{cases}$

+) Nếu tham số $m \neq a$ để phương trình có hai nghiệm đối nhau thì $\begin{cases}\Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = 0\end{cases}$

Bài toán 6: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm nghịch đảo của nhau

+) TH1: Nếu m=0 thì phương trình có một nghiệm $x = \frac{-c}{b}$ (loại) .

TH2: Nếu m $\neq 0$ để phương trình có hai nghiệm nghịch đảo của nhau $\begin{cases}\Delta > 0 \\ x_1x_2 = 1\end{cases}$

+) Nếu tham số $m \neq a$ để phương trình có nghiệm nghịch đảo của nhau thì:

$$\begin{cases}\Delta > 0\\ x_1x_2 = 1\end{cases}$$

Bài toán 7: Lập hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm của phương trình sao cho không phụ thuộc vào tham số m

Phương pháp giải: Tìm điều kiện để phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt rồi dựa vào hệ thức Vi ét nhân chia các hệ số của x_1, x_2 với một số hợp lí sao cho triệt tiêu tham số m

Bài toán 8: Tìm tham số m để phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn một biểu thức cho trước

Phương pháp giải: Tìm điều kiện để phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt. Dựa vào hệ thức Vi - ét thay vào biểu thức cho trước.

<u>Bài 1</u>: Đề thi vào 10 Bắc Giang (2018 – 2019)

Cho phương trình bậc hai $x^2-(2m+5)x+2m+1=0\,(1)$ với x là ẩn, m là tham số.

a. Giải phương trình (1) với $m=\dfrac{-1}{2}$.

b. Tìm giá trị của m để (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P=\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Thay $m=\dfrac{-1}{2}$ vào (1) giải phương trình bậc 2 tương ứng.

b. Ta có : $\Delta=(2m+5)^2-4(2m+1)=4m^2+12m+21$

$$(2m+3)^2+12>0, \forall m.$$

Vậy (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi – ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m+5\\ x_1x_2=2m+1\end{cases}$.

Để phương trình có hai nghiệm dương thì: $\begin{cases}2m+5>0\\ 2m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow m>\dfrac{-1}{2}$.

Ta có $P^2=\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2=(x_1+x_2)-2\sqrt{x_1x_2}$

$=2m+5-2\sqrt{2m+1}=\left(2m+1-2\sqrt{2m+1}+1\right)+3=\left(\sqrt{2m+1}-1\right)^2+3\geq 3$

$\Rightarrow P\geq\sqrt{3}$ (do $P>0$). Dấu ”=” xẩy ra khi:

$\sqrt{2m+1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2m+1}=1 \Leftrightarrow m=0$ (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy m =0 là giá trị cần tìm và giá trị nhỏ nhất là $P=\sqrt{3}$

<u>Bài 2</u>: Đề thi vào 10 Bắc Ninh (2018 – 2019)

Cho phương trình $x^2-2mx+m^2-1=0$ (1), m là tham số

a. Giải phương trình (1) với m=2

b. Chứng minh (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Gọi x_1,x_2 làhai nghiệm của phương trình (1), lập phương trình bậc hai nhận $x_1^3-2mx_1^2+m^2x_1-2$ và $x_2^3-2mx_2^2+m^2x_2-2$ là nghiệm.

HƯỚNG DẪN GIẢI.

a. Thay m=2 vào (1) ta được $x^2-4x+3=0$ giải phương trình này ta được nghiệm $x_1=1;x_2=3$

Vậy khi m=2 phươn trình có hai nghiệm $x_1=1;x_2=3$

b.Ta có $\Delta'=m^2-m^2+1=1>0,\forall m$. Vậy (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

$$\text{Theo Vi – ét ta có:}\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=m^2-1\end{cases}$$

Từ (1) ta có:

$x^2-2mx+m^2-1=0$

$\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2=1$

$\Rightarrow x^3-2mx^2+m^2x=x$

$\Leftrightarrow x^3-2mx^2+m^2x-2=x-2$

Vì x_1,x_2 là các nghiệm của phương trình nên :

$x_1^3-2mx_1{}^2+m^2x_1-2=x_1-2$ (2), $x_2^3-2mx_2{}^2+m^2x_2-2=x_2-2$ (3).

Cộng (2) với (3) ta được:

$(x_1^3-2mx_1{}^2+m^2x_1-2)+(x_2^3-2mx_2{}^2+m^2x_2-2)=(x_1-2)+(x_2-2)$

$=\left(x_1+x_2\right)-4=2m-4$.

Nhân (2) với (3) ta được:

$(x_1^3-2mx_1{}^2+m^2x_1-2)(x_2^3-2mx_2{}^2+m^2x_2-2)=(x_1-2)(x_2-2)$

$=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=m^2-4m+3$

$\Rightarrow$ Phương trình cần lập là $x^2-(2m-4)x+m^2-4m+3=0$.

<u>Bài 3</u>: Đề thi vào 10 Bến Tre (2017 – 2018)

Cho phương trình $x^2-2(m-1)x-(2m+1)=0$ (1) (m là tham số)

a. Giải phương trình (1) với m=2

b. Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

c.Tìm m để phương trình (1) luôn có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau

HƯỚNG DẪN GIẢI.

a. Làm tương tự như trên.

b.Ta có $\Delta' = (m-1)^2 + 2m + 1 = m^2 + 2 > 0, \forall m$. Vậy (1) luôn có hai nghiệm với mọi m.

c. Theo Vi – ét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - 2m \\ x_1x_2 = -2m - 1 \end{cases}$

Vì phương trình luôn có hai nghiệm bằng nhau về trị tuyệt đối nên hai nghiệm này đối nhau.

Do đó để phương trình luôn có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau thì: $\begin{cases} S = 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - 2m = 0 \\ x_1x_2 = -2m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m > \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow m = 1$

Vậy $m = 1$ thì phương trình luôn có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau.

<u>Bài 4</u>: Đề thi vào 10 Hà Tĩnh (2018 – 2019)

Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - m = 0$ (1), (m là tham số) . Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$(1+x_1)^2 + (1+x_2)^2 = 6$

HƯỚNG DẪN GIẢI.

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - m^2 + m = -m + 1$. Để (1) có hai nghiệm thì $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow -m + 1 \ge 0 \Leftrightarrow m \le 1$ (*).

Theo Vi – ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = m^2 - m \end{cases}$

Ta có $(1+x_1)^2 + (1+x_2)^2 = 6 \Leftrightarrow 2 + 2(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2 = 6$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 4 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 2(m^2 - m) + 4(m-1) = 4$

$m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -1 \end{array} \right.$. Kết hợp với (*) ta có m=2 thỏa mãn

<u>Bài 5</u>: Cho phương trình bậc hai ẩn x, tham số m : $x^2 + mx + m + 3 = 0 (1)$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn : $2x_1 + 3x_2 = 5$ (2).

b) Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1 = -3$. Tính nghiệm còn lại.

c) Lập hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào giá trị của m.

HƯỚNG DẪN GIẢI.

a) Ta có $\Delta = m^2 - 4m - 12$ để (1) có hai nghiệm thì $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 \ge 0$ (*)

Theo Vi – ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m (3) \\ x_1x_2 = m + 3 (4) \end{cases}$

Từ (2) và (3) ta có hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -2m \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_2 = 2m + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3m - 5 \\ x_2 = 2m + 5 \end{cases}$$

Thay x_1, x_2 vào (4) ta được $(-3m-5)(2m+5) = m+3 \Leftrightarrow 3m^2 + 13m + 14 = 0$

$\left[\begin{array}{l} m_1 = -2 \\ m_2 = \dfrac{-7}{3} \end{array}\right.$. Thử lại vào (*) ta có $\left[\begin{array}{l} m_1 = -2 \\ m_2 = \dfrac{-7}{3} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy $m_1 = -2$ và $m_2 = \dfrac{-7}{3}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài

b) Vì (1) có một nghiệm x=-3 nên thay x=-3 vào (1) ta được
$9 - 3m + m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 6$.Theo Vi – ét ta có
$x_1 + x_2 = -m \Leftrightarrow -3 + x_2 = -6 \Leftrightarrow x_2 = -3$

Vậy m=6 và $x_2 = -3$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Giả sử (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 theo Vi – ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m = x_1 + x_2 \\ m = x_1x_2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_1x_2 - 3 = 0$$

Vậy hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m là $x_1 + x_2 + x_1x_2 - 3 = 0$

Dạng 6: Sự tương giao của hàm bậc nhất và hàm bậc hai

Bài toán 1: Sự tương giao của đồ thị hàm bậc hai (P): $y = ax^2, (a \neq 0)$ hàm bậc nhất (d) $y = a'x + b, (a \neq 0)$.

Phương pháp giải:

Cách 1: Vẽ đồ thị của hàm bậc hai $y = ax^2, (a \neq 0)$ và đồ thị hàm bậc nhất $y = ax + b, (a \neq 0)$.trên cùng mặt phẳng tọa độ, từ đồ thị tìm gia điểm của chúng.

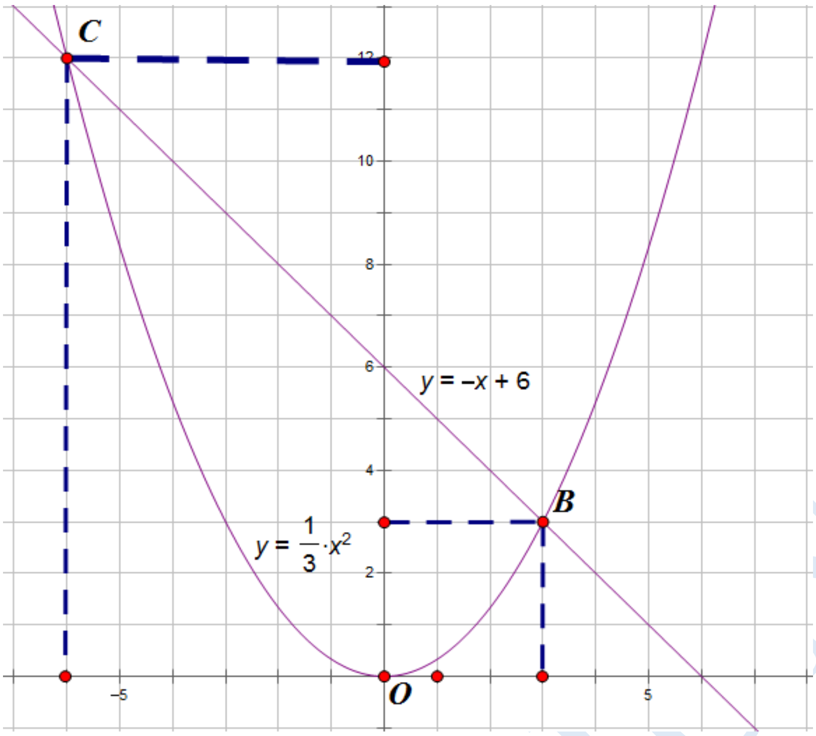
Cách 2: Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):
$ax^2 = a'x + b$ giải phương trình tìm x từ x thay vào (P) hoặc (d) ta tìm được y.
Từ đó kết luận giao điểm của hai đồ thị.

<u>Bài 1</u>: Cho hai hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^2$ và $y = -x + 6$

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trên cùng mặt phẳng tọa độ
b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị

HƯỚNG DẪN GIẢI

a) Làm tương tự dạng 1 ta được đồ thị sau:



b) *Cách1*: Dựa vào đồ thị ta có dao của hàm số $y=\frac{1}{3}x^2$ và $y=-x+6$ là B (3; 3) và C (-6; 12).

Cách 2: Phương trình hoành độ giao điểm của $y=\frac{1}{3}x^2$ và $y=-x+6$ là:

$$\frac{1}{3}x^2=-x+6 \Leftrightarrow x^2+3x-18=0 \Leftrightarrow x^2-9+3x-9=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)+3(x-3)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-6 \end{array}\right.$$

Với $x=3 \Rightarrow y=-3+6=3 \Rightarrow B(3;3)$, với $x=-6 \Rightarrow y=12 \Rightarrow C(-6;12)$

Vậy giao điểm của hai hàm số là $B(3;3)$ và $C(-6;12)$.

Bài toán 2: Sự tương giao của hàm bậc nhất và hàm bậc hai có chưa tham số

Phương pháp giải:

Lập phương trình hoành độ giao điểm của hàm bậc nhất và hàm bậc hai, đưa về phương trình bậc hai có chưa tham số. Biện luận số nghiệm của phương trình bậc hai chính là số dao điểm của hàm bậc nhất và hàm bậc hai.

Bài 1: Đề thi vào 10 Hà Nội (2018 – 2019)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y=(m+2)x+3$ và parabol (P): $y=x^2$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số nguyên

HƯỚNG DẪN GIẢI

Số giao điểm của (d) và (P) chính là số nghiệm của phương trình $(m+2)x+3=x^2 \Leftrightarrow x^2-(m+2)x-3=0$ (*).

Ta có: $\Delta = (m+2)^2 + 12 > 0, \forall m$

Vì $\Delta > 0, \forall m$ nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (*). Theo Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+2 \\ x_1x_2 = -3 \end{cases}$, theo đề bài các hoành độ là các số nguyên nên và giả sử $x_1 < x_2$ thì ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -2 \Rightarrow m+2 = -2 \Leftrightarrow m = -4$

Trường hợp 2: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow m+2 = 2 \Leftrightarrow m = 0$

Vậy m = 0 và m =-4 là giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 2: Đề thi vào 10 Bà Rịa – Vũng Tàu (2017 – 2018)

Cho hàm số (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $2x - m$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) và (d) có một điểm chung duy nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Số giao điểm của (P) và (d) là số nghiệm của phương trình $x^2 = 2x - m \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0\,(*)$. Ta có $\Delta' = 1 + m$, để (P) và (d) có một điểm chung duy nhất thì (*) phải có một nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy m=-1 là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán

III - BÀI CÓ LỜI GIẢI

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$a/\ 2x^2 - 8 = 0$

$b/\ 3x^2 - 5x = 0$

$e/\ x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$

$c/\ -2x^2 + 3x + 5 = 0$

$d/\ x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$f/\ \dfrac{x+2}{x-5} + 3 = \dfrac{6}{2-x}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

$a/\ 2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy ph- ơng trình có nghiệm $x = \pm 2$

$b/\ 3x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(3x-5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$. Vậy ph- ơng trình có nghiệm $x = 0; x = \dfrac{5}{3}$

$c/\ -2x^2 + 3x + 5 = 0$

Nhẩm nghiệm :

Ta có : a - b + c = - 2 - 3 + 5 = 0 => ph- ơng trình có nghiệm: $x_1=-1; x_2=-\frac{5}{-2}=\frac{5}{2}$

$d/\ x^4+3x^2-4=0$. Đặt $t=x^2(t\ge 0)$. Ta có ph- ơng trình: $t^2+3t-4=0$

a + b + c = 1 + 3 - 4 = 0

=> ph- ơng trình có nghiệm: $t_1=1>0$ (thỏa mãn); $t_2=-\frac{4}{1}=-4<0$ (*loại*)

Với: $t=1\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$. Vậy ph- ơng trình có nghiệm $x=\pm 1$

$e/\ x^3+3x^2-2x-6=0\Leftrightarrow (x^3+3x^2)-(2x+6)=0\Leftrightarrow x^2(x+3)-2(x+3)=0\Leftrightarrow (x+3)(x^2-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy ph- ơng trình có nghiệm $x=-3; x=\pm\sqrt{2}$

$f/\ \frac{x+2}{x-5}+3=\frac{6}{2-x}$ (ĐKXĐ: $x\ne 2; x\ne 5$)

Ph- ơng trình : $\frac{x+2}{x-5}+3=\frac{6}{2-x}$

$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(2-x)}{(x-5)(2-x)}+\frac{3(x-5)(2-x)}{(x-5)(2-x)}=\frac{6(x-5)}{(x-5)(2-x)}$

$\Rightarrow (x+2)(2-x)+3(x-5)(2-x)=6(x-5)$

$\Leftrightarrow 4-x^2+6x-3x^2-30+15x=6x-30$

$\Leftrightarrow -4x^2+15x+4=0$

$\Delta=15^2-4.(-4).4=225+64=289>0; \sqrt{\Delta}=17$

Ph- ơng trình có hai nghiệm : $x_1=\frac{-15+17}{2.(-4)}=-\frac{1}{4}$ (*thỏa mãn ĐKXĐ*)

$x_2=\frac{-15-17}{2.(-4)}=4$ (*thỏa mãn ĐKXĐ*)

Bài 2. Cho ph- ơng trình bậc hai ẩn x, tham số m : $x^2+mx+m+3=0$ (1)

a) Giải ph- ơng trình với m = - 2.

b) Gọi x_1; x_2 là các nghiệm của ph- ơng trình. Tính $x_1^2+x_2^2; x_1^3+x_2^3$ theo m.

c) Tìm m để ph- ơng trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn : $x_1^2+x_2^2=9$.

d) Tìm m để ph- ơng trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn : $2x_1 + 3x_2 = 5$.

e) Tìm m để ph- ơng trình có nghiệm $x_1 = - 3$. Tính nghiệm còn lại.

f) Tìm m để ph- ơng trình có hai nghiệm trái dấu.

g) Lập hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của ph- ơng trình không phụ thuộc vào giá trị của m.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Thay m = - 2 vào ph- ơng trình (1) ta có ph- ơng trình :

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy với m = - 2 ph- ơng trình có nghiệm duy nhất x = 1.

b)Ph- ơng trình: $x^2 + mx + m + 3 = 0$ (1) . Ta cú: $\Delta = m^2 - 4(m+3) = m^2 - 4m - 12$

Ph- ơng trình có nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta \ge 0$

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m & (a) \\ x_1x_2 = m+3 & (b) \end{cases}$

*) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-m)^2 - 2(m+3) = m^2 - 2m - 6$

*) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = (-m)^3 - 3(m+3)(-m) = -m^3 + 3m^2 + 9m$

c) Theo phần b) => Ph- ơng trình có nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta \ge 0$

Khi đó $x_1^2 + x_2^2 = m^2 - 2m - 6$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 6 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 = 0$

$$\Delta'_{(m)} = (-1)^2 - 1.(-15) = 1 + 15 = 16 > 0; \sqrt{\Delta_{(m)}} = 4$$

=> ph- ơng trình có hai nghiệm: $m_1 = \dfrac{1+4}{1} = 5; m_2 = \dfrac{1-4}{1} = -3$

Thử lại : +) Với $m = 5 \Rightarrow \Delta = -7 < 0$ => loại.
+) Với $m = -3 \Rightarrow \Delta = 9 > 0$ => thỏa mãn.

Vậy với m = - 3 thì ph- ơng trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 9$.

d) Theo phần b) => Ph- ơng trình có nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta \ge 0$

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m & (a) \\ x_1x_2 = m+3 & (b) \end{cases}$

Hệ thức: $2x_1 + 3x_2 = 5$ (c)

Từ (a) và (c) ta có hệ ph- ơng trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = -3m \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3m - 5 \\ x_2 = -m - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3m - 5 \\ x_2 = 2m + 5 \end{cases}$$

Thay $\begin{cases} x_1 = -3m - 5 \\ x_2 = 2m + 5 \end{cases}$ vào (b) ta có ph- ơng trình:

$$(-3m-5)(2m+5) = m + 3$$
$$\Leftrightarrow -6m^2 - 15m - 10m - 25 = m + 3$$
$$\Leftrightarrow -6m^2 - 26m - 28 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3m^2 + 13m + 14 = 0$$
$$\Delta_{(m)} = 13^2 - 4.3.14 = 1 > 0$$

=> ph- ơng trình có hai nghiệm phân biệt:

$m_1 = \frac{-13+1}{2.3} = -2; m_2 = \frac{-13-1}{2.3} = -\frac{7}{3}$

Thử lại : +) Với $m=-2 \Rightarrow \Delta = 0$ => thỏa mãn.

+) Với $m = \frac{-7}{3} \Rightarrow \Delta = \frac{25}{9} > 0$ => thỏa mãn.

Vậy với $m=-2; m=-\frac{7}{3}$ ph- ơng trình có hai nghiệm x_1; x_2

thỏa mãn: $2x_1 + 3x_2 = 5$.

e. Phương trỡnh (1) cú nghiệm

$x_1 = -3 \Leftrightarrow (-3)^2 + m.(-3) + m + 3 = 0 \Leftrightarrow -2m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = 6$

Khi đó: $x_1 + x_2 = -m \Leftrightarrow x_2 = -m - x_1 \Leftrightarrow x_2 = -6 - (-3) \Leftrightarrow x_2 = -3$

Vậy với m = 6 thì ph- ơng trình có nghiệm $x_1 = x_2 = -3$.

f) Ph- ơng trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow 1.(m+3) < 0 \Leftrightarrow m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -3$

Vậy với m < - 3 thì ph- ơng trình có hai nghiệm trái dấu.

g) Giả sử ph- ơng trình có hai nghiệm x_1; x_2. Khi đó theo định lí Vi-et, ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x_1 - x_2 \\ m = x_1x_2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = x_1x_2 - 3$$

Vậy hệ thức lượng hệ giữa x_1; x_2 không phụ thuộc vào m là:

$$x_1.x_2 + (x_1 + x_2) - 3 = 0$$

<u>Bài 3:</u> Cho ph- ơng trình $(m-1)x^2 + 2x - 3 = 0$ (1) (*tham số m*)

a) Tìm m để (1) có nghiệm

b) Tìm m để (1) có nghiệm duy nhất? Tìm nghiệm duy nhất đó?

c) Tìm m để (1) có 1 nghiệm bằng 2? Khi đó hãy tìm nghiệm còn lại(*nếu có*)?

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) + Nếu m-1 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 1 thì (1) có dạng $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (là nghiệm)

+ Nếu $m \neq 1$. Khi đó (1) là ph- ơng trình bậc hai có: $\Delta' = 1^2 - (-3)(m-1) = 3m-2$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 3m-2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$

+ Kết hợp hai tr- ờng hợp trên ta có: Với $m \geq \frac{2}{3}$ thì ph- ơng trình có nghiệm

b) + Nếu m-1 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 1 thì (1) có dạng $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (là nghiệm)

+ Nếu $m \neq 1$. Khi đó (1) là ph- ơng trình bậc hai có: $\Delta' = 1 - (-3)(m-1) = 3m-2$

(1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 3m-2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$ (*thoả mãn $m \neq 1$*)

Khi đó x = $-\frac{1}{m-1}=-\frac{1}{\frac{2}{3}-1}=3$.

Vậy với m = 1 thì PT có nghiệm duy nhất x = $\frac{3}{2}$

c) Do ph- ơng trình có nghiệm $x_1 = 2$ nên ta có:

(m-1).2^2 + 2.2 - 3 = 0 ⇔ 4m - 3 = 0 ⇔ m = $\frac{3}{4}$

Khi đó (1) là ph- ơng trình bậc hai (do m -1 = $\frac{3}{4}$-1=$-\frac{1}{4}\neq 0$)

Theo đinh lí Viet ta có: $x_1.x_2 = \frac{-3}{m-1}=\frac{-3}{-\frac{1}{4}}=12 \Rightarrow x_2=6$

Vậy m = $\frac{3}{4}$ và nghiệm còn lại là $x_2 = 6$.

<u>Bài 4:</u> Cho ph- ơng trình: x^2 -2(m-1)x - 3 - m = 0

a) Chứng tỏ rằng ph- ơng trình có nghiệm x_1, x_2 với mọi m

b) Tìm m để ph- ơng trình có hai nghiệm trái dấu

c) Tìm m để ph- ơng trình có hai nghiệm cùng âm

d) Tìm m sao cho nghiệm số x_1, x_2 của ph- ơng trình thoả mãn $x_1^2+x_2^2 \geq 10$.

e) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m

f) Hãy biểu thị x_1 qua x_2

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Ta có: Δ' = $(m-1)^2$- (- 3 - m) = $\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$

Do $\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi m; $\frac{15}{4}>0 \Rightarrow$Δ> 0 với mọi m

=>Ph- ơng trình luôn có hai nghiệm phân biệt hay ph- ơng trình luôn có hai nghiệm.

b) Ph- ơng trình có hai nghiệm trái dấu ⇔ a.c < 0 ⇔ - 3 - m < 0 ⇔ m > -3

Vậy m > -3

c) Theo ý a) ta có ph- ơng trình luôn có hai nghiệm

Khi đó theo định lí Viet ta có: S = $x_1 + x_2$ = 2(m-1) và P = $x_1.x_2$ = - (m+3)

Khi đó ph- ơng trình có hai nghiệm âm ⇔ S < 0 và P > 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2(m-1)<0\\-(m+3)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<1\\m<-3\end{cases} \Leftrightarrow m<-3$$

Vậy m < -3

d) Theo ý a) ta có ph- ơng trình luôn có hai nghiệm

Theo định lí Viet ta có: S = $x_1 + x_2$ = 2(m-1) và P = $x_1.x_2$ = - (m+3)

Khi đó A = $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m-1)^2+2(m+3) = 4m^2 - 6m + 10$

Theo bài A ≥ 10 ⇔ $4m^2$ - 6m ≥ 0 ⇔ 2m.(2m-3) ≥ 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m \ge 0 \\ 2m-3 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m \le 0 \\ 2m-3 \le 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m \ge 0 \\ m \ge \frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m \le 0 \\ m \le \frac{3}{2} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \frac{3}{2} \\ m \le 0 \end{array}\right.$$

Vậy m ≥ $\frac{3}{2}$ hoặc m ≤ 0

e) Theo ý a) ta có ph- ơng trình luôn có hai nghiệm

Theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1.x_2 = -(m+3) \end{cases} \Leftrightarrow . \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-2 \\ 2x_1.x_2 = -2m-6 \end{cases}$

⇒ $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8$

Vậy $x_1+x_2+2x_1x_2+8 = 0$ là hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc m

f) Từ ý e) ta có: $x_1 + x_2+2x_1x_2 = -8 \Leftrightarrow x_1(1+2x_2) = -(8+x_2) \Leftrightarrow x_1 = -\frac{8+x_2}{1+2x_2}$

Vậy $x_1 = -\frac{8+x_2}{1+2x_2} \quad (x_2 \ne -\frac{1}{2})$

Bài 5: Cho ph- ơng trình: $x^2 + 2x + m-1= 0$ (m là tham số)

a) Ph- ơng trình có hai nghiệm là nghịch đảo của nhau.

b) Tìm m để ph- ơng trình có hai nghiệm x_1; x_2 thoả mãn: $3x_1+2x_2 = 1$

c) Lập ph- ơng trình ẩn y thoả mãn $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$; $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$ với x_1; x_2 là nghiệm của ph- ơng trình ở trên.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Ta có $\Delta' = 1^2 - (m-1) = 2 - m$

Ph- ơng trình có hai nghiệm là nghịch đảo của nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \ge 0 \\ m-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2 \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy m = 2

b) Ta có $\Delta' = 1^2 - (m-1) = 2 - m$

Ph- ơng trình có nghiệm ⇔Δ≥ 0 ⇔ 2 - m ≥ 0 ⇔ m ≤ 2 (*)

Khi đó theo định lí Vi-et ta có: $x_1+ x_2 = -2$ (1); $x_1x_2 = m - 1$ (2)

Theo bài: $3x_1+2x_2 = 1$ (3)

Từ (1) và (3) ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

Thế vào (2) ta có: 5(-7) = m -1 ⇔ m = - 34 (*thoả mãn (*)*)

Vậy m = -34 là giá trị cần tìm.

d) Với m ≤ 2 thì ph- ơng trình đã cho có hai nghiệm

Theo định lí Viet ta có: $x_1 + x_2 = -2$ (1) ; $x_1x_2 = m - 1$ (2)

Khi đó: $y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -2 + \frac{-2}{m-1} = \frac{2m}{1-m}$ (m≠1)

$y_1y_2 = (x_1 + \frac{1}{x_2})(x_2 + \frac{1}{x_1}) = x_1x_2 + \frac{1}{x_1x_2} + 2 = m - 1 + \frac{1}{m-1} + 2 = \frac{m^2}{m-1}$ (m≠1)

⇒ y_1; y_2 là nghiệm của ph- ơng trình: $y^2 - \frac{2m}{1-m}.y + \frac{m^2}{m-1} = 0$ (m≠1)

Ph- ơng trình ẩn y cần lập là: $(m-1)y^2 + 2my + m^2 = 0$.

<u>Bài 6:</u> Cho phương trình: $x^2 - (4m - 1)x + 3m^2 - 2m = 0$ *(m là tham số)*. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 = 7$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

+ Phương trình đã cho có $\Delta = (4m - 1)^2 - 12m^2 + 8m = 4m^2 + 1 > 0, \forall m$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt ∀m

+ Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m - 1 \\ x_1x_2 = 3m^2 - 2m \end{cases}$.

Khi đó: $x_1^2 + x_2^2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7$

$\Leftrightarrow (4m - 1)^2 - 2(3m^2 - 2m) = 7 \Leftrightarrow 10m^2 - 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 2m - 3 = 0$

Ta thấy tổng các hệ số: a + b + c = 0 => m = 1 hay m = $\frac{-3}{5}$.

<u>Bài 7:</u> Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (x là ẩn số)

a)Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình.

Tìm m để biểu thức M = $\frac{-24}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a/ Phương trình (1) có Δ' = $m^2 - 4m + 8 = (m - 2)^2 + 4 > 0$ với mọi m nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

b/ Do đó, theo Viet, với mọi m, ta có: S = $-\frac{b}{a} = 2m$; P = $\frac{c}{a} = m - 2$

M = $\frac{-24}{(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2} = \frac{-24}{4m^2 - 8m + 16} = \frac{-6}{m^2 - 2m + 4} = \frac{-6}{(m-1)^2 + 3}$.

Khi m = 1 ta có $(m-1)^2 + 3$ nhỏ nhất

$\Rightarrow -M = \frac{6}{(m-1)^2 + 3}$ lớn nhất khi m = 1 $\Rightarrow M = \frac{-6}{(m-1)^2 + 3}$ nhỏ nhất khi m = 1

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất là - 2 khi m = 1.

<u>Bài 8:</u> Cho phương trình $x^2 - 2x - 3m^2 = 0$, với m là tham số.

a) Giải phương trình khi m = 1.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khác 0 và thỏa điều kiện $\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}=\frac{8}{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Khi m = 1, phương trình thành : $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hay $x = 3$

(*có dạng a - b + c = 0*)

b) Với $x_1, x_2 \neq 0$, ta có : $\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}=\frac{8}{3} \Leftrightarrow 3(x_1^2-x_2^2)=8x_1x_2 \Leftrightarrow 3(x_1+x_2)(x_1-x_2)=8x_1x_2$.

Ta có: a.c = $-3m^2 \leq 0$ nên $\Delta \geq 0, \forall m$.

Khi $\Delta \geq 0$ ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}=2$ và $x_1.x_2 = \frac{c}{a}=-3m^2 \leq 0$

Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm khác 0 mà $m \neq 0$

$\Rightarrow \Delta > 0$ và $x_1.x_2 < 0 \Rightarrow x_1 < x_2$

Với a = 1 $\Rightarrow x_1 = -b'-\sqrt{\Delta'}$ và $x_2 = -b'+\sqrt{\Delta'} \Rightarrow x_1 - x_2 = 2\sqrt{\Delta'}=2\sqrt{1+3m^2}$

Do đó $\Leftrightarrow 3(2)(-2\sqrt{1+3m^2})=8(-3m^2)$ và $m \neq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+3m^2}=2m^2$ (*hiển nhiên m = 0 không là nghiệm*)

$\Leftrightarrow 4m^4 - 3m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1$ hay $m^2 = -1/4$ (loại) $\Leftrightarrow m = \pm 1$

Bài 9: Cho phương trình: $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$.

a) Chứng minh rằng : Phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

b) Tìm giá trị của m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Cho phương trình: $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$.

a) Chứng minh rằng : Phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m.Ta có $\Delta' = \left[-(m+2)\right]^2 - m^2 - 4m - 3 = 1 > 0$ với mọi m.

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

b) Phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m. Theo hệ thức Vi-ét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+2) \\ x_1.x_2 = m^2 + 4m + 3 \end{cases}$

$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m+2)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) = 2m^2 + 8m + 10$

$= 2(m^2 + 4m) + 10$

$= 2(m+2)^2 + 2 \geq 2$ với mọi m.

Suy ra minA $= 2 \Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$. Vậy với m = - 2 thì A đạt min = 2.

Bài 10: Cho phương trình : $x^2 + 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$

a) Giải phong trình khi m = 4
b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Khi m = 4, ta có phương trình: $x^2 + 8x + 12 = 0$ có $\Delta' = 16 - 12 = 4 > 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -4 + 2 = -2$ và $x_2 = -4 - 2 = -6$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x^2 + 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$. Ta có: $\Delta' = m^2 - (m^2 - 2m + 4) = 2m - 4$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0$

=> 2m - 4 > 0 => 2.(m - 2) > 0 => m - 2 > 0 => m > 2

Vậy với m > 2 thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

<u>Bài 11:</u> Cho phương trình (ẩn số *x*): $x^2 - 4x - m^2 + 3 = 0\ (*)$.

a) Chứng minh phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi *m*.

b) Tìm giá trị của *m* để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_2 = -5x_1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Cho phương trình (ẩn số *x*):

$x^2 - 4x - m^2 + 3 = 0\ (*)$

$\Delta = 16 + 4m^2 - 12 = 4m^2 + 4 \geq 4 > 0; \forall m$

Vậy (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi *m*.

b) Tìm giá trị của *m* để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_2 = -5x_1$.

Theo hệ thức VI-ET có :

$x_1.x_2 = -m^2 + 3$; $x_1 + x_2 = 4$; mà $x_2 = -5x_1$ => $x_1 = -1$; $x_2 = 5$

Thay $x_1 = -1$; $x_2 = 5$ vào $x_1.x_2 = -m^2 + 3$ => $m = \pm 2\sqrt{2}$

<u>Bài 12</u>: Cho ph- ơng trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$ (*m là tham số*).

a) Giải ph- ơng trình khi m = 3

b) Tìm m để ph- ơng trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 16$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Thay x = 3 vào phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 6 = 0$ và giải phương trình:

$x^2 - 4x + 3 = 0$ bằng nhiều cách và tìm được nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

b) Theo hệ thức Viét, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình :

$x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 6 = 0$,

Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1.x_2 = m^2 - 6 \end{cases}$ và $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 16$

Thay vào giải và tìm được m = 0, m = -4.

<u>Bài 13:</u> Cho phương trình $x^2 - 2.(m - 3)x - 1 = 0$

a) Giải phương trình khi m = 1

b) Tìm m để phương trình có nghiệm x_1 ; x_2 mà biểu thức:

$A = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) $x_1 = -2-\sqrt{5}$; $x_2 = -2+\sqrt{5}$

b) Thấy hệ số của phương trình: a = 1 ; c = - 1 $\Rightarrow$ phương trình luôn có 2 nghiệm

Theo vi- ét ta có $x_1 + x_2 = 2(m - 3)$; $x_1x_2 = -1$

Mà $A = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 4(m-3)^2 + 3 \geq 3$

$\Rightarrow$ GTNN của A = 3 $\Leftrightarrow$ m = 3.

Bài 14: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 4m = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) với m = 2.

b) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$(x_1 + m)(x_2 + m) = 3m^2 + 12$$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Thay m = 2 vào phương trình (1) ta được phương trình:

$x^2 - 6x + 8 = 0$ Khi và chỉ khi $(x - 2)(x - 4) = 0$ khi và chỉ khi x = 2 hoặc x = 4

Vậy với m = 2 thì phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

b) Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2 \geq 0$ vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

Áp dụng định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} S = 2(m+1) \\ P = 4m \end{cases}$

Để $(x_1 + m)(x_2 + m) = 3m^2 + 12$ khi và chỉ khi $x_1x_2 + (x_1 + x_2)m - 2m^2 - 12 = 0$.

S khi và chỉ khi : $4m + m.2(m + 1) - 2m^2 - 12 = 0$ khi và chỉ khi 6m = 12 khi và chỉ khi m= 2

Bài 15:

a) Giải phương trình $x^2 - 7x - 8 = 0$

b) Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ với m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = -6$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Giải phương trình $x^2 - 7x - 8 = 0$ có a - b + c = 1 + 7 - 8 = 0 suy ra $x_1 = -1$ và $x_2 = 8$.

b) Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ với m là tham số.

+ Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = -6$.

+ Để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4$

Theo viet ta có: $x_1 + x_2 = 2$ (1) và $x_1 . x_2 = m - 3$ (2)

Theo đầu bài: $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = -6 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6$ (3)

+ Thế (1) và (2) vào (3) ta có: $(m - 3)(2)^2 - 2(m-3) = 6 \Leftrightarrow 2m = 12 \Leftrightarrow m = 6$ không thỏa mãn điều kiện $m \leq 4$ vậy không có giá trị nào của m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = -6$.

Bài 16: Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m - 2 = 0$, với x là ẩn số, $m \in R$

a) Giải phương trình đã cho khi m =- 2

b) Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 mà không phụ thuộc vào m.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Giải phương trình đã cho khi m = - 2. Ta có phương trình: $x^2 + 2x - 4 = 0$

$x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$

$\Leftrightarrow |x+1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = -\sqrt{5} \\ x+1 = \sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1-\sqrt{5} \\ x = -1+\sqrt{5} \end{array}\right.$

Vậy phương trinh có hai nghiệm: $x = -1-\sqrt{5}$ và $x = -1+\sqrt{5}$

b) Theo Vi-et, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 & (1) \\ x_1x_2 = m - 2 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ m = x_1x_2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(x_1x_2 + 2) + 2 \\ m = x_1x_2 + 2 \end{cases}$$

Suy ra $x_1 + x_2 = 2(x_1x_2 + 2) + 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 6 = 0$.

Bài 17: Cho phương trình bậc hai $x^2 + 5x + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1; x_2.
Hãy lập một phương trình bậc hai có hai nghiệm ($x_1^2 + 1$) và ($x_2^2 + 1$).

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Ta có $\Delta = 25 - 12 = 13 > 0$

Nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt

=>$x_1 + x_2 = -5$; $x_1x_2 = 3$

Do đó $S = x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2 = 25 - 6 + 2 = 21$

Và $P = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) = (x_1x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 1 = 9 + 20 = 29$

Vậy phương trình cần lập là $x^2 - 21x + 29 = 0$.

Bài 18 : Chứng minh rằng phương trình: $x^2 + mx + m - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m. Giả sử x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình đã cho,tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = x_1^2 + x_2^2 - 4.(x_1 + x_2)$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Xét phương trình: $x^2 + mx + m - 1 = 0$

$\Delta = m^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0$

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi m

Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$

Theo đề bài:

$$B = x^2_1 + x^2_2 - 4.(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 4.(x_1 + x_2)$$
$$= m^2 - 2(m-1) - 4(-m) = m^2 - 2m + 2 + 4m = m^2 + 2m + 1 + 1$$
$$= (m+1)^2 + 1 \geq 1$$

Vậy minB=1 khi và chỉ khi m = -1

Bài 19: Cho phương trình: mx^2- (4m -2)x + 3m - 2 = 0 (1) (*m là tham số*).

a) Giải phương trình (1) khi m = 2.

b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

c) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có các nghiệm là nghiệm nguyên.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Thay m = 2 vào phương trình ta có:

$(1) \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

Ta thấy: 1 - 3 +2 = 0 nên phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 0;\ x_2 = 2$

b)

* Nếu m = 0 thì $(1) \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra: Phương trình luôn có nghiệm với m=0

*Nếu m $\neq$ 0 thì phương trình (1) là phương trình bậc 2 ẩn x.

Ta có: $\Delta' = (2m-1)^2 - m(3m-2) = 4m^2 - 4m + 1 - 3m^2 + 2m = (m-1)^2 \geq 0\ \forall m \neq 0$

Kết hợp 2 trường hợp ta có phương trình luôn có nghiệm với mọi m (*đpcm*)

c) * Nếu m = 0 thì $(1) \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nguyên

Suy ra: Với m = 0 phương trình có nghiệm nguyên

* Nếu m $\neq$ 0 thìphương trình (1) là phương trình bậc 2 ẩn x.

Từ ý b) ta cóphương trình có 2 nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{2m-1-m+1}{m} = 1 \\ x_2 = \dfrac{2m-1+m-1}{m} = \dfrac{3m-2}{m} \end{array}\right.$

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên thì nghiệm x_2 phải nguyên

$\Leftrightarrow \dfrac{3m-2}{m} \in Z \Leftrightarrow 3 - \dfrac{2}{m} \in Z\ (m \neq 0) \Rightarrow 2 \vdots m$ hay m là ước của 2 $\Rightarrow$m = {-2; -1; 1; 2}

Vậy với m = $\{\pm 1; \pm 2; 0\}$ thì phương trình có nghiệm nguyên.

Bài 20: Cho phương trình x^2 - 2mx - 2m - 5 = 0 (*m là tham số*)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

b) Tìm m để $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất (*x_1; x_2 là hai nghiệm của phương trình*)

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Cho phương trình: x^2- 2mx - 2m - 5 = 0 (m là tham số)

a) Ta có Δ ' = $(-m)^2$– 1.(-2m - 5)

= m^2 + 2m + 5

$= (m + 1)^2 + 4$

Vì $(m + 1)^2 \geq 0$ với mọi m

=>$(m + 1)^2 + 4 > 0$ với mọi m. Hay $\Delta' > 0$ với mọi m

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Vì phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

=>$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = -2m - 5 \end{cases}$ (*theo định lý Vi-et*)

Đặt A = $|x_1 - x_2|$

=>$A^2 = (|x_1 - x_2|)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

=>$A^2 = (2m)^2 - 4(-2m - 5) = (2m)^2 + 8m + 20$

$= (2m)^2 + 2.\ 2m.\ 2 + 4 + 16 = (2m + 2)^2 + 16 \geq 16$

=>Giá trị nhỏ nhất của $A^2 = 16$. Giá trị nhỏ nhất của A là 4 khi $2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Vậy với m = -1 thì $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất là 4.

<u>Bài 21:</u> Cho phương trình: $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ (*m là tham số*).

a) Giải phương trình với m = 2.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu ($x_1 < 0 < x_2$).

Khi đó nghiệm nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn?

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Với m = 2, phương trình đã cho thành: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Phương trình này có a + b + c = 1 – 4 + 3 = 0 nên có hai nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

Vậy với m = 2 thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Theo định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = m + 1 \end{cases}$.

Xét hiệu: $|x_1| - |x_2| = -x_1 - x_2 = -4 < 0$ (vì $x_1 < 0 < x_2$) $\Rightarrow |x_1| < |x_2|$.

Vậy nghiệm x_1 có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn nghiệm x_2.

<u>Bài 22:</u> Cho phương trình: $x^2 - 2.(m + 4)x + m^2 - 8 = 0$ (1), với m là tham số.

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phận biệt là x_1 và x_2 .

b) Tìm m để $x_1 + x_2 - 3x_1x_2$ có giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) $\Delta' = 8m + 24$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 8m + 24 > 0 \Leftrightarrow m > -3$

b) Có : $x_1 + x_2 - 3x_1.x_2 = -3m + 2m + 32 = -\left(\sqrt{3}m - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{97}{3} \leq \frac{97}{3}$

Dấu " =" xảy ra $\Leftrightarrow m=\frac{1}{3}$. Vậy $m=\frac{1}{3}$ thì $x_1 + x_2 - 3x_1x_2$ đạt GTLN.

Bài 23: Chứng minh rằng phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị m: $x^2-(m-1)x+m-3=0$. Xác định các giá trị của m thỏa mãn:

$$x_1{x_2}^2+x_2{x_1}^2=3$$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Phương trình: $x^2-(m-1)x+m-3=0$ có:

$\Delta = [-(m-1)]^2 - 4\,.\,1\,(m-3) = m^2 - 2m + 1 - 4m + 12 = (m^2 - 6m + 9) + 4$

$= (m-3)^2 + 4 > 0$ với $\forall$ m

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m

Theo định lí Viét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2 = m-1 \\ x_1x_2 = m-3 \end{cases}$ (I) .

Theo đề ta có: $x_1{x_2}^2+x_2{x_1}^2=3 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1+x_2)=3$ (1)

Thay hệ thức (I) vào (1) ta có: $(m-1).(m-3) = 3 \Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow m.(m-4) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right.$

Vậy với m = 0 hoặc m = 4 thì phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn:

$$x_1{x_2}^2+x_2{x_1}^2=3$$

Bài 24: Cho phương trình: $x^2-2(m+2)x+m^2+5m+4=0$ (*)

a) Chứng minh rằng với m < 0 phương trình (*) luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Tìm m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Phương trình: $x^2-2(m+2)x+m^2+5m+4=0$ (*)

Ta có: $\Delta' = [-(m+2)]^2 - (m^2 + 5m + 4) = m^2 + 4m + 4 - m^2 - 5m - 4 = -m$

Với m < 0 $\Rightarrow \Delta' = -m > 0 \Rightarrow$ Phương trình (*) luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

b) Theo định lí Viét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2 = 2(m+2) \\ x_1x_2 = m^2+5m+4 \end{cases}$ (I)

Theo đề ta có: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2-x_1x_2}{x_1x_2}=0$ (1)

Thay (I) vào (1) ta có: $\frac{2(m+2)-(m^2+5m+4)}{m^2+5m+4}=0$ (ĐK: $m \neq -1$ và $m \neq -4$)

$\Leftrightarrow 2(m + 2) – (m^2 + 5m + 4) = 0$

$\Leftrightarrow 2m + 4 – m^2 – 5m – 4 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 3m = 0$

$\Leftrightarrow m(m + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \text{ (loại vì trái đk: } m < 0) \\ m = -3 \text{ (thỏa điều kiện: } m < 0;\ m \neq -1 \text{ và } m \neq -4) \end{array}\right.$

Vậy với $m = -3$ thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$$

<u>Bài 25:</u> Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1 + x_2 + x_1x_2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

$\Delta' = (m+1)^2 - 1.(m^2+3) = m^2 + 2m + 1 - m^2 - 3 = 2m - 2$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1 + x_2 + x_1x_2$.

Điều kiện $m \geq 1$.Theo Vi-ét ta có : $x_1 + x_2 = 2m + 2$; $x_1x_2 = m^2 + 3$.

$A = x_1 + x_2 + x_1x_2 = 2m + 2 + m^2 + 3 = m^2 + 2m + 5 = (m+1)^2 + 4 \geq 4$.

$\Rightarrow A_{min} = 4$ khi $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ (***loại** vì không thỏa điều kiện* $m \geq 1$).

Mặt khác : $A = (m+1)^2 + 4 \geq (1+1)^2 + 4$ (vì $m \geq 1$) $\Rightarrow A \geq 8$.

$\Rightarrow A_{min} = 8$ khi $m = 1$. Vậy khi $m = 1$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất và $A_{min} = 8$.

<u>Cách 2</u>: Điều kiện $m \geq 1$.

Theo Vi-ét ta có : $x_1 + x_2 = 2m + 2$; $x_1x_2 = m^2 + 3$.

$A = x_1 + x_2 + x_1x_2 = 2m + 2 + m^2 + 3 = m^2 + 2m + 5$.

Vì $m \geq 1$ nên $A = m^2 + 2m + 5 \geq 1^2 + 2.1 + 5$ hay $A \geq 8$. Vậy $A_{min} = 8$ khi $m = 1$.

<u>Bài 26:</u> Cho phương trình bậc hai tham số m : $x^2 - 2(m-1)x - 3 = 0$.

a) Giải phương trình khi m= 2

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 với mọi giá trị của m. Tìm m thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2{}^2} + \frac{x_2}{x^2{}_1} = m - 1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) x = -1 hoặc x = 3

b) Có $\Delta' = (m-1)^2 + 3 > 0 \forall m$ =>Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt

Theo Vi ét có : $x_1 + x_2 = 2m - 2$ và $x_1.x_2 = -3$

Theo đề bài : $\frac{x_1}{x_2^{\ 2}} + \frac{x_2}{x^2_{\ 1}} = m - 1$

$\Leftrightarrow x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} = (m-1)(x_1x_2)^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right] = (m-1)(x_1x_2)^2$

$\Leftrightarrow (2m-2)\left[(2m-2)^2 - 3.(-3)\right] = (m-1)(-3)^2 \Leftrightarrow (2m-2)\left[4m^2 - 8m + 13\right] = 9(m-1)$

$\Leftrightarrow 8m^3 - 16m^2 + 26m - 8m^2 + 16m - 26 - 9m + 9 = 0 \Leftrightarrow 8m^3 - 24m^2 + 33m - 17 = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)(8m^2 - 16m + 17) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ 8m^2 - 16m + 17 = 0 (Vn) \end{array}\right.$

Vậy m = 1 là giá trị cần tìm.

IV. Bài tập áp dụng

Bài 1: Đề thi vào 10 Bình Định 2017 – 2018

Cho phương trình $x^2 - 2mx - 6m - 9 = 0$

a. Giải phương trình khi m=0

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^{\ 2} + x_2^2 = 13$

Bài 2: Đề thi vào 10 Thái Nguyên 2018 – 2019

Cho phương trình $x^2 - 4x + 4m - 3 = 0$ (m là tham số)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^{\ 2} + x_2^2 = 14$

Bài 3: Đề thi vào 10 Phú Thọ 2017 – 2018

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m - 1 = 0$

a. Giải phương trình với m = 0

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$

Bài 4: Đề thi vào 10 Vĩnh Phúc 2017 – 2018.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d) $y = x - 2$ cắt nhau tại hai điểm A và B.Tìm tọa độ các điểm A, B và tính diện tích tam giác AOB (trong đó O là gốc tọa độ, hoành độ của A lớn hơn hoành độ của B).

Bài 5: Đề thi vào 10 Vĩnh Phúc 2018 – 2019

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3 = 0, (1)$ với m là tham số

a. Giải phương trình khi m=3

b.Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Bài 6: Đề thi vào 10 An Giang 2018 – 2019

Cho phương trình bậc hai $x^2 - 3x + m = 0$ (m là tham số) a.Tìm m để phương trình có nghiệm bằng -2. Tìm nghiệm còn lại ứng với m vừa tìm được

b.Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

Bài 7: Đề thi vào 10 Hà Nội 2017 – 2018

Trong mặt phẳng Oxy cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 5$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 với $x_1 < x_2$ sao cho $|x_1| > |x_2|$.

Bài 8: Đề thi vào 10 Phú Thọ 2018 – 2019

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d) đi qua A(3;7) và song song với đường thẳng có phương trình y=3x+1

a.Viết phương trình đường thẳng (d)

b.Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P): $y = x^2$

Bài 9: Đề thi vào 10 Bình Dương 2018 – 2019.

Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 3m - 2 = 0, (1)$ với m là tham số

a.Giải phương trình (1) với m=3

b.Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = 2018 + 3x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 10: Đề thi vào 10 Hồ Chí Minh 2017 – 2018

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0, (1)$ m là tham số

a.Chứng minh (1) luôn có nghiệm với mọi m

b.Xác định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) thỏa mãn

$$(1+x_1)(2-x_2) + (1+x_2)(2-x_1) = x_1^2 + x_2^2 + 2$$

Bài 11: Đề thi vào 10 hà Tĩnh 2018 – 2019.

a. Xác định hệ số của hàm số $y = a.x^2, (a \neq 0)$, biết đồ thị của nó đi qua $M\left(\frac{-1}{3}; 1\right)$.

b. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - m = 0$ (m là tham số) . Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(1+x_1)^2 + (1+x_2)^2 = 6$

Bài 12: Đề thi vào 10 Phú Thọ 2016 – 2017

Cho phương trình: $x^2 - 2x + m + 5 = 0$ (m là tham số)

a, Giải phương trình với m=1

b, Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 + 3x_2 = 7$

Bài 13: Đề thi vào 10 Phú Thọ năm 2015 – 2016

Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình: $y=2(m+1)x-3m+2$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) với *m=3.*

b) Chứng minh (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt *A, B* với mọi *m*.

c) Gọi $x_1;x_2$ là hoành độ giao điểm *A, B*. Tìm *m* để $x_1^2+x_2^2=20$.

Bài 14: Đề thi vào 10 Phú Thọ năm 2014 – 2015.

Cho phương trình : $x^2 - (2m + 1)x + m^2 = 0$, với m là tham số . (1)

a) Giải phương trình với m = 1

b) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.

Bài 15: Đề thi vào 10 Hà Nội (2016 – 2017)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y=3x+m^2-1$ và Parabol (P): $y=x^2$.

a.Chứng minh (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b.Gọi x_1,x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm m để $(x_1+1)(x_2+1)=1$.

Bài 16: Đề thi vào 10 Hà Nội (2015 – 2016)

Cho phương trình $x^2-(m+5)x+3m+6=0$ (m là tham số)

a. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực m.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.

Bài 17: Đề thi vào 10 Hồ Chí Minh (2017 – 2018)

Trong mặt phẳng Oxy. Cho parabol (P) $y=\dfrac{1}{4}x^2$

a. Vẽ đồ thị (P)

b. Cho đường thẳng (d): $y=\dfrac{3}{2}x+m$ đi qua C(6;7). Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).

Bài 18: Đề thi vào 10 Huế (2017 – 2018)

Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m+5=0,(1)$

a.Giải phương trình (1) với m=2

b.Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn đẳng thức sau: $2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8=0$.

Bài 19: Đề thi vào 10 Huế (2016 – 2017)

Cho phương trình $x^2-2(m-1)x-4m-3=0,(1)$ với m là tham số.

a.Không sử dụng máy tính cầm tay giải phương trình (1) khi m=1

b.Chứng minh (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

c.Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1), tìm m để $\left(x_1^2-2mx_1-4m\right)\left(x_2^2-2mx_2-4m\right)<0$

Bài 20: Đề thi vào 10 Nghệ An (2017 – 2018)

a.Giải phương trình $2x^2-5x+2=0$

b.Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=2x+m-6$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

CHUYÊN ĐỀ 5: GIẢI BÀI TOÁN
BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG - TRÌNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I - KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Phương pháp chung:

Bước 1: Gọi ẩn phù hợp, đơn vị tính, điều kiện cho ẩn nếu có.

Bước 2: Biểu đạt các đại lượng chưa biết thông qua ẩn và các đại lượng đã biết.

Bước 3: Lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 4: Giải phương trình, hệ phương trình lập được ở bước 3.

Bước 5: Đối chiếu điều kiện và kết luận.

2. Một số dạng toán thường gặp

Dạng 1: Bài toán Hình học

Dạng 2: Bài toán Tìm số

Dạng 3: Bài toán tỷ lệ %

Dạng 4: Bài toán Năng suất

Dạng 5: Bài toán Chung - Riêng

Dạng 6: Bài toán Chuyển động

Dạng 7: Bài toán Thực tế vận dụng

II - BÀI TẬP MINH HỌA

Dạng 1: Bài toán Hình học

***Phương pháp:**

Hình chữ nhật:

Gọi a, b lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật (a > b > 0).

Gọi S, C lần lượt là Diện tích, Chu vi của hình chữ nhật: S = a.b; C = (a+b).2

Hình vuông:

Gọi a là cạnh hình vuông (a > 0).

Gọi S, C lần lượt là Diện tích, Chu vi của hình vuông: S = a^2; C = 4.a

Hình tam giác:

Gọi a, h lần lượt là cạnh đáy, đường cao của tam giác (a,h > 0).

Gọi S là Diện tích của tam giác: $S = \frac{1}{2}a.h$

***Bài tập:**

Bài 1: Đề thi vào 10 Bình Định (2017 – 2018).

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 24m. Nếu tăng độ dài một cạnh lên 2m và giảm độ dài còn lại 1m thì diện tích mảnh đất tăng lên $1\,m^2$. Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật ban đầu.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Vì mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 24m, nên tổng chiều dài và chiều rộng là 12m.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m), ($x \in N^*, x < 12$).

Chiều rộng hình chữ nhật là 12-x (m).

Diện tích hình chữ nhật ban đầu là $S = x(12-x)(m^2)$

Giả sử tăng chiều dài lên 2m và giảm chiều rộng 1m ta có:

$(x+2)(11-x) = x(12-x)+1\ (m^2) \Leftrightarrow x = 7$ (m) thỏa mãn

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 7 (m)và chiều rộng hình chữ nhật là 5 (m).

<u>Bài 2</u>: Đề thi vào 10 Hà Nội (2018 – 2019)

Một mảnh dất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 mét và độ dài đường chéo bằng 10 mét. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó theo đơn vị mét.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi độ dài chiều rộng là x (m) $x \in N^*, x < 14$, vì tổng chiều dài và chiều rộng là 14 nên độ dài chiều rộng là 14 – x.

Vì độ dài đường chéo hình chữ nhật là 10 (m) nên ta có:

$x^2 + (14-x)^2 = 100\,(1)$

$(1) \Leftrightarrow x^2 + 196 - 28x + x^2 = 100 \Leftrightarrow 2x^2 - 28x + 96 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 8 \\ x_2 = 6 \end{array}\right.$

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 8 (m) và chiều rộng hình chữ nhật là 6(m).

<u>Bài 3:</u> Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng một nửa chiều dài. Biết rằng nếu giảm mỗi chiều đi 2m thì diện tích hình chữ nhật đã cho giảm đi một nửa. Tính chiều dài hình chữ nhật đã cho.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi chiều dài của hình chữ nhật đã cho là x (m), với x > 4.

Vì chiều rộng bằng nửa chiều dài nên chiều rộng là: $\frac{x}{2}$ (m)

=> diện tích hình chữ nhật đã cho là: $x.\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$ (m^2)

Nếu giảm mỗi chiều đi 2 m thì chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là: $x-2 \quad va \quad \frac{x}{2}-2$ (m)

Khi đó, diện tích hình chữ nhật giảm đi một nửa nên ta có phương trình:

$(x-2)(\frac{x}{2}-2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - 2x - x + 4 = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2 - 12x + 16 = 0$

$x_1 = 6 + 2\sqrt{5}$ (*thoả mãn x>4*);

$x_2 = 6 - 2\sqrt{5}$ (*loại vì không thoả mãn x>4*)

Vậy chiều dài của hình chữ nhật đã cho là $6+2\sqrt{5}$ (m).

<u>Bài 4:</u> Một thửa đất hình chữ nhật có chu vi bằng 198 m, diện tích bằng 2430 m^2. Tính chiều dài và chiều rộng của thửa đất hình chữ nhật đã cho .

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi x (m) là chiều dài thửa đất hình chữ nhật (49,5 < x < 99)

Chiều rộng của thửa đất hình chữ nhật là: 99 - x (m)

Theo đề bài ta có phương trình: x.(x - 99) = 2430

Giải được: $x_1 = 54$ (nhận); $x_2 = 45$ (loại)

Vậy chiều dài thửa đất hình chữ nhật là 54 (m)

Chiều rộng của thửa đất hình chữ nhật là: 99 - 54 = 45 (m)

<u>Bài 5:</u> Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{3}{7}$ chiều dài, nếu giảm chiều dài 1m, tăng chiều rộng 1m thì diện tích hình chữ nhật là $200m^2$. Tính chu vi, diện tích hình chữ nhật ban đầu?

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m), thì chiều rộng là $\frac{3}{7}$x (m), (Điều kiện x> 0)

Vì hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{3}{7}$ chiều dài, và giảm chiều dài 1m, tăng chiều rộng 1m thì diện tích hình chữ nhật là 200 m^2 nên ta có phương trình:

$(x-1)(\frac{3}{7}x+1) = 200$

Giải phương trình ta được $x_1 = 21$(TMĐK)

$$x_2 = -\frac{67}{3} \text{ (loại)}$$

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 21m, chiều rộng là 9m.

Chu vi hình chữ nhật ban đầu là (21+ 9) 2= 60m

Diện tích hình chữ nhật ban đầu là 21. 9 = $189m^2$

<u>Dạng 2: Bài toán Tìm số</u>

***Phương pháp:**

Cách viết số trong hệ thập phân của số tự nhiên

- Số có hai chữ số: ab =10a + b
- Số có ba chữ số: abc =100a +10b +c
- Số có ba chữ số: abcd =1000a +100b +10c +d

Quan hệ chia hết và chia có dư:

- Số a chia cho b bằng c và có số dư là r, được viết lại là: a = b.c + r.
- Nếu a chia hết cho b thì số dư r = 0.
- Nếu a không chia hết cho b thì số dư r ≠ 0.

***Bài tập:**

<u>Bài 1:</u> Tìm một số có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 5 và nếu đem số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 7 và dư là 6.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi số cần tìm có 2 chữ số là $\overline{ab}$, với $a,b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $a\neq 0$.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}a-b=5\\10a+b=7(a+b)+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=5\\3a-6b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=5\\a-2b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=5\\a-2b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=8\\b=3\end{cases}$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy số cần tìm là: 83

<u>Bài 2:</u>Một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì ta được một số mới lớn hơn số đã cho là 63. Biết tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99.

HƯỚNG DẪN GIẢI :

Gọi chữ số hàng chục là x và chữ số hàng đơn vị là y

ĐK: x, y $\in$ N; $1\le$ x, y $\le$ 9

Theo đề bài ta có số đã cho là : $\overline{xy}$ = 10x + y

Đổi chỗ hai chữ số cho nhau, ta được số mới là $\overline{yx}$ = 10y + x

Nếu đổi chỗ hai chữ số ban đầu thì ta được một số mới lớn hơn số ban đầu là 63 nên ta có: (10y + x) - (10x + y) = 63 (1)

Biết tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99 nên ta có:

(10x + y) + (10y + x) = 99 (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(10y+x)-(10x+y)=63\\(10x+y)+(10y+x)=99\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases}x=1\\y=8\end{cases}$ (TMĐK)

Vậy số đã cho là 18.

<u>Dạng 3: Bài toán dân số, phần trăm</u>

***Phương pháp:**

Toán dân số:

Gọi a là số dân được biết trước. Khi đó:

- Nếu tăng dân số thêm b% thì ta có số dân sau khi tăng là: a + ab%.
- Nếu giảm dân số b% thì ta có số dân sau khi giảm là: a - ab%.

Toán lãi suất:

Gọi x là số tiền được gửi cố định, với lãi suất gửi số tiền x là y%/ tháng và không thay đổi lãi suất. Khi đó:

- Số tiền tính được trong một tháng là: x + x.y%
- Số tiền tính được trong hai tháng là: x + (x +x.y%).y%

Tương tự như vậy, ta tính được số tiền gửi trong một năm.

***Bài tập:**

Bài 1: Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 600 tấn thóc. Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 10%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 20% so với năm ngoái. Do đó cả hai đơn vị thu hoạch được 685 tấn thóc. Hỏi năm ngoái, mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc?

HƯỚNG DẪN GIẢI:

$x + y = 600$ và $0,1x + 0,2y = 85$ hay $x + 2y = 850$.

Từ đó tính được $y = 250$ tấn, $x = 350$ tấn

Bài 2: Trong tháng thanh niên Đoàn trường phát động và giao chỉ tiêu mỗi chi đoàn thu gom 10kg giấy vụn làm kế hoạch nhỏ. Để nâng cao tinh thần thi đua bí thư chi đoàn 10A chia các đoàn viên trong lớp thành hai tổ thi đua thu gom giấy vụn. Cả hai tổ đều rất tích cực. Tổ 1 thu gom vượt chỉ tiêu 30%, tổ hai gom vượt chỉ tiêu 20% nên tổng số giấy chi đoàn 10A thu được là 12,5 kg. Hỏi mỗi tổ được bí thư chi đoàn giao chỉ tiêu thu gom bao nhiêu kg giấy vụn?

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi số kg giấy vụn tổ 1 được bí thư chi đoàn giao là x (kg) (Đk : $0 < x < 10$)

Số kg giấy vụn tổ 2 được bí thư chi đoàn giao là y (kg) (Đk : $0 < x < 10$)

Theo đầu bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 10 \\ 1,3x + 1,2y = 12,5 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được: (x; y) = (5;5)

Vậy số giấy vụn tổ 1 được bí thư chi đoàn giao là 5 kg

Số giấy vụn tổ 2 được bí thư chi đoàn giao là 5 kg

Bài 3: Cho một lượng dung dịch 10% muối. Nếu pha thêm 200 gam nước thì được một dung dịch 6%. Hỏi có bao nhiêu gam dung dịch đã cho.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi số gam dung dịch đã cho là x (g), (Điều kiện x>0)

Vậy số gam dung dịch sau khi đổ thêm 200 gam nước là x + 200 (g).

Vì trước và sau khi đổ thêm nước lượng muối không đổi, do đó ta có phương trình

$$6\% . (x + 200) = 10\%x$$

$\Leftrightarrow$ 6x + 1200 = 10x

$\Leftrightarrow$ x = 300 (TMĐK)

Vậy số dung dịch đã cho là 300gam.

Dạng 4: Bài toán Năng suất

***Phương pháp:**

Năng suất làm việc là phần công việc thực hiện trong một đơn vị thời gian.

Công thức: A = N.T

Trong đó, A: Khối lượng công việc.

N: Năng suất làm việc.

T: Thời gian làm việc.

Tổng năng suất riêng bằng năng suất chung khi cùng làm. Biết năng suất làm việc, thời gian hoàn thành để áp dụng hợp lý.

Lưu ý: Năng suất lao động tăng thêm = (100% + mức năng suất %).quy định công việc.

Bài 1: Hai người thợ cùng làm 1 công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ 2 làm trong 6 giờ thì cả 2 người hoàn thành 25% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

	Người 1	**Người 2**	**Cả 2 Người**
Thời gian làm riêng	*x (h)*	*y (h)*	*16h*
Năng suất/1ngày	$\frac{1}{x}$ *(phần công việc)*	$\frac{1}{y}$ *(phần công việc)*	$\frac{1}{16}$ *(phần công việc)*

- Đổi 25% công việc (= $\frac{1}{4}$ công việc)

Gọi số ngày để người thứ nhất làm một mình xong công việc là x (ngày)

Số ngày để người thứ hai làm một mình xong công việc là y (ngày) (ĐK: x, y> 16)

Mỗi ngày người thứ nhất làm được: $\frac{1}{x}$ (công việc)

Một ngày người thứ hai làm được: $\frac{1}{y}$ (công việc)

Vì 2 người làm trong 16 giờ thì xong nên 1 giờ cả 2 người làm được: $\frac{1}{16}$ *(công việc),* ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}$ (1)

- Theo bài ra người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ chỉ hoàn thành 25% công việc nên ta có phương trình: $\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình : $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4}\end{cases}$ Đặt $a=\frac{1}{x}$; $b=\frac{1}{y}$

ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b=\dfrac{1}{16} \\ 3a+6b=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a+16b=1 \\ 12a+24b=1 \end{cases} \Leftrightarrow -\begin{cases} 48a+48b=3 \\ 24a+48b=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 24a=1 \\ a+b=\dfrac{1}{16} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{24} \\ \dfrac{1}{24}+b=\dfrac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{24} \\ b=\dfrac{1}{48} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{24} \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{48} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24 \\ y=48 \end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy người thứ nhất làm một mình thì sau 24 ngày xong công việc . người thứ hai làm một mình thì sau 48 ngày xong công việc.

<u>Dạng 5: Bài toán Chung - Riêng</u>

***Phương pháp:**

Làm chung - làm riêng

- Nếu x giờ (hoặc ngày) làm xong công việc thì mỗi giờ (hoặc ngày) làm được $\frac{1}{x}$ công việc đó.

- Nếu trong 1 giờ: Đối tượng A làm được $\frac{1}{x}$ công việc, đối tượng B làm được $\frac{1}{y}$ công việc thì lượng công việc mà cả hai làm được trong 1 giờ là $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ công việc.

Hai vòi cùng chảy vào bể

Bước 1: - Tìm lượng nước chảy chung của 2 vòi

- Lượng nước chảy riêng của mỗi vòi vào bể hoàn thành

- Lập phương trình lượng nước

Bước 2: - Thời gian 2 vòi chảy đầy bể

- Thời gian chảy riêng hoàn thành của mỗi vòi

- Lập phương trình thời gian chảy đầy bể

Bước 3: Giải hệ phương trình

***Bài tập:**

<u>Bài 1</u>: Đề thi vào 10 Bình Dương (2017 – 2018)

Hai đội công nhân đắp đê ngăn Triều cường. Nếu hai đội cùng làm trong 6 ngày xong công việc. Nếu làm riêng thì đội I hoàn thành công việc chậm hơn đội II là 9 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội đắp xong trong bao nhiêu ngày.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi thời gian đội I hoàn thành công việc là x ($x > 6$), thời gian đội II hoàn thành công việc là y ($y > 6$).

Trong một ngày đội I làm được số công việc là $\frac{1}{x}$, đội II làm được số công việc là $\frac{1}{y}$.

Do hai đội làm trong 6 ngày xong công việc nên $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}(1)$

Do làm riêng đội I hoàn thành công việc chậm hơn đội II 9 ngày nên $x-y=9$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ :

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ x-y=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{9+y}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ x=9+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9+y\\ y^2-3y-54=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9+y\\ \left[\begin{array}{l}y=9\\ y=-6(l)\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=18\\ y=9\end{cases}$$

Vậy thời gian đội I hoàn thành công việc là 18 (ngày) và thời gian đội II hoàn thành công việc là 9 ngày

<u>Bài 2</u> : **Đề thi vào 10 Hà Tĩnh (2018 – 2019).**

Hai công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc trong 16 giờ. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 2 giờ thì họ làm được $\frac{1}{6}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình mỗi người làm trong bao lâu thì hoàn thành công việc trong bao lâu.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi thời gian người thứ nhất hoàn thành công việc là x (h), $x > 16$, thời gian người thứ hai hoàn thành công việc là y (h), $y > 16$.

Trong một giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

Trong một giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

Vì hai công nhân hoàn thành công việc trong 16 (h) nên

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}$ (1).

Vì người thứ nhất làm 3(h) và người thứ hai làm 2 giờ thì họ làm được $\frac{1}{6}$ công việc ta có : $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{6}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{16} \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{6} \end{cases}$ (I)

Đặt $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=a \\ \dfrac{1}{y}=b \end{cases}$ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{1}{16} \\ 3a+2b=\dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{24} \\ b=\dfrac{1}{48} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24 \\ y=48 \end{cases}$

Vậy người thứ nhất làm một mình trong 24 (h) xong công việc

Người thứ hai làm một mình trong 48 (h) xong công việc

<u>Bài 3:</u> *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai người cùng làm chung một công việc trong $\dfrac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi thời gian người thứ nhất hoàn thành một mình xong công việc là x (giờ), ĐK $x>\dfrac{12}{5}$

Thì thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là x + 2 (giờ)

Mỗi giờ người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$(*công việc*), người thứ hai làm được $\dfrac{1}{x+2}$ (*công việc*)

Vì cả hai người cùng làm xong công việc trong $\dfrac{12}{5}$ giờ nên mỗi giờ cả hai đội làm được $1:\dfrac{12}{5}=\dfrac{5}{12}$ (*công việc*)

Do đó ta có phương trình: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{5}{12}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+2+x}{x(x+2)}=\dfrac{5}{12}$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0$

$\Delta' = 49 + 120 = 169$, $\sqrt{\Delta'} = 13$

$\Rightarrow x=\dfrac{7-13}{5}=\dfrac{-6}{5}$ (loại) và $x=\dfrac{7+13}{5}=\dfrac{20}{5}=4$ (TMĐK)

Vậy người thứ nhất làm xong công việc trong 4 giờ,

người thứ hai làm xong công việc trong 4+2 = 6 giờ.

<u>Bài 4:</u> Để tránh lũ một đội biên phòng đến gặt giúp xã Chính Công một cánh đồng lúa. Họ làm việc được 4 giờ thì có đội thứ hai đến cùng gặt. Cả hai đội cùng gặt tiếp trong 8 giờ thì xong việc. Hỏi mỗi đội gặt một mình thì bao lâu sẽ gặt xong? Biết rằng nếu gặt một mình thì đội thứ nhất mất nhiều thời gian hơn đội thứ hai là 8 giờ.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi thời gian đội thứ nhất gặt một mình xong việc là x (giờ), ($x > 8$).

Thời gian đội thứ hai gặt một mình xong việc là x - 8 (giờ)

Trong một giờ đội thứ nhất gặt được $\frac{1}{x}$ (cánh đồng)

Trong một giờ đội thứ hai gặt được: $\frac{1}{x-8}$ (cánh đồng)

Theo đầu bài đội thứ nhất đã gặt được: $\frac{12}{x}$ (cánh đồng)

đội thứ hai đã gặt được: $\frac{8}{x-8}$ (cánh đồng)

Ta có phương trình: $\frac{12}{x} + \frac{8}{x-8} = 1$

Giải phương trình ta có: $x_1 = 4$ (loại)

$x_2 = 24$

Vậy: Đội thứ nhất gặt riêng trong 24 giờ thì xong.

Đội thứ hai gặt riêng trong 16 giờ thì xong.

<u>Dạng 6: Bài toán Chuyển động</u>

***Phương pháp:**

Bài toán thường gặp: Chuyển động cùng chiều, ngược chiều, trên dòng nước…

Gọi S, V, T lần lượt là Quãng đường, Vận tốc, Thời gian của vật thể chuyển động.

Quãng đường: $s = v.t$

Vận tốc: $v = \frac{s}{t}$

Thời gian: $t = \frac{s}{v}$

Chuyển động cùng chiều:

- Hai xe chuyển động cùng chiều trên cùng một quãng đường, đến khi gặp nhau:

Ta có phương trình: $S_1 = S_2$

- Hai xe cùng xuất phát, mà xe 1 đến trước xe 2 là t giờ:

Ta có phương trình: $t_2 - t_1 = t$

Chuyển động ngược chiều:

- Hai xe chuyển động ngược chiều cùng đến chỗ gặp nhau:

Ta có phương trình: $S_1 + S_2 = S$

Chuyển động trên dòng nước:

$V_{xuôi} = V_{thực} + V_{nước}$

$V_{ngược} = V_{thực} - V_{nước}$

***Bài tập:**

<u>Bài 1</u>: Đề thi vào 10 Bình Dương (2018 – 2019).

Một người dự định đi xe máy dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 90km trong một thời gian đã định. Sau khi được 1 giờ người đó nghỉ 9 phút. Do đó, để đến tỉnh B đúng hẹn, người ấy phải tăng vận tốc thêm 4km/h. Tính vận tốc lúc đầu của người đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi vận tốc lúc đầu người đó đi là x (km/h), $x > 0$, Vận tốc lúc sau người đó đi là $x+4$ (km/h).

Thời gian người đó dự định đi lúc đầu là $\frac{90}{x}$ (h)

Thời gian người đó đi sau khi tăng vận tốc là $\frac{90-x}{x+4}$ (h)

Vì sau khi đi một giờ người đó nghỉ 9 phút nên ta có phương trình

$$\frac{90}{x} - \frac{90-x}{x+4} = 1 + \frac{9}{60} \, (1)$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 276x - 21600 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-200}{3} (l) \\ x_2 = 36 (tm) \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc ban đầu người đó đi là 36 (km/h).

<u>Bài 2:</u> Hai người đi xe đạp xuất phát cùng một lúc đi từ A đến B. vận tốc của họ hơn kém nhau 3 km/h, nên đến B sớm muộn hơn nhau 30 phút. Tính vận tốc của mỗi người biết rằng quãng đường AB dài 30 km.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Đổi: 30 phút = $\frac{1}{2}$ (h)

Gọi vận tốc của xe đạp đi chậm là x (km/h) (điều kiện x > 0)

thì vận tốc của xe đạp đi nhanh là $x+3$ (km/h)

Thời gian xe đạp đi chậm đi là $\frac{30}{x}$ (h), Thời gian xe đạp đi nhanh đi là $\frac{30}{x+3}$ (h)

Theo bài ra hai xe đến B sớm muộn hơn nhau 30 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x} - \frac{30}{x+3} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 30.2.(x+3) - 30.2.x = x.(x+3)$$

$\Leftrightarrow 60x+180-60x=x^2+3x$

$\Leftrightarrow x^2+3x-180=0$

Ta có: $\Delta=3^2-4.1.(-180)=9+720=729>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{729}=27$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{-3+27}{2.1}=\dfrac{24}{2}=12$; $x_2=\dfrac{-3-27}{2.1}=\dfrac{-30}{2}=-15$

Nhận thấy $x_1=12>0$ (thoả mãn điều kiện), $x_2=-15<0$ (loại)

Kết luận: Vận tốc của xe đạp đi chậm là 12 (km/h)

Vận tốc của của xe đạp đi nhanh là 12 + 3 = 15 (km/h)

Bài 3: Hai ô tô đi từ A đến B dài 200km. Biết vận tốc xe thứ nhất nhanh hơn vận tốc xe thứ hai là 10km/h nên xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi vận tốc xe thứ hai là x (km/h). Đk: x > 0

Vận tốc xe thứ nhất là x + 10 (km/h)

Thời gian xe thứ nhất đi quảng đường từ A đến B là : $\dfrac{200}{x+10}$ (giờ)

Thời gian xe thứ hai đi quảng đường từ A đến B là : $\dfrac{200}{x}$ (giờ)

Xe thứ nhất đến B sớm 1 giờ so với xe thứ hai nên ta có phương trình: $\dfrac{200}{x}-\dfrac{200}{x+10}=1$

Giải phương trình ta có x_1 = 40, x_2 = -50 (loại)

x_1 = 40 (TMĐK). Vậy vận tốc xe thứ nhất là 50km/h, vận tốc xe thứ hai là 40km/h.

Bài 4: Cho quãng đường từ địa điểm A tới địa điểm B dài 90 km. Lúc 6 giờ một xe máy đi từ A để tới B Lúc 6 giờ 30 phút cùng ngày, một ô tô cũng đi từ A để tới B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h (Hai xe chạy trên cùng một con đường đã cho). Hai xe nói trên đều đến B cùng lúc. Tính vận tốc mỗi xe.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Xe máy đi trước ô tô thời gian là: 6 giờ 30 phút - 6 giờ = 30 phút = $\dfrac{1}{2}h$.

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h) (x > 0)

Vì vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h nên vận tốc của ô tô là x + 15 (km/h)

Thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là: $\dfrac{90}{x}\ (h)$

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là: $\dfrac{90}{x+15}\ (h)$

Do xe máy đi trước ô tô $\frac{1}{2}$ giờ và hai xe đều tới B cùng một lúc nên ta có phương trình:

$$\frac{90}{x}-\frac{1}{2}=\frac{90}{x+15} => 90.2.(x+15)-x(x+15)=90.2x$$

$$\Leftrightarrow 180x+2700-x^2-15x=180x \Leftrightarrow x^2+15x-2700=0$$

Ta có :

$$\Delta=15^2-4.(-2700)=11025>0$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{11025}=105$$

$$x_1=\frac{-15-105}{2}=-60 \text{ (\textit{không thỏa mãn điều kiện})}$$

$$x_2=\frac{-15+105}{2}=45 \text{ (\textit{thỏa mãn điều kiện})}$$

Vậy vận tốc của xe máy là 45 (km/h), vận tốc của ô tô là 45 + 15 = 60 (km/h).

Bài 5: Một ca nô chạy xuôi dòng từ A đến B rồi chạy ngược dòng từ B đến A hết tất cả 4 giờ. Tính vận tốc ca nô khi nước yên lặng, biết rằng quãng sông AB dài 30 km và vận tốc dòng nước là 4 km/giờ.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là x km/giờ (x > 4)

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là x +4 (km/giờ), khi ngược dòng là x - 4 (km/giờ). Thời gian ca nô xuôi dòng từ A đến B là $\frac{30}{x+4}$ giờ, đi ngược dòng từ B đến A là $\frac{30}{x-4}$ giờ.

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{30}{x+4}+\frac{30}{x-4}=4$ (4)

$(4) \Leftrightarrow 30(x-4)+30(x+4)=4(x+4)(x-4) \Leftrightarrow x^2-15x-16=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc x = 16. Nghiệm x = -1 <0 nên bị loại

Vậy vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là 16km/giờ.

Bài 6: Một ô tô dự định đi từ *A* đến *B* cách nhau 120 km trong một thời gian quy định. Sau khi đi được 1 giờ thì ô tô bị chặn bởi xe cứu hỏa 10 phút. Do đó để đến *B* đúng hạn xe phải tăng vận tốc thêm 6 km/h. Tính vận tốc lúc đầu của ô tô.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định; x > 0 => thời gian dự định : $\frac{120}{x}(h)$

Sau 1 giờ ô tô đi được x (km)=> quãng đường còn lại 120 - x (km)

Vận tốc lúc sau: x + 6 (km/h)

Phương trình: $1+\frac{1}{6}+\frac{120-x}{x+6}=\frac{120}{x}$ => x = 48 (TMĐK).

Vậy vận tốc lúc đầu của ô tô là 48 (km/h).

Bài 7: Quảng đ- ờng AB dài 156 km. Một ng- ời đi xe máy tử A, một ng- ời đi xe đạp từ B. Hai xe xuất phát cùng một lúc và sau 3 giờ gặp nhau. Biết rằng vận tốc của ng- ời đi xe máy nhanh hơn vận tốc của ng- ời đi xe đạp là 28 km/h. Tính vận tốc của mỗi xe?

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi vân tốc của xe đạp là x (km/h), điều kiện x > 0

Thì vận tốc của xe máy là x + 28 (km/h)

Trong 3 giờ:

+ Xe đạp đi được quãng đường 3x (km),

+ Xe máy đi được quãng đường 3(x + 28) (km), theo bài ra ta có phương trình: 3x + 3(x + 28) = 156

Giải tìm x = 12 (TMĐK)

Vận tốc của xe đạp là 12 km/h và vận tốc của xe máy là 12 + 28 = 40 (km/h)

Bài 8: Khoảng cách giữa hai bến sông A và b là 30 km. Một ca nô đi xuôi dòng từ bến A đến bến B rồi lại ngược dòng từ bến B về bến A. Tổng thời gian ca nô đi xuôi dòng và ngược dòng là 4 giờ . Tìm vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là x(km/h) (đk: $4 < x < 30$)

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng: x + 4 (km/h)

Vận tốc của ca nô khi ngược dòng: x – 4 (km/h)

Thời gian ca nô đi xuôi dòng: $\frac{30}{x+4}$ (h)

Thời gian ca nô đi ngược dòng: $\frac{30}{x-4}$ (h)

Tổng thời gian ca nô đi xuôi dòng và ngược dòng là 4h nên ta có phương trình:

$\frac{30}{x+4}+\frac{30}{x-4}=4 \Rightarrow x^2-15x-16=0$ .Giải phương trình trên ta được:

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-1(\textit{không thỏa ĐK}) \\ x_2=16(\textit{thỏa ĐK}) \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là 16km/h.

Bài 9: Quãng đường từ A đến B dài 50km.Một người dự định đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi.Khi đi được 2 giờ,người ấy dừng lại 30 phút để nghỉ.Muốn đến B đúng thời gian đã định,người đó phải tăng vận tốc thêm 2 km/h trên quãng đường còn lại.Tính vận tốc ban đầu của người đi xe đạp.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi x(km/h) là vtốc dự định; x > 0 ; có 30 phút = ½ (h)

Thời gian dự định : $\frac{50}{x}(h)$

Quãng đường đi được sau 2h : 2x (km)

Quãng đường còn lại : 50 - 2x (km)

Vận tốc đi trên quãng đường còn lại : x + 2 (km/h)

Thời gian đi quãng đường còn lại: $\frac{50-2x}{x+2}(h)$

Theo đề bài ta có phương trình:

$$2+\frac{1}{2}+\frac{50-2x}{x+2}=\frac{50}{x}$$

Giải ra ta được : x = 10 (thỏa điều kiện bài toán)

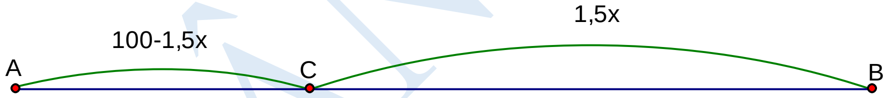
Vậy vận tốc dự định là 10 km/h

<u>Bài 10:</u> Quãng đường từ Việt Trì đến Hà Nội dài 100 km. Cùng một lúc, một xe máy khởi hành từ Việt Trì đi Hà Nội và một xe ô tô khởi hành từ Hà Nội đi Việt Trì. Sau khi hai xe gặp nhau, xe máy đi 1 giờ 30 phút nữa mới đến Hà Nội. Biết vận tốc hai xe không thay đổi trên suốt quãng đường đi và vận tốc của xe máy kém vận tốc xe ô tô là 20 km/h. Tính vận tốc mỗi xe.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Đổi $1h30' = 1,5h$

Đặt địa điểm :



- Việt Trì là A
- Hai xe gặp nhau là C
- Hà Nội là B

Gọi vận tốc của xe máy là $x(km/h)$. ĐK : $x>0$.

Suy ra :

Vận tốc của ô tô là $x+20\ (km/h)$.

Quãng đường BC là : $1,5x(km)$

Quãng đường AC là: $100-1,5x\ (km)$

Thời gian xe máy đi từ A đến C là: $\frac{100-1,5x}{x}\ (h)$

Thời gian ô tô máy đi từ B đến C là: $\frac{1,5x}{x+20}\ (h)$

Vì hai xe khởi hành cùng lúc, nên ta có phương trình: $\frac{100-1,5x}{x}=\frac{1,5x}{x+20}$

Giải phương trình:

$$\frac{100-1,5x}{x}=\frac{1,5x}{x+20}\Rightarrow (100-1,5x)(x+20)=1,5x^2$$
$$\Rightarrow 100x+2000-1,5x^2-30x=1,5x^2$$
$$\Rightarrow 3x^2-70x-2000=0$$

$\Delta'=35^2+3.2000=1225+6000=7225>0\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=\sqrt{7225}=85$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1=\frac{35+85}{3}=40$ (*thỏa mãn ĐK*)

$x_2=\frac{35-85}{3}=-\frac{50}{3}$ (*không thỏa mãn ĐK*)

Vậy vận tốc của xe máy là $40km/h$.

Vận tốc của ô tô là $40+20=60(km/h)$.

<u>Bài 11:</u> Hai xe ô tô cùng đi từ TP. Việt Trì đến Thái Nguyên, xe thứ hai đến sớm hơn xe thứ nhất là 1 giờ. Lúc trở về xe thứ nhất tăng vận tốc thêm 5 km mỗi giờ, xe thứ hai vẫn giữ nguyên vận tốc nhưng dừng lại nghỉ ở một điểm trên đường hết 40 phút, sau đó về đến TP. Việt Trì cùng lúc với xe thứ nhất. Tìm vận tốc ban đầu của mỗi xe, biết chiều dài quãng đường từ TP. Việt Trì đến Thái Nguyên là 120 km và khi đi hay về hai xe đều xuất phát cùng một lúc.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi vận tốc ban đầu của xe thứ nhất là x (km/h), xe thứ hai là y (km/h). ĐK: $x>0$; $y>0$.

Thời gian xe thứ nhất đi từ TP. Việt Trì đến Thái Nguyên là $\frac{120}{x}(h)$.

Thời gian xe thứ hai đi từ TP. Việt Trì đến Thái Nguyên là $\frac{120}{y}(h)$.

Vì xe thứ hai đến sớm hơn xe thứ nhất là 1 giờ nên ta có phương trình: $\frac{120}{x}-\frac{120}{y}=1\ (1)$

Vận tốc lúc về của xe thứ nhất là x+ 5 (km/h).

Thời gian xe thứ nhất về từ Thái Nguyên đến TP. Việt Trì $\frac{120}{x+5}(h)$.

Thời gian xe thứ hai về từ Thái Nguyên đến TP. Việt Trì $\frac{120}{y}(h)$.

Vì xe thứ hai dừng lại nghỉ hết $40ph=\frac{2}{3}h$, sau đó về đến TP. Việt Trì cùng lúc với xe thứ nhất nên ta có phương trình: $\frac{120}{x+5}-\frac{120}{y}=\frac{2}{3}\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = 1 \\ \dfrac{120}{x+5} - \dfrac{120}{y} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Giải hệ phương trình:

$\begin{cases} \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = 1 \\ \dfrac{120}{x+5} - \dfrac{120}{y} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{x+5} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow 360(x+5) - 360x = x(x+5) \Rightarrow x^2 + 5x - 1800 = 0$

$\Delta = 25 + 4.1800 = 7225 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 85$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-5+85}{2} = 40$ (thỏa mãn ĐK)

$x_2 = \dfrac{-5-85}{2} = -45$ (không thỏa mãn ĐK)

Thay $x = 40$ vào pt (1) ta được: $\dfrac{120}{40} - \dfrac{120}{y} = 1 \Rightarrow \dfrac{120}{y} = 2 \Rightarrow y = 60$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy vận tốc ban đầu của xe thứ nhất là 40 km/h, xe thứ hai là 60 km/h.

Dạng 7: Bài toán thực tế vận dụng

***Phương pháp:**

Toán sử dụng kiến thức Vật lý, Hóa học

- Tính khối lượng riêng của vật: $D = \dfrac{m}{V}$

(D: Khối lượng riêng; m: Khối lượng; V: Thể tích)

- Công thức tính thành phần phần trăm của chất có trong dung dịch: $C\% = \dfrac{m_{ct}}{m_{dd}}.100\%$

(C%: Nồng độ phần trăm; m_{ct}: Khối lượng chất tan; m_{dd}: Khối lượng dung dịch)

***Bài tập:**

Bài 1: Đề thi vào 10 Bắc Ninh (2018 – 2019)

Một nhóm học sinh gồm 15 bạn gồm cả nam và nữ tham gia buổi lao động trồng cây. Các bạn nam trồng được 30 cây, các bạn nữa trồng được 36 cây. Mỗi bạn nam trồng được số cây như nhau và mỗi bạn nữ trồng được số cây như nhau. Tính số học sinh nam và học sinh nữ của nhóm, biết rằng bạn nam trồng nhiều hơn bạn nữa một cây

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi số bạn nam trồng cây là x, $(x \in N^*, x < 15)$.

Vì nhóm có 15 học sinh cả nam và nữ nên số học sinh nữ là 15-x

Vì các bạn nam trồng được 30 cây nên mỗi bạn nam trồng được số cây là $\frac{30}{x}$.

Vì các bạn nữ trồng được 31 cây nên số cây các bạn nữ trồng được là $\frac{31}{15-x}$.

Do mỗi bạn nam trồng được nhiều hơn bạn nữ một cây nên:

$\frac{30}{x}-\frac{31}{15-x}=1$ (1)

Giải (1) ta được $x_1=75$ (loại), $x_2=6$

Vậy số bạn nam trồng cây là 6 vàsố bạn nữ trồng cây là 9

<u>Bài 2</u>: Đề thi vào 10 Phú Thọ (2018 – 2019)

Hai bạn Hòa và Bình có 100 quyển sách. Nếu Hòa cho Bình 10 quyển sách thì số sách của Hòa bằng $\frac{3}{2}$ số sách của Bình. Hỏi lúc đầu mỗi bạn có bao nhiêu quyển sách.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi số quyển sách của Hòa lúc đầu là x $(x \in N^*, x<100)$.

Gọi số quyển sách của Bình lúc đầu là y $(y \in N^*, y<100)$

Vì số sách của hai bạn là 100 quyển nên: $x+y=100$ (1)

Do Hòa cho Bình 10 quyển sách thì số sách của Hòa bằng $\frac{3}{2}$ số sách của Bình nên ta có:

$x-10=\frac{3}{2}(y+10) \Leftrightarrow 2x-3y=50$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ sau: $\begin{cases} x+y=100 \\ 2x-3y=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=70 \\ y=30 \end{cases}$

Vậy số sách của Hòa là 70 quyển và số sách của Bình là 30 quyển

<u>Bài 3:</u> Một phòng họp có 320 ghế ngồi được xếp thành từng dãy và số ghế mỗi dãy đều bằng nhau. Nếu số dãy ghế tăng tăng thêm 1 và số ghế mỗi dãy tăng thêm 2 thì trong phòng có 374 ghế. Hỏi trong phòng có bao nhiêu dãy ghế và mỗi dãy có bao nhiêu ghế?

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi số dãy ghế trong phòng họp là x (dãy) $(x \in \mathbb{N}^*)$

Gọi số ghế trong mỗi dãy là y (ghế) $(y \in \mathbb{N}^*)$

Vì phòng họp có 320 ghế ngồi được xếp thành từng dãy và số ghế mỗi dãy đều bằng nhau nên ta có phương trình: $xy=320$ (1)

Vì số dãy ghế tăng tăng thêm 1 và số ghế mỗi dãy tăng thêm 2 thì trong phòng có 374 ghế nên ta có phương trình: $(x+1)(y+2)=374$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy=320 \\ (x+1)(y+2)=374 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=320 \\ xy+2x+y+2=374 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=320 \\ 2x+y=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{320}{x} \\ 2x+\dfrac{320}{x}=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{320}{x} \\ x^2-26x+160=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{320}{x} \\ x^2-26x+160=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{320}{x} \\ x^2-26x+160=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=32 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=16 \\ y=20 \end{cases}$$

Vậy trong phòng họp có 10 dãy ghế và mỗi dãy có 32 ghế

Hoặc là trong phòng họp có 16 dãy ghế và mỗi dãy có 20 ghế

Bài 4: Trong đợt quyên góp ủng hộ người nghèo, lớp 9A và 9B có 79 học sinh quyên góp được 975000 đồng. Mỗi học sinh lớp 9A đóng góp 10000 đồng, mỗi học sinh lớp 9B đóng góp 15000 đồng. Tính số học sinh mỗi lớp.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi x là số học sinh lớp 9A ($x \in N^*$ và $x < 79$)

$\Rightarrow$ Số học sinh lớp 9B là: 79 - x (học sinh)

Lớp 9A quyên góp được: 10000x (đồng)

Lớp 9B quyên góp được: 15000(79 - x) (đồng)

Do cả hai lớp quyên góp được 975000 đồng nên ta có phương trình:

10000x + 15000(79 - x) = 975000

$\Leftrightarrow$ 10x + 15(79 - x) = 975 $\Leftrightarrow$ -5x = - 210 $\Leftrightarrow$ x = 42

Vậy lớp 9A có 42 học sinh; lớp 9B có: 79 - 42 = 37 (học sinh)

Bài 5: Một phòng họp có 360 chỗ ngồi và được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. Nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì số chỗ ngồi trong phòng không thay đổi. Hỏi ban đầu số chỗ ngồi trong phòng họp được chia thành bao nhiêu dãy?

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi x (dãy) là số dãy ghế lúc đầu được chia từ số chỗ ngồi trong phòng họp (ĐK: $x \in N^*$ và $x > 3$)

Số chỗ ngồi ở mỗi dãy lúc đầu: $\dfrac{360}{x}$ (chỗ)

Do thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy và số chỗ ngồi trong phòng không thay đổi nên ta có phương trình: $(\dfrac{360}{x} + 4)(x - 3) = 360$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 270 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 18 \\ x = -15 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy lúc đầu số chỗ ngồi trong phòng họp được chia thành 18 dãy.

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Giải bài toán bằng cách lập Phương trình hoặc Hệ phương trình

DẠNG 1: BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Bài 1: Một hình chữ nhật có chu vi là 134m. nếu giảm mỗi kích thước của vườn đi 1m thì diện tích của vườn bằng diện tích của hình vuông có cạnh bằng 28m. Tính các kích thước của hình chữ nhật đó.

Bài 2: Một tấm tôn hình chữ nhật có chu vi là 48 cm. Người ta cắt bỏ mỗi góc một hình vuông có cạnh 2cm rồi gấp lên thành một hình hộp chữ nhật không có nắp có thể tích 96 cm3. Tính các kích thước của hình chữ nhật ban đầu.

Bài 3: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34m, nếu tăng chiều dài 3m và tăng chiều rộng 2m thì diện tích tăng thêm 45m2. Hãy tính chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lúc đầu.

Bài 4: Một tam giác vuông có chu vi là 30m, cạnh huyền 13 cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

Bài 5: Một sân hình chữ nhật có diện tích là 240 m2. Nếu tăng chiều rộng thêm 3m, giảm chiều dài 4m thì diện tích không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng.

Bài 6: Một đám đất hình chữ nhật có chu vi 124m. Nếu tăng chiều dài 5m và chiều rộng 3m thì diện tích tăng thêm 225 m2. Tính kích thước của hình chữ nhật đó.

Bài 7: Một hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài 1cm. Nếu tăng thêm chiều dài ¼ của nó thì diện tích hình chữ nhật đó tăng thêm 3cm2. Tính diện tích hình chữ nhật ban đầu?

Bài 8: Tính độ dài 2 cạnh góc vuông của 1 tam giác vuông, biết rằng nếu tăng mỗi cạnh lên 3 cm thì diện tích tam giác đó sẽ tăng lên 36 cm^2, và nếu một cạnh giảm đi 2 cm, cạnh kia giảm đi 4 cm thì diện tích của tam giác giảm đi 26 cm^2 .

Bài 9: Nhà Lan có một mảnh vườn trồng rau cải bắp. Vườn được đánh thành nhiều luống, mội luống trồng cùng một số cây cải bắp . Lan tính rằng : Nếu tăng thêm 8 luống rau, nhưng mỗi luống trồng ít đi 3 cây, thì số cây toàn vườn ít đi 54 cây. Nếu giảm đi 4 luống , nhưng mỗi luống trồng tăng thêm 2 cây thì số rau toàn vườn sẽ tăng thêm 32 cây. Hỏi vườn nhà Lan trồng bao nhiêu cây rau cải bắp.

Bài 10: Một sân trường hình chữ nhật có chu vi 340 m. 3 lần chiều dài hơn 4 lần chiều rộng là 20 m . Tính chiều dài và chiều rộng của sân trường.

Bài 11: Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 80 m, nếu tăng chiều dài thêm 3 m , tăng chiều rộng thêm 5 m thì diện tích của mảnh đất tăng thêm 195 cm^2 .Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.

Bài 12: một thửa ruộng hình chữ nhật , nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rông thêm 3 m thì diện tích tăng thêm 100 m^2. Nếu cùng giảm cả chiều dài và chiều rộng đi 2 m thì diện tích giảm đi 68 m^2. Tính diện tích của thửa ruộng đó.

Bài 13: Tính chu vi của một hình chữ nhật , biết rằng nếu tăng mỗi chiều hình chữ nhật lên 5 m thì diện tích hình chữ nhật tăng 225 m^2. Nếu tăng chiều rộng lên 2 m và giảm chiều dài đi 5 m thì diện tích hình chữ nhật bằng diện tích ban đầu.

Bài 14: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 280 m. Người ta làm lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng 2 m. Tính kích thước của vườn, biết rằng đất còn lại trong vườn để trồng trọt là 4256 m^2.

Bài 15: Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài lên 10 m, tăng chiều rộng lên 5 m thì diện tích tăng 500 m^2. Nếu giảm chiều dài 15 m và giảm chiều rộng 9 m thì diện tích giảm 600 m^2. Tính chiều dài, chiều rộng ban đầu.

Bài 16: Cho một tam giác vuông. Nếu tăng các cạnh góc vuông lên 2 cm và 3 cm thì diện tích tam giác tăng 50 cm^2. Nếu giảm cả hai cạnh đi 2 cm thì diện tích sẽ giảm đi 32 cm^2. Tính hai cạnh góc vuông.

DẠNG 2: BÀI TOÁN TÌM SỐ

Bài 1: Tìm số tự nhiên có 2 chữ số , biết rằng 2 lần chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục 1 đơn vị và nếu 2 chữ số ấy viết theo chiều ngược lại thì được 1 số mới (có 2 chữ số) bé hơn số cũ 27 đơn vị .

Bài 2: Cho một số có 2 chữ số . Nếu đổi chỗ 2 chữ số của nó thì được một số lớn hơn chữ số đã cho là 63. tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99 . Tìm số đã cho

Bài 3: Cho một số tự nhiên có 2 chữ số .Nếu đổi chỗ 2 chữ số của nó thì được một số lớn hơn số đã cho là 36. tổng của số đã cho và số mới tạo thành là 110. Tìm số đã cho

Bài 4: Tìm một số có 2 chữ số , biết rằng tổng các chữ số là 16, nếu đổi chỗ 2 chữ số cho nhau ta được số mới nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị.

Bài 5: Tìm 2 số tự nhiên , biết rằng tổng của chúng bằng 1006 và nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 2 số dư là 124.

Bài 6: Tổng của 2 số bằng 59 . Hai lần của số này bè hơn 3 lần của số kia là 7. Tìm 2 số đó.

Bài 7: tìm 2 số tự nhiên , biết rằng hiệu của chúng bằng 1275 và nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 3 số dư 125.

Bài 8: Nếu tử số của một phân số được tăng gấp đôi và mẫu số thêm 8 thì giá trị của phân số bằng $\frac{1}{4}$. Nếu tử số thêm 7 và mẫu số tăng gấp 3 thì giá trị phân số bằng $\frac{5}{24}$. Tìm phân số đó.

Bài 9: Tìm một số N gồm 2 chữ số, biết rằng tổng các bình phương hai chữ số bằng số đó cộng thêm tích hai chữ số. Nếu thêm 36 vào số đó thì được một số có hai chữ số mà các chữ số viết thứ tự ngược lại.

Bài 10: Tìm một số có 2 chữ số biết rằng nếu đem số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4 và dư là 3. Còn nếu đem số đó chia cho tích các chữ số của nó thì được thương là 3 và dư là 5.

DẠNG 3: BÀI TOÁN TỶ LỆ %

Bài 1: Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu động , kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai . Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu tiền cho mỗi loại.

Bài 2: Năm ngoái , hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch 720 tấn thóc . Năm nay , đơn vị thứ I làm vượt mức 15% , đơn vị thứ II làm vượt mức 12% so với măm ngoái . Do đó cả 2 đơn vị thu hoạch được 819 tấn thóc . Hỏi mỗi năm, mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc.

Bài 3: Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 360 công cụ . Nhờ sắp xếp hợp lý dây chuyền sản xuất nên xí nghiệp I đã vượt mức 125 kế hoạch , xí nghiệp II đã vượt mức 10% kế hoạch . Do đó cả xí nghiệp đã làm được 400 công cụ . Tính số dụng cụ mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.

Bài 4: Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 800 sản phẩm. Sang tháng thứ hai tổ 1 vượt 15%.tổ 2 vượt 20%. Do đó cuối tháng cả hai tổ xản xuất đựoc 945 sản phẩm. Tính xem trong tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm

Bài 5: Một khối lớp tổ chức đi tham quan bằng ô tô. Mỗi xe chở 22 h/s thì còn thừa 01 h/s. Nếu bớt đi 01 ôtô thì có thể xếp đều các h/s trên các ôtô còn lại. Hỏi lúc đầu có bao nhiêu ôtô, bao nhiêu h/s. Mỗi xe chở không quá 32 h/s.

Bài 6: Một phòng họp có 360 ghế ngồi được xếp thành từng hàng và số ghế ở mỗi hàng bằng nhau. Nếu số *hàng* tăng thêm 1 và số ghế ở mỗi hàng tăng thêm 1 thì trong phòng có 400 ghế. Hỏi có bao nhiêu hàng, mỗi hàng có bao nhiêu ghế?

Bài 7: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ 2 làm 6 giờ thì họ làm được 25% công việc. Hỏi mỗi người làm một mình công việc đó trong mấy giời thì xong?

Bài 8: Một phòng họp có 360 ghế ngồi được xếp thành từng hàng và số ghế ở mỗi hàng bằng nhau. Nếu số *hàng* tăng thêm 1 và số ghế ở mỗi hàng tăng thêm 1 thì trong phòng có 400 ghế. Hỏi có bao nhiêu hàng, mỗi hàng có bao nhiêu ghế?

Bài 9: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ 2 làm 6 giờ thì họ làm được 25% công việc. Hỏi mỗi người làm một mình công việc đó trong mấy giời thì xong?

Bài 10: một dung dịch chứa 30% axit nitơric (tính theo thể tích) và một dung dịch khác chứa 55% axit nitơric .Cần phải trộn thêm bao nhiêu lít dung dịch loại 1 và loại 2 để được 100lít dung dịch 50% axit nitơric?

DẠNG 4: BÀI TOÁN NĂNG SUẤT

Bài 1: Một đội thợ mỏ phải khai thác 260 tấn than trong một thời hạn nhất định. Trên thực tế, mỗi ngày đội đều khai thác vượt định mức 3 tấn, do đó họ đã khai thác được 261 tấn than và xong trước thời hạn một ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày đội thợ phải khai thác bao nhiêu tấn than?

Bài 2: Một xí nghiệp có kế hoạch sản xuất 180 tấn dụng cụ trong một thời gian đã định. Nhưng nhờ tinh thần thi đua, nên mỗi ngày xí nghiệp sản xuất nhiều hơn mức dự kiến 1 tấn; chẳng những rút ngắn thời gian dự định 1 ngày mà còn sản xuất thêm 10 tấn ngoài kế hoạch. Hỏi thời gian dự kiến bao nhiêu ngày ? Mỗi ngày dự kiến làm ra bao nhiêu tấn dụng cụ ?

Bài 3: Trên một cánh đồng cấy 60 ha lúa giống mới, 40 ha lúa giống cũ . Thu hoạch được tất cả 460 ha tấn thóc. Hỏi năng suất mỗi loại lúa trên 1 ha là bao nhiêu biết rằng 3 ha trồng lúa mới thu hoạch được ít hơn 4 ha trồng lúa cũ là 1 tấn.

Bài 4: Hai tổ học sinh trồng được một số cây trong sân trường.
Nếu lấy 5 cây của tổ 2 chuyển cho tổ một thì số cây trồng được của cả hai tổ sẽ bằng nhau. Nếu lấy 10 cây của tổ một chuyển cho tổ hai thì số cây trồng được của tổ hai sẽ gấp đôi số cây của tổ một.
Hỏi mỗi tổ trồng được bao nhiêu cây?

Bài 5: Một đội xe cần chuyên chở 120 tấn hàng. Hôm làm việc có 2 xe phải điều đi nơi khác nên mỗi xe phải chở thêm 16 tấn. *Hỏi đội có bao nhiêu xe?*

Bài 6: Một nhà máy dự định sản xuất chi tiết máy trong thời gian đã định và dự định sẽ sản xuất 300 chi tiết máy trong một ngày. Nhưng thực tế mỗi ngày đã làm thêm được 100 chi tiết, nên đã sản xuất thêm được tất cả là 600 chi tiết và hoàn thành kế hoạch trước 1 ngày. Tính số chi tiết máy dự định sản xuất.

Bài 7: Một cơ sở đánh cá dự định trung bình mỗi tuần đánh bắt được 20 tấn cá , nhưng đã vượt mức được 6 tấn mỗi tuần nên chẳng những đã hoàn thành kế hoạch sớm 1 tuần mà còn vượt mức kế hoạch 10 tấn . Tính mức kế hoạch đã định

Bài 8: Một đội xe cần chuyên chở 36 tấn hàng . Trứơc khi làm việc đội xe đó được bổ xung thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn so với dự định . Hỏi đội xe lúc đầu có bao nhiêu xe ? Biết rằng số hàng chở trên tất cả các xe có khối lượng bằng nhau.

DẠNG 5: BÀI TOÁN CHUNG RIÊNG

Bài 1: Hai máy cày cùng cày một đám ruộng. Nếu cả hai máy cùng làm thì sẽ cày song trong 4 ngày. Nếu cày riêng thì máy 1 sẽ cày song nhanh hơn máy 2 là 6 ngày. Hỏi nếu cày riêng thì mỗi máy cày song đám ruộng sau bao nhiêu ngày.

Bài 2: Một tổ may mặc định may 600 áo trong thời gian đã định. Nhưng do cải tiến kỹ thuật nên năng suất tăng lên, mỗi ngày làm thêm 4 áo, nên thời gian sản xuất giảm 5 ngày. Hỏi mỗi ngày tổ dự định may bao nhiêu áo.

Bài 3: Một tổ may mặc định may 150 bộ quần áo trong thời gian đã định. Nhưng do cải tiến kỹ thuật nên năng suất tăng lên, mỗi ngày làm thêm 5 bộ quần áo, nên thời gian sản xuất giảm 1 ngày so với dự định. Hỏi mỗi ngày tổ dự định may bao nhiêu áo.

Bài 4: Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 4h đầy bể. Nếu cho chảy riêng đầy bể thì vòi 1 cần ít thời gian hơn vòi 2 là 6h. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi chảy đầy bể sau bao lâu.

Bài 5: Một tổ may mặc có kế hoạch may 720 bộ quần áo theo năng xuất dự kiến. Thời gian làm theo năng xuất tăng 10 sản phẩm mỗi ngày kém 4 ngày so với thời gian làm theo năng xuất giảm đi 20 sản phẩm mỗi ngày (tăng, giảm so với năng xuất dự kiến). Tính năng xuất dự kiến.

Bài 6: Hai đội công nhân cùng làm một công việc. Nếu hai đội làm chung thì hoàn thành sau 12 ngày. Nếu mỗi đội làm riêng thì dội một sẽ hoàn thành công việc nhanh hơn đội hai là 7 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc đó?

Bài 7: Hai đội công nhân cùng làm một đoạn đường trong 24 ngày thì xong. Mỗi ngày phần việc của đội A làm được nhiều gấp rưỡi đội B. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong đoạn đường đó trong bao lâu?

Bài 8: Hai đọi công nhân cùng làm 1 đoạn đường trong 24 ngày thì xong .Mỗi ngày , phần việc đội A làm gấp rưỡi đội B. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong đoạn đường đó trong bao lâu.

Bài 9: Hai người thợ cùng làm chung một công viêc trong 16 giờ thì xong . Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được 25% công việc . Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đo trong bao lâu.

Bài 10: Hai đội xây dựng làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày . Nhưng khi làm chung được 8 ngày thì đội I được điều động đi làm việc khác . Tuy chỉ còn một mình đội II làm việc nhưng do cải tiến cách làm , năng suất của đội II tăng gấp đôi , nên họ đã làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày . hỏi với năng suất ban đầu , nếu mỗi đội làm một mình thì phải làm trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên.

Bài 11: Hai người thợ cùng xây một bứt tường trong 7 giờ 12 phút thì xong (vôi vữa và gạch có công nhân khác vận chuyển) . Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả 2 xây được $\frac{3}{4}$ bức tường . Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xây xong bức tường.

Bài 12: Hai công nhân cùng sơn cửa cho một cong trình trong 4 ngày thì xong việc. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 9 ngày và người thứ hai đến làm tiếp trong 1 ngày nữa thì xong việc . Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong việc.

Bài 13: Hai cần cẩu lớn bốc vỡ một lô hàng ở cảng Sài Gòn. Sau 3 giờ thì có thêm 5 cần cẩu bé (công suất bé hơn) cùng làm việc .cả 7 cần cẩu làm việc 3 giờ nữa thì xong. Hỏi mỗi cần cẩu làm việc một mình thì bao lâu xong việc , biết rằng nếu cả 7 cần cẩu cùng làm việc từ đầu thì trong 4 giờ xong việc.

Bài 14: Hai tổ côngnhân cùng làm chung một công việc và dự định hoàn hành trong 6 giờ . Nhưng khi làm chung trong 5 giờ thì tổ II được điều động đi làm việc khác . Do cải tiến cách làm, năng suất của tổ I tăng 1,5lần, nên tổ I đã hoàn thành nốt phần việc còn lại trong 2 giờ . Hỏi với năng suất ban đầu , nếu mỗi tổ làmmột mình thì sau bao nhiêu giờ mới xong công việc.

Bài 15: Có hai vòi nước, vòi 1 chảy đầy bể trong 1,5 giờ, vòi 2 chảy đầy bể trong 2 giờ. Người ta đã cho vòi 1 chảy trong một thời gian, rồi khóa lại và cho vòi 2 chảy tiếp, tổng cộng trong 1,8 giờ thì đầy bể. Hỏi mỗi vòi đã chảy trong bao lâu?

Bài 16: Hai vòi nước chảy vào một bể nước cạn(không có nước) thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ I và 9 giờ sau mở thêm vòi thứ II thì sau $\frac{6}{5}$ giờ mới đầy bể . Hỏi nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ II thì sau bao lâu mới đầy bể.

Bài 17: Nếu 2 vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn (không có nước) thì bể sẽ đầy trong 1 giờ 20 phút. Nếu mở vòi thứ nhất trong 10 phút và vòi thứ hai trong 12 phút thì chỉ được $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bể là bao nhiêu.

Bài 18: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 1 giờ 30 phút đầy bể . Nếu mở vòi thứ nhất trong 15 phút rồi khóa lại và mở vòi thứ hai cho chảy tiếp trong 20 phút thì sẽ được $\frac{1}{5}$ bể . Hỏi nếu mỗi vòi chày một mình thì bao lâu sẽ đầu bể.

Bài 19: Hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì bể sẽ đầy say 1 giờ 12 phút . Nếu vòi thứ nhất chảy trong 30 phút và vòi thứ hai chảy trong 45 phút thì đầy $\frac{17}{36}$ bể . Hỏi nếu chảy một mình thì mỗi vòi chảy bao lâu mới đầy bể.

Bài 20: Nếu mở cả hai vòi nước chảy vào mệt bể cạn thì sau 2 giờ 55phút bể đầy bể. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là hai giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu đầy bể?

Bài 21: Hai tổ công nhân làm chung trong 12 giờ sẽ hoàn thành xong công việc đã định. Họ làm chung với nhau trong 4 giờ thì tổ thứ nhất được điều đi làm việc khác, tổ thứ hai làm nốt công việc còn lại trong 10 giờ . Hỏi tổ thứ hai làm một mình thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc.

Bài 22: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong . Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì họ làm được 25% côngviệc . Hỏi mỗi người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong.

DẠNG 6: BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Bài 1: Hai người đi xe đạp xuất phát cùng một lúc đi từ A đến B. Vận tốc của họ hơn kém nhau 3 km/h nên họ đến B sớm muộn hơn nhau 30phút. Tính vận tốc của mỗi người, biết quãng đường AB dài 30 km.

Bài 2: Một chiếc thuyền khởi hành từ một bến sông A. Sau 5h30p một ca nô đuổi theo và đuổi kịp thuyền tại một địa điểm cách bến sông A 20 km. Hỏi vận tốc của thuyền biết vận tốc của ca nô chạy nhanh hơn thuyền là 12km/h.

Bài 3: Hai người đi xe đạp khởi hành cùng một lúc từ hai địa điểm A, B cách nhau 54 km, đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2h. Tính vận tốc của hai người đó biết rằng vận tốc của người đi từ A bằng vận tốc của người đi từ B.

Bài 4: Một người đi xe đạp từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 50 km. Sau đó 1h30p, một người đi xe máy cũng đi từ A đến B và đến B trước người đi xe đạp 1h. Tính vận tốc của mỗi xe biết vận tốc của xe máy gấp 2,5 lần vận tốc xe đạp.

Bài 5: Một ôtô chuyển động đều với vận tốc đã định để đi hết quãng đường 120km. Đi được nửa quãng đường, xe nghỉ 3p nên để đến nơi đúng giờ xe đã phải tăng vận tốc thêm 6km/h trên nửa quãng đường còn lại. Tính thời gian xe lăn bánh trên đường.

Bài 6: Một người đi xe đạp từ A đến B trong một thời gian đã định. Khi còn cách B 30 km, người đó nhận thấy rằng sẽ đến B muộn nửa giờ nếu giữ nguyên vận tốc đạng đi, nhưng nếu tăng vận tốc thêm 5km/h thì sẽ đến B sớm nửa giờ. Tính vận tốc của xe trên quãng đường đi lúc đầu.

Bài 7: Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 33 km với vận tốc xác định. Khi từ B trở về A người ấy đi bằng con đường khác dài hơn trước 29 km nhưng với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi 3km/h. Tính vận tốc lúc đi, biết thời gian về nhiều hơn thời gian đi 1h30p.

Bài 8: Hai bến sông A, B cách nhau 40 km. Cùng một lúc với ca nô xuôi bến từ bến A có một chiếc bè trôi từ bến A với vận tốc 3km/h. Sau khi đến bến B, ca nô trở về bến A ngay và gặp bè khi đã trôi được 8km. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng vận tốc riêng của ca nô không đổi.

Bài 9: Một ca nô chạy xuôi dòng từ bến A đến bến B, rồi lại chạy ngược dòng từ bến B trở về bến A mất tất cả 4h. tính vận tốc của canô khi nước yên lặng, biết quãng sông AB dài 30km và vận tốc của dòng nước là 4km/h.

Bài 10: Để đi đoạn đường từ A đến B, một xe máy đã đi hết 3h20 phút, còn một ôtô chỉ đi hết 2h30phút. Tính chiều dài quãng đường AB biết rằng vận tốc của ôtô lớn hơn vận tốc xe máy 20km/h.

Bài 11: Hai người ở hai địa điểm A và B cách nhau 3,6 km, khởi hành cùng một lúc ngược chiều nhau và gặp nhau ở một điểm cách A là 2km. Nếu cả hai cùng giữ nguyên vận tốc nhưng người đi chậm hơn xuất phát trước người kia 6 phút thì họ sẽ gặp nhau ở chính giữa quãng đường. Tính vận tốc của mỗi người.

Bài 12: Một chiếc thuyền khởi hành từ bến sông A. Sau đó 5h20’ một chiếc cano chạy từ bến sông A đuổi theo và gặp chiếc thuyền tại một điểm cách bến A 20km. Hỏi vận tốc của thuyền, biết rằng cano chạy nhanh hơn thuyền 12km.

Bài 13: Một người đi xe đạp đi từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 30km. Khi từ B trở về A, người đó chọn con đường khác dễ đi hơn nhưng dài hơn con đường cũ 6km. Vì thế, khi đi về với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi 20 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Bài 14: Hai người đi xe đạp cùng khởi hành tại một địa điểm về hai hướng vuông góc với nhau. Sau 2 giờ họ cách nhau 60km theo đường chim bay. Tìm vận tốc của mỗi người. Biết rằng vận tốc của người này hơn vận tốc người kia là 6km/h.

Bài 15: Một xe gắn máy đi từ A đến B cách nhau 150km. Nếu mỗi giờ xe tăng thêm 10km thì đến B sớm hơn thời gian dự định là 30 phút. Tìm vận tốc ban đầu?

Bài 16: Hai tỉnh A và B cách nhau 42km. Một chiếc tàu đi từ tỉnh nọ đến tỉnh kia. Khi đi ngược dòng sông từ A tới B thì vận tốc của nó nhỏ hơn vận tốc lúc xuôi dòng là 4km/h. Tính vận tốc của chiếc tàu khi xuôi dòng và khi ngược dòng, biết rằng thời gian ngược dòng nhiều hơn thời gian xuôi dòng là 1 giờ 12 phút.

Bài 17: Một tàu thuỷ chạy trên một khúc sông dài 80km, cả đi lẫn về mất 8h20’. Tính vận tốc của tàu khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 4km/h.

Bài 18: Một chiếc thuyền khởi hành từ bến sông A. Sau đó 5h20’ một chiếc cano chạy từ bến sông A đuổi theo và gặp chiếc thuyền tại một điểm cách bến A 20km. Hỏi vận tốc của thuyền, biết rằng cano chạy nhanh hơn thuyền 12km.

Bài 19: Một người đi xe đạp đi từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 30km. Khi từ B trở về A, người đó chọn con đường khác dễ đi hơn nhưng dài hơn con đường cũ 6km. Vì thế, khi đi về với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi 20 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Bài 20: Quãng đường sông AB dài 78 km. Một chiếc thuyền máy đi từ A về phía B. Sau đó 1 giờ, một chiếc ca nô đi từ B về phía A. Thuyền và ca nô gặp nhau tại C cách B 36 km. Tính thời gian của thuyền, thời gian của ca nô đã đi từ lúc khởi hành đến khi gặp nhau, biết vận tốc của ca nô lớn hơn vận tốc của thuyền là 4 km/h.

DẠNG 7: BÀI TOÁN THỰC TẾ VẬN DỤNG

Bài 1: Một hội đồng thi có 390 thí sinh phân đều các phòng. Nếu xếp mỗi phòng thi thêm 4 thí sinh thì số phòng thi sẽ giảm đi 2 phòng. Hỏi lúc đầu mỗi phòng thi dự định xếp bao nhiêu thí sinh ?

Bài 2: Số tiền mua 9 quả thanh yên và 8 quả táo rừng thơm là 107 rupi. Số tiền mua 7 quả thanh yên và 7 quả táo rừng thơm là 91 rupi . Hỏi giá mỗi quả thanh yên và mỗi quả táo rừng thơm là bao nhiêu rupi.

Bài 3: Hai anh Quang và Hùng góp vốn cùng kinh doanh . Anh Quang góp 15 triệu đồng . Anh Hùng góp 13 triệu đồng . Sau một thời gian được lãi 7 triệu đồng . Lãi được chia tỉ lệ với vốn đã góp . Hãy tính tiền lãi mỗi anh được hưởng.

Bài 4: Bảy năm trước tuổi mẹ bằng 5 lần tuổi con cộng thêm 4. Năm nay tuổi mẹ vừa đúng gấp 3 lần tuổi con . Hỏi năm nay mỗi người bao nhiêu tuổi.

Bài 5: Hôm nay mẹ của Lan đi chợ mua 5 quả trứng gà và 5 quả trứng vịt hết 10 000 đồng . Hôm nay mẹ Lan mua 3 quả trứng gà và 7 quả trứng vịt chỉ hết 9600 đồng và giá trứng thì vẫn như cũ . Hỏi giá một quả trứng mỗi loại là bao nhiêu.

Bài 6: Trong phòng học có một số bàn ghế dài. Nếu xếp mỗi ghế 3 học sinh thì 6 học sinh không có chỗ ngồi . Nếu xếp mỗi ghế 4 học sinh thì thừa một ghế . Hỏi lớp có bao nhiêu ghế và bao nhiêu học sinh.

Bài 7: Để sửa một ngôi nhà cần một số thợ làm việc trong một thời gian quy định . Nếu giảm 3 người thì thời gian đó kéo dài 6 ngày , nếu tăng thêm 2 người thì thời gian sớm 2 ngày . Hỏi theo quy định thì cần bao nhiêu thợ và làm trong bao nhiêu ngày . Biết rằng khả năng lao động của mỗi công nhân đều như nhau.

Bài 8: Trong một phòng họp có một số ghế dài . Nếu xếp mỗi ghế 5 người thì có 9 người không có chỗ ngồi , nếu xếp ghế 6 người thì thừa 1 ghế . Hỏi phòng họp có bao nhiêu ghế và bao nhiêu người dự họp.

CHUYÊN ĐỀ 6
BẤT ĐẲNG THỨC - TÌM GIÁ TRỊ MIN - MAX CỦA BIỂU THỨC

I - KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương pháp chung

- Kỹ thuật biến đổi tương đương
- Kỹ thuật minh phản chứng
- Kỹ thuật quy nạp toán học
- Kỹ thuật miền giá trị
- Kỹ thuật sử dụng nguyên lí Diricle
- Kỹ thuật tam thức bậc hai

2. Phương pháp riêng:

2.1. Sử dụng một số bất đẳng thức cổ điển thông dụng:

a) $x^2+y^2\ge 2xy$

b) $x^2+y^2\ge |\ xy\ |$ dấu(=) khi x = y = 0

c) $(x+y)^2\ge 4xy$

d) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$

2.2. Bất đẳng thức Cauchy (Cosi):

$\frac{a_1+a_2+a_3+....+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2a_3...a_n}$ Với $a_i>0$

2.3. Bất đẳng thức Bunhiacopski:

$(a_2{}^2+a_2^2+....+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+....+_n^2)\ge(a_1x_1+a_2x_2+....+a_nx_n)^2$

2.4. Bất đẳng thức Trê- B- -Sép:

Nếu $\begin{cases}a\le b\le c\\A\le B\le C\end{cases}\Rightarrow\frac{aA+bB+cC}{3}\ge\frac{a+b+c}{3}.\frac{A+B+C}{3}$

Nếu $\begin{cases}a\le b\le c\\A\ge B\ge C\end{cases}\Rightarrow\frac{aA+bB+cC}{3}\le\frac{a+b+c}{3}.\frac{A+B+C}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}a=b=c\\A=B=C\end{cases}$

II - BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 1: ∀ x, y, z Chứng minh rằng :

a) $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$

b) $x^2+y^2+z^2\ge 2xy-2xz+2yz$

c) $x^2+y^2+z^2+3\ge 2(x+y+z)$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Ta xét hiệu: $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$=\frac{1}{2}.2.(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right]\ge 0$ đúng với mọi x;y;z$\in R$

Vì $(x-y)^2\ge 0$ với$\forall$x ; y Dấu bằng xảy ra khi x=y

$(x-z)^2\ge 0$ với$\forall$x ; z Dấu bằng xảy ra khi x=z

$(y-z)^2\ge 0$ với$\forall$ z; y Dấu bằng xảy ra khi z=y

Vậy $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$. Dấu bằng xảy ra khi x = y =z

b)Ta xét hiệu: $x^2+y^2+z^2-(2xy-2xz+2yz)$

$=x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz$

$=(x-y+z)^2\ge 0$ đúng với mọi x;y;z$\in R$

Vậy $x^2+y^2+z^2\ge 2xy-2xz+2yz$ đúng với mọi x;y;z$\in R$. Dấu bằng xảy ra khi x+y=z

c) Ta xét hiệu: $x^2+y^2+z^2+3-2(x+y+z)$

$=x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1$

$=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\ge 0$. Dấu(=)xảy ra khi x=y=z=1

<u>Bài 2:</u>Chứng minh rằng :

a) $\frac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ b) $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Ta xét hiệu: $\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$=\frac{2(a^2+b^2)}{4}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$

$=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab)$

$=\frac{1}{4}(a-b)^2\ge 0$. Vậy $\frac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Dấu bằng xảy ra khi a=b

b)Ta xét hiệu:

$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

$=\frac{1}{9}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0$. Vậy $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

Dấu bằng xảy ra khi a = b =c.

<u>Bài 3:</u>Cho a, b, c, d,e là các số thực chứng minh rằng:

a) $a^2+\frac{b^2}{4}\ge ab$

b) $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$

c) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) $a^2+\frac{b^2}{4}\ge ab \Leftrightarrow 4a^2+b^2\ge 4ab \Leftrightarrow 4a^2-4a+b^2\ge 0$

$\Leftrightarrow (2a-b)^2\ge 0$ (bất đẳng thức này luôn đúng)

Vậy $a^2+\frac{b^2}{4}\ge ab$ (dấu bằng xảy ra khi 2a=b)

b) $a^2+b^2+1\ge ab+a+b \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+1)>2(ab+a+b)$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\ge 0$ (bất đẳng thức này luôn đúng)

Vậy $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$. Dấu bằng xảy ra khi a=b=1

c) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$

$\Leftrightarrow 4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\ge 4a(b+c+d+e)$

$\Leftrightarrow (a^2-4ab+4b^2)+(a^2-4ac+4c^2)+(a^2-4ad+4d^2)+(a^2-4ac+4c^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2c)^2\ge 0$

Bất đẳng thức đúng vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4: Chứng minh rằng $(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2)\ge (a^8+b^8)(a^4+b^4)$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

$(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2)\ge (a^8+b^8)(a^4+b^4)$

$\Leftrightarrow a^{12}+a^{10}b^2+a^2b^{10}+b^{12}\ge a^{12}+a^8b^4+a^4b^8+b^{12}$

$\Leftrightarrow a^8b^2(a^2-b^2)+a^2b^8(b^2-a^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow$ $a^2b^2(a^2-b^2)(a^6-b^6)\ge 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2b^2(a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4)\ge 0$

Bất đẳng thứccuối đúng vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 5: Cho x.y =1 và x.y. Chứng minh $\frac{x^2+y^2}{x-y}\ge 2\sqrt{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

$\frac{x^2+y^2}{x-y}\ge 2\sqrt{2}$ vì :x $\rangle$ y nên x- y $\rangle$ 0 $\Rightarrow x^2+y^2\ge 2\sqrt{2}(x-y)$

$\Rightarrow x^2+y^2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y\ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-2\ge 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-2xy\ge 0$ vì x.y=1 nên 2.x.y=2

$\Rightarrow (x-y-\sqrt{2})^2\ge 0$ Điều này luôn luôn đúng . Vậy ta có điều phải chứng minh

Bài 6: Cho a, b ,c là các số không âm chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Dùng bất đẳng thức phụ: $(x+y)^2\ge 4xy$

Tacó: $(a+b)^2\ge 4ab$; $(b+c)^2\ge 4bc$; $(c+a)^2\ge 4ac$

$\Rightarrow (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\ge 64a^2b^2c^2=(8abc)^2$

$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$.

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c

Vậy $a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)\ge 10$

Bài 7: Cho a>b>c>0 và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{a+c}+\dfrac{c^3}{a+b}\ge\dfrac{1}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Do a,b,c đối xứng ,giả sử a≥b≥c $\Rightarrow\begin{cases} a^2\ge b^2\ge c^2\\ \dfrac{a}{b+c}\ge\dfrac{b}{a+c}\ge\dfrac{c}{a+b}\end{cases}$

áp dụng BĐT Trê- b- -sép ta có

$$a^2.\frac{a}{b+c}+b^2.\frac{b}{a+c}+c^2.\frac{c}{a+b}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{a+c}+\dfrac{c^3}{a+b}\ge\dfrac{1}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi a=b=c=$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 8: Cho a,b,c,d>0 và a.b.c.d =1.
Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)\ge 10$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Ta có $a^2+b^2\ge 2ab$

$c^2+d^2\ge 2cd$

Do abcd =1 nên cd =$\dfrac{1}{ab}$

Ta có $a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+cd)=2(ab+\dfrac{1}{ab})\ge 4$ (1)

Mặt khác: $a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)$

=(ab+cd)+(ac+bd)+(bc+ad)

$=\left(ab+\dfrac{1}{ab}\right)+\left(ac+\dfrac{1}{ac}\right)+\left(bc+\dfrac{1}{bc}\right)\ge 2+2+2$

Bài 9: Cho 4 số a,b,c,d bất kỳ chứng minh rằng:
$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\le\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Ta cú: $(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+b^2+2(ac+bd)+c^2+d^2$

$\le(a^2+b^2)+2\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}+c^2+d^2$

Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

Tacó: ac+bd≤ $\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$

$\Rightarrow\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\le\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

Bài 10: Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

Xét cặp số (1,1,1) và (a,b,c) ta có: $(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(1.a+1.b+1.c)^2$

$\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$

Điều phải chứng minh.Dấu bằng xảy ra khi a=b=c

Bài 11: Cho a,b,c,d > 0 .

Chứng minh rằng $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có: $\frac{a}{a+b+c}<1\Rightarrow\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d}$ (1)

Mặt khác : $\frac{a}{a+b+c}>\frac{a}{a+b+c+d}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d}$ (3)

T- ơng tự ta có: $\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b+a}{a+b+c+d}$ (4)

$\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{b+c}{a+b+c+d}$ (5)

$\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d+c}{a+b+c+d}$ (6)

cộng vế với vế của (3); (4); (5); (6) ta có:

$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$ *(điều phải chứng minh)*

Bài 12: Cho a,b,c là số đo ba cạnh của tam giác.

Chứng minh rằng:

a) $a^2+b^2+c^2< 2(ab+bc+ac)$

b) abc>(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a)Vì a,b,c là số đo 3 cạnh của một tam giác nên ta có:

$$\begin{cases}0<a<b+c\\0<b<a+c\\0<c<a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2<a(b+c)\\b^2<b(a+c)\\c^2<c(a+b)\end{cases}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có: $a^2+b^2+c^2< 2(ab+bc+ac)$

b) Ta có $a>|b-c|\Rightarrow a^2>a^2-(b-c)^2>0$

$b>|a-c|\Rightarrow b^2>b^2-(c-a)^2>0$

$c>|a-b|\Rightarrow c^2>c^2-(a-b)^2>0$

Nhân vế các bất đẳng thức ta đ- ợc

$\Rightarrow a^2b^2c^2>\left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]$

$\Rightarrow a^2b^2c^2>(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$

$\Rightarrow abc>(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$

<u>Bài 13:</u> Cho a,b,c > 0. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Đặt x=b+c ; y=c+a ;z= a+b ta có a=$\frac{y+z-x}{2}$; b = $\frac{z+x-y}{2}$; c = $\frac{x+y-z}{2}$

ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\ge\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\ge 3$

$\Leftrightarrow (\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})+(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})\ge 6$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì ($\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\ge 2$; $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\ge 2$; $\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\ge 2$ nên ta có điều phải chứng minh

<u>Bài 14:</u> Cho a,b,c > 0 và a+b+c <1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9$$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Đặt x = a^2+2bc ; y = b^2+2ac ; z = c^2+2ab

Ta có $x+y+z=(a+b+c)^2<1$

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$ Với x+y+z < 1 và x ,y,z > 0

Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $x+y+z\ge 3.\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3..\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

$\Rightarrow (x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$

Mà x+y+z < 1

Vậy $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$ (đpcm)

<u>Bài 15:</u> Cho x > y và xy =1.Chứng minh rằng $\frac{(x^2+y^2)^2}{(x-y)^2}\ge 8$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Ta có $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(x-y)^2+2$ (vì xy = 1)

$\Rightarrow (x^2+y^2)^2=(x-y)^4+4.(x-y)^2+4$

Do đó BĐT cần chứng minh t- ơng đ- ơng với

$(x-y)^4+4(x-y)^2+4\ge 8.(x-y)^2$

$\Leftrightarrow (x-y)^4-4(x-y)^2+4\ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[(x-y)^2-2\right]^2 \ge 0$$

BĐT cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 16: Cho xy ≥ 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge\frac{2}{1+xy}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Ta có: $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge\frac{2}{1+xy}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\right)+\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+xy}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy-x^2}{(1+x^2).(1+xy)}+\frac{xy-y^2}{(1+y^2).(1+xy)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2).(1+xy)}+\frac{y(x-y)}{(1+y^2).(1+xy)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2).(1+y^2).(1+xy)}\ge 0$$

BĐT cuối này đúng do xy > 1. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 17: a) Cho a , b, c là các số thực và a + b +c =1.

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$

b) Cho a,b,c là các số d-ơng

Chứng minh rằng $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) áp dụng BĐT BunhiaCôpski cho 3 số (1,1,1) và (a,b,c)

Ta có: $(1.a+1.b+1.c)^2\le(1+1+1).(a^2+b^2+c^2)$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2\le 3.(a^2+b^2+c^2)$$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$ (vì a+b+c =1) (đpcm)

b) $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+1\ge 9$$

$$\Leftrightarrow 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\ge 9$$

áp dụng BĐT phụ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ Với x,y > 0

Ta có BĐT cuối cùng luôn đúng

Vậy $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ (đpcm)

Bài 18: Tìm giá trị nhỏ nhất của : T = |x-1| + |x-2| +|x-3| + |x-4|

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Ta có |x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x| ≥ |x-1+4-x| = 3 (1)

Và $|x-2|+|x-3|=|x-2|+|3-x|\geq|x-2+3-x|=1$ (2)

Vậy T = |x-1| + |x-2| +|x-3| + |x-4| ≥ 1+3 = 4

Ta có từ (1) ⇒ Dấu bằng xảy ra khi $1\leq x\leq 4$

(2) ⇒ Dấu bằng xảy ra khi $2\leq x\leq 3$

Vậy T có giá trị nhỏ nhất là 4 khi $2\leq x\leq 3$

Bài 19: Tìm giá trị lớn nhất của S = xyz.(x+y).(y+z).(z+x), với x,y,z > 0 và x+y+z =1

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Vì x,y,z > 0 ,áp dụng BĐT Côsi ta có:x+ y + z $\geq 3\sqrt[3]{xyz}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{xyz}\leq\frac{1}{3}\Rightarrow xyz\leq\frac{1}{27}$

áp dụng bất đẳng thức Côsi cho x+y ; y+z ; x+z ta có

$(x+y).(y+z).(z+x)\geq 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(x+z)}$

$\Rightarrow 2\geq 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(z+x)}$

Dấu bằng xảy ra khi x=y=z=$\frac{1}{3}$

Vậy $S\leq\frac{8}{27}.\frac{1}{27}=\frac{8}{729}$

Vậy S có giá trị lớn nhất là $\frac{8}{729}$ khi x=y=z=$\frac{1}{3}$

Bài 20: Cho xy+yz+zx = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4+y^4+z^4$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski cho 6 số (x,y,z) ;(x,y,z)

Ta có $(xy+yz+zx)^2\leq(x^2+y^2+z^2)^2$

$\Rightarrow 1\leq(x^2+y^2+z^2)^2$ (1)

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski cho (x^2,y^2,z^2) và (1,1,1)

Ta có $(x^2+y^2+z^2)^2\leq(1^2+1^2+1^2)(x^4+y^4+z^4)$

$\rightarrow(x^2+y^2+z^2)^2\leq 3(x^4+y^4+z^4)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1\leq 3(x^4+y^4+z^4)$

$\Rightarrow x^4+y^4+z^4\leq\frac{1}{3}$

Vậy $x^4+y^4+z^4$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ khi x=y=z=$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

<u>Bài 21:</u> Tìm các số nguyên x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+z^2\le xy+3y+2z-3$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Vì x,y,z là các số nguyên nên:

$x^2+y^2+z^2\le xy+3y+2z-3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-3y-2z+3\le 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)+\left(\frac{3y^2}{4}-3y+3\right)+\left(z^2-2z+1\right)\le 0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2\le 0$ (*)

Mà $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2\ge 0\ \forall x,y\in R$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{y}{2}=0 \\ \frac{y}{2}-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

Các số x,y,z phải tìm là $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

<u>Bài 22:</u> Với x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện $x\ge 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\frac{x^2+y^2}{xy}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

<u>Cách 1</u>*(không sử dụng BĐT Cô Si)*

Ta có M = $\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x^2-4xy+4y^2)+4xy-3y^2}{xy}=\frac{(x-2y)^2+4xy-3y^2}{xy}=$ $\frac{(x-2y)^2}{xy}+4-\frac{3y}{x}$

Vì $(x-2y)^2\ge 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

$x\ge 2y\Rightarrow \frac{y}{x}\le\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{-3y}{x}\ge\frac{-3}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Từ đó ta có M $\geq 0 + 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vậy GTNN của M là $\frac{5}{2}$, đạt được khi x = 2y

Cách 2:

Ta có M = $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = (\frac{x}{4y} + \frac{y}{x}) + \frac{3x}{4y}$

Vì x, y > 0 , áp dụng bdt Cô si cho 2 số dương $\frac{x}{4y}; \frac{y}{x}$ ta có $\frac{x}{4y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4y}.\frac{y}{x}} = 1$,

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vì $x \geq 2y \Rightarrow \frac{x}{y} \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{4}.\frac{x}{y} \geq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Từ đó ta có M $\geq 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vậy GTNN của M là $\frac{5}{2}$, đạt được khi x = 2y

Cách 3:

Ta có M = $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = (\frac{x}{y} + \frac{4y}{x}) - \frac{3y}{x}$

Vì x, y > 0 , áp dụng BĐT Cô si cho 2 số dương $\frac{x}{y}; \frac{4y}{x}$ ta có $\frac{x}{y} + \frac{4y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{4y}{x}} = 4$

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vì $x \geq 2y \Rightarrow \frac{y}{x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-3y}{x} \geq \frac{-3}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Từ đó ta có M $\geq 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vậy GTNN của M là $\frac{5}{2}$, đạt được khi x = 2y

Cách 4:

Ta có M = $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{\frac{4x^2}{4} + y^2}{xy} = \frac{\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{3x^2}{4}}{xy} = \frac{\frac{x^2}{4} + y^2}{xy} + \frac{3x^2}{4xy} = \frac{\frac{x^2}{4} + y^2}{xy} + \frac{3x}{4y}$

Vì x, y > 0 , áp dụng bdt Co si cho 2 số dương $\frac{x^2}{4}; y^2$ ta có $\frac{x^2}{4} + y^2 \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{4}.y^2} = xy$,

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vì $x \geq 2y \Rightarrow \frac{x}{y} \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{4}.\frac{x}{y} \geq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Từ đó ta có M $\geq \frac{xy}{xy} + \frac{3}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vậy GTNN của M là $\frac{5}{2}$, đạt được khi x = 2y

Bài 23: Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn a+ b + c =4. Chứng minh rằng : $\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}+\sqrt[4]{c^3}>2\sqrt{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Cách 1:

$$\sqrt[4]{4a^3}+\sqrt[4]{4b^3}+\sqrt[4]{4c^3}$$
$$=\sqrt[4]{(a+b+c)a^3}+\sqrt[4]{(a+b+c)b^3}+\sqrt[4]{(a+b+c)c^3}$$
$$>\sqrt[4]{a^4}+\sqrt[4]{b^4}+\sqrt[4]{c^4}$$
$$=a+b+c$$
$$=4$$

Do đó, $\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}+\sqrt[4]{c^3}>\frac{4}{\sqrt[4]{4}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

Cách 2:

Đặt x = $\sqrt[4]{a}; y=\sqrt[4]{b}; z=\sqrt[4]{c}$ => x, y , z > 0 và $x^4 + y^4 + z^4 = 4$.

BĐT cần CM tương đương: $x^3 + y^3 + z^3 > 2\sqrt{2}$

hay $\sqrt{2}\,(x^3 + y^3 + z^3) > 4 = x^4 + y^4 + z^4$

$\Leftrightarrow x^3(\sqrt{2}-x) + y^3(\sqrt{2}-y) + z^3(\sqrt{2}-z) > 0$ (*).

Ta xét 2 trường hợp:

- Nếu trong 3 sô x, y, z tồn tại it nhất một sô $\geq\sqrt{2}$, giả sử $x\geq\sqrt{2}$ thì $x^3\geq 2\sqrt{2}$.

Khi đo: $x^3 + y^3 + z^3 > 2\sqrt{2}$ (do y, z > 0).

- Nếu cả 3 sô x, y, z đều nhỏ $<\sqrt{2}$ thì BĐT(*) luôn đung.

Vậy $x^3 + y^3 + z^3 > 2\sqrt{2}$ được CM.

Bài 24: Cho hai số dương x, y thỏa mãn: x + 2y = 3. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\geq 3$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Ta có x + 2y = 3 $\Rightarrow$ x = 3 – 2y , vì x dương nên 3 – 2y > 0.

Xét hiệu $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-3=\frac{1}{3-2y}+\frac{2}{y}-3=\frac{y+6-4y-3y(3-2y)}{y(3-2y)}=\frac{6(y-1)^2}{y(3-2y)}\geq 0$

(vì y > 0 và 3 – 2y >0)

$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{2y}\geq 3$ dấu "=" xãy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, y>0 \\ x=3-2y \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, y>0 \\ x=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Bài 25: Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn: b + d ≠ 0 và $\frac{ac}{b+d}\geq 2$.

Chứng minh rằng phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)=0$ (*x là ẩn*) luôn có nghiệm.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Xét 2 phương trình: $x^2 + ax + b = 0$ (1) và $x^2 + cx + d = 0$ (2)

$\Delta_1+\Delta_2=(a^2-4b)+(c^2-4d)=a^2-2ac+c^2+2[ac-2(b+d)]=(a-c)^2+2[ac-2(b+d)]$

+ Với b+d <0 ⇒ b; d có ít nhất một số nhỏ hơn 0

⇒ Δ_1 >0 hoặc Δ_2 >0 ⇒ pt đã cho có nghiệm

+ Với $b+d\geq 0$. Từ $\frac{ac}{b+d}\geq 2$ ⇒ ac > 2(b + d) => $\Delta_1+\Delta_2\geq 0$

=> Ít nhất một trong hai biểu giá trị $\Delta_1,\Delta_2\geq 0$ => Ít nhất một trong hai pt (1) và (2) có nghiệm.

Vậy với a, b, c, d là các số thực thỏa mãn: b + d ≠ 0 và $\frac{ac}{b+d}\geq 2$,

phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)=0$ (x là ẩn) luôn có nghiệm.

Bài 26: Không dùng máy tính cầm tay , tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá S, trong đó $S=\left(2+\sqrt{3}\right)^6$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Xét hai số a = 2 + $\sqrt{3}$ và b = 2 - $\sqrt{3}$.

Ta có : a + b = 4 và ab = 1, 0< b < 1.

$(a+b)^3 = 4^3 = 64 \Rightarrow a^3 + b^3 = 64 - 3ab(a + b) = 64 - 3.1.4 = 52$

$(a^3+b^3)(a^3 + b^3) = 52.52 \Rightarrow a^6 + b^6 = 2704 - 2(ab)^3 = 2704 - 2 = 2702$

=> $a^6 = S = 2702 - b^6$ (*).

Do 0<b<1 nên $0 < b^6 < 1$

Kết hợp (*) thì số nguyên lớn nhất không vượt quá S là 2701.

Bài 27: Cho a,b,c là các số dương không âm thoả mãn : $a^2+b^2+c^2=3$

Chứng minh rằng : $\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2a+3}\leq\frac{1}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

* C/M bổ đề: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$ và $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{x}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

Thật vậy

$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y} \Leftrightarrow (a^2y+b^2x)(x+y)\geq xy(a+b)^2 \Leftrightarrow (ay-bx)^2\geq 0$

(Đúng) ⇒ ĐPCM

Áp dụng 2 lần , ta có: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{x}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

* Ta có : $a^2+2b+3=a^2+2b+1+2\geq 2a+2b+2$, tương tự Ta có: … $\Rightarrow$

$$A=\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2a+3}\leq\frac{a}{2a+2b+2}+\frac{b}{2b+2c+2}+\frac{c}{2c+2a+2}$$

$$\Leftrightarrow A\leq\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}\right)}_{B}\quad (1)$$

Ta chứng minh $\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}\leq 1$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{a+b+1}-1+\frac{b}{b+c+1}-1+\frac{c}{c+a+1}-1\leq -2$$

$$\Leftrightarrow\frac{-b-1}{a+b+1}+\frac{-c-1}{b+c+1}+\frac{-a-1}{c+a+1}\leq -2$$

$$\Leftrightarrow\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{c+1}{b+c+1}+\frac{a+1}{c+a+1}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{\frac{(b+1)^2}{(a+b+1)(b+1)}+\frac{(c+1)^2}{(b+c+1)(c+1)}+\frac{(a+1)^2}{(c+a+1)(a+1)}}_{3-B}\geq 2\quad (2)$$

* Áp dụng Bổ đề trên ta có:

$$\Rightarrow 3-B\geq\frac{(a+b+c+3)^2}{(a+b+1)(b+1)+(b+c+1)(c+1)+(c+a+1)(a+1)}$$

$$\Leftrightarrow 3-B\geq\frac{(a+b+c+3)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+3(a+b+c)+3}\quad (3)$$

* Mà:

$$2\left[a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+3(a+b+c)+3\right]$$

$$=2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca+6a+6b+6c+6$$

$$=2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca+6a+6b+6c+6\ (Do: a^2+b^2+c^2=3)$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+6a+6b+6c+9$$

$$=(a+b+c+3)^2$$

$$\Rightarrow\frac{(a+b+c+3)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+3(a+b+c)+3}=2\quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ (2)

Kết hợp (2) và (1) ta có điều phải chứng minh.

Dấu = xảy ra khi a = b = c = 1

<u>Bài 28:</u> Cho tam giác ABC và các trung tuyến AM, BN, CP.

Chứng minh rằng: $\frac{3}{4}$(AB + BC + CA) < AM + BN + CP < AB + BC + CA

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi G là trọng tâm của Δ ABC, ta có: GM = $\frac{1}{3}$ AM; GN = $\frac{1}{3}$ BN; GP = $\frac{1}{3}$ CP

Vì AM, BN, CP các trung tuyến, nên: M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB

Do đó: MN, NP, MP là các đường trung bình của Δ ABC

Nên: MN = $\frac{1}{2}$AB; NP = $\frac{1}{2}$BC; MP = $\frac{1}{2}$AC

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có:

* AM < MN + AN hay AM < $\frac{1}{2}$AB + $\frac{1}{2}$AC (1)

Tương tự: BN < $\frac{1}{2}$AB + $\frac{1}{2}$BC (2)

CP < $\frac{1}{2}$BC + $\frac{1}{2}$AC (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: AM + BN + CP < AB + BC + CA (*)

* GN + GM > MN hay $\frac{1}{3}$BN + $\frac{1}{3}$AM > $\frac{1}{2}$AB (4)

Tương tự: $\frac{1}{3}$BN + $\frac{1}{3}$CP > $\frac{1}{2}$BC (5)

$\frac{1}{3}$CP + $\frac{1}{3}$AM > $\frac{1}{2}$AC (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra:

$\frac{1}{3}$BN + $\frac{1}{3}$AM + $\frac{1}{3}$BN + $\frac{1}{3}$CP + $\frac{1}{3}$CP + $\frac{1}{3}$AM > $\frac{1}{2}$AB + $\frac{1}{2}$BC + $\frac{1}{2}$AC

$\Rightarrow \frac{2}{3}$ (AM + BN + CP) > $\frac{1}{2}$(AB + AC + BC)

$\Rightarrow \frac{3}{4}$(AB + BC + CA) < AM + BN + CP

(**)

Từ (*), (**) suy ra: $\frac{3}{4}$(AB + BC + CA) < AM + BN + CP < AB + BC + CA

Bài 29: Giải Hệ PT $\begin{cases} x^2-5y^2-8y=3 \\ (2x+4y-1)\sqrt{2x-y-1}=(4x-2y-3)\sqrt{x+2y} \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5y^2-8y=3(1) \\ (2<x+2y>-1)\sqrt{2x-y-1}=(2<2x-y-1>-1)\sqrt{x+2y}(2) \end{cases}$$

Từ (2) đặt x +2y = a ; 2x–y –1 = b (a:b $\geq$ 0)

Ta dc (2a-1)$\sqrt{b}$ =(2b –1)$\sqrt{a}$ ⇔ ($\sqrt{a}-\sqrt{b}$)(2$\sqrt{ab}+1$) = 0 ⇔ a = b

⇔ x = 3y + 1 thay vào (1) ta dc

$2y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$; $y_2 = -1/2$

$\Rightarrow x_1 = 4$; $x_2 = -1/2$

Thấy $x_2 + 2y_2 = -1 < 0$ (loại)

Vậy hệ có nghiệm (x; y) = (4 ; 1)

<u>Bài 30:</u> Cho các số thực dương x, y , z thỏa mãn x + y + z = 4.

Chứng minh rằng $\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}\geq 1$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Vì x + y + z = 4 nên suy ra x = 4 – (y + z)

Mặt khác: $\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq x$ do x dương. (*)

Thay x = 4 – (y + z) vào (*) ta có :

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 4-(y+z) \Leftrightarrow \frac{1}{y}-2+y+\frac{1}{z}-2+z\geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\sqrt{y}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{z}}-\sqrt{z}\right)^2\geq 0$$

Luôn đúng với mọi x, y, z dương, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : y = z = 1, x = 2.

<u>Bài 31:</u> Cho $x; y \in R$, thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTLN của : $P=\frac{x}{y+\sqrt{2}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Từ $x^2+y^2=1 \Rightarrow -1\leq x, y\leq 1 \Rightarrow \sqrt{2}-1\leq y+\sqrt{2}\leq 1+\sqrt{2}$

Vì $P=\frac{x}{y+\sqrt{2}} \Rightarrow x=P(y+\sqrt{2})$ thay vào $x^2+y^2=1$

Đưa về pt: $(P^2+1)y^2+2\sqrt{2}P^2y+2P^2-1=0$

Dùng điều kiện có nghiệm của pt bậc hai $\Rightarrow P\leq 1 \Rightarrow P_{Max}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

<u>Bài 32:</u>Giảiphươngtrình: $7+2\sqrt{x}-x=(2+\sqrt{x})\sqrt{7-x}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

§Æt $\sqrt{7-x}=t$; $\sqrt{x}=v$ §K v, t ≥ 0

$\Rightarrow t^2+2v=(2+v).t \Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow (t-v)(t-2)=0 \Rightarrow t=v$ hoÆc t=2

NÕu t= 2 th× $\sqrt{7-x}=2 \Rightarrow$ x = 3 (TM)

NÕu t = v th× $\sqrt{7-x}=\sqrt{x} \Rightarrow$ x = 3,5

<u>Bài 33:</u> Cho a,b,c là 3 số thực khác không và thoả mãn:

$$\begin{cases} a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=0 \\ a^{2017}+b^{2017}+c^{2017}=1 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $Q=\dfrac{1}{a^{2017}}+\dfrac{1}{b^{2017}}+\dfrac{1}{c^{2017}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Ta có:

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=0$

$\Leftrightarrow a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+2abc=0$

$\Leftrightarrow (a^2b+b^2a)+(c^2a+c^2b)+(2abc+b^2c+a^2c)=0$

$\Leftrightarrow ab(a+b)+c^2(a+b)+c(a+b)^2=0$

$\Leftrightarrow (a+b)(ab+c^2+ac+bc)=0$

$\Leftrightarrow (a+b).(a+c).(b+c)=0$

**TH1: nếu a+ b=0*

Ta có $\begin{cases} a=-b \\ a^{2017}+b^{2017}+c^{2017}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ c=1 \end{cases}$ *ta có* $Q=\dfrac{1}{a^{2017}}+\dfrac{1}{b^{2017}}+\dfrac{1}{c^{2017}}=1$

Các trường hợp còn lại xét tương tự

Vậy $Q=\dfrac{1}{a^{2017}}+\dfrac{1}{b^{2017}}+\dfrac{1}{c^{2017}}=1$

Bài 34:

Cho $x>0, y>0$ thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{-2xy}{1+xy}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Cách 1: Ta có $A=\dfrac{-2xy}{1+xy} \Rightarrow -A=\dfrac{2xy}{1+xy} \Rightarrow \dfrac{1}{-A}=\dfrac{1+xy}{2xy}=\dfrac{1}{2xy}+\dfrac{1}{2}$

Vì $x>0, y>0 \Rightarrow A<0 \Rightarrow -A>0 \Rightarrow \dfrac{1}{-A}>0$ do đó $A_{\min} \Leftrightarrow -A_{max} \Leftrightarrow \dfrac{1}{-A}\min$.

Mặt khác $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \ge 2xy \Rightarrow 2xy \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2xy} \ge 1$ (vì $2xy>0$)

Do đó $\dfrac{1}{-A} \ge 1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$. Dấu "$=$" xảy ra khi $x=y$.

Từ $\begin{cases} x>0, y>0 \\ x=y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Lúc đó $A=\dfrac{-2\cdot\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{2}{3}$. Vậy $\min A=-\dfrac{2}{3}$ khi $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Cách 2: Với $x>0,\ y>0$ ta có

$$\frac{x^2+y^2}{2}\ge xy \Leftrightarrow xy\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1+xy\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{1+xy}\ge\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{1+xy}\ge\frac{4}{3}$$

Do đó $A=\frac{-2xy}{1+xy}=-2+\frac{2}{1+xy}\ge-2+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Từ $\begin{cases}x>0,y>0\\x=y\\x^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $\min A=-\frac{2}{3}$ khi $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cách 3: Với $x>0,\ y>0$ và $x^2+y^2=1$

Ta có

$$A+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{-2xy}{1+xy}=\frac{2+2xy-6xy}{3(1+xy)}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-4xy}{3(1+xy)}=\frac{2(x-y)^2}{3(1+xy)}\ge0\Rightarrow A\ge-\frac{2}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy $\min A=-\frac{2}{3}$ khi $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$A+\frac{a}{b}\ge0;(b>0)\leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{-2xy}{1+xy}\ge0\leftrightarrow a+axy-2bxy\ge0\leftrightarrow a\left(x^2+y^2\right)-(2b-a)xy\ge0$$

$$\leftrightarrow a\left(x^2+y^2-\frac{2b-a}{a}xy\right)\ge0\leftrightarrow\begin{cases}a\ge0\\\frac{2b-a}{a}=2\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$$

Bài 35: Cho các số x,y thỏa mãn x ≥0; y ≥0 và x + y = 1.
Tìm giả trị lớn nhất và nhỏ nhất của A = x^2+y^2.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

* Tìm Min A

Cách 1:

Ta có: $\begin{array}{l}(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=1\\(x-y)^2=x^2-2xy+y^2\ge0\end{array}$

Cộng vế với vế ta có: $2\left(x^2+y^2\right)\ge1\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow A\ge\frac{1}{2}$

Vậy Min A = $\frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi x = y = $\frac{1}{2}$

Cách 2

Từ $x+y=1\Rightarrow x=1-y$ Thay vào A ta có :

$$A=(1-y)^2+y^2=2y^2-2y+1=2(y-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}\forall y$$

Dấu « = » xảy ra khi : x = y = $\frac{1}{2}$

Vậy Min A = $\frac{1}{2}$ Dấu "=" xảy ra khi x = y = $\frac{1}{2}$

* Tìm Max A

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le x \\ y^2 \le y \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le x + y = 1$

Vậy : Max A = 1 khi x = 0, y

Bài 36 : Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - x^3 + 3x^2 - 4y - 1 = 0 \\ \sqrt{\dfrac{x^2+4y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+2xy+4y^2}{3}} = x + 2y \end{cases}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Từ (2) suy ra x + 2y $\ge$ 0.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$2(x^2+4y^2) = (1^2+1^2)[x^2+(2y)^2] \ge (x+2y)^2$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{x^2+4y^2}{2}} \ge \sqrt{\dfrac{(x+2y)^2}{4}} = \dfrac{x+2y}{2}$ (3)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y.

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được: $\sqrt{\dfrac{x^2+2xy+4y^2}{3}} \ge \dfrac{x+2y}{2}$ (4)

Thật vậy, $\sqrt{\dfrac{x^2+2xy+4y^2}{3}} \ge \dfrac{x+2y}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2xy+4y^2}{3} \ge \dfrac{(x+2y)^2}{4}$ (do cả hai vế đều ≥ 0)

$\Leftrightarrow$ 4(x² + 2xy + 4y²) $\ge$ 3(x² + 4xy + 4y²) $\Leftrightarrow$ (x – 2y)² $\ge$ 0 (luôn đúng $\forall$x, y).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y.

Từ (3) và (4) suy ra: $\sqrt{\dfrac{x^2+4y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+2xy+4y^2}{3}} \ge x + 2y$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y.

Do đó (2) $\Leftrightarrow$ x = 2y $\ge$ 0 (vì x + 2y $\ge$ 0).

Khi đó, (1) trở thành: $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3+3x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ (vì $x^3 + 3x + 1 \ge 1 > 0\ \forall x \ge 0$) $\Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là (x = 1; y = $\frac{1}{2}$).

<u>Bài 37:</u> Chứng minh rằng Q = $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \ge 0$ với mọi giá trị của x

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Q = $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

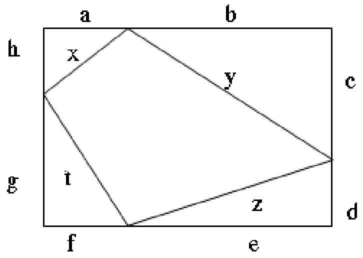
$= (x^4 - 2x^3 + x^2) + (1 - 3x + 3x^2 - x^3)$

$= x^2(x-1)^2 + (1-x)^3$

$= (1-x)^2(x^2 - x + 1) = (1-x)^2(x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}) = (1-x)^2\left[(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right] \geq 0 \forall x$

<u>Bài 38:</u> Trên các cạnh của một hình chữ nhật đặt lần lượt 4 điểm tùy ý. Bốn điểm này tạo thành một tứ giác có độ dài các cạnh lần lượt là x, y, z , t. Chứng minh rằng:
$25 \leq x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 50$. Biết rằng hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng là 4 và 3.

HƯỚNG DẪN GIẢI:



Giả sử hình chữ nhật có độ dài các cạnh được đặt như hình vẽ.

Với: $0 \leq$ a, b, e, f ≤ 4 và a+b = e+f = 4;

$0 \leq$ c, d, g, h ≤ 3 và c+d = g+h = 3.

Ta có:

$x^2 = h^2 + a^2;\ y^2 = b^2 + c^2;\ z^2 = d^2 + e^2;\ t^2 = f^2 + g^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + (e^2 + f^2) + (g^2 + h^2)$ (*)

- Chứng minh: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 50$.

Vì $a, b \geq 0$ nên $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2 = 16$. Tương tự: $c^2 + d^2 \leq 9;\ e^2 + f^2 \leq 16;\ g^2 + h^2 \leq 9$.

Từ (*)$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 16 + 9 + 16 + 9 = 50$ (1)

- Chứng minh: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq 25$.

Áp dụng bất đẳng thức *Bu - nhi - a- cốp – xki* , ta có:

$(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (1.a + 1.b)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{16}{2}$

Tương tự: $c^2 + d^2 \geq \frac{9}{2};\ e^2 + f^2 \geq \frac{16}{2};\ g^2 + h^2 \geq \frac{9}{2}$.

Từ (*)$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq \frac{16}{2} + \frac{9}{2} + \frac{16}{2} + \frac{9}{2} = 25$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 50$ (đpcm)

<u>Bài 39:</u> Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 \leq x + y$. Chứng minh rằng: $x + y \leq 2$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

<u>Cách 1:</u>

Nhận xét: $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}; \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Thật vậy: $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0; \forall x, y \in \mathbb{R}$ (đúng)

Do đó từ giả thiết: $x^2 + y^2 \le x + y \Rightarrow (x+y)^2 \le x + y + 2xy$

$$\Rightarrow (x+y)^2 \le x + y + \frac{(x+y)^2}{2}$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 \le 2(x+y)$$

$$\Rightarrow (x+y)(x+y-2) \le 0 \ \ (*)$$

Vì $x + y \ge x^2 + y^2 \ge 0; \forall x, y \in \mathbb{R}$, nên ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow x + y = 0 \le 2$
- Nếu $x^2 + y^2 \ne 0 \Rightarrow x + y > 0$, từ (*) suy ra: $x + y - 2 \le 0 \Rightarrow x + y \le 2$

Từ đó suy ra: $x + y \le 2$. Dấu bằng xảy ra khi x = y = 1.

<u>Cách 2:</u> Áp dụng BĐT Bu nhi a cốp xki: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ta có:

$(1.x + 1.y)^2 \le (1^2 + 1^2)(x^2 + y^2)$

$\Rightarrow (x+y)^2 \le 2(x^2 + y^2)$

$\Rightarrow (x+y)^2 \le 2(x+y)$

$\Rightarrow (x+y)(x+y-2) \le 0 \ \ (*)$

Vì $x + y \ge x^2 + y^2 \ge 0; \forall x, y \in \mathbb{R}$, nên ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow x + y = 0 \le 2$
- Nếu $x^2 + y^2 \ne 0 \Rightarrow x + y > 0$, từ (*) suy ra: $x + y - 2 \le 0 \Rightarrow x + y \le 2$

Từ đó suy ra: $x + y \le 2$. Dấu bằng xảy ra khi x = y = 1.

<u>Bài 40:</u> Cho a,b là hai số thực không âm thỏa: $a + b \le 2$.

Chứng minh: $\frac{2+a}{1+a} + \frac{1-2b}{1+2b} \ge \frac{8}{7}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+2b} \ge \frac{8}{7}$

Ta có: $\frac{1}{a+1} + \frac{2}{2b+1} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+\frac{1}{2}} \ge 2\frac{1}{\sqrt{(a+1)(b+\frac{1}{2})}}$ (1) (bđt Côsi)

$\sqrt{(a+1)(b+\frac{1}{2})} \le \frac{a+1+b+\frac{1}{2}}{2} \le \frac{7}{4}$ (bđt Cô si)

$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+\frac{1}{2})}} \ge \frac{8}{7}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+2b}\geq\frac{8}{7}$

Dấu "=" xảy ra chỉ khi : a + 1 = b $+\frac{1}{2}$ và a + b = 2 $\Leftrightarrow$ a = $\frac{3}{4}$ và b = $\frac{5}{4}$

<u>Bài 41:</u> Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a + b \leq 2\sqrt{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Ta có $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$

$\Leftrightarrow \frac{(a+b)}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)} \Leftrightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{a} \geq \frac{4}{(a+b)} \Rightarrow P \geq \frac{4}{(a+b)}$, mà $a + b \leq 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{4}{(a+b)} \geq \frac{4}{2\sqrt{2}} \Rightarrow P \geq \sqrt{2}$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}(a-b)^2 = 0 \\ a + b = 2\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}$.

Vậy: min P = $\sqrt{2}$.