UBND TỈNH TUYÊN QUANG
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

PHÂN CÔNG BIÊN SOẠN TÀI LIỆU ÔN TẬP THI THPT QUỐC GIA
THEO ĐỊNH HƯỚNG PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC HỌC SINH NĂM HỌC 2017-2018
MÔN: Toán

STT	Tên bài/chuyên đề	Dự kiến số tiết	Đơn vị phụ trách biên soạn	Ghi chú
1	**Ứng dụng của Đạo hàm** - Tính đơn điệu của hàm số - Cực trị của hàm số - GTLN, GTNN của hàm số. Bài toán tối ưu - Đường tiệm cận của đồ thị hàm số - Đồ thị của hàm số - Sự tương giao giữa các đồ thị. Tiếp tuyến của đồ thi hàm số.	12	THPT Chuyên THPT Hòa Phú THPT Yên Hoa	
2	**Lũy thừa - Mũ – Logarit** - Lũy thừa, Mũ, Logarit - Hàm số lũy thừa, Hàm số mũ, Hàm số logarit - Bài toán lãi suất - Phương trình, Bất phương trình mũ - Phương trình, Bất phương trình logarit	12	THPT Dân tộc Nội trú tỉnh THPT Sơn Nam THPT Minh Quang	
3	**Nguyên hàm -Tích phân và ứng dụng** - Nguyên hàm - Tích phân - Ứng dụng của tích phân	12	THPT Tân Trào THPT Thái Hòa THPT Lâm Bình	
4	**Số phức** - Dạng đại số và các phép toán trên tập số phức - Phương trình bậc hai với hệ số thực - Biểu diễn hình học của số phức	12	THPT Nguyễn Văn Huyên THPT Tháng 10 THPT Thượng Lâm	
5	**Khối đa diện. Mặt nón, Mặt trụ, Mặt cầu** - Khối đa diện và thể tích khối đa diện - Mặt nón, Mặt trụ, Mặt cầu	12	THPT Ỷ La THPT Đầm Hồng THPT Na Hang	
6	**Phương pháp tọa độ trong không gian**	12	THPT Sơn Dương PTDTNT ATK Sơn Dương THPT Hà Lang	

STT	Tên bài/chuyên đề	Dự kiến số tiết	Đơn vị phụ trách biên soạn	Ghi chú
	- Hệ tọa độ trong không gian - Phương trình mặt cầu - phương trình mặt phẳng - Phương trình đường thẳng - Vị trí tương đối giữa đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu - Góc và khoảng cách			
7	**Lượng giác** - Cung và góc lượng giác. Giá trị lượng giác của một cung. Công thức lượng giác - Hàm số lượng giác - Phương trình lượng giác cơ bản và thường gặp	9	THPT Đông Thọ THPT Kim Bình	
8	**Tổ hợp - xác suất** - Quy tắc đếm - Hoán vị. Chỉnh hợp. Tổ hợp - Nhị thức Niu-Tơn - Phép thử và biến cố - Xác suất của biến cố	9	THPT Kim Xuyên THPT Sông Lô	
9	**Dãy số - Giới hạn** - Phương pháp quy nạp toán học. Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân. - Giới hạn của dãy số - Giới hạn của hàm số - Hàm số liên tục	9	THPT Kháng Nhật THPT Xuân Huy	
10	**Đạo hàm** - Định nghĩa và ý nghĩa đạo hàm - Quy tắc tính đạo hàm - Đạo hàm của hàm số lượng giác - Vi phân - Đạo hàm cấp cao	9	THPT Hàm Yên THPT Xuân Vân	
11	**Phép dời hình, phép đồng dạng trong mặt phẳng**	9	THPT Chiêm Hóa THPT Trung Sơn	
12	**Hình học không gian lớp 11** - Quan hệ song song trong không gian - Quan hệ vuông góc trong không gian - Khoảng cách. Góc	9	THPT Phù Lưu THPT ATK Tân Trào	
		126		

Ghi chú:

YÊU CẦU ĐỐI VỚI TÀI LIỆU

- Tài liệu ôn tập được xây dựng theo các chủ đề/chuyên đề của cả lớp 11 và lớp 12; mỗi chủ đề/chuyên đề bao gồm các phần: Kiến thức cơ bản, Luyện tập và Các câu hỏi trắc nghiệm (trừ môn Ngữ văn theo hình thức tự luận).

- Tài liệu ôn tập phải đảm bảo phù hợp với chuẩn kiến thức, kĩ năng của chương trình; bao quát toàn bộ nội dung của lớp 11 và lớp 12; đảm bảo tính chính xác, khoa học; câu hỏi trắc nghiệm đạt yêu cầu theo quy định của ra đề thi trắc nghiệm chuẩn hóa.

- Thời lượng chương trình ôn tập: Tối đa bằng thời lượng chương trình chính khóa của các bộ môn.

QUY ĐỊNH CÁCH THỨC TRÌNH BÀY CÁC CHUYÊN ĐỀ

- Đặt lề trái, phải, trên, dưới: 2cm (Paper size: A4)

- Font chữ: Times New Roman

- Cỡ chữ:

Tên chuyên đề (in hoa đậm cỡ 18);

Tên các chủ đề trong chuyên đề (in hoa đậm cỡ 16);

Các chữ in hoa khác: in đậm cỡ 14

Nội dung: cỡ 12

- Công thức toán: Dùng phần mềm MathType, cỡ chữ trong công thức là 12

- Hình vẽ và bảng biểu phải trực quan, chính xác, rõ ràng. Phải group lại để không bị vỡ hình khi di chuyển.

- Về nội dung và cách trình bày chuyên đề: (Xem phần minh họa)

Chú ý:

- Mỗi chuyên đề đều đã ấn định số tiết cụ thể. Các thầy cô biên soạn tách buổi (mỗi buổi 3 tiết). Trong 3 tiết học sẽ gồm đủ các nội dung:

A. Kiến thức cơ bản;

B. Kĩ năng cơ bản (bao gồm cả kĩ năng sử dụng máy tính cầm tay);

C. Bài tập luyện tập;

D. Bài tập TNKQ *(25 câu hỏi trắc nghiệm khách quan đủ 4 mức độ: nhận biết (khoảng 5 câu), thông hiểu (khoảng 10 câu), vận dụng (khoảng 5 đến 8 câu), vận dụng cao (khoảng 2 đến 5 câu)).*

- Sau mỗi chuyên đề biên soạn một bài kiểm tra 45 phút (có ma trận) gồm 25 câu hỏi TNKQ.

Buổi 1.

CHỦ ĐỀ 1+2. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

A. Tính đơn điệu của hàm số

1. ***Định nghĩa:*** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn.
   - Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$.
   - Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$.
2. ***Điều kiện cần để hàm số đơn điệu:*** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.
   - Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'\left(x\right) \geq 0, \forall x \in K$.
   - Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'\left(x\right) \leq 0, \forall x \in K$.
3. ***Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:*** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.
   - Nếu $f'\left(x\right) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K.
   - Nếu $f'\left(x\right) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K.
   - Nếu $f'\left(x\right) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K.

✍ ***Chú ý.***

- Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết “ Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”. Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và có đạo hàm $f'\left(x\right) > 0, \forall x \in K$ trên khoảng $\left(a;b\right)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $\left[a;b\right]$.
- Nếu $f'\left(x\right) \geq 0, \forall x \in K$ (hoặc $f'\left(x\right) \leq 0, \forall x \in K$) và $f'\left(x\right) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số đồng biến trên khoảng K (hoặc nghịch biến trên khoảng K).

4. Kĩ năng cơ bản

4.1. Lập bảng xét dấu của một biểu thức $P(x)$

Bước 1. Tìm nghiệm của biểu thức $P(x)$, hoặc giá trị của x làm biểu thức $P(x)$ không xác định.

Bước 2. Sắp xếp các giá trị của x tìm được theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

Bước 3. Sử dụng máy tính tìm dấu của $P(x)$ trên từng khoảng của bảng xét dấu.

4.2 . Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định

Bước 1. Tìm tập xác định D.

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3. Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4. Lập bảng biến thiên.

Bước 5. Kết luận.

4.3. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = f(x)$ đồng biến, nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ cho trước.

Cho hàm số $y = f(x,m)$ có tập xác định D, khoảng $(a;b) \subset D$:

- Hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (a;b)$

- Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a;b)$

✍ **Chú ý:** Riêng hàm số $y = \dfrac{a_1x + b_1}{cx + d}$ thì :

  - Hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (a;b)$
  - Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (a;b)$

* <u>Nhắc lại một số kiến thức liên quan</u>:

Cho tam thức $g(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

a) $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ b) $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

c) $g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ d) $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

✍ ***Chú ý***: Nếu gặp bài toán tìm *m* để hàm số đồng biến (*hoặc nghịch biến*) trên khoảng $(a;b)$:

✓ <u>*Bước 1*</u>: Đưa bất phương trình $f'(x) \geq 0$ (*hoặc* $f'(x) \leq 0$), $\forall x \in (a;b)$ về dạng $g(x) \geq h(m)$ (hoặc $g(x) \leq h(m)$), $\forall x \in (a;b)$.

✓ <u>*Bước 2*</u>: Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $(a;b)$.

✓ <u>*Bước 3*</u>: Từ bảng biến thiên và các điều kiện thích hợp ta suy ra các giá trị cần tìm của tham số *m*.

B. Cực trị của hàm số

1. ***Định nghĩa:*** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a;b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

2. ***Điều kiện đủ để hàm số có cực trị:*** Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

- Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗	$f_{CĐ}$	↘	

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	f_{CT}	↗	

✍ ***Chú ý.***

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** (**điểm cực tiểu**) của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** (**giá trị cực tiểu**) của hàm số, kí hiệu là $f_{CĐ}(f_{CT})$, còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** (**điểm cực tiểu**) của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là **cực đại** (**cực tiểu**) và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

3. Kĩ năng cơ bản

3.1.Quy tắc tìm cực trị của hàm số

- **<u>Quy tắc 1:</u>**

  Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

  Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

  Bước 3. Lập bảng biến thiên.

  Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

- **<u>Quy tắc 2:</u>**

  Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

  Bước 2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)$ và ký hiệu x_i $(i = 1, 2, 3, ...)$ là các nghiệm của nó.

  Bước 3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

  Bước 4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .

3.2. Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm số bậc ba $\boldsymbol{y = ax^3 + bx^2 + cx + d}$ $\boldsymbol{(a \neq 0)}$

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$. Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị đó là : $y = \left(\dfrac{2c}{3} - \dfrac{2b^2}{9a}\right)x + d - \dfrac{bc}{9a}$.
- Bấm máy tính tìm ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d - \left(3ax^2 + 2bx + c\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{b}{9a}\right) \xrightarrow{x=i} Ai + B \Rightarrow y = Ax + B$$

  Hoặc sử dụng công thức $y - \dfrac{y'.y''}{18a}$.

- Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba là:

$$AB = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}} \text{ với } e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}$$

3.3. Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm trùng phương.

Cho hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị là (C).

$$y' = 4ax^3 + 2bx;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right.$$

(C) có ba điểm cực trị $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a} > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị là: $A(0;c)$, $B\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$

Độ dài các đoạn thẳng: $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$, $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Các kết quả cần ghi nhớ:

- ΔABC vuông cân $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2\left(\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}\right) \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}\left(\frac{b^3}{8a} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{8a} + 1 = 0$$

- ΔABC đều $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2$

$$\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{3b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}\left(\frac{b^3}{8a} + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{8a} + 3 = 0$$

- $\widehat{BAC} = \alpha$, ta có: $\cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = -\frac{8a}{b^3}$

- $S_{\Delta ABC} = \frac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\frac{b}{2a}}$

- Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b}$

- Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là $r = \dfrac{\frac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\frac{b}{2a}}}{\sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}} + \sqrt{-\frac{b}{2a}}} = \dfrac{b^2}{4|a| + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}}$

- Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$

II. LUYỆN TẬP

A. Tính đơn điệu của hàm số

Bài 1: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1/ $y = x^4 + 8x^2 + 5$;   2/ $y = \frac{2x - 3}{4 - x}$

3/ $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 2}$;   4/ $y = \sqrt{25 - x^2}$

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 + mx^2 + (3m-2)x$ (1)

Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số (1) đồng biến trên tập xác định của nó.

HD giải. *Tập xác định: D = R.* $y' = (m-1)x^2 + 2mx + 3m - 2$.

(1) đồng biến trên R $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \Leftrightarrow m \geq 2$

Bài 3: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ (1)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

HD giải. *Tập xác định: D = R.* $y' = 3x^2 + 6x - m$. *y' có* $\Delta' = 3(m+3)$.

+ Nếu $m \leq -3$ *thì* $\Delta' \leq 0 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \Rightarrow$ *hàm số đồng biến trên R* $\Rightarrow m \leq -3$ *thoả YCBT.*

+ Nếu $m > -3$ *thì* $\Delta' > 0 \Rightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$. *Khi đó hàm số đồng biến trên các khoảng* $(-\infty; x_1), (x_2; +\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0) \Leftrightarrow 0 \le x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P \ge 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ -m \ge 0 \\ -2 > 0 \end{cases}$ *(VN)*

Vậy: $m \le -3$.

Bài 4: Cho hàm số $y = -2x^3 + 3mx^2 - 1$ (1).

Tìm các giá trị của *m* để hàm số (1) đồng biến trong khoảng $(x_1;x_2)$ với $x_2 - x_1 = 1$.

HD giải. $y' = -6x^2 + 6mx$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = m$.

+ Nếu $m = 0 \Rightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ *hàm số nghịch biến trên* $\mathbb{R} \Rightarrow m = 0$ *không thoả YCBT.*

+ Nếu $m \ne 0$, $y' \ge 0, \forall x \in (0;m)$ *khi* $m > 0$ *hoặc* $y' \ge 0, \forall x \in (m;0)$ *khi* $m < 0$.

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $(x_1;x_2)$ *với* $x_2 - x_1 = 1$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x_1;x_2) = (0;m) \\ (x_1;x_2) = (m;0) \end{array}\right.$ *và* $x_2 - x_1 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 0 = 1 \\ 0 - m = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = \pm 1$

B. Cực trị của hàm số

Bài 1: Tìm cực trị của các hàm số:

1) y = $\frac{1}{3}x^3 - 4x$

2) y = $\frac{1}{4}x^4 - 4x^2 - 1$

3) y = $\frac{x^2 - 3x}{x+1}$

4) y = $\frac{2x+7}{4x+3}$

5) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

6) $y = \frac{x+3}{x-4}$

Bài 2: Tìm m để hàm số:

1) y = $\frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại x = 2

2) y = $\frac{x^2 - mx + m - 1}{x+1}$ đạt cực tiểu tại x = 1

3) $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x+1}$ đạt cực tiểu tại x = 2

4) $y = mx^3 + 3x^2 + 5x + m$ đạt cực tiểu tại x = 2

5) $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-2)x^2 + (2-m)x + 2$ đạt cực đại tại x = –1

Bài 3: Cho hàm số $y = 2x^2 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$.

Tìm *m* để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$.

HD giải. *Ta có:* $y' = 6(x-1)(x-m)$. *Hàm số có CĐ, CT* $\Leftrightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow m \ne 1$.

Khi đó các điểm cực trị là $A(1; m^3 + 3m - 1), B(m; 3m^2)$.

$AB = \sqrt{2} \Leftrightarrow (m-1)^2 + (3m^2 - m^3 - 3m + 1) = 2 \Leftrightarrow m = 0; m = 2$ *(thoả điều kiện).*

Bài 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$, với m là tham số thực.

Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \le 2$.

HD giải. *Ta có* $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$.

+ Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 $\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2

$\Leftrightarrow$ *PT* $x^2-2(m+1)x+3=0$ *có hai nghiệm phân biệt là* x_1, x_2.

$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1+\sqrt{3} \\ m<-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$ (1)

+ *Theo định lý Viet ta có* $x_1+x_2=2(m+1);\ x_1x_2=3$. *Khi đó:*

$|x_1-x_2|\le 2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2\le 4 \Leftrightarrow 4(m+1)^2-12\le 4 \Leftrightarrow (m+1)^2\le 4 \Leftrightarrow -3\le m\le 1$ *(2)*

+ *Từ (1) và (2) suy ra giá trị của m cần tìm là* $-3\le m<-1-\sqrt{3}$ *và* $-1+\sqrt{3}<m\le 1$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sao đây là khẳng đinh đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=-x^4+4x^2+10$ và các khoảng sau:

(I): $(-\infty;-\sqrt{2})$; (II): $(-\sqrt{2};0)$; (III): $(0;\sqrt{2})$;

Hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. Chỉ (I). **B**. (I) và (II). **C**. (II) và (III). **D**. (I) và (III).

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1}{-4+2x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 5. Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $h(x)=x^4-4x^2+4$. **B.** $g(x)=x^3+3x^2+10x+1$.

C. $f(x)=-\dfrac{4}{5}x^5+\dfrac{4}{3}x^3-x$. **D.** $k(x)=x^3+10x-\cos^2 x$.

Câu 6. Hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+5}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$. **B.** $(-4;2)$.

C. $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. **D.** $(-4;-1)$ và $(-1;2)$.

Câu 7. Hàm số $y=\dfrac{3}{5}x^5-3x^4+4x^3-2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a>0; b^2-3ac\le 0 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a>0; b^2-3ac\ge 0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a<0; b^2-3ac\le 0 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} a=b=c=0 \\ a<0; b^2-3ac<0 \end{array}\right.$.

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+15$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-9;-5)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Câu 10. Tìm điều kiện để hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ \ (a\ne 0)$ có 3 điểm cực trị .

A. $ab<0$. **B.** $ab>0$. **C.** $b=0$. **D.** $c=0$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=4$. **D.** Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$.

Câu 12. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và đạt cực đại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và cực tiểu tại $x=0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=-2$.

Câu 13. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có ba điểm cực trị. **B.** Hàm số chỉ có đúng 2 điểm cực trị.

C. Hàm số không có cực trị. **D.** Hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị.

Câu 14. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A, B. Viết phương trình đường thẳng AB.

A. $y=x-2$. **B.** $y=2x-1$.

C. $y=-2x+1$. **D.** $y=-x+2$.

Câu 15. Gọi M, n lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$. Tính giá trị của biểu thức M^2-2n ?

A. $M^2-2n=8.$ **B.** $M^2-2n=7.$ **C.** $M^2-2n=9.$ **D.** $M^2-2n=6.$

Câu 16. Cho hàm số $y=x^3+17x^2-24x+8$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $x_{CD}=1.$ **B.** $x_{CD}=\dfrac{2}{3}.$ **C.** $x_{CD}=-3.$ **D.** $x_{CD}=-12.$

Câu 17. Cho hàm số $y=3x^4-6x^2+1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $y_{CD}=-2.$ **B.** $y_{CD}=1.$ **C.** $y_{CD}=-1.$ **D.** $y_{CD}=2.$

Câu 18. Trong các hàm số sau, hàm số nào đạt cực đại tại $x=\dfrac{3}{2}$?

A. $y=\dfrac{1}{2}x^4-x^3+x^2-3x.$ **B.** $y=\sqrt{-x^2+3x-2}.$

C. $y=\sqrt{4x^2-12x-8}.$ **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+2}.$

Câu 19. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

A. $y=-10x^4-5x^2+7.$ **B.** $y=-17x^3+2x^2+x+5.$

C. $y=\dfrac{x-2}{x+1}.$ **D.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}.$

Câu 20. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+4x-7$. Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1, x_2. Tính x_1+x_2 ?

A. $x_1+x_2=-6.$ **B.** $x_1+x_2=-4.$ **C.** $x_1+x_2=6.$ **D.** $x_1+x_2=4.$

Câu 21. Tính hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x^2+4$.

D. -4. **B.** -2. **C.** 2. **A.** 4.

Câu 22. Xác định hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Biết đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là gốc tọa độ và điểm $A(-1;-1)$.

A. $y=2x^3-3x^2$. **B.** $y=-2x^3-3x^2$.

C. $y=x^3+3x^2+3x$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

Câu 23. Hàm số nào dưới đây có cực trị?

A. $y=x^4+1$. **B.** $y=x^3+x^2+2x-1$.

C. $y=2x-1$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

Câu 24. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-(3m-1)x^2+2m+1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với điểm $D(7;3)$ nội tiếp được một đường tròn.

A. $m=3.$ **B.** $m=1.$ **C.** $m=-1.$ **D.** Không tồn tại m.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \pm\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m = \pm\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m = 1$.

IV. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	D	B	C	D	D	B	A	A	D	A	B	A	A	D	B	B	B	D

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	C	C	A	B															

Buổi 2.
Chủ đề 3+4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ VÀ ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

A. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$.

  Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max\limits_{D} f(x)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$.

  Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min\limits_{D} f(x)$

2. Kĩ năng cơ bản

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K (K có thể là khoảng, đoạn, nửa khoảng, ...)

2.1 Quy trình tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sử dụng bảng biến thiên

✓ ***Bước 1.*** Tính đạo hàm $f'(x)$.

✓ ***Bước 2.*** Tìm các nghiệm của $f'(x)$ và các điểm $f'(x)$ trên *K*.

✓ ***Bước 3.*** Lập bảng biến thiên của $f(x)$ trên *K*.

✓ ***Bước 4.*** Căn cứ vào bảng biến thiên kết luận $\min\limits_{K} f(x), \max\limits_{K} f(x)$

2.2 Quy trình tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số không sử dụng bảng biến thiên

❖ **Trường hợp 1.** Tập *K* là đoạn $[a;b]$

✓ ***Bước 1.*** Tính đạo hàm $f'(x)$.

- ✓ ***Bước 2.*** Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in [a;b]$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in [a;b]$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- ✓ ***Bước 3.*** Tính $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- ✓ ***Bước 4.*** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$, $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

❖ **Trường hợp 2.** Tập K là khoảng $(a;b)$

- ✓ ***Bước 1.*** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- ✓ ***Bước 2.*** Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a;b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- ✓ ***Bước 3.*** Tính $A = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- ✓ ***Bước 4.*** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m = \min\limits_{(a;b)} f(x)$.

✍ ***Chú ý:*** *Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).*

B. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1. Đường tiệm cận ngang

- *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0, \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$$

- **Nhận xét**: Như vậy để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chỉ cần tính giới hạn của hàm số đó tại vô cực.

2. Đường tiệm cận đứng

- *Đường thẳng $x = x_0$ là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty.$$

Ngoài ra cần nhớ các kiến thức về giới hạn sau:

3) Quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau

<table>
<tr><th>$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$</th><th>$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$</th><th>Dấu của $g(x)$</th><th>$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>$\pm\infty$</td><td>Tùy ý</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$L>0$</td><td rowspan="4">0</td><td>+</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>–</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$L<0$</td><td>+</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>–</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \ne x_0$)

Chú ý: Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^{\ +}, x \to x_0^{\ -}, x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

+) Nếu $x \to +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$

+) Nếu $x \to -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x$

II. LUYỆN TẬP

A. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a/ $y = f\left(x\right) = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

b/ $y = f\left(x\right) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $\left[1;3\right]$.

c/ $y = f\left(x\right) = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

d/ $y = f\left(x\right) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

HD giải. a/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y = f\left(x\right) = 3x^3 - x^2 - 7x + 1 \ trên \ \left[0;2\right]$.

✧ Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[0;2\right]$.

✧ Ta có: $y' = f'\left(x\right) = 9x^2 - 2x - 7 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 \in \left[0;2\right] & \left(N\right) \\ x = -\dfrac{7}{9} \notin \left[0;2\right] & \left(L\right) \end{array}\right.$

✧ Tính

$f(0) = 1; f(2) = -9; f(1) = -6$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[0;2]} f(x) = 1 \text{ khi } x = 0 \\ \min\limits_{[0;2]} f(x) = -9 \text{ khi } x = 2 \end{cases}$$

b/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y = f\left(x\right) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9 \ trên \ \left[1;3\right]$.

✧ Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[1;3\right]$.

✧ Ta có:

$$y' = f'\left(x\right) = 3x^2 - 16x + 16 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 4 \notin \left[1;3\right] & \left(L\right) \\ x = \dfrac{4}{3} \in \left[1;3\right] & \left(N\right) \end{array}\right.$$

✧ Tính:

$f(1)=0; f(3)=-6; f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{13}{27}$

$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{13}{27} \text{ khi } x=\dfrac{4}{3} \\ \min\limits_{[1;3]} f(x)=-6 \text{ khi } x=3 \end{cases}$

c/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y=f\left(x\right)=-2x^4+4x^2+3 \ trên \ \left[0;2\right]$.

✧ Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[0;2\right]$.

✧ Ta có: $y'=f'\left(x\right)=-8x^3+8x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow -8x^3+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in\left[0;2\right] \quad \left(N\right) \\ x=-1\notin\left[0;2\right] \quad \left(L\right) \\ x=1\in\left[0;2\right] \quad \left(N\right)\end{array}\right.$.

✧ Tính:

$f\left(0\right)=3; f\left(2\right)=-13; f\left(1\right)=5$

$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[0;2]} f\left(x\right)=5 \quad \text{ khi } x=1 \\ \min\limits_{[0;2]} f\left(x\right)=-13 \text{ khi } x=2 \end{cases}$

d/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y=f\left(x\right)=2x^3-6x^2+1 \ trên \ \left[-1;1\right]$.

✧ Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

✧ Ta có: $y'=f'\left(x\right)=6x^2-12x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 6x^2-12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in\left[-1;1\right] \ \left(N\right) \\ x=2\notin\left[-1;1\right] \ \left(L\right)\end{array}\right.$.

✧ Tính:

$f\left(-1\right)=-7; f\left(1\right)=-3; f\left(0\right)=1$

$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)=1 \quad \text{ khi } x=0 \\ \min\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)=-7 \text{ khi } x=-1 \end{cases}$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a/ $y=x+\dfrac{4}{x}$, $\left(x>0\right)$.

b/ $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$.

c/ $y=x-\dfrac{1}{x}, x\in\left(0;2\right]$.

d/ $y=\dfrac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}$, $\left(x>0\right)$.

HD giải. a/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y=x+\dfrac{4}{x}$, $\left(x>0\right)$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$.

* Ta có: $y'=1-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^2-4}{x^2}, \forall x\in\left(0;+\infty\right) \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

* Bảng biến thiên:

x	-2	0		2		$+\infty$
y'	$+$ 0		$-$	0	$+$	
y			↘	4	↗	

$*$ Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} f\left(x\right) = 4$ khi $x = 2$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

b/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 1}$

$*$ Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

$*$ Ta có: $y' = \dfrac{-x^2 + 2x}{\left(x^2 - x + 1\right)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$*$ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$ $+\infty$		0		2	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	0	↘	-1	↗	$\dfrac{1}{3}$	↘ 0

$*$ Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \dfrac{1}{3}$ khi $x = 0$ và $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \dfrac{1}{3}$ khi $x = 2$.

c/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y = x - \dfrac{1}{x}, x \in \left(0;2\right]$

$*$ Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\left(0;2\right]$.

$*$ Ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}, \forall x \in \left(0;2\right]$.

$*$ Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$*$ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$ -1	0		1		2	$+\infty$
y'	$+$ 0		$-$	0	$+$		$+$
y		$\dfrac{3}{2}$	↘	0	↗		

$*$ Dựa vào bảng biến thiên: $\min\limits_{(0;2]} f\left(x\right) = 0$ khi $x = 1$.

d/ <u>Tìm max – min của hàm số</u>: $y = \dfrac{x + \sqrt{1 + 9x^2}}{8x^2 + 1}$, $\left(x > 0\right)$

✧ Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $\left(0,+\infty\right)$.

✧ Ta có: $y=f\left(x\right)=\dfrac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}=\dfrac{9x^2+1-x^2}{\left(8x^2+1\right)\left(\sqrt{9x^2+1}-x\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}-x}$.

✧ Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $\left(0,+\infty\right)$ khi và chỉ khi hàm số:

$g\left(x\right)=\sqrt{9x^2+1}-x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(0,+\infty\right)$.

✧ Ta có $g'\left(x\right)=\dfrac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}-1\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{9x^2+1}=9x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\72x^2=1\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$.

✧ Vậy: $\min\limits_{\left(0;+\infty\right)}g(x)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ khi $x=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}\Rightarrow\max\limits_{\left(0;+\infty\right)}f(x)=\dfrac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ khi $x=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$.

Bài 3:

a/ Chu vi của một tam giác là $16\left(cm\right)$, độ dài của một cạnh tam giác là $6\left(cm\right)$. Tìm hai cạnh còn lại của tam giác sao cho tam giác có diện tích lớn nhất.

b/ Cho Parabol $(P): y=x^2$ và điểm $A(-3;0)$. Xác định điểm $M\in(P)$ sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất. Tìm khoảng cách đó.

HD giải. a/ Gọi độ dài cạnh thứ nhất của tam giác là $x\left(cm\right)$, cạnh thứ hai có độ dài là $y\left(cm\right)$ và cạnh thứ ba là $6\left(cm\right)$.

✧ Theo đề bài ta có: $\begin{cases}x>0,\ y>0\\ Chu\ vi\ \Delta=2p=x+y+6=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=10-x;\ \forall x\in\left(0;10\right)\\ p=16\end{cases}$

✧ Công thức tính diện tích Δ theo Hêrông:

$S_\Delta\left(x\right)=\sqrt{p\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left(p-6\right)}=\sqrt{8\left(8-x\right)\left(8-y\right)\left(8-6\right)}=4\sqrt{-x^2+10x-16}$.

✧ Ta có: $S'_\Delta=4.\dfrac{\left(5-x\right)}{\sqrt{-x^2+10x-16}};\ \forall x\in\left(0;10\right)$.

$S'_\Delta=0\Leftrightarrow 4.\dfrac{\left(5-x\right)}{\sqrt{-x^2+10x-16}}\Leftrightarrow x=5;\ \forall x\in\left(0;10\right)$.

✧ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		5		10	$+\infty$
S'_Δ			+	0	−		
$S_\Delta(x)$			↗	12	↘		

✧ Dựa vào bảng biến thiên: Max$S_\Delta=12\left(cm^2\right)$ khi mỗi cạnh còn lại dài $5\left(cm\right);\left(khi\ x=y=5\right)$.

b/Gọi $M\left(x_o;y_o\right)\in(P)\Rightarrow M\left(x_o;x_o^2\right)$.

✧ Khoảng cách: $AM = d\left(x_o\right) = \sqrt{\left(x_o+3\right)^2+\left(x_o^2\right)^2} = \sqrt{x_o^4+x_o^2+6x_o+9}$.

✧ Ta có: $d'\left(x_o\right) = \dfrac{2x_o^3+x_o+3}{\sqrt{x_o^4+x_o^2+6x_o+9}}$; $d'\left(x_o\right)=0 \Leftrightarrow 2x_o^3+x_o+3=0 \Leftrightarrow x_o=-1$.

✧ Bảng biến thiên:

x_o	$-\infty$		-1		$+\infty$
$d'\left(x_o\right)$		$-$	0	$+$	
$AM = d\left(x_o\right)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: $AM_{\min} = \sqrt{5}$ khi điểm $M\left(-1;1\right) \in \left(P\right): y = x^2$.

II. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1) Tìm giới hạn theo quy tắc

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x)$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right) = -\infty$ (vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right) = 1 > 0$).

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x^2+1}{x^2-x+1}$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x^2+1}{x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x.\dfrac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right) = +\infty$ (vì $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ và

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right) = 2 > 0$)

Ví dụ 3. Tìm $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$, $x-1>0\ \forall x>1$ và $\lim\limits_{x\to1^+}(2x-3)=-1<0$. Do đó $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=-\infty$.

Ví dụ 4. Tìm $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$, $x-1<0\ \forall x<1$ và $\lim\limits_{x\to1^-}(2x-3)=-1<0$. Do đó $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty$.

2) Kĩ năng sử dụng máy tính

Ý tưởng: *Giả sử cần tính* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *ta dùng chức năng CALC để tính giá trị của* $f(x)$ *tại các giá trị của* x *rất gần* a.

a) Giới hạn của hàm số tại một điểm

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *thì nhập* $f(x)$ *và tính giá trị tại* $x = a + 10^{-9}$.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *thì nhập* $f(x)$ *và tính giá trị tại* $x = a - 10^{-9}$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *thì nhập* $f(x)$ *và tính giá trị tại* $x = a + 10^{-9}$ *hoặc* $x = a - 10^{-9}$.

b) Giới hạn của hàm số tại vô cực

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ *thì nhập* $f(x)$ *và tính giá trị tại* $x = 10^{10}$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ *thì nhập* $f(x)$ *và tính giá trị tại* $x = -10^{10}$.

Ví dụ 1. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

Giải. Nhập biểu thức $\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$. Ấn tổ hợp phím: $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{1+10^{-9}}$ $\boxed{=}$. Máy hiện số 4.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} = 4$.

Ví dụ 2. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-3}{x-1}$.

Giải. Nhập biểu thức $\dfrac{2x-3}{x-1}$. Ấn tổ hợp phím: $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{1+10^{-9}}$ $\boxed{=}$.

Máy hiện số -999999998. Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-3}{x-1} = -\infty$.

Ví dụ 3. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+2x-3}{x^2+1}$.

Giải. Nhập biểu thức $\dfrac{2x^2+2x-3}{x^2+1}$. Ấn tổ hợp phím: $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{10^{10}}$ $\boxed{=}$. Máy hiện số 2.

Vậy $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+2x-3}{x^2+1} = 2$.

3) Dạng toán thường gặp: Tìm các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Phương pháp:

- Tìm TXĐ của hàm số.

- Tìm các giới hạn của hàm số khi $x \to +\infty, x \to -\infty, x \to x_0^+, x \to x_0^-$ *rồi dựa vào định nghĩa các đường tiệm cận để kết luận.*

Chú ý.

- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có thể có tiệm cận ngang khi TXĐ của nó là một khoảng vô hạn hay một nửa khoảng vô hạn (nghĩa là biến x có thể dần tới $+\infty$ hoặc $-\infty$).
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có thể có tiệm cận đứng khi TXĐ của nó có một trong các dạng sau $(a;b),[a;b),(a;b],(a;+\infty),(-\infty;a)$ hoặc là hợp của các tập hợp này và TXĐ không có một trong các dạng sau $\mathbb{R},[c;+\infty),(-\infty;c],[c;d]$.
- Đối với hàm phân thức $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x),Q(x)$ là hai đa thức của x ta thường dùng phương pháp sau để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

i) Tiệm cận đứng

Nếu $\begin{cases} P(x_0) \neq 0 \\ Q(x_0) = 0 \end{cases}$ thì đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

ii) Tiệm cận ngang

Nếu bậc của $P(x)$ bé hơn bậc của $Q(x)$ thì đường thẳng $y = 0$ (trục hoành) là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Nếu bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x)$ thì đường thẳng $y = \dfrac{A}{B}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $P(x)$ trong đó A, B lần lượt là hệ số của số hạng có số mũ lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$.

Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Đặc biệt, mọi hàm phân thức hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đồ thị đều có hai tiệm cận

Tiệm cận đứng $x = \dfrac{-d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$. Đồ thị nhận giao điểm của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

Ví dụ 1. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$.

Giải. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$ nên đồ thị nhận đường thẳng $y = 2$ làm tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to1^+} y = -\infty, \lim\limits_{x\to1^-} y = +\infty$ nên đồ thị nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng.

Chú ý: Có thể cho HS áp dụng luôn nhận xét ở phần trên để luyện tập.

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2016}{\sqrt{x^2-2016}}$.

Giải. TXĐ: $D = (-\infty; -12\sqrt{14}) \cup (12\sqrt{14}; +\infty)$. Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -1$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

Ví dụ 3. Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$.

Giải. TXĐ: $D = [0;4) \cup (4;+\infty)$. Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = 1$ nên đồ thị nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to4^+} y = +\infty, \lim\limits_{x\to4^-} y = -\infty$ nên đồ thị nhận đường thẳng $x = 4$ làm tiệm cận đứng.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Gọi $y_1; y_2$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$ trên đoạn $[3;4]$. Tính tích $y_1.y_2$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$ trên đoạn $[-5;-3]$.

A. Giá trị lớn nhất bằng $-\frac{13}{12}$.
B. Giá trị lớn nhất bằng $\frac{11}{6}$.
C. Giá trị lớn nhất bằng $-\frac{47}{60}$.
D. Giá trị lớn nhất bằng $-\frac{11}{6}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=x-\sqrt{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1.
C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ $x=1$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 4. Hàm số $y=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** ± 1. **C.** $\pm\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất N của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

A. $N=-2;\ M=1$. **B.** $N=0;\ M=2$ **C.** $N=\frac{1}{2};\ M=1$. **D.** $N=0;\ M=1$.

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^4 x-\cos^4 x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** Không tồn tại.

Câu 7. Tìm điểm có hoành độ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ để hàm số $y=\sqrt{1+2\sin x.\cos x}$ đạt giá trị nhỏ nhất .

A. $x=\frac{\pi}{4}$. **B.** $x=\frac{\pi}{6}$. **C.** $x=0$ và $x=\frac{\pi}{2}$. **D.** $x=\frac{\pi}{3}$.

Câu 8. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất N của hàm số $y=\sin^6 x+\cos^6 x$.

A. $M=1;\ N=-1$. **B.** $M=2;N=0$. **C.** $M=\frac{1}{4};\ N=-1$. **D.** $M=1;N=\frac{1}{4}$.

Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+3$ trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$.

A. $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=5$. **B.** $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=3$. **C.** $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=4$. **D.** $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=6$

Câu 10. Hàm số $y=x^3-2x^2-7x+5$ có giá trị nhỏ nhất là m và giá trị lớn nhất là M trên $[1;3]$. Tính tổng m + M.

A. $m+M=-\frac{338}{27}$.
B. $m+M=-\frac{446}{27}$.
C. $m+M=-10$.
D. $m+M=-\frac{14}{27}$.

Câu 11. Tìm các giá trị của tham số $m > 0$ để hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[m+1; m+2]$ luôn bé hơn 3.

A. $m \in (0;1)$. **B.** $m \in (\frac{1}{2};1)$.

C. $m \in (-\infty;1) \setminus \{-2\}$. **D.** $m \in (0;2)$.

Câu 12. Một công ti bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê, mỗi căn hộ thêm 50.000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ti đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập cao nhất công ti có thể đạt được trong một tháng là bao nhiêu?

A. 115.250.000. **B.** 101.250.000.

C. 100.000.000. **D.** 100.250.000.

Câu 13. Doanh nghiệp Hồng Anh cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^2$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp Hồng Anh cần sử dụng máy A làm việc trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 14. Một người thợ xây cần xây một bể chứa 108 m^3 nước có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông và không có nắp. Hỏi chiều cao của lòng bể bằng bao nhiêu để số viên gạch dùng xây bể là ít nhất. Biết thành bể và đáy bể đều được xây bằng gạch, độ dày thành bể và đáy bể là như nhau, các viên gạch có kích thước như nhau và số viên gạch trên một đơn vị diện tích là bằng nhau.

A. 9m. **B.** 6m. **C.** 3m. **D.** 2m.

Câu 15. Kỳ thi THPT Quốc gia năm 2016 vừa kết thúc, Nam đỗ vào trường đại học kinh tế quốc dân Hà Nội. Kỳ I của năm thứ nhất gần qua, kỳ II sắp đến. Hoàn cảnh không được tốt nên gia đình rất lo lắng về việc đóng học phí cho Nam, kỳ I đã khó khăn, kỳ II càng khó khăn hơn. Gia đình đã quyết định bán một phần mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 50m, lấy tiền lo cho việc học của Nam cũng như tương lai của em. Mảnh đất còn lại sau khi bán là một hình vuông cạnh bằng chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu. Tìm số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất, biết giá tiền 1m^2 đất khi bán là 1500.000 VN đồng.

A. 112687500VN đồng. **B.** 114187500VN đồng.

C. 115687500VN đồng. **D.** 117187500VN đồng.

Câu 16. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 17. Đồ thị hàm số nào sau đây nhận đường thẳng $y = 2$ là một đường tiệm cận ?

A. $y = \frac{3x}{x-2}$. **B.** $y = \frac{2x-1}{2-x}$. **C.** $y = \frac{-2x+1}{2-x}$. **D.** $y = x - 2$.

Câu 18. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{3x+1}{x-1}$.

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-3$.

Câu 19. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$.

A. $y=-1$. **B.** $y=1$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=2$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+m}{x+m}$ tạo với 2 trục tọa độ một hình vuông.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** A và B sai. **D.** A và B đều đúng.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách từ giao điểm của 2 đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{mx+2}{x+1}$ tới gốc tọa độ O bằng $\sqrt{5}$.

A. $m=\pm 4$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** A và B sai. **D.** A và B đều đúng.

Câu 22. Cho hàm số $y=\frac{2-3x}{3x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nằm bên trái trục tung.

A. $m<0$. **B.** $m=0$. **C.** m tùy ý. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m<0$. **C.** $m=0$. **D.** $m>0$.

Câu 25. Cho hàm số $y=\frac{2mx+m}{x-1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

A. $m=2$. **B.** $m=\pm\frac{1}{2}$. **C.** $m=4$. **D.** $m=\pm 4$.

IV. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	C	B	B	C	B	C	D	A	A	A	B	A	C	D	A	C	D	D	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	B	C	D	D															

Buổi 3.

CHỦ ĐỀ 5. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Sơ đồ khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

a) Tập xác định: Tìm tập xác định của hàm số.

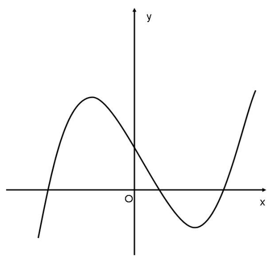
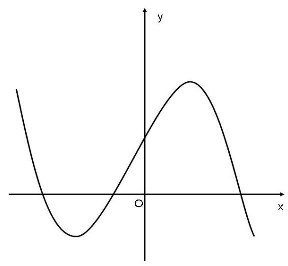
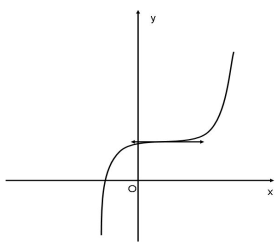
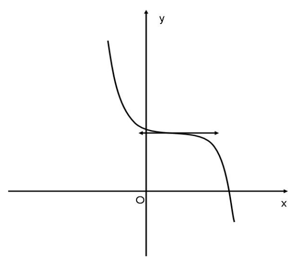
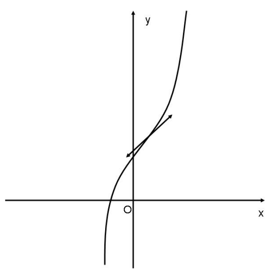
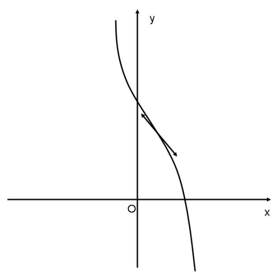
b) Sự biến thiên của hàm số

- Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tiệm cận (nếu có).
- Xét chiều biến thiên của hàm số:
  Tính đạo hàm. Tìm các điểm tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
  Lập bảng biến thiên và kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến và cực trị của hàm số.

c) Đồ thị: Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

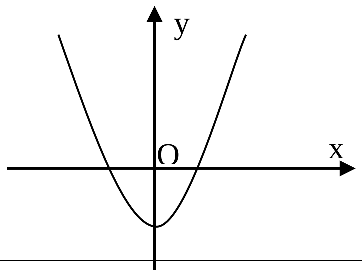
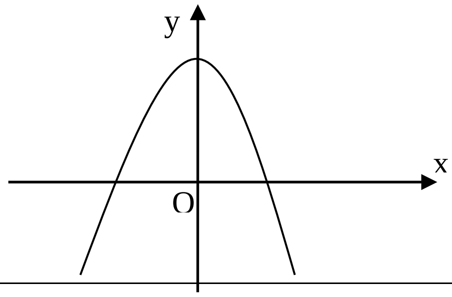
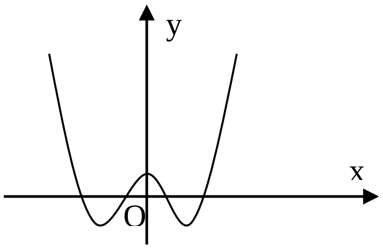
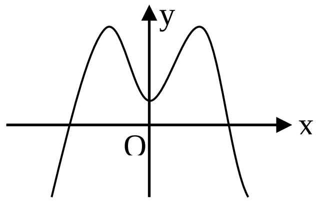
2. Đồ thị hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

- Các dạng đồ thị của hàm số bậc 3:

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình y’ = 0 có hai nghiệm phân biệt		
Phương trình y’ = 0 có nghiệm kép		
Phương trình y’ = 0 vô nghiệm		

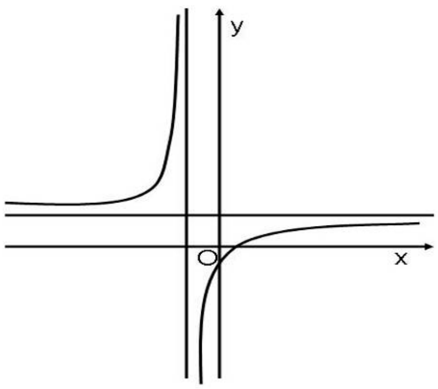
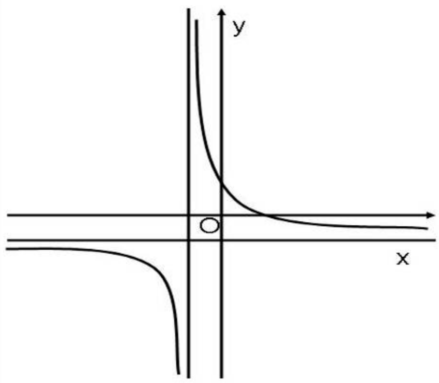
3. Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$

- Các dạng đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương:

	a > 0	a < 0
y’= 0 có 1 nghiệm (a.b > 0)		
y’= 0 có 3 nghiệm (a.b<0)		

4) Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

Các dạng đồ thị hàm số:

D = ad – bc > 0	D = ad – bc < 0
	

Chú ý: Cần hướng dẫn học sinh cách “đọc” đồ thị để suy ra chiều biến thiên, lập bảng biến thiên trong mỗi trường hợp và chỉ ra các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có)

5) Các phép biến đổi đồ thị

Cho hàm số $y = f(x)$ *có đồ thị* (C). *Khi đó với số* $a > 0$, *ta có*

+ Hàm số $y = f(x) + a$ *có đồ thị* (C') *bằng cách tịnh tiến đồ thị* (C) *theo phương* Oy *lên trên* a *đơn vị.*

+ Hàm số $y = f(x) - a$ *có đồ thị* (C') *bằng cách tịnh tiến đồ thị* (C) *theo phương* Oy *lên trên* a *đơn vị.*

+ Hàm số $y = f(x+a)$ có đồ thị (C') bằng cách tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Ox sang trái a đơn vị.

+ Hàm số $y = f(x-a)$ có đồ thị (C') bằng cách tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Ox sang phải a đơn vị.

+ Hàm số $y = -f(x)$ có đồ thị (C') là đối xứng của đồ thị (C) qua trục Ox.

+ Hàm số $y = f(-x)$ có đồ thị (C') là đối xứng của đồ thị (C) qua trục Oy.

+ Hàm số $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \text{ khi } x \ge 0 \\ f(-x) \text{ khi } x < 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') suy từ đồ thị (C) bằng cách:

Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy và bỏ phần đồ thị (C) nằm bên trái Oy.

Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy qua Oy.

+ Hàm số $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ khi } f(x) \ge 0 \\ -f(x) \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') suy từ đồ thị (C) bằng cách:

Giữ nguy ên phần đồ thị (C) nằm phía trên trục Ox.

Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên phía dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox.

II. LUYỆN TẬP (KĨ NĂNG CƠ BẢN)

Dạng 1. Nhận dạng đồ thị hàm số

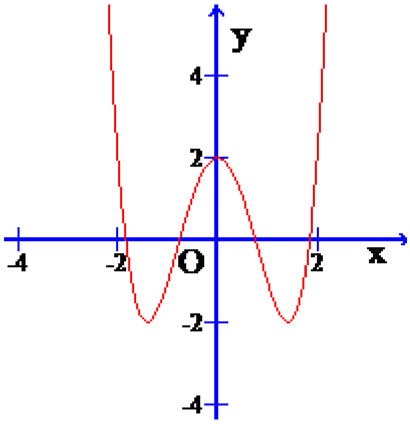
Ví dụ 1. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

B. $y = x^3 + 3x + 1$.

C. $y = -x^4 + 4x^2 + 2$.

D. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$.



Hướng dẫn giải. Đây là dạng đồ thị hàm bậc 4 trùng phương với hệ số a > 0. Chọn **A.**

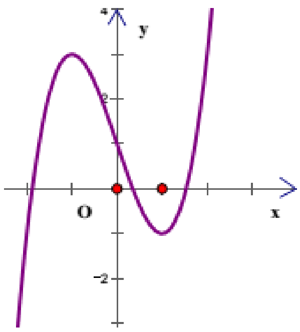
Ví dụ 2. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^2 + 2x - 3$.

B. $y = -x^3 + 3x + 1$.

C. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.

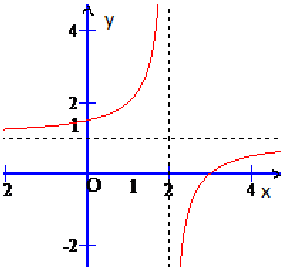


Hướng dẫn giải

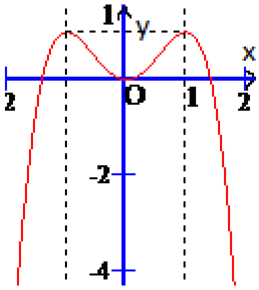
Ta thấy đường cong là đồ thị của hàm bậc ba, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$. Vậy đáp án là D.

Ví dụ 3. Hàm số $y = \dfrac{x-1}{x-2}$ có đồ thị là hình vẽ nào dưới đây?

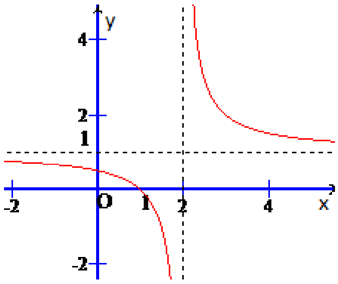
A. Hình 1.



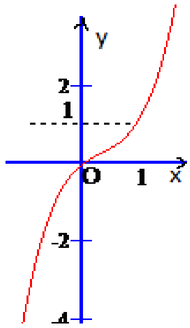
B. Hình 2.



C. Hình 3.



D. Hình 4.



Hướng dẫn giải

Do hàm số đã cho là hàm phân thức nên loại đáp án B và D.

$y = \dfrac{x-1}{x-2} \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đáp án là C.

Dạng 2. Dựa vào đồ thị hoặc bảng biến thiên chỉ ra số nghiệm của phương trình

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-2 ‖ $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $[-2;4]$. B. $(-2;4)$. C. $(-2;4]$. D. $(-\infty;4]$.

Hướng dẫn giải

Phương trình có 3 nghiệm khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại 3 điểm phân biệt. Từ bảng biến thiên suy ra $-2 < m < 4 \Rightarrow m \in (-2;4)$. Chọn **B.**

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$\dfrac{4}{3}$	↘	0	↗	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

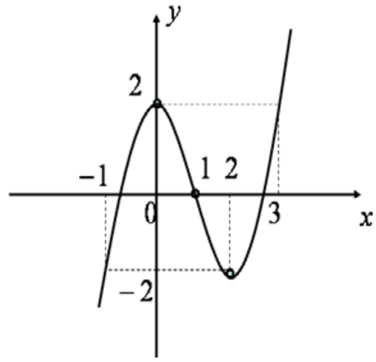
A. $m = 0$. B. $m > \dfrac{4}{3}$. C. $0 < m < \dfrac{4}{3}$. D. $m = 0$ hoặc $m > \dfrac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình có 2 nghiệm khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại 2 điểm phân biệt. Từ BBT suy ra $m = 0$ hoặc $m > \frac{4}{3}$. Chọn D.

Ví dụ 6. Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) được cho ở hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 = m$ có 2 nghiệm thực phân biệt .

A. $-2 \le m \le 2$.
B. $m = -2$ hoặc $m = 2$
C. $m < -2$ hoặc $m > 2$
D. $m \le -2$ hoặc $m \ge 2$.



Ví dụ 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y’		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = -m + 3$ có đúng một nghiệm thực.

A. $-1 < m < 3$. B. $-1 \le m \le 3$. C. $\left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -m + 3$. Từ BBT ta được $\left[\begin{array}{l} -m + 3 > 4 \\ -m + 3 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$. Chọn **D**.

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m - 1$ có nghiệm thực lớn hơn 2.

A. $m \le 4$. B. $m < 4$. C. $m \le 0$. D. $0 < m < 4$.

Hướng dẫn giải

Nghiệm của phương trình $f(x) = m - 1$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m - 1$. Từ BBT ta được $m - 1 < 3 \Leftrightarrow m < 4$. Chọn **B**.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt .

A. $\left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -1 \end{array}\right.$.
B. $-1 < m < 3$.
C. $-1 \le m \le 3$.
D. $\left[\begin{array}{l} m \ge 3 \\ m \le -1 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m - 1$. Từ BBT ta được $\left[\begin{array}{l} m - 1 > 2 \\ m - 1 < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -1 \end{array}\right.$. Chọn **A**.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị được cho ở hình 1. Đồ thị ở hình 2 là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

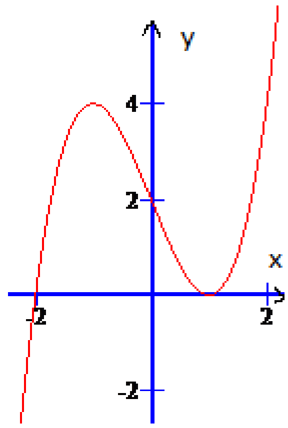
A. $y = |x^3| - 3|x| + 2$.

B. $y = \left|x^3 - 3x + 2\right|$.

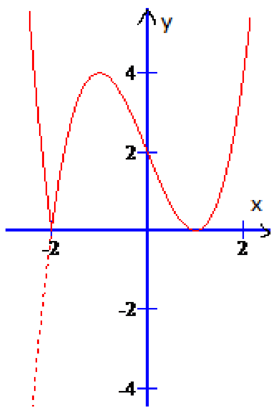
C. $|y| = x^3 - 3x + 2$.

D. $y = |x - 1|\left(x^2 + x - 2\right)$.

Hình 1.



Hình 2.



Hướng dẫn giải

Cách 1. Đồ thị ở hình 2 được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ở phía trên trục hoành Ox

+ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) ở dưới Ox qua Ox, bỏ đi phần đồ thị (C) ở dưới Ox.

+ Đồ thị thu được nằm hoàn toàn trên Ox. Đây là đồ thị hàm số $y = \left|x^3 - 3x + 2\right|$. Chọn **B**.

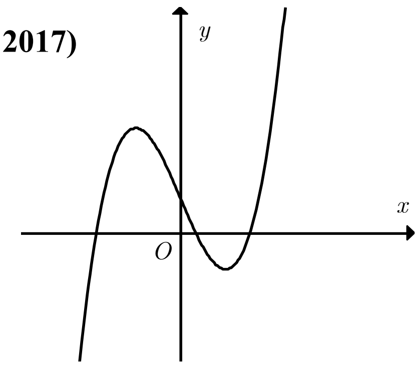
Cách 2. Đồ thị ở hình 2 nằm ở phía trên trục hoành $\Rightarrow y \ge 0$. Chọn **B**.

x	-1		$-\frac{3}{4}$		0		$\frac{3}{4}$		1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	$-\frac{81}{32}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{81}{32}$	$\nearrow$	-1

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



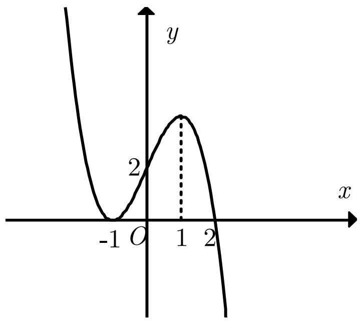
A. $y = -x^2 + x - 1$.

B. $y = -x^3 + 3x + 1$.

C. $y = x^4 - x^2 + 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 2. Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



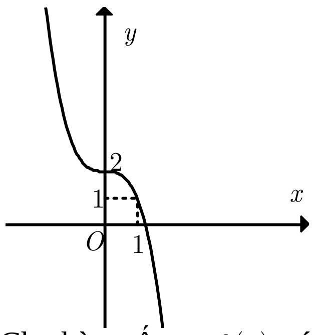
A. $y = (x+1)^2(1-x)$.

B. $y = (x+1)^2(1+x)$.

C. $y = (x+1)^2(2-x)$.

D. $y = (x+1)^2(2+x)$.

Câu 3. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y = -x^3 + 1$.

B. $y = -x^3 + 3x + 2$.

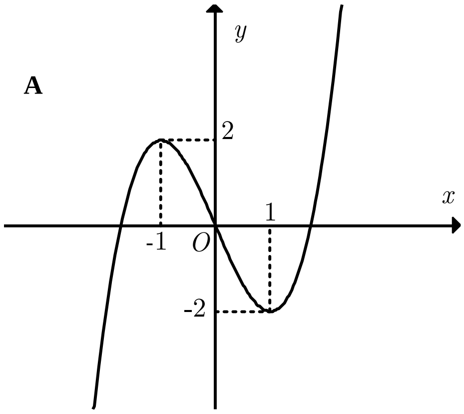
C. $y = -x^3 - x + 2$.

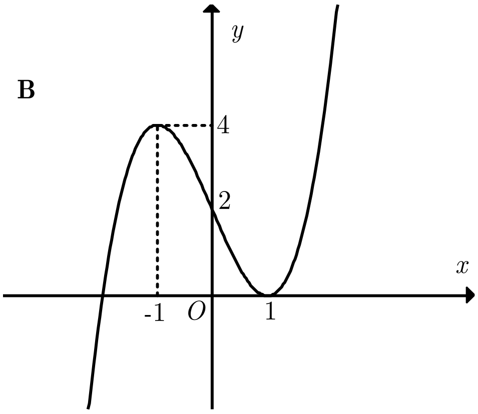
D. $y = -x^3 + 2$.

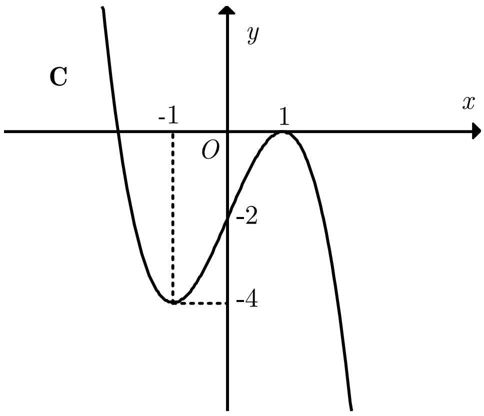
Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

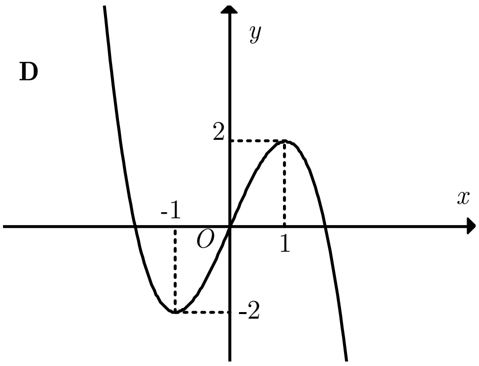
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị nào thể hiện hàm số $y = f(x)$?



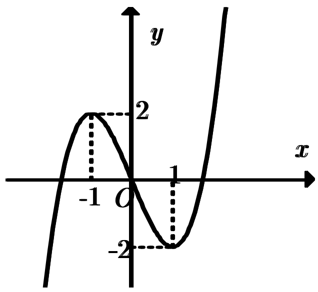






(Đáp án : A).

Câu 5. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.



Chọn đáp án đúng?

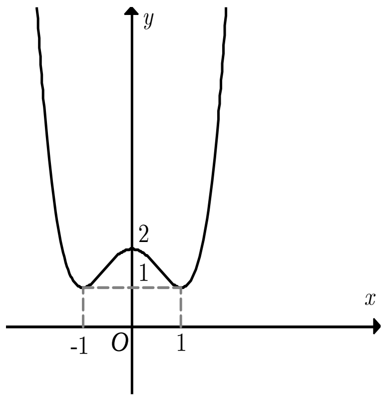
A. Hàm số có hệ số $a < 0$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(1;2)$.

C. Hàm số không có cực trị.

D. Hệ số tự do của hàm số khác 0.

Câu 6. Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



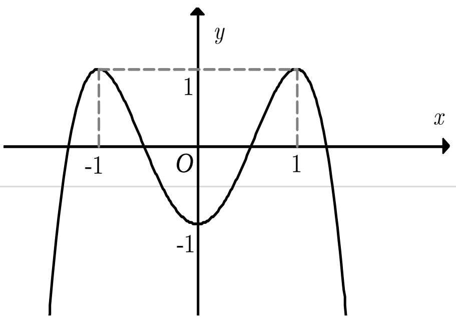
A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

C. $y = x^4 - 4x^2 + 2$.

D. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Câu 7. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



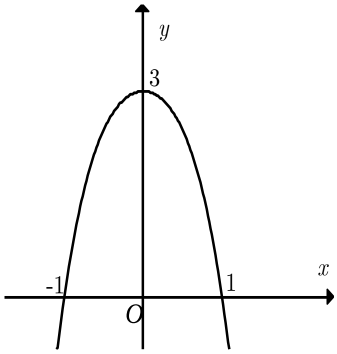
A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

B. $y=-2x^4+4x^2-1$.

C. $y=-x^4+2x^2-1$.

D. $y=-x^4+2x^2+1$.

Câu 8. Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



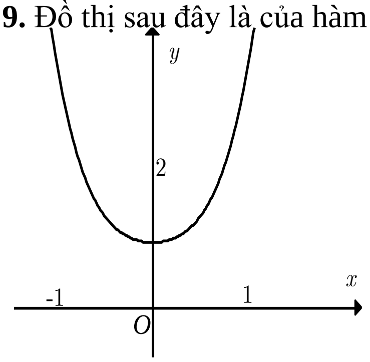
A. $y=-x^4-2x^2+3$.

B. $y=-x^4-2x^2-3$.

C. $y=-x^4+2x^2+3$.

D. $y=x^4+2x^2+3$.

Câu 9. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=x^4+x^2+2$.

B. $y=x^4-x^2+2$.

C. $y=x^4-x^2+1$.

D. $y=x^4+x^2+1$.

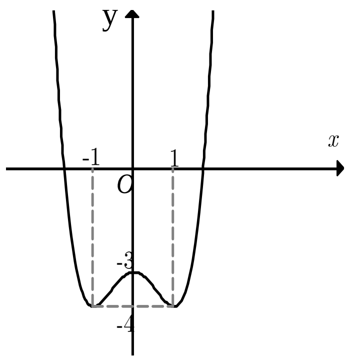
Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Chọn phát biểu sai?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

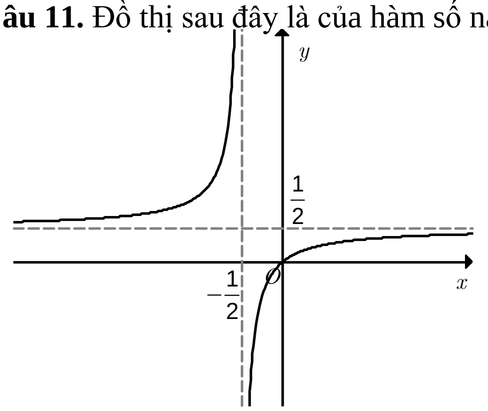
B. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

C. Đồ thị hàm số đã cho biểu diễn như hình bên.



D. Hàm số đã cho là $y=x^4-2x^2-2$.

Câu 11. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



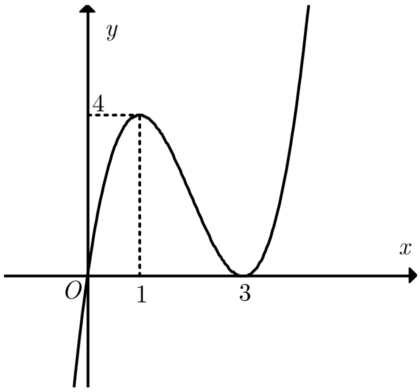
A. $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$.

B. $y=\dfrac{x+3}{2x+1}$.

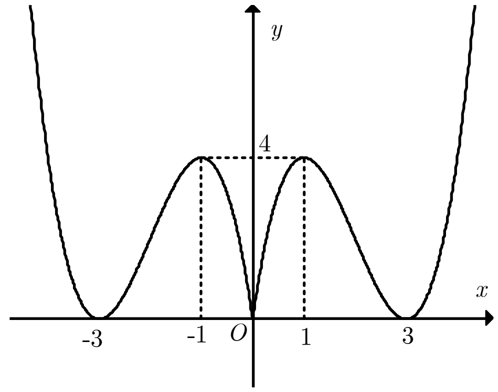
C. $y=\dfrac{x}{2x+1}$.

D. $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$.

Câu 12. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



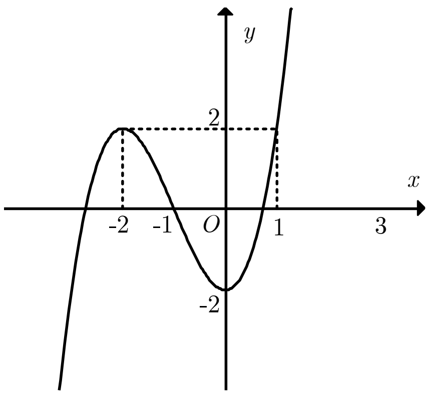
Hình 1



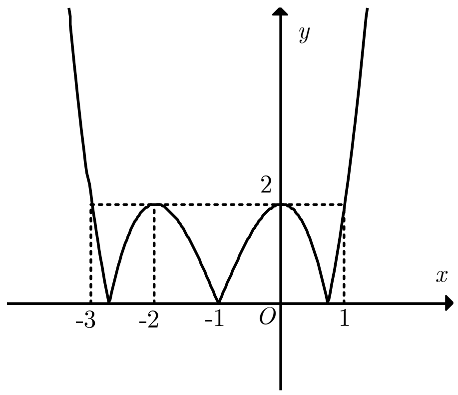
Hình 2

A. $y=-x^3+6x^2-9x$. **B.** $y=|x|^3+6|x|^2+9|x|$. **C.** $y=\left|x^3-6x^2+9x\right|$. **D.** $y=|x|^3-6x^2+9|x|$.

Câu 13. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-2$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



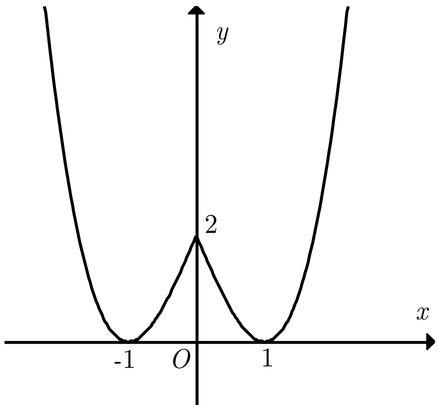
Hình 1



Hình 2

A. $y=|x|^3+3|x|^2-2$. **B.** $y=\left|x^3+3x^2-2\right|$. **C.** $y=\left||x|^3+3x^2-2\right|$. **D.** $y=-x^3-3x^2+2$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây.



(I). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

(II). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

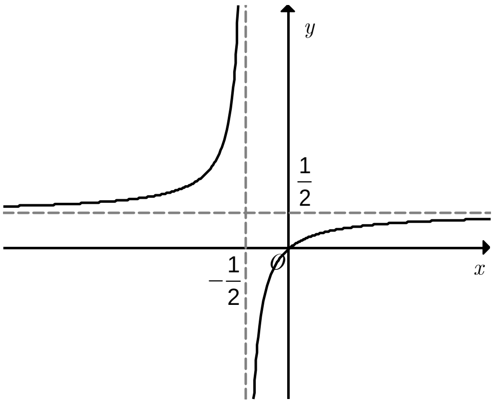
(III). Hàm số có ba điểm cực trị.

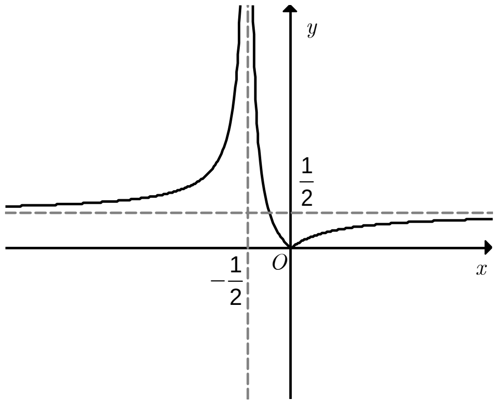
(IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.

Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

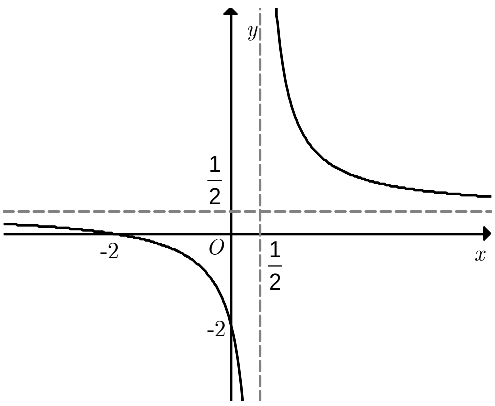


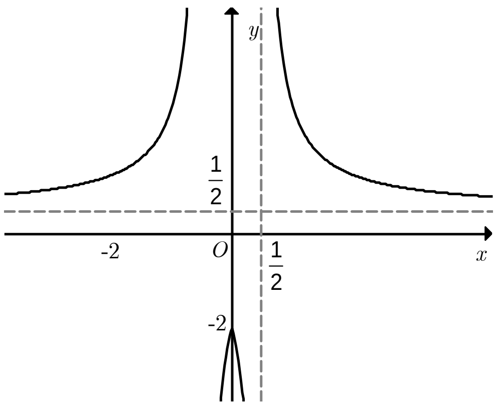


Hình 1 Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$. **B**. $y=\dfrac{|x|}{2|x|+1}$. **C**. $y=\dfrac{x}{2|x|+1}$. **D**. $y=\left|\dfrac{|x|}{2|x|+1}\right|$.

Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

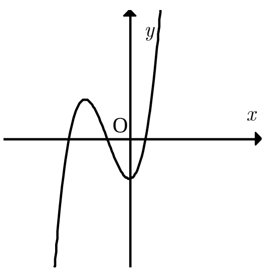


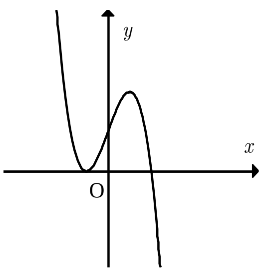


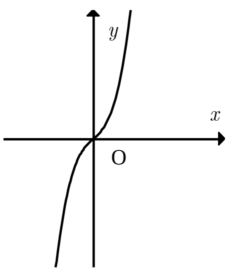
Hình 1 Hình 2

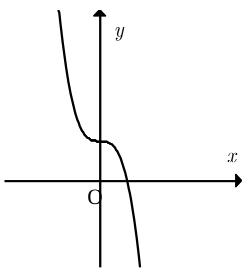
A. $y=-\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)$. **B**. $y=\dfrac{|x|+2}{2|x|-1}$. **C**. $y=\left|\dfrac{x+2}{2x-1}\right|$. **D**. $y=\dfrac{|x|+2}{2x-1}$.

Câu 16. Cho hàm số $y=x^3+bx^2+cx+d$.







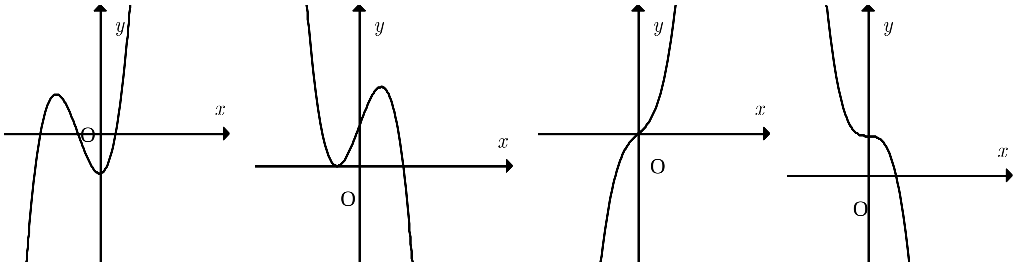


(I) **(II)** **(III)** **(IV)**

Các đồ thị nào có thể là đồ thị biểu diễn hàm số đã cho?

A. (I). **B**. (I) và (III). **C**. (II) và (IV). **D**. (III) và (IV).

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.



(I) **(II)** **(III)** **(IV)**

Trong các mệnh đề sau hãy chọn mệnh đề đúng:

A. Đồ thị (I) xảy ra khi $a<0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

B. Đồ thị (II) xảy ra khi $a\neq 0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

C. Đồ thị (III) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

D. Đồ thị (IV) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ có có nghiệm kép.

Câu 18. Cho đường cong (C) có phương trình $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Tịnh tiến (C) sang phải 2 đơn vị, ta được đường cong mới có phương trình nào sau đây?

A. $y=\sqrt{-x^2+4x+3}$. B. $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$. **C.** $y=\sqrt{1-x^2}+2$. **D.** $y=\sqrt{1-x^2}-2$.

Câu 19. Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{2x+3}$ sang phải 1 đơn vị, sau đó lên trên 5 đơn vị ta được đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y=\dfrac{11x}{2x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x-5}{2x+3}+5$. **C.** $y=\dfrac{x-3}{2x+3}+5$. **D.** $y=\dfrac{11x+22}{2x+5}$.

Câu 20. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	- 4	↗	-3	↘	- 4	↗	$+\infty$

A. $y=x^4-3x^2-3$. B. $y=-\dfrac{1}{4}x^4+3x^2-3$. C. $y=x^4-2x^2-3$. D. $y=x^4+2x^2-3$.

Câu 21. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

A. $y=x^4-3x^2+1$. B. $y=-x^4+3x^2+1$. C. $y=x^4+3x^2+1$. D. $y=-x^4-3x^2+1$.

Câu 22. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

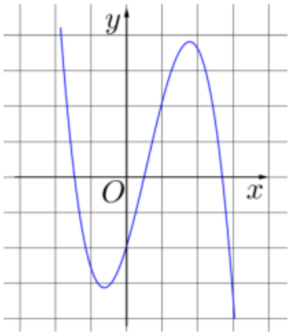
x	$-\infty$		- 1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y		↗	$+\infty$ ‖	↗	2

2 $-\infty$

A. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. B. $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$. C. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. D. $y=\dfrac{x+2}{1+x}$.

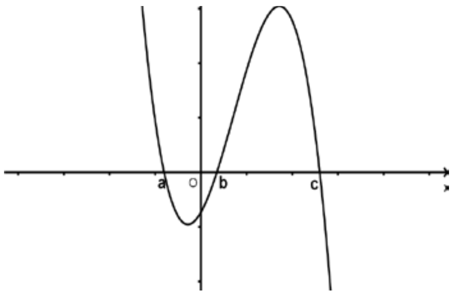
Câu 23. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.
B. $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d<0$.
C. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.
D. $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d<0$.



Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(c)>f(a)>f(b)$.
B. $f(c)>f(b)>f(a)$.
C. $f(a)>f(b)>f(c)$.
D. $f(b)>f(a)>f(c)$.



Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đường thẳng $d: y=2m-2$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có tung độ nhỏ hơn 0.

A. $m<0$. B. $m>0$ C. $m\le 0$. D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn.

IV. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D	C	D	A	B	B	B	A	D	D	C	D	B
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
B	A	B	C	B	A	C	C	A	A	A	C	

Buổi 4.

CHỦ ĐỀ 6. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA CÁC ĐỒ THỊ. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) *Cho hai đồ thị (C1): $y=f(x)$ và (C2): $y=g(x)$. Để tìm hoành độ giao điểm của (C1) và (C2) ta giải phương trình: $f(x)=g(x)$ (*) (gọi là phương trình hoành độ giao điểm).*

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của hai đồ thị.

Nghiệm x_0 của phương trình (*) chính là hoành độ giao điểm. Thay giá trị này vào một trong hai hàm số ban đầu ta được tung độ giao điểm.

Điểm $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của (C1) và (C2).

2) Các dạng bài tập thường gặp và phương pháp giải

Bài toán 1. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số

Phương pháp:

Cho 2 hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C').

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f\left(x\right)=g\left(x\right)$.

+) Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.

+) Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và (C').

Bài toán 2. Tương giao của đồ thị hàm bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\ne 0)$

Phương pháp 1: Bảng biến thiên (phương pháp đồ thị)

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F\left(x,m\right)=0$ (phương trình ẩn x tham số m)

+) Cô lập m đưa phương trình về dạng $m=f\left(x\right)$.

+) Lập BBT cho hàm số $y=f\left(x\right)$.

+) Dựa vào giả thiết và BBT từ đó suy ra m.

***) Dấu hiệu:** Sử dụng phương pháp này khi m độc lập với x.

Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2.

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm $F\left(x,m\right)=0$

+) Nhẩm nghiệm (Khử tham số): Giả sử $x=x_0$ là 1 nghiệm của phương trình.

+) Phân tích $F\left(x,m\right)=0\Leftrightarrow\left(x-x_0\right).g\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_0\\g\left(x\right)=0\end{array}\right.$ ($g\left(x\right)=0$ là phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

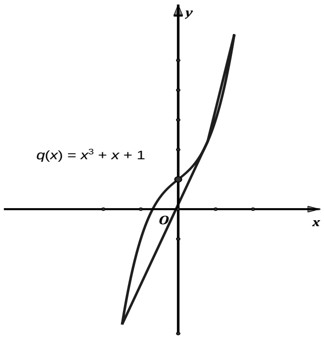
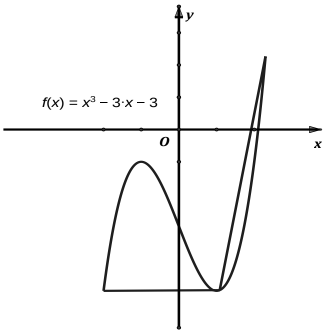
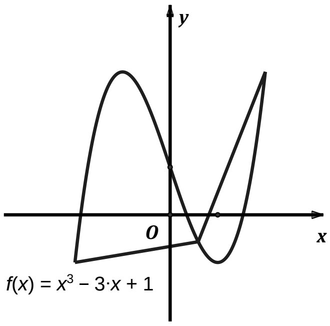
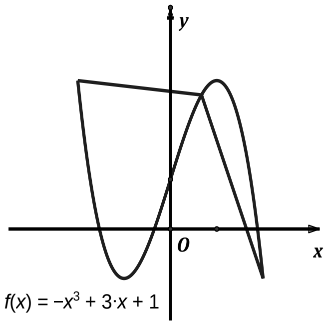
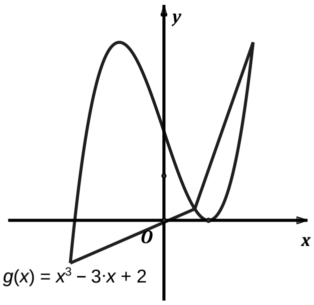
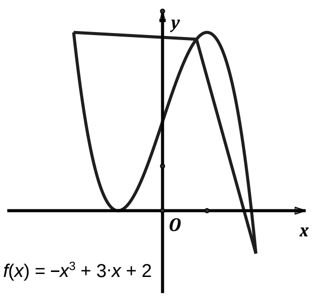
+) Dựa vào yêu cầu bài toán để xử lý phương trình bậc hai $g\left(x\right)=0$.

Phương pháp 3: Cực trị

***) Nhận dạng:** Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.

***) Quy tắc:**

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm $F\left(x,m\right)=0$ (1). Xét hàm số $y=F\left(x,m\right)$

+) Để (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm. (2TH) - Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \le 0$ - Hoặc hàm số có CĐ, CT và $y_{cd}.y_{ct}>0$ (hình vẽ)	 
+) Để (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct}<0$	 
+) Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct}=0$	 

Bài toán. Tìm m để đồ thị hàm bậc 3 cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành 1 cấp số cộng

a) Định lí Vi-ét

*) Cho bậc 2: Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thì ta có: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$

*) Cho bậc 3: Cho phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thì ta có:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}, x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}, x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

c) Tính chất của cấp số cộng

+) Cho 3 số a, b, c theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng thì: $a+c=2b$

d) Phương pháp giải toán:

+) Điều kiện cần: $x_0=-\frac{b}{3a}$ là 1 nghiệm của phương trình. Từ đó thay vào phương trình để tìm m.

+) Điều kiện đủ: Thay m tìm được vào phương trình và kiểm tra.

Bài toán 3. Tương giao của hàm phân thức

Phương pháp

Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (C) và đường thẳng $d: y=px+q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $\frac{ax+b}{cx+d}=px+q \Leftrightarrow F(x,m)=0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

*) **Các câu hỏi thường gặp**:

1. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$.

2. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn : $-\frac{d}{c}<x_1<x_2$.

3. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1<x_2<-\frac{d}{c}$.

4. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1<-\frac{d}{c}<x_2$.

5. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:

+) Đoạn thẳng $AB=k$

+) Tam giác ABC vuông.

+) Tam giác ABC có diện tích S_0.

*** Quy tắc:**

+) Tìm điều kiện tồn tại A, B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.

+) Xác định tọa độ của A và B (chú ý định lý Vi-ét)

+) Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.

***) Chú ý:** Công thức khoảng cách:

+) $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B): AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

+) $\begin{cases} M(x_0;y_0) \\ \Delta: Ax_0+By_0+C=0 \end{cases} \Rightarrow d(M,\Delta)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Bài toán 4. Tương giao của hàm bậc 4 trùng phương: $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$

NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG: $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ **(1)**

1. Nhẩm nghiệm:

- Nhẩm nghiệm: Giả sử $x=x_0$ là một nghiệm của phương trình.

- Khi đó ta phân tích: $f(x,m)=(x^2-x_0^2)g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm x_0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$

- Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc hai $g(x)=0$

2. Ẩn phụ - tam thức bậc 2:

- Đặt $t=x^2, (t\geq 0)$. Phương trình: $at^2+bt+c=0$ (2).

- Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} t_1<0=t_2 \\ t_1=t_2=0 \end{array}\right.$

- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{array}\right.$

- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$

- Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$

3. Bài toán: Tìm m để đồ thị hàm bậc bốn trùng phương (1) cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- Đặt $t = x^2, (t \ge 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).

- Để (1) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ thỏa mãn $t_2 = 9t_1$.

- Kết hợp $t_2 = 9t_1$ vơi định lý Vi – ét tìm được m.

TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài toán 1: Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số:

Cho hàm số $(C): y = f(x)$ và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại M.

- Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(x_0)$

- Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Bài toán 2: Tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước

- Gọi (Δ) là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k.

- Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn: $f'(x_0) = k$ (*) .

- Giải (*) tìm x_0. Suy ra $y_0 = f(x_0)$.

- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = k(x - x_0) + y_0$

Bài toán 3: Tiếp tuyến đi qua điểm

Cho hàm số $(C): y = f(x)$ và điểm $A(a; b)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua A.

- Gọi (Δ) là đường thẳng qua A và có hệ số góc k. Khi đó $(\Delta): y = k(x - a) + b$ (*)

- Để (Δ) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = k(x - a) + b & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

- Thay (2) vào (1) ta có phương trình ẩn x. Tìm x thay vào (2) tìm k thay vào (*) ta có phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Cách khác: Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Vì $M \in (C) \Rightarrow y_0 = f(x_0)$.

PTTT của (C) tại M có dạng: $y = y'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (1)

Tiếp tuyến đi qua $A(a; b)$ nên $b = y'(x_0)(a - x_0) + f(x_0)$

Giải phương trình với ẩn x_0, thay vào (1) ta được PTTT.

Chú ý:

1. Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) là: $k = f'(x_0)$

2. Cho đường thẳng $(d): y = k_d x + b$

+) $(\Delta)//(d) \Rightarrow k_\Delta = k_d$ +) $(\Delta)\perp(d) \Rightarrow k_\Delta.k_d = -1 \Leftrightarrow k_\Delta = -\dfrac{1}{k_d}$

+) $(\Delta, d) = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \left|\dfrac{k_\Delta - k_d}{1 + k_\Delta.k_d}\right|$ +) $(\Delta, Ox) = \alpha \Rightarrow k_\Delta = \pm\tan\alpha$

3. Tiếp tuyến tại các điểm cực trị của đồ thị (C) có phương song song hoặc trùng với trục hoành.

4. Cho hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

+) Khi $a > 0$: Tiếp tuyến tại tâm đối xứng của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

+) Khi $a < 0$: Tiếp tuyến tại tâm đối xứng của (C) có hệ số góc lớn nhất.

II. LUYỆN TẬP

Ví dụ 1. Biện luận số giao điểm của hai đồ thị hàm số sau: $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ (C) và y = m – x (d).

HD giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{x+1}{x-1} = m - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x+1 = (m-x)(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow x+1 = mx - m - x^2 + x \Leftrightarrow x^2 - mx + m + 1 = 0.$$

Biện luận:

Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 2-\sqrt{2}$ hoặc $m > 2+\sqrt{2}$ thì (C) và d có hai điểm chung.

Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2-\sqrt{2}$ hoặc $m = 2+\sqrt{2}$ thì (C) và d có một điểm chung.

Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{2} < m < 2+\sqrt{2}$ thì (C) và d không có điểm chung.

Chú ý: Nhấn mạnh cho HS tùy theo yêu cầu của bài toán để chọn phương án thích hợp vì khi đó chỉ hỏi một ý trong bài.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số (C): $y = x^3 + mx + 5$ cắt đường thẳng d: y = 6x + m tại ba điểm phân biệt.

A. $\begin{cases} m < \dfrac{21}{4} \\ m \neq 3 \end{cases}$. B. $m < \dfrac{21}{4}$. C. $m > \dfrac{21}{4}$. D. $\begin{cases} m > \dfrac{21}{4} \\ m \neq 3 \end{cases}$.

HD giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$x^3 + mx + 5 = 6x + m \ (*) \Leftrightarrow x^3 + (m-6)x + 5 - m = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 + x + m - 5\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ (1) \\ x^2 + x + m - 5 = 0 \ (2) \end{array}\right.$$

Đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 21 - 4m > 0 \\ 1^2 + 1 + m - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{21}{4} \\ m \neq 3 \end{cases}$. Chọn A.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị (C_m). Xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để (C_m) cắt đường thẳng y = - 1 tại bốn điểm phân biệt.

A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < -\dfrac{1}{3} \end{cases}$. B. $m > -\dfrac{1}{3}$. C. $m < -\dfrac{1}{3}$. D. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

HD giải. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1 \Leftrightarrow x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0 \ (1).$$

Đặt $t = x^2,\ t \geq 0$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - (3m+2)t + 3m + 1 = 0$ (2).

Đồ thị (C_m) cắt đường thẳng y = - 1 tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 > 0 \\ 3m + 1 > 0 \\ 3m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{3} \\ m > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{3} \end{cases}$. Chọn D.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+2}$. Biết đồ thị hàm số đã cho luôn cắt đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}x + m$ tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm giá trị của m sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất.

A. $m = -1$. B . $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.

HD giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x + 3 = \left(\dfrac{1}{2}x + m\right)(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 4m - 6 \ (*).$$

Ta có $\Delta' = m^2 - 1(4m - 6) = m^2 - 4m + 6 = (m-2)^2 + 2 > 0, \forall m$. Suy ra (C) luôn cắt d tại A và B với mọi m. Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Ta có $y_A = \dfrac{1}{2}x_A + m; y_B = \dfrac{1}{2}x_B + m$.

Lại có x_A, x_B là nghiệm của phương trình (*) nên $\begin{cases} x_A + x_B = -2m \\ y_A . y_B = 4m - 6 \end{cases}$.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \frac{1}{4}(x_B - x_A)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}(x_B - x_A)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}(x_A{}^2 + x_B{}^2 - 2x_A . x_B)} = \sqrt{\frac{5}{4}((x_A + x_B)^2 - 4x_A . x_B)} = \sqrt{\frac{5}{4}\left[(-2m)^2 - 4(4m - 6)\right]}$$

$$= \sqrt{5\left[(m-2)^2+2\right]} \geq \sqrt{10}.$$

Do đó, độ dài đoạn AB nhỏ nhất bằng $\sqrt{10} \Leftrightarrow m-2=0 \Leftrightarrow m=2$. Chọn C.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 \ (C_m)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A. $m=-4$. B. $m=4$. C. $m \in \left\{4; -\frac{9}{4}\right\}$. D. $m = \frac{9}{4}$.

HD giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành là:

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0 \ (1).$$

Đặt $t = x^2, \ t \geq 0$, phương trình (1) trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$ (2).

Đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{2} \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Với $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases}$ đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

Gọi $t_1 < t_2$ là hai nghiệm của (2). Khi đó (1) có bốn nghiệm $-\sqrt{t_2} < -\sqrt{t_1} < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2}$ là hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành. Các hoành độ trên lập thành cấp số cộng thì $9t_1 = t_2$ (3).

Ta cũng có t_1, t_2 là nghiệm của (2) nên $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \ (4) \\ t_1.t_2 = 2m+1 \ \ (5) \end{cases}$.

Từ (3) $\Rightarrow t_2 = 9t_1$ vào (4) và (5) ta được: $\begin{cases} 10t_1 = 2(m+1) \\ 9t_1^2 = 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{m+1}{5} \quad (6) \\ 9\left(\frac{m+1}{5}\right)^2 = 2m+1 \ (7) \end{cases}$.

Ta có (7) $\Leftrightarrow 9m^2 + 18m + 9 = 50m + 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \ (tm) \\ m = -\frac{9}{4} \ (l) \end{array}\right.$. Chọn B.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ (1). Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

A. $m\in\left(-\dfrac{1}{4};1\right)\setminus\{0\}$. B. $m\in\left(-\dfrac{1}{4};1\right)$. C. $m\in\left(-1;\dfrac{1}{4}\right)\setminus\{0\}$. D. $m\in\left(-1;\dfrac{1}{4}\right)$.

HD giải. Phương trình xác định hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là:

$$x^3-2x^2+(1-m)x+m=0\ (1).$$

$$\Leftrightarrow (x-1).(x(x-1)-m)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-x-m=0\ (2) \end{array}\right..$$

Đặt $x_3=1$. Yêu cầu bài toán sẽ được thực hiện khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq 1$ thỏa mãn điều kiện: $1^2+x_1{}^2+x_2{}^2<4\ (3)$.

Điều kiện để (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 là: $\begin{cases}\Delta=1+4m>0\\ 1^2-1-m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{1}{4} \\ m\neq 0\end{cases}\ (a)$.

Theo Viet ta có: $x_1+x_2=1, x_1x_2=-m$ nên

$$(3)\Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2<3\Leftrightarrow 1+2m<3\Leftrightarrow m<1\ (b).$$

Tổng hợp các điều kiện (a) và (b) ta được $m\in\left(-\dfrac{1}{4};1\right)\setminus\{0\}$. Chọn A.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

a) Tại điểm có hoành độ bằng – 1.

b) Tại điểm có tung độ bằng 2.

c) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 9x + 7.

d) Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{45}x$.

HD giải. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

a) Ta có $y'=3x^2-6x$. Từ $x_0=-1\Rightarrow y_0=-2$, $y'(-1)=0\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y + 2 = 9(x + 1)\Leftrightarrow y = 9x + 7.$$

b) Ta có $y'=3x^2-6x$.

Cho $y_0=2\Leftrightarrow x_0{}^3-3x_0{}^2+2=2\Leftrightarrow x_0{}^3-3x_0{}^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\ x_0=3\end{array}\right.$.

Với $x_0=0$, $y_0=2$, $y'(0)=0\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 2 = 0(x – 0) $\Leftrightarrow$ y = 2.

Với $x_0=3$, $y_0=2$, $y'(3)=9\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 2 = 9(x – 3) $\Leftrightarrow$ y = 9x – 25.

c) Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Ta có $y'=3x^2-6x$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là

$$y'(x_0)=3x_0^2-6x_0.$$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 9x + 7 nên $y'(x_0)=9\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=3\end{array}\right.$.

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-2$, $y'(-1)=0\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: y + 2 = 9(x + 1) $\Leftrightarrow$ y = 9x + 7 (l).

Với $x_0=3\Rightarrow y_0=2$, $y'(3)=9\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: y – 2 = 9(x – 3) $\Leftrightarrow$ y = 9x – 25.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y = 9x – 25.

d) Gọi M(x_0; y_0) là tiếp điểm. Ta có $y'=3x^2-6x$.

Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0)=3x_0^2-6x_0$.

Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{45}x$ nên

$$y'(x_0)=\frac{-1}{-\frac{1}{45}}=45\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=45\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=5\\x_0=-3\end{array}\right..$$

Với $x_0=5\Rightarrow y_0=52\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 52 = 45(x – 5) $\Leftrightarrow$ y = 45x – 173.

Với $x_0=-3\Rightarrow y_0=-52\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y + 52 = 45(x + 3) $\Leftrightarrow$ y = 45x + 83.

Ví dụ 8. Cho đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$. Viết các phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm I(1; 2) đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

A. $x+y-1=0$. B. $x+y-1=0$ và $x+y-5=0$.

C. $x+y+1=0$ và $x+y+5=0$. D. $x+y-5=0$.

HD giải. Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;f(x_0))\in(C)$ có phương trình

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\text{ hay }x+(x_0-1)^2y-2x_0^2+2x_0-1=0\ (*).$$

Khoảng cách từ điểm I(1; 2) đến tiếp tuyến (*) bằng $\sqrt{2}$ khi và chỉ khi

$$\frac{|2-2x_0|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow x_0=0\text{ hoặc }x_0=2.$$

Suy ra các tiếp tuyến cần tìm là: $x+y-1=0$ và $x+y-5=0$. Chọn B.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ (C). Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị (C) để tiếp tuyến của (C) tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích hệ số góc bằng -9.

A. M(0; 3) và M(2; 5). B. M(0; 3) và M(-2; 5).

C. M(0; -3) và M(-2; 5). D. M(0; -3) và M(2; 5).

HD giải. Ta có I(-1; 2). Gọi $M \in (C) \Rightarrow M(x_0; 2 - \frac{3}{x_0+1}) \Rightarrow k_{IM} = \frac{y_M - y_I}{x_M - x_I} = \frac{-3}{(x_0+1)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M: $k_M = y'(x_0) = \frac{3}{(x_0+1)^2}$.

$ycbt \Leftrightarrow k_M . k_{IM} = -9 \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0+1)^2} . \frac{-3}{(x_0+1)^2} = -9 \Leftrightarrow$ x_0 = 0; x_0 = -2.

Suy ra có 2 điểm M thỏa mãn: M(0; -3) và M(-2; 5). Chọn C.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 4x$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số và trục *Ox*.

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 2. Tìm số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$.

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 3. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN.

A. $-\frac{5}{2}$. B. 1. C. 2. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 4 (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017). Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; ký hiệu $(x_0; y_0)$ là toạ độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0 = 4$. B. $y_0 = 0$. C. $y_0 = 2$. D. $y_0 = -1$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $-3 < m < 1$. B. $-3 \le m \le 1$. C. *m>1.* D. *m<- 3.*

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại 3 điểm phân biệt.

A. *m>4.* B. $0 \le m < 4$. C. $0 < m \le 4$. D. $0 < m < 4$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m$ không cắt đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 + 2$.

A. $0 < m < 4$. B. *m>4.* C. *m<0.* D. *m=0; m=4.*

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. *m<-2.* B. *m>2.* C. $-2 < m < 2$. D. *m = -2.*

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để phương trình $x^2 \left|x^2 - 2\right| = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

A. $0 < m < 1$. B. $m > 0$. C. $m \le 1$. D. $m = 0$.

Câu 10. Cho đường cong $(C): y=\dfrac{3x-1}{x-2}$. Có bao nhiêu điểm trên đồ thị (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 đường tiệm cận của (C) bằng 6?

A. 4. B. 2. C. 0. D. 6.

Câu 11. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m+2$ có đồ thị (C). Gọi (Δ) là tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm thuộc (C) có hoành độ bằng 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để (Δ) vuông góc với đường thẳng $(d): y=\dfrac{1}{4}x-2016$.

A. $m=-1$. B. $m=0$. C. $m=1$. D. $m=2$.

Câu 12. Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$ với trục Oy. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị trên tại điểm M.

A. $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$. B. $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$. C. $y=-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$. D. $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

Câu 13. Tìm số các tiếp tuyến đi qua gốc toạ độ *O* của đồ thị $(C): y=x^4-2x^2$.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 14. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ (C). Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến đó cắt các trục *Ox, Oy* lần lượt tại các điểm *A, B* thoả mãn $OA=4OB$.

A. $k=-\dfrac{1}{4}$. B. $k=\dfrac{1}{4}$. C. $k=-1$. D. $k=1$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=6x+m$ là tiếp tuyến của đường cong $y=x^3+3x-1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Câu 16. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+3x^2-2$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=-9$.

A. $y-16=-9(x-3)$. B. $y+16=-9(x+3)$ C. $y-16=-9(x+3)$. D. $y=-9x-27$.

Câu 17. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các điểm M trên đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ hai điểm $A(2;4)$ và $B(-4;-2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là bằng nhau.

A. $M(0;1)$. B. $M\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ và $M\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$.

C. $M\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. D. $M(0;1), M(-2;3)$ và $M\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 18. Tìm hệ số góc nhỏ nhất của các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

A. -3. B. 3. C. -4. D. 0.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để qua điểm $M(2;\ m)$ kẻ được ba tiếp tuyến phân biệt đến đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

A. $m \in (4;\ 5)$. B. $m \in (-2;\ 3)$. C. $m \in (-5; -4)$. D. $m \in (-5;\ 4)$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = mx - 2m - 4$ cắt đồ thị $(C): y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $m > -3$. B. $m < 1$. C. $m < -3$. D. $m > 1$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị $(C): y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

A. $m = 1; m = -7$. B. $m = 1; m = 2$. C. $m = -7; m = 5$. D. $m = 1; m = -1$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2(x^2 - 2) + 3 = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

A. $m < 3$. B. $m > 3$. C. $m > 3$. D. $m > 3$ hoặc $m = 2$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| = \sqrt{5}$.

A. $m \in \{-3; 1\}$. B. $m \in \{-2; -1\}$. C. $m \in \{0; 2\}$. D. $m = 3$.

Câu 24. Gọi $M \in (C): y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Tính diện tích S của tam giác OAB.

A. $S = \dfrac{121}{6}$. B. $S = \dfrac{119}{6}$. C. $S = \dfrac{123}{6}$. D. $S = \dfrac{125}{6}$.

Câu 25. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (C) và đường thẳng $d_m: y = x + m$. Tìm giá trị của tham số m để (C) cắt d_m tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB vuông tại O.

A. $m = \dfrac{1}{3}$. B. $m = \dfrac{4}{3}$. C. $m = \dfrac{2}{3}$. D. $m = -\dfrac{1}{3}$.

IV. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
C	D	B	C	A	D	B	C	A	A	C	A	
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	B	A	C	D	A	C	A	A	D	C	A	C

ĐỀ LUYỆN TẬP TỔNG HỢP CHUYÊN ĐỀ

MA TRẬN ĐỀ
(Chuyên đề hàm số)

1. Ma trận

Cấp độ / Chủ đề	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng		Cộng
			Cấp độ thấp	Cấp độ cao	
Tính đơn điệu của hàm số	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 4 Số điểm: 1,6 (16%)
Cực trị của hàm số	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 2 Số điểm: 0,8	Số câu: 1 Số điểm: 0,4		Số câu: 4 Số điểm: 1,6 (16%)
Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4		Số câu: 3 Số điểm: 1,2 (12%)
Đường tiệm cận của đồ thị hàm số	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4		Số câu: 3 Số điểm: 1,2 (12%)
Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 2 Số điểm: 0,8	Số câu: 1 Số điểm: 0,4		Số câu: 4 Số điểm: 1,6 (16%)
Một số bài toán thường gặp về đồ thị		Số câu: 3 Số điểm: 1,2	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 5 Số điểm: 2,0 (20%)
Ứng dụng thực tế			Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 1 Số điểm: 0,4	Số câu: 2 Số điểm: 0,8 (8%)
Tổng	Số câu: 5 Số điểm: 2,0 (20%)	Số câu: 10 Số điểm: 4,0 (40%)	Số câu: 7 Số điểm: 2,8 (28%)	Số câu: 3 Số điểm: 1,2 (12%)	Số câu: 25 Số điểm: 10 (100%)

2. Các chuẩn đánh giá

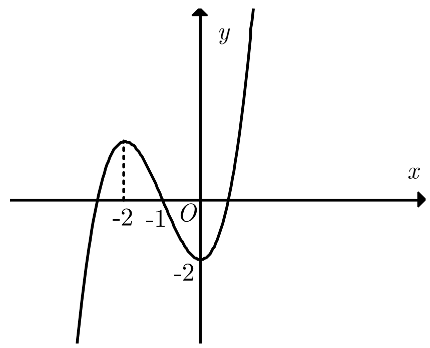
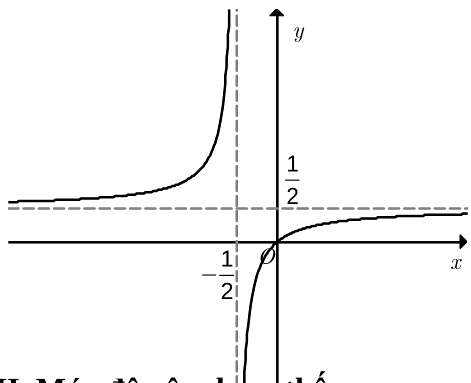
Chủ đề	Chuẩn đánh giá
Tính đơn điệu của hàm số	**I. Mức độ nhận biết:** - Nhớ được điều kiện để hàm số đồng biến, nghịch biến trên một khoảng. - Biết mối liên hệ giữa tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số và dấu của đạo hàm cấp một của nó. - Nhận dạng được bảng biến thiên của một số hàm số đơn giản. **Ví dụ.** Phát biểu nào sau đây là đúng? **A**. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(a;b\right)$ khi và chỉ khi

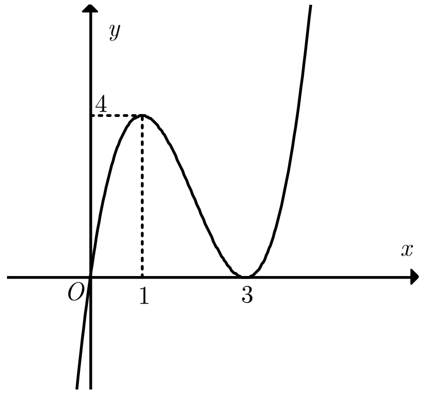
	$f^{'}(x) \le 0, \forall x \in (a;b)$. **B**. Nếu $f^{'}(x) \le 0, \forall x \in (a;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$. **C**. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f^{'}(x) < 0, \forall x \in (a;b)$. **D**. Nếu $f^{'}(x) < 0, \forall x \in (a;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$. **II. Mức độ thông hiểu** - Biết xét tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu đạo hàm cấp một của nó. **Ví dụ**: Chỉ ra khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ trong các khoảng dưới đây: **A**. $(-1;3)$. **B**. $(-\infty;-3)$ hoặc $(1;+\infty)$. **C**. $\mathbb{R}$. **D**. $(-\infty;-1)$ hoặc $(3;+\infty)$. **III. Mức độ vận dụng thấp** -Vận dụng khái niệm, điều kiện hàm số đồng biến, nghịch biến tìm điều kiện của tham số để hàm số thường gặp đơn điệu trên một khoảng. **Ví dụ:** Hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ khi và chỉ khi: **A**. $m > 2$. **B**. $m \ge 1$. **C**. $m \ge 2$. **D**. $m > 1$. **IV. Mức độ vận dụng cao** -Vận dụng khái niệm, điều kiện hàm số đồng biến, nghịch biến kết hợp phương pháp đổi biến tìm điều kiện của tham số để hàm số đơn điệu trên một khoảng. **Ví dụ:**Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$. **A.** $m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$. **B.** $m \le 0$. **C.** $1 \le m < 2$. **D.** $m \ge 2$.
Cực trị của hàm số	**I. Mức độ nhận biết:** -Nhớ các khái niệm: Điểm cực đại, điểm cực tiểu, điểm cực trị của hàm số. -Nhớ các điều kiện đủ để có các điểm cực trị của hàm số. - Từ bảng biến thiên nhận dạng được các điểm cực trị của hàm số, của đồ thị hàm số. **Ví dụ.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

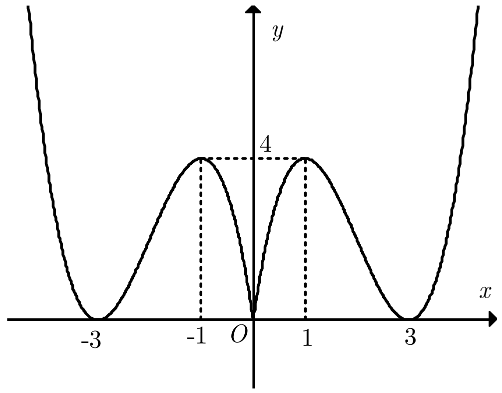
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
$$\begin{array}{c|ccccccc}
x & -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline
y' & & + & \| & - & 0 & + & \\ \hline
y & -\infty & \nearrow & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & +\infty
\end{array}$$

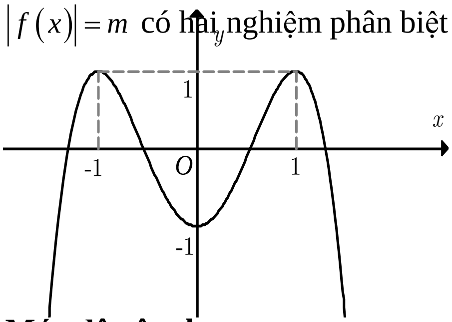
Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?
A. Hàm số có đúng một cực trị.
B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.
D. Hàm số đạt cực đại tại x=0 và đạt cực tiểu tại x=1.
II. Mức độ thông hiểu
- Tìm được điểm cực trị của hàm số, giá trị cực trị của hàm số và cực trị của đồ thị hàm số.
- Tìm điều kiện của tham số sao cho hàm bậc ba có hai cực trị, không có cực trị.
- Tìm điều kiện của tham số sao cho hàm bậc bốn có ba cực trị, một cực trị.
Ví dụ: Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có hai điểm cực trị là:
A. (0;0) hoặc (1;-2). B. (0;0) hoặc (2;4).
C. (0;0) hoặc (2;-4). D. (0;0) hoặc (-2;-4).
III. Mức độ vận dụng thấp
Vận dụng khái niệm, điều kiện hàm số có cực trị tìm điều kiện của tham số để hàm số có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.
Ví dụ: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho độ dài $AB = \sqrt{2}$.
A. m=0. B. m=0 hoặc m=2. C. m=1. D. m=2.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số</td>
<td>
I. Mức độ nhận biết:
-Nhớ các khái niệm giá trị lớn, giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên một tập hợp số.
-Từ bảng biến thiên nhận dạng được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất(nếu có) của hàm số trên một tập hợp số.
- Từ tính chất đơn điệu của hàm số trên một đoạn, nhận dạng được GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn đó.
Ví dụ: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 + 5x + 7$ trên đoạn $[-5;0]$ là
A. 7. B. -143. C. 6. D. 8
II. Mức độ thông hiểu
Tìm được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất(nếu có) của hàm số trên một tập hợp số..
Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.
</td>
</tr>
</table>

	A. $\min\limits_{[2;4]} y = 6$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} y = -2$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} y = -3$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$. **III. Mức độ vận dụng thấp** Vận dụng khái niệm giá trị lớn, giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên một tập hợp số tìm giá trị của tham số để hàm số có GTLN, GTNN thỏa mãn điều kiện nào đó. **Ví dụ:** Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2? **A.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.
Đường tiệm cận của đồ thị hàm số	**I. Mức độ nhận biết:** -Nhớ được khái niệm đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. - Nhận dạng được tiệm cận của đồ thị của hàm số khi biết một số giới hạn. - Nhận biết được số tiệm cận của một số đồ thị hàm số đơn giản. **Ví dụ:** Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ? **A.** Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang. **B.** Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang. **C.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=2$ và $y=-2$ **D.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=2$ và $x=-2$. **II. Mức độ thông hiểu** Tìm được tiệm cận của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn từ đó suy ra số tiệm cận của đồ thị hàm số. **Ví dụ**: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x-1}$ có: **A**. Tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận xiên $y=x$. **B**. Tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận xiên $y=x$. **C**. Tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận xiên $y=-x$. **D**. Kết quả khác. **III. Mức độ vận dụng thấp** Vận dụng khái niệm tiệm cận của đồ thị hàm số tìm giá trị của tham số để đồ thị hàm số có tiệm cận. **Ví dụ:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{\sqrt{mx^2+2}}$ có hai tiệm cận ngang. **A.** Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài. **B.** $m<0$. **C.** $m=0$. **D.** $m>0$.
Khảo sát sự biến	**I. Mức độ nhận biết:**

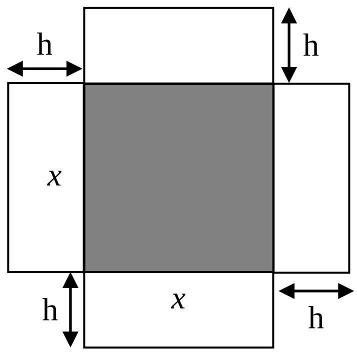
thiên và vẽ đồ thị hàm số	- Nhận dạng được đồ thị của một số hàm thường gặp qua một số đặc điểm đặc trưng của đồ thị từng loại hàm khi cho biết nhiều loại hàm. **Ví dụ:** Đồ thị sau đây là của hàm số nào?  **A.** $y=-x^2-3x-2$. **B.** $y=x^3+3x^2-2$. **C.** $y=x^4-3x^2-2$. **D.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **II. Mức độ thông hiểu** Nhận dạng được đồ thị của một số hàm thường gặp qua một số dấu hiệu như nhánh vô cực, điểm trên đồ thị, tính đơn điệu, cực trị, tiệm cận khi cho biết một số hàm cùng loại… - Từ đồ thị, biện luận theo tham số số nghiệm của phương trình. **Ví dụ:** Đồ thị sau đây là của hàm số nào?  **A.** $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+3}{2x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x}{2x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$. **III. Mức độ vận dụng thấp** Từ đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ tìm được đồ thị các hàm chứa dấu trị tuyệt đối liên quan. **Ví dụ**: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

<table>
<tr>
<td></td>
<td>




Hình 1 Hình 2
A. $y=-x^3+6x^2-9x.$ B. $y=\left|x\right|^3+6\left|x\right|^2+9\left|x\right|.$
C. $y=\left|x^3-6x^2+9x\right|$ D. $y=\left|x\right|^3-6x^2+9\left|x\right|.$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Một số bài toán thường gặp về đồ thị</td>
<td>
I. Mức độ thông hiểu
- Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm thuộc đồ thị hàm số.
- Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại tiếp điểm.
Ví dụ: Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ. Giá trị m để phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m$ có hai nghiệm phân biệt là:


A. $m>1$.
B. $m=1$.
C. $m<-1$.
D. $m=-1$.
II. Mức độ vận dụng :
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết điều kiện về hệ số góc hoặc đi qua một điểm.
-Vận dụng kiến thức về sự tương giao của hai đồ thị và kiến thức về phương trình tìm điều kiện của tham sao giao điểm của hai đồ thị thỏa mãn điều kiện cho trước.
Ví dụ 1:
</td>
</tr>
</table>

	Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương. **A**. $0 < m < 1$. **B**. $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 5 \end{array}\right.$. **C**. $1 < m < \dfrac{3}{2}$. **D**. $0 < m < \dfrac{1}{3}$. **Ví dụ 2:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất. **A**. $m = -3$. **B**. $m = -1$. **C**. $m = 3$. **D**. $m = 1$.
Ứng dụng thực tế	Giải quyết một số bài toán ứng dụng thực tế liên qua tới nhiều kiến thức tổng hợp như đạo hàm, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhât, diện tích, thể tích,.. **Ví dụ ở mức độ vận dụng thấp:** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ (kết quả khảo sát được trong tháng 8 vừa qua). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ: **A**. 12. **B**. 30. **C**. 20. **D**. 15. **Ví dụ ở mức độ vận dụng cao:** Một bác thợ gò hàn muốn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật (không nắp) bằng tôn thể tích $62,5\,dm^3$. Chiếc thùng này có đáy là hình vuông cạnh $x(dm)$, chiều cao $h(dm)$. Để làm chiếc thùng, bác thợ phải cắt một miếng tôn như hình vẽ. Tìm x để bác thợ sử dụng ít nguyên liệu nhất. **A.** $7(dm)$ **B.** $6(dm)$ **C.** $4(dm)$ **D.** $5(dm)$ 

ĐỀ LUYỆN TẬP TỔNG HỢP CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ

Các câu hỏi sau chỉ có 1 phương án trả lời đúng. Hãy khoanh tròn vào phương án trả lời đúng đó.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 2: Tìm đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

A. $x = 2; y = 1$. **B.** $x = 1; x = 2$. **C.** $x = 1; y = 2$. **D.** $x = 1; y = 1$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + m = 0$ có 2 nghiệm.

A. $m = 4$. **B.** $m < 0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m = 4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m = 4 \end{array}\right.$.

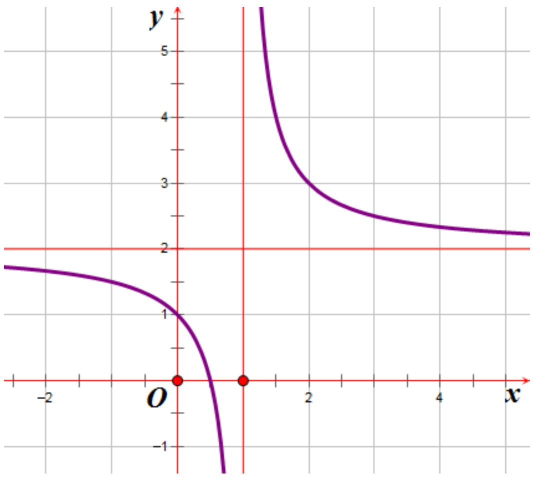
Câu 4: Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$.

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **C.** $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có các điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Câu 6: Xác định hàm số có đồ thị sau



A. $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{x+1}{x-2}$. **D.** $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

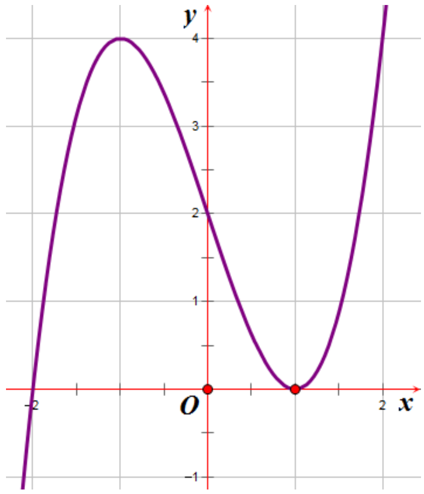
Câu 7: Tìm điểm cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

A. $x = 1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -2$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x - m^2 + 2m}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

A. $1 \le m < 3$. **B.** $0 \le m \le 3$. **C.** $1 < m \le 3$. **D.** $0 < m < 3$.

Câu 9: Xác định hàm số có đồ thị sau



A. $y = x^3 + 3x^2 + 2.$ **B.** $y = x^3 + 3x + 2.$

C. $y = x^3 - 3x + 2.$ **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 2.$

Câu 10: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$.

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 11: Cho đồ thị (C) có phương trình $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Tịnh tiến đồ thị (C) theo vectơ $\vec{v} = (2;1)$ ta được đồ thị (C’). Tìm phương trình của đồ thị (C’).

A. $y = \dfrac{3x-6}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{3x-5}{x+1}$. **C.** $y = \dfrac{3x-5}{x-1}$. **D.** $y = \dfrac{3x+5}{x-1}$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d): $y = x + m$ cắt đồ thị (C): $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn AB ngắn nhất.

A. $m = -1.$ **B.** $m = 1.$ **C.** $m = 0.$ **D.** $m = 2.$

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để một tiếp tuyến bất kì của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2mx+3}{x-m}$ (C) tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng 10.

A. $m = 2.$ **B.** $m = \pm 1.$ **C.** $m = 0.$ **D.** $m = \pm 2.$

Câu 14: Một công ty sữa cần làm hộp sữa hình trụ, có thể tích 0,2 (lít). Tính bán kính đáy hộp để công ty tốn ít nguyên liệu làm hộp nhất.

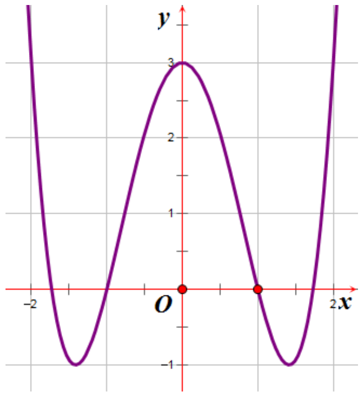
A. $\sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}$ (cm). **B.** $\sqrt[3]{\dfrac{150}{\pi}}$ (dm). **C.** $\sqrt[3]{\dfrac{250}{\pi}}$ (dm). **D.** $\sqrt[3]{\dfrac{100}{\pi}}$ (cm).

Câu 15: Tìm hàm số không có cực trị trong các hàm số cho dưới đây.

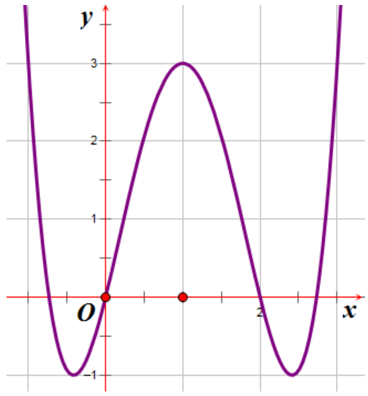
A. $y = x^3 - 3x + 2.$ **B.** $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2.$ **D.** $y = x^4 - x^2 + 1.$

Câu 16: Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ có đồ thị (H1) như hình vẽ. Tìm hàm số có đồ thị (H2) trong các hàm số cho dưới đây.



(H1)



(H2)

A. $y=(x-1)^4-4(x-1)^2+3.$ **B.** $y=x^4-4x^2+2.$

C. $y=(x+1)^4-4(x+1)^2+3.$ **D.** $y=x^4-4x^2+4.$

Câu 17: Cho $y\geq 0; x^2+x+y=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $P=4x+y-xy+2.$

A. $m=6$ và $M=10.$ **B.** $m=-10$ và $M=6.$

C. $m=-6$ và $M=10.$ **D.** $m=-10$ và $M=10.$

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị của tham số m thì hàm số $y=x^3-3x^2-\left(m^2-m-2\right)x+9$ đồng biến trên khoảng $(-1;0).$

A. $-1<m<2.$ **B.** $-1\leq m\leq 2.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m\leq -1 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Câu 19: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}$ biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B sao cho $OB=2OA$ (O là gốc tọa độ).

A. $\left[\begin{array}{l} y=2x-3 \\ y=2x+3 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=2x+1 \\ y=2x-\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-2x-3 \\ y=-2x+3 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-2x+1 \\ y=-2x-\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4-2m^2x^2+3m+2$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1.$

A. $m=0.$ **B.** $m=\pm 1.$ **C.** $m=2.$ **D.** $m=-2.$

Câu 21: Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) : $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+10$ (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

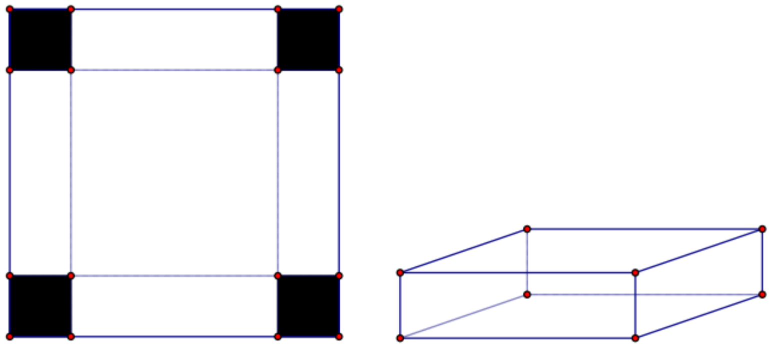
A. $m=1.$ **B.** $m=-1.$ **C.** $m=-2.$ **D.** $m=0.$

Câu 23: Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y=x^4-2x^2+3$.

A. $(-\infty;-1)$ và $(0;1).$ **B.** $\mathbb{R}.$

C. $(-\infty;-1)\cup(0;1).$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{(-1;0)\cup(1;+\infty)\}.$

Câu 24: Từ một tấm tôn hình vuông cạnh 15(cm) người ta cắt ở mỗi góc tấm tôn một hình vuông nhỏ rồi gò thành một cái hộp (hình hộp chữ nhật) không có nắp như hình vẽ dưới đây. Tìm thể tích lớn nhất của hộp.



A. $400(cm^3)$. **B.** $300(cm^3)$. **C.** $250(cm^3)$. **D.** $200(cm^3)$.

Câu 25: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $\left[0; \sqrt{5}\right]$.

A. $M = 0$. **B.** $M = 9$. **C.** $M = 3$. **D.** $M = 8$.

------------- HẾT ----------

ĐÁP ÁN

Câu 1	D	**Câu 6**	A	**Câu 11**	A	**Câu 16**	A	**Câu 21**	D
Câu 2	C	**Câu 7**	B	**Câu 12**	B	**Câu 17**	D	**Câu 22**	D
Câu 3	D	**Câu 8**	A	**Câu 13**	B	**Câu 18**	B	**Câu 23**	A
Câu 4	C	**Câu 9**	C	**Câu 14**	D	**Câu 19**	B	**Câu 24**	C
Câu 5	C	**Câu 10**	A	**Câu 15**	C	**Câu 20**	B	**Câu 25**	D

Tên các trường thực hiện Chuyên đề Hàm số:

1) **Trường THPT Chuyên Tuyên Quang**
2) **Trường THPT Yên Hoa**
3) **Trường THPT Hòa Phú**

CHUYÊN ĐỀ II:
HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

Chủ đề 2.1:Lũy thừa, mũ, logarit

A. Kiến thức cơ bản

I. Lũy thừa

1. Định nghĩa lũy thừa

Số mũ α	**Cơ số a**	**Lũy Thừa a^{α}**
$\alpha = n \in N^*$	$a \in R$	$a^{\alpha} = a^n = a.a......a$ (n thừa số a)
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^{\alpha} = a^0 = 1$
$\alpha = -n(n \in N^*)$	$a \neq 0$	$a^{\alpha} = a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
$\alpha = \dfrac{m}{n}(m \in Z, n \in N^*)$	$a > 0$	$a^{\alpha} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a)$
$\alpha = \lim r_n$ $(r_n \in Q, n \in N^*)$	$a > 0$	$a^{\alpha} = \lim a^{r_n}$

2. Tính chất của lũy thừa

- với mọi a > 0, b > 0 ta có :

$$a^{\alpha}.a^{\beta} = a^{\alpha+\beta} \quad ; \quad \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta} \quad ; \quad (a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha.\beta}\ ; \quad (ab)^{\alpha} = a^{\alpha}.b^{\alpha} \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$$

- a > 1 : $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha > \beta$; 0 < a < 1 : $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta$
- Với 0 < a < b ta có :

$$a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0\ ; \qquad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$$

Chú ý: *+ Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0*
+ Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương

3. Định nghĩa và tính chất của căn bậc n

- Căn bậc n ($n \in N^*$,) của a là số b sao cho $b^n = a$.
- nếu n là số nguyên dương lẻ thì $\sqrt[n]{a}$ xác định $\forall a$, nếu n là số nguyên dương chẵn thì $\sqrt[n]{a}$ xác định $\forall a \geq 0$
- n là số nguyên dương lẻ $\sqrt[n]{a^n} = a \ \ \forall a$, n là số nguyên dương chẵn $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \left[\begin{array}{l} a \ \ \forall a \geq 0 \\ -a \ \ \forall a<0 \end{array}\right.$
- Với $a, b \geq 0, m, n \in N^*, p, q \in Z$ ta có :

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}(b>0)$; $\sqrt[n]{a^p}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^p\ (a>0)$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

- Nếu n là số nguyên dương lẻ và $a < b$ thì $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

  Nếu n là số nguyên dương chẵn và $0 < a < b$ thì $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

II. LÔGARIT

1.Định nghĩa

- Với $a > 0, a \neq 1, b > 0$ *ta có :* $\log_a b=\alpha \Leftrightarrow a^{\alpha}=b$

chú ý : $\log_a b$ *có nghĩa khi* $\begin{cases} a>0, a\neq 1 \\ b>0 \end{cases}$

- Loogarit thập phân : $\boxed{\lg b=\log b=\log_{10} b}$

- Loogarit tự nhiên (logarit Nepe): $\boxed{\ln b=\log_e b}$ (vôùi $e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx 2{,}718281$)

2. Tính chất

- $\log_a 1=0$; $\log_a a=1$; $\log_a a^b=b$; $a^{\log_a b}=b\ (b>0)$

- Cho $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$. Khi đó :

  + Nếu $a > 1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b>c$

  + Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b<c$

3. Các qui tắc tính logarit

Với $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$, ta có :

- $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ • $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$ • $\log_a b^{\alpha}=\alpha\log_a b$

4. Đổi cơ số

Với $a, b, c > 0$ và $a, b \neq 1$, ta có :

- $\log_b c=\frac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b.\log_b c=\log_a c$

- $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ • $\log_{a^{\alpha}} c=\frac{1}{\alpha}\log_a c\ (\alpha\neq 0)$

B. Kĩ năng cơ bản:

- Tìm điều kiện và rút gọn biểu thức
- Đưa biểu thức về dạng lũy thừa
- So sánh lũy thừa
- Tính giá trị biểu thức logarit theo các biểu thức đã cho
- Chứng minh đẳng thức

C. Bài tập luyện tập

Bài 1 Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa

a) $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}$, $(x>0)$ b) $\sqrt[5]{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$, $(a,b\neq 0)$ c) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

Bài 2 Tìm điều kiện và rút gọn các biểu thức sau

a) $\dfrac{\dfrac{a^{1,5}+b^{1,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}-a^{0,5}b^{0,5}}{a-b}+\dfrac{2b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$ b) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right).\dfrac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\dfrac{2y}{x-y}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$ (a,b>0 , a $\neq$ b)

Bài 3 So sánh m và n

a) $\left(\sqrt{2}\right)^m>\left(\sqrt{2}\right)^n$ b) $\left(\frac{1}{9}\right)^m>\left(\frac{1}{9}\right)^n$

Bài 4 Tìm điều kiện của a và x biết

a) $(a-1)^{-\frac{2}{3}}<(a-1)^{-\frac{1}{3}}$ b) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-0,2}>a^2$

c) $4^x=\sqrt[5]{1024}$ d) $\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}=\frac{8}{125}$

e) $0,1^x>100$ f) $\left(\frac{1}{5}\right)^x>\sqrt[3]{0,04}$

Bài 5. Rút gọn biểu thức :

a) $\log_a\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ (a > 0)   b) $\dfrac{\log_{a^3}a.\log_{a^4}a^{1/3}}{\log_{\frac{1}{a}}a^7}$ **(** $0<a\neq 1$**)**

Bài 6: Tính giá trị biểu thức logarit theo các biểu thức đã cho :

a) Cho $\log_2 14=a$. Tính $\log_{49}32$ theo *a*.

b) Cho $\log_{15}3=a$. Tính $\log_{25}15$ theo *a*.

a) Cho $\log_{25}7 = a$; $\log_2 5 = b$. Tính $\log_{\sqrt[3]{5}}\frac{49}{8}$ theo *a, b.*

b) Cho $\log_{30}3 = a$; $\log_{30}5 = b$. Tính $\log_{30}1350$ theo *a, b.*

Bài 7: Chứng minh các biểu thức sau (với giả thuyết các biểu thức đều có nghĩa) :

a) $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$ b) $\log_{ax}(bx) = \frac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_a x}$

c) $\log_c \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_c a + \log_c b)$, với $a^2 + b^2 = 7ab$.

D. Bài tập TNKQ

Câu 1: Cho a > 0 và a ≠ 1. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

A. $\log_a x$ có nghĩa $\forall x$ B. $\log_a 1 = a$ và $\log_a a = 0$

C. $\log_a xy = \log_a x.\log_a y$ **D.** $\log_a x^n = n\log_a x$ $(x > 0, n \neq 0)$

Câu 2: Cho a > 0 và a ≠ 1, x và y là hai số dương . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

A. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$ B. $\log_a \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_a x}$

C. $\log_a (x+y) = \log_a x + \log_a y$ **D.** $\log_b x = \log_b a.\log_a x$

Câu 3: $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a^7}$ (a > 0, a ≠ 1) bằng :

A. $-\frac{7}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. 4

câu 4 : $\log_a\left(\frac{a^2\sqrt[3]{a^2}\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}}\right)$ bằng :

A. 3 B. $\frac{12}{5}$ C. $\frac{9}{5}$ D. 2

Câu 5: $a^{3-2\log_a b}$ (a > 0, a ≠ 1, b > 0) bằng :

A. a^3b^{-2} B. a^3b C. a^2b^3 D. ab^2

Câu 6 : Nếu $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a 9 - \log_a 5 + \log_a 2$ (a > 0, a ≠ 1) thì x bằng :

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{6}{5}$ D. 3

Câu 7: Nếu $\log_2 x = 5\log_2 a + 4\log_2 b$ (a, b > 0) thì x bằng :

A. a^5b^4 B. a^4b^5 C. 5a + 4b D. 4a + 5b

Câu 8 : nếu $\log_7 x = 8\log_7 ab^2 - 2\log_7 a^3b$ (a, b > 0) thì x bằng :

A. a^4b^6 **B.** a^2b^{14} C. a^6b^{12} D. a^8b^{14}

Câu 9: Cho log2 = a. Tính log25 theo a?

A. 2 + a B. 2(2 + 3a) **C.** 2(1 - a) D. 3(5 - 2a)

Câu 10 : Cho $\log_2 5 = a$; $\log_3 5 = b$. Khi đó $\log_6 5$ tính theo a và b là :

A. $\frac{1}{a+b}$ **B.** $\frac{ab}{a+b}$ C. a + b D. $a^2 + b^2$

Câu 11 : Cho hai số thực dương a và b, với $a \neq 1$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng ?

A. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b.$ B. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4}\log_a b.$

C. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b.$ **D.** $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b.$

Câu 12. Cho $\log 2 = a$. Tính $\log\sqrt[4]{\frac{32}{5}}$ theo a, ta được:

A. $\frac{1}{4}\left(a^6 - 1\right)$. B. $\frac{1}{4}(5a - 1)$. **C.** $\frac{1}{4}(6a - 1)$. D. $\frac{1}{4}(6a + 1)$.

Câu 13. Rút gọn biểu thức $P = 3^{2\log_3 a} - \log_5 a^2.\log_a 25$ $(0 < a \neq 1)$, ta được:

A. $P = a^2 + 4$. **B.** $P = a^2 - 2$. **C.** $P = a^2 - 4$. **D.** $P = a^2 + 2$.

Câu 14: Cho a là một số dương, biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ viết dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỷ là:

A. $a^{\frac{7}{6}}$ B. $a^{\frac{5}{6}}$ C. $a^{\frac{6}{5}}$ D. $a^{\frac{11}{6}}$

Câu 15: Biểu thức $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a^2}$ viết dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỷ là:

A. $a^{\frac{5}{3}}$ **B.** $a^{\frac{2}{3}}$ C. $a^{\frac{5}{8}}$ D. $a^{\frac{7}{3}}$

Câu 16: Biểu thức $\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}.\sqrt[6]{x^5}$ (x > 0) viết dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỷ là:

A. $x^{\frac{7}{3}}$ B. $x^{\frac{5}{2}}$ C. $x^{\frac{2}{3}}$ **D.** $x^{\frac{5}{3}}$

Câu17: Trong các phương trình sau đây, phương trình nào có nghiệm?

A. $x^{\frac{1}{6}} + 1 = 0$ B. $\sqrt{x-4} + 5 = 0$ C. $x^{\frac{1}{5}} + (x-1)^{\frac{1}{6}} = 0$ **D.** $x^{\frac{1}{4}} - 1 = 0$

Câu18: Cho K = $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right)^{-1}$. biểu thức rút gọn của K là:

A. x B. 2x C. x + 1 D. x - 1

Câu19: Rút gọn biểu thức: $\sqrt{81a^4b^2}$, ta được:

A. $9a^2b$ B. $-9a^2b$ **C.** $9a^2|b|$ D. Kết quả khác

Câu20: Rút gọn biểu thức: $\sqrt[4]{x^8(x+1)^4}$, ta được:

A. $x^4(x + 1)$ **B.** $x^2|x+1|$ C. $-x^4(x+1)^2$ D. $|x(x+1)|$

Câu21: Nếu $\frac{1}{2}\left(a^\alpha + a^{-\alpha}\right) = 1$ thì giá trị của α là:

A. 3 **B.** 2 C. 1 D. 0

Câu22: Cho $3^{|\alpha|} < 27$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $-3 < \alpha < 3$ B. $\alpha > 3$ C. $\alpha < 3$ D. $\alpha \in R$

Câu23: Rút gọn biểu thức $a^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$ (a > 0), ta được:

A. a B. 2a C. 3a D. 4a

Câu24: Rút gọn biểu thức $b^{(\sqrt{3}-1)^2} : b^{-2\sqrt{3}}$ (b > 0), ta được:

A. b B. b^2 C. b^3 **D.** b^4

Câu25: Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Khi đo biểu thức K = $\frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}}$ có giá trị bằng:

A. $-\frac{5}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

Chuyên đề 2: **HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ**

Chủ đề 2.2: Hàm số lũy thừa, mũ, logarit

A. Kiến thức cơ bản

I. HÀM SỐ LŨY THỪA

a) ĐN: Hàm số có dạng $y=x^{\alpha}$ với $\alpha \in R$

b) Tập xác định:

- D = R với α nguyên dương
- $D=R\backslash\{0\}$ với α nguyên âm hoặc bằng 0
- D = $(0;+\infty)$ với α không nguyên

c) Đạo hàm

Hàm số $y=x^{\alpha}$ ($\alpha\in R$) có đạo hàm với mọi x > 0 và $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$

d) Tính chất của hàm số lũy thừa trên khoảng $(0;+\infty)$

Đồ thị luôn đi qua điểm (1; 1)

Khi α > 0 hàm số luôn đồng biến, khi α < 0 hàm số luôn nghịch Biến

Đồ thị hàm số không có tiệm cận khi α > 0. khi α < 0 đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là trục Ox, tiệm cận đứng là trục Oy.

II. HÀM SỐ MŨ

a) ĐN: Hàm số có dạng $y=a^{x}$ $(0<a\neq 1)$

b) Tập xác định: D = R, tập giá trị $(0;+\infty)$

c) Đạo hàm: Hàm số $y=a^{x}$ $(0<a\neq 1)$ có đạo hàm với mọi x và

$\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a$, Đặc biệt: $\left(e^{x}\right)'=e^{x}$

d) Sự biến thiên:

Khi a > 1: Hàm số đồng biến

Khi 0 < a < 1: hàm số nghịch biến

e) Đồ thị: đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là trục Ox và luôn đi qua các điểm (0; 1), (1; a) và nằm về phía trên trục hoành

f) **Lãi kép:** tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là:

$$\boxed{S_n = A(1+r)^n} \qquad (2)$$

Chú ý: Từ công thức (2) ta có thể tính được:

$$\boxed{n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n}{A}\right)} \qquad (3)$$

$$\boxed{r\% = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1} \qquad (4)$$

$$\boxed{A = \frac{S_n}{(1+r)^n}} \qquad (5)$$

III. HÀM SỐ LÔGARIT

a) ĐN: Hàm số có dạng $y=\log_a x \ (0<a\neq 1)$

b) Tập xác định: D = $(0;+\infty)$, tập giá trị R

c) Đạo hàm: Hàm số $y=\log_a x \ (0<a\neq 1)$ có đạo hàm với mọi x > 0 và

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, Đặc biệt: $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

d) Sự biến thiên:

Khi a > 1: Hàm số đồng biến

Khi 0 < a < 1: hàm số nghịch biến

e) Đồ thị: thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy và luôn đi qua các điểm (1; 0), (a; 1) và nằm về phía phải trục tung.

B. Kĩ năng cơ bản

- Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa ,hàm số logarit
- Tính đạo hàm của hàm số lũy thừa , hàm số mũ , hàm số logarit
- Tính tiền lãi , thời gian giửi tiết kiệm và tăng trưởng … , lãi suất hay % tăng trưởng trong bài toán lãi suất
- Khảo sát hàm số lũy thừa , hàm số mũ , hàm số logarit

C. Bài tập luyện tập

Bài 1: **Tìm đạo hàm của các hàm số sau:**

a, y= e^{3x} b, y=2^x c, y=3^{1-x^2}

HD:

a,$(e^{3x})' = e^{3x}.(3x)' = 3e^{3x}$

b, $(2^x)' = 2^x.\ln 2$;

c,$(3^{1-x^2})' = 3^{1-x^2}.(\ln 3).(1-x^2)' = -2x.3^{1-x^2}.\ln 3$

Bài 2: Tìm TXĐ của các hàm số sau:

a, $y = x^3$ b, $y = x^{-3}$ c, $y = x^{\frac{2}{3}}$ d, $y = x^{-\sqrt{2}}$

HD:

a, $y = x^3$ có D = R (vì $\alpha = 3$ nguyên dương)

b, $y = x^{-3}$ có D = R\{0} (vì $\alpha = -3$ nguyên âm)

c, $y = x^{\frac{2}{3}}$ (α hữu tỉ);

d, $y = x^{-\sqrt{2}}$ (α vô tỉ) nên có $D = R^+ = (0;+\infty)$

Bài 3: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a, $y = x^{\frac{3}{4}}$ (x>0) b, $y = \sqrt[3]{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$

HD:

+ $(x^{\frac{3}{4}})' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

+$(\sqrt[3]{1-x^2})' = [(1-x^2)^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3}(1-x^2)^{-\frac{2}{3}}.(-2x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$

Bài 4: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a, $y = 2^{2x+3}$ b, $y = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x$

HD

a , $y' = 2.2^{2x+3}.\ln 2$

b, $y' = x^2e^x$

Bài 5: Chú Việt gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng với lãi kép 5%/năm.

a) Tính số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm.

b) Với số tiền 10 triệu đó, nếu chú Việt gửi ngân hàng với lãi kép $\frac{5}{12}\%$ /tháng thì sau 10 năm chú Việt nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn hay ít hơn?

HD

a) Số tiền cả gốc lẫn lãi nhận được sau 10 năm với lãi kép 5%/năm là

$S_{10} = 10.\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10} \approx 16,28894627$ triệu đồng.

b) Số tiền cả gốc lẫn lãi nhận được sau 10 năm với lãi kép $\frac{5}{12}\%$ /tháng là

$S_{120} = 10.\left(1+\frac{5}{12\times 100}\right)^{120} \approx 16,47009498$ triệu đồng.

Vậy số tiền nhận được với lãi suất $\frac{5}{12}\%$ /tháng nhiều hơn.

Bài 6: Bạn An gửi tiết kiệm một số tiền ban đầu là 1000000 đồng với lãi suất 0,58%/tháng (không kỳ hạn). Hỏi bạn An phải gửi bao nhiêu tháng thì được cả vốn lẫn lãi bằng hoặc vượt quá 1300000 đồng ?

HD

Ta có $n = \log_{1,0058}\left(\frac{1300000}{1000000}\right) \approx 45,3662737$ nên để nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi bằng hoặc vượt quá 1300000 đồng thì bạn An phải gửi ít nhất là 46 tháng.

Bài 7: Một người có 58 000 000đ gửi tiết kiệm ngân hàng (theo hình thức lãi kép) trong 8 tháng thì lĩnh về được 61 329 000đ. Tìm lãi suất hàng tháng?

HD lãi suất hàng tháng là $r\% = \sqrt[8]{\frac{61329\ 000}{58000\ 000}} - 1 \approx 0.7\%$

Bài 8: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$a, y = \log_3(x+1);$ $b, y = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2x+3};$ $c, y = \log_{\sqrt{5}}\sqrt{1-x};$ $d, y = \ln(1-x^2);$

HD: a, D=(-1; $+\infty$) b, D= $(-\frac{3}{2};+\infty)$ c, D=($-\infty$;1) d, D=(-1;1)

Bài 9: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a, y= $\ln\sqrt{x}$ b, y=$\log_2(3x^2 - 5)$

HD:

a, $(\ln\sqrt{x})' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$ (vì $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$)

b, $[\log_2(3x^2 - 5)]' = \dfrac{(3x^2-5)'}{(3x^2-5).\ln 2} = \dfrac{6x}{(3x^2-5).\ln 2}$

D. Bài tập TNKQ

Câu 1: Đạo hàm của hàm số $y=(3x-1)^{\sqrt{2}}$ là:

A. $3\sqrt{2}(3x-1)^{\sqrt{2}-1}$ B. $-3\sqrt{2}(3x-1)^{\sqrt{2}-1}$ C. $3\sqrt{2}(3x-1)^{1-\sqrt{2}}$ D. $\dfrac{3\sqrt{2}}{(3x-1)^{\sqrt{2}-1}}$

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y=(x+3)^{\frac{3}{2}}-\sqrt[4]{5-x}$ là:

A. $D=(-3;+\infty)$. B. $D=(-3;5)$. C. $D=(-3;+\infty)\setminus\{5\}$ D. $D=(-3;5]$.

Câu 3. Hàm số $y=(4x^2-1)^4$ có tập xác định là:

A. R B. (0; +∞) C. $R\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ D. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Câu 4 Hàm số nào sau đây là đạo hàm của hàm số $y=e^{\sin^2 x}$?

A. $\sin 2x\,.\,e^{\sin^2 x}$. B. $\cos 2x\,.\,e^{\sin^2 x}$. C. $\sin^2 x\,.\,e^{\sin^2 x}$. D. $\cos^2 x\,.\,e^{\sin^2 x}$.

Câu 5: Hàm số $y=2^{\ln x+x^2}$ có đạo hàm y' là:

A. $\left(\dfrac{1}{x}+2x\right)2^{\ln x+x^2}$. B. $\left(\dfrac{1}{x}+2x\right)2^{\ln x+x^2}\ln 2$.

C. $\dfrac{2^{\ln x+x^2}}{\ln 2}$. D. $\left(\dfrac{1}{x}+2x\right)\dfrac{2^{\ln x+x^2}}{\ln 2}$.

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $y=e^{\sqrt{x}}\sin x$ là:

A. $y'=\left(\dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\cos x\right)e^{\sqrt{x}}$. B. $y'=(\sin x+\cos x)e^{\sqrt{x}}$.

C. $y'=\left(\dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}}-\cos x\right)e^{\sqrt{x}}$. D. $y'=(\sin x-\cos x)e^{\sqrt{x}}$.

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x+3}$ là:

A. $2^{2x+3}.\ln 2$. **B.** $(2x+3)2^{2x+2}\ln 2$. **C.** 2.2^{2x+3}. **D.** $2.2^{2x+3}.\ln 2$.

Câu 8: Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 6,8% năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn, hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

A. 8 B. 9 **C.** 10 **D.** 11

Câu 9: Một khu rừng có trữ lượng gỗ 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Tìm khối lượng gỗ của khu rừng đó sau 5 năm.

A. $4,8666.10^5\ (m^3)$. **B.** $4,0806.10^5\ (m^3)$. **C.** $4,6666.10^5\ (m^3)$. **D.** $4,6888.10^5\ (m^3)$.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y = \log_2\left(2x^2 - x - 3\right)$ là:

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup(1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$

C. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ **D**. $\left(-\frac{3}{2};1\right)$

Câu11: Tập xác định của hàm số $y = \ln\frac{1-x}{x^2-3x}$ là:

A. $(0;1)\cup(3;+\infty)$ **B**. $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

C. $(-\infty;0)\cup(1;3)$ **D**. $(0;1)$

Câu 12. Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^3+x\right)\ln\left(x^2+1\right)$ là:

A. $y'=\left(3x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)+2x^2$. **B.** $y'=\left(3x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)-2x^2$.

C. $y'=\left(3x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)+2x$. **D.** $y'=\left(3x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)-2x$.

Câu 13: Đạo hàm của hàm số $y=\log_3\left(1+\sqrt{x}\right)$ là :

A. $y'=\frac{1}{(1+\sqrt{x})\ln 3}$. **B.** $y'=\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\ln 3}$.

C. $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}\ln 3}$. **D.** $y'=\frac{1}{2(\sqrt{x}+x)\ln 3}$.

Câu 14: Hàm số y = $\sqrt[3]{2x^2 - x + 1}$ có đạo hàm f'(0) là:

A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. 4

Câu 15: Cho hàm số y = $\sqrt[4]{2x - x^2}$. Đạo hàm f'(x) có tập xác định là:

A. R B. (0; 2) C. (-∞;0) ∪ (2; +∞) D. R\{0; 2}

Câu 16: Hàm số y = $\sqrt[3]{a + bx^3}$ có đạo hàm là:

A. y' = $\frac{bx}{3\sqrt[3]{a+bx^3}}$ B. y' = $\frac{bx^2}{\sqrt[3]{\left(a+bx^3\right)^2}}$ C. y' = $3bx^2\sqrt[3]{a+bx^3}$ D. y' = $\frac{3bx^2}{2\sqrt[3]{a+bx^3}}$

Câu 17: Cho f(x) = $x^2\sqrt[3]{x^2}$. Đạo hàm f'(1) bằng:

A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{8}{3}$ C. 2 D. 4

Câu18: Cho f(x) = $\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}$. Đạo hàm f'(0) bằng:

A. 1 B. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ C. $\sqrt[3]{2}$ D. 4

Câu19: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến trên các khoảng nó xác định?

A. $y = x^{-4}$ B. $y = x^{-\frac{3}{4}}$ C. $y = x^4$ D. y = $\sqrt[3]{x}$

Câu20: Cho hàm số y = $\left(x+2\right)^{-2}$. Hệ thức giữa y và y" không phụ thuộc vào x là:

A. y" + 2y = 0 B. y" - 6y^2 = 0 C. 2y" - 3y = 0 D. $(y")^2$ - 4y = 0

Câu21: Cho hàm số y = x^{-4}. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Đồ thị hàm số có một trục đối xứng.

B. Đồ thị hàm số đi qua điểm (1; 1)

C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận

D. Đồ thị hàm số có một tâm đối xứng

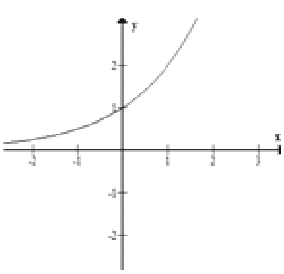
Câu 22: Trên đồ thị (C) của hàm số y = $x^{\frac{\pi}{2}}$ lấy điểm M_0 có hoành độ x_0 = 1. Tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 có phương trình là:

A. $y = \frac{\pi}{2}x + 1$ **B.** $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1$ C. $y = \pi x - \pi + 1$ D. $y = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} + 1$

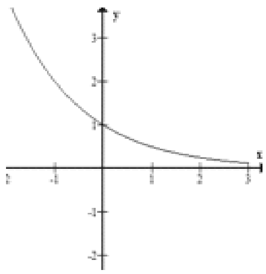
Câu23: Trên đồ thị của hàm số $y = x^{\frac{\pi}{2}+1}$ lấy điểm M_0 có hoành độ $x_0 = 2^{\frac{2}{\pi}}$. Tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 có hệ số góc bằng:

A. $\pi + 2$ B. 2π C. $2\pi - 1$ D. 3

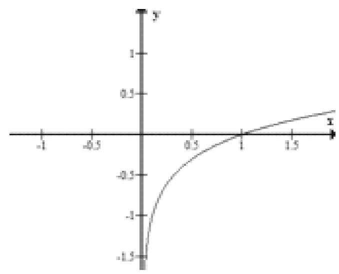
Câu 24: Trong các hình sau hình nào là dạng đồ thị của hàm số $y = a^x, a > 1$



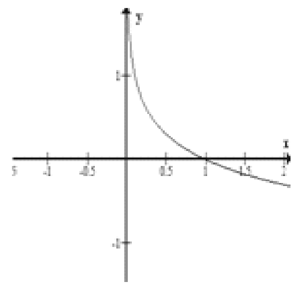
(I)



(II)

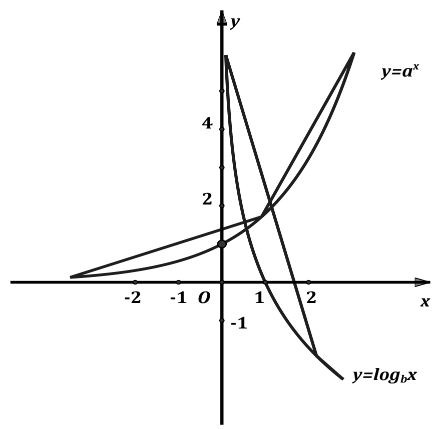


(III)



(IV)

Câu 25: Cho đồ thị hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ như hình vẽ: Nhận xét nào đúng?



A. $a > 1, b > 1$ **B.** $a > 1, 0 < b < 1$

C. $0 < a < 1, 0 < b < 1$ D. $0 < a < 1, b > 1$

Chủ đề 2.3: Phương trình mũ , bất phương trình mũ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Một số tính chất đối với hàm số mũ.

a) Luỹ thừa:

*** Các công thức cần nhớ:**

$a^0 = 1;$ $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n};$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

*** Tính chất của lũy thừa:**

$a^m.a^n = a^{m+n};$ $\quad \left(a^m\right)^n = a^{mn};$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n};$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$ $\quad \left(ab\right)^n = a^n.b^n$

*** Quy tắc so sánh:**

+ Với a > 1 thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$

+ Với 0 < a < 1 thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$

b) Căn bậc n

$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b};$ $\quad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\quad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ $\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x.y}$

$\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x,$ $\quad a^x.b^x = \left(a.b\right)^x$ $\quad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}; a^{\frac{1}{y}} = \sqrt[y]{a}$

2. Phương trình mũ cơ bản:

Là phương trình dạng: $a^x = b$ (*) với a, b cho trước và 0 < a ≠ 1

+ b ≤ 0: (*) VN

+ b > 0: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ (0<a≠1 và b>0)

Minh họa bằng đồ thị

Phương trình $a^x = b$ (a > 0, a≠ 1)	
b > 0	Có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$

b $\le$ 0	Vô nghiệm

B. KĨ NĂNG CƠ BẢN

I. Phương trình mũ

1. Phương pháp đưa về cùng cơ số

2. Phương pháp dùng ẩn phụ.

Khi sử dụng phương pháp này ta nên thực hiện theo các bước sau:

B1: Đưa pt, bpt về dạng ẩn phụ quen thuộc.

B2: Đặt ẩn phụ thích hợp và tìm điều kiện cho ẩn phụ.

B3: Giải pt, bpt với ẩn phụ mới và tìm nghiệm thỏa điều kiện.

B4: Thay giá trị t tìm được vào $\Rightarrow$ giải PT, bpt mũ cơ bản

B5: Kết luận.

Sau đây là một số dấu hiệu.

Loại 1: Các số hạng trong pt, bpt có thể biểu diễn qua $a^{f(x)}$ $\Rightarrow$ **đặt t =** $a^{f(x)}$

Hay gặp một số dạng sau:

+ Dạng 1: $A.a^{2f(x)} + B.a^{f(x)} + C = 0$ $\Rightarrow$ bậc 2 ẩn t.

+ Dạng 2: $A.a^{3f(x)} + B.a^{2f(x)} + C.a^{f(x)} + D = 0$ $\Rightarrow$ bậc 3 ẩn t.

+ Dạng 3: $A.a^{4f(x)} + B.a^{2f(x)} + C = 0$ $\Rightarrow$ trùng phương ẩn t.

Lưu ý: Trong loại này ta còn gặp một số bài mà sau khi đặt ẩn phụ ta thu được một phương trình, Bpt vẫn chứa x ta gọi đó là các bài toán đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

Loại 2: Phương trình đẳng cấp bậc n đối với $a^{f(x)}$ **và** $b^{f(x)}$**.**

Hay gặp một số dạng sau:

+ Dạng 1: $A.a^{2f(x)} + B.(a.b)^{f(x)} + C.b^{2f(x)} = 0$

$\Rightarrow$ Chia 2 vế cho $a^{2f(x)}$ $\Rightarrow$ loại 1(dạng 1)

+ Dạng 2: $A.a^{3f(x)} + B.(a^2.b)^{f(x)} + C(a.b^2)^{f(x)} + D.b^{3f(x)} = 0$

$\Rightarrow$ Chia 2 vế cho $a^{3f(x)}$ $\Rightarrow$ loại 1(dạng 2)

Tổng quát: Với dạng này ta sẽ chia cả 2 vế của Pt cho $a^{nf(x)}$ hoặc $b^{nf(x)}$ với n là số tự nhiên lớn nhất có trong pt Sau khi chia ta sẽ đưa được pt về loại 1.

Loại 3: Trong phương trình có chứa 2 cơ số nghịch đảo

+ Dạng 1: $A.a^{f(x)} + B..b^{f(x)} + C = 0$ với a.b = 1

+ Dạng 2: $A.a^{f(x)} + B..b^{f(x)} + C.c^{f(x)} = 0$, với a.b = c^2

Với dạng 1 ta đặt ẩn phụ t = $a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)}$ = 1/t ; còn với dạng 2 ta chia cả 2 vế của pt cho $c^{f(x)}$ để đưa về dạng 1.

3. Phương pháp logarit hóa

Đôi khi ta không thể giải một PT, BPT mũ bằng cách đưa về cùng một cơ số hay dùng ẩn phụ được, khi đó ta thể lấy logarit hai vế theo cùng một sơ số thích hợp nào đó $\Rightarrow$ PT, BPT mũ cơ bản (**phương pháp này gọi là logarit hóa**)

Dấu hiệu nhận biết: PT loại này thường có dạng $a^{f(x)}.b^{g(x)}.c^{h(x)} = d$ (nói chung là trong phương trình có chứa nhiều cơ số khác nhau và số mũ cũng khác nhau) $\Rightarrow$ khi đó ta có thể lấy logarit 2 vế theo cơ số a (hoặc b, hoặc c).

II. Bất phương trình mũ

1. Bất phương trình mũ cơ bản

Xét bất phương trình $a^x > b$

- Nếu $b \le 0$, tập nghiệm của bất PT là R vì $a^x > 0 \ge b, \forall x \in R$

- Nếu b > 0 thì BPT tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$

Nếu a > 1 thì nghiệm của bất PT là x > $\log_a b$

Nếu 0 <a < 1 thì nghiệm của bất PT là x < $\log_a b$

2. Giải bất phương trình bằng phương pháp đưa về cùng một cơ số

3. Giải bất phương trình mũ bằng phương pháp đặt ẩn phụ

C. Bài tập luyện tập

1. Phương pháp đưa về cùng cơ số

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

1) $2^{-x} = 2^8$ 2) $2^{x^2-3x+2} = 2^{x+2}$

3) $3^{-2-x^2} = 3^{3x}$ 4) $2^{-x} = 8$

LG

1) $Pt \Leftrightarrow -x = 8 \Leftrightarrow x = -8$

2) $PT \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$

3) $PT \Leftrightarrow -2-x^2=3x \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

4) $Pt \Leftrightarrow 2^{-x}=2^3 \Leftrightarrow x=-3$

Ví dụ: Giải các phương trình sau : $2^{x^2+3x-2}=\frac{1}{4}$

HD: $2^{x^2+3x-2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2+3x-2}=2^{-2} \Leftrightarrow x^2+3x-2=-2 \Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=0, x=-3$

Ví dụ: Giải các phương trình sau : $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x+1}=3$

HD: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x+1}=3 \Leftrightarrow 3^{-(x^2-3x+1)}=3^1 \Leftrightarrow -(x^2-3x+1)=1 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=1, x=2$

Ví dụ: Giải phương trình sau : $2^{x+1}+2^{x-2}=36$

HD: $2^{x+1}+2^{x-2}=36 \Leftrightarrow 2.2^x+\frac{2^x}{4}=36$

$\Leftrightarrow \frac{8.2^x+2^x}{4}=36 \Leftrightarrow 9.2^x=36.4 \Leftrightarrow 2^x=16 \Leftrightarrow 2^x=2^4 \Leftrightarrow x=4$

2. Dùng ẩn phụ.

Ví dụ: Giải các phương trình

1) $9^x-4.3^x+3=0$

2) $9^x-3.6^x+2.4^x=0$

3) $5^x-6+5^{1-x}=0$

LG

1) $9^x-4.3^x+3=0 \Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^x+3=0$

Đặt $t=3^x$ với t>0 ta được phương trình: $t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$

Với t=1 ta có x=0

Với t=3 ta có x=1

2) $9^x - 3.6^x + 2.4^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 3\left(\frac{3}{2}\right)^x + 2 = 0$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$ ta được phương trình: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Với t=1 ta có $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Với t=2 ta có $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 2$

Ví dụ: Giải các phương trình sau : $3^{2x+8} - 4.3^{x+5} + 27 = 0$

HD: $3^8.3^{2x} - 4.3^5.3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow 6561.\left(3^x\right)^2 - 972.3^x + 27 = 0$ **(*)**

Đặt $t = 3^x > 0$ Phương trình (*) $\Leftrightarrow 6561t^2 - 972t + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{9} \\ t = \frac{1}{27} \end{array}\right.$

Với $t = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

Với $t = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-3} \Leftrightarrow x = -3$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = -2, x = -3$

Ví dụ: Giải các phương trình sau : $25^x - 2.5^x - 15 = 0$

HD: $25^x - 2.5^x - 15 = 0 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2 - 2.5^x - 15 = 0$ (*)

Đặt $t = 5^x > 0$ Phương trình (*) $\Leftrightarrow t^2 - 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = -3 \text{ (loai)} \end{array}\right.$

Với $t = 5 \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 1$

Ví dụ: Giải các phương trình sau : $3^{x+2} - 3^{2-x} = 24$

HD: $3^{x+2} - 3^{2-x} = 24 \Leftrightarrow 9.3^x - \frac{9}{3^x} - 24 = 0 \Leftrightarrow 9.\left(3^x\right)^2 - 24.3^x - 9 = 0$ (*)

Đặt $t=3^x>0$ Pt (*) $\Leftrightarrow 9t^2-24t-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-\dfrac{1}{3} \text{ (loai)} \end{array}\right.$

Với $\quad t=3 \Leftrightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=1$

3. Phương pháp logarit hóa

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

1) $3^x=2$ 2) $2^x.3^x=1$

LG

1) Pt $\Leftrightarrow \log_3 3^x=\log_3 2 \Leftrightarrow x=\log_3 2$

2) $\log_2\left(2^x.3^x\right)=\log_2 1 \Leftrightarrow \log_2 2^x+\log_2 3^x=0 \Leftrightarrow x+x.\log_2 3=0$

$\Leftrightarrow x(1+\log_2 3)=0 \Leftrightarrow x=0$

4. Bất phương trình

<u>**Bài 1:**</u> Giải các bất phương trình sau:

a) $2^{x-1}<5$ b) $0,3^{x+2}>7$

<u>Lời giải:</u>

a) Ta có: $2^{x-1}<5 \Leftrightarrow x-1<\log_2 5 \Leftrightarrow x<1+\log_2 5$.

- Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\left(-\infty;1+\log_2 5\right)$

b) Ta có: $0,3^{x+2}>7 \Leftrightarrow x+2<\log_{0,3} 7 \Leftrightarrow x<-2+\log_{0,3} 7$

- Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\left(-\infty;-2+\log_{0,3} 7\right)$.

<u>**Bài 2:**</u> Giải bất phương trình : $2^{x^2+3x-4}>4^{x-1}$

<u>Lời giải:</u>

Ta có:

$2^{x^2+3x-4}>4^{x-1} \Leftrightarrow 2^{x^2+3x-4}>2^{2(x-1)} \Leftrightarrow x^2+3x-4>2(x-1) \Leftrightarrow x^2+x-2>0 \Leftrightarrow x\in(-2;1)$

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\left(-2;1\right)$

<u>**Bài 3:**</u> Giải bất phương trình: $27^{1-2x}<\dfrac{1}{3}$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $27^{1-2x} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{3(1-2x)} < 3^{-1} \Leftrightarrow 3(1-2x) < -1 \Leftrightarrow -6x < -4 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S = \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

Bài 4: Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} > \frac{1}{9}^{2-x}$

Lời giải:

Ta có: $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} > \frac{1}{9}^{2-x} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{4}} > 3^{2x-4} \Leftrightarrow \frac{x}{4} > 2x-4 \Leftrightarrow x > 8x-16 \Leftrightarrow x < \frac{16}{7}$

Bất phuơng trình đã cho có tập nghiệm là: $S = \left(-\infty; \frac{16}{7}\right)$

Bài 5: Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5}-2\right)^{-x^2+3}$

Lời giải:

Ta có: $\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-2 = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}$

Khi đó $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5}-2\right)^{-x^2+3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5}+2\right)^{x^2-3} \Leftrightarrow x-1 \geq x^2-3$

Bài 6: Giải bất phương trình: $5^x + 5^{2-x} < 26$

Lời giải:

- Ta có: $5^x + 5^{2-x} < 26 \Leftrightarrow 5^x + \frac{25}{5^x} - 26 < 0 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2 - 26.5^x + 25 < 0$

- Đặt $t = 5^x > 0$. Điều kiện: t > 0.

- Ta có: $t^2 - 26t + 25 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 25$

- Khi đó: $1 < 5^x < 25 \Leftrightarrow 5^0 < 5^x < 5^2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

- Vậy bất phương trình có tập nghiệm là: $S = (0;2)$

Bài 7: Giải bất phương trình: $3^{2x+1} - 10.3^x + 3 \leq 0$

Lời giải:

- Ta có: $3^{2x+1} - 10.3^x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 3.\left(3^x\right)^2 - 10.3^x + 3 \leq 0$ (1)

- Đặt $t = 3^x > 0$. Điều kiện: t > 0.

- Ta có: $3t^2-10t+3\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le t\le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le 3^x\le 3 \Leftrightarrow 3^{-1}\le 3^x\le 3^1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$

- Vậy bất phương trình có tập nghiệm là: $S=\left[-1;1\right]$

Bài 8: Giải bất phương trình: $5.4^x+2.25^x-7.10^x>0 \quad (1)$

Lời giải:

- Ta có: $5.4^x+2.25^x-7.10^x>0 \quad (1)$

Chia hai vế của (1) đã cho $4^x>0$ ta được: (1) $\Leftrightarrow 5+2.\left[\left(\frac{5}{2}\right)^x\right]^2-7.\left(\frac{5}{2}\right)^x>0 \quad (2)$

- Đặt $t=\left(\frac{5}{2}\right)^x>0$. Điều kiện: t > 0.

- Khi đó (2) có dạng $2t^2-7t+5>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<t<1\\ t>\frac{5}{2}\end{array}\right.$

- Với $0<t<1$ ta có: $\left(\frac{5}{2}\right)^x<1 \Leftrightarrow x<0$.

- Với $t>\frac{5}{2}$ ta có: $\left(\frac{5}{2}\right)^x>\frac{5}{2} \Leftrightarrow x>1$.

- Vậy bất phương trình (1) có tập nghiệm: $S=\left(-\infty;0\right)\cup\left(1;+\infty\right)$

*** Bài tập tự luyện**

Bài 1: Giải các phương trình:

1) $2^{-x}=2^8$

2) $2^{x^2-3x+2}=2^{x+2}$

3) $3^{-2-x^2}=3^{3x}$

4) $2^{-x}=8$

5) $3^{2x-3}=9$

6) $2^{3x^2-2x}=32$

7) $3^{x^2-3x}=\frac{1}{9}$

8) $9^x - 4.3^x + 3 = 0$

9) $9^x - 3.6^x + 2.4^x = 0$

10) $5^x - 6 + 5^{1-x} = 0$

11) $25^x - 6.5^x + 5 = 0$

12) $36^x - 3.30^x + 2.25^x = 0$

13) $6.5^x - 5^{1-x} - 1 = 0$

14) $2^{x-2} = 3$

15) $3^{x+1} = 5^{x-2}$

16) $3^{x-3} = 5^{x^2-7x+12}$

17) $2^{x-2} = 5^{x^2-5x+6}$

18) $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500$

19) $5^{2x+1} - 7^{x+1} = 5^{2x} + 7^x$

Bài 2: Giải các bất phương trình:

1) $2^{-x} > 2^8$

2) $2^{x^2-3x+2} > 2^{x+2}$

3) $3^{-2-x^2} > 3^{3x}$

4) $2^{-x} > 8$

5) $3^{2x-3} > 9$

6) $2^{3x^2-2x} > 32$

7) $3^{x^2-3x} > \frac{1}{9}$

8) $9^x - 4.3^x + 3 > 0$

9) $9^x - 3.6^x + 2.4^x > 0$

10) $5^x - 6 + 5^{1-x} > 0$

11) $25^x - 6.5^x + 5 > 0$

12) $36^x - 3.30^x + 2.25^x > 0$

13) $6.5^x - 5^{1-x} - 1 > 0$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1: Phương trình $4^{3x-2} = 16$ có nghiệm là:

A. x = $\frac{3}{4}$ **B.** x = $\frac{4}{3}$ C. 3 D. 5

Câu 2: Tập nghiệm của phương trình: $2^{x^2-x-4} = \frac{1}{16}$ là:

A. Φ B. $\{2; 4\}$ **C.** $\{0; 1\}$ D. $\{-2; 2\}$

Câu 3: Phương trình $4^{2x+3} = 8^{4-x}$ có nghiệm là:

A. $\frac{6}{7}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{5}$ D. 2

Câu 4: Phương trình $0,125.4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$ có nghiệm là:

A. 3 B. 4 C. 5 **D.** 6

Câu 5: Phương trình: $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$ có nghiệm là:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Câu 6: Phương trình: $2^{2x+6} + 2^{x+7} = 17$ có nghiệm là:

A. -3 B. 2 C. 3 D. 5

Câu 7: Tập nghiệm của phương trình: $5^{x-1} + 5^{3-x} = 26$ là:

A. $\{2; 4\}$ B. $\{3; 5\}$ **C.** $\{1; 3\}$ D. Φ

Câu 8: Phương trình: $3^x + 4^x = 5^x$ có nghiệm là:

A. 1 **B.** 2 C. 3 D. 4

Câu 9: Phương trình: $9^x + 6^x = 2.4^x$ có nghiệm là:

A. 3 B. 2 C. 1 **D.** 0

Câu 10: Phương trình: $2^x = -x + 6$ có nghiệm là:

A. 1 **B.** 2 C. 3 D. 4

Câu 11: Xác định m để phương trình: $4^x - 2m.2^x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt? Đáp án là:

A. m < 2 B. -2 < m < 2 **C.** m > 2 D. $m \in R$

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^4$ là:

A. $(0; 1)$ **B.** $\left(1; \frac{5}{4}\right)$ C. $(2; +\infty)$ D. $(-\infty; 0)$

Câu 13: Bất phương trình: $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x} \le 2^{\frac{3}{2}}$ có tập nghiệm là:

A. $(2;5)$ B. $[-2;1]$ **C.** $[-1;3]$ D. Kết quả khác

Câu 14: Bất phương trình: $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{2-x}} \ge \left(\frac{3}{4}\right)^x$ có tập nghiệm là:

A. $[1; 2]$ B. $[-\infty; 2]$ C. (0; 1) D. Φ

Câu 15: Bất phương trình: $4^x < 2^{x+1} + 3$ có tập nghiệm là:

A. $(1; 3)$ B. $(2; 4)$ C. $(\log_2 3; 5)$ **D.** $(-\infty; \log_2 3)$

Câu 16: Bất phương trình: $9^x - 3^x - 6 < 0$ có tập nghiệm là:

A. $(1; +\infty)$ **B.** $(-\infty; 1)$ C. $(-1; 1)$ D. Kết quả khác

Câu 17: Bất phương trình: $2^x > 3^x$ có tập nghiệm là:

A. $(-\infty; 0)$ B. $(1; +\infty)$ C. $(0; 1)$ D. $(-1; 1)$

Câu 18: Nghiệm của bất phương trình $9^{x-1} - 36.3^{x-3} + 3 \le 0$ là:

A. $1 \le x \le 3$ **B.** $1 \le x \le 2$ C. $x \ge 1$ D. $x \le 3$

Câu19: Tập nghiệm của bất phương trình: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^4$ là:

A. $(0; 1)$ **B.** $\left(1; \frac{5}{4}\right)$ C. $(2; +\infty)$ D. $(-\infty; 0)$

Câu20: Bất phương trình: $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x} \le \left(\sqrt{2}\right)^3$ có tập nghiệm là:

A. $(2;5)$ B. $[-2;1]$ **C.** $[-1;3]$ D. $(1;5)$

Câu21: Bất phương trình: $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{2-x}} \ge \left(\frac{3}{4}\right)^x$ có tập nghiệm là:

A. $[1; 2]$ B. $[-\infty; 2]$ C. (0; 1) D. Φ

Câu22: Bất phương trình: $4^x < 2^{x+1} + 3$ có tập nghiệm là:

A. $(1;3)$ B. $(2;4)$ C. $(\log_2 3;5)$ **D.** $(-\infty;\log_2 3)$

Câu23: Bất phương trình: $9^x - 3^x - 6 < 0$ có tập nghiệm là:

A. $(1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;1)$ C. $(-1;1)$ D. $(2;5)$

Câu 24: Bất phương trình: $2^x > 3^x$ có tập nghiệm là:

A. $(-\infty;0)$ B. $(1;+\infty)$ C. $(0;1)$ D. $(-1;1)$

Câu 25: Nghiệm của bất phương trỡnh $9^{x-1} - 36.3^{x-3} + 3 \le 0$ là:

A. $1 \le x \le 3$ **B.** $1 \le x \le 2$ C. $x \ge 1$ D. $x \le 3$

Chủ đề 2.4: Phương trình lôgarit , bất phương trình lôgarit

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. phương trình lôgarit

1. Phương trình lôgarit cơ bản:

PT $\log_a x = b$ (a > 0, $a \ne 1$) luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$ với mọi b

2.cách giải một số phương trình loogarit đơn giản :

a. Đưa về cùng cơ số:

1. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $\Leftrightarrow$ f(x) = g(x)	2. $\log_a f(x) = b$ $\Leftrightarrow$ f(x) = a^b

Lưu ý rằng với các PT, BPT logarit ta cần phải đặt điều kiện để các biểu thức $\log_a f(x)$ có nghĩa là

$f(x) \ge 0$.

b. Đặt ẩn phụ

Với các PT, BPT mà có thể biểu diễn theo biểu thức $\log_a f(x)$ thì ta có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ t = $\log_a f(x)$.

Ngoài việc đặt điều kiện để biểu thức $\log_a f(x)$ có nghĩa là f(x) > 0, chúng ta cần phải chú ý đến đặc điểm của PT, BPT đang xét (chứa căn, có ẩn ở mẫu) khi đó ta phải đặt điều kiện cho các PT, BPT có nghĩa.

c. Mũ hóa

Đôi khi ta không thể giải một PT, BPT logarit bằng cách đưa về cùng một cơ số hay dùng ấn phụ được, khi đó ta thể đặt $x = a^t \Rightarrow$ PT, BPT cơ bản (phương pháp này gọi là mũ hóa)

Dấu hiệu nhận biết: PT loại này thường chứa nhiều cơ số khác nhau

II. Bất phương trình lôgarit

1. **Bất phương trình lôgarit cơ bản**

Xét bất phương trình $\log_a x > b$: - Nếu a > 1 thì $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$

- Nếu 0 <a < 1 thì $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$

2.cách giải một số bất phương trình loogarit đơn giản :

a. Đưa về cùng cơ số:

b. Đặt ẩn phụ

c. Mũ hóa

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1. Đưa về cùng cơ số:

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

a. $log_3(2x+1) = \log_3 5 \quad (*)$

Đk: $2x+1>0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$

$(*) \Leftrightarrow 2x+1=5 \Leftrightarrow x=2$ (t/m đk)

b. $\log_3(x+3) = \log_3(2x^2-x-1)$ (*)

Đk: $\begin{cases} x+3>0 \\ 2x^2-x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ -3<x<-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Khi đó PT (*) $\Leftrightarrow x+3 = 2x^2-x-1 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ (t/m đk)

c. $log_3(x-1) = 2$ (*)

Đk: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Khi đó PT $(*) \Leftrightarrow x-1=3^2 \Leftrightarrow x=10$ (t/m đk)

d. $\log(x-1) - \log(2x-11) = \log 2$ (*)

Đk: $\begin{cases} x-1>0 \\ 2x-11>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\dfrac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{11}{2}$

Với điều kiện trên thì PT (*) $\Leftrightarrow \log\frac{x-1}{2x-11}=\log 2 \;\; \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-11}=2 \Leftrightarrow x-1=2(2x-11) \Leftrightarrow 3x=21$

$\Leftrightarrow x=7$ (t/m đk).

e. $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$ (*)

Đk: $\begin{cases} x-5>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x>5$

Với điều kiện trên thì PT m(*) $\Leftrightarrow \log_2(x-5)(x+2)=3$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x+2)=2^3 \Leftrightarrow x^2-3x-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện ta thấy PT đã cho chỉ có một nghiệm là $x=6$

2. Đặt ẩn phụ

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

a. $\log_3^2 x+2\log_3 x-3=0$

Với điều kiện $x>0$ đặt $t=\log_3 x$ ta được PT $t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-3$

+ $t=1$ ta có $\log_3 x=1 \Leftrightarrow x=3$

+ $t=-3$ ta có $\log_3 x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{27}$

b. $4\log_9 x+\log_x 3=3$ (*)

Với đk: $0<x\neq 1$ (*) $\Leftrightarrow 2\log_3 x+\frac{1}{\log_3 x}=3$

Đặt $t=\log_3 x$ và $t\neq 0$ Ta được PT: $2t+\frac{1}{t}=3 \Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

+ $t=1$ ta có $\log_3 x=1 \Leftrightarrow x=3$ (t/m đk)

+ $t=\frac{1}{2}$ ta có $\log_3 x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ (t/m đk)

Vậy BPT đã cho có hai nhghiệm là $x=3$ và $x=\sqrt{3}$

VD: Giải phương trình sau: $\frac{1}{5+\log_3 x}+\frac{2}{1+\log_3 x}=1$

Giải

ĐK : x >0, $\log_3 x \neq 5$, $\log_3 x \neq -1$

Đặt t = $\log_3 x$, (ĐK:$t \neq 5, t \neq -1$) Ta được phương trình : $\frac{1}{5+t}+\frac{2}{1+t}=1 \Leftrightarrow t^2-5t+6=0$

t =2, t = 3 (thoả ĐK)

Vậy $\log_3 x = 2$, $\log_3 x = 3$ Phương trình đã cho có nghiệm : $x_1 = 9$, $x_2 = 27$

<u>**Ví dụ**</u>: Giải các phương trình sau : $\log_2^2 x+2\log_2\sqrt{x}-2=0$

HD: $\log_2^2 x+2\log_2\sqrt{x}-2=0$ (1)

Điều kiện: $x>0$ Phương trình $(1)\Leftrightarrow \log_2^2 x+\log_2 x-2=0$

Đặt $t=\log_2 x$ ta có $\log_2^2 x+\log_2 x-2=0 \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{4} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=2, x=\frac{1}{4}$

<u>**Ví dụ**</u>: Giải các phương trình sau : $1+\log_2(x-1)=\log_{x-1}4$

HD: $1+\log_2(x-1)=\log_{x-1}4$ (2)

Điều kiện: $\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$ (*)

Phương trình $(1)\Leftrightarrow 1+\log_2(x-1)=\frac{\log_2 4}{\log_2(x-1)} \Leftrightarrow 1+\log_2(x-1)=\frac{2}{\log_2(x-1)}$

$$\Leftrightarrow \left[\log_2(x-1)\right]^2+\log_2(x-1)-2=0\ (2)$$

Đặt $t=\log_2(x-1)$ phương trình (2) $\Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x-1)=1 \\ \log_2(x-1)=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=2 \\ x-1=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{5}{4} \end{array}\right. \text{ tm đk (*)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=3, x=\frac{5}{4}$

<u>**3. Mũ hóa**</u>

Ví dụ Giải các phương trình sau:

a. $\log_2(x+2)=2$

Đk: $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$ (*)

Với đk (*) thì PT đã cho tương đương với PT $x+2=4 \Leftrightarrow x=2$ (t/m đk (*))

b. $\ln(x+3)=-1+\sqrt{3}$

Đk: $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$ (*)

Với đk (*) mũ hóa 2 vế của PT đã cho ta được PT $e^{\ln(x+3)}=e^{-1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow x+3=e^{-1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=e^{-1+\sqrt{3}}-3$ (t/m)

c. $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$

Đk: $\begin{cases} x-5>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x>5$ (*)

Với đk (*) thì PT đã cho tương đương với PT

$$\log_2(x-5)(x+2)=3 \Leftrightarrow (x-5)(x+2)=2^3 \Leftrightarrow x^2-3x-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Kết hợp với đk (*) ta thấy PT đã cho chỉ cố một nghiệm duy nhất là $x=6$

VD: Giải phương trình sau: $\log_2(5-2^x)=2-x$

Giải. ĐK : $5-2^x>0$.

+ Phương trình đã cho tương đương. $5-2^x=\frac{4}{2^x} \Leftrightarrow 2^{2x}-5.2^x+4=0$.

Đặt $t=2^x$, ĐK: $t>0$.Phương trình trở thành:$t^2-5t+4=0$.

phương trình có nghiệm : t = 1, t = 4.

Vậy $2^x=1$, $2^x=4$, nên phương trình đã cho có nghiệm : x = 0, x = 2.

<u>* Bất phương trình lôgarit cơ bản</u>

1. Giải BPT cơ bản:

Bài 1. Giải các BPT

a) $\log_2(x-2)>3$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+7x)>-3$

<u>Bài giải:</u>

a) $\log_2(x-2)>3 \Leftrightarrow x-2>2^3 \Leftrightarrow x>10$

bất phương trình có tập nghiệm: $S=(10;+\infty)$

b)

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+7x) > -3 \Leftrightarrow 0 < x^2+7x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow 0 < x^2+7x-8 < 0 \Leftrightarrow x \in (-8;1)$$

bất phương trình có tập nghiệm: $S=\left(-8;1\right)$

2. Giải BPT PP đưa về cùng cơ số:

Bài 1: Giải bất phương trình sau: $\log_2(x+5)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geq 0$

Lời giải:

- Điều kiện: $\begin{cases} x+5>0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow -5<x<3$

- Khi đó: $\log_2(x+5)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2(x+5)-\log_2(3-x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \log_2(x+5) \geq \log_2(3-x) \Leftrightarrow x+5 \geq 3-x \Leftrightarrow x \geq -1$

- Kết hợp với điều kiện, bất phương trình có tập nghiệm: $S=\left[-1;3\right)$

Bài 2: Giải bất phương trình: $\log_{0,5}(x+1) \leq \log_2(2-x)$

Lời giải:

- Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ 2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2$

- Khi đó: $\log_{0,5}(x+1) \leq \log_2(2-x) \Leftrightarrow -\log_2(x+1) \leq \log_2(2-x)$

$\Leftrightarrow \log_2(2-x)+\log_2(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2\left[\left(2-x\right)\left(x+1\right)\right] \geq 0 \Leftrightarrow \left(2-x\right)\left(x+1\right) \geq 1$

$\Leftrightarrow -x^2+x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

- Kết hợp với điều kiện, bất phương trình có nghiệm là : $S=\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

Bài 3: Giải bất phương trình: $\log_5(x+2)+\log_5(x-2) < \log_5(4x+1)$

Lời giải:

- Điều kiện: $\begin{cases} x+2>0 \\ 4x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>-\dfrac{1}{4} \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$

- Khi đó: $\log_5(x+2)+\log_5(x-2)<\log_5(4x+1)$

$\Leftrightarrow \log_5\left[(x+2)(x-2)\right]<\log_5(4x+1) \Leftrightarrow \log_5(x^2-4)<\log_5(4x+1)$
$\Leftrightarrow x^2-4<4x+1 \Leftrightarrow x^2-4x-5<0 \Leftrightarrow -1<x<5$

Kết hợp với điều kiện, bất phương trình có nghiệm là : $S=(2;5)$

3. Giải BPT bằng PP đặt ẩn phụ:

Bài 1: Giải bất phương trình: $\log_{0,5}^2 x+\log_{0,5} x\le 2$

Lời giải:

- Điều kiện: $x>0$

- Đặt : $t=\log_{0,5} x$

- Khi đó: $t^2+t\le 2 \Leftrightarrow t^2+t-2\le 0 \Leftrightarrow -2\le t\le 1$

- Với $-2\le t\le 1$ ta có: $-2\le \log_{0,5} x\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\le (0,5)^{-2} \\ x\ge 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 4 \\ x\ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$

- Kết hợp với điều kiện, bất phương trình đã cho có tập nghiệm là : $S=\left[\dfrac{1}{2};4\right]$

Bài 2: Giải bất phương trình: $\log^2 x-13\log x+36>0$

Lời giải:

- Điều kiện: $x>0$

- Đặt : $t=\log x$

- Khi đó: $t^2-13t+36>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<4 \\ t>9 \end{array}\right.$

- Với t < 4 ta có: $\log x<4 \Leftrightarrow x<10^4$

- Với t > 9 ta có: $\log x>9 \Leftrightarrow x>10^9$

- Kết hợp với điều kiện bất phương trình có tập nghiệm là : $S=\left(0;10^4\right)\cup\left(10^9;+\infty\right)$

Bài 3: Giải bất phương trình:

a) $\log_2^2 4x+\log_2\frac{x^2}{8}>8$; Với ĐK : x > 0

ta có : $\log_2^2 4x+\log_2\frac{x^2}{8}>8 <=> \left(\log_2 4+\log_2 x\right)^2+\log_2 x^2-\log_2 2^3>8$

Đặt $t=\log_2 x$ BPT trở thành : $\left(2+t\right)^2+2t-3>8 \Leftrightarrow t^2+6t-7>0$

$<=> \left[\begin{array}{l} t<-7 \\ t>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x<-7 \\ \log_2 x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2^{-7} \\ x>2 \end{array}\right.$

Kết hợp với đk : $x>0$ ta có nghiệm của BPT đã cho là : $\left(0;2^{-7}\right)\cup\left(2;+\infty\right)$

Bài 4: Giải các bất phương trình :

a) $2.\log_3\left(4x-3\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(2x+3\right)\le 2$ (1)

Với ĐK : $x>\frac{3}{4}$ thì (1) <=> $\log_3\left(4x-3\right)^2+\log_{3^{-1}}\left(2x+3\right)\le 2$

$<=> \log_3\left(4x-3\right)^2-\log_3\left(2x+3\right)\le 2 \Leftrightarrow \log_3\frac{\left(4x-3\right)^2}{2x+3}\le 2 <=> \frac{\left(4x-3\right)^2}{2x+3}\le 3^2$

$<=> \left(4x-3\right)^2\le 9\left(2x+3\right) \Leftrightarrow 8x^2-21x-9\le 0 <=> -\frac{3}{8}\le x\le 3$

Kết hợp với ĐK : $x>\frac{3}{4}$ ta được nghiệm của BPT : $\frac{3}{4}\le x\le 3$

b) $\log_{0,7}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0$ (2)

$(2)\Leftrightarrow \log_6\frac{x^2+x}{x+4}>(0,7)^0 \Leftrightarrow \log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4}>6$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-6x-24}{x+4}>0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x-24}{x+4}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4<x<-3 \\ x>8 \end{array}\right.$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1: Phương trình: $\log x+\log\left(x-9\right)=1$ có nghiệm là:

A. 7 B. 8 C. 9 **D.** 10

Câu 2: Phương trình: $\lg\left(54-x^3\right)$ = 3lgx có nghiệm là:

A. 1 B. 2 **C.** 3 D. 4

Câu 3: Phương trình: $\ln x+\ln\left(3x-2\right)=0$ có mấy nghiệm?

A. 0 **B.** 1 C. 2 D. 3

Câu 4: Phương trình: $\ln\left(x+1\right)+\ln\left(x+3\right)=\ln\left(x+7\right)$

A. 0 **B.** 1 C. 2 D. 3

Câu 5: Phương trình: $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$ có nghiệm là:

A. 24 B. 36 C. 45 **D.** 64

Câu 6: Phương trình: $\log_2 x+3\log_x 2=4$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{2;\ 8\right\}$ B. $\left\{4;\ 3\right\}$ C. $\left\{4;\ 16\right\}$ D. Φ

Câu 7: Phương trình: $\lg\left(x^2-6x+7\right)=\lg\left(x-3\right)$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{5\right\}$ B. $\left\{3;\ 4\right\}$ C. $\left\{4;\ 8\right\}$ D. Φ

Câu 8: Phương trình: $\dfrac{1}{4-\lg x}+\dfrac{2}{2+\lg x}=1$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{10;\ 100\right\}$ B. $\left\{1;\ 20\right\}$ C. $\left\{\dfrac{1}{10};\ 10\right\}$ D. Φ

Câu 9: Phương trình: $x^{-2+\log x}=1000$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{10;\ 100\right\}$ B. $\left\{10;\ 20\right\}$ **C.** $\left\{\dfrac{1}{10};\ 1000\right\}$ D. Φ

Câu 10: Phương trình: $\log_2 x+\log_4 x=3$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{4\right\}$ B. $\left\{3\right\}$ C. $\left\{2;\ 5\right\}$ D. Φ

Câu 11: Phương trình: $\log_2 x=-x+6$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{3\right\}$ **B.** $\left\{4\right\}$ C. $\left\{2;\ 5\right\}$ D. Φ

Câu 12: Nghiệm của phương trình : $\log_{\sqrt{2}}\left(3x-11\right)=4$ là:

A. x = 5 B. $x=\dfrac{13}{3}$ C. $x=\dfrac{17}{3}$ D. $x=\dfrac{20}{3}$

Câu 13: Phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 .Khi đó :

A. $x_1.x_2=22$ B. $x_1.x_2=16$ C. $x_1.x_2=36$ D. $x_1.x_2=32$

Câu 14. Phương trình $\log_3\left(3^{x+1}-1\right)=2x+\log_{\frac{1}{3}}2$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$. Khi đó tổng $S=27^{x_1}+27^{x_2}$ là:

A. $S=180.$ B. $S=45.$ C. $S=9.$ D. 1

Câu 15. Giá trị của m để phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m$ có nghiệm

$x\in[1;8]$ là:

A. 3 ≤ m ≤ 6 B. 2 ≤ m ≤ 3 C. 6 ≤ m ≤ 9 D. 2 ≤ m ≤ 6

Câu 16. Phương trình sau $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$ có nghiệm là:

A. $x=6$. **B.** $x=3$. **C.** $x=6$, $x=1$. **D.** $x=8$.

Câu 17. Cho phương trình $\log_2(-x^2-2x-m+5)=2$ để phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt trái dấu thì điều kiện của m là:

A. $m>1$. B. $m>2$. C. $m<1$. D. $m<2$.

Câu 18. **N**ghiệm của phương trình $\log_3(x+1)=2.$ là:

A. $x=5.$ B. $x=8.$ C. $x=7.$ D. $x=10.$

Câu 19. Nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(3^x-2\right)<0$ là:

A. $x>1$ B. $x<1$ C. $0<x<1$ D. $\log_3 2<x<1$

Câu 20. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+7\right)>0$ là:

A. $S=(-\infty;2)$. B. $S=(2;3)$.

C. $S=(3;+\infty)$. D. $S=(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 21: Tập nghiệm S của bất phương trình $log_{\frac{1}{5}}(3x-5)>log_{\frac{1}{5}}(x+1)$ là:

A. $S=\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$. B. $S=(-\infty;3)$. C. $S=\left(\frac{3}{5};3\right)$. D. $S=\left(\frac{5}{3};3\right)$.

Câu 22 . Phương trình $\log_3\left(3^{x+1}-1\right)=2x+\log_{\frac{1}{3}}2$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$. Khi đó tổng $S=27^{x_1}+27^{x_2}$ là:

A. $S=180.$ B. $S=45.$ C. $S=9.$ D. 1

Câu 23. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+7\right)>0$ là:

A. $S = (-\infty; 2)$.   B. $S = (2; 3)$.

C. $S = (3; +\infty)$.   D. $S = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

Câu 24. Giá trị của m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm

$x \in [1; 8]$ là:

A. $3 \leq m \leq 6$ B. $2 \leq m \leq 3$ C. $6 \leq m \leq 9$ D. $2 \leq m \leq 6$

Câu 25. Nghiệm của bất phương trình $\log_2 (3^x - 2) < 0$ là:

A. $x > 1$ B. $x < 1$ C. $0 < x < 1$ D. $\log_3 2 < x < 1$

Câu 26: Phương trình sau $\log_2 (x-5) + \log_2 (x+2) = 3$ có nghiệm là:

A. $x = 6$.   **B.** $x = 3$.   **C.** $x = 6$, $x = 1$.   **D.** $x = 8$.

Câu 27. Cho phương trình $\log_2 (-x^2 - 2x - m + 5) = 2$ để phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt trái dấu thì điều kiện của m là:

A. $m > 1$.   B. $m > 2$.   C. $m < 1$.   D. $m < 2$.

Câu 28. Nghiệm của phương trình $\log_3 (x+1) = 2$. là:

A. $x = 5$.   B. $x = 8$.   C. $x = 7$.   D. $x = 10$.

KIỂM TRA 45 PHÚT

I. MỤC TIÊU KIỂM TRA

1. Kiến thức: Kiểm tra kiến thức về luỹ thừa, logarit, hàm số mũ, hàm số logarits, hàm số luỹ thừa, phương trình bất PT mũ và logarit

2. Kĩ năng: Kiểm tra kỹ năng: Tìm tập xác định của hàm số logarit, ĐK xác định của lũy thừa, kỹ năng tính đạo hàm của HS mũ và HS logarit. kỹ năng giải PT, bất PT mũ và logarit

3. Thái độ: Nghiêm túc trong kiểm tra

II. HÌNH THỨC KIỂM TRA

- Hình thức: Trắc nghiệm khách quan
- Học sinh làm bài trên lớp

III. MA TRẬN ĐỀ KIỂM TRA

MA TRẬN NHẬN THỨC

Chủ đề hoặc mạch kiến thức, kĩ năng	**Tầm quan trọng** (Mức cơ bản trọng tâm của KTKN)	**Trọng số** (Mức độ nhận thức của Chuẩn KTKN)	**Tổng điểm**	**Điểm theo thang điểm 10**
Lũy thừa	15	2	30	1
Hàm số Luỹ thừa				1
logarit				2
Hàm số logarit	20	3	60	1
Hàm số mũ	15	2	30	1
Phương trình mũ	25	3	75	1
Phương trình logarit				1
Bất PT mũ	25	3	75	1
Bất phương trình logarit				1
Tổng	100		270	10

MA TRẬN ĐỀ KIỂM TRA

Chủ đề\ Mức độ	**1**	**2**	**3**	**4**	**Tổng**
Lũy thừa	Câu 1	Câu11	Câu 21,25		4
Hàm số Luỹ thừa	Câu 2	Câu 16,17			3
logarit	Câu 4	Câu12			2
Hàm số logarit	Câu 3,5,7	Câu13	Câu22		5
Hàm số mũ		Câu14, 15			2
Phương trình mũ	Câu 6	Câu19,18		Câu 23	4
Phương trình logarit	Câu 8			Câu 24	2
Bất PT mũ	Câu10				1
Bất phương trình logarit	Câu9	Câu 20			2

Tổng	10	10	3	2	25

BẢNG MÔ TẢ TIÊU CHÍ LỰA CHỌN CÂU HỎI, BÀI TẬP

Câu 1.Tính chất lũy thừa

Câu 2: Tìm tập xác định của và hàm số lũy thừa

Câu 3: Tính chát của hà số mũ và HS logarit

Câu 4: tính giá trị logarit

Câu 5 .Tính đạo hàm của một tích : Hàm sốy= lnx và y=x

Câu 6: Giải PT mũ bằng PP đặt ẩn phụ

Câu 7: Tập xác định của hàm số logarit

Câu 8 .Giải Pt logarit : PP đưa về cùng cơ số

Câu 9. Giải BPT logarit cùng cơ số và có cơ số 0<a<1

Câu 10. Quan hệ giữa hàm số mũ và logarit

Câu 11. Đạo hàm của hàm số căn thức

Câu 12.Biểu diễn logarit theo một logarit khác

Câu 13.Tìm TXĐ của hàm số logarit

Câu14 . So sánh 2 logarit và 2 lũy thừa

Câu 15. ĐK có nghĩa của biểu thức gồm có chứa căn thức và lũy thừa

Câu 16. So sánh 2 logarti

Câu 17.Tính đồng biến nghịch biến của hàm số lũy thừa

Câu 18. Giải PT mũ đẳng cấp

Câu 19.Giải PT mũ bằng logarit hóa 2 vế

Câu 20. Giải bất PT logarit phối hợp 2 cơ số a<1 và 0<a<1

Câu 21.Bài toán thực tế về Pt mũ

Câu 22. Kết hợp đạo hàm của hàm số và giải PT

Câu 23. Tìm ĐK của tham số m để PT có mũ có nghiệm trong (a;b)

Câu 24.Tìm ĐK của tham số m để PT có logarit có nghiệm trong (a;b)

Câu 25.Tìm điều kiện có nghĩa của biểu thức phối hợp giữa că bậc chẵn và lũy thừa

IV. ĐỀ KIỂM TRA

Câu 1. Cho a là một số thực dương. Rút gọn biểu thức $a^{(1-\sqrt{2})^2}.a^{2(1+\sqrt{2})}$ kết quả là:

A. a B. a^3 C. a^5 D. 1

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=(2-x)^{\sqrt{3}}$ là:

A. $D=R\setminus\{2\}$ B. $D=(2;+\infty)$ C. $D=(-\infty;2)$ D. $D=R$

Câu 3: Cho a > 0 ; a ≠1 . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Tập xác định của hàm số $y=a^x$ là khoảng $(0;+\infty)$

B. Tập giá trị của hàm số $y=\log_a x$ là tập $\Re$

C. Tập xác định của hàm số $y=\log_a x$ là tập $\Re$

D. Tập giá trị của hàm số $y=a^x$ là tập $\Re$

Câu 4: Giá trị của $\log_{a^3} a (0<a\neq 1)$ bằng

A.3 B.$\frac{1}{3}$ C.-3 D.$-\frac{1}{3}$

Câu 5: Đạo hàm của hàm số y=x.lnx là:

A.$\frac{1}{x}$ B.lnx C.1 D. lnx+1

Câu 6: Số nghiệm của phương trình $3^x-3^{1-x}=2$ là:

A.0 B.1 C.2. D.3.

Câu 7: Tập xác định của hàm số y=log(1-2x+x^2) là:

A. D = R B. D = $(0;+\infty)$ C. D = $(1;+\infty)$ D. D = R\{1}

Câu 8: Tập nghiệm phương trình $\log_2 x+\log_2(x+1)=1$ là

A. S={1} B. S={1;-2} C. S=$\left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$ D. S=$\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}(x+1)>\log_{0,2}(3-x)$ là:

A. $S=(1;3)$ B. S=(-1;1) C. S=$(1;+\infty)$ D. S=$(-\infty;1)$

Câu 10: Đồ thị hàm số $y=3^x$ và $y=\log_3 x$ nhận đường thẳng nào sau đây làm trục đối xứng:

A.y=0 B. x=0 C. y=x D. y=-x

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[5]{x^3+8}$ là:

A. $y'=\dfrac{3x^2}{5\sqrt[5]{\left(x^3+8\right)^6}}$ B. $y'=\dfrac{3x^3}{2\sqrt[5]{x^3+8}}$ C. $y'=\dfrac{3x^2}{5\sqrt[5]{x^3+8}}$ D. $y'=\dfrac{3x^2}{5\sqrt[5]{\left(x^3+8\right)^4}}$

Câu 12:Nếu $\log_{12}6=a$ và $\log_{12}7=b$ thì:

A. $\log_2 7=\dfrac{a}{a-1}$ B. $\log_2 7=\dfrac{a}{1-b}$ C. $\log_2 7=\dfrac{a}{b+1}$ D. $\log_2 7=\dfrac{b}{1-a}$

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y=\log_3\dfrac{10-x}{x^2-3x+2}$ là

A. $D=(1;+\infty)$ B. D= $(-\infty;10)$ C. $D=(-\infty;1)\cup(2;10)$ D. $D=(2;10)$

Câu 14: Nếu $a^{\frac{3}{4}}>a^{\frac{4}{5}}$ và $\log_b\dfrac{1}{2}<\log_b\dfrac{2}{3}$ thì:

A. a>1; b>1 B. 0<a<1; b>1 C. a>1; 0<b<1 D. 0<a<1; 0<b<1

Câu 15: Đồ thị hàm số $y=\left(\dfrac{1}{5}\right)^x$ và y = 5^x nhận đường thẳng nào sau đây làm trục đối xứng:

A. y = 0 B. x = 0 C. y = x D. y = -x

Câu 16: Với 0 < a < 1 và b > 1, bất đẳng thức nào sau đây đúng

A. $\log_a b>\log_a\dfrac{1}{b}$ B. $\log_a b>-\log_a b$ C. $\log_a b<\log_a\dfrac{1}{b}$ D. $\log_a b\le\log_a\dfrac{1}{b}$

Câu 17: Hàm số nào sau đây chỉ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $y=x^{\frac{1}{4}}$ B. $y=x^{-2}$ C. $y=\dfrac{x-6}{x}$ D. $y=x^6$

Câu 18: Tập nghiệm của $12.9^x - 35.6^x + 18.4^x = 0$ là

A. S={1;2} B. S={1;-2} C. S={-1;-2} D. S={-1;2}

Câu 19: Số nghiệm của phương trình $3^x.2^{x^2}=1$ là:

A.0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 20: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\log_{\frac{1}{3}}x<2$ là

A. S= $\left(\dfrac{1}{81};1\right)$ B. S= $\left(-\infty;\dfrac{1}{81}\right)\cup(1;+\infty)$ C. S= $(1;+\infty)$ D. S=(1;81)

Câu 21:Dân số tỉnh A năm 2014 là khoảng 15 triệu người với mức độ tăng hàng năm là 1,3%/năm. Hỏi nếu với mức độ tăng như vậy thì vào năm nào dân số tỉnh A khoảng 20 triệu người:

A. Năm 2034-2035

B. Năm 2036-2037

C. Năm 2037-2038

D. Năm 2039-2040

Câu 22: Cho hàm số f(x) = $x^2 .\ln\sqrt[3]{x}$. Phương trình f '(x) = x có tất cả nghiệm thuộc khoảng:

A. (0; 1)

B. (1; 2)

C. (2; 3)

D. Một khoảng khác

Câu 23: Giá trị của *m* để phương trình $4^{|x|}-2^{|x|+1}+3=m$ có đúng 2 nghiệm là:

A. $m \geq 2$

B. $m \geq -2$

C. $m > -2$

D. $m > 3$, m = 2

Câu 24: Để phương trình: $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-4\log_{\frac{1}{3}} x+3-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng (1; +∞) thì giá trị của *m* là:

A. $m > 3$

B. $m > -1$

C. $m \geq -1$

D. $m < 3$

Câu 25: Điều kiện có nghĩa của $\mathrm{f}\left(x\right)=(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{x+1}$ là

A. $\begin{cases}-1\leq x<1\\ x\neq 2\end{cases}$

B. $\begin{cases}-1\leq x<1\\ x>2\end{cases}$

C. $\begin{cases}-1< x<1\\ x>2\end{cases}$

D. x>2

CHUYÊN ĐỀ 3
NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG
CHỦ ĐỀ 1: NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Nguyên hàm

+ Định nghĩa : $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

+ Tính chất : 1/ $\int f'(x)dx = f(x) + C$

2/ $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

3/ $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

+ Bảng nguyên hàm

$\int dx = x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1)$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int 0dx = C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$

2. Tích phân:

+ Định nghĩa : $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$

+ Tính chất :

1/ $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2/ $\int_a^b kf(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3/ $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

4/ $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5/ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (a < c < b)

3. Các phương pháp tìm nguyên hàm, tính tích phân.

Dạng 1 : Tìm nguyên hàm, tính tích phân bằng định nghĩa.

Dạng 2 : Xác định nguyên hàm, tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số.

Dạng 3 : Xác định nguyên hàm, tính tích phân bằng phương pháp nguyên hàm từng phần.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

+ Áp dụng ĐN, tính chất, bảng nguyên hàm để tìm nguyên hàm, tính tích phân .

+ Áp dụng phương pháp đổi biến số, phương pháp từng phần để tính tích phân

+ Sử dụng máy tính cầm tay để giải bài tập về nguyên hàm, tích phân

C. BÀI TẬP

Dạng 1: Áp dụng ĐN, tính chất, bảng nguyên hàm để tìm nguyên hàm, tính tích phân

Bài 1.Tìm nguyên hàm của các hàm số.

a. f(x) = $\frac{(x^2-1)^2}{x^2}$ => f(x) = $x^2-2+\frac{1}{x^2}$ ĐS. F(x) = $\frac{x^3}{3}-2x+\frac{1}{x}+C$

b. f(x) = $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$ => f(x) = $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}$ ĐS. F(x) = $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}+\frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5}+C$

c. f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ => f(x) = $x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{3}}$ ĐS. F(x) = $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2}+C$

d. f(x) = $\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$ => f(x) = $1-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}$ ĐS. F(x) = $x-4\sqrt{x}+\ln x+C$

e. f(x) = $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$ => f(x) = $(x-1).x^{-\frac{1}{3}}$ ĐS. F(x) = $x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}+C$

g. f(x) = $2\sin^2\frac{x}{2}$ => f(x) = 1 - cosx ĐS. F(x) = x – sinx + C

h. f(x) = $\tan^2$x => f(x) = $\frac{1}{cos^2x}-1$ ĐS. F(x) = tanx – x + C

i. f(x) = $e^{2x}+1$ ĐS. F(x) = $\frac{1}{2}e^{2x}+x+C$

Bài 2. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $\int(x^4-3x^2+2x+1)dx=\int x^4dx-3\int x^2dx+2\int xdx+\int dx=\frac{x^5}{5}-x^3+x^2+x+C$

b) $\int(x+1)(x-2)dx = \int(x^2-x-2)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$

c) $\int\frac{1}{x^2-3x+2}dx=\int(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1})dx=\ln|x-2|-\ln|x-1|+C = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$

d) $\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-2x+e^x\right)dx = tanx-x^2+e^x+C$

e) $\int(\cos3x-5\sin x)dx=\int\cos3xdx-5\int\sin xdx=\frac{1}{3}\sin3x + 5\cos x + C$

g) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx = \int\frac{1-cosx}{2}.dx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cosx\right)dx=\frac{x}{2}-\frac{sinx}{2}+C$

Bài 3. Tìm hàm số f(x) biết:

a) f’(x) = 2x + 1 và f(1) = 5

Ta có $f(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$; Vì f(1) = 5 nên C = 3; Vậy : f(x) = x^2 + x + 3

b) f'(x) = 2 – x^2 và f(2) = 7/3; Ta có: f(x) = $\int\left(2-x^2\right)dx = 2x-\frac{x^3}{3}+C$

Vì f(2) = 7/3 nên C = 1; Vậy: f(x) = $2x-\frac{x^3}{3}+1$

Bài 4. Tính các tích phân sau

a) $\int_0^1 (x^3-1)dx = \int_0^1 (x^3-1)dx = \int_0^1 x^3dx - \int_0^1 dx = (\frac{x^4}{4}-x)\Big|_0^1 = \frac{-3}{4}$

b) $\int_1^2 \frac{x^2+4x}{x}dx = \int_1^2 (x+4)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_1^2 = (2+8)-\left(\frac{1}{2}+4\right) = \frac{11}{2}$

c) $\int_0^1 (e^x+2)dx \;\; = \left(e^x+2x\right)\Big|_0^1 = e+2-1 = e+1$

Bài 5. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 3\text{sinx})dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 3\text{sinx})dx = \left(\text{s inx + 3cosx}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3+\cos 2x).dx \; = \left(3x+\frac{1}{2}\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos x - \sin 2x\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2xdx \; = \; 2\sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}cos2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \; = 1$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin3x\cos x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [sin4x + sin2x]dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2xdx\right]$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}cos4x - \frac{1}{2}cos2x\right] = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{4}cos2\pi - \frac{1}{2}cos\pi\right) - \left(-\frac{1}{4}cos0 - \frac{1}{2}cos0\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Bài 6. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^2 \left|x^2-1\right|dx = \int_0^1 -\left(x^2-1\right)dx + \int_1^2 \left(x^2-1\right)dx = \left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_1^2 = 1-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1 = 2$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \left|\sin x\right|dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \cos x\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \cos x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = 1-\frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\cos x - \sin x\right)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos x - \sin x\right|dx \; = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos x - \sin x\right)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \cos x\right)dx$

$$= \left(\sin x + \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\cos x + \sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} - 2$$

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Tìm nguyên hàm $\int 4x^2 dx$.

A. $\frac{3}{4}x^2 + C$ **B.** $\frac{3}{4}x^3 + C$ **C.** $\frac{4}{3}x^2 + C$ **D.** $\frac{4}{3}x^3 + C$.

Câu 2. Nguyên hàm $\int 5(x^2 - 2x + 3)dx$ bằng

A. $5x^3 - 10x^2 + 15x$. **B.** $5x^3 - 10x^2 + 15x + C$.

C. $\frac{5}{3}x^3 - 5x^2 + 15x + C$ **D.** $\frac{5}{3}x^3 - 10x^2 + 15x + C$.

Câu 3. Nguyên hàm $\int 5(3x^2 - 1)^2 dx$ bằng

A. $9x^5 - 10x^3 + 5x + C$ **B.** $9x^5 + 10x^3 - 5x + C$

C. $15x^5 - 10x^3 + 5x + C$ **D.** $15x^5 + 10x^3 - 5x + C$.

Câu 4. Nguyên hàm $\int (\cos x + \sin x)dx$ bằng

A. sinx + cosx + C **B.** sinx – cosx + C

C. –sinx + cosx + C **D.** –sinx – cosx + C.

Câu 5. Nguyên hàm $\int (x^2 - 2x + \frac{4}{x})dx$ bằng

A. $\frac{x^3}{3} - x^2 + 4\ln|x| + C$ **B.** $\frac{x^3}{3} - x^2 + 4\ln x + C$

C. $\frac{x^3}{3} - x^2 - 4\ln|x| + C$ **D.** $\frac{x^3}{3} - x^2 - 4\ln x + C$.

Câu 5. Nguyên hàm $\int \frac{x^2 + 2x^3 + x^2 + 1}{x^2} dx$ bằng

A. $\frac{x^3}{3} + x^2 + x - \frac{1}{x} + C$ **B.** $\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - \frac{3}{x} + C$

C. $\frac{2x^3}{3} + x^2 + x - \frac{2}{x} + C$ **D.** $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + x - \frac{1}{x} + C$.

Câu 6. Nguyên hàm $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x^4}\right)dx$ bằng

A. $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{5}x^{\frac{9}{5}} + C$ **B.** $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} + \frac{9}{5}x^{\frac{9}{5}} + C$

C. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} + C$ **D.** $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} + \frac{5}{9}x^{\frac{5}{9}} + C$.

Câu 7. Nguyên hàm $\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2} dx$ bằng

A. $\frac{2x^3}{3} + 3x - \frac{2}{x} + C$ **B.** $\frac{x^3}{3} - 3x + \frac{3}{x} + C$

C. $\frac{2x^3}{3}+2x-\frac{3}{x}+C$ **D.** $\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}+C$.

Câu 8. Nguyên hàm $A=\int 2^x.3^{2x}dx$ bằng

A. $\frac{12^x}{\ln 12}+C$ **B.** $\frac{14^x}{\ln 14}+C$ **C.** $\frac{16^x}{\ln 16}+C$ **D.** $\frac{18^x}{\ln 18}+C$.

Câu 9. Nguyên hàm $\int \cot^2 x\,dx$ bằng

A. tanx + x + C **B.** –tanx + x + C **C.** –cotx – x + C **D.** cotx + x + C.

Câu 10. Nguyên hàm $\int \tan^2 x\,dx$ bằng

A. cotx – x + C **B.** cotx + x + C **C.** tanx – x + C **D.** tanx + x + C

Câu 11. Nguyên hàm $\int 3\sin^2\frac{x}{2}dx$ bằng

A. $\frac{3}{2}(x-\sin x)+C$ **B.** $\frac{3}{2}x-\sin x+C$ **C.** $\frac{3}{2}x\sin x+C$ **D.** $\sin^3\frac{x}{2}+C$

Câu 12. Giả sử $\int_1^5\frac{dx}{2x-1}=\ln c$. Giá trị của c là

A. 3 **B.** 4 **C.** 9 **D.** 16.

Câu 13. Tích phân $\int_1^2(x^2-2x+3)dx$ bằng

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{7}{3}$ **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 14. Tích phân $\int_2^6\sqrt{x-2}\,dx$ bằng

A. $\frac{14}{3}$ **B.** $\frac{16}{3}$ **C.** $\frac{17}{3}$ **D.** $\frac{18}{3}$.

Câu 15. Tích phân $\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^3}$ bằng

A. $\frac{3}{8}$ **B.** $\frac{5}{8}$ **C.** $\frac{7}{8}$ **D.** $\frac{9}{8}$.

Câu 16. Tích phân $\int_0^1\frac{x}{x+1}dx$ bằng

A. ln2 **B.** ln3 **C.** 1 – ln2 **D.** 1 – ln3.

Câu 17. Tích phân $\int_0^1\frac{2x+9}{x+3}dx$ bằng

A. ln2 – ln3 **B.** ln3 – ln2 **C.** 6ln3 – 3ln2 **D.** 3 + 6ln2 – 3ln3.

Câu 18. Tích phân $\int_0^1\frac{x}{4-x^2}dx$ bằng

A. $\ln\frac{4}{3}$ **B.** $\ln\frac{3}{5}$ **C.** $\ln\frac{3}{4}$ **D.** $\ln\frac{3}{5}$.

Câu 19. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** π

Câu 20. Tích phân $\int_0^{\pi}\cos x\,dx$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** π

Câu 21: Giả sử $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \sin 2x dx = (a+b)$, Khi đó giá trị a+b là:

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $-\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

Câu 22. Tính $\int \cos^2 x dx$.

A. $\frac{1}{4}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)+C.$ B. $\frac{1}{4}(2x+\sin 2x)+C.$

C. $\frac{1}{2}(x+\sin 2x)+C.$ D. $\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)+C.$

Câu 23. Tính $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

A. $\ln|\ln x|+C.$ B. $\frac{x^2}{2}(\ln x-1)+C.$ C. $\frac{1}{2}\ln^2 x+C.$ D. $\ln\frac{x^2}{2}+C.$

Câu 24. Giá trị m để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ là:

A. m = 3. B. m = 0. C. m = 1. D. m = 2.

Câu 25. Nếu $\int \frac{dx}{x^4} = -\frac{a}{bx^3} + C$ thì $b-a$ bằng:

A. 2. B. -2. C. 1 . D. -1.

BUỔI 2
DẠNG 2. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Nguyên hàm

Tính I = $\int f[u(x)].u'(x)dx$ bằng cách đặt t = u(x)

Đặt t = u(x) $\Rightarrow dt = u'(x)dx$
I = $\int f[u(x)].u'(x)dx = \int f(t)dt$

2. Tính tích phân $\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ **bằng phương pháp đổi biến.**

Bước 1: Đặt t = $\varphi(x) \Rightarrow$ dt = $\varphi'(x)$. dx

Bước 2: Đổi cận: x = a $\Rightarrow$ t = $\varphi(a)$; x = b $\Rightarrow$ t = $\varphi(b)$

Bước 3: Viết tích phân đã cho theo biến mới, cận mới rồi tính tích phân tìm được .

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

+ Biết cách đặt ẩn phụ

+ Biết biểu diễn nguyên hàm theo ẩn phụ, đổi cận đối với tích phân.

+ Biết sử dụng tính chất, công thức vào giải toán.

C. BÀI TẬP

1. NGUYÊN HÀM

Bài 1. **Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:**

a) $\int \sqrt{x^2+1}.xdx$ Đặt $u = x^2+1 => du = 2xdx => xdx = \frac{1}{2}du$

$=> \int \sqrt{x^2+1}.xdx = \int u^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}}.\frac{2}{3} = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3} + C$

b) $\int \left(x^3+5\right)^4 x^2dx$ Đặt $u = x^3+5 => du = 3x^2dx => x^2dx = \frac{1}{3}du$

$=> \int \left(x^3+5\right)^4 x^2dx = \int \frac{1}{3}u^4du = \frac{1}{3}\int u^4du = \frac{1}{3}.\frac{u^5}{5} + C = \frac{u^5}{15} + C = \frac{\left(x^3+5\right)^5}{15} + C$

c) $\int \frac{x}{x^2+5}dx$ Đặt $u = x^2+5 => du = 2xdx => xdx = \frac{1}{2}du$

$=> \int \frac{x}{x^2+5}dx = \int \frac{1}{2}.\frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right) + C$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$ Đặt u = 2x-1=>du = 2dx

$=> \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}.2u^{\frac{1}{2}} + C = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{u} + C = \sqrt{2x-1} + C$

e) $\int (x-1)e^{x^2-2x+3}dx$; Đặt $u = x^2-2x+3 => du = 2(x-1)dx => (x-1)dx = \frac{du}{2}$

$$=> \int (x-1)e^{x^2-2x+3}dx = \int \frac{1}{2}.e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2-2x+3} + C$$

Bài 4. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int \frac{\sin x}{cos^5 x}dx$ Đặt $u = \cos x => du = -\sin xdx$

$$=> \int \frac{\sin x}{cos^5 x}dx = -\int \frac{du}{u^5} = -\int u^{-5}du = \frac{u^{-4}}{4} + C = \frac{1}{4u^4} + C = \frac{1}{4cos^4 x} + C$$

b) $\int \cot xdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$ Đặt u = sinx => du = cosxdx

$$=> \int \cot xdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

c) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{cos^2 x}}dx = \int \frac{\sin x}{cos^{\frac{2}{3}} x}dx = \int \sin x.cos^{-\frac{2}{3}}xdx$ Đặt $u = \cos x => du = -\sin xdx$

$$=> \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{cos^2 x}}dx = -\int u^{-\frac{2}{3}}du = -3u^{\frac{1}{3}} + C = -3\sqrt[3]{\cos x} + C$$

d) $\int (1+\cot^2 2x)e^{\cot 2x}dx$ Đặt $u = \cot 2x => du = -\frac{2}{\sin^2 2x}dx => du = -2(1+\cot^2 2x)dx$

$$=> \int (1+\cot^2 2x)e^{\cot 2x}dx = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^{\cot 2x} + C$$

2. TÍCH PHÂN

Bài 1. Tính các tích phân sau **:**

a) $A = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$

Đặt $t = 1+x^2 => dt = 2xdx$; Đổi cận: Khi x = 0=> t = 1; Khi x = 1=> t = 2

$$=> A = \int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\int_1^2 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}t\sqrt{t}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

b) $B = \int_0^1 x^3(x^4-1)^5 dx$

Đặt $t = x^4 - 1 => dt = 4x^3dx$; Đổi cận: Khi x = 0 => t = -1; x = 1 => t = 0

$$=> B = \int_{-1}^0 \frac{1}{4}t^5dt = \frac{1}{4}.\frac{t^6}{6}\Big|_{-1}^0 = \frac{1}{24}t^6\Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{24}$$

c) $C = \int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x - 1}$;

Đặt $t = e^x - 1 => dt = e^x dx$ Đổi cận: Khi x = 1=> t = e – 1;Khi x = 2=> t = $e^2 - 1$

$$=> C = \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{e-1}^{e^2-1} = \ln(e^2-1) - \ln(e-1) = = \ln\frac{e^2-1}{e-1} = \ln(e+1)$$

d) D = $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,xdx$ Đặt $t = 4 - x^2 \Rightarrow dt = -2xdx \Rightarrow xdx = -\frac{dt}{2}$

Khi x = 0=> t = 4 ; x = 2 => t = 0

$\Rightarrow D = \int_4^0 -\frac{1}{2}\sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\int_0^4 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^4 = \frac{1}{3}\left(t\sqrt{t}\right)\Big|_0^4 = \frac{1}{3}(4.2-0) = \frac{8}{3}$

e) $E = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$

Khi x = 1=> t = 1 ; x = 4 => t = 2 ; $\Rightarrow E = \int_1^2 2.e^t dt = 2e^t\Big|_1^2 = 2\left(e^2 - e\right)$

f) $F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin2x}{1+sin^2x}dx$ Đặt $t = sin^2x \Rightarrow dt = 2\sin x\cos xdx = sin2xdx$

Khi $x = 0 \Rightarrow sin^2 0 = 0 \Rightarrow t = 0;\quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow sin^2\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow t = 1$

$\Rightarrow F = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

g) G = $\int_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^2 .e^x dx$ **(Đề thi TN năm 2011-2012)**

Đặt $t = e^x - 1 \Rightarrow dt = e^x dx$; Đổi cận : Khi x = 0 => t = 0 ; $x = \ln 2 \Rightarrow t = 1$

=> G = $\int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Nguyên hàm $\int (5x+3)^5 dx$ bằng

A. $\frac{x^6}{30} + C$ **B.** $\frac{x^5}{25} + C$ **C.** $\frac{x^4}{24} + C$ **D.** $\frac{x^3}{20} + C$.

Câu 2. Nguyên hàm $\int \sin^4 x.\cos x\, dx$ bằng

A. $\frac{\cos^5 x}{5} + C$ **B.** $\frac{\sin^5 x}{5} + C$ **C.** $\cos^5 x + C$ **D.** $\sin^5$x + C.

Câu 3. Nguyên hàm $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ bằng

A. lne^x + C **B.** $\frac{\ln x}{\ln e^x}$ + C **C.** ln(e^x – 1) **D.** ln(e^x + 1).

Câu 4. Nguyên hàm $\int \frac{x^3}{(6x^4+5)^5}dx$ bằng

A. $\dfrac{-6}{85(6x^4+5)^4}+C$

B. $\dfrac{-2}{55(6x^4+5)^4}+C$

C. $\dfrac{-1}{96(6x^4+5)^4}+C$

D. $\dfrac{1}{75(6x^4+5)^4}+C$.

Câu 5. Nguyên hàm $\int \sqrt{2\cos x-1}.\sin x dx$ bằng

A. $-\dfrac{1}{3}\sqrt{(2\cos x-1)^3}+C$

B. $-\dfrac{1}{3}\sqrt{(3\cos x-2)^3}+C$

C. $\dfrac{1}{3}\sqrt{(2\cos x-1)^3}+C$

D. $\dfrac{1}{3}\sqrt{(3\cos x-2)^3}+C$.

Câu 6. Nguyên hàm $\int \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}dx$ bằng

A. $-\dfrac{1}{\cos x}+C$ **B.** $-\dfrac{1}{\sin x}+C$ **C.** $\dfrac{1}{\sin x}+C$ **D.** $\dfrac{1}{\cos x}+C$.

Câu 7. Nguyên hàm $\int \dfrac{\text{s inx}}{\cos^2 x}dx$ bằng

A. $-\dfrac{1}{\cos x}+C$ **B.** $-\dfrac{1}{\sin x}+C$ **C.** $\dfrac{1}{\sin x}+C$ **D.** $\dfrac{1}{\cos x}+C$.

Câu 8. Nguyên hàm $\int (\tan x+\tan^3 x)dx$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\tan^2 x+C$ **B.** $\tan^2 x+C$ **C.** $\dfrac{1}{3}\tan^3 x+C$ **D.** $\tan^3 x+C$.

Câu 9. Nguyên hàm $\int [x(3-x^4)]^3 dx$ bằng

A. $\dfrac{3-x^4}{16}+C$ **B.** $\dfrac{x^4-3}{16}+C$ **C.** $-\dfrac{(3-x^4)^4}{16}+C$ **D.** $\dfrac{(3-x^4)^4}{16}+C$.

Câu 10. Nguyên hàm $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx$ bằng

A. $-e^{\sqrt{x}}+C$ **B.** $e^{\sqrt{x}}+C$ **C.** $2e^{\sqrt{x}}+C$ **D.** $3e^{\sqrt{x}}+C$.

Câu 11. Nguyên hàm $\int \dfrac{1}{x}\ln x dx$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$ B. $\dfrac{1}{2}\ln x^2+C$ C. $\dfrac{1}{2}\ln^2 x^2+C$ D. $\ln x^2+C$.

Câu 12 . Tích phân $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}.dx$ bằng

A. $\dfrac{43}{7}$ **B.** $\dfrac{47}{8}$ **C.** $\dfrac{52}{9}$ **D.** $\dfrac{57}{10}$.

Câu13. Tính tích phân $\int_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1}.dx$.

A. $-\dfrac{9}{28}$ **B.** $-\dfrac{7}{15}$ **C.** $\dfrac{5}{12}$ **D.** $\dfrac{9}{17}$.

Câu 14. Tính tích phân $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$.

A. $\dfrac{5\sqrt{5}-4\sqrt{3}}{5}$ **B.** $\dfrac{25\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{5}$ **C.** $\dfrac{25\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{5}$ **D.** $\dfrac{5\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{5}$.

Câu 15. Tính tích phân $\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$.

A. $-\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$ **B.** $\dfrac{64}{15}$ **C.** $-\dfrac{5\sqrt{5}}{3}-\dfrac{64}{15}$ **D.** $-\dfrac{5\sqrt{5}}{3}+\dfrac{64}{15}$.

Câu 16. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \dfrac{x^3-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

A. $-\dfrac{21}{25}$ **B.** $-\dfrac{21}{23}$ **C.** $-\dfrac{19}{24}$ **D.** $-\dfrac{19}{22}$.

Câu 17. Tính tích phân $\int_1^2 \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$.

A. $-\sqrt{3}-2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ **B.** $\sqrt{3}-2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

C. $\sqrt{3}+2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ **D.** $-\sqrt{3}+2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

Câu 18. Tính tích phân $\int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

A. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{3}{5}$ **C.** $4\ln\dfrac{3}{5}$ **D.** $4\ln\dfrac{5}{3}$

Câu 19. Tính tích phân $\int_{-2}^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

A. 0 **B.** $\dfrac{15}{19}$ **C.** $\dfrac{21}{28}$ **D.** 2π

Câu 20. Tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$ bằng

A. $\ln\left(\dfrac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}\right)$ **B.** $\ln\left(\dfrac{e-\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}\right)$ **C.** $\ln\left(\dfrac{e+\sqrt{e+1}}{1+\sqrt{2}}\right)$ **D.** $\ln\left(\dfrac{e-\sqrt{e+1}}{1+\sqrt{2}}\right)$

Câu 21. Cho $\int\limits_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ và $u=x^2-1$. Chọn khẳng định **sai?**

A. $I=\int\limits_1^2\sqrt{u}du$ B. $I=\int\limits_0^3\sqrt{u}du$ C. $I=\dfrac{2}{3}\sqrt{27}$ D. $I=\dfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3$

Câu 22: Biết $\int_{o}^{a} \sin x \cos x dx = \frac{1}{4}$. Tìm giá trị của a.

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

Câu 23. Biết $\int_{2}^{3} \frac{1}{x^2 - x} dx = a\ln 2 + b\ln 3$.Tìm giá trị $S = a + b$.

A. $S = -2.$ B. $S = 0.$ C. $S = 2.$ D. $S = 1.$

Câu 24. Cho $\int_{1}^{2017} f(x)dx = 2, \int_{1}^{2017} g(x)dx = -5.$ Tìm $J = \int_{1}^{2017} [2f(x) + g(x)]dx$.

A. $J = -1.$ B. $J = 1.$ C. $J = 0.$ D. $J = 2.$

Câu 25. Giả sử $\int_{0}^{2} \frac{x-1}{x^2 + 4x + 3} dx = a\ln 5 + b\ln 3$, với $a, b \in Q$. Khi đó $a - b$ bằng:

A. 5. B. $-1.$ C. $-5.$ D. 1.

BUỔI 3

DẠNG 3. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nguyên hàm

Nếu u(x), v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên I

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$$

Hay $\int udv = uv - \int vdu$ (với du = u'(x)dx, dv = v'(x)dx)

2. Tính tích phân từng phần : $\int_a^b \mathrm{u}(x)\mathrm{v}'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

+ Phân dạng

Dạng 1: $\int_\alpha^\beta f(x)\begin{bmatrix}\sin ax\\ cosax\\ e^{ax}\end{bmatrix}dx$ Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \begin{bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}\end{bmatrix}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int \begin{bmatrix}\sin ax\\ cosax\\ e^{ax}\end{bmatrix}dx \end{cases}$

Dạng 2: $\int_\alpha^\beta f(x)\ln(ax)dx$ Đặt $\begin{cases} u = \ln(ax) \\ dv = f(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \int f(x)dx \end{cases}$

Dạng 3: $\int_\alpha^\beta e^{ax}.\begin{bmatrix}\sin ax\\ cosax\end{bmatrix}dx$ đặt: $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin axdx \end{cases}$

C. BÀI TẬP

1.NGUYÊN HÀM

Bài 1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int x.\sin xdx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin xdx \end{cases}$ => $\begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

=> $\int x.\sin xdx$ = -xcosx + $\int cosxdx$ = $-x\cos x + \sin x + C$

b) $\int (x-1)e^x dx$ Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{cases}$ => $\begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

=> $\int (x-1)e^x dx$ = (x-1). e^x - $\int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + C = e^x(x-2) + C$

c) $\int x\ln xdx$ Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases}$ => $\begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$=> \int x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

d) $\int (1-x)\cos xdx$ Đặt $\begin{cases} u = 1-x \\ dv = \cos xdx \end{cases} => \begin{cases} du = -dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$=> \int (1-x)\cos xdx = (1-x)\sin x + \int \sin xdx = (1-x)\sin x - \cos x + C$$

<u>Bài 2.</u> Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int (1-2x)e^x dx$ Đặt $\begin{cases} u = 1-2x \\ dv = e^x dx \end{cases} => \begin{cases} du = -2dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$=> \int (1-2x)e^x dx = (1-2x)e^x + \int 2e^x dx = (1-2x)e^x + 2e^x + C = e^x(3-2x) + C$$

b) $\int \sqrt{x}\ln xdx$ Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \sqrt{x}dx \end{cases} => \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

$$=> \int \sqrt{x}\ln xdx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}.\frac{dx}{x} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C$$

c) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}dx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x}dx \end{cases} => \begin{cases} du = dx \\ v = -cotx \end{cases}$

$$=> \int \frac{xdx}{\sin^2 x}dx = \text{-xcotx} + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = -x\cot x + \ln|\sin x| + C$$

d) $\int (2x+3)e^{-x}dx$ Đặt $\begin{cases} u = 2x+3 \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} => \begin{cases} du = 2dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

$$=> \int (2x+3)e^{-x}dx = -e^{-x}(2x+3) - \int -e^{-x}.2dx = -e^{-x}(2x+3) + \int 2e^{-x}dx$$

$$= -e^{-x}(2x+3) - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(2x+1) + C$$

2. TÍCH PHÂN

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a/ I= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos x.dx$ Đặt : $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

Vậy : I = x sinx $\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.dx$ = $\frac{\pi}{2}$+ cosx $\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ = $\frac{\pi}{2}$ -1 b/ J= $\int_1^e x.\ln x.dx$ Đặt : $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}.dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Vậy : J = lnx. $\dfrac{x^2}{2}\Big|_1^e$ - $\int_1^e \dfrac{x^2}{2}.\dfrac{1}{x}dx = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{2}\int_1^e xdx = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \dfrac{e^2+1}{4}$

c) $\int_0^1 x.e^x dx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

Vậy : $\int_0^1 x.e^x dx = x.e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

a) A = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{xdx}{\cos^2 x}$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{xdx}{\cos^2 x} = (x\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan xdx = \dfrac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x}{\cos x}dx$

$= \dfrac{\pi}{4} + (\ln|\cos x|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{4} + \left(\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1\right) = \dfrac{\pi}{4} + \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) B = $\int_0^1 x.e^{2x}dx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$\int_0^1 x.e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}x.e^{2x}\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}x.e^{2x}\Big|_0^1 - \dfrac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}e^2 - \dfrac{1}{4}e^2 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1+e^2}{4}$

c) C = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos xdx$ Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \sin x \end{cases}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos xdx = x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx = \dfrac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$

* Tính : I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -x.\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Thế I = 1 vào C ta được : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Tìm nguyên hàm $\int x\ln x dx$.

A. $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ **B.** $x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

C. $\frac{1}{3}x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 + C$ **D.** $x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 2. Nguyên hàm $\int x.2^x dx$ bằng

A. $\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}.2^x + C$ **B.** $\frac{x.2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}.2^x + C$

C. $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 2}.2^x + C$ **D.** $\frac{x.2^x}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 2}.2^x + C$.

Câu 3. Nguyên hàm $\int \sqrt{x}.\ln x dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C$ **B.** $\frac{2}{3}x\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C$

C. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C$ **D.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x + \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C$.

Câu 4. Nguyên hàm $\int x\ln(x+2)dx$ bằng

A. $x^2\ln(x+2) - \frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(x+2) + C$ **B.** $\frac{x^2}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + 4\ln(x+2)\right] + C$

C. $\frac{x^2}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(x+2)\right] + C$ **D.** $\ln(x+2) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x+2)\right] + C$

Câu 5. Nguyên hàm $\int x.e^{x^2+1}dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}e^{x^2+1} + C$ **B.** $e^{x^2+1} + C$ **C.** $2e^{x^2+1} + C$ **D.** $x^2.e^{x^2+1} + C$

Câu 6. Nguyên hàm $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ bằng:

A. $\frac{3}{2}\sqrt{(\ln x)^3} + C$ **B.** $2\sqrt{(\ln x)^3} + C$ **C.** $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$ **D.** $3\sqrt{(\ln x)^3} + C$

Câu 7. Nguyên hàm $\int \frac{1}{x.\ln^5 x}dx$ bằng:

A. $-\frac{\ln^4 x}{4}+C$ **B.** $-\frac{4}{\ln^4 x}+C$ **C.** $\frac{1}{4\ln^4 x}+C$ **<u>D.</u>** $-\frac{1}{4\ln^4 x}+C$

Câu 8. Nguyên hàm $\int x\cos xdx$ bằng:

A. $\frac{x^2}{2}\sin x+C$ **<u>B.</u>** $x\sin x+\cos x+C$

C. $x\sin x-\sin x+C$ **D.** $\frac{x^2}{2}\cos x+C$.

Câu 9: Nguyên hàm $\int xe^{\frac{x}{3}}dx$ bằng:

<u>A.</u> $3(x-3)e^{\frac{x}{3}}+C$ **B.** $(x+3)e^{\frac{x}{3}}+C$

C. $\frac{1}{3}(x-3)e^{\frac{x}{3}}+C$ **D.** $\frac{1}{3}(x+3)e^{\frac{x}{3}}+C$

Câu 10. Tìm nguyên hàm $\int (x-1)e^{x^2-2x+3}dx$.

A. $\left(\frac{x^2}{2}-x\right)e^{x^2-2x+3}+C$ **B.** $(x-1)e^{\frac{1}{3}x^3-x^2+3x}+C$

C. $\frac{1}{2}e^{x^2-2x}+C$ **<u>D.</u>** $\frac{1}{2}e^{x^2-2x+3}+C$

Câu 11. Tích phân $\int_0^1 xe^x dx$ bằng:

A. e **B.** $e-1$ **<u>C.</u>** 1 **D.** $\frac{1}{2}e-1$.

Câu 12. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2xdx$ bằng:

<u>A.</u> $\frac{\pi-2}{8}$ **B.** $\frac{\pi-1}{4}$ **C.** $3-\frac{\pi}{2}$ **D.** $2-\frac{\pi}{2}$.

Câu 13. Tích phân $\int_0^3 (x+1)\ln(x+1)dx$ bằng:

A. $6\ln 2-\frac{3}{2}$ **B.** $10\ln 2+\frac{16}{5}$ **C.** $8\ln 2+\frac{7}{2}$ **<u>D.</u>** $16\ln 2-\frac{15}{4}$.

Câu 14. Tích phân $\int_0^1 x\ln(x^2+1)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}\ln 2-1$ **B.** $\ln 2-1$ **<u>C.</u>** $\ln 2-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}(\ln 2-1)$.

Câu 15. Tính tích phân $\int_1^e x^2\ln xdx$.

A. $\frac{e^2+1}{4}$ **<u>B.</u>** $\frac{2e^3+1}{9}$ **C.** $\frac{3e^3+2}{8}$ **D.** $\frac{2e^2+3}{3}$.

Câu 16. Tìm tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos xdx$.

<u>A</u>. $\pi-3$ **B.** $\pi+3$ **C.** $2\pi-3$ **D.** $2\pi-3$.

Câu 17. Tính tích phân $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin 2xdx.$

A. $\frac{\pi}{4}-1$ **B.** $\frac{\pi}{4}+1$ **C.** $\frac{\pi}{4}+2$ **D.** $\frac{\pi}{4}-2$.

Câu 18. Tính tích phân $I_3=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\sin 3xdx.$

A. $\frac{9}{5}$ **B.** $-\frac{9}{5}$ **C.** $\frac{5}{9}$ **D.** $-\frac{5}{9}$.

Câu 19. Tính tích phân $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x(1+\sin 2x)dx.$

A. $\frac{\pi^2}{32}+\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{\pi^2}{32}+\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{2}$.

Câu 20. Tích phân $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2 \sin xdx.$

A. $\pi-1$ **B.** $\pi-2$ **C.** $\pi-3$ **D.** $\pi-4$

Câu 21. Tính tích phân $I=\int_{0}^{1}xe^{x}dx.$

A. $I=1.$ B. $I=2.$ C. $I=3.$ D. $I=4.$

Câu 22. Giả sử $\int_0^2\frac{x-1}{x^2+4x+3}dx=a\ln 5+b\ln 3$, với $a,b\in Q$. Khi đó $a-b$ bằng:

A. $5.$ B. $-1.$ C. $-5.$ D. $1.$

Câu 23. Tính tích phân $I=\int_{0}^{1}x.e^{-x}dx.$

A. 1. B. $1-\frac{2}{e}.$ C. $\frac{2}{e}.$ D. $2e-1.$

Câu 24. Tính tích phân $I=\int_{1}^{2}\left(x^2-1\right)\ln xdx.$

A. $I=\frac{2\ln 2+6}{9}.$ B. $I=\frac{6\ln 2+2}{9}.$ C. $I=\frac{2\ln 2-6}{9}.$ D. $I=\frac{6\ln 2-2}{9}.$

Câu 25. Tích phân $\int_{0}^{\pi}e^{x}\cos xdx=a.e^{\pi}+b$. Khi đó tổng S = a + b bằng:

A. $S=-\frac{1}{2}.$ B. $S=-1.$ C. $S=\frac{1}{2}.$ D. $S=1.$

BUỔI 4

CHỦ ĐỀ 2. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Diện tích hình phẳng

+ Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số f(x) liên tục, trục hoành, và hai đường thẳng x = a, x = b được tính theo công thức $S = \int_a^b |f(x)|dx$ (1)

+ Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số y=f_1(x), y = f_2(x) liên tục trên [a;b] và các đường thẳng x = a; x = b là: S = $\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx$ (2)

+ Chú ý: $\int_a^c |f_1(x) - f_2(x)|dx = \left|\int_a^c [f_1(x) - f_2(x)]dx\right|$

2. Thể tích vật thể

Cho vật thể (T) giới hạn bởi 2 mp song song (α), (β). Xét hệ tọa độ Oxy sao cho Ox vuông góc với (α), (β). Gọi giao điểm của (α), (β) với Ox là a, b (a<b). Một mp(γ) vuông góc với Ox tại x và cắt (T) theo một thiết diện có diện tích S(x).

Giả sử S(x) là hàm liên tục trên [a; b]. Khi đó thể tích của (T) là : V = $\int_a^b S(x)dx$ (3)

3. Thể tích khối tròn xoay quay quanh trục Ox

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx \quad (4)$$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

+Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đường cong, hai đường cong, ba đường cong;

+Tính thể tích vật thể tròn xoay;

+ Giải một số bài toán thực tế.

C. BÀI TẬP

__Bài 1__. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hàm số y = x^3 , trục hoành và hai đường thẳng x = -2, x = 2

Ta có trên [-2;0], $x^3 \le 0$. Trên [0; 2], $x^3 \ge 0$

$$S = \int_{-2}^{2} |x^3|dx = \int_{-2}^{0} (-x^3)dx + \int_0^2 x^3dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = -\frac{1}{4}.(-16) + \frac{1}{4}.16 = 8 \quad (\text{ĐVDT})$$

b) Đồ thị hàm số y = x + x^{-1} , trục hoành , đường thẳng x = 1 và x = 2

Ta có: $S = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Big|_1^2 = 2 + \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 = \frac{3}{2} - \ln 2$

c) Đồ thị hàm số y = e^x +1 , trục hoành , đường thẳng x = 0 và đường thẳng x = 1

Ta có: $S=\int_0^1\left(e^x+1\right)dx=\left(e^x+x\right)\Big|_0^1=e+1-1=e$

d) Đồ thị hàm số y = x^3 - 4x , trục hoành , đường thẳng x = 2 và đường thẳng x = 4

Ta có: $S=\int_2^4\left(x^3-4x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_2^4=36$ (ĐVDT)

Bài 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi.

a) Đồ thị hàm số y = x^3 - x; y = x - x^2 .Đặt $f_1(x) = x^3 - x$, $f_2(x) = x - x^2$

Ta có $f_1(x) - f_2(x) = 0$ <=> $x^3 + x^2 - 2x = 0$ có 3 nghiệm x = -2; x = 0 ; x = 1

Vậy : Diện tích hình phẳng đã cho là :

$$S=\int_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|dx=\left|\int_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(x^2+x^2-2x\right)dx\right|=\frac{37}{12}$$

b) Đồ thị hàm số y = cosx, y = sinx , đường thẳng $x=\frac{\pi}{2};x=\frac{3\pi}{2}$. Đặt $f_1(x)$ = cosx, $f_2(x)$ =sinx ;

Ta có $f_1(x) - f_2(x) = 0$ <=> cosx - sinx = 0 <=> $x=\frac{5\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

Diện tích hình phẳng đã cho là:

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\text{cosx-sinx}\right|dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}}\left|\text{sinx-cosx}\right|dx+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\text{cosx-sinx}\right|dx$$

$$=\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(\text{sinx-cosx}\right)dx\right|+\left|\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\text{cosx-sinx}\right)dx\right|=\left|-\left(\cos x+\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}}\right|+\left|\left(\sin x+\cos x\right)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\right|=$$

$$=\left|-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+1\right|+\left|(-1)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|\quad=\left|\sqrt{2}+1\right|+\left|-1+\sqrt{2}\right|=2\sqrt{2}$$

c) Đồ thị hàm số (H) : $\begin{cases}y=x^3-3x^2+3x-1\\ y=1-x\\ x=0,x=2\end{cases}$

$$\text{S(H)}=\int_0^2\left|(x^3-3x^2+3x-1)-(1-x)\right|dx=\int_0^2\left|x^3-3x^2+4x-2\right|dx$$

$$=\int_0^1(-x^3+3x^2-4x+2)dx+\int_1^2(x^3-3x^2+4x-2)dx$$

$$=\left(-\frac{x^4}{4}+x^3-2x^2+2x\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^4}{4}-x^3+2x^2-2x\right)\Bigg|_1^2$$

$= \left(-\frac{1}{4}+1-2+2\right)+\left[(4-8+8-4)-\left(\frac{1}{4}-1+2-2\right)\right] = \frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a)Trục tung, trục hoành và đồ thị hàm số : $y=\frac{2x+1}{x+1}$ **(Đề thi TN năm 2004-2005)**

Đồ thị giao với trục hoành tại điểm $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ trục tung : x = 0.

Diện tích hình cần tìm là S = $\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{2x+1}{x+1}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(\frac{2x+2-2+1}{x+1}\right)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(2-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\left|\left(2x-\ln|x+1|\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}\right|=-\left(-1-\ln\frac{1}{2}\right)=1+\ln 1-\ln 2=1-\ln 2$ (ĐVDT)

b) Đồ thị các hàm số : $y=e^x; y=2$ và đường thẳng x=1 **(Đề thi TN năm 2005-2006)**

Giải PT : $e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$; Diện tích hình phẳng cần tìm là :

S = $\int_{\ln 2}^{1}\left|e^x-2\right|dx = \int_{\ln 2}^{1}\left(e^x-2\right)dx=\left(e^x-2x\right)\Big|_{\ln 2}^{1}=(e-2)-\left(e^{\ln 2}-2\ln 2\right)$

$= (e-2)-(2-2\ln 2)=e+2\ln 2-4$ (ĐVDT)

Bài 4. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh Ox

a) Đồ thị hàm số y = sinx, trục hoành, đường thẳng x = $\frac{\pi}{2}$, x = π

Ta có: $V=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\cos 2x)dx \;=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\;\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$ (ĐVTT)

b) Đồ thị hàm số y = cosx, y = 0, x = 0 , x = $\frac{\pi}{4}$

Ta có: V = $\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)dx=\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$(ĐVTT)

c) Đồ thị hàm số y = $x.e^x$, y = 0, x = 0, x = 1

Ta có : V = $\pi\int_{0}^{1}x^2e^{2x}dx$ Đặt : $\begin{cases}u=x^2\\dv=e^{2x}dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}du=2xdx\\v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$

V = $\frac{\pi}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^1-\pi\int_0^1 xe^xdx \;=\frac{\pi}{2}.e^2-\pi\int_0^1 x.e^{2x}dx$

Tính I = $\int_0^1 x.e^{2x}dx$ Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^{2x}dx\end{cases}$ => $\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$

=> I $= \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

Thay I vào V ta có : V = $\frac{\pi}{2}.e^2 - \pi\int_0^1 x.e^{2x}dx = \frac{\pi e^2}{2} - \pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$ (ĐVTT)

d) Đồ thị hàm số : $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ và các đường y = 0, x = 0, x = 3.

V = $\pi\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^6 - \frac{2}{3}x^5 + x^4\right)dx = \pi\left(\frac{x^7}{63} - \frac{x^6}{9} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^3 = \frac{81\pi}{35}$ (ĐVTT)

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Cho hình (H) giới hạn bởi y = sin x; x = 0; x = π và y = 0. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. V = π/2 **B.** V = π²/2 **C.** V = 2π **D.** V = π²/4

Câu 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi y = x²; x = 1; x = 2 và y = 0.

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{8}{3}$ **C.** $\frac{7}{3}$ **D.** 1

Câu 3. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f_1(x), y = f_2(x)$ liên tục và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$ được tính theo công thức:

A. $S = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x)\right| \mathrm{dx}$. **B.** $S = \left|\int_a^b f_1(x) - f_2(x)\mathrm{dx}\right|$.

C. $S = \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x)\right]\mathrm{dx}$. **D.** $S = \int_a^b f_1(x)\mathrm{dx} - \int_a^b f_2(x)\mathrm{dx}$.

Câu 4. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường y = $\sqrt{x}$ và y = x. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. π/6 **B.** π/3 **C.** π/2 **D.** π

Câu 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ và đồ thị hàm số $y = x^2 - 3$.

A. 6 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 8

Câu 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi y = –x³ + 3x + 1 và đường thẳng y = 3.

A. 57/4. **B.** 27/4. **C.** 45/4 **D.** 21/4.

Câu 7. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi ba đồ thị hàm số $y = x\ln x, x = e$, trục hoành. Tính thể tích V khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox.

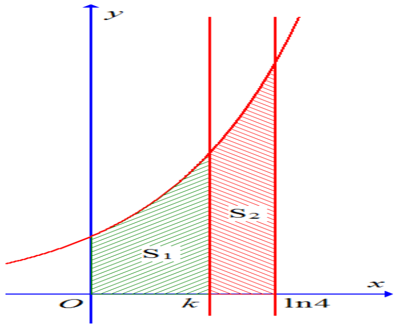
A. $V = \frac{5e^3 - 2}{27}\pi$ **B.** $V = \frac{5e^3 - 2}{27}$

C. $V = \frac{5e^3 + 2}{27}\pi$ **D.** $V = \frac{5e^3 - 2}{27}\pi^2$

Câu 8. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $(C): y = x^2 + 2x; y - x - 2 = 0$.

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

Câu 9: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k\,(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 S_2 và như hình vẽ bên. Tìm $x = k$ để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{2}{3}\ln 4$ **B.** $k = \ln 2$

C. $k = \ln\frac{8}{3}$ **D.** $k = \ln 3$

Câu 10. Với giá trị nào của $m > 0$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = mx$ bằng $\frac{4}{3}$ đvdt ?

A. $m = 2$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 4$

Câu 11. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x.\ln^2 x$,trục hoành và hai đường thẳng x = 1, x = e.

A. $S = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$ **B.** $S = \frac{1}{4}(e^2 - 1).$ **C.** $S = \frac{1}{4}(1 - e^2).$ **D.** $S = (1 - e^2).$

Câu 12. Tìm diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = -x^3 + 3x^2 - 2$, hai trục tọa độ và đường thẳng $x = 2$.

A. S = $\frac{19}{2}$ (đvdt) **B.** S = $\frac{5}{2}$ (đvdt) **C.** S = $\frac{1}{3}$ (đvdt) **D.** S = $\frac{9}{2}$ (đvdt)

Câu 13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 1 = 0$.

A. 8 (đvdt). **B.** 4 (đvdt). **C.** 6 (đvdt). **D.** 0 (đvdt).

Câu 14. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $y = (x-2)^2, y = 0$,x=0, x=2 khi xoay quanh trục hoành là.

A. $V = \frac{32}{5}$ **B.** $V = 32\pi$ **C.** $V = \frac{32}{5}.\pi$ **D. 32**

Câu 15. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = x^2$; $y = x + 2$ quanh trục Ox là

A. $\frac{72\pi}{5}$ (đvtt). **B.** $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt). **C.** $\frac{81\pi}{5}$ (đvtt). **D.** $\frac{72\pi}{10}$ (đvtt).

Câu 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được $V = \pi\left(\frac{a}{b} + 1\right)$. Khi đó

A. ab=15 **B.** ab=20 **C.** ab=28 **D.** ab =54

Câu 17. Diện tích hình giới hạn bởi $y = \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = -1$ bằng $a\ln\frac{2}{3} + b$. Khi đó, $a + 2b$ là:

A. 2 **B.** 40 **C.** $\frac{61}{2}$ **D.** -2

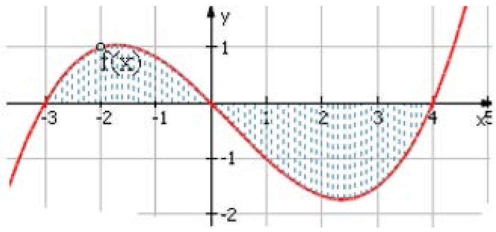
Câu 18. Nếu $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục và $\int_1^4 f'(x)dx = 17$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. 29 **B.** 5 **C.** 15 **D.** 19

Câu 19. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng (phần gạch trong hình) la

A. $\int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{4}^{0} f(x)dx$ **B.** $\int_{-3}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx$

C. $\int_{0}^{-3} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx$ **D.** $\int_{-3}^{4} f(x)dx$



Câu 20. Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 2x - x^2, y = x$. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình này quanh trục trục Ox:

A. $\frac{\pi}{25}$ **B.** $\frac{\pi}{6}$ **C.** $\frac{\pi}{5}$ **D.** $\frac{6\pi}{5}$

Câu 21. Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2, x = y^2$. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình này quanh trục trục Ox:

A. $\frac{8\pi}{3}$ **B.** $\frac{2\pi}{5}$ **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** $\frac{3\pi}{10}$

Câu 22. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = (e+1)x$ và $y = (1+e^x)x$ là:

A. $2 - \frac{e}{2}$ **B.** 2 **C.** $\frac{e}{2} - 1$ **D.** $\frac{3}{e} - 1$

Câu 23. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = -2x^2 + x + 3$ và trục hoành là:

A. $\frac{125}{24}$ **B.** $\frac{125}{34}$ **C.** $\frac{125}{14}$ **D.** $\frac{125}{44}$

Câu 24. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = 2 - x^2, y = \sqrt{1 - x^2}$ và trục hoành là:

A. $3\sqrt{2} - 2\pi$ **B.** $2\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$ **C.** $\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{2}$ **D.** $4\sqrt{2} - \pi$

Câu 25. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = mx\cos x$; Ox ; $x = 0; x = \pi$ bằng 3π. Khi đó:

A. $m = -3$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -4$ **D.** $m = \pm 3$

KIỂM TRA 45 PHÚT

I. MA TRẬN ĐỀ

Chủ đề hoặc mạch kiến thức kĩ năng	**Mức độ nhận thức**				**Tổng**
	Nhận biết **1**	**Thông hiểu** **2**	**Vận dụng thấp** **3**	**Vận dụng cao** **4**	
Tích phân	Câu 1,2,3,4 1,6	Câu 9,10,11, 12, 13, 14 2,4	Câu19,20,21 1,2	Câu 22 0,4	14 5,6
Ứng dụng hình học của tích phân	Câu5,6,7,8 1,2	Câu15,16,17,18 1,2	Câu 23 0,4	Câu24,25 0,8	11 4,4
Tổng	8 3,2	10 4,0	4 1,6	3 1,2	25 10

II. ĐỀ KIỂM TRA

Câu 1. Cho hàm số f(x) liên tục trên [a; b]. Giả sử F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a; b]. Khi đó tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là:

A. F(a)- F(b). **B**. F(a)+ F(b). **C**. F(b)- F(a). **D**. - F(a)- F(b).

Câu 2. Nếu $\int_a^d f(x)dx = 5, \int_d^b f(x)dx = 2$ với a < d < b thì $\int_a^b f(x)dx$ bằng:

A. -3 **B**. 7 **C**. 3 **D**. -7

Câu 3. Cho $\int_2^6 f(x)dx = 4, \int_2^6 g(x)dx = 2$. Tính $\int_2^6 (f(x)+g(x))dx$?

A. 1 **B**. 7 **C**. 6 **D**. 2

Câu 4. Nếu $\int_1^3 f(x)dx = 5, \int_2^3 f(x)dx = 3$ thì $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. -2 **B**. 2 **C**. 1 **D**. 5

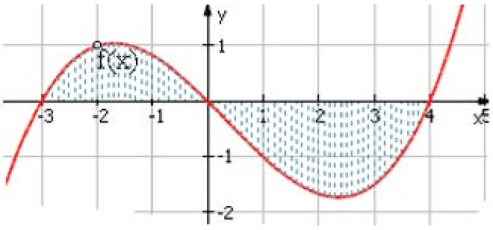
Câu 5. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số y= - x^2, trục Ox, hai đường thẳng x= 0, x= 3.

A. $S = -\int_0^3 x^2 dx.$ **B**. $S = \int_0^3 x^2 dx.$ **C**. $S = \int x^2 dx.$ **D**. $S = \pi\int_0^3 x^4 dx.$

Câu 6. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số y=f_1(x), y = f_2(x) liên tục trên [a;b] và các đường thẳng x = a; x = b là:

A. $\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx.$ **B.** $\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]dx.$ C $\int_b^a \left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx.$ **D.** $\int_a^b \left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx.$

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng (phần gạch trong hình)



A. $\int_{-3}^{0} f(x)dx+\int_{4}^{0} f(x)dx.$ **B.** $\int_{-3}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{4} f(x)dx.$

C. $\int_{0}^{-3} f(x)dx+\int_{0}^{4} f(x)dx.$ **D.** $\int_{-3}^{4} f(x)dx.$

Câu 8. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường y= sinx, y= 0, x= 0, $x=\pi$ quay quanh trục 0x là:

A. $\pi\int_0^\pi \sin x\, dx.$ **B.** $\int_0^\pi \sin x\, dx.$ **C.** $\int_0^\pi \sin^2 x\, dx.$ **D.** $\pi\int_0^\pi \sin^2 x\, dx.$

Câu 9. Đẳng thức nào **đúng**?

A. $\int_0^3 |x-2|dx=\int_{-2}^{1} |x-1|dx.$ **B.** $\int_0^3 |x-2|dx=\int_0^3 (x-2)dx.$

C. $\int_0^3 |x-2|dx=\int_2^3 (x-2)\,dx-\int_0^2 (x-2)dx.$ **D.** $\int_0^3 |x-2|dx=\int_2^3 (x-2)\,dx+\int_0^2 (x-2)dx.$

Câu 10. Tìm tích phân I = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx.$

A. 2 **B.** $1-\frac{\pi}{4}$ **C.** ln2 **D.** $\frac{\pi}{3}$

Câu 11. Cho I= $\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ và u = x^2- 1. Chọn khẳng định **sai** ?

A. I= $\left.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right|_0^3.$ **B.** $I=\frac{2}{3}\sqrt{27}.$ **C.** I= $\int_0^3 \sqrt{u}\, du.$ **D.** I= $\int_1^2 \sqrt{u}\, du.$

Câu 12. Cho $I=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^4}dx$. Đặt t= $\sqrt[3]{1-x^4}$ thì I bằng:

A. $-\int_0^1 \frac{3}{4}t^3dt.$ **B.** $\int_0^1 \frac{3}{4}t^3dt.$ **C.** $\int_0^1 t^3dt.$ **D.** $-\int_0^1 t^3dt.$

Câu 13. Tìm tích phân $I=\int_1^2 (2x-1)e^x dx.$

A. $e^2+e.$ **B.** $e^2-e.$ **C.** 2e – 3. **D.** $2e^2-3e.$

Câu 14. Đổi biến u = sinx thì $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x\, dx$ thành:

A. $\int_0^1 u^4\sqrt{1-u^2}\,du.$ **B.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^4\,du.$ **C.** $\int_0^1 u^4\,du.$ **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^3\sqrt{1-u^2}\,du.$

Câu 15. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi y= x^2 + 1, x= -1, x= 2 và trục Ox là:

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Câu 16. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị y= $\frac{-1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}$, y = 0, x = 0, x = 2 là

A. $\frac{5}{6}$ **B.** $\frac{1}{12}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{-5}{6}$.

Câu 17. Gọi S là miền giới hạn bởi (C): y= x^2, trục Ox và hai đường thẳng x= 1, x= 2. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay S quanh trục Ox là:

A. $\frac{31\pi}{5}$ +1. **B.** $\frac{31\pi}{5} + \frac{1}{3}$. **C.** $\frac{31\pi}{5}$. **D.** $\frac{31\pi}{5} - \frac{1}{3}$.

Câu 18. Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường y= x^2 - 2x, y = 0, x = 0, x = 1 quanh trục Ox có giá trị bằng:

A. $\frac{8\pi}{15}$ **B.** $\frac{7\pi}{8}$ **C.** $\frac{15\pi}{8}$ **D.** $\frac{8\pi}{7}$

Câu 19. Tìm m biết $\int_0^m (2x+5)dx = 6.$

A. m= -1, m= -6. **B.** m= 1, m= -6. **C.** m= 1, m= 6. **D.** m= -1, m= 6.

Câu 20. Đổi biến x= 2sint thì $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}dx$ trở thành:

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt.$ **B.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} tdt.$ **C.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t}dt.$ **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} dt.$

Câu 21. Biết $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + be$. Tính tích ab.

A. -1 **B.** 1 **C.** -15 **D.** 5

Câu 22. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)^n \sin x dx$ bằng:

A. $\frac{1}{1+n}$. **B.** $\frac{1}{n-1}$. **C.** $\frac{1}{2n}$. **D.** $\frac{1}{n}$

Câu 23. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi y = x^2 và y = 2x là:

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{23}{15}$

Câu 24. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = 4 - |x|$ và Parabol $y = \frac{x^2}{2}$ là:

A. $\frac{22}{3}$. **B.** $\frac{26}{3}$. **C.** $\frac{25}{3}$. **<u>D</u>.** $\frac{28}{3}$.

Câu 25. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường y= x^2 - 4, y = 2x - 4 quay quanh trục Ox.

A. $\frac{16\pi}{5}$ **B.** 6π **C.** -6π **<u>D</u>.** $\frac{16\pi}{15}$.

NHÓM TRƯỜNG: TÂN TRÀO, THÁI HÒA, LÂM BÌNH

Nhóm trường:
THPT Nguyễn Văn Huyên
THPT Tháng 10
THPT Thượng Lâm

CHUYÊN ĐỀ
SỐ PHỨC (12 tiết)

Tiết 1, 2, 3

DẠNG ĐẠI SỐ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP SỐ PHỨC

A. Kiến thức cơ bản.

1. Khái niệm số phức

- Số phức (dạng đại số) : $z = a + bi$
  ($a, b \in R$, a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$)
- z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của z bằng 0 (b = 0)
  z là thuần ảo $\Leftrightarrow$ phần thực của z bằng 0 (a = 0)
  Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.
- Tập hợp số phức: $\mathbb{C} = \left\{z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$
- Hai số phức bằng nhau: $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \quad (a, b, a', b' \in R)$

Chú ý: $i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = -1$; $i^{4k+3} = -i$

2. Số phức liên hợp của số phức z = a + bi là $\overline{z} = a - bi$

- $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z \pm z'} = \overline{z} \pm \overline{z'}$; $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; $z.\overline{z} = a^2 + b^2$
- z là số thực $\Leftrightarrow z = \overline{z}$; z là số ảo $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$

3. Môđun của số phức : z = a + bi

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}} = |\overrightarrow{OM}|$
- $|z| \geq 0, \forall z \in C$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$ • $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ • $\big||z| - |z'|\big| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$

4. Các phép toán trên số phức.

*** Phép cộng và phép trừ, nhân hai số phức.**

Cho hai số phức z = $a + bi$ và z' = $a' + b'i$. Ta định nghĩa:

- $z + z' = (a + a') + (b + b')i$
- $z - z' = (a - a') + (b - b')i$
- $zz' = aa' - bb' + (ab' - a'b)i$

*** Phép chia số phức khác 0.**

Cho số phức z = $a + bi \neq 0$ *(tức là* $a^2 + b^2 > 0$ *)*

Ta định nghĩa số nghịch đảo z^{-1} của số phức $z \neq 0$ là số $z^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}\overline{z} = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$

- Chia hai số phức: $\dfrac{a + bi}{a' + b'i} = \dfrac{aa' - bb'}{a'^2 + b'^2} + \dfrac{ab' + a'b}{a'^2 + b'^2}i$.

B. Kĩ năng cơ bản.

Tìm phần thực và phần ảo , mô đun, số phức liên hợp của số phức

Phương pháp giải

Biến đổi số phức về dạng đại số, áp dụng công thức tính.

Thực hiện các phép toán trên tập số phức

Phương pháp giải

Áp dụng các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia hai số phức, chú ý các tính chất giao hoán, kết hợp đối với các phép toán cộng và nhân.

C. Bài tập luyện tập.

Bài 1: Tìm phần thực và phần ảo , mô đun, số phức liên hợp của số phức $a)\ z = 1+2i$ $\quad b)\ z = (1+2i)+i(3-4i)$ $\quad c)\ z = (1+i)^2-(5-2i)$

Giải:

a) $z = 1+2i$

Phần thực: 1, phần ảo 2, số phức liên hợp $\overline{z} = 1-2i$, mô đun: $|z| = \sqrt{5}$

$b)\ z = (1+2i)+i(3-4i) = 5+5i$

Phần thực: 5, phần ảo : 5, số phức liên hợp $\overline{z} = 5-5i$, mô đun: $|z| = 5\sqrt{2}$

$c)\ z = (1+i)^2-(5-3i) = -5+4i$

Phần thực: -5, phần ảo : 4, số phức liên hợp $\overline{z} = -5-4i$, mô đun: $|z| = \sqrt{41}$

Bài 2: Tìm số phức liên hợp của: $z = (1+i)(3-2i)+\dfrac{1}{3+i}$

Giải:

Ta có $z = 5+i+\dfrac{3-i}{(3+i)(3-i)} = 5+i+\dfrac{3-i}{10}$.

Suy ra số phức liên hợp của z là: $\overline{z} = \dfrac{53}{10}-\dfrac{9}{10}i$

Bài 3: Tìm phần ảo của số phức z biết $\overline{z} = \left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$

Giải:

$\overline{z} = \left(1+2\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right) = 5+\sqrt{2}i$. Suy ra, $z = 5-\sqrt{2}i$

Phần ảo của số phức $z = -\sqrt{2}$

Bài 4: Tìm mô đun của số phức $z = \dfrac{(1+i)(2-i)}{1+2i}$

Giải: Ta có: $z = \dfrac{5+i}{5} = 1+\dfrac{1}{5}i$

Vậy mô đun của z bằng: $|z| = \sqrt{1+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{26}}{5}$

Bài 5: Cho số phức z = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$. Tính các số phức sau: $\overline{z}$; z^2; $(\overline{z})^3$; $1 + z + z^2$

Giải:

*Vì z = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

*Ta có $z^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^2 = \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}i^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow (\bar{z})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}i^2+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$(\bar{z})^3 = (\bar{z})^2.\ \bar{z} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4} = i$

Ta có: $1 + z + z^2 = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3+\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

Bài 6: Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$. Tìm môđun của số phức $\bar{z}+iz$.

Giải:

Ta có: $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3 = -8$ Do đó $\bar{z} = \frac{-8}{1-i} = -4-4i \Rightarrow z = -4+4i$

$\Rightarrow \bar{z}+iz = -4-4i+\left(-4+4i\right)i = -8-8i$ Vậy $\left|\bar{z}+iz\right| = 8\sqrt{2}.$

*** Hai số phức bằng nhau:**

Bài 7: Tìm các số thực x, y thỏa mãn đẳng thức:

a) 3x + y + 5xi = 2y – 1 +(x – y)i

b) (2x + 3y + 1) + (–x + 2y)i = (3x – 2y + 2) + (4x – y – 3) i.

c) $x\left(3+5i\right)+y\left(1-2i\right)^3 = -35+23i$

Giải:

a) Theo giả thiết:

3x + y + 5xi = 2y – 1 +(x – y)i

$\Leftrightarrow$ *(3x + y) + (5x)i = (2y – 1) +(x – y)i*

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=2y-1 \\ 5x=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{7} \\ y=\frac{4}{7} \end{cases}$

b) Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} 2x+3y+1=3x-2y+2 \\ -x+2y=4x-y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+5y=1 \\ -5x+3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{11} \\ y=\frac{4}{11} \end{cases}$

c) Ta có $\left(1-2i\right)^3 = \left(1-2i\right)^2\left(1-2i\right) = \left(-3-4i\right)\left(1-2i\right) = 2i-11$.

Suy ra $x\left(3+5i\right)+y\left(1-2i\right)^3 = -35+23i \Leftrightarrow x\left(3+5i\right)+y\left(2i-11\right) = -35+23i$

$\Leftrightarrow \left(3x-11y\right)+\left(5x+2y\right)i = -35+23i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-11y=-35 \\ 5x+2y=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

*** Tính i^n và áp dụng: Chú ý:**

- $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$; $\forall n \in N^*$ Vậy $i^n \in \{-1;1;-i;i\}$, $\forall n \in N^*$
- $(1+i)^2 = 2i$; $\left(1-i\right)^2 = -2i$

Bài 8: Tính: $i^{105} + i^{23} + i^{20} - i^{34}$

Giải:

Ta có $i^{105} + i^{23} + i^{20} - i^{34} = i^{4.26+1} + i^{4.5+3} + i^{4.5} - i^{4.8+2} = i - i + 1 + 1 = 2$

Bài 9: Tính số phức sau: a) z = $(1+i)^{15}$ b) z = $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}$

Giải:

a) Ta có: $(1 + i)^2 = 1 + 2i – 1 = 2i \Rightarrow (1 + i)^{14} = (2i)^7 = 128.i^7 = -128.i$

nên $z = (1+i)^{15} = (1+i)^{14}(1+i) = -128i\,(1+i) = -128\,(-1 + i) = 128 – 128i$.

b) Ta có: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = \frac{2i}{2} = i$

$\Rightarrow \frac{1-i}{1+i} = -i$. Vậy $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8} = i^{16} + (-i)^{8} = 2$

Bài 10: (Vận dụng)Tìm phần thực, phần ảo của số phức sau:

$$1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{20}$$

Giải:

$$P = 1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{20} = \frac{(1+i)^{21}-1}{i}$$

$$(1+i)^{21} = \left[(1+i)^2\right]^{20}(1+i) = (2i)^{10}(1+i) = -2^{10}(1+i)$$

$$\Rightarrow P = \frac{-2^{10}(1+i)-1}{i} = -2^{10} + \left(2^{10}+1\right)i$$

Vậy phần thực là -2^{10} và phần ảo là $2^{10}+1$

* **Tìm số phức dựa vào dạng đại số của số phức.**

Nếu trong hệ thức tìm số phức z xuất hiện 2 hay nhiều đại lượng sau: $z, \overline{z}, |z|, ...$ ta sẽ sử dụng Dạng đại số của z là $z = x + yi$ với $x, y \in R$

Bài 11: Tìm số phức z biết $z-(2+3i)\overline{z} = 1-9i$

Giải:

Giả sử z= a+ bi (a,b $\in R$) ta có:

$$z-(2+3i)\overline{z} = 1-9i \Leftrightarrow a+bi-(2+3i)(a-bi) = 1-9i$$

$$\Leftrightarrow -a-3b-(3a-3b)i = 1-9i \Leftrightarrow \begin{cases} -a-3b=1 \\ 3a-3b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Vậy z = 2 – i

Bài 12(TH) Cho số phức z thỏa mãn: $(2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i$ (1) . Tìm môđun của số phức $\omega = z+1+i$

Giải:

$$(2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i \Leftrightarrow (2+i)z+3+i = 7+8i$$

$$\Leftrightarrow (2+i)z = 4+7i \Leftrightarrow z = \frac{4+7i}{2+i} = 3+2i$$

Do đó $\omega = 3+2i+1+i = 4+3i \Rightarrow |\omega| = \sqrt{16+9} = 5$.

Bài 13: (TH)Tính mô đun của số phức z biết rằng: $(2z-1)(1+i)+(\overline{z}+1)(1-i) = 2-2i$

Giải: Gọi z= a+ bi (a, b$\in R$)

Ta có

$\left(2z-1\right)\left(1+i\right)+\left(\overline{z}+1\right)\left(1-i\right)=2-2i$

$\Leftrightarrow\left[\left(2a-1\right)+2bi\right]\left(1+i\right)+\left[\left(a+1\right)-bi\right]\left(1-i\right)=2-2i$

$\Leftrightarrow\left(2a-2b-1\right)+\left(2a+2b-1\right)i+\left(a-b+1\right)-\left(a+b+1\right)i=2-2i$

$\Leftrightarrow\left(3a-3b\right)+\left(a+b-2\right)i=2-2i\Leftrightarrow\begin{cases}3a-3b=2\\ a+b-2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow z=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i$

Suy ra mô đun: $\left|z\right|=\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Bài 14: Tìm số phức z thỏa mãn: $\left|z\right|^2+2z.\overline{z}+\left|\overline{z}\right|^2=8$ và $z+\overline{z}=2$.

Giải

Gọi z = x + iy (x, y∈R), ta có $\overline{z}=x-iy;\left|z\right|^2=\left|\overline{z}\right|^2=z\overline{z}=x^2+y^2$

$\left|z\right|^2+2z.\overline{z}+\left|\overline{z}\right|^2=8\Leftrightarrow 4(x^2+y^2)=8\Leftrightarrow(x^2+y^2)=2$ (1)

$z+\overline{z}=2\Leftrightarrow 2x=2\Leftrightarrow x=1$ (2)

Từ (1) và (2) tìm được x = 1 ; y = ±1

Vậy các số phức cần tìm là 1 + i và 1 - i

Bài 15: Tìm số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

Giải:

Gọi z= a+ bi (a, b $\in R$) Ta có $\left|z\right|=\sqrt{a^2+b^2}$ và $z^2=a^2-b^2+2abi$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $\begin{cases}a^2+b^2=2\\ a^2-b^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\ b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm 1\\ b=\pm 1\end{cases}$

Vậy các số phức cần tìm là 1+i; 1-i; -1+i; -1-i

Bài 16: (Vận dụng) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-2\right|+\left|z+2\right|=10$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức 2

Gọi B là điểm biểu diễn số phức -2

Ta có: $\left|z+2\right|+\left|z-2\right|=10\Leftrightarrow MB+MA=10$.

Ta có $AB=4$. Suy ra tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là Elip với 2 tiêu điểm là $A\left(2;0\right)$, $B\left(-2;0\right)$, tiêu cự $AB=4=2c$, độ dài trục lớn là $10=2a$, độ dài trục bé là $2b=2\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{25-4}=2\sqrt{21}$.

Vậy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-2\right|+\left|z+2\right|=10$ là Elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{21}=1$.

Bài 17: (Vận dụng)Tìm số phức z thỏa mãn hai điều kiện: $\left|z+1-2i\right|=\left|\overline{z}+3+4i\right|$ và $\dfrac{z-2i}{\overline{z+i}}$ là một số thuần ảo.

Giải

Đặt z= x+ yi (x,y $\in R$) Theo bài ra ta có

$\left|x+1+(y-2)i\right|=\left|x+3+(4-y)i\right|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=(x+3)^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow y=x+5$

Số phức $w=\dfrac{z-2i}{\overline{z}+i}=\dfrac{x+(y-2)i}{x+(1-y)i}=\dfrac{x^2-(y-2)(y-1)+x(2y-3)i}{x^2+(y-1)^2}$

w là một số ảo khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2-(y-2)(y-1)=0 \\ x^2+(y-1)^2>0 \\ y=x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{12}{7} \\ y=\dfrac{23}{7} \end{cases}$

Vậy $z=-\dfrac{12}{7}+\dfrac{23}{7}i$

Bài 18: (Vận dụng)Tìm số phức z biết $\overline{z}-\dfrac{5+i\sqrt{3}}{z}-1=0$

Giải:

Gọi z= a+ bi (a, b $\in R$) và $a^2+b^2\neq 0$ ta có

$\overline{z}-\dfrac{5+i\sqrt{3}}{z}-1=0 \Leftrightarrow a-bi-\dfrac{5+i\sqrt{3}}{a+bi}-1=0 \Leftrightarrow a^2+b^2-5-i\sqrt{3}-a-bi=0$

$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2-a-5\right)-\left(b+\sqrt{3}\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-a-5=0 \\ b+\sqrt{3}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-a-2=0 \\ b=-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1; b=-\sqrt{3} \\ 2=a=2; b=-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy $z=-1-i\sqrt{3}$ hoặc $z=2+i\sqrt{3}$

D. Bài tập TNKQ.

Câu 1. (Đề thi chính thức THPT QG năm 2017) Cho hai số phức $z_1=5-7i$ và $z_2=2+3i$. Tìm số phức $z=z_1+z_2$

A. $z=7-4i$ **B.** $z=2+5i$ **C.** $z=-2+5i$ **D.** $z=3-10i$

Câu 2. (**(Đề thi chính thức THPT QG năm 2017)** Cho số phức $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=a+3b$

A. $S=\dfrac{7}{3}$ **B.** $S=-5$ **C.** $S=5$ **D.** $S=-\dfrac{7}{3}$

Giải : **Đáp án B**

Ta có: $z+1+3i-|z|i=0 \Leftrightarrow a+1+(b+3)i=\sqrt{a^2+b^2}i \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b+3=\sqrt{b^2+1},(1) \end{cases}$

Với $b\geq -3$ thì (1) tương đương với: $(b+3)^2=b^2+1 \Leftrightarrow b=\dfrac{-4}{3}$

Vậy $a+3b=-5$

Câu 3. (Đề thi chính thức THPT QG năm 2017) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo ?

A. 0 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 2

Giải: Đáp án C

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$

$|z-3i|=\sqrt{x^2+(y-3)^2}=5\Leftrightarrow x^2+y^2-6y=16$

$\frac{z}{z-4}=\frac{x+yi}{x-4+yi}=\frac{(x+yi)(x-4-yi)}{(x-4)^2+y^2}=\frac{x^2-4x+y^2}{(x-4)^2+y^2}-\frac{4yi}{(x-4)^2+y^2}$

$\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo nên $\frac{x^2-4x+y^2}{(x-4)^2+y^2}=0\Leftrightarrow x^2-4x+y^2=0$

Ta có hệ: $\begin{cases}x^2+y^2-6y=16\\x^2+y^2-4x=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}(loai)\\ \begin{cases}x=\frac{16}{13}\\y=\frac{-24}{13}\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow z=\frac{16}{13}-\frac{24}{13}i$

Vậy chỉ có 1 số phức z thỏa mãn

Câu 4. (Vận dụng)Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+3i|=|z+2-i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

A. $z=1-2i$. **B.** $z=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$. **C.** $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$. **D.** $z=-1-i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương pháp tự luận

Giả sử $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

$|z+3i|=|z+2-i|\Leftrightarrow|x+(y+3)i|=|(x+2)+(y-1)i|\Leftrightarrow x^2+(y+3)^2=(x+2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow 6y+9=4x+4-2y+1\Leftrightarrow 4x-8y-4=0\Leftrightarrow x-2y-1=0\Leftrightarrow x=2y+1$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2y+1)^2+y^2}=\sqrt{5y^2+4y+1}=\sqrt{5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}\geq\frac{\sqrt{5}}{5}$

Suy ra $|z|_{\min}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ khi $y=-\frac{2}{5}\Rightarrow x=\frac{1}{5}$

Vậy $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i.$

Phương pháp trắc nghiệm

Giả sử $z=x+yi\quad\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

$|z+3i|=|z+2-i|\Leftrightarrow|x+(y+3)i|=|(x+2)+(y-1)i|\Leftrightarrow x^2+(y+3)^2=(x+2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow 6y+9=4x+4-2y+1\Leftrightarrow 4x-8y-4=0\Leftrightarrow x-2y-1=0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa điều kiện $|z+3i|=|z+2-i|$ là đường thẳng $d: x-2y-1=0$.

Phương án A: $z=1-2i$ có điểm biểu diễn $(1;-2)\notin d$ nên loại A.

Phương án B: $z=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{2}{5}\right)\notin d$ nên loại B.

Phương án C: $z=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i\Rightarrow |z|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ có điểm biểu diễn $\left(\dfrac{1}{5};-\dfrac{2}{5}\right)\in d$

Phương án D: $z=-1-i\Rightarrow |z|=\sqrt{2}$ có điểm biểu diễn $(-1;-1)\in d$

Do đó phương án C thỏa mãn

Câu 5. **(ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)**Cho số phức $z\in\mathbb{C}$ thỏa mãn $|z|=4$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w=(3+4i)z+i$ là đường tròn I, bán kính R. Khi đó.

A. $I(0;1), R=2\sqrt{5}.$ **B.** $I(1;0), R=20$ **<u>C.</u>** $I(0;1), R=20.$ **D.** $I(1;-2), R=22.$

Hướng dẫn giải

Đặt $w=a+bi$ với $a;b;c\in\mathbb{R}$.

$$w=(3+4i)z+i\Leftrightarrow z=\frac{a+(b-1)i}{3+4i}=\frac{\left[a+(b-1)i\right](3-4i)}{25}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{3a+4b-4}{25}+\frac{(3b-4a-3)}{25}i\Rightarrow |z|=\frac{\sqrt{(3a+4b-4)^2+(3b-4a-3)^2}}{25}.$$

Mà

$$|z|=4\Rightarrow\frac{\sqrt{(3a+4b-4)^2+(3b-4a-3)^2}}{25}=4$$

$$\Leftrightarrow (3a+4b-4)^2+(3b-4a-3)^2=100^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2b=399\Leftrightarrow a^2+(b-1)^2=20^2$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn $I(0;1), R=20$.

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện : $|z-1+2i|=\sqrt{5}$ và $w=z+1+i$ có môđun lớn nhất. Số phức z có môđun bằng:

A. $2\sqrt{5}$. **<u>B.</u>** $3\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z=x+yi \quad (x,y\in\mathbb{R}) \ \Rightarrow z-1+2i=(x-1)+(y+2)i$

Ta có: $|z-1+2i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=5$

Suy ra tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;-2)$ bán kính $R=\sqrt{5}$:

Dễ thấy $O\in(C)$, $N(-1;-1)\in(C)$ Theo đề ta có:

$M(x;y)\in(C)$là điểm biểu diễn cho sốphức z thỏa mãn:

$w=z+1+i=x+yi+1+i=(x+1)+(y+1)i$

$\Rightarrow |z+1+i|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\left|\overrightarrow{MN}\right|$

Suy ra $|z+1+i|$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất

Mà $M,N\in(C)$ nên MN lớn nhất khi MN là đường kính đường tròn (C)

$\Leftrightarrow I$ là trung điểm $MN\Rightarrow M(3;-3)\Rightarrow z=3-3i\Rightarrow |z|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

Câu 7. Phần thực và phần ảo của số phức $z=1+2i$

A. 1 và 2. **B.** 2 và 1. **C.** 1 và $2i$. **D.** 1 và i.

Câu 8. Cho số phức $z = 1+3i$. Số phức z^2 có phần thực là

A. –8. **B.** 10. **C.** 8 + 6i. **D.** –8 + 6i.

Câu 9. Phần thực của số phức $z = \frac{3-4i}{4-i}$ bằng

A. $\frac{16}{17}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $-\frac{13}{17}$. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Câu 10. Phần ảo của số phức $z = \frac{(1-2i)^2}{(3+i)(2+i)}$ là

A. $-\frac{1}{10}$. **B.** $-\frac{7}{10}$. **C.** $-\frac{i}{10}$. **D.** $\frac{7}{10}$.

Câu 11. Tìm $|z|$ biết $z = (1+2i)(1-i)^2$?

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** 20 .

Câu 12. Cho $z = \frac{2}{1+i\sqrt{3}}$. Số phức liên hợp của z là

A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **B.** $\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$. **C.** $\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$. **D.** $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Câu 13. Cho số phức $z = \frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$. Trong các kết luận sau kết luận nào **sai**?

A. $z \in \mathbb{R}$. **B.** z là số thuần ảo.

C. Mô đun của z bằng 1. **D.** z có phần thực và phần ảo đều bằng 0.

Câu 14. Cho số phức $z = m + ni \neq 0$. Số phức $\frac{1}{z}$ có phần thực là

A. $\frac{m}{m^2-n^2}$. **B.** $-\frac{n}{m^2-n^2}$. **C.** $\frac{m}{m^2+n^2}$. **D.** $-\frac{n}{m^2+n^2}$.

Câu 15. Cho số phức z , Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

A. $|z| = |\bar{z}|$. **B.** $z+\bar{z}$ là một số thuần ảo .

C. $z.\bar{z}$ là một số thực . **D.** mođun số phức z là một số thực dương.

Câu 16. Cho số phức $z = x + yi$. Số phức z^2 có phần thực là

A. x^2+y^2. **B.** x^2-y^2. **C.** x^2. **D.** $2xy$.

Câu 17. Cho số phức z thỏa mản $(1+i)^2(2-i)z = 8+i+(1+2i)z$. Phần thực và phần ảo của số phức z lần lượt là:

A. $2;3$. **B.** $2;-3$. **C.** $-2;3$. **D.** $-2;-3$.

Câu 18. Tính $z = \frac{1+i^{2017}}{2+i}$.

A. $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$. **B.** $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$. **C.** $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$. **D.** $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$.

Câu 19. Trên tập số phức, tính $\frac{1}{i^{2017}}$

A. i . **B.** $-i$. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 20. Tổng $i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3}$ bằng:

A. i . **B.** $-i$. **C.** 1. **D.** 0 .

Câu 21. Phần thực và phần ảo của số phức $z=\dfrac{i^{2012}+i^{2013}+i^{2014}+i^{2015}+i^{2016}}{i^{2017}+i^{2018}+i^{2019}+i^{2020}+i^{2021}}$ lần lượt là:

A. $0;-1$. **B.** $1;0$. **C.** $-1;0$. **D.** $0;1$.

Câu 22. Số phức z thỏa mãn $z+2\left(z+\overline{z}\right)=2-6i$ có phần thực là

A. -6. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** -1. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $2z+3(1-i)\overline{z}=1-9i$. Môđun của z bằng:

A. $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{82}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 13.

Câu 24. Phần thực của số phức $(1+i)^2(2-i)z=8+i+(1+2i)z$ là

A. -6. **B.** -3. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 25. Cho số phức $z=6+7i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn là:

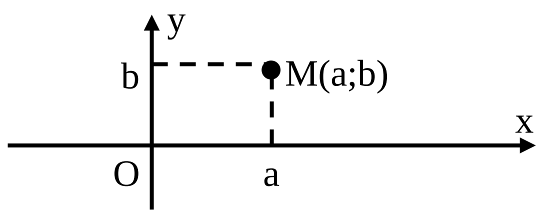
A. $(6;7)$. **B.** $(6;-7)$. **C.** $(-6;7)$. **D.** $(-6;-7)$.

Tiết 4, 5, 6

BIỂU DIỄN HÌNH HỌC SỐ PHỨC. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

A. Kiến thức cơ bản.

Biểu diễn hình học: Số phức z = a + bi (a, b$\in$ R) được biểu diễn bởi điểm M(a; b) trong mp(Oxy) (mp phức)



Trong dạng này, ta gặp các bài toán biểu diễn hình học của số phức hay còn gọi là tìm tập hợp điểm biểu diễn một số phức z trong đó số phức z thỏa mãn một hệ thức nào đó (thường là hệ thức liên quan đến môđun của số phức). Khi đó ta giải bài toán này như sau:

Giả sử z = x+yi (x, y $\in$ R). Khi đó số phức z biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi điểm M(x;y). Sử dụng dữ kiện của đề bài để tìm mối liên hệ giữa x và y từ đó suy ra tập hợp điểm M.

B. Kĩ năng cơ bản.

Tìm điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện cho trước:

+ Số phức z = a + bi (a, b $\in\mathbb{R}$) được biểu diễn bởi M(a; b) trong mặt phẳng toạ độ Oxy hay còn gọi là mặt phẳng phức.

+ Trục Ox biểu diễn các số thực gọi là trục thực, trục Oy biểu diễn các số ảo gọi là trục ảo

+ Số phức z = a + bi (a, b $\in\mathbb{R}$) cũng được biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}=(a;b)$, do đó M(a; b) là điểm biểu diễn của số phức z = a + bi (a, b $\in\mathbb{R}$) cũng có nghĩa là $\overrightarrow{OM}$ biểu diễn số phức đó.

Ta có: Nếu $\vec{u},\vec{v}$ theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z' thì

$\vec{u}+\vec{v}$ biểu diễn số phức z + z',

$\vec{u}-\vec{v}$ biểu diễn số phức z - z',

k$\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R})$ biểu diễn số phức kz,

$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|\vec{u}\right| = |z|$, với M là điểm biểu diễn của z.

C. Bài tập luyện tập.

Bài 1: Tìm điểm biểu diễn của số phức z biết:

a) Điểm biểu diễn số phức $z = 2-3i$ có tọa độ là:: $(2;-3)$.

b) Điểm biểu diễn số phức $z=-2i$ có tọa độ là: $(0;-2)$

c) Cho số phức $z = 6+7i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn là: $(6;-7)$.

d) Điểm biểu diễn của số phức $z = \dfrac{1}{2-3i}$ là: $\left(\dfrac{2}{13};\dfrac{3}{13}\right)$.

e) Cho số phức $z = 2016-2017i$. Số phức đối của z là $-Z=-2016+2017i$ có điểm biểu diễn là: $(-2016;\,2017)$

f) Cho số phức $z = 2017-2018i$. Số phức liên hợp $\overline{z} = 2017+2018i$ có điểm biểu diễn là điểm có tọa độ $(2017;\,2018)$.

g) Điểm biểu diễn số phức $z = \dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i} = -1-4i$ có tọa độ là $(-1;-4)$.

h) Trong mặt phẳng 0xy, điểm biểu diễn của số phức $z = \dfrac{i^{2016}}{(1+2i)^2}$ là điểm nào?

$$z = \frac{i^{2018}}{(1+2i)^2} = \frac{i^{4.504+2}}{(-3+4i)} = \frac{i^2}{(-3+4i)} = \frac{-1}{(-3+4i)} = \frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$$

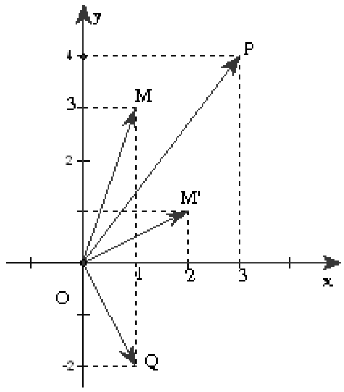
Điểm biểu diễn của số phức $z = \dfrac{i^{2016}}{(1+2i)^2}$ là điểm $\left(\dfrac{3}{25};\dfrac{4}{25}\right)$.

Bài 2: Cho số phức z = 1+ 3i và số phức z’ = 2 + i. Hãy:
a) Biểu diễn số phức z và z’ trên mp phức.
b) Biểu diễn số phức z + z’ và z’ – z trên mp phức.

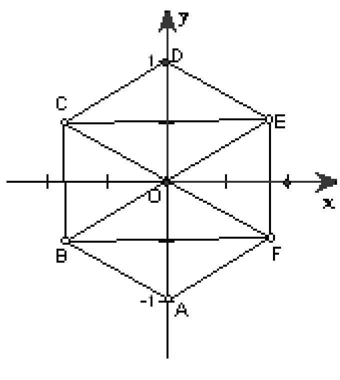
Giải:

a) Biểu diễn số phức z = 1 + 3i là điểm M(1;3)
Biểu diễn số phức z’ = 2 + i là điểm M’(2;1)

b) z + z’ = 3 + 4i, biểu diễn trên mp phức bởi P(3;4
z’ – z = 1 – 2i, biểu diễn trên mp phức bởi Q(1;-2).



Bài 3: (Vận dụng**)**Xác định các số phức biểu diễn bởi các đỉnh của một lục giác đều có tâm là gốc tọa độ O trong mặt phẳng phức, biết rằng một đỉnh biểu diễn số i.



Giải: Gọi D là điểm biểu diễn số i ⇒ A biểu diễn số −i.

Dễ thấy điểm E có tọa độ $\left(\cos\dfrac{\pi}{6};\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ nên E biểu diễn số phức $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$;

C đối xứng với E qua Oy nên C biểu diễn số phức $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$;

F biểu diễn số phức $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; B biểu diễn số phức $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

Bài 4: Xác định tập hợp các điểm trong mp phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn từng điều kiện sau:

a) z^2 là số thực âm

b) z^2 là số ảo

c) $z^2 = (\bar{z})^2$

d) $\frac{1}{z-i}$ là số ảo.

Giải:

a) z^2 là số thực âm ⇔ z là số ảo. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z nằm trên trục ảo (Oy), trừ điểm O

b) Gọi z = a + bi ⇒ $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ là số ảo ⇔ $a^2 - b^2 = 0$ ⇔ b = ±a. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z nằm trên hai đường phân giác của các gốc tọa độ.

c) $z^2 = (\bar{z})^2$ ⇔ $(z + \bar{z})(z - \bar{z}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+\bar{z}=0 \quad \text{(truïc thöïc)} \\ z-\bar{z}=0 \quad \text{(truïc aûo)} \end{array}\right.$$. Vậy tập hợp các điểm là các trục tọa độ.

d) $\frac{1}{z-i}$ là số ảo ⇔ z – i là số ảo ⇔ x + (y – 1)i là số ảo

⇔ x = 0 và y ≠ 1.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn nằm trên trục Oy (trừ điểm có tung độ bằng 1).

Bài 5: Giả sử M(z) là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Tìm tập hợp các điểm M(z) thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

a) $|z-1+i| = 2$ b) $|2+z| = |1-i|$ c) $|z-4i|+|z+4i|=10$

Giải:

Đặt z = x +yi (x, y ∈ R) được biểu diễn bởi điểm M(x;y)

a) Xét hệ thức: $|z-1+i| = 2$ (1)

Đặt z = x +yi (x, y ∈ R) ⇒ z – 1 + i = (x – 1) + (y + 1)i.

Khi đó (1) ⇔ $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = 2$

⇔ $(x-1)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

⇒ Tập hợp các điểm M(z) trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn (1) là đường tròn có tâm tại I(1;-1) và bán kính R = 2.

b) Xét hệ thức $|2+z| = |z-i|$ ⇔ |(x+2) +yi| = |-x+(1-y)i|

⇔ $(x+2)^2 + y^2 = x^2 + (1-y)^2$ ⇔ 4x + 2y + 3 = 0.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng 4x + 2y + 3 = 0.

Nhận xét: Đường thẳng 4x + 2y + 3 = 0 chính là đường trung trực của đoạn AB.

c) Xét hệ thức: $|z-4i|+|z+4i|=10$

Xét F_1, F_2 tương ứng biểu diễn các điểm 4i và -4i tức là F_1 (0;4) và F_2 =(0;-4). Do đó:

$|z-4i|+|z+4i|=10$ ⇔ $MF_1 + MF_2 = 10$

Ta có $F_1F_2 = 8$ ⇒ Tập hợp tất cả các điểm M nằm trên (E) có hai tiêu điểm là F_1 và F_2 và có độ dài trục lớn bằng 10.

Phương trình của (E) là: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

Bài 6: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z sao cho $u=\frac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

Giải

Đặt z= x+ yi (x, y $\in R$), khi đó:

$$u=\frac{(x+2)+(y+3)i}{x+(y-1)i}=\frac{\left[(x+2)+(y+3)i\right]\left[x-(y-1)i\right]}{x^2+(y-1)^2}$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2+2x+2y-3\right)+2(2x-y+1)i}{x^2+(y-1)^2}$$

u là số thuần ảo khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2+y^2+2x+2y-3=0\\ x^2+(y-1)^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=5\\ (x;y)\neq(0;1)\end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm I(-1;-1), bán kính $\sqrt{5}$ trừ điểm (0;1)

Bài 7: Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-i|=|(1+i)z|$

Giải:

Đặt z= x+ yi (x,y $\in R$)

Ta có:

$$|z-i|=|(1+i)z| \Leftrightarrow |x+(y-1)i|=|(x-y)+(x+y)i|$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-y)^2+(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy-1=0 \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2$$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là đường tròn có phương trình $x^2+(y+1)^2=2$

Bài 8: (Vận dụng)Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$.Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Giả sử số phức z cần tìm có dạng z = x + yi (x,y $\in$ R) được biểu diễn bởi điểm M(x;y).

Ta có $|x-2+(y-4)i|=|x+(y-2)i|$ (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$\Leftrightarrow y=-x+4$. Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn cho các số phức z thỏa mãn (1) là đường thẳng x + y = 4. Mặt khác $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^2-8x+16}=\sqrt{2x^2-8x+16}$

Hay $|z|=\sqrt{2(x-2)^2+8}\geq 2\sqrt{2}$

Do đó $|z|_{\min} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2$. Vậy $z=2+2i$

Bài 9: (Vận dụng) Biết rằng số phức z thỏa mãn $u=(z+3-i)\left(\overline{z}+1+3i\right)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

Giải

Đặt z= x+ yi (x, y $\in R$) ta có

$$u=\left[(x+3)+(y-1)i\right]\left[(x+1)-(y-3)i\right]=x^2+y^2+4x-4y+6+2(x--y-4)i$$

Ta có: $u\in R \Leftrightarrow x-y-4=0$

Tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường thẳng d: x-y-4=0, M(x;y) là điểm biểu diễn của z thì mô đun của z nhỏ nhất khi và chỉ khi độ dài OM nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM \perp d$ Tìm được M(-2;2) suy ra z=-2+2i.

Bài 10: (Vận dụng)Tìm số phức Z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{z}(1+i)-3+2i\right|=\frac{\sqrt{13}}{2}$

Giải

Gọi $z=x+yi(x,y\in R)\Rightarrow \overline{z}=x-yi$

$\left|\overline{z}(1+i)-3+2i\right|=\frac{\sqrt{13}}{2}\Leftrightarrow x^2+y^2-x-5y+\frac{39}{8}=0$

Gọi M (x;y) là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ Oxy$\Rightarrow M\in(C)$ là đường tròn có tâm $I(\frac{1}{2};\frac{5}{2})$ và bán kính $R=\frac{\sqrt{26}}{4}$

Gọi d là đường thẳng đi qua O và I $\Rightarrow d: y=5x$

Gọi M_1, M_2 là hai giao điểm của d và (C)$\Rightarrow M_1(\frac{3}{4};\frac{15}{4})$ và $M_2(\frac{1}{4};\frac{5}{4})$

Ta thấy $\begin{cases} OM_1 > OM_2 \\ OM_1 = OI+R \geq OM\,(M\in(C)) \end{cases}$

$\Rightarrow$ số phức cần tìm ứng với điểm biểu diễn M_1 hay $z=\frac{3}{4}+\frac{15}{4}i$

D. Bài tập TNKQ.

Câu 1. (Đề thi chính thức THPT QG năm 2017) Cho số phức $z=1-2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz$ trên mặt phẳng tọa độ ?

A. $Q(1;2)$ **<u>B.</u>** $N(2;1)$ **C.** $M(1;-2)$ **D.** $P(-2;1)$

Giải : $w=iz=i(1-2i)=2+i$. Vậy điểm biểu diễn w có tọa độ là: $(2;1)$

Câu 2. (Vận dụng)Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\leq 2.$ Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích **A.** $S=9\pi$. **B.** $S=12\pi$. **<u>C.</u>** $S=16\pi$. **D.** $S=25\pi$.

Hướng dẫn giải

$w=2z+1-i\Rightarrow z=\frac{w-1+i}{2}$

$|z-3+4i|\leq 2\Leftrightarrow\left|\frac{w-1+i}{2}-3+4i\right|\leq 2\Leftrightarrow|w-1+i-6+8i|\leq 4\Leftrightarrow|w-7+9i|\leq 4\ (1)$

Giả sử $w=x+yi\quad(x,y\in\mathbb{R})$, khi đó $(1)\Leftrightarrow(x-7)^2+(y+9)^2\leq 16$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7;-9)$, bán kính $r=4.$ Vậy diện tích cần tìm là $S=\pi.4^2=16\pi.$

Câu 3. Điểm biểu diễn hình học của số phức $z=a+ai$ nằm trên đường thẳng:

<u>A.</u> $y=x$ **B.** $y=2x$ **C.** $y=-x$ **D.** $y=-2x$

Câu 4. Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $5+8i$ và B là điểm biểu diễn của số phức $-5+8i.$ Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục hoành.

<u>B.</u> Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục tung.

C. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O.

D. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x.$

Câu 5. Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $z=2+5i$ và B là điểm biểu diễn của số phức $z'=-2+5i$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục hoành

<u>B.</u> Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục tung

C. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O

D. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$

Câu 6. Điểm M biểu diễn số phức $z=\dfrac{3+4i}{i^{2019}}$ có tọa độ là

A. $M(4;-3\ )$ **B.** $M(3;-4)$ **C.** $M(3;4)$ **<u>D.</u>** $M(-4;3)$

Câu 7. Trong mặt phẳng phức, gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1=-1+3i$, $z_2=1+5i$, $z_3=4+i$. Số phức với điểm biểu diễn D sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành là:

<u>A.</u> $2+3i$. **B.** $2-i$.. **C.** $2+3i$.. **D.** $3+5i$..

Câu 8. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+9=0$. Gọi M,N là các điểm biểu diễn của z_1 và z_2 trên mặt phẳng phức. Khi đó độ dài của MN là:

A. $MN=4$.. **B.** $MN=5$. **C.** $MN=-2\sqrt{5}$. **<u>D.</u>** $MN=2\sqrt{5}$.

Câu 9. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2-4z+9=0$. Gọi M,N,P lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2 và số phức $k=x+yi$ trên mặt phẳng phức. Khi đó tập hợp điểm P trên mặt phẳng phức để tam giác MNP vuông tại P là:

A. đường thẳng có phương trình $y=x-\sqrt{5}$.

B. là đường tròn có phương trình $x^2-2x+y^2-8=0$.

C. là đường tròn có phương trình $x^2-2x+y^2-8=0$, nhưng không chứa M,N.

<u>D.</u> là đường tròn có phương trình $x^2-4x+y^2-1=0$ nhưng không chứa M,N.

Câu 10. Biết $|z-i|=|(1+i)z|$, tập hợp điểm biểu diễn số phức z có phương trinh

A. $x^2++y^2+2y+1=0$. **B.** $x^2+y^2-2y+1=0$.

<u>C.</u> $x^2+y^2+2y-1=0$. **D.** $x^2y^2-2y-1=0$.

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1|=|(1+i)z|$ là:

A. Đường tròn có tâm $I(0;-1)$, bán kính $r=\sqrt{2}$

B. Đường tròn có tâm $I(0;1)$, bán kính $r=\sqrt{2}$

C. Đường tròn có tâm $I(1;0)$, bán kính $r=\sqrt{2}$

<u>D.</u> Đường tròn có tâm $I(-1;0)$, bán kính $r=\sqrt{2}$

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2+z|=|i-z|$ là:

<u>A.</u> Đường thẳng có phương trình $4x+2y+3=0$

B. Đường thẳng có phương trình $4x-2y+3=0$

C. Đường thẳng có phương trình $-4x+2y+3=0$

D. Đường thẳng có phương trình $4x+2y-3=0$

Câu 13. Gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức $z_1=7-3i$, $z_2=8+4i$, $z_3=1+5i$, $z_4=-2i$. Tứ giác $ABCD$ là

<u>A.</u> là hình vuông. **B.** là hình thoi.

C. là hình chữ nhật. **D.** là hình bình hành.

Câu 14. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức $z_1 = -1+3i; z_2 = -3-2i; z_3 = 4+i$. Chọn kết luận **sai**:

A. Tam giác ABC vuông cân. **B.** Tam giác ABC cân.

C. Tam giác ABC vuông. **D.** Tam giác ABC đều.

Câu 15. Tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z thoả mãn $|z-i|+|z+i|=4$ có dạng là

A. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

C. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.

Câu 16. Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z}+1-2i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w=(3-4i)z-1+2i$ là đường tròn I, bán kính R. Khi đó.

A. $I(-1;-2), R=\sqrt{5}$. **B.** $I(1;2), R=\sqrt{5}$.

C. $I(-1;2), R=5$. **D.** $I(1;-2), R=5$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z=a+bi$ và $|z|=c>0$, với $a;b;c \in \mathbb{R}$.

Lại có $w=(3-4i)z-1+2i \Leftrightarrow z=\frac{w+1-2i}{3-4i}$.

Gọi $w=x+yi$ với $x;y \in \mathbb{R}$.

Khi đó $|z|=c \Rightarrow \left|\frac{w+1-2i}{3-4i}\right|=c \Leftrightarrow \frac{|w+1-2i|}{|3-4i|}=c \Leftrightarrow |x+yi+1-2i|=5c$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=5c \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=25c^2$.

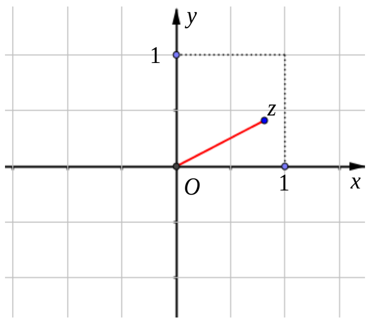
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn $I(-1;2)$.

Khi đó chỉ có đáp án C có khả năng đúng và theo đó $R=5 \Rightarrow 5c=5 \Rightarrow c=1$.

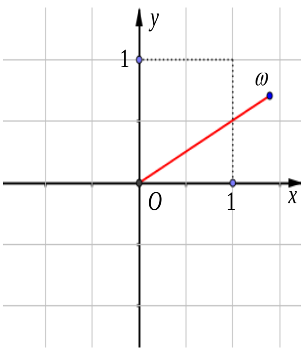
Thử $c=1$ vào phương trình (1) thì thỏa mãn.

Câu 17. Số phức z được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ như hình vẽ:

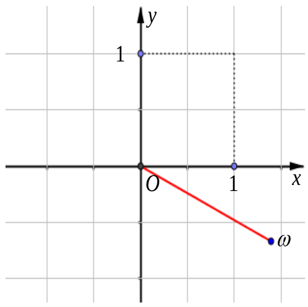
Hỏi hình nào biểu diễn cho số phức $\varpi = \frac{i}{z}$?

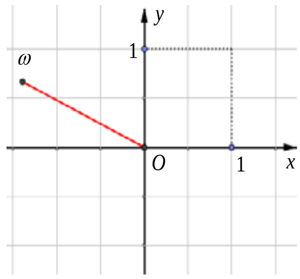


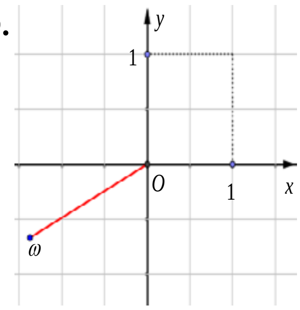
A.



B.



C. 

D. 

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết điểm biểu diễn số phức z nằm ở góc phần tư thứ nhất nên $a, b > 0$.

Ta có $\varpi = \dfrac{i}{z} = \dfrac{i}{a - bi} = \dfrac{i(a+bi)}{a^2+b^2} = -\dfrac{b}{a^2+b^2} + \dfrac{a}{a^2+b^2}i$

Do $a, b > 0$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{a^2+b^2} < 0 \\ \dfrac{a}{a^2+b^2} > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ điểm biểu diễn số phức ω nằm ở góc phần tư thứ hai.Vậy chọn **C**.

Câu 18. Trong các số phức z thỏa $|z + 3 + 4i| = 2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó

A. Không tồn tại số phức z_0.

B. $|z_0| = 2$.

C. $|z_0| = 7$.

D. $|z_0| = 3$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1:

Đặt $z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó $|z + 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow (a+3)^2 + (b+4)^2 = 4$.

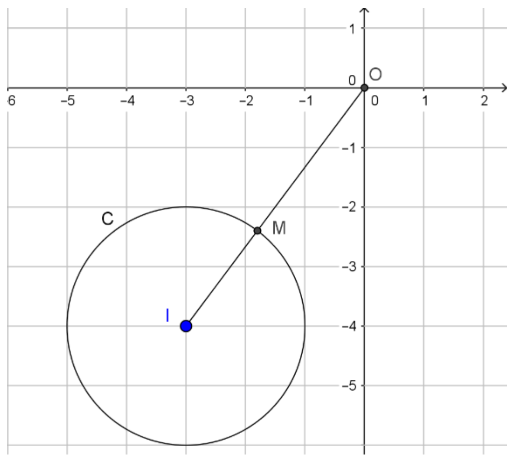
Suy ra biểu diễn hình học của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(-3;-4)$ và bán kính $R = 5$.

Gọi $M(z)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có: $M(z) \in (C)$.

$|z| = OM \geq OI - R = 3$.

Vậy $|z|$ bé nhất bằng 3 khi $M(z) = (C) \cap IM$.



Cách 2:

Đặt $\begin{cases} a + 3 = 2\cos\varphi \\ b + 4 = 2\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 + 2\cos\varphi \\ b = -4 + 2\sin\varphi \end{cases}$.

$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2\cos\varphi - 3)^2 + (2\sin\varphi - 4)^2} = \sqrt{29 - 12\cos\varphi - 16\sin\varphi}$.

$= \sqrt{29 - 20\left(\dfrac{3}{5}\cos\varphi + \dfrac{4}{5}\sin\varphi\right)} = \sqrt{29 - 20\cos(\alpha - \varphi)} \geq \sqrt{9}$.

$\Rightarrow |z_0| = 3$

Câu 19. Tính $S = 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + ... + 2017i^{2017}$.

A. $S = 2017 - 1009i$.

B. $1009 + 2017i$.

C. $2017 + 1009i$.

D. $1008 + 1009i$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$S = 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + ... + 2017i^{2017}$$
$$= 1009 + \left(4i^4 + 8i^8 + ... + 2016i^{2016}\right) + \left(i + 5i^5 + 9i^9 + ... + 2017i^{2017}\right) +$$
$$+ \left(2i^2 + 6i^6 + 10i^{10} + ... + 2014i^{2014}\right) + \left(3i^3 + 7i^7 + 11i^{11} + ... + 2015i^{2015}\right)$$
$$= 1009 + \sum_{n=1}^{504}(4n) + i\sum_{n=1}^{505}(4n-3) - \sum_{n=1}^{504}(4n-2) - i\sum_{n=1}^{504}(4n-1)$$
$$= 1009 + 509040 + 509545i - 508032 - 508536i$$
$$= 2017 + 1009i.$$

Cách khác:

Đặt

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{2017}$$
$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + 2017x^{2016}$$
$$xf'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + 2017x^{2017} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{2017} = \frac{x^{2018} - 1}{x - 1}$$
$$f'(x) = \frac{2018x^{2017}(x-1) - \left(x^{2018} - 1\right)}{(x-1)^2}$$
$$\Rightarrow xf'(x) = x.\frac{2018x^{2017}(x-1) - \left(x^{2018} - 1\right)}{(x-1)^2} \quad (2)$$

Thay $x = i$ vào (1) và (2) ta được:

$$S = 1009 + i.\frac{2018i^{2017}(i-1) - \left(i^{2018} - 1\right)}{(i-1)^2} = 1009 + i\frac{-2018 - 2018i + 2}{-2i} = 2017 + 1009i$$

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z+i| + |z-2-i|$.

A. $\max T = 8\sqrt{2}$. **<u>B.</u>** $\max T = 4$. **C.** $\max T = 4\sqrt{2}$. **D.** $\max T = 8$.

Hướng dẫn giải

$T = |z+i| + |z-2-i| = |(z-1) + (1+i)| + |(z-1) - (1+i)|$.

Đặt $w = z - 1$. Ta có $|w| = 1$ và $T = |w + (1+i)| + |w - (1+i)|$.

Đặt $w = x + y.i$. Khi đó $|w|^2 = 2 = x^2 + y^2$.

$$T = |(x+1) + (y+1)i| + |(x-1) + (y-1)i|$$
$$= 1.\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} + 1.\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$
$$\le \sqrt{\left(1^2 + 1^2\right)\left((x+1)^2 + (y+1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2\right)}$$
$$= \sqrt{2\left(2x^2 + 2y^2 + 4\right)} = 4$$

Vậy $\max T = 4$.

Tiết 7, 8, 9

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

A. Kiến thức cơ bản.

Phương trình bậc hai với hệ số thực $Az^2 + Bz + C = 0$ (*) ($A \neq 0$).

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

- $\Delta > 0$: PT có hai nghiệm phân biệt $z_{1,2} = \dfrac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$
- $\Delta = 0$: PT có 1 nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\dfrac{B}{2A}$
- $\Delta < 0$: PT có hai nghiệm phức phân biệt $z_{1,2} = \dfrac{-B \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2A}$

Chú ý: *Nếu $z_0 \in C$ là một nghiệm của (*) thì $\overline{z}_0$ cũng là một nghiệm của (*).*

B. Kĩ năng cơ bản.

Biết cách giải phương trình bậc hai với hệ số thực.

Biết giải phương trình qui về phương trình bậc hai với hệ số thực.

C. Bài tập luyện tập.

Bài 1: Tìm nghiệm phức của các phương trình sau :

a) $iz + 2 - i = 0$ b) $(2 + 3i)z = z - 1$ c) $(2 - i)\overline{z} - 4 = 0$

d) $(iz - 1)(z + 3i)(\overline{z} - 2 + 3i) = 0$ e) $z^2 + 4 = 0$.

Giải:

a) $z = \dfrac{i-2}{i} = 1 + 2i$ b) $z = \dfrac{-1}{1+3i} = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10}i$

c) $\overline{z} = \dfrac{4}{2-i} = \dfrac{8}{5} + \dfrac{4}{5}i \Rightarrow z = \dfrac{8}{5} - \dfrac{4}{5}i$ d) $z = -i$, $z = -3i$, $z = 2 + 3i$

e) $z = \pm 2i$.

Bài 2: Giải các phương trình sau trên tập số phức

$a)\ z^2 - z + 1 = 0$ $b)\ x^2 + 2x + 5 = 0$ $c)\ z^4 + 2z^2 - 3 = 0$

Giải:

$a)\ z^2 - z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$, căn bậc hai của Δ là $\pm i\sqrt{3}$

Phương trình có nghiệm: $z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$b)\ x^2 + 2x + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16 = 16i^2$; Căn bậc hai của Δ là $\pm 4i$.

Phương trình có nghiệm: $x_1 = -1 - 2i,\ x_2 = -1 + 2i$

$c)\ z^4 + 2z^2 - 3 = 0$ Đặt $t = z^2$.

Phương trình trở thành: $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 1 \\ z^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 1 \\ z = \pm i\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: -1, 1, $-i\sqrt{3},\ i\sqrt{3}$

Bài 3: Giải các phương trình bậc hai sau:

a) $z^2 + 2z + 5 = 0$

a) $z^2 + (1-3i)z - 2(1 + i) = 0$ *(tham khảo)*

Giải:

a) Xét phương trình: $z^2 + 2z + 5 = 0$

Ta có: $\Delta = -4 = 4i^2 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm: $z_1 = -1 + 2i$ và $z_2 = -1 - 2i$.

b) Ta có: $\Delta = (1-3i)^2 + 8(1+i) = 2i = (1+i)^2$

nên 1+i là một căn bậc hai của số phức 2i

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm là: $z_1 = \dfrac{3i-1+1+i}{2} = 2i$; $z_2 = \dfrac{3i-1-1-i}{2} = -1+i$

Bài 4: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$ Tính giá trị biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$

Giải:

Ta có $z^2 + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = -9 \Leftrightarrow (z+1)^2 = (3i)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1+3i \\ z = -1-3i \end{array}\right.$$

$z_1 = -1+3i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$z_2 = -1-3i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{10}$

Vậy $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 20$

Bài 5: Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 11 = 0$. Tính giá trị của biểu thức A = $\dfrac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2}$.

Bài 6: Cho số phức z thỏa mãn $z^2 - 6z + 13 = 0$ Tính $\left|z + \dfrac{6}{z+i}\right|$

Giải:

$$z^2 - 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow (z-3)^2 = -4 \Leftrightarrow (z-3)^2 = (2i)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3+2i \\ z = 3-2i \end{array}\right.$$

Với $z = 3+2i$ ta có $\left|z + \dfrac{6}{z+i}\right| = \left|3+2i + \dfrac{6}{3+3i}\right| = |4+i| = \sqrt{17}$

Với $z = 3-2i$ ta có $\left|z + \dfrac{6}{z+i}\right| = \left|3-2i + \dfrac{6}{3-i}\right| = \dfrac{1}{5}|24-7i| = 5$

Bài 7: Tìm các số thực b, c để phương trình (với ẩn z) : $z^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ làm một nghiệm.

Giải:

Theo H2 trang 195, với z = 1 + i là nghiệm thì:

$(1 + i)^2 + b(1 + i) + c = 0 \Leftrightarrow b + c + (2 + b)i = 0$

$\Leftrightarrow b + c = 0$ và $2 + b = 0$, suy ra : $b = -2$, $c = 2$

Bài 8: Giải phương trình trên tập hợp các số phức: $\dfrac{4z-3+7i}{z-i} = z - 2i$ (tham khảo)

Giải Điều kiện: $z \neq i$

Phương trình đã cho tương đương với $z^2-(4+3i)z+1+7i=0$

Phương trình có biệt thức $\Delta=(4+3i)^2-4(1+7i)=3-4i=(2-i)^2$

Phương trình có hai nghiệm là: $z=1+2i$ và $z=3+i$.

*** Phương trình quy về bậc hai**

Bài 9: Giải các phương trình: $z^3 - 27 = 0$

Giải: $z^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+3z+9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z^2+3z+9=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z_{2,3}=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Bài 10: Giải phương trình trên tập hợp số phức: $z^4-z^3+6z^2-6z-16=0$

Giải:

Nhận biết được hai nghiệm z=-1 và z=2

Phương trình đã cho tương đương với $(z-2)(z+1)(z^2+8)=0$

Giải ra ta được bốn nghiệm: $z=-1;\ z=2;\ z=\pm 2\sqrt{2}i$

Bài 11: (Đặt ẩn phụ) Giải phương trình sau trên tập số phức $(z^2+z)^2+4(z^2+z)-12=0$

Giải:

Đặt $t = z^2 + z$, khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$t^2+4t-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-6 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+z-6=0 \\ z^2+z-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{-1+\sqrt{23}i}{2} \\ z=\dfrac{-1-\sqrt{23}i}{2} \\ z=1 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Bài 12: Giải phương trình: $(z^2-z)(z+3)(z+2)=10$, $z\in C$.

Giải:

PT $\Leftrightarrow z(z+2)(z-1)(z+3)=10 \Leftrightarrow (z^2+2z)(z^2+2z-3)=0$

Đặt $t=z^2+2z$. Khi đó phương trình (8) trở thành:

Đặt $t=z^2+2z$. Khi đó phương trình (8) trở thành

$$t^2-3t-10=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1\pm i \\ z=-1\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có các nghiệm: $z=-1\pm\sqrt{6}$; $z=-1\pm i$

Bài 13: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình $z^4-z^3-2z^2+6z-4=0$ trên tập số phức tính tổng: $S=\dfrac{1}{z_1^2}+\dfrac{1}{z_2^2}+\dfrac{1}{z_3^2}+\dfrac{1}{z_4^2}$.

Giải:

PT: $z^4-z^3-2z^2+6z-4=0 \Leftrightarrow (z-1)(z+2)(z^2-2z+2)=0$ (1)

Không mất tính tổng quát ta gọi 4 nghiệm của(1)là $\left[\begin{array}{l} z_1=1 \\ z_2=-2 \\ z_3=1+i \\ z_4=1-i \end{array}\right.$

Thay và biểu thức ta có: $S=\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\frac{1}{z_3^2}+\frac{1}{z_4^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{(1-i)^2}+\frac{1}{(1+i)^2}=\frac{5}{4}$

D. Bài tập TNKQ.

Câu 1. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $iz+2-i=0$ có nghiệm là:

A. $z=1-2i$. **B.** $z=2+i$. **C.** $z=1+2i$. **D.** $z=4-3i$.

Câu 2. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $(2+3i)z=z-1$ có nghiệm là:

A. $z=\frac{7}{10}+\frac{9}{10}i$. **B.** $z=-\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$. **C.** $z=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}i$. **D.** $z=\frac{6}{5}-\frac{2}{5}i$.

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn: $\overline{z}(1+2i)=7+4i$. Tìm mô đun số phức $\omega=z+2i$.

A. 4. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $\sqrt{24}$. **D.** 5.

Câu 4. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $(2-i)\overline{z}-4=0$ có nghiệm là:

A. $z=\frac{8}{5}-\frac{4}{5}i$ **B.** $z=\frac{4}{5}-\frac{8}{5}i$ **C.** $z=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}i$ **D.** $z=\frac{7}{5}-\frac{3}{5}i$

Câu 5. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $(iz)(\overline{z}-2+3i)=0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=2-3i \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=5+3i \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=2+3i \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=2-5i \end{array}\right.$.

Câu 6. Cho số phức thỏa mãn $z+(1-2i)\overline{z}=2-4i$. Tìm môđun của $w=z^2-z$

A. $\sqrt{10}$. **B.** 10. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 7. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^2-z+1=0$ có nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l} z=1+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=1-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} z=1+\frac{\sqrt{5}}{2}i \\ z=1-\frac{\sqrt{5}}{2}i \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i \\ z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}i \end{array}\right.$.

Câu 8. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệmcủa phương trình $z^2-2z+5=0$. Tính $P=z_1^4+z_2^4$

A. -14. **B.** 14. **C.** $-14i$. **D.** $14i$.

Câu 9. Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+5=0$. Giá trị của $A=|z_1|^2+|z_2|^2$

A. 6. **B.** 8. **C.** 10. **D.** $\sqrt{10}$

Câu 10. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2+2z+3=0$. Tọa độ điểm M biểu diễn số phức z_1 là:

A. $M(-1;2)$. **B.** $M(-1;-2)$. **C.** $M(-1;-\sqrt{2})$. **D.** $M(-1;-\sqrt{2}i)$.

Câu 11. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là nghiệmcủa phươngtrình: $z^2-2z+5=0$. Tính $F=|z_1|+|z_2|$

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $z^4-z^2-2=0$ là

A. $2;-1$. **B.** $\pm\sqrt{2};\pm i$. **C.** $\pm 1;\pm i\sqrt{2}$. **D.** $2,\pm i$.

Câu 13. Cho số phức $z=3+4i$ và $\overline{z}$ là số phức liên hợp của z. Phương trình bậc hai nhận z và $\overline{z}$ làm nghiệm là

A. $z^2-6z+25=0$. **B.** $z^2+6z-25=0$.

C. $z^2-6z+\frac{3}{2}i=0$. **D.** $z^2-6z+\frac{1}{2}=0$.

Câu 14. Trong $\mathbb{C}$, Phương trình $z^3+1=0$ có nghiệm là

A. -1. **B.** $-1;\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **C.** $-1;\ \frac{5\pm i\sqrt{3}}{4}$. **D.** $-1;\frac{2\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Câu 15. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^4-1=0$ có nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l} z=\pm 2 \\ z=\pm 2i \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} z=\pm 3 \\ z=\pm 4i \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} z=\pm 1 \\ z=\pm i \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} z=\pm 1 \\ z=\pm 2i \end{array}\right.$.

Câu 16. Trong $\mathbb{C}$, biết z_1,z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-\sqrt{3}z+1=0$. Khi đó, tổng bình phương của hai nghiệm có giá trị bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 17. Tìm số phức z thỏa mãn: $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z.\overline{z}=25$.

A. $z=3+4i$ hoặc $z=5$. **B.** $z=-3+4i$ hoặc $z=-5$.

C. $z=3-4i$ hoặc $z=5$. **D.** $z=4+5i$ hoặc $z=3$.

Câu 18. Phương trình $\mathrm{i}z+2-\mathrm{i}=0$ (với ẩn z) có nghiệm là:

A. $1+1\mathrm{i}$. **B.** $1+2\mathrm{i}$. **C.** $1-2\mathrm{i}$. **D.** $1-\mathrm{i}$.

Câu 19. Các căn bậc hai của số phức $1+4\sqrt{3}\mathrm{i}$ là:

A. $\pm\sqrt{3}(2-\mathrm{i})$. **B.** $\pm\left(2-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$. **C.** $\pm\left(2+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$. **D.** $\pm\sqrt{3}(2+\mathrm{i})$.

Câu 20. Phương trình $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$ có nghiệm là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})$. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})$. **C.** $\frac{1}{2}(1\pm\mathrm{i})$. **D.** $-\frac{1}{2}(1\pm\mathrm{i})$.

Câu 21. Phương trình $z^4+4=0$ có nghiệm là:

A. $\pm(1+\mathrm{i})$ và $\pm(1-\mathrm{i})$. **B.** $\pm(1+\mathrm{i})$ và $\pm(2-\mathrm{i})$.

C. $\pm(2+\mathrm{i})$ và $\pm(1-\mathrm{i})$. **D.** $\pm(2+\mathrm{i})$ và $\pm(2-\mathrm{i})$.

Câu 22. Phương trình $\mathrm{i}z+2-\mathrm{i}=0$ (với ẩn z) có nghiệm là:

A. $1+1\mathrm{i}$. **B.** $1+2\mathrm{i}$. **C.** $1-2\mathrm{i}$. **D.** $1-\mathrm{i}$.

Câu 23. Các căn bậc hai của số phức $1+4\sqrt{3}\mathrm{i}$ là:

A. $\pm\sqrt{3}(2-\mathrm{i})$. **B.** $\pm\left(2-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$. **C.** $\pm\left(2+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$. **D.** $\pm\sqrt{3}(2+\mathrm{i})$.

Câu 24. Phương trình $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$ có nghiệm là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})$. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})$. **C.** $\frac{1}{2}(1\pm\mathrm{i})$. **D.** $-\frac{1}{2}(1\pm\mathrm{i})$.

Câu 25. Phương trình $z^4+4=0$ có nghiệm là:

A. $\pm(1+\mathrm{i})$ và $\pm(1-\mathrm{i})$. **B.** $\pm(1+\mathrm{i})$ và $\pm(2-\mathrm{i})$.

C. $\pm(2+\mathrm{i})$ và $\pm(1-\mathrm{i})$. **D.** $\pm(2+\mathrm{i})$ và $\pm(2-\mathrm{i})$.

Tiết 10, 11, 12

LUYỆN TẬP – KIỂM TRA

CÁC CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM- LUYỆN TẬP

Câu 1: Tìm số phức z $^{-1}$ biết rằng $\overline{z}=(2-i)^2(3-2i)$

A. $z^{-1}=325-\frac{18}{325}i$ B. $z^{-1}=\frac{1}{325}-\frac{325}{18}i$

C. $z^{-1}=\frac{1}{325}-\frac{18}{325}i$ D. $z^{-1}=325-\frac{325}{18}i$

Câu 2 : Tìm số phức z + 2 biết $\overline{z}=(1+i)^{2010}$

A. $z+2=2^{1005}i$ B. $z+2=-2^{1005}i$

C. $z+2=2-2^{1005}i$ D. $z+2=-2^{1004}i$

Câu 3: Cho số phức $z=\frac{5}{1+2i}+\frac{(1+i)^{2010}}{2^{1005}}$. Tìm số phức $2z^{-1}+3\overline{z}$

A. $2z^{-1}+3\overline{z}=4+4i.$ B. $2z^{-1}+3\overline{z}=4-4i.$

C. $2z^{-1}+3\overline{z}=3+4i.$ D. $2z^{-1}+3\overline{z}=1+i.$

Câu 4:Tìm phần thực a và phần ảo b của các số phức $\frac{i}{(1+i)^{10}}$

A. a = 0 và b = 32 B. a = 32 và b = 0

C. a = 0 và b = - 32 D. a = - 32 và b = 0

Câu 5:Tìm phần thực a và phần ảo b của các số phức $\frac{(3+2i)(1-3i)}{1+i\sqrt{3}}+(2-i)$

A. $\begin{cases} a=\frac{17+7\sqrt{3}}{4} \\ b=-\frac{11+9\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ B. $\begin{cases} a=\frac{17-7\sqrt{3}}{4} \\ b=-\frac{11-9\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

C. $\begin{cases} a=\frac{17-7\sqrt{3}}{4} \\ b=-\frac{11+9\sqrt{3}}{4} \end{cases}$. D. $\begin{cases} a=\frac{-17-7\sqrt{3}}{4} \\ b=-\frac{-11+9\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

Câu 6: Tìm phần ảo a của số phức z, biết $\overline{z}=(\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i)$.

A. $a=\sqrt{2}$ B. $a=-2$

C. $a=-\sqrt{2}$. D. $a=-2\sqrt{2}$

Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}=\frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$. Tìm môđun của số phức $\overline{z}+iz$

A. $\left|\overline{z}+iz\right|=\sqrt{2}$ B. $\left|\overline{z}+iz\right|=4\sqrt{2}$

C. $\left|\overline{z}+iz\right|=8\sqrt{2}i$ D. $\left|\overline{z}+iz\right|=8\sqrt{2}$

Câu 8: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện: $\left|z+1-2i\right|=2$ là:

A. đường tròn tâm I(–1; 2) bán kính R = 2. B. đường tròn tâm I(–1; -2) bán kính R = 2.

C. đường tròn tâm I(1; - 2) bán kính R = 2. D. đường tròn tâm I(1; 2) bán kính R = 2.

Câu 9: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện: $\left|\overline{z}-2z\right|=6$ là:

A. $(E):\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1.$ B. $(E):\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$

C. $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ D. $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{36}=1$

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện |z – (3 – 4i)| = 2 là:

A. đường tròn tâm I(- 3; - 4), bán kính R = 2 B. đường tròn tâm I(3; - 4), bán kính R = 4

C. đường tròn tâm I(3; 4), bán kính R = 2 D.đường tròn tâm I(3; - 4), bán kính R = 2

Câu 11 : Tìm số phức z thỏa mãn phương trình: $z^2-2\overline{z}+|z|^2=4+6i$

A. z = 2 + i B. z = 2

C. z = 2 - i D. z = i

Câu 12:Tìm số phức z thoả mãn hệ phương trình $\begin{cases} |z+\overline{z}|=4 & (1) \\ \left|z^2+\left(\overline{z}\right)^2\right|=9 & (2) \end{cases}$

A. z = 3 + i B. z = 2i

C. z = 2 + i hoặc z = 2 – i, hoặc z = – 2 + i hoặc z = – 2 – i. D. z = 2 - 3i

Câu 13:Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn hai điều kiện |z + i – 1 | = $\sqrt{5}$ và $z.\overline{z}=5$

A. z = 2 - i và z = 1 – 2i. B. z = 3 + i và z = 1 – i.

C. z = i và z = – 1 – 2i. D. z = 2 + i và z = – 1 – 2i.

Câu 14:Tìm tất cả các số phức z thoả mãn : $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z.\overline{z}=25$.

A. z = 3 - 4i B. z = 3 + 4i và z = 5

C. z = 2 + 4i và z = 4 D. z = 4i và z = 5

Câu 15: Tìm số phức z = x + yi, biết rằng hai số thực x, y thỏa mãn phương trình phức sau:

$x(2-3i)+y(1+2i)^3=(2-i)^2$

A. $z=\dfrac{50}{37}-\dfrac{1}{37}i$ B. $z=\dfrac{37}{50}-37i$

C. $z=\dfrac{5}{37}-\dfrac{1}{37}i$ D. $z=-\dfrac{50}{37}+\dfrac{1}{37}i$

Câu 16:Trên tập số phức, tìm x biết : 5 – 2ix = (3 + 4i) (1 – 3i)

A. $x=\dfrac{5}{2}-5i$ B. $x=5+\dfrac{5}{2}i$

C. $x=\dfrac{5}{2}+5i$ D. $x=5-\dfrac{5}{2}i$

Câu 17: Trên tập số phức, tìm x biết: (3 + 4i) x = (1 + 2i) (4 + i)

A. $x=25+\dfrac{19}{25}i$ B. $x=\dfrac{42}{25}+\dfrac{19}{25}i$

C. $x=\dfrac{25}{42}+\dfrac{19}{25}i$ D. $x=\dfrac{25}{42}+\dfrac{25}{19}i$

Câu 18:Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-z+5=0$ trên tập số phức. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1+z_2|^2$.

A. A = 99 B. A = 101

C. A = 102 D. A = 100

Câu 19:Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức (khác số thực) của phương trình $z^3 + 8 = 0$. Tính giá trị biểu thức: $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \frac{1}{|z_1 z_2|}$

A. $A = \frac{33}{4}$ B. $A = \frac{3}{4}$

C. $A = \frac{4}{33}$ D. $A = \frac{35}{4}$

Câu 20: Gọi z_1 và z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình: $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

A. M = 21 B. M = 10

C. M = 20 D. M = 2

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu số	**Đáp án**	**Lời giải**
1	C	Ta có: $\bar{z} = (2-i)^2(3-2i) = (4-4i+i^2)(3-2i) = (3-4i)(3-2i) = 9-18i+8i^2 = 1-18i$ $\Rightarrow z = 1+18i.$ $\Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{1+18i} = \frac{1-18i}{(1+18i)(1-18i)} = \frac{1}{325} - \frac{18}{325}i$
2	C	$\bar{z} = (1+i)^{2010} = \left[(1+i)^2\right]^{1005} = \left(1+2i+i^2\right)^{1005} = (2i)^{1005} = 2^{1005}i^{1004}.i = 2^{1005}i$ $\Rightarrow z = -2^{1005}i \Rightarrow z+2 = 2-2^{1005}i$
3	A	$z = \frac{5}{1+2i} + \frac{(1+i)^{2010}}{2^{1005}} = 1-2i + \frac{1}{2^{1005}}\left[(1+i)^2\right]^{1005} = 1-2i+\frac{1}{2^{1005}}\left(1+2i+i^2\right)^{1005}$ $= 1-2i+\frac{1}{2^{1005}}(2i)^{1005} = 1-2i+\frac{1}{2^{1005}}2^{1005}i^{1004}.i = 1-2i+i^{4.201}.i = 1-i$ $\Rightarrow \bar{z} = 1+i$ và $z^{-1} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$ $\Rightarrow 2z^{-1} + 3\bar{z} = 1+i+3(1+i) = 4+4i.$
4	B	Ta có: $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$ Do đó: $(1+i)^{10} = \left((1+i)^2\right)^5 = \left(2i\right)^5 = 2^5 i^5 = 32i$ $\Rightarrow \frac{i}{(1+i)^{10}} = \frac{i}{32i} = \frac{1}{32}$ Vậy phần thực của số phức là 32 và phần ảo của số phức là 0.
5	C	Ta có:

		$\dfrac{(3+2i)(1-3i)}{1+i\sqrt{3}}+(2-i)=\dfrac{(9-7i)(1-i\sqrt{3})}{4}+(2-i)$ $=\dfrac{(9-7\sqrt{3})-(7+9\sqrt{3})i+4(2-i)}{4}=\dfrac{17-7\sqrt{3}}{4}-\dfrac{11+9\sqrt{3}}{4}i$ Vậy phần thực của số phức là $\dfrac{17-7\sqrt{3}}{4}$ và phần ảo của số phức là $-\dfrac{11+9\sqrt{3}}{4}$.
6	C	$\overline{z}=(\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i)=(1+2\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=5+\sqrt{2}i$. Do đó: $z=5-\sqrt{2}i \Rightarrow$ Phần ảo của số phức z là $-\sqrt{2}$.
7	D	$\overline{z}=\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}=\dfrac{1-3\sqrt{3}i+9i^2+3\sqrt{3}i}{1-i}=\dfrac{-8}{1-i}=\dfrac{-8(1+i)}{2}=-4-4i\Rightarrow z=-$ $\Rightarrow \overline{z}+iz=-4-4i+i(-4+4i)=-8(1+i)\Rightarrow \left\|\overline{z}+iz\right\|=8\sqrt{2}$
8	A	Gọi $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$, ta có: $z+1-2i=(x+yi)+1-2i=(x+1)+(y-2)i$ Do đó: $\|z+1-2i\|=2\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=2\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=4$ Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm I(–1; 2) bán kính R = 2.
9	A	Gọi $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$, ta có: $\overline{z}-2z=(x-yi)-2(x+yi)=-x-3yi$ Do đó: $\|\overline{z}-2z\|=6\Leftrightarrow\sqrt{(-x)^2+(3y)^2}=6\Leftrightarrow x^2+9y^2=36\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$ Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là elip có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$.
10	D	Gọi $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có z – (3 – 4i) = x – 3 + (y + 4)i Do đó: $\|z-(3-4i)\|=2\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=2$ $\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=4$ Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(3;-4)$, bán kính R = 2
11	A	Gọi z = a + bi (a, b ∈ R), ta có: $z^2-2\overline{z}+\|z\|^2=4+6i\Leftrightarrow a^2-b^2+2abi-2(a-bi)+(a^2+b^2)=4+6i$ $\Leftrightarrow 2a^2-2a+2b(a+1)i=4+6i\Leftrightarrow\begin{cases}2a^2-2a=4\\2b(a+1)=6\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\2b(a+1)=6\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\2b(a+1)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ Vậy z = 2 + i
12	C	Gọi $z=a+bi(x,y\in\mathbb{R})$ thì: $\begin{cases}\|z+\overline{z}\|=4\\\left\|z^2-\left(\overline{z}\right)^2\right\|=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\|2a\|=4\\\|4abi\|=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm2\\b=\pm2\end{cases}$

		Do đó các số phức cần tìm là: 2 + i, 2 – i, – 2 + i và – 2 – i.
13	D	Gọi z = a + bi (a, b $\in \mathbb{R}$). Ta có: $\begin{cases} \lvert z+i-1\rvert=\sqrt{5} \\ z.\bar{z}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lvert (a-1)+(b+1)i\rvert=5 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b+1)^2=5 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-2a+2b=3 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ (b+1)^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ 2b^2+2b-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$ Vậy có hai số phức thỏa mãn đề toán là z = 2 + i và z = – 1 – 2i.
14	B	Đặt z = a + bi với a, b $\in \mathbb{R}$ thì z – 2 – i = a – 2 + (b – 1)i Ta có: $\begin{cases} \lvert z-(2+i)\rvert=\sqrt{10} \\ z.\bar{z}=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+(b-1)^2=10 \\ a^2+b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b=20 \\ a^2+b^2=25 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b=10-2a \\ a^2-8a+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \vee \begin{cases} a=5 \\ b=0 \end{cases}$ Vậy z = 3 + 4i và z = 5
15	A	(1) $\Leftrightarrow$ x(2 – 3i) + y(1 + 6i – 12 – 8i) = 4 – 4i – 1 $\Leftrightarrow$ (2x – 11y) + (– 3x – 2y)i = 3 – 4i $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-11y=3 \\ -3x-2y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{50}{37} \\ y=-\dfrac{1}{37} \end{cases}$ Vậy số phức z cần tìm là: $z=\dfrac{50}{37}-\dfrac{1}{37}i$.
16	C	$(1) \Leftrightarrow 2ix=5-(3+4i)(1-3i) \Leftrightarrow 2ix=5-(3-9i+4i+12)$ $\Leftrightarrow 2ix=5-(15-5i) \Leftrightarrow 2ix=-10+5i \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}+5i$
17	D	$(2) \Leftrightarrow (3+4i)x=(4+i+8i-2) \Leftrightarrow (3+4i)x=2+9i \Leftrightarrow x=\dfrac{2+9i}{3+4i}=\dfrac{42}{25}+\dfrac{19}{25}i$
18	B	Phương trình đã cho có hai nghiệm là: $z_1=\dfrac{1-\sqrt{19}i}{2}, z_2=\dfrac{1+\sqrt{19}i}{2}$ $z_1{}^2=\left(\dfrac{1-\sqrt{19}i}{2}\right)^2=\dfrac{-9-\sqrt{19}i}{2} \Rightarrow \lvert z_1{}^2\rvert=50$ $z_2{}^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{19}i}{2}\right)^2=\dfrac{-9+\sqrt{19}i}{2} \Rightarrow \lvert z_2{}^2\rvert=50$ $z_1+z_2=1 \Rightarrow \lvert z_1+z_2\rvert=1$ $\Rightarrow$ **A =** $\lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2+\lvert z_1+z_2\rvert^2=101$
19	A	Xét phương trình: $z^3+8=0$ Ta có: $z^3+8=0 \Leftrightarrow (z+2)(z^2-2z+4)=0$

		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2 \\ z^2-2z+4=0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Hai nghiệm phức (khác số thực) của (1) là nghiệm phương trình: $z^2 - 2z + 4 = 0$ $\Rightarrow z_1 = 1-\sqrt{3}i, z_2 = 1+\sqrt{3}i$ $\Rightarrow z_1.z_2 = (1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i) = 4 \Rightarrow \frac{1}{z_1z_2} = \frac{1}{4}$ Do đó: $\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 + \frac{1}{\|z_1z_2\|} = 1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 + \sqrt{3}^2 + \frac{1}{4} = \frac{33}{4}$.
20	C	$z_1 = -1-3i,\ z_2 = -1+3i$ $\Rightarrow \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 = (-1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + (3)^2 = 20$

KIỂM TRA 1 TIẾT: Chuyên đề số phức

I. MỤC TIÊU

Kiểm tra mức độ đạt chuẩn KTKN trong chương trình môn Toán lớp 12 sau khi học xong chương số phức.

1. Kiến thức.

Củng cố định nghĩa số phức. Phần thực, phần ảo, môđun của số phức. Số phức liên hợp. Cách giải phương trình bậc hai với hệ số thực trên tập số phức. Biểu diễn số phức trong mặt phẳng tọa độ.

2. Kĩ năng.

Tìm được phần thực, phần ảo, môđun của số phức. Điểm biểu diện của số phức

Thực hiện được các phép cộng, trừ, nhân, chia số phức.

Giải được phương trình bậc hai với hệ số thực trên tập số phức

3. Thái độ.

Rèn luyện tính cẩn thận, chính xác. Độc lập khi làm bài kiểm tra

II. HÌNH THỨC ĐỀ KIỂM TRA

Hình thức kiểm tra: TNKQ.

Học sinh làm bài trên lớp.

III. MA TRẬN ĐỀ

Chủ đề	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng	Tổng
Dạng đại số các phép toán trên tập số phức	*Số câu: 4* *Số điểm:1,6*	*Số câu: 4* *Số điểm:1,6*	*Số câu: 2* *Số điểm: 0,8*	*Số câu: 10* *Số điểm: 4,0*
Phương trình bậc hai với hệ số thực	*Số câu: 3* *Số điểm: 1,2*	*Số câu: 3* *Số điểm: 1,2*	*Số câu: 4* *Số điểm: 1,2*	*Số câu: 10* *Số điểm: 4,0*
Biểu diễn hình học của số phức	*Số câu: 1* *Số điểm:0,4*	*Số câu: 1* *Số điểm: 0,4*	*Số câu: 3* *Số điểm: 1,2*	*Số câu: 5* *Số điểm: 2,0*
Tổng	*Số câu:* *Số điểm:*	*Số câu:* *Số điểm:*	*Số câu:* *Số điểm:*	*Số câu:* *Số điểm:*

IV. CÁC CHUẨN ĐÁNH GIÁ

Chủ đề	Câu	Chuẩn đánh giá
Dạng đại số các phép toán trên tập số	1	Biết xác định phần thực phần ảo của một số phức
	3	Nhận biết được số phức liên hợp

phức	5	Hiểu và tính được mođun của số phức
	9	Biết cách tính tổng của hai số phức
	10	Biết cách nhân hai số phức
	11	Hiểu và tính được tích các số phức
	12	Hiểu và tính được lũy thừa một số phức
	13	Hiểu và thực hiện được phép chia số phức.
	14	Vận dung tìm được số phức thỏa mãn điều kiện cho trước
	15	Vận dung các phép toán về số phức tìm được phần ảo của số phức thỏa mãn biểu thức cho trước.
Phương trình bậc hai với hệ số thực	16	Biết tính căn bậc hai của môt số âm cho trước .
	17	Biết công thức tính căn bậc hai của môt số thực âm
	18	Nhận biết được công thức nghiệm của phương trình bậc hai với $\Delta < 0$.
	19	Hiểu và giải được phương trình bậc hai với hệ số thực.
	20	Hiểu và giải được phương trình bậc hai với hệ số thực (dạng đặc biệt).
	21	Hiểu và giải được phương trình chứa ẩn ở mẫu.
	22	Vận dụng giải được phương trình bậc hai để tính tổng bình phương hai nghiệm
	23	Vận dụng giải được phương trình bậc hai để tính tổng bình phương môđun hai nghiệm
	24	Vận dụng giải được phương trình bậc hai để tính được mođun của số phức thỏa mãn biểu thức cho trước.
	25	Vận dụng giải được phương trình bậc hai ; tính được khoảng cách giữa hai điểm biểu diễn nghiệm của phương trình.
Biểu diễn hình học của số phức	2	Nhận biết được điểm biểu diễn của một số phức.
	4	Hiểu và xác định được tâm và bán kính đường tròn biểu diễn số phức cho trước.
	6	Vận dụng và xác định được phương trình đường thẳng biểu diễn số phức cho trước.
	7	Vận dụng và xác định được phương trình đường thẳng biểu diễn số phức thỏa mãn biểu thức cho trước.
	8	Vận dụng kiến thức tổng hợp về số phức xác định được điều kiên để điểm biểu diễn số phức nằm trong đường tròn có tâm và bán kính cho trước.

V. ĐỀ KIỂM TRA

Câu 1: Số phức z = 3 - 4i có phần thực bằng?

A. 3 B. -3 C. -4 D. 4i

Câu 2: Số phức z = 2 + 3i được biểu diễn bởi điểm M có tọa độ là:

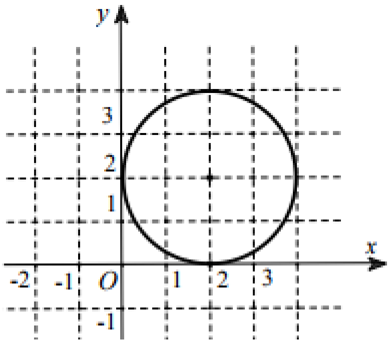
A. (2;-3) B. (2;3) C. (2 ; 3i) D.(2 ; i)

Câu 3: Số phức liên hợp của số phức z = a + bi $a, b \in \mathbb{R}$ là số phức:

A. $\overline{z}$ = -a + bi B. $\overline{z}$ = b - ai C. $\overline{z}$ = -a - bi D. $\overline{z}$ = a – bi

Câu 4:

Biết số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường tròn tô đậm trong hình vẽ.



Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z-1$ là

A. đường tròn tâm I(1;2), bán kính R=2

B. đường tròn tâm I(2;2), bán kính R=2

C. đường tròn tâm I(-3;-2), bán kính R=2

D. đường tròn tâm I(2;-2), bán kính R=2

Câu 5: Cho số phức z = 3 + 4i, khi đó $|z|$ bằng?

A. 5 B. -5 C. 25 D. 3

Câu 6: Điểm biểu diễn của các số phức z = 3 + bi với b ∈ R, nằm trên đường thẳng có phương trình là:

A. x = 3 B. y = 3 C. y = x D. y = x + 3

Câu 7: Điểm biểu diễn của các số phức z = a + ai với a ∈ R, nằm trên đường thẳng có phương trình là:

A. y = x B. y = 2x C. y = 3x D. y = 4x

Câu 8: Cho số phức z = a + bi ; $a, b \in \mathbb{R}$. Để điểm biểu diễn của z nằm trong hình tròn tâm O bán kính R = 2, điều kiện của a và b là:

A. a + b = 4 B. $a^2 + b^2 > 4$ C. $a^2 + b^2 = 4$ D. $a^2 + b^2 < 4$

Câu 9: Cho số phức z = a + bi $a, b \in \mathbb{R}$, khi đó z + $\overline{z}$ bằng?

A. a B. -2a C. 2b D. 2a

Câu 10: Cho số phức z = a + bi $a, b \in \mathbb{R}$, khi đó z . $\overline{z}$ bằng?

A. a^2 B. b^2 C. $a^2 + b^2$ D. $a^2 . b^2$

Câu 11: Thu gọn z = i(2 - i)(3 + i) ta được:

A. z = 2 + 5i B. z = 1 + 7i C. z = 6 D. z = 5i

Câu 12: Nếu z = 2 - 3i thì z^3 bằng:

A. -46 - 9i B. 46 + 9i C. 54 - 27i D. 27 + 24i

Câu 13: Số phức z = $\dfrac{3-4i}{4-i}$ bằng?

A. $\dfrac{16}{17} - \dfrac{13}{17}i$ B. $\dfrac{16}{15} - \dfrac{11}{15}i$ C. $\dfrac{9}{5} - \dfrac{4}{5}i$ D. $\dfrac{9}{25} - \dfrac{23}{25}i$

Câu 14: Cho số phức z = $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Số phức 1 - z + z^2 bằng:

A. $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. B. 2 - $\sqrt{3}i$ C. 1 D. 0

Câu 15: Cho số phức z = x + yi ≠ 1. (x, y ∈ R). Phần ảo của số $\frac{z+1}{z-1}$ là:

A. $\frac{-2x}{(x-1)^2+y^2}$ B. $\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$ C. $\frac{xy}{(x-1)^2+y^2}$ D. $\frac{x+y}{(x-1)^2+y^2}$

Câu 16: Căn bậc hai của -5 là:

A. $\sqrt{5}$ B. $-\sqrt{5}$ C. $\pm\sqrt{-5}$ D. $\pm i\sqrt{5}$

Câu 17: Căn bậc hai của số thực a âm là:

A. $\sqrt{a}$ B. $-\sqrt{a}$ C. $\pm\sqrt{-a}$ D. $\pm i\sqrt{a}$

Câu 18: Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$, có $\Delta=b^2-4ac$, nếu $\Delta<0$, phương trình có hai nghiệm phức xác định theo công thức:

A. $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ B. $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{a}$ C. $x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ D. $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|\Delta|}}{a}$

Câu 19: Trong $\mathbb{C}$ phương trình $z^2+2z+4=0$ có nghiệm là:

A. $z_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}$ B. $z_{1,2}=-1\pm\sqrt{5}$ C. $z_{1,2}=-1\pm i\sqrt{3}$ D. $z_{1,2}=1\pm i\sqrt{3}$

Câu 20: Trong C, phương trình $z^2+4=0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} z=2i \\ z=-2i \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} z=1+2i \\ z=1-2i \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} z=1+i \\ z=3-2i \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} z=5+2i \\ z=3-5i \end{array}\right.$

Câu 21: Trong C, phương trình $\frac{4}{z+1}=1-i$ có nghiệm là:

A. z = 2 - i B. z = 3 + 2i C. z = 5 - 3i D. z = 1 + 2i

Câu 22: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2-4z+5=0$. Khi đó phần thực của $z_1^2+z_2^2$ là:

A. 6 B. 5 C.4 D.7

Câu 23: Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+4=0$. Khi đó $P=|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng:

A. 2 B. -7 C. 8 D. 4

Câu 24: Cho số phức z có phần ảo âm và thỏa mãn $z^2-3z+5=0$. Modun của số phức $w=2z-3+\sqrt{14}$ bằng

A. $\sqrt{13}$ B. $\sqrt{17}$ C. $\sqrt{11}$ D. 5

Câu 25: Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $-z^2+4z-9=0$. A,B lần lượt là điểm biểu diễn z_1, z_2. Độ dài AB là:

A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{5}$

VI. ĐÁP ÁN

Mỗi câu 04, điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Đ.A	A	B	D	A	A	A	A	D	D	C	B	A	A
Câu	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Đ.A	D	B	D	D	C	C	A	D	A	D	D	B	

-------------------Hết ------------------------

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

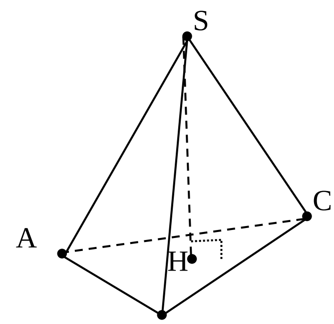
CHỦ ĐỀ 1: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1.Một số công thức tính thể tích:

- Thể tích của khối chóp: $V = \frac{1}{3}.B.h$

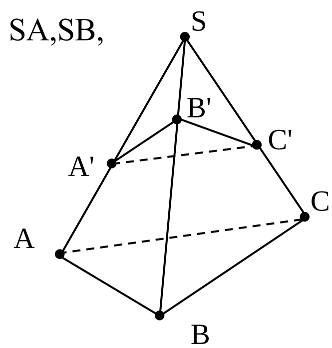
Trong đó: B: diện tích đáy, h: chiều cao



- Tỷ số thể tích: Cho hình chóp S.ABCD.Trên các đoạn thẳng SA,SB,

S lần lượt lấy 3 điểm A’,B’,C’ khác với S. Ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$



2. Một số kiến thức bổ trợ:

) Diện tích hình phẳng

2.1. Tam giác thường:

$* S = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = pr.$

* p là nủa chu vi, R bán kính đường tròn ngoãi tiếp , r là bán kính đường tròn nọi tiếp.

2.2. Tam giác đều cạnh a:

a) Đường cao: h = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; b) S = $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

c) Đường cao cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực

2.3. Tam giác vuông:

a) S = $\frac{1}{2}$ab (a, b là 2 cạnh góc vuông)

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của ***cạnh huyền***

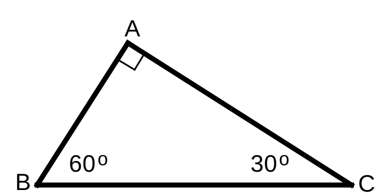
2.4. Tam giác vuông cân (nửa hình vuông):

a) S = $\frac{1}{2}a^2$ (2 cạnh góc vuông bằng nhau) b) Cạnh huyền bằng a$\sqrt{2}$

2.5. Nửa tam giác đều:

a) Là tam giác vuông có một góc bằng 30^o hoặc 60^o

b) BC = 2AB c) AC = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ d) S = $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$



2.6. Tam giác cân: a) S = $\frac{1}{2}$ah (h: đường cao; a: cạnh đáy)

b) Đường cao hạ từ đỉnh cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực

2.7. Hình chữ nhật: S = ab (a, b là các kích thước)

2.8. Hình thoi: $S = \frac{1}{2} d_1.d_2$ (d_1, d_2 là 2 đường chéo)

2.9. Hình vuông: a) $S = a^2$ b) Đường chéo bằng $a\sqrt{2}$

2.10. Hình bình hành: S = ah (h: đường cao; a: cạnh đáy)

2.11.Hình Thang: S= ½.h.(đáy lớn + đáy bé)

Chú ý : Các hệ thức lượng trong tam giác.

****) Xác định góc giữa đường thẳng d và mp(P).***

- Nếu $d \perp (P)$ thì $\widehat{(d,(P))} = 90^0$
- Nếu không vuông góc với (P) thì:

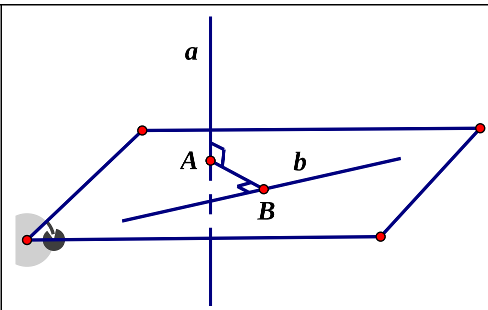
- Xác định hình chiếu vuông góc d' của d trên (P) .

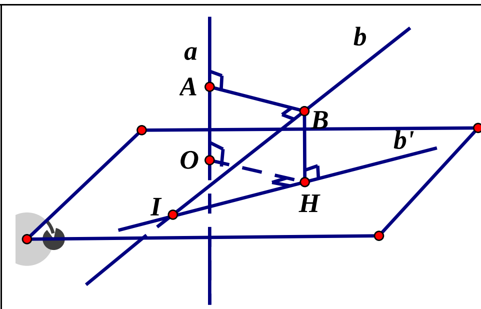
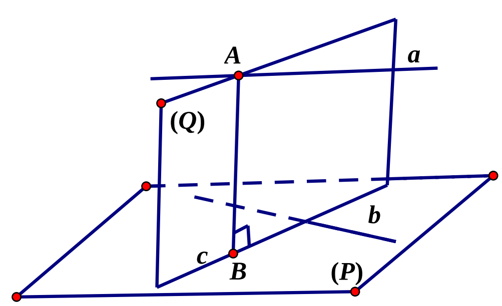
Khi đó : $\widehat{(d,(P))} = \widehat{(d,d')} = \alpha$.

****) Xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q).***

$$\left.\begin{matrix} (P)\cap(Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \\ b \subset (Q), b \perp d \\ a \cap b = I \in d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{((P),(Q))} = \widehat{(a,b)}$$

****) Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau a và b.***

<table>
<tr>
<td>* Nếu $a \perp b$ thì
- Dựng $mp(P) \supset b$ và $mp(P) \perp a$ tại A
- Dựng AB vuông góc với b tại B
Khi đó: $d(a,b) = AB$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>* Nếu a và b không vuông góc thì
Cách 1:
- Dựng $mp(P) \perp a$ tại O và $(P) \cap b = \{I\}$
- Dựng hình chiếu vuông góc b' của b trên (P)
-Trong (P) dựng OH vuông góc với b'tại H.
-Từ H kẻ đường thẳng // với a cắt b tại B
-Từ B kẻ đường thẳng // với OH cắt a tại A.
Khi đó: $d(a,b) = AB$
Cách 2:
- Dựng $(P) \supset b$ và mp(P)//a .
- Dựng (Q) thỏa mãn $A \in (Q)$, $A \in a$,
$(Q) \perp (P), (Q) \cap (P) = c$
- Trong (Q) kẻ AB vuông góc với c tại B
Khi đó: $d(a,b) = AB$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

B 1: Xác định đáy và đường cao của khối chóp

B2: Tính diện tích đáy B và chiều cao h

B 3: Áp dụng công thức **V** = $\frac{1}{3}B.h$

Chú ý: Đường cao hình chóp.

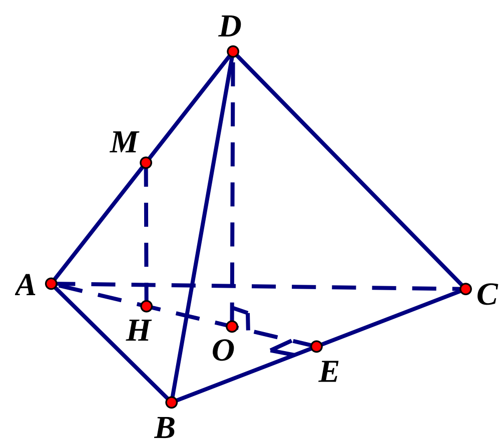
1/ Chóp có cạnh bên vuông góc, đường cao chính là cạnh bên.
2/ Chóp có hai mặt bên vuông góc với đáy; đường cao là giao tuyến của hai mặt bên vuông góc đáy.
3/ Chóp có mặt bên vuông góc đáy đường cao nằm trong mặt bên vuông góc đáy.
4/ Chóp đều, đường cao từ đỉnh đến tâm đa giác đáy.
5/ Chóp có hình chiếu vuông góc của một đỉnh xuống mặt đáy , đường cao là từ đỉnh tới hình chiếu.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài tập 1.

Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng 2a, M là trung điểm AD.

a) Tính thể tích khối tứ diện ABCD.
b) Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC).

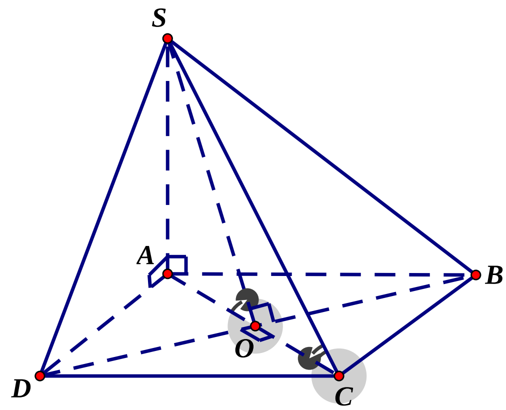
<table>
<tr>
<td>
Giải:
a) Gọi E là trung điểm của BC và O là tâm của ΔABC .Vì ABCD là tứ diện đều nên $DO \perp (ABC)$ và
AE ⊥ BC và $O \in AE,\ AO = \frac{2}{3}AE = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$
Trong Δvuông DAO : $DO = \sqrt{AD^2 - AO^2}$
$= \sqrt{(2a)^2 - (\frac{2a\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$
Mặt khác: $S_{ABC} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$,
Vậy thể tích khối tứ diện đều ABCD là
$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.DO = \frac{1}{3}.a^2\sqrt{3}.\frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$
b) Kẻ MH// DO, khoảng cách từ M đến mp(ABC) là MH ; $MH = \frac{1}{2}DO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

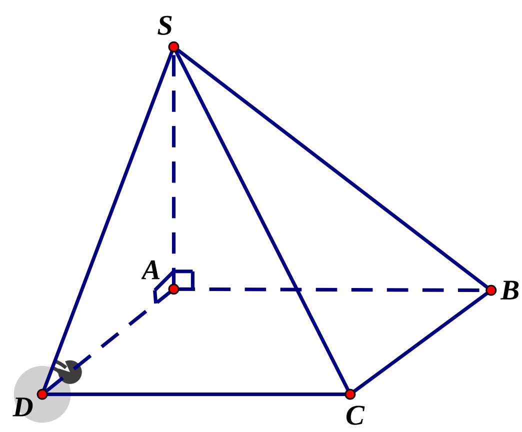
Bài tập 2: Tính thể tích khối chóp S.ABCD. có đáy ABCD là hình vuông.

a. Biết AB=2a , $SA \perp (ABCD)$ và góc giữa mặt (SBD) và (ABCD) bằng 60^0

b. Biết AC=2a và góc giữa SC và (ABCD) bằng 30^0

Giải: a. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì ABCD là hình vuông cạnh 2a nên ta có: $AC \perp BD$ và $AO = \frac{1}{2}AC = a\sqrt{2}$ Vì $SA \perp (ABCD)$ Khi đó AO là hình chiếu vuông góc của SO trên (ABCD). mà $BD \perp AO$ nên $SO \perp BD$ Do đó $((\widehat{SBD),(ABCD})) = (\widehat{SO,AO}) = \widehat{SOA} = 60^0$ Trong tam giác vuông SAO ta có: $SA = AO.\tan\widehat{SOA} = a\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$; $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$ (đvdt) Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.4a^2.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$	
b. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên (ABCD).Do đó $(\widehat{SC,(ABCD)}) = (\widehat{SC,AC}) = \widehat{SCA} = 30^0$.Trong tam giác vuông SAC ta có: $SA = AC.\tan\widehat{SCA} = 2a.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$; Gọi b là độ dài cạnh của hình vuông ABCD Ta có $b.\sqrt{2} = 2a \Rightarrow b = a\sqrt{2}$ Khi đó $S_{ABCD} = \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2a^2$ (đvdt) Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.2a^2.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$ (đvtt)	

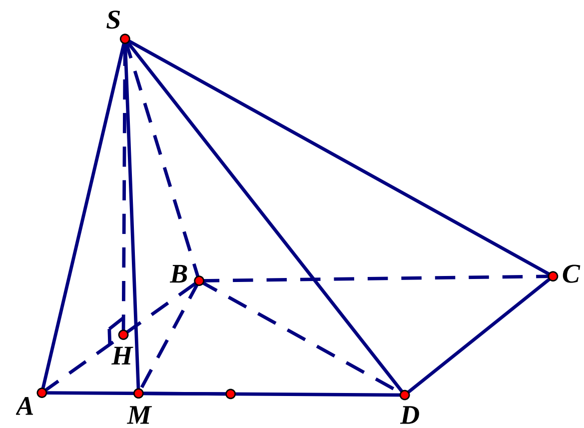
Bài tập 3:Tính thể tích khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật AB=a,BC=3a, $SA \perp (ABCD)$.Góc giữa SD và ABCD bằng 45^0.

Giải: a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AD là hình chiếu vuông góc của SD trên (ABCD).Do đó $(\widehat{SD,(ABCD)}) = (\widehat{SD,AD}) = \widehat{SDA} = 45^0$ Xét tam giác SAD có $\widehat{SDA} = 45^0$ và $\widehat{SAD} = 90^0$ nên SA=AD=3a Ta có $S_{ABCD} = AB.BC = a.3a = 3a^2$, Vậy thể tích khối tứ diện đều ABCD là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.3a^2.a = 3a^3$	

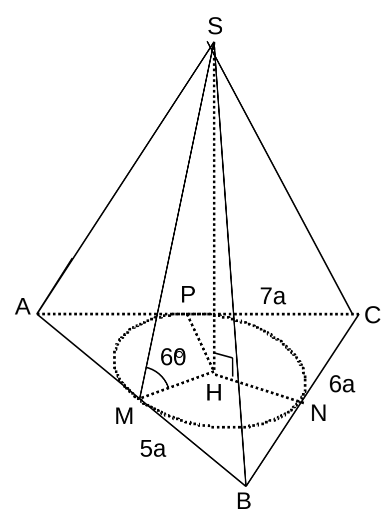
Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD có cạnh đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 3a. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với mặt đáy.Gọi H là trung điểm của AB

a. CMR $SH \perp (ABCD)$
b. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

c. Gọi M là điểm nằm trên AD sao cho $AM = \frac{1}{4}AD$ .Tính $V_{S.ABM}$ theo a.

<table>
<tr>
<td>
Giải:
a. Vì ABC là tam giác đều cạnh 3a và H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$ và $SH = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$
Khi đó Ta có :
$$\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\ SH \perp AB \\ SH \subset (SAB)\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$
b. Mặtkhác: $S_{ABCD} = (3a)^2 = 9a^2$
Vậy Thể tích khối chóp S.ABCD là
$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.9a^2.\frac{3a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3\sqrt{3}}{2}$
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
c.Vì M là điểm nằm trên AD thỏa mãn $AM = \frac{1}{4}AD$ nên.Tính
$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{4}.S_{\Delta ABD} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{9a^2}{8}$$
Vậy Thể tích khối tứ diện S.ABM là
$$V_{S.ABM} = \frac{1}{3}S_{ABM}.SH = \frac{1}{3}.\frac{9a^2}{8}.\frac{3a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3\sqrt{3}}{16}$$
</td>
</tr>
</table>

Bài tập 5: Cho hình chóp S.ABC có AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a. Các mặt bên (SAB), (SBC), (SCA) tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích của khối chóp đó.

<table>
<tr>
<td>
* Hạ SH $\perp$(ABC) và kẻ HM $\perp$AB, HN$\perp$BC, HP $\perp$AC
* Góc tạo bởi mặt bên (SAB) với đáy (ABC) là $\varphi = \widehat{SMH} = 60^0$
* Ta có: Các Δ vuông SMH, SNH, SPH bằng nhau (vì có chung 1 cạnh góc vuông và 1 góc nhọn bằng 60^0)
* Suy ra: HM = HN = HP = r là bán kính đường tròn nội tiếp Δ ABC
* Tính: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH$
* Tính: $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
$= \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)}$ (công thức Hê-rông*
Tính: $p = \frac{5a+6a+7a}{2} = 9a$ Suy ra: $S_{ABC} = 6\sqrt{6}a^2$
* Tính SH: Trong Δ_V SMH tại H, ta có: $\tan 60^0 =$
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

$\frac{SH}{MH} \Rightarrow SH = MH.\tan 60^0$ * Tính MH: Theo công thức $S_{ABC} = p.r = p.MH$ $\Rightarrow MH = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$ Suy ra: SH = $2a\sqrt{2}$ Vậy: $V_{S.ABC} = 8a^3\sqrt{3}$	

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hình lập phương là đa điện lồi

B. Tứ diện là đa diện lồi

C. Hình hộp là đa diện lồi

D. Hình tạo bởi hai tứ diện đều ghép với nhau là một đa diện lồi

Câu 2: Khối đa diện đều loại {4;3} có số đỉnh là: **A.** 4 **B**. 6 **C**. 8 **D**. 10

Câu 3: Khối mười hai mặt đều thuộc loại

A. {5, 3} **B.** {3, 5} **C.** {4, 3} **D.** {3, 4}

Câu 4: Khối đa diện đều nào sau đây có mặt không phải là tam giác đều?

A. Thập nhị diện đều **B.** Nhị thập diện đều **C.** Bát diện đều **D.** Tứ diện đều

Câu 5: Kim Tự Tháp ở Ai Cập có hình dáng của khối đa diện nào sau đây

A. Khối chóp tam giác đều **B**. Khối chóp tứ giác

C. Khối chóp tam giác **D.** Khối chóp tứ giác đều

Câu 6: Số đỉnh của hình mười hai mặt đều là : **A .** 20 **B.** 12 **C.** 18

Câu 7: Số mặt phẳng đối xứng của hình lập phương là: **A**. 6. **B**. 7. **C**. 8. **D.** 9.

Câu 8: Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất:

A. Hai mặt. **B.** Ba mặt. C. Bốn mặt. **D.** Năm mặt.

Câu 9: Cho một khối chóp có thể tích bằng V. Khi giảm diện tích đa giác đáy xuống $\frac{1}{3}$ lần thì thể tích khối chóp lúc đó bằng:

A. $\frac{V}{9}$ B. $\frac{V}{6}$ **C.** $\frac{V}{3}$ **D.** $\frac{V}{27}$

Câu 10: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp *S.ABCD* là:

A. $a^3\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a^3}{4}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 11: Cho khối tứ diện *ABCD*. Lấy một điểm *M* nằm giữa *A* và *B*, một điểm *N* nằm giữa *C* và *D*. Bằng hai mặt phẳng (MCD) và (NAB) ta chia khối tứ diện đã cho thành bốn khối tứ diện:

A. *AMCN, AMND, AMCD, BMCN* **B.** *AMCD, AMND, BMCN, BMND*

C. *AMCD, AMND, BMCN, BMND* **D**. *BMCD, BMND, AMCN, AMDN*

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2cm$ và có thể tích là $8cm^3$. Chiều cao xuất phát từ đỉnh S của hình chóp đã cho là.

A. $h = 3cm$. **B.** $h = 6cm$. **C.** $h = 10cm$. **D.** $h = 12cm$.

.

Câu 13: Cho hình chóp S.ABC có $SA = a,$ tam giác ABC đều, tam giác SAB vuông cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp S.ABC là:

A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{24}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{8}$.

Câu 14: Cho khối chóp tứ giác đều *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh 3cm. Cạnh bên tạo với đáy một góc bằng 60^0. Thể tích của khối chóp đó là:

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

Câu 15. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *B* với *AC=a*, biết *SA* vuông góc với đáy *ABC* và *SB* hợp với đáy một góc 60^0. Thể tích khối chóp *S.ABC* là

A. $a^3\sqrt{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$

Câu 16. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a* và *SA* vuông góc với đáy, mặt bên (*SCD*) hợp với đáy một góc 60^0. Thể tích khối chóp *S.ABCD* là

A. $a^3\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 17. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *B'* và *C'* lần lượt là trung điểm của *AB* và *AC*. Tỉ số thể tích của khối tứ diện *AB'C'D* và khối tứ diện *ABCD* là

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Câu 18: Cho hình chóp tam giác có đường cao bằng 100 cm và các cạnh đáy bằng 20 cm, 21 cm, 29 cm. Thể tích của hình chóp đó bằng

A. $6000cm^3$ **B.** $6213cm^3$ **C.** $7000cm^3$ **D.** $7000\sqrt{2}\,cm^3$

Câu 19: Cho khối chóp đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*. Thể tích khối chóp *S.ABC là (* biết cạnh bên bằng *2a)*

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$ **B.** $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{12}$ **D.** $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{4}$

Câu 20: Cho khối chóp *S.ABCD* có *ABCD* là hình vuông cạnh 3*a*. Tam giác *SAB* cân tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp *S.ABCD* là (biết góc giữa *SC* và (ABCD) bằng 60^0)

A. $V_{S.ABCD} = 18a^3\sqrt{3}$ **B.** $V_{S.ABCD} = \frac{9a^3\sqrt{15}}{2}$ **C.** $V_{S.ABCD} = 9a^3\sqrt{3}$ **D.** $V_{S.ABCD} = 18a^3\sqrt{15}$

Câu 21: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành có M và N theo thứ tự là trung điểm SA, SB. Khi đó $\frac{V_{S.CDMN}}{V_{S.CDAB}}$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 22: Cho tứ diện ABCD có các cạnh BA, BC, BD đôi một vuông góc với nhau:

BA = 3a, BC =BD = 2a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Thể tích khối chóp C.BDNM là

A. $V = 8a^3$ **B**. $V = \frac{2a^3}{3}$ **C.** $V = \frac{3a^3}{2}$ **D.** $V = a^3$

Câu 23: Cho hình chóp S.ABCD biết ABCD là một hình thang vuông ở A và D; AB = 2a; AD = DC = **a.** Tam giác SAD vuông ở S. Gọi I là trung điểm AD. Biết (SIC) và (SIB) cùng vuông góc với mp(ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{a^3}{4}$ **C.** $\frac{3a^3}{4}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 24: Cho khối chóp S.ABC có đường cao SA bằng a, đáy là tam giác vuông cân đỉnh B có BA = BC = a . Gọi B' là trung điểm của SB, C' là chân đường cao hạ từ A của tam giác SAC. Thể tích khối chóp S.AB'C' là

A. $V = \frac{a}{36}$ **B.** $V = \frac{a^3}{12}$ **C.** $V = \frac{a^3}{36}$ **D.** $V = \frac{a^3}{4}$

Câu 25: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a$, CD = a; góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Thể tích khối chóp S.ABCD theo a là

A. $V = \frac{3\sqrt{13}\,a^3}{7}$ **B.** $V = \frac{3\sqrt{15}\,a^3}{5}$ **C.** $V = \frac{3\sqrt{5}\,a^3}{5}$ **D.** $V = \frac{\sqrt{15}\,a^3}{15}$

CHỦ ĐỀ 2: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Kiến thức cơ bản

- Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$ Trong đó a,b,c là ba kích thước.

  Đặc biệt: Thể tích khối lập phương: $V = a^3$

  Trong đó a là độ dài cạnh của khối lập phương .

- Thể tích khối lăng trụ: $V = B.h$ Trong đó: B: diện tích đáy, h: chiều cao

2. Kiến thức bổ trợ

Tương tự chủ đề 1

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

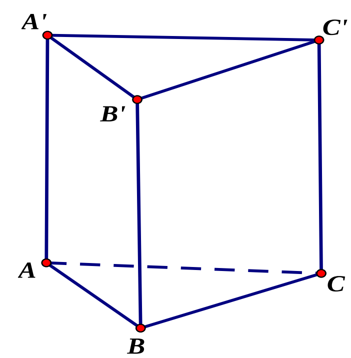
B1: Xác định đáy và đường cao của khối hộp,khối lăng trụ.

B2: Tính diện tích đáy B và chiều cao h

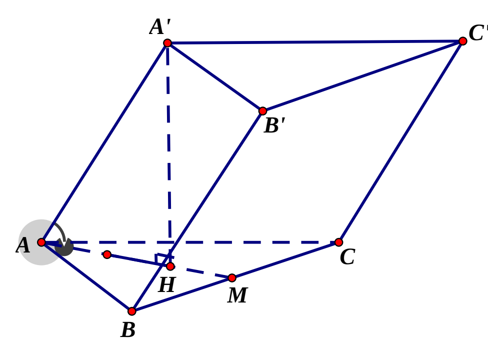
B3: Áp dụng công thức $V = B.h$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài tập 1: Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a\sqrt{15}$

Giải: Giả sử khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a\sqrt{15}$ là ABCA'B'C'. Khi đó Thể tích của khối lăng trụ là $V_{ABCA'B'C'} = AA'.S_{ABC} = 2a\sqrt{15}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{5}}{2}$ $= \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$ (đvtt)	

Bài tập 2: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều các điểm A, B, C. Cạnh bên AA' tạo với mp đáy một góc 60^0. Tính thể tích của lăng trụ

Giải: a. Gọi H là hình chiếu $\perp$ của A'trên (ABC). Do A'A=A'B=A'C nên H là tâm của tam giác đều ABC. Ta có $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{A'AH}=60^0$ Trong Δ vuông AA'H ta có A'H = AH. $\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$ $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ Vậy Thể tích khối lăng trụ là	

$V_{ABCA'B'C'} = S_{ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Bài tập 3: Tính thể tích của khối lập phương ABCD.A’B’C’D’ có đường chéo bằng $AC' = 2a\sqrt{6}$

Giải:
Gọi b là độ dài cạnh của khối lập phương ABCD.A’B’C’D’ Ta có

$A'C' = a\sqrt{2}; AA' = b; AC' = b\sqrt{3}$

Mặt khác Theo giả thiết ta có $AC' = 2a\sqrt{6}$ nên

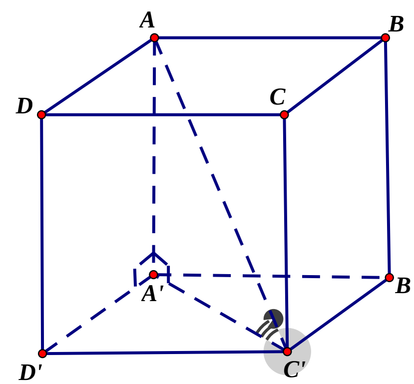
$b\sqrt{3} = 2a\sqrt{6} \Rightarrow b = 2a\sqrt{2}$

Khi đó $S_{ABCD} = \left(2a\sqrt{2}\right)^2 = 8a^2$

Vậy Thể tích khối lăng trụ là

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AA' =$

$= 2a\sqrt{2}.8a^2 = 16a^2.\sqrt{2}$



Bài tập 4: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy ABC là tam giác vuông tại A, AC = a, BC = 2a và AA' = 3a. Tính thể tích của lăng trụ

* Đường cao lăng trụ là AA' = 3a

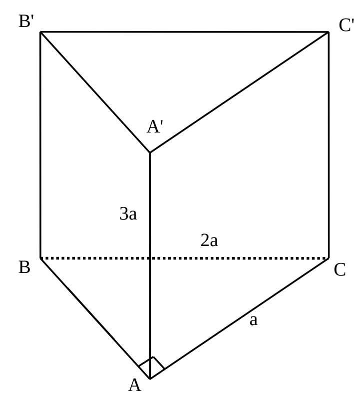
* Tính: $V_{ABC.A'B'C'} = Bh = S_{ABC}.AA'$

* Tính: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC$ (biết AC = a)

* Tính AB: Trong $\Delta_V ABC$ tại A, ta có:

$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

ĐS: $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$



Bài tập 5: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\hat{A} = 60^0$. Chân đường vuông góc hạ từ B' xuống đáy ABCD trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy. Cho BB' = a.

a) Tính góc giữa cạnh bên và đáy

b) Tính thể tích hình hộp

a) Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD

* B'O $\perp$ (ABCD) (gt)

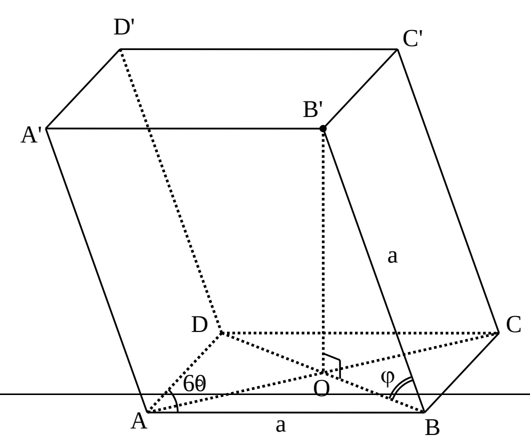
* Góc giữa cạnh bên BB' và đáy (ABCD) là

$\varphi = \widehat{B'BO}$

* Tính $\varphi = \widehat{B'BO}$. Trong $\Delta_V BB'O$ tại O, ta có:

$\cos\varphi = \dfrac{OB}{BB'} = \dfrac{OB}{a}$

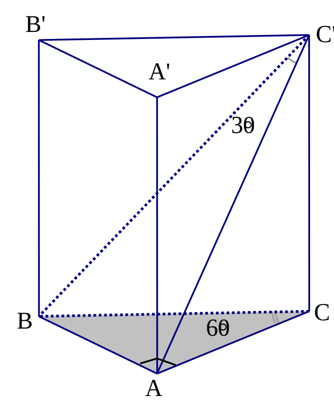
+ Δ ABD đều cạnh a (vì $\hat{A} = 60^0$ và AB = a) $\Rightarrow$ DB = a



<table>
<tr>
<td>
$\Rightarrow OB = \frac{1}{2}DB = \frac{a}{2}$. Suy ra: $\cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\varphi = 60^0$
b) * Đáy ABCD là tổng của 2 Δ đều ABD và BDC
$\Rightarrow S_{ABCD} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
* $V_{ABCD.A'B'C'D'} = Bh = S_{ABCD}.B'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.B'O$
* Tính B'O: $B'O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì $\Delta B'BO$ là nửa tam giác đều) ĐS: $\frac{3a^3}{4}$
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Bài tập 6: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy ABC là tam giác vuông tại A, AC = a, $\hat{C} = 60^0$, đường chéo BC' của mặt bên (BCC'B') hợp với mặt bên (ACC'A') một góc 30^0.

a) Tính độ dài cạnh AC' b) Tính thể tích lăng trụ

<table>
<tr>
<td>
* Xác định φ là góc giữa cạnh BC' và mp(ACC'A')
+ CM: BA $\perp$ (ACC'A')
BA $\perp$ AC (vì Δ ABC vuông tại A)
BA $\perp$ AA' (ABC.A'B'C' lăng trụ đứng)
+ $\varphi = \widehat{BC'A} = 30^0$
Tính AC': Trong $\Delta_V BAC'$ tại A
(vì BA $\perp$ AC')
$\tan 30^0 = \frac{AB}{AC'} \Rightarrow AC' = \frac{AB}{\tan 30^0} = AB\sqrt{3}$
* Tính AB: Trong $\Delta_V ABC$ tại A, ta có: $\tan 60^0 = \frac{AB}{AC}$
$\Rightarrow AB = AC.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$ (vì AC = a). ĐS: AC' = 3a
b) $V_{ABC.A'B'C'} = Bh = S_{ABC}.CC'$
Tính: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.a\sqrt{3}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
Tính CC': Trong $\Delta_V ACC'$ tại C, ta có: $CC'^2 = AC'^2 - AC^2 = 8a^2 \Rightarrow CC' = 2a\sqrt{2}$ ĐS: $V_{ABC.A'B'C'} = a^3\sqrt{6}$
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1: Khi tăng độ dài tất cả các cạnh của một khối hộp chữ nhật lên gấp đôi thì thể tích khối hộp tương ứng sẽ:

A. tăng 2 lần B. tăng 4 lần C. tăng 6 lần D. tăng 8 lần

Câu 2: Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy *B* và chiều cao *h* là

A. $V = Bh$ B. $V = \frac{1}{3}Bh$ C. $V = \frac{1}{2}Bh$ D. $V = \frac{4}{3}Bh$

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là giao điểm của AC' và $B'D$. Phép đối xứng tâm O biến lăng trụ $ABD.A'B'D'$ thành hình đa diện nào sau đây:

A. $ABD.A'B'D'$ B. $BCD.B'C'D'$ C. $ACD.A'C'D'$ D. $ABC.A'B'C'$

Câu 4: Cho một khối lập phương biết rằng khi tăng độ dài cạnh của khối lập phương thêm 2cm thì thể tích của nó tăng thêm 98cm^3. Hỏi cạnh của khối lập phương đã cho bằng:

A. 3 cm B. 4 cm C. 5 cm D. 6 cm

Câu 5: Một khối hộp chữ nhật (H) có các kích thước là a, b, c. Khối hộp chữ nhật (H') có các kích thước tương ứng lần lượt là $\frac{a}{2}, \frac{2b}{3}, \frac{3c}{4}$. Khi đó tỉ số thể tích $\frac{V_{(H')}}{V_{(H)}}$ là

A. $\frac{1}{24}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 6: Cho hình lăng trụ tam giác đều có các cạnh đều bằng a .Thể tích khối lăng trụ đều là:

A. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{a^3}{3}$ C. $\frac{2a^3}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2\sqrt{2}cm$ và $AA_1 = 2cm.$ Tính thể tích V của khối chóp BA_1ACC_1.

A. $V = \frac{16}{3}cm^3$. **B.** $V = \frac{18}{3}cm^3$. **C.** $V = \frac{12}{3}cm^3$. **D.** $V = 8cm^3$.

Câu 8: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , diện tích mặt bên $ABB'A'$ bằng $2a^2$. Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 9: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và $A'B = 3a$. Thể tích khối lăng trụ là.

A. $a^3\sqrt{3}$ B. $a^3\sqrt{2}$ C. $2a^3\sqrt{2}$ D. $3a^3\sqrt{2}$

Câu 10. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, cạnh bên $AA' = 2a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy là 30^0. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng đáy (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Thể tích khối lăng trụ là.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 12: Với một tấm bìa hình vuông, người ta cắt bỏ ở mỗi góc tấm bìa một hình vuông cạnh $12cm$ rồi gấp lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Nếu dung tích của cái hộp đó là $4800cm^3$ thì cạnh tấm bìa có độ dài là

A. $42cm$ B. $36cm$ C. $44cm$ D. $38cm$

Câu 13: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại *A*, có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và $A'B = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $a^3\sqrt{3}$ B. $a^3\sqrt{2}$ C. $2a^3\sqrt{2}$ D. $3a^3\sqrt{2}$

Câu 14: Tổng diện tích các mặt của một hình lập phương bằng 96. Thể tích của khối lập phương đó là:

A. 84 B. 91 C. 64 D. 48

Câu 15: Thể tích của khối lập phương ABCD.A'B'C'D' là (biết AD' = 2a)

A. $V = a^3$ B. $V = 8a^3$ C. $V = 2\sqrt{2}a^3$ D. $V = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^3$

Câu 16: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. AA' bằng $a.\sqrt{2}$. Thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' là

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{4}$ B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$ C. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$ D. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$

Câu 17: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^0$. Mặt phẳng (*AB'C'*) tạo với mặt đáy góc 60^0. Thể tích lăng trụ *ABC.A'B'C'* bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{2}$ C. a^3 D. $\dfrac{3a^3}{8}$

Câu 18: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, AB = AC =a, $\widehat{BAC} = 60^0$. Mặt phẳng (AB'C') tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối trụ

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ B. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 19: Cho hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a và có góc nhọn bằng 60^0 Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của lăng trụ. Thể tích hình hộp là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ B. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$ C. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$ D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 20: Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A với AC = a , $\widehat{ACB} = 60^o$ biết BC' hợp với (AA'C'C) một góc 30^0. Thể tích lăng trụ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ B. $a^3\sqrt{7}$ C. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$ D. $a^3\sqrt{6}$

Câu 21: Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD A'B'C'D' có cạnh đáy a và mặt phẳng (BDC') hợp với đáy (ABCD) một góc 60^o. Thể tích khối hộp chữ nhật là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$ B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ C. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$ D. $a^3\sqrt{6}$

Câu 22: Cho lăng trụ tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều A,B,C biết $AA' = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $a^3\sqrt{3}$

Câu 23: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

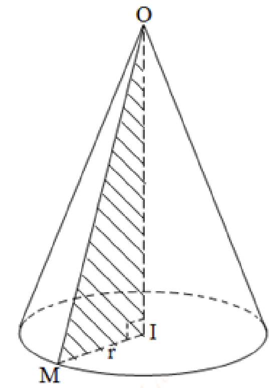
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 24: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a , $AA' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và hình chiếu của A trên (A'B'C') là trung điểm của B'C'. Tính thể tích của lăng trụ trên.

A. $\frac{3a^3}{8}$ **B.** $\frac{a^3}{8}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $3a^3$

Câu 25: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$ B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$ C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$ D. $\frac{3a^3}{8}$



Hình 2

CHỦ ĐỀ III : MẶT NÓN, MẶT TRỤ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

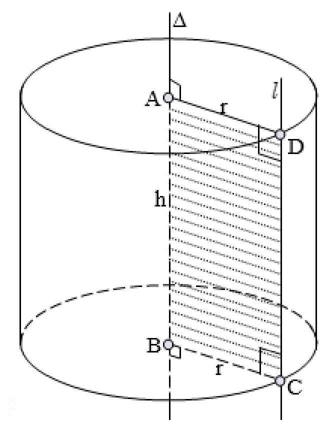
1. Mặt nón tròn xoay

+ Diện tích xung quanh của mặt nón: $S_{xq} = \pi rl$

+ Diện tích toàn phần của mặt nón: $S_{TP} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r\left(l + r\right)$

+ Thể tích của khối nón: $V_n = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

2. Mặt trụ tròn xoay



+ Diện tích xung quanh của mặt trụ: $S_{xq} = 2\pi rl$

+ Diện tích toàn phần của mặt trụ : $S_{TP} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r\left(l + r\right)$

+ Thể tích của khối trụ : $V_{Tr} = Bh = \pi r^2 h$

* Chú ý :

- Mặt trụ có độ dài đường sinh bằng chiều cao.

- Diện tích xung quanh của mặt trụ bằng diện tích hình chữ nhật có hai kích thước là chu vi đường tròn đáy và độ dài đường sinh.

- Tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác đều trùng với trọng tâm của tam giác đều

- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông trùng với trung điểm cạnh huyền.

- Tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp hình vuông trùng với tâm của hình vuông.

- Tâm đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật trùng với tâm của hình chữ nhật.

B. KĨ NĂNG CƠ BẢN

- Xác định được bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp đa giác đáy của hình nón, hình trụ.

- Xác định được độ dài đường sinh.

- Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của mặt nón, mặt trụ.

- Tính thể tích của khối nón, khối trụ.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

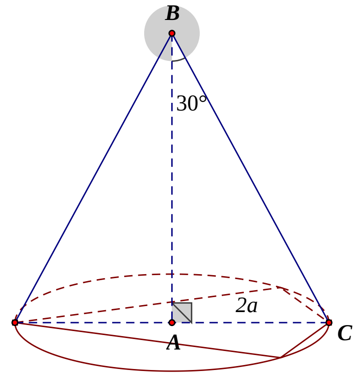
1) **Mặt nón**

Bài tập 1: Trong không gian, cho tam giác ABC

vuông tại A, $AC = 2a$, $\widehat{ABC} = 30°$. Tính độ dài đường

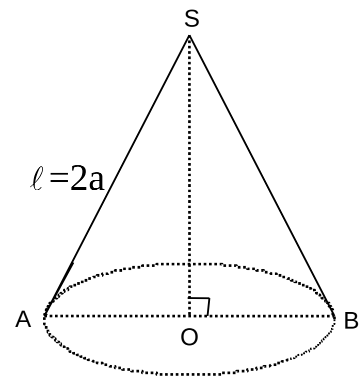
sinh của hình nón nhận được khi quay tam

giác ABC quanh trục AB.



Lời giải: Độ dài đường sinh $l = BC = \dfrac{AC}{\sin \widehat{B}} = 4a$

Bài tập 2: Cho hình nón, mặt phẳng qua trục và cắt hình nón tạo ra thiết diện là tam giác đều cạnh 2a. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón.



Lời giải

Mặt phẳng qua trục và cắt hình nón tạo ra tam giác đều cạnh 2a

$\Rightarrow \ \ell = 2R = 2a \ \Rightarrow \ h = \sqrt{\ell^2 - R^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Diện tích xung quanh : $S_{xq} = \pi Rl = \pi.a.2a = 2\pi a^2$

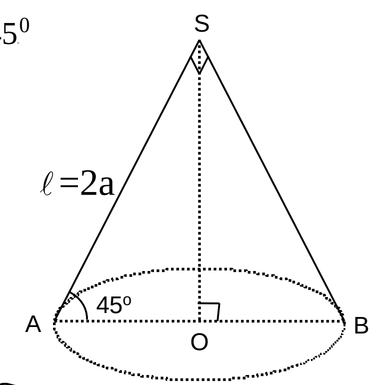
Thể tích khối trụ : $V_{(non)} = \dfrac{\pi R^2 h}{3} = \dfrac{\pi.a^2.a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$

Bài tập 3: Một hình nón có đường sinh bằng 2a và thiết diện qua trục là tam giác vuông.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón
b) Tính thể tích của khối nón

Lời giải

a) Thiết diện qua trục là tam giác SAB vuông cân tại S nên $\hat{A} = \hat{B} = 45^0$



$\Rightarrow$ SO = OA = h=R= $\dfrac{\ell}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{xq} = \pi R\ell = \pi.a\sqrt{2}.2a = 2\sqrt{2}\pi a^2$

$\Rightarrow S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 2\sqrt{2}\pi a^2 + 2\pi a^2 = (2\sqrt{2}+2)\pi a^2$

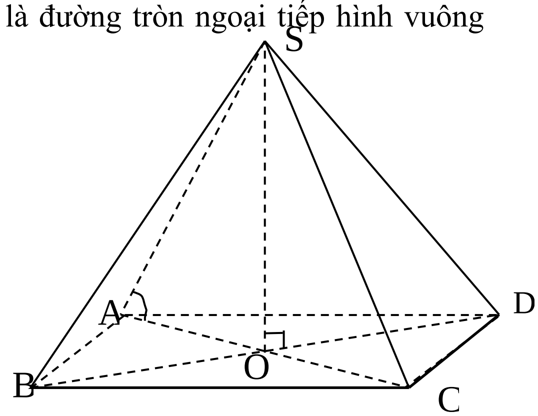
b) $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}.\pi 2a^2.a\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$

Bài tập 4: Cho khối chóp đều S.ABCD có AB = a, gọi O là tâm của đáy, $\widehat{SAO} = 60^0$.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

b) Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD

Lời giải



a) Vì S.ABCD đều nên $SO \perp (ABCD)$

Ta có : $S_{ABCD} = a^2$;

ΔSOA vuông tại O có :

$SO = AO\tan\widehat{SAO} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}a^2\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$ (đvtt)

b) Gọi l, r lần lượt là đường sinh,bán kính đáy của hình nón .

Ta có : $r = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$l = SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2}} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{xq} = \pi rl = \pi\dfrac{a\sqrt{2}}{2}a\sqrt{2} = \pi a^2$ (đvdt)

Bài tập 5: Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc SAC bằng 45^o.

a) Tính thể tích khối chóp .

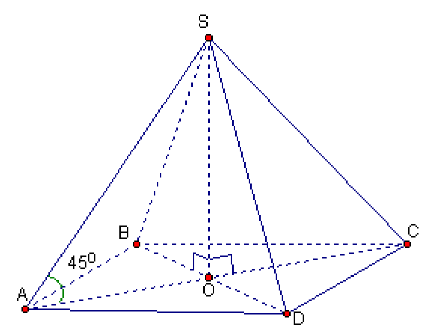
b) Tính diện tích xung quanh của mặt nón ngoại tiếp hình chóp S.ABCD

Lời giải

a) Gọi O là tâm của hình vuông ABCD $\Rightarrow$ SO $\perp$ (ABCD).

$V = \dfrac{1}{3}B.h;\ B = a^2;\ h = SO = OA.\tan 45^0 = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\ \Rightarrow\ V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

b) Ta có R =OA, l =SA= a. Vậy $S_{xq} = \pi.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}a = \pi\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$



2) Mặt trụ

Bài tập 1: Cho hình trụ có bán kính R = a, mặt phẳng qua trục và cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $6a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ.

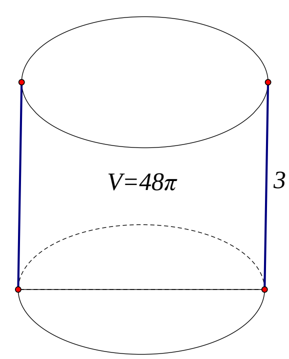
Lời giải

Mặt phẳng qua trục và cắt hình trụ theo một hình chữ nhật $\Rightarrow$ S = $\ell.2R = 6a^2$

$\Rightarrow\ \ell = \dfrac{6a^2}{2R} = 3a$

Diện tích xung quanh : $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi.a.3a = 6\pi a^2$

Thể tích khối trụ : $V_{(T)} = \pi R^2 h = \pi.a^2.3a = 3\pi a^3$



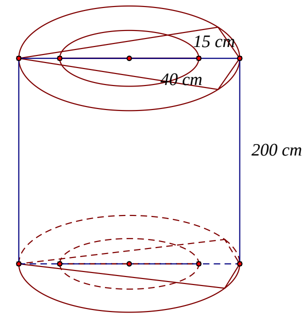
Bài tập 2: Một thùng hình trụ có thể tích là 48π, chiều cao là 3. Tính diện tích xung quanh của thùng đó

Lời giải: $V = \pi R^2 h = 48\pi \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{48}{3}} = 4$

$S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi.4.3 = 24\pi$ (do $l = h$)

Bài tập 3: Người ta cần đổ một ống thoát nước hình trụ với

chiều cao $200cm$, độ dày của thành ống là $15cm$, đường kính của ống là $80cm$. Tính lượng bê tông cần phải đổ



Lời giải:

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối trụ bên ngoài và bên trong

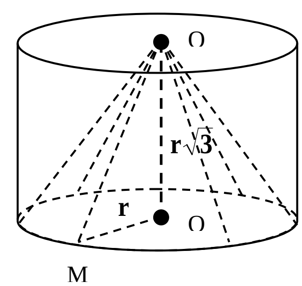
Do đó lượng bê tông cần phải đổ là:

$V = V_1 - V_2 = \pi.40^2.200 - \pi.25^2.200 = 195000\pi cm^3 = 0,195\pi m^3$

Bài tập 4: Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O;r) và (O';r). Khoảng cách giữa hai đáy là $OO' = r\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O' và có đáy là đường tròn (O;r). Gọi S_1 là diện tích xung quanh hình trụ, S_2 là diện tích xung quanh hình nón. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$

Lời giải :

$S_1 = 2\pi r.r\sqrt{3} = 2\pi r^2\sqrt{3}$



Gọi O'M đường sinh của hình nón $O'M = \sqrt{OO'^2 + OM^2} = 2r$

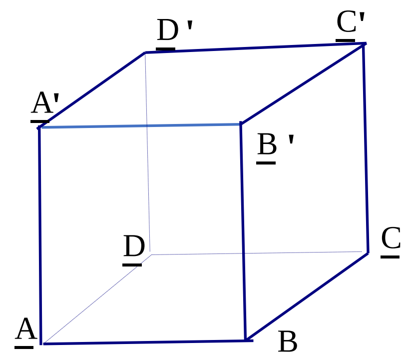
$S_2 = \pi r.2r = 2\pi r^2$

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi r^2\sqrt{3}}{2\pi r^2} = \sqrt{3}$

Bài tập 5: Trong không gian cho hình lập phương cạnh bằng a.

a) Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a. Tính thể tích của khối trụ đó.
b) Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn ngoại tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a. Tính thể tích của khối trụ đó.

Lời giải:



a) Ta có: $r = = \frac{a}{2}; h = a$

Vậy $V = \pi r^2 h = \pi.(\frac{a}{2})^2.a \Rightarrow V = \frac{\pi a^3}{4}$

b) Ta có: $r = = \frac{a\sqrt{2}}{2}; h = a$

Vậy $V = \pi r^2 h = \pi.(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2.a \Rightarrow V = \frac{\pi a^3}{2}$

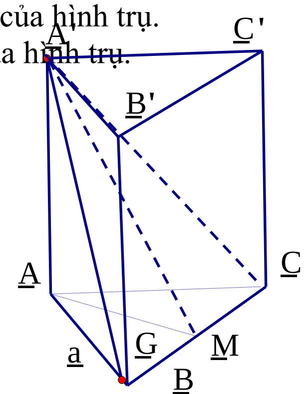
Bài tập 6: Cho hình lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy là tam giác đều cạch bằng a, mặt phẳng A'BC hợp với mặt phẳng đáy (ABC) một góc 60^0.

a) Một trụ tròn ngoại tiếp hình lăng trụ. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ.

b) Một trụ tròn nội tiếp hình lăng trụ. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ.

Lời giải

a) Ta có: $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; h = AA' = $AM.\tan 60^0 = \frac{3a}{2}$



Vậy $S_{xq} = 2\pi.r.l = 2\pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{3a}{2} = a^2\sqrt{3}\pi$; $V = \pi r^2.h = \pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\frac{3a}{2} = \frac{\pi a^3}{2}$

b) Ta có: $r = GM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Vậy $S_{xq} = 2\pi.r.l = 2\pi.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{3a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}\pi}{2}$; $V = \pi r^2.h = \pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2.\frac{3a}{2} = \frac{\pi a^3}{8}$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình nón đỉnh S và đáy của hình nón là hình tròn tâm O bán kính R.

Biết $SO = h$. Đường sinh của hình nón bằng :

A. $2\sqrt{R^2+h^2}$ B. $\sqrt{R^2+h^2}$ C. $\sqrt{h^2-R^2}$ D. $2\sqrt{h^2-R^2}$

Câu 2. Đường tròn đáy của một hình nón có đường kính bằng 8cm, đường cao 3cm. Giao của mặt phẳng chứa trục của hình nón và hình nón đó là một tam giác cân. Chu vi của tam giác đó là :

A. $12cm$ B. $14cm$ C. $16cm$ D. $18cm$

Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 2cm, AC = 3cm . Quay hình tam giác ABC quanh trục AB ta được hình nón có diện tích xung quanh là :

A. $3\pi\sqrt{13}cm^2$ B. $\pi\sqrt{13}cm^2$ C. $3\pi\sqrt{5}cm^2$ D. $\pi\sqrt{5}cm^2$

Câu 4. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O;2cm)$ và $(O';2cm)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với OO' và cắt OO'. (P) cắt hình trụ theo một đường tròn có chu vi là :

A. $2\pi cm$ B. $4\pi cm$ C. $6\pi cm$ D. $8\pi cm$

Câu 5. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO' = h$. Mặt phẳng (P) chứa OO'. Thiết diện tạo bởi mp(P) và hình trụ có chu vi là :

A. $2h+4R$ B. $2h+2R$ C. $h+4R$ D. $h+2R$

Câu 6. Cho hình nón có độ dài đường cao là $a\sqrt{3}$, bán kính đáy là *a*. Tính độ dài đường sinh *l* và độ lớn góc ở đỉnh α.

A. $l = a$ và $\alpha = 30^0$ B. $l = 2a$ và $\alpha = 60^0$ C. $l = a$ và $\alpha = 60^0$ D. $l = 2a$ và $\alpha = 30^0$

Hướng dẫn:

Đường sinh $l = \sqrt{h^2+r^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2+a^2} = 2a$

Ta có góc ở đỉnh 2α, với $\sin\alpha = \frac{r}{l} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^0 \Rightarrow 2\alpha = 60^0$. Đáp án: B

Câu 7. Một hình nón có bán kính đáy bằng R, đường cao $\frac{4R}{3}$. Khi đó góc ở đỉnh của hình nón là 2α là

A. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ **B.** $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ **C.** $\tan\alpha = \frac{3}{5}$ **D.** $\cot\alpha = \frac{3}{5}$

Hướng dẫn: $\sin\alpha = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}$

Câu 8. Cho tam giác đều ABC cạnh a quay xung quanh đường cao AH tạo nên một hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón đó là:

A. πa^2 B. $2\pi a^2$ <u>C.</u> $\frac{1}{2}\pi a^2$ D. $\frac{3}{4}\pi a^2$

Hướng dẫn : Ta có: $l = a$; $r = \frac{a}{2}$. Vậy $S_{xq} = \pi.r.l = \frac{1}{2}\pi a^2$

Câu 9. Trong không gian cho tam giác ABC vuông cân tại A, AB = AC = 2a. Độ dài đường sinh l của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AC là

A. $l = a\sqrt{2}$ <u>B.</u> $l = 2a\sqrt{2}$ C. $l = 2a$ D. $l = a\sqrt{5}$

Hướng dẫn: $l = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{2}$

Câu 10. Cho hình nón, mặt phẳng qua trục và cắt hình nón tạo ra thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón.

A. $\sqrt{6}\pi a^2;\ 9\pi a^3$ **B.** $\pi a^2;\ 9\pi a^3$ <u>**C.**</u> $2\pi a^2;\ \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$ **D**. $2\pi a^2;\ \sqrt{3}\pi a^3$

Hướng dẫn: Ta có bán kính r = a, độ dài đường sinh l = 2a, chiều cao h = $a\sqrt{3}$

Vậy $S_{xq} = 2\pi a^2;\ V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 11. Một hình tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh của hình nón tròn xoay còn ba đỉnh còn lại của tứ diện nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay là

A. $S_{xq} = \frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{2}$ B. $S_{xq} = \frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{3}$ C. $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{2}$ <u>D.</u> $S_{xq} = \frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{3}$

Hướng dẫn: Độ dài đường sinh $l = a$, bán kính $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy $S_{xq} = \frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{3}$

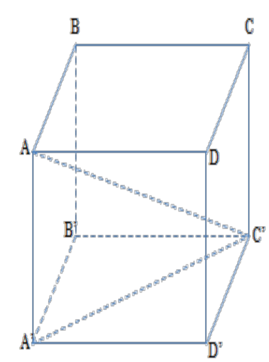
Câu 12. Gọi S là diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay được sinh ra bởi đoạn thẳng AC' của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh b khi quay xung quanh trục AA'. Diện tích S là:

A. πb^2 **B.** $\pi b^2\sqrt{2}$ **C.** $\pi b^2\sqrt{3}$ <u>**D.**</u> $\pi b^2\sqrt{6}$

Hướng dẫn:

$r = b\sqrt{2}; l = b\sqrt{3}$

$S = \pi r.l = \pi b^2\sqrt{6}$



Câu 13. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông ABCD và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông

A'B'C'D'. Diện tích xung quanh của hình nón đó là:

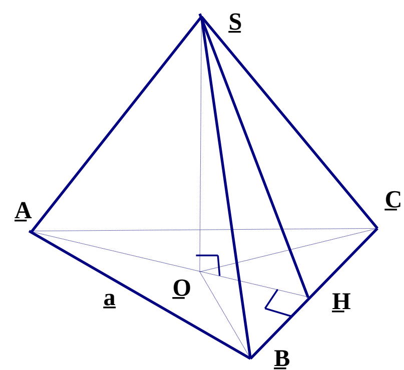
A. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$; **B.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$; **C.** $\frac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}$; **D.** $\frac{\pi a^2\sqrt{6}}{2}$

Hướng dẫn: Độ dài đường sinh bằng: $l = \sqrt{a^2 + (\frac{1}{2}a)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Diện tích xung quanh hình nón bằng: $S_{xq} = \pi rl = \pi \frac{a}{2}\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}$

Câu 14. Cho hình chóp đều S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 60^0. Một hình nón có đỉnh trùng với đỉnh S của hình chóp, đáy của nón ngoại tiếp đáy của hình chóp. Diện tích xung quanh của hình nón là

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{21}}{6}$ **B.** $\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{2}$ **C.** $\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{3}$ **D.** $\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$



Hướng dẫn: Ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; r = OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}; OH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Góc giữa mặt bên với mặt đáy là góc SHO = 60^0

Suy ra $SO = OH.\tan 60^0 = \frac{a}{2} \Rightarrow l = SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

Vậy $S_{xq} = \pi.r.l = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$

Câu 15. Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích 27cm^3. Với chiều cao h và bán kính đáy là r. Tìm r để lượng giấy tiêu thụ ít nhất.

A. $r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$ B. $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$ C. $r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$ D. $r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$

Hướng dẫn :

$$V = \frac{1}{3}.\pi R^2.h \Rightarrow h = \frac{3V}{\pi R^2} = \frac{3^4}{\pi R^2}$$

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi R.\sqrt{h^2 + R^2} = \pi R.\sqrt{\left(\frac{3^4}{\pi R^2}\right)^2 + R^2} = \pi R\sqrt{\frac{3^8 + \pi^2.R^6}{\pi^2.R^4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3^8 + \pi^2.R^6}}{R}$$

$$S_{xq}' = \frac{3\pi^2 R^6 - (3^8 + \pi^2.R^6)}{R.\sqrt{3^8 + \pi^2.R^6}} = \frac{2\pi^2 R^6 - 3^8}{R.\sqrt{3^8 + \pi^2.R^6}};$$

$$S_{xq}' = 0 \Leftrightarrow 2\pi^2 R^6 - 3^8 = 0 \Leftrightarrow R^6 = \frac{3^8}{2\pi^2} \Leftrightarrow R = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}} (R > 0)$$

Lập bảng xét dấu S' ta đc min S đạt khi $R = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$ Chọn B

Câu 16. Trong không gian cho hình chữ nhật ABCD có AB = 4 và BC = 2. Quay hình chữ nhật ABCD xung quanh trục BC ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đó.

A. 10π B. 12π C. 4π D. 16π

Hướng dẫn: Ta có r = 4; l = 2. Vậy $S_{xq} = 2\pi.4.2 = 16\pi$

Câu 17. Trong không gian cho hình chữ nhật ABCD có AB = 4 và BC = 2. Gọi P, Q lần lượt là các điểm trên cạnh AB và CD sao cho: BP = 1, QD = 3QC. Quay hình chữ nhật APQD xung quanh trục PQ ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đó.

A. 10π B. 12π C. 4π D. 6π

Hướng dẫn: Ta có r= 3; l = 2. Vậy $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi.3.2 = 12\pi$. Chọn B

Câu 18. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a**.** Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Diện tích S là :

A. πa^2 **B.** $\pi a^2\sqrt{2}$ **C.** $\pi a^2\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn: $r = \dfrac{a}{2}; l = a \Rightarrow S = 2\pi.r.l = 2\pi.\dfrac{a}{2}.a = \pi a^2$

Câu 19. Một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính R, chiều cao hình trụ là $R\sqrt{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích khối trụ.

A. $2\pi(\sqrt{2}+1)R^2;\ \pi R^3$ **B.** $2\pi(\sqrt{2}+1)R^2;\ \pi R^3\sqrt{2}$

C. $\pi(\sqrt{2}+1)R^2;\ \pi R^3\sqrt{2}$ **D.** $\pi(\sqrt{2}+1)R^2;\ \pi R^3$

Hướng dẫn: Áp dụng công thưc có đáp án là phương án B

Câu 20. Cho hình lập phương có cạnh bằng a và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1 là diện tích 6 mặt của hình lập phương, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tính tỉ số $\dfrac{S_2}{S_1}$

A. $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{\pi}{2}$ B. $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{S_2}{S_1} = \pi$ D. $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{\pi}{6}$

Hướng dẫn: S_1 = 6a2; S_2 = $2\pi.\dfrac{a}{2}.a = \pi a^2$ => $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{\pi}{6}$ Đáp án : D

Câu 21. Một hình trụ có 2 đáy là 2 hình tròn nội tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh *a*. Thể tích của khối trụ đó là:

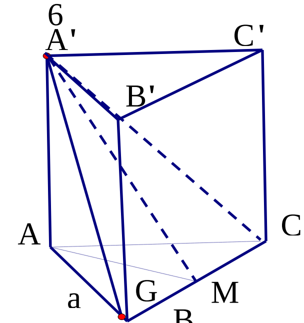
A. $\dfrac{1}{2}a^3\pi$ **B.** $\dfrac{1}{4}a^3\pi$ **C.** $\dfrac{1}{3}a^3\pi$ **D.** $a^3\pi$

Hướng dẫn: Ta có r = $\dfrac{a}{2}$; h = a. Vậy $V = \pi r^2h = \pi(\dfrac{a}{2})^2a = \dfrac{1}{4}a^3\pi$

Câu 22. Cho hình lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, góc giữa mặt phẳng (A'BC) với mặt đáy bằng 45^0. Một hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ. Thể tích của khối trụ tròn là

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{21}}{6}$ **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$ **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{6}$

Hướng dẫn: Ta có: $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

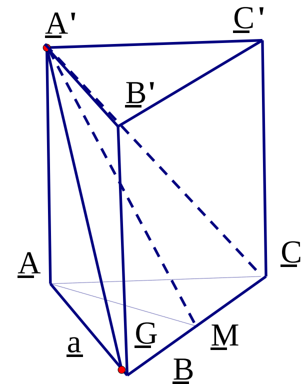


$h = AA' = AM.\tan 45^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V = \pi r^2.h = \pi.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 23. Cho hình lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, góc giữa mặt phẳng (A'BC) với mặt đáy bằng 30^0. Một hình trụ nội tiếp hình lăng trụ. Thể tích của khối trụ tròn là

A. $\dfrac{\pi a^2}{24}$ **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$ **C.** $\dfrac{\pi a^3}{72}$ **D.** $\dfrac{\pi a^3}{24}$



Hướng dẫn: Ta có: $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = GM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$h = AA' = AM.\tan 30^0 = \dfrac{a}{2}$

Vậy $V = \pi r^2.h = \pi.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2.\dfrac{a}{2} = \dfrac{\pi a^3}{24}$

Câu 24. Người ta bỏ 3 quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng 3 lần đường kính của quả bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của 3 quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số S_1/S_2 bằng:

A. 1 **B.** 2 **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** $\dfrac{6}{5}$

Hướng dẫn: Nếu gọi r là bán kính quả bóng thì bán kính trụ bằng r và đường sinh trụ bằng 6r.

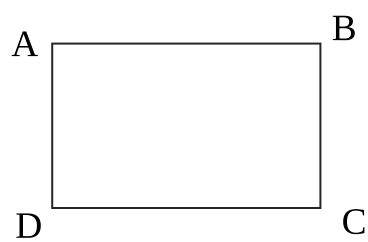
$S_2 = 2\pi.r.l = 2\pi r.6r = 12\pi r^2$

$S_1 = 3(4\pi r^2) = 12\pi r^2$. Vậy tỉ số bằng 1. Chọn A

Câu 25. Cần thiết kế các thùng dạng hình trụ có nắp đậy để đựng sản phẩm đã được chế biến có dung tích định sẵn V (cm^3). Hãy xác định bán kính đáy của hình trụ theo V để tiết kiệm vật liệu nhất

A. $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi^2}}$ B. $r = \sqrt[3]{\dfrac{2V}{\pi^2}}$ C. $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{2\pi^2}}$ D. $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi^2}}$

Hướng dẫn: Ta có: $V = \pi r^2 h$; chu vi đường tròn đáy AB = $2\pi r$ chiều cao h = BC . Để tiết kiệm vật liệu nhất thì hình chữ nhật ABCD phải là hình vuông hay BC = AB $\Leftrightarrow$ h = $2\pi r$

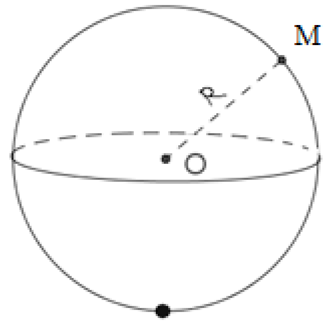


Nên ta có: $V = \pi r^2 2\pi r \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi^2}}$

CHỦ ĐỀ 4: MẶT CẦU

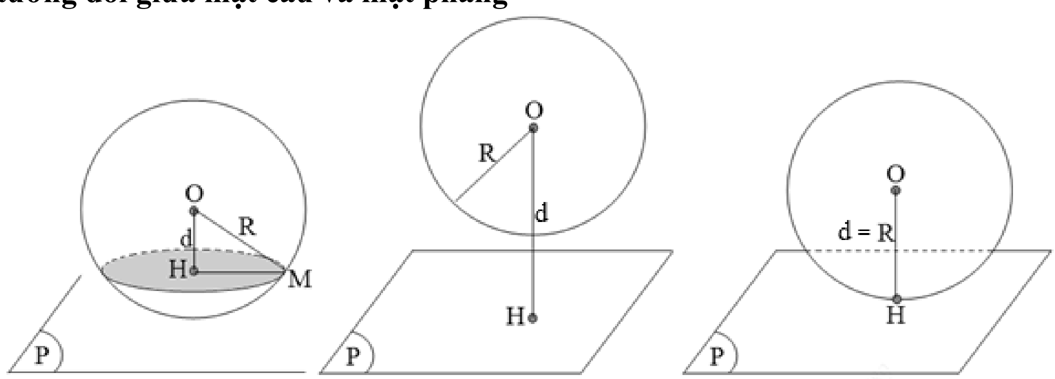
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa mặt cầu



- **Mặt cầu:** $S(O;R)=\{M|OM=R\}$ • **Khối cầu:** $V(O;R)=\{M|OM\le R\}$

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng



Hình a Hình b Hình c

Cho mặt cầu S(O; R) và mặt phẳng (P). Gọi d = d(O; (P)).

- Nếu d < R thì (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên (P), có tâm H và bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.
- Nếu d = R thì (P) tiếp xúc với (S) tại tiếp điểm H. ((P) được gọi là tiếp diện của (S))
- Nếu d > R thì (P) và (S) không có điểm chung.

Khi d = 0 thì (P) đi qua tâm O và được gọi là mặt phẳng kính, đường tròn giao tuyến có bán kính bằng R được gọi là đường tròn lớn.

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu S(O; R) và đường thẳng Δ. Gọi d = d(O; Δ).

- Nếu d < R thì Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu d = R thì Δ tiếp xúc với (S). (Δđược gọi là tiếp tuyến của (S)).
- Nếu d > R thì Δ và (S) không có điểm chung.

4. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

+ Diện tích của mặt cầu : $S_C=4\pi r^2$

+ Thể tích của khối cầu : $V_C=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

B. KĨ NĂNG CƠ BẢN

1. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp:

a) Cách xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

– Xác định trục Δ của đáy (Δ là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).

– Xác định mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên.

– Giao điểm của (P) và Δ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

b) Cách tìm bán kính của mặt cầu ngoại hình chóp

- Nếu hình chóp có một cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy thì áp dụng công thức Pitago
- Nếu hình chóp là hình chóp đều thì áp dụng tỉ lệ đồng dạng của hai tam giác.

2. **Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đứng:**

- Xác định trục Δ của hai đáy (Δ là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).
- Trung điểm đoạn nối hai tâm đa giác đáy là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đứng

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

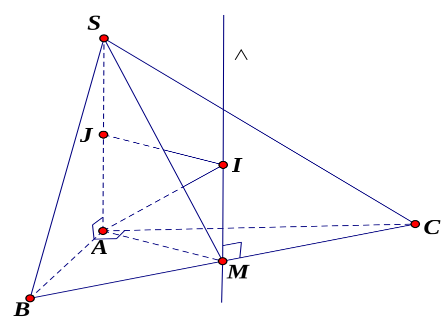
Bài tập 1: Cho mặt cầu có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

Lời giải : Ta có $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\left(a\sqrt{3}\right)^2 = 12\pi a^2$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(a\sqrt{3}\right)^3 = 4\pi a^3\sqrt{3}$$

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 3, AC = 4,$ SA vuông góc với đáy, $SA = 2\sqrt{14}.$ Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Lời giải

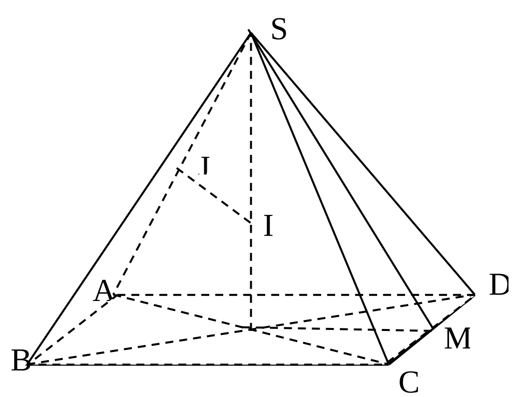


Gọi M là trung điểm của BC. Từ M kẻ đường thẳng $\Delta // SA$.
Khi đó Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Đường trung trực của cạnh bên SA qua trung điểm J và cắt Δ tại I .
Suy ra I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Có bán kính $R = IA = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \frac{9}{2}$

Vậy $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{9}{2}\right)^3 = \frac{729}{6}\pi$

Bài tập 3: Cho hình chóp đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên tạo với mặt đáy một góc 60^0. Một mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD. Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu đó.



Lời giải

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD. Từ O kẻ đường thẳng $\Delta \perp (ABCD)$. Khi đó Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Đường trung trực của cạnh bên SA qua trung điểm J và cắt Δ tại I .

Suy ra I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

và bán kính R = IS

Ta có: $OA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ $OM=\frac{a}{2}\Rightarrow SO=OM.\tan 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SA=\sqrt{SO^2+OM^2}=a$

Do ΔSJI đồng dạng với ΔSOA ta có: $\frac{SI}{SA}=\frac{SJ}{SO}\Leftrightarrow SI=\frac{SJ.SA}{SO}=\frac{SA^2}{2.SO}=\frac{a^2}{a\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $S=4\pi R^2=4\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}\pi a^2$; $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{4}{27}\pi a^3\sqrt{3}$

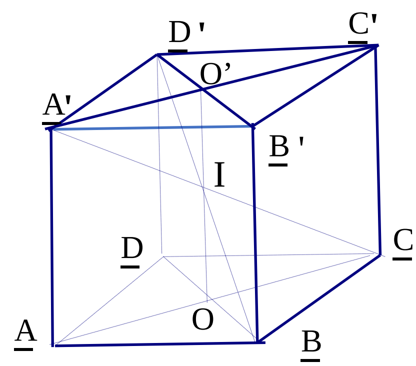
Bài tập 4: Trong không gian cho hình lập phương cạnh bằng a.

a) Một mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh a.

Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu.

b) Một mặt cầu nội tiếp hình lập phương cạnh a.

Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu



Lời giải

Ta có tâm I của mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình lập phương ABCDA'B'C'D' là giao của hai đường chéo A'C với D'B

a) Ta có $BD=a\sqrt{2}; DD'=a\Rightarrow BD'=\sqrt{BD^2+DD'^2}=a\sqrt{3}$

Bán kính $R=\frac{1}{2}BD'=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $S=4\pi R^2=4\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=3\pi a^2$; $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{3}$

b) Ta có $OO'=a\Rightarrow R=IO=\frac{a}{2}$

Vậy $S=4\pi R^2=4\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2=\pi a^2$; $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3=\frac{1}{6}\pi a^3$

D. BÀI TẬP TRẮC NGIỆM

Câu 1. Cho điểm O cố định và điểm M thỏa mãn $OM=6cm$. Phát biểu nào sau đây là đúng

A. M thuộc đường tròn tâm O bán kính 3cm. **B.** M thuộc mặt cầu tâm O bán kính 3cm.

C. M thuộc mặt cầu tâm O bán kính 6cm. **D.** M thuộc mặt cầu tâm O bán kính 12cm.

Câu 2. Cho mặt cầu tâm O bán kính 10cm. Điểm M cách O một khoảng bằng 5cm. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A. Điểm M nằm ngoài mặt cầu. **B.** Điểm M nằm trong mặt cầu.

C. Điểm M nằm trên mặt cầu. **D.** Khoảng cách từ M đến O nhỏ hơn bán kính mặt cầu.

Câu 3. Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính R và điểm H thỏa mãn $OH=R$, mp(P) chứa H và vuông góc với đường thẳng OH. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

B. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

C. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S), giao tuyến là một đường thẳng.

D. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S), giao tuyến là một đường tròn.

Câu 4. Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính R và điểm I thỏa mãn $OI < R$, (P) là mặt phẳng chứa I. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

B. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

C. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S), giao tuyến là một đường thẳng.

D. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S), giao tuyến là một đường tròn.

Câu 5. Cho mặt cầu tâm O đi qua hai điểm phân biệt A, B. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A. $OA \neq OB$

B. O thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

C. O, A, B là ba đỉnh của một tam giác vuông.

D. O, A, B là ba đỉnh của một tam giác cân.

Câu 6. Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính R và điểm I thỏa mãn $OI < R$, đường thẳng (d) chứa điểm I. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A. Đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu (S).

B. Đường thẳng (d) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

C. Đường thẳng (d) cắt mặt cầu (S), (d) và mặt cầu có hai điểm chung.

D. Đường thẳng (d) cắt mặt cầu (S), (d) và mặt cầu có duy nhất một điểm chung.

Câu 7. Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính 3cm. Điểm A nằm ngoài mặt cầu và cách O một khoảng 5cm. Đường thẳng AB tiếp xúc với mặt cầu, B là tiếp điểm. Độ dài đoạn thẳng AB là

A. $3cm$ **B.** $4cm$ **C.** $5cm$ **D.** $3\sqrt{2}cm$

Câu 8. Cho mặt cầu tâm O đi qua ba điểm phân biệt A, B, C. Hình chiếu vuông góc của O lên mp(ABC) là :

A. Trọng tâm tam giác ABC. **B.** Trực tâm tam giác ABC.

C. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. **D.** Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 9. Cho hai điểm A, B thuộc mặt cầu tâm O bán kính R (O không thuộc đoạn thẳng AB), H là hình chiếu vuông góc của O lên AB. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A. $AB^2 + OH^2 = R^2$ **B.** $AB^2 + OH^2 = 4R^2$

C. $AB^2 + 4OH^2 = 4R^2$ **D.** $AB^2 + 4OH^2 = R^2$

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. Bất kỳ một hình tứ diện nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

B. Bất kỳ một hình chóp đều nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

C. Bất kỳ một hình hộp nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

D. Bất kỳ một hình hộp chữ nhật nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

Câu 11. Mp(P) cắt mặt cầu (O, R) theo một đường tròn. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A. O là tâm đường tròn giao tuyến.

B. Tâm đường tròn giao tuyến không thuộc (P).

C. Tâm đường tròn giao tuyến là điểm đối xứng với O qua (P).

D. Tâm đường tròn giao tuyến là hình chiếu vuông góc của O lên (P).

Câu 12. Mp(P) tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính R tại A. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A. Đường thẳng OA vuông góc với mp(P). **B.** Hình chiếu vuông góc của O lên (P) khác A

C. Khoảng cách từ O đến (P) khác R. **D.** $OA > OM$, với M là điểm bất kỳ thuộc (P).

Câu 13. Một khối cầu có bán kính 2R thì có thể tích bằng:

A. $\frac{4\pi R^3}{3}$ B. $4\pi R^2$ C. $\frac{32\pi R^3}{3}$ D. $\frac{16\pi R^3}{3}$

Hướng dẫn: $V = \frac{4}{3}\pi(2R)^3 = \frac{32\pi R^3}{3}$ Đáp án: C

Câu 14. Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$ có : $AB = a,\ AD = 2a,\ AA' = 2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ACB'D'$ là :

A. a **B.** $2a$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{3a}{2}$

Câu 15. Một quả địa cầu có bán kính 22 cm. Diện tích xung quanh của quả địa cầu là :

A. $1936\pi cm^2$ **B.** $936\pi cm^2$ **C.** $484\pi cm^2$ **D.** $5324\pi cm^2$

Câu 16. Cho hình cầu có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối cầu tương ứng là :

A. $4a^3\sqrt{3}$ **B.** $4\pi a^3\sqrt{3}$ **C.** $\frac{4}{3}a^3\sqrt{3}$ **D.** $\frac{4}{3}\pi a^3\sqrt{3}$

Câu 17. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a,\ AC = a\sqrt{3}$. Quay đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC quanh trục BC ta được mặt cầu có diện tích là :

A. $16\pi a^2$ **B.** $12\pi a^2$ **C.** $4\pi a^2$ **D.** $2\pi a^2$

Câu 18. Xếp 7 viên bi cùng bán kính r vào một lọ hình trụ sao cho tất cả các viên bi cùng tiếp xúc với đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với các viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của hình trụ. Khi đó diện tích đáy của lọ hình trụ là :

A. $36\pi r^2$ **B.** $18\pi r^2$ **C.** $16\pi r^2$ **D.** $9\pi r^2$

Câu 19. Cho điểm I nằm ngoài mặt cầu tâm O bán kính R. Đường thẳng d_1 đi qua I và cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt A và B. Đường thẳng d_2 đi qua I và cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt C và D. Độ dài $IA = 3cm,\ IB = 8\,cm,\ IC = 4\,cm$. Độ dài đoạn ID là :

A. $3cm$ **B.** $4cm$ **C.** $6cm$ **D.** $8cm$

Câu 20. Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R = 3. Mặt phẳng (P) cách tâm I một khoảng $\sqrt{5}$, cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Tính chu vi của (C).

A. 2π **B.** 4π **C.** 8π **D.** 10π

Câu 21. Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có tất cả các cạnh đều bằng 1. Tính thể tích *V* của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{2\pi}{3}$ **B.** $V = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$ **D.** $V = \frac{2\pi}{3}$.

Hướng dẫn: Bán kính của khối cầu ngoại tiếp hình chóp là: $R = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

Câu 22. Cho hình chóp $D.ABC$ có $DA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại B. Đặt $AB = c, BC = a, AD = b.$ Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ **B.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ **C.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ **D.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Hướng dẫn: Gọi M là trung điểm của AC, Gọi I là trung điểm của DC, ta có:

$R^2 = \frac{1}{4}IM^2 + \frac{1}{4}AM^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}(a^2+c^2)$ Đáp án: B

Câu 23: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Thể tích của khối cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện ABCD bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$ B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{24}$ C. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$ D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$

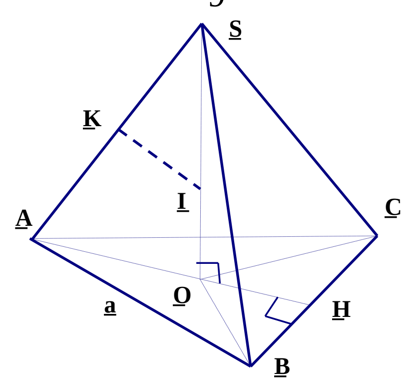
Hướng dẫn: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có $MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

=> Bán kính khối cầu là: $r = \frac{MN}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ => Thể tích khối cầu là: $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{24}$.

Câu 24. Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh đáy là *a* và cạnh bên tạo với đáy một góc bằng 60^0. Diện tích của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp *S.ABC* là

A. $S = \frac{16\pi a^2}{3}$ B. $S = \frac{16\pi a^2}{9}$ C. $S = \frac{8\pi a^2}{3}$ D. $S = \frac{8\pi a^2}{9}$



Hướng dẫn: Ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Góc giữa cạnh bên với mặt đáy là góc SAO = 60^0

Suy ra $SO = OA.\tan 60^0 = a \Rightarrow SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

ΔSKI đồng dạng $\Delta SOA \Rightarrow \frac{SI}{SA} = \frac{SK}{SO} \Leftrightarrow R = SI = \frac{SA.SK}{SO} = \frac{SA^2}{2.SO}$

Bán kính mặt cầu là $R = \frac{2a}{3}$

Thể tích $S = 4\pi R^2 = \frac{16\pi a^2}{9}$

Câu 25. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{18}$ B. $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{54}$ C. $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$ D. $\dfrac{5\pi a^3}{3}$

Hướng dẫn : Gọi H là trung điểm của AB. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác đều ABC, SAB. Dựng d là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; d' là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

d và d' cắt nhau tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC.

Ta có: $G'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}; GH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow IH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Bán kính mặt cầu: $r = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$

Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{54}$

KIỂM TRA 45 PHÚT
THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN
MẶT NÓN- MẶT TRỤ- MẶT CẦU

I. MỤC TIÊU

1.Về kiến thức :

Nắm vững kiến thức cơ bản về

+ Khối đa diện và thể tích của khối đa diện, các công thức tính thể tích của khối hộp chữ nhật, khối chóp, khối lăng trụ.

+ Các công thức tính diện tích xung quanh, tính thể tích của mặt nón, mặt trụ và mặt cầu.

+ Biết vận dụng tính thể tích và giải một số bài toán liên quan tới thể tích.

2. Về kĩ năng :

+ Tính được thể tích của các khối đa diện đơn giản.

+ Tính được diện tích và thể tích của các khối tròn xoay và vận dụng giải một số bài toán hình học.

3.Về thái độ : Nghiêm túc làm bài, cẩn thận chính xác

II. HÌNH THỨC KIỂM TRA.

- Hình thức: Kiểm tra trắc nghiệm
- Học sinh làm bài trên lớp

III. MA TRẬN

MA TRẬN NHẬN THỨC

Chủ đề mạch kiến thức, kỹ năng	**Tầm quan trọng(mức cơ bản trọng tâm của KTKN)**	**Trọng số (mức độ nhận thức của chuẩn KTKN)**	**Tổng điểm**	
			Theo ma trận nhận thức	**Theo thang điểm**
1. Khái niệm khối đa diện. Khối đa diện lồi. Khối đa diện đều	10	1	10	0,8
2. Thể tích khối chóp	15	3	45	2
3. Thể tích khối lăng trụ	15	3	45	2
4. Mặt nón	20	2	40	1,6
5. Mặt trụ	20	2	40	1,6
6. Mặt cầu	20	2	40	2
Tổng	100%		220	10

MA TRẬN ĐỀ KIỂM TRA

Chủ đề mạch kiến thức, kỹ năng	**Mức độ nhận thức**				**Tổng**
	Nhận biết 1	**Thông hiểu 2**	**Vận dụng 3**	**Khả năng cao hơn 4**	
1. Khái niệm khối đa diện. Khối đa diện lồi. Khối đa diện đều	Câu 1,2 0,8				2 0,8

2. Thể tích khối chóp	Câu 3 0,4	Câu 4,5 0,8	Câu 6 0,4	Câu 7 0,4	5 2
3. Thể tích khối lăng trụ	Câu 8 0,4	Câu 9,10 0,8	Câu 11 0,4	Câu 12 0,4	5 2
4. Mặt nón	Câu 13 0,4	Câu 14 0,4	Câu 15 0,4	Câu 16 0,4	4 1,6
5. Mặt trụ	Câu 17 0,4	Câu 18 0,4	Câu 19,20 0,8		4 1,6
6. Mặt cầu	Câu 21 0,4	Câu 22 0,8	Câu 23,24,25 0,4		5 2
Tổng	7 2,8	7	8 3,2	3 1,2	25 10

ĐỀ KIỂM TRA

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Hình lập phương là đa điện lồi.

B. Tứ diện là đa diện lồi.

C. Hình hộp là đa diện lồi.

D. Hình tạo bởi hai khối lăng trụ có chung một mặt bên là một hình đa diện lồi.

Câu 2: Số đỉnh của hình bát diện đều là:

A. 4. B. 6 . C.8. D.12.

Câu 3: Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là

A. $V=\frac{1}{3}Bh.$ **B.** $V=Bh.$ **C.** $V=\frac{1}{2}Bh.$ **D.** $V=\frac{4}{3}Bh^2.$

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều cạnh a ,cạnh bên tạo với đáy một góc 60^o . Tính thể tích của hình chóp đó.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}.$ **C.** $\frac{a^3}{2}.$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $SA\perp(ABC)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{3a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{3a^3}{6}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA \perp \left(ABCD\right)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a,\ AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SD = 3a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{15}$.

Câu 8: Thể tích của hình lập phương cạnh bằng a là:

A. $2a^3$ B. $\frac{a^3}{2}$ C. $\frac{a^3}{3}$ D. a^3

Câu 9: Một bể nước hình hộp chữ nhật có số đo chiều dài, chiều rộng, chiều cao lần lượt là 3m, 2m, 2m. Thể tích của bể đó bằng

A. 4 m^3 B. 12 m^3 C. 8 m^3 D. 7 m^3

Câu 10: Tổng diện tích các mặt của một hình lập phương bằng 96 m^2. Thể tích của khối lập phương đó bằng

A. 84 m^3 B. 91 m^3 C. 64 m^3 D. 48 m^3

Câu 11: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, cạnh bên $AA' = 2a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13: Với S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay có bán kính đường tròn đáy là r và đường sinh là l được cho bởi công thức nào sau đây:

A. $S_{xq} = 2\pi rl$ B. $S_{xq} = \pi rl$. C. $S_{xq} = \pi^2 rl$ D. $S_{xq} = \pi r^2 l$

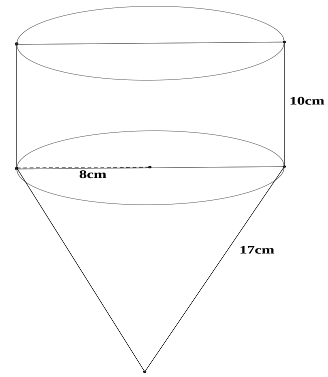
Câu 14: Cho hình nón đỉnh O, tâm đáy là I, đường sinh OA = 4, $S_{xq} = 8\pi$. Tìm kết luận ***sai:***

A. R = 2 B. $h = 2\sqrt{3}$ C. $S_{day} = 4\pi$ D. $V = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15: Cho tam giác đều ABC cạnh a quay quanh đường cao AH tạo nên một hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón đó là:

A. $2\pi a^2$ B. πa^2 C. $\dfrac{\pi a^2}{2}$. D. $\dfrac{3\pi a^2}{4}$

Câu 16: Một cái phễu rỗng phần trên có kích thước như hình vẽ. Diện tích xung quanh của phễu là:



A. $S_{xq} = 360\pi\ cm^2$ **B.** $S_{xq} = 424\pi\ cm^2$

C. $S_{xq} = 296\pi\ cm^2$ **D.** $S_{xq} = 960\pi\ cm^2$

Câu 17: Cho hình vuông ABCD có cạnh a. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của AB và CD. Cho hình vuông đó quay quanh trục IH thì tạo nên một hình trụ.Tìm kết luận ***sai:***

A. $S_{xq} = \pi a^2$ B. $l = a$ C. $V = \dfrac{\pi a^3}{4}$ D. $S_{day} = \pi a^2$.

Câu 18: Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a. Thể tích của khối trụ đó là:

A. $\dfrac{1}{2}a^3\pi$ B. $\dfrac{1}{4}a^3\pi$. C. $\dfrac{1}{3}a^3\pi$ D. $a^3\pi$

Câu 19: Một hình trụ có bán kính đáy là a. A và B là 2 điểm trên 2 đường tròn đáy sao cho AB = 2a và tạo với trục của hình trụ một góc 30^0 . Tìm kết luận ***đúng:***

A. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $h = a\sqrt{3}$. C. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Câu 20: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Diện tích S là :

A. πa^2 B. $\pi a^2\sqrt{2}$. C. $\pi a^2\sqrt{3}$ D. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$

Câu 21: Diện tích S của một mặt cầu có bán kính r được xác định bởi công thức nào sau đây:

A. $S = 4\pi r$ B. $S = 4\pi r^2$. C. $S = 4\pi^2 r^2$ D. $S = 4r^2$

Câu 22: Thể tích V của một mặt cầu có bán kính r được xác định bởi công thức nào sau đây:

A. $V = \dfrac{4\pi r}{3}$ B. $V = \dfrac{4\pi^2 r^2}{3}$ C. $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$. D. $V = \dfrac{4\pi^2 r^3}{3}$

Câu 23: Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a,b,c. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có bán kính r bằng:

A. $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. B. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. C. $\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$ D. $\dfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Câu 24: Cho tứ diện OABC có OA,OB,OC đôi một vuông góc nhau và OA = a,OB = 2a, OC= 3a. Diện tích của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp S.ABC bằng:

A. $S = 14\pi a^2$. B. $S = 12\pi a^2$ C. $S = 10\pi a^2$ D. $S = 8\pi a^2$

Câu 25: Cho hình tứ diện S.ABC có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và SA=a, SB=SC=2a. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC. Gọi S' là diện tích của mặt cầu (S) và V là thể tích của khối cầu tạo nên bởi mặt cầu (S) bằng. Tỉ số $\frac{V}{S'}$ bằng:

A. a B. 4a C. 2a. D. 3a

NHÓM TRƯỜNG: THPT Ỷ LA - THPT ĐẦM HỒNG- THPT NA HANG

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG PP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Tọa độ vectơ: Cho $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Ta có

$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$ $\qquad k.\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$

$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$; $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$; $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

2. Tọa độ điểm: Cho $A(x_{A;}y_A;z_A),B(x_{B;}y_B;z_B),C(x_{C;}y_C;z_C)$

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

M là trung điểm của AB $\Leftrightarrow M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow M\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

3. Tích có hướng của hai vectơ: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

Tích có hướng của hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ, k/h: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$

- Điều kiện để 3 vectơ đồng phẳng: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$
- Diện tích hình bình hành ABCD : $S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$
- Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
- Thể tích tứ diện ABCD : $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$
- Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D': $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

B. KỸ NĂNG.

- Rèn luyện kĩ năng tìm tọa độ điểm, tọa độ vecto, độ dài vecto
- Có kỹ năng vận dụng thành thạo các định lý và các hệ quả về toạ độ vectơ, toạ độ điểm và

phương trình mặt cầu để giải các dạng toán có liên quan
- Rèn kĩ năng tính tích có hướng, tích vô hướng và áp dụng vào giải các bài toán liên quan.

C. BÀI TẬP.

Bài 1. Cho tam giác ABC, biết A(2; 0; 1), B(1; -1; 2), C(2; 3; 1)
a) Tam giác ABC có góc A nhọn hay tù?
b) Tính chu vi tam giác ABC.
c) Tìm tọa độ điểm M trên trục tung sao cho tam giác MBC vuông tại M.

Bài 2. Cho tam giác ABC biết A(3;4; -1), B(2; 0; 3), C(-3; 5; 4). Tính độ dài các cạnh tam giác ABC. Tính cosin các góc A, B, C và diện tích tam giác ABC.

Bài 3. Cho 3 điểm A(3 ; 1 ; -1), B(-2 ; 2 ; 3), C(0 ; 3 ; 2)
a. Xác định tọa độ trọng tâm G và trực tâm H của tam giác ABC
b. Xác định tọa độ điểm A' là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A
c. Gọi I là điểm chia đoạn HG theo tỉ số k = 3. Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 4. Cho 4 điểm A(a ; 0 ; 0), B(0 ; a ; 0), C(0 ; 0 ; b), D(a ; a; b) với $0 < a \le b$.
a. Chứng minh AB vuông góc với CD
b. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD

Bài 5.. Cho 4 điểm A(-1; 2; 0), B(-3; 0; 2), C(0; 2; -1) và D(1; 4; 0). Chứng minh ABCD là một tứ diện. Tính thể tích của nó.

Bài 6. Cho A(2; 1; -1), B(3; 0; 1), C(2; -1; 3) và $D \in Oy$. Biết thể tích của tứ diện ABCD bằng 5. Tìm tọa độ của D. Tìm tọa độ hình chiếu H của O lên mp(ABC)

Bài 7. Cho hình chóp S.ABC, biết A(1; 2; -1), B(5; 0; 3), C(7; 2; 2), $SA \perp (ABC)$, $S \in (Oyz)$. Tìm tọa độ điểm S

Bài 8.. Cho 2 điểm cố định A(1 ; 1; 0), B(0 ; 0 ; 1) và 2 điểm di động M(m ; 0 ; 0), N(0 ; n ; 0) $(m, n \in R_+^*)$
a) Tìm quan hệ giữa m, n để OA $\perp$MN
b) Tính thể tích của hình chóp B.OMAN
c) M, N di động sao cho m.n = 1. Tính m, n để $\mathbf{V}_{B.OMAN}$ nhỏ nhất

Bài 9.. Cho 4 điểm A(1 ; 1; 1), B(2 ; -1 ; 3), C(2 ; 1; 1) và D(3 ; 0 ; 2)
a. Chứng minh A, B, D, C đồng phẳng
b. Cho E(1 ; 3 ; 3). Chứng minh EA$\perp$(ABC). Tính thể tích tứ diện E.ABC
c. Tính khoảng cách từ B đến (ACE)

Bài 10. Cho 4 điểm A(2 ; -1 ; 3), B(1 ; 3 ; -2), C(-1 ; 2 ; 3) và D(0 ; m ; p). Xác định m và p để 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự tạo thành hình bình hành

Bài 11. Cho 2 điểm A(-2 ; 1 ; 2) và B(1 ; -2 ; 2)
a. Chứng minh OAB là tam giác vuông cân
b. Tìm M thuộc Ox nhìn đoạn AB dưới một góc vuông
c. Tìm tập hợp những điểm N thuộc mp(Oxy) nhìn đoạn AB dưới một góc vuông.

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG PP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu1: Trong không gian *Oxyz* , cho $\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$. Tìm tọa độ của $\vec{x}$

A. $\vec{x} = (2;3;-4)$. B. $\vec{x} = (-2;-3;4)$. C. $\vec{x} = (0;3;-4)$. D. $\vec{x} = (2;3;0)$.

Câu 2: Trong không gian Oxyz cho điểm M(1;2;3) Tìm tọa độ điểm*M'* là hình chiếu của M trên trục Ox

A. M'(0;1;0). B.M'(0;0;1). C. M'(1;0;0). D. M'(0;2;3).

Cu 3: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I(1 ; 0 ; -2) , bán kính R = $\sqrt{2}$

A. *(S) :(x- 1)*^{2} + *y*^{2} + *(z + 2)*^{2} = 2.

B. (S): (x- 1)^2 + *y*^{2} + *(z- 2)*^{2} = 2.

C. (S): (x- 1)^2 + *y*^{2} + *(z- 2)*^{2} = 2.

D. (S): (x+ 1)^2 + *y*^{2} + *(z – 2)*^{2} = 2.

Câu 4 : Cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 1 = 0$.Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n} = (1;2;3)$. B. $\vec{n} = (1;-2;3)$. C. $\vec{n} = (1;3;-2)$. D. $\vec{n} = (1;-2;-3)$.

Câu 5: Cho mặt phẳng $(P) 2x - 3y + z - 10 = 0$. Trong các điểm sau, điểm nào năm trên mặt phẳng (P)

A. $(2;2;0)$ **B.** $(2;-2;0)$ **C.** $(1;2;0)$ **D.** $(2;1;2)$

Câu 6: Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(1;2;-1) và nhận vec tơ $\vec{u}(1;2;3)$ làm vec tơ chỉ phương

A. $(d)\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$.

B. $(d)\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$.

C. $(d)\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$.

D. $(d)\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

Câu 7: Viết phương trình đường thẳng đi qua A(4;2;-6) và song song với đường thẳng : $d : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{1}$

A. $\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = -6 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = -3 - t \end{cases}$. C $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = -3 + t \end{cases}$. D $\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 6 + t \end{cases}$.

Câu 8:Trong không gian Oxyz , cho đường thẳng d : $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-4}{1}$ trong các mặt phẳng sau đây, mặt phẳng nào song song với đường thẳng (d) ?

A. $5x - 3y + z - 2 = 0$ .B. $x + y + 2z + 9 = 0$ .C. $5x - 3y + z + 2 = 0$ D. $5x - 3y + z - 9 = 0$

Câu 9: Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 3z - 7 = 0$ và $(\beta): -2x + 4y - 6z + 3 = 0$ .Trong các khẳng định sau đây khẳng định nào là đúng ?

A. $(\alpha),(\beta)$ trùng nhau. B. $(\alpha)//(\beta)$. C .(α) cắt (β) . D. (α) cắt và vuông góc (β).

Câu 10 Viết phương trình (α) đi qua ba điểm A(8;0;0), B(0;-2;0), C(0;0;4).

A. $\frac{x}{8}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{4}=0.$ B $\frac{x}{4}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1.$

C. $x-4y+2z=0$. D $x-4y+2z-8=0$

Câu 11 Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A.Phương trình của mặt phẳng (Oxy) là: $z=0$

B.phương trình của mặt phẳng (Oxy) là: $y=0$

C.phương trình của mặt phẳng (Oxy) là: $x=0$

D.phương trình của mặt phẳng (Oxy) là: $x+y=0$

Câu 12

Cho đường thẳng (d) : $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2+2t \\ z=1-t \end{cases}$ .Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d.

A. $x+2y-z+6=0$

B. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$

D. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$

Câu 13: Cho vecto $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$ .Tìm tọa độ điểm M ?

A. $M(2;5;3)$. B. $M(-2;-5;-3)$. C. $M(2;-5;3)$. D. $M(-2;5;-3)$.

Câu 14: Trong không gian *Oxyz* cho $\vec{a}(3;-1;2);\vec{b}(4;2;-6)$ Tính tọa độ của vecto $\vec{a}+\vec{b}$

A. $\vec{a}+\vec{b}=(1;3;-8)$. B. $\vec{a}+\vec{b}=(7;1;-4)$. C. $\vec{a}+\vec{b}=(-1;-3;8)$. D. $\vec{a}+\vec{b}=(-7;-1;4)$.

Câu 15. Trong không gian *Oxyz* cho *M(1;-2;4)* và *N(-2;3;5)*. Tính tọa độ của $\overrightarrow{MN}$

A. $\overrightarrow{MN}$ *=(-3;5;1). B.* $\overrightarrow{MN}$ *= (3;-5;-1). C.* $\overrightarrow{MN}$ *= (-1;1;9). D.* $\overrightarrow{MN}$ *= (1;-1;-9)*

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1) Phương trình mặt cầu (S) tâm I(a ; b; c), bán kính R:

$+(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

+Phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu tâm

I(a ; b; c), bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

2) Giao của mặt cầu và mặt phẳng - Phương trình đường tròn:

Cho mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ *với tâm I(a ; b; c), bán kính R và mặt phẳng*

(P): Ax + By + Cz + D = 0.

+ d(I, (P)) > R: (P) và (S) không có điểm chung

+ d(I, (P)) = R: (P) tiếp xúc (S)tại H (H là hình chiếu vuông góc của I lên mp(P))

+ d(I, (P)) < R: (P) cắt (S) theo đường tròn có tâm H là hình chiếu của I xuống (P), bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$

(H là hình chiếu vuông góc của I lên mp(P))

B. KỸ NĂNG.

- Tìm tâm và bán kính các mặt cầu.
- Viết phương trình mặt cầu
- Tìm giao của mặt cầu với mặt phẳng

C. BÀI TẬP.

Bài 1. Tìm tâm và bán kính các mặt cầu sau:

a. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$ b. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y - 2z - 4 = 0$

c. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 10 = 0$ d. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12x - 6y + 30z - 5 = 0$

Bài 2. Viết phương trình mặt cầu có

b. Tâm I(0; 3; –2) và đi qua điểm A(2; 1; –3)

c. Đường kính AB với A(3; –2; 1) và B(1; 2; –3).

Bài 3. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD nếu

a. A(1; 1; 0), B(0; 2; 1), C(1; 0; 2), D(1; 1; 1) b. A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6)

Bài 4. Viết phương trình mặt cầu có

a. Tâm thuộc mặt phẳng Oxz và đi qua các điểm A(1; 2; 0), B(–1; 1; 3), C(2; 0; –1).

b. Có tâm I(–5; 1; 1) và tiếp xúc với mặt cầu (T): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$.

Bài 5: Xác định tâm và bán kính của đường tròn (C): $\begin{cases}2x-2y-z+9=0\\ x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-86=0\end{cases}$

Bài 6: Cho (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2my - 4mz + 5m^2 + 2m + 3 = 0$

a) Định m để (S) là mặt cầu. Tìm tập hợp tâm I của (S)

b) Định m để (S) nhận mặt phẳng (P): x + 2y + 3 = 0 làm tiếp diện

c) Định m để (S) cắt d: $\begin{cases}x=t+5\\ y=2t\\ z=-t+5\end{cases}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$

Bài 7: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc Ox và tiếp xúc với hai mặt phẳng (Oyz) và (P): 2x + y - 2z + 2 = 0.

Bài 8. Trong không gian với hệ trục toạ độ Đề các vuông góc Oxyz, cho bốn điểm A(1;2;2), B(-1;2;1), C(1;6;-1), D(-1;6;2)

a. CMR: ABCD là tứ diện có các cặp cạnh đối bằng nhau. b. Tính khoảng cách giữa AB và CD.

c. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Bài 9. Cho điểm I(1;2;-2) và mặt phẳng (P): 2x + 2y + z + 5 = 0.

a. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho giao của (S) và mp (P) là đường tròn có chu vi bằng 8π

b. CMR. Mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng (Δ): 2x – 2y = 3 – z

c. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (CMN).

Bài 10. Trong không gian với hệ trục toạ độ Đề các vuông góc Oxyz cho hai đường thẳng (d_1) (d_2) có phương trình $(d_1):\begin{cases}x=2t\\ y=t\\ z=4\end{cases}$ $(d_2):\begin{cases}x+y-3=0\\ 4x+4y+3z-12=0\end{cases}$

a. CMR: (d_1) và (d_2) chéo nhau. b. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

c. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

Bài 11. Trong không gian với hệ trục toạ độ Đề các vuông góc Oxyz cho hai mặt phẳng song song có phương trình tương ứng là: $(P_1): 2x - y + 2z - 1 = 0$ $(P_2): 2x - y + 2z + 5 = 0$

Và điểm A(-1;1;1) nằm trong khoảng giữa hai mặt phẳng đó. Gọi (S) là mặt cầu qua A và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P_1), (P_2)

a.CMR: Bán kính của hình cầu (S) là một hằng số và tính bán kính đó.

b.Gọi I là tâm hình cầu (S). CMR: I thuộc một đường tròn cố định xác định tâm và tính bk đường tròn đó.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(-4;5;-3)$ và $R = 7$ B. $I(4;-5;3)$ và $R = 7$

C. $I(-4;5;-3)$ và $R = 1$ <u>D.</u> $I(4;-5;3)$ và $R = 1$

Câu 2. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + \frac{50}{9} = 0$$

Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

<u>A</u>. $I(1;1;2)$ và $R = \frac{2}{3}$ B. $I(-1;-1;-2)$ và $R = \frac{2}{3}$

C. $I(1;1;2)$ và $R = \frac{4}{9}$ D. $I(-1;-1;-2)$ và $R = \frac{4}{9}$

Câu 3. Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(1;1;-2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x - y - 2z = 3$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm M tiếp xúc với mặt phẳng (α).

A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + \frac{16}{3} = 0$ B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + \frac{16}{3} = 0$

<u>C.</u> $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + \frac{14}{3} = 0$ D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + \frac{14}{3} = 0$

Câu 4. Mặt cầu tâm $I(2;2;-2)$ bán kính R tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - 3y - z + 5 = 0$. Bán kính R bằng:

A. $\frac{5}{\sqrt{13}}$ B. $\frac{4}{\sqrt{14}}$ C. $\frac{4}{\sqrt{13}}$ <u>D</u>. $\frac{5}{\sqrt{14}}$

Câu 5. Xác định tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.

<u>A</u>. I(4; –1; 0), R = 4 B. I(–4; 1; 0), R = 4 C. I(4; –1; 0), R = 2 D. I(–4; 1; 0), R = 2

Câu 6. Viết phương trình mặt cầu có tâm I(0; 3; –2) và đi qua điểm A(2; 1; –3)

A. (S): $x^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = 3$ <u>B</u>. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0$

C. (S): $x^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = 6$ D. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 10 = 0$

Câu 7. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I(1; 5; 2) và tiếp xúc với mặt phẳng (P):$2x + y + 3z + 1=0$

A. (S): $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 + (z - 2)^2 = 16$ B. (S): $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 + (z - 2)^2 = 12$

<u>C</u>. (S): $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 + (z - 2)^2 = 14$ D. (S): $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 + (z - 2)^2 = 10$

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(2;1;1) và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z + 1 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

<u>A</u>. (S): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$ B. (S): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$

C. (S): $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$ D. (S): $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$

Câu 9. Cho hai điểm A(2; 4; 1), B(–2; 2; –3). Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$ B. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$

C. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$ D. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 36$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm I(2; 1; 1) và mặt phẳng (P): $2x + y + 2z + 2 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính R= 1. Phương trình của mặt cầu (S) là

A. (S): $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$ B. (S): $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$

C. (S): $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$ D. (S): $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1; –2; 3) và đường thẳng d: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với d.

A. (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 49$ B. (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 7$

C. (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$ D. (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Biết rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn (C).

A. (3; 0; 2) và r = 2 B. (2; 3; 0) và r = 2 C. (2; 3; 0) và r = 4 D. (3; 0; 2) và r = 4

Câu 13. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + z - 1 = 0$. Xác định tọa độ tâm I của mặt cầu.

A. $I\left(1;2;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $I(2;4;1)$. **C.** $I(-2;-4;-1)$. **D.** $I\left(-1;-2;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 14. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm *I*(-1;2;1) và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x - 2y - 2z - 2 = 0$.

A. (S): $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$. **B.** $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

C. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$. **D.** $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z - 10 = 0;$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2017 = 0.$ Viết phương trình các mặt phẳng (Q) song song với (P) và tiếp xúc với (S).

A. $(Q_1): x + 2y - 2z + 25 = 0$ và $(Q_2): x + 2y - 2z + 1 = 0.$

B. $(Q_1): x + 2y - 2z + 31 = 0$ và $(Q_2): x + 2y - 2z - 5 = 0.$

C. $(Q_1): x + 2y - 2z + 5 = 0$ và $(Q_2): x + 2y - 2z - 31 = 0.$

D. $(Q_1): x + 2y - 2z - 25 = 0$ và $(Q_2): x + 2y - 2z - 1 = 0.$

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0, (Q): x - y + z + 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1},$ một phương trình mặt cầu có tâm thuộc *d* tiếp xúc với (P) và cắt (Q) theo một đường tròn có chu vi 2π là:

A. $x^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 4$ **B.** $(x+2)^2 + (y+5)^2 + (z-2)^2 = 4$

C. $(x+3)^2 + (y-5)^2 + (z-7)^2 = 4$ **D.** $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 4$

Câu 17. Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S)?

A. $6x+2y+3z=0$ **B.** $2x+3y+6z\text{-}5=0$

C. $6x+2y+3z\text{-}55=0$ **D.** $x+2y+2z\text{-}7=0$

Câu 18. Cho mặt phẳng $(P):2x+2y+z-3=0$ và mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x\text{-}4y\text{-}4z=0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C). Tâm của đường tròn (C) là:

A. $\left(\frac{1}{9};\frac{8}{9};\frac{13}{9}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{9};\frac{8}{9};\frac{13}{9}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{9};-\frac{8}{9};\frac{13}{9}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{9};-\frac{8}{9};-\frac{13}{9}\right)$

Câu 19. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ và điểm $I(1;2;3)$. Gọi K là điểm đối xứng với I qua d. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm K cắt d tại hai điểm A và B, biết đoạn AB=4 là.

A. (S):$\left(x-\frac{1}{9}\right)^2+\left(y+\frac{8}{9}\right)^2+\left(z+\frac{41}{9}\right)^2=\frac{185}{9}$.

B. B. (S):$\left(x+\frac{1}{9}\right)^2+\left(y+\frac{8}{9}\right)^2+\left(z+\frac{41}{9}\right)^2=\frac{185}{9}$.

C. $(S):\left(x-\frac{1}{9}\right)^2+\left(y-\frac{8}{9}\right)^2+\left(z+\frac{41}{9}\right)^2=\frac{185}{9}$.

D. (S):$\left(x+\frac{1}{9}\right)^2+\left(y-\frac{8}{9}\right)^2+\left(z+\frac{41}{9}\right)^2=\frac{185}{9}$.

Câu 20. Phương trình mặt cầu đường kính *AB* biết *A*(2; -4; 6), *B*(4; 2; -2) là?

A. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=26.$ B. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=26.$

C. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=26.$ D. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=26.$

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng:

* $\vec{n}\neq\vec{0}$ là VTPT của mp(α) nếu: $\vec{n}\perp(\alpha)$

Chú ý 1. Hai vectơ không cùng phương $\vec{a},\vec{b}$ có giá chứa trong hoặc song song với (α). Khi đó: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ là vectơ pháp tuyến của (α)

Nhận xét: Một mp có vô số VTPT cùng phương với nhau.

2) Phương trình tổng quát của mặt phẳng: Ax + By + Cz + D = 0 ($A^2+B^2+C^2\neq0$)

+ Mặt phẳng có phương trinh: Ax + By + Cz + D = 0 thì có VTPT: $\vec{n} = (A;B;C)$

+ Mặt phẳng qua M(x_0 ; y_0 ; z_0) và có một VTPT là $\vec{n} = (A;B;C)$ thì có pt:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

+ Phương trình mp cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm (a ; 0 ; 0), (0 ; b ; 0), (0 ; 0; c) là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$ (phương trình theo đọan chắn)

+ MpOxy: z = 0 + Mp(Oyz): x = 0 + Mp(Ozx): y = 0

3) Khoảng cách từ $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ đến (P) được tính theo công thức : $d\left(M;(P)\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

3) Phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của hai mp (Ptrình chùm mặt phẳng):

Ax+By + Cz +D = 0 và A'x+B'y+ C'z + D'=0 là

m(Ax + By + Cz + D) + n(A'x + B'y + C'z + D') = 0 (m, n không đồng thời bằng 0)

B. KỸ NĂNG.

- Rèn kĩ năng viết PT mặt phẳng biết vecto pháp tuyến và đi qua điểm M.
- Rèn kĩ năng viết PT mặt phẳng biết cặp vecto chỉ phương và điểm M.

C. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

__Phương pháp__: Để viết phương trình của mặt phẳng (P) ta thường tìm 1 điểm $M(x_0;y_0;z_0) \in (P)$ và 1 VTPT $\vec{n} = (A;B;C)$ của mặt phẳng (P): khi đó (P): $A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0$

Nhận xét 1: Để tìm VTPT của mp ta thường sử dụng chú ý 1

Nhận xét 2. Cho (P): Ax + By + Cz + D = 0. Nếu (P)//(Q) thì (Q): Ax + By + Cz + D' = 0 $\left(D' \neq D\right)$

Bài 1: Viết PT mp (P) qua A(-2 ; -1 ; 0) và song song với mp (Q): x - 3y + 4z + 5 = 0

Bài 2: Viết PT mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a) Qua ba điểm A(1 ; -1; 2), B(2 ; 3 ; 0) và C(-2 ; 2 ; 2)

b) (P) Là mặt trung trực của AB

c) Qua C và vuông góc với hai mặt phẳng (Q): x + y - 2z = 0 và (R): x - z + 3 = 0

Bài 3: Cho A(1 ; -1 ; 3), B(3 ; 0 ; 1) và C(0 ; 4 ; 5)

a) Viết phương trình mp(ABC)

b) Viết phương trình mp qua O, A và vuông góc với (Q): x + y + z = 0

c) Viết phương trình của mặt phẳng chứa Oz và qua điểm P(2 ; -3 ; 5)

Bài 4. Trong không gian Oxyz, M(-4 ; -9 ; 12) và A(2 ; 0 ; 0). Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M, A và cắt Oy, Oz lần lượt tại B và C sao cho OB = 1 + OC (B, C khác O)

Bài 5: Viết phương trình của mặt phẳng (P) qua F(4 ; -3 ; 2) và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng: (Q): x - y + 2z - 3 = 0 và (T): 2x - y - 3z = 0

Bài 6. Viết phương trình của mặt phẳng (P) qua E(3 ; 4 ; 1) và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng:(R): 19x - 6y - 4z + 27 = 0 và (K): 42x - 8y + 3z + 11 = 0

Bài 7. Viết phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng: (P): x - 2y = 0, (Q): 3x - 2y + z - 3= 0 và vuông góc với mặt phẳng: (R): x - 2y + z + 5 = 0

Bài 8. Cho hai mặt phẳng: (P): 2x - y + z = 0, Q): x - 3y + 2 = 0

a) Viết phương trình của mặt phẳng (α) qua giao tuyến của (P), (Q) và song song với Ox.

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) qua giao tuyến của xOy và (Q) và tạo với 3 mặt phẳng tọa độ một tứ diện có thể tích bằng $\frac{125}{36}$.

Bài 9. (ĐH- 2010D Phần riêng chương trình chuẩn). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai mặt phẳng (P) : x + y + z – 3 = 0 ; (Q) : x – y + z – 1 = 0. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O tới (R) bằng 2.

Bài 10. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua G(-2 ; 3 ; 5) và cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC (A, B, C không trùng với gốc tọa độ)

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x-3y+4z=2016$. Véctơ nào sau đây là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

A. $\vec{n}=(-2;-3;4)$ **B.** $\vec{n}=(-2;3;4)$ **<u>C</u>.** $\vec{n}=(-2;3;-4)$ **D.** $\vec{n}=(2;3;-4)$

Câu 2: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x-3y+z-1=0$. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1;2;1)$ đến mặt phẳng (P).

A. $5\sqrt{3}$ **B**. $\frac{3\sqrt{5}}{3}$ **<u>C</u>**. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ **D**.$3\sqrt{5}$

Câu 3: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(-3;2;-3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-1}$ và $d_2: \frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5}{3}$. Phương trình mặt phẳng chứa d_1 và d_2 có dạng:

A. $5x+4y+z-16=0$ **<u>B</u>.** $5x-4y+z-16=0$

C. $5x-4y-z-16=0$ **D.** $5x-4y+z+16=0$

Câu 4: Phương trình tổng quát của mặt phẳng qua điểm $M(3;0;-1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $x+2y-z+1=0$ và $2x-y+z-2=0$ là:

<u>A.</u> $x-3y-5z-8=0$ **B.** $x-3y+5z-8=0$ **C.** $x+3y-5z+8=0$ **D.** $x+3y+5z+8=0$

Câu 5: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+y+1=0, (Q): x-y+z-1=0$. Viết phương trình đường thẳng (d) giao tuyến của 2 mặt phẳng.

<u>A</u>. $(d): \frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-3}$ **B.** $(d): \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{-3}$

C. $(d): \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$ **D.** $(d): \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{-z}{3}$

Câu 6: Cho hai đường thẳng $(D_1): \begin{cases} x=3-2t \\ y=1+t \\ z=-2-t \end{cases}; (D_2): \begin{cases} x=m-3 \\ y=2+2m; \\ z=1-4m \end{cases} t, m \in \mathbb{R}$

Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua (D_1) và song song với (D_2)

A. $x+7y+5z-20=0$ **<u>B</u>.** $2x+9y+5z-5=0$

C. $x-7y-5z=0$ **D.** $x-7y+5z+20=0$

Câu 7: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2;0;1)$ và hai mặt phẳng $(P): x-y+2z-1=0$ và $(Q): 3x-y+z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $(\alpha): -3x+5y-4z+10=0$ **B.** $(\alpha): -3x-5y-4z+10=0$

C. $(\alpha): x-5y+2z-4=0$ **D.** $(\alpha): x+5y+2z-4=0$

Câu 8: Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;3), B(1;-2;1)$ và song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x=-1+t \\ y=2t \\ z=-3-2t \end{cases}$.

A. $(P): 10x-4y-z-19=0$ **B.** $(P): 10x-4y+z-19=0$

C. $(P): 10x-4y-z+19=0$ **D.** $(P): 10x+4y+z-19=0$

Câu 9: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;3;-5)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của AB.

A. $y-3z+4=0$ **B.** $y-3z-8=0$ **C.** $y-2z-6=0$ **D.** $y-2z+2=0$

Câu 10: Cho hai mặt phẳng $(P): 2x+my+2mz-9=0$ và $(Q): 6x-y-z-10=0$. Để mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) thì giá trị của m là:

A. $m=3$ **B.** $m=6$ **C.** $m=5$ **D.** $m=4$

Câu 11: Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua $M(0;-1;4)$, nhận $[\vec{u},\vec{v}]$ làm vectơ pháp tuyến với $\vec{u}=(3;2;1)$ và $\vec{v}=(-3;0;1)$ là cặp vectơ chỉ phương là:

A. $x+y+z-3=0$ **B.** $x-3y+3z-15=0$ **C.** $3x+3y-z=0$ **D.** $x-y+2z-5=0$

Câu 12. Góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha): 8x-4y-8z+1=0; (\beta): \sqrt{2}x-\sqrt{2}y+7=0$ là:

A. $\frac{\pi}{6}$R **B.** $\frac{\pi}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{3}$ **D.** $\frac{\pi}{2}$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$ và $(P): 2x+y-z=0.$ Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng *d* và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. *(Q):* $2x-y-z=0.$ **B.** *(Q):* $x-2y+1=0.$

C. *(Q):* $x+2y+z=0.$ **D.** *(Q):* $x-2y-1=0.$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+1=0$ và hai điểm $A(1;-2;3), B(3;2;-1).$ Viết Phương trình mặt phẳng (Q) qua A,B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $(Q): 2x+2y+3z-7=0.$ **B.** $(Q): 2x-2y+3z-7=0.$

C. $(Q): 2x+2y+3z-9=0.$ **D.** $(Q): x+2y+3z-7=0.$

Câu 15. Mặt phẳng qua 3 điểm $A(1;0;0), B(0;-2;0), C(0;0;3)$ có phương trình.

A. $x-2y+3z=1.$ **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=6.$ **C.** $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=1.$ **D.** $6x-3y+2z=6.$

Câu 16. Phương trình mặt phẳng chứa $d_1: \frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{3}$ và $d_2: \frac{x+1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}$ có dạng.

A. $3x+2y-5=0.$ **B.** $6x+9y+z+8=0.$

C. $-8x+19y+z+4=0.$ **D.** Tất cả đều sai.

Câu 17. Cho hai mặt phẳng (P): $3x+3y-z+1=0$; (Q): $(m-1)x+y-(m+2)z-3=0$.
Xác định m để hai mặt phẳng *(P), (Q)* vuông góc với nhau.

A. $m=\frac{-1}{2}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{-3}{2}$.

Câu 18. Viết phương trình mặt phẳng chứa 2 điểm A(1;0;1) và B(-1;2;2) và song song với trục Ox.

A. x + 2z – 3 = 0. **B.** y – 2z + 2 = 0. **C.** 2y – z + 1 = 0. **D.** x + y – z = 0.

Câu 19. Gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại 3 điểm *M* (8; 0; 0), *N*(0; -2; 0) , *P*(0; 0; 4). Phương trình của mặt phẳng (α) là?

A. $\frac{x}{8}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{4}=0$. **B.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$. **C.** $x-4y+2z=0$. **D.** $x-4y+2z-8=0$.

Câu 20. Mặt phẳng nào sau đây chứa trục Oy ?

A. -2x – y = 0. **B.** -2x + z =0. **C.** –y + z = 0. **D.** -2x – y + z =0.

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1) Các dạng phương trình đường thẳng:

-Phương trình tham số: $\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \\ z=z_0+a_3t \end{cases}$, với $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng.

-Phương trình chính tắc: $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$. $(a_1.a_2.a_3\neq 0)$

2) Vị trí tương đối, tìm giao điểm của hai đường thẳng:

Cho đường thẳng Δ_1 qua điểm $M_1(x_1;y_1;z_1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(a_1;a_2;a_3)$ và đường thẳng Δ_2 qua điểm $M_2(x_2;y_2;z_2)$ có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(b_1;b_2;b_3)$. Khi đó:

- Δ_1 và Δ_2 đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}=0$
- Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+a_1t=x_2+b_1t' \\ y_1+a_2t=y_2+b_2t' \\ z_1+a_3t=z_2+b_3t' \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(t_0;t_0')$ hoặc

$\begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}=0 \\ \left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]\neq\vec{0} \end{cases}$. Khi đó để tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng thì thay t_0 và phương trình Δ_1 hoặc thay t_0' vào phương trình Δ_2

- $\Delta_1//\Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và $M_1\notin\Delta_2$ hoặc $\begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=\vec{0} \\ M_1\notin\Delta_2 \end{cases}$
- $\Delta_1\equiv\Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và $M_1\in\Delta_2$ hoặc $\begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=\vec{0} \\ M_1\in\Delta_2 \end{cases}$

- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương và hệ $\begin{cases} x_1 + a_1 t = x_2 + b_1 t' \\ y_1 + a_2 t = y_2 + b_2 t' \\ z_1 + a_3 t = z_2 + b_3 t' \end{cases}$ vô nghiệm hoặc $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$

B. KĨ NĂNG

- Rèn kĩ năng lập PT đường thẳng biết VTCP và một điểm.
- Lập PT đường thẳng qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng.

C. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Bài 1: Lập phương trình của đường thẳng d đi qua M(2; 3; -6) và song song với đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$

Bài 2: Cho A(2; 3; 5) và mặt phẳng (P): 2x + 3y - 17 = 0

a) Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P)

b) Tìm giao điểm của d với trục Oz.

Bài 3. Cho (d_1) : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-t \\ z = 3+4t \end{cases}$; $(d_2): \frac{x-1}{-13} = \frac{y}{4} = \frac{z+2}{11}$ và điểm A(1 ; 0 ; -3). Viết phương trình đường thẳng (d) qua A vuông góc với (d_1) và (d_2).

Bài 4. Cho điểm A(2 ;1 ; -2), đường thẳng (d) : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{3}$, mặt phẳng $(P): x - y - z - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (d’) qua A, song song với (P) và vuông góc với đường thẳng (d)

Bài 5. Cho M(1 ; 1 ; -3) và đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 3+3t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua M vuông góc và cắt (d).

Bài 6. Cho (P) : x - 2y + z – 5 = 0, đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 2-t \\ y = -1+t \\ z = 3+2t \end{cases}; (d_2): \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) chứa trong mp(P) và cắt (d_1), (d_2).

Bài 7. Cho A(2 ; -1 ; -1) đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$; $(d_2): \begin{cases} x = 2k \\ y = 1+k \\ z = k \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua A vuông góc với (d_1) và cắt (d_2).

Bài 8. Cho (P): x - y + z – 3 = 0, đường thẳng $(d): \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2-t \\ z = -1+2t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) Chứa trong (P) vuông góc với (d) và đi qua giao điểm của (P) với (d).

Bài 9. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d: $\frac{x-1}{3}=\frac{-y+3}{1}=\frac{z+4}{2}$ và song song với đường thẳng d': $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}$

Bài 10. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}$ và vuông góc với mp(Q): 2x - y - z = 0

Bài 11. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm A(0;1;1), vuông góc với đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$ và cắt đường thẳng: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}$

Bài 12. Lập phương trình đường thẳng d:

a) d qua A(1 ; 0 ; 3) và cắt hai đường thẳng: d_1: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ và d_2: $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{-3}$

b) d vuông góc với (P): x - y - z - 3 = 0 và cắt hai đường thẳng:

d_1: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{3}$ và d_2: $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$

c) d là hình chiếu của $d_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$ xuống mặt phẳng: (P): x - y - z + 4 = 0

Bài 13. Lập phương trình đường thẳng d qua A(2 ; -5 ; 6), cắt Ox và song song với mp(P): x + 5y - 6z = 0

Bài 14. Tìm tọa độ hình chiếu của điểm A(1 ; -2 ; 1) lên mp(P): x + 5y - 6z = 0

Bài 15 Lập phương trình tham số của đường thẳng d cắt hai đường thẳng:

$\Delta_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{2};\Delta_2:\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{5}$ và song song với đường thẳng: d': $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-2}$

Bài 16. Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng:

$$d_1:\begin{cases} x=3-4t \\ y=-2+t \\ z=-1+t \end{cases} ;\quad d_2:\begin{cases} x=-6t \\ y=1+t \\ z=2+2t \end{cases}$$

Bài 17 Lập phương trình đường thẳng d đi qua A(-4 ; -2 ; 4), cắt và vuông góc với đường thẳng: $d':\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{4}$

Bài 18 Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng: $\Delta_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{2};\Delta_2:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{5}$

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa Δ_1 và song song với Δ_2

b) Cho điểm M(2 ; 1 ; 4). Tìm tọa độ điểm H $\in\Delta_2$ sao cho độ dài MH nhỏ nhất.

Bài 19. Trong không gian cho hai điểm A(2 ; 3 ; 0), B(0 ; - 2 ; 0) và đường thẳng d: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$

a) Lập phương trình mp(P) qua A và vuông góc với d.

b) Tìm tọa độ N thuộc mặt phẳng (Q): x - 2y + z - 3 = 0 sao cho NA + NB nhỏ nhất.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $(d_1):\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1-y}{m}=\dfrac{2-z}{3}$ và $(d_2):\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Tìm tất cả giá trị thức của m để $(d_1)\perp(d_2)$.

A. $m=5$ **B.** $m=1$ **C.** $m=-5$ **D.** $m=-1$

Câu 2: Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(1;-1;2)$ và vuông góc với $mp(\beta):2x+y+3z-19=0$ là:

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$

C. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$ **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$

Câu 3: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+8}{4}=\dfrac{5-y}{2}=\dfrac{-z}{-1}$. Khi đó vectơ chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là:

A. $(4;2;-1)$ **B.** $(4;2;1)$ **C.** $(4;-2;1)$ **D.** $(4;-2;-1)$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=0\\y=t\\z=2-t\end{cases}$. Vectơ nào dưới đây là vecto chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\overrightarrow{u_1}=(0;0;2)$ **B.** $\overrightarrow{u_1}=(0;1;2)$ **C.** $\overrightarrow{u_1}=(1;0;-1)$ **D.** $\overrightarrow{u_1}=(0;1;-1)$

Câu 5: Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(2;-1;1)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm K hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng Δ.

A. $K\left(\dfrac{17}{12};-\dfrac{13}{12};\dfrac{2}{3}\right)$ **B.** $K\left(\dfrac{17}{9};-\dfrac{13}{9};\dfrac{8}{9}\right)$ **C.** $K\left(\dfrac{17}{6};-\dfrac{13}{6};\dfrac{8}{6}\right)$ **D.** $K\left(\dfrac{17}{3};-\dfrac{13}{3};\dfrac{8}{3}\right)$

Câu 6: Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $(d):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{1}$ và $(d'):\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{2}$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng (d) và (d') là:

A. Chéo nhau **B.** Song song với nhau **C.** Cắt nhau **D.** Trùng nhau

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC với $A(1;1;1), B(-1;1;0), C(3;1;2)$. Chu vi của tam giác ABC bằng:

A. $4\sqrt{5}$ **B.** $2+2\sqrt{5}$ **C.** $3\sqrt{5}$ **D.** $4+\sqrt{5}$

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 3x-4y+2z-2016=0$. Trong các đường thẳng sau đường thẳng song song với mặt phẳng (P).

A. $d_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{1-z}{-1}$ **B.** $d_2: \frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1}$

C. $d_3: \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{1-z}{4}$ **D.** $d_4: \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-1}{2}$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng Δ có phương trình :

$$\frac{x-10}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{1}$$

Xét mặt phẳng (*P*) : 10*x* + 2*y* + *mz* + 11 = 0, *m* là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của *m* để mặt phẳng (*P*) vuông góc với đường thẳng Δ.

A. m = -2 **B.** m = 2. **C.** m = -52 **D.** m = 52

Câu 10: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$ và $d_1: \frac{x-3}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. Xét vị trí tương đối giữa d và d_1.

A. Song song. B. Trùng nhau. C. Chéo nhau. D. Cắt nhau tại I.

Câu 11: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 3x-z+2=0$ và $(Q): 3x+4y+2z+4=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng (d).

A. $\vec{u}=(-4;-9;12)$ **B.** $\vec{u}=(4;3;12)$ **C.** $\vec{u}=(4;-9;12)$ **D.** $\vec{u}=(-4;3;12)$

Câu 12: Cho điểm $M(2;1;4)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}$. Tìm điểm H thuộc Δ sao cho MH nhỏ nhất.

A. $H(2;3;3)$ **B.** $H(3;4;5)$ **C.** $H(1;2;1)$ **D.** $H(0;1;-1)$

Câu 13: Khoảng cách giữa điểm $M(1;-4;3)$ đến đường thẳng $(\Delta): \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{2}$ là:

A. 6 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Câu 14: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;4;2), B(-1;2;4)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$. Tìm điểm M trên Δ sao cho $MA^2+MB^2=28$.

A. $M(-1;0;4)$ **B.** $M(1;0;4)$ **C.** $M(-1;0;-4)$ **D.** $M(1;0;-4)$

Câu 15: Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(1;2;-1) và nhận vec tơ $\vec{u}(1;2;3)$ làm vec tơ chỉ phương

A. $(d)\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-1+3t \end{cases}$.

B. $(d)\begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=-1+3t \end{cases}$.

C. $(d)\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=-1+3t \end{cases}$.

D. $(d)\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+3t \end{cases}$.

Câu 16. Viết phương trình đường thẳng đi qua A(4;2;-6) và song song với đường thẳng $:d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{1}$

A. $\begin{cases} x=-4-2t \\ y=2-4t \\ z=-6-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2-2t \\ y=1-4t \\ z=-3-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+4t \\ z=-3+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-4+2t \\ y=-2+4t \\ z=6+t \end{cases}$.

Câu 17.

Cho đường thẳng (d) : $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2+2t \\ z=1-t \end{cases}$ .Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d.

A. $x+2y-z+6=0$

B. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$

D. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $d_1:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=-2-2t \end{cases}$; $d_2:\begin{cases} x=2+t' \\ y=1-t' \\ z=1 \end{cases}$. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. Hai đường thẳng song song. **B.** Hai đường thẳng chéo nhau.

C. Hai đường thẳng cắt nhau. **D.** Hai đường thẳng trùng nhau

Câu 19. Trong không gian Oxyz, cho $(P): x+2y-z-1=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-2+t \end{cases}$

Đường thẳng d cắt (P) tại điểm M. Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với d và nằm trong mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 4t' \\ y = -2-2t'. \\ z = -3 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 4t' \\ y = 2-2t' \\ z = -3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 4t' \\ y = 2+2t' \\ z = -3 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 4t' \\ y = 2+2t' \\ z = 3 \end{cases}$

Câu 20. Cho đường thẳng $d:\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2-t \end{cases}$. Tìm phương trình đường vuông góc chung của d và trục Ox .

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2-t \\ z = t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

BÀI 5: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI
LOẠI 1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

Phương pháp: Cho hai mặt phẳng (P) : Ax + By + Cz + D = 0 và (Q): A’x + B’y + C’z + D’ = 0. Khi đó:

- (P)//(Q) $\Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$
- $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$
- (P) cắt (Q) $\Leftrightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ hoặc $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ hoặc $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$

Chú ý . $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$

LOẠI 2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG VÀ MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng: Tìm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ trên đường thẳng (d) và VTCP $\vec{u}$ = (a; b; c) của (d). Tìm $M'_0(x'_0;y'_0;z'_0)$ trên (d’) và VTCP $\vec{u'}$ = (a’; b’; c’) của (d’)

(d) và (d’) đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0} = 0$

(d) và (d’) cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0} = 0 \\ \left[\vec{u},\vec{u'}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$

(d) // (d') $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u},\vec{u}'\right] = \vec{0} \\ M_0 \notin (d) \end{cases}$

(d) ≡ (d') $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u},\vec{u}'\right] = \vec{0} \\ M_0 \in (d) \end{cases}$

(d) và (d') chéo nhau $\Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{u}'\right].\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và của mặt phẳng:

Cho đường thẳng (d) qua M(x_0 ;y_0 ;z_0), có VTCP $\vec{u}$ = (a; b; c) và mặt phẳng (α): Ax + By + Cz + D = 0 có VTPT $\vec{n} = (A;B;C)$

<u>Cách 1.</u> (d) cắt (α) $\Leftrightarrow \vec{n}.\vec{u} \neq 0 \Leftrightarrow$ Aa +Bb +Cc ≠ 0

$(d)//(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 \neq 0 \end{cases}$

$(d) \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0 \end{cases}$

<u>Cách 2.</u> Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ x = y_0 + bt \\ x = z_0 + ct \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$ (*)

- Nếu (*) vô nghiệm thì $(d)//(\alpha)$
- Nếu (*) có nghiệm đúng với mọi t thì $(d) \subset (\alpha)$
- Nếu (*) có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0; z_0)$ thì (d) cắt (α) và nghiệm của hệ là tọa độ giao điểm.

Một số lưu ý:

1) Khi (d) cắt (α) để tìm tọa độ giao điểm của (d) và (α) ta giải hệ gồm các phương trình của (d) và (α)

2) Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α)
- ***Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm M và (Δ)⊥ (α)***
- ***Tìm giao điểm của (Δ) với (α) đó là điểm cần tìm.***

3) Tìm điểm M' đối xưng với điểm M qua mặt phẳng (α)
- ***Tìm hình chiếu vuông góc H của M trên (α) .***
- ***M' đối xứng với M qua (α) ⇔ H là trung điểm đoạn MM'.***

4) Tìm hình chiếu vuông góc H của M trên đường đương thẳng (d).
- ***Viết phương trình mặt phẳng (α) qua M và (α) ⊥ (d).***
- ***Tìm giao điểm của (α) với (d) , đó là tọa độ H cần tìm.(còn cách 2)***

5) Tìm điểm M' đối xứng với điểm M qua đường thẳng (d) .
- ***Tìm hình chiếu vuông góc H của M trên (d).***
- ***M' đối xứng với M qua (d) ⇔ H là trung điểm đoạn MM'.***

3. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG PP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Cho mặt phẳng (α): Ax + By + Cz + D = 0 và mặt cầu (S): $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ có tâm I(a; b; c) và bán kính R.

mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn nếu d(I, α) < R. Khi đó bán kính đường tròn giao tuyến bằng $r = \sqrt{R^2 - d^2(I,\alpha)}$

mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) khi và chỉ khi d(I, α) = R.

mặt phẳng (α) và (S) không giao nhau khi và chỉ khi d(I, α) > R.

B. KỸ NĂNG

- Rèn kĩ năng xét vị trí tương đối giữa các cặp mặt phẳng, cặp đường thẳng.
- Rèn kĩ năng tìm hình chiếu vuông góc của điểm lên đường thẳng, lên mặt phẳng.
- Rèn kĩ năng Cm các cặp đường thẳng vuông góc, song song...

C. BÀI TẬP.

Bài 1. Xét vị trí tương đối giữa các mặt phẳng cho bởi các phương trình sau :

1) $(P): 2x - y + z - 1 = 0; (Q): x - y + z - 5 = 0$

2) $(P): x - 2y + 3z - 4 = 0; (Q): -2x + 4y - 6z + 3 = 0$

3) $(P): x - 2y + 3z - 10 = 0; (Q): -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}z - 5 = 0$

Bài 2. Cho hai mặt phẳng $(P): mx + (10m - 8)y - 2z + 2 = 0$; $(Q): 2x + m^2y - z - 4 = 0$. Tìm m để

a) $(P)//(Q)$ b) (P) cắt (Q)

Bài 3: Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau, nếu chúng cắt nhau hãy tìm tọa độ giao điểm :

a) d: $\frac{x-1}{3} = y + 2 = z$ và d’ $\begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ x = 1 + t \end{cases}$

b) d: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases}$ và d’: $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{-5} = \frac{z+3}{-1}$

c) d: $\frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{3}$ và d’: $\frac{x-7}{6} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-5}{2}$

Bài 4. Xét vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng sau, nếu chúng cắt nhau hãy tìm tọa độ giao điểm của chúng:

a) d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-4}$ và (α) : 4x + 2y – 8z +2 = 0

b) d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{-1}$ và (α) : 2x + y – z –3 = 0

c) d: $\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ (α) : 3x + 5y – z – 2 = 0

Bài 5. Cho điểm M(2; 1; 4) và đường thẳng (d) :. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

a) Tìm hình chiếu vuông góc H của M trên (d). b) Tìm điểm M’ đối xứng với M qua (d).

Bài 6. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho N(2; -3; 1) và mặt phẳng (α) : x + 2y – z + 4 = 0.
a) Tìm hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng . b) Tìm điểm N' đối xứng với N qua (α).

Bài 7. Cho mặt phẳng (α) : 2x + y + x – 2 = 0 và đường thẳng (d) : $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-3}$.
a) Chứng minh (d) cắt (α) b) Tìm tọa độ giao điểm A của (d) với (α).
c) Viết phương trình đường thẳng (d') qua A vuông góc với (d) và nằm trong mp(P).

Bài 8. Cho (d) : $\frac{x-1}{m}=\frac{y+2}{2m-1}=\frac{z+3}{2}$, (α) : x +3y – 2z – 5 = 0. Định m để:
a). (d) cắt (α) b). (d) // (α) c). (d) ⊥ (α).

Bài 9. Cho $(d_1): \frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{3}$ và $(d_2)\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=-2+3t\end{cases}$.
a) Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau.
b) Lập phương trình tổng quát của mp(P) chứa (d_1) và (d_2)

Bài 10. Cho $(d_1)\begin{cases}x=3+2t\\y=1-t\\z=5-t\end{cases}$ và $(d_2)\begin{cases}x=3-4k\\y=-3+2k\\z=1-2k\end{cases}$.
a) Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song
b) Lập phương trình tổng quát của mp(P) chứa (d_1) và (d_2)

Bài 11. Cho $(d_1)\begin{cases}x=1\\y=-4+2t\\z=3+t\end{cases}$ và $(d_2)\begin{cases}x=3-3k\\y=1+2k\\z=-2\end{cases}$.
a)Chứng minh (d_1) và (d_2) chéo nhau.
b)Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2)

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Xác định m để hai mặt phẳng sau vuông góc (P): (2m – 1)x – 3my + 2z – 3 = 0 và (Q): mx + (m – 1)y + 4z – 5 = 0.
A. m = –2 V m = 2 B. m = –2 V m = 4 C. m = 2 V m = 4 D. m = –4 V m = 2

Câu 2. Xác định m ,n ,p để cặp mặt phẳng sau song song
(P) : 2x -3y -5z + p = 0, (Q) : (m+2) x + (n – 1)y +10z -2 = 0
A . m = 2 , n = -3 , p $\neq 5$ B . m = - 2 , n = 3 , p $\neq 1$
C . m = -6 , n = 7 , p $\neq 1$ D. m = 6 , n = -4 , p $\neq 2$

Câu 3. Điều kiện nào sau đây không đủ để cặp mặt phẳng
(P) : 2x - y -5z + p = 0, (Q) : (m+2) x + (n – 1)y +10z -2 = 0 không cắt nhau :
A. $m\neq -6$ B . $n\neq 3$ C . $m\neq -6, n\neq 3$ D. $p\neq 1$

Câu 4. Trong không gian Oxyz. Cho đường thẳng d : $\begin{cases}2x+3y+6z-10=0\\x+y+z+5=0\end{cases}$ và mặt phẳng (P) : mx + y + z + 5 = 0 . Với giá trị nào của m để đường thẳng d và mặt phẳng (P) song song .
A. m = 0 B. m = 1 C. m $\neq 0$ D. m$\neq 1$

Câu 5. Cho hai điểm A(1; –1; 2), B(2; 0; 1) và mặt phẳng (P): x + 2y – 2z – 5 = 0. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P).

A. (–2; –6; 8) B. (–1; –3; 4) C. (3; 1; 0) D. (0; 2; –1)

Câu 6. Cho mặt phẳng (P): 3x – 2y + z + 6 = 0 và điểm A(2; –1; 0). Tìm tọa độ hình chiếu của A lên mặt phẳng (P).

A. (1; –1; 1) B. (–1; 1; –1) C. (3; –2; 1) D. (5; –3; 1)

Câu 7. Cho điểm A(1; 1; 1) và đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 6-4t \\ y = -2-t \\ z = -1+2t \end{cases}$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d).

A. (2; –3; –1) B. (2; 3; 1) C. (2; –3; 1) D. (–2; 3; 1)

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm A(3; –4; 0), B(0; 2; 4), C(4; 2; 1). Tọa độ điểm D trên trục Ox, sao cho AD = BC.

A. D(0; 0; 0), D(6; 0; 0) B. D(–2; –4; 0), D(8; –4; 0)
C. D(3; 0; 0), D(0; 0; 3) D. D(–2; 0; 0), D(8; 0; 0)

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(2; –1; 1) và mặt phẳng (P): 2x – y + 2z + 2 = 0. Tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua mặt phẳng (P).

A. B(–2; 0; –4) B. B(–1; 3; –2) C. B(–2; 1; –3) D. B(–1; –2; 3)

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-1}$ và điểm A(–1; 0; 1). Tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua đường thẳng d.

A. (1; 2; 3) B. (1; 2; 1) C. (1; –2; 3) D. (0; 1; 1)

Câu 11. Cho đường thẳng d: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{3}$ và mặt phẳng (P): 3x + 5y – 2z – 4 = 0. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P).

A. (4; 0; 4) B. (0; 0; –2) C. (2; 0; 1) D. (–2; 2; 0)

Câu 12. Cho mặt phẳng (P): 2x – 2y + z + 3 = 0 và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 1 = 0$. Vị trí tương đối giữa (P) và (S) là

A. cắt nhau theo đường tròn có bán kính 2 B. cắt nhau theo đường tròn có bán kính 3
C. cắt nhau theo đường tròn có bán kính 4 D. chúng không cắt nhau

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng (Δ): $\frac{x-10}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{1}$ và mặt phẳng (P): 10x + 2y + mz + 11 = 0, m là tham số thực. Tìm giá trị của m để (P) vuông góc với (Δ).

A. m = –2 B. m = 2 C. m = –52 D. m = 52

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các điểm A(0; 1; 0), B(0; 1; 1), C(2; 1; 1), D(1; 2; 1). Thể tích của tứ diện ABCD bằng

A. 1/6 B. 1/3 C. 2/3 D. 4/3

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ và đường thẳng d: $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-1}$. Tìm tọa độ các giao điểm của d và (S).

A. (0, –1; 1) và (2; 2; 0) B. (0, 1; 1) và (2; –2; 0)
C. (0, –1; 1) và (2; –2; 0) D. (0, 1; –1) và (–2; 2; 0)

Câu 15. Tìm tọa độ điểm A trên đường thẳng d: $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{1}$ sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng

(P): $x - 2y - 2z + 5 = 0$ bằng 3. Biết rằng A có hoành độ dương.

A. (2; –1; 0) B. (4; –2; 1) C. (–2; 1; –2) D. (6; –3; 2)

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(0;1;2), B(2; –2;1),C(–2;0;1). Tìm tọa độ của điểm M thuộc mặt phẳng (α): $2x + 2y + z - 3 = 0$ sao cho MA = MB = MC.

A. (2; 1; 3) B. (–2; 5; 7) C. (2; 3; –7) D. (1; 2; 5)

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 36$ và mặt phẳng (P): $x + 2y + 2z + 18 = 0$. Đường thẳng d đi qua tâm mặt cầu và vuông góc với mặt phẳng (P), cắt mặt cầu tại các giao điểm là

A. (–1; –2; –2) và (2; 4; 4) B. (3; 6; 6) và (–2; –4; –4)

C. (4; 8; 8) và (–3; –6; –6) D. (3; 6; 6) và (–1; –2; –2)

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng d_1: $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}$, d_2: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc d_1 sao cho khoảng cách từ M đến d_2bằng khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P). Biết rằng M có hoành độ nguyên.

A. (–1; 0; –9) B. (0; 1; –3) C. (1; 2; 3) D. (2; 3; 9)

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm A (2; 1; 0), B(1;2;2), C(1;1;0) và mặt phẳng (P):
$x + y + z - 6 = 0$. Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

A. D(5/2; 1/2; –1) B. D(3/2; –1/2; 0) C. D(0; –1/2; 3/2) D. (–1; 1/2; 5/2)

Câu 20. Cho các điểm A (1; 0; 0), B (0; b; 0), C (0; 0; c), trong đó b> 0, c > 0 và mặt phẳng (P): $y - z + 1 = 0$. Xác định b và c, biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với (P) và khoảng cách từ điểm O đến (ABC) bằng1/3.

A. b = 2 và c = 2 B. b = 1/2 và c = 1/2 C. b = 2 và c = 1 D. b = 1 và c = 2

Câu 21. Cho đường thẳng Δ: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM với O là gốc tọa độ.

A. (–1; 0; 0) hoặc (1; 0; 0) B. (2; 0; 0) hoặc (–2; 0; 0)

C. (1; 0; 0) hoặc (–2; 0; 0) D. (2; 0; 0) hoặc (–1; 0; 0)

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng Δ_1: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và Δ_2:
$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

A. (6; 3; 3), (3; 0; 0) B. (4; 1; 1), (7; 4; 4) C. (3; 0; 0), (7; 4; 4) D. (5; 2; 2), (4; 1; 1)

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(2; 0; 1), B(0; –2; 3) và mặt phẳng (P): $2x - y - z + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MA = MB = 3. Biết M có hoành độ nguyên.

A. (3; –2; 3) B. (2; 0; 4) C. (–1; 0; 2) D. (0; 1; 3)

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm A(4; 4; 0). Tìm tọa độ điểm B thuộc (S) sao cho tam giác OAB đều.

A. (4; 0; 4) hoặc (0; 4; 4) B. (2; 2; 4) hoặc (2; 4; 2)

C. (4; 0; 4) hoặc (8; 4; 4) D. (0; 4; 4) hoặc (8; 0; 0)

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P):
x + y + z – 3 = 0. Gọi I là giao điểm của Δ và (P). Xác định tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và MI = $4\sqrt{14}$.

A. M(–3; –7; 13) hoặc M(5; 9; –11) B. M(–3; –7; 13) hoặc M(9; 5; –11)
C. M(–7; 13; –3) hoặc M(–11; 9; 5) D. M(13; –3; –7) hoặc M(9; –11; 5)

BÀI 6. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Khoảng cách từ M(x_0; y_0; z_0) đến mp (α): Ax + By + Cz = 0 là:

$$d\left(M_0,(\alpha)\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

2. Khoảng cách từ điểm M_1 đến đt Δ đi qua M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là:

$$d\left(M_1,\Delta\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{u}\right]\right|}{\vec{u}}$$

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' trong đó:
Δ đi qua điểm M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$, Δ' đi qua điểm M_0' và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}$

$$d\left(\Delta,\Delta'\right)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\right|}$$

4. Góc giữa hai mặt phẳng: Cho $(P): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(Q): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Khi đó góc giữa (P) và (Q) là α xác định bởi: $cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ với $\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}$ là 2 VTPT của(P)và (Q).

Chú ý: $0^0\le\alpha\le90^0$ nên dấu giá trị tuyệt đối trong công thức là bắt buộc.

B. KỸ NĂNG

- Thành thạo tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, một mặt phẳng.
- Rèn kĩ năng tính khoảng cách giữa hai đt chéo nhau, xác định góc giữa hai mặt phẳng...

C. BÀI TẬP.

Bài 1. Tính khoảng cách từ các điểm M_1(1;-3;4) , M_2(0;4 ;1) , M_3(2;-1;0) đến mặt phẳng (α) : 2x –2y + z – 5 = 0

Bài 2. Lập phương trình mặt cầu tâm I(1; 1; -2) và tiếp xúc với mặt phẳng (P): 2x + y – 2z + 1 = 0.

Bài 3. Cho (P): 2x + y – z – 2 = 0, (Q): -4x – 2y + 2z + 1 = 0.

a) Tính khoảng cách giữa (P) và (Q).
b) Viết phương trình mp(R) song song và cách đều 2 mặt phẳng (P) và (Q).

Bài 4. (ĐH- 2010B). Cho A(1;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c) trong đó b, c dương và mặt phẳng (P): y – z +1 = 0. Xác định b và c, biết mp(ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ O đến (ABC) bằng $\frac{1}{3}$

Bài 5. Tính khoảng cách từ điểm A(1;1;3) tới đường thẳng Δ: $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-3}$

Bài 6. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau :

$$(\Delta_1): \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-1} \text{ và } (\Delta_2): \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-1}$$

Bài 7. Tìm trên Oz điểm M cách đều điểm A(2; 3; -1)và mặt phẳng:x + 3y +z –17 = 0

Bài 8. Cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 3t \end{cases}$ và mặt phẳng (α) : 2x – y – 2z +1 = 0.

Tìm các điểm M $\in$ (d) sao cho khoảng cách từ M đến (α) bằng 3

Bài 9. Cho hai đường thẳng (d_1): $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+4}{-5}$ và (d_2): $\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-4}{-1}$

Tìm hai điểm M, N lần lượt trên (d_1) và (d_2) sao cho độ dài đoạn MN nhỏ nhất.

Bài 10. (ĐH 2003-B) Cho A(2; 0; 0), B(0; 0; 8) và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC}=(0;6;0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

Bài 11. (ĐH- 2005A). Cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-3}{1}$ và mp(P): 2x + y -2z + 9 = 0.

a) Tìm điểm $I \in d$ sao cho khoảng cách từ I đến mp(P) bằng 2
b) Tìm A là giao điểm của mp(P) và (d). Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mp(P), biết Δ qua A và vuông góc với d.

Bài 12. (Dự bị ĐH- 2006D). Cho A(1; 2; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 3)

a) Viết phương trình đường thẳng d qua O và vuông góc với mp(ABC).
b) Viết phương trình mp(P) chứa OA sao cho khoảng cách từ B đến mp(P) bằng khoảng cách từ C đến mp(P)

Bài 13. Lập phương trình mặt phẳng (P) qua A(1; 0; 5) và song song với mp 2x - y + z – 17 = 0 và mặt phẳng (Q) qua điểm B(1; -2; 1), C(1; 0; 0), D(0; 1; 0). Tính góc hợp bởi (P) và (Q).

Bài 14. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa Oz và tạo với $(Q): 2x+y-\sqrt{5}z=0$ một góc 60^0.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho mặt phẳng (P): 2x – y – 2z – 8 = 0 và điểm M(–2; –4; 5). Tính khoảng cách từ M đến (P).

A. 18 B. 6 C. 9 D. 3

Câu 2. Cho hai mặt phẳng (P): 2x – 3y + 6z + 2 = 0 và (Q): 2x – 3y + 6z + 9 = 0. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. 8 B. 4 C. 2 D. 1

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxyz, cho tứ diện ABCD có A(2;3;1), B(4;1; –2), C(1;3;2), D(–2;3;–1).Độ dài đường cao kẻ từ D của tứ diện là

A. 1 B. 4 C. 3 D. 2

Câu 4. Cho điểm A(1; 0; 1), B(0; 2; 3) và C(0; 0; 2). Độ dài đường cao hạ từ C của tam giác ABC là

A. 2 B. 3 C. 1/2 D. 1

Câu 5. Cho A(–2; 2; 3) và đường thẳng (Δ): $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{1}$. Tính khoảng cách từ A đến(Δ).

A. $3\sqrt{5}$ B. $5\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $5\sqrt{2}$

Câu 6. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-3}{4}$, d_2: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{-1}$.

A. $\frac{3}{\sqrt{14}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{14}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{14}}$ D. $\frac{5}{\sqrt{14}}$

Câu 7. Cho bốn điểm A(1; 1; 0), B(0; 2; 1), C(1; 0; 2), D(1; 1; 1).Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

A. 1/6 B. 1/3 C. 1/2 D. 1

Câu 8. Cho các điểm S(3; 1; –2), A(5; 3; –1), B(2; 3; –4), C(1; 2; 0). Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của S trên mặt phẳng (ABC).

A. H(8/3; 8/3; –5/3) B. H(9/4; 5/2; –5/4) C. H(5/2; 11/4; –9/4) D. H(5/3; 7/3; –1)

Câu 9. Cho đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng (P): x – 2y + 2z – 3 = 0. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ. Tính khoảng cách từ M đến (P), biết MC = $\sqrt{6}$.

A. 2 B. 3 C. 2/3 D. 4/3

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(1; 1; 2). Tìm điểm N thuộc mặt phẳng Oxy sao cho độ dài đoạn thẳng MN là ngắn nhất.

A. (1; 1; 0) B. (1; 2; 2) C. (2; 1; 0) D. (2; 2; 0)

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm A(1; 2; 3), B(3; 2; 1). Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng Oxy. Tìm tọa độ của M để P = $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. (1; 2; 1) B. (1; 1; 0) C. (2; 1; 0) D. (2; 2; 0)

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm A(1; 1; 0), B(3; 0; 5), C(2; 2; 1). Gọi M là một điểm chạy trên mặt phẳng Oyz. Giá trị của P = $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi M có tọa độ là

A. (0; 2; 1) B. (0; 1; 3) C. (0; 2; 3) D. (0; 1; 2)

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm A(1; 2; 0), B(0; 1; 5), C(2; 0; 1). Gọi M là một điểm chạy trên mặt phẳng Oyz. Giá trị nhỏ nhất của P = $MA^2 + MB^2 + MC^2$ là

A. 23 B. 25 C. 27 D. 21

Câu 15. Cho mặt phẳng (P): 2x – y – 2z – 8 = 0 và điểm M(–2; –4; 5). Tính khoảng cách từ M đến (P).

A. 18 B. 6 C. 9 D. 3

Câu 16. Cho hai mặt phẳng (P): 2x – 3y + 6z + 2 = 0 và (Q): 2x – 3y + 6z + 9 = 0. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. 8 B. 4 C. 2 D. 1

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxyz, cho tứ diện ABCD có A(2;3;1), B(4;1; –2), C(1;3;2), D(–2;3;–1).Độ dài đường cao kẻ từ D của tứ diện là

A. 1 B. 4 C. 3 D. 2

Câu 18. Cho điểm A(1; 0; 1), B(0; 2; 3) và C(0; 0; 2). Độ dài đường cao hạ từ C của tam giác ABC là

A. 2 B. 3 C. 1/2 D. 1

Câu 19. Cho A(–2; 2; 3) và đường thẳng (Δ): $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{1}$. Tính khoảng cách từ A đến(Δ).

A. $3\sqrt{5}$ B. $5\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $5\sqrt{2}$

Câu 20. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-3}{4}$, d_2: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{-1}$.

A. $\frac{3}{\sqrt{14}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{14}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{14}}$ D. $\frac{5}{\sqrt{14}}$

Câu 21. Cho bốn điểm A(1; 1; 0), B(0; 2; 1), C(1; 0; 2), D(1; 1; 1).Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

A. 1/6 B. 1/3 C. 1/2 D. 1

Câu 22. Cho các điểm S(3; 1; –2), A(5; 3; –1), B(2; 3; –4), C(1; 2; 0). Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của S trên mặt phẳng (ABC).

A. H(8/3; 8/3; –5/3) B. H(9/4; 5/2; –5/4) C. H(5/2; 11/4; –9/4) D. H(5/3; 7/3; –1)

Câu 23. Cho đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng (P): x – 2y + 2z – 3 = 0. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ. Tính khoảng cách từ M đến (P), biết MC = $\sqrt{6}$.

A. 2 B. 3 C. 2/3 D. 4/3

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(1; 1; 2). Tìm điểm N thuộc mặt phẳng Oxy sao cho độ dài đoạn thẳng MN là ngắn nhất.

A. (1; 1; 0) B. (1; 2; 2) C. (2; 1; 0) D. (2; 2; 0)

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm A(1; 2; 3), B(3; 2; 1). Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng Oxy. Tìm tọa độ của M để $P = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. (1; 2; 1) B. (1; 1; 0) C. (2; 1; 0) D. (2; 2; 0)

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}, (P): x - 3y + 2z + 6 = 0$.

Phương trình hình chiếu của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) là:

A. $\begin{cases} x = 1 + 31t \\ y = 1 + 5t \\ z = -2 - 8t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 1 - 31t \\ y = 1 + 5t \\ z = -2 - 8t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 1 + 31t \\ y = 3 + 5t \\ z = -2 - 8t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 + 31t \\ y = 1 + 5t \\ z = 2 - 8t \end{cases}$

Câu 2: Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(1;3;-2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{-1}$.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm là điểm I và cắt Δ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 4 có phương trình là:

A. $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$ **B.** $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$

C. $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 9$ **D.** $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 9$

Câu 3: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x + 4z + 12 = 0$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A. Mặt phẳng (α) đi qua tâm mặt cầu (S).

B. Mặt phẳng (α) tiếp xúc mặt cầu (S).

C. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn.

D. Mặt phẳng (α) không cắt mặt cầu (S).

Câu 4: Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(2;-1;6), B(-3;-1;-4), C(5;-1;0), D(1;2;1)$. Tính thể tích V của tứ diện ABCD.

A. 30 **B.** 40 **C.** 50 **D.** 60

Câu 5: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x + 6y - 3z + m = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 3.

A. $m = 4$ **B.** $m = 51$ **C.** $m = -5$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m = 51 \\ m = -5 \end{array}\right.$

Câu 6: Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm $A(6;-2;3), B(0;1;6), C(2;0;-1), D(4;1;0)$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D. Hãy viết phương trình mặt phẳng tiếp túc với mặt cầu (S) tại điểm A.

A. $4x-y-9=0$ **B.** $4x-y-26=0$ **C.** $x+4y+3z-1=0$ **D.** $x+4y+3z+1=0$

Câu 7: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(-3;2;5)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y-5z-13=0$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).

A. $A'(1;8;-5)$ **B.** $A'(2;-4;3)$ **C.** $A'(7;6;-4)$ **D.** $A'(0;1;-3)$

Câu 8: Trong không gian Oxyz, cho $A(2;0;-1), B(1;-2;3), C(0;1;2)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của gốc toạ độ O lên mặt phẳng (ABC) là điểm H, khi đó H là:

A. $H\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **B.** $H\left(1;\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ **C.** $H\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$ **D.** $H\left(1;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

Câu 9: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$ và hai mặt phẳng $(P): x-y-z=0, (Q): 2x+3z+2=0$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. Mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn.
B. Mặt cầu (S) và mặt phẳng (Q) cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn.
C. Mặt cầu (S) và mặt phẳng (Q) tiếp xúc nhau.
D. Mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) tiếp xúc nhau.

Câu 10: Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(2;-1;1)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm K hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng Δ.

A. $K\left(\frac{17}{12};-\frac{13}{12};\frac{2}{3}\right)$ **B.** $K\left(\frac{17}{9};-\frac{13}{9};\frac{8}{9}\right)$ **C.** $K\left(\frac{17}{6};-\frac{13}{6};\frac{8}{6}\right)$ **D.** $K\left(\frac{17}{3};-\frac{13}{3};\frac{8}{3}\right)$

Câu 11: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $(d): \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{2}$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$. Có tất cả bao nhiêu điểm thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{3}$.

A. Vô số điểm **B.** Một **C.** Hai **D.** Ba

Câu 12: Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$ và mặt phẳng (Oxz).

A. $(2;0;3)$ **B.** $(1;0;2)$ **C.** $(-2;0;-3)$ **D.** $(3;0;5)$

Câu 13: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ và đường thẳng $(d): \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$. Tìm m để (d) cắt (S) tại hai điểm M, N sao cho độ dài MN bằng 8.

A. $m=-24$ **B.** $m=8$ **C.** $m=16$ **D.** $m=-12$

Câu 14: Trong không gian cho ba điểm $A(5;-2;0), B(-2;3;0)$ và $C(0;2;3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ:

A. $(1;1;1)$ **B.** $(2;0;-1)$ **C.** $(1;2;1)$ **D.** $(1;1;-2)$

Câu 15: Trong không gian cho ba điểm $A(1;3;1), B(4;3;-1)$ và $C(1;7;3)$. Nếu D là đỉnh thứ 4 của hình bình hành ABCD thì D có tọa độ là:

A. $(0;9;2)$ **B.** $(2;5;4)$ **C.** $(2;9;2)$ **D.** $(-2;7;5)$

Câu 16: Cho $\vec{a}=(-2;0;1),\vec{b}=(1;3;-2)$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng:

A. $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=(-1;-1;2)$ **B.** $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=(-3;-3;-6)$ **C.** $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=(3;3;-6)$ **D.** $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=(1;1;-2)$

Câu 17: Cho đường thẳng đi qua điểm $A(1;4;-7)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x+2y-2z-3=0$ có phương trình chính tắc là:

A. $x-1=\frac{y-4}{2}=-\frac{z+7}{2}$ **B.** $x-1=\frac{y-4}{2}=\frac{z+7}{2}$

C. $\frac{x-1}{4}=y+4=\frac{z+7}{2}$ **D.** $x-1=y-4=z+7$

Câu 18: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $(\Delta): \frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-4}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x-4y-4z+5=0$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng ?

A. Góc giữa (Δ) và (α) bằng 30^0 **B.** $(\Delta)\in(\alpha)$

C. $(\Delta)\perp(\alpha)$ **D.** $(\Delta)//(\alpha)$

Câu 19: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $M(3;1;1), N(4;8;-3), P(2;9;-7)$ và mặt phẳng $(Q): x+2y-z-6=0$. Đường thẳng d đi qua G, vuông góc với (Q). Tìm giao điểm A của mặt phẳng (Q) và đường thẳng d, biết G là trọng tâm tam giác MNP.

A. $A(1;2;1)$ **B.** $A(1;-2;-1)$ **C.** $A(-1;-2;-1)$ **D.** $A(1;2;-1)$

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Thời gian làm bài: 45 phút

ĐỀ KIỂM TRA

Chủ đề/Chuẩn KTKN	Cấp độ tư duy				
	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng thấp	Vận dụng cao	Cộng
1. Hệ tọa độ trong không gian Biết cách tìm tọa độ điểm, véc tơ. Thực hiện được các phép	Câu 1	Câu 7			**13**
	Câu 2	Câu 8	Câu 9	Câu 12	**52%**

toán véc tơ. Tính được tích vô hướng véc tơ và các bài toán về mặt cầu.	Câu 3		Câu 10	Câu 13	
	Câu 4		Câu 11		
	Câu 5				
	Câu 6				
	6	2	3	2	
2. Phương trình mặt phẳng Viết phương trình mặt phẳng, vị trí tương đối của hai mp, tính được k/c từ một điểm đến mp.	Câu 14		Câu 21	Câu 24	**12** **48%**
	Câu 15	Câu 18	Câu 22	Câu 25	
	Câu 16	Câu 19	Câu 23		
	Câu 17	Câu 20			
	4	3	3	2	
Cộng	**10** **40%**	**5** **20%**	**6** **25%**	**4** **15%**	**25** **100%**

BẢNG MÔ TẢ CHI TIẾT NỘI DUNG CÂU HỎI ĐỀ KIỂM TRA

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

ĐỀ KIỂM TRA

Chủ đề	Câu	Nội dung
1. Hệ tọa độ trong không gian Biết cách tìm tọa độ điểm, véc tơ. Thực hiện được các phép toán véc tơ. Tính được tích vô hướng véc tơ và các bài toán về mặt cầu.	1	Nhận biết: CT tính tọa độ trọng tâm của một tam giác
	2	Nhận biết: CT tính khoảng cách giữa hai điểm
	3	Nhận biết: Viết phương trình mặt cầu
	4	Nhận biết : Tọa độ của một vecto
	5	Nhận biết: Tọa độ trung điểm đoạn thẳng
	6	Nhận biết: Tìm tâm và bk mặt cầu
	7	Thông hiểu: Viết pt mặt cầu
	8	Thông hiểu: Cộng vecto, nhân vecto với một số
	9	Vận dụng thấp: Tọa độ điểm
	10	Vận dụng thấp: Ứng dụng của vecto
	11	Vận dụng thấp: Kiến thức liên quan tới mặt cầu.
	12	Vận dụng cao: Tìm tọa độ điểm để độ dài lớn nhất
	13	Vận dụng cao: PT mặt cầu đi qua 4 điểm
2. Phương trình mặt phẳng Viết phương trình mặt phẳng, vị trí tương đối của hai mp, tính được k/c từ một điểm đến mp.	14	Nhận biết: Pt mặt phẳng theo đoạn chắn.
	15	Nhận biết: Xác định VTPT của mp
	16	Nhận biết: Lập phương trình mp trung trực của đoạn thẳng
	17	Nhận biết: Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 mp
	18	Thông hiểu: Lập PTMP biết một điểm và song song với MP cho trước
	19	Thông hiểu: Độ dài đoạn thẳng
	20	Vận dụng thấp: Lập phương trình mp đi qua ba điểm cho trước.
	21	Vận dụng thấp: Tìm tọa độ điểm thứ 4 để là hbh
	22	Vận dụng thấp: Viết phương trình tiếp xúc với 1 mặt phẳng
	23	Vận dụng thấp: Viết phương trình mặt phẳng đi qua 2 điểm và vuông góc vơi 1 mp
	24	Vận dụng cao: Tính thể tích tứ diện
	25	Vận dụng cao: Cho điểm A và mp (P). Mp(Q) song song với (P) và cách đều (P), (Q). Viết phương trình mp (Q).

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG PP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

ĐỀ KIỂM TRA

Câu 1. Trong không gian Oxyz. Cho ba điểm A(1;1;3); B(-1; 3; 2); C(-1;2;3). Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là.

A. G(0; 0; 6). B. G(0;3/2;3). <u>C.</u> G(-1/3;2; 8/3). D. G(0;3/2;2).

Câu 2. Trong không gian Oxyz, khoảng cách giữa hai điểm A(2;3;4) và B(6;0;4) bằng :

A. $\sqrt{29}$. B. $\sqrt{52}$. <u>C.</u> 5 D. $\sqrt{7}$

Câu 3. Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu tâm I(2;1;-2) bán kính R=2 là:

A. $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+10=0$ <u>B.</u> $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+5=0$

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3^2$ D. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=2^2$

Câu 4. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$. Khi đó tọa độ của $\vec{a}$ là:

<u>A.</u> $\vec{a}=(2;1;-5)$ B. $\vec{a}=(2;1;0)$ C. $\vec{a}=(-2;-1;5)$ D. $\vec{a}=(2;0;-5)$

Câu 5. Cho ba điểm A(1;1;3); C(-1;2;3). Tọa độ trung điểm I của đoạn AC là

A. I(0; 0; 6); <u>B.</u> I(0;3/2;3); C. I (-1/3;2; 8/3) D. I(0;3/2;2);

Câu 6. Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R và có phương trình: $x^2+y^2+z^2-x+2y+1=0$ Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. $I\left(-\frac{1}{2};1;0\right)$ và R=$\frac{1}{4}$ <u>B</u>. $I\left(\frac{1}{2};-1;0\right)$ và R=$\frac{1}{2}$

C. $I\left(\frac{1}{2};-1;0\right)$ và R=$\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $I\left(-\frac{1}{2};1;0\right)$ và R=$\frac{1}{2}$

Câu 7. Phương trình mặt cầu (S) qua điểm A(1;2; 0) và có tâm là gốc tọa độ O là.

A. $2x^2+y^2+z^2=5$ B. $x^2+2y^2+3z^2=5$

C. $x^2+y^2+2z^2=5$ <u>D</u>. $x^2+y^2+z^2=5$

Câu 8. Cho ba véc tơ $\vec{a}=(5;-7;2);\vec{b}=(0;3;4);\vec{c}=(-1;1;3)$. Tọa độ véc tơ $\vec{n}=\overrightarrow{3a}+\overrightarrow{4b}+\overrightarrow{2c}.$ là

<u>A.</u> $\vec{n}=(13;-7;28)$ B. $\vec{n}=(13;1;3)$; C. $\vec{n}=(-1;-7;2)$; D. $\vec{n}=(-1;28;3)$

Câu 9. Trong không gian Oxyz, cho vecto $\overrightarrow{AO}=3(\vec{i}+4\vec{j})-2\vec{k}+5\vec{j}$. Tọa độ của điểm A là

A. $(3;-2;5)$ <u>B.</u> $(-3;-17;2)$ C. $(3;17;-2)$ D. $(3;5;-2)$

Câu 10. Trong không gian Oxyz, cho 3 vecto $\vec{a}=(-1;1;0)$; $\vec{b}=(1;1;0)$; $\vec{c}=(1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\vec{a}.\vec{c}=1$ B. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng

<u>C.</u> $\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\frac{2}{\sqrt{6}}$ D. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

Câu 11. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=12$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai:

A. S có tâm I(-1;2;3) B. S có bán kính $R=2\sqrt{3}$

C. S đi qua điểm M(1;0;1) <u>D</u>. S đi qua điểm N(-3;4;2)

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;2;2), B(5;4;4). Tọa độ điểm M nằm trên trục Ox sao cho $MA^2 + MB^2$ lớn nhất là:

A. M(0;0;0) B. M(0;3;0) C. M(3;0;0) D. M(-3;0;0)

Câu 13. Trong không gian Oxyz, bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1) và D(1;1;1) là:

A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{3}{4}$

Câu 14. Trong không gian Oxyz. Cho bốn điểm A(1; 0; 0); B(0; 3; 0); C(0; 0; 6). Phương trình mặt phẳng (ABC) là.

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$ B. x+2y+z-6 = 0 C. $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=3$ D. 6x+2y+z-3 = 0

Câu 15. Cho mặt phẳng (P): $x+y+2=0$. Khẳng định nào sau đay **SAI**?

A. VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;1;0)$

B. Mặt phẳng (P) song song với Oz

C. Điểm M(-2;0;0) thuộc (P)

D. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Oxy)

Câu 16. Trong không gian Oxyz, cho 2 điểm A(4;-1;3), B(-2;3;1). Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:

A. $3x-2y+z+3=0$ B. $6x-4y+2z+1=0$ C. $3x-2y+z-3=0$ D. $3x-2y-z+1=0$

Câu 17. Cho điểm A (-1; 3; - 2) và mặt phẳng $(P): x-2y-2z+5=0$. Khoảng cách từ A đến (P) là.

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{5}{3}$.

Câu 18. Phương trình mp(α) đi qua điểm M(1,-1,2) và song song với mp(β) :2x-y+3z -1 = 0 là

A. 6x + 3y + 2z – 6 = 0 B. x + y + 2z – 9= 0 C. 2x-y+3z-9= 0

D. 3x + 3y - z – 9 = 0

Câu 19. Trong không gian Oxyz. Cho A(4; 2; 6); B(10; - 2; 4), C(4; - 4; 0); D(- 2; 0; 2) thì tứ giác ABCD là: hình

A. Thoi B. Bình hành C. Chữ nhật D. Vuông

Câu 20. Trong không gian Oxyz, cho B(0 ; -2 ; 1) ; C(1 ; -1 ; 4) ; D (3; 5 ; 2). Phơng trình mặt phẳng (BCD) là.

A. -5x+2y+z+3=0 B. 5x+2y+z+3=0 . C. -5x+2y+z-3=0 D. -5x+2y-z+3=0

Câu 21. Trong không gian Oxyz. Cho 3 điểm M(2;1;3), N(4;0;-1); P(-2;3;1). Nếu MNPQ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là:

A. (0;-2;3) B. (0;-2;-3) C. (0;2;-3) D. (-4;4;5)

Câu 22. Trong không gian Oxyz, cho A(3 ; -2 ;- 2) ; B(3 ; 2 ; 0) ; C(0 ; 2 ; 1) ; D (-1; 1 ; 2) . Phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (BCD) là.

A. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=14$ B. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\sqrt{14}$

C. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=14$ D. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=\sqrt{14}$

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(2;4;1),B(–1;1;3) và mặt phẳng (P): $x-3y+2z-5=0$ .Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) là.

A. $(Q): 2y+3z-11=0$ B. $(Q): y+3z-11=0$

C. $(Q): 2y + 3z + 11 = 0$ D. $(Q): y + 3z + 11 = 0$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho tứ diện ABCD có A(1;0;0), B(2;1;1), C(0;3;-2), D(1;3;0). Thể tích tứ diện đã cho là

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{6}$ D. 6

Câu 25. Cho mặt phẳng (P): 2x –y +2z –3 =0. Phương trình của mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) biết (Q) cách điểm A(1;2;3) một khoảng bằng 5 là.

A. (Q): 2x –y +2z +9=0 B. (Q): 2x –y +2z + 15 =0
C. (Q): 2x –y +2z – 21=0 D. Cả A, C đều đúng.

CHUYÊN ĐỀ: LƯỢNG GIÁC
CHỦ ĐỀ 1
CUNG LƯỢNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC
GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG
CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC
(3 Tiết)

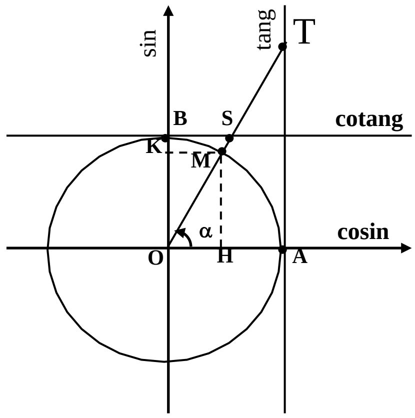
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác

1. Định nghĩa các giá trị lượng giác

Cho $(OA,OM)=\alpha$. Giả sử $M(x;y)$.

$$\cos\alpha = x = \overline{OH}$$
$$\sin\alpha = y = \overline{OK}$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \overline{AT} \qquad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \overline{BS} \qquad (\alpha \neq k\pi)$$



Nhận xét:

- $\forall\alpha,\ -1 \le \cos\alpha \le 1;\ -1 \le \sin\alpha \le 1$
- tanα xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$
- cotα xác định khi $\alpha \neq k\pi, k \in Z$
- $\sin(\alpha+k2\pi)=\sin\alpha$
  $\cos(\alpha+k2\pi)=\cos\alpha$
- $\tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha$
  $\cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha$

2. Dấu của các giá trị lượng giác

Giá trị lượng giác \ Phần tư	I	II	III	IV
cosα	+	–	–	+
sinα	+	+	–	–
tanα	+	–	+	–
cotα	+	–	+	–

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	180^0	270^0	360^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\|\|$	0
cot	$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$\|\|$	0	$\|\|$

4. Hệ thức cơ bản:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$; $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

5. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Góc đối nhau	**Góc bù nhau**	**Góc phụ nhau**
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$

Góc hơn kém π	**Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$**
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$
$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

II. Công thức lượng giác

1. Công thức cộng

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$$

2. Công thức nhân đôi

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}; \qquad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$	$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ $\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

3. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a+\cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$ $\cos a-\cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$ $\sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$ $\sin a-\sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$	$\tan a+\tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$ $\tan a-\tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$ $\cot a+\cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a.\sin b}$ $\cot a-\cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a.\sin b}$
$\sin\alpha+\cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}.\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$	

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$$
$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$
$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. Dạng 1: Xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung:

+ Xác định điểm cuối của cung xem điểm đó thuộc cung phần tư nào, từ đó xác định dấu của các giá trị lượng giác tương ứng.

+ Phải nắm rõ các cung phần tư từ đó xác định dấu của các giá trị lượng giác; để xác định dấu của các giá trị lượng giác ta cần nắm rõ định nghĩa giá trị lượng giác của cung α và thực hiện như sau: Vẽ đường tròn lượng giác, trục đứng(Oy) là trục sin, trục nằm (Ox) là trục cosin; khi α thuộc cung phần tư nào ta cho một điểm M bất kì nằm trên cung phần tư đó, sau đó chiếu điểm M vuông góc xuống trục sin và trục cos từ đó xác định được sin dương hay âm, cos dương hay âm; tan=sin/cos; cot=cos/sin; dựa vào dấu của sin và cos ta xác định được dấu của tan và cot theo nguyên tắc chia dấu: -/-=+; -/+= -

2. Dạng 2: Tính các giá trị lượng giác của một cung:

+ Nếu biết trước $\sin\alpha$ ***thì dùng công thức:*** $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ***để tìm*** $\cos\alpha$***, lưu ý:xác định dấu của các giá trị lượng giác để nhận, loại.*** $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$***;*** $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ hoặc $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$

+ Nếu biết trước $\cos\alpha$ ***thì tương tự như trên.***

+ Nếu biết trước $\tan\alpha$ ***thì dùng công thức:*** $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ ***để tìm*** $\cos\alpha$***, lưu ý: xác định dấu của các giá trị lượng giác để nhận, loại.*** $\sin\alpha=\tan\alpha.\cos\alpha$***,*** $\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$

3. Dạng 3: Chứng minh các đẳng thức lượng giác:

Sử dụng các hằng đẳng thức đại số (7 hằng đẳng thức đáng nhớ) và các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản để biến đổi một vế thành vế kia.
biến đổi một vế thành vế kia**)**

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\tan\alpha.\cot\alpha=1\quad\left(\alpha\neq k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right)$

$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\quad\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right)$

$1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\quad\left(\alpha\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}\right)$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

4. Dạng 4: Đơn giản các biểu thức lượng giác:

+ Dùng các hệ thức cơ bản và giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

*Giá trị lg của các góc có liên quan đặc biệt:“****sin bù,cos đối,phụ chéo,hơn kém tan sai*** π***”***

+ Chú ý: *Với* $k\in\mathbb{Z}$ *ta có:*

$\sin(\alpha+k2\pi)=\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha+k2\pi)=\cos\alpha$

$\tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Dạng 1:

Bài tập 1.1: Cho $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$**. Xác định dấu của các giá trị lượng giác:**

a) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ $\qquad$ b) $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ c) $\tan(\alpha+\pi)$ $\qquad$ d) $\cot\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Giải

a) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Rightarrow-\pi<-\alpha<-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3\pi}{2}-\alpha<\pi$ vậy $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)>0$

Dạng 2:

Bài tập 2.1: Tính các giá trị lượng giác của góc α biết:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

b) $\cos\alpha = \frac{4}{13}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

c) $\tan\alpha = -\frac{4}{5}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

d) $\cot\alpha = -3, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

e) $\sin\alpha = -\frac{2}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

f) $\cos\alpha = 0,8$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

g) $\tan\alpha = \frac{13}{8}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

h) $\cot\alpha = -\frac{19}{7}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

i) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

j) $\sin\alpha = \frac{2}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

k) $\tan\alpha = \frac{7}{3}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

l) $\cot\alpha = -\frac{4}{19}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Giải

a) Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0, \tan\alpha < 0, \cot\alpha < 0$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{4}{5}(loai) \\ \cos\alpha = -\frac{4}{5}(nhan) \end{array}\right.$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{4};\ \cot\alpha = -\frac{4}{3}$$

c) Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin\alpha < 0, \cos\alpha > 0, \cot\alpha < 0$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{41} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}(nhan) \\ \cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}(loai) \end{array}\right.$$

$$\sin\alpha = \cos\alpha.\tan\alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}};\ \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{\sqrt{41}}{4}$$

Các bài tập còn lại làm tương tự.

Bài tập 2.2: Biết $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Hãy tính các giá trị lượng giác của góc: $2\alpha; \frac{\alpha}{2}$

a) Do $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0 \Rightarrow \cos a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$cos2a = cos^2 a - \sin^2 a = \frac{7}{9}$

$\tan 2a = \frac{4\sqrt{2}}{7}; \cot a = \frac{7}{4\sqrt{2}}$

b) $\frac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow cos\frac{\alpha}{2} > 0, \sin\frac{\alpha}{2} > 0$

$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2} \Rightarrow \sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}$

$cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}$

$\tan\frac{a}{2} = 3+2\sqrt{2}; \cot\frac{a}{2} = 3-2\sqrt{2}$

Bài tập 2.3: Tính $cos2a, \sin 2a, \tan 2a$ biết:

a) $\cos a = -\frac{5}{13}, \quad \pi < a < \frac{3\pi}{2}$; $\quad \cos a = -\frac{5}{13}, \frac{\pi}{2} < a < \pi$; $\quad \cos a = \frac{4}{5}, \quad -\frac{\pi}{2} < a < 0$

b) $\sin a = -\frac{3}{5}, \quad \pi < a < \frac{3\pi}{2}$

c) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{3\pi}{4} < a < \pi$

Hướng dẫn:

a) tính sina, sau đó áp dụng các công thức nhân đôi.

$\sin a = -\frac{12}{13}$; $\sin 2a = \frac{120}{169}$; $cos2a = cos^2 a - \sin^2 a = -\frac{119}{169}$ hoặc $cos2a = 2\cos^2 a - 1$;
$\tan 2a = -\frac{120}{169}$

c) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\sin a + \cos a)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 + \sin 2a = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2a = -\frac{3}{4}$

$$\frac{3\pi}{4} < a < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < 2a < 2\pi \Rightarrow \cos 2a > 0; \qquad \cos 2a = \sqrt{1-\sin^2 2a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan 2a = -\frac{3}{\sqrt{7}}$$

Bài tập 2.4: Cho $\sin 2a = -\frac{5}{9}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính sina, cosa

+ Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\sin a > 0, \cos a < 0$

+ $\frac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \pi < 2a < 2\pi$ nên cos2a có thể dương và có thể âm

$$\cos 2a = \pm\sqrt{1-\sin^2 2a} = \pm\frac{2\sqrt{14}}{9}$$

TH1: $\cos 2a = \frac{2\sqrt{14}}{9}$

$\cos a = -\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}} = -\frac{2+\sqrt{14}}{6}$; $\sin a = \sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}} = \frac{\sqrt{14}-2}{6}$

TH2: $\cos 2a = -\frac{2\sqrt{14}}{9}$

$\cos a = -\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}} = \frac{\sqrt{14}-2}{2}$; $\sin a = \sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}} = \frac{2+\sqrt{14}}{6}$

Dạng 3:

Bài tập 3.1: Chứng minh các đẳng thức lượng giác:

a) $\frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} = 1 - \sin a \cos a$ Biến đổi:

$\sin^3 a + \cos^3 a = (\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a)$

b) $\frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{1+2\sin a \cos a} = \frac{\tan a - 1}{\tan a + 1}$ Biến đổi: $\sin^2 a - \cos^2 a = (\sin a + \cos a)(\sin a - \cos a)$, chia tử và mẫu cho $\cos a$

c) $\sin^4 a + \cos^4 a - \sin^6 a - \cos^6 a = \sin^2 a \cos^2 a$ Biến đổi:

$\sin^6 a + \cos^6 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a - \sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a)$

d) $\frac{\tan a-\tan b}{\cot b-\cot a}=\tan a\tan b$ Biến đổi: $\cot b-\cot a=\frac{1}{\tan b}-\frac{1}{\tan a}$

e) $2\left(sin^6a+\cos^6a\right)+1=3\left(sin^4a+\cos^4a\right)$

$VT=\sin^6 a+\cos^6 a=2\left(sin^2a+\cos^2a\right)\left(\sin^4 a-\sin^2 a\cos^2 a+\cos^4 a\right)+1$

$=2\left(\sin^4 a+\cos^4 a\right)+1-2\sin^2 a\cos^2 a=2\left(\sin^4 a+\cos^4 a\right)+\left(\sin^2 a+\cos^2 a\right)^2-2\sin^2 a\cos^2 a=VP$

f) $3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)=1$

Sử dụng $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ và a^3+b^3

g) $\tan^2 a-\sin^2 a=\tan^2 a.\sin^2 a$

$VT=\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}-\sin^2 a=\sin^2 a\left(1+\tan^2 a-1\right)=VP$

h) $\frac{\sin a}{1+\cos a}+\frac{1+\cos a}{\sin a}=\frac{2}{\sin a}$

$VT=\frac{\sin^2 a+(1+\cos a)^2}{\sin a(1+\cos a)}=\frac{\sin^2 a+1+2\cos a+\cos^2 a}{\sin a(1+\cos a)}=VP$

i) $\cos^4 a-\sin^4 a=2\cos^2 a-1$

Sử dụng a^2-b^2

j) $1+2\tan^2 a=\frac{1+\sin^2 a}{1-\sin^2 a}$ (nếu $\sin a\neq\pm1$)

$VP=\frac{1+\sin^2 a}{\cos^2 a}=\frac{1}{\cos^2 a}+\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}=...=VT$

k) $\frac{\sin^2 a-\cos^2 a}{1+2\sin a\cos a}=\frac{1-\cot a}{1+\cot a}$

$VT=\frac{(\sin a-\cos a)(\sin a+\cos a)}{(\sin a+\cos a)^2}=\frac{\frac{\sin a-\cos a}{\sin a}}{\frac{\sin a+\cos a}{\sin a}}=VP$

l) $\cot^2 a-\cos^2 a=\cot^2 a\cos^2 a$

$VT=\frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}-\cos^2 a=\frac{\cos^2 a\left(1-\sin^2 a\right)}{\sin^2 a}=VP$

m) $\tan^2 a - \sin^2 a = \tan^2 \mathrm{a} \sin^2 a$

n) $\dfrac{\mathrm{t\,ana}}{\sin a} - \dfrac{\sin a}{\cot a} = \cos a$

o) $\dfrac{1+\sin^2 a}{1-\sin^2 a} = 1 + 2\tan^2 a$

p) $\dfrac{cos^2 a - \sin^2 a}{\cot^2 a - \tan^2 a} = \sin^2 a.cos^2 a$

Bài tập 3.2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^4 a + cos^4 a = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2a = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} cos4a$

$$\sin^4 a + cos^4 a = \left(\sin^2 a + cos^2 a\right)^2 - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2.\left(\sin a \cos a\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2a \quad (1)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2a = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - cos4\mathrm{a}}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}cos4a = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}cos4a \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

b) $\sin^6 a + cos^6 a = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8} cos4a$

Hướng dẫn: $x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$ sau đó áp dụng $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

c) $\sin a \cos^5 a - \cos a \sin^5 a = \dfrac{1}{4}\sin 4a$

$$\sin a \cos^5 a - \cos a \sin^5 a = \sin a \cos a\left(cos^4 a - \sin^4 a\right) = \sin a \cos a\left(cos^2 a - \sin^2 a\right)\left(cos^2 a + \sin^2 a\right) = ...$$

d) $cos^8 a - \sin^8 a = cos2a - \dfrac{1}{4}\sin 4a \sin 2a$

Sử dụng $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ sau đó sử dụng $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

e) $\dfrac{cos2a}{1+\sin 2a} = \dfrac{\cos a - \sin a}{\cos a + \sin a}$

$$VT = \frac{cos^2 a - \sin^2 a}{1 + 2\sin a \cos a} = \frac{cos^2 a - \sin^2 a}{\left(\sin a + \cos a\right)^2} = ...$$

f) $\cot x + \mathrm{t\,anx} = \dfrac{2}{\sin 2x}$

Hướng dẫn: $\frac{\cos x}{\operatorname{sinx}}+\frac{\operatorname{sinx}}{\cos x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos x}=...$

g) $\cot x-\operatorname{tanx}=2\cot 2x$ phân tích như trên

h) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\operatorname{tanx}$ Hướng dẫn: $VT=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}=...$

i) $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\tan^2 x$ Hướng dẫn: $VT=\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=...$

j) $\cos^3 a\sin a-\sin^3 a\cos a=\frac{1}{4}\sin 4a$

Hướng dẫn: Tương tự như câu c

k) $\frac{\sin^3 a-\cos^3 a}{\sin a-\cos a}=1+\frac{\sin 2a}{2}$ Sử dụng hằng đẳng thức a^3-b^3

l) $\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}-\frac{\cos a-\sin a}{\cos a+\sin a}=2\tan 2a$

Hướng dẫn: Quy đồng mẫu

m) $\frac{\sin 2a-2\sin a}{\sin 2a+2\sin a}=-\tan^2\frac{a}{2}$

Hướng dẫn: sin2a=2sinacosa; đặt nhân tử chung sau đó áp dụng $1-\cos a=2\sin^2\frac{a}{2}$

n) $\frac{1+\sin a}{1-\sin a}=\cot^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$

$$VT=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}=\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}=VP$$

0) $\frac{\sin 2a+\sin a}{1+\cos 2a+\cos a}=\operatorname{tana}$

Hướng dẫn: $VT=\frac{2\sin a\cos a}{2\cos^2 a+\cos a}=...$

p) $\frac{4\sin^2 a}{1-\cos^2\frac{a}{2}=16\cos^2\frac{a}{2}}$

Hướng dẫn: $VT = \dfrac{4.4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}} = VP$

q) $\dfrac{\tan 2a}{\tan 4a - \tan 2a} = \cos 4a$

$VT = \dfrac{\tan 2a}{\dfrac{2\tan 2a}{1-\tan^2 2a} - \tan 2a} = \dfrac{1-\tan^2 2a}{1+\tan^2 2a} = ...$

r) $\dfrac{3-4\cos 2a+\cos 4a}{3+4\cos 2a+\cos 4a} = \tan^4 a$

HD: $\cos 4a = 2\cos^2 2a - 1$ sau đó sử dụng $\cos 2a - 1 = -2\sin^2 a$

s) $\dfrac{\sin a+\sin 3a+\sin 5a}{\cos a+\cos 3a+\cos 5a} = \tan 3a$

$VT = \dfrac{(\sin 5a+\sin a)+\sin 3a}{(\cos 5a+\cos a)+\cos 3a} = ...$

t) $\dfrac{1+\cos a}{1-\cos a}\tan^2\dfrac{a}{2} - \cos^2 a = \sin^2 a$

Sử dụng công thức hạ bậc $1+\cos a = 2\cos^2\dfrac{a}{2}$

Bài tập 3.3: Chứng minh các biểu thức sau là những hằng số không phụ thuộc vào a

a) $A = 2(\sin^6 a+\cos^6 a) - 3(\sin^4 a+\cos^4 a)$

Sử dụng a^3+b^3 $\quad A=-1$

b) $B = 4(\sin^4 a+\cos^4 a) - \cos 4a$

Sử dụng $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ và $\cos 2a = 1-2\sin^2 a$ $\quad B=3$

c) $4\cos^4 a - 2\cos 2a - \dfrac{1}{2}\cos 4a$

Sử dụng $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ $\quad C = \dfrac{3}{2}$

Dạng 4:

Bài tập 4.1: Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A=\left(1-\sin^2 a\right)\cot^2 a+1-\cot^2 a$

$$A=\cot^2 a-\sin^2 a.\cot^2 a+1-\cot^2 a=1-\sin^2 a\frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}=\sin^2 a$$

b) $B=\dfrac{2\cos^2 a-1}{\sin a+\cos a}$

$$B=\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin a+\cos a}=\cos a-\sin a$$

c) $C=\left(1+\cot a\right)\sin^3 a+\left(1+\tan a\right)\cos^3 a$

$$C=\left(1+\frac{\cos a}{\sin a}\right)\sin^3 a+\left(1+\frac{\sin a}{\cos a}\right)\cos^3 a=\left(\sin a+\cos a\right)\sin^2 a+\left(\cos a+\sin a\right)\cos^2 a=\sin a+\cos a$$

d) $D=\dfrac{\sin^2 a-\tan^2 a}{\cos^2 a-\cot^2 a}$

$$D=\frac{\sin^2 a\left(1-\dfrac{1}{\cos^2 a}\right)}{\cos^2 a\left(1-\dfrac{1}{\sin^2 a}\right)}=\frac{\sin^2 a\dfrac{1-\cos^2 a}{\cos^2 a}}{\cos^2 a\dfrac{1-\sin^2 a}{\sin^2 a}}=\frac{\sin^4 a}{\cos^4 a}.\frac{\left(-\sin^2 a\right)}{\left(-\cos^2 a\right)}=\tan^6 a$$

e) $E=\dfrac{\left(\sin a+\cos a\right)^2-1}{\cot a-\sin a\cos a}$

$$E=\frac{\sin^2 a+2\sin a\cos a+\cos^2 a-1}{\cos a\left(\dfrac{1}{\sin a}-\sin a\right)}=\frac{2\sin a\cos a.\sin a}{\cos a.\cos^2 a}=2\tan^2 a$$

f) $F=\dfrac{1-\sin^2 a\cos^2 a}{\sin^2 a}-\sin^2 a$

$$F=\left(\frac{1}{\sin^2 a}-\cos^2 a\right)-\sin^2 a=\frac{1}{\sin^2 a}-\left(\cos^2 a+\sin^2 a\right)=1+\cot^2 a-1=\cot^2 a$$

g) $G=\dfrac{2\cos^2 a-1}{\sin a+\cos a}$

$$G=\frac{2\cos^2 a-\left(\sin^2 a+\cos^2 a\right)}{\sin a+\cos a}=\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin a+\cos a}=\cos a-\sin a$$

h) $H=\sin^2 a\left(1+\cot a\right)+\cos^2 a\left(1+\tan a\right)$

$H = \sin^2 a\left(1+\cot a\right)+cos^2 a\left(1+\text{t ana}\right)=\sin^2 a+\sin^2 a\dfrac{\cos a}{\sin a}+cos^2 a+cos^2 a.\dfrac{\sin a}{\cos a}$

$=\sin^2 a+2\sin a\cos a+cos^2 a=\left(\sin a+\cos a\right)^2$

i) $I = cos^2 a + cos^2 a.\cot^2 a$ I= $\cot^2 a$

j) $J = \sin^2 a + \sin^2 a.\tan^2 a$ J= $\tan^2 a$

k) $K = \dfrac{2\cos^2 a - 1}{\sin a + \cos a}$ K= $\cos a - \sin a$

Bài tập 4.2: Đơn giản các biểu thức:

a) $A = \sin^2\alpha + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\alpha-\pi\right)$ A=1

b) $B = \sin^2\dfrac{\pi}{8}+\sin^2\dfrac{3\pi}{8}-cos^2\alpha$ B= $\sin^2\alpha$

Hướng dẫn: $\sin\dfrac{3\pi}{8}=cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{8}\right)=cos\dfrac{\pi}{8}$

c) $C = \sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+cos\left(\pi-x\right)+\tan\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)+\tan\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ C=-2cosx

Hướng dẫn: $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left[-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right]=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$;

$cos\left(\pi-x\right)=-\cos x$

$\tan\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)=\tan\left(2\pi+\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$

$\tan\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cot x$

d) $D=\sin\left(\pi+x\right)+cos\left(\dfrac{17\pi}{2}+x\right)+\tan\left(5\pi-x\right)-\cot\left(x-\dfrac{9\pi}{2}\right)$ D=-2sinx

Hướng dẫn: $cos\left(\dfrac{17\pi}{2}+x\right)=cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x+8x\right)=-\text{s inx}$

$\cot\left(x-\dfrac{9\pi}{2}\right)=\cot\left[-\left(\dfrac{9\pi}{2}-x\right)\right]=-\cot\left(\dfrac{9\pi}{2}-x\right)=-\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x+4\pi\right)=-\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-\text{t anx}$

e) $E=\sin\left(\pi+a\right)-\text{có}\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)+\cot\left(2\pi-a\right)+\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-a\right)$ E=-2sina

Hướng dẫn: $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=\tan\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot a$

Bài tập 4.3: Tính:

a) $A=\sin^2 10^0+\sin^2 20^0+\sin^2 30^0+...+\sin^2 80^0$ (8 số hạng)

$A=\left(\sin^2 10^0+\sin^2 80^0\right)+\left(\sin^2 20^0+\sin^2 70^0\right)+\left(\sin^2 30^0+\sin^2 60^0\right)+\left(\sin^2 40^0+\sin^2 50^0\right)$

$=\left(\sin^2 10^0+\cos^2 10^0\right)+\left(\sin^2 20^0+\cos^2 20^0\right)+\left(\sin^2 30^0+\cos^2 30^0\right)+\left(\sin^2 40^0+\cos^2 40^0\right)=4$

b) $B=\cos 10^0+\cos 20^0+\cos 30^0+...+\cos 180^0$ (18 số hạng)

$B=\left(\cos 10^0+\cos 170^0\right)+\left(\cos 20^0+\cos 160^0\right)+...+\left(\cos 90^0+\cos 180^0\right)$

$=\left(\cos 10^0-\cos 10^0\right)+\left(\cos 20^0-\cos 20^0\right)+...+\left(0+(-1)\right)=-1$

c) $C=\sin\frac{25\pi}{4}+\cos\frac{9\pi}{4}+\tan\frac{4\pi}{3}-\cot\frac{19\pi}{6}$

$C=\sin\left(\frac{\pi}{4}+6\pi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)+\tan\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)-\cot\left(\frac{\pi}{6}+3\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{2}$

d) $D=\tan 10^0.\tan 20^0...\tan 70^0,\tan 80^0$

$D=\left(\tan 10^0.\tan 80^0\right)\left(\tan 20^0.\tan 70^0\right)\left(\tan 30^0.\tan 60^0\right)\left(\tan 40^0.\tan 50^0\right)=\left(\tan 10^0.\cot 10^0\right).....=1$

e) $E=\cos 20^0+\cos 40^0+\cos 60^0+...+\cos 180^0$

$E=\left(\cos 20^0+\cos 160^0\right)+\left(\cos 40^0+\cos 140^0\right)+...+\cos 180^0=-1$

($\cos 160^0=\cos\left(180^0-20^0\right)=-\cos 20^0$; tương tự những phần còn lại nên $\cos 20^0+\cos 160^0=0$)

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

1. Nhận biết:

Câu 1: Góc có số đo 120^0 được đổi sang số đo rad là :

A. 120π B. $\frac{3\pi}{2}$ C. 12π D. $\frac{2\pi}{3}$

Câu 2: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

A. $\cos 45^o=\sin 135^o$. B. $\cos 120^o=\sin 60^o$. C. $\cos 45^o=\sin 45^o$. D. $\cos 30^o=\sin 120^o$.

Câu 3: Mỗi khẳng định sau đúng hay sai: Với mọi Với mọi α; β ta có:

A. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ C. $\tan(\alpha+\beta)=\tan\alpha+\tan\beta$

B. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. D. $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$

Câu 4: Mỗi khẳng định sau đúng hay sai: Với mọi Với mọi α; β ta có:

A. $\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha}=\tan 2\alpha$ C. $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$

B. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ D. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

Câu 5: $\sin\dfrac{3\pi}{10}$ là:

A. $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ B. $\cos\dfrac{\pi}{5}$ C. $1-\cos\dfrac{\pi}{5}$ D. $-\cos\dfrac{\pi}{5}$

2. Thông hiểu:

Câu 6: Biểu thức $A=\sin(\pi+x)-\cos(\dfrac{\pi}{2}-x)+\cot(-x+\pi)+\tan(\dfrac{3\pi}{2}-x)$ có biểu thức rút gọn là:

A. $A=2\sin x$. **B.** $A=-2\sin x$ **C.** $A=0$. **D.** $A=-2\cot x$.

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**:

A. $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$ **B.** $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$

C. $\sin^4x+\cos^4x=1-2\sin^2x\cos^2x$ **D.** $\sin^6x+\cos^6x=1-\sin^2x\cos^2x$

Câu 8: Tính giá trị của biểu thức $P=\tan\alpha-\tan\alpha\sin^2\alpha$ nếu cho $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$ $(\pi\langle\alpha\langle\dfrac{3\pi}{2})$

A. $\dfrac{12}{15}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $\dfrac{1}{3}$ D. 1

Câu 9: Cho $\cos x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<0\right)$ thì $\sin x$ có giá trị bằng :

A. $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{-3}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 10: Biết $\sin a=\dfrac{5}{13}$; $\cos b=\dfrac{3}{5}$ $(\dfrac{\pi}{2}<a<\pi;\ 0<b<\dfrac{\pi}{2})$ Hãy tính $\sin(a+b)$.

A. 0 **B.** $\frac{63}{65}$ **C.** $\frac{56}{65}$ <u>**D.**</u> $\frac{-33}{65}$

Câu 11: Với mọi số nguyên k, khẳng định nào sau đây là <u>**sai**</u>?

A. $\cos(k\pi) = (-1)^k$ B. $\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}) = (-1)^k$

<u>C.</u> $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}) = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$

Câu 12: Giá trị $\cos[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi]$ bằng :

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ <u>**C.**</u> $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 13: Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng.Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút,biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng $6,5cm$ (lấy $\pi = 3,1416$)

<u>**A.**</u> $22054cm$ **B.** $22043cm$ **C.** $22055cm$ **D.** $22042cm$

Câu 14: Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài $10,57cm$ và kim phút dài $13,34cm$.Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là:

<u>**A.**</u> $2,77cm$. **B.** $2,78cm$. **C.** $2,76cm$. **D.** $2,8cm$.

Câu 15: Cho $\sin a + \cos a = \frac{5}{4}$. Khi đó $\sin a.\cos a$ có giá trị bằng :

A. 1 <u>**B.**</u> $\frac{9}{32}$ **C.** $\frac{3}{16}$ **D.** $\frac{5}{4}$

3. Vận dụng thấp:

Câu 16: Đơn giản biểu thức $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ta được

<u>**A.**</u> $\frac{1}{\sin x}$ **B.** cosx **C.** sinx **D.** $\frac{1}{\cos x}$

Câu 17: Cho $\cot\frac{\pi}{14} = a$.Tính $K = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7}$

A. a **B.** $-\frac{a}{2}$ <u>**C.**</u> $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{a}{4}$

Câu 18: Đơn giản biểu thức $F=\frac{\cos x\tan x}{\sin^2 x}-\cot x\cos x$

A. $\frac{1}{\sin x}$ B. $\frac{1}{\cos x}$ C.cosx <u>D.</u> sinx

Câu 19: Đơn giản biểu thức $G=(1-\sin^2 x)\cot^2 x+1-\cot^2 x$

A. $\frac{1}{\sin x}$ B. $\frac{1}{\cos x}$ C.cosx <u>D.</u> $\sin^2$x

Câu 20: Tính $M=\tan 1^0\tan 2^0\tan 3^0....\tan 89^0$

<u>A.</u> 1 **B.** 2 **C.** -1 **D.** $\frac{1}{2}$

4. Vận dụng cao:

Câu 21: Cho $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$ và gọi $M=\sin^3 x+\cos^3 x$. Giá trị của M là:

A. $M=\frac{1}{8}$. **B.** $M=\frac{11}{16}$. **<u>C.</u>** $M=-\frac{7}{16}$. **D.** $M=-\frac{11}{16}$.

Câu 22: Cho $\tan\alpha=3$. Khi đó $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{4\sin\alpha-5\cos\alpha}$ có giá trị bằng :

A. $\frac{7}{9}$. **B.** $-\frac{7}{9}$. **<u>C.</u>** $\frac{9}{7}$. **D.** $-\frac{9}{7}$.

Câu 23: Cho $\tan\alpha+\cot\alpha=m$ Tính giá trị biểu thức $\cot^3\alpha+\tan^3\alpha$.

A. m^3+3m **<u>B.</u>** m^3-3m **C.** $3m^3+m$ **D.** $3m^3-m$

Câu 24: Với giá trị nào của *n* thì đẳng thức sau luôn đúng

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}}=\cos\frac{x}{n},\ 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

A. 4. **B.** 2. **<u>C.</u>** 8. **D.** 6.

Câu 25: Biết $\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\tan^2 x}+\frac{1}{\cot^2 x}=6$. Khi đó giá trị của $\cos 2x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **<u>D.</u>** 0.

CHỦ ĐỀ 2:

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

(2 tiết)

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

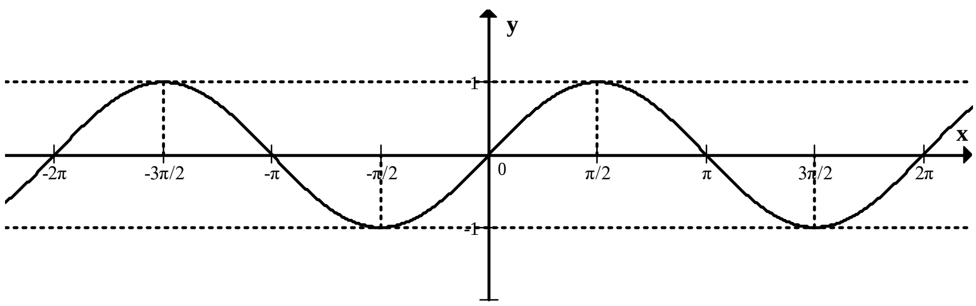
1. Hàm số y = sin x.

*/ Tập xác định: D = $\mathbb{R}$;

*/ $\forall x \in \mathbb{R}$ ta luôn có: $-1 \leq \sin x \leq 1$;

*/ Hàm số y = sin x là một hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và là một hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π.

*/ Đồ thị:



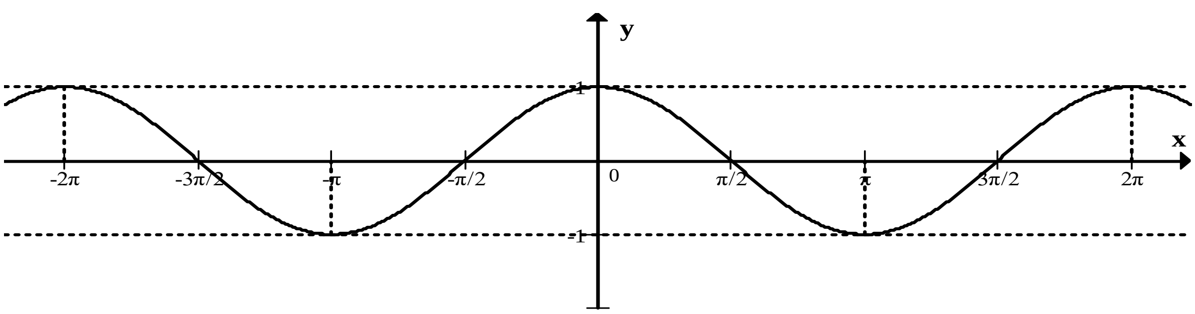
2. Hàm số y = cos x.

*/ Tập xác định: D = $\mathbb{R}$;

*/ $\forall x \in \mathbb{R}$ ta luôn có: $-1 \leq \cos x \leq 1$;

*/ Hàm số y = cos x là một hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ và là một hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π.

*/ Đồ thị:

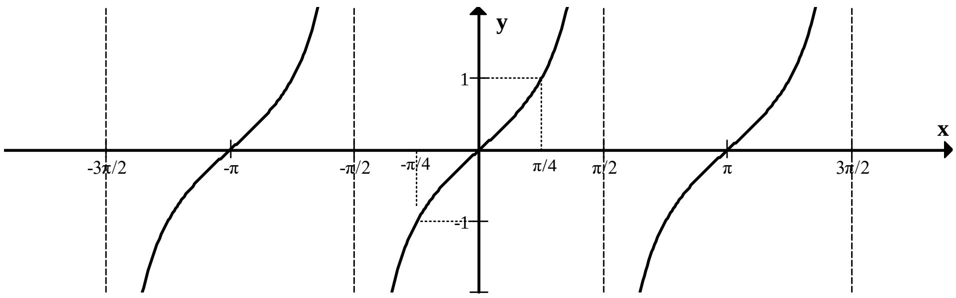


3. Hàm số y = tan x.

*/ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

*/ Hàm số y = tan x là một hàm số lẻ và là một hàm tuần hoàn với chu kỳ π;

*/ Đồ thị:

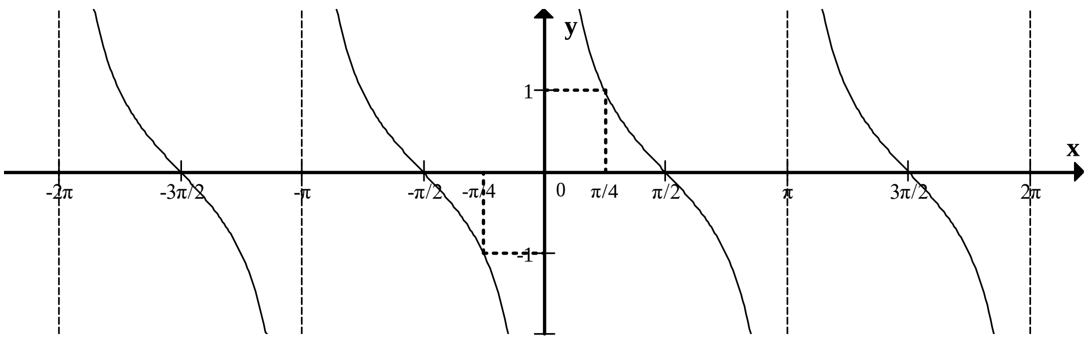


4. Hàm số y = cot x.

*/ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$;

*/ Hàm số y = cot x là một hàm số lẻ và là một hàm tuần hoàn với chu kỳ π;

*/ Đồ thị:



B. CÁC DẠNG THƯỜNG GẶP

<u>Dạng 1</u>. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

1.1 Kĩ năng cơ bản

a. D được gọi là TXĐ của hs $y = f(x) \Leftrightarrow D = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x)$ có nghĩa$\}$

b. $\frac{A}{B}$ có nghĩa khi $B \neq 0$; $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$ **;** $\frac{A}{\sqrt{B}}$ có nghĩa khi $B > 0$

c. $-1 \le \sin x \le 1$; $-1 \le \cos x \le 1$ $1 \pm \sin x \ge 0 \& 1 \pm \cos x \ge 0$

d. Các giá trị đặc biệt :

$\bullet \sin x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\bullet \cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \quad, k \in \mathbb{Z}$
$\bullet \sin x \ne 1 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\bullet \cos x \ne 1 \Leftrightarrow x \ne k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\bullet \sin x \ne -1 \Leftrightarrow x \ne -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\bullet \cos x \ne -1 \Leftrightarrow x \ne \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

e. Hàm số y = tanx xác định khi $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f. **Hàm số y = cotx xác định khi** $x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1.2 Bài tập luyện tập

Bài 1: Tìm tập xác định của các hàm số:

1/ $y = \cos 2x$

2/ $y = \sin\sqrt{3x}$

3/ $y = \sin\frac{1}{x}$

4/ $y = \cos\sqrt{x^2 - 4}$

Giải.

1/ Do $2x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

2/ Hàm số $y = \sin\sqrt{3x}$ xác định khi và chỉ khi $3x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = [0; +\infty)$.

3/ Hàm số $y = \sin\frac{1}{x}$ xác định khi và chỉ khi $\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \ne 0.$ Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4/ Hàm số $y = \cos\sqrt{x^2 - 4}$ xác định khi và chỉ khi $x^2 - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge 2 \end{array}\right.$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Bài 2: Tìm tập xác định của các hàm số:

1/ $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; 2/ $y=\sqrt{2-\cos 3x}$;

3/ $y=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; 4/ $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Giải.

1/ Hàm số $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ xác định khi và chỉ khi $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2/ Hàm số $y=\sqrt{2-\cos 3x}$ xác định khi và chỉ khi $2-\cos 3x\geq 0$. Mà $2-\cos 3x\geq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số đã cho có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

3/ Hàm số $y=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ xác định khi và chỉ khi

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0 \Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{3}\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq -\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4/ Hàm số $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ xác định khi và chỉ khi

$\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\neq 0 \Leftrightarrow 2x-\dfrac{\pi}{6}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow 2x\neq\dfrac{2\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$ Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Dạng 2: Xác định tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

2.1. Kĩ năng cơ bản

Chú ý : cos(-x) = cosx ; sin(-x) = -sinx ; tan(-x) = - tanx ; cot(-x) = -cotx

Phương pháp: Bước 1 : Tìm TXĐ: D ; Kiểm tra x $\in$D $\Rightarrow -$x$\in$D, $\forall$x

Bước 2 : Tính f(-x) ; so sánh với f(x) . Có 3 khả năng

+) Nếu f(-x) = f(x) thì f(x) là hàm số chẵn.

+) Nếu f(-x) = - f(x) thì f(x) là hàm số lẻ.

+) Nếu f(-x) $\neq$ - f(x) $\neq$ f(x) thì f(x) là hàm số không chẵn không lẻ.

Lưu ý: Một số nhận xét nhanh để xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

+ Tổng hoặc hiệu của hai hàm chẵn là hàm chẵn

+ Tích của hai hàm chẳn là hàm chẵn, tích của hai hàm lẻ là hàm chẵn

+ Tích của một hàm chẵn và hàm lẻ là hàm lẻ

+ Bình phương hoặc trị tuyệt đối của hàm lẻ là hàm chẵn (Áp dụng điều này chúng ta có thể xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác một cách nhanh chóng để làm trắc nghiệm nhanh chóng hơn nhiều).

2.2 Bài tập luyện tập

Bài tập: Xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số:

1/ $y = x^2\sin 3x$ 2/ $y = \cos x + \sin^2 x$

3/ $y = \tan x.\cos 2x$ 4/ $y = 2\cos x — 3\sin x$.

Giải.

1/ Tập xác định của hàm số $y = f(x) = x^2\sin 3x$ là $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D$ ta có:

*/ $-x \in D$;

*/ $f(-x) = (-x)^2\sin(-3x) = - x^2\sin 3x = - f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

2/ Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$ là $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D$ ta có:

*/ $-x \in D$;

*/ $f(-x) = \cos(- x) + \sin^2(- x) = \cos x + \sin^2 x = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

3/ Tập xác định của hàm số y = *f*(x) = tanx.cos2x là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$\forall x \in D$ ta có:

*/ $-x \in D$;

*/ *f*(-x) = tan(-x).cos(-2x) =- tanx.cos2x = - *f*(x).

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ trên *D*.

4/ Tập xác định của hàm số y = *f*(x) = 2cosx — 3sinx là $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, mặt khác $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq \pm f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy hàm số đã cho không phải là hàm số chẵn và cũng không phải là hàm số lẻ.

Dạng 3: Tìm tập giá trị, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

3.1 Kĩ năng cơ bản

Sử dụng các t/c sau :

- $-1 \leq \sin x \leq 1$; $-1 \leq \cos x \leq 1$; $0 \leq \sin^2 x \leq 1$; $A^2 + B \geq B$
- $-1 \leq -\sin x \leq 1, -1 \leq -\cos x \leq 1; 0 \leq \cos^2 x \leq 1$
- Hàm số y = f(x) luôn đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$; $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$
- Hàm số y = f(x) luôn nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$; $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$
- $-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\sin x + b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}$

3.2 Bài tập luyện tập

Bài tập: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

1/ $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

2/ $y = \sqrt{1 + \sin x} - 3$

Giải:

1/ Ta có $\forall x\in\mathbb{R}: -1\le\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1\Rightarrow -2\le 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 2\Rightarrow -3\le y\le 1$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 1, xảy ra khi

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Giá trị nhỏ nhất của y là -3 đạt được khi

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2/ Ta có $\forall x\in\mathbb{R}, 0\le 1+\sin x\le 2\Rightarrow 0\le\sqrt{1+\sin x}\le\sqrt{2}\Rightarrow -3\le y\le\sqrt{2}-3.$

Vậy, giá trị lớn nhất của y là $\sqrt{2}-3$, khi $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$; giá trị nhỏ nhất của y là -3, khi sin x = -1 $\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Dạng 4.Tìm chu kỳ của hàm sốlượng giác

Phương pháp giải: Khi tìm chu kì của hàm số lượng giác, ta cần biến đổi biểu thức của hàm số đã cho về một biểu thức tối giản và lưu ý rằng:

1) Hàm số y = sinx , y = cosx có chu kỳ T = 2π .

2) Hàm số y = tanx , y = cotx có chu kỳ T = π .

3) Hàm số y = sin(ax+b) , y = cos(ax+b), với $a\neq 0$ có chu kỳ $T=\frac{2\pi}{|a|}$.

4) Hàm số y = tan(ax+b) , y = cot(ax+b), với $a\neq 0$ có chu kỳ $T=\frac{\pi}{|a|}$.

5) Hàm số f_1 có chu kỳ là T_1 , hàm số f_2 có chu kỳ là T_2 thì hàm số $f_1\pm f_2$ có chu kỳ $T=BCNN(T_1,T_2)$.

Bài tập:

Bài 1. Tìm chu kỳ của hàm số $y=1-\cos\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)$

Giải: Chu kỳ $T=\frac{2\pi}{3}$

Bài 2. Tìm chu kỳ của hàm số $y = 2\cot\left(-4x - \frac{\pi}{3}\right)$

Giải: Chu kỳ $T = \frac{\pi}{|-4|} = \frac{\pi}{4}$

Bài 3. Tìm chu kỳ của hàm số $y = \cos^2 x + \tan(2x - \pi)$

Giải: ta có: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\tan(2x - \pi) \rightarrow T_2 = \frac{\pi}{2}$

Vậy chu kỳ của hàm số là: $T = BCNN\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) = \pi$

Bài 4. Tìm chu kỳ của hàm số $y = \sin x \cos 3\mathrm{x}$

Giải:

Ta có : $y = \sin x \cos 3\mathrm{x} = -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 4x$

+) Hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin 2x$ có chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

+) Hàm số $y = \frac{1}{2}\sin 4x$ có chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Vậy chu kỳ của hàm số là: $T = BCNN\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) = \pi$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

1. Nhận biết

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2}\sin x}$ là?

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ B. $D = \mathbb{R}$. C. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

Câu 2. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = \cos x$. B. $y = \sin x$ C. $y = \tan x$ D. $y = \cot x$

Câu 3. Khẳng định nào sau đây là **SAI**?

A. Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là $[0; \pi]$.

B. Hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.
C. Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.
D. Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.
Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin 2x - 5$ là:

A. -2. B. -8. C. -5. D. 3.

Câu 5. Hàm số $y = \sin 2x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ

A. π . B. 2π . C. 3π . A. 4π .

2. Thông hiểu

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là

A. $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ B. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ C. $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ D. $x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{2 - \cos x}$ là?

A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Câu 9. Biết rằng y = f(x) là một hàm số lẻ trên tập xác định D. Khẳng định nào sai?

A. f[sin(– x)] = – f(sinx). **B.** f[cos(– x)] = f(cosx).

C. sin[f(– x)] = sin[f(x)]. **D.** cos[f(– x)] = cos[f(x)].

Câu 10. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ trên tập xác định của nó?

A. $y = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$. B. $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$. C. y = $\frac{\cos x}{x + x^2}$. D. $y = \frac{\tan x}{1 + \sin^2 x}$.

Câu 11. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2\cos(x + \frac{\pi}{4})$ lần lượt là:

A. -2 và 7. B. -2 và 2. C. 5 và 9. D. 4 và 7.

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x+2$ là:

A. -20. B. -1. C. 0. D. 9.

Câu 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=4-2\cos x-\cos^2 x$ là:

A. 2. B. 5. C. 0. D. 3.

Câu 14. Tập giá trị của hàm sô $y=\tan(x-2)$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ B. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ C. $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ D. $\mathbb{R}$

Câu 15. Hàm số $y=\tan\left(-4x-\frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ

A. $-\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $-\frac{\pi}{2}$. A. $\frac{\pi}{4}$.

3. Vân dụng

Câu 16. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\tan^2 x+1}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ B. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$ C. $D=\mathbb{R}$ D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}\right\}$

Câu17. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1+\cos x}$ là?

A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R}\setminus\{k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ D. $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

Câu 18. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn trên R?

A. y = x.cos2x. B. y = (x^2+1).sinx. C. $y=\frac{\cos x}{1+x^2}$. D. $y=\frac{\tan x}{1+x^2}$.

Câu 19. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=4\sqrt{\sin x+3}-1$ lần lượt là:

A. $\sqrt{2}$ và 2. B. 2 và 4. C. $4\sqrt{2}$ và 8. D. $4\sqrt{2}-1$ và 7.

Câu 20. Hàm số $y=\sin 2x+\cos 3x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ

A. π. B. 2π. C. 3π. A. 4π.

Câu 21. Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=3-\sqrt{1-\cos x}$ bằng:

A. $6-\sqrt{2}$. B. $4+\sqrt{2}$. C. $4-\sqrt{2}$. D. $2+\sqrt{2}$.

4. Vân dụng cao

Câu 22. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\sqrt{2m+1-\cos x}$ xác định trên R là

A. $m\geq 0$. B. $m\leq 1$ C. $m\geq 1$ D. $m\geq -1$

Câu 23. Gọi S là tập giá trị của hàm số $y=\frac{\sin^2 x}{2}+3-\frac{3}{4}\cos 2x$. Khi đó tổng các giá trị nguyên của S là:

A. 3. B. 4. C. 6 . D. 7.

Câu 24. Với các giá trị nào của m thì hàm số $y=\tan x-2(m^2-1)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số lẻ?

A. $m=\pm 2$. B. $m=\pm 1$ C. $m=\pm\sqrt{2}$ D. $m\pm\frac{1}{2}$

Câu 25. Hàm số $y=\cos(2x+1)-\frac{1}{2}\sin(\frac{2x}{m}-3), m\in\mathbb{N}^*$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 3π thì giá trị của m bằng

A. 1. B. 3. C. 6 . A. 2 .

CHỦ ĐỀ 3:
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
(5 tiết)

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Giải và biện luận phương trình $\sin x = m$ **(1)**

Bước1: Nếu |m|>1 phương trình vô nghiệm

Bước 2: Nếu |m| ≤ 1 ,ta xét 2 khả năng

- Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua sin của góc đặc biệt ,giả sử α khi đó phương trình sẽ có dạng đặc biệt.

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. ,k \in \mathbb{Z}$$

- Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua sin của góc đặc biệt khi đó ta có:

$$\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right. ,k \in \mathbb{Z}$$

- Các trường hợp đặc biệt:

+) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

+) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

+) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

2. Giải và biện luận phương trình lượng giác $\cos x = m \quad (b)$

Bước 1: Nếu $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm .

Bước 2: Nếu $|m| \le 1$ ta xét 2 khả năng:

- **Khả năng 1:** Nếu m được biểu diễn qua cos của góc đặc biệt, giả sử góc α. Khi đó phương trình có dạng

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad ,k \in \mathbb{Z}$$

- **Khả năng 2:** Nếu m không biểu diễn được qua cos của góc đặc biệt khi đó

Ta có: $\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{array}\right. \quad ,k \in \mathbb{Z}$

- Các trường hợp đặc biệt:

+) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

+) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

+) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

3. Giải và biện luận phương trình lượng giác $\tan x = m \quad (c)$

Bước 1: Đặt điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$

Bước 2: Xét 2 khả năng

- **Khả năng 1:** Nếu m được biểu diễn qua tan của góc đặc biệt , giả sử α khi đó phương trình có dạng

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$$

- **Khả năng 2:** Nếu m không biểu diễn được qua tan của góc đặc biệt , khi đó ta được

$$\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$$

<u>Nhận xét:</u> Như vậy với mọi giá trị của tham số phương trình luôn có nghiệm

4. Giải và biện luận phương trình lượng giác $\cot x = m \qquad (d)$

Bước1: Đặt điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Bước 2: Xét 2 khả năng

-Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cot của góc đặc biệt , giả sử α khi đó phương trình có dạng

$$\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$$

-Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua cot của góc đặc biệt , khi đó ta được

$$\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$$

Nhận xét: Như vậy với mọi giá trị của tham số phương trình (d) luôn có nghiệm.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

I. Các phương trình lượng giác cơ bản.

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$a)\sin x = \sin\frac{\pi}{12}$ $\quad$ $b)\sin 2x = -\sin 36^0$ $\quad$ $c)\sin 3x = \frac{1}{2}$ $\quad$ $d)\sin x = \frac{2}{3}$

Giải

$$a)\sin x = \sin\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$b)\sin 2x = -\sin 36^0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-36^0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -36^0 + k360^0 \\ 2x = 180^0 - \left(-36^0\right) + k360^0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -36^0 + k360^0 \\ 2x = 216^0 + k360^0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -18^0 + k180^0 \\ x = 108^0 + k180^0 \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$c)\sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$d)\sin x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\arcsin\frac{2}{3}+k2\pi\\x=\pi-\arcsin\frac{2}{3}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

$a)\cos x=cos\frac{\pi}{4}$ $\quad b)\cos\left(x+45^0\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad c)cos4x=-\frac{\sqrt{2}}{2};$ $\quad d)\cos x=\frac{3}{4}$

Giải

$$a)\cos x=cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$b)\cos\left(x+45^0\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x+45^0\right)=cos45^0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+45^0=45^0+k360^0\\x+45^0=-45^0+k360^0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=45^0+k360^0\\x=-90^0+k360^0\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$c)cos4x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow cos4x=cos\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow 4x=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\frac{3\pi}{16}+k\frac{\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$d)\cos x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\pm\arccos\frac{3}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

$a)\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$ $\quad b)\tan 4x=-\frac{1}{3}$ $\quad c)\tan\left(4x-20^0\right)=\sqrt{3}$

Giải

$$a)\tan x=\tan\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$b)\tan 4x=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow 4x=\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)+k\frac{\pi}{4},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$c)\tan\left(4x-20^0\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\tan\left(4x-20^0\right)=\tan 60^0\Leftrightarrow 4x-20^0=60^0+k180^0\Leftrightarrow 4x=80^0+k180^0$$
$$\Leftrightarrow x=20^0+k45^0,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

$a)\cot 3x=\cot\frac{3\pi}{7}$ $\qquad$ $b)\cot 4x=-3$ $\qquad$ $c)\cot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Giải

$$a)\cot 3x=\cot\frac{3\pi}{7}\Leftrightarrow 3x=\frac{3\pi}{7}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{7}+k\frac{\pi}{3},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$b)\cot 4x=-3\Leftrightarrow 4x=\arctan\left(-3\right)+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\arctan\left(-3\right)+k\frac{\pi}{4},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$c)\cot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\cot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cot\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k\pi\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

II. Một số phương trình lượng giác thường gặp.

2.1- Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Dạng 1: $a\sin^2 x+b\sin x+c=0\ \ (a\neq 0;a,b,c\in\mathbb{R})$ $\quad$ (1)

Cách giải: Đặt $t=\sin x$, điều kiện $|t|\leq 1$

Đưa phương trình (1) về phương trình bậc hai theo t , giải tìm t chú ý kết hợp với điều kiện rồi giải tìm x

Dạng 2: $a\cos^2 x+b\cos x+c=0\ \ (a\neq 0;a,b,c\in\mathbb{R})$ $\quad$ (2)

Cách giải: Đặt $t=\cos x$ điều kiện $|t|\leq 1$ ta cũng đưa phương trình (2) về phương trình bậc hai theo t, giải tìm t rồi tìm x

Dạng 3: $a\tan^2 x+b\tan x+c=0\ \ (a\neq 0;a,b,c\in\mathbb{R})$ $\quad$ (3)

Cách giải: Điều kiện $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\quad ,k\in\mathbb{Z}$

Đặt $t=\tan x\quad\left(t\in\mathbb{R}\right)$ ta đưa phương trình (3) về phương trình bậc hai theo t, chú ý khi tìm được nghiệm x cần thay vào điều kiện xem thoả mãn hay không

Dạng 4: $a\cot^2 x+b\cot x+c=0\ \ (a\neq 0;a,b,c\in\mathbb{R})$ $\quad$ (4)

Cách giải: Điều kiện $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi\quad k\in\mathbb{Z}$

Đặt $t=\cot x\quad\left(t\in\mathbb{R}\right)$. Ta cũng đưa phương trình (4) về phương trình bậc hai theo ẩn t.

Bài tập minh họa:

Bài tập 1: Giải phương trình $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ (1)

Giải: Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$ $, k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$ (2)

Giải: Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$ $, k \in \mathbb{Z}$

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x.\cos x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \cos 2x + 2\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad (*)$$

Ta thấy $\cos 2x = 1$ không thoả mãn điều kiện. Do đó

$(*) \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

2.2- Phương trình bậc nhất đối với $\sin x, \cos x$

a) Định nghĩa: Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ (1) trong đó a, b, c$\in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 > 0$ được gọi là phương trình bậc nhất đối với $\sin x, \cos x$

b) Cách giải. Ta có thể lựa chọn 1 trong 2 cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước

Bước 1: Kiểm tra

-Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ phương trình vô nghiệm

-Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$ khi đó để tìm nghiệm của phương trình ta thực hiện tiếp bước 2

Bước 2: Chia cả 2 vế phương trình (1) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ Vì $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2+(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2=1$ nên tồn tại góc α sao cho $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$

Khi đó phương trình (1) có dạng $\sin x.\cos\alpha+\sin\alpha.\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Đây là phương trình cơ bản của sin mà ta đã biết cách giải

Cách 2: Thực hiện theo các bước

Bước 1: Với $\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$ thử vào phương trình (1) xem có là nghiệm hay không?

Bước 2: Với $\cos\frac{x}{2}\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pi+k2\pi\quad(k\in Z)$

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}$ suy ra $\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Khi đó phương trình (1) có dạng $a\frac{2t}{1+t^2}+b\frac{1-t^2}{1+t^2}=c\Leftrightarrow(c+b)t^2-2at+c-b=0\quad(2)$

Bước 3: Giải phương trình (2) theo t , sau đó giải tìm x.

*** Dạng đặc biệt:**

- $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$

- $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$.

Chú ý: Từ cách 1 ta có kết quả sau

$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$ từ kết quả đó ta có thể áp dụng tìm GTLN và GTNN của các hàm số có dạng $y=a\sin x+b\cos x$, $y=\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}$ và phương pháp đánh giá cho một số phương trình lượng giác .

Ví Dụ minh hoạ:

Ví Dụ 1: Giải phương trình: $\sin 2x - 3\cos 2x = 3 \quad (1)$

Giải :Cách 1: Chia cả hai vế phương trình (1) cho $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ ta được

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\sin 2x - \frac{3}{\sqrt{10}}\cos 2x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Đặt $\frac{3}{\sqrt{10}} = \sin\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{10}} = \cos\alpha$. Lúc đó phương trình (1) viết được dưới dạng

$$\cos\alpha\sin 2x - \sin\alpha\cos 2x = \sin\alpha \Leftrightarrow \sin(2x-\alpha) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\alpha = \alpha + k2\pi \\ 2x-\alpha = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm

Cách 2:-Ta nhận thấy $\cos x = 0$ là nghiệm của phương trình

-Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$. Đặt $t = \tan x$,lúc đó $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Phương trình (1) sẽ có dạng $\frac{2t}{1+t^2} - 3\frac{1-t^2}{1+t^2} = 3 \Leftrightarrow 2t - 3(1-t^2) = 3(1+t^2) \Leftrightarrow t = 3$

Hay $\tan x = 3 = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad ,k\in\mathbb{Z}$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm

Cách 3: Biến đổi phương trình về dạng

$$\sin 2x = 3(1+\cos 2x) \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x = 6\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 3\cos x)\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x - 3\cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 3 = \tan\alpha \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm

Chú ý: Khi làm bài toán dạng này chúng ta nên kiểm tra điều kiện trước khi bắt tay vào giải phương trình bởi có một số bài toán đã cố tình tạo ra những phương trình không thoả mãn điều kiện. Ta xét ví dụ sau:

Ví Dụ 2: Giải phương trình $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + \cos 2x \qquad (2)$

Giải:

Ta biến đổi phương trình (2)

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}(1+\cos 2x) = 3 + \cos 2x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + (\sqrt{2}-1)\cos 2x = 3 - \sqrt{2}$$

$a = \sqrt{2}$; $b = \sqrt{2} - 1$; $c = 3 - \sqrt{2}a^2 + b^2 = 2 + (\sqrt{2}-1)^2 = 5 - 2\sqrt{2}$

$c^2 = (3-\sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2}$

Suy ra $a^2 + b^2 < c^2$ Vậy phương trình đã cho vô nghiệm .

Ngoài ra chúng ta cần lưu ý rằng việc biến đổi lượng giác cho phù hợp với từng bài toán sẽ biểu diễn chẵn các họ nghiệm . Ta xét ví dụ sau

Ví Dụ 3: Giải phương trình: $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$ (4)

Giải:

(4) $\Leftrightarrow$

$$\cos 7x + \sqrt{3}\sin 7x = \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 7x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 7x = \cos\frac{\pi}{6}\cos 5x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 5x \quad \Leftrightarrow \cos(7x - \frac{\pi}{3}) = \cos(5x - \frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x - \frac{\pi}{3} = 5x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 7x - \frac{\pi}{3} = \pi - (5x - \frac{\pi}{6}) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 12x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{6} \end{array}\right. \quad k \in Z$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

2.3- Phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$.

a) Định nghĩa: Phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$, $\cos x$ là phương trình.

$a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d$ (1) trong đó a, b, c, d $\in \mathbb{R}$

b) Cách giải :

Chia từng vế của phương trình (1) cho một trong ba hạng tử $\sin^2 x, \cos^2 x$ hoặc $\sin x.\cos x$. Chẳng hạn nếu chia cho $\cos^2 x$ ta làm theo các bước sau:

Bước 1: Kiểm tra:

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ xem nó có phải là nghiệm của phương trình(1) hay không?

Bước 2: Với $\cos x \neq 0$ chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ lúc đó phương trình (1) trở thành

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = d(1+\tan^2 x) \Leftrightarrow (a-d)\tan^2 x + b\tan x + c - d = 0$$

Đây là phương trình bậc hai theo tan ta đã biết cách giải.

Cách 2: Dùng công thức hạ bậc $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin x.\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

đưa phương trình đã cho về phương trình $b\sin 2x + (c-a)\cos 2x = d - c - a$

Đây là phương trình bậc nhất đối với sin và cos ta đã biết cách giải

***Chú ý:** Đối với phương trình đẳng cấp bậc n (n$\geq$3) với dạng tổng quát

$A(\sin^n x, \cos^n x, \sin^k x\cos^h x) = 0$ trong đó $k + h = n;\ k, h, n \in \mathbb{N}$

Khi đó ta cũng làm theo 2 bước :

Bước 1: Kiểm tra xem $\cos x = 0$ có phải là nghiệm của phương trình hay không?

Bước 2: Nếu $\cos x \neq 0$.Chia cả hai vế của phương trình trên cho $\cos^n x$ ta sẽ được phương trình bậc n theo $\tan$. Giải phương trình này ta được nghiệm của phương trình ban đầu.

Ví Dụ Minh Hoạ:

Ví Dụ 1: Giải phương trình : $2\sqrt{3}\cos^2 x + 6\sin x.\cos x = 3 + \sqrt{3}$ (1)

Giải: Cách 1: Phương trình

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3}(1+\cos 2x) + 3\sin 2x = 3 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: +) Thử với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ vào phương trình (1) ta có $0 = 3 + \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ vô lí.Vậy $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm của phươngtrình.

+)Với $\cos x \neq 0$ Chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$2\sqrt{3}+6\tan x=(3+\sqrt{3})(1+\tan^2 x)\Leftrightarrow(3+\sqrt{3})\tan^2 x-6\tan x+3-\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\tan\alpha\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\alpha+k\pi\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm

*** Chú ý:** Không phải phương trình nào cũng ở dạng thuần nhất ta phải thực hiện

một số phép biến đổi thích hợp

Ví Dụ 2: Giải phương trình: $\sin^3(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin x$ (2)

Giải : Ta nhận thấy $\sin(x-\frac{\pi}{4})$ có thể biểu diễn được qua $\sin x-\cos x$. Luỹ thừa bậc ba biểu thức

$\sin x-\cos x$

ta sẽ đưa phương trình về dạng thuần nhất đã biết cách giải

Phương trình (2) $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin^3(x-\frac{\pi}{4})=4\sin x\Leftrightarrow\left[\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]^3=4\sin x$

$$\Leftrightarrow(\sin x-\cos x)^3=4\sin x$$

+) Xét với $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\quad k\in\mathbb{Z}$. Khi đó phương trình có dạng

$\Leftrightarrow\sin^3(\frac{\pi}{2}+k\pi)=4\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)\Rightarrow$ mâu thuẫn Vậy phương trình không nhận $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ làm nghiệm

+) Với $\cos x\neq 0$. Chia cả hai vế của phương trình (2) cho $\cos^3 x$ ta được :

$$(\tan x-1)^3=4(1+\tan^2 x)\tan x\Leftrightarrow 3\tan^3 x+3\tan^2 x+\tan x-1=0.$$

Đặt $t=\tan x$ phương trình có được đưa về dạng:

$$3t^3+3t^2+t-1=0\Leftrightarrow(t+1)(3t^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\qquad k\in\mathbb{Z}$$

Họ nghiệm trên thoả mãn điều kiện của phương trình .Vậy phương trình có duy nhất 1 họ nghiệm

***Chú ý:** Ngoài phương pháp giải phương trình thuần nhất đã nêu ở trên có những phương trình có thể giải bằng phương pháp khác tuỳ thuộc vào từng bài toán để giải sao cho cách giải nhanh nhất ,khoa học nhất.

Ví Dụ 3: Giải phương trình: $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=1+\sin 2x$ (3)

Giải :

Điều kiện $\begin{cases}\cos x \neq 0 \\ \tan x = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4}+k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng : $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\left(\cos x+\sin x\right)^2$

$$\Leftrightarrow \cos x-\sin x=\left(\cos x+\sin x\right)^3$$

Chia cả hai vế của phương trình (3) cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được :

$$1+\tan^2 x-\left(1+\tan^2 x\right)\tan x=\left(1+\tan x\right)^3 \Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x+2\tan x=0 \Leftrightarrow \left(\tan^2 x+\tan x+2\right)\tan x=0 \quad (*)$$

(do $\tan^2 x+\tan x+2=0$ vô nghiệm) nên:

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \tan x=0 \Leftrightarrow x=k\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$ Vậy phương trình có một họ nghiệm

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\left(\cos x+\sin x\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cot(x+\frac{\pi}{4})=\frac{2}{1+\cot^2(x+\frac{\pi}{4})}$$

Đặt $t=\cot(x+\frac{\pi}{4})$ ta được :

$$t=\frac{2}{1+t^2} \Leftrightarrow t^3+t-2=0 \Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(t^2+t+2\right)=0 \Leftrightarrow t=1 \ hay \ \cot(x+\frac{\pi}{4})=1$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm

2.4-Phương trình đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$.

a) Định nghĩa: Phương trình đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình dạng

$a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x+c=0$ trong đó $a,b,c\in\mathbb{R}$ (1)

b) Cách giải:

Cách 1: Do $a(\sin x+cosx)^2=1+\sin x\cos x$ nên ta đặt

$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)$. Điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

Suy ra $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$ và phương trình (1) được viết lại: $bt^2+2at-(b+2c)=0$

Đó là phương trình bậc hai đã biết cách giải

Cách 2: Đặt $t=\frac{\pi}{4}-x$ thì $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\sqrt{2}\cos t$

$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}-2x)=\frac{1}{2}\cos 2t=\cos^2 t-\frac{1}{2}$ nên phương trình (1) trở thành

$b\cos^2 x+\sqrt{2}\cos x-\frac{b}{2}+c=0$. Đây là phương trình bậc hai đã biết cách giải

***Chú ý:** Hai cách giải trên có thể áp dụng cho phương trình $a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x+c=0$ bằng cách đặt $t=\sin x-\cos x\Rightarrow$ $\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$

Ví Dụ Minh Hoạ :

Ví Dụ 1: Giải phương trình $\sin x+\cos x-2\sin x\cos x+1=0$ (1)

Giải:

Cách 1: Đặt $\sin x+\cos x=t$ điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$. Lúc đó $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

Khi đó phương trình (1) sẽ có dạng $t-2(\frac{t^2-1}{2})+1=0\Leftrightarrow t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=2\end{array}\right.$ (*)

Với $t=2$ không thoả mãn điều kiện nên

$(*) \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Cách 2: Đặt $z = \frac{\pi}{4} - x$. Khi đó phương trình có dạng

$$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) - \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z - \sin 2(\frac{\pi}{4} - z) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z - \sin(\frac{\pi}{2} - z) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z - \cos 2z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z - (2\cos^2 z - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2 z + \sqrt{2}\cos z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos z = \sqrt{2} \\ \cos z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \quad (*')$$

Ta thấy $\cos z = \sqrt{2}$ không thoả mãn

Do đó $(*') \Leftrightarrow \cos z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ z = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} - x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{\pi}{4} - x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} - k2\pi \\ x = \pi - k2\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm

Ví Dụ 3: Giải phương trình $\tan x - \sqrt{3}\cot x - \sin x + \sqrt{3}\cos x + 1 - \sqrt{3} = 0$ (3)

Giải:Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

$(3) \Leftrightarrow \tan x - \sin x - \sqrt{3}(\cot x - \cos x) + 1 - \sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x}(\sin x - \sin x\cos x + \cos x) - \frac{\sqrt{3}}{\sin x}(\sin x - \sin x.\cos x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\frac{1}{\cos x} - \frac{\sqrt{3}}{\sin x})(\sin x - \sin x.\cos x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{\cos x} - \frac{\sqrt{3}}{\sin x} = 0 & (4) \\ \sin x - \sin x.\cos x + \cos x = 0 & (5) \end{array}\right.$$

Giải (4) $\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Giải (5): Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) \quad |t| \leq \sqrt{2}$ (*)Suy ra $\sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Phương trình (5) trở thành $t - \frac{t^2-1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 - \sqrt{2} \\ t = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (*) thì $t = 1 + \sqrt{2}$ bị loại

Với $t = 1 - \sqrt{2}$ ta có $\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \cos\alpha$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \pm\alpha + l2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \alpha + l2\pi \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ l \in \mathbb{Z}$$

Các nghiệm của phương trình (4) và (5) đều thoả mãn điều kiện của phương trình

Ví Dụ 3: Giải phương trình: $8\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin 2x} = \tan^2 x + \cot^2 x$ (2)

Giải: Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$ ***. Phương trình***

(2) $\Leftrightarrow 8(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x) = 2\sin 2x(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}) \Leftrightarrow 8 - 6\sin^2 2x = 4\sin 2x.\frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{\sin^2 2x}$

$$\Leftrightarrow (8 - 6\sin^2 2x)\sin 2x = 4 - 2\sin^2 2x \Leftrightarrow 3\sin^3 2x - \sin^2 2x - 4\sin 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2x - 1)(3\sin^2 2x + 2\sin 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x - 1 = 0 \\ 3\sin^2 2x + 2\sin 2x - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \qquad \text{(loại)} \\ \sin 2x = \frac{\sqrt{7} - 1}{3} = \sin\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \\ x = \pi - \alpha + k\pi \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Các nghiệm đều thoả mãn điều kiện $\sin 2x \neq 0$

D. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. $\left\{x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $\cos 2x=\frac{1}{2}$ <u>B.</u> $\tan x=1$ C. $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\cot x=\sqrt{3}$

Câu 2. Phương trình $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan 3x$ có các nghiệm là:

A. $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ B. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ C. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

<u>D.</u> $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Câu 3: Phương trình: $\sin\left(\frac{2x}{3}-60^0\right)=0$ có nhghiệm là:

A. $x=\pm\frac{5\pi}{2}+\frac{k3\pi}{2}$ **B.** $x=k\pi$ **C.** $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ **<u>D.</u>** $x=\frac{\pi}{2}+\frac{k3\pi}{2}$

Câu 4: Nghiệm của phương trình: sin x + cos x = 1 là:

A. $x=k2\pi$ **<u>B.</u>** $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$ **C.** $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$ **D.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$

Câu 5: Giải phương trình lượng giác: $2\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}=0$ có nghiệm là:

A. $x=\pm\frac{5\pi}{3}+k2\pi$ **B.** $x=\pm\frac{5\pi}{6}+k2\pi$ **C.** $x=\pm\frac{5\pi}{6}+k4\pi$ **<u>D.</u>** $x=\pm\frac{5\pi}{3}+k4\pi$

Câu 6: Điều kiện để phương trình $3\sin x+m\cos x=5$ vô nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l}m\le -4\\ m\ge 4\end{array}\right.$ **B.** $m>4$ **C.** $m<-4$ **<u>D.</u>** $-4<m<4$

Câu7: Phương trình lượng giác: $\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ **B.** Vô nghiệm **<u>C.</u>** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ **D.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Câu 8: Điều kiện để phương trình $m.\sin x-3\cos x=5$ có nghiệm là:

A. $m \ge 4$ **B.** $-4 \le m \le 4$ **C.** $m \ge \sqrt{34}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m \le -4 \\ m \ge 4 \end{array}\right.$

Câu 9. Nghiệm của phương trình $\sin 3x - \cos x = 0$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Câu 10. Nghiệm của phương trình $\sin\left(\pi \cos x\right) = 1$ là:

A. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 11. Các nghiệm của phương trình $\sin x - \cos 2x - 2 = 0$ là:

A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 12. Nghiệm của phương trình $\cos(3x + \pi) = 1$ trên khoảng $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $-\frac{\pi}{6}$ **B.** $-\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

Câu 11. Phương trình $3 + 2\sin x \sin 3x = 3\cos 2x$ là:

A. $\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 12. Các nghiệm của phương trình $\sqrt{2}\left(\sin x + \cos x\right) = \frac{1}{2}\cos 2x$ là:

A. $\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $-\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 13: Nghiệm dương bé nhất của phương trình: $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ là:

A. $x = \frac{\pi}{6}$ **B.** $x = \frac{\pi}{2}$ **C.** $x = \frac{3\pi}{2}$ **D.** $x = \frac{5\pi}{6}$

Câu 14: Nghiệm của phương trình lượng giác: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ thõa điều kiện $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$ là:

A. $x = \dfrac{\pi}{3}$ **B.** $x = \dfrac{\pi}{2}$ **C.** $x = \dfrac{\pi}{6}$ **D.** $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Câu 15: Phương trình nào sau đây vô nghiệm:

A. $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$ **B.** $3\sin x - 4\cos x = 5$

C. $\sin x = \cos\dfrac{\pi}{4}$ **D.** $\sqrt{3}\sin x - \cos x = -3$

Câu 16. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ thuộc đoạn $[\pi; 2\pi]$ là:

A. 1 B. 2 **C.** 0 D. 3

Câu 17: Số nghiệm của phương trình: $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \le x \le 5\pi$ là:

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Câu 18: Số nghiệm của phương trình: $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$ với $0 \le x \le 2\pi$ là:

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Câu 19: Nghiệm của phương trình lượng giác: $\cos^2 x - \cos x = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \pi$ là:

A. $x = \dfrac{\pi}{2}$ **B.** x = 0 **C.** $x = \pi$ **D.** $x = \dfrac{-\pi}{2}$

Câu 20: Phương trình: $\sqrt{3}.\sin 3x + \cos 3x = -1$ tương đương với phương trình nào sau đây:

A. $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ **B.** $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$ **C.** $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ **D.** $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

Câu 21: Tìm m để pt $\sin 2x + \cos^2 x = \dfrac{m}{2}$ có nghiệm là:

A. $1 - \sqrt{5} \le m \le 1 + \sqrt{5}$ **B.** $1 - \sqrt{3} \le m \le 1 + \sqrt{3}$ **C.** $1 - \sqrt{2} \le m \le 1 + \sqrt{2}$ **D.** $0 \le m \le 2$

Câu 22: Nghiệm dương nhỏ nhất của pt (2sinx – cosx) (1+ cosx) = $\sin^2 x$ là:

A. $x = \dfrac{\pi}{6}$ **B.** $x = \dfrac{5\pi}{6}$ **C.** $x = \pi$ **D.** $\dfrac{\pi}{12}$

Câu 23: Tìm m để pt $2\sin^2 x + m.\sin 2x = 2m$ vô nghiệm:

A. $0 < m < \frac{4}{3}$ **B.** $0 \le m \le \frac{4}{3}$ **C.** $m \le 0; m \ge \frac{4}{3}$ **D.** $m < 0$; $m \ge \frac{4}{3}$

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$ là:

A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 25: Nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ của pt sin4x + cos5x = 0 theo thứ tự là:

A. $x = -\frac{\pi}{18}; x = \frac{\pi}{6}$ **B.** $x = -\frac{\pi}{18}; x = \frac{2\pi}{9}$

C. $x = -\frac{\pi}{18}; x = \frac{\pi}{2}$ **D.** $x = -\frac{\pi}{18}; x = \frac{\pi}{3}$

KIỂM TRA CUỐI CHUYÊN ĐỀ LƯỢNG GIÁC

CHỦ ĐỀ		Mức độ nhận thức				TỔNG
		Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng thấp	Vận dụng cao	
Cung và góc lượng giác. Giá trị lượng giác của một cung. Công thức lượng giác (3)	Số câu	2	3	2	1	**8**
	Số điểm	0.8	1.2	0.8	0.4	**3.2**
Hàm số lượng giác (2)	Số câu	2	1	1	1	**5**
	Số điểm	0.8	0.4	0.4	0.4	**2**
Phương trình lượng giác cơ bản và thường gặp (4)	Số câu	4	3	3	2	**12**
	Số điểm	1.6	1.2	1.2	0.8	**4.8**
CỘNG	Số câu	**8**	**7**	**6**	**4**	**25**
	Số điểm	**3.2**	**2.8**	**2.4**	**1.6**	**10**

Câu 1: Khi biểu diễn trên đường tròn lượng giác các cung lượng giác nào trong các cung lượng giác có số đo dưới đây có cùng ngọn cung với cung lượng giác có số đo 4200^0.

A. 130^0. **B.** 120^0. **C.** -120^0. **D.** 420^0.

Câu 2: Biểu thức $\sin^2 x.\tan^2 x + 4\sin^2 x - \tan^2 x + 3\cos^2 x$ không phụ thuộc vào x và có giá trị bằng :

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 3: Trên đường tròn định hướng góc A có bao nhiêu điểm M thỏa mãn sđ $\overset{\frown}{AM} = 30^0 + k45^0, k \in \mathbb{Z}$?

A. 6 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 10

Câu 4: Kết quả rút gọn của biểu thức $\left(\dfrac{\sin\alpha + \tan\alpha}{\cos\alpha + 1}\right)^2 + 1$ bằng:

A. 2 **B.** 1 + tanα **C.** $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ **D.** $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Câu 5: Giả sử $A=\tan x.\tan(\frac{\pi}{3}-x)\tan(\frac{\pi}{3}+x)$ được rút gọn thành $A=\tan nx$. Khi đó n bằng :

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **<u>D.</u>** 3.

Câu 6: Tính $B=\frac{1+5\cos\alpha}{3-2\cos\alpha}$, biết $\tan\frac{\alpha}{2}=2$.

A. $-\frac{2}{21}$ **B.** $\frac{20}{9}$ **C.** $\frac{2}{21}$ **<u>D.</u>** $-\frac{10}{21}$

Câu 7: Ta có $\sin^4 x=\frac{a}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{b}{8}\cos 4x$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Khi đó tổng $a+b$ bằng :

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **<u>D.</u>** 4.

Câu 8: Nếu tanα và tanβ là hai nghiệm của phương trình $x^2-px+q=0$ và cotα và cotβ là hai nghiệm của phương trình $x^2-rx+s=0$ thì rs bằng:

A. pq **B.** $\frac{1}{pq}$ **<u>C.</u>** $\frac{p}{q^2}$ **D.** $\frac{q}{p^2}$

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{2}\sin x}$ là?

<u>A.</u> $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$ B. $D=\mathbb{R}$. C. $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

Câu 10. Khẳng định nào sau đây là **SAI**?

<u>A.</u> Hàm số $y=\cot x$ có tập giá trị là $[0;\pi]$.

B. Hàm số $y=\sin x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.

C. Hàm số $y=\cos x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.

D. Hàm số $y=\tan x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ là

<u>A.</u> $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 12. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn trên R?

A. y = x.cos2x. B. y = $(x^2 + 1)$.sinx. <u>C</u>. y = $\frac{\cos x}{1+x^2}$. D. $y=\frac{\tan x}{1+x^2}$.

Câu 13. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=4\sqrt{\sin x+3}-1$ lần lượt là:

A. $\sqrt{2}$ và 2. B. 2 và 4. C. $4\sqrt{2}$ và 8. D. $4\sqrt{2}-1$ và 7.

Câu 14. Gọi S là tập giá trị của hàm số $y=\frac{\sin^2 x}{2}+3-\frac{3}{4}\cos 2x$. Khi đó tổng các giá trị nguyên của S là:

A. 3. B. 4. C. 6 . D. 7.

Câu 15. Cho biết $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ là họ nghiệm của phương trình nào sau đây ?

A) $2\sin x-\sqrt{3}=0$ B) $2\sin x+\sqrt{3}=0$

C) $2\cos x-\sqrt{3}=0$ D) $2\cos x+\sqrt{3}=0$

Câu 16. Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm

A. 3sinx – 5 = 0 B. 2cos3x – 1 = 0 C. 2cosx + 5 = 0 D . sin3x + 2 = 0

Câu 17. Nghiệm dương bé nhất của phương trình : $2\sin^2 x+5\sin x-3=0$ là :

A. $x=\frac{\pi}{6}$ **B.** $x=\frac{\pi}{2}$ **C.** $x=\frac{3\pi}{2}$ **D.** $x=\frac{5\pi}{6}$

Câu 18. Phương trình $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ B. $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ C. $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$ D. $x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi$

Câu 19. Phương trình $2\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=1$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \vee x=k\pi$ B. $x=k\pi \vee x=k2\pi$

C. $x=\frac{\pi}{8}+k\pi \vee x=k\frac{\pi}{2}$ D. Đáp án khác.

Câu 20. Phương trình $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}=3\tan x+\sqrt{3}$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ B. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi$

C. $x = k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ D. $x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi,\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

Câu 21. Phương trình cos2x – 7cosx - 3 = 0 có nghiệm là

A). $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ B). $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$

C). $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ D). $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

Câu 22. Phương trình $6\sin^2 x + 7\sqrt{3}\sin 2x - 8\cos^2 x = 6$ có các nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$

Câu 23. Phương trình $\sin^4$x + $\cos^4$x = 2cos2x - 1.

A) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ B) $x = \pi + k2\pi$ C) $x = k\pi$ D) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Câu 24. Phương trình $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}\left(\sin 6x + \cos 8x\right)$ có các họ nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{7} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{7} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$

Câu 25. Cho phương trình $\cos 5x\cos x = \cos 4x\cos 2x + 3\cos^2 x + 1$. Các nghiệm thuộc khoảng $\left(-\pi;\pi\right)$của phương trình là:

A. $-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}$ B. $-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}$ C. $-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}$ D. $-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}$

Chuyên đề. ĐẠI SỐ TỔ HỢP (9 tiết).
Tiết 1+2+3: QUY TẮC ĐẾM – HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. QUY TẮC ĐẾM

a. QUY TẮC CỘNG:

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án *A* hoặc phương án *B* . Có *n* cách thực hiện phương án *A* và *m* cách thực hiện phương án *B*. Khi đó công việc có thể thực hiện bởi *n*+*m* cách.

b. QUY TẮC NHÂN:

Giả sử một công việc nào đó bao gồm hai công đoạn *A* và *B* . Công đoạn *A* có thể làm theo *n* cách. Với mỗi cách thực hiện công đoạn *A* thì công đoạn *B* có thể làm theo *m* cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo *n.m* cách**.**

2. HOÁN VỊ .

- Định nghĩa. Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó

- Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là. $P_n = n! = n(n-1)(n-2)...1.$

- Chú ý: 0! = 1

3. CHỈNH HỢP.

- Định nghĩa. Cho một tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho

- Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

II. KĨ NĂNG VẬN DỤNG

- Biết vận dụng quy tắc cộng, quy tắc nhân, hoán vị và chỉnh hợp kết hợp với sử dụng MTCT để giải các bài toán cơ bản và các bài toán thực tế.

- Cách sử dụng MTCT để tính

a) Tính n^k:

Tổ hợp phím: n $\boxed{\wedge}$ k $\boxed{=}$

hoặc: n $\boxed{x^y}$ k $\boxed{=}$

b) Tính n!:

Tổ hợp phím: n $\boxed{\text{SHIFT}}$ x! $\boxed{=}$

c)Tính $\mathbf{A_n^k}$:

Tổ hợp phím: n $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{n\text{Pr}}$ k $\boxed{=}$

Ví dụ: Tính A_{15}^3

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài tập 1. Trong một trường, khối 11 có 308 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một học sinh khối 11 đi tham dự cuộc thi “huyền thoại đường Hồ Chí Minh trên biển” cấp huyện?

Giải

Trường hợp 1. Chọn 1 học sinh nam. có 308 cách

Trường hợp 2. Chọn 1 học sinh nữ. Có 325 cách

Vậy, có 308 + 325 = 633 cách chọn một học sinh tham dự cuộc thi trên.

Bài tập 2. Hỏi có bao nhiêu đa thức bậc ba.

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mà ác hệ số a, b, c, d thuộc tập {-3,-2,0,2,3}. Biết rằng.

a) Các hệ số tùy ý;

b) Các hệ số đều khác nhau.

Lời giải.

a) Có 4 cách chọn hệ số a vì a≠0. Có 5 cách chọn hệ số b, 5 cách chọn hệ số c, 4 cách chọn hệ số d. Vậy có. *4.5.5.5 =500 đa thức.*

b) Có 4 cách chọn hệ số a (a≠0).

- Khi đã chọn a, có 4 cách chọn b.
- Khi đã chọn a và b, có 3 cách chọn c.
- Khi đã chọn a, b và c, có 2 cách chọn d.

Theo quy tắc nhân ta có. *4.4.3.2=96 đa thức.*

Bài tập 3. Một lớp trực tuần cần chọn 2 học sinh kéo cờ trong đó có 1 học sinh nam, 1 học sinh nữ. Biết lớp có 25 nữ và 15 nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 học sinh kéo cờ nói trên.

Giải

Chọn học sinh nam.có 15 cách chọn

Ứng với 1 học sinh nam, chọn 1 học sinh nữ có 25 cách chọn

Vậy số cách chọn là 15. 25=375 cách chọn.

Bài tập 4. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập ra số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau.

a. Hỏi lập được bao nhiêu số?

b. Có bao nhiêu số lẻ?

Giải.

a. Số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{abcd}$

Có 7 cách chọn a

Có 6 cách chọn b

Có 5 cách chọn c

Có 4 cách chọn d

Vậy có 7.6.5.4 = 840 số

b.

Cách 1. Số tự nhiên lẻ có bốn chữ số dạng $\overline{abcd}$

Vì số lẻ nên tận cùng là số lẻ nên d có 4 cách chọn.

Có 6 cách chọn a

Có 5 cách chọn b

Có 4 cách chọn c

Vậy có 4.6.5.4 = 480 số tự nhiên lẻ có bốn chữ số khác nhau

Cách 2.

Số tự nhiên lẻ có bốn chữ số khác nhau dạng $\overline{abc1}$ hoặc $\overline{abc3}$ hoặc $\overline{abc5}$ hoặc $\overline{abc7}$

+ Xét số dạng $\overline{abc1}$
Có 6 cách chọn a
Có 5 cách chọn b
Có 4 cách chọn c
Vậy có 6.5.4 = 120 số lẻ dạng $\overline{abc1}$
+ Tương tự các trường hợp còn lại. Vậy có 4.120 = 480 số lẻ có bốn chữ số được lập từ các số đã cho.
Bài tập 5. Từ các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. lập ra số tự nhiên có ba chữ số khác nhau.
a. Hỏi lập được bao nhiêu số.
b. Có bao nhiêu số chia hết cho 5.

Giải.

a. Số tự nhiên có ba chữ số dạng : $\overline{abc}$
Có 6 cách chọn a vì a khác không.
Có 6 cách chọn b
Có 5 cách chọn c
Vậy có 6.6.5 = 180 số
b. Số tự nhiên có ba chữ số và chia hết cho 5 dạng $\overline{ab0}$ hoặc $\overline{ab5}$
+ Xét số dạng $\overline{ab0}$
Có 6 cách chọn a và 5 cách chọn b. Vậy có 6.5 = 30 số
+ Xét số dạng $\overline{ab5}$
Có 5 cách chọn a và 5 cách chọn b. Vậy có 5.5 = 25 số
Bài tập 6. Trong giờ học môn Giáo dục quốc phòng, một tiểu đội học sinh gồm tám người được xếp thành một hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách xếp?

Giải

Mỗi cách xếp 8 người thành một hàng dọc là một hoán vị của 8 phần tử.
Vậy số cách xếp 8 người thành hàng dọc là: 8 ! = 8.7.6.5.4.3.2 = 40320 (cách xếp)
Bài tập 7. Để tạo những tín hiệu, người ta dùng 5 lá cờ màu khác nhau cắm thành hàng ngang. Mỗi tín hiệu được xác định bởi số lá cờ và thứ tự sắp xếp. Hỏi có có thể tạo bao nhiêu tín hiệu nếu.
a) Cả 5 lá cờ đều được dùng;
b) Ít nhất một lá cờ được dùng.

Giải.

a) Nếu dùng cả 5 lá cờ thì một tín hiệu chính là một hoán vị của 5 lá cờ. Vậy có 5! =120 tín hiệu được tạo ra.
b)Mỗi tín hiệu được tạo bởi k lá cờ là một chỉnh hợp chập k của 5 phần tử. Theo quy tắc cộng, có tất cả. $A_5^1 + A_5^2 + A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 325$ tín hiệu.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN.

1. Đề bài:

Câu 1. Cho 6 chữ số 2,3,4,6,7,9. Lập ra số tự nhiên có 3 chữ số. Có bao nhiêu số nhỏ hơn 400?

A. 60 B. 40 C. 72 D. 162

Câu 2. Cho 6 chữ số 2,3,4,6,7,9. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 3 chữ số được lập từ các số trên?

A. 20 B. 36 C. 24 D. 40

Câu 3. Có bao nhiêu chữ số chẵn có 4 chữ số?

A. 5400 B. 4500 C. 4800 D.50000

Câu 4. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau và khác 0? biết rằng tổng của ba số này bằng 8

A. 12 B. 8 C. 6 D. Đáp án khác

Câu 5. Từ A đến B có 3 con đường, từ B đến C có 4 con đường. Số cách đi từ A đến C(qua B) và trở về, từ C đến A(qua B) và không trở về con đường cũ là:

A. 72 B. 132 C. 18 D. 23

Câu 6. Có bao nhiêu số có 5 chữ số, các chữ số cách đều các chữ số chính giữa là giống nhau?

A.900 B.9000 C.90000 D.30240

Câu 7. Tìm số máy điện thoại có10 chữ số(có thể có) với chữ số đầu tiên là 0553?

A.151200 B.10.000 C.100.000 D.1.000.000

Câu 8. Cho các chữ số 0,1,2,3,4,5. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau và lớn hơn 300.000?

A.5!.3! B.5!.2! C.5! D.5!.3

Câu 9. Từ 2,3,5,7. Có bao nhiêu số tự nhiên X sao cho 400<X<600?

A.4! B.4^4 C.3^2 D.4^2

Câu 10. Trên giá sách có 20 cuốn sách; trong đó 2 cuốn sách cùng thể loại, 18 cuốn sách khác thể loại. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho cac cuốn sách cùng thể loại xếp kề nhau?

A.18!.2! B.18!+2! C.3.18! D.19!.2!

Câu 11. Trên giá sách muốn xếp 20 cuốn sách. Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho tập1 và tập 2 không đặt cạnh nhau?

A.20!-18! B.20!-19! C.20!-18!.2! D.19!.18

Câu 12. Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 người vào một bàn tròn?

A.6! B.5! C.2.5! D.2.4!

Câu 13. Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 người(trong đó có một cặp vợ chồng) vào một bàn tròn, sao cho vợ chồng ngồi cạnh nhau?

A.5! B.2.5! C.4! D.2.4!

Câu 14. Cô dâu và chú rễ mời 6 người ra chụp hình kỉ niệm, người thợ chụp hình. Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho cô dâu chú rễ đứng cạnh nhau?

A.8!-7! B.2.7! C.6.7! D.2!+6!

Câu 15. Có bao nhiêu số có hai chữ số là số chẵn?

A.22 B.20 C.45 D.25

Câu 16. Có bao nhiêu số có hai chữ số và các chữ số chẵn tạo thành đều là chẵn?

A.22 B.20 C.45 D.25

Câu 17. Xếp 8 người (có một cặp vợ chồng) ngồi một bàn ***thẳng*** có tám ghế, sao cho vợ chồng ngồi cạnh nhau. Có bao nhiêu cách xếp?

A.10080 B.1440 C.5040 D.720

Câu 18. Xếp 8 người (có một cặp vợ chồng) ngồi quanh một bàn ***tròn*** có tám ghế không ghi số thứ tự, sao cho vợ chồng ngồi cạnh nhau. Có bao nhiêu cách xếp?

A.10080 B. 1440 C. 5040 D. 720

Câu 19. Trong Liên đoàn bóng đá tranh AFF cúp, Việt Nam cùng 3 đội khác. Cứ 2 đội phải đấu với nhau 2 trận. 1 trận lượt đi và một trận lượt về. Đội nào có nhiều điểm nhất thì vô địch. Hỏi có bao nhiêu trận đấu?

A. 10 B. 6 C. 12 D. 15

Câu 20. Có 10 người ngồi được xếp vào một cái ghế dài. Có bao nhiêu cách xếp sao cho ông X và ông Y, ngồi cạnh nhau?

A. 10!-2 B. 8! C. 8!.2 D. 9!.2

Câu 21. Cho A={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số lẻ có 5 chữ số đôi một khác nhau?

A. 2520 B. 900 C. 1080 D.21

Câu 22: Trong một hộp bút có 2 bút đỏ, 3 bút đen và 2 bút chì. Hỏi có bao nhiêu cách để lấy một cái bút?

A.12 B. 6 C. 2 D. 7

Câu 23. Cho A={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau?

A. 1440 B. 2520 C. 1260 D. 3360

Câu 24: Cho tập $A = \{0;1;2;3;4;5;6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số và chia hết cho 2:

A. 8232 B. 1230 C. 1260 D. 2880

Câu 25: Cho các chữ số: 1,2,3,4,5,6,9. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau và không bắt đầu bởi chữ số 9 từ các chữ số trên?

A. 4320 số B. 5040 số C. 720 số D. 8640 số

2. Hướng dẫn.

Câu 1.C,vì đề không yêu cầu giống nhau, hay khác nhau nên ta gọi số có dạng $\overline{abc}$ a={2,3}(có 2 cách chọn) b,c lấy từ các số 2,3,4,6,7,9(có 6^2 cách)

Vậy có cả thảy là $2.6^2=72$.

Câu 2.B, tương tự, gọi số có dạng $\overline{abc}$: c={2,4,6}(có 3 cách chọn); a={2,3}(có 2 cách chọn); b có 6 cách chọn. Vậy có 3.2.6=36

Câu 3.B, Cũng không yêu cầu giống hay khác, gọi số có dạng $\overline{abcd}$; a (có 9 cách chọn), còn các số b,c,đều có 10 cách chọn, d có 5 cách chọn Vậy có $9.10^2.5=4500$

Câu 4.A, Gọi số có dạng $\overline{abc}$ vì tổng 3 số khác nhau bằng 8 nên ta chỉ có các cặp số(1,2,5) và (1,3,4); ứng với mỗi cặp số ta hoán vị lá 3! vậy có 2.3!

Câu 5B. Từ A ⇨ C có 12 cách đi; nhưng từ C⇨A chỉ còn 11 cách chọn, vì không trở lại con đương cũ. Vậy có 12.11

Câu 6A, gọi các số có dạng $\overline{abcba}$ hoặc $\overline{ababa}$ hoặc $\overline{abbba}$ hoặc $\overline{aaaaa}$(9) số có dạng $\overline{abcba}$ có (9.9.8+1.9.8), số có dạng $\overline{ababa}$ có (9.9), số có dạng $\overline{abbba}$ có (9.9), số có dạng $\overline{aaaaa}$ có 9 số. Vậy có 900

Câu 7D, Bài toán này cũng không yêu cầu các số đôi một khác nhau; có 4 số đứng đầu là 0553 còn lại là 6 số. Vậy có $10^6=1.000.000$

Câu 8D, Có 3 cách chọn vị trí đầu còn 5 vị trí còn lại có 5! Cách chọn. Vậy có 3.5!

Câu 9D, Bài toán không yêu cầu khác nhau; vị trí đầu chỉ có{3}, 2 vị trí còn lại là 4^2. Vậy có 1.4^2 .Nếu bài yêu cầu như vậy và có bổ sung 3 chữ số đôi một khác nhau (đápán $.3^2$)

Câu 10D, Giả sử 2 cuốn sach cùng thể loại là một quyển thì có 19! Cách xếp trên giá

sách. Nhưng vì là 2 cuốn sách nên ta hoán vị lại là 2!. Vậy có 19!.2!
Câu 11D, Dùng phương pháp bài trừ. Giả sử tập 1 và tập 2 đặt kề nhau thì như trên ta có 19!.2!; số cách xếp 20 cuốn trên giá sách là 20!. Vậy có 20!-19!.2! = 19!.18
Câu 12B, Chọn 1 người làm vị khách danh dự ngồi ở vị trí cố định vậy còn 5 người còn lại có 5! Cách xếp. Vậy có 5!
Câu 13D, Giả sử cặp vợ chồng là một người thì còn lại là 5 người, suy ra có 4!; nhưng cặp vợ chồng có thể hoán vị để ngồi kề nhau là 2!. Vậy có 4!.2!
Câu 14B, Giả sử cô dâu chú rễ là một thỉ có 7! Cách xếp, nhưng cô dâu chú rễ có thể hoán vị lại sao cho gần nhau là 2!. Vậy có 7!.2!
Câu 15**C,** Các chữ số nằm trong tập từ[10...99] là chữ số chẵn gồm hai chữ số(không yêu cầu khác nhau)
[10...20), [20...30),...[90...100) đều có 5 số. Vậy có 5.9=45
Câu 16B, Gọi số có dạng $\overline{ab}$ lấy trong tập $\{0,2,4,6,8\}$. Vậy có 4.5=20
Câu 17A, Gọi ghế là dãy $a_1a_2...a_8$; vì vợ chông luôn luôn ngồi gần nhau ta đếm là có 2.7 cách, 6 vị trí còn lại là có 6! Cách sắp xếp. Vậy có 2.7.6!=10080
Câu 18B, Có 8 ghế, nhưng trước tiên chọn vợ chồng gần nhau là vị trí danh dự(cố định); xếp 6 người vào 6 vị trí có 6! Cách, nhưng vợ chồng có thể hoán vị lại với nhau 2!. Vậy có 6!.2!=1440
Câu 19C, Ta có công thức sau $n(n-1)$, giải thích mỗi đội đấu với (n-1) tính luôn ở lượt đi và lượt về n(n-1) trận. Vậy suy ra có 4.3=12
Câu 20D, Giả sử Ông X và Y là một thì có 9! Cách sắp xếp, nhưng Ông X và Y có thể hoán đổi chỗ ngồi cho nhau là 2!. Vậy có 9!.2!.
Câu 21B.
Câu 22D
Câu 23C.
Câu 24C
Câu 25A

Tiết 4+5+6: TỔ HỢP – NHỊ THỨC NIU TƠN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. TỔ HỢP.

- **Định nghĩa.** Giả sử tập A có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

- Kí hiệu C_n^k là số các tổ hợp chập k của n phần tử ($0 \leq k \leq n$). Ta có định lí

Số các tổ hợp chập k của n phần tử ($0 \leq k \leq n$) là.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

- Tính chất của các số C_n^k

+ Tính chất 1

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

+ Tính chất 2 (Công thức Pax-can**)**

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$$

2. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU TƠN. $\forall$ n $\in$ N^*, $\forall$ cặp số (a; b) ta có.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1.a^{n-1}b + ... + C_n^k a^{n-k}b^k + ... + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$$

II. KĨ NĂNG VẬN DỤNG

- Tính được số tổ hợp chập k của n phần tử.

- Phân biệt được sự giống và khác nhau giữa hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.

- Biết cách vận dụng các công thức tính số tổ hợp để giải các bài toán thực tiễn.

- Cần biết khi nào dùng chỉnh hợp, tổ hợp và phối hợp chúng với nhau để giải toán.

- Biết tìm số hạng trong khai triển niu tơn và biết vận dụng khai triển niu tơn để tính tổng.

- Kết hợp với sử dụng MTCT để tính hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để giải nhanh các bài toán.

- Tính C_n^k bằng máy tính bỏ túi:

Tổ hợp phím: n $\boxed{nCr}$ k $\boxed{=}$

III. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài tập 1. Từ một tổ gồm 6 bạn nam và 5 bạn nữ, chọn ngẫu nhiên 5 bạn xếp vào bàn đầu theo những thứ tự khác nhau sao cho trong cách xếp trên có đúng 3 bạn nam. Hỏi có bao nhiêu cách xếp.

Giải

Để xác định số cách xếp ta phải làm theo các công đoạn như sau.

1. Chọn 3 nam từ 6 nam. có C_6^3 cách.
2. Chọn 2 nữ từ 5 nữ. có C_5^2 cách.
3. Xếp 5 bạn đã chọn vào bàn đầu theo những thứ tự khác nhau. có 5! Cách.

Từ đó ta có số cách xếp là $C_6^3.C_5^2.5! = 24000$

Bài tập 2. Một tổ chuyên môn gồm 7 thầy và 5 cô giáo, trong đó thầy P và cô Q là vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên 5 người để lập hội đồng chấm thi vấn đáp. Co bao nhiêu cách lập sao cho hội đồng có 3 thầy, 2 cô và nhất thiết phải có thầy P hoặc cô Q nhưng không có cả hai.

Giải

TH1. hội đồng gồm 3 thầy, 2 cô trong đó có thầy P nhưng không có cô Q. Khi đó ta cần chọn 2 trong 6 thầy còn lại (trừ thầy P) rồi chọn 2 trong 4 cô (trừ cô Q)

Có $C^2{}_6 . C^2{}_4 = 60$

TH2. hội đồng gồm 3 thầy, 2 cô trong đó có cô Q nhưng không có thầy P. Khi đó ta cần chọn 3 trong 6 thầy còn lại (trừ thầy P) rồi chọn 2 trong 4 cô (trừ cô Q)

Có $C^2{}_6 . C^2{}_4 = 60$

Vậy, có 120 cách lập hội đồng coi thi.

Bài tập 3. Trong khai triển của $(1+ ax)^n$ ta có số hạng thứ hai là 24x, số hạng thứ ba là $252x^2$. Hãy tìm a và n.

Giải

Ta có $(1+\mathrm{ax})^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^k$

Theo bài ra ta có.

$$\begin{cases} C_n^1 a = 24 \\ C_n^2 a^2 = 252 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} na = 24 \\ \dfrac{n(n-1)a^2}{2} = 252 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ n = 8 \end{cases}$$

Bài tập 4. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của biểu thức.

$$(x + 1)^4 + (x + 1)^5 + (x + 1)^6 + (x + 1)^7$$

Giải

Hệ số của x^5 trong khai triển của biểu thức.

$(x + 1)^4 + (x + 1)^5 + (x + 1)^6 + (x + 1)^7$ là $C_5^5 + C_6^5 + C_7^5 = 1 + \dfrac{6!}{5!1!} + \dfrac{7!}{5!2!} = 28$

Bài tập 5. Tìm hệ số của x^{31} trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$

Giải

$$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^k . \left(\frac{1}{x^2}\right)^{40-k} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{3k-80}$$

Hệ số của x^{31} là C_{40}^k với k thoả mãn điều kiện. $3k – 80 = 31 \Leftrightarrow k = 37$

Vậy hệ số của x^{31} là $C_{40}^{37} = C_{40}^3 = \dfrac{40.39.38}{1.2.3} = 9880$

Bài tập 6.

Trong khai triển của $(x+a)^3(x-b)^6$, hệ số x^7 là -9 và không có số hạng chứa x^8. Tìm a và b.

Giải.

Số hạng chứa x^7 là $\left(C_3^0.C_6^2(-b)^2 + C_3^1 a C_6^1(-b) + C_3^2 a^2 C_6^0\right)x^7$

Số hạng chứa x^8 là $\left(C_3^0C_6^1(-b)+C_3^1aC_6^0\right)x^8$. Theo bài ra ta có :

$$\begin{cases}\left(C_3^0.C_6^2(-b)^2+C_3^1aC_6^1(-b)+C_3^2a^2C_6^0\right)=-9\\ \left(C_3^0C_6^1(-b)+C_3^1aC_6^0\right)=0\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}15b^2-18ab+3a^2=-9\\ -6b+3a=0\end{cases}$$

Hay $\begin{cases}a=2b\\ b^2=1\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=-2\\ b=-1\end{cases}\end{array}\right.$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài:

Câu 1. Số tam giác xác định bởi các đỉnh của một đa giác đều 15 cạnh là:

A.78 B.455 C.1320 D.45

Câu 2. Có bao nhiêu cách phân phát 10 phần quà giống nhau cho 6 học sinh, sao cho mỗi học sinh có ít nhất một phần thưởng?

A.210 B.126 C.360 D.120

Câu 3.Có 7 trâu và 4 bò. Cần chọn ra 6 con, trong đó không ít hơn 2 bò. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

A.137 B.317 C.371 D.173

Câu 4. Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là:

A.50 B.100 C.120 D.45

Câu 5. Số giao diểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt với 5 đường tròn(Chỉ đường thẳng với đường tròn) là:

A.252 B.3024 C.50 D.100

Câu 6. Ông X có 11 người bạn. Ông ta muốn mời 5 người trong số họ đi chơi xa. Trong 11 người đó có 2 người không muốn gặp mặt nhau, vậy ông X có bao nhiêu cách mời?

A.462 B.126 C.252 D.378

Câu 7. Sáu người chờ xe buýt nhưng chỉ còn 4 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp đặt?

A.20 B.120 C.360 D.40

Câu 8. Có bao nhiêu cách phân 6 thầy giáo dạy toán vào dạy 12 lớp 12. Mỗi Thầy dạy 2 lớp

A.6 B. C_{12}^2 C. $C_{12}^2.C_{10}^2.C_8^2.C_6^2.C_4^2.C_2^2$ D. C_{12}^6

Câu 9. Hai nhân viên bưu điện cần đem 10 bức thư đến 10 địa chỉ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách phân công

A. 10^2 B.2.10! C.10.2! D. 2^{10}

Câu 10. Cho tập A= $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Số tập con của A chứa 7

A. 2^9 B. 2^8+1 C. 2^9-1 D. 2^8-1

Câu 11. Thầy giáo phân công 6 học sinh thành từng nhóm một người, hai người, ba người về ba địa điểm. Hỏi có bao nhiêu cách phân công

A.120 B.20 C.60 D.30

Câu 12. Cho tập A có 20 phần tử. Hỏi có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của A mà có số phần tử chẵn

A.2^{20} B.$\frac{2^{20}}{2}-1$ C.$2^{20}+1$` D.2^{19}

Câu 13. Cho hai đường thẳng d1, d2 song song với nhau. Trên d1 có 10 điểm phân biệt, trên d2 có 8 điểm phân biệt. Hỏi có thể lập bao nhiêu tam giác mà 3 đỉnh của mỗi tam giác lấy từ 18 điểm đã cho

A.640 B.280 C.360 D.153

Câu 14. Trong khai triển $(x^3+xy)^{15}$ số hạng chính giữa là.

A.$6435x^{31}y^7$ B. $6435x^{29}y^8$ và $6435x^{29}y^7$

C.$6435x^{31}y^7$ và $6435x^{29}y^8$. D. $6435x^{29}y^7$

Câu 15. Trong khai triển $(x-2)^{100}= a_0+a_1x^1+\ldots+a_{100}x^{100}$.

a. Hệ số a_{97} trong khai triển là:

A.1.293.600 B.-1.293.600 C. $(-2)^{97}C_{100}^{97}$ D.$(-2)^{98}C_{100}^{98}$

b. Tổng hệ số $a_0+a_1+\ldots+a_{100}$ trong khai triển là:

A.1 B.-1 C.2^{100} D.3^{100}

c. Tổng các T= $a_0-a_1-a_2+\ldots+a_{100}$ trong khai triển là:

A.1 B.-1 C.2^{100} D.3^{100}

Câu 16.Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $(x-\frac{1}{x})^n$.

Biết có đẳng thức là: $C_n^2C_n^{n-2}+2C_n^2C_n^3+C_n^3C_n^{n-3}=100$

A.15 B. 20 C.6 D. 10

Câu 17. Cho biết hệ số của số hạng thứ ba trong khai triển $\left(x-\frac{1}{3}\right)^n$ bằng 5. Tìm số hạng chính giữa của khai triển

A.$\frac{70}{243}x^4$ B.$\frac{28}{27}x^5$ C.$\frac{70}{27}x^6$ D.$\frac{-28}{27}x^5$

Câu 18. Tổng các hệ số trong khai triển $(\frac{1}{x}+x^4)^n=1024$. Tìm hệ số chứa x^5.

A.120 B.210 C.792 D.972

Câu 19.Tìm hệ số chứa x^9 trong khai triển
$(1+x)^9+(1+x)^{10}+(1+x)^{11}+(1+x)^{12}+(1+x)^{13}+(1+x)^{14}+(1+x)^{15}$.

A.3003 B.8000 C.8008 D.3000

Câu 20. Biết hệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển $(x^2\sqrt{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x})^n$ là 36. Hãy tìm số hạng thứ 8

A.84$x^3\sqrt{x}$ B.9$\frac{1}{x^6}.\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}^8$ C.36.$\frac{1}{x^6}.\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}^8$ D. $48x^3\sqrt{x}$.

Câu 21.Tìm số hạng chính giữa của khai triển $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}})^8$,với x> 0

A.70$x^{\frac{1}{3}}$ B.70$x^{\frac{1}{3}}$ và 56$x^{\frac{-1}{4}}$ C.56$x^{\frac{-1}{4}}$ D.70.$\sqrt[3]{x}.\sqrt[4]{x}$

Câu 22. Cho $A=C_n^0+5C_n^1+5^2C_n^2+...+5^nC_n^n$. Vậy

A. A=5^n B. A=6^n C. A=7^n D. A=4^n

Câu 23. Biết $C_n^5=15504$. Vậy thì A_n^5 bằng bao nhiêu?

A.108528 B.62016 C.77520 D.1860480

Câu 24. Tìm số nguyên dương bé nhất n sao cho trong khai triển $(1+x)^n$ có hai hệ số liên tiếp có tỉ số là: $\frac{7}{15}$

A.22 B.21 C.20 D.23

Câu 25. Tính hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3+xy)^{15}$?

A.3003 B.4004 C.5005 D.58690

2. **Hướng dẫn**.

Câu 1B Đa giác này có 15 đỉnh, suy ra số tam giác xác định bởi các đỉnh chính là tổ hợp chập 3 của 15 đỉnh hay $C_{15}^3=455$

Câu 2B, Phân phát n quà **giống nhau** cho k học sinh mỗi học sinh có ít nhất mỗ phần quà là C_{n+k-1}^{k-1} .Áp dụng vào là $C_{4+6-1}^{6-1}=126$ (theo đề mội học sinh đều có ít nhất một phần quà nên; ta phát lần lượt đều cho 6 học sinh là 6 phần quà; còn lại 4 phần ta phát cho 6 học sinh)

Câu 3C, "Không ít hơn 2 con bò"là có thể $\geq$2 bò. Vậy có $C_4^2C_7^4+C_4^3C_7^3+C_4^4C_7^2=371$

Câu 4D, Số giao điểm tối đa của n đường thẳng phân biệt là C_n^2.

Áp dụng. Vậy có $C_{10}^2=45$

Câu 5D, Bổ sung nếu bài toán "giao điểm tối đa của chỉ n đường thẳng với k đường tròn" có 2.n.k .Áp dụng.Vậy có 2.10.5=100

Câu 6D, Ông X loại bỏ hai người ghét nhau ra thì có C_9^5
Ông X chỉ mời một trong hai người ghét nhau. mời **một trong hai** người ghét nhau thì có hai cách mời; 4 người còn lại lấy trong 9 người(vì đã **loại bớt một người trong hai người** ghét nhau) có C_9^4. Vậy có $2C_9^4 = 378$

Bài này có thể dùng phương pháp bài trừ($C_{11}^5 - C_9^3 = 378$)

Câu 7C, Chọn 4 người trong 6 người là $C_6^4 = 15$, Cách xếp 4 người vào 4 ghế là 4!. Vậy ta có: 15.24 = 360

Câu 8C, Xếp thầy giáo thứ I có C_{12}^2 cách phân công, thầy giáo thứ II có C_{10}^2 cách phân công, thầy giáo thứ III có C_8^2 cách phân công, thầy giáo thứ IV có C_6^2 cách phân công, thầy giáo thứ V có C_4^2 cách phân công, thầy giáo thứ VI có C_2^2 cách phân công $C_{12}^2 C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2$.

Câu 9D, Phân công $C_{10}^0 C_{10}^{10} + C_{10}^1 C_{10}^9 + .. + C_{10}^9 C_{10}^1 + C_{10}^{10} C_{10}^0 = 2^{10}$

Câu 10A, Số tập con A_1 chứa {0,1,2,3,4,5,6,8,9} là 2^9, Vậy số tập con A chứa 7 là $A_1 \cup \{7\} = 2^9$

Câu 11C, Tương tự như các bài trên có $C_6^1 C_5^2 C_3^3$

Câu 12B,
$C_{20}^0 + C_{20}^1 + ... + C_{20}^{20}$ **=(1+1)^{20}=2^{20}** . Vậy, số tập hợp con của A là 2^{20};
$C_{20}^0 - C_{20}^1 + ... + C_{20}^{20}$ **=(1-1)^{20}=0**
Cộng vế theo vế ta được. $2\left(C_{20}^0 + C_{20}^2 + C_{20}^4 + ... + C_{20}^{20}\right) = 2^{20}$

suy ra số tập hợp có số phần tử chẵn là $\frac{2^{20}}{2} - 1$

Câu 13A, Ứng với 10 điểm trên d_1 có $10.C_8^2$ tam giác mà hai đỉnh còn lại trên d_1

Ứng với 10 điểm trên d_2 có 8.C_{10}^2 tam giác mà hai đỉnh còn lại trên d_2

Vậy, có $10.C_8^2 + 8C_{10}^2 = 640$

Câu 14.C Bạn để ý rằng nếu **số mũ lẻ** thì sẽ có **số số hạng là chẵn**, và vậy tìm số hạng chính giữa chính là tìm số trung vị. Bạn còn nhớ tìm số trung vị của số n chẵn hay lẻ không.

1. Nếu số n là số lẻ thì số trung vị là số thứ $\frac{n+1}{2}$

2. Nếu số n là số chẵn thì số trung vị là số thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2} + 1$.

Xét bài toán này với số mũ là 15 là một số lẻ nên có 16 số hạng (trường hợp hai).
Suy ra số hạng chính giữa là số hạng thứ $\frac{16}{2}$ và $\frac{16}{2} + 1$ (số thứ 8 và thứ 9)

$$T_{7+1} = C_{15}^7 x^{24} (xy)^7 = 6435 x^{31} y^7$$

$T_{8+1} = C_{15}^{8} x^{21} (xy)^{8} = 6435 x^{29} y^{8}$

Câu 15.

a) **B** a_{97} chính là vị thứ 98 vì bắt đầu từ a_0 suy ra số hạng thứ 98 là $T_{97+1} = C_{100}^{97} (-2)^{3} x^{97}$

(a_{97} ta thấy x^n tăng dần theo a_n) Vậy hệ số của a_{97} là -1293600

b) **A** Tổng hệ số. $a_0+a_1+\ldots+a_{100}$ là . khi đó x=1 hay $(1-2)^{100}=1$

c) **D** Để có Tổng các $T=a_0-a_1+...+a_{100}$ là . khi đó x=-1 hay $(-1-2)^{100}=3^{100}$

Câu 16. C Vì $C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 100$

$\Leftrightarrow C_n^2 + C_n^3 = 10 \Rightarrow n = 4$

Ta gọi $T_{k+1} = C_4^k x^{4-k} (-\frac{1}{x})^k = T_{k+1} = C_4^k x^{4-k} (-x)^{-k}$ (vì $\frac{1}{x^k} = x^{-k}$)

Để có được hệ số không chứa x thì 4-k+(-k)=0 => k=2 hệ số cần tìm là $T_3 = C_4^2 = 6$

Câu 17.D $T_3 = C_n^2 x^{n-2} (\frac{-1}{3})^2$, vì hệ số là $C_n^2.(\frac{-1}{3})^2 = 5n \Rightarrow n = 10$. Vậy số hạng chính giữa là số hạng thứ 6; $T_6 = C_{10}^5 x^5 \left(\frac{-1}{3}\right)^5 = -\frac{28}{27} x^5$

Câu 18. A Khi bài toán đến tổng các hệ số như trường hợp trên là $(\frac{1}{x} + x^4)^n$ (chỉ toàn là biến) thì ta thay x =1 vào.

Hay $(\frac{1}{1} + 1^4)^n = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$

Ta gọi $T_{k+1} = C_{10}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{10-k} (x^4)^k = C_{10}^k x^{k-10} x^{4k}$. Để có x^5 thì k-10+4k=5 => k=3

=> Hệ số cần tìm là $C_{10}^3 = 120$

Câu 19.C Ta có $C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + C_{12}^9 + C_{13}^9 + C_{14}^9 + C_{15}^9 = 8008$

Câu 20.D $T_{2+1} = C_n^2 \left(x^2\sqrt{x}\right)^{n-2} \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^2 \Rightarrow C_n^2 = 36 \Rightarrow n = 9$

$T_8 = C_9^7\left(x^2\sqrt{x}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^7 = 36\dfrac{1}{x^2}.\sqrt[3]{x}^7$

Câu 21.A Số chính giữa ở vị trí thứ $\dfrac{9+1}{2}$(vì mũ là 8 nên có 9 số hạng, áp dụng như câu 1)

$T_5 = C_8^4\sqrt[3]{x}^4.(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}})^4 = 70x^{\frac{1}{3}}$

Câu 22.B $(1+5)^n = C_n^0 + 5C_n^1 + 5^2C_n^2 + ... + 5^nC_n^n$

Câu 23.D Nhớ lại $k!.C_n^k = A_n^k$, Áp dụng vào $A_n^5 = 5!.C_n^5$

Câu 24.B Ta có $\dfrac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \dfrac{7}{15} \Leftrightarrow \dfrac{k+1}{n-k} = \dfrac{7}{15}$

Suy ra $n = \dfrac{22k+15}{7} = 3k + 2 + \dfrac{k+1}{7}$

Vì $n \in N^* \Rightarrow$ k+1=7a ,với $a \in Z^*$

Chọn a=1, vậy n =21 là số nguyên dương bé nhất

Câu 25.A Để ý thấy $x^{25}y^{10}$, y có số mũ 10 $\Rightarrow C_{15}^{10}\left(x^3\right)^5(xy)^{10}$ .Vậy hệ số là $C_{15}^{10} = 3003$

Tiết 7+8+9 : XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN.

1. Phép thử và biến cố

- Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và kí hiệu là Ω (đọc là ô- mê – ga).
- Biến cố là một tập con của không gian mẫu .
- Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử .

+) Tập $\Omega \setminus A$được gọi là biến cố đối của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$

$\overline{A}$ xảy ra khi và chỉ khi

A không xảy ra

* Giả sử A và B là hai biến cố có liên quan đến một phép thử .

+) Tập $A \cup B$ được gọi là hợp của các biến cố A và B($A \cup B$còn viết là A+B)

+) Tập $A \cap B$ được gọi là giao của các biến cố A và B ($A \cap B$ còn viết là A.B)

+) Nếu tập $A \cap B = \Phi$ thì ta nói A và B xung khắc .

2. Xác suất của biến cố

a) ***Định nghĩa xác suất:***

Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Ta gọi tỉ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ là xác suất của biến cố A. Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$

+) $0 \le P(A) \le 1$**,** $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$

b) Biến cố xung khắc và biến cố độc lập:

- Biến cố xung khắc: Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra. Nói cách khác, A và B xung khắc nếu A và B không bao giờ đồng thời xảy ra.
- Hai biến cố A và B được gọi là hai biến cố độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia

c) Tính xác suất theo quy tắc:

- Quy tắc cộng xác suất: Nếu A và B là hai biến cố xung khắc, thì:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Quy tắc nhân xác suất: Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì:

$P(AB) = P(A)P(B)$

II. KĨ NĂNG VẬN DỤNG

- Biết tìm biến cố đối, biến cố giao, biến cố hợp, hai biến cố xung khắc
- Biết cách tính xác suất của biến cố trong các bài toán cụ thể.
- Biết vận dụng quy tắc cộng xác xuất, quy tắc nhân xác xuất trong bài tập đơn giản.
- Biết các dùng máy tính bỏ túi hỗ trợ để tính xác suất.

III. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài tập 1:

Lấy ngẫu nhiên một thẻ từ một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 tới 20. Tìm xác suất để thẻ được lấy ghi số:

a) Chẵn;

b) Chia hết cho 3;

c) Lẻ và chia hết cho 3.

Giải

Không gian mẫu: $\Omega = \{1, 2, ..., 20\} \Rightarrow n(\Omega) = 20$

Gọi A, B, C là các biến cố tương ứng của câu a), b), c). Ta có:

$a) A = \{2, 4, 6, ..., 20\} \Rightarrow n(A) = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

$b) B = \{3, 6, 9, 12, 5, 18\} \Rightarrow n(B) = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$

$c) C = \{3, 9, 15\} \Rightarrow P(C) = \frac{3}{20} = 0,15$

Bài tập 2:

Một nhóm học sinh gồm 12 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 7 em. Hỏi

a) Có mấy cách chọn?

b) Tính xác suất của các biến cố:

A: “ 7 em được chọn có 5 nam và 2 nữ ”.

B: “ 7 em được chọn có ít nhất một nữ ”.

Giải

a. Mỗi cách chọn ra 7 em trong số 15 em là một tổ hợp chập 7 của 15

=> Số cách chọn ra 5 em là $C_{15}^{7} = 6435$

b. Theo ý a, số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6435$

Số cách chọn ra 5 nam và 2 nữ là $C_{12}^{2}.C_{3}^{2} = 2376 \Rightarrow n(A) = 2376$

$P(A) = \frac{2376}{6435} = \frac{24}{65}$

+ Ta có biến cố đối $\overline{B}$: “chọn được toàn nam” hay “ Không có nữ”

$n(\overline{B}) = C_{12}^{7} = 792$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{792}{6435} = \frac{57}{65}$

Bài tập 3: Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số 1, 2, 3,…, 9. Rút ngẫu nhiên 2 thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để:

a. Tích nhận được là số lẻ.

b. Tích nhận được là số chẵn.

Giải

Số cách chọn 2 thẻ trong số 9 thẻ là: $C_{9}^{2} = 36$

a. Tích hai số là lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều lẻ. Số cách chọn 2 trong số 5 số lẻ là $C_{5}^{2} = 10$.

Vậy xác suất là: $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

b. Ta thấy đây là biến cố đối của câu a. Nên xác suất là: $1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$

Bài tập 4. Một hộp có 5 quả cầu xanh và 4 quả cầu đỏ. lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu. Tính xác suất để chọn được 2 quả cầu cùng màu.

Giải

A: " Chọn được 2 cầu màu xanh"

B: " Chọn được 2 cầu màu đỏ"

$A \cup B$: "Chọn được 2 quả cầu cùng màu"

A và B xung khắc. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{C_5^2}{C_9^2}+\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{10}{36}+\frac{6}{36}=\frac{4}{9}$

Bài tập 5: Một lớp học có 40 học sinh trong đó có 32 trung bình, 1giỏi và 7 khá. Chọn ngẫu nhiên 5 em. Tính xác suất của các biến cố:

A: " 5 em được chọn đều là học sinh khá ".

B: " 5 em được chọn có 3 em là học sinh trung bình và 2 là học sinh khá ".

Giải

a. Mỗi cách chọn ra 5 em trong số 40 em là một tổ hợp chập 5 của 40

=> Số cách chọn ra 5 em là $C_{40}^5=658008$

Số cách chọn ra 5 hs khá là $C_7^5=21$

b. $\Rightarrow P(A)=\frac{21}{658\ 008}\approx 0,00003$

Số cách chọn ra 5 hs trong đó có 3 hs TB, 2 hs khá là

$C_{32}^3.C_7^2=140160 \Rightarrow P(B)=\frac{104\ 160}{658\ 008}\approx 0,1$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không quá 20. Xác suất để số được chọn là số nguyên tố:

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{7}{20}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{9}{20}$

Câu 2. Từ một cỗ bài có 52 quân bài, rút ngẫu nhiên 1 quân bài.

Xác suất để có 1 quân bài át là:

A. $\frac{1}{13}$ B. $\frac{1}{26}$ C. $\frac{1}{52}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 3. Ném ngẫu nhiên 1 đồng xu 3 lần. Xác suất để có đúng hai lần xuất hiện mặt ngửa là:

A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{5}{8}$

Câu 4. Từ một hộp chứa 20 quả cầu đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên một quả. Xác suất của biến cố nhận đọc quả cầu ghi số chia hết cho 3 là:

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{12}{20}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{3}{30}$

Câu 5. Gieo 3 đồng xu phân biệt đồng chất. Gọi A biến cố" Có đúng hai lần ngữa". Tính xác suất A

A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{1}{8}$

Câu 6. Trong một hộp đựng 7 bi xanh, 5 bi đỏ và 3 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi, tính xác suất để được ít nhất 2 bi vàng được lấy ra.

A. $\frac{37}{455}$ B. $\frac{22}{455}$ C. $\frac{50}{455}$ D. $\frac{121}{455}$

Câu 7. Trong một hộp đựng 7 bi xanh, 5 bi đỏ và 3 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác xuất để 3 bi lấy ra cùng màu?

A. $\frac{48}{455}$ B. $\frac{46}{455}$ C. $\frac{45}{455}$ D. $\frac{44}{455}$

Câu 8. Trong một lớp học có 54 học sinh trong đó có 22 nam và 32 nữ. Cho rằng ai cũng có thể tham gia làm ban cán sự lớp. Chọn ngẫu nhiên 4 người để làm ban cán sự lớp; 1 là lớp Trưởng, 1 là lớp Phó học tập, 1 là Bí thư chi đoàn, 1 là lớp Phó lao động.Tính xác suất để " Ban cán sự có hai nam và hai nữ" ?

A. $\frac{C_{22}^2C_{32}^2}{C_{54}^4}$ **B.** $\frac{4!C_{22}^2C_{32}^2}{C_{54}^4}$ **C.** $\frac{A_{22}^2A_{32}^2}{C_{54}^4}$ **D.** $\frac{4!C_{22}^2C_{32}^2}{A_{54}^4}$

Câu 9. Gieo ngẫu nhiên 2 con xúc sắc cân đối đồng chất. Xác suất của các biến cố " Tổng số chấm suất hiện là 7" là:

A. $\frac{6}{36}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{5}{18}$ D. $\frac{1}{9}$

Câu 10. Gieo hai con súc sắc và gọi kết quả xảy ra là tích hai số xuất hiện trên hai mặt. Không gian mẫu là bao nhiêu phần tử?

A.12 B.20 C.24 D.36

Câu 11. Gieo hai con súc sắc cân đối và đồng chất. Gọi X là biến cố " Tích số chấm xúât hiện trên hai mặt con súc sắc là một số lẻ". Xác suất của các biến cố X là:

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 12. Cho 4 chữ cái A,G,N,S đã được viết lên các tấm bìa, sau đó người ta trải ra ngẫu nhiên. Tìm sác suất 4 chữ cái đó là SANG?

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{24}$ D. $\frac{1}{256}$

Câu 13. Có ba chiếc hộp. Hộp A đựng 3 bi xanh và 5 bi vàng; Hộp B đựng 2 bi đỏ và 3 bi xanh; Hộp C đựng 4 bi trắng và 5 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một hộp rồi lấy một viên bi từ hộp đó. Xác suất để lấy được bi xanh là.

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{55}{96}$ C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{551}{1080}$

Câu 14. Hộp A chứa 3 bi đỏ và 5 bi Xành; Hộp B đựng 2 bi đỏ và 3 bi xanh.Thảy một con súc sắc ; Nếu được 1 hay 6 thì lấy một bi từ Hộp A. Nếu được số khác thì lấy từ Hộp B. Xác suất để được một viên bi xanh là

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{73}{120}$ C. $\frac{21}{40}$ D. $\frac{5}{24}$

Câu 15. Trên kệ sách có 10 sách Toán và 5 sách Văn. Lấy lần lượt 3 cuốn mà không để lại trên kệ. Xác suất để được hai cuốn sách đầu là Toán, cuốn thứ ba là Văn là

A. $\frac{18}{91}$ B. $\frac{15}{91}$ C. $\frac{7}{45}$ D. $\frac{8}{15}$

Câu 16. Một Hộp chứa 3 bi xanh, 2 bi vàng và 1 bi trắng. Lần lượt lấy ra 3 bi và không để lại. Xác suất để bi lấy ra lần thứ I là bi xanh, thứ II là bi trắng, thứ III là bi vàng

A. $\frac{1}{60}$ B. $\frac{1}{20}$ C. $\frac{1}{120}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 17. Gieo 2 đồng xu A và B một cách độc lập với nhau. Đồng xu A chế tạo cân đối. Đồng xu B chế tạo không cân đối nên xác suất xuất hiện mặt sấp gấp ba lần xác suất xuất hiện mặt ngửa. Tính xác suất để khi gieo hai đồng xu một lần thì cả hai đồng xu đều ngửa

A. 0.4 B.0,125 C.0.25 D.0,75

Câu 18. Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có một câu trả lời đúng. Một học sinh không học bài nên làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Tính xác suất để học sinh đó trả lời đúng 10 câu

A. $(0,75)^{10}$ B. $\frac{0.25}{10}$ C. $(0,25)^{10}$ D. $\frac{0,75}{10}$

Câu 19. Trong một trò chơi điện tử, xác suất để An thắng trong một trận là 0,4(Không có hòa). Hỏi An phải chơi tối thiểu bao nhiêu trận để xác suất An thắng ít nhất một trận trong loạt chơi đó lớn hơn 0,95

A.4 B.5 C.6 D.7

Câu 20 Ba người cùng đi săn A,B,C độc lập với nhau cùng nổ súng bắn vào mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của A,B,C tương ứng là 0,7; 0,6; 0,5. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng

A. 0.45 B. 0.80 C. 0.75 D. 0.94

Câu 21. Trong một lớp học có 54 học sinh trong đó có 22 nam và 32 nữ. Cho rằng ai cũng có thể tham gia làm ban cán sự lớp. Chọn ngẫu nhiên 4 người để làm ban cán sự lớp; 1 là lớp Trưởng, 1 là lớp Phó học tập, 1 là Bí thư chi đoàn, 1 là lớp Phó lao động. Tính xác suất " Cả bốn đều nữ"

A. $\frac{C_{32}^4}{4!C_{54}^4}$ **B.** $\frac{A_{32}^4}{4!C_{54}^4}$ **C.** $\frac{C_{32}^2}{A_{54}^4}$ **D**. A, C đúng

Câu 22. . Trong giải bóng đá nữ của trường THPT Hùng Vương có 12 đội tham gia, trong đó có hai đội của hai lớp 12A6 và 10A3. Ban tổ chức giải tiến hành bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành hai bảng A và B, mỗi bảng 6 đội. Tính xác suất để hai đội

12A6 và 10A3 ở cùng một bảng.

A. $\frac{3}{25}$ **B.** $\frac{5}{11}$ C. $\frac{7}{10}$ D. $\frac{9}{11}$

Câu 23. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp X. Tính xác suất để số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ.

A. $\frac{10}{21}$ B. $\frac{1}{21}$ C. $\frac{12}{37}$ D. $\frac{2}{5}$

Câu 24. Gọi M là tập hợp các số có 4 chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Lấy ra từ tập M một số bất kỳ. Tính xác suất để lấy được số có tổng các chữ số là số lẻ ?

A. $\frac{17}{156}$ **B.** $\frac{48}{105}$ C. $\frac{17}{100}$ D. $\frac{97}{256}$

Câu 25. Trong bộ môn Toán, thầy giáo có 40 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 15 câu hỏi trung bình, 20 câu hỏi dễ. Một ngân hàng đề thi mỗi đề thi có 7 câu hỏi được chọn từ 40 câu hỏi đó. Tính xác suất để chọn được đề thi từ ngân hàng đề nói trên nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 4.

A. $\frac{541}{3728}$ B. $\frac{965}{3768}$ **C.** $\frac{915}{3848}$ D. $\frac{915}{2637}$

2. **Hướng dẫn:**

Câu 1A. Số phần tử trong không gian mẫu $|\Omega| = 20$

Số nguyên tố từ 1 đến 20 gồm: 1,3,5,7,11,13,17,19

Vậy xác suất là $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Câu 2 A. Số phần tử trong không gian mẫu $|\Omega| = 52$

Số cách rút một quân át là

Vậy xác suất là $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Câu 3B.

Cách 1. Tìm số phần tử trong không gian mẫu $|\Omega| = 2^3 = 8$

Tìm số các kết quả thuận lợi cho A (NNS),(NSN),(SNN) suy ra có ba trường hợp. Vậy xác suất của A là $P(A) = \frac{3}{8}$

Cách 2. Vì xác suất hai mặt sấp và ngửa bằng nhau và bằng 0,5

$\Rightarrow P_A = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 3.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Câu 4C.

Câu 6A. $\frac{C_3^2(C_7^1+C_5^1)+C_3^3}{C_{15}^3}=\frac{37}{455}$

Câu 7B $\frac{C_7^3+C_5^3+C_3^3}{C_{15}^3}=\frac{46}{455}$

Câu 8.D. Vì sắp xếp vào 3 vị trí khác nhau, suy ra số phần tử trong không gian mẫu là A_{54}^4

Chon ra 4 học sinh xếp vào 4 vị trí sao mà có 2 nam, 2 nữ. chọn ra 2 nam thì có C_{22}^2, 2 nữ thì có C_{32}^2. Nhưng vì 4 vị trí này có thứ tự, nên có tổng tất cả số phần tử thõa đề cho " Ban cán sự có hai nam và hai nữ"là $4!.C_{22}^2.C_{32}^2$

Vậy xác suất là: $\frac{4!C_{22}^2C_{32}^2}{A_{54}^4}$

Câu 9A . Số phần tử không gian mẫu là 36.
"Tổng số chấm suất hiện là 7" gồm (1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1). Vậy xác suất cần tìm là $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

Câu 10. B Đừng có mắc sai lầm mà chọn là 6^2=36. Vì tích hai số có thể trùng nhau, trật tự các số khác nhau không ảnh hưởng tới tích hai số nên ta có.
Ứng với số chấm súc sắc I là1. thì súc sắc II có thể ra 6 kết quả ➔có thể lập 6 số thỏa là tích hai mặt xuất hiện (1,2,3,4,5,6)
Ứng với số chấm súc sắc I là 2. thì súc sắc II có thể ra 6 kết quả ➔ nhưng có thể lập 5 số thỏa như trên (4,6,8,10,12) vì loại dần tích 1.2
Ứng với số chấm súc sắc I là 3. thì súc sắc II có thể ra 6 kết quả ➔ nhưng có thể lập 3 số thỏa như trên (9,15,18) loại 3.4, 3.2, 3.1
Ứng với số chấm súc sắc I là 4. thì súc sắc II có thể ra 6 kết quả ➔ nhưng có thể lập 3 số thỏa như trên (16,20,24) loại 4.3, 4.2, 4.1
Ứng với số chấm súc sắc I là 5. thì súc sắc II có thể ra 6 kết quả ➔ nhưng có thể lập 2 số thõa như trên (25,30) loại 5.4, 5.3 , 5.2 , 5.1
Ứng với số chấm súc sắc I là 6. thì súc sắc II có thể ra 6 kết quả ➔ nhưng có thể lập 1 số thõa như trên (36) loại 6.5, 6.4, 6.3, 6.2, 6.1
➔có tất cả 6+5+3+3+2+1=20

Câu 11B . Vì để tích là một số lẻ thì I(1,3,5) có xác suất là $\frac{3}{6}$; II(1,3,5) có xác xuất là $\frac{3}{6}$.Vậy xác suất theo đề cho là $\frac{3}{6}.\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$

Câu 12C. có 4! Cách sắp xếp bốn chữ cái, nhưng chỉ có đúng một cách xếp được chữ SANG, vậy xác suất là: $\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$

Câu 13.D, Xác suất chọn một hộp trong ba hộp là $\frac{1}{3}$.

Vậy xác suất là $\frac{1}{3}.\frac{C_3^1}{C_8^1}+\frac{1}{3}.\frac{C_3^1}{C_5^1}+\frac{1}{3}.\frac{C_5^1}{C_9^1}=\frac{551}{1080}$

Câu 14.B, Xác xuất để được số chấm là 1 hay 6 là $\frac{1}{3}$

Xác xuất để được số chấm khác là $\frac{2}{3}$

Vậy xác suất là: $\frac{1}{3}.\frac{C_5^1}{C_8^1}+\frac{2}{3}.\frac{C_3^1}{C_5^1}=\frac{73}{120}$

15.B, Để xác suất đầu là cuốn sách Toán $\frac{C_{10}^1}{C_{15}^1}$

Để xác suất thứ hai là cuốn sách Toán $\frac{C_9^1}{C_{14}^1}$ (vì không để lại trên kệ)

Để xác suất thứ ba là cuốn sách Văn $\frac{C_5^1}{C_{13}^1}$ (vì không để lại trên kệ)

Vì đây là những biến cố độc lập nên $\frac{C_{10}^1}{C_{15}^1}.\frac{C_9^1}{C_{14}^1}.\frac{C_5^1}{C_{13}^1}=\frac{15}{91}$

Câu 16.B, Tương tự như trên ta dược $\frac{C_3^1}{C_6^1}.\frac{C_1^1}{C_5^1}.\frac{C_2^1}{C_4^1}=\frac{1}{20}$

Câu 17B. Lí luận như sau. Đồng xu A chế tạo cân đối nên xác suất xuất hiên mặt ngữa (N) bằng xác suất xuất hiện mặt sấp(S) là.0.5
Đồng xu B chế tạo không cân đối xác suất xuất hiện mặt sấp gấp ba lần xác suất xuất hiện mặt ngửa. Để dễ hiểu ta xin trình bày như sau
Cứ gieo 4 lần thì. Mặt Sấp(S) 3 lần Mặt Ngửa(N) 1 lần
➔xác suất Mặt Sấp(S) là $\frac{3}{4}=0,75$ Và Mặt Ngửa(N) $\frac{1}{4}=0,25$.
Xác suất xuất hiện cả hai mặt đều ngữa là 0,5.(0,25) = 0,125

Câu 18.C Xác suát để chọn đúng một câu là $\frac{1}{4}=0,25$

Để bạn học sinh đó trả lời đúng tất cả mười câu thì $(0.25)^{10}$
Câu 19.C Gọi n là số trận tối thiểu mà An thắng có xác suất lớn hơn 0.95
A là biến cố "An không thắng trận nào cả"
H là biến cố " An thắng trong lượt chơi"
Để xác suất thắng lớn hơn 0,95 thì $1-(0.6)^n > 0,95$ => n=6
Câu 20.D Bài này nên gọi biến cố đối
Gọi A "Không có xạ thủ nào bắn trúng cả" $P_A=0,3.0,4.0,5=0,06$
H "Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng"
$P(H)=1-P(A)=1-0,06=0,94$ 0,94

Câu 21 B. ta được $\frac{4!.C_{32}^4}{A_{54}^4}=\frac{A_{32}^4}{4!.C_{54}^4}$

Câu 22 B; Câu 23 A; Câu 24 B; Câu 25 C

ĐỀ KIỂM TRA THAM KHẢO

1. Ma trận

Chủ đề *Mạch kiến thức kĩ năng*	Mức độ nhận thức				Tổng
	Nhận biết	***Thông hiểu***	***Vận dụng Thấp***	***Vận dung cao***	
I- Qui tắc đếm	Câu 6,7 0,8	Câu 5 0,4	Câu 4 0,4		4 1,6
II- Nhị thức Niu tơn	Câu 18 0,4	Câu 15,16 0,8	Câu 17 0,4		4 1,6
III- Hoán vị - Chỉnh hợp-tổ hợp	Câu 8,9,10 1,2	Câu 1,2,3 1,2	Câu11-14 1,6		10 4,0
IV. Xác suất của biến cố.	Câu 19,20 0,8	Câu 21 0,4	Câu 22,24 0,8	Câu 23,25 0,4	7 2,8
Tổng	**8** 3,2	7 2,8	8 3,2	2 0,8	25 10

2. Đề và đáp án.

Câu 1. Cho tập $A=\{1;2;3;5;7;9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau?

A. 3024 B. 360 C. 120 D. 720

Câu 2. Cho A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau?

A. 120 B. 7203 C.1080 D.45

Câu 3. Cho A={1, 2, 3, 4, 5, 6}. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số?

A. 3888 B. 360 C.15 D.120

Câu 4. Cho A={0, 1, 2, 3, 4, 5}. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 5?

A. 60 B. 36 C.120 D.20

Câu 5. Cho A={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

A. 60 B. 5 C.120 D.720

Câu 6. Một người có 8 cái áo và 10 cái quần. Hỏi có bao nhiêu cách để chọn ra 1 chiếc áo và 1 quần để mặc?

A. 18 B. 10 C. 8 D. 80

Câu 7. Từ A đến B có 2 cách, B đến C có 4 cách , C đến D có 3 cách. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D (phải qua B và C) ?

A. 2 B. 4 C. 3 D. 24

Câu 8. Có bao nhiêu cách sắp xếp 7 người ngồi vào 7 ghế ?

A. 720 B. 49 C. 7^7 D. 5040

Câu 9. Công thức tính số hoán vị P_n là:

A. $P_n=(n-1)$ B. $P_n=n$ C. $P_n=\dfrac{n!}{(n-1)}$ D. $P_n=n!$

Câu 10. Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử với $1\le k\le n$ là:

A. $A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ B. $A_n^k=\dfrac{(n-k)!}{n!}$ C. $A_n^k=\dfrac{n!}{k!}$ D. $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Câu 11: Giá trị của số tự nhiên n thỏa mãn $C_n^2+A_n^2=9n$ là:

A. 7 B. 6 C. 9 D. 8

Câu 12. Một tổ công nhân có 12 người. Cần chọn 3 người: 1 tổ trưởng, 1 tổ phó và 1 thành viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

A. 1230 B. $12!$ C. 220 D. 1320

Câu 13. Một hộp đựng 8 viên bi màu xanh, 5 viên bi đỏ, 3 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách chọn từ hộp đó ra 4 viên bi trong đó có đúng 2 viên bi xanh?

A. 784 B.1820 C.70 D.42

Câu 14. Từ 1 nhóm gồm 8 viên bi màu xanh , 6 viên bi màu đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi mà trong đó có cả bi xanh và bi đỏ.

A. 2794 B. 3003 D. 14 D. 2500

Câu 15. Hệ số của x^8 trong khai triển $\left(x^2+2\right)^{10}$ là:

A. $C_{10}^6 2^4$ B. C_{10}^6 C. C_{10}^4 D. $C_{10}^6 2^6$

Câu 16. Hệ số của x^{12} trong khai triển $\left(2x-x^2\right)^{10}$ là:

A. C_{10}^8 B. $C_{10}^2.2^8$ C. C_{10}^2 D. $-C_{10}^2 2^8$

Câu 17. Trong khai triển $\left(3x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$ hệ số của x^3 là: $3^4C_n^5$ giá trị n là:

A. 15 B. 12 C. 9 D. 7

Câu 18. Trong khai triển nhị thức $(a + 2)^{n+6}$ $(n \in N)$. Có tất cả 17 số hạng. Vậy n bằng:

A. 23 B. 17 C. 11 D. 10

Câu 19. Gieo một đồng tiền liên tiếp 3 lần thì $n(\Omega)$ là bao nhiêu?

A. 4 B.6 C.8 D.16

Câu 20. Gieo một đồng tiền liên tiếp 3 lần. Tính xác suất của biến cố A: “ lần đầu tiên xuất hiện mặt sấp”

A. $P(A)=\dfrac{1}{2}$ B. $P(A)=\dfrac{3}{8}$ C. $P(A)=\dfrac{7}{8}$ D. $P(A)=\dfrac{1}{4}$

Câu 21. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn đều là nữ.

A. $\dfrac{1}{15}$ B. $\dfrac{7}{15}$ C. $\dfrac{8}{15}$ D. $\dfrac{1}{5}$

Câu 22. Một bình chứa 16 viên bi, với 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen, 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất lấy được cả 3 viên bi đỏ.

A. $\dfrac{1}{560}$ B. $\dfrac{1}{16}$ C. $\dfrac{1}{28}$ D. $\dfrac{143}{280}$

Câu 23. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp X. Tính xác suất để số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ.

A. $\dfrac{10}{21}$ B. $\dfrac{1}{21}$ C. $\dfrac{12}{37}$ D. $\dfrac{2}{5}$

Câu 24. Một hộp có 5 bi đen, 4 bi trắng. Chọn ngẫu nhiên 2 bi. Xác suất 2 bi được chọn đều cùng màu là:

A. $\dfrac{1}{4}$ B. $\dfrac{1}{9}$ C. $\dfrac{4}{9}$ D. $\dfrac{5}{9}$

Câu 25. Trong đợt thi học sinh giỏi của tỉnh Lâm Đồng trường THPT Hùng Vương môn Toán có 5 em đạt giải trong đó có 4 nam và 1 nữ , môn Văn có 5 em đạt giải trong đó có 1 nam và 4 nữ , môn Hóa học có 5 em đạt giải trong đó có 2 nam và 3 nữ , môn Vật lí có 5 em đạt giải trong đó có 3 nam và 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn mỗi môn một em học sinh để đi dự đại hội thi đua ? Tính xác suất để có cả học sinh nam và nữ để đi dự đại hội?

A. $\dfrac{577}{625}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{2}{3}$ D. $\dfrac{1}{4}$

Chuyên đề
DÃY SỐ - GIỚI HẠN

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC
DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN
(3 tiết)

A. KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CƠ BẢN

I. Phương pháp quy nạp toán học

Để chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) là mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương n, ta thực hiện như sau:

- *Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$.*
- *Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương $n = k$ tùy ý ($k \geq 1$), chứng minh rằng mệnh đề đúng với $n = k + 1$.*

Chú ý: *Nếu phải chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) là mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương $n \geq p$, ta thực hiện như sau*

+ Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$;

+ ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương bất kì $n = k \geq p$ và phải chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$.

II. Dãy số

1. Định nghĩa

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

dạng khai triển: $(u_n) = u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

2. Dãy số tăng, dãy số giảm:

- *(u_n) là dãy số tăng* $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ *với* $\forall n \in N^*$.

  $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ *với* $\forall n \in N^*$

  $\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ *với* $\forall n \in N^*$ $(u_n > 0)$.

- *(u_n) là dãy số giảm* $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ *với* $\forall n \in N^*$.

  $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ *với* $\forall n \in N^*$

  $\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *với* $\forall n \in N^*$ $(u_n > 0)$.

3. Dãy số bị chặn

- *(u_n) là dãy số bị chặn trên* $\Leftrightarrow \exists M \in R$: $u_n \leq M$, $\forall n \in N^*$.
- *(u_n) là dãy số bị chặn dưới* $\Leftrightarrow \exists m \in R$: $u_n \geq m$, $\forall n \in N^*$.
- *(u_n) là dãy số bị chặn* $\Leftrightarrow \exists m, M \in R$: $m \leq u_n \leq M$, $\forall n \in N^*$.

III. Cấp số cộng

1. Định nghĩa: *(u_n) là cấp số cộng* $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d$, $\forall n \in N^*$ *(d: công sai)*

2. Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d$ *với* $n \geq 2$

3. Tính chất của các số hạng: $u_k = \dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$ *với* $k \ge 2$

4. Tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2} = \dfrac{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}{2}$

IV. Cấp số nhân

1. Định nghĩa: *(u_n) là cấp số nhân* $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n.q$ *với* $n \in N^*$ *(q: công bội)*

2. Số hạng tổng quát: $u_n = u_1.q^{n-1}$ *với* $n \ge 2$

3. Tính chất các số hạng: $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$ *với* $k \ge 2$

4. Tổng n số hạng đầu tiên: $\left[\begin{array}{ll} S_n = nu_1 & ,q=1 \\ S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} & ,q \ne 1 \end{array}\right.$

B. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Phương pháp quy nạp toán học

Bài 1. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2^n-1}{2^n}, \forall n \in N^*$

Giải

Bước 1: Với n = 1 thì mệnh đề trở thành $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ là mệnh đề đúng

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với n = k ≥ 1 nghĩa là: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{1}{2^k} = \dfrac{2^k-1}{2^k}$

Ta chứng minh rằng mệnh đề cũng đúng với n = k + 1, tức là cần chứng minh:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$$

Thật vậy

$$VT = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}$$
$$= \frac{2^k-1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}$$
$$= \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} = VP$$

Vậy mệnh đề đã cho đúng với mọi $n \in N^*$

Bài 2. Chứng minh rằng: $u_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3 , $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Giải

Bước 1: Với $n = 1$, vế trái bằng 9 chi hết cho 3. Mệnh đề đã cho đúng.

Bước 2: Giả sử mệnh đề đã cho đúng với $n = k$, tức là: $u_k = k^3 + 3k^2 + 5k$ chia hết cho 3.

Ta chứng minh hệ thức đã cho cũng đúng với $n = k+1$:

Ta có: $u_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$

$$= (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3(k^2 + 3k + 3)$$
$$= u_k + 3(k^2 + 3k + 3)$$

Vậy u_{k+1} chi hết cho 3, ta được điều phải chứng minh.

Dãy số

Bài 3. Xét tính tăng giảm của các dãy số:

$a) u_n = \frac{1}{n} - 2$ $\qquad\qquad$ $b) u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$

Giải

$$a) u_n = \frac{1}{n} - 2$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+1} - 2\right) - \left(\frac{1}{n} - 2\right) = \frac{-1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in N*$$

Nên là dãy số giảm.

$$b) u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5n+2}{2n+1} . \frac{2n+3}{5n+7} = \frac{10n^2+19n+6}{10n^2+19n+7} < 1, \forall n \in N*$$

Nên là dãy số giảm.

Bài 4. Tìm số hạng tổng quát của dãy số: $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = 2U_n \end{cases} \forall n \in N^*$

Giải

Ta có: $U_1=3$

$U_2=2U_1=3.2$

$U_3=2.U_2=3.2^2$

....

Dự đoán: $U_n=3.2^{n-1}$. Sau đó khẳng định bằng quy nạp.

Cấp số cộng

Bài 5. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết: $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$

Giải

Ta có: $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}$

Bài 6. Một CSC có số hạng thứ 54 và thứ 4 lần lượt là -61 và 64. Tìm số hạng thứ 23.

Giải

Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{54} = u_1 + 53d \\ u_4 = u_1 + 3d \end{cases}$$

Giải hệ phương trình , ta được:.

$$u_1 = \frac{143}{2}, d = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow u_{23} = u_1 + 22d = \frac{33}{2}$$

Cấp số nhân

Bài 7. Tìm các số hạng của cấp số nhân (u_n) có 5 số hạng, biết: $u_3 = 3, u_5 = 27$

Giải

Ta có: $\begin{cases} u_3 = 3 \\ u_5 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^2 = 3 \\ u_1 q^4 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{1}{3}, q = \pm 3$

Vậy có hai dãy số: $\dfrac{1}{3}, 1, 3, 9, 27$ và $\dfrac{1}{3}, -1, 3, -9, 27$

Bài 8. Tìm 3 số hạng của một cấp số nhân mà tổng số là 19 và tích là 216.

Giải

Gọi 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân là: $\dfrac{a}{q}$; a ; aq (với q là công bội)

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{q}.a.aq = 216 \quad (1) \\ \dfrac{a}{q} + a + aq = 19 \ (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có $a = 6$ và $q = \dfrac{3}{2}$ hoÆc $q = \dfrac{2}{3}$

Vậy 3 số hạng cần tìm là: 4, 6, 9 hay 9, 6, 4.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phương pháp quy nạp toán học

Câu 1. Giá trị của tổng $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ là:

A. $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$. **B.** $\dfrac{n(n+2)(2n+1)}{6}$.

C. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **D.** Đáp số khác.

Câu 2. Với mọi số nguyên dương n, tổng $S_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$ là:

A. $\dfrac{1}{n+1}$. **B.** $\dfrac{n}{n+1}$. **C.** $\dfrac{n}{n+2}$. **D.** $\dfrac{n+1}{n+2}$.

Câu 3. Với mọi số nguyên dương n, tổng $S_n = n^3 + 11n$ chia hết cho:

A. 6. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 4. Với mọi số nguyên dương n thì $S_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho:

A. 3. **B.** 33. **C.** 133. **D.** 13.

Câu 5. Với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $3^n > 4n+1$. **B.** $3^n > 4n+2$. **C.** $3^n > 3n+4$. **D.** $3^n > 3n+1$.

Câu 6. Với mọi số tự nhiên $n > 1$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{20}$. **B.** $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{21}$.

C. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{17}$. **D.** $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$.

Dãy số

Câu 7: Dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi công thức $u_n = 2n + 1$ với mọi n = 0, 1, 2, … chính là:

A. Dãy số tự nhiên lẻ.

B. Dãy 1, 3, 5, 9 13, 17.
C. Dãy các số tự nhiên chẵn.
D. Dãy gồm các số tự nhiên lẻ và các số tự nhiên chẵn.

Câu 8: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2^n.u_n \quad ,\forall n \ge 1 \end{cases}$. Ta có u_5 bằng:

A. 10. **B.** 1024. **C.** 2048. **D.** 4096.

Câu 9: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = u_{n-1} + 2n \quad ,\forall\ n \ge 2 \end{cases}$. Khi đó u_{50} bằng:

A. 1274,5. **B.** 2548,5. **C.** 5096,5. **D.** 2550,5.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_n = 2n.u_{n-1} \quad ,\forall\ n \ge 2 \end{cases}$. Khi đó u_{11} bằng:

A. $2^{10}.11!$. **B.** $-2^{10}.11!$. **C.** $2^{10}.11^{10}$. **D.** $-2^{10}.11^{10}$.

Câu 11: Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \quad ,\ \forall n \ge 1 \end{cases}$ Ta có u_{11} bằng:

A. 36. **B.** 60. **C.** 56. **D.** 44.

Câu 12: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = \dfrac{1}{2 - u_{n-1}} \quad ,\ n = 2, 3, ... \end{cases}$. Giá trị của u_4 bằng:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{6}{7}$.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^{n+1}\cos\dfrac{2\pi}{n}$. Khi đó u_{12} bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** . $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 14: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1-n}{2^{n+1}}$. Khi đó u_{n-1} bằng:

A. $u_{n-1} = \dfrac{1-n}{2^n}$. **B.** $u_{n-1} = \dfrac{2-n}{2^n}$. **C.** $u_{n-1} = \dfrac{2-n}{2^{n-1}}$. **D.** $u_{n-1} = \dfrac{n}{2^n}$.

Câu 15: Cho dãy số có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2} \end{cases} \left(n \in N^*\right)$. Khi đó số hạng thứ n+3 là:

A. $u_{n+3} = 2u_{n+2} + 3u_{n+1}$. **B.** $u_{n+3} = 2u_{n+2} + 3u_n$. **C.** $u_{n+3} = 2u_{n-2} + 3u_{n+1}$. **D.** $u_{n+3} = 2u_{n+2} + 3u_{n-1}$.

Câu 16: Cho dãy số có công thức tổng quát là $u_n = 2^n$ thì số hạng thứ *n+3* là:

A. $u_{n+3} = 2^3$. **B.** $u_{n+3} = 8.2^n$. **C.** $u_{n+3} = 6.2^n$. **D.** $u_{n+3} = 6^n$.

Câu 17: Cho tổng $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$. Khi đó S_3 là bao nhiêu?

A. 3. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 9.

Câu 18: Cho dãy số $u_n = \left(-1\right)^n$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây?

A. Dãy tăng. **B.** Dãy giảm. **C.** Bị chặn. **D.** Không bị chặn.

Câu 19: Dãy số $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ là dãy số có tính chất:

A. Tăng. **B.** Giảm.
C. Không tăng không giảm. **D.** Tất cả đều sai.

Câu 20: Trong các dãy số sau, dãy số nào thoả mãn:

$u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$, n = 2, 3, …?

A. 1, 2, 4, 8, 16, 32, …
B. 1, 2, 8, 16, 24, 24, 54, …
C. Dãy có số hạng tổng quát là $u_n = 2^n + 1$ với n = 0, 1, 2, …
D. Dãy có số hạng tổng quát là $u_n = 2^n$ với n = 0, 1, 2, …

Câu 21: Xét các câu sau:

Dãy 1, 2, 3, 4, … là dãy bị chặn (dưới và trên) (1)

Dãy $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ … là dãy bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên (2)

Trong hai câu trên:

A. Chỉ có (1) đúng. **B.** Chỉ có (2) đúng.
C. Cả hai câu đều đúng. **D.** Cả hai câu đều sai.

Câu 22: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Số hạng u_{n+1} bằng:

A. $3^n + 1$. **B.** $3^n + 3$. **C.** $3^n.3$. **D.** $3(n + 1)$.

Câu 23: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Số hạng u_{2n} bằng

A. 2.3^n. **B.** 9^n. **C.** $3^n + 3$. **D.** 6n.

Câu 24: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Số hạng u_{n-1} bằng:

A. $3^n - 1$. **B.** $\frac{3^n}{3}$. **C.** $3^n - 3$. **D.** $3n - 1$.

Câu 25: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Số hạng u_{2n-1} bằng:

A. $3^2.3^n - 1$. **B.** $3^n.3^{n-1}$. **C.** $3^{2n} - 1$. **D.** $3^{2(n-1)}$.

Câu 26: Cho dãy số $u_n = \sin\frac{\pi}{n}$. Chọn khẳng định ***sai*** trong các khẳng định sau đây?

A. $u_{n+1} = \sin\frac{\pi}{n+1}$. **B.** Dãy số bị chặn.
C. Dãy số tăng. **D.** Dãy số không tăng, không giảm.

Câu 27: Dãy số $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$ là dãy số bị chặn trên bởi:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 28: Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số giảm?

A. $u_n = \sin n$. **B.** $u_n = \frac{n^2+1}{n}$. **C.** $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. **D.** $u_n = (-1)^n(2^n+1)$.

Câu 29: Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số bị chặn ?

A. $u_n = \sqrt{n^2+1}$. **B.** $u_n = n + \frac{1}{n}$.
C. $u_n = 2^n + 1$. **D.** $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Câu 30: Hãy cho biết dãy số (u_n) nảo dưới đây là dãy số tăng, nếu biết công thức số hạng tổng quát u_n của nó là:

A. $(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{n}$. **B.** $(-1)^{2n}(5^n+1)$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{n+1}+n}$. **D.** $\frac{n}{n^2+1}$.

Câu 31. Đặt $S_1(n) = 1 + 2 + 3 + … + n$
$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + … + n^2$

$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

Ta có :

A. $S_1(n) = \dfrac{3n(n+1)}{2}$.

B. $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$.

C. $S_3(n) = \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$.

D. Đáp án khác.

Câu 32: Dãy số nào sau đây là dãy tăng ?

A. $u_n = (-1)^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{n}$. **B.** $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+2}$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{n+1}}$. **D.** $u_n = (-1)^{2n}(3^n+1)$.

Câu 33: Cho dãy số $u_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$. Số $\dfrac{9}{41}$ là số hạng thứ bao nhiêu?

A. 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 34: Cho dãy số $u_n = \dfrac{1+n}{2n+1}$. Số $\dfrac{8}{15}$ là số hạng thứ bao nhiêu?

A. 8. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 35: Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số hạng tổng quát của dãy số trên là:

A. $u_n = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

B. $u_n = 5 + \dfrac{(n-1)n}{2}$.

C. $u_n = 5 + \dfrac{n(n+1)}{2}$.

D. $u_n = 5 + \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Câu 36: Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$ Số hạng tổng quát của dãy số trên là:

A. $u_n = 1+n$. **B.** $u_n = 1-n$. **C.** $u_n = 1+(-1)^{2n}$. **D.** $u_n = n$.

Câu 37: Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát của dãy số trên là:

A. $u_n = 1 + \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$.

B. $u_n = 1 + \dfrac{(n-1)n(2n+2)}{6}$.

C. $u_n = 1 + \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

D. $u_n = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

Câu 38: Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát của dãy số trên là:

A. $u_n = \dfrac{-n+1}{n}$. **B.** $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. **C.** $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$. **D.** $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$.

Câu 39: Cho tổng $S(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2$. Khi đó công thức của S(n) là:

A. $S(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

B. $S(n) = \dfrac{n+1}{2}$.

C. $S(n) = \dfrac{n(n-1)(2n+1)}{6}$.

D. $S(n) = \dfrac{n^2(2n+1)}{6}$.

Câu 40: Tính tổng S(n)= 1-2+3-4+…………+(2n-1)-2n+(2n+1) là:

A. S(n)= n+1. **B.** $S(n)=$-n. **C.** $S(n)=$2n. **D.** $S(n)=$n.

Câu 41: Tính tổng $S(n)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.........+\frac{1}{n(n+1)}$. Khi đó công thức của S(n) là:

A. $S(n)=\frac{n}{n+2}$. **B.** $S(n)=\frac{n}{n+1}$. **C.** $S(n)=\frac{2n}{2n+1}$. **D.** $S(n)=\frac{1}{2^n}$.

Câu 42: Tính tổng $s(n)=1.4+2.7+........+n(3n+1)$. Khi đó công thức của $S(n)$ là:

A. $S(n)=n+3$. **B.** $S(n)=(n+1)^2$. **C.** $S(n)=n(n+1)^2$. **D.** $S(n)=4n$.

Câu 43: Tính tổng $S(n)=1.1!+2.2!+..........+2007.2007!$. Khi đó công thức của $S(n)$ là:

A. $2007!$. **B.** $2008!$. **C.** $2008!-1$. **D.** $2007!-1$.

Câu 44: Trong dãy số 1, 3, 2, … mỗi số hạng kể từ số hạng thứ 3 bằng số hạng đứng trước nó trừ đi số hạng đứng trước số hạng này, tức là $u_n=u_{n-1}-u_{n-2}$ với n ≥ 3. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số đó. Đáp số của bài toán là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 45: Cho dãy số xác định bởi công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$ Công thức tính số hạng tổng quát u_n của dãy số là:

A. $u_n=\frac{3}{2^n}$. **B.** $u_n=\frac{3}{2^{n-1}}$. **C.** $u_n=\frac{3}{2^n-1}$. **D.** $u_n=\frac{3}{2^n+1}$.

Câu 46: Cho dãy số xác định bởi công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=u_{n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$ Công thức tính số hạng tổng quát u_n của dãy số là:

A. $u_n=2n+1$. **B.** $u_n=2n-1$. **C.** $u_n=2n+2$. **D.** $u_n=2n+3$.

Câu 47: Cho dãy số xác định bởi công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=u_n+2 \end{cases}$. Hỏi số 33 là số hạng thứ mấy?

A. u_{15}. **B.** u_{17}. **C.** u_{14}. **D.** u_{16}.

Cấp số cộng

Câu 48: Viết 3 số xen giữa các số 2 và 22 để được CSC có 5 số hạng?

A .7;12;17. B. 6,10,14. C. 8,13,18. D. Tất cả đều sai.

Câu 49: Công thức nào sau đây đúng với CSC có số hạng đầu u_1 ,công sai d?

A.u_n= u_n +d. B.u_n= u_1 +(n+1)d. C.u_n= u_1 -(n+1)d. D.u_n= u_1 +(n-1)d .

Câu 50: Cho cấp số cộng 1, 8, 15, 22, 29,….Công sai của cấp số cộng này là:

A. 7. B. 8 . C. 9. D. 10.

Câu 51. Cho cấp số cộng có $u_1=\frac{-1}{2}; d=\frac{1}{2}$ Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của của cấp số này là:

A. $\frac{-1}{2};0;1;\frac{1}{2};1.$ *B.* $\frac{-1}{2};0;\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}.$ *C.* $\frac{1}{2};1;\frac{3}{2};2;\frac{5}{2}.$ *D.* $\frac{-1}{2};0;\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}.$

Câu 52: Nếu cấp số cộng $(u_{n)})$ với công sai d có $u_5=0$ và $u_{10}=10$ thì:

A. $u_1=8$ và d = -2. **B.** $u_1=-8$ và d = 2. **C.** $u_1=8$ và d = 2. **D.** $u_1=-8$ và d = -2.

Câu 53. Một cấp số cộng có 9 số hạng. Số hạng chính giữa bằng 15. Tổng các số hạng đó bằng:

A. 135. **B.** 405. **C.** 280. **D.** đáp số khác.

Câu 54: Cho CSC : -2 ; u_2 ; 6 ; u_4 . Hãy chọn kết quả đúng ?

A. $u_2 = -6$; $u_4 = -2$. **B.** $u_2 = 1$; $u_4 = 7$. **C.** $u_2 = 2$; $u_4 = 8$. **<u>D</u>.** $u_2 = 2$; $u_4 = 10$.

Câu 55: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định: Nếu a,b,c lập thành cấp số cộng (khác không) thì :

A. nghịch đảo của chúng cũng lập thành một cấp số cộng.
B. bình phương của chúng cũng lập thành cấp số cộng.
<u>C</u>. c,b,a theo thứ tự đó cũng lập thành cấp số cộng.
D. Tất cả các khẳng định trên đều sai.

Câu 56. Cho dãy số $u_n = 7 - 2n$. Chọn khẳng định ***sai*** trong các khẳng định sau đây?

A. Ba số hạng đầu tiên của dãy là: 5;3;1. **<u>B</u>.** Số hạng thứ n+1 của dãy là 8-2n.
C. Là CSC với d=-2. **D.** Số hạng thứ 4 của dãy là -1.

Câu 57. Cho CSC có $u_1 = \frac{1}{4}, d = -\frac{1}{4}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây?

A. $s_5 = \frac{5}{4}$. **B.** $s_5 = \frac{4}{5}$. **<u>C</u>.** $s_5 = -\frac{5}{4}$. **D.** $s_5 = -\frac{4}{5}$.

Câu 58. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^3 - 1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. **<u>C</u>.** $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} - u_n = 2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$.

Câu 59. Cho cấp số cộng: 6, x - 2, y. Kết quả nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$. **<u>C</u>.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 4 \\ y = -6 \end{cases}$.

Câu 60. Xét các câu sau:

(1) Dãy số $u_1, u_2, u_3, ...$ được gọi là cấp số cộng với công sai d ≠ 0, nếu như $u_n = u_{n-1} + d$ với mọi n = 2, 3, …

(2) Nếu dãy số $u_1, u_2, u_3, ...$ là cấp số cộng với công sai d ≠ 0, nếu như $u_n = u_1 + (n + 1)d$ với mọi n = 2, 3, …

Trong hai câu trên:

A. chỉ có (1) đúng. **B.** chỉ có (2) đúng.
<u>C</u>. cả hai câu đều đúng. **D.** cả hai câu đều sai.

Câu 61. Xét các câu sau

(1) Dãy số $u_1, u_2, u_3, ...$ được gọi là cấp số cộng với công sai d ≠ 0 thì $u_k = \frac{u_{k-1} - u_{k+1}}{2}$ với mọi k = 2, 3, …

(2) Nếu dãy số $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ là cấp số cộng với công sai d ≠ 0, nếu như $u_1 + u_n = u_k + u_{n-k}$ với mọi k = 2, 3, …, n - 1

Trong hai câu trên:

A. chỉ có (1) đúng. **B.** chỉ có (2) đúng.
C. cả hai câu đều đúng. **<u>D</u>.** cả hai câu đều sai.

Câu 62. Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng thứ n là $u_n = 1 - 3n$ thì công sai d bằng:

A. 6. **B.** 1. **<u>C</u>.** -3. **D.** 5.

Câu 63: Chọn khẳng định ***sai*** trong các khẳng định sau. Cho $CSC\ (u_n)$ có d khác không khi đó:

A. $u_2 + u_{17} = u_3 + u_{16}$. **B.** $u_2 + u_{17} = u_4 + u_{15}$. **C.** $u_2 + u_{17} = u_6 + u_{13}$. **<u>D</u>.** $u_2 + u_{17} = u_1 + u_{19}$.

Câu 64. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = 12$ và tổng 21 số hạng đầu tiên là $S_{21} = 504$. Khi đó u_1 bằng:

<u>A</u>. 4. **B.** 20. **C.** 48. **D.** Đáp số khác.

Câu 65. Cho cấp số cộng (u_n). Biết $S_n = 2n^2 - 3n$, khi đó u_1 và công sai d là :

A. $u_1 = -1; d = 4$. **B.** $u_1 = 1; d = 3$. **C.** $u_1 = 2; d = 2$. **D.** $u_1 = -1; d = 4$.

Câu 66. Cho cấp số cộng (u_n). Biết $u_5 = 18;\ 4S_n = S_{2n}$, khi đó u_1 và công sai d là :

A. $u_1 = 2; d = 3$. **B.** $u_1 = 2; d = 2$. **C.** $u_1 = 2; d = 4$. **D.** $u_1 = 3; d = 2$.

Câu 67. Cho CSC có d=-2 và $s_8 = 72$, khi đó số hạng đầu tiên là bao nhiêu?

A. $u_1 = 16$. **B.** $u_1 = -16$. **C.** $u_1 = \frac{1}{16}$. **D.** $u_1 = -\frac{1}{16}$.

Câu 68. Cho CSC có $u_1 = -1, d = 2, s_n = 483$. Hỏi số các số hạng của CSC là bao nhiêu?

A. n=20. **B.** n=21. **C.** n=22. **D.** n=23.

Câu 69. Cho CSC có $u_1 = \sqrt{2}, d = \sqrt{2}, s = 8\sqrt{2}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. S là tổng của 5 số hạng đầu tiên của CSC.
B. S là tổng của 6 số hạng đầu tiên của CSC.
C. S là tổng của 7 số hạng đầu tiên của CSC.
D. Tất cả đều sai.

Câu 70. Ba số $1-x, x^2, 1+x$ lập thành một CSC khi:

A. Không có giá trị nào của x. **B.** x=2 hoặc x= -2.
C. x=1 hoặc x=-1. **D.** x=0.

Câu 71. Ba số $1+3a, a^2+5, 1-a$ lập thành CSC khi:

A. $a = 0$. **B.** $a = \pm 1$. **C.** $a = \pm\sqrt{2}$. **D.** Tất cả đều sai.

Câu 72. Cho CSC có $u_4 = -12, u_{14} = 18$. Khi đó số hạng đầu tiên và công sai là

A. $u_1 = -20, d = -3$. **B.** $u_1 = -22, d = 3$. **C.** $u_1 = -21, d = 3$. **D.** $u_1 = -21, d = -3$.

Câu 73. Cho CSC có $u_4 = -12, u_{14} = 18$. Khi đó tổng của 16 số hạng đầu tiên CSC là:

A. 24. **B.** -24. **C.** 26. **D.** – 26.

Câu 74. Cho CSC có $u_5 = -15, u_{20} = 60$. Tổng của 20 số hạng đầu tiên của CSC là:

A. 200. **B.** -200. **C.** 250. **D.** -25.

Câu 75. Trong các dãy số sau đây dãy số nào là CSC?

A. $u_n = 3^n$. **B.** $u_n = (-3)^{n+1}$. **C.** $u_n = 3n+1$. **D.** Tất cả đều là CSC.

Câu 76. Trong các dãy số sau đây dãy số nào là CSC?

A. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$. **C.** $u_n = n^2$. **D.** $u_n = (n+1)^3$.

Câu 77. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Số hạng u_{17} là:

A. 242. **B.** 235. **C.** 11. **D.** 4.

Câu 78. Nếu cấp số cộng (u_n) với công sai d có $u_2 = 2$ và $u_{50} = 74$ thì:

A. $u_1 = 0$ và d = 2. **B.** $u_1 = -1$ và d = 3.
C. $u_1 = 0{,}5$ và d = 1,5. **D.** $u_1 = -0{,}5$ và d = 2,5.

Câu 79: Cho cấp số cộng -2; x; 6; y. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau?

A. $\begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \end{cases}$.

Câu 80. Cho cấp số cộng -4; x; -9. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau?

A. x = 36. **B.** x = -6,5. **C.** x = 6. **D.** x = -36.

Câu 81. Cho cấp số cộng (u_n). Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau ?

A. $\dfrac{u_{10}+u_{20}}{2}=u_5+u_{10}$. **B.** $u_{19}+u_{20}=2u_{150}$. **C.** $u_{10}.u_{30}=u_{20}$. **D.** $\dfrac{u_{10}.u_{30}}{2}=u_{20}$.

Câu 82. Cho cấp số cộng (u_n) có: u_2 = 2001 và u_5 = 1995. Khi đó u_{1001} bằng:

A. 4005. **B.** 4003. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 83. Cho cấp số cộng có tổng 10 số hạng đầu tiên và 100 số hạng đầu tiên là S_{10} = 100, S_{100} = 10. Khi đó, tổng của 110 số hạng đầu tiên là:

A. 90. **B.** -90. **C.** 110. **D.** -110.

Câu 84. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $\begin{cases} a_1=321 \\ a_n=a_{n-1}-3 \quad \forall n = 2, 3, 4, ... \end{cases}$

Tổng 125 số hạng đầu tiên của dãy số (a_n) là:

A. 16875. **B.** 63375. **C.** 635625. **D.** 166875.

Câu 85. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1=150 \\ u_n=u_{n-1}-3 \quad ,\forall\ n\ge 2 \end{cases}$. Khi đó tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số đó bằng:

A. 150. **B.** 300. **C.** 29850. **D.** 59700.

Câu 86. Cho p = 1, 2, …, 10 gọi S_p là tổng 40 số hạng đầu tiên của cấp số cộng mà số hạng đầu là p và công sai là 2p - 1. Khi đó, S_1 + S_2 + … + S_{10} bằng:

A. 80000. **B.** 80200. **C.** 80400. **D.** 80600.

Câu 67. Biết C_n^1, C_n^2, C_n^3 lập thành cấp số cộng với n > 3, thế thì n bằng:

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 68. Tìm tất cả các giá trị của x để $1+\sin x;\sin^2 x;1+\sin 3x$ là 3 số hạng liên tiếp của một CSC

A. $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi; x=-\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi; x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 69. Nghiệm của phương trình $1+7+13+\ldots+x=280$ là:

A. $x=53$. **B.** $x=55$. **C.** $x=57$. **D.** $x=59$.

Câu 70. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3, các cạnh lập thành một cấp số cộng. Ba cạnh của tam giác đó là:

A. $\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}$. B. $\dfrac{3}{4};1;\dfrac{5}{4}$. C. $\dfrac{1}{3};1;\dfrac{5}{3}$. D. $\dfrac{1}{4};1;\dfrac{7}{4}$.

Câu 71. Bốn nghiệm của phương trình $x^4-10x^2+m=0$ là 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Khi đó m bằng:

A. 16. **B.** 21. **C.** 24. **D.** 9.

Câu 72. Biết dãy số 2, 7, 12, …, *x* là một cấp số cộng. Biết $2+7+12+...+x=245$, khi đó:

A. $x=52$. **B.** $x=45$. **C.** $x=42$. **D.** $x=47$.

Cấp số nhân

Câu 73. Cho cấp số nhân $u_1,u_2,u_3,...,u_n$ với công bội q (q ≠ 0; q ≠ 1). Đặt: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Khi đó ta có:

A. $S_n=\dfrac{u_1\left(q^n+1\right)}{q+1}$. **B.** $S_n=\dfrac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$. **C.** $S_n=\dfrac{u_1\left(q^{n-1}-1\right)}{q+1}$. **D.** $S_n=\dfrac{u_1\left(q^{n-1}-1\right)}{q-1}$.

Câu 74: Trong các số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. 1,-3,9,-27,81. **B.** 1,-3,-6,-9,-12. **C.** 1,-2,-4,-8,-16. **D.** 0,3,9,27,81.

Câu 75. Cho cấp số nhân (u_n), biết: $u_1 = 3, u_2 = -6$. Lựa chọn đáp án đúng?

A. $u_3 = 12$. **B.** $u_3 = -12$. **C.** $u_3 = -18$. **D.** $u_3 = 18$.

Câu 76. Cho cấp số nhân (u_n), biết: $u_1 = 3, u_5 = 48$. Lựa chọn đáp án đúng?

A. $u_3 = 12$. **B.** $u_3 = -12$. **C.** $u_3 = 16$. **D.** $u_3 = -16$.

Câu 77. Cho cấp số nhân (u_n), biết: $u_1 = -2, u_2 = 8$. Lựa chọn đáp án đúng?

A. $q = -4$. **B.** $q = 4$. **C.** $q = -12$. **D.** $q = 10$.

Câu 78. Cho cấp số nhân (u_n), biết: $u_n = 81, u_{n+1} = 9$. Lựa chọn đáp án đúng?

A. $q = \frac{1}{9}$. **B.** $q = 9$. **C.** $q = -9$. **D.** $q = -\frac{1}{9}$.

Câu 79. Cho cấp số nhân (u_n), biết: $u_1 = -9, u_2 = 3$. Lựa chọn đáp án đúng?

A. $q = -\frac{1}{3}$. **B.** $q = 3$. **C.** $q = -3$. **D.** $q = \frac{1}{3}$.

Câu 80. Cho cấp số nhân (u_n), biết: $u_1 = -2, u_2 = 10$. Lựa chọn đáp án đúng?

A. $q = -5$. **B.** $q = 8$. **C.** $q = -12$. **D.** $q = 12$.

Câu 81. Cho cấp số nhân (u_n), biết: $u_1 = -2, u_2 = 8$. Lựa chọn đáp án đúng?

A. $u_5 = -512$. **B.** $u_5 = 256$. **C.** $S_5 = 256$. **D.** $q = 10$.

Câu 82. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -\frac{1}{2}, u_7 = -32$. Khi đó q là:

A. ± 2. **B.** $\pm\frac{1}{2}$. **C.** ± 4. **D.** Tất cả đều sai.

Câu 83. Cho CSN có $u_1 = -\frac{1}{2}, u_7 = -32$. Khi đó q là?

A. $\pm\frac{1}{2}$. **B.** ± 2. **C.** ± 4. **D.** Tất cả đều sai.

Câu 84. Cho CSN có $u_1 = -1, u_6 = 0,00001$. Khi đó q và số hạng tổng quát là:

A. $q = \frac{1}{10}, u_n = \frac{-1}{10^{n-1}}$. **B.** $q = \frac{-1}{10}, u_n = -10^{n-1}$.

C. $q = \frac{-1}{10}, u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$. **D.** $q = \frac{-1}{10}, u_n = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$.

Câu 85. Cho CSN có $u_1 = -1; q = \frac{-1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ bao nhiêu?

A. Số hạng thứ 103. **B.** Số hạng thứ 104. **C.** Số hạng thứ 105. **D.** Đáp án khác.

Câu 86. Cho CSN có $u_1 = 3; q = -2$. Số 192 là số hạng thứ bao nhiêu?

A. Số hạng thứ 5. **B.** Số hạng thứ 6. **C.** Số hạng thứ 7. **D.** Đáp án khác.

Câu 87. Cho CSN có $u_2 = \frac{1}{4}; u_5 = 16$. Công bội q và số hạng đầu tiên của CSN là:

A. $q = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{2}$. **B.** $q = -\frac{1}{2}, u_1 = -\frac{1}{2}$. **C.** $q = 4, u_1 = \frac{1}{16}$. **D.** $q = -4, u_1 = -\frac{1}{16}$.

Câu 88. Cho CSN -2;4;-8….tổng của n số hạng đầu tiên của CSN này là:

A. $\frac{-2\left(1-(-2)^n\right)}{1-(-2)}$. **B.** $\frac{-2\left(1-(2)^n\right)}{1-2}$. **C.** $\frac{-2\left(1-(-2)^{2n}\right)}{1-(-2)}$. **D.** $\frac{-2\left(1-(2)^{2n}\right)}{1-2}$.

Câu 89. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3$; $u_2 = -6$. Hãy chọn kết quả đúng ?
A. $u_5 = -24$. **B.** $u_5 = 48$. **C.** $u_5 = -48$. **D.** $u_5 = 24$.

Câu 90. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -3$ và công bội $q = -2$ bằng:
A. -511. **B.** -1025. **C.** 1025. **D.** 1023.

Câu 91. Cho cấp số nhân (u_n) có: $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Khi đó tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng :
A. $\frac{1-3^{1000}}{4}$. **B.** $\frac{3^{1000}-1}{2}$. **C.** $\frac{3^{1000}-1}{6}$. **D.** $\frac{1-3^{1000}}{6}$.

Câu 92. Cho dãy 1, 2, 4, 8, 16, 32 , … là một cấp số nhân với:
A. công bội là 3 và phần tử đầu tiên là 1. **B.** công bội là 2 và phần tử đầu tiên là 1.
C. công bội là 4 và phần tử đầu tiên là 2. **D.** công bội là 2 và phần tử đầu tiên là 2.

Câu 93. Cho dãy: 729, 486, 324, 216, 144, 96, 64, … Đây là một cấp số nhân với:
A. Công bội là 3 và phần tử đầu tiên là 729 . **B.** Công bội là 2 và phần tử đầu tiên là 64.
C. Công bội là $\frac{2}{3}$ và phần tử đầu tiên là 729. **D.** Công bội là $\frac{1}{2}$ và phần tử đầu tiên là 729.

Câu 94. Nếu một cấp số nhân (u_n) có công bội $q=-\frac{1}{2}$ và $u_6=-\frac{1}{4}$ thì:
A. $u_1=8$. **B.** . $u_1=\frac{1}{128}$. **C.** . $u_1=-8$. **D.** $u_1=-\frac{1}{128}$.

Câu 95. Cho cấp số nhân 16; 8; 4; …; $\frac{1}{64}$. Khi đó $\frac{1}{64}$ là số hạng thứ:
A. 10. **B.** 12. **C.** 11. **D.** Đáp số khác.

Câu 96. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2=\frac{1}{4}; u_5=16$. Công bội q và số hạng đầu tiên của cấp số nhân là:
A. $q=4, u_1=\frac{1}{16}$. **B.** A. $q=\frac{1}{2}; u_1=\frac{1}{2}$.
C. $q=-\frac{1}{2}, u_1=-\frac{1}{2}$. **D.** $q=-4, u_1=-\frac{1}{16}$.

Câu 97. Trong các dãy số sau, dãy số nào là CSN?
A. $\begin{cases} u_1=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}={u_n}^2 \end{cases}$. **B.** $u_{n+1}=nu_n$. **C.** $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=-5u_n \end{cases}$. **D.** $u_{n+1}=u_{n+1}-3$.

Câu 98. Cho dãy số $\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{b}, \sqrt{2}$. Ba số trên lập thành CSN khi b bằng:
A. b=-1. **B.** b=1. **C.** b=2. **D.** Đáp án khác.

Câu 99. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 24$ và $\frac{u_4}{u_{11}}=16384$. Số hạng u_{17} là:
A. $\frac{3}{67108864}$. **B.** $\frac{3}{368435456}$. **C.** $\frac{3}{536870912}$. **D.** $\frac{3}{2147483648}$.

Câu 100. Trong một cấp số nhân gồm các số hạng dương, hiệu số giữa số hạng thứ 5 và thứ 4 là 576 và hiệu số giữa số hạng thứ 2 và số hạng đầu là 9. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này bằng:

A. 1061. **B.** 1023. **C.** 1024. **D.** 768.

Câu 101. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 7$, công bội q = 2 và tổng các số hạng đầu tiên $S_7 = 889$. Khi đó số hạng cuối bằng:

A. 484. **B.** 996. **C.** 242. **D.** 448.

Câu 102. Nếu cấp số nhân (u_n) với $u_4 - u_2 = 72$ và $u_5 - u_3 = 144$ thì:

A. $u_1 = 2; q = 12$. **B.** $u_1 = 12; q = -2$. **C.** $u_1 = 12; q = 2$. **D.** $u_1 = 4; q = 2$.

Câu 103. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1; q = \frac{-1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ bao nhiêu?

A. Số hạng thứ 103. **B.** Số hạng thứ 104. **C.** Số hạng thứ 105. **D.** Đáp án khác.

Câu 104. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$. **B.** $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$. **C.** $u_n = n + \frac{1}{3}$. **D.** $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.

Câu 105. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3; q = -2$. Số 192 là số hạng thứ bao nhiêu?

A. Số hạng thứ 6. **B.** Số hạng thứ 5. **C.** Số hạng thứ 7. **D.** Đáp án khác.

Câu 106. Ba số 2x-1;x; 2x+1 lập thành một cấp số nhân khi:

A. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $x = \pm\frac{1}{3}$.

C. $x = \pm\sqrt{3}$. **D.** Không có giá trị nào của x.

Câu 107. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_{20} = 8u_{17}$. Công bội của cấp số nhân là:

A. $q = 2$. **B.** $q = -4$. **C.** $q = 4$. **D.** $q = -2$.

Câu 108. Ba số x,y,z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số x,2y,3z theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Khi đó q bằng:

A. $q = \frac{1}{3}$. **B.** $q = \frac{1}{9}$. **C.** $q = -\frac{1}{3}$. **D.** $q = -3$.

Câu 109. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases}$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân là:

A. $S_{10} = \frac{63\sqrt{2}}{32(\sqrt{2}-1)}$. **B.** $S_{10} = \frac{63}{32}$. **C.** $S_{10} = \frac{63\sqrt{2}}{32(1-\sqrt{2})}$. **D.** $S_{10} = \frac{63}{32(\sqrt{2}-1)}$.

Câu 110. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là: $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Số hạng thứ 5 của cấp số nhân là:

A. $u_5 = \frac{2}{3^5}$. **B.** $u_5 = \frac{1}{3^5}$. **C.** $u_5 = 3^5$. **D.** $u_5 = \frac{5}{3^5}$.

Câu 111. Trong các dãy số sau, dãy số nào là CSN?

A. $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$. **B.** $u_{n+1} = nu_n$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$. **D.** $u_{n+1} = u_{n+1} - 3$.

Câu 112. Trong các dãy số sau, dãy số nào là CSN?

A. $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$. **B.** $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$. **C.** $u_n = n + \frac{1}{3}$. **D.** $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.

Câu 113. Cho cấp số nhân: -2; x; -18; y. Kết quả nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x=6 \\ y=-54 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-10 \\ y=-26 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-6 \\ y=-54 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-6 \\ y=54 \end{cases}$.

Câu 114. Trong các dãy số cho bởi các công thức truy hồi sau, hãy chọn dãy số là cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$. **D.** $7, 77, 777, ..., \underbrace{777...7}_{n}$.

Câu 115. Dãy $u_1, u_2, u_3, ...$ được gọi là cấp số nhân với công bội q nếu như ta có:

A. q là số tuỳ ý và $u_n = u_{n-1}q$ với mọi n = 2, 3, …

B. $q \neq 0$; $q \neq 1$ và $u_n = u_{n-1}q + u_{n-2}q$ với mọi n = 3, 4, …

C. $q \neq 0$; $q \neq 1$ và $u_n = u_{n-1}q$ với mọi n = 2, 3, 4, …

D. q là số khác 0 và $u_n = u_{n-1} + q$ với mọi n = 2, 3, …

Câu 116. Nghiệm của phương trình $1 + x + x^2 + \ldots + x^{2007} = 0$ là:

A. $x = \pm 1$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 11$. **D.** $x = 1 \vee x = -2$.

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ - GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ - HÀM SỐ LIÊN TỤC
(6 tiết)

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Giới hạn của dãy số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}=0\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0\ (\lvert q\rvert<1)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}C=C$ ***2. Định lí :*** *a) Nếu* $\lim u_n=a$, $\lim v_n=b$ *thì* • $\lim(u_n+v_n)=a+b$ • $\lim(u_n-v_n)=a-b$ • $\lim(u_n.v_n)=a.b$ • $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}$ *(nếu* $b\neq0$*)* *b) Nếu* $u_n\geq0,\ \forall n$ *và* $\lim u_n=a$ *thì* $a\geq0$ *và* $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$ *c) Nếu* $\lvert u_n\rvert\leq v_n,\ \forall n$ *và* $\lim v_n=0$ *thì* $\lim u_n=0$ *d) Nếu* $\lim u_n=a$ *thì* $\lim\lvert u_n\rvert=\lvert a\rvert$ ***3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn*** $S=u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots=\frac{u_1}{1-q}\quad(\lvert q\rvert<1)$	***1. Giới hạn đặc biệt:*** $\lim\sqrt{n}=+\infty$; $\lim n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim q^n=+\infty\ (q>1)$ ***2. Định lí:*** *a) Nếu* $\lim\lvert u_n\rvert=+\infty$ *thì* $\lim\frac{1}{u_n}=0$ *b) Nếu* $\lim u_n=a$, $\lim v_n=\pm\infty$ *thì* $\lim\frac{u_n}{v_n}=0$ *c) Nếu* $\lim u_n=a\neq0$, $\lim v_n=0$ *thì* $\lim\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a.v_n>0\\-\infty & \text{nếu } a.v_n<0\end{cases}$ *d) Nếu* $\lim u_n=+\infty$, $\lim v_n=a$ *thì* $\lim(u_n.v_n)=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a>0\\-\infty & \text{nếu } a<0\end{cases}$ ** Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định:* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$ *thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

II. Giới hạn của hàm số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$ *(c: hằng số)* ***2. Định lí:*** *a) Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=M$ *thì:* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$ *(nếu* $M\neq0$*)* *b) Nếu* $f(x)\geq0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$	***1. Giới hạn đặc biệt:*** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}+\infty & \text{nếu k chẵn}\\-\infty & \text{nếu k lẻ}\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}c=c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^k}=0$ $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{\lvert x\rvert}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\lvert x\rvert}=+\infty$ ***2. Định lí:*** *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\neq0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$ *thì:*

thì $L \ge 0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ *c) Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *thì* $\lim\limits_{x\to x_0} \lvert f(x)\rvert = \lvert L\rvert$ ***3. Giới hạn một bên:*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ cùng dấu} \\ -\infty \text{ nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ trái dấu} \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \quad \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \\ +\infty \text{ nếu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ và } L.g(x) > 0 \\ -\infty \text{ nếu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ và } L.g(x) < 0 \end{cases}$ ** Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định:* $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$ *thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

III. Hàm số liên tục

1. Hàm số liên tục tại một điểm: *y = f(x) liên tục tại* $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

- *Để xét tính liên tục của hàm số y = f(x) tại điểm* x_0 *ta thực hiện các bước:*
  - *B1: Tính* $f(x_0)$.
  - *B2: Tính* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *(trong nhiều trường hợp ta cần tính* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$*)*
  - *B3: So sánh* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *với* $f(x_0)$ *và rút ra kết luận.*

2. Hàm số liên tục trên một khoảng: *y = f(x) liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.*

3. Hàm số liên tục trên một đoạn [a; b]*: y = f(x) liên tục trên (a; b) và*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

4. • *Hàm số đa thức liên tục trên R.*

• *Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.*

5. *Giả sử y = f(x), y = g(x) liên tục tại điểm* x_0*. Khi đó:*

- *Các hàm số y = f(x) + g(x), y = f(x) – g(x), y = f(x).g(x) liên tục tại* x_0.
- *Hàm số y =* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *liên tục tại* x_0 *nếu* $g(x_0) \neq 0$.

6. *Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b] và f(a).f(b)< 0 thì tồn tại ít nhất một số c* $\in$*(a; b): f(c) = 0.*

Nói cách khác: *Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b] và f(a). f(b)< 0 thì phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm* $c \in$ *(a; b).*

Mở rộng: *Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b]. Đặt m =* $\min\limits_{[a;b]} f(x)$*, M =* $\max\limits_{[a;b]} f(x)$*. Khi đó với mọi T* $\in$ *(m; M) luôn tồn tại ít nhất một số c* $\in$ *(a; b): f(c) = T.*

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

I. Giới hạn của dãy số

Một số phương pháp tìm giới hạn của dãy số:

- ***Chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của n.***
- ***Nhân lượng liên hợp****: Dùng các hằng đẳng thức*
- ***Dùng định lí kẹp****: Nếu* $\lvert u_n\rvert \le v_n, \forall n$ *và lim* v_n *= 0 thì lim* u_n *= 0*

Khi tính các giới hạn dạng phân thức, ta chú ý một số trường hợp sau đây:

• *Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng 0.*

• *Nếu bậc của từ bằng bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng tỉ số các hệ số của luỹ thừa cao nhất của tử và của mẫu.*

• Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó là $+\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu cùng dấu và kết quả là $-\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu trái dấu.

II. Giới hạn của hàm số

Một số phương pháp khử dạng vô định:

1. Dạng $\dfrac{0}{0}$

a) $L = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *với P(x), Q(x) là các đa thức và* $P(x_0) = Q(x_0) = 0$

Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

b) $L = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *với* $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ *và P(x), Q(x) là các biểu thức chứa căn cùng bậc*

Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân lượng liên hợp ở tử và mẫu.

2. Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$***:*** $L = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *với P(x), Q(x) là các đa thức hoặc các biểu thức chứa căn.*

– Nếu P(x), Q(x) là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x.

– Nếu P(x), Q(x) có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x hoặc nhân lượng liên hợp.

3. Dạng $\infty - \infty$***:*** *Giới hạn này thường có chứa căn*

Ta thường sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu.

4. Dạng $0.\infty$***:***

Ta cũng thường sử dụng các phương pháp như các dạng ở trên.

III. Hàm số liên tục

1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho h/s $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & khi\ x \neq x_0 \\ f_2(x) & khi\ x = x_0 \end{cases}$ *Xét tính liên tục của hàm số tại điểm* x_0 *?*

Phương pháp

B_1*: Tính* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = L$

B_2*: Tính* $f(x_0) = f_2(x_0)$

B_3*: Đánh giá hoặc giải pt* $L = f_2(x_0)$*. Từ đó đưa ra kết luận*

2. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho h/s $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & khi\ x \geq x_0 \\ f_2(x) & khi\ x < x_0 \end{cases}$ *Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm* x_0

Phương pháp chung:

B_1*: Tính* $f(x_0) = f_1(x_0)$

B_2*: (liên tục phải) tính:* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f_1(x) = L_1$

Đánh giá hoặc GPT $L_1 = f_1(x_0) \Rightarrow$ *KL về liên tục phải*

B_3*: (liên tục trái) tính:* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f_2(x) = L_2$

Đánh giá hoặc GPT $L_2 = f_1(x_0) \Rightarrow$ *KL về liên tục trái*

B_4*: Đánh giá hoặc GPT* $L_1 = L_2 \Rightarrow$ *KL liên tục tại* x_0

3. Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng

Phương pháp chung:

B_1*: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng đơn*

B_2*: Xét tính liên tục của hàm số tại các điểm giao*

B_3*: Kết luận*

4. Sử dụng tính liên tục của hàm số để chứng minh pt có nghiệm

Phương pháp chung: Cho pt f(x) = 0. Để chứng minh phương trình có k nghiệm trên đoạn $[a;b]$ *ta thực hiện các bước sau*

B_1: Chọn số $a < T_1 < T_2 < \ldots < T_{k-1} < b$ *chia đoạn* $[a;b]$ *thành k khoảng thỏa mãn:*

$$\begin{cases} f(x).f(T_1) < 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f(T_{k-1}).f(b) < 0 \end{cases}$$

B_2: Kết luận về nghiệm của phương trình trên $[a;b]$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Giới hạn của dãy số

Bài 1: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{2n^3-2n+3}{1-4n^3}$ b) $\lim \dfrac{\sqrt{n^4+2n+2}}{n^2+1}$ c) $\lim \dfrac{3^{n+1}-4^n}{4^{n-1}+3}$ d) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$

Hướng dẫn giải:

a) $\lim \dfrac{2n^3-2n+3}{1-4n^3} = \lim \dfrac{2-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}{\dfrac{1}{n^3}-4} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\lim \dfrac{\sqrt{n^4+2n+2}}{n^2+1} = \lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = 1$

c) $\lim \dfrac{3^{n+1}-4^n}{4^{n-1}+3} = \lim \dfrac{9.3^{n-1}-4.4^{n-1}}{4^{n-1}+3} = \lim \dfrac{9.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}-4}{1+\dfrac{3}{4^{n-1}}} = -4$

d) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right) = \lim \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1} = 1$

Giới hạn của hàm số

Bài 2: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x-x^2}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{2x^4-3x+12}$ c) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{7x-1}{x-3}$ d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{9-x^2}$

Hướng dẫn giải:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x-x^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(-x-2)(x-1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}(-x-2) = -3$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{2x^4-3x+12} = \lim\limits_{x\to -\infty} x^2\sqrt{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{12}{x^4}} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{7x-1}{x-3}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3) = 0,\ \lim\limits_{x\to 3^+}(7x-1) = 20 > 0;\ x-3 > 0$ khi $x \to 3^+$ nên $I = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{9-x^2} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(3+x)(3-x)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-1}{(x+3)(\sqrt{x+1}+2)} = -\dfrac{1}{24}$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^3+x^2-x+1)$ b) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{3x+2}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$

Hướng dẫn giải:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^3+x^2-x+1) = \lim\limits_{x\to -\infty}x^3\left(-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{3x+2}{x+1}$.

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}(x+1)=0\\ \lim\limits_{x\to -1^-}(3x+1)=-2<0\\ x<-1 \Leftrightarrow x+1<0\end{cases} \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{3x+2}{x+1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+x+1}{4x^2-x+1} = \dfrac{11}{17}$

Bài 4.

Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}$ Tìm $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)$.

Hướng dẫn giải:

$$f\left(x\right)=\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\frac{\left(x^2+3x\right)-\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)}=\frac{3}{2}$$

Bài 5: Tính các giới hạn sau

$a)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^3-x^2-x-2}$; $\quad c)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{3x+3}}{x-2}$.

Hướng dẫn giải:

a) Nhân lượng liên hợp tử số

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\frac{1}{3}$$

b) Phân tích:

$$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$$

$$x^3-x^2-x-2=\left(x-2\right)\left(x^2+x+1\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3-x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x+2}}{\left(x-2\right)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}\left(x^2+x+1\right)}=+\infty$$

c) Thêm vào 3 và -3 trên tử.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{3x+3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+1}-3+3-\sqrt{3x+3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}+\lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{3x+3}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2\left(x^2-4\right)}{(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}+\lim_{x\to 2}\frac{3(2-x)}{(x-2)\left(3+\sqrt{3x+3}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2\left(x+2\right)}{\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}+\lim_{x\to 2}\frac{-3}{\left(3+\sqrt{3x+3}\right)}$$

$$=\frac{8}{6}-\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$$

Hàm số liên tục

Bài 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\neq 2\\ m & khi\ x=2\end{cases}$.

a) Xét tính liên tục của hàm số khi *m* = 3

b) Với giá trị nào của *m* thì *f(x)* liên tục tại *x* = 2 ?

Hướng dẫn giải:

• Ta có tập xác định của hàm số là D = R

a) Khi *m* = 3 ta có

⇒ *f(x)* liên tục tại mọi *x* ≠ 2.

Tại *x* = 2 ta có: *f*(2) = 3; $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$ ⇒ *f(x)* liên tục tại *x* = 2.

Vậy với *m* = 3 hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\neq 2\\ m & khi\ x=2\end{cases}=\begin{cases}x+1 & khi\ \ x\neq 2\\ m & khi\ \ x=2\end{cases}$

Tại *x* = 2 ta có: *f*(2) = *m* , $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$

Hàm số *f*(x) liên tục tại *x* = 2 ⇔ $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)\Leftrightarrow m=3$

Bài 7. Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi x >2}\\ ax+\dfrac{1}{4} & \text{khi x } \leq 2\end{cases}$

Xác định *a* để hàm số liên tục tại điểm *x* = 2.

Hướng dẫn giải:

- $f(2) = 2a + \dfrac{1}{4}$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(ax + \dfrac{1}{4}\right) = 2a + \dfrac{1}{4}$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+2\sqrt[3]{(3x-2)}+4\right)} = \dfrac{1}{4}$

Hàm số liên tục tại x = 2 $\Leftrightarrow$ $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2a + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a = 0$

Bài 8. Xét tính liên tục của $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} & khi \;\; x \neq -1 \\ 2 & khi \;\; x = -1 \end{cases}$ trên tập R

Hướng dẫn giải:

- Tập xác định D = R \ {1}
- Với $x \notin \{-1;1\}$ hàm số $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$ xác định nên liên tục.
- Xét tại x = 1 $\notin$ D nên hàm số không liên tục tại x = 1
- Xét tại x = –1

$\lim\limits_{x\to -2} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+3}{x-1} = -1 \neq f\left(-1\right) = 2$ nên hàm số không liên tục tại x = –1

Bài 9. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt trong khoảng (–2; 5).

Hướng dẫn giải:

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2 \Rightarrow f$ liên tục trên R.

Ta có: $f(0) = -2,\ f(1) = 1,\ f(2) = -8,\ f(4) = 16$

$\Rightarrow f(0).f(1) < 0 \Rightarrow$ PT *f(x)* = 0 có ít nhất 1 nghiệm $c_1 \in (0;1)$

$f(1).f(2) < 0 \Rightarrow$ PT *f(x)* = 0 có ít nhất 1 nghiệm $c_2 \in (1;2)$

$f(2).f(4) < 0 \Rightarrow$ PT *f(x)* = 0 có ít nhất 1 nghiệm $c_3 \in (2;4)$

$\Rightarrow$ PT *f(x)* = 0 có ít nhất 3 nghiệm trong khoảng (–2; 5).

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Nhận biết

Câu 1. Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{2n}$, chọn $M = \dfrac{1}{100}$, để $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{100}$ thì n phải lấy từ số hạng thứ bao nhiêu trở đi?

A. 51. B. 49. C. 48. D. 50.

Câu 2. Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$, chọn $M = \dfrac{1}{1000}$, để $\dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{1}{1000}$ thì n phải lấy từ số hạng thứ bao nhiêu trở đi?

A. 498. B. 499. C. 500. D. 501.

Câu 3. Chọn mệnh đề đúng?

A. $\lim\left(\dfrac{1}{10^n}\right) \neq 0.$ B. $\lim\left(\dfrac{4}{3}\right)^n = 0.$

C. $\lim\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0.$ D. $\lim\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = 0.$

Câu 4. Chọn mệnh đề **đúng?**

A. $\lim(-2017) = 0.$ B. $\lim(-2017) = 2017.$

C. $\lim(-2017) = 1.$ D. $\lim(-2017) = -2017.$

Câu 5. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, thì $\lim u_n$ bằng:

A. 0. B. 1. C. $-\infty.$ D. $+\infty.$

Câu 6. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n^2} + 9$, thì $\lim \sqrt{u_n}$ bằng:

A. 0. B. 9. C. 3. D. $+\infty.$

Câu 7. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 7 - \frac{1}{n^2}$, khi đó $\lim u_n$ bằng:

A. 0. B. 7. C. $-\infty.$ D. $+\infty.$

Câu 8. CSN: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ..., \frac{1}{2^n}, ...$ có công bội là:

A. $q = 2.$ B. $q = -2.$ C. $q = \frac{1}{2}.$ D. $q = -\frac{1}{2}.$

Câu 9. Công bội của CSN: $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, ..., \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, ...$ là:

A. $q = 3.$ B. $q = -3.$ C. $q = \frac{1}{3}.$ D. $q = -\frac{1}{3}.$

Câu 10. Công thức tính tổng của CSN lùi vô hạn (u_n) là:

A. $S = \frac{1-q}{u_1}.$ B. $S = \frac{1+q}{u_1}.$ C. $S = \frac{u_1}{1-q}.$ D. $S = \frac{u_1}{1+q}.$

Câu 11. $\lim n^2$ có kết quả bằng:

A. 0. B. 1. C. $-\infty.$ D. $+\infty.$

Câu 12. $\lim 5^n$ có kết quả bằng:

A. 0. B. 5. C. $-\infty.$ D. $+\infty.$

Câu 13: Với k là số nguyên dương. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k$ là:

A. $+\infty.$ B. $-\infty.$ C. 0. D. x.

Câu 14: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k}$ (với k nguyên dương) là:

A. $+\infty.$ B. $-\infty.$ C. 0. D. x.

Câu 15: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\lim\limits_{x \to x_o} |f(x) + g(x)| = \lim\limits_{x \to x_o} |f(x)| + \lim\limits_{x \to x_o} |g(x)|.$

B. $\lim\limits_{x \to x_o} |f(x) + g(x)| = \lim\limits_{x \to x_o} f(x) + \lim\limits_{x \to x_o} g(x).$

C. $\lim\limits_{x \to x_o} |f(x) + g(x)| = \lim\limits_{x \to x_o} [f(x) + g(x)].$

D. $\lim\limits_{x \to x_o} |f(x) + g(x)| = \left|\lim\limits_{x \to x_o} [f(x) + g(x)]\right|.$

Câu 16: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\lim\limits_{x \to x_o} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \lim\limits_{x \to x_o} [\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{f(x)}].$

B. $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_o}f(x)}+\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_o}g(x)}.$

C. $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)+g(x)]}.$

D. $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)}+\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt[3]{g(x)}.$

Câu 17: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào ***không*** tồn tại?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}.$ B. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{\sqrt{2-x}}.$ C. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{-x+2}}.$ D. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{2+x}}.$

Câu 18: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số có giới hạn tại điểm x=a thì liên tục tại x =a.

B. Hàm số có giới hạn trái tại điểm x=a thì liên tục tại x=a .

C. Hàm số có giới hạn phải tại điểm x=a thì liên tục tại x=a .

D. Hàm số có giới hạn trái và phải tại điểm x=a thì liên tục tại x=a .

Câu 19: Cho một hàm số f(x). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu f(a).f(b) thì hàm số liên tục trên (a; b).

B. Nếu hàm số liên tục trên (a; b) thì f(a).f(b) < 0.

C. Nếu hàm số liên tục trên (a; b) và f(a).f(b) < 0 thì phương trình f(x) = 0 có nghiệm.

D. Cả ba khẳng định trên đều sai.

Câu 20: Cho một hàm số f(x). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu f(x) liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì phương trình f(x) = 0 không có nghiệm trên khoảng (a;b).

B. Nếu f(a).f(b) < 0 thì phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm trong khoảng (a; b).

C. Nếu phương trình f(x) = 0 có nghiệm trong khoảng (a; b) thì hàm số f(x) phải liên tục trên khoảng (a; b).

D. Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn $[a;b]$ và f(a).f(b) < 0 thì phương trình f(x) = 0 có nghiệm trong khoảng (a; b).

Thông hiểu

Câu 21. Giới hạn $\lim\dfrac{3}{n-2}$ bằng:

A. 3. B. $-\dfrac{3}{2}.$ C. 0. D. ∞.

Câu 22.: Giới hạn $\lim\dfrac{n-1}{n-2}$ bằng:

A. 1. B. -1. C. 0. D. ∞.

Câu 23. Giới hạn $\lim\dfrac{7n^2-3}{n^2-2}$ bằng:

A. 7. B. $-\dfrac{3}{2}.$ C. 0. D. ∞.

Câu 24. Giới hạn $\lim\dfrac{2n^2+1}{n^3-3n+3}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}.$ B. 2. C. 0. D. ∞.

Câu 25. Giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$ bằng:

A. 0. B. 1. C. -1. D. $\dfrac{1}{2}.$

Câu 26. Giới hạn $\lim\frac{1+n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$ có kết quả là:

A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 27. Giới hạn $\lim\frac{n^2+2n}{n^3+1}$ có kết quả là:

A. 1. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 28. Cho $A=\lim\frac{2n+1}{n+3}$; $B=\lim\frac{4n^2+2n-1}{2n^2+3}$; $C=\lim\frac{10n^3-n^2+1}{5n^3+2n}$ trong các kết quả sau kết quả nào đúng?

A. B = C. B. A = C. C. A = B = C. D. A = B.

Câu 29. Giới hạn $\lim\frac{2n-13}{(n+5)^2}$ có kết quả là:

A. 0. B. 2. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{2}{25}$.

Câu 30. Giới hạn $\lim\frac{3^n+2^n}{4^n}$ có kết quả là:

A. 0. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $+\infty$.

Câu 31. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-7x)$ có kết quả là:

A. 24. B. 0. C. $-\infty$. D. 5.

Câu 32. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}$ có kết quả là:

A. -1. B. -2. C. $-\frac{1}{2}$. D. $+\infty$.

Câu 33. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}$ có kết quả là:

A. ∞. B. 2. C. $\frac{1}{8}$. D.8.

Câu 34. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2-x}$ có kết quả là:

A. -12. B. 12. C. 5. D. 8.

Câu 35. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x+3}{1-x}$ có kết quả là:

A. 2. B. -2. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 36. Giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a}$ có kết quả là:

A. $2a^2$. B. $3a^4$. C. $4a^3$. D. $5a^4$.

Câu 37. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2+4x-3}{2x^2-7x+1}$ có kết quả là:

A. $\frac{5}{2}$. B. 1. C. 2. D. - ∞.

Câu 38. Giới hạn của hàm số $f(x)=\frac{(x^2+1)(x+1)}{(2x^4+x)(x+1)}$ khi x tiến đến -∞ có kết quả là:

A. 0. B. $+\infty$. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Câu 39. Giới hạn của hàm số $f(x)=\frac{(2x^2+1)(2x^2+x)}{(2x^4+x)(x+1)}$ khi x tiến đến $+\infty$ có kết quả là:

A. 4. B. ∞. C. 0. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 40. Giới hạn của hàm số nào dưới đây có kết quả bằng 1?

A. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x+1}$. B. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x+2}$.

C. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{1-x}$. D. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}$.

Câu 41. Giới hạn nào dưới đây có kết quả bằng 3?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x}{x-2}$ B. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3x}{x-2}$

C. Cả ba hàm số trên. D. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3x}{2-x}$

Câu 42. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

I. $f(x)$ gián đoạn tại $x=2$.

II. $f(x)$ liên tục tại $x=2$.

III. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$.

A. Chỉ (I) và (III). B. Chỉ (II).

C. Chỉ (I). D. Chỉ (II) và (III).

Câu 44. Khẳng định nào ***sai*** trong các khẳng định sau?

A. Hàm số $f(x)=3x+1$ liên tục trên tập R.

B. Hàm số $f(x)$ được xác định bởi $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{khi } x\ge 0 \\ 0 \quad \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

C. Hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ liên tục $\forall x\neq 0$.

D. Hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ liên tục trên $[0;+\infty)$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=x^2-2x+3$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Hàm số có giới hạn trái và phải tại điểm x = 1 bằng nhau.

B. Hàm số có giới hạn trái và phải tại mọi điểm bằng nhau.

C. Hàm số có giới hạn tại mọi điểm.

D. Cả ba khẳng định trên là sai.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$. Khẳng định nào sau đây là ***đúng***?

A. Hàm số chỉ có giới hạn phải tại điểm x = 2.
B. Hàm số có giới hạn trái và giới hạn phải bằng nhau.
C. Hàm số có giới hạn tại điểm x = 2.
D. Hàm số chỉ có giới hạn trái tại điểm x = 2.

Câu 47. Cho các hàm số: (I) y = sinx ; (II) y = cosx ; (III) y = tanx ; (IV) y = cotx. Hàm số nào liên tục trên R?

A. (I) và (II). B. (III) và IV).
C. (I) và (III). D. (I), (II), (III) và (IV).

Câu 48. Chọn mệnh đề ***sai*** trong các mệnh đề sau?

A. Hàm số y = tanx liên tục trên R.
B. Hàm số y = $\dfrac{3x+5}{x^2+1}$ liên tục trên R.
C. Hàm số y = $\sqrt{x^2+3}$ liên tục trên R.
D. Hàm số y = $x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ liên tục trên R.

Câu 49. Chọn mệnh đề ***sai*** trong các mệnh đề sau?

A. Hàm số y = sinx liên tục trên R.
B. Hàm số y = $\dfrac{3x+5}{x+1}$ liên tục trên R.
C. Hàm số y = $\dfrac{-4x}{x^2+1}$ liên tục trên R.
D. Hàm số y = $x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ liên tục trên R.

Câu 50: Kết luận nào sau đây ***sai***?

A. Hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x-2}$ gián đoạn tại x = 2.
B. Hàm số $y=\dfrac{4x+3}{x^2+2x}$ gián đoạn tại x = -2 và x = 0.
C. Hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+2}$ gián đoạn tại x = -2.
D. Hàm số $y=\dfrac{x^2+9}{x^2+4}$ gián đoạn tại x = 2 và x = -2.

Vận dụng thấp

Câu 51. Giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}+4n}{3n-2}$ có kết quả là:

A. 0. B. $\dfrac{4}{3}$. C. $\dfrac{5}{3}$. D. $\dfrac{1}{3}$.

Câu 52. Giới hạn $\lim\dfrac{9.5^n-2^n}{3^n+3.5^n}$ có kết quả bằng:

A. 0. B. 3. C. 5. D. $\dfrac{5}{3}$.

Câu 53. Giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^3-5n+9}}{3n-2}$ có kết quả bằng:

A. 0. B. 1. C. 3. D. $\dfrac{1}{3}$.

Câu 54. Giới hạn $\lim \frac{2.5^n - 9^{n+1}}{1+9^n}$ có kết quả bằng:

A. 0. B. -1. C. 1. D. -9.

Câu 55. Giới hạn $\lim \frac{(2n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}$ có kết quả bằng:

A. 0. B. $\frac{1}{32}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 56. Giới hạn $\lim(\sqrt{n^2+n}-n)$ có kết quả bằng:

A. 0. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 57. Giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$ có kết quả bằng:

A. 1. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 58. Giới hạn $\lim\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$ có kết quả bằng:

A. Không có giới hạn. B. 0.
C. -1. D. $+\infty$.

Câu 59. Giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+n+28}-\sqrt{n^2-4n+5}\right)$ có kết quả bằng:

A. $-\infty$. B. 0. C. $\frac{5}{2}$. D. $+\infty$.

Câu 60. Giới hạn $\lim\left(\sqrt{4n^2+2n+7}-2n+3\right)$ có kết quả bằng:

A. 0. B. $\frac{7}{2}$. C. $-\frac{5}{2}$. D. $+\infty$.

Câu 61. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-...$ có kết quả bằng:

A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 62. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S=-4+2-1+...$ có kết quả bằng:

A. -8. B. $\frac{-8}{3}$. C. 6. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 63. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{2^n}+...$ có kết quả bằng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 64. Giới hạn $\lim(-n^4-50n+11)$ có kết quả bằng:

A. -1. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 65. Giới hạn $\lim(n^3-2n+1)$ có kết quả bằng:

A. 1. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 66. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ có kết quả bằng:

A. 0. B. 1. C. ∞. D. 2.

Câu 67. Giới hạn của hàm số $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ khi x tiến đến 0 có kết quả bằng:

A. 0. B. 1. C. $\dfrac{1}{3}$. D. $\dfrac{1}{9}$.

Câu 68. Giới hạn của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}$ khi x tiến đến 2 có kết quả bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. ∞.

Câu 69. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$ bằng:

A. 0. B. ∞. C. 1. D. 2.

Câu 70. Khi x tiến tới $-\infty$, hàm số $f(x)=(\sqrt{x^2+2x}-x)$ có giới hạn là:

A. 0. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. 1.

Câu 71. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào có kết quả là 0?

A. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$. B. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{x+10}$. C. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$. D. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Câu 72. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3-2x}{x^3-3x+2}$ có kết quả là:

A. $\dfrac{21}{16}$. B. $\dfrac{21}{20}$. C. 0. D. 1.

Câu 73. Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}+x-1}{\sqrt{x^2-x^3}}$ có kết quả là:

A. -1. B. 1. C. 2. D. -2.

Câu 74. Giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|}$ có kết quả là:

A. -1. B. $+\infty$. C. 1. D. $-\infty$

Câu 75. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}$ có kết quả là:

A. $-\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 76. Hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-ax & \text{khi } x\ge1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x<1 \end{cases}$ liên tục tại x = 1 khi *a* bằng:

A. 1. B. 3. C. -1. D. 0.

Câu 77: Cho phương trình: $x^5-3x^4+5x-2=0$ (1). Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào ***sai***?

A. Phương trình (1) có ít nhất ba nghiệm trên khoảng (-2;5).

B. Phương trình (1) có nghiệm trên khoảng (-1;3).

C. Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(-\infty;\dfrac{11}{2})$.

D. Hàm số $f(x)=x^5-3x^4+5x-2$ liên tục trên R.

Câu 78: Hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+9x-10}{x-1} & \text{khi } x\ne1 \\ ax+6 & \text{khi } x=1 \end{cases}$ liên tục tại $x=1$ khi:

A. a = 2. B. a = 3. C. a = 4. D. a = 5.

Câu 79. Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , x>0 \\ x & , x\le 0 \end{cases}$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***sai***?

A. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0.$ B. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$ C. $f(x)=0.$ D. f(x) liên tục tại x_0=0.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x}$ chưa xác định tại x = 0. Để f(x) liên tục tại x = 0, phải gán cho f(0) giá trị bằng bao nhiêu?

A. -3. B. -2. C. -1. D. 0.

Vận dụng cao

Câu 81. Giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)$ có kết quả là:

A. 1. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 82. Giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}-2n+2017\right)$ có kết quả là:

A. 2020. B. 0. C. $2017\dfrac{1}{12}$. D. $+\infty$.

Câu 83. Tổng $S=\sin^2 x+\sin^4 x+\sin^6 x+......(x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi)$ có kết quả bằng:

A. $\sin^2 x.$ B. $\cot^2 x.$ C. $\tan^2 x.$ D. $\cos^2 x.$

Câu 84. Tổng $S=1+\cos^2 x+\cos^4 x+......(x\ne k\pi)$ có kết quả bằng:

A. $\dfrac{1}{\sin^2 x}.$ B. $\cot^2 x.$ C. $\tan^2 x.$ D. $\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

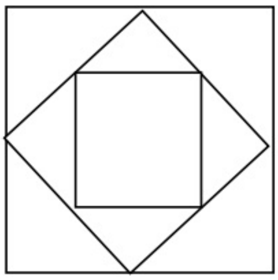
Câu 85. Giới hạn $\lim u_n$ biết $u_n=\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+2}+\dfrac{1}{3^2+3}+...+\dfrac{1}{n^2+n}$ có kết quả là:

A. 0. B. 1. C. $\dfrac{1}{2}.$ D. $+\infty$.

Câu 86. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\sqrt[3]{4x-8}}{\sqrt{x+4}-2}$ có kết quả là:

A. 3. B. 2. C. 0. D. $\dfrac{1}{3}.$

Câu 87. Cho hình vuông ABCD có độ dài là 1. Ta nội tiếp trong hình vuông này một hình vuông thứ 2, có đỉnh là trung điểm của các cạnh của nó. Và cứ thế ta nội tiếp theo hình vẽ. Tổng chu vi của các hình vuông đó bằng:



A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ B. $\dfrac{1}{3}.$ C. $4(2+\sqrt{2}).$ D. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}}.$

Câu 88. Giới hạn $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$ có kết quả là:

A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 89: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{n\sqrt{2n\sqrt{4n}}}}{n+1}$ có kết quả là:

A. 2. B. 4. C. $+\infty$. D. 0.

Câu 90. Giới hạn $\lim u_n = \lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$ có kết quả là:

A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. 3. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 91: $\lim\frac{n\sqrt{2n+1}-\sqrt{n^3+n^2+1}}{\sqrt{4n^3+3n}}$ có kết quả là:

A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}$.

Câu 92: Giới hạn $\lim\frac{1+2.3^n-7^n}{5^n+2.7^n}$ có kết quả là:

A. 2. B. $\frac{1}{5}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. 0.

Câu 93: Giới hạn $\lim\frac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$ có kết quả là:

A. $+\infty$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 94: Hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & , x\neq 1\\ a & , x=1\end{cases}$ liên tục tại điêm $x_0 = 1$ thì a bằng?

A. 0. B. 1. C. 2. D. -1.

Câu 95: Hàm số $f(x)=\begin{cases}\mathrm{ax}+3 & , x\geq 1\\ x^2+x-1 & , x<1\end{cases}$ liên tục trên toàn trục số thì a bằng?

A. -2. B. -1. C. 0. D. 1.

Câu 96: Cho hàm số $f(x)=x^5+x-1$. Xét phương trình: f(x) = 0 (1) trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề ***sai***?

A. (1) có nghiệm trên khoảng (-1; 1).
B. (1) có nghiệm trên khoảng (0; 1).
C. (1) có nghiệm trên R.
D. Vô nghiệm.

Câu 97: Cho phương trình $3x^3+2x-2=0$. Xét phương trình: f(x) = 0 (1) trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

A. (1) Vô nghiệm.
B. (1) có nghiệm trên khoảng (1; 2).
C. (1) có 4 nghiệm trên R.
D. (1) có ít nhất một nghiệm.

Câu 98: Giới hạn $\lim \dfrac{1+\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+...+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+...+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ có kết quả là:

A. 1. B. $\dfrac{5}{12}$. C. $\dfrac{4}{5}$. D. $\dfrac{-3}{20}$.

Câu 99: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}-2}{x^2+3x+2}=\text{a}$, thì 4a+1 có kết quả là:

A. -2. B. -3. C. 1/4. D. $-1/8$.

Câu 100: Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x>1\\ m^2x+3m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x<1\end{cases}$ liên tục tại x = 1 khi m bằng:

A. $m=0$ hoặc $m=-3$. B. $m=0$ hoặc $m=3$.

C. $m=\dfrac{-3\pm 2\sqrt{3}}{2}$. D. m = 2.

MA TRẬN ĐỀ KIỂM TRA 45 PHÚT

Chủ đề	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng		Tổng
			Vận dụng thấp	Vận dụng cao	
PP quy nạp		1	1		2 0,8
Dãy số	1	1	1		3 1,2
Cấp số cộng	1	1	1		3 1,2
Cấp số nhân	1	1	1		3 1,2
Giới hạn dãy số	1	3	1	1	6 2,4
Giới hạn hàm số	1	1	2	1	5 2,0
Hàm số liên tục	1	1	1		3 1,2
Tổng	6 2,4	9 3,6	8 3,2	2 0.8	25 10

ĐỀ BÀI

Câu 1. Với mọi số nguyên dương n, tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$ là:

A. $\frac{1}{n+1}$. B. $\frac{n}{n+1}$. C. $\frac{n}{n+2}$. D. $\frac{n+1}{n+2}$.

Câu 2. Với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $3^n > 4n+1$. B. $3^n > 4n+2$. C. $3^n > 3n+4$. D. $3^n > 3n+1$.

Câu 3. Dãy số nào dưới đây thỏa mãn $u_0 = 1, u_1 = 2, u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ với $n = 2,3,4...$?

A. $1;2;4;8;16;36;...$ B. $1;2;8;16;24;54;...$

C. $u_n = 2^n + 1 \quad (n = 0;1;2;...)$ D. $u_n = 2^n \quad (n = 0;1;2;...)$

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2^n.u_n \end{cases}$ với $\forall n \geq 1$. Ta có u_5 bằng:

A. 10. B. 1024. C. 2048. D. 4096.

Câu 5. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$ là dãy số bị chặn trên bởi:

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 1. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 6. Cho cấp số cộng 2 ; x ; 5. Hãy chọn kết quả đúng?

A. $x = \frac{5}{2}$. B. $x = 3$. C. $x = 4$. D. $x = \frac{7}{2}$.

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) có: $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng:

A. 4005. **B.** 4003. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 150 \\ u_n = u_{n-1} - 3 \quad ,\forall\ n \geq 2 \end{cases}$. Khi đó tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số đó bằng:

A. 150. **B.** 300. **C.** 29850. **D.** 59700.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $1+x+x^2+\ldots+x^{2007}=0$ là:

A. $x=\pm1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=11$. **D.** $x=1 \vee x=-2$.

Câu 10. Dãy số 1, 2, 4, 8, 16, 32, …là một cấp số nhân với:

A. công bội là 3 và phần tử đầu tiên là 1. B. công bội là 2 và phần tử đầu tiên là 1.
C. công bội là 4 và phần tử đầu tiên là 2. D. công bội là 2 và phần tử đầu tiên là 2.

Câu 11. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, ...$ với công bội $q\ (q \neq 1)$.

Đặt $S_n = u_1+u_2+u_3+......+u_n$. Khi đó ta có:

A. $S_n=\dfrac{u_1(q^n+1)}{q+1}$. B. $S_n=\dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$.

C. $S_n=\dfrac{u_1(q^{n-1}-1)}{q+1}$. D. $S_n=\dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$.

Câu 12: Giới hạn $\lim(n^2 - n + 1)$ bằng:

A. 1. B. $-\infty$. C.- 1. D. $+\infty$.

Câu 13: Giới hạn $\lim\dfrac{3n^3+2n^2+n}{n^3+4}$ bằng:

A. 3. B. $\dfrac{3}{4}$. C. 4. D. -3.

Câu 14: Giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}\right)$ bằng:

A. 0. B. 1. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 15: Giới hạn của dãy số $\lim\dfrac{\sin n}{n}$ bằng giới hạn nào dưới đây?

A. $\lim\dfrac{2n+1}{n}$. B. $\lim 2^n$. C. $\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. D. $\lim(\sqrt{n^2+n}-1)$.

Câu 16: Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...$ là:

A. 1. B. 2. C. 4. D. ∞.

Câu 17: Giới hạn $\lim\dfrac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}$ bằng:

A. 0. B. 1. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{2}{3}$.

Câu 18: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***sai***?

A. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$. B. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^5}=+\infty$. C. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=+\infty$. D. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^3+3\sqrt{3}}$, ta có $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x)$ bằng?

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$. C. $\dfrac{-2\sqrt{3}}{9}$. D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 20: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}-x)$ bằng:

A. $\dfrac{7}{2}$. B. $-\dfrac{7}{2}$. C. $\dfrac{-3}{2}$. D. $\dfrac{3}{2}$.

Câu 21: $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1}$ bằng:

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 1. D. 0.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2}+3, x\ge 2\\ ax-1, x<2\end{cases}$, để $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ tồn tại thì a bằng bao nhiêu?

A. 2 . B.3 . C. 4. D. 5.

Câu 23: Cho các hàm số: (I) y = sinx ;`(II) y = cosx ; (III) y = tanx ; (IV) y = cotx
Trong các hàm số sau hàm số nào liên tục trên R?

A. (I) và (II). B. (III) và IV) . C. (I) và (III). D. (I), (II), (III) và (IV).

Câu 24: Cho hàm số f(x) chưa xác định tại x = 0: $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x}$. Để f(x) liên tục tại x = 0, phải gán cho f(0) giá trị bằng bao nhiêu?

A. -3. B. -2. C. -1. D. 0.

Câu 25: Cho phương trình $3x^3+2x-2=0$. Xét phương trình: f(x) = 0 (1) trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

A. (1) Vô nghiệm.
B. (1) có nghiệm trên khoảng (1; 2).
C. (1) có 4 nghiệm trên R.
D. (1) có ít nhất một nghiệm.

NHÓM: THPT KHÁNG NHẬT + THPT XUÂN HUY

CHUYÊN ĐỀ: ĐẠO HÀM
BUỔI 1:
ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM VÀ QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN
1. Định nghĩa đạo hàm:
Đạo hàm của $f(x)$ tại x_0, kí hiệu $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2. Quy tắc tính đạo hàm và công thức tính đạo hàm

Các quy tắc : Cho $u=u(x)$; $v=v(x)$; C : là hằng số .

- $(u\pm v)'=u'\pm v'$
- $(u.v)'=u'.v+v'.u \quad \Rightarrow (C.u)'=C.u'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$, $(v\neq 0)\Rightarrow\left(\dfrac{C}{u}\right)'=-\dfrac{C.u'}{u^2}$
- Nếu $y=f(u), u=u(x) \quad \Rightarrow y'_x=y'_u.u'_x$.

Các công thức :

- $(C)'=0$; $(x)'=1$
- $(x^n)'=n.x^{n-1} \quad \Rightarrow (u^n)'=n.u^{n-1}.u'$, $(n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2)$
- $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x>0)\Rightarrow(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(u>0)$

B. KĨ NĂNG CƠ BẢN
*** Các bước tính đạo hàm bằng định nghĩa:**
+ Bước 1: Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_o.
Tính $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$.
+ Bước 2: Tính $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ suy ra $f'(x_o)$

*Công thức tính đạo hàm **nhanh** của hàm **hữu tỉ** :

- Dạng : y = $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ $\Rightarrow$ y’ = $\dfrac{(ab'-a'b)x^2+2(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)}{(a'x^2+b'x+c')^2}$
- Dạng : y = $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ $\Rightarrow$ y’ = $\dfrac{ad.x^2+2ae.x+(be-dc)}{(dx+e)^2}$
- Dạng : y = $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\Rightarrow$ y’ = $\dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP
<u>Bài toán 1:</u> Tính đạo hàm bằng định nghĩa:

Bài tập 1: Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = x^2 + x$ tại $x_0=1$

b) y = $\dfrac{x+1}{x-1}$ tại $x_0=0$

Lời giải

a) $y = x^2 + x$ tại $x_0 = 1$

Gọi Δx là gia số của x tại $x_0 = 1$

Ta có $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$= f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^2 + (1+\Delta x) - 2 = 1 + 2\Delta x + \Delta x^2 + 1 + \Delta x - 2 = \Delta x^2 + 3\Delta x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 3) = 3$$

$f'(1) = 3$

b) y = $\dfrac{x+1}{x-1}$ tại $x_0 = 0$

Gọi Δx là gia số của x tại $x_0 = 0$

Ta có $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$$= f(0+\Delta x) - f(0) = \frac{(0+\Delta x)+1}{(0+\Delta x)-1} - (-1) = \frac{\Delta x + 1}{\Delta x - 1} + 1 = \frac{2\Delta x}{\Delta x - 1}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x - 1} . \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x(\Delta x - 1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x - 1} = -2$$

$f'(0) = -2$

❖ ***<u>Nhận xét:</u>*** Để tính hàm số y = $f(x)$ trên khoảng (a;b) và $x_0 \in (a;b)$ bằng định nghĩa ta chỉ cần tính

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ sau đó lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ rồi tìm giới hạn của $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ khi Δx tiến dần về 0.

<u>Bài toán 2:</u> Tính đạo hàm của hàm số theo quy tắc

Dạng 1: Tính đạo hàm của Tổng, Hiệu, Tích, Thương.

Bài tập 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x^5 + \dfrac{1}{x} + 3$ **b)** $y = x^5 - 5x^3 - 2x^2 + 1$ **c)** $y = \dfrac{2x-3}{x+4}$ **d)** $y = (9-2x)(3x^2 - 3x + 1)$

<u>Lời giải:</u>

a) $y = 2x^5 + \dfrac{1}{x} + 3$

$$y' = \left(2x^5 + \frac{1}{x} + 3\right)' = \left(2x^5\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' + (3)' = 10x^4 + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 10x^4 - \frac{1}{x^2}$$

b) $y = x^5 - 5x^3 - 2x^2 + 1$

$$y' = \left(x^5 - 5x^3 - 2x^2 + 1\right)' = \left(x^5\right)' - 5\left(x^3\right)' - \left(2x^2\right)' + (1)' = 5x^4 - 15x^2 - 4x$$

c) $y = \dfrac{2x-3}{x+4}$

$$y' = \left(\frac{2x-3}{x+4}\right)' = \frac{(2x-3)'(x+4) - (x+4)'(2x-3)}{(x+4)^2} = \frac{2(x+4) - (2x-3)}{(x+4)^2} = \frac{2x+8-2x+3}{(x+4)^2} = \frac{11}{(x+4)^2}$$

d) $y = (9-2x)(3x^2 - 3x + 1)$

$$y' = \left[(9-2x)(3x^2-3x+1)\right]' = (9-2x)'(3x^2 - 3x + 1) + (3x^2 - 3x + 1)'(9-2x)$$

$$= -2(3x^2 - 3x + 1) + (6x - 3)(9 - 2x)$$

$= -6x^2 + 6x - 2 + 54x - 12x^2 - 27 + 6x$

$= -18x^2 + 66x - 29$

❖ **Nhận xét:** Để tìm đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ ta chỉ cần xác định dạng của hàm số rồi áp dụng các công thức và phép toán của đạo hạm để tính đạo hàm của hàm số.

Dạng 2: Tính đạo hàm của hàm hợp

Bài tập 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x^4 + 4x - 3)^{1994}$; b) $y = 2\sqrt{2x^2 - 1}$; c) $y = \dfrac{2}{x^5}$ d) $y = \left(x^5 - 2\sqrt{x^2 - 2}\right)^3$

Lời giải:

a) $y = (2x^4 + 4x - 3)^{1994}$ $y' = 1994(2x^4 + 4x - 3)^{1993}(2x^4 + 4x - 3)'$ $= 1994(2x^4 + 4x - 3)^{1993}(8x^3 + 4)$	b) $y = 2\sqrt{2x^2 - 1}$ $y' = 2\dfrac{(2x^2 - 1)'}{2\sqrt{2x^2 - 1)}} = \dfrac{4x}{\sqrt{2x^2 - 1)}}$
c) $y = \dfrac{2}{x^5}$ $y' = 2\left(\dfrac{1}{x^5}\right)' = -2\dfrac{(x^5)'}{(x^5)^2} = -2\dfrac{5x^4}{x^{10}} = -\dfrac{10}{x^6}$	d) $y = \left(x^5 - 2\sqrt{x^2 - 2}\right)^3$ $y' = \left[\left(x^5 - 2\sqrt{x^2 - 2}\right)^3\right]'$ $= 3\left(x^5 - 2\sqrt{x^2 - 2}\right)^2\left(x^5 - 2\sqrt{x^2 - 2}\right)'$ $= 3\left(x^5 - 2\sqrt{x^2 - 2}\right)^2\left(x^5\right)' - 2\left(\sqrt{x^2 - 2}\right)'$ $= 15\left(x^5 - 2\sqrt{x^2 - 2}\right)^2 x^4 - 2\dfrac{(x^2 - 2)'}{2\sqrt{x^2 - 2}}$ $= 15\left(x^5 - 2\sqrt{x^2 - 2}\right)^2 x^4 - \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 2}}$

Bài toán 3: Giải bất phương trình.

❖ **Phương pháp giải:** Để giải bất phương trình ta làm các bước sau:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)$ và $g(x)$ (nếu có)

Bước 2: Xác định điều kiện bất phương trình rồi thay $f'(x)$ và $g'(x)$ (nếu có) vào điều kiện tìm nghiệm x_0

Bước 3: Lập bảng xét dấu rồi kết luận tập nghiệm của bất phương trình.

Bài tập 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $f'(x) < 0$,với $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x$

b) $g'(x) \le 0$,với $g(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 9}{x - 2}$

c) $f'(x) < g'(x)$,với $f(x) = x^3 + x^2 - \dfrac{1}{2}$; $g(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$

Lời giải:

a) $f'(x) < 0$, với $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x$

Ta có $f'(x) = x^2 - 5x + 6$

Mà $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$

$\Leftrightarrow 2 < x < 3$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là: S=(2 ; 3)

b) $g^{'}(x) \le 0$,với $g(x) = \dfrac{x^2+3x-9}{x-2}$

Ta có $g^{'}(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

Mà $g^{'}(x) \le 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3 \le 0 \\ x-2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ x \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1;3] \setminus \{2\}$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là: S=[1 ; 3]\2

c) $f^{'}(x) < g'(x)$, với $f(x) = x^3 + x^2 - \dfrac{1}{2}$; $g(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$

Ta có $f^{'}(x) = 3x^2 + 2x$, $g'(x) = 2x^2 + x + 2$

Mà $f^{'}(x) < g'(x)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x < 2x^2 + x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 2x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là: S=(-2 ; 1)

- **Nhận xét:** Tùy thuộc vào đề bài ta tính được đạo hàm của $f(x)$ và $g(x)$ (nếu có) sau đó đem thế vào điều kiện có được từ đề bài để tìm nghiệm của bất phương trình.

Luyện tập củng cố:

Bài tập 1: Tính đạo hàm các hàm số sau:

1) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x - 5$ ĐS: $y' = x^2 - x + 1$

2) $y = 2x^5 - \dfrac{x}{2} + 3$ ĐS: $y' = 10x^4 - \dfrac{1}{2}$

3) $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{5}{x^3} - \dfrac{6}{7x^4}$ ĐS: $y' = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} - \dfrac{15}{x^4} + \dfrac{24}{7x^5}$

4) $y = 5x^2(3x-1) = 15x^3 - 5x^2$ ĐS: $y' = 45x^2 - 10x$

Bài tập 2: Tính đạo hàm các hàm số sau:

1) $y = (x^3 - 3x)(x^4 + x^2 - 1)$

2) $y = (x^2+5)^3$

3) $y = (x^2+1)(5-3x^2)$

4) $y = \left(\dfrac{2}{x} + 3x\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)$

5) $y = \sqrt{2x^3}$

6) $y = (5x^3 + x^2 - 4)^5$

7) $y = \sqrt{3x^4 + x^2}$

8) $y = \dfrac{2x^2-5}{x+2}$

9) $y = \dfrac{1}{2x^2+3x-5}$

10) $y = \sqrt{x^2+6x+7}$

11) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$

12) $y = (x+1)\sqrt{x^2+x+1}$

13) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x+1}$

14) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN.

Câu 1: Số gia của hàm số $f(x) = x^3$, ứng với: $x_0 = 2$ và $\Delta_x = 1$ là:

A. 19 **B.** -7 **C.** 7 **D.** 0

Câu 2: Số gia của hàm số $f(x) = x^2 - 1$ theo x và Δ_x là:

A. $2x + \Delta_x$ **B.** $\Delta_x(x + \Delta_x)$ **C.** $\Delta_x(2x + \Delta_x)$ **D.** $2x\Delta_x$

Câu 3: Số gia của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2}$ ứng với số gia Δ_x của đối số tại $x_0 = -1$ là:

A. $\frac{1}{2}(\Delta_x)^2 + \Delta_x$ **B.** $\frac{1}{2}(\Delta_x)^2 - \Delta_x$ **C.** $\frac{1}{2}((\Delta_x)^2 - \Delta_x)$ **D.** $\frac{1}{2}(\Delta_x)^2 - \Delta_x + 1$

Câu 4: Tỉ số $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ của hàm số $f(x) = 2x - 5$ theo x và Δ_x là:

A. 2 **B.** $2\Delta_x$ **C.** Δ_x **D.** $2-\Delta_x$

Câu 5: Đạo hàm của hàm số $f(x) = 3x - 1$ tại $x_0 = 1$ là:

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Câu 6: Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đạo hàm là:

A. $y' = 2$ **B.** $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$ **C.** $y' = -\frac{3}{(x-1)^2}$ **D.** $y' = \frac{1}{(x-1)^2}$

Câu 7: Hàm số $y = \frac{(x-2)^2}{1-x}$ có đạo hàm là:

A. $y' = \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$ **B.** $y' = \frac{x^2-2x}{(1-x)^2}$ **C.** $y' = -2(x-2)$ **D.** $y' = \frac{x^2+2x}{(1-x)^2}$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2$. Đạo hàm của hàm số f(x) là:

A. $f'(x) = \frac{-2(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^3}$ **B.** $f'(x) = \frac{-2(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$ **C.** $f'(x) = \frac{2(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ **D.** $f'(x) = \frac{2(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})}$

Câu 9: Đạo hàm của hàm số $f(x) = 5x^3 - x^2 - 1$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ là:

A. $15x^2 - 2x$ **B.** $15x^2 - 2x - 1$ **C.** $15x^2 + 2x$ **D.** 0

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y = 6x^5 + 4x^4 - x^3 + 10$ là:

A. $y' = 30x^4 + 16x^3 - 3x^2$ **B.** $y' = 20x^4 + 16x^3 - 3x^2$

C. $y' = 30x^4 + 16x^3 - 3x^2 + 10$ **D.** $y' = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2$

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y = x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ là:

A. $y' = 2x + \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$ **B.** $y' = 2x + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

C. $y' = 2x - \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$ **D.** $y' = 2x - \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

Câu 12: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x-2}{2x+3}$ là:

A. $y' = \frac{7}{(2x+3)^2}$ **B.** $y' = \frac{-7}{(2x+3)^2}$ **C.** $y' = \frac{x-2}{(2x+3)^2}$ **D.** $y' = 7$

Câu 13: Đạo hàm của hàm số $y = (x-1)(x-3)$ là:

A. $y' = x - 1$ **B.** $y' = x - 4$ **C.** $y' = 2x - 4$ **D.** $y' = x - 3$

Câu 14: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 13$. Giá trị của x để y' > 0 là:

A. $x \in (-2; 0)$ **B.** $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

C. $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ **D.** $x \in (0; -2)$

Câu 15: Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$ bằng:

A. $6x^5 - 20x^4 + 16x^3$ **B.** $6x^5 - 20x^4 + 4x^3$

C. $6x^5 + 16x^3$ **D.** $6x^5 - 20x^4 - 16x^3$

Câu 16: Phương trình $xy' = 1$ biết $y = \sqrt{x^2 - 1}$ có tập nghiệm là:

A. S={1} **B.** S = {2} **C.** S = {3} **D.**S = ∅

Câu 17: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ là:

A. $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$ **B.** $y' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$

C. $y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ **D.** Không tồn tại đạo hàm

Câu 18: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+9}{x+3} + \sqrt{4x}$ tại điểm $x = 1$ là:

A. $-\frac{5}{8}$ **B.** $\frac{25}{16}$ **C.** $\frac{5}{8}$ **D.** $\frac{11}{8}$

Câu 19: Đạo hàm của hàm số $y = (x-2)\sqrt{x^2+1}$ là:

A. $y' = \frac{2x^2+2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ **B.** $y' = \frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ **C.** $y' = \frac{2x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$; **D.** $y' = \frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

Câu 20: Hàm số có $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$ là:

A. $y = \frac{x^3+1}{x}$ **B.** $y = \frac{3(x^2+x)}{x^3}$ **C.** $y = \frac{x^3+5x-1}{x}$ **D.** $y = \frac{2x^2+x-1}{x}$

Câu 21: Tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ biết $f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5$.

A. -2 và -4 **B.** 2 và 4 **C.** -2 và 4 **D.** ± 2 và ± 4

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+x}$. Giá trị biểu thức f(3) – 8f'(3) là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 23: Giả sử $h(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Tập nghiệm phương trình $h'(x) = 0$ là:

A. $[-1; 2]$ **B.** $(-\infty; 0]$ **C.** $\{-1\}$ **D.** $\emptyset$

Câu 24: Cho hai hàm số $f(x) = x^2 + 2$ và $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Tính $\frac{f'(1)}{g'(0)}$.

A. 2 **B.** 0 **C.** Không tồn tại **D.** -2

Câu 25: Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$. Tìm m để $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $m = 0$ **B.** $m < 0$ **C.** $m > 0$ **D.** $m < 1$

BUỔI 2

Tiết 4

ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. Kiến thức cơ bản

Giới hạn của $\dfrac{\sin x}{x}$ **là** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Bảng đạo hàm hàm số lượng giác

Đạo hàm của hàm số lượng giác:		
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'\cos u$	$(\sin^n u)' = n\sin^{n-1}u.(\sin u)'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$	$(\cos^n u)' = n\cos^{n-1}u.(\cos u)'$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$(\tan^n u)' = n\tan^{n-1}u.(\tan u)'$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	$(\cot^n u)' = n\cot^{n-1}u.(\cot u)'$

Nếu hàm số u = g(x) có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là $y'_{(u(x))}$ thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là:

$$\boxed{y'_{(x)} = y'_{(\mathrm{u(x)})}.u'_{(x)}}$$

B. Kỹ năng cơ bản

- Biết vận dụng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ trong một số giới hạn dạng $\dfrac{0}{0}$ đơn giản.
- Tính đạo hàm của một số hàm số lượng giác.
- Tính đạo hàm của một số hàm số hợp.

C. Bài tập luyện tập

Bài toán 1: Đạo hàm của hàm số lượng giác.

Dạng 1: Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ và $y = \cot x$

Ví dụ: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin x + \cos x$: **b)** $y = \tan x + \cot x$ **c)** $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

Lời giải:

a)
$$y = \sin x + \cos x$$
$$y' = (\sin x + \cos x)'$$
$$y' = (\sin x)' + (\cos x)'$$
$$y' = \cos x - \sin x$$

b)
$$y = \tan x + \cot x$$
$$y' = (\tan x + \cot x)'$$
$$y' = (\tan x)' + (\cot x)'$$
$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$$

c) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

$$y'=\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)'$$

$$=\dfrac{(\sin x+\cos x)'(\sin x-\cos x)-(\sin x-\cos)'(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\dfrac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}\quad(\sin^2 x+\cos^2 x=1)$$

$$=\dfrac{-(\cos x-\sin x)(-\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\dfrac{-(\cos x-\sin x)^2-(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\dfrac{-(\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x)-(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x)}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\dfrac{-(1-2\cos x\sin x)-(1+2\sin x\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$$

<u>Dạng 2:</u> Đạo hàm của hàm hợp:

Ví dụ: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\sin\dfrac{1}{x^2}$; **b)** $y=3\tan^2 2x+\cot^2 2x$ **c)** $y=\sqrt{x^2+1}.\cot 2x$ **d)** $y=\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$

<u>Lời giải:</u>

a) $y=\sin\dfrac{1}{x^2}$

$$y'=\left(\sin\dfrac{1}{x^2}\right)'=\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'\cos\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{2}{x^3}\cos\dfrac{1}{x^2}$$

b) $y=3\tan^2 2x+\cot^2 2x$

$$y'=(3\tan^2 2x+\cot^2 2x)'=6\tan 2x(\tan 2x)'+2\cot 2x(\cot 2x)'$$

$$=6\tan 2x.\dfrac{(2x)'}{\cos^2 2x}+2\cot 2x\left[-\dfrac{(2x)'}{\sin^2 2x}\right]$$

$$=12\tan 2x.\dfrac{1}{\cos^2 2x}-4\cot 2x.\dfrac{1}{\sin^2 2x}=\dfrac{12\tan 2x}{\cos^2 2x}-\dfrac{4\cot 2x}{\sin^2 2x}$$

c) $y=\sqrt{x^2+1}.\cot 2x$

$$y' = \left(\sqrt{x^2+1}.\cot 2x\right)' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)'\left(\cot 2x\right) + \left(\cot 2x\right)'\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}\left(\cot 2x\right) - \frac{(2x)'}{\sin^2 2x}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{x\cot 2x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{2\sqrt{x^2+1}}{\sin^2 2x}$$

d) $y = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin^3 x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin^3 x - (\sin^3 x)'\cos x}{(\sin^3 x)^2} = \frac{-\sin x.\sin^3 x - \left[3\sin^2 x(\sin x)'\right]\cos x}{(\sin^3 x)^2}$$

$$= \frac{-\sin^4 x - 3\sin^2 x.\cos^2 x}{\sin^6 x}$$

D. Bài tập TNKQ

(Làm tổng hợp cuối)

Tiết 5 **VI PHÂN**

A. Kiến thức cơ bản

Vi phân: $y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx$

Phép tính gần đúng: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x)\Delta x$

B. Kỹ năng cơ bản

- Vi phân của một hàm số
- Giá trị gần đúng của một hàm số tại một điểm.
- Nắm chắc các quy tắc tính đạo hàm, vận dụng vào trong BT.

C. Bài tập vận dụng

Dạng 1: Phép tính gần đúng

Ví dụ 1: Xác định giá trị của $\sqrt{3,99}$ với 4 chữ số thập phân.

Giải

Đặt $f(x) = \sqrt{x}$, ta có

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Theo công thức tính gần đúng, với $x_0 = 4$, $\Delta x = -0,01$ ta có $f(3,99) = f(4 - 0,01) \approx f(4) + f'(4)(-0,01)$, tức là $\sqrt{3,99} = \sqrt{4 - 0,01} \approx$

$\sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0,01) = 1,9975$

Ví dụ 2: Tính giá trị của $\sin 30^0 30'$

Do $30^0 30' = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360^0}$ nên ta xét hàm số

$f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{6}$ với số gia $\Delta x = \frac{\pi}{360^0}$. Áp dụng ct

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x)\Delta x$$

Ta có:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360^0}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{360^0}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{360^0} \approx 0,5076$$

Vậy $\sin 30^0 30' = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360^0}\right) \approx 0,5076$

Dạng 2: **Vi phân**

Ví dụ : Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{x^2}$ b) $y = \frac{x+2}{x-1}$ c) $y = \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Lời giải

a) $dy = -\frac{2}{x^3}dx$ b) $dy = -\frac{3}{(x-1)^2}dx$ c) $dy = \frac{2\sqrt{x} - \sin\left(2\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$

D. Bài tập TNKQ

(Làm tổng hợp cuối)

Tiết 6 **ĐẠO HÀM CẤP HAI**

A. Kiến thức cơ bản

- $f^{(n)}(x) = (f^{(n)}(x))'$
- $(x^n)' = n.x^{n-1}$

B. Kỹ năng cơ bản

Tính đạo hàm cấp hai của HS

Tính đạo hàm cấp cao của HS luọng giác, phân thức

Tính đạo hàm và sử dụng các phép biến đổi đặc biệt là về hàm lượng giác.

C. Bài tập vận dụng

Dạng 1: Tính đạo hàm cấp hai

Ví dụ 1: Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) y = sin3xcos2x b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

c) $y = x^2 \sin x$ d) $y = (1 - x^2)cosx$

$$y = \sin 5x\cos 2x = \frac{1}{2}\left(\sin 7x + \sin 3x\right)$$

a) $y' = \dfrac{1}{2}\left(7\cos 7x + 3\cos 3x\right)$

$$y'' = -\frac{1}{2}\left(49\sin 7x + 9\sin 3x\right)$$

b)

$$y = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right] \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{-1}{(x-1)^2}\right]$$

$$y'' = \left[\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x-1)^3}\right]$$

c)

$$y' = 2x.\sin x - x^2.\cos x$$

$$y'' = (2 - x^2)\sin x + 4x.\cos x$$

d)

$$y' = -2x.\cos x + \left(1 - x^2\right)\sin x$$

$$y'' = (x^2 - 3)\cos x + 4x\sin x$$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức về đạo hàm.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng

a) $y' - y^2 - 1 = 0$ với y = tanx.

b) $y' + 2y^2 + 2 = 0$ với y = cot2x.

c) $y'^2 + 4y^2 = 4$ với y = sin2x.

Giải

a) Ta có $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Khi đó

$$y' - y^2 - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1 - \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\cos^2 x} = \frac{1-1}{\cos^2 x} = 0$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

b) Ta có $y' = -\frac{2}{\sin^2 2x}$

Khi đó

$$y' + 2y^2 + 2 = -\frac{2}{\sin^2 2x} + \frac{2\cos^2 2x}{\sin^2 2x} + 2 = \frac{-2 + 2\left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right)}{\sin^2 2x} = 0$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

c) Ta có

y’ = 2cos2x

Khi đó $\left(y'\right)^2 + 4y^2 = 4\cos^2 2x + 4\sin^2 2x = 4$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

<u>D. Bài tập TNKQ</u>

(Làm tổng hợp cuối)

D. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. (NB) Hàm số y = sinx có đạo hàm là:

A. $y' = \cos x$ **B.** $y' = -\cos x$

C. $y' = -\sin x$ **D.** $y' = \dfrac{1}{\cos x}$

Câu 2. (NB) Hàm số y = tanx có đạo hàm là:

A. $y' = \cot x$ **B.** $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

C. $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ **D.** $y' = 1 - \tan^2 x$

Câu 3. (NB)Hàm số y = cotx có đạo hàm là:

A. $y' = -\tan x$ **B.** $y' = -\dfrac{1}{\cos^2 x}$

C. $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ **D.** $y' = 1 + \cot^2 x$

Câu 4. (TH) Hàm số $y = \dfrac{1}{2}(1+\tan x)^2$ có đạo hàm là:

A. $y' = 1+\tan x$ **B.** $y' = (1+\tan x)^2$

C. $y' = (1+\tan x)(1+\tan x)^2$ **D.** $y' = 1+\tan^2 x$

Câu 5. (TH) Hàm số $y = \sin^2 x.\cos x$ có đạo hàm là:

A. $y' = \sin x(2\cos^2 x - 1)$ **B.** $y' = \sin x(3\cos^2 x + 1)$

C. $y' = \sin x(\cos^2 x + 1)$ **D.** $y' = \sin x(\cos^2 x - 1)$

Câu 6. (TH) Hàm số $y = \sqrt{\cot 2x}$ có đạo hàm là:

A. $y' = \dfrac{1+\cot^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$ **B.** $y' = \dfrac{-(1+\cot^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$

C. $y' = \dfrac{1+\tan^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$ **D.** $y' = \dfrac{-(1+\tan^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$

Câu 7. (VDT) Cho hàm số y = cos3x.sin2x. Khi đó $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$ **B.** $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

C. $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ **D.** $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

Câu 8. (VDT) Cho hàm số $y = f(x) = 2\sin\sqrt{x}$. Đạo hàm của hàm số y là:

A. $y' = 2\cos\sqrt{x}$ **B.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

C. $y' = 2\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **D.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}$

Câu 9. (VDC)Đạo hàm của hàm số $y = \cot(\cos x)$ là:

A. $y' = \frac{-\sin x}{\sin^2(\cos x)}$ **B.** $y' = \frac{\sin x}{\sin^2(\cos x)}$ **C.** $y' = \frac{-1}{\sin^2(\cos x)}$ **D.** $y' = \frac{1}{\sin^2(\cos x)}$

Câu 10. **(VDT)** Cho các hàm số $f(x) = \cos 3x$, $g(x) = \sin 2x$, $h(x) = \tan 2x$. Hàm số nào có đạo hàm tại $\frac{\pi}{2}$ bằng 2.

A. $f(x)$ **B.** $g(x)$ **C.** $h(x)$ **D.** $f(x)$ và $h(x)$

Câu 11. (VDT) Cho hai hàm số $f_1(x) = x\sin x$ và $f_2(x) = \frac{\cos x}{x}$. Khi đó $\frac{f_2'(1)}{f_1'(1)}$ bằng

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** -1

Câu 12. **(VDC)** Cho hàm số $f(x) = 2\cos^2(4x - 1)$. Giá trị của x để $|f'(x)| = 8$ là:

A. $k2\pi$ **B.** $\pi + 4 + k2\pi$

C. $\frac{1}{16(\pi + 4 + k2\pi)}$ **D.** $\pi + k2\pi$ (k là số nguyên)

Câu 13. (NB) Cho hàm số $y = f(x) = (x - 1)^2$. Biểu thức nào sau đây chỉ vi phân của hàm số f(x)?

A. $dy = 2(x - 1)dx$ **B.** $dy = (x-1)^2dx$ **C.** $dy = 2(x-1)$ **D.** $dy = (x-1)dx$

Câu 14. (TH) Một hàm số $y = f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 2x}$. Chọn câu đúng:

A. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$ **B.** $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$

C. $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$ **D.** $df(x) = \frac{-\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$

Câu 15. (NB) Cho hàm số $y = x^3 - 5x + 6$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy = (3x^2 - 5)dx$ **B.** $dy = -(3x^2 - 5)dx$

C. $dy = (3x^2 + 5)dx$ **D.** $dy = (-3x^2 + 5)dx$

Câu 16. (TH) Cho hàm số $y = \frac{1}{3x^3}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy = \frac{1}{4}dx$ **B.** $dy = \frac{1}{x^4}dx$ **C.** $dy = -\frac{1}{x^4}dx$ **D.** $dy = x^4dx$

Câu 17. (NB) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy = \frac{dx}{(x-1)^2}$ **B.** $dy = \frac{3dx}{(x-1)^2}$

C. $dy = \frac{-3dx}{(x-1)^2}$ **D.** $dy = -\frac{dx}{(x-1)^2}$

Câu 18. (TH) Cho hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{x-1}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy = -\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}dx$ **B.** $dy = \frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$

C. $dy = -\frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$ **D.** $dy = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}dx$

Câu 19. (VDC) Vi phân của hàm số $y=\dfrac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ là:

A. $dy=\dfrac{2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$ **B.** $dy=\dfrac{\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$

C. $dy=\dfrac{2\sqrt{x}-\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$ **D.** $dy=-\dfrac{2\sqrt{x}-\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$

Câu 20. (VDT)Hàm số y = xsinx + cosx có vi phân là:

A. dy = (xcosx – sinx)dx **B.** dy = (xcosx)dx

C. dy = (cosx – sinx)dx **D.** dy = (xsinx)dx

Câu 21. (TH) Hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$ có đạo hàm cấp hai là:

A. $y''=0$ **B.** $y''=\dfrac{1}{(x-2)^2}$

C. $y''=-\dfrac{4}{(x-2)^2}$ **D.** $y''=\dfrac{4}{(x-2)^2}$

Câu 22. (NB) Hàm số $y=(x^2+1)^3$ có đạo hàm cấp ba là:

A. $y'''=12(x^2+1)$ **B.** $y'''=24(x^2+1)$

C. $y'''=24(5x^2+3)$ **D.** $y'''=-12(x^2+1)$

Câu 23. (NB) Đạo hàm cấp 2 của hàm số y = tanx bằng:

A. $y''=-\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$ **B.** $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **C.** $y''=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **D.** $y''=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$

Câu 24. (VDT)Xét hàm số $y=f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}(x)=-8$ có nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $x=\dfrac{\pi}{2}$ **B.** $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{6}$ **C.** $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{3}$ **D.** $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$

Câu 25. (VDC) Cho hàm số y = sin2x. Hãy chọn câu đúng:

A. $4y-y''=0$ **B.** $4y+y''=0$ **C.** $y=y'\tan 2x$ **D.** $y^2=(y')^2=4$

BUỔI 3:
Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số y = f(x) xác định trên (a; b) và có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a;b)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đó.

Định lí: Đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$.

***Phương trình tiếp tuyến**

Định lí: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số y = f(x) tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ trong đó } y_0 = f(x_0).$$

2)Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

a) Vận tốc tức thời: $v(t_0) = s'(t_0)$

b) Cường độ tức thời: $I(t_0) = Q'(t_0)$

B. KĨ NĂNG CƠ BẢN

1) Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số $y = f(x)$

Dạng 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M($x_0;y_0$)

Dạng 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), viết phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc k.

2) Ứng dụng đạo hàm vào giải các bài toán có nội dung vật lý

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1) Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số $y = f(x)$

Dạng 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M($x_0;y_0$)

- ❖ **Phương pháp giải:**

  Bước1: Xác định tọa độ $x_0;y_0$

  Bước 2: Tính đạo hàm của $f'(x)$ tại x_0

  Bước 3: Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M($x_0;y_0$), có dạng:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Bài tập 1: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2$ có đồ thị (C) viết phương trình tiếp tuyến của (C):

a) Tại điểm (1 ; -1).

b) Tại điểm có hoành độ bằng -3.

<u>Lời giải:</u>

Tại điểm (1;-1). Ta có $x_0 = 1$ và $y_0 = -1$ $f'(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f'(1) = 3$ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm (1 ; -1), có dạng $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ $\Leftrightarrow y + 1 = 3(x - 1)$ $\Leftrightarrow y = 3x - 4$	Tại điểm có hoành độ bằng -3 Gọi x_0 và y_0 là tọa độ tiếp điểm, khi đó Ta có $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 2$ $f'(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f'(-3) = 3$ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm (-3 ; 2), có dạng $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ $\Leftrightarrow y - 2 = 3(x + 3)$ $\Leftrightarrow y = 3x + 11$

Dạng 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), viết phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc k.

❖ **Phương pháp giải:**

Bước 1:Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, khi đó ta có $f^{'}(x_0) = k$

Bước 2: Giải $f^{'}(x_0) = k$ để tìm x_0 sau đó thế x_0 vào hàm số $y = f(x)$ để tìm y_0

Bước 3: Viết phương trình tiếp tuyến của (C), có dạng :

$$y - y_0 = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

Bài tập 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ có đồ thị (C), viết phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc bằng 2.

Lời giải:

Biết hệ số góc tiếp tuyến k = 2

Ta có $f^{'}(x) = x^2 - x$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm

$$f^{'}(x_0) = 2 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$$

* Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow f^{'}(2) = 2$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm (2 ; $\frac{5}{3}$), có dạng:

$$y - y_0 = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$
$$\Leftrightarrow y - \frac{5}{3} = 2(x - 2)$$
$$\Leftrightarrow y = 2x - \frac{7}{3}$$

* Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow f^{'}(-1) = 2$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm (-1 ; $\frac{1}{6}$), có dạng:

$$y - y_0 = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$
$$\Leftrightarrow y - \frac{1}{6} = 2(x + 1)$$
$$\Leftrightarrow y = 2x + \frac{13}{6}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại hệ số góc tiếp tuyến bằng 3 là

$y = 2x - \frac{7}{3}$; $y = 2x + \frac{13}{6}$

Chú ý: Cho đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$, khi đó:

– Nếu $d // \Delta \Rightarrow (d): y = ax + b \Rightarrow$ hệ số góc $k = a$.

– Nếu $d \perp \Delta \Rightarrow (d): y = ax + b \Rightarrow$ hệ số góc $k = -\frac{1}{a}$.

*) Tiếp tuyến tạo với chiều dương trục hoành góc α khi đó hệ số góc của tiếp tuyến là k = tanα sau đó tìm tiếp điểm $M_0(x_0; y_0)$ bằng cách giải phương trình $f^{/}(x_0) = k$ và viết phương trình tiếp tuyến tương ứng.

*) Tiếp tuyến tạo với đường thẳng y = ax +b một góc α khi đó hệ số hóc của tiếp tuyến là k thoả mãn $\left|\frac{k-a}{1+ka}\right| = \tan\alpha$ hoặc chúng ta dùng tích vô hướng của hai véctơ pháp tuyến để tìm hệ số góc k sau đó tìm tiếp điểm $M_0(x_0; y_0)$ bằng cách giải phương trình $f^{/}(x_0) = k$ và viết phương trình tiếp tuyến tương ứng.

Bài tập 3: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 2$. Viết pt tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến đó

a) Song song với đường thẳng $y = -3x + 1$

b) Vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{7}x - 4$

Lời giải

a) Vì phương trình tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -3x + 1$ nên nó có hệ số góc là -3

Do đó $f'(x) = 3x^2 - 10x = -3 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ x = 3 \end{array}\right.$

Với $x = \frac{1}{3}$ thì $y_0 = \frac{40}{27}$ Vậy pt tt là: $y = -3x + \frac{67}{40}$

Với x=3thì $y_0 = -16$ Vậy pt ttlà: $y = -3x - 7$

b) Gọi k là hệ số góc của pt tt .

Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{7}x - 4$ khi $k.\frac{1}{7} = -1 \Rightarrow k = -7$

Với k=-7 ta có $f'(x) = 3x^2 - 10x = -7 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{7}{3} \end{array}\right.$

Với x=1thì $y_0 = -2$ Vậy pt ttlà: $y = -7x + 5$

Với $x = \frac{7}{3}$ thì $y_0 = -\frac{338}{27}$ Vậy pt ttlà: $y = -7x + \frac{103}{27}$

Bài tập 4: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - m(x+1) + 1$ (C_m). Viết phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại giao điểm của nó với Oy, tìm m để tiếp tuyến trên chắn trên hai trục tạo ra một tam giác có diện tích bằng 8.

Giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có (C_m) giao với Oy tại điểm A(0; 1 -m)

$y' = f'(x) = 3x^2 - m$. Khi đó tiếp tuyến cần tìm là y = y$'$(0)x +1 – m hay y =-mx +1-m

Tiếp tuyến trên cắt trục hoành tại điểm $B(\frac{1-m}{m}; 0)$ $(m \neq 0)$ suy ra

$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}|y_A|.|x_B| = \frac{1}{2}|1-m|.|\frac{1-m}{m}| = 8 \Leftrightarrow 16|m| = m^2 - 2m + 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -16m = m^2 - 2m + 1 \\ 16m = m^2 - 2m + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + 14m + 1 = 0 \\ m^2 - 18m + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \pm 4\sqrt{5} \\ m = 7 \pm 4\sqrt{3} \end{array}\right.$

Với m = 0 thì đồ thị hàm số đã cho không cắt trục hoành suy ra không tồn tại tam giác OAB. Vậy với $\left[\begin{array}{l} m = 9 \pm 4\sqrt{5} \\ m = 7 \pm 4\sqrt{3} \end{array}\right.$ thì tiếp tuyến cần tìm cắt hai trục tọa độ tạo ra tam giác có diện tích bằng 8.

Bài tập 5: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) trong các trường hợp sau

a) Tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 6x – 4.

b) Tiếp tuyến tạo với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 5$ một góc 45^0.

<u>Giải</u>

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 6x^2 - 6x - 12$

a) Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 6x – 4 suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là k = 6.
Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Khi đó ta có

$$y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow 6x_0^2 - 6x_0 - 12 = 6 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x_0 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Với $x_0 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ ta có $y_0 = \frac{20\sqrt{13}-23}{2}$ khi đó tiếp tuyến cần tìm là

$$y = 6(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}) + \frac{20\sqrt{13}-23}{2} \Leftrightarrow y = 6x + \frac{26\sqrt{13}-29}{2}$$

Với $x_0 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ ta có $y_0 = -\frac{7\sqrt{13}+23}{2}$ khi đó tiếp tuyến cần tìm là

$$y = 6(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}) - \frac{7\sqrt{13}+23}{2} \Leftrightarrow y = 6x - \frac{13\sqrt{13}+29}{2}$$

b) Vì tiếp tuyến cần tìm tạo với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 5$ một góc 45^0 suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là k thoả mãn

$$\left|\frac{k+\frac{1}{2}}{1-\frac{k}{2}}\right| = \tan 45^0 \Leftrightarrow \left|\frac{2k+1}{2-k}\right| = 1 \Leftrightarrow |2k+1| = |2-k| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2k+1 = 2-k \\ 2k+1 = k-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{1}{3} \\ k = -3 \end{array}\right.$$

sau đó làm tương tự như phần a (Tìm tiếp điểm).

Bài tập 6: Viết phương trình tiếp tuyến với (C) : $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$ đi qua điểm $A\left(\frac{19}{12}; 4\right)$.

<u>Giải</u>

Giả sử đường thẳng đi qua $A\left(\frac{19}{12}; 4\right)$ có hệ số góc k, khi đó nó có dạng

$y = kx + 4 - \frac{19}{12}k$ (d)

Ta có (d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 5 = kx + 4 - \frac{19}{12}k \ (1) \\ 6x^2 - 6x = k \ \ (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta có

$2x^3-3x^2+5=(6x^2-6x)x+4-\frac{19}{12}(6x^2-6x)\Leftrightarrow 8x^3-25x^2+19x-2=0$

$(x-1)(8x^2-17x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\\x=\frac{1}{8}\end{array}\right.$

Vậy có ba tiếp tuyến với (C) đi qua điểm $A\left(\frac{19}{12};4\right)$ (Tự viết phương trình tiếp tuyến).

- **Nhận xét:** Để viết phương trình tiếp tuyến (C) của hàm số $y=f(x)$ ta cần phải biết tọa độ x_0 và y_0 hay hệ số tiếp tuyến k để tìm x_0 và y_0, sau đó tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại x_0 rồi áp dụng vào phương trình tiếp tuyến.

Bài tập 7: Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động $s=\frac{1}{2}gt^2$, trong đó g=9,8m/s^2 và t tính bằng giây. Vận tốc của vật tại thời điểm t=5s bằng:

A. 49m/s. B. 25m/s. C. 10m/s. D. 18m/s.

Hướng dẫn giải

Ta có $s=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow s'(t)=g.t=v(t)$

Khi đó $v(5)=9,8.5=49$ m/s

Chọn đáp án A

Bài tập 8: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S=\frac{1}{2}t^4-3t^2$, trong đó t tính bằng giây s và S được tính bằng mét m. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm t=4s bằng:

A. 80m/s. B. 32m/s. C. 90m/s. D.116m/s.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\begin{array}{l}S'(t)=2t^3-6t=v(t)\\a(t)=6t^2-6\end{array}$

Vậy gia tốc tại t=4s là a(t)=90

Bài tập 9: Trong mạch máy tính, cường độ dòng điện (đơn vị mA) là một hàm số theo thời gian t : $I(t)=0,3-0,2t$. Hỏi tổng điện tích đi qua một điểm trong mạch trong 0,05s là bao nhiêu ?

A. 0,29975mC B. 0,29mC C. 0,01525mC D. 0,0145mC

Hướng dẫn giải

Tổng điện tích qua trong mạch trong là: (0,3-0,2.0,05).0,05=0,0145

Chọn đáp án C.

*** Bài tập củng cố**

Bài tập 1:

Cho (P) có phương trình: y = x^2

Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của (P):

a) Tại điểm (-2;4)

b) Tại giao điểm của (P) với đường thẳng y = 3x - 2.

Bài giải:

a)Hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm là:

$f'(-2) = -4$

b)Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$f'(1) = 2$

$f'(2) = 4$

Bài tập 2:

Gọi (C) là đồ thị hàm số: $y = x^3 - 5x^2 + 2$

Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến đó:

a) Song song với đường thẳng y = -3x + 1

b) Vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{7}x - 4$

c) tại điểm A(0; 2)

Đáp số:

a) y = -3x - 7 và y = -3x + 67/27

b) y = -7x + 5 và y = -7x + 103/27

c) y = 2 và $y = -\frac{25}{4}x + 2$

Bài tập 3 : Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) :

1. Tại điểm có hoành độ bằng -1.
2. Tại điểm có tung độ bằng 2.
3. Biết tiếp tuyến có hệ số góc k = -3.
4. Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 1$
5. Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -124x + 2$
6. Biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C).
7. Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;-2)$

Bài tập 4: Cho đường cong (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$ Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết:

1. Tiếp điểm có hoành độ là 2.
2. Tiếp tuyến có hệ số góc k = 9.
3. Tiếp tuyến đi qua điểm A(0;3).

Bài tập 5: Cho đường cong (C): $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết:

1. Tiếp điểm có tung độ bằng -1
2. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng x – 3y + 10 = 0.
3. Tiếp tuyến đi qua điểm M(2;3).

Bài tập 6: Viết phương trình tiếp tuyến của (C): $y = x(x-3)^2$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng (d): y = 24x – 2.

Bài tập 7: Viết phương trình tiếp tuyến của (C): $y=\frac{x-2}{x+1}$ biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng (d): x + 3y – 4 = 0.

Bài tập 8: Cho đường cong (C): $y=x^4+x^2+1$ Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

1. Tại điểm có tung độ là 1.
2. Biết hệ số góc của tiếp tuyến là 6.
3. Biết tuyến tuyến song song với đường thẳng y + 1 = 0.

Bài tập 9: Cho đường cong (C): $y=\frac{1}{4}x^4-x^2+2$ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết:

1. Tiếp tuyến có hệ số góc k = 3.
2. Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (d): $x-4y+12=0$.

Bài tập 10: Cho đường cong (C): $y=\frac{x+1}{x-2}$ Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

1. Biết hoành độ tiếp điểm bằng 1.
2. Tại giao điểm của (C) với trục hoành.
3. Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng x + 3y – 1 = 0.

Bài tập 11: Cho đường cong (C): $y=2x^3-3x^2+9x-4$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của nó với:

1. Đường thẳng (d): $y=7x+4$.
2. Parabol (P): $y=-x^2+8x-3$
3. Đường cong (C'): $y=x^3-4x^2+6x-7$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN.

Câu 1: Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x)=-x^3$ tại điểm M(-2; 8) là:

A. 12 **B.** -12 **C.** 192 **D.** -192

Câu 2: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s=t^2$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0=3$ (giây) bằng:

A. $2\ m/s$ **B.** $5\ m/s$ **C.** $6\ m/s$ **D.** $3\ m/s$

Câu 3: Phương trình tiếp tuyến của Parabol $y=-3x^2+x-2$ tại điểm M(1; 1) là:

A. $y=5x+6$ **B.** $y=-5x+6$ **C.** $y=-5x-6$ **D.** $y=5x-6$

Câu 4: Điện lượng truyền trong dây dẫn có phương trình $Q=5t+3$ thì cường độ dòng điện tức thời tại điểm $t_0=3$ bằng:

A. 15(A) **B.** 8(A) **C.** 3(A) **D.** 5(A)

Câu 5: Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động $s=\frac{1}{2}gt^2$, $g=9{,}8\ m/s^2$ và t tính bằng s. Vận tốc tại thời điểm $t=5$ bằng:

A. $49\ m/s$ **B.** $25\ m/s$ **C.** $20\ m/s$ **D.** $18\ m/s$

Câu 6: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x=-1$ có phương trình là:

A. $y=-x+3$ **B.** $y=-x-3$ **C.** $y=x-3$ **D.** $y=x+3$

Câu 7: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^2+x+1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là:

A. $y=x+1$ **B.** $y=x-1$ **C.** $y=x+2$ **D.** $y=\frac{x}{2}+1$

Câu 8: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3$ có hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3 là:

A. $y=-3x+2$ và $y=3x+2$ **B.** $y=3x+2$ và $y=3x+3$

C. $y = 3x - 2$ và $y = -3x + 2$ **D.** $y = 3x + 2$ và $y = 3x - 2$

Câu 9: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ có tung độ của tiếp điểm bằng 2 là:

A. $y = 2(4x - 3)$ và $y = -2(4x + 3)$ **B.** $y = -2(4x - 3)$ và $y = 2(4x + 3)$

C. $y = 2(4x - 3)$ và $y = 2(4x + 3)$ **D.** $y = -2(4x - 3)$ và $y = -2(4x + 3)$

Câu 10: Cho hàm số $y = x^2 + 6x - 4$ có tiếp tuyến song song với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến đó là:

A. $y = -13$ **B.** $y = -31$ **C.** $y = x - 10$ **D.** $y = 13$

Câu 11: Biết tiếp tuyến của Parabol $y = x^2$ vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$. Phương trình tiếp tuyến đó là:

A. $4x + 4y + 1 = 0$ **B.** $x + y + 1 = 0$ **C.** $x - y + 1 = 0$ **D.** $4x - 4y + 1 = 0$

Câu 12: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = 3t^3 - 3t^2 + t$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Thời điểm gia tốc bị triệt tiêu là:

A. 3s **B.** 1s **C.** $\frac{1}{3}$s **D.** 2s

Câu 13: Tìm trên đồ thị $y = \frac{1}{x-1}$ điểm M sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

A. $\left(\frac{3}{4};4\right)$ **B.** $\left(\frac{3}{4};-4\right)$ **C.** $\left(-\frac{3}{4};-4\right)$ **D.** $\left(-\frac{3}{4};4\right)$

Câu 14: Một viên đá được ném lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với phương trình chuyển động là $s = t^3 - t^2 + t$ (m) (bỏ qua sức cản của không khí). Thời điểm tại đó tốc độ của viên đá bằng 0 là:

A. 1s **B.** 10s **C.** 5s **D.** 30s

Câu 15: Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = cotx tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ là:

A. -2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Câu 16: Một vật chuyển động với phương trình $S(t) = 4t^2 + t^3$, trong đó $t > 0$, t tính bằng s, $S(t)$ tính bằng m/s. Tìm gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc của vật bằng 11.

A. $11m/s^2$ **B.** $12m/s^2$ **C.** $13m/s^2$ **D.** $14m/s^2$

Câu 17:Điểm M trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ mà tiếp tuyến tại đó có hệ số góc k bé nhất trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị thì M, k là:

A. M(1; –3), k = –3 **B.** M(1; 3), k = –3 **C.** M(1; –3), k = 3 **D.** M(–1; –3), k = –3

Câu 18 : Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị cắt trục tung tại A(0; –1), tiếp tuyến tại A có hệ số góc k = –3. Các giá trị của a, b là:

A. a = 1; b=1 **B.** a = 2; b=1 **C.** a = 1; b=2 **D.** a = 2; b=2

Câu 19 : Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (2m - 1)x^4 - mx^2 + \frac{5}{4}$ tại điểm có hoành độ x = –1 vuông góc với đường thẳng 2x – y – 3 = 0

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $-\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{5}{6}$

Câu 20: Tiếp tuyến kẻ từ điểm (2; 3) tới đồ thị hàm số $y = \frac{3x+4}{x-1}$ là:

A. y = -28x + 59 **B.** y = 28x - 53 **C.** y = 3 **D.** y = 3; y = x+1

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 7x + 5$ (C), trên (C) những điểm có hệ số góc tiếp tuyến tại điểm nào bằng 2?

A. (–1; –9); (3; –1) **B.** (1; 7); (3; –1) **C.** (1; 7); (–3; –97) **D.** (1; 7); (–1; –9)

Câu 22:Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị y = tanx tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{4}$:

A. k = 1 **B.** $k = \frac{1}{2}$ **C.** $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** 2

Câu 23:Gọi (P) là đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x + 3$. Phương trình tiếp tuyến với (P) tại điểm mà (P) cắt trục tung là:

A. y = –x + 3 **B.** y = –x – 3 **C.** y = 4x – 1 **D.** y = 11x + 3

Câu 24:Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm **A.** Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình là:

A. y = –4x – 1 **B.** y = 4x – 1 **C.** y = 5x –1 **D.** y = – 5x –1

Câu 25:Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^4 + x$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng d:

x + 5y = 0 có phương trình là:

A. y = 5x – 3 **B.** y = 3x – 5 **C.** y = 2x – 3 **D.** y = x + 4

KIỂM TRA

1. MỤC TIÊU.

a) ***Về kiến thức*****:**

-Nắm được các khái niệm, các ứng dụng về đạo hàm của hàm số tại một điểm.

-Nắm được các quy tắc tính đạo hàm.

- Nắm được khái niệm vi phân .

c) ***Về kỹ năng*****:**

-Lập được PTTT của hàm số tại môt điểm, khi biết hệ số góc .

-Biết tính đaọ hàm của hàm số theo quy tắc.

- Biết tính vi phân của hàm số .

c) ***Về thái độ*****:**

-Cẩn thận chính xác tích cực trong làm bài.

2. CHUẨN BỊ.

Giáo viên: - Đề kiểm tra, đáp án, thang điểm.

Học sinh: - Xem lại các kiến thức trọng tâm trong chương.

- Học bài cũ và làm BT đầy đủ.

3. TIẾN TRÌNH KIỂM TRA.

a) ***Hình thức đề kiểm tra:***

+ Hình thức: Trắc nghiệm + tự luận

+ Học sinh làm bài tại lớp.

b) ***Thiết lập ma trận đề kiểm tra***:

Nội dung kiến thức	Mức độ nhận thức								**Cộng**
	Nhận biết		Thông hiểu		Vận dụng Thấp		Vận dụng cao		
	TN	TL	TN	TL	TN	TL	TN	TL	
1. ĐN và ý nghĩa của đạo hàm	1 câu 0,2 đ		1 câu 0,2 đ		3 câu 0,6đ		1 câu 0,2đ		**6 câu 1,2 đ (20%)**
2. Quy tắc tính đạo hàm	1 câu 0,2đ		3 câu 0,6đ đ		3 câu 0,6 đ				**7 câu 1,4 đ (35%)**
3. Đạo hàm của hàm số lương giác	2 câu 0,4đ đ		3 câu 0,6 đ				2 câu 0,4đ		**7 câu 1,4 đ (35%)**
4. Vi phân			1 câu 0,2đ		1 câu 0,2đ				**2 câu 0,4đ (10%)**
5. Đạo hàm cấp cao			1 câu 0,2 đ		2 câu 0,4đ				**3 câu 0,6đ (10%)**
Tổng số câu Tổng số điểm	**4 câu 0,8 đ (20%)**		**9 câu 1,8 đ (40%)**		**9câu 1,8đ (5%)**		**3 câu 0,6đ (5%)**		**25 câu 10,0 đ (100%)**

c) ***Đề kiểm tra***:

Câu 1: Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có hệ số góc là:

A. -1 **B.** -2 **C.** 2 **D.** 1

Câu 2: Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \dfrac{1}{2}gt^2$ (m), với g = 9,8 (m/s^2). Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t= 5(s) là:

A. 122,5 (m/s) **B.** 29,5(m/s) **C.** 10 (m/s) **D.** 49 (m/s)

Câu 3: (TL) Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết :

a) Hoành độ tiếp điểm bằng -2

b)Tiếp tuyến cần viết song song với đường thẳng (d) : y = x + 2017

Câu 4: Đạo hàm của hàm số $y = \left(x^4 - 1\right)^3$ là:

A. $y' = 12x^3(x^4-1)^3$ **B.** $y' = 3(x^4-1)^2$ **C.** $y' = 12x^3(x^4-1)^2$ **D.** $y' = 4x^3(x^4-1)^3$

Câu 5: Đạo hàm của biểu thức $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ là:

A. $\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+4}}$ **B.** $\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+4}}$ **C.** $\dfrac{x^2-2x+4}{2\sqrt{x^2-2x+4}}$ **D.** $\dfrac{(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+4}}$

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x+4}$ là:

A. $y' = \dfrac{5}{(x+4)^2}$ **B.** $y' = \dfrac{-11}{(x+4)^2}$ **C.** $y' = \dfrac{11}{x+4}$ **D.** $y' = \dfrac{11}{(x+4)^2}$

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x)(x+3)$ là:

A. $y' = 4x^3 + 9x^2 - 4x - 6$ B. $y' = 4x^3 - 9x^2 + 4x$

C. $y' = 4x^3 + 9x^2 - 4x + 6$ D. $y' = 5x^3 - 4x + 6$

Câu 8: (TL) Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x+1}$

b) $y = x^3 - 3\sqrt{x} + 4\cos x + 5$

Câu 9: Đạo hàm của hàm sô $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ là:

A. $y' = 3x^2 + 4x - 4$ **B.** $y' = 3x^2 + 2x - 4$ **C.** $y' = 3x + 2x - 4$. **D.** $y' = 3x^2 + 4x - 4 + 5$

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ là:

A. $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ **B.** $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **C.** $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ **D.** $-\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là:

A. $3\cos 3x$. **B.** $\cos 3x$. **C.** $-3\cos 3x$. **D.** $-\cos 3x$.

Câu 12: Đạo hàm của hàm số $y = x\cot x$ là:

A. $\cot x-\dfrac{x}{\sin^2 x}$ **B.** $\cot x+\dfrac{x}{\sin^2 x}$ **C.** $\cot x-\dfrac{x}{\cos^2 x}$ **D.** $\cot x+\dfrac{x}{\cos^2 x}$

Câu 13: Đạo hàm của hàm số $y=\cos x-\sin x+2x$ là:

A. $-\sin x-\cos x+2$. **B.** $\sin x-\cos x+2$. **C.** $-\sin x+\cos x+2$. **D.** $-\sin x-\cos x+2x$.

Câu 14: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\text{cosx+4sinx}}$ là:

A. $\dfrac{4\cos x-\text{sinx}}{\sqrt{\text{cosx+4sinx}}}$ **B.** $\dfrac{4\cos x-\text{sinx}}{2\sqrt{\text{cosx+4sinx}}}$ **C.** $\dfrac{2\cos x-\text{sinx}}{\sqrt{\text{cosx+4sinx}}}$ **D.** $\dfrac{\text{sinx}+4\cos x}{2\sqrt{\text{cosx+4sinx}}}$

Câu 15: Đạo hàm của hàm số $y=\cos^3(3x^4+5)$ là:

A. $3x^4\cos^2(3x^4+5)\sin x$ **B.** $-3\sin^2(3x^4+5)\cos x$

C. $36x^3\sin^2(3x^4+5)\cos(3x^4+5)$ **D.** $-36x^3\cos^2(3x^4+5)\sin(3x^4+5)$

Câu 16: Điểm M trên đồ thị hàm số y = x^3-3x^2-1 mà tiếp tuyến tại đó có hệ số góc k bé nhất trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị thì M, k là:

A. M(1; –3), k = –3 **B.** M(1; 3), k = –3 **C.** M(1; –3), k = 3 **D.** M(–1; –3), k = –3

Câu 17: Vi phân của hàm số $y=5x^4-3x+1$ là:

A. $dy=(20x^3+3)dx$ **B.** $dy=(20x^3-3)dx$

C. $dy=20x^3dx$ **D.** $dy=(20x^3-3x)dx$

Câu 18: Cho hàm số f(x) liên tục tại x_0. Đạo hàm của f(x) tại x_0 là:

A. $f(x_0)$ **B.** $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn) **D.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn)

Câu 19: Cho hàm số f(x) xác định trên $(0;+\infty)$ bởi f(x) = $\dfrac{1}{x}$. Đạo hàm của f(x) tại $x_0=\sqrt{2}$ là:

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $-\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 20: Hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đạo hàm là:

A. $y'=2$ **B.** $y'=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ **C.** $y'=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$ **D.** $y'=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x-5$. Phương trình $y'=0$ có nghiệm là:

A. {–1; 2} **B.** {–1; 3} **C.** {0; 4} **D.** {1; 2}

Câu 22: Hàm số $y=\dfrac{1}{2}(1+\tan x)^2$ có đạo hàm là:

A. $y' = 1 + \tan x$ **B.** $y' = (1+\tan x)^2$ **C.** $y' = (1+\tan x)(1+\tan x)^2$ **D.** $y' = 1+\tan^2 x$

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = (x-1)^2$. Biểu thức nào sau đây chỉ vi phân của hàm số f(x)?

A. $dy = 2(x-1)dx$ **B.** $dy = (x-1)^2dx$ **C.** $dy = 2(x-1)$ **D.** $dy = (x-1)dx$

Câu 24: Vi phân của hàm số $y = \dfrac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ là:

A. $dy = \dfrac{2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$ **B.** $dy = \dfrac{\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$

C. $dy = \dfrac{2\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$ **D.** $dy = -\dfrac{2\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$

Câu 25: Giả sử $h(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Tập nghiệm của phương trình $h''(x) = 0$ là:

A. $[-1; 2]$ **B.** $(-\infty; 0]$ **C.** $\{-1\}$ **D.** $\varnothing$

Chuyên đề:
PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

(Buổi 1)

1. Phép tịnh tiến:

<u>a) ĐN</u>: Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}$ là một phép dời hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Kí hiệu : T hay $T_{\vec{u}}$ .Khi đó : $T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

• Phép tịnh tiến hoàn toàn được xác định khi biết vectơ tịnh tiến của nó .

• Nếu $T_{\vec{0}}(M) = M$, $\forall M$ thì $T_{\vec{0}}$ là phép đồng nhất .

<u>b) Biểu thức tọa độ</u>: Cho $\vec{u} = (a;b)$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$.

$$M(x;y) \longmapsto M' = T_{\vec{u}}(M) = (x';y') \text{ thì } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

<u>c) Tính chất:</u>

• Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì .

• Phép tịnh tiến:

+ Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho .

+ Biến một tia thành tia .

+ Bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của các điểm tương ứng .

+ Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó .

+ Biến tam giác thành tam giác bằng nó . (Trực tâm $\xmapsto{T_{\vec{v}}}$ trực tâm , trọng tâm $\xmapsto{T_{\vec{v}}}$ trọng tâm)

+ Đường tròn thành đường tròn bằng nó .

(Tâm biến thành tâm : $I \xmapsto{T_{\vec{v}}} I'$, $R' = R$)

2. Phép đối xứng trục:

<u>a) ĐN:</u>

ĐN1

Điểm M' gọi là đối xứng với điểm M qua đường thẳng a nếu a là đường trung trực của đoạn MM'

Phép đối xứng qua đường thẳng còn gọi là phép đối xứng trục . Đường thẳng a gọi là trục đối xứng.

ĐN2 :

Phép đối xứng qua đường thẳng a là phép biến hình biến môi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng a .

Kí hiệu : $Đ_a(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{M_oM'} = -\overrightarrow{M_oM}$, với M_o là hình chiếu của M trên đường thẳng a .

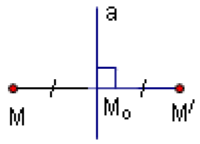
Khi đó :

• Nếu $M \in a$ thì $Đ_a(M) = M$: xem M là đối xứng với chính nó qua a .
(M còn gọi là điểm bất động)

• $M \notin a$ thì $Đ_a(M) = M' \Leftrightarrow$ a là đường trung trực của MM'

• $Đ_a(M) = M'$ thì $Đ_a(M') = M$

• $Đ_a(H) = H'$ thì $Đ_a(H') = H$, H' là ảnh của hình H .



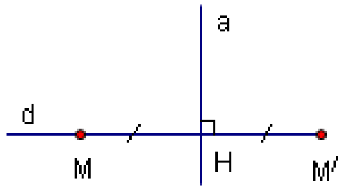
• ĐN : d là trục đối xứng của hình H $\Leftrightarrow Đ_d(H) = H$.

• Phép đối xứng trục hoàn toàn xác định khi biết trục đối xứng của nó .

Chú ý : Một hình có thể không có trục đối xứng ,có thể có một hay nhiều trục đối xứng .

b) **Biểu thức tọa độ:** $M(x;y) \longmapsto M' = Đ_d(M) = (x';y')$

■ $d \equiv Ox : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ ■ $d \equiv Oy : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$



c) ĐL: Phép đối xứng trục là một phép dời hình.

• Hệ quả :

1.Phép đối xứng trục biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của các điểm tương ứng .

2. Đường thẳng thành đường thẳng .

3. Tia thành tia .

4. Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó .

5. Tam giác thành tam giác bằng nó . (Trực tâm $\longmapsto$ trực tâm , trọng tâm $\longmapsto$ trọng tâm)

6. Đường tròn thành đường tròn bằng nó . (Tâm biến thành tâm : $I \longmapsto I'$, $R' = R$)

7. Góc thành góc bằng nó .

3. Phép đối xứng tâm:

a) ĐN : Phép đối xứng tâm I là một phép dời hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua I.

Phép đối xứng tâm còn gọi là phép đối xứng qua một điểm .

Điểm I gọi là tâm của của phép đối xứng hay đơn giản là tâm đối xứng .

Kí hiệu : $Đ_I(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$.

• Nếu $M \equiv I$ thì $M' \equiv I$

• Nếu $M \neq I$ thì $M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow I$ là trung trực của MM'.

• ĐN :Điểm I là tâm đối xứng của hình H $\Leftrightarrow Đ_I(H) = H$.

Chú ý : Một hình có thể không có tâm đối xứng .

b) Biểu thức tọa độ : Cho $I(x_o;y_o)$ và phép đối xứng tâm I :

$M(x;y) \xmapsto{Đ_I} M' = Đ_I(M) = (x';y')$ thì $\begin{cases} x' = 2x_o - x \\ y' = 2y_o - y \end{cases}$

c) Tính chất :

1. Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì .
2. Biến một tia thành tia .
3. Bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của các điểm tương ứng .
4. Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó .
5. Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.
6. Biến một góc thành góc có số đo bằng nó .
7. Biến tam giác thành tam giác bằng nó . (Trực tâm $\to$ trực tâm , trọng tâm $\to$ trọng tâm)
8. Đường tròn thành đường tròn bằng nó . (Tâm biến thành tâm : $I \longmapsto I'$, $R' = R$)

Bài tập tự luận

1. Phép tịnh tiến:

a) Dạng bài tập và PP giải:

◆ **PHƯƠNG PHÁP TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐIỂM**

$M(x;y) \xmapsto{T_{\vec{u}}} M' = T_{\vec{u}}(M) = (x';y')$ thì $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$; với $\vec{u}(a;b)$

◆ **PHƯƠNG PHÁP TÌM ẢNH CỦA MỘT HÌNH (H) .**

Cách 1: Dùng tính chất (cùng phương của đường thẳng, bán kính đường tròn: không đổi)

1/ Lấy $M \in (H) \longmapsto M' \in (H')$

2/ • $(H) \equiv$ đường thẳng $\longrightarrow (H') \equiv$ đường thẳng cùng phương

• $(H) \equiv (C)\begin{cases} +\text{Tâm } I \\ +\text{ bk} : R \end{cases} \longmapsto (H') \equiv (C')\begin{cases} +\text{Tâm } I' \\ +\text{ bk} : R' = R \end{cases}$ (cần tìm I') .

Cách 2 : Dùng biểu thức tọa độ .

Tìm x theo x' , tìm y theo y' rồi thay vào biểu thức tọa độ .

Cách 3 : Lấy hai điểm phân biệt : $M, N \in (H) \xmapsto{T_{\vec{u}}} M', N' \in (H')$

b) Vận dụng:

$\boxed{B1}$ Trong mpOxy . Tìm ảnh của M′ của điểm $M(3;-2)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(2;1)$.

Giải

Theo định nghĩa ta có : $M'=T_{\vec{u}}(M)\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}\Leftrightarrow (x'-3;y'+2)=(2;1)\Leftrightarrow \begin{cases}x'-3=2\\ y'+2=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x'=5\\ y'=-1\end{cases}$

$\Rightarrow M'(5;-1)$

$\boxed{B2}$ Tìm ảnh các điểm chỉ ra qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$:

a) $A(-1;1)$, $\vec{u}=(3;1)$ $\Rightarrow A'(2;3)$

b) $B(2;1)$, $\vec{u}=(-3;2)$ $\Rightarrow B'(-1;3)$

c) $C(3;-2)$, $\vec{u}=(-1;3)$ $\Rightarrow C'(2;1)$

$\boxed{B3}$ Đường thẳng Δ cắt Ox tại $A(1;0)$, cắt Oy tại $B(0;3)$. Hãy viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(-1;-2)$.

Giải

Vì : $A'=T_{\vec{u}}(A)=(0;-2)$, $B'=T_{\vec{u}}(B)=(-1;1)$.

Mặt khác : $\Delta'=T_{\vec{u}}(\Delta)\Rightarrow \Delta'$ đi qua A',B' .

Do đó : $\Delta'\begin{cases}\bullet \text{ qua } A'(0;-2)\\ \bullet \text{ VTCP : } \overrightarrow{A'B'}=(-1;3)\end{cases} \Rightarrow$ ptts $\Delta' : \begin{cases}x=-t\\ y=-2+3t\end{cases}$

$\boxed{B4}$ Tìm ảnh của các đường thẳng sau qua phép tịnh tiến:

a) $\Delta : x-2y-4=0$, $\vec{u}=(0\,;3)$ $\Rightarrow \Delta' : x-2y+2=0$

b) $\Delta : 3x+y-3=0$, $\vec{u}=(-1\,;-2)$ $\Rightarrow \Delta' : 3x+y+2=0$

$\boxed{B5}$ Tìm ảnh của đường tròn (C) : $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(1;-3)$.

Giải

Biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ là : $\begin{cases}x'=x+1\\ y'=y-3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=x'-1\\ y=y'+3\end{cases}$

Vì : $M(x;y)\in(C) : (x+1)^2+(y-2)^2=4\Leftrightarrow x'^2+(y'+1)^2=4$

$\Leftrightarrow M'(x';y')\in(C') : x^2+(y+1)^2=4$

Vậy : Ảnh của (C) là $(C') : x^2+(y+1)^2=4$

2. Phép đỗi xứng trục:

a) Dạng bài tập và PP giải:

◆ **PHƯƠNG PHÁP TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐIỂM**

• PP : Tìm ảnh $M'=Đ_a(M)$, thực hiện các bước:

1. $(d)\ni M$, $d\perp a$
2. $H=d\cap a$
3. H là trung điểm của $MM'\to M'$?

◆ **PHƯƠNG PHÁP TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐƯỜNG THẲNG**

■ PP : Tìm ảnh của đường thẳng : $\Delta' = Đ_a(\Delta)$

◆ TH1 : $(\Delta) // (a)$

1. Lấy $A, B \in (\Delta) : A \neq B$
2. Tìm ảnh $A' = Đ_a(A)$
3. $\Delta' \ni A', \Delta' // (a) \rightarrow \Delta'$

◆ TH2 : $\Delta \nparallel a$

1. Tìm $K = \Delta \cap a$
2. Lấy $P \in \Delta : P \neq K$ .Tìm $Q = Đ_a(P)$
3. $\Delta' \equiv (KQ)$

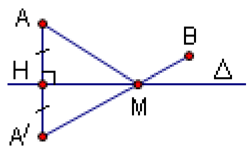
◆ **PHƯƠNG PHÁP TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN**

PP: Tìm ảnh của tâm I qua phép đối xứng trục và dùng tính chất "Phép đối xứng trục biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính"

◆ **PHƯƠNG PHÁP TÌM** $M \in (\Delta) : (MA + MB)_{min}$.

■ ***PP*** **:** Tìm $M \in (\Delta) : (MA + MB)_{min}$.

Tìm $M \in (\Delta) : (MA + MB)_{min}$



◆ Loại 1 : A, B nằm cùng phía đối với (Δ) :

1) gọi A' là đối xứng của A qua (Δ)

2) $\forall M \in (\Delta)$, thì $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$

Do đó: $(MA+MB)_{min} = A'B \Leftrightarrow M = (A'B) \cap (\Delta)$

◆ Loại 2 : A, B nằm khác phía đối với (Δ) :

$\forall M \in (\Delta)$, thì $MA + MB \geq AB$

Ta có: $(MA+MB)_{min} = AB \Leftrightarrow M = (AB) \cap (\Delta)$

b) Vận dụng:

$\boxed{B1}$ Trong mpOxy . Tìm ảnh của M(2;1) đối xứng qua Ox , rồi đối xứng qua Oy .

HD : $M(2;1) \xmapsto{Đ_{Ox}} M'(2;-1) \xmapsto{Đ_{Oy}} M''(-2;-1)$

$\boxed{B2}$ Trong mpOxy . Tìm ảnh của M(a;b) đối xứng qua Oy , rồi đối xứng qua Ox .

HD : $M(a;b) \xmapsto{Đ_{Oy}} M'(-a;b) \xmapsto{Đ_{Ox}} M''(-a;-b)$

$\boxed{B3}$ Cho điểm $M(-1;2)$ và đường thẳng (a) : $x + 2y + 2 = 0$. Tìm ảnh của M qua $Đ_a$

HD : (d) : $2x - y + 4 = 0$, $H = d \cap a \to H(-2;0)$,

H là trung điểm của $MM' \to M'(-3;-2)$

$\boxed{B4}$ Cho điểm $M(-4;1)$ và đường thẳng (a) : $x + y = 0$. Tìm ảnh của M qua $Đ_a$

Kq: $\Rightarrow M' = Đ_a(M) = (-1;4)$

$\boxed{B5}$ Cho 2 đường thẳng (Δ) : $4x - y + 9 = 0$, (a) : $x - y + 3 = 0$. Tìm ảnh $\Delta' = Đ_a(\Delta)$.

HD :

• Vì $\frac{4}{1} \neq \frac{-1}{-1} \Rightarrow \Delta$ cắt $a \to K = \Delta \cap a \to K(-2;1)$

• $M(-1;5) \in \Delta \to d \ni M, \perp a \to d : x + y - 4 = 0 \to H(1/2;7/2)$:

trung điểm của $MM' \to M' = Đ_a(M) = (2;2)$

• $\Delta' \equiv KM'$: $x - 4y + 6 = 0$

$\boxed{B6}$ Tìm $b = Đ_a(Ox)$ với đường thẳng (a) : $x + 3y + 3 = 0$.

HD : • $a \cap Ox = K(-3;0)$.

• $M \equiv O(0;0) \in Ox$: $M' = Đ_a(M) = (-\frac{3}{5};-\frac{9}{5})$.

• $b \equiv KM'$: $3x + 4y + 9 = 0$.

3. Phép đối xứng tâm:

a) Dạng bài tập và PP giải:

◆ PHƯƠNG PHÁP TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐIỂM

PP: Sử dụng biểu thức tọa độ :

Cho $I(x_o;y_o)$ và phép đối xứng tâm I :

$M(x;y) \xmapsto{Đ_I} M' = Đ_I(M) = (x';y')$ thì

$$\begin{cases} x' = 2x_o - x \\ y' = 2y_o - y \end{cases}$$

◆ PHƯƠNG PHÁP TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐƯỜNG THẲNG

<u>Cách 1</u>: Dùng biểu thức toạ độ

<u>Cách 2</u>: Xác định dạng $\Delta' // \Delta$, rồi dùng công thức tính khoảng cách $d(\Delta;\Delta') \to \Delta'$.

<u>Cách 3</u>: Lấy bất kỳ $A,B \in \Delta$, rồi tìm ảnh $A',B' \in \Delta' \Rightarrow \Delta' \equiv A'B'$

◆ PHƯƠNG PHÁP TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

<u>Cách 1:</u> Sử dụng biểu thức tọa độ.

<u>Cách 2:</u> Tìm ảnh của tâm I qua phép đối xứng tâm và dùng tính chất "Phép đối xứng tâm biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính"

b) Vận dụng:

$\boxed{\text{B1}}$ Tìm ảnh của các điểm sau qua phép đối xứng tâm I :

1) $A(-2;3)$, $I(1;2)$ $\Rightarrow A'(4;1)$

2) $B(3;1)$, $I(-1;2)$ $\Rightarrow B'(-5;3)$

3) $C(2;4)$, $I(3;1)$ $\Rightarrow C'(4;-2)$

Giải :

1) Giả sử : $A' = Đ_I(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} = -\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow (x'-1; y'-2) = -(-3;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-1=3 \\ y'-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=4 \\ y'=1 \end{cases} \Rightarrow A'(4;1)$$

Cách $\neq$: Dùng biểu thức toạ độ

2),3) Làm tương tự

$\boxed{\text{B2}}$ Tìm ảnh của các đường thẳng sau qua phép đối xứng tâm I :

1) $(\Delta): x+2y+5=0, I(2;-1)$ $\Rightarrow (\Delta'): x+2y-5=0$

2) $(\Delta): x-2y-3=0, I(1;0)$ $\Rightarrow (\Delta'): x-2y+1=0$

3) $(\Delta): 3x+2y-1=0, I(2;-3)$ $\Rightarrow (\Delta'): 3x+2y+1=0$

Giải

1) <u>Cách 1</u>: Ta có : $M(x;y) \xmapsto{Đ_I} M' \begin{cases} x'=4-x \\ y'=-2-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-x' \\ y=-2-y' \end{cases}$

Vì $M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow x+2y+5=0 \Leftrightarrow (4-x')+2(-2-y')+5=0 \Leftrightarrow x'+2y'-5=0$

$\Leftrightarrow M'(x';y') \in \Delta': x+2y-5=0$

Vậy : $(\Delta) \xmapsto{Đ_I} (\Delta'): x+2y-5=0$

<u>Cách 2</u>: Gọi $\Delta' = Đ_I(\Delta) \Rightarrow \Delta'$ song song $\Delta \Rightarrow \Delta'$: $x + 2y + m = 0$ $(m \neq 5)$.

Theo đề : $d(I;\Delta) = d(I;\Delta') \Leftrightarrow \dfrac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{|m|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Leftrightarrow 5 = |m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \text{ (loại)} \\ m=-5 \end{array}\right.$

$\rightarrow (\Delta'): x+2y-5=0$

<u>Cách 3</u>: Lấy : $A(-5;0), B(-1;-2) \in \Delta \Rightarrow A'(9;-2), B'(5;0) \Rightarrow \Delta' \equiv A'B': x+2y-5=0$

+ Các ý 2),3) làm tương tự.

$\boxed{\text{B3}}$ Tìm ảnh của các đường tròn và(P) sau qua phép đối xứng tâm I :

1) $(C): x^2 + (y-2)^2 = 1, E(2;1)$

2) $(C): x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0, F(1;0)$

3) (P) : $y = 2x^2 - x + 3$, tâm O(0;0) .

HD : 1) Có 2 cách giải :

Cách 1: Dùng biểu thức toạ độ .

Cách 2: Tìm tâm $I \xmapsto{Đ_E} I', R' = R = (\text{đã cho})$.

2) Tương tự .

Kết quả:

1) $(C'): (x-4)^2 + y^2 = 1$

2) $(C'): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$

3) $\xrightarrow{\text{ĐN hay biểu thức toạ độ}} (P'): y = -2x^2 - x - 3$

Bài tập trắc nghiệm:

1. Phép tịnh tiến:

Nhận biết

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(2;5)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;2)$ biến A thành điểm có tọa độ là:

A. $(3;1)$. **B.** $(1;6)$. **C.** $(3;7)$. **D.** $(4;7)$.

Lời giải

Chọn C.

Nhắc lại: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(x;y)$ và điểm $M'(x';y')$, $\vec{v} = (a;b)$ sao cho: $M' = T_{\vec{v}}(M)$.Ta có: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Áp dụng công thức trên ta có: Ảnh của A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;2)$ là $A'(3;7)$

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(2;5)$. Hỏi A là ảnh của điểm nào trong các điểm sau qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;2)$?

A. $(3;1)$. **B.** $(1;6)$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn D.

A là ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;2)$

Áp dụng công thức biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến ta có:

$\begin{cases} x_A = x_M + a \\ y_A = y_M + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 - 1 = 1 \\ y_M = 5 - 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow M(1;3)$

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-3;2)$ biến điểm $A(1;3)$ thành điểm nào trong các điểm sau:

A. $(-3;2)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-2;5)$. **D.** $(2;-5)$.

Lời giải

Chọn **C.**

Nhắc lại: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M\left(x;y\right)$ và điểm $M'\left(x';y'\right)$, $\vec{v}=\left(a;b\right)$ sao cho: $M'=T_{\vec{v}}\left(M\right)$.Ta có: $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$

Áp dụng công thức trên ta có: Ảnh của $A(1;3)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(-3;2)$ là $A'(-2;5)$

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phéptịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;3)$ biến điểm $A(1;2)$ thành điểm nào trong các điểm sau ?

A. $(2;5)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(-3;-4)$.

Lời giải

Chọn **A.**

Áp dụng công thức trên ta có: Ảnh của $A(1;2)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;3)$ là $A'(2;5)$

Câu 5: Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường thẳng cho trước thành chính nó?

A. Không có. **B.** Chỉ có một. **C.** Chỉ có hai. **D.** Vô số .

Lời giải

Chọn **D.**

Câu 6: Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường tròn cho trước thành chính nó?

A. Không có. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Vô số .

Lời giải

Chọn **B.**

Câu 7: Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một hình vuông thành chính nó?

A. Không có. **B.** Một. **C.** Bốn. **D.** Vô số .

Lời giải

Chọn **B.**

Câu 8: Giả sử qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}\neq\vec{0}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d' . Câu nào sau đây ***sai***?

A. d trùng d' khi $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của d .

B. d song song với d' khi $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của d .

C. d song song với d' khi $\vec{v}$ không phải là vectơ chỉ phương của d .

D. d không bao giờ cắt d'.

Lời giải

Chọn **B.**

Thông hiểu

Câu 9: Cho hai đường thẳng song song d và d' . Tất cả những phép tịnh tiến biến d thành d' là:

A. Các phép tịnh tiến theo $\vec{v}$, với mọi vectơ $\vec{v}\neq\vec{0}$ không song song với vectơ chỉ phương của d .

B. Các phép tịnh tiến theo $\vec{v}$, với mọi vectơ $\vec{v}\neq\vec{0}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của d .

C. Các phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AA'}$, trong đó hai điểm A và A' tùy ý lần lượt nằm trên d và d'.

D. Các phép tịnh tiến theo $\vec{v}$, với mọi vectơ $\vec{v} \neq \vec{0}$ tùy ý.

Lời giải

Chọn **C.**

Câu 10: Cho P,Q cố định. Phép tịnh tiến T biến điểm M bất kỳ thành M_2 sao cho $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{PQ}$.

A. T chính là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{PQ}$.
B. T chính là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{MM_2}$.
C. T chính là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{PQ}$.
D. T chính là phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$.

Lời giải

Chọn **C.**

Câu 11: Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến điểm M thành M_1 và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến M_1 thành M_2.

A. Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}+\vec{v}}$ biến M_1 thành M_2.

B. Một phép đối xứng trục biến M thành M_2.

C. Không thể khẳng định được có hay không một phép dời hình biến M thành M_2.

D. Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}+\vec{v}}$ biến M thành M_2.

Lời giải

Chọn D.

$T_{\vec{u}}$ biến điểm M thành M_1 ta có $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$

$T_{\vec{v}}$ biến M_1 thành M_2 ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{v}$

Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}+\vec{v}}$ biến M thành M_2 khi đó

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MM_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{MM_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_2}$ (đúng)

Câu 12: Cho phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$ biến A thành A' và M thành M'. Khi đó:

A. $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{A'M'}$.
B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{A'M'}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$.
D. $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{A'M'}$.

Lời giải

Chọn **C.**

Tính chất 1: Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M'$, $T_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$. *Hay phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.*

Câu 13: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v} = (a;b)$. Giả sử phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến điểm $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$. Ta có biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là:

A. $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x' - b = x - a \\ y' - a = y - b \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x' + b = x + a \\ y' + a = y + b \end{cases}$.

Lời giải

Chọn **A.**

Vận dụng

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy, cho phép biến hình f xác định như sau: Với mỗi $M(x;y)$ ta có $M' = \mathrm{f}(M)$ sao cho $M'(x';y')$ thỏa mãn $x' = x+2, y' = y-3$.

A. f là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2;3)$. **B.** f là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2;3)$.

C. f là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2;-3)$. **D.** f là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2;-3)$.

Lời giải

Chọn **D.**

Áp dụng câu 13.

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của đường tròn: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;3)$ là đường tròn có phương trình:

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$. **B.** $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 16$.

C. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$. **D.** $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 16$.

Lời giải

Chọn C.

Theo định nghĩa ta có biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến là :

$$\begin{cases} x' = x + a = x + 1 \\ y' = y + b = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$

Thay vào phương trình đường tròn ta có : $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (x'-1-2)^2 + (y'-1-3)^2 = 16 \Leftrightarrow (x'-3)^2 + (y'-4)^2 = 16$

Vậy ảnh của đường tròn đã cho qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;3)$ là đường tròn có phương trình:

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$.

Câu 16: Trong mặt phẳng Oxy cho 2 điểm $A(1;6); B(-1;-4)$. Gọi C, D lần lượt là ảnh của A và B qua phéptịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;5)$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. ABCD là hình thang. **B.** ABCD là hình bình hành.

C. ABDC là hình bình hành. **D.** Bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Lời giải

Chọn D.

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-2;-10) = -2(1;5) = 2\vec{v}(1)$

Do đó C, D lần lượt là ảnh của A và B qua phéptịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;5)$ thì $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}=\vec{v}(2)$

Từ $(1);(2)$ suy ra $AB//AC//BD$ do đó A,B,C,D thẳng hàng.

Câu 17: Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của đường tròn $:(x+1)^2+(y-3)^2=4$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3;2)$ là đường tròn có phương trình:

A. $(x+2)^2+(y+5)^2=4$ 　　**.B.** $(x-2)^2+(y-5)^2=4$**.**

C. $(x-1)^2+(y+3)^2=4$**.** 　　**D.** $(x+4)^2+(y-1)^2=4$.

Lời giải

Chọn B.

Theo định nghĩa ta có biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến là :

$$\begin{cases} x'=x+a=x+3 \\ y'=y+b=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-3 \\ y=y'-2 \end{cases}$$

Thay vào phương trình đường tròn ta có : $(x+1)^2+(y-3)^2=4$

$\Leftrightarrow (x'-3+1)^2+(y'-2-3)^2=4 \Leftrightarrow (x'-2)^2+(y'-5)^2=4$

Vậy ảnh của đường tròn $:(x+1)^2+(y-3)^2=4$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3;2)$ là đường tròn có phương trình: $(x-2)^2+(y-5)^2=4$.

Câu 18: Tìm mệnh đề ***sai*** trong các mệnh đề sau:

A. Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

B. Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng

C. Phép tịnh tiến biến tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho

D. Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song với đường thẳng đã cho

Lời giải

Chọn D.

Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song với đường thẳng đã cho khi và chỉ khi véctơ tịnh tiến $\vec{v}$ cùng phương với véctơ chỉ phương của đường thẳng đã cho.

Câu 19: Trong mặt phẳng Oxy cho 2 điểm A(1; 1) và B (2; 3). Gọi C, D lần lượt là ảnh của A và B qua phép tịnh tiến $\vec{v}$ = (2; 4). Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. ABCD là hình bình hành 　　**B.** ABDC là hình bình hành

C. ABDC là hình thang 　　**D.** Bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng

Lời giải

Chọn D.

Ta có : $\overrightarrow{AB}=(1;2)=\frac{1}{2}\vec{v}(1)$

Do đó C, D lần lượt là ảnh của A và B qua phéptịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;5)$ thì $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}=\vec{v}(2)$

Từ $(1);(2)$ suy ra $AB//AC//BD$ do đó A,B,C,D thẳng hàng.

Câu 20: Cho hai đường thẳng d và d' song song nhau. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến d thành d'?

A. 1. 　　**B.** 2. 　　**C.** 3. 　　**D. Vô số.**

Lời giải

Chọn D.

Vì $d//d'$ nên lần lượt lấy 2 điểm trên hai đường thẳng $M \in d; N \in d'$ thì phép tịnh tiến theo véctơ: $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ luôn biến đường thẳng d thành đường thẳng d'.

Câu 21: Khẳng định nào sau đây là đúng về phép tịnh tiến ?

A. Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến điểm M thành điểm M' thì $\vec{v} = \overrightarrow{M'M}$.

B. Phép tịnh tiến là phép đồng nhất nếu véctơ tịnh tiến $\vec{v} = \vec{0}$.

C. Nếu phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến 2 điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $MNN'M'$ là hình bình hành.

D. Phép tịnh tiến biến một đường tròn thành một elip.

Lời giải

Chọn B.

A sai vì Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến điểm M thành điểm M' thì $\vec{v} = \overrightarrow{MM'}$.

B đúng vì phép tịnh tiến theo véctơ tịnh tiến $\vec{v} = \vec{0}$ biến mọi điểm M thành chính nó nên là phép đồng nhất.

C sai vì nếu $\overrightarrow{MN}; \vec{v}$ là hai véctơ cùng phương thì khi đó $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{v}$ nên $\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MM'}; \overrightarrow{NN'}$ là các véctơ cùng phương do đó thẳng hàng vì vậy tứ giác $MNN'M'$ không thể là hình bình hành.

D sai vì phép tịnh tiến biến một đường tròn thành đường tròn.

Câu 22: Cho hình bình hành $ABCD$, M là một điểm thay đổi trên cạnh AB. Phép tịnh tiến theo vt $\overrightarrow{BC}$ biến điểm M thành điểm M' thì khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Điểm M' trùng với điểm M.

B. Điểm M' nằm trên cạnh BC.

C. Điểm M' là trung điểm cạnh CD.

D. Điểm M' nằm trên cạnh DC.

Lời giải

Chọn D.

Vì phép tịnh tiến bảo toàn tính chất thẳng hàng.

Khi đó : $T_{\overrightarrow{BC}} : A \mapsto D; B \mapsto C$ nên $T_{\overrightarrow{BC}} : AB \mapsto CD$.

Vì $T_{\overrightarrow{BC}}(M) = M'$ và $M \in AB \Rightarrow M' \in DC$.

Câu 23: Cho phép tịnh tiến theo vt $\vec{v} = \vec{0}$. Phép tịnh tiến theo vt $\vec{v} = \vec{0}$ biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' khi đó khẳng định nào sau đây đúng nhất ?

A. Điểm M trùng với điểm N.

B. Vt $\overrightarrow{MN}$ là vt $\vec{0}$.

C. Vt $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn C.

A sai khi hai điểm M, N phân biệt.

B sai khi hai điểm M, N phân biệt.

C đúng vì theo định nghĩa phép tịnh tiến thì ta có : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{0}$.

D sai vì thiếu điều kiện $\overrightarrow{NN'} = \vec{0}$.

Câu 24: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo vt $\vec{v} = (1;2)$ biến điểm $M(-1;4)$ thành điểm M' có tọa độ là ?

A. $M'(0;6)$.

B. $M'(6;0)$.

C. $M'(0;0)$.

D. $M'(6;6)$.

Lời giải

Chọn A.

Theo định nghĩa ta có biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến là :

$$\begin{cases} x' = x + a = -1 + 1 = 0 \\ y' = y + b = 4 + 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow M'(0;6).$$

Câu 25: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy .Cho điểm $M(-10;1)$ và $M'(3;8)$. Phép tịnh tiến theo vt $\vec{v}$ biến điểm M thành điểm M', khi đó tọa độ của vt $\vec{v}$ là ?

A. $\vec{v}=(-13;7)$. **B.** $\vec{v}=(13;-7)$. **C.** $\vec{v}=(13;7)$. **D.** $\vec{v}=(-13;-7)$.

Lời giải

Chọn C.

Phép tịnh tiến theo vt $\vec{v}$ biến điểm M thành điểm M' nên ta có : $\vec{v}=\overrightarrow{MM'}=(13;7)$.

2. Phép đối xứng trục

Nhận biết

Câu 1. Hình vuông có mấy trục đối xứng?

A. 1 B. 2 C. 4 D. vô số

Câu 2:Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2;3)$. Hỏi trong bốn điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép đối xứng trục Ox ?

A. $(3;2)$. **B.** $(2;-3)$. **C.** $(3;-2)$. **D.** $(-2;3)$.

Lời giải

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ qua phép đối xứng trục Ox ta có:

$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=2 \\ y'=-3 \end{cases}$.

Vậy $M'(2;-3)$.

Chọn B.

Câu 3:Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2;3)$. Hỏi M là ảnh của điểm nào trong các điểm sau qua phép đối xứng trục Oy ?

A. $(3;2)$. **B.** $(2;-3)$. **C.** $(3;-2)$. **D.** $(-2;3)$.

Lời giải

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ qua phép đối xứng trục Oy ta có:

$\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=-2 \\ y'=3 \end{cases}$.

Vậy $M'(-2;3)$.

Chọn D.

Câu 4:Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2;3)$. Hỏi trong bốn điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng $\Delta: x-y=0$?

A. $(3;2)$. **B.** $(2;-3)$. **C.** $(3;-2)$. **D.** $(-2;3)$.

Lời giải

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ qua phép đối xứng qua $\Delta: x-y=0$.

Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $M(2;3)$ và vuông góc $\Delta: x-y=0$ ta có:

$d: x+y-5=0$.

Gọi $I=d\cap\Delta$ thì $I\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$.

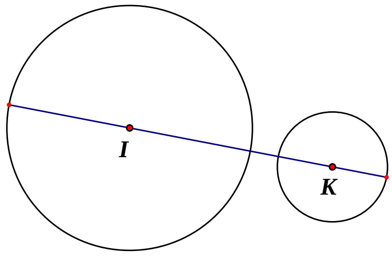
Khi đó I là trung điểm của MM' nên suy ra $M'(3;2)$.

Chọn A.

Câu 5:Hình gồm hai đường tròn có tâm và bán kính khác nhau có bao nhiêu trục đối xứng?

A. Không có. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Vô số.

Lời giải

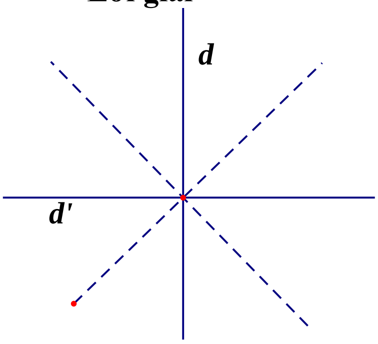


Chọn B.

Câu 6:Hình gồm hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau đó có mấy trục đối xứng?

A. 0 . **B.** 2 . **C.** 4 . **D.** Vô số.

Lời giải



Ta có 2 trục đối xứng là 2 đường thẳng đó và 2 đường phân giác tạo bởi 2 đường thẳng đó.

Chọn C.

Câu 7:Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Đường tròn là hình có vô số trục đối xứng.

B. Một hình có vô số trục đối xứng thì hình đó phải là hình tròn.

C. Một hình có vô số trục đối xứng thì hình đó phải là hình gồm những đường tròn đồng tâm.

D. Một hình có vô số trục đối xứng thì hình đó phải là hình gồm hai đường thẳng vuông góc.

Lời giải

Các đường kính của đường tròn là các trục đối xứng.

Chọn A.

Câu 8:Xem các chữ cái in hoa A,B,C,D,X,Y như những hình. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hình có một trục đối xứng: A,Y và các hình khác không có trục đối xứng.

B. Hình có một trục đối xứng: A,B,C,D,Y . Hình có hai trục đối xứng: X .

C. Hình có một trục đối xứng: A,B và hình có hai trục đối xứng: D,X .

D. Hình có một trục đối xứng: C,D,Y . Hình có hai trục đối xứng: X . Các hình khác không có trục đối xứng.

Lời giải

Hình có một trục đối xứng: A, B, C, D, Y . Hình có hai trục đối xứng: X .

Chọn B.

Thông hiểu

Câu 9:Giả sử rằng qua phép đối xứng trục $Đ_a$ (a là trục đối xứng), đường thẳng d biến thành đường thẳng d' . Hãy chọn câu ***sai*** trong các câu sau:

A. Khi d song song với a thì d song song với d'.

B. d vuông góc với a khi và chỉ khi d trùng với d'.

C. Khi d cắt a thì d cắt d'. Khi đó giao điểm của d và d' nằm trên a.

D. Khi d tạo với a một góc 45^0 thì d vuông góc với d'.

Lời giải

Ta có d vuông góc với a thì d trùng với d'. Ngược lại d trùng với d' thì a có thể trùng d.

Chọn B.

Câu 10:Trong mặt phẳng Oxy , cho Parapol (P) có phương trình $x^2 = 24y$. Hỏi Parabol nào trong các parabol sau là ảnh của (P) qua phép đối xứng trục Oy ?

A. $x^2 = 24y$. **B.** $x^2 = -24y$. **C.** $y^2 = 24x$. **D.** $y^2 = -24x$.

Lời giải

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ qua phép đối xứng trục Oy ta có:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}.$$

$(P'): x'^2 = 24y'$

Vậy $(P'): x^2 = 24y$.

Chọn A.

Câu 11:Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol $(P): y^2 = x$. Hỏi parabol nào sau đây là ảnh của parabol (P) qua phép đối xứng trục Oy ?

A. $y^2 = x$. **B.** $y^2 = -x$. **C.** $x^2 = -y$. **D.** $x^2 = y$.

Lời giải

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ qua phép đối xứng trục Oy ta có:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}.$$

$(P'): y'^2 = -x'$

Vậy $(P'): y^2 = -x$.

Chọn B.

Câu 12: Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P) có phương trình $x^2 = 4y$. Hỏi parabol nào trong các parabol sau là ảnh của (P) qua phép đối xứng trục Ox ?

A. $x^2 = 4y$. **B.** $x^2 = -4y$. **C.** $y^2 = 4x$. **D.** $y^2 = -4x$.

Lời giải

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ qua phép đối xứng trục Oy ta có:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}.$$

$(P'): x'^2 = -4y'$

Vậy $(P'): x^2 = -4y$.

Chọn B.

Câu 13:Trong mặt phẳng Oxy, qua phép đối xứng trục Oy . Điểm $A(3;5)$ biến thành điểm nào trong các điểm sau?

A. $(3;5)$. **B.** $(-3;5)$. **C.** $(3;-5)$. **D.** $(-3;-5)$.

Lời giải

Gọi $A'(x';y')$ là ảnh của điểm $A(x;y)$ qua phép đối xứng trục Oy ta có:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -3 \\ y' = 5 \end{cases}.$$

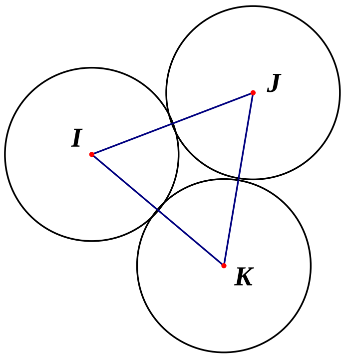
Vậy $A'(-3;5)$.

Chọn B.

Câu 14: Cho 3 đường tròn có bán kính bằng nhau và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau tạo thành hình (H) . Hỏi (H) có mấy trục đối xứng?

A. 0. **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 3.

Lời giải



Gọi I, J, K lần lượt là tâm của 3 đường tròn có bán kính bằng nhau và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau tạo thành hình (H).

Trục đối xứng của hình (H) là các đường cao của tam giác đều IJK .

Chọn D.

Câu 15: Tìm mệnh đề ***sai*** trong các mệnh đề sau:

A. Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

B. Phép đối xứng trục biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoăc trùng với đường thẳng đã cho.

C. Phép đối xứng trục biến tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.

D. Phép đối xứng trục biến đường tròn thành đường tròn bằng đường tròn đã cho

Lời giải

Dựa vào các tính chất của phép đối xứng trục ta có câu B sai.

Chọn B.

Vận dụng

Câu 16: Phát biểu nào sau đây là đúng về phép đối xứng trục d :

A. Phép đối xứng trục d biến M thành $M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IM'}$ (I là giao điểm của MM' và trục d).

B. Nếu M thuộc d thì $Đ_d(M) = M$.

C. Phép đối xứng trục không phải là phép dời hình.

D. Phép đối xứng trục d biến M thành $M' \Leftrightarrow MM' \perp d$.

Lời giải

A. Chiều ngược lại sai khi MM' không vuông góc với d

B. Đúng, phép đối xứng trục giữ bất biến các điểm thuộc trục đối xứng.

C. Sai, phép đối xứng trục là phép dời hình.

D. Sai, cần $MM' \perp d$ tại trung điểm của MM' mới suy ra được M' là ảnh của M qua phép đối xứng trục d , tức là cần d là trung trực của MM'

Câu 17: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I . Hãy chọn phát biểu đúng trong các phát biểu sau đây.

A. Hai điểm A và B đối xứng nhau qua trục CD .

B. Phép đối xứng trục AC biến A thành C .

C. Phép đối xứng trục AC biến D thành B .

D. Hình vuông $ABCD$ chỉ có 2 trục đối xứng là AC và BD .

Lời giải:

A . Sai.

B. Sai, phép đối xứng trục AC biến điểm A thành chính nó.

C. Đúng.

D. Hình vuông có 4 trục đối xứng.

Câu 18: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho phép đối xứng trục Ox . Với bất kì, gọi M' là ảnh của M qua phép đối xứng trục Ox . Khi đó tọa độ điểm M' là:

A. $M'(x;y)$. **B.** $M'(-x,y)$ **C.** $M'(-x,-y)$ **D.** $M'(x,-y)$

Lời giải:

Hai điểm đối xứng nhau qua trục Ox có hoành độ bằng nhau và tung độ đối nhau.

Câu 19: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy . Cho phép đối xứng trục Oy , với $M(x,y)$ gọi M' là ảnh của M qua phép đối xứng trục Oy . Khi đó tọa độ điểm M' là:

A. $M'(x,y)$ **B.** $M'(-x,y)$ **C.** $M'(-x,-y)$ **D.** $M'(x,-y)$

Lời giải:

Hai điểm đối xứng nhau qua trục Oy có tung độ bằng nhau và hoành độ đối nhau.

Câu 20: Hình nào sau đây có trục đối xứng (mỗi hình là một chữ cái in hoa):

A. G **B.** Ơ **C.** N **D.** M

Câu 21: Hình nào sau đây có trục đối xứng:

A. Tam giác bất kì **B.** Tam giác cân

C. Tứ giác bất kì **D.** Hình bình hành.

Câu 22: Cho tam giác ABC đều. Hỏi hình tam giác đều ABC có bao nhiêu trục đối xứng:

A. Không có trục đối xứng. **B.** Có duy nhất 1 trục đối xứng.

C. Có đúng 2 trục đối xứng. **D.** Có đúng 3 trục đối xứng.

Câu 23: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho phép đối xứng trục Ox. Phép đối xứng trục Ox biến đường thẳng $d: x+y-2=0$ thành đường thẳng d' có phương trình là:

A. $x-y-2=0$ **B.** $x+y+2=0$ **C.** $-x+y-2=0$ **D.** $x-y+2=0$

Lời giải:

Gọi $M'(x;y)$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép đối xứng trục Ox. Khi đó:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=-y' \end{cases}$$

$M \in d \Leftrightarrow x+y-2=0 \Leftrightarrow x'+(-y')-2=0 \Leftrightarrow x'-y'-2=0$

Vậy M' thuộc đường thẳng d' có phương trình $x-y-2=0$

Câu 24: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Phép đối xứng trục Ox biến đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=4$ thành đường tròn (C') có phương trình là:

A. $(x+1)^2+(y+2)^2=4$ **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

C. $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

Lời giải:

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép đối xứng trục Ox. Khi đó:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=-y' \end{cases}$$

$M \in (C) \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=4 \Leftrightarrow (x'-1)^2+(-y'+2)^2=4$

Vậy M' thuộc đường tròn (C') có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

Câu 25: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho phép đối xứng trục $d: y-x=0$. Phép đối xứng trục d biến đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-4)^2=1$ thành đường tròn (C') có phương trình là:

A. $(x+1)^2+(y-4)^2=1$ **B.** $(x-4)^2+(y+1)^2=1$

C. $(x+4)^2+(y-1)^2=1$ **D.** $(x+4)^2+(y+1)^2=1$

Lời giải:

(C) có tâm $I(-1;4)$ và bán kính bằng 1.

Gọi I' là ảnh của $I(-1;4)$ qua phép đối xứng trục $d: y-x=0$. Khi đó, d là trung trực của II'.

Gọi $H(x;y)$ là trung điểm của II'.

$$\begin{cases} H \in d \\ \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_d}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+1+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{3}{2}$$

Do đó $I'(4;-1)$.

Phép đối xứng trục biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính nên ảnh của (C) là : $(C'):(x+4)^2+(y+1)^2=1$

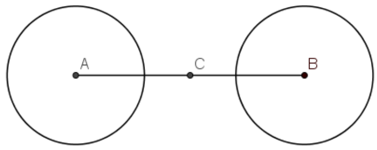
3. Phép đối xứng tâm

Nhận biết

Câu 1: Cho hai điểm $I(1;2)$ và $M(3;-1)$. Hỏi điểm M' có tọa độ nào sau đây là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I ?

Đáp án B.

Hình gồm hai đường tròn phân biệt có cùng bán kính có một tâm đối xứng, tâm đối xứng đó chính là trung điểm của đoạn nối tâm.



Thật vậy, giả sử hai đường tròn là:

$(C_1):(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=R^2$;

$(C_2):(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=R^2$

Trung điểm đoạn nối tâm có tọa độ

$C\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

A. $(2;1)$ **B.** $(-1;5)$ **C.** $(-1;3)$ **D.** $(5;-4)$

Lời giải:

I là trung điểm của MM' nên ta chọn câu B.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x=2$. Trong các đường thẳng sau đường thẳng nào là ảnh của d qua phép đối xứng tâm O?

A. $x=-2$ **B.** $y=2$ **C.** $x=2$ **D.** $y=-2$

Lời giải

Ảnh là một đường thẳng song song với d (vì tâm đối xứng O không thuộc d) nên ta chọn A.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Qua phép đối xứng tâm không có điểm nào biến thành chính nó.
B. Qua phép đối xứng tâm có đúng một điểm biến thành chính nó.
C. Có phép đối xứng tâm có hai điểm biến thành chính nó.
D. Có phép đối xứng tâm có vô số điểm biến thành chính nó.

Lời giải

Chọn B, vì phép đối xứng tâm chỉ giữ bất biến tâm đối xứng.

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $x-y+4=0$. Hỏi trong các đường thẳng sau đường thẳng nào có thể biến thành d qua một phép đối xứng tâm?

A. $2x+y-4=0$ **B.** $x+y-1=0$ **C.** $2x-2y+1=0$ **D.** $2x+2y-3=0$

Lời giải

Phép đối xứng tâm biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng ban đầu, nên ta chọn đáp án C vì chỉ có đường thẳng ở câu C mới song song với d.

Câu 5: Hình gồm hai đường tròn phân biệt có cùng bán kính có bao nhiêu tâm đối xứng?

A. Không có. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Ba.

Lời giải

Lấy một điểm $M\left(x_0;y_0\right)\in\left(C_1\right)\Rightarrow\left(x_0-x_1\right)^2+\left(y_0-y_1\right)^2=R^2$

Điểm đối xứng với M qua C có tọa độ $M'\left(x_1+x_2-x_0;y_1+y_2-y_0\right)$

Ta chứng minh $M'\in\left(C_2\right)$ do $\left(x_1+x_2-x_0-x_2\right)^2+\left(y_1+y_2-y_0-y_2\right)^2=\left(x_0-x_1\right)^2+\left(y_0-y_1\right)^2=R^2$

Với mỗi điểm M xác đinh được điểm M' là duy nhất nên C là tâm đối xứng của hai đường tròn.

Câu 6: Trong hệ trục tọa độ Oxy cho điểm $I\left(a;b\right)$. Nếu phép đối xứng tâm I biến điểm $M\left(x;y\right)$ thành $M'\left(x';y'\right)$ thì ta có biểu thức:

A. $\begin{cases}x'=a+x\\y'=b+y\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x'=2a-x\\y'=2b-y\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x'=a-x\\y'=b-y\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2x'-a\\y=2y'-b\end{cases}$.

Lời giải

Đáp án B.

Phép đối xứng tâm I biến điểm $M\left(x;y\right)$ thành $M'\left(x';y'\right)$ thì I là trung điểm của MM'

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x+x'}{2}=a\\\dfrac{y+y'}{2}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=2a-x\\y'=2b-y\end{cases}.$$

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy, cho phép đối xứng tâm $I\left(1;2\right)$ biến điểm $M\left(x;y\right)$ thành $M'\left(x';y'\right)$. Khi đó:

A. $\begin{cases}x'=-x+2\\y'=-y-2\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x'=-x+2\\y'=-y+4\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x'=-x+2\\y'=-y-4\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x'=x+2\\y'=y-2\end{cases}$.

Lời giải

Đáp án B.

Phép đối xứng tâm I biến điểm $M\left(x;y\right)$ thành $M'\left(x';y'\right)$ thì I là trung điểm của MM'

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x+x'}{2}=1\\\dfrac{y+y'}{2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=-x+2\\y'=-y+4\end{cases}.$$

Câu 8: Một hình $\left(H\right)$ có tâm đối xứng nếu và chỉ nếu:

A. Tồn tại phép đối xứng tâm biến hình $\left(H\right)$ thành chính nó.

B. Tồn tại phép đối xứng trục biến hình $\left(H\right)$ thành chính nó.

C. Hình $\left(H\right)$ là hình bình hành.

D. Tồn tại phép dời hình biến hình $\left(H\right)$ thành chính nó.

Lời giải

Đáp án A.

Câu 9: Hình nào sau đây không có tâm đối xứng?

A. Hình vuông. **B.** Hình tròn. **C.** Hình tam giác đều. **D.** Hình thoi.

Lời giải.

Chọn C.

Hình tam giác đều không có tâm đối xứng.

Câu 10: Trong mặt phẳng (Oxy), tìm ảnh của điểm $A(5;3)$ qua phép đối xứng tâm $I(4;1)$.

A. $(5;3)$. **B.** $(-5;-3)$. **C.** $(3;-1)$. **D.** $\left(\frac{9}{2};2\right)$.

Lời giải.

Chọn C.

Gọi $A'(x';y')$ là ảnh của $A(5;3)$ qua phép đối xứng tâm $I(4;1)$.

Ta có: $\begin{cases} x' = 2x_I - x_A = 2.4 - 5 = 3 \\ y' = 2y_I - y_A = 2.1 - 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow A'(3;-1)$.

Thông hiểu

Câu 11: Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$, tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm $I(1;2)$.

A. $x + y + 4 = 0$. **B.** $x + y - 4 = 0$. **C.** $x - y + 4 = 0$ **D.** $x - y - 4 = 0$.

Lời giải.

Chọn B.

Lấy $M(x;y) \in d$. Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm $I(1;2)$.

Ta có: $\begin{cases} x' = 2.1 - x = 2 - x \\ y' = 2.2 - y = 4 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$.

Do $M(x;y) \in d$ nên ta có: $x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 - x' + 4 - y' - 2 = 0 \Leftrightarrow x' + y' - 4 = 0$.

Mà $M'(x';y') \in d'$ nên phương trình d' là: $x + y - 4 = 0$.

Câu 12: Trong mặt phẳng (Oxy), tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$ qua phép đối xứng tâm $O(0;0)$.

A. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$. **B.** $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 9$.

C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$. **D.** $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$.

Lời giải.

Chọn D.

Đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$ có tâm $I(3;-1)$ và có bán kính $R = 3$.

Điểm đối xứng với $I(3;-1)$ qua $O(0;0)$ là $I'(-3;1)$.

Vậy phương trình (C') là: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$.

Câu 13: Tìm mệnh đề ***sai*** trong các mệnh đề sau:

A. Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách giữa 2 điểm bất kì.

B. Nếu $IM' = IM$ thì $§_I(M) = M'$.

C. Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.

D. Phép đối xứng tâm biến tam giác bằng tam giác đã cho.

Lời giải.

Chọn B.
Mệnh đề này sai vì thiếu điều kiện ba điểm I, M, M' thẳng hàng.

Câu 14: Trong mặt phẳng (Oxy), cho điểm $I(x_0; y_0)$. Gọi $M(x; y)$ là một điểm tùy ý và $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. Khi đó biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm I là:

A. $\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$.
B. $\begin{cases} x' = 2x_0 + x \\ y' = 2y_0 + y \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = 2x_0 + x' \\ y = 2y_0 + y' \end{cases}$.
D. $\begin{cases} x = x_0 - x' \\ y = y_0 - y' \end{cases}$.

Lời giải.
Chọn A.
Vì I là trung điểm của MM'.

Vận dụng

Câu 15: Trong mặt phẳng (Oxy), tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$.

A. $(x-2)^2 + y^2 = 1$.
B. $(x+2)^2 + y^2 = 1$.
C. $x^2 + (y+2)^2 = 1$.
D. $x^2 + (y-2)^2 = 1$.

Lời giải.
Chọn A.
Đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ có tâm $O(0;0)$ và có bán kính $R = 1$.
Điểm đối xứng với $O(0;0)$ qua $I(1;0)$ là $O'(x'; y')$.
Ta có: $\begin{cases} x' = 2.1 - 0 = 2 \\ y' = 2.0 - 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow O'(2;0)$
Vậy phương trình (C') là: $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Câu 16: Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$. Giả sử qua phép đối xứng tâm I điểm $A(1;3)$ biến thành điểm $B(a;b)$. Tìm phương trình của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng tâm I.

A. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$
B. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$.
C. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 9$.
D. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 16$.

Lời giải.
Chọn D.
Đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$ có tâm $A(1;3)$ và có bán kính $R = 4$.
Qua phép đối xứng tâm I biến $A(1;3)$ thành $B(a;b)$ nên $B(a;b)$ chính là tâm của (C'). Phép đối xứng tâm là một phép dời hình nên (C') có tâm $R' = R = 4$.
Phương trình (C') là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 16$.

Câu 17: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ (Oxy). Cho phép đối xứng tâm $O(0;0)$ biến điểm $M(-2;3)$ thành M' có tọa độ là:

A. $M'(-4;2)$. **B.** $M'(-2;-3)$. **C.** $M'(2;-3)$. **D.** $M'(2;3)$.

Lời giải.

Chọn C.

Ta có: $\begin{cases} x_{M'} = 2.0-(-2)=2 \\ y_{M'} = 2.0-3=-3 \end{cases} \Rightarrow M'(2;-3)$.

Câu 18: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ (Oxy). Cho phép đối xứng tâm $I(1;-2)$ biến điểm $M(2;4)$ thành M' có tọa độ là:

A. $M(-4;2)$. **B.** $M'(-4;8)$. **C.** $M(0;8)$. **D.** $M'(0;-8)$.

Lời giải.

Chọn D.

Ta có: $\begin{cases} x_{M'} = 2.x_I - x_M = 2.1-2=0 \\ y_{M'} = 2.y_I - y_M = 2.(-2)-4=-8 \end{cases} \Rightarrow M'(0;-8)$.

Câu 19: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ (Oxy). Cho phép đối xứng tâm $I(1;1)$ biến đường thẳng $d: x+y+2=0$ thành đường thẳng d' có phương trình là:

A. $x+y+4=0$. **B.** $x+y+6=0$. **C.** $x+y-6=0$. **D.** $x+y=0$.

Lời giải.

Chọn C.

Lấy $M(x;y)\in d$. Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm $I(1;1)$.

Ta có: $\begin{cases} x' = 2.1-x=2-x \\ y' = 2.1-y=2-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-x' \\ y=2-y' \end{cases}$.

Do $M(x;y)\in d$ nên ta có: $x+y+2=0 \Leftrightarrow 2-x'+2-y'+2=0 \Leftrightarrow x'+y'-6=0$.

Mà $M'(x';y')\in d'$ nên phương trình d' là: $x+y-6=0$.

Câu 20: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ (Oxy). Cho phép đối xứng tâm $I\left(\frac{1}{2};2\right)$ biến đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=4$ thành đường tròn (C') có phương trình là:

A. $(x+1)^2+(y-2)^2=4$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2=4$. **D.** $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Lời giải.

Chọn D.

Đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=4$ có tâm $J(-1;2)$, bán kính $R=2$.

Gọi $J'(x';y')$ là ảnh của J qua phép đối xứng tâm $I\left(\frac{1}{2};2\right)$. Ta có:

$$\begin{cases} x' = 2\cdot\dfrac{1}{2} - (-1) = 2 \\ y' = 2.2 - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow J'(2;2).$$

Vậy phương trình (C') là $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Câu 21: Hình nào sau đây có tâm đối xứng:

A. Hình thang. **B.** Hình tròn. **C.** Parabol. **D.** Tam giác bất kì.

Lời giải.

Chọn B.

Tâm đối xứng của đường tròn chính là tâm của đường tròn.

Câu 22: Hình nào sau đây có tâm đối xứng (một hình là một chữ cái in hoa):

A. Q. **B.** P. **C.** N. **D.** E.

Lời giải.

Chọn C.

Chữ N có tâm đối xứng chính là trung điểm nét chéo của nó.

Cho hai điểm $I(1;2)$ và $M(3;-1)$. Hỏi điểm M' có tọa độ nào sau đây là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I ?

A. $(2;1)$ **B.** $(-1;5)$ **C.** $(-1;3)$ **D.** $(5;-4)$

Lời giải:

I là trung điểm của MM' nên ta chọn câu B.

Câu 23: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x = 2$. Trong các đường thẳng sau đường thẳng nào là ảnh của d qua phép đối xứng tâm O?

A. $x = -2$ **B.** $y = 2$ **C.** $x = 2$ **D.** $y = -2$

Lời giải

Ảnh là một đường thẳng song song với d (vì tâm đối xứng O không thuộc d) nên ta chọn A.

Câu 24: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Qua phép đối xứng tâm không có điểm nào biến thành chính nó.
B. Qua phép đối xứng tâm có đúng một điểm biến thành chính nó.
C. Có phép đối xứng tâm có hai điểm biến thành chính nó.
D. Có phép đối xứng tâm có vô số điểm biến thành chính nó.

Lời giải

Chọn B, vì phép đối xứng tâm chỉ giữ bất biến tâm đối xứng.

Câu 25: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $x - y + 4 = 0$. Hỏi trong các đường thẳng sau đường thẳng nào có thể biến thành d qua một phép đối xứng tâm?

A. $2x + y - 4 = 0$ **B.** $x + y - 1 = 0$ **C.** $2x - 2y + 1 = 0$ **D.** $2x + 2y - 3 = 0$

Lời giải

Phép đối xứng tâm biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng ban đầu, nên ta chọn đáp án C vì chỉ có đường thẳng ở câu C mới song song với d.

Buổi 2

I. Phép quay:

a) ĐN : Trong mặt phẳng cho một điểm O cố định và góc lượng giác φ. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M′ sao cho OM = OM′ và (OM;OM′) = φ được gọi là phép quay tâm O với góc quay φ.

• Phép quay hoàn toàn xác định khi biết tâm và góc quay

• Kí hiệu : $Q_{(o,\varphi)}$ hoặc Q_O^{φ} .

Chú ý : Chiều dương của phép quay ≡ chiều dương của đường tròn lượng giác .

• $Q^{2k\pi} \equiv$ phép đồng nhất ,$\forall k \in \mathbb{Z}$

• $Q^{(2k+1)\pi} \equiv$ phép đối xứng tâm I ,$\forall k \in \mathbb{Z}$

b) Tính chất :

• ĐL : Phép quay là một phép dời hình .

• HQ : Phép quay biến:

1. Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của các điểm tương ứng .
2. Đường thẳng thành đường thẳng .
3. Tia thành tia .
4. Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó .
5. Tam giác thành tam giác bằng nó . (Trực tâm $\xmapsto{Q}$ trực tâm , trọng tâm $\xmapsto{Q}$ trọng tâm)
6. Đường tròn thành đường tròn bằng nó . (Tâm biến thành tâm : $I \xmapsto{Q_{(O\,;\,\varphi)}} I'$, R′ = R)
7. Góc thành góc bằng nó .

II. PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

1/ Phép dời hình.

Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ, tức là với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng, ta luôn có: $M'N' = MN$.(Bảo toàn khoảng cách)

2/ Tính chất (của phép dời hình):

▪ ĐL: Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, ba điểm không thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng.

▪ HQ: Phép dời hình biến:

+ Đường thẳng thành đường thẳng.

+ Tia thành tia.

+ Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.

+ Tam giác thành tam giác bằng nó. (Trực tâm $\rightarrow$ trực tâm, trọng tâm$\rightarrow$trọng tâm,…)

+ Đường tròn thành đường tròn bằng nó. (Tâm biến thành tâm: $I \rightarrow I', R' = R$)

+ Góc thành góc bằng nó.

3/ Hai hình bằng nhau.

KN: Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Bài tập vận dụng:

Phép quay:

Dạng bài tập và PP giải:

◆ **TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐIỂM**

$\boxed{B1}$ Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho $A(3;4)$. Hãy tìm toạ độ điểm A' là ảnh của A qua phép quay tâm O góc 90^{o}.

HD :

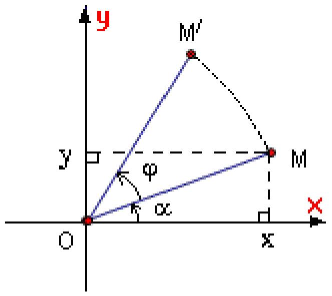
Gọi $B(3;0),C(0;4)$ lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox,Oy . Phép quay tâm O góc 90^{o} biến hình chữ nhật OABC thành hình chữ nhật $OC'A'B'$.

Khi đó : $C'(0;3),B'(-4;0)$. Suy ra : $A'(-4;3)$.

$\boxed{B2}$ Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(x;y)$. Tìm $M' = Q_{(O\,;\,\varphi)}(M)$.

HD :

Hình vẽ minh họa:



HD :

Gọi $M(x;y)$. Đặt : $OM = r$, góc lượng giác $(Ox;OM) = \alpha$ thì $M\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$

Vì : $M \xmapsto{Q_{(O\,;\,\varphi)}} M'$. Gọi $M'(x';y')$ thì độ dài $OM' = r$ và $(Ox;OM') = \alpha + \varphi$.

Ta có :

$x' = r\cos(\alpha + \varphi) = r.\cos\alpha.\cos\varphi - r.\sin\alpha.\sin\varphi = x\cos\varphi - y\sin\varphi$.

$y' = r\sin(\alpha + \varphi) = r.\sin\alpha.\cos\varphi + r.\cos\alpha.\sin\varphi = x\sin\varphi + y\cos\varphi$.

Vậy : $M'\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$

Đặc biệt :

- $M \xmapsto{Q_{(O\,;\,-\varphi)}} M'' \begin{cases} x'' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y'' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$
- $M \xmapsto[I(x_o;y_o)]{Q_{(I\,;\,\varphi)}} M' \begin{cases} x' - x_o = (x - x_o)\cos\varphi - (y - y_o)\sin\varphi \\ y' - y_o = (x - x_o)\sin\varphi + (y - y_o)\cos\varphi \end{cases}$
- $M \xmapsto[I(x_o;y_o)]{Q_{(I\,;\,-\varphi)}} M'' \begin{cases} x'' - x_o = (x - x_o)\cos\varphi - (y - y_o)\sin\varphi \\ y'' - y_o = -(x - x_o)\sin\varphi + (y - y_o)\cos\varphi \end{cases}$

◆ **PHƯƠNG PHÁP TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐƯỜNG THẲNG**

$\boxed{\text{B3}}$ Trong mpOxy cho đường thẳng $(\Delta) : 2x - y + 1 = 0$.
Tìm ảnh của đường thẳng qua :

a) Phép đối xứng tâm $I(1;-2)$.

b) Phép quay $Q_{(O;90^\circ)}$.

Giải

a) Ta có : $M'(x';y') = Đ_I(M)$ thì biểu thức tọa độ $M' \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = -4 - y' \end{cases}$

Vì $M(x;y) \in (\Delta) : 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(2 - x') - (-4 - y') + 1 = 0 \Leftrightarrow -2x' + y' + 9 = 0$
$\Leftrightarrow M'(x';y') \in (\Delta') : 2x - y - 9 = 0$

Vậy : $(\Delta) \xmapsto{Đ_I} (\Delta') : 2x - y - 9 = 0$

b) <u>Cách 1</u> : Gọi $M(x;y) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} M'(x';y')$. Đặt $(Ox\,;\,OM) = \alpha$, $OM = r$,
Ta có $(Ox\,;\,OM') = \alpha + 90^\circ, OM' = r$.

Khi đó : $M \begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases} \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} M' \begin{cases} x' = r\cos(\alpha + 90^\circ) = -r\sin\alpha = -y \\ y' = r\sin(\alpha + 90^\circ) = r\cos\alpha = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$

Vì $M(x;y) \in (\Delta) : 2(y') - (-x') + 1 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' + 1 = 0$
$\Leftrightarrow M'(x';y') \in (\Delta') : x + 2y + 1 = 0$

Vậy : $(\Delta) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} (\Delta') : x + 2y + 1 = 0$

Cách 2 : Lấy : • $M(0;1) \in (\Delta) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} M'(-1;0) \in (\Delta')$

• $N(-\frac{1}{2};0) \in (\Delta) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} N'(0;\frac{-1}{2}) \in (\Delta')$

• $(\Delta) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} (\Delta') \equiv M'N' : x + 2y + 1 = 0$

Cách 3 : • Vì $(\Delta) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} (\Delta') \Rightarrow (\Delta) \perp (\Delta')$ mà hệ số góc : $k_\Delta = 2 \Rightarrow k_{\Delta'} = -\frac{1}{2}$

• $M(0;1) \in (\Delta) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} M'(1;0) \in (\Delta')$

• $(\Delta') : \begin{cases} \bullet \text{ Qua } M'(1;0) \\ \bullet \text{ hsg ; } k = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (\Delta') : x + 2y + 1 = 0$

◆ **PHƯƠNG PHÁP TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN**

$\boxed{\text{B4}}$ Trong mpOxy cho phép quay $Q_{(O;45^\circ)}$. Tìm ảnh của :

a) Điểm M(2;2)

b) Đường tròn (C) : $(x-1)^2 + y^2 = 4$

Giải . Gọi : $M(x;y) \xmapsto{Q_{(O\,;\,45^\circ)}} M'(x';y')$. Ta có : $OM = 2\sqrt{2}$, $(Ox; OM) = \alpha$

Thì $M' \begin{cases} x' = r\cos(\alpha+45^\circ) = r\cos\alpha.\cos 45^\circ - r\sin\alpha.\sin 45^\circ = x.\cos 45^\circ - y.\sin 45^\circ \\ y' = r\sin(\alpha+45^\circ) = r\sin\alpha.\cos 45^\circ + r\cos\alpha.\sin 45^\circ = y.\cos 45^\circ + x.\sin 45^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow M' \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$

a) $A(2;2) \xmapsto{Q_{(O\,;\,45^\circ)}} A'(0\,;2\sqrt{2})$

b) Vì (C) : $\begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I(1;0) \\ \bullet \text{ Bk} : R = 2 \end{cases} \xrightarrow{Q_{(O\,;\,45^\circ)}} (C') : \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I'? \\ \bullet \text{ Bk} : R' = R = 2 \end{cases}$

$I(1;0) \xmapsto{Q_{(O\,;\,45^\circ)}} I'(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2})$. Vậy : $(C') : (x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 4$

5. Phép dời hình và hai hình bằng nhau:

◆ **XÉT 1 PHÉP BIẾN HÌNH XEM CÓ PHẢI PHÉP DỜI HÌNH.**

$\boxed{\text{B1}}$ Trong mpOxy cho phép biến hình $f : M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (3x;y)$.
Đây có phải là phép dời hình hay không ?

Giải : Lấy hai điểm bất kì $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$

Khi đó $f : M(x_1;y_1) \longmapsto M' = f(M) = (3x_1;\ y_1)$.

$f : N(x_2;y_2) \longmapsto N' = f(N) = (3x_2;\ y_2)$

Ta có : $MN = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, $M'N' = \sqrt{9(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Nếu $x_1 \neq x_2$ thì $M'N' \neq MN$. Vậy : f không phải là phép dời hình .

(Vì có 1 số điểm f không bảo toàn khoảng cách) .

$\boxed{\text{B2}}$ Trong mpOxy cho 2 phép biến hình :

a) $f : M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (y\ ;\ x\text{-}2)$ b) $g : M(x;y) \longmapsto M' = g(M) = (\ 2x\ ;\ y+1)$.

Phép biến hình nào trên đây là phép dời hình ?

HD :

a) f là phép dời hình b) g không phải là phép dời hình (Vì $x_1 \neq x_2$ thì $M'N' \neq MN$)

$\boxed{\text{B3}}$ Trong mpOxy cho 2 phép biến hình :

a) $f : M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (y+1\ ;\ -x)$ b) $g : M(x;y) \longmapsto M' = g(M) = (\ x\ ;\ 3y\ )$.

Phép biến hình nào trên đây là phép dời hình ?

HD :

a) f là phép dời hình b) g không phải là phép dời hình (Vì $y_1 \neq y_2$ thì $M'N' \neq MN$)

◆ **HAI HÌNH BẰNG NHAU.**

$\boxed{\text{B1}}$ Cho hình chữ nhật ABCD . Gọi E,F,H,I theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB,CD,BC,EF. Hãy tìm một phép dời hình biến ΔAEI thành ΔFCH . Từ đó KL chúng bằng nhau.

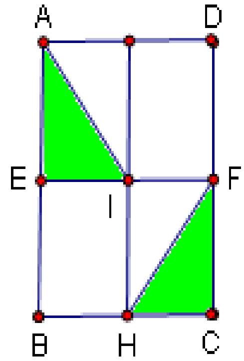
HD :

Thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AE}$ và phép đối xứng qua đường thẳng IH

◆ $T_{\overrightarrow{AE}} : A \longmapsto E, E \longmapsto B, I \longmapsto H \Rightarrow T_{\overrightarrow{AE}}(\Delta AEI) = \Delta EBH$

- $Đ_{IH} : E \longmapsto F, B \longmapsto C, H \longmapsto H \Rightarrow Đ_{IH}(\Delta EBH) = \Delta FCH$
- $Đ_{IH} : T_{\overrightarrow{AE}}(\Delta AEI) = \Delta FCH$

  Do đó : $Đ_{IH} \circ T_{\overrightarrow{AE}}(\Delta AEI) = \Delta FCH \Rightarrow \Delta AEI = \Delta FCH$



$\boxed{B2}$ Cho hình chữ nhật ABCD . Gọi O là tâm đối xứng của nó ; E,F,G,H,I,J theo thứ tự là trung điểm của
các cạnh AB,BC,CD,DA,AH,OG . Chứng minh rằng : Hai hình thang AJOE và GJFC bằng nhau .

HD :

Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AO}$ biến A,I,O,E lần lượt thành O,J,C,F . Phép đối xứng qua trục của OG biến O,J,C,F lần lượt thành G,J,F,C.

Từ đó suy ra phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình trên sẽ biến hình thang AJOE thành hình thang GJFC .

Do đó hai hình thang ấy bằng nhau .

◆ **TÌM ẢNH QUA PHÉP DỜI HÌNH (Thực hiện liên tiếp qua 1 số phép).**

$\boxed{B1}$ Tìm ảnh của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép
tịnh tiến theo $\vec{u} = (3;-1)$ và phép $Đ_{Oy}$.

ĐS : $(C') : (x+4)^2 + (y+3)^2 = 9$

$\boxed{B2}$ Tìm ảnh của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép
quay $Q_{(O;90^\circ)}$ và phép $Đ_{Ox}$.

HD : (C) có tâm I(3;1) , bk : R = 2 . Khi đó :

$(C) : I(3;1)\ , R = 2 \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} (C') : I'(-1;3)\ , R = 2 \xmapsto{Đ_{Ox}} (C'') : I''(-1;-3)\ , R = 2$

$\Rightarrow (C'') : (x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$

<u>Bài tập trắc nghiệm:</u>

4. Phép quay

Nhận biết

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của điểm $M(-6;1)$ qua phép quay $Q_{(O,90^o)}$ là:

<u>A.</u> $M'(-1;-6)$. B. $M'(1;6)$. C. $M'(-6;-1)$. D. $M'(6;1)$.

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy, qua phép quay $Q_{(O,90^o)}$, $M'(3;-2)$ là ảnh của điểm :

A. $M(3;2)$. B. $M(2;3)$. C. $M(-3;-2)$. D. $M(-2;-3)$.

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của điểm $M(3;4)$ qua phép quay $Q_{(O,45^o)}$ là:

A. $M'\left(\frac{7\sqrt{2}}{2};\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$. B. $M'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$.

C. $M'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. D. $M'\left(\frac{7\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Câu 4. Trong mặt phẳng Oxy, qua phép quay $Q_{(O,-135^o)}$, $M'(3;2)$ là ảnh của điểm :

A. $M\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$. B. $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

C. $M\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. D. $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây đúng về phép đối xứng tâm:

A. Nếu $OM = OM'$ thì M' là ảnh của M qua phép đối xứng tâm O.

B. Nếu $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$ thì M' là ảnh của M qua phép đối xứng tâm O.

C. Phép quay là phép đối xứng tâm.

D. Phép đối xứng tâm không phải là một phép quay.

Lời giải

Chọn B.

M' là ảnh của M qua phép đối xứng tâm O khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$.

Phép đối xứng tâm là một phép quay, nhưng phép quay chưa hẳn đã là phép đối xứng tâm.

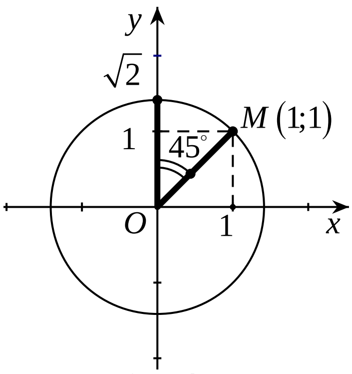
Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(1;1)$. Hỏi các điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép quay tâm O, góc 45°?

A. $(-1;1)$. **B.** $(1;0)$. **C.** $(\sqrt{2};0)$. **D.** $(0;\sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào hình vẽ chọn đáp án **D**.



Chú ý: trong 4 đáp án chỉ có 1 đáp án điểm nằm trên trục Oy nên chọn đáp án **D**.

Câu 7. Cho tam giác đều tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α, $0 \le \alpha \le 2\pi$, biến tam giác trên thành chính nó?

A. Một. **B.** Hai. **C.** Ba. **D.** Bốn.

Lời giải

Chọn D.

Với điều kiện $0 \le \alpha \le 2\pi$ thì có 4 giá trị tìm được của α là 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ và 2π.

Thông hiểu

Câu 8. Cho tam giác đều tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α, $0 \le \alpha \le 2\pi$, biến tam giác trên thành chính nó?

A. Một. **B.** Hai. **C.** Ba. **D.** Bốn.

Lời giải

Chọn D.

Với điều kiện $0 \le \alpha \le 2\pi$ thì có 4 giá trị tìm được của α là 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ và 2π.

Chú ý: giống câu 77.

Câu 9. Cho hình chữ nhật có O là tâm đối xứng. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α, $0 \le \alpha \le 2\pi$, biến hình chữ nhật trên thành chính nó?

A. Không có. **B.** Hai. **C.** Ba. **D.** Bốn.

Lời giải

Chọn C.

Với điều kiện $0 \le \alpha \le 2\pi$ thì có 3 giá trị tìm được của α là 0, π và 2π.

Câu 10. Có bao nhiêu điểm biến thành chính nó qua phép quay tâm O góc $\alpha \ne k2\pi$, k là số nguyên?

A. Không có. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B.

Với góc $\alpha \ne k2\pi$, k là số nguyên thì có duy nhất một điểm là O.

Câu 11. Phép quay $Q_{(O;\varphi)}$ biến điểm M thành M'. Khi đó:

A. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ và $(OM, OM') = \varphi$. **B.** $OM = OM'$ và $(OM, OM') = \varphi$.

C. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ và $\widehat{MOM'} = \varphi$. **D.** $OM = OM'$ và $\widehat{MOM'} = \varphi$.

Lời giải

Chọn B.

Theo định nghĩa.

Câu 12. Phép quay $Q_{(O;\varphi)}$ với $\varphi \ne \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ biến điểm A thành M. Khi đó:

(I): O cách đều A và M.

(II): O thuộc đường tròn đường kính AM.

(III): O nằm trên cung chứa góc φ dựng trên đoạn AM.

Trong các câu trên câu đúng là:

A. Cả ba câu. **B.** chỉ (I) và (II). **C.** chỉ (I). **D.** chỉ (I) và (III).

Lời giải

Chọn C.

(I) đúng theo định nghĩa có $OA = OM$.

(II) chỉ đúng khi $\varphi \neq \frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

(III) chỉ đúng khi $0<\varphi<180^\circ$.

Câu 13. Chọn câu **sai** trong các câu sau:

A. Qua phép quay $Q_{(O;\varphi)}$ điểm O biến thành chính nó.

B. Phép đối xứng tâm O là phép quay tâm O, góc quay -180°.

C. Phép quay tâm O góc quay 90° và phép quay tâm O góc quay -90° là hai phép quay giống nhau.

D. Phép đối xứng tâm O là phép quay tâm O, góc quay 180°.

Lời giải

Chọn C.

Câu **A** đúng.

Phép quay tâm O, góc quay -180° và phép quay tâm O, góc quay 180° đều là phép đối xứng tâm O, nên các câu **B**, **D** đúng.

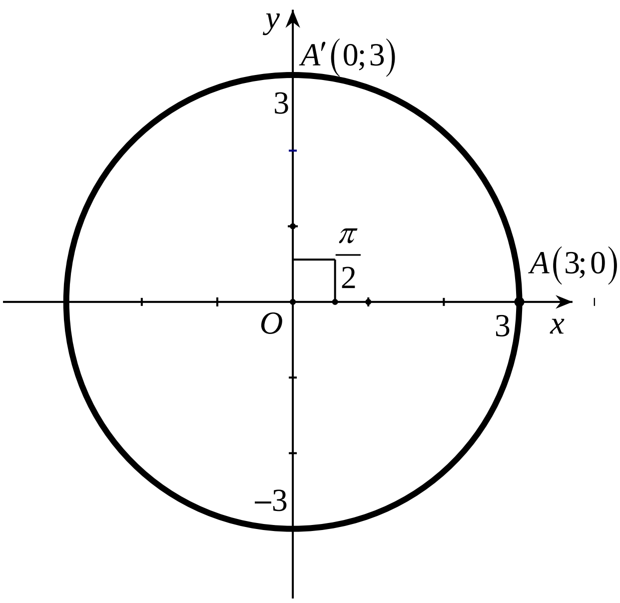
Câu 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $Q_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$.

A. $A'(0;-3)$. **B.** $A'(0;3)$. **C.** $A'(-3;0)$. **D.** $A'\left(2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào hình vẽ chọn đáp án **B**.



Vận dụng

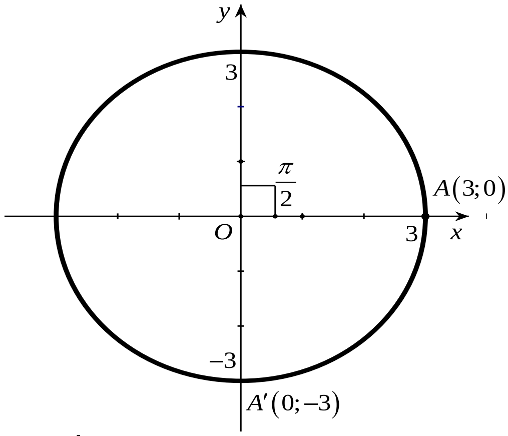
Câu 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $Q_{\left(O;-\frac{\pi}{2}\right)}$.

A. $A'(-3;0)$. **B.** $A'(3;0)$. **C.** $A'(0;-3)$. **D.** $A'\left(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào hình vẽ chọn đáp án C.



Câu 16. Khẳng định nào sau đây **đúng** về phép quay?

A. Phép biến hình biến điểm O thành điểm O và điểm M khác điểm O thành điểm M' sao cho $(OM, OM') = \varphi$ được gọi là phép quay tâm O với góc quay φ.

B. Nếu $Q_{(O;90^\circ)}: M \mapsto M'(M \neq O)$ thì $OM' \perp OM$.

C. Phép quay không phải là một phép dời hình.

D. Nếu $Q_{(O;90^\circ)}: M \mapsto M'(M \neq O)$ thì $OM' > OM$.

Lời giải

Chọn B.

Đáp án **A** thiếu $OM' = OM$.

Đáp án **C** sai.

Đáp án **D** sai.

Câu 17. Cho tam giác đều ABC, với góc quay nào sau đây thì phép quay tâm A có thể biến điểm B thành điểm C?

A. $\varphi = 30^\circ$. **B.** $\varphi = 90^\circ$. **C.** $\varphi = -120^\circ$. **D.** $\varphi = -150^\circ$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $M(2;0)$ và điểm $N(0;2)$. Phép quay tâm O biến điểm M thành điển N, khi đó góc quay của nó là:

A. $\varphi = 30^\circ$. **B.** $\varphi = 30^\circ$ hoặc $\varphi = 45^\circ$.

C. $\varphi = -90^\circ$. **D.** $\varphi = 90^\circ$ hoặc $\varphi = -270^\circ$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 19. Phép quay $Q_{(O;\,\varphi)}$ biến điểm A thành M. Khi đó:

(I) O cách đều A và M.

(II) O thuộc đường tròn đường kính AM.

(III) O nằm trên cung chứa góc φ dựng trên đoạn AM.

Trong các câu trên câu đúng là:

A. Cả ba câu **B.** (I) và (II) **C.** (I) **D.** (I) và (III)

Câu 20. Chọn câu ***sai***:

A. Qua phép quay $Q_{(O;\ \varphi)}$ điểm O biến thành chính nó.
B. Phép đối xứng tâm O là phép quay tâm O, góc quay -180^0
C. Phép quay tâm O góc quay 90^0 và phép quay tâm O góc quay -90^0 là hai phép quay giống nhau.
D. Phép đối xứng tâm O là phép quay tâm O, góc quay 180^0

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(3;0). Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $Q_{(O;\frac{\pi}{2})}$

A. A'(0; –3); **B.** A'(0; 3); **C.** A'(–3; 0); **D.** A'($2\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$).

Câu 22. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(3;0). Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $Q_{(O;-\frac{\pi}{2})}$

A. A'(–3; 0); **B.** A'(3; 0); **C.** A'(0; –3); **D.** A'($-2\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$).

Câu 23. Khẳng định nào sau đây **đúng** về phép quay:
A. Phép biến hình biến điểm O thành điểm O và điểm M khác điểm O thành điểm M$^/$ sao cho (OM; OM$^/$) = φ được gọi là phép quay tâm O với góc quay φ.
B. Nếu $Đ_{(O;\ 90^0)}$: M $\rightarrow$ M$^/$ (M$\neq$ O) thì OM$^/$ $\perp$ OM
C. Phép quay không phải là một phép dời hình
D. Nếu $Đ_{(O;\ 90^0)}$: M $\rightarrow$ M$^/$ thì OM$^/$ > OM

Câu 24. Cho tam giác đều ABC hãy xác định góc quay của phép quay tâm A biến B thành điểm C:
A. $\varphi = 30^0$ **B.** $\varphi = 90^0$ **C.** $\varphi = -120^0$ **D.** $\varphi = -60^0$ hoặc $\varphi = 60^0$

Câu 25. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm M(2; 0) và điểm N(0; 2). Phép quay tâm O biến điểm M thành điển N, khi đó góc quay của nó là:
A. $\varphi = 30^0$ **B.** $\varphi = 30^0$ hoặc $\varphi = 45^0$ **C.** $\varphi = 90^0$ **D.** $\varphi = 90^0$ hoặc $\varphi = 270^0$

5. Phép dời hình và hình bằng nhau
Nhân biết

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(2; 1). Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm O và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ = (2; 3) biến điểm M thành điểm nào trong các điểm sau?
A. (1; 3) **B.** (2; 0) **C.** (0; 2) **D.** (4; 4)

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Oy và phép tịnh tiến theo vectơ
$\vec{v}$ = (2; 3) biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau?
A. $x^2 + y^2 = 4$ **B.** $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 4$

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$**D.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm O và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (3; 2)$ biến đường thẳng d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. $3x + 3y - 2 = 0$ **B.** $x - y + 2 = 0$ **C.** $x + y + 2 = 0$ **D.** $x + y - 3 = 0$

Câu 4: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến sẽ được một phép tịnh tiến.

B. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục sẽ được một phép đối xứng trụ**C.**

C. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua tâm và phép đối xứng trục sẽ được một phép đối xứng qua tâm.

D. Thực hiện liên tiếp phép quay và phép tịnh tiến sẽ được một phép tịnh tiến.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Có một phép tịnh tiến theo vectơ khác không biến mọi điểm thành chính nó.

B. Có một phép đối xứng trục biến mọi điểm thành chính nó.

C. Có một phép đối xứng tâm biến mọi điểm thành chính nó.

D. Có một phép quay biến mọi điểm thành chính nó.

Câu 6: Hãy tìm khẳng định ***sai***:

A. Phép tịnh tiến là phép dời hình. **B.** Phép đồng nhất là phép dời hình

C. Phép quay là phép dời hình **D.** Phép vị tự là phép dời hình

Câu 7: Trong các phép biến hình sau, phép nào không phải là phép dời hình ?

A. Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng B. Phép vị tự tâm I(1; 2) tỉ số –1

C. Phép đồng nhất D. Phép đối xứng trục

Câu 8: Cho hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau. Hỏi hình tạo bởi hai đường thẳng d, d' có bao nhiêu trục đối xứng:

A. 1 B. 2 C. 4 D. Vô số

Câu 9: Cho hai đường thẳng d và d' song song với nhau. Hỏi hình tạo bởi hai đường thẳng d, d' có bao nhiêu trục đối xứng:

A. 1 B. 2 C. 4 D. Vô số

Câu 10: Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Hỏi có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng d thành đường thẳng d':

A. 1 B. 2 C. 4 D. Vô số

Câu 11: Cho hai đường thẳng d và d' song song với nhau. Hỏi có bao nhiêu phép vị tự biến đường thẳng d thành đường thẳng d'.

A. 1 B. 2 C. 4 D.Vô số

Câu 12: Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Hỏi có bao nhiêu phép vị tự biến hình tạo bởi hai đường thẳng d và d' thành chính nó.

A. 1 B. 2 C. 0 D. Vô số

Câu 13: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M $(-3\ ;\ 2)$. Ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(2;\ -1)$ là điểm có toạ độ :

A. $(5;\ -3)$ B. $(-5; 3)$ C. $(-1; 1)$ D. $(1;\ -1)$

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M' $(-3\ ;\ 2)$ là ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc -90^0 thì điểm M có toạ độ là:

A. $(2;\ -3)$ B. $(2; 3)$ C. $(-2;\ -3)$ D. $(3;\ -2)$

Thông hiểu

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm M $(-3\ ;\ 2)$ và M'$(3;\ -2)$. M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình nào sau đây:

A. Phép quay tâm O góc -90^0

B. Phép quay tâm O góc 90^0

C. Phép đối xứng trục tung

D. Phép quay tâm O góc -180^0

Câu 16: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 1 = 0$. Để phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến đường thẳng d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là vectơ nào trong các vectơ sau:

A. $\vec{v} = (2; 1)$

B. $\vec{v} = (2; -1)$

C. $\vec{v} = (1; 2)$

D. $\vec{v} = (-1; 2)$

Câu 17: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình: $3x - 2y - 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O góc 180^0 có phương trình :

A. $3x + 2y + 1 = 0$

B. $-3x + 2y - 1 = 0$

C. $3x + 2y - 1 = 0$

D. $3x - 2y - 1 = 0$

Câu 18:Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình : $3x - 2y + 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (2; -1)$ có phương trình :

A. $3x + 2y + 1 = 0$

B. $-3x + 2y - 1 = 0$

C. $3x + 2y - 1 = 0$

D. $3x - 2y - 1 = 0$

Câu 19:Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình : $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (2; -1)$ có phương trình :

A. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

B. $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 9 = 0$

C. $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 16 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$

Vận dụng

Câu 20: Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{u} = (3;1)$ và đường thẳng d: $2x - y = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O;90^\circ)}$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ là đường thẳng d' có phương trình:

A. $x + 2y - 5 = 0$.

B. $x + 2y + 5 = 0$.

C. $2x + y - 7 = 0$.

D. $2x + y + 7 = 0$.

Câu 21:Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình : $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (2; -2)$có phương trình :

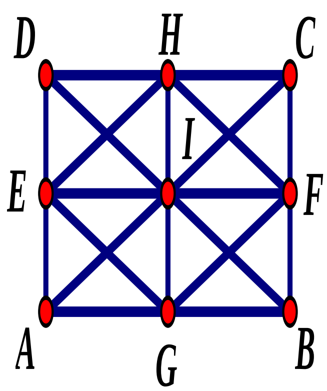
A. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

B. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$

C. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 9$

D. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$

Câu 22: Cho hình vuông ABCD (như hình vẽ).



a) Phép biến hình nào sau đây biến tam giác DEI thành tam giác CFI

A. Phép quay tâm H góc 90^o
B. Phép quay tâm H góc -90^o
C. Phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{EI}$
D. Phép quay tâm I góc (ID,IC)

b) Phép quay tâm I góc -90^o biến tam giác HIF thành tam giác nào sau đây:
A. ΔFIG B. ΔEIH C. ΔIFC D. ΔIED

Câu 23:Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O góc 90^o có phương trình :
A. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ B. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$
C. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ D. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 9$

Câu 24: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d: $x - 2y + 4 = 0$. Để phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là vectơ nào trong các vectơ sau :
A. $\vec{v} = (2;1)$ B. $\vec{v} = (2;-1)$ C. $\vec{v} = (1;2)$ D. $\vec{v} = (-1;2)$

Câu 25:Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{v} = (1;-1)$ và điểm M(2;1) ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là điểm có tọa độ nào trong các tọa độ sau
A.(0 ; 3) B.(3;0) C.(1 ; 2) D.(2;1)

Buổi 3

I Phép vị tự:

a) ĐN : Cho điểm I cố đinh và một số $k \neq 0$. Phép vị tự tâm I tỉ số k .

Kí hiệu : $V_{(I,k)}$ hoặc V_I^k, là phép biến hình biến môi điểm M thành điểm M′ sao cho $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$.

b) Biểu thức tọa độ : Cho $I(x_o;y_o)$ và phép vị tự $V_{(I,k)}$.

$$M(x;y) \xmapsto{V_{(I,k)}} M' = V_{(I,k)}(M) = (x';y') \text{ thì } \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_o \\ y' = ky + (1-k)y_o \end{cases}$$

c) Tính chất :

1. $M' = V_{(I,k)}(M)$, $N' = V_{(I,k)}(N)$ thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, $M'N' = |k|.MN$
2. Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của các điểm tương ứng .
3. Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho .
4. Biến một tia thành tia .
5. Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên |k| .
6. Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó .
7. Đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính R′= |k|.R .
8. Biến góc thành góc bằng nó .

II. Phép đồng dạng:

a) ĐN : Phép biến hình F gọi là phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) nếu với hai điểm bất kì M , N và ảnh M′, N′ là ảnh của chúng , ta có M′N′= k.MN .

b) ĐL : Mọi phép đồng dạng F tỉ số k (k> 0) đều là hợp thành của một phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình D.

c) Hệ quả(Tính chất) Phép đồng dạng :

1. Biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng (và bảo toàn thứ tự) .
2. Biến đường thẳng thành đường thẳng .
3. Biến tia thành tia .
4. Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên k (k là tỉ số đồng dạng) .
5. Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó (tỉ số k).
6. Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính R′= k.R .
7. Biến góc thành góc bằng nó .

d) Hai hình đồng dạng :

ĐN : Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia .

H đồng dạng G $\Leftrightarrow$ $\exists$ F đồng dạng : $H \xmapsto{F} G$

e) Các phép đồng dạng gồm: Nhóm phép dời hình (Phép đồng nhất, phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép quay) và Phép vị tự.

Lưu ý: Kết quả của việc thực hiện liên tiếp các phép đồng dạng, cho ta một phép đồng dạng.

Bài tập tự luận:

Phép vị tự:

Dạng bài tập và PP giải:

◆ TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐIỂM – MỘT ĐƯỜNG QUA PHÉP VỊ TỰ

PP: Sử dụng định nghĩa:

* Sử dụng đẳng thức véc tơ của phép vị tự và tính chất bằng nhau của hai véc tơ , ta sẽ tìm được kết quả .

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (O) : $(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Tìm phương trình đường tròn (O’) là ảnh của (O) qua phép vị tự tâm O tỉ số k=2 .

Giải

Tâm I của (O) có tọa độ I(1;1) bán kính R=2 . Nếu (O’) có tâm là J và bán kính R’ là ảnh của (O) qua phép vị tự tâm O ta có đẳng thức véc tơ :

$\overrightarrow{OJ}=2\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-0=2.1 \\ y'-0=2.1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=2 \\ y'=2 \end{cases} \leftrightarrow J(2;2)$. R’=2R=2.2=4.

Vậy (O’) : $(x-2)^2+(y-2)^2=16$

Ví dụ 2. (Bài 1.23-BTHH11-CB-tr33)
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng d : 2x+y-4=0.
a/ Viết phương trình của đường thẳng d’ là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số k=3.
b/ Viết phương trình đường thẳng d’’ là ảnh của d qua phép vị tự tâm I(-1;2) tỉ số k=-2

Giải

a/Gọi M(x;y) là một điểm bất kỳ thuộc d và M’(x’;y’) là ảnh của M qua phép vị tự tâm O tỉ số k=3 . Nếu M chạy trên d thì M’ chạy trên đường thẳng d’ .

Theo tính chất của phép vị tự : $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{3} \\ y = \dfrac{y'}{3} \end{cases}$.

Thay (x;y) vào d: $2\left(\dfrac{x'}{3}\right) + \left(\dfrac{y'}{3}\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x' + y' - 12 = 0$. Vậy d': 2x+y-12=0 .

b/ Tương tự như trên ta có : $\overrightarrow{IM'} = -2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+1 = -2(x+1) \\ y'-2 = -2(y-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\dfrac{x'+1}{-2}\right) - 1 = \dfrac{x'+3}{-2} \\ y = \left(\dfrac{y'-2}{-2}\right) + 2 = \dfrac{y'-6}{-2} \end{cases}$.

Thay vào d : $2\left(\dfrac{x'+3}{-2}\right) + \left(\dfrac{y'-6}{-2}\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x' + y' + 2 = 0$. Do đó d'': 2x+y+2=0 .

Ví dụ 3. (Bài 1.24-tr33-BTHH11).
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$. Hãy viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm I(1;2) tỉ số k=-2.

Giải

Gọi O(3;-1) là tâm của (C) có bán kính R=3. Đường tròn (C') có tâm J(x;y) bán kính R' là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I tỉ số k=-2 . Theo tính chất của phép vị tự ta có :

$\overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{IO} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -2(3-1) \\ y-2 = -2(-1-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow J = (-3;8)$. R'=2R=2.3=6 .

Vậy (C') : $(x+3)^2 + (y-8)^2 = 36$.

◆ TÌM ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA MỘT PHÉP VỊ TỰ

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa và các tính chất của phép vị tự . Từ định nghĩa nếu tâm vị tự là I(a;b) , điểm M(x;y); điểm M'(x';y') là ảnh của M của phép vị tự tâm I tỉ số k, thì ta có :

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-a = k(x-a) \\ y'-b = k(y-b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = k(x-a)+a \\ y' = k(y-b)+b \end{cases}$ (*) .

Chính là biểu thức tọa độ của phép vị tự tâm I tỉ số vị tự là k .

Vận dụng:

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng d: 3x+2y-6=0 . Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm I(1;2) tỉ số vị tự k=-2 ?

Giải

Gọi M(x;y) thuộc d ,M'(x';y') là một điểm bát kỳ thuộc d' thì theo biểu thức tọa độ của phép vị tự ta có :

$\begin{cases} x'-1 = -2(x-1) \\ y'-2 = -2(y-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'-1}{-2} + 1 = \dfrac{x'-3}{-2} \\ y = \dfrac{y'-2}{-2} + 2 = \dfrac{y'-6}{-2} \end{cases}$.

Thay vào phương trình của đường thẳng d: $3\left(\frac{x'-3}{-2}\right)+2\left(\frac{y'-6}{-2}\right)-2=0 \Leftrightarrow 3x'+2y'-9=0$

Do vậy d': 3x+2y-9=0 .

Ví dụ 2 .(Bài 1.23-tr33-BTHH11CB)
Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d: 2x+y-4=0
a/ Hãy viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm O tỉ số vị tự k=3 .
b/ Hãy viết phương trình đường thẳng d'' là ảnh của d qua phép vị tự tâm I (-1;2) tỉ số vị tự k=-2

Giải

a/ Từ công thức tọa độ : $\begin{cases} x'-0=3(x-0) \\ y'-0=3(y-0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{x'}{3} \\ y=\frac{y'}{3} \end{cases} \Rightarrow 2\left(\frac{x'}{3}\right)+\left(\frac{y'}{3}\right)-4=0 \Leftrightarrow 2x'+y'-12=0$

Do đó đường thẳng d': 2x+y-12=0 .

b/ Tương tự :

$\begin{cases} x'+1=-2(x+1) \\ y'-2=-2(y-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{x'+1}{-2}-1=\frac{x'+3}{-2} \\ y=\frac{y'-2}{-2}+2=\frac{y'-6}{-2} \end{cases} \Rightarrow 2\left(\frac{x'+3}{-2}\right)+\left(\frac{y'-6}{-2}\right)-4=0 \Leftrightarrow 2x'+y'+8=0$.

Do đó đường thẳng d'': 2x+y+8=0 .

Ví dụ 3. (Bài 1.24-tr33-BTHH11-CB)
Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C): $(x-3)^2+(y+1)^2=9$. Hãy viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm I(1;2) tỉ số k=-2 .

Giải

Đường tròn (C) có tâm O(3;-1) bán kính R=3. Gọi O' (x';y') là tâm của (C') ,R' là bán kính của (C') . Ta có tọa độ của O' thỏa mãn biểu thực tọa độ của phép vị tự :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-1=-2(x-1) \\ y'-2=-2(y-2) \\ \frac{R'}{R}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{x'-1}{-2}+1=\frac{x'-3}{-2} \\ y=\frac{y'-2}{-2}+2=\frac{y'-4}{-2} \\ R'=2.3=6 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x'-3}{-2}-3\right)^2+\left(\frac{y'-4}{-2}+1\right)^2=9$$

$\Leftrightarrow (x'+3)^2+(y'-6)^2=36$. Vậy (C') : $\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-6)^2=36$

<u>Bài tập trắc nghiệm:</u>

1 Phép vị tự

Nhận biết

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(–2; 4). Phép vị tự tâm O tỉ số k = –2 biến điểm M thành điểm nào trong các điểm sau?

A. (–3; 4) **B.** (–4; –8) **<u>C</u>.** (4; –8) **D.** (4; 8)

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình 2x + y – 3 = 0. Phép vị tự tâm O tỉ số k = 2 biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau?

A. 2x + y + 3 = 0 **<u>B.</u>** 2x + y – 6 = 0 **C.** 4x – 2y – 3 = 0 **D.** 4x + 2y – 5 = 0

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình x + y – 2 = 0. Phép vị tự tâm O tỉ số k = – 2 biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau ?

A. 2x + 2y = 0 **B.** 2x + 2y – 4 = 0 **C.** x + y + 4 = 0 **D.** x + y – 4 = 0

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Phép vị tự tâm O tỉ số k = – 2 biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau ?

A. $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$ **B.** $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$

C. $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 16$ **D.** $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 16$

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. Phép vị tự tâm O tỉ số k = 2 biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau ?

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$ **B.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

C. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$ **D.** $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 16$

Câu 6: Phép vị tự tâm O tỉ số k (k ≠ 0) biến mỗi điểm M thành điểm M’ sao cho :

A. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$ **B.** $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM'}$ **C.** $\overrightarrow{OM} = -k\overrightarrow{OM'}$ **D.** $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$

Câu 7: Chọn câu đúng:

A. Qua phép vị tự có tỉ số k ≠ 1, đường thẳng đi qua tâm vị tự sẽ biến thành chính nó.

B. Qua phép vị tự có tỉ số k ≠ 0, đường tròn đi qua tâm vị tự sẽ biến thành chính nó.

C. Qua phép vị tự có tỉ số k ≠ 1, không có đường tròn nào biến thành chính nó.

D. Qua phép vị tự $V_{(O,\,1)}$ đường tròn tâm O sẽ biến thành chính nó.

Thông hiểu

Câu 8: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M’và N’ thì:

A. $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và M’N’ = –kMN **B.** $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và M’N’ = |k|MN

C. $\overrightarrow{M'N'} = |k|\overrightarrow{MN}$ và M’N’ = kMN **D.** $\overrightarrow{M'N'} // \overrightarrow{MN}$ và M’N’ = $\frac{1}{2}$MN

Câu 9: Xét các phép biến hình sau:

(I) Phép đối xứng tâm. (II) Phép đối xứng trục

(III) Phép đồng nhất. (IV). Phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$

Trong các phép biến hình trên:

A. Chỉ có (I) là phép vị tự. **B.** Chỉ có (I) và (II) là phép vị tự.

C. Chỉ có (I) và (III) là phép vị tự. **D.** Tất cả đều là những phép vị tự.

Câu 10: Hãy tìm khẳng định ***sai*** :

A. Nếu một phép vị tự có hai điểm bất động thì mọi điểm của nó đều bất động.

B. Nếu một phép vị tự có hai điểm bất động thì nó là một phép đồng nhất.

C. Nếu một phép vị tự có một điểm bất động khác với tâm vị tự của nó thì phép vị tự đó có tỉ số k = 1.

D. Nếu một phép vị tự có hai điểm bất động thì chưa thể kết luận được rằng mọi điểm của nó đều bất động.

Câu 11: Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Gọi A’, B’, C’ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC. Khi đó phép vị tự nào biến tam giác A’B’C’ thành tam giác ABC ?

A. Phép vị tự tâm G, tỉ số 2. **B.** Phép vị tự tâm G, tỉ số –2.
C. Phép vị tự tâm G, tỉ số –3. **D.** Phép vị tự tâm G, tỉ số 3.

Câu 12: Cho phép vị tự tâm O tỉ số k và đường tròn tâm O bán kính R. Để đường tròn (O) biến thành chính đường tròn (O), tất cả các số k phải chọn là :

A. 1 **B.** R **C.** 1 và –1 **D.** –R

Câu 13: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***sai***?

A. Có một phép vị tự biến thành chính nó.
B. Có vô số phép vị tự biến mọi điểm thành chính nó
C. Thực hiện liên tiếp hai phép vị tự sẽ được một phép vị tự.
D. Thực hiện liên tiếp hai phép vị tự tâm I sẽ được một phép vị tự tâm I.

Câu 14: Cho hình thang ABCD, với $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi V là phép vị tự biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{CD}$. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào đúng:

A. V là phép vị tự tâm I tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ **B.** V là phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{1}{2}$
C. V là phép vị tự tâm I tỉ số $k = -2$ **D.** V là phép vị tự tâm I tỉ số $k = 2$

Vận dụng

Câu 15: Cho tam giác ABC, với G là trọng tâm tam giác, D là trung điểm của BC. Gọi V là phép vị tự tâm G biến điển A thành điểm D. Khi đó V có tỉ số k là:

A. $k = \frac{3}{2}$ **B.** $k = -\frac{3}{2}$ **C.** $k = \frac{1}{2}$ **D.** $k = -\frac{1}{2}$

Câu 16: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho phép vị tự tâm I(2; 3) tỉ số k = –2 biến điểm M(–7;2) thành M' có tọa độ là:

A. (–10; 2) **B.** (20; 5) **C.** (18; 2) **D.** (–10; 5)

Câu 17: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho hai điểm M(4; 6) và M'(–3; 5). Phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến điểm M thành M'. Khi đó tọa độ điểm I là:

A. I(–4; 10) **B.** I(11; 1) **C.** I(1; 11) **D.** I(–10; 4)

Câu 18: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho hai điểm A(1;2), B(–3; 4) và I(1; 1). Phép vị tự tâm I tỉ số $k = -\frac{1}{3}$ biến điểm A thành A', biến điểm B thành B'. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng:

A. $\overrightarrow{A'B'} = \left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$ **B.** $\overrightarrow{A'B'} = \left(\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$ **C.** $\left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \sqrt{203}$ **D.** $A'\left(1;-\frac{2}{3}\right), B'\left(\frac{7}{3};0\right)$

Câu 19: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho ba điểm I(–2; –1), M(1; 5) và M'(–1; 1). Giả sử V phép vị tự tâm I tỉ số k biến điểm M thành M'. Khi đó giá trị của k là:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** 3 **D.** 4

Câu 20: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho đường thẳng Δ: x + 2y – 1 = 0 và điểm I(1;0). Phép vị tự tâm I tỉ số k tùy ý biến đường thẳng Δ thành $\Delta^{/}$ có phương trình là:

A. x – 2y + 3 = 0 **B.** x + 2y +1 = 0 **C.** 2x – y + 1 = 0 **D.** x + 2y -1 = 0

Câu 21: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt có phương trình : x – 2y +1 = 0 và x – 2y +4 = 0, điểm I(2 ; 1). Phép vị tự tâm I tỉ số k biến đường thẳng Δ_1 thành Δ_2 khi đó giá trị của k là :

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 22: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho đường tròn (C) có phương trình:$(x–1)^2 +(y–5)^2 = 4$ và điểm I(2; –3). Gọi $(C^{/})$ là ảnh của (C) qua phép vị tự V tâm I tỉ số k = –2. khi đó $(C^{/})$ có phương trình là:

A. $(x–4)^2 +(y+19)^2 = 16$ **B.** $(x–6)^2 +(y+9)^2 = 16$
C. $(x+4)^2 +(y–19)^2 = 16$ **D.** $(x+6)^2 +(y+9)^2 = 16$

Câu 23: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho hai đường tròn (C) và $(C^{/})$, trong đó $(C^{/})$ có phương trình :$(x+2)^2 +(y+1)^2 = 9$. Gọi V là phép vị tự tâm I(1 ; 0) tỉ số k = 3 biến đường tròn (C) thành $(C^{/})$. Khi đó phương trình của (C) là:

A. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=1$ **B.** $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=9$ **C.** $(x+8)^2+(y+3)^2=81$ **D.** $x^2 + y^2 = 1$

Câu 24: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho A(1; 2), B(–3; 1). Phép vị tự tâm I(2; –1) tỉ số k=2 biến điểm A thành $A^{/}$, phép đối xứng tâm B biến $A^{/}$ thành $B^{/}$. tọa độ điểm $B^{/}$ là:

A. (0; 5) **B.** (5; 0) **C.** (–6; –3) **D.** (–3; –6)

Câu 25: Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm M $(-3\,;2)$ và M’$(3;\,-2)$. M’ là ảnh của điểm M qua phép biến hình nào sau đây:

A. Phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (1; 1)$ B. Phép quay tâm O góc -90^0

C. Phép vị tự tâm O tỉ số -1 D. Phép vị tự tâm $I\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ tỉ số -2

2 Phép đồng dạng

Câu 1: Trong mp Oxy, cho đường tròn (C)$(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O, tỉ số k = 1/2 và phép quay tâm O góc 90^o biến (C) thành đường tròn nào sau đây:

A. $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ B. $(x-2)^2+(y-2)^2=1$

C. $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ D. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

Câu 2: Cho M(2;4). Thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $\mathbf{k=\frac{1}{2}}$ và phép đối xứng qua trục Oy sẽ biến M thành điểm nào?

A. (1;2) **B.** (-2;4)
C. (-1;2) **D.** (1;-2)

Câu 3: Ảnh của điểm P(-1 , 3) qua phép đồng dạng cĩ được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O(0, 0) gĩc quay 180^0 và phép vị tự tâm O(0,0) tỉ số 2 là.

A. M(2, -6) B. N(-2, 6) C. E(6, 2) D. F(-6, -2).

Câu 4: Cho đường tron (C) co phương trình (x− 1)^2 +(y+2)^2 =4. qua phép đồng dạng của phép đối xứng trụcOy và phép tịnh tiến theo v (2;1) biến (C) thành đường trịn nào?

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ **B.** $x^2+y^2=4$ **C.** $(x-2)^2+(y-6)^2=4$
D. $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

Câu 5: Cho đường thẳng d có phương trình x+y− 2 =0. qua phép đồng dạng của phép đối xứng tâm O(0;0) và phép tịnh tiến theo $\vec{v}\,(3;2)$ biến d thành đường thẳng nào?

A. x+y− 4 =0 **B.** 3x+3y− 2=0 **C.** x+y+2 =0 **D.** x+y−3=0

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(2; 4). Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số k = $\frac{1}{2}$ và phép đối xứng qua trục Oy sẽ biến M thành điểm nào trong các điểm sau?

A. (1; 2) **B.** (–2; 4) **C.** (–1; 2) **D.** (1; –2)

Nhân biết

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình 2x – y = 0. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số k = –2 và phép đối xứng qua trục Oy sẽ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. 2x – y = 0 **B.** 2x + y = 0 **C.** 4x – y = 0 **D.** 2x + y – 2 = 0

Câu 8: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số k = $\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc 90^0 sẽ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn sau?

A. $(x-2)^2+(y-2)^2=1$**B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$
C. $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ **D.** $(x+1)^2+(y-1)^2=1$

Câu 9: Mọi phép dời hình cũng là phép đồng dạng tỉ số

A. k = 1 **B.** k = –1 **C.** k = 0 **D.** k = 3

Câu 10: Các phép biến hình biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó có thể kể ra là:

A. Phép vị tự. **B.** Phép đồng dạng, phép vị tự.
C. Phép đồng dạng, phép dời hình, phép vị tự. **D.** Phép dời dình, phép vị tự.

Câu 11: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho A(1; 2), B(–3; 1). Phép vị tự tâm I(2; –1) tỉ số k=2 biến điểm A thành A$^/$, phép đối xứng tâm B biến A$^/$ thành B$^/$. tọa độ điểm B$^/$ là:

A. (0; 5) **B.** (5; 0) **C.** (–6; –3) **D.** (–3; –6)

Câu 12: Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào ***sai***?

A. Phép dời là phép đồng dạng tỉ số k = 1

B. Phép đồng dạng biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

C. Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$

D. Phép đồng dạng bảo toàn độ lớn gó**C.**

Câu 13: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho A(–2; –3), B(4; 1). phép đồng dạng tỉ số k = $\frac{1}{2}$ biến điểm A thành A/, biến điểm B thành B/. Khi đó độ dài A/B/ là:

A. $\frac{\sqrt{52}}{2}$ **B.** $\sqrt{52}$ **C.** $\frac{\sqrt{50}}{2}$ **D.** $\sqrt{50}$

Câu 14: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho đường thẳng d: x – 2y + 1 = 0, Phép vị tự tâm I(0; 1) tỉ số k= –2 biến đường thẳng d thành đường thẳng d/. phép đối xứng trục Ox biến đường thẳng d/ thành đường thẳng d_1. Khi đó phép đồng dạng biến đường thẳng d thành d_1 có phương trình là:

A. 2x – y + 4 = 0 **B.** 2x + y + 4 = 0 **C.** 2x – 2y + 4 = 0 **D.** 2x + 2y + 4 = 0

Câu 15: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm I(3; 2), bán kính R = 2. Gọi (C/) là ảnh của (C) qua phép đồng dạng tỉ số k = 3. khi đó trong các mệnh đề sau mệnh đề nào ***sai***:

A. (C/) có phương trình $(x – 3)^2 + (y – 2)^2 = 36$

B. (C/) có phương trình $x^2 + y^2 – 2y – 35 = 0$

C. (C/) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x – 36 = 0$

D. (C/) có bán kính bằng 6.

Thông hiểu

Câu 16: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho 2 đường tròn (C) và (C/) có phương trình : $x^2 + y^2 – 4y – 5 = 0$ và $x^2 + y^2 – 2x + 2y – 14 = 0$. Gọi (C/) là ảnh của (C) qua phép đồng dạng tỉ số k, khi đó giá trị k là:

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{9}{16}$ **D.** $\frac{16}{9}$

Câu 17: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai Elip (E_1) và (E_2) lần lượt có phương trình là: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ và $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. Khi đó ($E_2$) là ảnh của ($E_1$) qua phép đồng dạng tỉ số k bằng:

A. $\frac{5}{9}$ **B.** $\frac{9}{5}$ **C.** $k=-1$ **D.** k = 1

Câu 18: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho phép đồng dạng biến đường thẳng d: x+y–1=0 thành đường thẳng d/: 2008x + 2007y + 2006 = 0 là phép đồng dạng tỉ số k bằng:

A. $\frac{2008}{2007}$ **B.** 1 **C.** $\frac{2007}{2008}$ **D.** $\frac{2006}{2007}$

Câu 19: Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào ***sai***?

A. Phép dời là phép đồng dạng tỉ số k = 1

B. Phép đồng dạng biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

C. Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$

D. Phép đồng dạng bảo toàn độ lớn gó**C.**

Câu 20: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho A(–2; –3), B(4; 1). phép đồng dạng tỉ số k = $\frac{1}{2}$ biến điểm A thành A/, biến điểm B thành B/. Khi đó độ dài A/B/ là:

A. $\frac{\sqrt{52}}{2}$ **B.** $\sqrt{52}$ **C.** $\frac{\sqrt{50}}{2}$ **D.** $\sqrt{50}$

Câu 21: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho đường thẳng d: x – 2y + 1 = 0, Phép vị tự tâm I(0; 1) tỉ số k= –2 biến đường thẳng d thành đường thẳng d/. phép đối xứng trục Ox biến đường thẳng d/ thành đường thẳng d_1. Khi đó phép đồng dạng biến đường thẳng d thành d_1 có phương trình là:

A. 2x – y + 4 = 0 **B.** 2x + y + 4 = 0 **C.** 2x – 2y + 4 = 0 **D.** 2x + 2y + 4 = 0

Câu 22: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm I(3; 2), bán kính R = 2. Gọi (C/) là ảnh của (C) qua phép đồng dạng tỉ số k = 3. khi đó trong các mệnh đề sau mệnh đề nào ***sai***:

A. (C/) có phương trình $(x – 3)^2 + (y – 2)^2 = 36$

B. (C/) có phương trình $x^2 + y^2 – 2y – 35 = 0$

C. (C/) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x – 36 = 0$

D. (C/) có bán kính bằng 6.

Vận dụng (câu 23-25 và 1-5)

Câu 23: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho 2 đường tròn (C) và (C/) có phương trình : $x^2 + y^2 – 4y – 5 = 0$ và $x^2 + y^2 – 2x + 2y – 14 = 0$. Gọi (C/) là ảnh của (C) qua phép đồng dạng tỉ số k, khi đó giá trị k là:

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{9}{16}$ **D.** $\frac{16}{9}$

Câu24: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai Elip (E_1) và (E_2) lần lượt có phương trình là: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ và $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. Khi đó ($E_2$) là ảnh của ($E_1$) qua phép đồng dạng tỉ số k bằng:

A. $\frac{5}{9}$ **B.** $\frac{9}{5}$ **C.** $k=-1$ **D.** k = 1

Câu 25: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho phép đồng dạng biến đường thẳng d: x+y–1=0 thành đường thẳng d/: 2008x + 2007y + 2006 = 0 là phép đồng dạng tỉ số k bằng:

A. $\frac{2008}{2007}$ **B.** 1 **C.** $\frac{2007}{2008}$ **D.** $\frac{2006}{2007}$

Ma trận đề kiểm tra

STT	CÁC CHỦ ĐỀ	MỨC ĐỘ NHẬN THỨC				TỔNG SỐ CÂU HỎI
		NHẬN BIẾT	THÔNG HIỂU	VẬN DỤNG THẤP	VẬN DUNG CAO	
1	Phép tịnh tiến	2	1	1		4
2	Phép đối xứng trục	2	1			3
3	Phép đối xứng tâm	1	2			3
4	Phép Quay	1	2	1		4
5	Phép dời hình và hai hình bằng nhau		2	1	1	4
6	Phép vị tự	1	1	1	1	4
7	Phép đồng dạng			3		3
	TỔNG	7	8	7	2	25

IV. Đề bài:

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(2;5)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;2)$ biến A thành điểm có tọa độ là:

A. $(3;1)$. **B.** $(1;6)$. **C.** $(3;7)$. **D.** $(4;7)$.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(2;5)$. Hỏi A là ảnh của điểm nào trong các điểm sau qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;2)$?

A. $(3;1)$. **B.** $(1;6)$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của đường tròn: $(x-2)^2+(y-1)^2=16$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;3)$ là đường tròn có phương trình:

A. $(x-2)^2+(y-1)^2=16$. **B.** $(x+2)^2+(y+1)^2=16$.

C. $(x-3)^2+(y-4)^2=16$. **D.** $(x+3)^2+(y+4)^2=16$.

Câu 4: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy .Cho điểm $M(-10;1)$ và $M'(3;8)$. Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến điểm M thành điểm M', khi đó tọa độ của véctơ $\vec{v}$ là ?

A. $\vec{v}=(-13;7)$. **B.** $\vec{v}=(13;-7)$. **C.** $\vec{v}=(13;7)$. **D.** $\vec{v}=(-13;-7)$.

Câu 5: Hình vuông có mấy trục đối xứng?

A. 1 B. 2 C. 4 D. vô số

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2;3)$. Hỏi trong bốn điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép đối xứng trục Ox?

A. $(3;2)$. **B.** $(2;-3)$. **C.** $(3;-2)$. **D.** $(-2;3)$.

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol $(P): y^2=x$. Hỏi parabol nào sau đây là ảnh của parabol (P) qua phép đối xứng trục Oy ?

A. $y^2 = x$. **B.** $y^2 = -x$. **C.** $x^2 = -y$. **D.** $x^2 = y$.

Câu 8: Cho hai điểm $I(1;2)$ và $M(3;-1)$. Hỏi điểm M' có tọa độ nào sau đây là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I ?

A. $(2;1)$ **B.** $(-1;5)$ **C.** $(-1;3)$ **D.** $(5;-4)$

Câu 9: Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường thẳng d có phương trình $x+y-2=0$, tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm $I(1;2)$.

A. $x+y+4=0$. **B.** $x+y-4=0$. **C.** $x-y+4=0$ **D.** $x-y-4=0$.

Câu 10: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ (Oxy). Cho phép đối xứng tâm $I\left(\frac{1}{2};2\right)$ biến đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=4$ thành đường tròn (C') có phương trình là:

A. $(x+1)^2+(y-2)^2=4$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2=4$. **D.** $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Câu 11 : Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của điểm $M(-6;1)$ qua phép quay $Q_{(O,90^o)}$ là:

A. $M'(-1;-6)$. B. $M'(1;6)$. C. $M'(-6;-1)$. D. $M'(6;1)$.

Câu 12 : Trong mặt phẳng Oxy, qua phép quay $Q_{(O,-135^o)}$, $M'(3;2)$ là ảnh của điểm :

A. $M\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$. B. $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

C. $M\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. D. $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Câu 13: Chọn câu **sai** trong các câu sau:

A. Qua phép quay $Q_{(O;\varphi)}$ điểm O biến thành chính nó.

B. Phép đối xứng tâm O là phép quay tâm O, góc quay -180°.

C. Phép quay tâm O góc quay 90° và phép quay tâm O góc quay -90° là hai phép quay giống nhau.

D. Phép đối xứng tâm O là phép quay tâm O, góc quay 180°.

Câu 14: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm M(2; 0) và điểm N(0; 2). Phép quay tâm O biến điểm M thành điển N, khi đó góc quay của nó là:

A. $\varphi = 30^0$ **B.** $\varphi = 30^0$ hoặc $\varphi = 45^0$ **C.** $\varphi = 90^0$ **D.** $\varphi = 90^0$ hoặc $\varphi = 270^0$

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(2; 1). Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm O và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ = (2; 3) biến điểm M thành điểm nào trong các điểm sau?

A. (1; 3) **B.** (2; 0) **C.** (0; 2) **D.** (4; 4)

Câu 16 : Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình x + y – 2 = 0. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm O và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ = (3; 2) biến đường thẳng d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. 3x + 3y – 2 = 0 **B.** x – y + 2 = 0 **C.** x + y + 2 = 0 **D.** x + y – 3 = 0

Câu 17: Trong các phép biến hình sau, phép nào không phải là phép dời hình ?

A. Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng
B. Phép vị tự tâm I(1; 2) tỉ số –1
C. Phép đồng nhất
D. Phép đối xứng trục

Câu 18: Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{u} = (3;1)$ và đường thẳng d: 2x – y = 0. Ảnh của đường thẳng d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O;90^o)}$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ là đường thẳng d' có phương trình:

A. x + 2y – 5 = 0.
B. x + 2y + 5 = 0.
C. 2x + y – 7 = 0.
D. 2x + y + 7 = 0.

Câu 19: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(–2; 4). Phép vị tự tâm O tỉ số k = –2 biến điểm M thành điểm nào trong các điểm sau?

A. (–3; 4) **B.** (–4; –8) **C.** (4; –8) **D.** (4; 8)

Câu 20: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình 2x + y – 3 = 0. Phép vị tự tâm O tỉ số k = 2 biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau?

A. 2x + y + 3 = 0 **B.** 2x + y – 6 = 0 **C.** 4x – 2y – 3 = 0 **D.** 4x + 2y – 5 = 0

Câu 21 : Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x – 1)^2 + (y – 1)^2 = 4$. Phép vị tự tâm O tỉ số k = 2 biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau?

A. $(x –1)^2 + (y – 1)^2 = 8$
B. $(x – 2)^2 + (y – 2)^2 = 8$
C. $(x – 2)^2 + (y – 2)^2 = 16$
D. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 16$

Câu 22: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho hai điểm M(4; 6) và M$'$(–3; 5). Phép vị tự tâm I tỉ số k = $\frac{1}{2}$ biến điểm M thành M$'$. Khi đó tọa độ điểm I là:

A. I(–4; 10) **B.** I(11; 1) **C.** I(1; 11) **D.** I(–10; 4)

Câu 23: Trong mp Oxy, cho đường tròn (C) $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O, tỉ số k = 1/2 và phép quay tâm O góc 90° biến (C) thành đường tròn nào sau đây:

A. $(x+2)^2+(y-1)^2=1$
B. $(x-2)^2+(y-2)^2=1$
C. $(x+1)^2+(y-1)^2=1$
D. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

Câu 24: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình 2x – y = 0. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số k = –2 và phép đối xứng qua trục Oy sẽ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. 2x – y = 0 **B.** 2x + y = 0 **C.** 4x – y = 0 **D.** 2x + y – 2 = 0

Câu 25: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho đường thẳng d: x – 2y + 1 = 0, Phép vị tự tâm I(0; 1) tỉ số k= –2 biến đường thẳng d thành đường thẳng d$'$. phép đối xứng trục Ox biến đường thẳng d$'$ thành đường thẳng d_1. Khi đó phép đồng dạng biến đường thẳng d thành d_1 có phương trình là:

A. 2x – y + 4 = 0 **B.** 2x + y + 4 = 0 **C.** 2x – 2y + 4 = 0 **D.** 2x + 2y + 4 = 0

CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN LỚP 11

Tiết 1,2,3: *QUAN HỆ SONG SONG*

I. Kiến thức cơ bản

1. Hai đường thẳng song song :

Sử dụng một trong các cách sau :

- Chứng minh a và b đồng phẳng và không có điểm chung
- Chứng minh a và b phân biệt và cùng song song với đường thẳng thứ ba
- Chứng minh a và b đồng phẳng và áp dụng các tính chất của hình học phẳng (cạnh đối của hình bình hành , định lý talet …)
- Sử dụng các định lý
- Chứng minh bằng phản chứng

2. Đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp_ $\begin{cases} d \not\subset \alpha \\ d \,//\, a \\ a \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \quad d \,//\, \alpha$

3. Hai mặt phẳng song song

Phương pháp__ $\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \\ a \,//(\beta), b \,//(\beta) \end{cases} \Rightarrow \quad (\alpha)//(\beta)$

Phương pháp_ $\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \\ c \subset (\beta), d \subset (\beta) \\ c \cap d = N \\ a \,//\, c, b \,//\, d \end{cases} \Rightarrow \quad (\alpha)//(\beta)$

II. Kĩ năng cơ bản

Học sinh vẽ nhanh và chính xác hình vẽ, nhận dạng nhanh yêu cầu của bài toán

Học sinh nhìn nhận hình vẽ chính xác

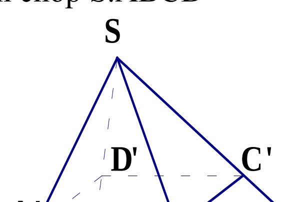
III. Bài tập luyện tập

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình bình hành .Gọi A’ ,B’ , C’ ,D’ lần lượt là trung

điểm các cạnh SA , SB , SC , SD .

a. Chứng minh A’B’C’D’ là hình gì

b. Gọi M là điểm bất kì trên BC . Tìm thiết diện của (A’B’M) với hình chóp S.ABCD



Giải

a. Chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành :

Trong tam giác SAB, ta có : $A'B' \underset{=}{//} \frac{1}{2}AB$

Trong tam giác SCD, ta có : $C'D' \underset{=}{//} \frac{1}{2}CD$

$\Rightarrow$ $A'B' \underset{=}{//} C'D'$

Vậy : A'B'C'D' là hình bình hành

b. Tìm thiết diện của (A'B'M) với hình chóp S.ABCD:

Ta có : AB // A'B' và M là điểm chung của (A'B'M) và (ABCD)

Do đó giao tuyến của (A'B'M) và (ABCD) là Mx song song AB và A'B'

Gọi $N = Mx \cap AD$

Vậy : thiết diện là hình thang A'B'MN

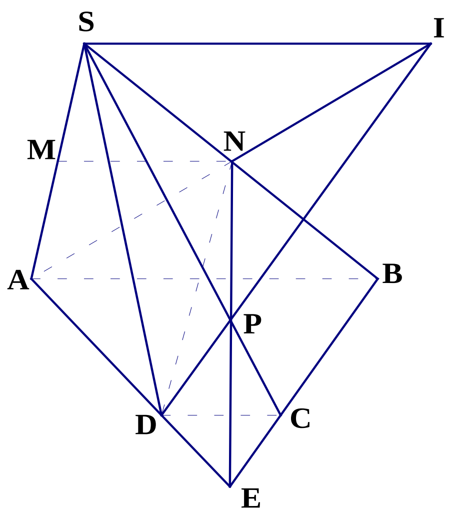
Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình thang với cạnh đáy AB và CD (AB >CD). Gọi M , N lần lượt là trung điểm các cạnh SA , SB

a. Chứng minh : MN// CD

b. Tìm $P = SC \cap (ADN)$

c. Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I .

Chứng minh : SI //AB //CD . Tứ giác SABI là hình gì ?



Giải

a. Chứng minh : MN// CD :

Trong tam giác SAB, ta có : MN //AB

Mà AB // CD (ABCD là hình thang)

Vậy : MN// CD

b. Tìm $P = SC \cap (ADN)$:

- Chọn mp phụ $(SBC) \supset SC$
- Tìm giao tuyến của (SBC) và (ADN)

  Ta có : N là điểm chung của (SBC) và (ADN)

  Trong (ABCD), gọi $E = AD \cap AC$

  $\Rightarrow (SBC) \cap (ADN) = NE$

- Trong (SBC), gọi $P = SC \cap NE$

Vậy : $P = SC \cap (ADN)$

c. Chứng minh : SI // AB // CD . Tứ giác SABI là hình gì ?

Ta có : $\begin{cases} \text{SI} = (\text{SAB}) \cap (SCD) \\ \text{AB} \subset (SAB) \\ \text{CD} \subset (SCD) \\ \text{AB} \ // \ \text{CD} \end{cases} \Rightarrow \quad SI \,//\, AB \,//\, CD$ (theo định lí 2)

Xét Δ ASI , ta có : SI // MN (vì cùng song song AB) M là trung điểm AB

$\Rightarrow$ SI $\underline{\underline{//}}$ 2MN Mà AB $\underline{\underline{//}}$ 2.MN Do đó : SI $\underline{\underline{//}}$ AB

Vậy : tứ giác SABI là hình bình hành

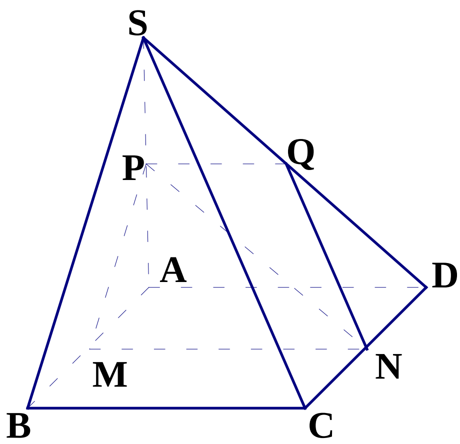
Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành .Gọi M ,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD .

a. Chứng minh MN // (SBC) , MN // (SAD)

b. Gọi P là trung điểm cạnh SA . Chứng minh SB và SC đều song song với (MNP)

c. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của ΔABC và ΔSBC.Chứng minh G_1G_2 // (SAB)

a. Chứng minh MN // (SBC):



Ta có : $\begin{cases} MN \not\subset (SBC) \\ MN \,//\, BC \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow \quad MN \,//(SBC)$

Tương tự : $\begin{cases} MN \not\subset (SAD) \\ MN \,//\, AD \\ AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow \quad MN \,//(SAD)$

b. Chứng minh SB // (MNP):

Ta có : $\begin{cases} SB \not\subset (MNP) \\ SB \,//\, MP \\ MP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow \quad SB \,//(MNP)$

Chứng minh SC // (MNP):

Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAD)

Ta có : P là điểm chung của (MNP) và (SAD)

MN // AD

Do đó giao tuyến là đường thẳng qua P song song MN cắt SD tại Q

$\Rightarrow$ PQ = (MNP) $\cap$ (SAD)

Xét Δ SAD , Ta có : PQ // AD , P là trung điểm SA

$\Rightarrow$ Q là trung điểm SD

Xét Δ SCD , Ta có : QN // SC

Ta có : $\begin{cases} SC \not\subset (MNP) \\ SC \,//\, NQ \\ NQ \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow \quad SC \,//(MNP)$

c. *Chứng minh G_1G_2 // (SAB)* :

Xét Δ SAI , ta có : $\dfrac{IG_1}{IA} = \dfrac{IG_2}{IS} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad G_1G_2$ // SA

Do đó : $\begin{cases} G_1G_2 \not\subset (SAB) \\ G_1G_2 // SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow \quad G_1G_2 //(SAB)$

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD . M,N là hai điểm trên AB, CD . Mặt phẳng (α) qua MN // SA

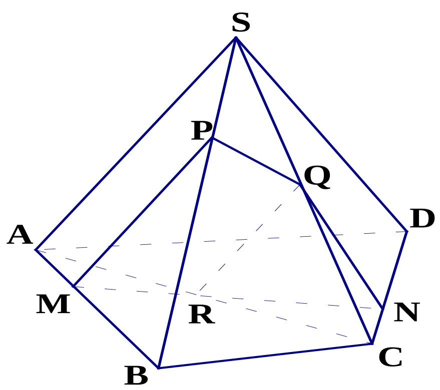
a. Tìm các giao tuyến của (α) với (SAB) và (SAC).

b. Xác định thiết diện của hình chóp với (α)

c. Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang

Giải

a. Tìm các giao tuyến của (α) với (SAB):



Ta có : $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ \alpha // SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow$ (α) ∩ (SAB) = MP với MP // SA

Tìm các giao tuyến của (α) với (SAC):

Gọi R = MN ∩ AC

Ta có : $\begin{cases} R \in (\alpha) \cap (SAC) \\ \alpha // SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow$ (α) ∩ (SAC) = RQ với RQ // SA

Thiết diện là tứ giác MPQN

c. Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang:

Ta có : MPQN là hình thang $\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} MP // QN & (1) \\ MN // PQ & (2) \end{array} \right.$

Xét (1) ,ta có $\begin{cases} SA // MP \\ MP // QN \end{cases} \Rightarrow \quad SA // QN$

Do đó : $\begin{cases} SA // QN \\ QN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow \quad SA //(SCD)$ (vô lí)

Xét (2) ,ta có $\begin{cases} BC = (ABCD) \cap (SBC) \\ MN \subset (ABCD) \\ PQ \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow \quad MN // BC$

Ngược lại, nếu MN // BC thì $\begin{cases} PQ = \alpha \cap (SBC) \\ MB \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN // PQ$

Vậy để thiết diện là hình thang thì MN // BC.

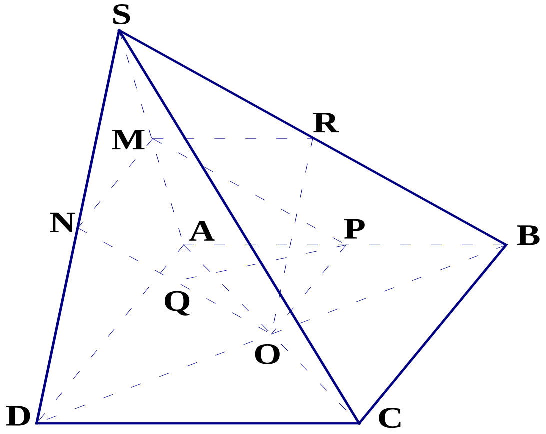
Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD

a. Chứng minh rằng : (OMN) // (SBC)

b. Gọi P, Q , R lần lượt là trung điểm của AB ,ON, SB.

Chứng minh : PQ // (SBC), (MOR) // (SCD)

Giải



a. Chứng minh rằng : (OMN) // (SBC):

Xét tam giác SAC và SDB :

Ta có : $\begin{cases} OM // SC \\ ON // SB \end{cases} \Rightarrow (OMN) // (SBC)$

b. Chứng minh : PQ // (SBC)

Ta có : $\begin{cases} OP // AD \\ AD // MN \end{cases} \Rightarrow OP // MN$

$\Rightarrow$ M, N, P, O đồng phẳng

$\Rightarrow$ PQ $\subset$ (MNO)

Mà $\begin{cases} PQ \subset (MNO) \\ (MNO) // (SBC) \end{cases} \Rightarrow PQ // (SBC)$

Vậy : PQ // (SBC)

Chứng minh : PQ // (SBC), (MOR) // (SCD) :

Ta có : $\begin{cases} MR // AB \\ AB // DC \end{cases} \Rightarrow MR // DC \quad (1)$

Xét tam giác SDB : ta có $OR // SD \quad (2)$

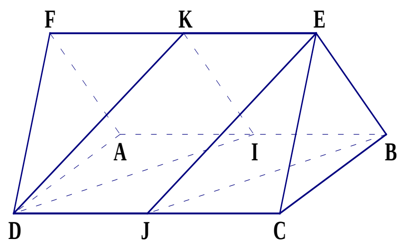
Từ (1) và (2) , ta được $\begin{cases} MR // DC \text{ và } OR // SD \\ MR \subset (MOR) \text{ và } OR \subset (MOR) \\ DC \subset (SCD) \text{ và } SD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (MOR) // (SCD)$

Bài 6. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và không đồng phẳng . I , J , K lần lượt là trung điểm các cạnh AB , CD, EF. Chứng minh :

a. (ADF) // (BCE) b. (DIK) // (JBE)

Giải

a. (ADF)//(BCE):



Ta có : $\begin{cases} AD // BC \\ AD \not\subset (BCE) \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD //(BCE)$ (1)

Tương tự : $\begin{cases} AF // BE \\ AF \not\subset (BCE) \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF //(BCE)$ (2)

Từ (1) và (2) , ta được :

$$\begin{cases} AD //(BCE) \\ AF //(BCE) \\ AD \subset (ADF) \text{ và } AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF) //(BCE)$$

Vậy : $(ADF) //(BCE)$

b. (DIK)//(JBE) :

Ta có : $\begin{cases} DI // JB \\ IK // BE \end{cases} \Rightarrow (DIK) //(JBE)$

Vậy : *(DIK)//(JBE)*

IV. Bài tập TNKQ

Câu 1: Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì a//b

B. Nếu a//b và c $\perp$ a thì c $\perp$ b

C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì a//b

D. Nếu a và b cùng nằm trong mp (α) // c thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c

Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$?

A. 60^0 **B.** 120^0 **C.** 45^0 **D.** 90^0

Câu 3: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và C'A. Tứ giác MNPQ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

Câu 4: Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0, \widehat{CAD} = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. 120^0 **B.** 90^0 **C.** 60^0 **D.** 45^0

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. 90^0 **B.** 45^0 **C.** 30^0 **D.** 60^0

Câu 6: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

A. 120^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng:

A. 45^0 **B.** 30^0 **C.** 90^0 **D.** 60^0

Câu 8: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể **sai**?

A. A'C'⊥BD **B.** BB'⊥BD **C.** A'B⊥DC' **D.** BC'⊥A'D

Câu 9: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c

B. Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c

C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c

D. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b)

Câu 10: Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90^0 **B.** 60^0 **C.** 45^0 **D.** 120^0

Câu 11: Cho tứ diện ABCD đều cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm CD, α là góc giữa AC và BM. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\alpha = 60^0$

Câu 12: Cho tứ diện ABCD có AB = a, BD = 3a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN

A. MN = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** MN = $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

C. MN = $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **D.** MN = $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Câu 13: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng

B. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong một mặt phẳng thì đồng quy

C. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng

D. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng

Câu 14: Cho tứ diện đều ABCD, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó cos(AB,DM) bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 15: Cho tứ diện ABCD có AB = CD. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc (IE, JF) bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 16: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c

C. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b. Nếu đường thẳng c vuông góc với a và b thì a, b, c không đồng phẳng.

D. Cho hai đường thẳng a và b, nếu a vuông góc với c thì b cũng vuông góc với

Câu 17: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia

Câu 18: Cho tứ diện ABCD với $AC = \frac{3}{2}AD; \widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^0, CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\varphi = \frac{3}{4}$ **B.** $\varphi = 60^0$ **C.** $\varphi = 30^0$ **D.** $\cos\varphi = \frac{1}{4}$

Câu 19: Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a, IJ = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là :

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 20: Cho tứ diện ABCD với AB ⊥ AC, AB ⊥ BD. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB là?

A. 90^0 **B.** 60^0 **C.** 30^0 **D.** 45^0

Câu 21: Cho tứ diện ABCD. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = k$

A. k = 1 **B.** k = 2 **C.** k = 0 **D.** k = 4

Câu 22: Trong không gian cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chọn hệ thức đúng?

A. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$ **B.** $AB^2 + AC^2 + BC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$

C. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 4\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$ **D.** $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$

Câu 23: Cho tứ diện ABCD có DA = DB = DC và $\widehat{BDA} = 60^0, \widehat{ADC} = 90^0, \widehat{ADB} = 120^0$. Trong các mặt của tứ diện đó:

A. Tam giác ABD có diện tích lớn nhất **B.** Tam giác BCD có diện tích lớn nhất

C. Tam giác ACD có diện tích lớn nhất **D.** Tam giác ABC có diện tích lớn nhất

Câu 24: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Câu 25: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng a, b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a,b). **B.** Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c .

C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c . **D.** Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c .

Tiết 4,5,6 QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

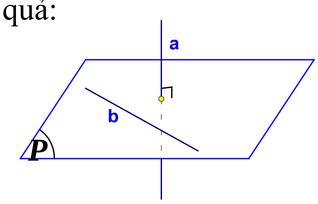
I. Kiến thức cơ bản

1. Hai đường thẳng vuông góc với nhau

C1 : Dùng các quan hệ vuông góc đã biết trong mặt phẳng.

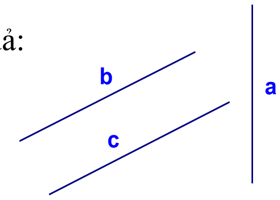
C2 : $a \perp b \Leftrightarrow \text{góc}(a;b) = 90^o$.

C3: Dùng hệ quả:



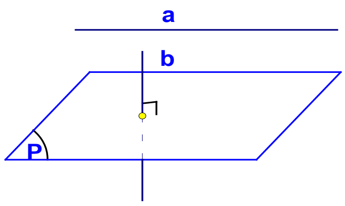
$$\left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp b$$

C4: Dùng hệ quả:



$$b // c,\ a \perp b \Rightarrow a \perp c$$

C5 : Dùng hệ quả:

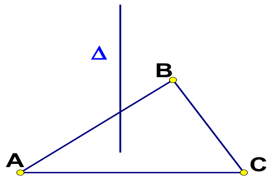


$$\left.\begin{array}{l} a \ song\ song\ (P) \\ b \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp b$$

C6 : Sử dụng định lí ba đường vuông góc.

C7: *Dùng hệ quả*: Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì vuông góc với cạnh còn lại của tam giác

$\perp$



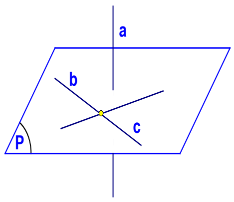
$$\left.\begin{array}{l} \Delta \perp AB \\ \Delta \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \perp BC$$

C8:a$\perp$b khi 2 vtcp của 2 đt đó vuông góc.

Chú ý:Đlí hàm số cosin $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC}$; $\cos B = \dfrac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2.BA.BC}$

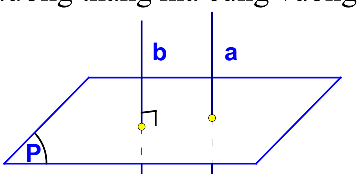
2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

C1 : *Dùng định lý*: Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng khi nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng



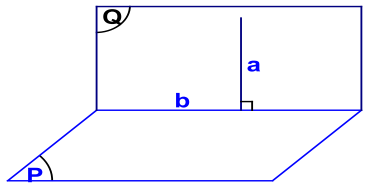
b, c cắt nhau , $b, c \subset (P)$, $a \perp b$, $a \perp c \Rightarrow a \perp (P)$

C2 : *Dùng hệ quả*: Cho hai đường thẳng // nếu đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng thì đường thẳng kia cũng vuông góc với mặt phẳng



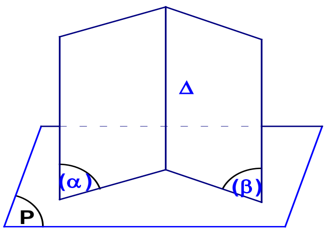
$$\boxed{a \,//\, b\,,\ \ b \perp (P) \Rightarrow a \perp (P)}$$

C3 : *Dùng hệ quả*: Cho hai mặt phẳng vuông góc theo giao tuyến b, nếu đường thẳng a nằm trong mẵt phẳng này vuông góc với giao tuyến b thì đường thẳng a cũng vuông góc với mặt phẳng kia



$$\left.\begin{array}{l}(P)\cap(Q)=b\\ a\subset(Q), a\perp b\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(P)$$

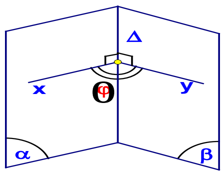
C4 : *Dùng hệ quả*: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của hai mặt phẳng này cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó



$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\cap(\beta)=\Delta\\ (\alpha)\perp(P),(\beta)\perp(P)\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta\perp(P)$$

3. Mặt phẳng vuông góc mặt phẳng.

C1 : Chứng minh góc giữa chúng là một vuông.



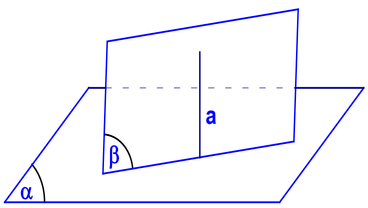
- $(\alpha)\cap(\beta)=\Delta$, $Ox\subset(\alpha), Ox\perp\Delta$, $Oy\subset(\beta), Oy\perp\Delta$

Khi đó:

góc $((\alpha);(\beta))$ = góc $(Ox;Oy)=\widehat{xOy}=\varphi : 0\le\varphi\le 90^o$

- $(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow \varphi=90^o$

C2 : *Dùng hệ quả*:Cho hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu có một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này vuông góc với mặt phẳng kia.



$$\left.\begin{array}{l}a\subset(\beta)\\ a\perp(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$$

II. Kĩ năng cơ bản

Học sinh vẽ nhanh và chính xác hình vẽ

Học sinh nhìn nhận hình vẽ chính xác

III. Bài tập luyện tập

Bài 1 : Cho tứ diện ABCD đều. Chứng minh AB vuông góc với CD

Hướng dẫn tóm tắt: dùng tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

C2:Gọi M là tđ của AB ,CM cho AB $\perp$(MCD)

Bài 2 : Cho hình chop S.ABC có AB = AC, góc SAC = góc SAB. M là trung điểm BC. C/M

a. AM vuông góc với BC và SM vuông góc với BC

b. SA vuông góc với BC

Hướng dẫn tóm tắt: a,ΔABC cân $\Rightarrow$AM $\perp$BC.

b, ΔSAB=ΔSAC(cgc) $\Rightarrow$SB=SC$\Rightarrow$SM$\perp$BC

Bài 3 : Cho tứ diện ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD

a. CM: AO$\perp$CD

b. Tính góc giữa 2 đt AB và CD

Hướng dẫn tóm tắt: **a,** $AO\perp(BCD)\Rightarrow AO\perp CD$

b.Gọi M là trđ CD $\Rightarrow$AM $\perp$CD ,lại có AO$\perp$CD$\Rightarrow$CD$\perp$(AMB) $\Rightarrow$CD$\perp$AB

Bài 4 : Cho tứ diện ABCD có 2 mặt ABC và DBC là hai tam giác **cân** chung đáy BC. Gọi I là trung điểm BC.

a. chứng minh BC vuông góc AD

b. kẻ AH là đường cao trong tam giác ADI. Chứng minh AH vuông góc với mp(BCD)

Hướng dẫn tóm tắt:

a.BC$\perp$DI và BC$\perp$AI nên BC$\perp$AD

b.AH$\perp$DI và AH$\perp$BC nên AH$\perp$(BCD)

Bài 5 : Cho hình chop SABC. SA vuông góc với đáy (ABC) và đáy là tam giác vuông tại B.

a .cm BC $\perp$SB

b.Từ A kẻ 2 đường cao AH, AK trong tam giác SAB và SAC. Cm: AH $\perp$(SBC), SC $\perp$(AHK)

Hướng dẫn tóm tắt:

a. BC $\perp$AB và BC$\perp$SA nên BC$\perp$SB

b. AH $\perp$SB và AH $\perp$BC nên AH$\perp$(SBC)

AH$\perp$SC và AK$\perp$SC nên SC$\perp$(AHK)

Bài 7 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc (ABCD). Gọi α là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, α cắt SC tại I.

a. Xác định giao điểm của SO và (α)

b. Cm: BD vuông góc SC. Xét vị trí tương đối của BD và (α)

c. Xác định giao tuyến của (SBD) và (α)

Hướng dẫn tóm tắt:

a.J là giao điểm của AI và SO thì J là giao điểm của SO và(α)

b.BD$\perp$AC và BD$\perp$SA nên BD$\perp$(SAC) suy ra BD$\perp$SC

c.giao tuyến là đt qua J và song song với BD

Bài 8: Cho hình chóp S.ABC có SA $\perp$(ABC). Tam giác ABC vuông tại B

a. cm: (SAC) $\perp$(ABC)

b.Gọi H là hình chiếu của A lên SC. K là hình chiếu của A lên SB. cm (AHK)$\perp$(SBC)

Hướng dẫn tóm tắt:

a.Trong (SAC) có SA $\perp$ (ABC) suy ra đpcm

b.Trong (AHK) có AK $\perp$ (SBC) suy ra đpcm

Bài 9 : Cho tam giác đều ABC cạnh a, I là trung điểm BC, D là điểm đối xứng của A qua I. dựng đoạn SD = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ vuông góc với (ABC). cm

a.(SBC) $\perp$ (SAD) b.(SAB) $\perp$ (SAC)

Hướng dẫn tóm tắt:

a.Trong tam giác (SBC) có BC $\perp$ (SAD) suy ra đpcm

b. ΔSAB= ΔSAC.Trong ΔSAC kẻ đg cao CK $\perp$ SA,Trong tam giác SAB kẻ đg cao BK $\perp$ SA.2 tam giác vuông SDA và IKA đồng dạng $\Rightarrow \frac{IK}{SD} = \frac{IA}{SA} \Rightarrow IK = \frac{a}{2}$ suy ra tam giác BKC vuông tại K.

IV. Bài tập TNKQ

Câu 1: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó a $\perp$ (P), Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Nếu b $\perp$ (P) thì b // a

B. Nếu b // (P) thì b $\perp$ a

C. Nếu b // a thì b $\perp$ (P)

D. Nếu b $\perp$ a thì b // (P)

Câu 2: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a = 12, gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng?

A. $36\sqrt{2}$ **B.** 40 **C.** $36\sqrt{3}$ **D.** 36

Câu 3: Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ cho trước?

A. Vô số **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Câu 4: Cho tứ diện ABCD có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Góc giữa CD và (ABD) là góc CBD

B. Góc giữa AC và (BCD) là góc ACB

C. Góc giữa AD và (ABC) là góc ADB

D. Góc giữa AC và (ABD) là góc CAB

Câu 5: Cho hình chóp S.ABC thỏa mãn SA = SB = SC. Tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABC). Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. (SBH) $\cap$ (SCH) = SH

B. (SAH) $\cap$ (SBH) = SH

C. AB $\perp$ SH

D. (SAH) $\cap$ (SCH) = SH

Câu 6: Cho hình chóp S.ABC có SA= SB = SC và tam giác ABC vuông tại B. Vẽ SH $\perp$ (ABC), H$\in$(ABC). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. H trùng với trung điểm của AC.

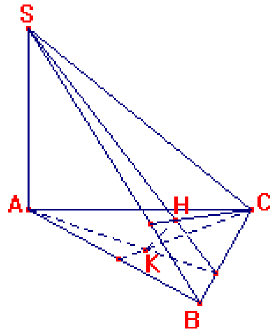
B. H trùng với trực tâm tam giác ABC.

C. H trùng với trọng tâm tam giác ABC.

D. H trùng với trung điểm của BC

Câu 7 Cho hình chóp SABC có SA⊥(ABC). Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

A. BC ⊥ (SAH).
B. HK ⊥ (SBC).
C. BC ⊥ (SAB).
D. SH, AK và BC đồng quy.



Câu 8: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều, O là trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC, SO vuông góc với đáy. Gọi I là điểm tùy ý trên OH (không trùng với O và H). mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với OH. Thiết diện của (P) và hình chóp S.ABC là hình gì?

A. Hình thang cân **B.** Hình thang vuông **C.** Hình bình hành **D.** Tam giác vuông

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông có tâm O, SA⊥ (ABCD). Gọi I là trung điểm của SC. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. BD⊥ SC **B.** IO⊥ (ABCD).
C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD **D.** SA= SB= SC.

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD), $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và mp(ABCD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 30^0$ **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\alpha = 45^0$ **D.** $\alpha = 60^0$

Câu 11: Cho hình chóp SABC có các mặt bên nghiêng đều trên đáy . Hình chiếu H của S trên (ABC) là:

A. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . **B.** Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
C. Trọng tâm tam giác ABC . **D.** Giao điểm hai đường thẳng AC và BD .

Câu 12: Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).
B. Nếu đường thẳng d ⊥(α) thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α)
C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì d ⊥(α)
D. Nếu d ⊥(α) và đường thẳng a // (α) thì d ⊥ a

Câu 13: Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu a ⊥ b và b ⊥ c thì a // c.
B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và b // (α) thì a ⊥ b. .
C. Nếu a // b và b ⊥ c thì c ⊥ a.
D. Nếu a ⊥ b, c ⊥ b và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a, c).

Câu 14: Cho tứ diện SABC có SA ⊥(ABC) và AB⊥BC. Số các mặt của tứ diện SABC là tam giác vuông là:

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 15: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB, cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Tứ giác MNPQ là hình gì?

A. Hình thang vuông **B.** Hình thang cân **C.** Hình bình hành **D.** Hình chữ nhật

Câu 16: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với 1 đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Mặt phẳng (P) và đường thẳng a không thuộc (P) cùng vuông góc với đường thẳng b thì song song với nhau.
C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
<u>D.</u> Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với 1 mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 17: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, SA ⊥ (ABCD). AE và AF là các đường cao của tam giác SAB và SAD, Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

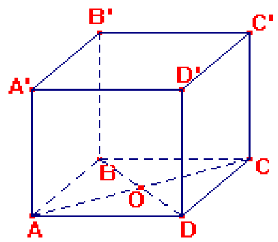
A. SC ⊥ (AFB)

<u>B.</u> SC ⊥ (AEC)

C. SC ⊥ (AED)

D. SC ⊥ (AEF)

Câu 18: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' Có đáy là hình thoi Â=60^0 và A'A = A'B = A'D . Gọi O = AC ∩ BD . Hình chiếu của A' trên (ABCD) là :



A. trung điểm của AO. **B.** trọng tâm ΔABD .
<u>C.</u> giao của hai đoạn AC và BD . **D.** trọng tâm ΔBCD .

Câu 19: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó a ⊥ (P). Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. Nếu b ⊥ (P) thì a // b. **B.** Nếu b // (P) thì b ⊥ a.

C. Nếu b // a thì b ⊥ (P) **<u>D.</u>** Nếu a ⊥ b thì b // (P).

Câu 20: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA ⊥ (ABC), $SA = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với trung tuyến SM của tam giác SBC. Thiết diện của (P) và hình chóp S.ABC có diện tích bằng?

<u>A.</u> $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$ **B.** $\frac{a^2}{6}$ **C.** a^2 **D.** $\frac{a^2\sqrt{16}}{16}$

Câu 21: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?
<u>A.</u> Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với a thì b vuông góc với mặt phẳng (P).
B. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b và b song song với mặt phẳng (P) thì a song song hoặc thuộc mặt phẳng (P).
C. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) thì a vuông góc với b.
D. Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

Câu 22: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a và SA⊥ (ABCD) . Biết SA = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và (ABCD)

A. 30^0 **<u>B.</u>** 60^0 **C.** 75^0 **D.** 45^0

Câu 23: Cho tứ diện ABCD có AB = AC và DB = DC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. AB $\perp$ (ABC) **B.** BC $\perp$ AD **C.** CD $\perp$ (ABD) **D.** AC $\perp$ BD

Câu 24: Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. H là trực tâm tam giác ABC. **B.** OA $\perp$ BC.

C. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$ **D.** $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Câu 25: Cho hình chóp S.ABC thỏa mãn SA = SB = SC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABC). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. H là trực tâm tam giác ABC. **B.** H là trọng tâm tam giác ABC.

C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. **D.** H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Tiết 7,8,9 KHOẢN CÁCH

I. Kiến thức cơ bản

Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng	Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng
Khoảng cách giữa hai đường thẳng sng song	Khoảng cách giữa mặt phẳng và đường thẳng //
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song	Khoảng cách giữa hai Đường thẳng chéo nhau

II. Kĩ năng cơ bản

Học sinh vẽ nhanh và chính xác hình vẽ

Học sinh nhìn nhận hình vẽ chính xác

Kĩ năng xác định nhanh khoảng cách từ hình vẽ

III. Bài tập luyện tập

Bài 1 : Cho tứ diện S.ABC, tam giác ABC vuông cân tại B và AC = 2a, cạnh SA $\perp$ (ABC) và SA = a

a. CM: (SAB)$\perp$(SBC)

b. Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC); C đến (SAB); B đến (SAC)

c. Tính khoảng cách từ trung điểm O của AC đến mp(SBC)

d. Gọi D , E là trung điểm của BC và SC tính khoảng cách từ A đến SD, k/c từ E đến AB

Hướng dẫn tóm tắt:

a.BC$\perp$(SAB) nên (SBC) $\perp$(SAB)

b.*Trong tam giác SAB kẻ AH$\perp$SB ,$\Rightarrow$AH$\perp$(SBC)$\Rightarrow d(A;(SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

*d(C;(SAB))=CB=a$\sqrt{2}$;d(B;(SAC))=BO=a với O là t điểm AC.

c.Gọi I là tđ AB$\Rightarrow IO // BC \Rightarrow IO //(SBC) \Rightarrow d(O;(SBC)) = \frac{1}{2}d(A;(SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

d.tam giác SDA vuông tại A,kẻ AK$\perp$SD thì AK=d(A;SD)=$\frac{a\sqrt{35}}{7}$

Bài 2 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = 3, AD = 4, SA $\perp$(ABCD) & SA = 5. Tính các khoảng cách từ:

a. A đến (SBD) b.A đến (SBC) c.O đến (SBC)

Hướng dẫn tóm tắt:

a. Kẻ AI$\perp$BD $\Rightarrow$BD$\perp$SI,trong (SAI) kẻAH$\perp$SI$\Rightarrow$AH$\perp$(SBD).;AH.SI=AB.AI

AI=12/5;SI=$\sqrt{769}/5$;AH=$\frac{60}{\sqrt{769}}$

b.d(A;(SBC))=$15/\sqrt{34}$

c.M là t đ của AB$\Rightarrow$OM//(SBC) nê n d(O;(SBC))=d(M;(SBC))=1/2d(A;(SBC))=$\frac{15}{2\sqrt{34}}$

Bài 3 : Cho hình chop S.ABCD có đáy SA $\perp$(ABCD), đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B. AB = BC = $\frac{AD}{2}$ = a, SA = a

- **a.** CM các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông
- **b.** Tính k/c từ A đến mp(SBC)
- **c.** Tính khoảng cách từ B đến đt SD

Hướng dẫn tóm tắt:

b.d(A;(SBC))= $a/\sqrt{2}$

c.tam giác SBD cân tại D;I là tđ SB; DI=$3a\sqrt{2}/2$; $S_{SBD}=3a^2/2 \Rightarrow d(b;SD)=3a/\sqrt{5}$

IV. Bài tập TNKQ

Câu 1: Hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Khoảng cách từ đỉnh S tới mặt phẳng đáy là:

A. a   B. $a\sqrt{2}$ C. 1,5a   D. a$\sqrt{3}$

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng cạnh bên bằng a. Khoảng cách từ AD đến mp(SBC) bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ **B.** $a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{3a}{2}$ **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$

Câu 3: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa BB' và AC bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật và AB = 2a, BC = a. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy (ABCD) là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 5: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu H của A trên mặt phẳng (A'B'C') thuộc đường thẳng B'C'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và B'C' là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Câu 6: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Khoảng cách từ C đến AC' là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy có tâm O và cạnh bằng a, cạnh bên bằng a. Khoảng cách từ O đến (SAD) bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{a}{\sqrt{6}}$ **D.** a

Câu 8: Cho hình chóp S.ABC trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết SA = 3a, AB=a$\sqrt{3}$, BC = a$\sqrt{6}$. Khỏang cách từ B đến SC bằng:

A. 2a$\sqrt{3}$ **B.** a$\sqrt{3}$ **C.** a$\sqrt{2}$ **D.** 2a

Câu 9: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng bao nhiêu?

A. 2a **B.** $a\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\dfrac{3a}{2}$ **D.** $a\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥(ABCD) đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60^0$. Biết SA= 2a. Tính khỏang cách từ A đến SC

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\dfrac{5a\sqrt{6}}{2}$ **D.** $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$

Câu 11: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy bằng 2a và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Tính khaỏng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên:

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $a\sqrt{\dfrac{3}{10}}$ **D.** $a\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

Câu 12: Cho hình thang vuông ABCD vuông ở A và D, AD = 2a. Trên đường thẳng vuông góc tại D với (ABCD) lấy điểm S với SD = $a\sqrt{2}$. Tính khỏang cách giữa đường thẳng DC và (SAB).

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Câu 13: Cho tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = OB = OC = a. Khoảng cách giữa OA và BC bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** a **D.** $\dfrac{a}{2}$

Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, Cạnh bên SA = a và vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC, M là trung điểm của AB. Khoảng cách từ I đến CM bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ **B.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$ **C.** $a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ **D.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Câu 15: Cho hình chóp A.BCD có cạnh AC ⊥ (BCD) và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết AC = $a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$ **B.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Câu 16: Cho tứ diện SABC trong đó SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và SA = 3a, SB = a, SC=2a. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BC bằng:

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\dfrac{7a\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\dfrac{8a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{5a\sqrt{6}}{6}$

Câu 17: Cho hình chóp S.ABC trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết SA = $a\sqrt{3}$, AB=$a\sqrt{3}$. Khỏang cách từ A đến (SBC) bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Câu 18: Cho tứ diện ABCD có AC = BC = AD = BD = a, CD = b, AB = c. Khoảng cách giữa AB và CD là?

A. $\dfrac{\sqrt{3a^2-b^2-c^2}}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{4a^2-b^2-c^2}}{2}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2a^2-b^2-c^2}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{2}$

Câu 19: Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a bằng:

A. $\dfrac{2a}{3}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** 2a

Câu 20: Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC’ và CD’ là:

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 21: Hình tứ diện ABCD có AB, AC, AD đôi một vuông góc và AB = AC = AD = 3. Diện tích tam giác BCD bằng

A. 27 **B.** $\frac{27}{2}$ **C.** $\frac{9\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Câu 22: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có AB = AA’ = a, AC = 2a. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD’) là:

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$

Câu 23: Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥(ABCD), SA= 2a, ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Gọi O là tâm của ABCD, tính khoảng cách từ O đến SC.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Câu 24: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có AB = a, BC = b, CC’ = c. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB’ và AC’ là?

A. $\frac{4ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **B.** $\frac{3ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **C.** $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **D.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Câu 25: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy (ABCD), SA = a. khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a}{\sqrt{6}}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt{7}}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{a}{\sqrt{5}}$

MA TRẬN ĐỀ

Chủ đề Chuẩn KTKN	**Cấp độ tư duy**				**Cộng**
	Nhận biết	**Thông hiểu**	**Vận dụng thấp**	**Vận dụng cao**	
Quan hệ song song.	Câu 1,2,3 *Điểm 1,2* *Tỉ lệ 12%*	Câu 4,5,6 *Điểm 1,2* *Tỉ lệ 12%*	Câu 7,8 *Điểm 0,8* *Tỉ lệ 8%*		8 *Điểm 3,2* *Tỉ lệ 32%*
Quan hệ vuông góc	Câu 9,10,11 *Điểm 1,2* *Tỉ lệ 12%*	Câu 12,13,14 *Điểm 1,2* *Tỉ lệ 12%*	Câu 15,16 *Điểm 0,8* *Tỉ lệ 8%*	Câu 17 *Điểm 0,4* *Tỉ lệ 4%*	9 *Điểm 3,6* *Tỉ lệ 36%*
Khoảng cách và góc	Câu 18,19,20 *Điểm 1,2* *Tỉ lệ 12%*	Câu 21,22 *Điểm 0,8* *Tỉ lệ 8%*	Câu 23,24 *Điểm 0,8* *Tỉ lệ 8%*	Câu 25 *Điểm 0,4* *Tỉ lệ 4%*	8 *Điểm 3,2* *Tỉ lệ 32%*
Cộng	9 *Điểm 3,6* *Tỉ lệ 36%*	8 *Điểm 3,2* *Tỉ lệ 32%*	6 *Điểm 2,4* *Tỉ lệ 24%*	2 *Điểm 0,8* *Tỉ lệ 8%*	25 *Điểm 10* *Tỉ lệ 100%*

ĐỀ KIỂM TRA

Câu 1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Ba điểm phân biệt luôn cùng thuộc mặt mặt phẳng duy nhất.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

C. Ba điểm bất kì chỉ thuộc một mặt phẳng.

D. Có đúng một mặt phẳng đi qua ba điểm cho trước.

Câu 2. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn vô số điểm chung khác nữa.

B. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

C. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó có duy nhất một mặt phẳng.

B. Qua hai đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng.

C. Qua hai đường thẳng cắt nhau có duy nhất một mặt phẳng.

D. Qua hai đường thẳng song song có duy nhất một mặt phẳng.

Câu 4. Trong mặt phẳng (α), cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Điểm S Ï(α). Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và hai trong bốn điểm nói trên?

A. 4. **B**.5. **C**. 6. **D**.8.

Câu 5. Cho tam giác ABC. Lấy điểm I đối xứng với C qua trung điểm của cạnh AB. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $I \in (ABC)$. **B**. $(ABC) \equiv (IBC)$.

C. $CI \notin (ABC)$. **D**. $AI \subset (ABC)$.

Câu 6. Cho hình chópS.ABCD . Gọi $AC \cap BD = I, AB \cap CD = J, AD \cap BC = K$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $(SAC) \cap (SCD) = SI$. **B.** $(SAB) \cap (SCD) = SJ$.

C. $(SAD) \cap (SBC) = SK$. **D.** $(SAC) \cap (SAD) = AB$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC', $\Delta = (AMN) \cap (A'B'C')$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\Delta // AB$ **B.** $\Delta // AC$ **C.** $\Delta // BC$ **D.** $\Delta // AA'$

Câu 8. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi H lần lượt là trung điểm của AB. Đường thẳng BC song song với mặt phẳng nào sau đây ?

A. (AHC') **B.** (AA'H) **C.** (HAB) **D.** (HA'C')

Câu 9: Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Góc giữa cặp véc tơ nào bằng 60^0**:**

A. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BF})$ **B.** $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DG})$

C. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EH})$ **D.** $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{DG})$

Câu 10: Cho hình lập phương ABCD.EFGH cạnh bằng a . Giá trị $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{FG}$ bằng**:**

A. $2a^2$ **B.** $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$ **C.** $\sqrt{2}a^2$ **D.** a^2

Câu 11: Cho hình lập phương ABCD.EFGH cạnh bằng a . Giá trị $cos(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG})$ bằng**:**

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2a}$ **C.** $\sqrt{2}a$ **D.** - $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 12: Cho tứ diện đều ABCD. Gọi M là trung điểm CD. **Khẳng định nào sau đây đúng :**

A. $AB \perp CD$ **B.** $AB \perp BM$ **C.** $AM \perp BM$ **D.** $AB \perp BD$

Câu 13: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều. Gọi M,N là trung điểm của AB và BC. **Khẳng định nào sau đây đúng :**

A. $AB \perp ND$ **B.** $MN \perp AD$ **C.** $MN \perp CD$ **D.** $CD \perp BM$

Câu 14: Cho tứ diện ABCD có BCD tam giác đều cạnh bằng a và $AB \perp (BCD)$, $AB = \sqrt{3}a$. Gọi M là trung điểm của CD. Góc giữa 2 đường thẳng AM và BM bằng**:**

A. 48^0 **B.** $\approx 63^0$ **C.** 60^0 **D.** $\approx 67^0$

Câu 15: Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và ABCD là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD. Giá trị $\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{CB}$ bằng**:**

A. $\frac{a^2}{2}$ **B.** $-\frac{a^2}{2}$ **C.** $\frac{a^2}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$

Câu 16: Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và ABCD là hình vuông. **Khẳng định nào sau đây đúng :**

A. $SA \perp (ABCD)$ **B.** $AC \perp (SBC)$

C. $AC \perp (SBD)$ **D.** $AC \perp (SCD)$

Câu 17: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB. **Khẳng định nào sau đây đúng :**

A. $CM \perp (ABD)$ **B.** $AB \perp (MCD)$

C. $AB \perp (BCD)$ **D.** $DM \perp (ABC)$

Câu 18: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = a\sqrt{3}$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng**:**

A. $\approx 65^0$ **B.** $\approx 70^0$ **C.** $\approx 74^0$ **D.** $\approx 75^0$

Câu 19: Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng góc nào:

A. $\widehat{BSC}$ **B.** $\widehat{SCB}$ **C.** $\widehat{SCA}$ **D.** $\widehat{ASC}$

Câu 20: Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và đáy là hình thoi tâm O. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) là góc giữa cặp đường thẳng nào:

A. (SB, SA) **B.** (SB, AB) **C.** (SB, SO) **D.** (SB, SA)

Câu 21: Cho tứ diện ABCD có BCD tam giác đều cạnh bằng a và $AB \perp (BCD)$, $AB = a$. Gọi M là trung điểm của CD. Góc giữa đường thẳng AM và mặt phẳng (BCD) bằng:

A. 45^0 **B.** $\approx 49^0$ **C.** $\approx 53^0$ **D.** $\approx 43^0$

Câu 22: Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và ABCD là hình vuông. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy là góc giữa cặp đường thẳng nào:

A. (SA, AC) **B.** (SA, AB) **C.** (SA, SC) **D.** (SA, BD)

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = AB$ và $SA \perp BC$.
Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

A. $\widehat{(BC,SD)} = 30^0$ **B.** $\widehat{(BC,SD)} = 45^0$

C. $\widehat{(BC,SD)} = 60^0$ **D.** $\widehat{(BC,SD)} = 90^0$

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AD. Cho biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\widehat{(AB,CD)} = 30^0$ **B.** $\widehat{(AB,CD)} = 45^0$

C. $\widehat{(AB,CD)} = 60^0$ **D.** $\widehat{(AB,CD)} = 90^0$

Câu 25: Cho tứ diện ABCD có $AB=CD=2a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, $NQ = a\sqrt{3}$. Tìm góc giữa đường AB và CD?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

ĐÁP ÁN

1-B	2-C	3-B	4-C	5-C	6-D	7-C
8-A	9-B	10-D	11-A	12-A	13-C	14-B
15-A	16-C	17-B	18-B	19-A	20-C	21-B
22-A	23-B	24-C	25-B			