

LƯU SĨ PHÁP

I Love Math

TOÁN ÔN THI



TUYỂN SINH 10

Vấn đề 1. RÚT GỌN, CHỨNG MINH BIỂU THỨC

Vấn đề 2. PHƯƠNG TRÌNH

Vấn đề 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Vấn đề 4. ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ VI - ÉT

Vấn đề 5. ĐƯỜNG THẲNG

Vấn đề 6. PARABOL

Vấn đề 7. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PT, HPT

Vấn đề 8. HÌNH HỌC

Vấn đề 9. MỘT SỐ ĐỀ THAM KHẢO

2021 - 2022

TRỌNG TÂM ÔN THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

NĂM HỌC: 2021 – 2022

VẤN ĐỀ 1. Rút gọn, đơn giản biểu thức, chứng minh đẳng thức.

Phương pháp: ✓ Khai căn bậc 2, bậc 3. Tính chất của căn bậc 2, bậc 3
 ✓ Áp dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ
 ✓ Quy đồng, trục căn thức

Căn	Hằng đẳng thức	Trục căn thức
✓ $\sqrt{A} = A = \begin{cases} A, A \geq 0 \\ -A, A < 0 \end{cases}$	① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	✓ $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{B}, AB \geq 0, B \neq 0$
✓ $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}; A, B \geq 0$	② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	✓ $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}, B > 0$
✓ $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}, A \geq 0, B > 0$	③ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	✓ $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - (B)^2}$
✓ $\sqrt{A^2 B} = A \sqrt{B}, B \geq 0$	④ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	✓ $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - (B)}$
✓ $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}; A, B \geq 0$	⑤ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	
✓ $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}; A < 0, B \geq 0$	⑥ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	
	⑦ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau

a. $A = (\sqrt{11} - 2\sqrt{44} + 3\sqrt{99}) : \sqrt{11}$

b. $B = (\sqrt{27} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75}) : 2\sqrt{3}$

HD Giải

$$\begin{aligned} \text{a. } A &= (\sqrt{11} - 2\sqrt{44} + 3\sqrt{99}) : \sqrt{11} \\ &= (\sqrt{11} - 4\sqrt{11} + 9\sqrt{11}) : \sqrt{11} \\ &= 6\sqrt{11} : \sqrt{11} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } B &= (\sqrt{27} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75}) : 2\sqrt{3} \\ &= (3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}) : 2\sqrt{3} \\ &= (-3\sqrt{3}) : 2\sqrt{3} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bài tập làm tương tự

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau

a. $A = (3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{5} + \sqrt{60}$

b. $B = (\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} + \sqrt{84}$

c. $C = (\sqrt{27} - \sqrt{12} + 2\sqrt{6}) : 3\sqrt{3}$

d. $D = (\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$

e. $E = (\sqrt{14} - 3\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{28}$

f. $F = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right) : \sqrt{72}$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

a. $A = 6\sqrt{12} - \sqrt{20} - 2\sqrt{27} + \sqrt{125}$

b. $B = 3\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{50} - 4\sqrt{32}$

c. $C = \sqrt{20} - 2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125}$

d. $D = \sqrt{27} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{48} - 3\sqrt{75}$

e. $E = 2\sqrt{18} - 3\sqrt{80} - 5\sqrt{147} + 5\sqrt{245} - 3\sqrt{98}$

f. $F = 4\sqrt{24} - 2\sqrt{54} + 3\sqrt{6} - \sqrt{150}$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

a. $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}} - \frac{1}{3+\sqrt{7}}$

b. $B = \frac{1}{6+\sqrt{35}} + \frac{1}{6-\sqrt{35}}$

c. $C = (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$

d. $D = \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} + \sqrt{50}$

e. $E = (\sqrt{6} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

f. $F = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} + \sqrt{16} - \sqrt{12}$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau

$$a. A = \frac{3}{2+\sqrt{3}} + \frac{13}{4-\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$b. B = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$c. C = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6-3\sqrt{3}}$$

$$d. D = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$e. F = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$f. F = \sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$$

$$g. G = \frac{4}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{45} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$$

$$h. H = \sqrt{12} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau

$$a. A = \frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \text{ với } a>0, b>0.$$

$$b. B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \text{ với } x>0$$

HD Giải

a. Với điều kiện $a>0, b>0$. Ta có:

$$A = \frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = (\sqrt{a}-\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a-b$$

b. Với $x>0$. Ta có:

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Bài 7. Cho biểu thức $H = \left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} + 1 \right) : \left(\frac{a+2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} - 1 \right)$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$

a. Rút gọn biểu thức đã cho

b. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để biểu thức H nguyên

HD Giải

a. Với $a \geq 0$ và $a \neq 1$. Ta có:

$$H = \left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} + 1 \right) : \left(\frac{a+2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} - 1 \right) = \left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}-1} + 1 \right] : \left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)}{\sqrt{a}+2} - 1 \right] = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$$

$$b. \text{ Ta có } H = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} = \frac{\sqrt{a}-1+2}{\sqrt{a}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{a}-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\sqrt{a}-1) \text{ là ước số của } 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}-1=\pm 1 \\ \sqrt{a}-1=\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}=0 \\ \sqrt{a}=2 \\ \sqrt{a}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=9 \end{cases}. \text{ Vậy } a \in \{0; 4; 9\}.$$

Bài tập làm tương tự

Bài 8. Rút gọn các biểu thức sau

$$a. A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}+2} + \frac{1}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a-4} \text{ với } a>0, a \neq 4.$$

$$b. B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{2b}{a-b} \text{ với } a>0, b>0, a \neq b.$$

$$c. C = \left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} \right)^2 \text{ với } a>0, b>0, a \neq b.$$

$$d. D = \left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} + 2 \right) \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{a}+a}{1+\sqrt{a}} \right) \text{ với } a \geq 0, a \neq 1.$$

e. $E = \frac{5\sqrt{x}+4}{x-5\sqrt{x}+4} - \frac{3-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 16; x \neq 1$.

f. $F = \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{a^2b}+\sqrt{ab^2}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ với $a > 0, b > 0, a \neq b$.

g. $G = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \sqrt{a + \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2}$ với $ab > 0$.

h. $H = \left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{a}}{1-a} \right)^2$ với $a \geq 0, a \neq 1$.

i. $I = \left(\frac{2a^2 - \left(\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2} \right)^3 + b^2}{a^2 - \left(\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2} \right)^3 + 2b^2} \right)^3$ với a và b không đồng thời bằng không.

j. $J = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, (với $x > 0; x \neq 9$). Rút gọn biểu thức và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $J > \frac{1}{2}$.

k. $K = \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a} \right)^2$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$

l. $L = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right) \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right)$ với $a > 0$ và $a \neq 1$

Bài 9. Cho biểu thức $P(a) = \sqrt{a^2} + \sqrt{a^3} + \frac{a^2-a}{\sqrt{a}+1}$, với a là số thực không âm.

a. Rút gọn $P(a)$.

b. Tìm a thỏa mãn $a^2 + a - P = 0$.

Bài 10. Cho biểu thức $P(a) = \left(\frac{2}{a-2\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a^3}+4(\sqrt{a}-a)}$ với $a > 0, a \neq 4$

a. Rút gọn biểu thức $P(a)$.

b. Tìm a để $P(a) = 1$.

c. Tìm số nguyên a là số nguyên.

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q(a) = (\sqrt{a}-3) \cdot P(a)$.

Bài 11. Cho hai biểu thức $P = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ và $Q = \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$ với $x > 0, y > 0$.

a. Rút gọn biểu thức P và Q .

b. Tính $P \cdot Q$ biết $x = 2\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$

Bài 12. Cho biểu thức $M = \frac{(x-3)^2 + 3x - 7}{x^2 - 4}$ với $x \neq \pm 2$.

a. Rút gọn biểu thức M .

b. Tìm các giá trị của x để $M = \frac{1}{3}$.

Bài 13. Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right) : \frac{x-\sqrt{6}}{x^2-2}$ với $x \neq \pm\sqrt{2}$.

a. Rút gọn biểu thức P .

b. Tính $P(10)$.

Bài 14. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}} \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right)$ với $a > 1$.

a. Rút gọn biểu thức Q .

b. Tính $Q(5)$.

Bài 15. Cho hai biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0; x \neq 25$.

a. Tìm giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

b. Rút gọn biểu thức B .

c. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất

VẤN ĐỀ 2. Giải phương trình

I. Phương trình bậc hai: Phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ (1)

Cách giải: ① Tính $\Delta = b^2 - 4ac$ hoặc $\Delta = b'^2 - ac$ trong đó $b' = \frac{b}{2}$

② Nhận định từ biệt thức Δ

• $\Delta < 0$ suy ra phương trình (1) vô nghiệm

• $\Delta = 0$ suy ra phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

• $\Delta > 0$ suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

③ Kết luận

Cách khác:

Nhận thấy: • $a + b + c = 0$ suy ra phương trình (1) có nghiệm là $x_1 = 1, x_2 = -\frac{c}{a}$

• $a - b + c = 0$ suy ra phương trình (1) có nghiệm là $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$

Lưu ý: Phương trình tích $A.B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ hoặc $B = 0$

Bài 1. Giải các phương trình sau

a. $x^2 - 3x - 10 = 0$ b. $x^2 - x - 12 = 0$ c. $6x^2 - x - 2 = 0$ d. $-9x^2 + 30x - 25 = 0$

HD Giải

a. $x^2 - 3x - 10 = 0$. (Xác định các hệ số $a=1, b=-3, c=-10$, **Lưu ý:** Trước khi giải các em có thể sử dụng máy tính kiểm tra nghiệm trước)

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.1.(-10) = 49 > 0$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2.1} = 5; x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2.1} = -2$

b. $x^2 - x - 12 = 0$. Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.(-12) = 49 > 0$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2.1} = 4; x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2.1} = -3$

c. $6x^2 - x - 2 = 0$. Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.6.(-2) = 49 > 0$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2.6} = \frac{2}{3}; x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2.6} = -\frac{1}{2}$

d. $-9x^2 + 30x - 25 = 0$. Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4.(-9).(-25) = 0$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2.(-9)} = \frac{5}{3}$

Hoặc giải như sau: Ta có: $-9x^2 + 30x - 25 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 30x + 25 = 0 \Leftrightarrow (3x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$.

Bài tập tương tự

Bài 2. Giải các phương trình sau

- a. $4x^2 - 7x + 4 = 0$ b. $2x^2 - 8x = 0$ c. $x^2 - 7x + 6 = 0$ d. $x^2 + 10x + 21 = 0$
e. $x^2 - 14x + 48 = 0$ f. $2x^2 - 5x + 2 = 0$ g. $x^2 + 2x + 7 = 0$ h. $x^2 + 6x + 9 = 0$

II. Phương trình trùng phương: Phương trình có dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$ (2)

- Cách giải:**
- ① Đặt $t = x^2$, ($t \geq 0$), phương trình (2) trở thành: $at^2 + bt + c = 0$ (2')
 - ② Giải phương trình (2') là phương trình bậc hai theo biến t , lưu ý điều kiện $t \geq 0$
 - ③ Kết luận
 - Phương trình (2') vô nghiệm suy ra phương trình (2) vô nghiệm
 - Phương trình (2') có 1 nghiệm suy ra phương trình (2) có 2 nghiệm
 - Phương trình (2') có 2 nghiệm suy ra phương trình (2) có 4 nghiệm

Bài 3. Giải các phương trình sau

- a. $x^4 - 16x^2 = 0$ b. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ c. $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ d. $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$

HD Giải

a. $x^4 - 16x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 4 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-4; 0; 4\}$

b. Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$ (thỏa điều kiện)

- Với $t = 1$, ta có: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- Với $t = 4$, ta có: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-2; -1; 1; 2\}$

c. Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -3 \end{cases}$ (không thỏa điều kiện)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

d. Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 7t - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 9 \end{cases}$ (thỏa điều kiện)

- Với $t = -2$: không thỏa điều kiện
- Với $t = 9$, ta có: $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-3; 3\}$

Bài tập làm tương tự

Bài 4. Giải các phương trình sau

- a. $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$ b. $3x^4 + 10x^2 + 3 = 0$ c. $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$ d. $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$
e. $x^4 - x^2 - 6 = 0$ f. $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ g. $x^4 + 10x^2 + 21 = 0$ h. $3x^4 - 18x^2 = 0$

III. Một số phương trình khác

Phương pháp chung: Đưa các phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ hoặc bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ hoặc phương trình tích.

1. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

- ① Mẫu có chứa biến thì ta cần lấy điều kiện.
- ② Quy đồng bỏ mẫu và giải phương trình mới tìm được
- ③ Kết luận nghiệm cần so với điều kiện để nhận loại nghiệm

2. Phương trình chứa dấu căn có các dạng cơ bản

① $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$ ② $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \text{ (hay } A \geq 0) \\ A = B \end{cases}$

$$\textcircled{3} \sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \ (C \geq 0) \\ A + B + 2\sqrt{AB} = C \end{cases} \quad \text{đưa về dạng } \textcircled{1}.$$

3. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối có các dạng cơ bản

$$\textcircled{1} |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 = B^2 \end{cases} \quad \textcircled{2} |A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$$

4. Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ

① Chọn biến hay hàm phù hợp để đặt và lưu ý điều kiện

② Đưa phương trình đã cho về phương trình theo ẩn phụ

③ Giải, so với điều kiện nhận loại nghiệm cho phù hợp

Bài 5. Giải các phương trình sau

a. $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{2x+1} = \frac{3}{10}$

b. $\frac{x-2}{x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-x}$

c. $(x^2 - 4x) \cdot \sqrt{x-3} = 0$

d. $\frac{2x-6}{\sqrt{x-1}} + x\sqrt{x-1} = 0$

e. $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$

f. $\sqrt{2x-1} = x-2$

g. $\sqrt{5x+1} - |x+1| = 0$

h. $(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 - 5 = 0$

i. $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$

HD Giải

a. Điều kiện: $x \neq -2$ và $x \neq -\frac{1}{2}$.

Ta có: $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{2x+1} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow 10x(2x+1) - 10(x+2) = 3(x+2)(2x+1)$

$$\Leftrightarrow 14x^2 - 15x - 26 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -\frac{13}{14} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{2; -\frac{13}{14}\right\}$.

b. Điều kiện: $x \neq 0$ và $x \neq 1$.

Ta có: $\frac{x-2}{x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-x} \Leftrightarrow x(x-2) = (x-1) - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

So với điều kiện, Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

c. Điều kiện: $x \geq 3$. Ta có: $(x^2 - 4x) \cdot \sqrt{x-3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ \sqrt{x-3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = 3 \end{cases}$

So với điều kiện, Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3; 4\}$.

d. Điều kiện: $x > 1$. Ta có: $\frac{2x-6}{\sqrt{x-1}} + x\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x-6 + x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$

So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2$

e. Điều kiện $x \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{x}$, $t \geq 0$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 4 \text{ (nhận)} \end{cases}$

Với $t = 4$, ta có: $\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 16$.

$$f. \text{ Ta có: } \sqrt{2x-1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x-1 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x=1 \Leftrightarrow x=5. \\ x=5 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 5$.

$$g. \text{ Điều kiện: } x \geq -\frac{1}{5}.$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{5x+1} - |x+1| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5x+1} = |x+1| \Leftrightarrow 5x+1 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

$$h. \text{ Ta có: } (x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x) - 6 = 0 (*)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 2x. \text{ Phương trình } (*) \text{ trở thành: } t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 3 \end{cases}$$

• Với $t = -2$, ta có $x^2 + 2x = -2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$ vô nghiệm

$$\bullet \text{ Với } t = 3, \text{ ta có } x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-3; 1\}$.

So với điều kiện, Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{0; 3\}$.

$$i. \text{ Ta có: } x(x+1)(x+2)(x+3) = 24 \Leftrightarrow [x(x+3)][(x+1)(x+2)] = 24 \Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 24 (*)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 3x, \text{ Phương trình } (*) \text{ trở thành: } t(t+2) = 24 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -6 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } t = 4, \text{ ta có } x^2 + 3x = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ r = -4 \end{cases}$$

• Với $t = -6$, ta có $x^2 + 3x = -6 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 4 = 0$: Phương trình vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-4; 1\}$.

Bài tập làm tương tự

Bài 6. Giải các phương trình sau

$$a. \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+4} \quad b. \frac{2x}{x-1} = \frac{x^2 - 5x + 10}{(x-1)(x+2)} \quad c. (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$$

$$d. 2x^2 - x - 3 = \sqrt{2-x} \quad e. (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 6) = 24 \quad f. (2x+3)^2 (x+1)(x+2) = 18$$

Bài 7. Cho phương trình: $x^2 - (m-1)x - m = 0$. Tìm m để phương trình trên có một nghiệm bằng 2. Tính nghiệm còn lại.

Vấn đề 3. Hệ phương trình

1. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\text{Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó x, y là hai ẩn; các chữ số còn lại là hệ số.

Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình (1). Giải hệ phương trình (1) là tìm tập nghiệm của nó.

Cách giải: Có hai cách giải quen thuộc và sử dụng hỗ trợ máy tính bỏ túi.

Cách 1. Phương pháp thế: Từ một phương trình nào đó của hệ, biểu thị một ẩn qua ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại để được phương trình bậc nhất một ẩn.

Cách 2. Phương pháp cộng đại số: Biến đổi cho hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình là hai số đối nhau rồi cộng từng vế hai phương trình lại để được phương trình bậc nhất một ẩn.

Cách 3. Sử dụng máy tính bỏ túi.

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau

a.
$$\begin{cases} 2x + y = -4 \\ 3x - 4y = -17 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$$

HD Giải

Cách 1. Phương pháp thế

a.
$$\begin{cases} 2x + y = -4 \\ 3x - 4y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 - 2x \\ 3x - 4(-4 - 2x) = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = -33 \\ y = -4 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x; y) = (-3; 2)$.

b.
$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(1 - 5y) \\ 5 \cdot \frac{1}{3}(1 - 5y) + 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(1 - 5y) \\ -\frac{25}{3}y + 2y = 9 - \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{43}{19} \\ y = -\frac{22}{19} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{43}{19}; -\frac{22}{19}\right)$.

Cách 2. Phương pháp cộng đại số

a.
$$\begin{cases} 2x + y = -4 \\ 3x - 4y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = -16 \\ 3x - 4y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = -33 \\ 3x - 4y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{3x + 17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x; y) = (-3; 2)$.

b.
$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 10 = -2 \\ 25x + 10y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x = 43 \\ y = \frac{9 - 5x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{43}{19} \\ y = -\frac{22}{19} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{43}{19}; -\frac{22}{19}\right)$.

Bài tập làm tương tự (chọn hợp lý một trong 2 cách để giải)

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau

a.
$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -6x + 8y = 1 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x - 5y = 2 \\ -2x + 10y = -4 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 3x - 4y = 18 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 6x + 9y = -5 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ -8x + 2y = -10 \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

g.
$$\begin{cases} 3x + y = 17 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

h.
$$\begin{cases} 2x + 5y = -8 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau

a.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 5x - 2y = 11 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

g.
$$\begin{cases} 5x - 2y = -11 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$

h.
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

2. Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc cao

a. Định nghĩa

Hệ phương trình gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc cao có dạng

$$\begin{cases} ax+by+c=0 & (1) \\ f(x;y)=0 & (2) \end{cases} \text{ . Trong đó } f(x;y)=0 \text{ là một phương trình bậc cao theo hai ẩn } x \text{ và } y \text{ .}$$

b. Phương pháp giải

- Từ phương trình (1) rút ẩn x hoặc ẩn y theo ẩn còn lại;
- Thế vào phương trình (2), để đư phương trình (2) về phương trình một ẩn.

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{llll} \text{a. } \begin{cases} x+2y=5 \\ x^2+2y^2-2xy=5 \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} x-y=0 \\ x^2-y^2+xy=1 \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=164 \end{cases} & \text{d. } \begin{cases} 2x+y=1 \\ x^2+y^2-5xy=7 \end{cases} \end{array}$$

HD Giải

$$\text{a. } \begin{cases} x+2y=5 \\ x^2+2y^2-2xy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ y^2-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ y=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(3;1)$ và $(1;2)$

$$\text{b. } \begin{cases} x-y=0 \\ x^2-y^2+xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(1;1)$ và $(-1;-1)$

$$\text{c. } \begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=164 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+y \\ y^2+2y-80=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+y \\ y=8 \\ y=-10 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(10;8)$ và $(-8;-10)$

$$\text{d. } \begin{cases} 2x+y=1 \\ x^2+y^2-5xy=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 5x^2+6x-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ x=1 \\ x=-\frac{11}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(1;-1)$ và $\left(-\frac{11}{5}; \frac{22}{5}\right)$

Bài tập làm tương tự

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{llll} \text{a. } \begin{cases} x-y+2=0 \\ x^2+xy=4 \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} 2x-3y=1 \\ x^2-xy=24 \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} 4x+9y=6 \\ 3x^2+2xy-x+3y=0 \end{cases} & \text{d. } \begin{cases} x-y-7=0 \\ x^2-y^2+2x+2y+4=0 \end{cases} \\ \text{e. } \begin{cases} (x+y+2)(2x+2y-1)=0 \\ 3x^2-32y^2+5=0 \end{cases} & \text{f. } \begin{cases} (x+2y+1)(x+2y+2)=0 \\ xy+y^2+3y+1=0 \end{cases} & \text{g. } \begin{cases} x+y=1 \\ x^3-y^3=x-y \end{cases} \end{array}$$

3. Hệ phương trình đối xứng loại 1

a. Định nghĩa

Hệ $\begin{cases} f(x;y)=0 \\ g(x;y)=0 \end{cases}$ được gọi là hệ đối xứng loại I nếu khi thay x bởi y và ngược lại thì mỗi phương trình trong hệ không thay đổi.

b. Phương pháp giải

- Đặt $S=x+y; P=x.y$
- Đưa hệ đã cho về hệ có hai ẩn $S; P$
- Tìm $S; P$. Khi đó $x; y$ là nghiệm của phương trình $X^2-SX+P=0$

c. Chú ý

- Điều kiện có nghiệm $S^2 - 4P \geq 0$
- Nếu $(x; y)$ là một nghiệm của hệ, thì $(y; x)$ cũng là một nghiệm của hệ
- Cách biến đổi:
 - $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$
 - $x^3 + y^3 = S(S^2 - 3P)$
 - $x^4 + y^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

Bài 6. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x^2 + x + y + y^2 = 8 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 102 \\ x + xy + y = 69 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 160 \\ 3(x + y) = xy \end{cases}$

HD Giải

a. HD: Đặt $S = x + y; P = x.y$. Khi đó:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S^2 - P = 4 \\ S + P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + S - 6 = 0 \\ P = 2 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ S = -3 \\ P = 2 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 0 \\ S = -3 \\ P = 5 \end{cases}$$

♦ Với $\begin{cases} S = 2 \\ P = 0 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 2X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X = 2 \end{cases}$

Suy ra hệ có nghiệm là $(2; 0); (0; 2)$

♦ Với $\begin{cases} S = -3 \\ P = 5 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 3X + 5 = 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(2; 0); (0; 2)$.

b) $(1; 2); (2; 1)$ c) $(6; 9); (9; 6)$ d) $(-5 - \sqrt{55}; -5 + \sqrt{55}); (-5 + \sqrt{55}; -5 - \sqrt{55})$

Vấn đề 4. Ứng dụng định lý Vi-ét

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ (*)

① Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*) thì $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

② Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$

③ Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$

④ Nếu $a.c < 0$ (a, c trái dấu) thì phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu

⑤ Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*) thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

⑥ Xét hai số u, v thỏa $S = u + v, P = u.v$ và $S^2 - 4P \geq 0$.

Khi đó u, v là các nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$

Lưu ý: Hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2

♦ $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$ ♦ $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P$

♦ $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = S(S^2 - 3P)$

♦ $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

$$\diamond \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$$

$$\diamond \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{S^2 - 2P}{S^2}$$

Bài 1. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $3x^2 - 7x - 6 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $A = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$

b. $B = x_1^3 + x_2^3$

c. $C = |x_1 - x_2|$

HD Giải

Theo hệ thức Vi_ét, ta có: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{7}{3}$; $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -2$

a. $A = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -2 \cdot \frac{7}{3} = -\frac{14}{3}$

b. $B = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = S(S^2 - 3P) = \frac{7}{3} \left(\left(\frac{7}{3} \right)^2 - 3 \cdot (-2) \right) = \frac{721}{27}$

c. $C^2 = |x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = S^2 - 4P = \left(\frac{7}{3} \right)^2 - 4 \cdot (-2) = \frac{121}{9}$.

Suy ra $C = \frac{11}{3}$ vì $C = |x_1 - x_2| \geq 0$.

Bài tập làm tương tự

Bài 2. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $2x^2 - 9x + 2 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $A = x_1^2 + x_2^2$

b. $B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

c. $C = x_1^3 + x_2^3$

d. $D = x_1^4 + x_2^4$

e. $E = 2|x_1 - x_2|$

Bài 3. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$, với m là tham số. Tìm các giá trị của tham số m trong các trường hợp sau

a. Phương trình có nghiệm

b. Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 x_2 = 1$

HD Giải

Phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (1). Ta có: $\Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (m^2 - m + 1) = m - 1$

a. Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Vậy $m \geq 1$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

b. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1$ (*)

Theo hệ thức Vi_ét, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - m + 1$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 5x_1 x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow (2m)^2 - 5(m^2 - m + 1) = 1 \Leftrightarrow -m^2 + 5m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases} \text{ (thỏa (*))}$$

Vậy $m \in \{2, 3\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 4. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$.

HD Giải

Phương trình đã cho có $\Delta' = (-m)^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = m - 1$, $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = m + 1$ ($x_1 < x_2$)

Theo giả thiết, ta có $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 1 \\ m + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$

Vậy: $m \in (0; 2)$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

Bài tập làm tương tự

Bài 5. Cho phương trình $2x^2 - (m + 3)x + 2m - 3 = 0$, với m là tham số.

- Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .
- Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với m
- Tìm tất cả giá trị của m để $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 6. Cho phương trình $mx^2 - 2(m + 1)x + m - 3 = 0$, với m là tham số.

- Tìm tất cả giá trị của m để phương trình vô nghiệm
- Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 3x_2 = 8$

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 + 2m - 8 = 0$, với m là tham số.

- Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho vô nghiệm?
- Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt?
- Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho hai nghiệm dương phân biệt?
- Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho hai nghiệm trái dấu?

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - (3m + 14)x + (4m + 12)(2 - m) = 0$, với m là tham số.

- Định giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Định giá trị của m để biểu thức $P = x_1 \cdot x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 9. Cho phương trình $x^2 - (m + 1)x - 3m + 2 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 + 2x_2 = 5$

Bài 10. Cho phương trình $x^2 - (2m + 1)x + m + 2 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 3$

Bài 11. Cho phương trình bậc hai $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0$ (*) (m là tham số)

- Chứng minh rằng phương trình (*) luôn có nghiệm với mọi số m .
- Tìm các giá trị của m để phương trình (*) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $-1 \leq \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 \cdot x_2} \leq 1$

Bài 12. Cho phương trình: $x^2 + ax + b + 2 = 0$ (a, b là tham số). Tìm các giá trị của tham số a, b để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa điều kiện: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1^3 - x_2^3 = 28 \end{cases}$

Bài 13. Cho phương trình $x^2 - (m + 2)x + m + 8 = 0$ (1) với m là tham số.

- Giải phương trình (1) khi $m = -8$.
- Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ thỏa $x_1^3 - x_2^3 = 0$.

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$ và parabol $(P): y = x^2$

- Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b. Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1 x_2} + 1$$

Bài 15. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x + m^2 + 2m$ (m là tham số, $m \in \mathbb{R}$).

a. Xác định tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua điểm $I(1;3)$.

b. Tìm m để parabol (P) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai điểm A, B ; tìm m sao cho $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2 = 2020$.

Bài 16. Cho phương trình $x^2 - x + 3m - 11 = 0$ (1) (với m là tham số)

a. Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có nghiệm kép

b. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $2017x_1 + 2018x_2 = 2019$

Bài 17. Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$ có giá trị nguyên.

Vấn đề 5. Phương trình đường thẳng

1. Hàm số bậc nhất

a. Định nghĩa: Hàm số bậc nhất là hàm số cho bởi công thức $y = ax + b$ với $a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$

b. Tính chất: Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ có tính chất sau:

✓ Xác định mọi giá trị của x thuộc $\mathbb{R}$.

✓ Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$

✓ Nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$

c. Đồ thị: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(0; b), B(-\frac{b}{a}; 0)$

2. Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

• Đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) còn gọi là đường thẳng $d: y = ax + b$, a được gọi là hệ số góc; b được gọi là tung độ gốc của đường thẳng.

• Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ với hệ số góc $k \neq 0$ cho trước có phương trình $y = k(x - x_0) + y_0$

• Đường thẳng d tạo với các trục tọa độ một góc là α , ta có: $k = \tan \alpha$.

3. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Phương trình có dạng $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, a, b không đồng thời bằng 0.

Ta có: $ax + by = c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} = kx + m$ hay đưa về dạng hàm số $y = ax + b$

4. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $d_1: y = a_1x + b_1$ và $d_2: y = a_2x + b_2$

$$\textcircled{1} d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} d_1 \text{ cắt } d_2 \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$$

$$\textcircled{4} d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$$

Bài 1. Viết phương trình $d: y = ax + b$ biết d :

a. Đi qua $A(4;3), B(2;-1)$

b. Đi qua điểm $C(1;-1)$ và song song với trục Ox

c. Đi qua điểm $D(-5;4)$ và song song với trục Oy

d. Song song với đường thẳng $y = 3x - 2$ và đi qua điểm $E(2; 3)$

e. Đi qua điểm $F(3; -2)$ và vuông góc đường thẳng $(d): y = 3x - 4$

HD Giải

a. Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm A và B, nên ta có $\begin{cases} 4a + b = 3 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \end{cases}$. Vậy $y = 2x - 5$

b. Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm C và song song với trục Ox , nên ta có phương trình cần tìm là $y = b = -1$

c. Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm D và song song với trục Oy , nên ta có phương trình cần tìm là $x = a = -5$

d. Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm E và song song với đường thẳng $y = 3x - 2$, nên ta có

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a = a' = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -3 \end{cases}. \text{ Vậy } y = 3x - 3.$$

e. Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm F và vuông góc với đường thẳng $y = 3x - 4$, nên ta có

$$\begin{cases} 3a + b = -2 \\ a \cdot a' = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } y = -\frac{1}{3}x - 1$$

Bài tập làm tương tự

Bài 2. Định a và b sao cho đồ thị hàm số $y = ax + b$:

a. Đi qua hai điểm $A(2; 8)$ và $B(-1; 0)$

b. Đi qua điểm $C(5; 3)$ và song song với đường thẳng $(d): y = -2x + 8$

c. Đi qua điểm $D(3; -2)$ và vuông góc đường thẳng $(d): y = -3x + 4$

d. Đi qua điểm $E(1; -2)$ và có hệ số góc là $0,5$

Bài 3. Viết phương trình đường thẳng $y = ax + b$ thoả:

a. Đi qua hai điểm $A(5; 3)$ và $B(3; -4)$

b. Đi qua hai điểm $C(-1; 3)$ và $D(1; 2)$

c. Đi qua điểm $E(-5; 4)$ và song song với trục Oy

d. Đi qua điểm $F(\sqrt{2}; 1)$ và song song với trục Ox

Bài 4. Cho hai hàm số $y = (m - 1)x + 15$ và $y = (3 - 4m)x - 17$, m là tham số. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hai hàm số đã cho là những đường thẳng:

a. Cắt nhau

b. Song song

c. Trùng nhau

d. Vuông góc

HD Giải

a. Đồ thị hai hàm số cắt nhau $\Leftrightarrow m - 1 \neq 3 - 4m \Leftrightarrow m \neq \frac{4}{5}$

b. Đồ thị hai hàm số song song với nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 3 - 4m \\ 15 \neq -17 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{4}{5}$

c. Đồ thị hai hàm số trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 3 - 4m \\ 15 = -17 \end{cases}$. Không có giá trị m thỏa mãn YCBT.

d. Đồ thị hai hàm số vuông góc nhau $\Leftrightarrow (m - 1)(3 - 4m) = -1 \Leftrightarrow -4m^2 + 7m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}$

Bài 5. Cho đường thẳng $(d): y = (2 - 3m)x + 2m + 1$, m là tham số.

a. Với giá trị nào của m thì (d) không đi qua gốc tọa độ?

b. Chứng minh rằng (d) luôn đi qua một điểm cố định với mọi m . Tìm tọa độ điểm đó.

HD Giải

a. Đường thẳng (d) không đi qua gốc tọa độ $\Leftrightarrow (2-3m).0+2m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{2}$.

b. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định

Đường thẳng (d) luôn qua M với mọi $m \Leftrightarrow (2-3m)x_0 + 2m + 1 = y_0$ với mọi m

$$\Leftrightarrow (3x_0 - 1)m = 2x_0 - y_0 + 1 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 - 1 = 0 \\ 2x_0 - y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{3} \\ y_0 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy (d) luôn đi qua điểm cố định $M\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$ với mọi m .

Bài tập làm tương tự

Bài 6. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số

a. $y = (2m-5)x + m - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$? b. $y = (-m^2 + 2m - 2)x + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

c. $y = (m^2 - 16)x + 3$ vuông góc với trục tung? d. $y = (m-2)x + m$ đi qua điểm $A(-2; 3)$?

Bài 7. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số hai đường thẳng $(d_1): y = 2x + 5m - 3$ và

$(d_2): y = -x + 2m$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung?

Bài 8. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m-2)x + 2m$ và $(d_2): y = (2-3m)x + m - 1$, m là tham số. Tìm giá trị của m trong mỗi trường hợp sau

a. (d_1) và (d_2) cắt nhau b. (d_1) và (d_2) song song nhau c. (d_1) và (d_2) vuông góc nhau

Bài 9. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = mx - 3$ và $(d_2): y = (m^2 - 2)x - m - 1$, m là tham số. Tìm giá trị của m trong mỗi trường hợp sau

a. (d_1) và (d_2) cắt nhau b. (d_1) và (d_2) song song nhau c. (d_1) và (d_2) trùng nhau

Bài 10. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = (-3m^2 + 12m + 5)x + 2m + 1$ có hệ số góc lớn nhất.

Bài 11. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = (m^2 - 3)x + 2 - m$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba đường thẳng $d_1: y = 2x - 1$; $d_2: y = x$; $d_3: y = -3x + 2$.

Tìm hàm số có đồ thị là đường thẳng d song song với đường thẳng d_3 đồng thời đi qua giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 4$

a. Vẽ Parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

b. Tìm tọa độ giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng (d) bằng phép tính.

c. Viết phương trình đường thẳng $(d'): y = ax + b$. Biết rằng (d') song song với (d) và (d_1) và đi qua điểm $N(2; 3)$.

Bài 14. Xác định hệ số a và b của hàm số $y = ax + b$ biết đồ thị của nó là đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = -3x + 2019$ và đi qua điểm $M(2; 1)$.

Vấn đề 6. Parabol $(P): y = ax^2, a \neq 0$

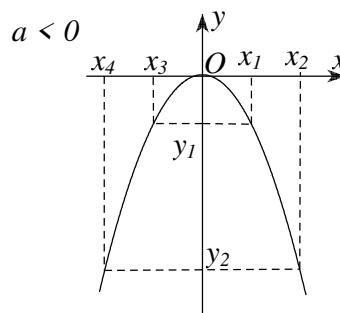
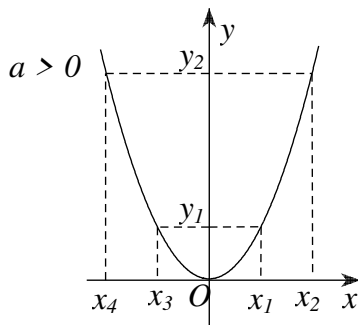
1. Cách vẽ đồ thị hàm số $(P): y = ax^2, a \neq 0$

① Lấy 5 điểm như sau: Điểm x_1 đối với x_3 và x_2 đối với x_4

Ta có bảng biến thiên:

x	x_4	x_3	0	x_1	x_2
$y = ax^2$	y_2	y_1	0	y_1	y_2

② Vẽ đồ thị đi qua 5 điểm trên



2. Tương giao giữa parabol $(P): y = ax^2, a \neq 0$ và đường thẳng $(d): y = mx + n$

① Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $(d): ax^2 - mx - n = 0 (*)$

② Giải phương trình $(*)$ và đưa ra kết luận

- Phương trình $(*)$ vô nghiệm. Khi đó (d) và (P) không có điểm chung
- Phương trình $(*)$ có nghiệm kép. Khi đó (d) và (P) có một điểm chung
- Phương trình $(*)$ có hai phân biệt nghiệm. Khi đó (d) và (P) có hai điểm chung

Bài 1. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = 6 - x$.

a. Vẽ (P) và (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ

b. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính

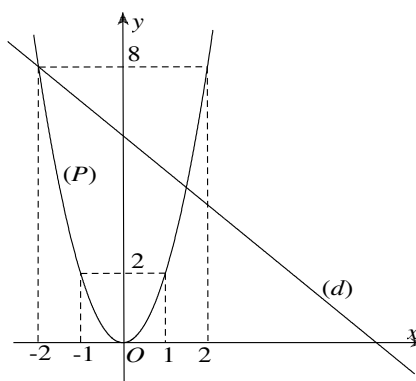
HD Giải

a. Vẽ (P) và (d)

Ta có:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

x	6	0
$y = 6 - x$	0	6



b. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $2x^2 = 6 - x \Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm $A(-2; 8)$ và $B\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Bài 2.

a. Vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b. Cho hàm số $y = 2x + m - 6$ có đồ thị là (d) . Tìm tham số m để $(P): y = x^2$ cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

HD Giải

a. HS tự vẽ

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 = 2x + m - 6 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 6 = 0$

Ta có: $\Delta = (-2)^2 - 4(-m + 6) = 4 + 4m - 24 = 4m - 20$

Để (P) cắt $(d): y = 2x + m - 6$ tại hai điểm phân biệt có các hoành độ dương thì phương trình phải có hai

$$\text{ng nghiệm phân biệt dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 20 > 0 \\ 2 > 0 \\ -m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m < 6$$

Vậy $5 < m < 6$ thì (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) .

a. Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = x + m^2$ và (P) cắt nhau tại hai điểm có hoành độ các giao điểm là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \geq 8$.

HD Giải

a. HS tự vẽ

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $\frac{1}{2}x^2 = x + m^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2m^2 = 0$

Ta có $\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-2m^2) = 2m^2 + 1 > 0$ với mọi m

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -2m^2 \end{cases}$$

Theo giả thiết: $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \geq 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \geq 8$

$$\Leftrightarrow 4 + 2m^2 \geq 8 \Leftrightarrow m^2 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2} \text{ hoặc } m \leq -\sqrt{2}$$

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

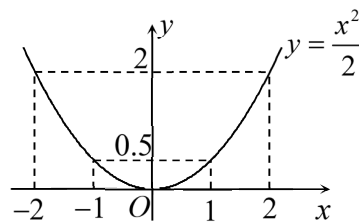
a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$.

b. Chứng minh đường thẳng $d: y = mx - m + 1$, với m là tham số, luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với mọi giá trị của m . Tính $y_1 + y_2$ theo m .

HD Giải

a. Ta có:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{x^2}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



b. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $\frac{x^2}{2} = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2(m-1) = 0$ (*)

Phương trình (*) có $\Delta' = (-m)^2 - 2(m-1) = m^2 - 2m + 2 = (m-1)^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

Suy ra d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$,

Trong đó $y_1 = mx_1 - m + 1, y_2 = mx_2 - m + 1$.

Suy ra $y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2) - 2m + 2 = m(2m) - 2m + 2 = 2m^2 - 2m + 2$.

Bài tập làm tương tự

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$.

b. Cho hàm số $y = mx + n$ có đồ thị là đường thẳng (d) . Tìm m và n biết (d) song song với đường thẳng $(d') : y = x + 3$ và đi qua điểm $M(2; 4)$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = 2x^2$.

b. Chứng minh rằng đường thẳng $(d) : y = kx + 1$ luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt với mọi k .

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$.

b. Chứng minh rằng khi m thay đổi, các đường thẳng $y = mx - \frac{1}{8}(4m-1)$ luôn đi qua điểm cố định nằm trên (P) .

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$.

b. Tìm tham số m để đường thẳng $(d) : y = 2x - m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.

b. Cho điểm A thuộc (P) và có hoành độ bằng 4. Tìm tham số m để đường thẳng $(d) : y = x - m$ đi qua A .

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.

b. Đường thẳng $(d) : y = x + \frac{5}{4}$ cắt (P) tại M và N . Tính diện tích tam giác OMN .

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.

b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d) : y = mx - m + 1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1 và x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = 6$.

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$.

b. Tìm tham số m để đường thẳng $(d) : y = (m^2 - 4)x + m^2 - 3$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 13. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = mx + 2$, với m là tham số.

a. Khi $m = 1$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d)

b. Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với mọi m .

c. Tìm m để $x_1x_2 + y_1 + y_2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 14. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 2$, với m là tham số. Tìm giá trị của m trong các trường hợp sau

a. (d) và (P) không có điểm chung

b. (d) và (P) tiếp xúc với nhau

c. (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt

d. (d) song song với đường thẳng $2x - y + 4 = 0$

Bài 15. Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m - 1)x - m$, với m là tham số.

a. Khi $m = 3$, hãy vẽ (P) và (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy . Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phương pháp tính.

b. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm trên cùng một phía đối với trục tung.

Bài 16. Cho Parabol $(P): y = -2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - m$ (với m là tham số).

a. Vẽ parabol (P) .

b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$

Bài 17. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 2m - 1 = 0$ (1) với m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{3 + x_1x_2} = 2m + 1$.

Bài 18. Cho Parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m - 1$ (m là tham số)

a. Vẽ đồ thị (P) .

b. Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ là hai giao điểm phân biệt của (d) và (P) . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $x_A > 0$ và $x_B > 0$.

Bài 19. Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$.

a. Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .

b. Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng -2 .

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng

$(d): y = 2x + 4m^2 - 8m + 3$ (m là tham số thực). Tìm các giá trị của m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện $y_1 + y_2 = 10$.

Bài 21. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 3$.

a. Vẽ Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 3$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b. Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d) .

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = -mx + 3 - m$ (với m là tham số).

a. Tìm tọa độ điểm M thuộc parabol (P) , biết điểm M có hoành độ bằng 4.

b. Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của hai điểm A, B . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2 + 20$

Vấn đề 7. Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Phương pháp chung:

- ① Chọn ẩn, đơn vị cho ẩn và điều kiện thích hợp cho ẩn.
- ② Biểu đạt các đại lượng khác theo ẩn đã gọi, lưu ý thống nhất đơn vị
- ③ Dựa vào dữ kiện, điều kiện của bài toán để lập phương trình hoặc hệ phương trình
- ④ Giải phương trình hoặc hệ phương trình, so sánh điều kiện của ẩn đưa ra kết quả bài toán yêu cầu và kết luận.

Bài 1. Lớp 9A có 40 học sinh được chia thành một số tổ. Nếu tăng thêm 1 tổ thì mỗi tổ lúc này sẽ có ít hơn 2 học sinh so với lúc chưa tăng. Tính số tổ lúc đầu của lớp 9A (biết rằng số học sinh ở mỗi tổ luôn bằng nhau).

HD Giải

Gọi số tổ lúc đầu của lớp 9A là x (x nguyên dương).

Số học sinh chia theo tổ là : $\frac{40}{x}$ (học sinh)

Tăng thêm 1 tổ, số học sinh chia theo tổ là $\frac{40}{x+1}$ (học sinh)

Theo đề bài ta có: $\frac{40}{x} - 2 = \frac{40}{x+1}$

$$\Leftrightarrow 40(x+1) - 2x(x+1) = 40x \Leftrightarrow -2x^2 - 2x + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 & (\text{nhận}) \\ x = -5 & (\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy số tổ lúc đầu của lớp 9A là 4 tổ.

Bài 2. Anh Nam trồng cây trên một mảnh đất hình chữ nhật. Anh dự định trồng theo từng hàng và mỗi hàng có số cây bằng nhau. Nếu tăng thêm 1 hàng và mỗi hàng bớt đi 1 cây thì số cây phải trồng tăng thêm 7 cây. Nếu bớt đi 1 hàng và tăng thêm mỗi hàng 5 cây thì số cây phải trồng tăng thêm 11 cây. Hỏi số lượng cây mà Anh Nam dự định trồng là bao nhiêu ?

HD Giải

Gọi x (hàng) là số hàng dự định trồng và y (cây) là số cây dự định trồng trên mỗi hàng

Điều kiện $x, y \in \mathbb{N}^*$. Khi đó số cây dự định trồng là $x.y$ (cây)

Nếu tăng thêm 1 hàng và mỗi hàng bớt đi 1 cây thì số cây phải trồng tăng thêm 7 cây, ta có phương trình là: $(x+1)(y-1) = xy + 7$ (1)

Nếu bớt đi 1 hàng và tăng thêm mỗi hàng 5 cây thì số cây phải trồng tăng thêm 15 cây, ta có phương trình là: $(x-1)(y+5) = xy + 15$ (2)

Do đó, từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+1)(y-1) = xy + 7 \\ (x-1)(y+5) = xy + 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -8 \\ 5x - y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 15 \end{cases}$$

Vậy số cây mà anh Nam dự định trồng là : $7.15 = 105$ cây

Bài 3. Để thực hiện chương trình khuyến mãi nhân kỉ niệm ngày thành lập, một công ty điện tử thực hiện giảm giá 20% trên một tivi cho lô hàng gồm có 30 cái tivi với giá bán lẻ mỗi cái trước đó là 6200000VNĐ. Ngày thứ nhất công ty đã bán được 20 cái. Qua ngày thứ 2, công ty quyết định giảm giá thêm $x\%$ trên một tivi cho các tivi còn lại, với x là số nguyên dương.

a. Cho $x = 10$, tính số tiền mà công ty thu được nếu bán hết lô hàng khuyến mãi.

b. Biết giá vốn của mỗi chiếc tivi là 4500000VNĐ. Tìm giá trị lớn nhất của x để công ty không bị lỗ.

HD Giải

a. Số tiền thu được của công ty ngày thứ nhất: $20.0,8.6200000 = 99200000$ VNĐ

Số tiền thu được của công ty ngày thứ hai: $10.0,7.6200000 = 43400000$ VNĐ

Vậy tổng số tiền mà công ty thu được khi bán hết lô hàng khuyến mãi là 142600000 VNĐ

b. Tổng giá vốn của 30 cái tivi là $30.4500000 = 135000000$ VNĐ

Tổng số tiền mà công ty thu được khi bán hết lô hàng khuyến mãi là

$$20.0,8.6200000 + 10 \cdot \left(1 - \frac{20+x}{100}\right) \cdot 6200000 = 148800000 - 620000x$$

Công ty không lỗ khi: $148800000 - 620000x \geq 135000000 \Leftrightarrow 62x \leq 1380 \Leftrightarrow x \leq \frac{690}{31} \approx 22,258$

Vậy $x = 22$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4. Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau $150km$ với vận tốc dự định. Khi đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường AB , người đó dừng xe nghỉ 15 phút. Để đảm bảo đến B đúng thời gian dự định, người đó đã tăng tốc thêm $10km/h$ trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc dự định của người đi xe máy.

HD Giải

Gọi $x (km/h)$ là vận tốc dự định ($x > 0$).

Thời gian dự định đi từ A đến B là $\frac{150}{x} (h)$

Thời gian đi $\frac{2}{3}$ quãng đường là $\frac{100}{x} (h)$

Thời gian đi hết $\frac{1}{3}$ quãng đường còn lại là $\frac{50}{x+10} (h)$

Theo đề bài ta có: $\frac{150}{x} - \left(\frac{100}{x} + \frac{50}{x+10}\right) = \frac{1}{4}$. Giải phương trình, ta được $x = 40 (km/h)$

Bài 5. Quãng đường AB dài $120km$. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ A đến B . Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai $12km$ nên đến B trước ô tô thứ hai 30 phút. Tính vận tốc của ô tô thứ nhất.

HD Giải

Gọi vận tốc ô tô thứ nhất là $x (km/h)$. Điều kiện $x > 12$

Vận tốc ô tô thứ hai là $x - 12 (km/h)$

Thời gian ô tô thứ nhất đi từ A đến B là $\frac{120}{x} (h)$

Thời gian ô tô thứ hai đi từ A đến B là $\frac{120}{x-12} (h)$

Theo đề bài, ta có: $\frac{120}{x} + \frac{1}{2} = \frac{120}{x-12} \Leftrightarrow x^2 - 12x - 2880 = 0 \Leftrightarrow x = 60$ (nhận) hoặc $x = -48$ (loại)

Vậy vận tốc ô tô thứ nhất là $60 (km/h)$

Bài 6. Một nhóm học sinh có kế hoạch nhận trồng 200 cây tràm giúp cho gia đình bạn An. Vì có 2 học sinh bị bệnh không tham gia được nên mỗi học sinh còn lại phải trồng thêm 5 cây so với dự định để hoàn thành kế hoạch (Biết số cây mỗi học sinh trồng là như nhau). Tính số học sinh thực tế tham gia trồng cây.

HD Giải

Gọi x là số học sinh thực tế tham gia trồng cây ($x > 0$)

Số học sinh tham gia trồng cây theo dự định là $x + 2$

Theo đề bài, ta có: $\frac{200}{x} - \frac{200}{x+2} = 5 \Leftrightarrow 5x^2 + 10x - 400 = 0 \Leftrightarrow x = 8$ (nhận) hoặc $x = -10$ (loại)

Vậy số học sinh thực tế tham gia trồng cây là 8 học sinh.

Bài 7. Trong một buổi lễ tổng kết cuối năm, lớp 9A1 có mời thêm 15 bạn lớp khác đến dự. Vì lớp đã có 45 học sinh nên phải kê thêm 1 dãy ghế nữa và mỗi dãy phải ngồi thêm 1 học sinh mới đủ chỗ. Biết rằng mỗi dãy ghế có số học sinh ngồi như nhau và không thể ngồi quá 6 em. Hỏi lớp 9A1 ban đầu có bao nhiêu dãy ghế?

HD Giải

Gọi x là số dãy ghế lúc đầu ($x \in \mathbb{N}^*$). Khi đó số dãy ghế lúc sau là $x+1$

Số học sinh lúc ban đầu ngồi mỗi dãy ghế là $\frac{45}{x}$ (học sinh)

Số học sinh lúc sau ngồi mỗi dãy ghế là $\frac{60}{x+1}$ (học sinh)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{45}{x} + 1 = \frac{60}{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 14x + 45 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = 9$

Thử lại: Với $x = 5$ số học sinh ngồi mỗi dãy ghế là $\frac{45}{5} = 9$ học sinh (vì phạm điều kiện không thể ngồi quá 6 học sinh)

Vậy lớp 9A1 lúc đầu có 9 dãy ghế.

Bài 8. Một tổ trồng cây của trường nhận kế hoạch trồng 200 cây. Vì 2 tổ viên được điều sang làm việc khác nên mỗi tổ viên còn lại nhận trồng thêm 5 cây so với dự định lúc đầu để hoàn thành kế hoạch. Biết số cây mỗi người trồng như nhau. Tìm số tổ viên lúc đầu.

HD Giải

Gọi x là số tổ viên lúc đầu ($x > 2, x \in \mathbb{N}$). Số tổ viên lúc sau là $x-2$.

Số cây mỗi người trồng theo dự tính là $\frac{200}{x}$ (cây)

Số cây thực mỗi người trồng là $\frac{200}{x-2}$ (cây)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{200}{x} + 5 = \frac{200}{x-2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 80 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (nhận) hoặc $x = -8$ (loại)

Vậy số tổ viên lúc đầu là 10 người.

Bài 9. Một người đi xe gắn máy từ A đến B cách nhau 90km. Sau khi đi được 2 giờ, xe bị hỏng, người ấy phải dừng lại 15 phút để sửa rồi tiếp tục đi với vận tốc tăng thêm 10km/h và đi đến B đúng giờ đã định. Tìm vận tốc ban đầu của xe gắn máy.

HD Giải

Gọi x (km/h) là vận tốc ban đầu của xe gắn máy ($x > 0$). Vận tốc lúc sau là $x+10$ (km/h)

Quãng đường đi sau 2 giờ đầu là $2x$ km

Quãng đường đi sau khi sửa xe là $90-2x$ (km)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{90}{x} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{90-2x}{x+10} \Leftrightarrow x^2 + 90x - 3600 = 0 \Leftrightarrow x = 30$ (nhận) hoặc $x = -120$ (loại)

Vậy vận tốc ban đầu của xe gắn máy là 30 km/h

Bài 10. Một phòng họp có 120 ghế được xếp đều thành các dãy. Nếu muốn bớt đi 2 dãy thì phải xếp thêm 3 ghế vào mỗi dãy còn lại. Hỏi phòng họp có bao nhiêu dãy ghế và mỗi dãy có bao nhiêu ghế?

HD Giải

Gọi x là số ghế trên mỗi dãy ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số dãy ghế lúc đầu là $\frac{120}{x}$. Số dãy ghế lúc sau là $\frac{120}{x+3}$

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{120}{x} = \frac{120}{x+3} + 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0 \Leftrightarrow x = 12$ (nhận) hoặc $x = -15$ (loại)

Vậy mỗi dãy ghế có 12 chiếc và số dãy ghế là $\frac{120}{12} = 10$ (dãy).

Bài 11. Một đơn vị theo kế hoạch phải sản xuất 20 chi tiết máy trong một thời gian đã định, nhưng sau đó đơn vị tăng năng suất thêm 10 chi tiết máy mỗi ngày nên đã hoàn thành kế hoạch sớm được 1 ngày. Hỏi năng suất dự định của đơn vị là bao nhiêu chi tiết máy mỗi ngày?

HD Giải

Gọi năng suất dự định là x ($x \in \mathbb{N}^*$). Năng suất thực làm là $x+10$.

Số ngày dự định làm là $\frac{200}{x}$. Số ngày thực làm là $\frac{200}{x+10}$.

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{200}{x} = 1 + \frac{200}{x+10} \Leftrightarrow x^2 + 10x - 2000 = 0 \Leftrightarrow x = 40$ (nhận) hoặc $x = -50$

(loại)

Vậy năng suất dự định là 40 chi tiết máy mỗi ngày.

Bài 12. Một tổ sản xuất, theo kế hoạch phải sản xuất 180 tấn dụng cụ trong một thời gian đã định. Sau khi thực được $\frac{2}{3}$ kế hoạch thì tổ được bổ sung thêm người nên năng suất hằng của tổ tăng thêm 2 tấn. Nhờ vậy tổ đã hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 1 ngày. Hỏi năng suất mỗi ngày lúc đầu của tổ là bao nhiêu tấn?

HD Giải

Gọi x (tấn/ngày) là năng suất ban đầu của tổ ($x > 0$)

Như vậy $\frac{2}{3}$ kế hoạch nghĩa là thực hiện được là $180 \cdot \frac{2}{3} = 120$ (tấn)

Thời gian hoàn thành kế hoạch dự định là $\frac{180}{x}$

Thời gian thực hiện $\frac{2}{3}$ kế hoạch đầu là $\frac{120}{x}$

Thời gian thực hiện $\frac{1}{3}$ kế hoạch đầu là $\frac{60}{x+2}$

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{180}{x} = \frac{120}{x} + \frac{60}{x+2} + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 120 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (nhận) hoặc

$x = -12$ (loại)

Vậy năng suất ban đầu của tổ là 10 tấn/ngày

Bài 13. Cô Lan tập thể dục mỗi sáng trong 40 phút. Cô Lan thực hiện sự kết hợp của thể dục nhịp điệu đốt cháy 11 calo mỗi phút và kéo căng cơ thể đốt cháy 4 calo mỗi phút. Mục tiêu của cô Lan là đốt cháy 335 calo trong quá trình tập luyện của mình. Hỏi cô Lan cần thực hiện mỗi hoạt động trong bao lâu?

HD Giải

Gọi x (phút), y (phút) lần lượt là thời gian cô Lan tập thể dục nhịp điệu và kéo căng cơ thể ($0 < x, y < 40$)

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 40 \\ 11x + 4y = 335 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 15 \end{cases}$

Vậy cô Lan dành 25 phút để tập thể dục nhịp điệu và 15 phút kéo căng cơ thể.

Bài 14. Hướng ứng Ngày Chủ nhật xanh do UBND huyện phát động với chủ đề “Hãy hành động để Tuy Phong thêm Xanh, Sạch, Sáng”, một trường THCS Nguyễn Bình Khiêm đã cử học sinh của hai lớp 9A1

và 9A2 cùng tham gia làm tổng vệ sinh một con đường, sau $\frac{35}{12}$ giờ thì làm xong công việc. Nếu làm

riêng từng lớp thì thời gian học sinh lớp 9A1 làm xong công việc ít hơn thời gian học sinh lớp 9A2 là 2 giờ. Hỏi nếu mỗi lớp làm riêng thì sau bao nhiêu giờ sẽ làm xong công việc?

HD Giải

Gọi thời gian lớp 9A1 làm một mình xong công việc là x (giờ) $\left(x > \frac{35}{12} \right)$

Gọi thời gian lớp 9A2 làm một mình xong công việc là y (giờ) ($y > 2$)

Mỗi giờ lớp 9A1 làm được phần công việc là: $\frac{1}{x}$ (công việc)

Mỗi giờ lớp 9A2 làm được phần công việc là: $\frac{1}{y}$ (công việc)

Mỗi giờ lớp cả hai lớp 9A1, 9A2 làm được phần công việc là: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (công việc)

Theo đề bài, hai lớp cùng làm chung công việc trong $\frac{35}{12}$ giờ thì xong công việc nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 : \frac{35}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{12}{35} \quad (1)$$

Nếu làm riêng từng lớp thì thời gian học sinh lớp 9A1 làm xong công việc ít hơn thời gian lớp 9A2 là 2 giờ nên ta có phương trình: $y = x + 2$ (2)

Thế phương trình (2) vào phương trình (1) ta được:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35} \Leftrightarrow 35(x+2) + 35x = 12x(x+2) \\ &\Leftrightarrow 35x + 70 + 35x = 12x^2 + 24x \Leftrightarrow 12x^2 - 46x - 70 = 0 \\ &\Leftrightarrow 12x^2 - 60x + 14x - 70 = 0 \Leftrightarrow 12x(x-5) + 14(x-5) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(12x+14) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ 12x+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \text{ (tm)} \\ x=-\frac{7}{6} \text{ (Ktm)} \end{cases}$$

Vậy nếu làm một mình thì lớp 9A1 làm xong công việc trong 5 giờ, lớp 9A2 làm xong công việc trong $5 + 2 = 7$ giờ

Bài tập làm tương tự

Bài 15. Một mảnh đất hình thang vuông có diện tích là $70m^2$; chiều dài đáy nhỏ gấp 4 lần chiều cao và ngắn hơn đáy lớn $3m$. Tính chu vi của mảnh đất trên. (Đáp số: Chiều cao bằng $4m$, chu vi là $44m$)

Bài 16. Phòng họp của công ty có 240 ghế ngồi được xếp thành từng dãy ngang song song với nhau. Số ghế trên mỗi dãy như nhau và được sắp xếp cách đều nhau. Ban giám đốc định mời 320 người dự lễ tổ chức kỉ niệm thành lập công ty. Để đảm bảo đủ số ghế ngồi cho khách mời, ban tổ chức phải kê thêm 4 dãy ghế và mỗi dãy ghế phải bố trí thêm 1 ghế sao cho số ghế trong tất cả các dãy như nhau. Biết rằng phòng họp chỉ có thể bố trí tối đa 20 dãy ghế. Hỏi lúc đầu phòng họp có bao nhiêu dãy ghế và mỗi dãy ghế có bao nhiêu ghế? (Đáp số: 16 dãy ghế và 15 ghế)

Bài 17. Hai đội xây dựng làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 30 ngày. Nhưng khi làm chung được 20 ngày thì đội I được điều động đi làm việc khác. Tuy chỉ còn đội II làm việc, nhưng do cải tiến cách làm, năng suất đội II tăng gấp đôi, nên họ làm xong phần việc còn lại trong 8 ngày. Hỏi với năng suất ban đầu, nếu mỗi đội làm riêng thì phải làm trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên? (Đáp số: Đội I là 80; đội II là 48)

Bài 18. Cô Bông là chủ cho thuê căn hộ loại 2 và 3 phòng ngủ với giá mỗi phòng lần lượt là 6 triệu đồng và 8 triệu đồng mỗi tháng. Tháng trước cô Bông có 6 căn hộ không có ai thuê và thất thu 40 triệu đồng. Hỏi có bao nhiêu căn hộ 2 phòng ngủ không có người thuê? (Đáp số: 4 căn hộ 2 phòng ngủ)

Bài 19. Trong kỳ thi Tuyển sinh vào lớp 10 THPT năm 2019, tổng chỉ tiêu tuyển sinh của Trường THPT A và trường THPT B là 900 học sinh. Do cả hai trường đều có chất lượng giáo dục rất tốt nên sau khi hết hạn thời gian điều chỉnh nguyện vọng thì số lượng thí sinh đăng ký dự tuyển vào Trường THPT A và Trường THPT B tăng lần lượt là 15% và 10% so với chỉ tiêu ban đầu. Vì vậy, tổng số thí sinh đăng ký dự tuyển của cả hai trường là 1010. Hỏi số lượng thí sinh đăng ký dự tuyển của mỗi trường là bao nhiêu? (Đáp số: 400 và 500)

Bài 20. Bác B vay ở một ngân hàng 100 triệu đồng để sản xuất trong thời hạn 1 năm. Lẽ ra đúng 1 năm sau bác phải trả cả tiền vốn lẫn tiền lãi, song bác đã được ngân hàng cho kéo dài thời hạn thêm 1 năm nữa, số tiền lãi của năm đầu được gộp vào với tiền vốn để tính lãi năm sau và lãi suất vẫn như cũ. Hết 2

năm bác B phải trả tất cả 121 triệu đồng. Hỏi lãi suất cho vay của ngân hàng đó là bao nhiêu phần trăm trong 1 năm? (Đáp số: 10%/năm)

Bài 21. Một công ty vận tải dự định dùng loại xe lớn để vận chuyển 20 tấn hàng hóa theo một hợp đồng. Nhưng khi vào việc, công ty không còn xe lớn nên phải thay bằng những xe nhỏ. Mỗi xe nhỏ vận chuyển được khối lượng ít hơn 1 lần so với mỗi xe lớn theo dự định. Để đảm bảo thời gian đã hợp đồng, công ty phải dùng một số lượng xe nhiều hơn số xe dự định là 1 xe. Hỏi mỗi xe nhỏ vận chuyển bao nhiêu tấn hàng hóa? (Biết các xe cùng loại thì có khối lượng vận chuyển như nhau). (Đáp số: 4 tấn)

Bài 22. Bác Bình dự định trồng 300 cây cam theo nguyên tắc trồng thành các hàng, mỗi hàng có số cây bằng nhau. Nhưng khi thực hiện bác Bình đã trồng thêm 2 hàng, mỗi hàng thêm 3 cây so với dự kiến ban đầu nên trồng được tất cả 391 cây. Tính số cây trên 1 hàng mà bác Bình dự kiến trồng ban đầu. (Đáp số: 20 cây, 15 cây)

GV Lư Sĩ Pháp - I Love Math

Vấn đề 8. Hình học

Các dạng toán thường gặp trong kì thi tuyển sinh vào lớp 10

Dạng 1. Chứng minh tứ giác nội tiếp

Phương pháp cơ bản:

- Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° .
- Chứng minh tứ giác có bốn điểm của tứ giác cách đều một điểm nào đó.
- Chứng minh từ hai đỉnh cùng kề một cạnh của tứ giác, cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau
- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối bằng nhau thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn
- Chứng minh tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối của đỉnh đó

Dạng 2. Tam giác đồng dạng và ứng dụng của nó.

Phương pháp cơ bản:

- Hai tam giác có hai góc tương ứng bằng nhau ($g - g$)
- 2 cạnh tương ứng tỉ lệ với nhau – góc xen giữa hai cạnh bằng nhau ($c - g - c$)
- 3 cạnh tương ứng tỉ lệ với nhau ($c - c - c$)
- Định lí Talet – Hai đường thẳng song song

Lưu ý: Các định lí đồng dạng của hai tam giác vuông

1. Định lí 1 (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Nếu cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác kia thì hai tam giác đồng dạng.

2. Định lí 2 (hai cạnh góc vuông).

Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác kia thì hai tam giác đồng dạng.

3. Định lí 3 (góc).

Nếu góc nhọn của tam giác này bằng góc nhọn của tam giác kia thì hai tam giác đồng dạng.

Dạng 3. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Phương pháp cơ bản:

- Chứng minh có một điểm đồng thời thuộc cả ba đường thẳng đó.
- Chứng minh giao điểm của 2 đường thẳng này nằm trên đường thẳng thứ ba.
- Chứng minh giao điểm của 2 đường thẳng thứ nhất và thứ hai trùng với giao điểm của hai đường thẳng thứ hai và thứ ba.
- Sử dụng tính chất đồng quy của ba đường trung tuyến, đường cao, phân giác, trung trực trong tam giác.
- Sử dụng tính chất của đường chéo của các tứ giác đặc biệt.

Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Phương pháp cơ bản:

- Sử dụng tính chất góc bẹt
- Chứng minh hai đoạn thẳng tạo từ ba điểm đã cho cùng song song với một đường thẳng (Sử dụng tiên đề Ôclit)
- Sử dụng tính chất của hai đường thẳng vuông góc
- Sử dụng tính chất đường trung trực của đoạn thẳng
- Sử dụng tính duy nhất của tia phân giác của một góc khác góc bẹt
- Sử dụng tính chất đồng quy của tam giác

Dạng 5. Tính

Dạng này thực hiện tính: Số đo (độ dài) cạnh; góc; diện tích tam giác; diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích tương ứng của hình nón, trụ và cầu.

Cần nắm lại các kiến thức sau

1. Hệ thức lượng trong tam giác:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, có đường cao AH.

$$\text{☒ } AB^2 + AC^2 = BC^2$$

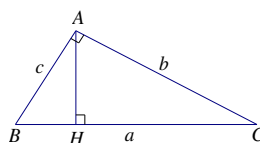
$$\text{☒ } AB^2 = BC.BH$$

$$\text{☒ } AC^2 = BC.CH$$

$$\text{☒ } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\text{☒ } AB = BC.\sin C = BC.\cos B$$

$$\text{☒ } AB = AC.\tan C = AC.\cot B$$



Tỉ số lượng giác của góc nhọn: $0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1$. Ta có:

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

2. Các công thức tính diện tích:

a) Tam giác:

$S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c$	$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$
$S = pr; \quad p = \frac{a+b+c}{2}; \quad S = \frac{abc}{4R}$	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
ΔABC đều, cạnh a : $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, đường cao $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	ΔABC vuông tại A : $S = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2} BC.AH$

b) Hình vuông: $S = a^2$ (a : cạnh hình vuông)

c) Hình chữ nhật: $S = a.b$ (a, b : hai kích thước)

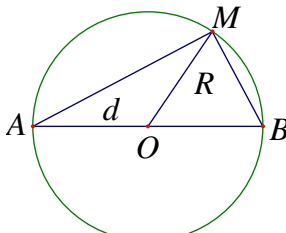
d) Hình bình hành: $S = \text{đáy} \times \text{cao} = AB.AD.\sin \widehat{BAD}$

e) Hình thoi: $S = AB.AD.\sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} AC.BD$

f) Hình thang: $S = \frac{1}{2}(a+b).h$ (a, b : hai đáy, h : chiều cao)

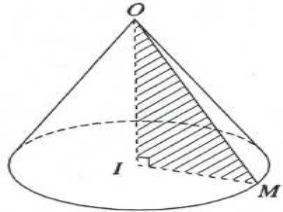
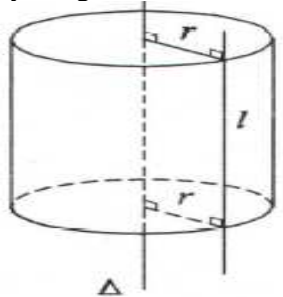
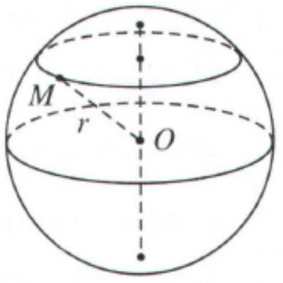
g) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \frac{1}{2} AC.BD$

3. Hình tròn

Hình	Tính chất	Tính
 - Cách xác định: Qua ba điểm không thẳng hàng ta vẽ được một và chỉ một đường tròn. - Tâm đối xứng, trục đối xứng: Đường tròn có một tâm đối xứng; có vô số trục đối xứng.	- Đường tròn tâm O, bán kính $R = OM = OA = OB = \frac{AB}{2}$. Kí hiệu $(O; R)$ - Đường kính $d = AB$ đi qua tâm O. - Góc $\widehat{AMB} = 90^\circ$; $\widehat{MOB} = s\widehat{MB}$; $\widehat{MOA} = s\widehat{MA}$; $\widehat{MAB} = \frac{1}{2} s\widehat{MB}$; $\widehat{MBA} = \frac{1}{2} s\widehat{MA}$	① Độ dài đường tròn: $C = 2\pi R = \pi d$ ② Độ dài cung tròn n°: $l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$ ③ Diện tích hình tròn: $S = \pi R^2$ ④ Diện tích hình quạt tròn: $S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{lR}{2}$ - Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây. Trong một đường tròn + Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy + Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

4. Diện tích – Thể tích hình nón, hình trụ và hình cầu

Hình	Diện tích	Thể tích
Cho hình nón N có chiều cao h , đường sinh l và bán kính đáy bằng r .	$S_{xq} = \pi rl$	

	$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$ $S_{đáy} = \pi r^2$	$V_N = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
Cho hình trụ có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy bằng r. 	$S_{xq} = 2\pi r l$ $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$ $S_{đáy} = \pi r^2$	$V_T = \pi r^2 h$
Mặt cầu bán kính bằng R. Gọi S_C là diện tích mặt cầu và V_C là thể tích khối cầu 	$S_C = 4\pi R^2$	$V_C = \frac{4}{3} \pi R^3$

Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A sao cho $OA = 2R$. Từ điểm A vẽ tiếp tuyến AB đến (O) (B là tiếp điểm). Kẻ đường kính BC của (O) , gọi M là trung điểm của đoạn thẳng OB , kẻ MN vuông góc với AC tại N .

a. Chứng minh tứ giác $ABMN$ nội tiếp.

b. Kẻ BH vuông góc với OA tại H . Cho $R = 3cm$, tính $\widehat{BOA}$ và cạnh BH .

c. Đường thẳng vuông góc với OA tại O cắt tia AB tại E . Chứng minh ba điểm E, M, N thẳng hàng.

HD Giải

a. Chứng minh tứ giác $ABMN$ nội tiếp

Xét tứ giác $ABMN$ ta có:

$$\widehat{MBA} = \widehat{MNA} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBA} + \widehat{MNA} = 180^\circ$$

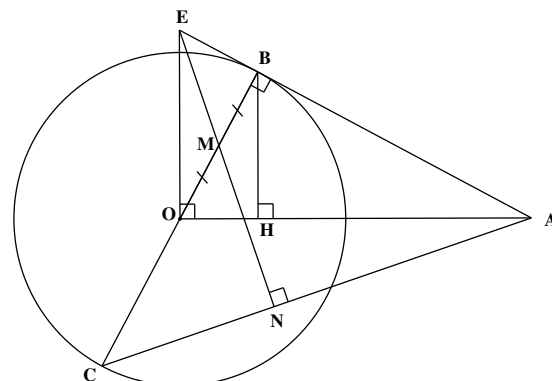
Vậy tứ giác $ABMN$ nội tiếp

b. Tính $\widehat{BOA}$ và cạnh BH

$\triangle OBA$ vuông tại B

$$\Rightarrow \cos \widehat{BOA} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BOA} = 60^\circ$$

Xét $\triangle OBH$ vuông tại H , ta có



$$BH = OB \sin \widehat{BOH} = 3 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

c. Chứng minh ba điểm E, M, N thẳng hàng

Xét $\triangle OAE$ vuông tại O , ta có $OB \perp AE \Rightarrow OB^2 = AB \cdot BE$

$$\Rightarrow 2BM \cdot \frac{1}{2} BC = AB \cdot BE \Leftrightarrow BM \cdot BC = AB \cdot BE \text{ hay } \frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BE}$$

Mặt khác, ta có: $\triangle ABC \sim \triangle MBE$ (c-g-c) (do $\widehat{ABC} = \widehat{MBE} = 90^\circ$ và $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BE}$)

$$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{BAC} \text{ mà } \widehat{CMN} = \widehat{BAC} \text{ (do tứ giác } ABMN \text{ nội tiếp)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{CMN} \text{ mà } \widehat{BMN} + \widehat{CMN} = 180^\circ \text{ (kề bù) nên } \widehat{BMN} + \widehat{BME} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Ba điểm E, M, N thẳng hàng.

Bài 2. Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, C là một điểm tùy ý trên đường tròn (C khác A và B); các tiếp tuyến với đường tròn tại A và C cắt nhau tại M , BM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D .

a. Chứng minh tứ giác $OAMC$ nội tiếp đường tròn;

b. Chứng minh: $MC^2 = MD \cdot MB$;

c. Cho $OM = 2R$. Tính diện tích phần tam giác AMC nằm ngoài đường tròn (O) theo R .

HD Giải

a. Chứng minh tứ giác $OAMC$ nội tiếp đường tròn

Xét tứ giác $OAMC$, Ta có

$$\widehat{OAM} = 90^\circ \text{ và } \widehat{OCM} = 90^\circ \text{ (Vì } MA, MC \text{ là tiếp tuyến)}$$

$$\text{Nên } \widehat{OAM} + \widehat{OCM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Vậy tứ giác $OAMC$ nội tiếp

b. Chứng minh: $MC^2 = MD \cdot MB$

Xét $\triangle MCD$ và $\triangle MBC$, ta có

$$\widehat{BMC} \text{ là góc chung và } \widehat{MCD} = \widehat{MBC} \text{ (cùng chắn cung } DC)$$

Suy ra: $\triangle MCD \sim \triangle MBC$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{MD}{MC} \Rightarrow MC^2 = MD \cdot MB$$

c. Tính diện tích phần tam giác AMC nằm ngoài đường tròn (O) theo R

$$\text{Ta có: } \bullet AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$$

$$\bullet \cos \widehat{AOM} = \frac{OA}{OM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOM} = 60^\circ$$

$$\bullet S_{OAMC} = 2 \cdot S_{OAM} = OA \cdot AM = R^2 \sqrt{3}$$

$$\bullet S_{\text{quạt } OAC} = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$\text{Vậy diện tích cần tìm là: } S = S_{OAMC} - S_{\text{quạt } OAC} = R^2 \sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{R^2 (3\sqrt{3} - \pi)}{3} \text{ (đvdt)}$$

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên cạnh AC lấy một điểm M không trùng với A và C . Gọi $(\mathcal{C})$ là đường tròn đường kính MC . Các đường thẳng BM và BC cắt $(\mathcal{C})$ tại các điểm thứ hai lần lượt tại D và E . Chứng minh rằng

a. Hai đường thẳng BM và CD vuông góc với nhau;

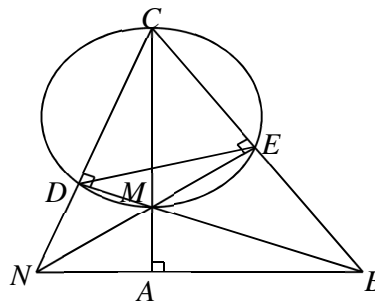
$$\text{b. } \widehat{MED} = \widehat{MBA}.$$

HD Giải

a. Chứng minh rằng hai đường thẳng BM và CD vuông góc với nhau

Ta có $\widehat{BDC} = \widehat{MDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $BM \perp CD$.



b. Chứng minh rằng $\widehat{MED} = \widehat{MBA}$.

Ta có: $\widehat{CAB} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.

Do đó: $\widehat{MBA} = \widehat{MCD}$.

Mặt khác ta có: $\widehat{MCD} = \widehat{MED}$ (vì cùng chắn cung $\widehat{MD}$ trong (C))

Suy ra: $\widehat{MED} = \widehat{MBA}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$. Lấy điểm D thuộc cạnh AB ($AB < AD$). Đường tròn (O) đường kính BD cắt CB tại E , kéo dài CD cắt đường tròn (O) tại F .

a. Chứng minh rằng $ACED$ là tứ giác nội tiếp.

b. Biết $BF = 3\text{cm}$. Tính BC và diện tích tam giác BFC .

c. Kéo dài AF cắt đường tròn (O) tại điểm G . Chứng minh rằng BA là tia phân giác của góc CBG .

HD Giải

a. Chứng minh rằng $ACED$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có: $\widehat{CAD} = 90^\circ$ (giả thiết)

$\widehat{CED} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$ Bốn điểm C, D, A, E cùng nằm trên đường tròn đường kính CD .

Vậy tứ giác $ACED$ là tứ giác nội tiếp.

b. Biết $BF = 3\text{cm}$. Tính BC và diện tích tam giác BFC .

$\triangle ABC$ vuông tại A , ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$\Rightarrow BC = 5\text{cm}$

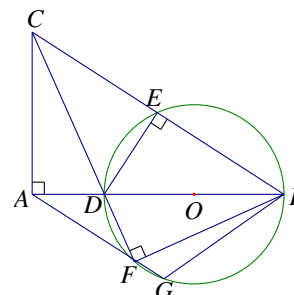
$\triangle BFC$ vuông tại F , ta có: $CF^2 = BC^2 - BF^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow CF = 4\text{cm}$

Vậy: $S_{BFC} = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 (\text{cm}^2)$

c. Chứng minh rằng BA là tia phân giác của góc CBG .

Tứ giác $ACBF$ nội tiếp đường tròn (do $\widehat{CAB} = \widehat{CFB} = 90^\circ$) nên $\widehat{ABC} = \widehat{AFC}$ (cùng chắn cung AC)

Mà $\widehat{ABG} = \widehat{AFC}$ (cùng bù với $\widehat{DFG}$) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABG}$. Vậy BA là tia phân giác của $\widehat{CBG}$



Bài 5. Cho đường tròn (O, R) và điểm M ở ngoài đường tròn. Từ M , kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là hai tiếp điểm) và cát tuyến MCD .

a. Chứng minh tứ giác $OAMB$ nội tiếp

b. Chứng minh rằng khi cát tuyến MCD thay đổi, ta luôn có $MA^2 = MB^2 = MC \cdot MD$

c. Trong trường hợp $\widehat{AMB} = 60^\circ$, tính theo R độ dài cung $\widehat{AOB}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OAMB$ và diện tích phần tứ giác $OAMB$ nằm trong đường tròn (O, R)

HD Giải

a. Chứng minh tứ giác $OAMB$ nội tiếp

Ta có: $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến)

Suy ra: $\widehat{OAM} + \widehat{OBM} = 180^\circ$

Vậy tứ giác $OAMB$ nội tiếp đường tròn đường kính OM

b. Chứng minh: $MA^2 = MB^2 = MC.MD$

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDA$. Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AMC} = \widehat{DMA} \\ \widehat{MAC} = \widehat{MDA} \text{ (cùng chắn } \widehat{AC}) \end{cases} \Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MDA (g-g)$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD$$

Vì $MA = MB$ (hai tiếp tuyến cắt nhau) nên $MA^2 = MB^2 = MC.MD$

c. Tính theo R độ dài cung $\widehat{AOB}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OAMB$ và diện tích phần tứ giác $OAMB$ nằm trong đường tròn (O, R)

Ta có: $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB} = 2.60^\circ = 120^\circ$. Độ dài cung $\widehat{AOB}$ là $l = \frac{\pi R 120^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi R}{3}$

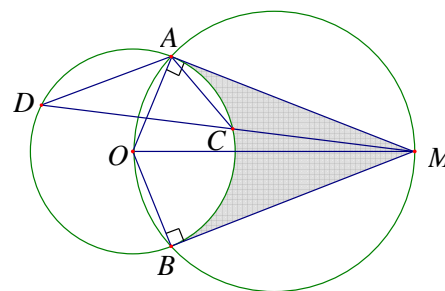
Ta lại có: $\widehat{AMO} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = \frac{1}{2}.60^\circ = 30^\circ \Rightarrow OM = OA.\sin 30^\circ = 2R$; $AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = R\sqrt{3}$

Mặt khác, ta có: A, B đối xứng qua OM nên $S_{OAMB} = 2S_{\triangle OAM} = OA.AM = R^2\sqrt{3}$

Tứ giác $OAMB$ nội tiếp và có $\widehat{AMB} = 60^\circ$ nên $\widehat{AOB} = 120^\circ$

Diện tích hình quạt OAB là $S_{\text{quạt } OAB} = \frac{\pi R^2 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{3}$

Diện tích phần tứ giác $OAMB$ nằm ngoài đường tròn (O, R) là $S = S_{\triangle OAMB} - S_{\text{quạt } OAB} = R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)$



Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại C nội tiếp trong đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi H là chân đường cao hạ từ C xuống AB , K là trung điểm đoạn thẳng AC . Tiếp tuyến tại B của đường tròn tâm O cắt AC kéo dài tại điểm D .

a. Chứng minh tứ giác $CHOK$ nội tiếp trong một đường tròn

b. Chứng minh rằng $AC.AD = 4R^2$.

c. Tính theo R diện tích của phần tam giác ABD nằm ngoài hình tròn tâm O .

HD Giải

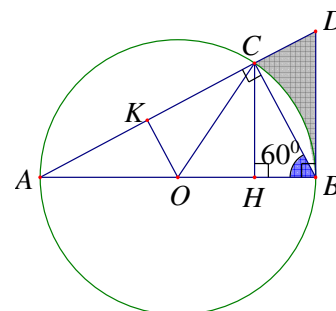
a) Chứng minh tứ giác $CHOK$ nội tiếp trong một đường tròn

Vì K là trung điểm của dây cung AC nên $OK \perp AC \Rightarrow \widehat{CKO} = 90^\circ$

Xét tứ giác $CHOK$ có :

$$\widehat{CKO} = 90^\circ \text{ (cmt); } \widehat{CHO} = 90^\circ \text{ (vì } CH \perp AB)$$

$\Rightarrow \widehat{CKO} + \widehat{CHO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên tứ giác $CHOK$ nội tiếp



b) Chứng minh rằng $AC.AD = 4R^2$.

Xét $\triangle ACB$ và $\triangle ABD$ ta có : $\begin{cases} \widehat{ACB} = \widehat{ABD} = 90^\circ \\ \widehat{BAD} \text{ là góc chung} \end{cases}$

$$\text{Vậy } \triangle ACB \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD} \Leftrightarrow AC.AD = AB^2 = (2R)^2 = 4R^2 \text{ (đpcm)}$$

c) Tính theo R diện tích của phần tam giác ABD nằm ngoài hình tròn tâm O .

Gọi S là diện tích của phần tam giác ABD nằm ngoài hình tròn tâm O . Khi đó : $S = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ABC} - S_{vp}$

Ta có : $OB = OC = R$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle OBC$ là tam giác đều $\Rightarrow OB = OC = BC = R$ và $\widehat{BOC} = 60^\circ$

$$\text{Lại có } CH \perp AB \Rightarrow H \text{ là trung điểm } OB \Rightarrow BH = \frac{R}{2} \Rightarrow AH = \frac{3R}{2}$$

$$\text{Trong } \triangle CHB \text{ vuông tại } H \text{ ta có : } CH^2 + BH^2 = BC^2 \Rightarrow CH = \sqrt{BC^2 - HB^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vì } CH \parallel BD \text{ (cùng vuông góc với } AB) \text{ nên } \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{BD} \Rightarrow BD = \frac{AB \cdot CH}{AH} = \frac{2R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}}{\frac{3R}{2}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Khi đó : } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{3} = \frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot 2R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{vp} = S_{qBOC} - S_{\triangle BOC} = \frac{\pi R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot OB \cdot CH = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{1}{2} R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

Vậy diện tích phần tam giác ABD nằm ngoài hình tròn tâm O là :

$$S = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ABC} - S_{vp} = \frac{2R^2\sqrt{3}}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{R^2(10\sqrt{3} - \pi)}{12} \text{ (đvdt)}$$

Bài 7. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn $(O; R)$ sao cho $OM = 2R$, vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là hai tiếp điểm). Lấy một điểm N tùy ý trên cung nhỏ AB . Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của N trên AB, AM, BM .

a. Tính diện tích tứ giác $MAOB$ theo R .

b. Chứng minh: $\widehat{NIH} = \widehat{NBA}$.

c. Gọi E là giao điểm của AN và IH , F là giao điểm của BN và IK . Chứng minh tứ giác $IENF$ nội tiếp được trong đường tròn.

d. Giả sử O, N, M thẳng hàng. Chứng minh: $NA^2 + NB^2 = 2R^2$

HD Giải

a. Tính diện tích tứ giác $MAOB$ theo R .

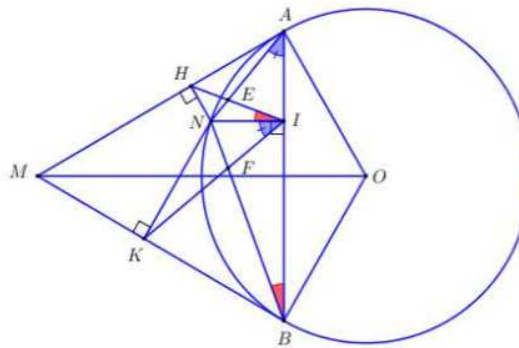
Xét tam giác OAM và tam giác OBM ta có:

$OA = OB (= R); OM \text{ chung};$

$$MA = MB \text{ (Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau);}$$

$$\Rightarrow \Delta OAM = \Delta OBM \text{ (c.c.c)} \Rightarrow S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBM}$$

$$\Rightarrow S_{MAOB} = S_{\Delta OAM} + S_{\Delta OBM} = 2S_{\Delta OBM}$$



Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông OAM ta có: $AM^2 = OM^2 - OA^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2$

$$\Rightarrow AM = R\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow S_{MAOB} = 2S_{\Delta OAM} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AM = R \cdot R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3} \text{ (đvdt).}$$

b. Chứng minh $\widehat{NIH} = \widehat{NBA}$

Xét tứ giác $AINH$ có: $\widehat{AIN} + \widehat{AHN} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác $AINH$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0).

$$\Rightarrow \widehat{NIH} = \widehat{NAH} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } HN \text{)}.$$

Mà $\widehat{NAH} = \widehat{NBA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AN của (O))

$$\Rightarrow \widehat{NIH} = \widehat{NBA} (= \widehat{NAH}) \text{ (đpcm)}.$$

c. Chứng minh tứ giác $IENF$ nội tiếp được trong đường tròn.

Xét tứ giác $NIBK$ ta có $\widehat{NIB} + \widehat{NKB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà hai góc này là hai góc đối diện

$$\Rightarrow NIBK \text{ là tứ giác nội tiếp } \Rightarrow \widehat{KBN} = \widehat{NIK}$$

Xét đường tròn (O) ta có: $\widehat{KBN} = \widehat{NAB} \Rightarrow \widehat{NIK} = \widehat{NAB} (= \widehat{KBN})$

Xét $\triangle ANB$ ta có: $\widehat{ANB} + \widehat{NAB} + \widehat{NBA} = 180^\circ$

Lại có: $\widehat{NIH} = \widehat{NAB} = \widehat{NIE}$; $\widehat{NIK} = \widehat{NAB} = \widehat{NIF}$; $\widehat{ANB} = \widehat{ENF}$

$$\Rightarrow \widehat{ENF} + \widehat{EIN} + \widehat{NIF} = \widehat{ENF} + \widehat{EIF} = 180^\circ$$

Mà $\widehat{ENF}, \widehat{EIF}$ là hai góc đối diện $\Rightarrow$ Tứ giác $NEIF$ là tứ giác nội tiếp

d. Chứng minh: $NA^2 + NB^2 = 2R^2$

Theo đề bài ta có: O, N, M thẳng hàng $\Rightarrow ON = R = \frac{1}{2} OM$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của OM .

Ta có: $ON \perp AB = \{I\} \Rightarrow I$ là trung điểm của AB .

Lại có: $OA = OB = R \Rightarrow ON$ là đường trung trực của AB

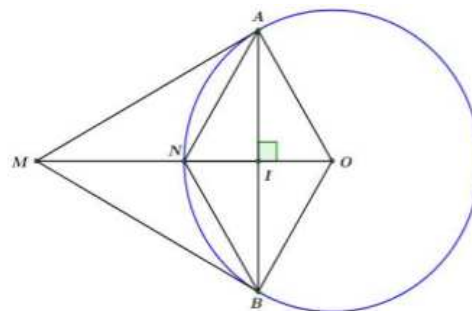
$$\Rightarrow NA = NB$$

Xét ΔMAO ta có:

$$\cos \widehat{AOM} = \frac{OA}{OM} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOM} = 60^\circ = \widehat{AON}$$

Xét $\triangle AON$ có: $\begin{cases} OA = ON = R \\ \widehat{AON} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle AON$ là tam giác đều.

$$\Rightarrow NA = ON = OA = R = NB$$



$$\Rightarrow NA^2 + NB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \text{ (đpcm)}$$

Bài 8. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Trên đường tròn (O) lấy điểm C không trùng B sao cho $AC > BC$. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và tại C cắt nhau tại D . Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB , E là giao điểm của hai đường thẳng OD và AC .

a. Chứng minh $OECH$ là tứ giác nội tiếp.

b. Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng CD và AB . Chứng minh $2\widehat{BCF} + \widehat{CFB} = 90^\circ$

c. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng BD và CH . Chứng minh hai đường thẳng EM và AB song song với nhau.

HD Giải

a. Chứng minh $OECH$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có: $DC = DA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OA = OC$ (bán kính)

Do đó OD là đường trung trực của đoạn thẳng AC

$\Rightarrow OD \perp AC$

Tứ giác $OECH$ có $\widehat{CEO} + \widehat{CHO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OECH$ là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh $2\widehat{BCF} + \widehat{CFB} = 90^\circ$

Xét (O) có: $\widehat{BCF} = \widehat{BAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BC)

(1)

$\widehat{HCB} = \widehat{BAC}$ (Cùng phụ $\widehat{CBA}$)

(2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BCF} = \widehat{HCB} \Rightarrow CB$ là tia phân giác của $\widehat{HCF} \Rightarrow \widehat{HCF} = 2\widehat{BCF}$

Ta lại có: $\triangle CHF$ vuông tại H nên $\widehat{HCF} + \widehat{CFB} = 90^\circ$ hay $2\widehat{BCF} + \widehat{CFB} = 90^\circ$

c. Chứng minh hai đường thẳng EM và AB song song với nhau.

Gọi K là giao điểm của DB và AC .

Xét (O) ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\widehat{AC}$) (3)

Ta có $\triangle ACH$ vuông tại H có $\widehat{ACH} = 90^\circ - \widehat{CAH}$

$\triangle ABC$ vuông tại C có $\widehat{CBA} = 90^\circ - \widehat{CAB}$

$\Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{ABC}$ (Cùng phụ $\widehat{CAH}$)

(4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{ACH} = \widehat{ACD} \Rightarrow CA$ là tia phân giác trong của tam giác $\triangle BCD$

Theo tính chất tia phân giác trong $\triangle BCD$ ta có: $\frac{KM}{KD} = \frac{BM}{BD} = \frac{CM}{CD}$

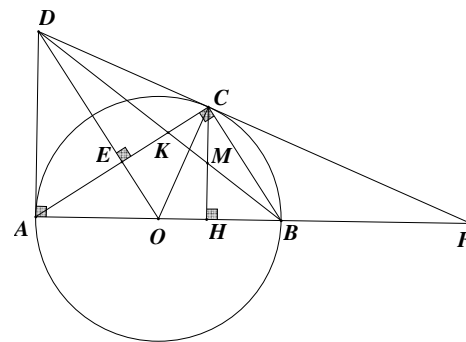
$\Rightarrow \frac{KM}{KD} = \frac{BM}{BD} = \frac{CM}{AD}$ (Do $DC = DA$)

Mặt khác ta có: $CH \parallel AD$ (cùng vuông góc AB)

$\Rightarrow \frac{HM}{AD} = \frac{BM}{BD}$ (Định lý Ta lét) $\Rightarrow \frac{HM}{AD} = \frac{BM}{BD} = \frac{CM}{AD} \Rightarrow \frac{HM}{AD} = \frac{CM}{AD} \Rightarrow HM = CM$

Mà $CE = AE$ (Do OD là đường trung trực của AB) nên ME là đường trung bình của $\triangle CAH$

$\Rightarrow ME \parallel AH$ hay $ME \parallel AB$



Bài 9. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H .

a. Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b. Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF .

c. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm I , đường thẳng EF cắt đường thẳng AH tại điểm P . Chứng minh tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB và đường thẳng KH song song với đường thẳng IP .

HD Giải

a. Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Xét tứ giác $BCEF$ ta có :

$$\widehat{BEC} = 90^\circ \text{ (} BE \text{ là đường cao)}$$

$$\widehat{BFC} = 90^\circ \text{ (} CF \text{ là đường cao)}$$

$\Rightarrow BCEF$ là tứ giác nội tiếp (đỉnh E, F cùng nhìn cạnh BC dưới một góc vuông).

b. Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF .

Vẽ tiếp tuyến Ax như hình vẽ $\Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{ACB}$ (tính chất giữa đường tiếp tuyến và dây cung).

Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$.

Ta suy ra $\widehat{BAF} = \widehat{AFE} \Rightarrow EF \parallel Ax$ (do hai góc so le trong). Lại có $Ax \perp OA \Rightarrow OA \perp EF$ (đpcm).

c. Chứng minh $\triangle APE \sim \triangle ABI$

Ta có : $\widehat{AEB} = \widehat{ABI}$ (Vì $\widehat{AEB} + \widehat{EFC} = \widehat{ABI} + \widehat{EFC} = 180^\circ$)

Mặt khác $\widehat{APE} + \widehat{PAI} = 90^\circ$ (vì $AI \perp PE$)

$\widehat{AIB} + \widehat{PAI} = 90^\circ$ (Vì $AH \perp BC$) $\Rightarrow \widehat{APE} = \widehat{AIB}$

Vậy $\triangle APE \sim \triangle ABI$ (g-g).

* Chứng minh $KH \parallel PI$

Gọi M là giao điểm của AO và EF , dựng đường kính AS

Ta có $BE \parallel CS$ cùng vuông góc AC

$BS \parallel CF$ cùng vuông góc $AB \Rightarrow BHCS$ là hình bình hành nên H, K, S thẳng hàng

Ta có $AE.AC = AH.AD$ và $AE.AC = AM.AS$

$$\Rightarrow AH.AD = AM.AS \Rightarrow \frac{AH}{AS} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow \triangle AHM \sim \triangle ASD \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{ASD}$$

$\Rightarrow HMSD$ Nội tiếp đường tròn. Kết hợp $PMID$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{PIM} = \widehat{PDM} = \widehat{HSM} \Rightarrow HS \parallel PI$.

Bài 10. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường tròn BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng AH cắt BC và (O) lần lượt tại F và K ($K \neq A$). Gọi L là hình chiếu của D lên AB .

a. Chứng minh rằng tứ giác $BEDC$ nội tiếp và $BD^2 = BL \cdot BA$.

b. Gọi J là giao điểm của KD và (O) , ($J \neq K$). Chứng minh rằng $\widehat{BJK} = \widehat{BDE}$.

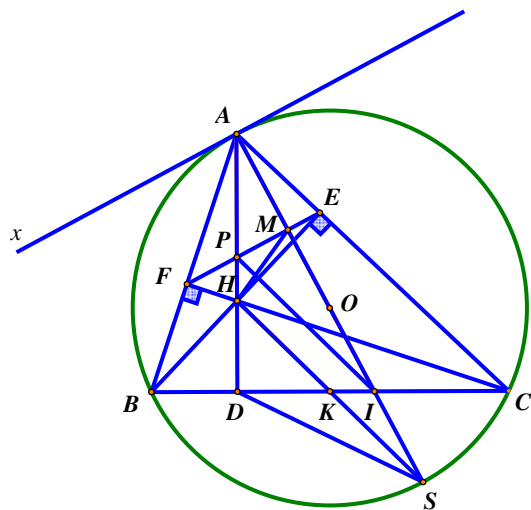
c. Gọi I là giao điểm của BJ và ED . Chứng minh tứ giác $ALIJ$ nội tiếp và I là trung điểm ED .

HD Giải

a. Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ nên các điểm E, D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC . Do đó tứ giác $BEDC$ nội tiếp.

Xét tam giác ABD vuông ở D có DL là đường cao nên theo hệ thức lượng, ta có $BD^2 = BL \cdot BA$.

b. Ta thấy H là trực tâm tam giác ABC nên AF cũng là đường cao của tam giác và $AF \perp BC$. Xét đường tròn (O) có $\widehat{BJK} = \widehat{BAK}$, cùng chắn cung BK .



Tứ giác $ADHE$ có $\widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên nội tiếp.

Suy ra $\widehat{HAE} = \widehat{HDE}$ nên $\widehat{BAK} = \widehat{BDE}$.

Từ các kết quả trên, ta suy ra $\widehat{BJK} = \widehat{BDE}$.

c. Xét hai tam giác BID và BDJ

Ta có: $\widehat{BDI} = \widehat{BJD}$ (theo câu b) và $\widehat{DBI}$ chung.

Suy ra $\triangle BID \sim \triangle BDJ$ ($g - g$) $\Rightarrow \frac{BI}{BD} = \frac{BD}{BJ}$ hay $BD^2 = BI \cdot BJ$.

Theo câu a, ta có $BD^2 = BL \cdot BA$ nên $BL \cdot BA = BI \cdot BJ$ nên

$$\frac{BL}{BI} = \frac{BJ}{BA}.$$

Lại xét hai tam giác BIL và BAJ có góc B chung và $\frac{BL}{BI} = \frac{BJ}{BA}$.

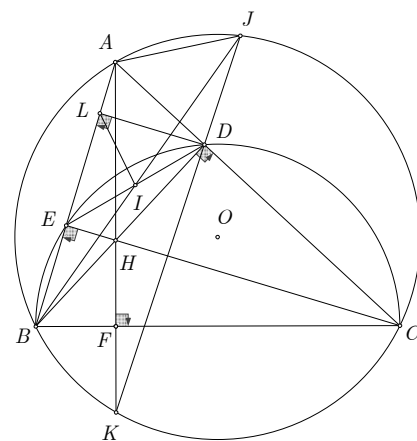
Do đó: $\widehat{BIL} = \widehat{BAJ} \Rightarrow \widehat{LAI} + \widehat{LID} = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $ALIJ$ nội tiếp.

Từ đó, ta suy ra $\widehat{ILE} = \widehat{IJA}$. Mà $\widehat{JJA} = \widehat{BJA} = \widehat{BCA}$ (cùng chắn cung BA)

Theo câu a, tứ giác $BEDC$ nội tiếp nên $\widehat{LEI} = \widehat{AED} = \widehat{BCA}$ do đó $\widehat{LEI} = \widehat{ELI}$.

Từ đó ta có tam giác LEI cân và $IE = IL$. Do đó $\widehat{ILD} = 90^\circ - \widehat{ILE} = 90^\circ - \widehat{LED} = \widehat{LDI}$ nên tam giác LID cũng cân và $ID = IL$.

Từ các điều trên, ta có được $ID = IE$ nên điểm I chính là trung điểm của DE .



Bài 11. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB và C là điểm nằm trên đoạn thẳng OB (với C khác B).

Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC . Gọi K là giao điểm thứ hai của BD với đường tròn đường kính BC .

a. Chứng minh tứ giác $DHCK$ là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh CE song song với AD và ba điểm E, C, K thẳng hàng.

c. Đường thẳng qua K vuông góc với DE cắt đường tròn (O) tại hai điểm M và N (với M thuộc cung nhỏ AD). Chứng minh rằng $EM^2 + DN^2 = AB^2$

HD Giải

a. Chứng minh tứ giác $DHCK$ là tứ giác nội tiếp

Ta có: $\widehat{DHC} = 90^\circ$ (gt)

$\widehat{BKC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BC)

$\Rightarrow \widehat{DKC} = 90^\circ$ (Kề bù với $\widehat{BKC}$)

Xét tứ giác $DHCK$ ta có: $\widehat{DKC} + \widehat{DHC} = 180^\circ$

Mà $\widehat{DKC}$ và $\widehat{DHC}$ đối nhau

Suy ra $DHCK$ là tứ giác nội tiếp.

b. • Chứng minh CE song song với AD

Ta có: $OA \perp DE \Rightarrow H$ là trung điểm của DE (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung).

Tứ giác $ADCE$ có H là trung điểm của AC , DE và $AC \perp DE$

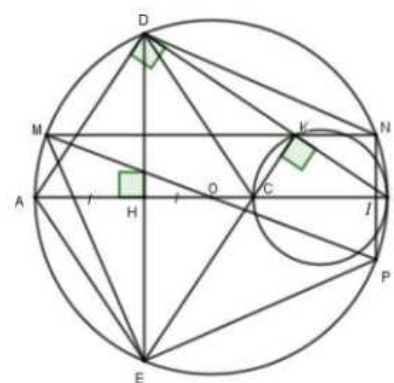
Nên $ADCE$ là hình thoi $AD \parallel CE$.

• Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng

Ta có: $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB) $\Rightarrow CE \perp BD$

Mà $CK \perp BD$ (cmt)

$\Rightarrow$ hai đường thẳng CE và CK trùng nhau $\Rightarrow E, C, K$ thẳng hàng.



c. Chứng minh rằng $EM^2 + DN^2 = AB^2$

Vẽ đường kính MI của đường tròn O . Ta có $\widehat{MNI} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính MI) $\Rightarrow NI \perp MN$

Mà $DE \perp MN \Rightarrow NI \parallel DE$ (cùng vuông góc với MN)

$\Rightarrow DN = EI$ (hai dây song song chắn hai cung bằng nhau)

Ta lại có $\widehat{MEI} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính MI)

$\Rightarrow \triangle MEI$ vuông tại E , ta có: $EM^2 + EI^2 = MI^2$ (Định lý Py-ta-go)

Mà $DN = EI$ và $MI = AB = 2R \Rightarrow EM^2 + DN^2 = AB^2$

Bài 12. Cho đường tròn tâm O , bán kính R và một đường thẳng d không cắt đường tròn (O) . Dựng đường thẳng OH vuông góc với đường thẳng d tại điểm H . Trên đường thẳng d lấy điểm K (khác điểm H), qua K vẽ hai tiếp tuyến KA và KB với đường tròn (O) , (A và B là các tiếp điểm) sao cho A và H nằm về hai phía của đường thẳng OK .

a. Chứng minh tứ giác $KAOH$ nội tiếp được trong đường tròn.

b. Đường thẳng AB cắt đường thẳng OH tại điểm I . Chứng minh rằng $IA \cdot IB = IH \cdot IO$ và I là điểm cố định khi điểm K chạy trên đường thẳng d cố định.

c. Khi $OK = 2R, OH = R\sqrt{3}$. Tính diện tích tam giác KAI theo R .

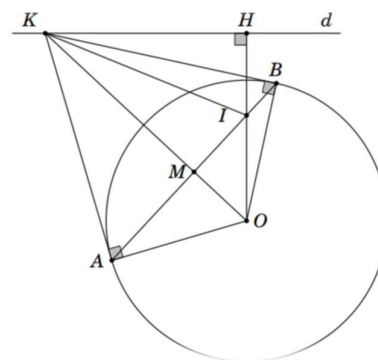
HD Giải

a. Ta có $\widehat{KAO} = 90^\circ$ ($KA \perp AO$),

$\widehat{KHO} = 90^\circ$ ($OH \perp KH$)

Xét tứ giác $KAOH$ có $\widehat{KAO} + \widehat{KHO} = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp.

b. Ta có $\widehat{KBO} + \widehat{KAO} = 180^\circ$ nên $KAOB$ là tứ giác nội tiếp và đỉnh H, B, A cùng nhìn cạnh OK dưới một góc vuông nên năm điểm K, A, B, O, H cùng thuộc đường tròn đường kính OK



Xét tam giác IAH và tam giác IOB có $\widehat{HIA} = \widehat{BIO}$ (đối đỉnh) và $\widehat{AHI} = \widehat{ABO}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AO).

Do đó $\triangle IAH \sim \triangle IOB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IA}{IH} = \frac{IO}{IB} \Rightarrow IA \cdot IB = IH \cdot IO$

Xét tứ giác $AOBH$ có $\widehat{OHB}$ là góc nội tiếp chắn cung OB , $\widehat{OBA}$ là góc nội tiếp chắn cung OA ; Mà $OA = OB = R$ nên $\widehat{OHB} = \widehat{OBA}$.

Xét $\triangle OIB$ và $\triangle OBH$ có $\widehat{BOH}$ góc chung và $\widehat{OHB} = \widehat{OBA}$ (cmt).

Do đó $\triangle OIB \sim \triangle OBH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OI}{OB} = \frac{OB}{OH} \Rightarrow OI = \frac{OB^2}{OH} = \frac{R^2}{OH}$.

Ta lại có đường thẳng d cố định nên OH không đổi ($OH \perp d$).

Vậy điểm I cố định khi K chạy trên đường thẳng d cố định.

c. Gọi M là giao điểm của OK và AB . Theo tính chất tiếp tuyến ta có: $KA = KB$;

Lại có $OA = OB = R$ nên OK là đường trung trực của AB , suy ra $AB \perp OK$ tại M và $MA = MB$.

Theo câu b) ta có $OI = \frac{R^2}{OH} = \frac{R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Xét $\triangle OAK$ vuông tại A , ta có $OA^2 = OM \cdot OK \Leftrightarrow OM = \frac{OA^2}{OK} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$

$$\text{Suy ra: } KM = OK - OM = 2R - \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}; AM^2 = OM \cdot KM = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Xét } \triangle OMI \text{ vuông tại } M, \text{ có } MI = \sqrt{OI^2 - OM^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Suy ra } AI = AM + MI = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{6} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Diện tích } \triangle AKI \text{ là } S = \frac{1}{2} AI \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

Bài 13. Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc AC , E thuộc AB). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC .

- Chứng minh các tứ giác $BCDE$ và $AMON$ nội tiếp.
- Chứng minh $AE \cdot AM = AD \cdot AN$.
- Gọi K là giao điểm của ED và MN , F là giao điểm của AO và MN , I là giao điểm của ED và AH . Chứng minh F là trực tâm của tam giác KAI .

HD Giải

a. Ta có: $\widehat{BEC} = 90^\circ, \widehat{BDC} = 90^\circ$

$\Rightarrow E, D$ thuộc đường tròn đường kính BC .

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCDE$ nội tiếp đường tròn đường kính BC .

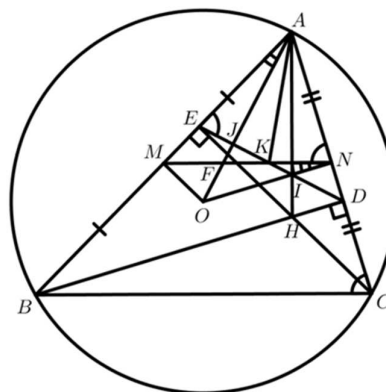
Do M, N lần lượt là trung điểm AB và AC

$\Rightarrow OM \perp AB, ON \perp AC \Rightarrow \widehat{OMA} = 90^\circ, \widehat{ONA} = 90^\circ$

Tứ giác $AMON$ có:

$\widehat{OMA} + \widehat{ONA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà $\widehat{OMA}$ và $\widehat{ONA}$ là hai góc đối nhau

$\Rightarrow AMON$ là tứ giác nội tiếp.



b. Cách 1:

M, N lần lượt là trung điểm của $AB, AC \Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle ABC$

$\Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ACB}$ (so le trong) (1)

Mặt khác, ta có:

$\widehat{ACB} + \widehat{BED} = \widehat{DCB} + \widehat{BED} = 180^\circ$ (tứ giác $BCDE$ nội tiếp)

$\widehat{AED} + \widehat{BED} = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{AED}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{AED}$.

Xét $\triangle AMN$ và $\triangle ADE$ có:

$\hat{A}$: góc chung và $\widehat{ANM} = \widehat{AED}$.

$$\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AE} \Leftrightarrow AE \cdot AM = AD \cdot AN$$

Cách 2:

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$\hat{A}$: góc chung và $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow \frac{2AM}{2AN} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow AE \cdot AM = AD \cdot AN$$

c) H là giao điểm của BD và $CE \Rightarrow H$ là trực tâm của $\triangle ABC$

$\Rightarrow AH \perp BC$ mà $MN \parallel BC$ nên $AH \perp MN \Rightarrow KN \perp AI$ (3)

Gọi J là giao điểm của AF và DE . Trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMON$

Ta có: $\widehat{EAJ} = \widehat{EAO} = \widehat{MNO}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung OM)

Xét $\triangle AJE$ có: $\widehat{AEJ} + \widehat{EAJ} = \widehat{AED} + \widehat{EAJ} = \widehat{ANM} + \widehat{MNO} = \widehat{ONA} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AJE} = 90^\circ \Rightarrow AJ \perp JE \Rightarrow AJ \perp KI$ (4)

KN cắt AJ tại F (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow F$ là trực tâm của $\triangle KAI$.

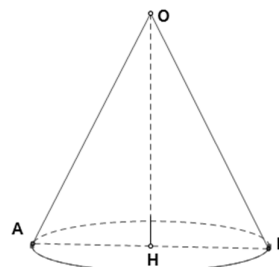
Bài 14. Tính thể tích của một hình nón có bán kính đáy $r = 4$ cm, độ dài đường sinh $l = 5$ cm.

HD Giải

Ta có

$$AH = r = 4\text{cm}; AO = l = 5\text{cm} \Rightarrow OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{9} = 3\text{cm}$$

$$\text{Thể tích hình nón là } V = \frac{1}{3} \cdot OH \cdot \pi \cdot r^2 = 16\pi (\text{cm}^3).$$



Bài 15. Người ta muốn tạo một cái khuôn đúc dạng hình trụ, có chiều cao bằng 16 cm, bán kính đáy bằng 8cm, mặt đáy trên lõm xuống dạng hình nón và khoảng cách từ đỉnh hình nón đến mặt đáy dưới hình trụ bằng 10cm. Tính diện tích toàn bộ mặt khuôn (lấy $\pi = 3,14$).

HD Giải

Hình trụ có bán kính $r = 8\text{cm}$ và chiều cao $h = 16\text{cm}$ nên diện tích xung quanh hình trụ là

$$S_1 = 2\pi rh = 2\pi \cdot 8 \cdot 16 = 256\pi (\text{cm}^2)$$

Diện tích 1 mặt đáy của hình trụ là $S_2 = \pi r^2 = \pi \cdot 8^2 = 64\pi (\text{cm}^2)$

Phần hình nón bị lõm xuống có chiều cao $h_1 = 16 - 10 = 6\text{cm}$ và bán kính đáy $r = 8\text{cm}$

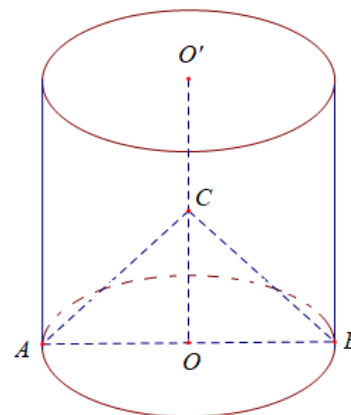
Đường sinh của hình nón là $l = \sqrt{r^2 + h_1^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\text{cm}$

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_3 = \pi rl = \pi \cdot 8 \cdot 10 = 80\pi (\text{cm}^2)$

Diện tích toàn bộ mặt khuôn là:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 256\pi + 64\pi + 80\pi = 400\pi = 1256 (\text{cm}^2)$$

Vậy diện tích toàn bộ mặt khuôn là $1256 (\text{cm}^2)$



Bài 16.

a. Một bồn nước inox có dạng một hình trụ với chiều cao 1,75 m và diện tích đáy là $0,32 \text{ m}^2$. Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn nước).

b. Một hình trụ có diện tích xung quanh $140\pi (\text{cm}^2)$ và chiều cao $h = 7\text{cm}$. Tính thể tích hình trụ đó.

HD Giải

a. Số mét khối nước đựng được của bồn chính là thể tích của bồn chứa. Như vậy số mét khối đựng được của bồn sẽ là: $V = 0,32 \cdot 1,75 = 0,56 (\text{m}^3)$.

b. Theo bài ra ta có: $2\pi rh = 140\pi \Rightarrow r = 10\text{cm}$. Áp dụng công thức tính thể tích hình trụ, ta có:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 7 = 700\pi (\text{cm}^3)$$

Bài 17. Một hộp sữa hình trụ có chiều cao 12cm và bán kính đáy 5cm. Mặt xung quanh hộp sữa được bao phủ bằng giấy in các thông tin về hộp sữa ấy. Do giáp mí, diện tích giấy sử dụng bằng 105% diện tích mặt xung quanh hộp sữa. Giả sử độ dày của giấy in và vỏ hộp không đáng kể, hãy tính diện tích phần giấy trên (lấy $\pi \approx 3,14$; kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

HD Giải

Diện tích phần giấy in cần dùng là: $S = 105\%.2\pi rh$

Vậy: $S \approx 105\%.2.3,14.5.12 = 395,64 (cm^2)$

Bài 18. Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật có ống mũ hình trụ, vành mũ hình vành khăn với kích thước như hình bên. Hãy tính tổng diện tích vải cần để làm cái mũ này biết rằng mũ được may hai lớp vải và diện tích vải dùng may một lớp vành mũ bằng 110% diện tích hình vành khăn tương ứng.

HD Giải

Ống mũ hình trụ với chiều cao $h = 30cm$

Bán kính đáy là: $R = \frac{35 - 10.2}{2} = 7,5(cm)$

Diện tích vải để làm 1 lớp ống mũ là :

$$S_1 = 2\pi Rh + \pi R^2 = 2\pi.7,5.30 + \pi.7,5^2 = 506,25\pi (cm^2)$$

Diện tích hình vành khăn là :

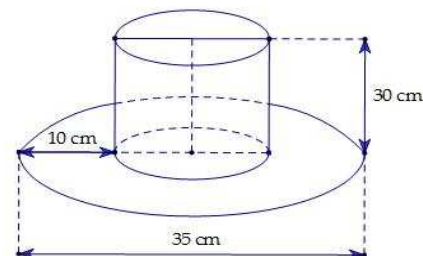
$$S_2 = \pi \left(\left(\frac{35}{2} \right)^2 - R^2 \right) = (17,5^2 - 7,5^2)\pi = 250\pi (cm^2)$$

Diện tích vải dùng may một lớp vành mũ là

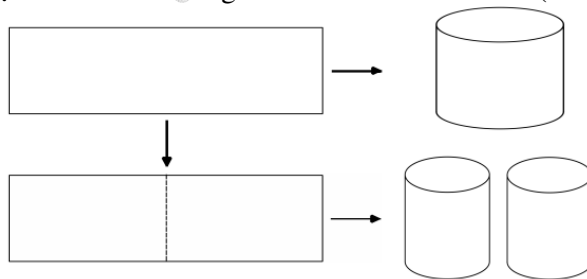
$$S_3 = 110\%.S_2 = 110\%.250\pi = 275\pi (cm^2)$$

Tổng diện tích vải để làm mũ là

$$S = 2(S_1 + S_3) = 2.(506,25\pi + 275\pi) = 1562,5\pi (cm^2)$$



Bài 19. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50cm \times 240cm$, người ta gò thành mặt xung quanh của các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50cm$ theo hai cách sau (xem hình minh họa):



Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, mỗi tấm gò thành mặt xung quanh của một thùng.

Hỏi cách làm nào chứa được lượng nước tối đa hơn? Vì sao?

HD Giải

Theo cách 1, thùng nước tạo thành là hình trụ có chiều cao $h = 50cm$, bán kính $R_1 = \frac{240}{2\pi} = \frac{120}{\pi} cm$. Khi

$$\text{đó, thể tích nước (tối đa) có thể chứa là } V_1 = \pi R_1^2 h = \pi \left(\frac{120}{\pi} \right)^2 h = \frac{120^2 h}{\pi} cm^3 \quad (1)$$

Theo cách 2, mỗi thùng nước tạo thành là hình trụ có chiều cao $h = 50cm$, bán kính $R_2 = \frac{120}{2\pi} = \frac{60}{\pi} cm$.

$$\text{Khi đó, thể tích nước (tối đa) có thể chứa ở cả hai thùng là } V_2 = \pi R_2^2 h + \pi R_2^2 h = 2\pi \left(\frac{60}{\pi} \right)^2 h = \frac{2.60^2 h}{\pi} cm^3$$

(2). Từ (1) và (2) ta có $V_1 = 2V_2$.

Vậy cách gò tôn theo cách 1 sẽ chứa được lượng nước tối đa nhiều hơn.

Bài 20. Một chiếc cốc thủy tinh có dạng hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 6cm , bán kính đáy bằng 1cm . Người ta thả từ từ lần lượt vào cốc nước một viên bi hình cầu và một vật có dạng hình nón đều bằng thủy tinh (vừa khít như hình vẽ) thì thấy nước trong chiếc cốc tràn ra ngoài. Tính thể tích của lượng nước còn lại trong chiếc cốc (biết rằng đường kính của viên bi, đường kính của đáy hình nón và đường kính của đáy cốc nước xem như bằng nhau; bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh).

HD Giải

Chiều cao hình trụ là: $h_t = 6(\text{cm})$

Thể tích hình trụ là: $V_t = \pi \cdot 1^2 \cdot 6 = 6\pi(\text{cm}^3)$

Bán kính hình cầu và hình trụ là: $r = 1(\text{cm})$

Thể tích hình cầu là: $V_c = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi(\text{cm}^3)$

Chiều cao hình nón là: $h = h_t - 2r = 6 - 2 \cdot 1 = 4(\text{cm})$

Thể tích hình nón là: $V_n = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_n = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 4 = \frac{4}{3}\pi(\text{cm}^3)$

Thể tích lượng nước còn trong chiếc cốc là: $V = V_t - V_n - V_c = 6\pi - \frac{4}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{10}{3}\pi(\text{cm}^3)$

Bài tập làm tương tự

Bài 21. Cho một điểm M nằm bên ngoài đường tròn $(O; 6\text{cm})$. Kẻ hai tiếp tuyến MN, MP (N, P là hai tiếp điểm) của đường tròn (O) . Vẽ cát tuyến MAB của đường tròn (O) sao cho đoạn thẳng $AB = 6\text{cm}$ với A, B thuộc đường tròn (O) , A nằm giữa M và B .

- Chứng minh tứ giác $OPMN$ nội tiếp đường tròn.
- Gọi H là trung điểm đoạn thẳng AB . So sánh góc $\widehat{MON}$ và góc $\widehat{MHN}$.
- Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ AB và dây AB của hình tròn tâm (O) .

Bài 22. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H . Biết ba góc $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCA}$ đều là góc nhọn.

- Chứng minh bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh DE vuông góc với OA .
- Cho M, N lần lượt là trung điểm của hai đoạn BC, AH . Cho K, L lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng OM và CE , MN và BD . Chứng minh KL song song với AC .

Bài 23. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) và đường cao AH ($K \in BC$).

Vẽ đường tròn (O) đường kính BC . Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (với M, N là các tiếp điểm, M và B nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AO). Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AN và AK .

- Chứng minh tứ giác $AMKO$ là tứ giác nội tiếp
- Chứng minh KA là tia phân giác góc AKN
- Chứng minh $AN^2 = AK \cdot AH$

Bài 24. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn $(O; R)$ vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn đó. Gọi M là một điểm bất kì trên nửa đường tròn $(O; R)$ (với M khác A , M khác B), tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt Ax, By lần lượt tại C và D .

- Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp.
- Chứng minh tam giác COD vuông tại O .
- Chứng minh $AC \cdot BD = R^2$.

d. Kẻ $MN \perp AB, (N \in AB)$; BC cắt MN tại I . Chứng minh I là trung điểm của MN .

Bài 25. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AD, AE (D, E là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến ABC của đường tròn (O) sao cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C ; tia AC nằm giữa hai tia AD và AO . Từ điểm O kẻ $OI \perp AC$ tại I .

a. Chứng minh năm điểm A, D, I, O, E cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh IA là tia phân giác của $\widehat{DIE}$ và $AB.AC = AD^2$.

c. Gọi K và F lần lượt là giao điểm của ED với AC và OI . Qua điểm D vẽ đường thẳng song song với IE cắt OF và AC lần lượt tại H và P . Chứng minh D là trung điểm của HP .

Bài 26. Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm M bất kì thuộc đường tròn sao cho $\widehat{MA} < \widehat{MB}$ ($M \neq A$). Kẻ tiếp tuyến tại A của đường tròn, tiếp tuyến này cắt tia BM ở N . Tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt CN ở D .

a. Chứng minh bốn điểm A, D, M, O cùng thuộc một đường tròn.

b. Chứng minh OD song song BM .

c. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với AB và cắt đường thẳng BM tại I . Gọi giao điểm của AI và BD là G . Chứng minh ba điểm N, G, O thẳng hàng.

Bài 27. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Kẻ dây cung CD vuông góc với AB tại H (H nằm giữa A và O , H khác A và O). Lấy điểm G thuộc CH (G khác C và H), tia AG cắt đường tròn tại E khác A .

a. Chứng minh tứ giác $BEGH$ là tứ giác nội tiếp.

b. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BE và CD . Chứng minh: $KC.KD = KE.KB$.

c. Đoạn thẳng AK cắt đường tròn O tại F khác A . Chứng minh G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HEF .

d. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên đường thẳng EF . Chứng minh $HE + HF = MN$

Bài 28. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và MN vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia MA lấy điểm C khác điểm M . Kẻ MH vuông góc với BC ($H \in BC$).

a. Chứng minh $BOMH$ là tứ giác nội tiếp.

b. MB cắt OH tại E . Chứng minh $ME.MH = BE.HC$.

c. Gọi giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp $\triangle MHC$ là K . Chứng minh 3 điểm C, K, E thẳng hàng.

Bài 29. Một hình trụ có chiều cao bằng $5m$ và diện tích xung quanh bằng $20\pi m^2$. Tính thể tích của hình trụ.

Bài 30. Một hình trụ có diện tích xung quanh $140\pi (cm^2)$ và chiều cao là $h = 7 (cm)$. Tính thể tích của hình trụ đó.

Vấn đề 9. Một số đề luyện tập và hướng dẫn giải

ĐỀ 1

Bài 1 (1,5 điểm). Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$.

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$.

Bài 2 (1,5 điểm). Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = (\sqrt{11} - 2\sqrt{44} + 3\sqrt{99}) : \sqrt{11}$.

b) $B = \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{1}{\sqrt{a} - 2} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a - 4}$, với $a > 0$ và $a \neq 4$.

Bài 3 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) .

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = x + m^2$ và (P) cắt nhau tại hai điểm có hoành độ các giao điểm là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \geq 8$.

Bài 4 (1,0 điểm).

Lớp 9A có 40 học sinh được chia thành một số tổ. Nếu tăng thêm 1 tổ thì mỗi tổ lúc này sẽ có ít hơn 2 học sinh so với lúc chưa tăng. Tính số tổ lúc đầu của lớp 9A (biết rằng số học sinh ở mỗi tổ luôn bằng nhau).

Bài 5 (1,0 điểm).

Một hộp sữa hình trụ có chiều cao 12cm và bán kính đáy 5cm. Mặt xung quanh hộp sữa được bao phủ bằng giấy in các thông tin về hộp sữa ấy. Do gấp mí, diện tích giấy sử dụng bằng 105% diện tích mặt xung quanh hộp sữa. Giả sử độ dày của giấy in và vỏ hộp không đáng kể, hãy tính diện tích phần giấy trên (lấy $\pi \approx 3,14$; kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 6 (2,5 điểm).

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A sao cho $OA = 2R$. Từ điểm A vẽ tiếp tuyến AB đến (O) (B là tiếp điểm). Kẻ đường kính BC của (O) , gọi M là trung điểm của đoạn thẳng OB , kẻ MN vuông góc với AC tại N .

a) Chứng minh tứ giác $ABMN$ nội tiếp.

b) Kẻ BH vuông góc với OA tại H . Cho $R = 3cm$, tính $\widehat{BOA}$ và cạnh BH .

c) Đường thẳng vuông góc với OA tại O cắt tia AB tại E . Chứng minh ba điểm E, M, N thẳng hàng.

Bài 7 (0,5 điểm)

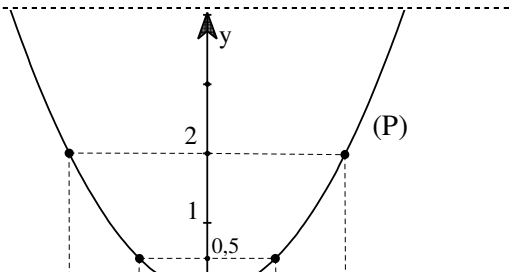
Trong hình vuông bên, tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều bằng 15. Hình vuông đặc biệt này gọi là một *ma phương* 3×3 (vì mỗi cạnh có 3 ô); 3 gọi là *bậc* của ma phương và 15 gọi là *hằng số của ma phương*.

Giả sử em có một ma phương 4×4 mà mỗi ô được điền một số tự nhiên khác nhau từ 1 đến 16. Không cần vẽ ma phương này ra, em hãy cho biết hằng số của ma phương 4×4 này và giải thích vì sao em biết được hằng số đó.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ 1

Bài	Ý	Nội Dung	Điểm											
1 (1,5đ)	a	Giải phương trình $x^2 - 3x - 10 = 0$.	0,75											
		$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.1.(-10) = 49 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$	0,25											
		Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 5$; $x_2 = -2$	0,50											
	b	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$	0,75											
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$	0,25											
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 3.2 + 2y = 4 \end{cases}$	0,25											
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$	0,25											
		Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất: $(x; y) = (2; -1)$												
2 (1,5đ)	a	Rút gọn: $A = (\sqrt{11} - 2\sqrt{44} + 3\sqrt{99}) : \sqrt{11}$.	0,75											
		$A = (\sqrt{11} - 4\sqrt{11} + 9\sqrt{11}) : \sqrt{11}$	0,50											
		$A = 6\sqrt{11} : \sqrt{11} = 6$	0,25											
	b	Rút gọn: $B = \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{1}{\sqrt{a} - 2} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a - 4}$, với $a > 0$ và $a \neq 4$.	0,75											
		$B = \left(\frac{\sqrt{a} - 2 + \sqrt{a} + 2}{a - 4} \right) \cdot \frac{a - 4}{\sqrt{a}}$	0,25											
		$B = \frac{2\sqrt{a}}{a - 4} \cdot \frac{a - 4}{\sqrt{a}}$	0,25											
		$B = 2$	0,25											
3 (2,0đ)	a	Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P). Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.	1,0											
		<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$y = \frac{1}{2}x^2$</td><td>2</td><td>0,5</td><td>0</td><td>0,5</td><td>2</td></tr></table>	x	-2	-1	0	1	2	$y = \frac{1}{2}x^2$	2	0,5	0	0,5	2
	x	-2	-1	0	1	2								
	$y = \frac{1}{2}x^2$	2	0,5	0	0,5	2								
b		0,50												
	Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d): $y = x + m^2$ và (P) cắt nhau tại hai điểm có hoành độ các giao điểm là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \geq 8$.	1,0												

		Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $\frac{1}{2}x^2 = x + m^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2m^2 = 0$ Có $\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-2m^2) = 2m^2 + 1 > 0$ với mọi m Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Theo hệ thức Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -2m^2 \end{cases}$ Ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \geq 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \geq 8$ Hay $4 + 2m^2 \geq 8 \Leftrightarrow m^2 \geq 2$ $\Leftrightarrow m \geq \sqrt{2}$ hoặc $m \leq -\sqrt{2}$	0,25 0,25 0,25 0,25
4 (1,0đ)		Lớp 9A có 40 học sinh được chia thành một số tổ. Nếu tăng thêm 1 tổ thì mỗi tổ lúc này sẽ có ít hơn 2 học sinh so với lúc chưa tăng. Tính số tổ lúc đầu của lớp 9A (biết rằng số học sinh ở mỗi tổ luôn bằng nhau). Gọi số tổ lúc đầu của lớp 9A là x (x nguyên dương). Theo đề bài ta có: $\frac{40}{x} - 2 = \frac{40}{x+1}$ $\Rightarrow 40(x+1) - 2x(x+1) = 40x \Leftrightarrow -2x^2 - 2x + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 & (\text{nhận}) \\ x = -5 & (\text{loại}) \end{cases}$ Vậy số tổ lúc đầu của lớp 9A là 4 tổ.	1,0 0,25 0,25 0,25 0,25
5 (1,0đ)		Một hộp sữa hình trụ có chiều cao 12cm và bán kính đáy 5cm. Mặt xung quanh hộp sữa được bao phủ bằng giấy in các thông tin về hộp sữa ấy. Do giáp mí, diện tích giấy sử dụng bằng 105% diện tích mặt xung quanh hộp sữa. Giả sử độ dày của giấy in và vỏ hộp không đáng kể, hãy tính diện tích phần giấy trên (lấy $\pi \approx 3,14$; kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Diện tích phần giấy in cần dùng là: $S = 105\% \cdot 2\pi rh$ $S \approx 105\% \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 12 = 395,64 \text{ (cm}^2\text{)}$	1,0 0,5 0,5

Bài	Ý	Nội Dung	Điểm
6 (2,5đ)	Hình vẽ	Hình vẽ đúng đến câu a cho 0,25đ.	0,25

	a	Chứng minh tứ giác $ABMN$ nội tiếp.	0,75
		Xét tứ giác $ABMN$ có: $\widehat{MBA} = \widehat{MNA} = 90^\circ$ (gt)	0,50
		$\Rightarrow \widehat{MBA} + \widehat{MNA} = 180^\circ$ Vậy tứ giác $ABMN$ nội tiếp	0,25
	b	Kẻ BH vuông góc với OA tại H. Cho $R = 3cm$, tính $\widehat{BOA}$ và cạnh BH.	0,75
		ΔOBA vuông tại B $\Rightarrow \cos \widehat{BOA} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{2R} = \frac{3}{6}$	0,25
		$\Rightarrow \widehat{BOA} = 60^\circ$	0,25
		ΔOBH vuông tại $H \Rightarrow BH = OB \sin \widehat{BOH} = 3 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} cm$	0,25
	c	Đường thẳng vuông góc với OA tại O cắt tia AB tại E. Chứng minh ba điểm E, M, N thẳng hàng.	0,75
		ΔOAE vuông tại O có $OB \perp AE \Rightarrow OB^2 = AB \cdot BE$ $\Rightarrow 2BM \cdot \frac{1}{2} BC = AB \cdot BE \Leftrightarrow BM \cdot BC = AB \cdot BE$ hay $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BE}$	0,25
		$\Delta ABC \sim \Delta MBE$ (c-g-c) (do $\widehat{ABC} = \widehat{MBE} = 90^\circ$ và $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BE}$) $\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{BAC}$ mà $\widehat{CMN} = \widehat{BAC}$ (do tứ giác $ABMN$ nội tiếp)	0,25
		$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{CMN}$ mà $\widehat{BMN} + \widehat{CMN} = 180^\circ$ (kề bù) nên $\widehat{BMN} + \widehat{BME} = 180^\circ \Rightarrow$ Ba điểm E, M, N thẳng hàng.	0,25

Bài	Ý	Nội Dung	Điểm									
7 (0,5đ)		<table border="1"><tr><td>2</td><td>9</td><td>4</td></tr><tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td><td>8</td></tr></table> Trong hình vuông bên, tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều bằng 15. Hình vuông đặc biệt này gọi là một <i>ma phương</i> 3x3 (vì mỗi cạnh có 3 ô); 3 gọi là <i>bậc</i> của ma phương và 15 gọi là <i>hàng số</i> của ma phương. Giả sử em có một ma phương 4x4 mà mỗi ô được điền một số tự nhiên khác nhau từ 1 đến 16. Không cần vẽ ma phương này ra, em hãy cho biết hàng số của ma phương 4x4 này và giải thích vì sao em biết được hàng số đó.	2	9	4	7	5	3	6	1	8	0,5
2	9	4										
7	5	3										
6	1	8										
		Gọi S là tổng các số tự nhiên từ 1 đến 16. Ta có: $S = 1 + 2 + \dots + 15 + 16$ $S = 16 + 15 + \dots + 2 + 1$ Cộng hai đẳng thức trên về theo về, ta được: $2S = 17 \cdot 16 = 272 \Rightarrow S = 272 : 2 = 136$	0,25									
		Mặt khác, S cũng là tổng các số trên 4 hàng (cột). Do tổng các số trên mỗi hàng (cột) đều bằng nhau nên tổng các số trên một hàng (cột) là: $136 : 4 = 34$ Theo định nghĩa, hàng số của ma phương 4x4 là 34.	0,25									
Lưu ý: Thí sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa												

ĐỀ 2

Bài 1. (2,0 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^2 - x - 12 = 0$;

b) $\begin{cases} 3x + y = 17 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$.

Bài 2. (1,0 điểm) Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{5\sqrt{x} + 4}{x - 5\sqrt{x} + 4} - \frac{3 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 4} + \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 16; x \neq 1.$$

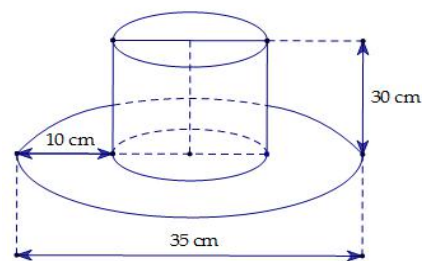
Bài 3. (2,0 điểm)

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Cho hàm số $y = 2x + m - 6$ có đồ thị là (d) . Tìm tham số m để $(P): y = x^2$ cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Bài 4. (1,0 điểm) Anh Nam trồng cây trên một mảnh đất hình chữ nhật. Anh dự định trồng theo từng hàng và mỗi hàng có số cây bằng nhau. Nếu tăng thêm 1 hàng và mỗi hàng bớt đi 1 cây thì số cây phải trồng tăng thêm 7 cây. Nếu bớt đi 1 hàng và tăng thêm mỗi hàng 5 cây thì số cây phải trồng tăng thêm 11 cây. Hỏi số lượng cây mà Anh Nam dự định trồng là bao nhiêu ?

Bài 5. (1,0 điểm) Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật có ống mũ hình trụ, vành mũ hình vành khăn với kích thước như hình bên. Hãy tính tổng diện tích vải cần để làm cái mũ này biết rằng mũ được may hai lớp vải và diện tích vải dùng may một lớp vành mũ bằng 110% diện tích hình vành khăn tương ứng.



Bài 6. (2,5 điểm) Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, C là một điểm tùy ý trên đường tròn (C khác A và B); các tiếp tuyến với đường tròn tại A và C cắt nhau tại M . BM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D .

a) Chứng minh tứ giác $OAMC$ nội tiếp đường tròn;

b) Chứng minh: $MC^2 = MD \cdot MB$;

c) Cho $OM = 2R$. Tính diện tích phần tam giác AMC nằm ngoài đường tròn (O) theo R .

Bài 7 (0,5 điểm). Bốn học sinh A, B, C, D cùng tham gia vòng chung kết cuộc thi *Giai điệu tuổi hồng* và đạt 4 giải khác nhau nhất, nhì, ba, tư. Trong mỗi câu gồm 2 ý dưới đây, một ý là đúng, một ý là sai:

- a) A giải nhì, D giải ba.
- b) A giải nhất, B giải nhì.
- c) C giải nhì, D giải tư.

Dựa vào các thông tin trên, em hãy cho biết mỗi học sinh A, B, C, D đạt giải gì.

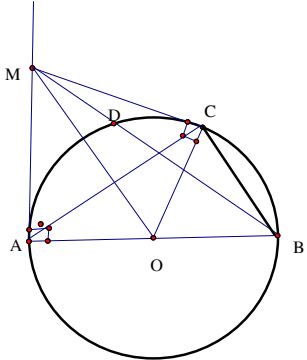
-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

(Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm)

ĐÁP ÁN ĐỀ 2

Bài	ĐÁP ÁN	Điểm
1a	$x^2 - x - 12 = 0$ Dùng công thức nghiệm để giải phương trình, có 2 nghiệm phân biệt : $x_1 = 4; x_2 = -3$	1 đ
1b	$\begin{cases} 3x + y = 17 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 17 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 14 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (5;2)	1 đ
2	$A = \frac{5\sqrt{x} + 4}{x - 5\sqrt{x} + 4} - \frac{3 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 4} + \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}$ $= \frac{5\sqrt{x} + 4 - (3 - 2\sqrt{x})(\sqrt{x} - 1) + (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 4)}{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} - 1)}$ $= \frac{3x - 2\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} - 1)}$ $= \frac{(\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} - 1)}$ $= \frac{3\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 4}$	0,25 0,25 0,25 0,25
3a	Lập đúng bảng giá trị Vẽ đúng đồ thị	0,5đ 0,5đ
3b	*Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 = 2x + m - 6$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 6 = 0$ $\Delta = (-2)^2 - 4(-m + 6) = 4 + 4m - 24 = 4m - 20$ Để (P) cắt (d): $y = 2x + m - 6$ tại hai điểm phân biệt có các hoành độ dương thì phương trình phải có hai nghiệm phân biệt dương Hay $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 20 > 0 \\ 2 > 0 \\ -m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m < 6$ Vậy $5 < m < 6$ thì (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương	0,25đ 0,25đ 0,25đ
4	Gọi x (hàng) là số hàng dự định trồng và y (cây) là số cây dự định trồng trên mỗi hàng	

	Khi đó số cây dự định trồng là $x.y$ (cây) Điều kiện $x, y \in \mathbb{N}^*$ Nếu tăng thêm 1 hàng và mỗi hàng bớt đi 1 cây thì số cây phải trồng tăng thêm 7 cây, ta có phương trình : $(x+1)(y-1) = xy + 7(1)$ Nếu bớt đi 1 hàng và tăng thêm mỗi hàng 5 cây thì số cây phải trồng tăng thêm 15 cây, ta có phương trình : $(x-1)(y+5) = xy + 15(2)$ Do đó, từ (1) và (2) ta có hệ phương trình : $\begin{cases} (x+1)(y-1) = xy + 7 \\ (x-1)(y+5) = xy + 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -8 \\ 5x - y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 15 \end{cases}$ Vậy số cây mà anh Nam dự định trồng là : $7 \cdot 15 = 105$ cây	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
5	Ống mũ hình trụ với chiều cao $h = 30\text{cm}$ Bán kính đáy là: $R = \frac{35-10,2}{2} = 7,5(\text{cm})$ Diện tích vải để làm 1 lớp ống mũ là : $S_1 = 2\pi Rh + \pi R^2 = 2\pi \cdot 7,5 \cdot 30 + \pi \cdot 7,5^2 = 506,25\pi(\text{cm}^2)$ Diện tích hình vành khăn là : $S_2 = \pi \left(\left(\frac{35}{2} \right)^2 - R^2 \right) = (17,5^2 - 7,5^2)\pi = 250\pi(\text{cm}^2)$ Diện tích vải dùng may một lớp vành mũ là $S_3 = 110\% \cdot S_2 = 110\% \cdot 250\pi = 275\pi(\text{cm}^2)$ Tổng diện tích vải để làm mũ là : $S = 2(S_1 + S_3) = 2 \cdot (506,25\pi + 275\pi) = 1562,5\pi(\text{cm}^2)$	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
6	Hình vẽ đúng, đủ (0,5đ) 	0,5đ

Chứng minh rằng tứ giác OAMC nội tiếp		
6a	Xét tứ giác OAMC Ta có $\widehat{OAM} = 90^\circ; \widehat{OCM} = 90^\circ$ (Vì MA, MC là tiếp tuyến)	0,25đ
	Nên $\widehat{OAM} + \widehat{OCM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ Vậy tứ giác OAMC nội tiếp	0,25đ
Chứng minh: $MC^2 = MD.MB$		
6b	xét $\triangle MCD$ và $\triangle MBC$, ta có $\widehat{BMC}$ là góc chung $\widehat{MCD} = \widehat{MBC}$ (cùng chắn cung DC) Suy ra: $\triangle MCD \sim \triangle MBC (g - g)$ $\Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{MD}{MC}$ $\Rightarrow MC^2 = MD.MB$	0,25đ 0,25đ 0,25đ
Diện tích phần tam giác AMC nằm ngoài đường tròn (O) theo R		
6c	Ta có : $AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$ $\cos \widehat{AOM} = \frac{OA}{OM} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \widehat{AOM} = 60^\circ$ $\Rightarrow \widehat{AOM} = 120^\circ$ $S_{OAMC} = 2.S_{OAM} = OA.AM = R^2\sqrt{3}$ $S_{quatOAC} = \frac{\pi R^2}{3}$ Diện tích cần tìm là : $S = S_{OAMC} - S_{quatOAC} = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{R^2(3\sqrt{3} - \pi)}{3}$ (đvdt)	0,25đ 0,25đ 0,25đ
7	Nếu “A đạt giải nhì” là đúng thì “B đạt giải nhì” là sai nên “A đạt giải nhất” là đúng, mâu thuẫn với “A đạt giải nhì”. Vậy “A đạt giải nhì” là sai nên “D đạt giải ba” là đúng. Suy ra “D đạt giải tư” là sai nên “C đạt giải nhì” là đúng, “B đạt giải nhì” là sai nên “A đạt giải nhất” là đúng. Tóm lại: A đạt giải nhất, C đạt giải nhì, D đạt giải ba và B đạt giải tư.	0,5đ

* Mọi cách giải khác đúng; chính xác; lập luận hợp lý, logic đều được điểm tối đa

* Điểm toàn bài làm tròn đến một chữ số thập phân

ĐỀ 3

Bài 1. (2,0 điểm) Không dùng máy tính cầm tay, giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^4 - x^2 - 6 = 0$.

b) $\begin{cases} 2x + 5y = -8 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$.

Bài 2. (1,5 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$.

b) Chứng minh đường thẳng $d: y = mx - m + 1$, với m là tham số, luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ với mọi giá trị của m . Tính $y_1 + y_2$ theo m .

Bài 3. (1,5 điểm) Cho biểu thức $P = \sqrt{a^2} + \sqrt{a^3} + \frac{a^2 - a}{\sqrt{a+1}}$, với a là số thực không âm.

a) Rút gọn P .

b) Tìm a thỏa mãn $a^2 + a - P = 0$.

Bài 4. (1,0 điểm)

Để thực hiện chương trình khuyến mãi nhân kỉ niệm ngày thành lập, một công ty điện tử thực hiện giảm giá 20% trên một tivi cho lô hàng gồm có 30 cái tivi với giá bán lẻ mỗi cái trước đó là 6200000VNĐ. Ngày thứ nhất công ty đã bán được 20 cái. Qua ngày thứ 2, công ty quyết định giảm giá thêm $x\%$ trên một tivi cho các tivi còn lại, với x là số nguyên dương.

a) Cho $x = 10$, tính số tiền mà công ty thu được nếu bán hết lô hàng khuyến mãi.

b) Biết giá vốn của mỗi chiếc tivi là 4500000VNĐ. Tìm giá trị lớn nhất của x để công ty không bị lỗ.

Bài 5. (2,0 điểm)

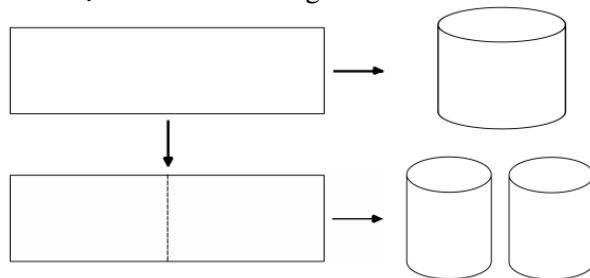
Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên cạnh AC lấy một điểm M không trùng với A và C . Gọi $(\mathcal{C})$ là đường tròn đường kính MC . Các đường thẳng BM và BC cắt $(\mathcal{C})$ tại các điểm thứ hai lần lượt tại D và E . Chứng minh rằng

a) Hai đường thẳng BM và CD vuông góc với nhau;

b) $\widehat{MED} = \widehat{MBA}$.

Bài 6. (1,0 điểm)

Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50cm \times 240cm$, người ta gò thành mặt xung quanh của các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50cm$ theo hai cách sau (xem hình minh họa):



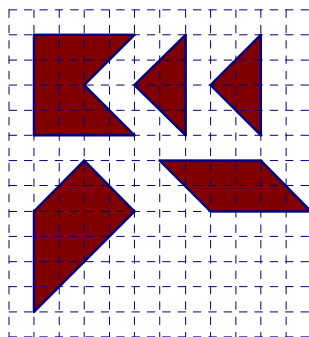
Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, mỗi tấm gò thành mặt xung quanh của một thùng.

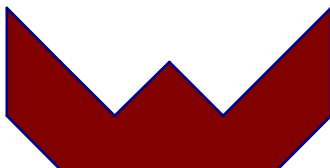
Hỏi cách làm nào chứa được lượng nước tối đa nhiều hơn? Vì sao?

Bài 7. (1,0 điểm)

Từ 5 miếng gỗ có hình dạng như sau:



hãy ghép thành hình có dạng:

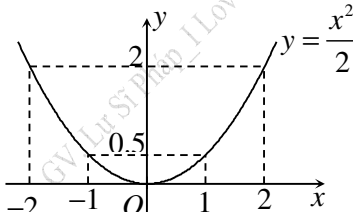


Ghi chú: *Thí sinh vẽ lại hình và dùng các đường liền nét để biểu diễn cách ghép.*

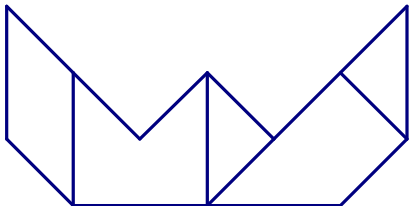
-----HẾT-----

GV. Lư Sĩ Pháp _ I Love Math

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ 3

Bài	Ý	Nội dung	Điểm												
1			2.0												
	a	$x^4 - x^2 - 6 = 0$ (*)													
		Đặt $t = x^2, t \geq 0$.	0.25												
		Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - t - 6 = 0$	0.25												
		$\Leftrightarrow t = 3$ hoặc $t = -2$ (loại)	0.25												
		Với $t = 3$, ta có $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.	0.25												
	Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{3}$.														
	b	$\begin{cases} 2x + 5y = -8 & (1) \\ 3x - y = 5 & (2) \end{cases}$													
		Từ (2) ta có $y = 3x - 5$.	0.25												
		Thay $y = 3x - 5$ vào (1) ta được: $2x + 5(3x - 5) = -8 \Leftrightarrow x = 1$.	0.25												
		Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$.	0.5												
2			1.5												
	a	Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$.													
		<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$y = \frac{x^2}{2}$</td><td>2</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>0</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>2</td></tr></table>	x	-2	-1	0	1	2	$y = \frac{x^2}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	0.25
		x	-2	-1	0	1	2								
	$y = \frac{x^2}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2									
		0.25													
	b	Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là													
		$\frac{x^2}{2} = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2(m - 1) = 0$ (*)	0.25												
		Phương trình (*) có													
		$\Delta' = (-m)^2 - 2(m - 1) = m^2 - 2m + 2 = (m - 1)^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.	0.25												
		Do đó (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.													
Suy ra d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$,		0.25													
Trong đó $y_1 = mx_1 - m + 1, y_2 = mx_2 - m + 1$.															
Suy ra $y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2) - 2m + 2 = m.(2m) - 2m + 2 = 2m^2 - 2m + 2$.		0.25													
3		$P = \sqrt{a^2} + \sqrt{a^3} + \frac{a^2 - a}{\sqrt{a} + 1},$	1.5												
	a	Ta có $P = a + a\sqrt{a} + \frac{a(a - 1)}{\sqrt{a} + 1}$	0.25												
		$= a + a\sqrt{a} + a(\sqrt{a} - 1) = 2a\sqrt{a}.$	0.5												
	b	Ta có $a^2 + a - P = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a\sqrt{a} + a = 0$	0.25												
		$\Leftrightarrow (a - \sqrt{a})^2 = 0$	0.25												

		$\Leftrightarrow \sqrt{a} = a$ $\Leftrightarrow a = a^2 \text{ (vì } a \geq 0 \text{)}$ $\Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = 1.$	0.25
4			1.0
	a	Số tiền thu được của công ty ngày thứ nhất: $20.0,8.6200000 = 99200000 \text{ VNĐ}$ Số tiền thu được của công ty ngày thứ hai: $10.0,7.6200000 = 43400000 \text{ VNĐ}$ Vậy tổng số tiền mà công ty thu được khi bán hết lô hàng khuyến mãi là 142600000 VNĐ	0.25
	b	Tổng giá vốn của 30 cái ti vi là $30.4500000 = 135000000 \text{ VNĐ}$ Tổng số tiền mà công ty thu được khi bán hết lô hàng khuyến mãi là $20.0,8.6200000 + 10.\left(1 - \frac{20+x}{100}\right).6200000 = 148800000 - 620000x$ Công ty không lỗ khi: $148800000 - 620000x \geq 135000000 \Leftrightarrow 62x \leq 1380 \Leftrightarrow x \leq \frac{690}{31} \approx 22,258$ Vậy $x = 22$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0.25
5			3.0
		Hình vẽ đến câu a)	0.5
	a	Ta có $\widehat{BDC} = \widehat{MDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Suy ra $BM \perp CD$.	0.25
	b	Ta có $\widehat{CAB} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn. Do đó $\widehat{MBA} = \widehat{MCD}$. Mặt khác $\widehat{MCD} = \widehat{MED}$ (vì cùng chắn cung $\widehat{MD}$ trong $(\mathcal{C})$) Suy ra $\widehat{MED} = \widehat{MBA}$.	0.25
6			1.0
		Theo cách 1, thùng nước tạo thành là hình trụ có chiều cao $h = 50\text{cm}$, bán kính $R_1 = \frac{240}{2\pi} = \frac{120}{\pi} \text{cm}$. Khi đó, thể tích nước (tối đa) có thể chứa là $V_1 = \pi R_1^2 h = \pi \left(\frac{120}{\pi}\right)^2 h = \frac{120^2 h}{\pi} \text{cm}^3 \quad (1)$	0.25
		Theo cách 2, mỗi thùng nước tạo thành là hình trụ có chiều cao $h = 50\text{cm}$, bán kính $R_2 = \frac{120}{2\pi} = \frac{60}{\pi} \text{cm}$. Khi đó, thể tích nước (tối đa) có thể chứa ở cả hai thùng là $V_2 = \pi R_2^2 h + \pi R_2^2 h = 2\pi \left(\frac{60}{\pi}\right)^2 h = \frac{2.60^2 h}{\pi} \text{cm}^3 \quad (2)$	0.25

		Từ (1) và (2) ta có $V_1 = 2V_2$. Vậy cách gò tôn theo cách 1 sẽ chứa được lượng nước tối đa nhiều hơn.	0.5
7			1.0
			

GV. Lư Sĩ Pháp – I Love Math

ĐỀ 4

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho parabol $(P): y = \frac{-1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - 4$.

- Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Câu 2. (1,0 điểm)

Cho phương trình: $2x^2 - 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị

của biểu thức: $A = \frac{x_1 - 1}{x_2 + 1} + \frac{x_2 - 1}{x_1 + 1}$.

Câu 3. (0,75 điểm)

Quy tắc sau đây cho ta biết được ngày thứ n , tháng t , năm 2019 là ngày thứ mấy trong tuần. Đầu tiên, ta tính giá trị của biểu thức $T = n + H$, ở đây H được xác định bởi bảng sau:

Tháng t	8	2; 3; 11	6	9; 12	4; 7	1; 10	5
H	-3	-2	-1	0	1	2	3

Sau đó, lấy T chia cho 7 ta được số dư r ($0 \leq r \leq 6$).

Nếu $r = 0$ thì ngày đó là ngày thứ Bảy.

Nếu $r = 1$ thì ngày đó là ngày Chủ Nhật.

Nếu $r = 2$ thì ngày đó là ngày thứ Hai.

Nếu $r = 3$ thì ngày đó là ngày thứ Ba.

...

Nếu $r = 6$ thì ngày đó là ngày thứ Sáu.

Ví dụ:

Ngày 31/12/2019 có $n = 31, t = 12, H = 0 \Rightarrow T = n + H = 31 + 0 = 31$. Số 31 chia cho 7 có số dư là 3 nên ngày đó là thứ Ba.

a. Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định các ngày 02/09/2019 và 20/11/2019 là ngày thứ mấy?

b. Bạn Hằng tổ chức sinh nhật của mình trong tháng 10/2019. Hỏi ngày sinh nhật của Hằng là ngày mấy? Biết rằng ngày sinh nhật của Hằng là một bội số của 3 và là thứ Hai.

Câu 4. (3,0 điểm)

Tại bề mặt đại dương, áp suất nước bằng áp suất khí quyển và là 1 atm (atmosphere). Bên dưới mặt nước, áp suất nước tăng thêm 1 atm cho mỗi 10 mét sâu xuống. Biết rằng mối liên hệ giữa áp suất y (atm) và độ sâu x (m) dưới mặt nước là một hàm số bậc nhất $y = ax + b$.

- Xác định các hệ số a và b .
- Một người thợ lặn đang ở độ sâu bao nhiêu nếu người ấy chịu một áp suất là 2,85atm?

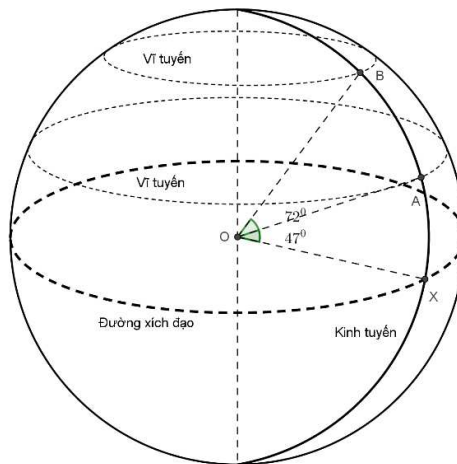
Câu 5. (1,0 điểm)

Một nhóm gồm 31 học sinh tổ chức một chuyến du lịch (chi phí chuyến đi được chia đều cho các bạn tham gia). Sau khi đã hợp đồng xong, vào giờ chót có 3 bạn bạn việc đột xuất không đi được nên họ không đóng tiền. Cả nhóm thống nhất mỗi bạn còn lại sẽ đóng thêm 18000 đồng so với dự kiến ban đầu để bù lại cho 3 bạn không tham gia. Hỏi tổng chi phí mỗi chuyến đi là bao nhiêu?

Câu 6. (1,0 điểm)



Cuối năm học, các bạn lớp 9A chia làm hai nhóm, mỗi nhóm chọn một khu vườn sinh thái ở Bắc bán cầu để tham quan. Khi mở hệ thống định vị GPS, họ phát hiện một sự trùng hợp khá thú vị là hai vị trí mà hai nhóm chọn đều nằm trên cùng một kinh tuyến và lần lượt ở các vĩ tuyến 47° và 72° .



a. Tính khoảng cách (làm tròn đến hàng trăm) giữa hai vị trí đó, biết rằng kinh tuyến là một cung tròn nối liền hai cực của trái đất và có độ dài khoảng 20 000km.

b. Tính (làm tròn đến hàng trăm) độ dài bán kính và đường xích đạo của trái đất. Từ kết quả của bán kính (đã làm tròn), hãy tính thể tích của trái đất, biết rằng trái đất có dạng hình cầu và thể tích của hình cầu được tính theo công thức $V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot R^3$ với R là bán kính hình cầu.

Câu 7. (1,0 điểm) Bạn Dũng trung bình tiêu thụ 15 ca-lo cho mỗi phút bơi và 10 ca-lo cho mỗi phút chạy bộ. Hôm nay, Dũng mất 1,5 giờ cho cả hai hoạt động trên và tiêu thụ hết 1200 ca-lo. Hỏi hôm nay, bạn Dũng đã mất bao nhiêu thời gian cho mỗi hoạt động này?

Câu 8. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường tròn BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng AH cắt BC và (O) lần lượt tại F và K ($K \neq A$). Gọi L là hình chiếu của D lên AB .

a) Chứng minh rằng tứ giác $BEDC$ nội tiếp và $BD^2 = BL \cdot BA$.

b) Gọi J là giao điểm của KD và (O) , ($J \neq K$). Chứng minh rằng $\widehat{BJK} = \widehat{BDE}$.

c) Gọi I là giao điểm của BJ và ED . Chứng minh tứ giác $ALIJ$ nội tiếp và I là trung điểm ED .

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ 4

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho parabol $(P): y = \frac{-1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - 4$.

- Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải:

a. Hàm số $y = \frac{-1}{2}x^2$ có tập xác định $D = R$

Bảng giá trị

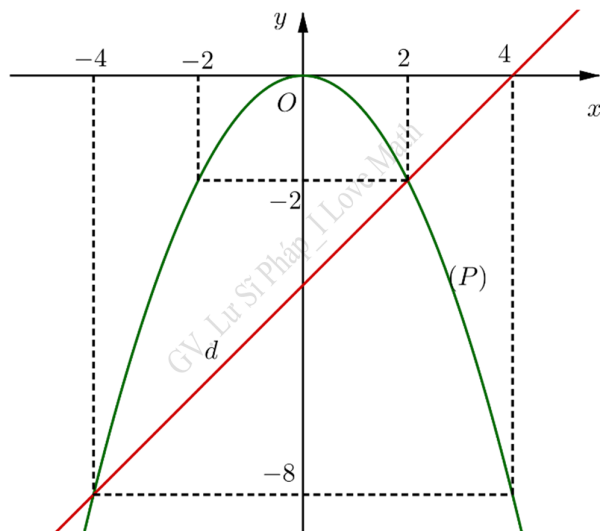
x	-4	-2	0	2	4
y	-8	-2	0	-2	-8

* Hàm số $y = x - 4$ có tập xác định: $D = R$

Bảng giá trị

x	4	5
y	0	1

Hình vẽ:



b. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$-\frac{1}{2}x^2 = x - 4 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = -2 \\ x = -4 \Rightarrow y = -8 \end{cases}$$

Vậy (P) cắt d tại hai điểm có tọa độ lần lượt là $(2; -2)$ và $(-4; -8)$.

Câu 2. (1,0 điểm)

Cho phương trình: $2x^2 - 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị

của biểu thức: $A = \frac{x_1 - 1}{x_2 + 1} + \frac{x_2 - 1}{x_1 + 1}$.

Lời giải:

Theo hệ thức Vi – ét, ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \\ P = x_1 x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Theo giả thiết, ta có:

$$A = \frac{x_1 - 1}{x_2 + 1} + \frac{x_2 - 1}{x_1 + 1} = \frac{x_1^2 - 1 + x_2^2 - 1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{S^2 - 2P - 2}{S + P + 1} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{5}{8}$$

Câu 3. (0,75 điểm)

Quy tắc sau đây cho ta biết được ngày thứ n , tháng t , năm 2019 là ngày thứ mấy trong tuần. Đầu tiên, ta tính giá trị của biểu thức $T = n + H$, ở đây H được xác định bởi bảng sau:

Tháng t	8	2; 3; 11	6	9; 12	4; 7	1; 10	5
H	-3	-2	-1	0	1	2	3

Sau đó, lấy T chia cho 7 ta được số dư r ($0 \leq r \leq 6$).

Nếu $r = 0$ thì ngày đó là ngày thứ Bảy.

Nếu $r = 1$ thì ngày đó là ngày Chủ Nhật.

Nếu $r = 2$ thì ngày đó là ngày thứ Hai.

Nếu $r = 3$ thì ngày đó là ngày thứ Ba.

...

Nếu $r = 6$ thì ngày đó là ngày thứ Sáu.

Ví dụ:

Ngày 31/12/2019 có $n = 31, t = 12, H = 0 \Rightarrow T = n + H = 31 + 0 = 31$. Số 31 chia cho 7 có số dư là 3 nên ngày đó là thứ Ba.

a. Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định các ngày 02/09/2019 và 20/11/2019 là ngày thứ mấy?

b. Bạn Hằng tổ chức sinh nhật của mình trong tháng 10/2019. Hỏi ngày sinh nhật của Hằng là ngày mấy? Biết rằng ngày sinh nhật của Hằng là một bội số của 3 và là thứ Hai.

Lời giải:

a. Ngày 02/09/2019, có $n = 2, t = 9, H = 0$. Do đó $T = n + H = 2 + 0 = 2$.

Số 2 chia cho 7 có số dư là 2 nên ngày này là thứ Hai.

Ngày 20/11/2019 có $n = 20, t = 11, H = -2$. Do đó $T = n + H = 20 - 2 = 18$.

Số 18 chia cho 7 có số dư là 4 nên ngày này là thứ Tư.

b. Do ngày sinh nhật của Hằng là vào thứ Hai nên $r = 2$. Do đó $T = 7q + 2$.

Mặt khác $T = n + 2 \Rightarrow n = T - 2 = 7q + 2 - 2 = 7q$.

Biện luận

q	1	2	3	4	5
n	7	14	21	28	35

Do n là bội của 3 nên chọn $n = 21$.

Vậy sinh nhật của Hằng vào ngày 21/10/2019.

Câu 4. (3,0 điểm)

Tại bề mặt đại dương, áp suất nước bằng áp suất khí quyển và là 1 atm (atmosphere). Bên dưới mặt nước, áp suất nước tăng thêm 1 atm cho mỗi 10 mét sâu xuống. Biết rằng mối liên hệ giữa áp suất y (atm) và độ sâu x (m) dưới mặt nước là một hàm số bậc nhất $y = ax + b$.

a. Xác định các hệ số a và b .

b. Một người thợ lặn đang ở độ sâu bao nhiêu nếu người ấy chịu một áp suất là 2,85atm?

Lời giải:

a. Do áp suất tại bề mặt đại dương là 1atm, nên $y = 1, x = 0$, thay vào hàm số bậc nhất ta được:

$$1 = a.0 + b \Leftrightarrow b = 1$$

Do cứ xuống sâu thêm 10m thì áp suất nước tăng lên 1atm, nên tại độ sâu 10m thì áp suất nước là 2atm ($y = 2, x = 10$), thay vào hàm số bậc nhất ta được: $2 = a.10 + b$

Do $b = 1$ nên thay vào ta được $a = \frac{1}{10}$.

Vì vậy, các hệ số $a = \frac{1}{10}$, $b = 1$.

b. Từ câu a, ta có hàm số $y = \frac{1}{10}x + 1$

Thay $y = 2,85$ vào hàm số, ta được:

$$2,85 = \frac{1}{10}x + 1 \Rightarrow x = 18,5m$$

Vậy khi người thợ nặn chịu một áp suất là 2,85atm thì người đó đang ở độ sâu 18,5m.

Câu 5. (1,0 điểm)

Một nhóm gồm 31 học sinh tổ chức một chuyến du lịch (chi phí chuyến đi được chia đều cho các bạn tham gia). Sau khi đã hợp đồng xong, vào giờ chót có 3 bạn bận việc đột xuất không đi được nên họ không đóng tiền. Cả nhóm thống nhất mỗi bạn còn lại sẽ đóng thêm 18000 đồng so với dự kiến ban đầu để bù lại cho 3 bạn không tham gia. Hỏi tổng chi phí mỗi chuyến đi là bao nhiêu?

Lời giải:

Số tiền cả lớp phải đóng bù: $(31 - 3) \times 18.000 = 504.000$ ngàn

Số tiền mỗi học sinh phải đóng: $504.000 \div 3 = 168.000$ ngàn

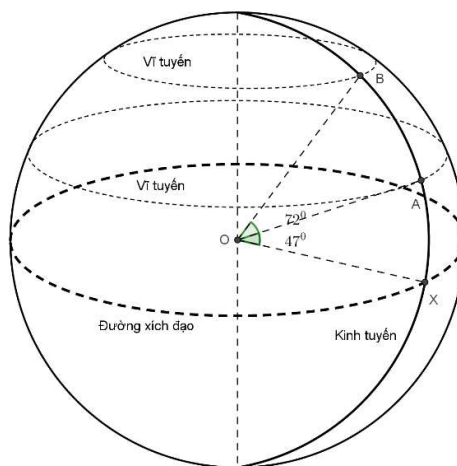
Tổng chi phí ban đầu là: $168.000 \times 31 = 5.208.000$ ngàn

Câu 6. (1,0 điểm)

Cuối năm học, các bạn lớp 9A chia làm hai nhóm, mỗi nhóm chọn một khu vườn sinh thái ở Bắc bán cầu để tham quan. Khi mở hệ thống định vị GPS, họ phát hiện một sự trùng hợp khá thú vị là hai vị trí mà hai nhóm chọn đều nằm trên cùng một kinh tuyến và lần lượt ở các vĩ tuyến 47° và 72° .

a. Tính khoảng cách (làm tròn đến hàng trăm) giữa hai vị trí đó, biết rằng kinh tuyến là một cung tròn nối liền hai cực của trái đất và có độ dài khoảng 20 000km.

b. Tính (làm tròn đến hàng trăm) độ dài bán kính và đường xích đạo của trái đất. Từ kết quả của bán kính (đã làm tròn), hãy tính thể tích của trái đất, biết rằng trái đất có dạng hình cầu và thể tích của hình cầu được tính theo công thức $V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot R^3$ với R là bán kính hình cầu.



Lời giải:

a) $\widehat{AOB} = \widehat{BOX} - \widehat{AOX} = 72^\circ - 47^\circ = 25^\circ$.

Độ dài $\widehat{AB}$ là: $20000 \cdot \frac{25}{180} = \frac{25000}{9} \approx 2800(km)$

b) Gọi R là bán kính của Trái Đất.

Ta có: $\pi R = 20000 \Leftrightarrow R = \frac{20000}{\pi} \approx 6400(km)$

Độ dài đường xích đạo là: $2\pi R \approx 40000(km)$

Thể tích của Trái Đất là: $\frac{4}{3} \times 3,14 \times R^3 = \frac{4}{3} \times 3,14 \times 6400^3 \approx 1,082.10^{12} (km)$

Câu 7. (1,0 điểm) Bạn Dũng trung bình tiêu thụ 15 ca-lo cho mỗi phút bơi và 10 ca-lo cho mỗi phút chạy bộ. Hôm nay, Dũng mất 1,5 giờ cho cả hai hoạt động trên và tiêu thụ hết 1200 ca-lo. Hỏi hôm nay, bạn Dũng đã mất bao nhiêu thời gian cho mỗi hoạt động này?

Lời giải:

Đổi: 1,5 giờ = 90 phút.

Gọi x (phút) là thời gian Dũng bơi

y (phút) là thời gian Dũng chạy bộ

Theo giả thiết ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 15x + 10y = 1200 \\ x + y = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 30 \end{cases}$$

Vậy Dũng mất 60 phút để bơi và 30 phút để chạy bộ để tiêu thụ hết 1200 ca-lo.

Câu 8. (3,0 điểm)

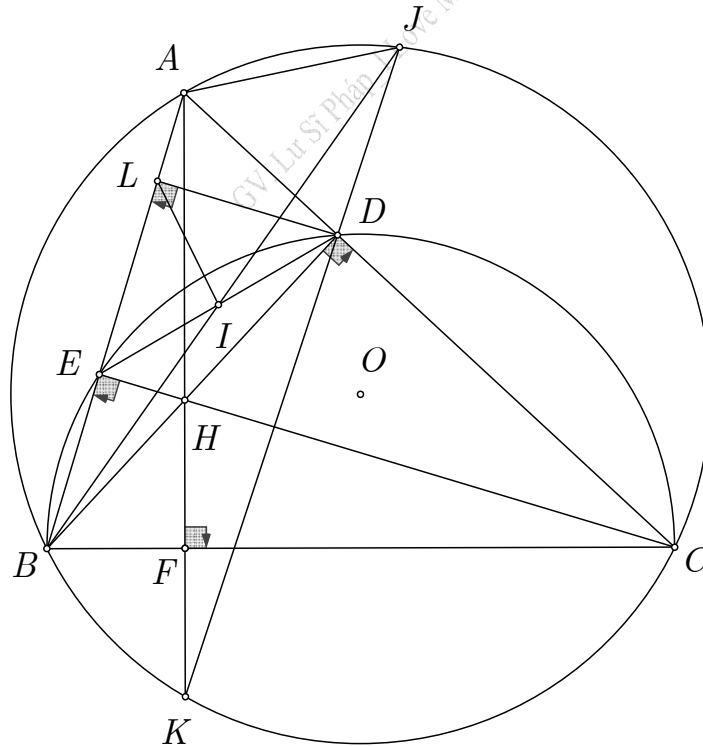
Cho tam giác ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường tròn BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng AH cắt BC và (O) lần lượt tại F và K ($K \neq A$). Gọi L là hình chiếu của D lên AB .

a) Chứng minh rằng tứ giác $BEDC$ nội tiếp và $BD^2 = BL \cdot BA$.

b) Gọi J là giao điểm của KD và (O) , ($J \neq K$). Chứng minh rằng $\widehat{BJK} = \widehat{BDE}$.

c) Gọi I là giao điểm của BJ và ED . Chứng minh tứ giác $ALIJ$ nội tiếp và I là trung điểm ED .

Lời giải:



a) Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ nên các điểm E, D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC .

Do đó tứ giác $BEDC$ nội tiếp.

Xét tam giác ABD vuông ở D có DL là đường cao nên theo hệ thức lượng,

Ta có $BD^2 = BL \cdot BA$.

b) Ta thấy H là trực tâm tam giác ABC nên AF cũng là đường cao của tam giác và $AF \perp BC$.

Xét đường tròn (O) có $\widehat{BJK} = \widehat{BAK}$, cùng chắn cung $\widehat{BK}$.

Tứ giác $ADHE$ có $\widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{HAE} = \widehat{HDE}$ nên $\widehat{BAK} = \widehat{BDE}$. Từ các kết quả trên, ta suy ra $\widehat{BJK} = \widehat{BDE}$.

c) Xét hai tam giác BID và BDJ có $\widehat{BDI} = \widehat{BJD}$ (theo câu b) và $\widehat{DBI}$ chung.

Suy ra $\triangle BID \sim \triangle BDJ$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BI}{BD} = \frac{BD}{BJ}$ hay $BD^2 = BI \cdot BJ$.

Theo câu a, ta có $BD^2 = BL \cdot BA$ nên $BL \cdot BA = BI \cdot BJ$ nên $\frac{BL}{BI} = \frac{BJ}{BA}$.

Lại xét hai tam giác BIL và BAJ có góc B chung và $\frac{BL}{BI} = \frac{BJ}{BA}$.

Do đó: $\widehat{BIL} = \widehat{BAJ} \Rightarrow \widehat{LAI} + \widehat{LID} = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $ALIJ$ nội tiếp.

Từ đó, ta suy ra $\widehat{ILE} = \widehat{IJA}$. Mà $\widehat{JJA} = \widehat{BJA} = \widehat{BCA}$ (cùng chắn cung BA) mà theo câu a, vì $BEDC$ nội tiếp nên $\widehat{LEI} = \widehat{AED} = \widehat{BCA}$ do đó $\widehat{LEI} = \widehat{ELI}$.

Từ đó ta có tam giác LEI cân và $IE = IL$. Do đó $\widehat{ILD} = 90^\circ - \widehat{ILE} = 90^\circ - \widehat{LED} = \widehat{LDI}$ nên tam giác LID cũng cân và $ID = IL$.

Từ các điều trên, ta có được $ID = IE$ nên điểm I chính là trung điểm của DE .

GV. Lư Sĩ Pháp – I Love Math