TRẦN CÔNG DIỆU

Tiếp cận 11 CHUYÊN ĐỀ TRỌNG TÂM GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM TOÁN

- Áp dụng từ năm 2017 thi trắc nghiệm môn Toán
- Giúp học sinh làm quen với trắc nghiệm Toán qua từng chuyên đề
- Giúp Thầy Cô cập nhật tài liệu trắc nghiệm Toán, ứng dụng trong giảng dạy

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TIẾP CẬN 11 CHUYÊN ĐỀ TRỌNG TÂM

GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM

MÔN TOÁN

TRẦN CÔNG DIÊU
Chủ biên

TIẾP CẬN 11 CHUYÊN ĐỀ TRỌNG TÂM
GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM
MÔN TOÁN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

"Chăm chỉ, siêng năng làm việc bằng cả sự say mê, thành công, may mắn sẽ đến"

Trần Công Diêu

Năm học 2016 - 2017 là một năm học có nhiều đổi mới đối với cả học sinh và giáo viên THPT. Bộ Giáo dục đưa ra phương án thi THPT Quốc Gia mới, trong đó học sinh 12 sẽ thi ít nhất 4 bài kiểm tra để xét tốt nghiệp và nộp xét tuyển vào các trường Đại Học gồm: Bài thi Toán, Văn, Ngoại Ngữ và chọn một trong hai bài KHTN hoặc bài KHXH (có thể chọn hết).

Ngoài ra còn có một sự thay đổi cực kì lớn là là ở môn Toán, trước giờ thí sinh phải làm bài dưới hình thức tự luận nay sẽ làm bài dưới hình thức mới đó là trắc nghiệm. Đề thi môn toán có 50 câu trắc nghiệm nằm toàn bộ trong chương trình lớp 12, mỗi câu có 4 đáp án chỉ một đáp án đúng. Theo đề minh họa môn Toán của bộ vừa công bố trong tháng 10 vừa qua, cấu trúc số câu hỏi các phần được phân bổ như sau:

- Ứng dụng đạo hàm: 11 câu
- Mũ và logarit: 10 câu
- Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng: 7 câu
- Số phức: 6 câu
- Hình học không gian: 8 câu
- Hình tọa độ Oxyz: 8 câu

Với những đổi mới này, rõ ràng không chỉ học sinh mà ngay cả nhiều giáo viên cảm thấy rất khó khăn. Thứ nhất là về phương pháp học, phương pháp dạy, phải thay đổi để phù hợp hơn. Thứ hai là về tài liệu, đề thi tham khảo cũng rất khan hiếm. Chính vì vậy cuốn sách này tác giả mong muốn sẽ giúp cho các em học sinh, các thầy cô có thêm một nguồn tài liệu tham khảo quý giá. Bộ sách có 6 chuyên đề như trên, nhắc lại đầy đủ lý thuyết, các dạng toán trắc nghiệm và phương pháp giải, giúp học sinh dễ dàng tra cứu các kiến thức mà mình còn thiếu. Hơn thế nữa, trong những năm gần đây khi kĩ năng máy tính cầm tay (MTCT) ra đời đã giúp giải bài tập nhanh hơn cũng được tác giả đề cập các kĩ thuật chính trong cuốn sách này. Một phần quan trọng trong bộ sách là 30 đề thi thử bám sát cấu trúc của đề minh họa THPT Quốc Gia 2017. Bộ đề được xây dựng và đã được học sinh làm thử, được gởi cho các quý thầy cô đồng nghiệp phản biện.

Đôi lời tác giả muốn nhắn nhủ đến các em học sinh để có phương pháp học tốt, thi điểm thật cao trong kì thi sắp tới:

1. Phải học kĩ lý thuyết 6 chuyên đề trên, sau đó làm những bài tập cơ bản đơn giản nhất, tuyệt đối không được vội vàng bỏ qua phần này. Nhiều em mắc sai lầm khi quá ảo tưởng vào MTCT sẽ dẫn đến sai lầm trong quá trình ôn thi.

2. Sau khi nắm kĩ lý thuyết, các bài tập cơ bản thì bắt đầu làm bài tập khó hơn. Lần đầu sẽ làm khá chậm, đừng quá lo lắng, hãy làm lại vài lần để tăng tốc độ bản thân lên nhanh nhất.

3. Học hết 6 chuyên đề bắt đầu luyện tập thêm các kĩ năng MTCT để hộ trợ tốc độ giải nhanh, các kĩ năng này chỉ giúp được một phần thôi, không dùng được cho nhiều bài nhưng cũng rất quan trọng.

4. Giai đoạn luyện đề, hãy tìm các bộ đề chất lượng, có đáp án chi tiết để luyện tập. Đừng chọn các bộ đề khó quá, không bám sát, hoặc không có đáp chi tiết, điều đó sẽ gây ra phản tác dụng khi thi thật.

Sắp tới tác giả và Megabook sẽ ra mắt bộ **THAM KHẢO NGÂN HÀNG TRẮC NGHIỆM CÁC CHUYÊN ĐỀ** để phục vụ cho phương pháp học trên, bộ sách được biên soạn công phu, mỗi chuyên đề có 4 cấp độ giúp học sinh ôn tập một cách tốt nhất:

- Khởi động: nhắc lại lý thuyết, các bài tập cơ bản.

- Vượt chướng ngại vật: phân dạng và phương pháp giải trắc nghiệm chi tiết các bài tập.

- Tăng tốc: tuyển chọn các bài tập trắc nghiệm ở mức vận dụng và vận dụng cao cho các em có mục tiêu đạt điểm 9, 10.

- Về đích: các đề kiểm tra 50 câu mỗi chuyên đề để các em kiểm tra lại năng lực của mình trong phần đang học.

Chúc các em học tốt cuốn sách này!

TRẦN CÔNG DIỆU

MỤC LỤC

PHẦN B: 5 ĐỀ MINH HỌA KÌ THI THPT QUỐC GIA 2017

PHẦN A

CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Chuyên đề 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

Trong chuyên đề này ta cùng nhau nghiên cứu về vấn đề sử dụng đạo hàm để giải một số bài toán. Đây là chuyên đề quan trọng của Giải tích, có khá nhiều định lí khó hiểu đối với học sinh. Hãy đọc thật kĩ lí thuyết, các ví dụ minh họa để tránh những sai lầm thường gặp.

Phần I. CÁC ĐỊNH LÍ CƠ BẢN CỦA GIẢI TÍCH

Về sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Định nghĩa. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập K (khoảng, nửa khoảng, đoạn) được gọi là đồng biến trên K nếu

$\forall x_1, x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập K (khoảng, nửa khoảng, đoạn) được gọi là nghịch biến trên K nếu

$\forall x_1, x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Định lí 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập K (khoảng, nửa khoảng, đoạn)

Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K.

Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K.

Định lí 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập K (khoảng, nửa khoảng, đoạn)

Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K.

Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K.

Về cực trị của hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng K và điểm $x_0 \in K$.

Nếu tồn tại $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

Nếu tồn tại $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

Chúng ta có thể thấy: cực trị của hàm số trên khoảng K là giá trị $x_0 \in K$ sao cho đạo hàm y' đổi dấu khi x qua x_0 (theo chiều tăng của x).

Chú ý:

Nếu hàm số đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số; $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số. Còn điểm $M\,(x_0; f_{(x_0)})$ được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại, giá trị cực tiểu còn gọi là cực đại, cực tiểu và được gọi chung là cực trị của hàm số.

Định lí 3. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 và có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Định lí 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;b)$, và $x_0 \in (a;b)$.

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Về tiệm cận của đồ thị hàm số

Định lí 5 (Tiệm cận ngang). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (dạng $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$, $(-\infty;+\infty)$). Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$ thì đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Định lí 6 (Tiệm cận đứng): Nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ thì đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

MỘT SỐ CÔNG THỨC TRONG HÌNH HỌC OXY CẦN BIẾT:

• ***Công thức độ dài:***

Nếu có hai điểm $A\left(x_A; y_A\right)$, $B\left(x_B; y_B\right)$ thì độ dài đoạn thẳng AB được tính theo công thức: $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.

• ***Công thức tính tọa độ véctơ:***

Nếu có hai điểm $A\left(x_A; y_A\right)$, $B\left(x_B; y_B\right)$, thì $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A; y_B - y_A\right)$.

• ***Hai véctơ vuông góc:***

Nếu có $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ thì $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ (hoành nhân hoàng cộng tung nhân tung = 0).

• ***Hai véctơ bằng nhau:***

Nếu có $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ thì $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$ (hoành bằng hoành, tung bằng tung).

• ***Cosin góc giữa hai véctơ:***

Nếu có $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$ thì $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

• ***Cosin góc giữa hai đường thẳng:***

Nếu có (d_1): $a_1x+b_1y+c_1=0$ $(a_1^2+b_1^2\neq 0)$, (d_2): $a_2x+b_2y+c_2=0$ $(a_2^2+b_2^2\neq 0)$ thì

$\cos\left(d_1;d_2\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_{d_1}},\overrightarrow{n_{d_2}}\right)\right|=\frac{\overrightarrow{n_{d_1}}.\overrightarrow{n_{d_2}}}{\left|\overrightarrow{n_{d_1}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{d2}}\right|}=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ với $\overrightarrow{n_{d_1}}=\left(a_1;b_1\right)$, $\overrightarrow{n_{d_2}}=\left(a_2;b_2\right)$.

• ***Điểm thuộc đường thẳng:***

Nếu có đường thẳng $d: ax+by+c=0$ thì $A\left(x_A;y_A\right)\in d \Leftrightarrow ax_A+by_A+c=0$.

• ***Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng:***

Nếu có đường thẳng $d: ax+by+c=0$ và $A\left(x_A;y_A\right)$ thì khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d được tính theo công thức $d_{[A,d]}=\frac{\left|ax_A+by_A+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

• ***Bài toán viết phương trình đường thẳng:***

Nếu đường thẳng d đi qua điểm $A\left(x_A;y_A\right)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n_d}=\left(a;b\right)$, $a^2+b^2\neq 0$ thì đường thẳng d có phương trình $d: a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$.

Chú ý:

-Véctơ pháp tuyến của đường thẳng là véctơ có phương vuông góc với đường thẳng đó, kí hiệu $\vec{n}$.

-Véctơ chỉ phương của đường thẳng là véctơ có phương song song hoặc trùng với đường thẳng đó, kí hiệu $\vec{u}$.

Nếu véctơ chỉ phương là $\vec{u_d}=\left(a;b\right)\Rightarrow\overrightarrow{n_d}=\left(-b;a\right)$

Phần II: CÁC DẠNG BÀI TẬP

1. Bài toán khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

Dù đề thi ở dạng trắc nghiệm nhưng học sinh cũng cần phải thành thạo kĩ năng khảo sát hàm số và vẽ đồ thị hàm số. Có thể chúng ta sẽ gặp các bài toán nhận dạng đồ thị, có nghĩa là đề bài cho hình ảnh một đồ thị và hỏi đồ thị sau đây là của hàm số nào…?

Chúng ta chỉ nghiên cứu về ba loại hàm số, đó là hàm

Đa thức bậc 3 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$.

Đa thức bậc 4 trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$.

Hàm phân thức bậc nhất/ bậc nhất $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $\left(ad-bc\neq 0\right)$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số gồm ba phần chính là:

- *Tập xác định*
- *Sự biến thiên* gồm *chiều biến thiên, cực trị, giới hạn* và *bảng biến thiên.*
- *Đồ thị.*

Ví dụ 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số: $y=-x^3+3x+2$

Tập xác định: $D=R$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y'=-3x^2+3$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(1;+\infty)$ và $(1;+\infty)$

+ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x=1$, $y_{CĐ}=4$

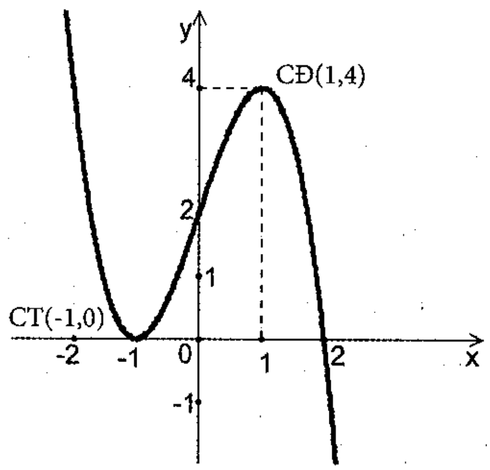
Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1, y_{CT}=0$

+ Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$ ↘		0	↗	4	↘	$-\infty$

Đồ thị:



Ví dụ 2 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=x^4-2x^2-3$

Tập xác định: $D=R$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: y'= 3x² -12x+9 , y'=0 <=> $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-2 \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1);(3;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

+ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x_{CĐ} = 1$, $y_{CĐ} = 2$

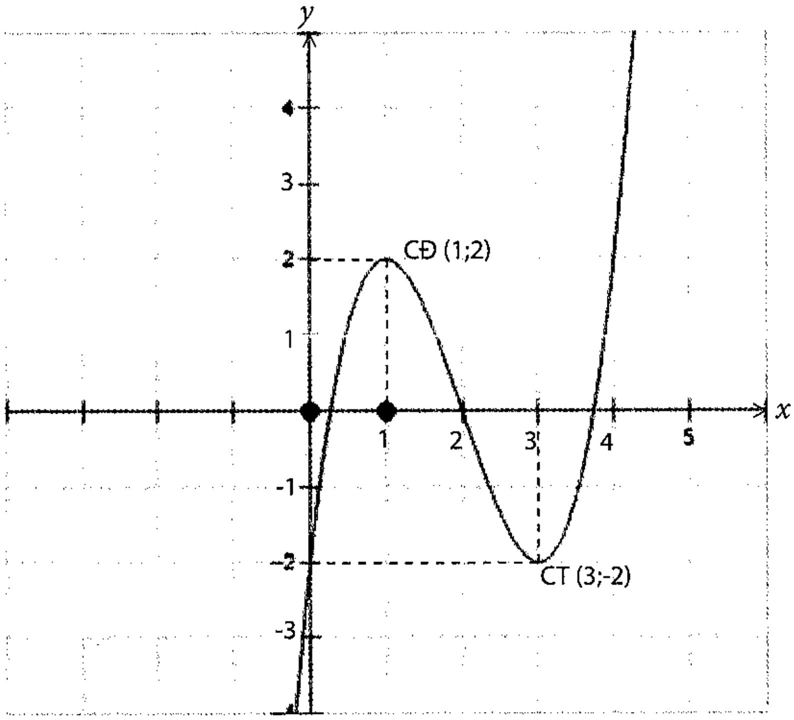
Hàm số đạt cực tiểu tại $x_{CT} = 3$, $y_{CT} = -2$

+ Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$ ↗		2	↘	-2	↗	$+\infty$

Đồ thị:



Ví dụ 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2x^2 - 3$

Tập xác định: $D = R$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = -1$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

+ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = y(0) = -3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, $y_{CT} = y(\pm 1) = -4$.

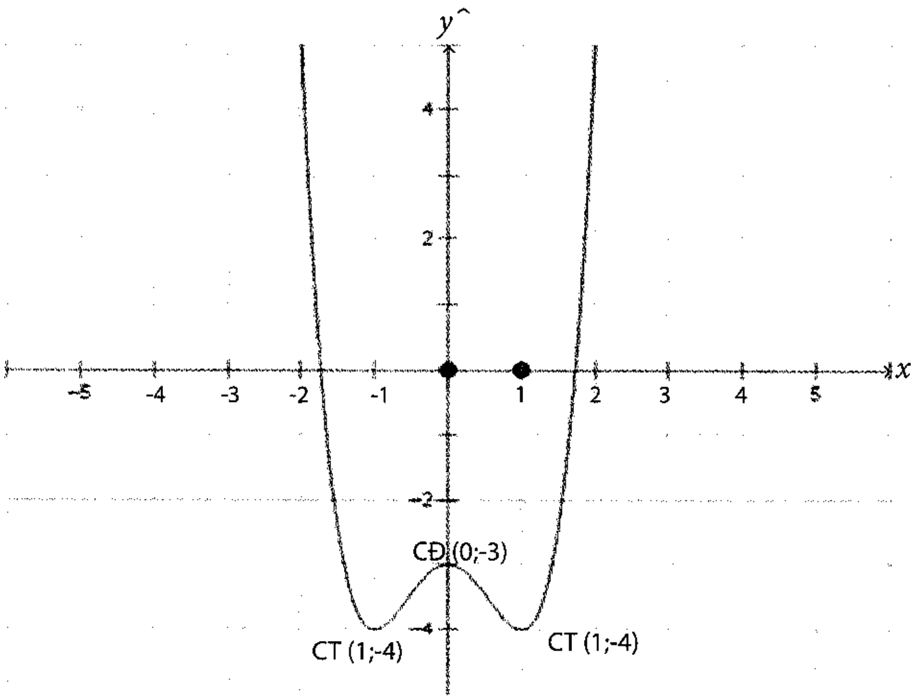
+ Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

+Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$ ↘		-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

Đồ thị:

Đồ thị (C) của hàm số nhận Oy làm trục đối xứng, giao với Ox tại 2 điểm ($\pm\sqrt{3}$; 0).



Ví dụ 4 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 3$

Tập xác định: $D = R$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = -x^3 + 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-2;0) \cup (2;+\infty)$, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2;0) \cup (2;+\infty)$

+ Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = -3$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 2$, $y_{CĐ} = 1$.

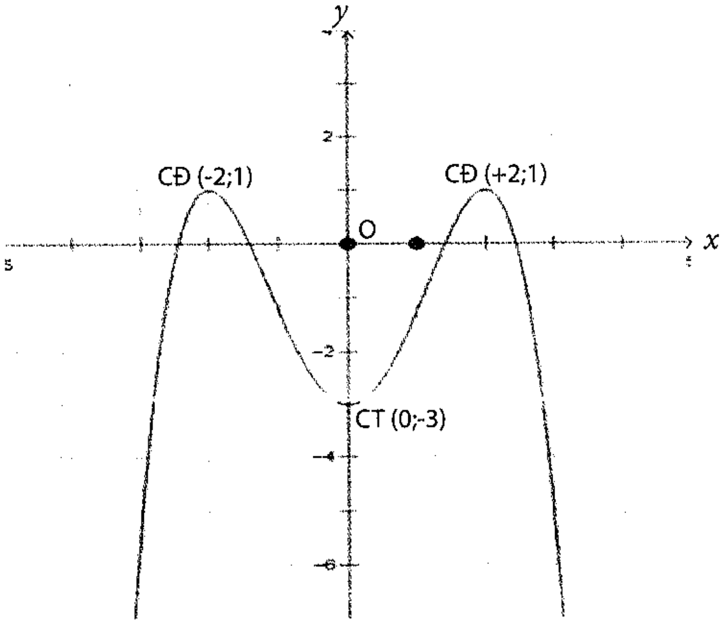
+ Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

+Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↗	1	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

Đồ thị:

Đồ thị giao với trục Ox tại các điểm $\left(-\sqrt{6};0\right),\left(-\sqrt{2};0\right)\left(\sqrt{2};0\right),\left(\sqrt{6};0\right)$.



Ví dụ 5 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=\dfrac{-x+1}{2x+3}$.

Tập xác định: $D=R\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y'=\dfrac{-5}{(2x+3)^2}<0,\forall x\in D$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-\dfrac{3}{2})$ và $(-\dfrac{3}{2};+\infty)$

+ Hàm số không có CĐ, CT

+ Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và các đường tiệm cận

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} y=-\infty \Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ là TCĐ khi $x\to\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{\pm}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}$ là TCN khi $x\to\pm\infty$.

+ Bảng biến thiên

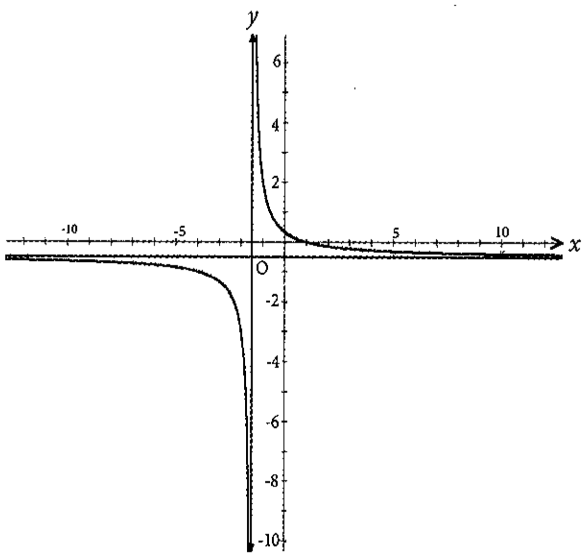
x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'	-	||	-
y	$-\frac{1}{2}$ ↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘ $-\frac{1}{2}$

Đồ thị:

- Đồ thị nhận điểm $I(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$ làm tâm đối xứng.

- Đồ thị cắt Ox tại (1; 0) và cắt Oy tại $(0;\frac{1}{3})$.

- Đồ thị đi qua (-1; 2), (-2; -3)



Ví dụ 6 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=\frac{2x+1}{1-x}$

Tập xác định: D = $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y'=\frac{3}{(1-x)^2}>0, \forall x\in D$

+ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

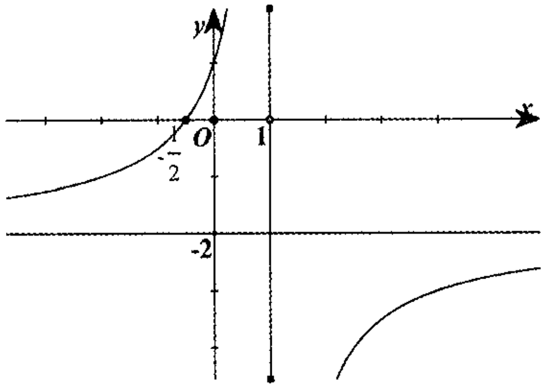
+ Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 1^-} y=+\infty; \lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty$; tiệm cận đứng: $x=1$.

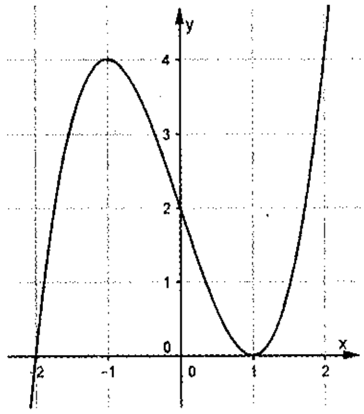
$\lim\limits_{x\to -\infty} y=+\infty; \lim\limits_{x\to +\infty} y=-\infty$; tiệm cận ngang: $y=-2$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	||	+
Y	-2 ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗ -2

Đồ thị:





Ví dụ 7 Đồ thị hàm số

$(C): y = f(x) = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị như hình vẽ. Dựa vào đồ thị hãy so sánh: $f(m^2+1)$, $f\left(m^2+3\right)$, $f\left(-2\right)$

A. $f(m^2+1) > f(m^2+3) > f\left(-2\right)$

B. $f(m^2+3) > f(m^2+1) \geq f\left(-2\right)$

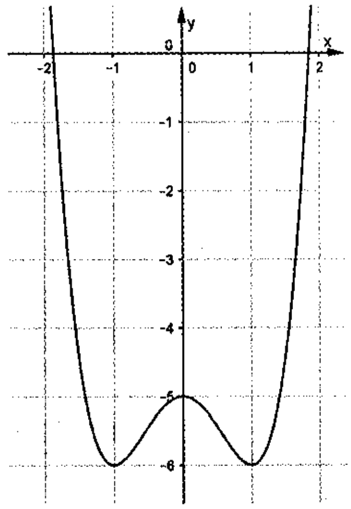
C. $f(m^2+3) > f(-2) > f\left(m^2+1\right)$

D. Không thể so sánh được vì chứa tham số m

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f\left(-2\right) = 0$, và dễ thấy $f\left(m^2+3\right) > f\left(m^2+1\right) \geq f\left(1\right) = 0$.

Chọn B.



Ví dụ 8 Đồ thị hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$ có đồ thị như hình vẽ. Với giá trị nào của m thì phương trình: $x^4 - 2x^2 - 6 - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. $-6 < m < -4$ **B.** $-6 \leq m \leq -4$

C. $-6 < m < 5$ **D.** $-7 < m < -6$

Lời giải.

Để phương trình $x^4 - 2x^2 - 6 - m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 5 = m + 1$ có 4 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = m + 1$ phải cắt đồ thị $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$ tại 4 điểm phân biệt. Dựa vào đồ thị dễ thấy $y_{cbt} \Leftrightarrow -6 < m + 1 < -5 \Leftrightarrow -7 < m < -6$.

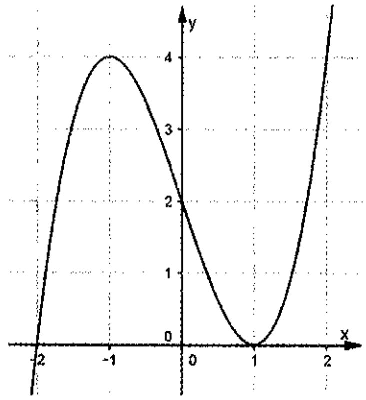
Chọn D.

Ví dụ 9 Đồ thị hàm số $(C): y = f(x) = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị như hình vẽ.

Dựa vào đồ thị hãy xác định giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất n của hàm số trên $[-1,2]$

A. $m = -1, n = 2$ B. $m = 0, n = 4$

C. $m = -1, n = 4$ D. $m = -1, n = 1$



Lời giải

Trên đoạn $[-1,2]$ dễ thấy $y(-1) = 4$ là GTLN của hàm số, $y(1) = 0$ là GTNN của hàm số.

Chọn B.

2. Bài toán tìm m để hàm số đồng biến, nghịch biến

Ví dụ 1 Tìm m lớn nhất để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + x$ đồng biến trên R?

A. 1 B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ D. 2

Tập xác định: $D = R$

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 1$

Hàm số đồng biến trên R khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in R$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 1 \geq 0 \ \forall x \in R$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 36m^2 - 12 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Vậy $m \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ thì hàm số đồng biến trên R. **Chọn B**

Chú ý:

Hàm số đa thức đồng biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (a;b)$

Hàm số đa thức nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$ với $\forall x \in (a;b)$

Hàm đa thức bậc ba đồng biến trên $R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

Hàm đa thức bậc ba nghịch biến trên $R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

Ví dụ 2 Tìm m nhỏ nhất để hàm số $y = x^3 - mx^2 + x$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

A. $-\sqrt{3}$ B. 2 C. 3 D. 1

Mẹo: Thay từng giá trị dưới đáp án lên hàm số rồi xem thử trường hợp nào hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$. Sau đó chọn đáp án nhỏ nhất.

Phân tích: Chúng ta thấy rằng nếu hàm số mà đồng trên R thì chắc chắn đồng biến trên $(1;+\infty)$ điều này ứng với $\Delta \le 0$, còn khi $\Delta > 0$ thì sao?

Lời giải.

Tập xác định: $D = R$

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx + 1$

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2mx + 1 = 0$ có $\Delta = 4m^2 - 12$

TH1: $\Delta \le 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12 \le 0 \Leftrightarrow m \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$, và vì $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên R suy ra hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

TH2: $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty;-\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3};+\infty\right)$, lúc này phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_2 \le 1 \\ x_1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_2-1)+(x_1-1) < 0 \\ (x_2-1)(x_1-1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_1 - 2 < 0 \\ x_1x_2 - (x_2+x_1) + 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m}{3} - 2 < 0 \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{2m}{3} + 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow m[2;3)$$

Vậy từ hai trường hợp ta có $m \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ và $m \in [2;3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A**

Ví dụ 3 Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x-m}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng xác định?

A. $m < -3$ **B.** $m > 0$ **C.** $m > 2$ **D.** m < -1

Tập xác định: $D = R \setminus \{-1\} = (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$

Ta có: $y' = \dfrac{1+m}{(x+1)^2}$, $\forall x \in D$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi và chỉ khi $y' < 0$ với $\forall x \in D$

$y' = \dfrac{1+m}{(x+1)^2} < 0$ với $\forall x \in D \Leftrightarrow 1 + m < 0 \Leftrightarrow m < -1$

Vậy m < −1 thì hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó. **Chọn D**

Chú ý:

Hàm số bậc nhất trên bậc nhất đồng biến trên các khoảng xác định khi và chỉ khi $y' > 0$ với mọi x thuộc vào tập xác định.

Hàm số bậc nhất trên bậc nhất nghịch biến trên các khoảng xác định khi và chỉ khi $y' < 0$ với mọi x thuộc vào tập xác định.

Tập xác định của hàm số bậc nhất trên bậc nhất là hai khoảng.

Ví dụ 4 Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x-1}{x-m}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

Tập xác định: $D = R\setminus\{m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{-m+1}{(x-m)^2}$ với $\forall x \in D$.

Chú ý rằng hàm số bậc nhất / bậc nhất một là đồng biến trên các khoảng xác định hai là nghịch biến trên các khoảng xác định. Nên muốn hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì hàm số phải đồng biến trên các khoảng xác định, nghĩa là $y' > 0$ với $\forall x \in D \Leftrightarrow \dfrac{-m+1}{(x-m)^2} > 0$ với $\forall x \in D$ $\Leftrightarrow -m+1 > 0 \Leftrightarrow m < 1$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	m	$+\infty$
y'	+	||	+
y	↗	||	↗

Từ bảng biến thiên ta thấy rằng để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì ta phải có $m \le 1$.

Kết hợp với điều kiện đồng biến trên các khoảng xác định ta có $m < 1$ thì hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

3. Bài toán hàm số về vấn đề cực trị

Ví dụ 1 Tìm điểm cực tiểu của hàm số: $y = x - sin2x + 2$. Với $k \in Z$ đáp án nào sau đây đúng:

A. $x_i = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$ **B.** $x_i = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$ **C.** $x_i = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ **D.** $x_i = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$

Tập xác định: $D = R$

$f'(x) = 1 - 2cos2x$, $f''(x) = 4sin2x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2cos2x = 0 \Leftrightarrow cos2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$

$f''\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi\right)=4sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-2\sqrt{3}<0\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x_i=-\frac{\pi}{6}+k\pi$

Với $y_{CĐ}=f\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi\right)=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}+2+k\pi\ ,k\in Z$

$f''\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)=4sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}>0\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x_i=\frac{\pi}{6}+k\pi$

Chọn C

Ví dụ 2 Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ (C). Tìm m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị (C) tạo với đường thẳng $\Delta: x+my+3=0$ một góc α biết $cos\alpha=\frac{4}{5}$?

A. $m=-\frac{2}{11}$ **B.** $m=2$

C. $m=-\frac{2}{11}$ và $m=1$ **D.** $m=-2$ và $m=1$

Lời giải.

Đầu tiên khảo sát và vẽ bảng biến thiên ta có $A\left(2;-4\right),B(0;0)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Đường thẳng đi qua CĐ, CT là $\Delta_1: 2x+y=0\Rightarrow VTPT\ \overrightarrow{n_1}(2;1)$

Đường thẳng đã cho $\Delta: x+my+3=0$ có $VTPT\ \overrightarrow{n_1}(1;m)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow cos\left(\Delta;\Delta_1\right)=\left|cos\left(\vec{n}_1;\vec{n}_2\right)\right|=\frac{|m+2|}{\sqrt{5}.\sqrt{m^2+1}}=\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow 25\left(m^2+4m+4\right)=5.16.\left(m^2+1\right)$

$\Leftrightarrow 11m^2-20m-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-\frac{2}{11}\end{array}\right.$. **Chọn C**

Ví dụ 3 Cho hàm số $y=x^4+mx^2-m-5$ có đồ thị là (C*m*), *m* là tham số. Xác định *m* để đồ thị (C*m*) của hàm số đã cho có ba điểm cực trị?

A. $m\ge -4$ **B.** $m<0$ **C.** $m\le\frac{2}{3}$ **D.** $m\le -4\vee m\ge\frac{2}{3}$

Lời giải.

Tập xác định: $D=R$

Ta có: $y'(x)=4x^3+2mx=2x(2x^2+m)$

(C*m*) có ba điểm cực trị khi $y'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt, tức là $2x(2x^2+m)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow 2x^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow m < 0$. **Chọn C**

Ví dụ 4 Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C).

A. $y = x + 2$ **B.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ **C.** $y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$ **D.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

Lời giải.

Bằng cách khảo sát và vẽ bảng biến thiên ta có hai điểm cực trị là: $A(1;2)$ và $B(3;-2)$.

Đường thẳng đi qua 2 cực trị $A(1;2)$ và $B(3;-2)$ là $y = -2x + 4$.

Đường thẳng cần tìm vuông góc với (AB) nên có hệ số góc $k = \frac{1}{2}$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 5 Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + x$, tìm m để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

A. $m = -4$ **B.** $m = \pm 2$ **C.** $m = \pm 1$ **D.** $m = \pm 3$

Lời giải.

Tập xác định: $D = R$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 1$.

Để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 36m^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$ nên ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Theo đề: $x_1^2 + x_2^2 = \frac{10}{3} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 4m^2 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow m = \pm 1$ (thỏa mãn).

Vậy $m = \pm 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Ví dụ 6 Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - 1)x + 2$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 2$?

A. $m = 2$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = -2$ **D.** $m = 3$

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + m^2 - 1; y'' = 6x - 6m$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 2 \Rightarrow y'(2) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 11 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Với $m = 1$ ta có $y''(2) = 6.2 - 6.1 = 6 > 0$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Vậy với m = 1 thì thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B**

4. Bài toán hàm số về vấn đề hai đồ thị cắt nhau (bài toán tương giao)

Cơ sở lý thuyết. Số giao điểm của hai đồ thì hàm số $y = g(x)$ và $y = g(x)$ là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$, người ta gọi phương trình này là phương trình hoành độ giao điểm.

Ví dụ 1 Cho hàm số $y = \dfrac{2x+m}{x-1}$ (C) (với m là tham số thực). Tìm m để đường thẳng $d: y = x+2$ cắt đồ thị hàm số (C) tại hai điểm A, B phân biệt thỏa $AB = 3\sqrt{2}$.

A. $m = 1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 4$ **D.** $m = 0$

Mẹo: Thay giá trị m từ từng đáp án vào $y = \dfrac{2x+m}{x-1}$, rồi giải phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và d tìm ra hai điểm A, B. Tính độ dài AB xem có giống để cho thì chọn.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{2x+m}{x-1} = x+2 \Leftrightarrow 2x+m = (x-1)(x+2) \Leftrightarrow 2x+m = x^2+x-2 \Leftrightarrow x^2 - x - (2+m) = 0(*)$$

Phương trình này là phương trình bậc 2 có $\Delta = (-1)^2 - 4.1.-(2+m) = 1+4(2+m) = 9+4m$

Để đường thẳng $d: y = x+2$ cắt đồ thị hàm số (C) tại hai điểm A,B khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \\ 1^2 - 1 - (2+m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+4m \geq 0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \dfrac{-9}{4} \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, vì A, B thuộc $d: y = x+2$ nên $A(x_A; x_A+2), B(x_B; x_B+2)$

Ta có: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{2(x_B - x_A)^2} = \sqrt{2\left[(x_B + x_A)^2 - 4x_B x_A\right]}$

$= \sqrt{2\left[(1)^2 + 4(2+m)\right]} = \sqrt{2(9+4m)}$

Theo đề $AB = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2(9+4m)} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 0$ (nhận).

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn D**

Ví dụ 2 Cho hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi (d) là đường thẳng qua $H(3; 3)$ và có hệ số góc k. Tìm k để (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho tam giác MAN vuông tại $A(2; 1)$?

A. $k = \dfrac{-1-\sqrt{41}}{10}$ **B.** $k = \dfrac{-1+\sqrt{43}}{10}$ **C.** $k = \dfrac{-1 \pm \sqrt{41}}{10}$ **D.** $k = \dfrac{-1 \pm \sqrt{43}}{10}$

Lời giải.

Phương trình đường thẳng (d): $y = k(x-3)+3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$\dfrac{2x+3}{x+1} = kx - 3k + 3 \Leftrightarrow kx^2 + (1-2k)x - 3k = 0 \; (x \neq -1)$ (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = 16k^2 - 4k + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \neq 0$$

$M(x_1, kx_1 - 3k + 3)$ $N(x_2, kx_2 - 3k + 3)$ với $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2k-1}{k} \\ x_1.x_2 = -3 \end{cases}$

ΔAMN vuông tại A $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0$

$\Leftrightarrow -5k^2 - k + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{-1-\sqrt{41}}{10}(n) \\ k = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{10}(n) \end{array}\right.$. Chọn C

Ví dụ 3 Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 + (8-5m)x + m - 5$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng *(d)* $y = x - m + 1$. Tìm m lớn nhất để d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ tại x_1, x_2, x_3 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 20$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3 + 2(m-2)x^2 + (8-5m)x + m - 5 = x - m + 1$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[x^2 + (2m-2)x - m - 3\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ f(x) = x^2 + (2m-2)x - m - 3 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

(C_m) cắt *(d)* tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm phân biệt $\neq 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 - (3-m) > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right. \quad (3)$

Khi đó giả sử $x_1 = 2$; x_2, x_3 là nghiệm của (2). Ta có $x_2 + x_3 = 2(1-m), x_2x_3 = 3 - m$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 4m^2 - 6m + 2$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 20 \Rightarrow 4m^2 - 6m + 2 = 20 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy $m = -\dfrac{3}{2}$ hoặc $m = 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chú ý: để phân tích phương trình hoành độ giao điểm thành dạng tích, các em dùng sơ đồ Hoocne.

5. Bài toán sử dụng đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình

Ví dụ 1 Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b. Tìm m để phương trình $x^3 - 3x - 2 = 2m$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

a) Tập xác định: $D = R$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = -3x^2 + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

+ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, $y_{CĐ} = 4$

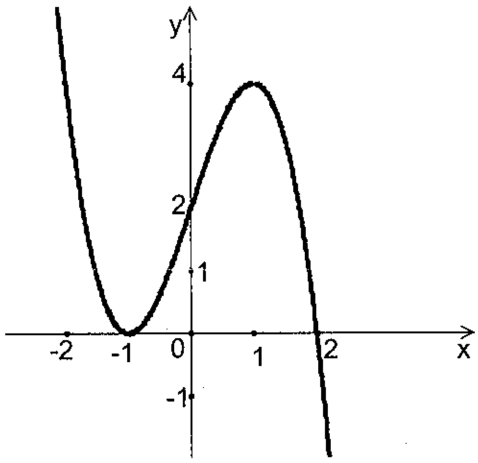
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1, y_{CT} = 0$

+ Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$

+Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị:



Ta có: $x^3 - 3x - 2 = 2m \Leftrightarrow -x^3 + 3x + 2 = 2m$.

Đây chính là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = 2m$ (đường thẳng nằm ngang). Phương trình này có 3 nghiệm phân biệt khi đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt.

Dựa vào đồ thị ta thấy d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < -2m < 4 \Leftrightarrow -2 < m < 0$.

Vậy $-2 < m < 0$ là những giá trị m cần tìm.

Chú ý:

- Ta phải biến đổi phương trình để bài cho sao cho vế trái giống như hàm số đề bài cho.
- Để yêu cầu bao nhiêu nghiệm thì đặt thước thẳng nằm ngang sao cho cắt đồ thị tại số điểm tương ứng.

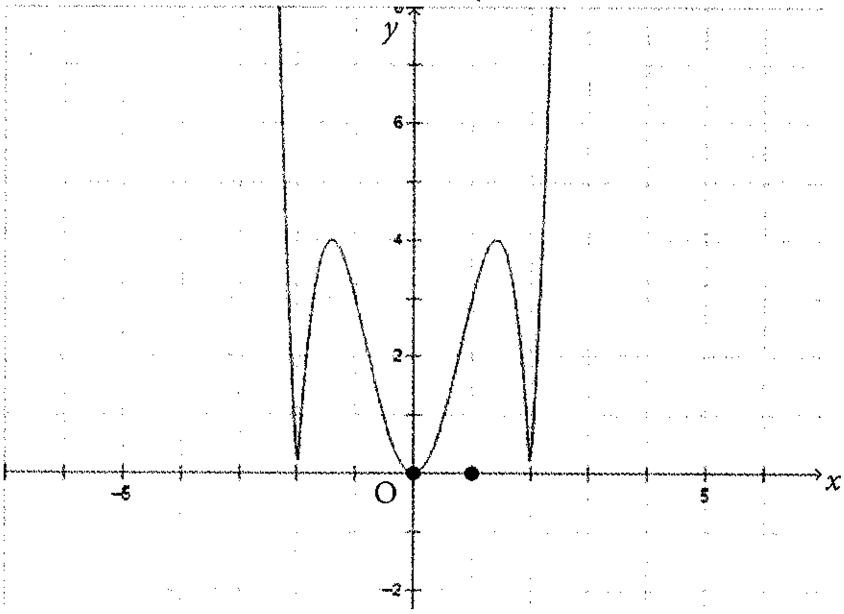
Ví dụ 2 Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b. Tìm m để phương trình $2x^2\left|x^2 - 4\right| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

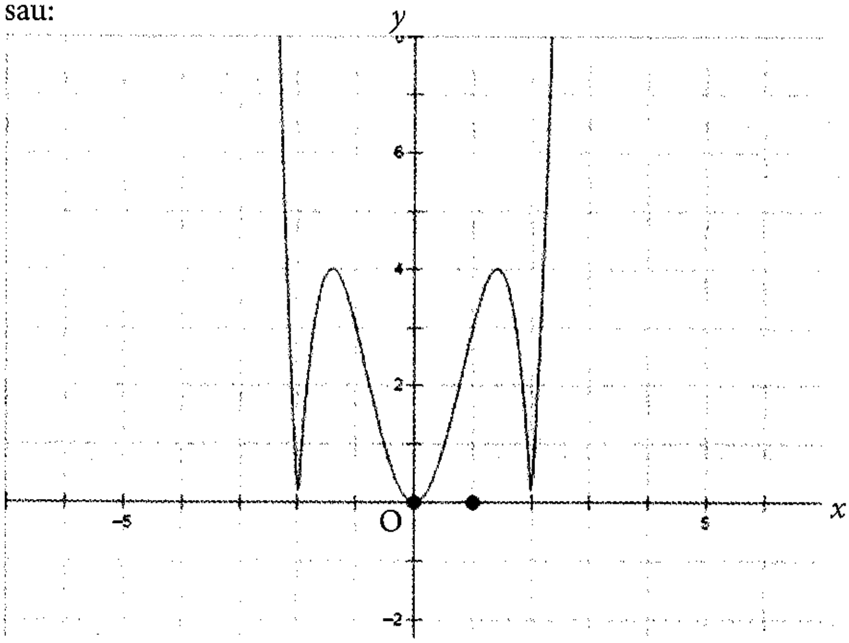
a. Học sinh tự khảo sát và vẽ đồ thị như dưới đây.



b. Ta có: $2x^2\left|x^2-4\right|=m \Leftrightarrow x^2\left|x^2-4\right|=\frac{m}{2}$ đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C') $y=x^2\left|x^2-4\right|$ và đường thẳng nằm ngang $y=\frac{m}{2}$.

Lại có: $y=x^2\left|x^2-4\right|=\begin{cases}x^2\left(x^2-4\right), x^2-4\ge 0\\ -x^2\left(x^2-4\right), x^2-4\le 0\end{cases}=\begin{cases}x^4-4x^2, x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)\\ -\left(x^4-4x^2\right), x\in[-2;2]\end{cases}$, từ đây ta thấy với $x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ thì (C') trung với (C), với $x\in[-2;2]$ thì (C') có được bằng cách lấy đối xứng (C) qua trục hoành.

Đồ thị như sau:



Do đó, để phương trình có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<\frac{m}{2}<4 \Leftrightarrow 0<m<8$

6. Bài toán viết phương trình tiếp tuyến

Cơ sở lý thuyết. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$, lúc này tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0, y_0)$ là $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$ hoặc người ta còn viết $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Chú ý:

$y_0 = y(x_0) = f(x_0)$, và $y'(x_0) = f'(x_0)$

Điểm $M(x_0, y_0)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$

Để viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số chỉ cần tìm được hoành độ x_0 của tiếp điểm.

Ví dụ 1 Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ (1). Lập phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của đồ thị với trục hoành.

A. $y = 0$ **B.** $y = -9x + 27$

C. $y = -9x + 7$ **D.** $y = -9x + 7$ và $y = 0$

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = -x^3 + 3x^2$ (1) và trục hoành:

$$-x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 3 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$$

Đồ thị cắt trục hoành tại các điểm A(0;0) và B(3;0).

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại A(0;0) là: $y = y'(0)(x - 0) + y(0) = 0$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại B(3;0) là: $y = y'(3)(x - 3) = -9x + 27$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $y = 0$ và $y = -9x + 27$. **Chọn D**

Ví dụ 2 Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x + 1$?

A. $y = 3x - \frac{29}{3}$ **B.** $y = 3x + 1$ **C.** $y = 3x - 1$ **D.** $y = 3x - 1$

Lời giải.

Ta có: $y' = x^2 - 4x + 3$

Gọi $M(x_0, y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0, y_0)$ có dạng $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

Đường thẳng y = 3x + 1 có hệ số góc 3

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng nên: $y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 4 \end{array}\right.$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 3x + 1$

Với $x=4 \Rightarrow y=\frac{7}{3}$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=3x-\frac{29}{3}$

Thử lại, ta được $y=3x-\frac{29}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A**

Ví dụ 3 Cho hàm số $y=\frac{x}{2x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng $\frac{2}{3}$.

A. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{8}{9}$ **B.** $y=-\frac{1}{9}x+\frac{2}{3}$ **C.** $y=x+\frac{8}{9}$ **D.** $y=2x+\frac{8}{9}$

Lời giải.

Gọi $M(x_0,y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0,y_0)$ có dạng $y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$

Với $y_0=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x_0}{2x_0-1}=\frac{2}{3} \Rightarrow 4x_0-2=3x_0 \Rightarrow x_0=2$

Ta có: $f'(x)=-\frac{1}{(2x-1)^2} \Rightarrow f'(2)=-\frac{1}{9}$

Vậy Phương trình tiếp tuyến tại điểm $\left(2;\frac{2}{3}\right)$ là: $y=-\frac{1}{9}x+\frac{8}{9}$. **Chọn A**

Ví dụ 4 Cho hàm số: $y=\frac{x-2}{2x+1}$ (C).Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 5.

A. $y=5x+8$ **B.** $y=5x-8$ **C.** $y=3x+8$ **D.** $y=5x+6$

Lời giải.

Gọi $M\left(a;\frac{a-2}{2a+1}\right)$ là tiếp điểm ($a\neq-\frac{1}{2}$). Tiếp tuyến song song với đường thẳng nên suy ra: $y'(a)=5$

Giải được $a=0$ hoặc $a=-1$

+ $a=0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=5x-2$ (loại vì trùng *(d)*)

+ $a=-1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=5x+8$ (nhận)

Vậy: $y=5x+8$

Chọn đáp án A.

Ví dụ 5 Cho hàm số: $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(1;5)$. Gọi *B* là giao điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C) ($B\neq A$). Tính diện tích tam giác *OAB*, với *O* là gốc tọa độ?

A. $S_{\Delta OAB}<10$ **B.** $S_{\Delta OAB}=10$ **C.** $S_{\Delta OAB}=11$ **D.** $S_{\Delta OAB}=12$

Lời giải.

Ta có: $y'(1)=9 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(1;5)$ là:

$y=9(x-1)+5 \Leftrightarrow y=9x-4 \ (d)$

Tọa độ điểm B là giao của d và (C) có hoành độ là nghiệm phương trình:

$x^3+3x^2+1=9x-4 \Leftrightarrow x^3+3x^2-9x+5=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Do $B \neq A$ nên $B(-5;-49)$. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-6;-54) \Rightarrow AB=6\sqrt{82}$; $d(O,d)=\dfrac{4}{\sqrt{82}}$.

Suy ra: $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}d(O,d).AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{\sqrt{82}}.6\sqrt{82}=12$ (đvdt). **Đáp án D.**

Ví dụ 6 Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 thỏa mãn phương trình $y''(x_0)=12$?

A. $y=-9x-1$ **B.** $y=-9x-10$ **C.** $y=-8x-14$ **D.** $y=-9x-14$

Lời giải.

Ta có: $y'=-3x^2+3 \Rightarrow y''=-6x$

Theo giả thiết: $y''(x_0)=12 \Leftrightarrow -6x_0=12 \Leftrightarrow x_0=-2$

Mà: $y(-2)=4, y'(-2)=-9$

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y=-9x-14$. **Chọn D**

7. Bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số một biến và nhiều biến

Định nghĩa. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định D.

Nếu tồn tại số M và x_0 thuộc D sao cho $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ f(x_0)=M \end{cases}$ thì M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D.

Nếu tồn tại số N và x_0 thuộc D sao cho $\begin{cases} f(x) \geq N, \forall x \in D \\ f(x_0)=N \end{cases}$ thì N được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D.

Định lí. Mọi hàm số liên tục và xác định trên một đoạn để có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Cách tìm GTLN và GTNN của hàm số $y=f(x)$

1. Trên đoạn $[a;b]$

Bước 1: giải phương trình $f'(x)=0$ tìm tất cả các nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$ thuộc $[a;b]$.

Bước 2. Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$.

Bước 3. Tìm số lớn nhất M và nhỏ nhất N trong các số trên rồi kết luận:

$\max\limits_{[a,b]} f(x)=M, \min\limits_{[a,b]} f(x)=N$

1. Trên khoảng hoặc nửa khoảng: Chúng ta vẽ bảng biến thiên trên khoảng hoặc nửa khoảng rồi kết luận.

Ví dụ 1 Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left(x-\sqrt{2}\right)^2\left(x+\sqrt{2}\right)^2$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};2\right]$.

A. 5 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải.

Ta có: $f(x)=x^4-4x^2+4$; $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};0\right]$; $f'(x)=4x^3-8x$.

Với $x\in\left[-\frac{1}{2};2\right], f'(x)=0\Leftrightarrow x=0;x=\sqrt{2}$

Ta có: $f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\frac{1}{16}, f(0)=4, f\left(\sqrt{2}\right)=0, f(2)=4$.

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ lần lượt là 4 và 0.

Chọn C

Ví dụ 2 Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=x^2-\ln(1-2x)$ trên đoạn $[-1;0]$.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=2x+\frac{2}{1-2x}; f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Tính: $f(-1)=1-\ln 3; f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\ln 2; f(0)=0$

Vậy: $\min\limits_{[-1;0]} f(x)=\frac{1}{4}-\ln 2; \max\limits_{[-1;0]} f(x)=0$. **Chọn A**

Ví dụ 3 Tìm giá nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x-3+\frac{4}{x-1}$ trên đoạn $[2;5]$?

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 4

Lời giải.

Ta có: $f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[2;5]$; $f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^2}$

Với $x\in[2;5]$ thì $f'(x)=0\Leftrightarrow x=3$

Ta có: $f(2)=3, f(3)=2, f(5)=3$

Do đó: $\underset{[2;5]}{Max} f(x)=3\Leftrightarrow x=2\vee x=5$, $\underset{[2;5]}{min} f(x)=2\Leftrightarrow x=3$.

Chọn B

Phần III: MỘT SỐ THỦ THUẬT SỬ DỤNG MTCT 570 VN PLUS

Tính đạo hàm tại một điểm:

Để tính $f'(x_0)$ bấm tổ hợp phím Shift Tích Phân 

Nhập $f(x)$ và x_0 được $\frac{d}{dx}(f(x))_{x=x_0}$ bấm = sẽ ra kết quả.

Sử dụng Table để dự đoán Max, min:

Để tìm max, min của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ ta bấm MODE 7 nhập $f(x)$ bằng phím ALPHA bấm " = " chọn Start? a bấm " = " chọn End? b bấm " = " chọn Step 0.5 (nên chọn sao cho tính từ a đến b có 20 giá trị vì máy chỉ tính được tối đa 20 giá trị). Máy cho ra bảng giá trị của $f(x)$ nhìn vào sẽ thấy max, min của hàm số và ta chọn đáp án cho chính xác.

Ví dụ 1 Cho $f(x)=(x^2+\cos x)\sqrt{x^3+1}$. Tính $f'(2)+f'(3)$.

Lời giải.

Ta chỉ cần bấm Shift + Tích Phân nhập vào:

$$\frac{d}{dx}\left((x^2+\cos x)\sqrt{x^3+1}\right)_{x=2}+\frac{d}{dx}\left((x^2+\cos x)\sqrt{x^3+1}\right)_{x=3}=67.8777$$

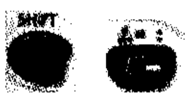
Ví dụ 2 Với tất cả các giá trị nào của m thì hàm số $y=x^3+3mx^2-4mx+4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

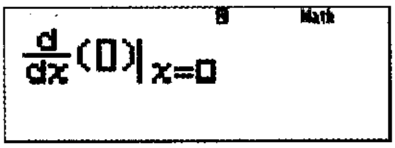
A. $m\geq\frac{4}{3}$. **B.** $-\frac{4}{3}\leq m\leq 0$. **C.** $0\leq m\leq\frac{3}{4}$. **D.** $-\frac{3}{4}\leq m\leq 0$.

Lời giải.

Hàm số bậc 3 đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$, vì thế ta chỉ cần mở chức năng tính đạo hàm của MTCT nhập hàm số vào với chú ý thay $m=Y$ rồi gán x một giá trị bất kì, $m=Y$ chọn một giá trị thỏa từng đáp án, nếu trường hợp nào cho ra $y'<0$ thì loại đi.

Đầu tiên: Bấm tổ hợp phím: **Shift** + **Tích Phân.**



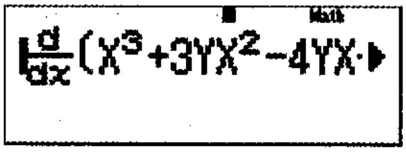


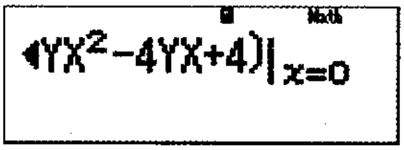
Màn hình sẽ hiển thị như hình bên.

Bước 1 + 2: Nhập $X^3+3YX^2-4YX+4$ vào casio đã bật chức năng đạo hàm

Bước 3 (Gán giá trị):

Bước 3.1 (Gán giá trị cho X): Vì tập xác định là toàn $\mathbb{R}$ nên ta sẽ khéo gán giá trị cần tính là $x_0 = X = 0$ (ta có thể gán giá trị khác nhưng đáp án cuối cùng phải như nhau).





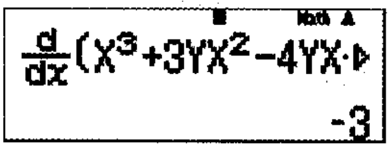
$$\frac{d}{dx}\left(X^3 + 3YX^2 - 4YX + 4\right)\Big|_{x=0}$$

(Chú ý là không được bấm phím = ngay sau khi nhập xong như trên).

Bước 3.2 (Gán giá trị cho Y): Quan sát đáp án, thấy được m = 0 đáp án nào cũng có $\Rightarrow$ *m* = 0 đúng rồi, ta sẽ không gán *m* Y = 0.

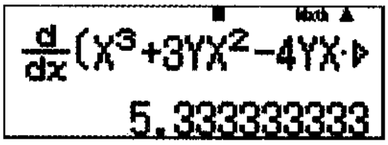
Hai đáp án A và C có chiều như nhau. B và D cũng vậy.

Vậy nếu gán $m = Y = \frac{3}{4}$ mà kết quả > 0 thì nhận A, C loại B, D. Ngược lại kết quả < 0 thì A, C đều loại.



Thực hành bấm máy, ta được kết quả $-3 < 0 \Rightarrow$ A, C đều bị loại.

Tương tự như trên, tiếp tục gán $m = Y = -\frac{4}{3}$ ta thu được kết quả $5,33(3) > 0 \Rightarrow$ D loại.



Vậy đáp án của bài toán là B.

Ví dụ 3 Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 là

A. $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$ **B.** $y = x + \frac{1}{3}.$ **C.** $y = -\frac{1}{3}x + 1.$ **D.** $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$

Lời giải.

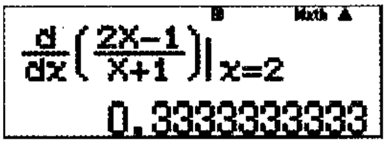
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ tại điểm $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ là:

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

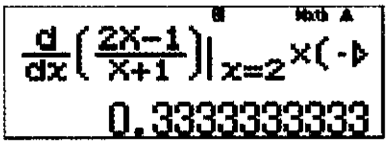
$\Leftrightarrow y = \underbrace{y'(x_0)}_{A}.x + \underbrace{y'(x_0).(-x_0) + y(x_0)}_{B}$

$\Leftrightarrow y = Ax + B$

Tìm A: Nhập $A = y'(2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)\Big|_{x=2} = \frac{1}{3}$.



Tìm B: Nhập $B = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)\Big|_{x=2}.(-2) + \frac{2x-1}{x+1}$ và bấm CALC với $x=2$ ta được: $B = \frac{1}{3}$.



Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow$ **Chọn D.**

Ví dụ 4 Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{x+m}$ có đồ thị (C). Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$?

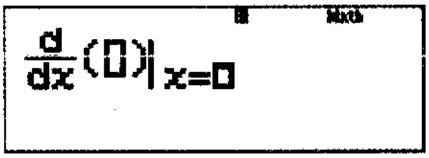
A. $m = 1+\sqrt{2}$ **B.** $m = 1-\sqrt{2}$ **C.** $m=1$ **D.** $m=2$

Lời giải.

Nhắc lại lý thuyết một chút nếu $\begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases}$ thì $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Đầu tiên: $y' = \frac{(2x-m)(x+m) - x^2 + mx}{x+m} = \frac{x^2 + 2mx - m^2}{x+m}$

$y'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2m - m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1+\sqrt{2} \\ m = 1-\sqrt{2} \end{array}\right.$, loại C, D.



Bấm tổ hợp phím: **Shift + Tích Phân.** 

Màn hình sẽ hiển thị như hình bên.

Gán $x=1$, $m = Y = 1+\sqrt{2}$ rồi nhập vào MTCT được $\frac{d}{dx}\left(\frac{X^2 - 2Y.X - Y^2}{X-Y}\right)_{x=1} > 0$, nên nhận đáp án A, lỡ ra âm thì chọn giá trị m còn lại.

Chú ý:

$x + m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ suy ra $m \neq -1$.

Ví dụ 5 Cho hàm số $y = mx - 2\ln x$ trên $[1;e]$. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số bằng 1?

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 4

Lời giải.

Kiểm tra đáp án A trước, bấm Mode 7 nhập $f(X) = 3X - 2\ln X$, chọn Start 1, End e, Step 0.1 bấm "=" nhìn vào bảng thấy max lớn hơn 1.

Làm tương tự ta chọn đáp án C.

Phần IV: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1.

Cho hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ với $m\neq 2$. Tìm các giá trị của tham số m để tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị với trục tung, tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=2\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-2\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Giao điểm của đồ thị với trục tung: $M(0;m)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ với đồ thị hàm số tại M: $y=(2-m)x+m$

Giao điểm của tiếp tuyến Δ với các trục tọa độ: $N\left(\dfrac{m}{m-2};0\right), M(0;m)$.

Diện tích tam giác: $S_{OMN}=\dfrac{1}{2}.|m|.\left|\dfrac{m}{m-2}\right|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m^2=|m-2|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$

Vậy $m=1, m=-2$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 2.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left(x^2-3\right)e^x$ trên đoạn $[-2;2]$

A. $\begin{cases}min=-2e\\max=e^2\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}min=2e\\max=e^2\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}min=-2e\\max=3e^2\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}min=-3e\\max=e^2\end{cases}$

Lời giải

$f'(x)=e^x\left(x^2+2x-3\right)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1, x=-3.$

Vì $x\in[-2;2]$ nên $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$; $f(-2)=e^{-2}, f(1)=-2e, f(2)=e^2$.

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng e^2 tại $x=2$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-2e$ tại $x=1$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 3.

Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $x-2y+2=0$?

A. $\left[\begin{array}{l} y=2x-3 \\ y=-x-7 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}(x-1) \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y=2x+3 \\ y=-x-7 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y=2x-3 \\ y=-x+7 \end{array}\right.$

Lời giải

Hệ số góc của tiếp tuyến $k=\dfrac{1}{2}$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm phương trình $\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

+ x=1, tiếp tuyến $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$

+ x=−3, tiếp tuyến $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$

Chọn đáp án B.

Bài tập 4.

Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Chứng minh rằng đường thẳng $d: y=x+m$ luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt *A, B* với mọi giá trị *m*?

A. m=2 **B.** m=3 **C.** m>5 **D.** Với mọi m

Lời giải

+ Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d : $\dfrac{-x+1}{2x-1}=x+m$

Điều kiện: $x\neq\dfrac{1}{2}$

$(1)\Leftrightarrow -x+1=2x^2+2mx-x-m$

$\Leftrightarrow 2x^2+2mx-1-m=0,(*)$

Ta thấy: $x=\dfrac{1}{2}$ không phải là nghiệm của phương trình.

Ta có: $\Delta'=m^2+2m+2>0,\forall m$

Do đó phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi *m*.

Vậy d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt với mọi *m*.

Chọn đáp án D.

Bài tập 5.

Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+3x+4}{x+1}$, biết tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k=\frac{3}{4}$?

A. $\left[\begin{array}{l} M\left(1;\frac{7}{2}\right) \\ M\left(-3;-\frac{3}{2}\right)\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} M\left(2;\frac{7}{2}\right) \\ M\left(-3;-\frac{3}{2}\right)\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} M\left(1;\frac{7}{2}\right) \\ M\left(3;-\frac{3}{2}\right)\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} M\left(1;\frac{7}{3}\right) \\ M\left(-3;-\frac{3}{2}\right)\end{array}\right.$

Lời giải

* Giả sử $M(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị $(x_0\neq -1)\Rightarrow y'(x_0)=\frac{x_0^2+2x_0}{(x_0+1)^2}$.

* $k=y'(x_0)=\frac{x_0^2+2x_0}{(x_0+1)^2}=\frac{3}{4}$

* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1\Rightarrow y_0=\frac{7}{2} \\ x_0=-3\Rightarrow y_0=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$

* Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài là $M_1\left(1;\frac{7}{2}\right), M_2\left(-3;-\frac{3}{2}\right)$

Chọn đáp án A.

Bài tập 6.

Cho hàm số: $y=\frac{2x+1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm trên (C) có tung độ bằng 5.

A. $y=x+10$ **B.** $y=-3x+11$ **C.** $y=3x+7$ **D.** $y=2x-5$

Lời giải

Ta có: $y_0=5\Leftrightarrow\frac{2x_0+1}{x_0-1}=5\Leftrightarrow 2x_0+1=5x_0-5\Leftrightarrow x_0=2$

• $f'(x_0)=\frac{-3}{(2-1)^2}=-3$

• Phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y-5=-3(x-2)\Leftrightarrow y=-3x+11$

Chọn đáp án B.

Bài tập 7.

Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Xác định m để đường thẳng $d: y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau.

A. $m=-1$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=-3$ **D.** $m=-4$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2-(3-m)x-m-1=0;\ x\neq 1(*)$

Phương trình này luôn có 2 nghiệm phân biệt khác 1 với $\forall m$ nên d luôn cắt (C) tai 2 điểm phân biệt A, B.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A\neq x_B \\ \dfrac{-2}{(x_A-1)^2}=\dfrac{-2}{(x_B-1)^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A\neq x_B \\ x_A+x_B=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A\neq x_B \\ \dfrac{3-m}{2}=2\end{cases} \Leftrightarrow m=-1$

Chọn đáp án A.

Bài tập 8.

Cho hàm số: $y=x^4-2(m^2+1)x^2+1\quad (1)$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số (1) có 3 điểm cực trị thỏa mãn giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

A. m=0 **B.** m=1 **C.** m=2 **D.** m=3

Lời giải

$y' = 4x^3-4(m^2+1)x$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m^2+1}\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ hàm số (1) luôn có 3 điểm cực trị với mọi m

$x_{CT}=\pm\sqrt{m^2+1} \Rightarrow$ giá trị cực tiểu $y_{CT}=-(m^2+1)^2+1$

$Vì\ (m^2+1)^2\geq 1 \Rightarrow y_{CT}\leq 0 \Rightarrow max(y_{CT})=0 \Leftrightarrow m^2+1=1 \Leftrightarrow m=0$

Chọn đáp án A.

Bài tập 9.

Tìm tất cả các giá trị của $m>1$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+m}{\sqrt{x+1}}$ trên đoạn $[0;4]$ nhỏ hơn 3.

A. $m\in(1;2)$ **B.** $m\in\left(1;\sqrt{5}\right)$ **C.** $m\in(1;3)$ **D.** $m\in\left(1;\sqrt{2}\right)$

Lời giải

+) Ta có $f'(x)=\dfrac{2-m\sqrt{x}}{2(x+1)\sqrt{x(x+1)}}$, $f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x}=\dfrac{2}{m} \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{m^2}\in(0;4)\ (m>1)$

+) Ta có $f(0)=m,\ f\left(\frac{4}{m^2}\right)=\sqrt{m^2+4},\ f(4)=\frac{m+4}{\sqrt{5}}$

+) Lập bảng biến thiên, dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{x\in[0;4]} f(x)=\sqrt{m^2+4}$,

Do đó $\max\limits_{x\in[0;4]} f(x)<3 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+4}<3 \Leftrightarrow m<\sqrt{5}$.

+) Vậy giá trị cần tìm của m là $m\in\left(1;\sqrt{5}\right)$.

Chọn đáp án B.

Bài tập 10.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=ln\left(2x^2+x+3\right)$, với mọi $x\in\left[-1;1\right]$.

A. $\begin{cases} min=ln\frac{23}{8} \\ max=ln6 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} min=ln\frac{23}{7} \\ max=ln6 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} min=ln\frac{23}{8} \\ max=ln7 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} min=ln\frac{23}{8} \\ max=ln8 \end{cases}$

Lời giải

$y'=\frac{4x+1}{2x^2+x+3}$

$y'=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}\in\left[-1;1\right]$

$y(-1)=ln4;\ y\left(-\frac{1}{4}\right)=ln\frac{23}{8};\ y(1)=ln6$

$\max\limits_{x\in[-1;1]} y=y(1)=ln6;\quad \min\limits_{x\in[-1;1]} y=y\left(-\frac{1}{4}\right)=ln\frac{23}{8}$

Chọn đáp án A.

Bài tập 11.

Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $B(-2;2)$ và có hệ số góc m. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho các đường thẳng đi qua M và N song song với các trục tọa độ tạo thành một hình vuông?

A. m=1 **B.** m=2 **C.** m=3 **D.** m=5

Lời giải

Phương trình của đường thẳng(d): $y=m(x+2)+2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $\frac{2x+1}{x-1}=m(x+2)+2\ \ (1)$.

$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+mx-2m-3=0\ (2) \\ x\neq 1 \end{cases}$

(d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 nghĩa là:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 9m^2 + 12m > 0 \\ m(1)^2 + m.1 - 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. (*).$$

Gọi $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$ và P,Q là hai đỉnh còn lại của hình vuông, khi đó $MPNQ$ là hình vuông khi và chỉ khi $MP = MQ \Leftrightarrow |y_2 - y_1| = |x_2 - x_1| \Leftrightarrow |m(x_2 - x_1)| = |x_2 - x_1|$.

Kết hợp điều kiện $(*)$ suy ra $m = 1$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 12.

Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + 1$, có đồ thị (C). Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 + 3x^2 - m - 2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có đúng 2 nghiệm lớn hơn -1.

A. $-2<m<0$ **B.** $3<m<5$ **C.** $1<m<7$ **D.** $5<m<9$

Lời giải

$x^3 + 3x^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 1 = m + 3$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $y = m + 3$. HS tự vẽ đồ thị (C).

Số nghiệm của phương trình (1) tương ứng bằng số giao điểm của hai đường (C), (d)

(1) có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn -1 khi và chỉ khi: $1 < m + 3 < 3$

$\Leftrightarrow -2 < m < 0$

Chọn đáp án A.

Bài tập 13.

Cho hàm số: $y = x^4 - 4x^2 + 3$. Dựa vào đồ thị (C) tìm các giá trị của tham số thực m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 - 2m = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m > \dfrac{3}{2} \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m < \dfrac{3}{2} \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m > \dfrac{3}{2} \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m > -\dfrac{3}{2} \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Lời giải

Biến đổi: $x^4 - 4x^2 + 3 - 2m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 2m$ (*)

Số nghiệm phương trình (*) bằng số giao điểm của $(C): y = x^4 - 4x^2 + 3$ và d: y = 2m.

Dựa vào đồ thị (học sinh tự vẽ) tìm được : $\left[\begin{array}{l}2m>3\\2m=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>\dfrac{3}{2}\\m=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Giải và kết luận: $\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{3}{2}\\m=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Chọn đáp án A.

Bài tập 14.

Cho đồ thị hàm số $y=-x^4+4x^2-3$. Dựa vào đồ thị (C) tìm các giá trị của tham số thực m để phương trình $x^4-4x^2+3+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{2}\\m<-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{1}{2}\\m<-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{2}\\m<\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{5}{2}\\m<-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$

Lời giải

Biến đổi: $x^4-4x^2+3+2m=0 \Leftrightarrow -x^4+4x^2-3=2m$ (*)

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của: $(C): y=-x^4+4x^2-3$ và $(d)\, y=2m$.

Dựa vào đồ thị tìm được : $2m = 1$ hoặc $2m< -3$

Giải và kết luận: m = $\dfrac{1}{2}$ hoặc m< $-\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 15.

Cho hàm số: $y=-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-3x$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm trên (C) có hoành độ bằng 4?

A. $y=-3x+\dfrac{32}{3}$ **B.** $y=3x+\dfrac{32}{3}$ **C.** $y=-3x+\dfrac{32}{5}$ **D.** $y=-3x-\dfrac{32}{3}$

Lời giải

- $x_0=4 \Rightarrow y_0=-\dfrac{4}{3}$
- $f'(x_0)=f'(4)=-3$
- Vậy, tiếp tuyến cần tìm là: $d: y+\dfrac{4}{3}=-3(x-4) \Leftrightarrow y=-3x+\dfrac{32}{3}$

Chọn đáp án A.

Bài tập 16.

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$, biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 9x -7.

A. d: x+y=0 **B.** y=9x+25 **C.** y= 5x-2 **D.** y= 7x+9

Lời giải

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

* $y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0$

* Tiếp tuyến của đồ thị (C) có phương trình dạng: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

$\Leftrightarrow y = (3x_0^2 + 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 2$ (*) (trong đó $x_0 \in D$ là hoành độ tiếp điểm)

* Tiếp tuyến (*) song song với d nên: $3{x_0}^2 + 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{array}\right.$

Với $x_0 = 1$, phương trình tiếp tuyến là $y = 9x - 7$ (loại)

Với $x_0 = -3$, phương trình tiếp tuyến là $y = 9x + 25$ (thỏa mãn)

Chọn đáp án B.

Bài tập 17.

Tìm m để hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 - 2m - 1$ đạt cực đại tại $x = 1$?

A. m=1 **B.** m=5 **C.** m=7 **D.** Không có m.

Lời giải

+ Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+1)x$

+ Để hàm số đạt cực đại tại x =1 cần $y'(1) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4(m+1) = 0 \Leftrightarrow m = 0$

+Với m=0 $\Rightarrow y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y'(1) = 0$

+ Lại có $y'' = 12x^2 - 4 \Rightarrow y''(1) = 8 > 0$ => hàm số đạt cực tiểu tại x = 1 $\Rightarrow$ m=0 không thỏa mãn. Vậy không có giá trị nào của m để hàm số đạt cực đại tại x = 1

Chọn đáp án D.

Bài tập 18.

Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 3mx + 5$ đạt cực đại tại $x = -3$.

A. m=2 **B.** m=3 **C.** m=1 **D.** m=7

Lời giải

$\begin{cases} y' = x^2 + 2mx - 3m \\ y'' = 2x + 2m \end{cases}$. Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ khi $\begin{cases} y'(-3) = 0 \\ y''(-3) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-9m=0 \\ 2m-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$

Chọn đáp án C.

Bài tập 19.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x^2-2).e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$.

A. $\begin{cases} min=-e^2 \\ max=2e^4 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} min=e^2 \\ max=2e^4 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} min=-e^2 \\ max=3e^4 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} min=-2e^2 \\ max=2e^4 \end{cases}$

Lời giải

Hàm số f(x) liên tục trên đoạn [−1 ; 2], $f'(x)=2(x^2+x-2)e^{2x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in(-1;2) \\ x=-2\notin(-1;2) \end{array}\right.$

$f(1)=-e^2,\ f(-1)=\frac{-1}{e^2},\ f(2)=2e^4$

GTLN của f(x) trên đoạn [−1 ; 2] bằng $2e^4$, khi x = 2,

GTLN của f(x) trên đoạn [−1 ; 2] bằng $-e^2$, khi x = 1.

Chọn đáp án A.

Bài tập 20.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-2x^2+(m-3)x+5$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=4$.

A. m= -1/3 **B.** m= 2 **C.** m= 2/3 **D.** m=0

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-4x+m-3. y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+m-3=0$ (1)

Hàm số đã cho có cực trị khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt,

hay $\Delta'=4-3(m-3)>0 \Leftrightarrow m<\frac{13}{3}$. (*)

Khi đó hàm số có cực trị x_1, x_2 là nghiệm phương trình (1).

Theo Vi-ét, ta có $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{16}{9}-2.\frac{m-3}{3}=\frac{16}{9}-\frac{2m-6}{3}=\frac{34-6m}{9}$

Yêu cầu bài toán tương đương với: $\frac{34-6m}{9}=4 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}$ (thỏa mãn (*)).

Chọn đáp án A.

Bài tập 21.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{x}{2}+1$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\begin{cases} GTLN=\frac{7}{2} \\ GTNN=3 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} GTLN=\frac{7}{2} \\ GTNN=2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} GTLN=\frac{7}{2} \\ GTNN=1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} GTLN=\frac{9}{2} \\ GTNN=3 \end{cases}$

Lời giải

Hàm số: $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{x}{2}+1$ liên tục trên đoạn $[1;3]$. $f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x^2}+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in[1;3] \\ x=-2\notin[1;3] \end{array}\right.$

Ta có: $f(1)=\frac{2}{1}+\frac{1}{2}+1=\frac{7}{2}$; $f(2)=\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+1=3$; $f(3)=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+1=\frac{19}{6}$

Từ đó ta có: $\max\limits_{[1;3]} f(x)=f(1)=\frac{7}{2}$, $\min\limits_{[1;3]} f(x)=f(2)=3$.

Vậy: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 3 khi $x=2$.

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng $\frac{7}{2}$ khi $x=1$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 22.

Tìm để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m>3+2\sqrt{2} \\ m<3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m>2-2\sqrt{2} \\ m<3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m>3+2\sqrt{2} \\ m<5-2\sqrt{2} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m>3+\sqrt{2} \\ m<3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x}{x+1}=x+m$ (1), Điều kiện: $x\neq -1$.

$(1)\Leftrightarrow 2x=(x+m)(x+1)\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+m=0$ (2)

Dễ thấy, $x=-1$ không là nghiệm của (2) nên (d) cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m^2-6m+1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3+2\sqrt{2} \\ m<3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Chọn đáp án A.

Bài tập 23.

Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị đồ thị hàm số (1) tại điểm M có hoành độ bằng $\sqrt{2}$.

A. $y=4\sqrt{2}x-8$ **B.** $y=4\sqrt{2}x-7$ **C.** $y=4\sqrt{2}x-6$ **D.** $y=4\sqrt{2}x-5$

Lời giải

Gọi d là tiếp tuyến tại điểm M có hoành độ bằng $\sqrt{2}$.

Do M thuộc đồ thị hàm số (1) nên $M\left(\sqrt{2};0\right)$

Tiếp tuyến d có hệ số góc $y'\left(\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}$

Chọn đáp án A.

Bài tập 24.

Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị đồ thị hàm số (1) tại điểm M có hoành độ bằng $\sqrt{2}$?

A. $y=4\sqrt{2}x-8$ **B.** $y=4\sqrt{2}x-7$ **C.** $y=4\sqrt{2}x-6$ **D.** $y=4\sqrt{2}x-5$

Lời giải

Gọi d là tiếp tuyến tại điểm M có hoành độ bằng $\sqrt{2}$.

Do M thuộc đồ thị hàm số (1) nên $M\left(\sqrt{2};0\right)$

Tiếp tuyến d có hệ số góc $y'\left(\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}$

Phương trình tiếp tuyến d có dạng: $y=4\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}\right)+0 \Leftrightarrow y=4\sqrt{2}x-8$

Chọn đáp án A.

Bài tập 25.

Xác định tọa độ giao điểm A, B của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ với đường thẳng $y=x+7$ và viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm ấy.

A. $\begin{cases} A: y=3x+11 \\ B: y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} A: y=x+11 \\ B: y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} A: y=3x+11 \\ B: y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{3} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} A: y=3x+12 \\ B: y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3} \end{cases}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x+1}=x+7 \Leftrightarrow x^2+6x+8=0, x\neq -1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow y=5 \\ x=-4 \Rightarrow y=3 \end{array}\right.$. Các giao điểm là $A(-2;5), B(-4;3)$

$y'(-2)=3 \Rightarrow$ tiếp tuyến tại A là $y=3x+11$.

$y'(-4)=\frac{1}{3} \Rightarrow$ tiếp tuyến tại B là $y=\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 26.

Tìm các điểm cực đại, cực tiểu của hàm số $y=x-5+\frac{1}{x}$.

A. $\begin{cases} min=-3 \\ max=-7 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} min=-4 \\ max=-7 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} min=-3 \\ max=-6 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} min=-5 \\ max=-7 \end{cases}$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Chiều biến thiên: $y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	‖		0	+	
y	$-\infty$	↗	$Y_{CĐ}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	Y_{CT}	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 27.

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y=x^3-6x^2+9x-2$ tại điểm có hoành độ x_0 thỏa mãn phương trình: $y''(x_0)=-12$.

A. $y=8x-1$ **B.** $y=9x-2$ **C.** $y=11x+2$ **D.** $y=5x-6$

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-12x+9, y''=6x-12$, $y''(x_0)=-12 \Leftrightarrow 6x_0-12=-12 \Leftrightarrow x_0=0$

Với $x_0=0 \Rightarrow y_0=-2$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(0;-2)$ là: $y=y'(0)(x-0)-2=9x-2$

Chọn đáp án B.

Bài tập 28.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x\sqrt{(5-x)^3}$ trên đoạn $[0;\ 5]$.

A. $\begin{cases} min=0 \\ max=6\sqrt{3} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} min=1 \\ max=6\sqrt{3} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} min=2 \\ max=6\sqrt{3} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} min=3 \\ max=6\sqrt{3} \end{cases}$

Lời giải

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x^2-35x+50=0 \Leftrightarrow x=2$.

Ta có: $f(0)=0$; $f(5)=0$; $f(2)=6\sqrt{3}$

Vậy $max\, f(x)=6\sqrt{3}$; $min\, f(x)=0$ trên đoạn $[0;\ 5]$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 29.

Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi là 60 cm. Tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

A. $S=220$ **B.** $S=221$ **C.** $S=222$ **D.** $S=225$

Lời giải

Gọi một cạnh của hình chữ nhật là x (cm) ($0<x<30$).

Khi đó cạnh còn lại là (30−x)(cm)

Theo bài ra thì diện tích của hình chữ nhật là:

$S=x(30-x)=-x^2+30x=225-(x-15)^2\le 225$

Vậy diện tích S của hcn lớn nhất bằng 225 khi $x=15$ (cm)

Chọn đáp án D.

Christian Doppler (1803-1853)

Nơi sinh: Salzburg, Austria

Nhà toán học và vật lý người Áo, Christian Andreas, được biết đến với nghiên cứu quan trọng của ông về tần số âm thanh và bước sóng. Ông đã mô tả lại sự thay đổi rõ ràng của âm thanh khi một quan sát viên đến gần nguồn âm thanh: tần số sóng tăng, âm thanh trở nên chói hơn và khi đi xa sẽ tạo âm trầm hơn. Năm 1842 ông đã diễn tả hiện tượng đó bằng Toán học, và đó là hiệu ứng Doppler.

Hiệu ứng này ta có thể bắt gặp ngay trong đời sống hàng ngày. Chẳng hạn như, tiếng còi xe cấp cứu sẽ chói hơn khi nó tiến đến gần ta, giảm dần (tức là trầm hơn) khi xe vượt qua và nhỏ đi khi xe chạy xa. Một ứng dụng quan trọng từ hiệu ứng này đó là việc chế tạo ra "súng bắn tốc độ". Sử dụng cơ chế radar và hiệu ứng Doppler, phát ra một bước sóng radio có tần số xác định rồi thu nhận tần số sóng radio phản xạ ngược trở lại từ phương tiện giao thông đang di chuyển, từ đó tính ra được vận tốc của phương tiện giao thông.

Chuyên đề 2. HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ VÀ LÔGARIT

Khi giải phương trình $2^x = 2$ ta dễ thấy nghiệm là $x = 1$, nhưng nếu giải phương trình $3^x = 2$ sẽ khó hơn nhiều, người ta phát hiện tồn tại con số x thỏa điều này, nhưng không biểu diễn được nó, từ đó người ta phát minh ra lôgarit để kí hiệu cho con số này và viết là $log_3 2$, ý nói nghiệm của phương trình $3^x = 2$ là $log_3 2$. Qua nhiều năm các nhà toán học đã hoàn thiện lý thuyết và các tính chất của lôgarit. Chúng ta cùng nhau nghiên cứu kĩ hơn qua các bài học sau.

Phần I: CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN

1. Các định nghĩa và công thức lũy thừa:

Với hai số dương a,b và α,β là số thực ta có:

- $a^n = a.a...a$ (tích của n số a), n∈N*.
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ với $n \in N^*$ và $a \neq 0$.
- $a^0 = 1$.
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{a^n}$ với $m \in Z, n \in N$, $n \geq 2$.
- $a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$
- $(ab)^\alpha = a^\alpha.b^\alpha$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$
- $a^{\alpha\beta} = (a^\alpha)^\beta = (a^\beta)^\alpha$
- Nếu $\begin{cases} a > 1 \\ \alpha > \beta \end{cases}$ thì $a^\alpha > a^\beta$.
- Nếu $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ \alpha > \beta \end{cases}$ thì $a^\alpha < a^\beta$.

2. Định nghĩa và các công thức logarit:

Cho $a,b > 0$ với $a \neq 1$, $b_1,b_2 > 0$, $\alpha \in R$. Lúc này ta có:

- $a^\alpha = b \Leftrightarrow \alpha = log_a b$.
- $log_a 1 = 0$.
- $log_a a = 1$.
- $a^{log_a b} = b$.
- $log_a(a^\alpha) = \alpha$.

- $log_a(b_1.b_2) = log_a b_1 + log_a b_2$

  $log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = log_a b_1 - log_a b_2$

- $log_a b^\alpha = \alpha\, log_a b$
- $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$ (công thức chèn cơ số) hay $log_c a.log_a b = log_c b$
- $log_{10} x = lg\, x$
- $log_e x = ln\, x$

TÍNH CHẤT HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

1. Hàm số lũy thừa:

Dạng : $y = x^\alpha \ (\alpha \in R)$

+ **Nếu α nguyên dương:** $y = x^\alpha$ có đạo hàm $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ với mọi x.

- Tập xác định: $D = R$

+ **Nếu α nguyên âm hoặc bằng 0:** $y = x^\alpha$ có đạo hàm $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ với mọi $x \neq 0$.

- Tập xác định: $D = R\setminus\{0\}$

+ **Nếu α không nguyên:** $y = x^\alpha$ có đạo hàm $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ với mọi $x > 0$.

- Tập xác định: $D = (0;+\infty)$

Đồ thị hàm số $y = x^\alpha \ (\alpha \in R)$ có các tính chất sau:

- Đồ thị luôn đi qua điểm $(1;1)$.
- Khi $\alpha > 0$ hàm số luôn đồng biến, đồ thị hàm số không có tiệm cận.
- Khi $\alpha > 0$ hàm số nghịch biến, đồ thị hàm số có TCN là trục Ox, TCĐ là trục Oy

2. Hàm số mũ:

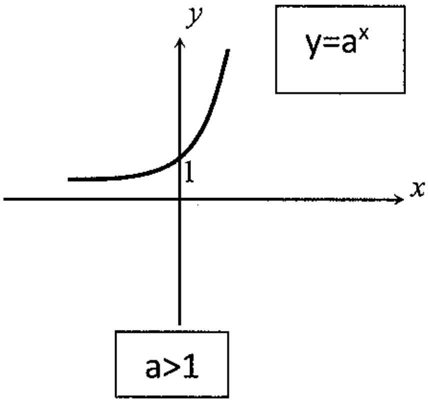
Dạng: $y = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$. Có đạo hàm $(a^x)' = a^x.ln\, a$

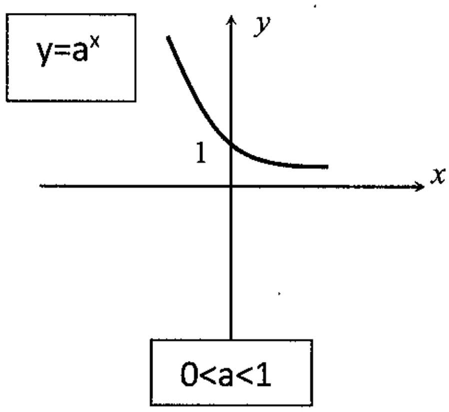
- Tập xác định: $D = R$
- Tập giá trị: $T = R^+$ (vì $a^x > 0$ với mọi $x \in R$)
- Tính đơn điệu:

* $a > 1$: $y = a^x$ đồng biến trên R.

* $0 < a < 1$: $y = a^x$ nghịch biến trên R.

- Đồ thị hàm số mũ: có tiệm cận ngang là trục Ox, luôn đi qua các điểm $(0;1)$ và $(1;a)$.





3. Hàm số lôgarit:

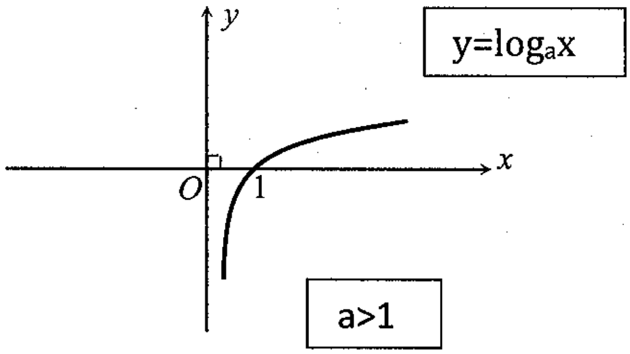
Dạng : $y = log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$. Có đạo hàm $(log_a x)' = \dfrac{1}{x.lna}$. Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

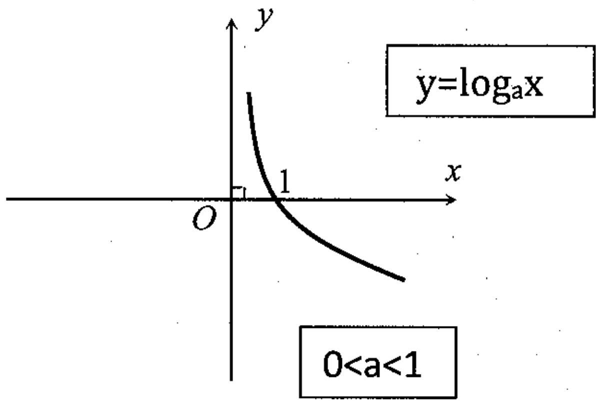
- Tập giá trị: $T = R$.
- Tính đơn điệu:

* $a > 1$: $y = log_a x$ đồng biến trên R.

* $0 < a < 1$: $y = log_a x$ nghịch biến trên R.

- Đồ thị hàm số mũ: có tiệm cận đứng là trục Oy, luôn đi qua các điểm $(1;0)$ và $(a;1)$.





LÝ THUYẾT LÃI ĐƠN, LÃI KÉP

1. Lãi đơn

Số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra.

Công thức tính lãi đơn: $T = M(1 + r.n)$

Trong đó:

T: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

M: Tiền gửi ban đầu;

n: Số kỳ hạn tính lãi;

r: Lãi suất định kỳ, tính theo %

2. Lãi kép

Là số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.

a. Lãi kép, gửi một lần

$T = M(1+r)^n$

Trong đó:

T: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

M: Tiền gửi ban đầu;

n: Số kỳ hạn tính lãi;

r: Lãi suất định kỳ, tính theo %

b. Lãi kép, gửi định kỳ.

Trường hợp 1: Tiền được gửi vào cuối mỗi tháng.

+ Cuối tháng thứ nhất cũng là lúc người đó bắt đầu gửi tiền: $T_1 = M$

+ Cuối tháng thứ hai, người đó có số tiền là:

$$M(1+r)+M = M\left[(1+r)+1\right] = \frac{M}{\left[(1+r)-1\right]}\left[(1+r)^2-1\right] = \frac{M}{r}\left[(1+r)^2-1\right]$$

+ Cuối tháng thứ ba: $\frac{M}{r}\left[(1+r)^2-1\right](1+r)+\frac{M}{r}.r = \frac{M}{r}\left[(1+r)^2-1\right]$

+ Cuối tháng thứ n, người đó có số tiền là:

$$T_n = \frac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$$

Tiếp cận khác về công thức:

+ Tiền gửi tháng thứ nhất sau $n-1$ kỳ hạn ($n-1$ tháng) thành: $M(1+r)^{n-1}$

+ Tiền gửi tháng thứ nhất sau $n-2$ kỳ hạn ($n-2$ tháng) thành: $M\left(1+r\right)^{n-2}$

+ Tiền gửi tháng cuối cùng là: $M\left(1+r\right)^{0}$

Vậy áp dụng công thức tổng cấp số nhân, số tiền cuối tháng n là:

$$M\left(1+r\right)^{n-1}+M\left(1+r\right)^{n-2}+...+M\left(1+r\right)^{0}=M\frac{\left(1+r\right)^{n}-1}{1+r-1}=M\frac{\left(1+r\right)^{n}-1}{r}$$

Ta cũng được công thức trên:

$$T_n=\frac{M}{r}\left[\left(1+r\right)^{n}-1\right]$$

Trường hợp 2: Tiền gửi vào đầu mỗi tháng.

$$T_n=\frac{M}{r}\left[\left(1+r\right)^{n}-1\right]\left(1+r\right)$$

BÀI TẬP MINH HỌA

1. Các bài tập tính toán

Câu 1 Tính $A=log_{\sqrt{2}}\sqrt{6}+log_4 81-log_2 27+81^{\frac{1}{log_5 3}}$. Đáp án đúng là:

A. $A=624$ **B.** $A=625$ **C.** $A=626$ **D.** $A=627$

Lời giải.

$$A=log_{\sqrt{2}}\sqrt{6}+log_4 81-log_2 27+81^{\frac{1}{log_5 3}}=log_2 6+log_2 9-log_2 27+\left(3^{log_3 5}\right)^{4}$$

$$=log_2\frac{6.9}{27}+5^4=1+625=626$$

Chọn đáp án C.

Câu 2 Tính $A=81^{\frac{1}{log_5 3}}+27^{log_9 6}+3^{\frac{4}{3log_8 9}}$. Đáp án đúng là:

A. $A=845$ **B.** $A=837$ **C.** $A=846$ **D.** $A=849$

Lời giải.

$$A=3^{4log_3 5}+3^{3log_3 6}+3^{\frac{4}{3log_{2^3}3^2}}$$

$$=5^4+6^3+3^{2log_3 2}=5^4+6^3+2^2=845$$

Chọn đáp án A.

Câu 3 Tính $A=\left(\frac{1}{625}\right)^{\frac{-1}{4}}+16^{\frac{3}{4}}-2^{-2}.64^{\frac{1}{3}}$. Đáp án đúng là:

A. $A=12$ **B.** $A=13$ **C.** $A=14$ **D.** $A=15$

Lời giải.

$$A=\left(\frac{1}{625}\right)^{\frac{-1}{4}}+16^{\frac{3}{4}}-2^{-2}.64^{\frac{1}{3}}$$
$$=\left(5^4\right)^{\frac{1}{4}}+\left(2^4\right)^{\frac{3}{4}}-4^{-1}.\left(4^3\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$=5+2^3-1=12$$

Chọn đáp án A.

Câu 4 Rút gọn $B=3^{2log_3 a}-log_5 a^2.log_a 25$. Đáp án đúng là:

A. B = a^2- 4 **B.** B = a **C.** B = a - 4 **D.** B=5

Lời giải.

$$B=3^{2log_3 a}-log_5 a^2.log_a 25$$
$$=3^{log_3 a^2}-4log_5 a.log_a 5$$
$$=a^2-4$$

Chọn đáp án A.

Câu 5 Cho $log_3 15=a$, $log_3 10=b$. Tính $log_9 50$ theo a và b, đáp án đúng là:

A. a+b-1 **B.** a-b **C.** a+b-5 **D.** a+2b

Lời giải.

Ta có $log_9 50=log_{3^2} 50=\frac{1}{2}log_3 50$

$log_3 50=log_3\frac{150}{3}=log_3 15+log_3 10-1=a+b-1$

Chọn đáp án A.

Câu 6 Tính giá trị của biểu thức: $Q=log_a\left(a\sqrt{b}\right)-log_{\sqrt{a}}\left(a.\sqrt[4]{b}\right)+log_{\sqrt[3]{b}}(b)$ biết rằng a, b là các số thực dương khác 1.

A. $Q=2$ **B.** $Q=3$ **C.** $Q=4$ **D.** $Q=5$

Lời giải.

Ta có: $Q=log_a\left(a\sqrt{b}\right)-2log_a\left(a.\sqrt[4]{b}\right)+3log_b(b)$

$$=log_a\left(a\sqrt{b}\right)-log_a\left(a^2.\sqrt{b}\right)+3=log_a\left(\frac{a\sqrt{b}}{a^2\sqrt{b}}\right)+3=log_a\left(\frac{1}{a}\right)+3=-1+3=2.$$

Chọn đáp án A.

Câu 7 Tính giá trị của biểu thức với giả thiết biểu thức có nghĩa:

$$D=\left[\frac{x^4+x^3y+xy^3+y^4}{x^2+2xy+y^2}(x+y)+\frac{3y\left(x^2-y^2\right)}{x^{-1}(x-y)}\right]^{-\frac{1}{3}}:(x+y)^{-1}$$

A. $D=3$ **B.** $D=1$ **C.** $D=2$ **D.** $D=6$

Lời giải.

$$D=\left[\frac{x^4+x^3y+xy^3+y^4}{x^2+2xy+y^2}(x+y)+\frac{3y\left(x^2-y^2\right)}{x^1(x-y)}\right]^{-\frac{1}{3}}:(x+y)^{-1}$$

$$=\left[\frac{\left(x^3+y^3\right)(x+y)^2}{(x+y)^2}+3xy\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)}\right]^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{(x+y)}$$

$$=\left[(x+y)^3\right]^{-\frac{1}{3}}:(x+y)^{-1}=1$$

Chọn B.

Câu 8 Tính giá trị của biểu thức với giả thiết biểu thức có nghĩa: $D=\left[\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2$

A. $D=8a$ **B.** $D=a$ **C.** $D=9a$ **D.** $D=4a$

Lời giải.

$$D=\left[\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2=\left[\frac{4a^2-9}{a\frac{(2a-3)}{a^{\frac{1}{2}}}}+\frac{a^2-4a+3}{a\frac{(a-1)}{a^{\frac{1}{2}}}}\right]^2=\left[\frac{(2a+3)+(a-3)}{a^{\frac{1}{2}}}\right]^2=9a$$

Chọn B.

Câu 9 Cho biểu thức với giả thiết biểu thức có nghĩa. Chọn đáp án đúng:

$$D=\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}-\frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}(ab\neq 0;a\neq \pm b)$$

A. $D=\frac{4a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}$ **B.** $D=\frac{3a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}$ **C.** $D=\frac{a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}$ **D.** $D=\frac{2a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}$

Lời giải.

$$D=\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}-\frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}=\frac{a^n+b^n}{a^nb^n\left(\frac{b^n-a^n}{a^nb^n}\right)}-\frac{b^n-a^n}{a^nb^n\left(\frac{a^n+b^n}{a^nb^n}\right)}=\frac{\left(a^n+b^n\right)^2-\left(b^n-a^n\right)^2}{\left(a^n+b^n\right)\left(b^n-a^n\right)}=\frac{4a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}$$

Chọn A.

Câu 10 Cho biểu thức với giả thiết biểu thức có nghĩa. Chọn đáp án đúng?

$$D=\frac{1}{4}\left(xa^{-1}-ax^{-1}\right)\left(\frac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-1}+x^{-1}}+\frac{a^{-1}+x^{-1}}{a^{-1}-x^{-1}}\right)$$

A. $D=\frac{x^2+a^2}{ax}$ **B.** $D=\frac{1}{2}\frac{x^2+a^2}{ax}$ **C.** $D=\frac{2x^2+a^2}{ax}$ **D.** $D=\frac{1}{3}\frac{x^2+a^2}{ax}$

Lời giải.

$$B=\frac{1}{4}\left(xa^{-1}-ax^{-1}\right)\left(\frac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-1}+x^{-1}}+\frac{a^{-1}+x^{-1}}{a^{-1}-x^{-1}}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2-a^2}{ax}\right)\left(\frac{x-a}{x+a}+\frac{x+a}{x-a}\right)=\frac{1}{4}\frac{2\left(x^2+a^2\right)}{ax}=\frac{1}{2}\frac{x^2+a^2}{ax}$$

Chọn B.

Câu 11 Cho biểu thức với giả thiết biểu thức có nghĩa $D=\dfrac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}$. Chọn đáp án đúng:

A. $D=2$ nếu $a\geq 0$. **B.** $D=1$ **C.** $D=-3$ nếu $a<0$ **D.** $D=-2$

Lời giải.

$$D=\frac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}=\frac{a^2+4}{a\sqrt{\dfrac{\left(a^2+4\right)^2}{4a^2}}}=\frac{2|a|}{a}=\begin{cases}2:\leftrightarrow a\geq 0\\-2:\leftrightarrow a<0\end{cases}$$

Chọn A.

2. Tính đạo hàm

Câu 1 Tính đạo hàm các hàm số sau:

A. $y=\left(x^2-2x+2\right)e^x$ **B.** $y=\left(sinx\text{-}cosx\right)e^{2x}$ **C.** $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

D. $y=ln\left(x^2+1\right)$ **E.** $y=\dfrac{lnx}{x}$ **F.** $y=\left(1+lnx\right)lnx$

Lời giải.

A. $y=\left(x^2-2x+2\right)e^x\Rightarrow y'=\left(2x-2\right)e^x+\left(x^2-2x+2\right)e^x=\left(x^2\right)e^x$

B. $y=\left(sinx\text{-}cosx\right)e^{2x}\Rightarrow y'=\left(cosx\text{+}sinx\right)e^{2x}+2\left(sinx\text{-}cosx\right)e^{2x}=\left(3sinx-cosx\right)e^{2x}$

C. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\Rightarrow y'=\dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)-\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\dfrac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$

D. $y=ln\left(x^2+1\right)\Rightarrow y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$

E. $y=\dfrac{lnx}{x}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}.x-lnx\right)=\dfrac{1-lnx}{x^2}$

F. $y=\left(1+lnx\right)lnx\Rightarrow y'=\dfrac{lnx}{x}+\dfrac{1+lnx}{x}=\dfrac{1+2lnx}{x}$

Câu 2 Tính đạo hàm các hàm số sau:

A. $y=x^2\,ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ **B.** $log_2\left(x^2-x+1\right)$ **C.** $y=\sqrt[3]{ln^2 x}$

D. $y=log_2\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right)$ **E.** $y=log_3\left(\dfrac{x^2-9}{x+5}\right)$ **F.** $y=log\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$

Giải

A. $y = x^2 ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow y' = 2x.ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + \dfrac{x^2x}{\left(x^2+1\right)} = 2x.ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + \dfrac{x^3}{\left(x^2+1\right)}$

B. $y = log_2\left(x^2 - x + 1\right) \Rightarrow y' = \dfrac{2x-1}{\left(x^2-x+1\right)ln2}$

C. $y = \sqrt[3]{ln^2 x} \Rightarrow y' = \left[\left(lnx\right)^{\frac{2}{3}}\right]' = \dfrac{2}{3}\left(lnx\right)^{-\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{3x\sqrt[3]{lnx}}$

D. $y = log_2\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{ln2}\left(\dfrac{16}{\left(x+4\right)^2} : \dfrac{x-4}{x+4}\right) = \dfrac{16}{\left(x^2-4\right)ln2}$

E. $y = log_3\left(\dfrac{x^2-9}{x+5}\right) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{ln3}\left[\dfrac{2x\left(x+5\right)-x^2+9}{\left(x+5\right)^2} : \dfrac{x^2-9}{x+5}\right] = \dfrac{x^2+10x+9}{\left(x+5\right)\left(x^2-9\right)ln3}$

F. $y = log\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{ln10}\left[\dfrac{1}{x\sqrt{x}} : \dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right] = \dfrac{2}{x\left(1-\sqrt{x}\right)ln10}$

3. Tính giới hạn:

Chú ý ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(1+x\right)}{x} = 1$.

Câu 1 Tìm các giới hạn sau :

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(3x+1\right)-ln\left(2x+1\right)}{x}$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(3x+1\right)}{sin2x}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(4x+1\right)}{x}$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x+3}-e^3}{2x}$

E. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x+1}-1}$

F. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(1+x^3\right)}{2x}$

Lời giải.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(3x+1\right)-ln\left(2x+1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(3x+1\right)}{\dfrac{3}{3}x} - \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(2x+1\right)}{\dfrac{2}{2}x} = 3-2 = 1$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(3x+1\right)}{sin2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\dfrac{ln\left(3x+1\right)}{3x}}{2x\dfrac{sin2x}{2x}} = \dfrac{3}{2}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(4x+1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}4\dfrac{ln\left(4x+1\right)}{4x} = 4$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x+3}-e^3}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}e^3\,5\dfrac{\left(e^{5x}-1\right)}{2.\left(5x\right)} = \dfrac{5e^3}{2}$

E. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x+1}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right) = 1.2 = 2$

Câu 2 Tìm các giới hạn sau

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(2x+1)}{tan x}$ B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{5x}$ C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$ D. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)$

E. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin3x}{x}$ F. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos5x}{x^2}$

Lời giải.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(2x+1)}{tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\dfrac{ln(2x+1)}{2x}}{x\dfrac{tan x}{x}}=2$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\dfrac{5}{2}.2x}-\lim\limits_{x\to 0}3\dfrac{e^{3x}-1}{5(3x)}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{5}=-\dfrac{1}{5}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}3\dfrac{e^{3x}-1}{3x}=3$

D. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\dfrac{1}{x}}\right)=1$

E. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}3\dfrac{sin3x}{3x}=3$

F. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos5x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2sin^2\dfrac{5x}{2}}{\dfrac{4}{25}\left(\dfrac{5x}{2}\right)^2}=\dfrac{25}{2}$

Câu 3 Tìm các giới hạn sau:

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cosx-cos3x}{sin^2x}$ B. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{cosx}-tanx\right)$ C. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2)sin\dfrac{3}{x}$ D. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\sqrt{2}-2cosx}{sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}\right)$

Giải

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cosx-cos3x}{sin^2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2sin2x\,sin(-x)}{sin^2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4cosx.sin^2x}{sin^2x}=4$

B. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{cosx}-tanx\right)$.

Đặt : $t=\dfrac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}t\Leftrightarrow\dfrac{1}{cosx}-tanx=\dfrac{1}{cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)}-tan\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\dfrac{1}{sint}-cot t=\dfrac{1-cost}{sint}$

$=\dfrac{2sin^2\dfrac{t}{2}}{2sin\dfrac{t}{2}cos\dfrac{t}{2}}=tan\dfrac{t}{2}$. Khi $x\to\dfrac{\pi}{2};t\to 0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{cosx}-tanx\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2}{t}\dfrac{tan\dfrac{t}{2}}{\dfrac{t}{2}}=\infty$

C. $\lim_{x\to+\infty}(x+2)\sin\frac{3}{x}$.

Đặt: $t=\frac{1}{x}\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty;t\to 0\\(x+2)\frac{3}{x}=\left(2+\frac{1}{t}\right)3t=6t+3\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(x+2)\sin\frac{3}{x}=\lim_{t\to 0}(6t+3)=3$

D. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\right)$. Đặt : $x-\frac{\pi}{4}=t\Rightarrow\begin{cases}x=t+\frac{\pi}{4};x\to\frac{\pi}{4};t\to 0\\ \frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{\sin t}=\frac{\sqrt{2}(1-\cos t+\sin t)}{\sin t}\end{cases}$

Do đó: $\frac{\sqrt{2}(1-\cos t+\sin t)}{\sin t}=\sqrt{2}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\sqrt{2}\frac{\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}=\sqrt{2}\tan\frac{t}{2}+\sqrt{2}$

Vậy: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\right)=\lim_{t\to o}\left(\sqrt{2}\tan\frac{t}{2}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$

4. Giải phương trình và bất phương trình mũ:

Kiến thức cơ bản:

Với $0<a\neq 1$:

- $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$
- $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\f(x)>0\end{cases}$

Với $a>1$:

- $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$
- $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)>0$

Với $a<1$:

- $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$
- $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow g(x)>f(x)>0$

Tất nhiên chúng ta có thể dùng cách thay từng đáp án vào phương trình, nhưng lời khuyên của tác giả là hãy luyện tập giải thật tốt để nắm vững lí thuyết và kĩ năng. Trong phần luyện đề sẽ có những câu hỏi bắt buộc học sinh phải giải ra mới chọn được đáp án chính xác.

Câu 1 Nghiệm của phương trình $7^{x^2-4x+5}=49$ là

A. $x=1;x=3$ B. $x=1;x=2$ C. $x=-1;x=2$ D. $x=1;x=0$

Lời giải.

$7^{x^2-4x+5}=49 \Leftrightarrow 7^{x^2-4x+5}=7^2 \Leftrightarrow x^2-4x+5=2$

$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1; x=3$

Đáp án đúng là A

Câu 2 Nghiệm của phương trình $6.9^x-13.6^x+6.4^x=0$ là

A. $x=-1; x=1$ **B.** $x=-1; x=1$ **C.** $x=-1; x=1$ **D.** $x=-1; x=1$

Lời giải.

Vì $4^x>0$, chia hai vế phương trình (1) cho 4^x ta được

$(1) \Leftrightarrow 6.\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-13.\left(\frac{3}{2}\right)^x+6=0 \quad (2)$

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ với $t>0$, phương trình (2) trở thành $6t^2-13t+6=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{2}{3} \\ t=\frac{3}{2} \end{array}\right.$

- Với $t=\frac{3}{2}$ thì $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=1$
- Với $t=\frac{2}{3}$ thì $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=-1$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1; x=1$

Đáp án đúng là A

Câu 3 Nghiệm của phương trình: $4^{x-1}+2^{x+1}-21=0$ là

A. $x=log_3 6$ **B.** $x=log_2 6$ **C.** $x=log_2 5$ **D.** $x=log_2 9$

Lời giải.

$4^{x-1}+2^{x+1}-21=0 \Leftrightarrow 4^x+8.2^x-84=0$

Đặt $t=2^x>0$, ta có: $t^2+8t-84=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-14\ (l) \\ t=6\ (n) \end{array}\right.$

Với $t=6 \Rightarrow 2^x=6 \Leftrightarrow x=log_2 6$

Đáp án đúng là B

Câu 4 Nghiệm của phương trình: $5^{2x}-6.5^{x}+5=0$ là

A. $x=0\ ;x=0$ B. $x=0\ ;x=-1$ C. $x=0\ ;x=2$ D. $x=1\ ;x=0$

Lời giải.

Đặt $t=5^{x}\quad (t>0)$

Phương trình trở thành: $t^2-6t+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\quad (n)\\ t=5\quad (n)\end{array}\right.$

$t=1\Rightarrow 5^{x}=1\Leftrightarrow x=0$

$t=5\Rightarrow 5^{x}=5\Leftrightarrow x=1$

Đáp án đúng là D

Câu 5 Nghiệm của phương trình $25^{2x-x^2+1}+9^{2x-x^2+1}=34.15^{2x-x^2}$ là:

A. $x=1\pm\sqrt{3}.$ B. $x=1-\sqrt{3}.$ C. $x=1+\sqrt{3}.$ D. $x=1\pm\sqrt{2}.$

Lời giải.

$25^{2x-x^2+1}+9^{2x-x^2+1}=34.15^{2x-x^2}$

$\Leftrightarrow 25.25^{a}+9.9^{a}=34.15^{a}\left(a=2x-x^2\right)\Leftrightarrow 25\left(\dfrac{25}{9}\right)^{a}+9-34.\left(\dfrac{5}{3}\right)^{a}=0$

$\Leftrightarrow 25t^2-34t+9=0\left(t=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{a}>0\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=\dfrac{9}{25}\end{array}\right.$

$*t=1\Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{3}\right)^{a}=1\Leftrightarrow a=0\Leftrightarrow 2x-x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2\end{array}\right.$

$*t=\dfrac{9}{25}\Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{3}\right)^{a}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2}\Leftrightarrow a=-2\Leftrightarrow 2x-x^2=-2\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}.$

Chọn A

Câu 6 Nghiệm của phương trình $49^{x}+7^{x+1}-98=0$ trên tập số thực là

A. $x=-1$ B. $x=2$ C. $x=0$ D. $x=1$

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $7^{2x}+7.7^{x}-98=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7^{x}=7\\ 7^{x}=-14\end{array}\right.$ (vô nghiệm)

$\Leftrightarrow\quad x=1$. Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$

Đáp án đúng là D

Câu 7 Nghiệm của phương trình $3^{\sqrt{x}+1}+3^{2-\sqrt{x}}=28$ trên tập số thực là

A. $x=4$ B. $x=5$ C. $x=3$ D. $x=0$

Lời giải.

Điều kiện: $x\ge 0$, phương trình $\Leftrightarrow 3.3^{2\sqrt{x}}-28.3^{\sqrt{x}}+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{\sqrt{x}}=9\\ 3^{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 2\,(nhận) \\ \sqrt{x} = -1\,(nhận) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 4.$$

Đáp án đúng là A

Câu 8 Nghiệm của phương trình $5^{x+1} + 6.5^{x} - 3.5^{x-1} = 52$ trên tập số thực là

A. $x = -1$ **B.** $x = 2$ **C.** $x = 0$ **D.** $x = 1$

Lời giải.

$$5^{x+1} + 6.5^{x} - 3.5^{x-1} = 52 \Leftrightarrow 5.5^{x} + 6.5^{x} - \frac{3}{5}.5^{x} = 52$$

$$\Leftrightarrow \frac{52}{5}.5^{x} = 52 \Leftrightarrow 5^{x} = 5 \Leftrightarrow x = 1$$

Đáp án đúng là D

Câu 9 Nghiệm của phương trình $3^{\frac{x}{5}} + 3^{\frac{x-10}{10}} = 84$ trên tập số thực là

A. $x = -1$ **B.** $x = 2$ **C.** $x = 0$ **D.** $x = 1$

Lời giải.

$$(1) \Leftrightarrow 3.\left(3^{\frac{x}{10}}\right)^{2} + 3^{\frac{x}{10}} - 252 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{\frac{x}{10}} = 9 \\ 3^{\frac{x}{10}} = -\dfrac{28}{3}\ loại \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{x}{10}} = 3^{2} \Leftrightarrow \frac{x}{10} = 2 \Leftrightarrow x = 20$$

Đáp án đúng là C

Câu 10 Nghiệm của bất phương trình $3.9^{x} + 2.3^{x} - 2 > 0$ trên tập số thực là

A. $x > -1$ **B.** $x > -2$ **C.** $x > -3$ **D.** $x > -4$

Lời giải.

Đặt $t = 3^{x}\quad (t > 0)$; ta có: $3t^{2} + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \\ t > \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện, suy ra: $t > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{x} > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x > -1$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -1$.

Đáp án đúng là A

Câu 11 Nghiệm của phương trình $3^{x} + 4^{x} = 2.5^{x}$ là:

A. $x = 1$ **B.** $x = 0$ **C.** $x = -1$ **D.** $x = 2$

Lời giải.

Phương trình tương đương $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=2$.

Đặt $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ với $x\in R$, ta có $f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x.ln\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)^x.ln\left(\frac{4}{5}\right)<0$ với $x\in R$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên R.

Mặt khác dễ thấy phương trình có nghiệm $x=0$ nên phương trình có duy nhất nghiệm này.

Chọn B.

5. Giải phương trình và bất phương trình lôgarit:

Câu 1 Nghiệm của phương trình $log_3^2(9x)-log_3 x-2=0$ là:

A. $x=\frac{1}{3}$ và $x=\frac{-1}{9}$ **B.** $x=\frac{-1}{3}$ và $x=\frac{1}{9}$ **C.** $x=\frac{1}{3}$ và $x=\frac{2}{9}$ **D.** $x=\frac{1}{3}$ và $x=\frac{1}{9}$

Lời giải.

Điều kiện: $x>0$

$log_3^2(9x)-log_3 x-2=0. \Leftrightarrow log_3^2 x+3log_3 x+2=0$

Đặt $t=log_3 x$, bất phương trình trở thành $t^2+3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=-1\end{array}\right.$

$log_3 x=-2\Leftrightarrow x=\frac{1}{9}$; $log_3 x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

So với điều kiện, tập nghiệm củabất phương trình là $S=\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{9}\right\}$

Đáp án đúng là D.

Câu 2 Nghiệm của phương trình $log_5^2 x+log_5 x-2=0$ là:

A. $x=5$ và $x=\frac{1}{25}$ **B.** $x=5$ và $x=\frac{1}{25}$ **C.** $x=5$ và $x=\frac{1}{25}$ **D.** $x=5$ và $x=\frac{1}{25}$

Lời giải.

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=log_5 x$

Phương trình (1) trở thành: $t^2+t-2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-2\end{array}\right.$

$t=1\Rightarrow log_5 x=1\Leftrightarrow x=5; t=-2\Rightarrow log_5 x=-2\Leftrightarrow x=\frac{1}{25}$

Vậy: $S=\left\{5;\frac{1}{25}\right\}$

Đáp án đúng là A.

Câu 3 Nghiệm của phương trình $log_2^2 x - 4log_4 x^3 + 5 = 0$ là:

A. $x = 2; x = 32$ **B.** $x = 2; x = -32$ **C.** $x = -2; x = 32$ **D.** $x = 2; x = 30$

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$

$log_2^2 x - 4log_4 x^3 + 5 = 0 \Leftrightarrow log_2^2 x - 6log_2 x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} log_2 x = 1 \\ log_2 x = 5 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 32 \end{array}\right.$

Đáp án đúng là A.

Câu 4 Nghiệm của phương trình $log_3(x-8) + 2log_9 2.log_2 x = 2$ là:

A. $x = 7$ **B.** $x = 8$ **C.** $x = 9$ **D.** $x = 10$

Lời giải.

Điều kiện: $x > 8$

Phương trình trở thành: $log_3(x-8) + log_3 x = 2 \Leftrightarrow log_3(x-8)x = 2$

$(x-8)x = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 9 \end{array}\right.$

Thử lại, ta nhận $x = 9$ làm nghiệm của phương trình

Đáp án đúng là C.

Câu 5 Nghiệm của bất phương trình $log_{2016}(3x-2) - log_{2016}(6-5x) \geq 0$ là:

A. $x \in \left[1; \frac{2}{5}\right)$ **B.** $x \in \left[1; \frac{6}{5}\right)$ **C.** $x \in \left[-1; \frac{6}{5}\right)$ **D.** $x \in \left[1; \frac{3}{5}\right)$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ 6 - 5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x < \frac{6}{5} \end{cases}$

$Bpt \Leftrightarrow log_{2016}(3x-2) \geq log_{2016}(6-5x) \Leftrightarrow 3x - 2 \geq 6 - 5x$

$\Leftrightarrow x \geq 1$. So điều kiện ta được tập nghiệm : $S = \left[1; \frac{6}{5}\right)$

Đáp án đúng là B.

Câu 6 Nghiệm của bất phương trình $log_{\frac{1}{4}}\left(3^x - 1\right) \leq 3^{1-log_9 4}$ là:

A. $x \geq log_3 \frac{9}{8}$ **B.** $x \geq log_3 \frac{7}{8}$ **C.** $x \geq log_3 \frac{5}{8}$ **D.** $x \geq log_3 \frac{3}{8}$

Lời giải.

Ta có: $log_{\frac{1}{4}}\left(3^x-1\right)\le 3^{1-log_9 4}\Leftrightarrow log_{\frac{1}{4}}(3^x-1)\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow log_{\frac{1}{4}}(3^x-1)\le log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow 3^x-1\ge\frac{1}{8}\Leftrightarrow 3^x\ge\frac{9}{8}\Leftrightarrow x\ge log_3\frac{9}{8}$

Đáp án đúng là A.

Câu 7 Nghiệm của bất phương trình $2log_9 x+1=\frac{2}{log_3 x}$ là:

A. $x=3,x=\frac{1}{9}$ **B.** $x=3,x=1$ **C.** $x=-3,x=\frac{1}{9}$ **D.** $x=3,x=\frac{-1}{9}$

Lời giải.

Điều kiện: $x>0,x\ne 1$ (*)

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow log_3^2 x+log_3 x-2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}log_3 x=1\\ log_3 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\frac{1}{9}\end{array}\right.$ [thỏa mãn (*)]

Vậy phương trình có nghiệm là $x=3,x=\frac{1}{9}$.

Đáp án đúng là A.

Câu 8 Nghiệm của bất phương trình $2log_3\left(4x-3\right)+log_{\frac{1}{3}}\left(2x+3\right)\le 2$ là:

A. $\frac{-3}{4}<x\le 3$ **B.** $\frac{-1}{4}<x\le 3$ **C.** $\frac{1}{4}<x\le 3$ **D.** $\frac{3}{4}<x\le 3$

Lời giải.

Điều kiện: $x>\frac{3}{4}$.

Khi đó: $2log_3\left(4x-3\right)+log_{\frac{1}{3}}\left(2x+3\right)\le 2\Leftrightarrow log_3\left(4x-3\right)^2\le log_3\left[\left(2x+3\right).9\right]$

$\Leftrightarrow\left(4x-3\right)^2\le\left(2x+3\right).9\Leftrightarrow 16x^2-42x-18\le 0\Leftrightarrow -\frac{3}{8}\le x\le 3$

Kết hợp điều kiện, nghiệm của BPhương trình là: $\frac{3}{4}<x\le 3$

Đáp án đúng là D.

Câu 9 Nghiệm của bất phương trình $9^{2x^2-x}<3.\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2+x}$ là:

A. $x\in(-\frac{1}{3};\frac{1}{2})$ **B.** $x\in(\frac{1}{3};\frac{1}{2})$ **C.** $x\in(-\frac{1}{3};0)$ **D.** $x\in(0;\frac{1}{2})$

Lời giải.

Ta có, $9^{2x^2-x}<3.\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2+x}\Leftrightarrow 3^{4x^2-2x}<3^{1-2x^2-x}\Leftrightarrow 6x^2-x-1<0$

Tập nghiệm của bất phương trình là khoảng: $S=(-\frac{1}{3};\frac{1}{2})$

Đáp án đúng là A.

Câu 10 Nghiệm của bất phương trình $log_{2x}64+log_{x^2}16\ge 3$ là:

A. $\frac{1}{\sqrt[6]{4}}\le x\le 4$ **B.** $\frac{1}{\sqrt[6]{4}}\le x\le 3$ **C.** $\frac{1}{\sqrt[6]{4}}\le x\le 2$ **D.** $\frac{1}{\sqrt[6]{4}}\le x\le 1$

Lời giải.

$$log_{2x}64+log_{x^2}16\ge 3\Leftrightarrow 3\frac{1}{\frac{1}{2}+log_4 x}+2\frac{1}{log_4 x^2}\ge 3$$

$$\Leftrightarrow 3log_4 x+\frac{1}{2}+log_4 x\ge 3log_4 x\left(\frac{1}{2}+log_4 x\right)\Leftrightarrow 3\left(log_4 x\right)^2-\frac{5}{2}log_4 x-\frac{1}{2}\le 0$$

$$-\frac{1}{6}\le log_4 x\le 1\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[6]{4}}\le x\le 4$$

Đáp án đúng là A.

Câu 11 Nghiệm của phương trình $log^2_{\sqrt{2}}x+8log_2 x=12$ là:

A. $x=2$ và $x=\frac{-1}{8}$ **B.** $x=2$ và $x=\frac{1}{8}$ **C.** $x=-2$ và $x=\frac{-1}{8}$ **D.** $x=-2$ và $x=\frac{1}{8}$

Lời giải.

Điều kiện: x>0, $log^2_{\sqrt{2}}x+8log_2 x=12\Leftrightarrow 4log_2^2 x+8log_2 x=12$

$\left[\begin{array}{l}log_2 x=1\\ log_2 x=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\frac{1}{8}\end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm là $x=2$ và $x=\frac{1}{8}$.

Đáp án đúng là B.

Câu 12 Nghiệm của phương trình $2log_8(2x)+log_8\left(x^2-2x+1\right)=\frac{4}{3}$ là:

A. $x=1$ **B.** $x=2$ **C.** $x=-2$ **D.** $x=-3$

Lời giải.

Điều kiện: $x>0,x\ne 1$.

Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với:

$$log_8(2x)^2(x-1)^2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\left[2x(x-1)\right]^2=16$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x(x-1)=4\\ 2x(x-1)=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2$$

Đáp án B.

Câu 13 Nghiệm của phương trình $log_3(x+5)+log_9(x-2)^2-log_{\sqrt{3}}(x-1)=log_{\sqrt{3}}\sqrt{2}$ là:

A. $x=3,4,\dfrac{1+\sqrt{97}}{6}$ **B.** $x=3,5,\dfrac{1+\sqrt{97}}{6}$ **C.** $x=3,4,\dfrac{1-\sqrt{97}}{6}$ **D.** $x=3,4,\dfrac{1+\sqrt{97}}{7}$

Lời giải.

Trường hợp 1. Nếu $x>2$ thì phương trình $(^*)$ tương đương với

$(x+5)(x-2)=2(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$ *(thỏa mãn)*

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x=3, x=4$ và $x=\dfrac{1+\sqrt{97}}{6}$

Trường hợp 2. Nếu $1<x<2$ thì phương trình $(^*)$ tương đương với

$-(x+5)(x-2)=2(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2-x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{97}}{6} \text{ (thỏa mãn)} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{97}}{6} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Chọn A.

6. Các bài toán ứng dụng lãi đơn, lãi kép:

Câu 1 Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12% trên năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách sau: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng ba tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A phải trả cho ngân hàng theo cách đó là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m=\dfrac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng) **B.** $m=\dfrac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$ (triệu đồng)

C. $m=\dfrac{100.1,03}{3}$ (triệu đồng) **D.** $m=\dfrac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3-1}$ (triệu đồng)

Trích Đề minh họa THPhương trình Quốc gia 2017

Đáp án B.

Lời giải.

Lãi suất 12%/ 1 năm tương ứng 1%/tháng nên r=0,01. (do vay ngắn hạn).

Số tiền gốc sau 1 tháng là: $T+T.r-m=T(1+r)-m$

Số tiền gốc sau 2 tháng là: $\left[T(1+r)-m\right]+\left[T(1+r)-m\right]x-m=T(1+r)^2-m\left[(1+r)+1\right]$

Số tiền gốc sau 3 tháng là: $T(1+r)^3-m\left[(1+r)^2+1+r+1\right]=0$

Do đó: $m=\dfrac{T(1+r)^3}{(1+r)^2+1+r+1}=\dfrac{T(1+r)^3.r}{(1+r)^3-1}=\dfrac{1,01^3}{1,01^3-1}$ (triệu đồng).

Câu 2 Ông A mong muốn sở hữu khoản tiền 20.000.000đ vào ngày 2/3/2012 ở một tài khoản lãi suất năm là 6,05%. Hỏi ông A cần đầu tư bao nhiêu tiền trên tài khoản này vào ngày 2/3/2007 để đạt được mục tiêu đề ra?

Lời giải.

Gọi V_0 là lượng vốn cần đầu tư ban đầu, lượng vốn sẽ được đầu tư trong 5 năm nên ta có:

$20.000.000 = V_0 * (1+0,0605)^5$

$\Rightarrow V_0 = 20.000.000 * (1+0,0605)^{-5} = 14.909.965,25$ đ.

Câu 3 Ông Tuấn gửi 9,8 triệu đồng tiết kiệm với lãi suất 8.4%/năm và lãi suất hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi theo cách đó thì sau bao nhiêu năm người đó thu được tổng số tiền 20 triệu đồng (biết rằng lãi suất không thay đổi).

A. 9 năm **B.** 8 năm. **C.** 7 năm. **D.** 10 năm.

Lời giải.

Gọi P là số tiền gửi ban đầu. Sau n năm $(n \in \mathbb{N})$, số tiền thu được là:

$P_n = P(1+0,084)^n = P(1,084)^n$.

Áp dụng với số tiền bài toán cho ta được:

$20 = 9,8.(1,084)^n \Leftrightarrow (1,084)^n = \dfrac{20}{9,8} \Leftrightarrow n = log_{1.084}\left(\dfrac{20}{9,8}\right) \approx 8,844$.

Vì n là số tự nhiên nên ta chọn $n = 9$.

Chọn A.

Câu 4 Ông Tuấn gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4%/năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu:

A. 8 **B.** 9 **C.** 6 **D.** 10

Bài giải:

Gọi a là số tiền ban đầu mà người đó gửi vào ngân hàng và n $(n \in \mathbb{N})$ là số năm mà số tiền nhận được tăng gấp đôi.

Theo công thức lãi kép, ta có phương trình:

$a\left(1+\dfrac{8,4}{100}\right)^n = 2a \Leftrightarrow \left(\dfrac{271}{250}\right)^n = 2 \Leftrightarrow n = log_{271/250} 2$

Vì lãi suất được tính theo năm nên phải đến cuối năm người đó mới nhận được tiền. Do đó, n = 9.

Chọn B.

Câu 5 Anh A mua nhà trị giá (ba trăm triệu đồng theo phương thức trả góp).

a) Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất anh A trả 5500000đvà chịu lãi suất số tiền chưa trả là 0,5%/tháng thì sau bao nhiêu tháng anh A trả hết số tiền trên.

b) Nếu anh A muốn trả hết trong vòng 5 năm và phải trả lãi với mức / năm thì mỗi tháng anh A phải trả bao nhiêu tiền? (làm tròn đến nghìn đồng).

Bài giải:

a) Gọi số tiền anh A nợ ban đầu là M, lãi suất hàng tháng là r%, số tiền hằng tháng anh ta phải trả là A.

Với đề bài này có thể coi là "người nợ tiền nợ vào đầu tháng".

Người này trả hết nợ, nghĩa là: $M(1+r)^n - \frac{a}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0$

Thay số rồi bấm Shift Solve sẽ tính được $n = 64$ với:

$M = 300000000,\ r = 0{,}5\%,\ a = 5500000$

b) Thay vào công thức: $M(1+r)^n - \frac{a}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0$

Với $M = 300000000$, $r = 6$ (%/năm), $n = 5$. Tìm a (tiền trả hàng năm):

Vậy tiền trả hàn tháng sẽ áp dụng công thức:

$$M(1+r)^n - \frac{12a}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0$$

Kết luận: Số tiền phải trả hàn tháng là 5935000 (đồng)

Câu 6 Một người được lĩnh lương khởi điểm là 700000 đ/ tháng. Cứ ba năm anh ta lại được tăng lương thêm 7%. Hỏi sau 36 năm làm việc anh ta được lĩnh tất cả bao nhiêu tiền.

Bài giải:

Từ đầu năm thứ 1 đến hết năm thứ 3, anh ta nhận được: $u_1 = 700.000 \times 36$ đ

Từ đầu năm thứ 4 đến hết năm thứ 6, anh ta nhận được: $u_2 = 700.000(1+7\%) \times 36$

Từ đầu năm thứ 7 đến hết năm thứ 9, anh ta nhận được: $u_3 = 700.000(1+7\%)^2 \times 36$

....

Từ đầu năm thứ 34 đến hết năm thứ 36, anh ta nhận được: $u_{12} = 700.000(1+7\%)^{11} \times 36$

Vậy sau 36 năm anh ta nhận được tổng số tiền là: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{12}$

$$= 700000 \times 36 \times \frac{1-(1+7\%)^{12}}{1-(1+7\%)} = 450788972$$

Câu 7 Theo dự báo với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của nước A sẽ hết sau 100 năm nữa. Nhưng do nhu cầu thực tế, mức tiêu thụ tăng lên 4% mỗi năm. Hỏi sau bao nhiêu năm số dầu dự trữ của nước A sẽ hết.

Bài giải:

Mức tiêu thụ dầu hàng năm của nước A theo dự báo là M thì lượng dầu của nước A là 100M.

Mức tiêu thụ dầu theo thực tế là:

Gọi x_0 là lượng dầu tiêu thụ năm thứ n

Năm thứ 2 là $x_2 = M + 4\%M = M(1+4\%) = 1,04M$

Năm thứ n là $x_n = 1,04^{n-1}M$

Tổng tiêu thụ trong n năm là: $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = M + 1,04M + 1,04^2M + ... + 1,04^{n-1}M$

$\Rightarrow (1 + 1,04 + 1,04^2 + ... + 1,04^{n-1})M = 100M$

$\Leftrightarrow 1 + 1,04 + 1,04^2 + ... + 1,04^{n-1} = 100$

$\Leftrightarrow \dfrac{1,04^n - 1}{0,04} = 100$. Giải phương trình bằng lệnh SOLVE được n = 41.

Câu 8 Biết thể tích khí CO_2 năm 1998 là $V(m^3)$. 10 năm tiếp theo, mỗi năm thể tích CO_2 tăng $m\%$, 10 năm tiếp theo nữa, thể tích CO_2 mỗi năm tăng n%. Tính thể tích CO_2 năm 2016?

A. $V\dfrac{(100+m)^{10}(100+n)^{10}}{10^{40}}$.

B. $V\dfrac{(100+m)^{10}(100+n)^{8}}{10^{36}}$.

C. $V\dfrac{(100+m)^{10}(100+n)^{8}}{10^{20}}$.

D. $V\dfrac{(100+m)^{10}(100+n)^{8}}{10^{20}}$.

Đáp án B.

Thể tích khí CO_2 năm 2008 là: $V_{2008} = V\left(1+\dfrac{m}{100}\right)^{10}$.

Thể tích khí CO_2 năm 2016 là:

$$V_{2016} = V_{2008}\left(1+\frac{n}{100}\right)^{8} = V\left(1+\frac{m}{100}\right)^{10}\left(1+\frac{n}{100}\right)^{8} = V\frac{(100+m)^{10}(100+n)^{8}}{10^{36}}.$$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài tập 1.

Giải bất phương trình: $\log_2(x-1) \le \log_{\frac{1}{2}}(x+3) + 5$

A. $1 \le x \le 5$ **B.** $1 \le x \le 3$ **C.** $1 \le x \le 7$ **D.** $1 \le x \le 9$

Lời giải

Điều kiện: $x > 1$.

BPhương trình $\Leftrightarrow \log_2(x-1) + \log_2(x+3) \le 5 \Leftrightarrow \log_2(x^2+2x-3) \le 5$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 35 \le 0 \Leftrightarrow -7 \le x \le 5$

Kết hợp điều kiện ta được: $1 < x \le 5$ là nghiệm của bất phương trình.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $1 < x \le 5$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 2.

Giải phương trình: $\log_3(x^2-x)+\log_{\frac{1}{3}}(x+4)=1$.

A. $\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=6\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=6\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=7\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}x=-6\\x=6\end{array}\right.$

Lời giải

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}x>1\\-4<x<0\end{array}\right.$

$\log_3(x^2-x)-\log_3(x+4)=1 \Leftrightarrow \log_3(x^2-x)=\log_3(x+4)+\log_3 3$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2-x)=\log_3\left[3(x+4)\right] \Leftrightarrow x^2-x=3(x+4)$

$\Leftrightarrow x^2-4x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=6\end{array}\right.$ (thoả mãn)

Vậy phương trình có hai nghiệm $\boxed{x=-2;x=6}$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 3.

Giải bất phương trình: $2^{2x+1}<\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x^2-1}{3}}$

A. $S=(-2;0)$ B. $S=(-2;1)$ C. $S=(-1;0)$ D. $S=(-2;3)$

Lời giải

Bất phương trình tương đương với

$2^{2x+1}<\left(2^{-3}\right)^{\frac{x^2-1}{3}} \Leftrightarrow 2^{2x+1}<2^{-x^2+1} \Leftrightarrow 2x+1<-x^2+1$

$\Leftrightarrow x^2+2x<0 \Leftrightarrow -2<x<0$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $\boxed{S=(-2;0)}$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 4.

Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(5-2x^2)-1\le 0$

A. $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{5}{2}$ C. $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{7}{2}$

Lời giải

$(1) \Leftrightarrow 5-2x^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 5.

Giải phương trình: $\log_2(x-1) = 2 + \log_2(x+2)$

A. $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=7 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=8 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=7 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=9 \end{array}\right.$

Lời giải

Điều kiện: $-2 < x \neq 1$

Phương trình trở thành: $\log_2(x-1)^2 = \log_2(4x+8)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4x+8 \Leftrightarrow x^2-6x-7=0 \Leftrightarrow x=-1; x=7$ (thỏa điều kiện)

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-1; x=7$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 6.

Giải các phương trình sau: $3.25^x + 5.9^x = 8.15^x$

A. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=1 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Lời giải

Ta có: $3.25^x + 5.9^x = 8.15^x \Leftrightarrow 3\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 8\left(\frac{5}{3}\right)^x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{3}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Chọn đáp án A.

Bài tập 7.

Giải bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2(2-x^2)\right] > 0 \quad (x \in R)$.

A. $x = (-1;0)$ **B.** $x = (-1;0) \cup (0;1)$

C. $x = (0;1)$ **D.** $x = (-1;1)$

Lời giải:

$\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2(2-x^2)\right] > 0 \quad (x \in R)$ (2).

Điều kiện: $\log_2(2-x^2) > 0 \Leftrightarrow 2-x^2 > 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow \log_2(2-x^2)<1 \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<1\\ 2-x^2<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<1\\ x^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<1\\ x\neq 0\end{cases}$

Vậy tập nghiệm BPHƯƠNG TRÌNH là $S=(-1;0)\cup(0;1)$

Chọn đáp án B.

Bài tập 8.

Giải phương trình $1+\log_{\sqrt{3}}(x-1)=\log_3\left(2x^2+x-3\right)$.

A. $x=6$ **B.** $x=-6$ **C.** $x=0$ **D.** $x=1$

Lời giải:

+) Điều kiện: $\begin{cases}x-1>0\\ 2x^2+x-3>0\end{cases} \Leftrightarrow x>1$

+) Ta có $1+\log_{\sqrt{3}}(x-1)=\log_3(2x^2+x-3) \Leftrightarrow \log_3\left[3(x-1)^2\right]=\log_3(2x^2+x-3)$

$\Leftrightarrow 3(x-1)^2=2x^2+x-3 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=6\end{array}\right.$

+) Đối chiếu điều kiện, phương trình có nghiệm $x=6$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 9.

Giải phương trình: $1+\log_2(x-1)=\log_{x-1}4$

A. $x=2^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}} \cup x=2^{\frac{1-\sqrt{21}}{2}}$

B. $x=-2^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}} \cup x=2^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}$

C. $x=-2^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}} \cup x=2^{\frac{1-\sqrt{21}}{2}}$

D. $x=-2^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}} \cup x=-2^{\frac{1-\sqrt{21}}{2}}$

Lời giải:

Điều kiện: $x>0; x\neq \frac{1}{4}$. Phương trình $\Leftrightarrow \log_2 x+\frac{1}{\log_2 4x}=3 \Leftrightarrow \log_2 x+\frac{1}{2+\log_2 x}=3$

Đặt $t=\log_2 x$. pt $\Leftrightarrow t+\frac{1}{2+t}=3 \Leftrightarrow t^2-t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{1+\sqrt{21}}{2}\\ t=\frac{1-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}\\ x=2^{\frac{1-\sqrt{21}}{2}}\end{array}\right.$

Chọn đáp án A.

Bài tập 10.

Giải bất phương trình: $\log^2_{\sqrt{2}} x+3\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}} x=2$.

A. $x=\sqrt{2}$

B. $x=\sqrt{2}$ và $x=\frac{1}{2}$

C. $x=-\sqrt{2}$

D. $x=-\sqrt{2}$ và $x=-\frac{1}{2}$

Lời giải:

Điều kiện: $x>0$ (*). $\log^2_{\sqrt{2}} x + 3\log_2 x + \log_{1/2} x = 2 \Leftrightarrow 2\log_2^2 x + \log_2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$ đều thỏa mãn (*). Vậy $S = \left\{\dfrac{1}{2}; \sqrt{2}\right\}$

Chọn đáp án B.

Bài tập 11.

Giải phương trình $\log_3(x+2) + \log_3(x+4) - \log_{\sqrt{3}}(8-x) = 1$.

A. $x = 0$ **B.** $x = 1$ **C.** $x = 4$ **D.** $x = 6$

Lời giải:

Điều kiện xác định $-2 < x < 8$

$\log_3(x+2) + \log_3(x+4) - \log_{\sqrt{3}}(8-x) = 1$

$\Leftrightarrow \log_3[(x+2)(x+4)] - \log_3(8-x)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+2)(x+4)}{(8-x)^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 3x^2 - 48x + 192$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 54x + 184 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 23 \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = 4$.

Chọn đáp án C.

Bài tập 12.

Giải phương trình: $2^{2x+1} - 3.2^x - 2 = 0$

A. $x = 2$ **B.** $x = -1$ **C.** $x = -2$ **D.** $x = 1$

Lời giải:

$2^{2x+1} - 3.2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2.2^{2x} - 3.2^x - 2 = 0$ (*)

Đặt: $t = 2^x$ (Điều kiện: $t>0$), phương trình (*) trở thành

$2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \text{ (nhận)} \\ t = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Với: $t = 2$: $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Chọn đáp án D.

Bài tập 12.

Giải phương trình sau trên tập số thực: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x} + 2^x = 6$

A. x = 0 **B.** x = -1 **C.** x = 1 **D.** x = 2

Lời giải:

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-x} + 2^x = 6 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = -3 \\ 2^x = 2 \end{array}\right.$ (vô nghiệm) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = -3 (vn) \\ 2^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

Chọn đáp án C.

Bài tập 14.

Giải bất phương trình sau trên tập số thực: $2\log_3(x-1) + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) \le 2$

A. x = (1;2] **B.** x = (1;2) **C.** x = [1;2] **D.** x = [1;2)

Lời giải:

Điều kiện: x > 1, phương trình $\Leftrightarrow 2\log_3(x-1) + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) \le 2 \Leftrightarrow \log_3[(x-1)(2x-1)] \le 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 2$

Vậy tập nghiệm S = (1;2]

Chọn đáp án A.

Bài tập 15.

Giải phương trình sau trên tập số thực: $\log_3(x+4) - \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) = \log_3(1-2x)$

A. x = 1 **B.** x = -1 **C.** x = 2 **D.** x = -2

Lời giải:

Điều kiện: $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$

Khi đó phương trình: $\log_3(x+4) - \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) = \log_3(1-2x)$

$\Leftrightarrow \log_3\left[(x+4)(2x+3)\right] = \log_3(1-2x) \Leftrightarrow (x+4)(2x+3) = 1-2x$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 13x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{11}{2}$

Đối chiếu điều kiện của bài toán, ta có nghiệm của phương trình là: $x = -1$

Chọn đáp án B.

Bài tập 16.

Giải phương trình: $9^x - 6.3^{x-1} - 3 = 0$.

A. x = 0 **B.** x = 1 **C.** x = -1 **D.** x = 2

Lời giải:

Phương trình viết lại: $9^x - 2.3^x - 3 = 0$.

Điều kiện: $x \in R$. Đặt $t = 3^x; t > 0$. Phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = -1 & (l) \\ t = 3 & (n) \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho tương đương: $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Chọn đáp án B.

Bài tập 17.

Giải phương trình: $2\log_3(x-1) + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$

A. x = 2 **B.** x = -2 **C.** x = 3 **D.** x = -3

Lời giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_3(x-1) + \log_3(2x-1) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Chọn đáp án A.

Bài tập 18.

Giải phương trình: $2.9^x + 6^x = 6.4^x$

A. x = 1 **B.** x = 0 **C.** x = -1 **D.** x = $\sqrt{13}$

Lời giải:

$$2.9^x + 6^x = 6.4^x \Leftrightarrow 2.\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$$

Chọn đáp án A.

Bài tập 19.

Giải các phương bất phương trình sau: $\log_{\sqrt{5}} x - \log_5(x+2) < \log_{\frac{1}{5}} 3$

A. x < -1 **B.** -1 < x < 0 **C.** 0 < x < 1 **D.** 1> x

Lời giải:

Điều kiện: $x > 0$.

Bất phương trình trở thành:

$\log_5 x^2 - \log_5(x+2) < -\log_5 3 \Leftrightarrow \log_5 x^2 + \log_5 3 < \log_5(x+2)$

$\Leftrightarrow \log_5 3x^2 < \log_5(x+2) \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} < x < 1$

Kết hợp điều kiện, bất phương trình có nghiệm: $0 < x < 1$

Chọn đáp án C.

Bài tập 20.

Giải phương trình: $2\log_9 x + 1 = \dfrac{2}{\log_3 x}$.

A. $x = \dfrac{1}{3}$ **B.** $x = \dfrac{1}{9}$ **C.** x = 3 **D.** $x = \dfrac{1}{9}; 3$

Lời giải:

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Đặt $t = \log_3 x,\ (t \neq 0) \Rightarrow \log_9 x = \dfrac{1}{2}t$. Ta được phương trình ẩn t:

$2.\dfrac{1}{2}t + 1 = \dfrac{2}{t} \Leftrightarrow t + 1 = \dfrac{2}{t} \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$

Với $t = 1 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

Với $t = -2 \Rightarrow \log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$.

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\dfrac{1}{9}; 3\right\}$.

Chọn đáp án D.

Bài tập 21.

Giải phương trình sau: $3.25^x - 2.5^{x+1} + 7 = 0$

A. x = 0 **B.** $x = \log_5 \dfrac{7}{3}$ **C.** $x = \log_5 \dfrac{3}{7}$ **D.** $x = 0$ và $x = \log_5 \dfrac{7}{3}$

Lời giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 3.25^x - 10^{x+1} + 7 = 0$

Đặt: $t = 5^x (t > 0)$

Phương trình có dạng: $3t^2 - 10t + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{7}{3} \end{array}\right.$

Với: $t = 1 \Rightarrow 5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Với: $t = \dfrac{7}{3} \Rightarrow 5^x = \dfrac{7}{3} \Leftrightarrow x = \log_5\left(\dfrac{7}{3}\right)$

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S = \left\{0; \log_5\left(\dfrac{7}{3}\right)\right\}$

Chọn đáp án D.

Bài tập 22.

Giải phương trình: $5^{2x+1} - 6.5^x + 1 = 0$.

A. x = 0 và x = -1 **B.** $x = -\dfrac{1}{2}$ **C.** x = 0 **D.** x = 1

Lời giải:

$5^{2x+1} - 6.5^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 5.5^{2x} - 6.5^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 1 \\ 5^x = \dfrac{1}{5} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$ và $x = -1$

Chọn đáp án A.

Bài tập 23.

Giải bất phương trình: $9^{x+1} - 6^{x+1} = 3.4^x$

A. x=0 **B.** x=1 **C.** x=2 **D.** x=3

Lời giải:

Phương trình tương đương với: $9\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x} - 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\dfrac{3}{2})^x = 1 \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0$

Chọn đáp án A.

Bài tập 24.

Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)-\log_{\frac{1}{3}}(6-5x)<0$

A. $x<1$ **B.** $1<x<\frac{6}{5}$ **C.** $x>\frac{6}{5}$ **D.** $x<\frac{2}{3}$

Lời giải:

Điều kiện: $\frac{2}{3}<x<\frac{6}{5}$

Với $\frac{2}{3}<x<\frac{6}{5}, \log_{\frac{1}{3}}(3x-2)-\log_{\frac{1}{3}}(6-5x)<0$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(3x-2)<\log_{\frac{1}{3}}(6-5x) \Leftrightarrow 3x-2>6-5x \Leftrightarrow 8x>8 \Leftrightarrow x>1$

Vậy bất phương trình có nghiệm là: $1<x<\frac{6}{5}$

Chọn đáp án B.

Bài tập 25.

Giải phương trình: $\log_3(x^2-x)+\log_{\frac{1}{3}}(x+4)=1$

A. $x=0$ và $x=1$ **B.** $x=0$ và $x=-4$ **C.** $x=-2$ và $x=6$ **D.** $x=1$ và $x=-4$

Lời giải:

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ -4<x<0 \end{array}\right.$

$\log_3(x^2-x)-\log_3(x+4)=1 \Leftrightarrow \log_3(x^2-x)=\log_3(x+4)+\log_3 3$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2-x)=\log_3\left[3(x+4)\right] \Leftrightarrow x^2-x=3(x+4)$

$\Leftrightarrow x^2-4x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=6 \end{array}\right.$ (thoả mãn)

Chọn đáp án C.

Bài tập 26.

Giải phương trình: $\log_2^2 x+2\log_2 x-3=0$

A. $x=2$ và $x=\frac{1}{8}$ **B.** $x=-2$ và $x=-\frac{1}{8}$ **C.** $x=0$ và $x=-2$ **D.** $x=0$ và $x=-\frac{1}{8}$

Lời giải:

Phương trình đã cho: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{8} \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện)

Chọn đáp án A.

Bài tập 27.

Giải phương trình $2\log_3(x-1)+\log_{\sqrt{3}}(2x-1)=2$.

A. x = 1 **B.** $x=\frac{1}{2}$ **C.** x = 2 **D.** x = -1

Lời giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_3(x-1)+\log_3(2x-1)=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 2x^2-3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Chọn đáp án C.

Bài tập 28.

Giải bất phương trình: $\log_2(x-3)+\log_2(x-1)\le 3$

A. S = (3,5) **B.** S = [3,5] **C.** S = [3,5) **D.** S = (3,5]

Lời giải:

Điều kiện xác định: $x>3$.

$log_2(x-3)+log_2(x-1)\le 3 \Leftrightarrow log_2[(x-3)(x-1)]\le 3 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)\le 8$

$\Leftrightarrow x^2-4x-5\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 5$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3;5]$.

Chọn đáp án D.

Bài tập 29.

Giải phương trình $2^x-4=-\frac{3}{2^x}$.

A. x = 2 và x = 0 **B.** x = 0 và x = $\log_2 3$ **C.** x = 2 và x = $\log_3 2$ **D.** x = 0 và x = $\log_3 2$

Lời giải:

Đặt t = 2x, ta được phương trình:

$t-4=-\frac{3}{t} \Leftrightarrow t^2-4t+3=0$ (do t > 0)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$

Với t = 1 suy ra x = 0

Với t = 3 suy ra x = $\log_2 3$

Chọn đáp án B.

Bài tập 30.

Giải phương trình: $4^{x+\frac{1}{2}}+7.2^{x-1}-1=0$.

A. x = - 2 **B.** x = 2 **C.** x = 1 **D.** $x=-\frac{1}{2}$

Lời giải:

$\Leftrightarrow 2.2^{2x}+\frac{7}{2}.2^{x}-1=0$

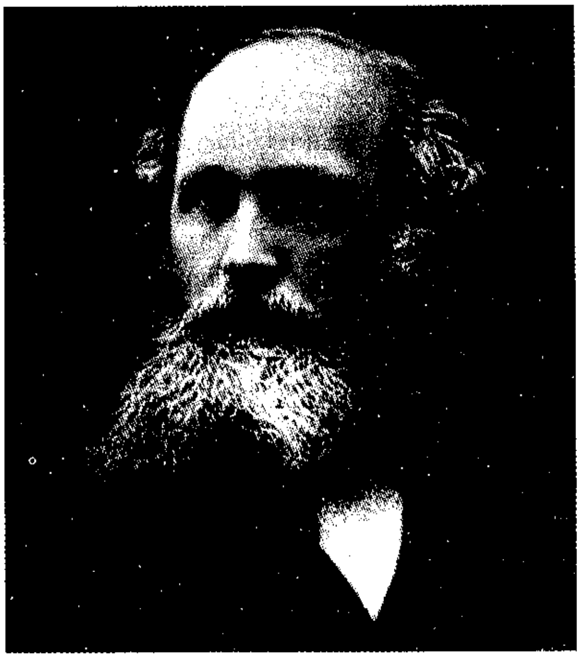
Đặt $t=2^{x}$, điều kiện t > 0.

Phương trình trở thành: $2t^2+\frac{7}{2}t-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{4} \\ t=-2 \text{ (ktm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=-2$$

Chọn đáp án A.

Maxwell James clerk (1831 - 1879)



Nhà vật lý thiên tài người Anh đã tạo ra Điện động lực học vĩ mô cổ điển, soạn thảo bằng toán học thuần tuý một học thuyết mới về điện, từ và ánh sáng, trở thành nhà cách mạng trong vật lý học, tạo nên bức tranh điện động lực học thế giới, thay thế bức tranh cơ học thống trị từ thời Newton.

James Clerk Maxwell sinh ngày 13-06-1831 tại ngôi nhà số 14 đường Ấn Độ, thành phố Edinburg thuộc Scotland. Ông nội của Maxwell là thuyền trưởng, làm việc ở một công ty lớn Ấn Độ, nắm quyền điều hành thương mại nước Anh và đảm bảo những nhu cầu của Anh ở Ấn Độ. Cha của Maxwell là luật sư John Clerk Maxwell, tốt nghiệp Đại học Tổng hợp Edinburg, tham gia các hội nghị của Hội Hoàng gia Edinburg, tham gia các cuộc cách mạng kỹ thuật công nghiệp ở Anh. Mẹ của Maxwell mất sớm lúc cậu mới 8 tuổi.

Năm 10 tuổi, được cha gửi vào học ở Viện Hàn lâm Edinburg, ham hiểu biết, có khả năng toán học rất lớn, đặc biệt say mê môn hình học.

Năm 14 tuổi, viết bài báo đầu tay Về việc vẽ các đường cong Ôvan và các đường Ôvan nhiều tiêu điểm, được báo cáo và đăng tóm tắt trong tập công trình của Hội Hoàng gia Edinburg (tháng 4 - 1846).

Năm 1847 (16 tuổi) nhập học ở Đại học Tổng hợp Edinburg, được nhà toán học và vật lý nổi tiếng Hamilton W.(1805 - 1865) chăm sóc đặc biệt về toán học và logic học.

Năm 1854, tốt nghiệp xuất sắc Đại học Tổng hợp Cambridge, ở lại trường để chuẩn bị phong danh hiệu Giáo sư. Nghiên cứu tự lập về điện học. Đọc các công trình về điện của Faraday M. (1791 - 1867).

Năm 1856, được bầu làm Uỷ viên Hội Hoàng gia Edinburg.

Năm 1857, công bố công trình cơ bản đầu tiên về điện từ Về các đường sức Faraday (dày 56 trang toán học thuần túy).

Năm 1856 - 1859 viết, đăng công trình Về tính ổn định bền vững của vòng đai Saturn (hành tinh Sao Thổ). Công trình được đánh giá là kết quả ứng dụng toán học xuất sắc nhất trong vật lý học và được trao Giải thưởng Adam (1857).

Năm 1860, là Giáo sư vật lý Đại học Tổng hợp London. Nghiên cứu động học chất khí, thiết lập định luật phân bố thống kê các phân tử khí theo vận tốc mang tên gọi Phân bố Maxwell.

Năm 1861, khám phá bằng toán học sự biến đổi điện trường làm sinh ra dòng điện vô hình trong môi trường xung quanh, cả trong chân không nơi không có một điện tích nào chuyển động. Maxwell đặt tên nó là dòng điện dịch (displacement current) và đo được bằng đạo hàm theo thời gian của véctơ cảm ứng điện trường. Sự kiện phát minh dòng điện dịch là thành tựu lý thuyết quan trọng bậc nhất chuẩn bị cho sự ra đời học thuyết mới về điện từ và ánh sáng của Maxwell sau này.

Năm 1864, đưa ra khái niệm trường điện từ và công bố công trình Lý thuyết động lực học của trường điện từ, biểu diễn lý thuyết qua các phương trình vi phân đạo hàm riêng trong không - thời gian bốn chiều (ba chiều không gian một chiều thời gian). Từ đó đưa ra tiên đoán khoa học tài tình: phi tồn lại sóng điện từ tự do lan truyền trong không gian với vận tốc ánh sáng, đồng thời nêu ra thuyết điện từ của ánh sáng. Với công trình này, Maxwell trở thành nhà tiên tri ở tuổi 33.

Năm 1871, được phong chức Giáo sư bộ môn vật lý thực nghiệm và được bổ nhiệm là người tạo dựng, lãnh đạo đầu tiên phòng thí nghiệm mang tên cavendish H (1731 - 1810) ở Cambridge. Công bố công trình Lý thuyết nhiệt (in lần thứ tư năm 1875).

Năm 1873, công bố Luận văn về điện và từ và công trình Vật chất và chuyển động.

Công trình Luận văn về điện và từ là học thuyết mới về các hiện tượng điện từ và ánh sáng. Ở đó Maxwell đưa ra số liệu tính đại lượng áp suất của ánh sáng và trình bày những nguyên lý lý thuyết trừu tượng, khó hiểu, chưa có thực nghiệm nào chứng minh. Song, không một học thuyết khoa học mới nào lại cuốn hút. Thế giới bác học đương thời như học thuyết điện từ và ánh sáng Maxwell.

Ở Hà Lan có Lorephương trìnhz H. (1853 - 1928) (Giải thưởng Nobel năm 1902) sớm am hiểu, sử dụng lý thuyết Maxwell để giải thích đúng đắn các hiện tượng phản xạ và khúc xạ ánh sáng trên ranh giới hai môi trường trong suốt và làm nên luận án Tiến sĩ có ý nghĩa lịch sử sâu sắc Về lý thuyết phản xạ và khúc xạ (1875).

Ở Áo có Boltzmann L.(1844 - 1906) ứng dụng gi thuyết của Maxwell về áp suất ánh sáng đã tạo ra lý thuyết của định luật bức xạ nhiệt (1684).

Ở Nga có Lêbêdev P.N (1866 - 1912) đã làm được thí nghiệm chỉ rõ ánh sáng gây ra áp suất trên các vật rắn (1899) và dành được vinh quang thế giới. Tin lạ lan truyền nhanh tới Anh làm Huân tước Kelvin cảm kích viết thư gửi Tmiriazev K.A (1843 - 1920) (Thày dạy Lêbêdev) rằng: "Ngài có biết không, suốt đời tôi đã giao tranh với Maxwell, không thể thừa nhận ánh sáng lại có áp suất như Maxwell tiên đoán… Nhưng thế rồi Lêbêdev của Ngài đã buộc tôi phải quy hàng trước những thí nghiệm khám phá tuyệt vời của anh ta".

Đặc biệt ở Đức có Henrich Hertz (1857 - 1894) được Helmholz H.(1821 - 1894) giao cho nhiệm vụ lịch sử kiểm tra xác nhận sự tồn tại sóng điện từ lan truyền mà nhà tiên tri Maxwell đã tiên đoán lý thuyết. Sau 8 năm nghiên cứu, ngày 13 - 12 -1888 Hertz trình diễn kết quả khám phá ra sóng điện từ lan truyền vào không gian nhờ Vibrator thu phát dao động tự sáng chế tại Hội nghị Viện Hàn lâm khoa học Berlin. Cả hội nghị hân hoan, rộn rã như ngày hội khi hoàn của Học thuyết Maxwell trước chiến công bất tử của Hertz.

Học thuyết điện từ và ánh sáng của Maxwell được định rõ ở thời đại ông và kết thúc hoàn hảo, đến nỗi nửa thế kỷ sau, Albert Einstein hầu như đã đưa nguyên vẹn nó vào thuyết tương đối của mình mà không phải đính chính điểm gì. Theo lời Einstein: "Thuyết tương đối hẹp đã được kết tinh từ lý thuyết các hiện tượng điện từ Maxwelt - Lorentz… Thuyết tương đối hẹp là sự phát triển đơn giản của điện động lực học Maxwell – Lorentz".

Những năm cuối đời, Maxwell gắn bó với việc tạo dựng phòng thí nghiệm Cavendish, biên soạn tuyển tập các công trình của Cavendish H về điện học, giảng dạy vật lý, thiết kế chế tạo nhiều loại máy, dụng cụ thí nghiệm, viết nhiều loại bài phổ biến khoa học cho sách kinh điển Encyclopaedia Britania (Bách khoa toàn thư tổng hợp, xuất bản ở London).

Tháng 10 - 1879, Maxwell hoàn thành tác phẩm Công trình của H. Cavendish - một đóng góp quan trọng của Maxwell trong lịch sử vật lý học và ông đã tôn tạo cho Cavendish cả một lâu đài khoa học trang nghiêm!...

James Clerk Maxwell qua đời vào ngày 5 tháng 11 năm 1879 tại Cambridge ở tuổi 48 tràn đầy sức sáng tạo.

Năm 1881, Hội Hoàng gia London phải mời nhà bác học vĩ đại người Đức Helmholtz H. sang giảng về Học thuyết Faraday - Maxwell. Trong các bài giảng nổi tiếng của mình, Helmholtz luôn luôn nhấn mạnh: "Cần phải có James Maxwell - con người với tư tưởng sâu xa và độc đáo đã nâng một lâu đài khoa học lên đúng tầm cao của tư duy hệ thống. Lâu đài ấy đã được Faraday hình dung rõ nét và vẽ ra trước mắt mọi người."

Những di sản tinh thần Maxwell để lại thật to lớn. Theo lời M.Planck (1858 - 1947) (Giải thưởng Nobel, 1918): "thành tựu của Maxwell thuộc về những chiến công tuyệt vời nhất, vĩ đại nhất của tinh thần nhân loại... Những di sản tinh thần của Maxwell để lại là của toàn thế giới". Đối với vật lý học hiện đại, Albert Einstein còn nhấn mạnh vai trò của Học thuyết Maxwell rằng: "Đã xảy ra một cuộc cách mạng to lớn mãi mãi gắn liền với tên tuổi Faraday, Maxwell và Hertz. Phần đóng góp quyết định trong cuộc cách mạng này thuộc về Maxwell".

Theo bách khoa tri thức_internet.

Chuyên đề 3. NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

NGUYÊN HÀM

Nếu có hàm số $f(x)$ việc đi tính đạo hàm của nó chỉ cần áp dụng các công thức đã biết, công việc có vẻ không khó lắm. Thế nhưng tìm hàm số nào có đạo hàm bằng $f(x)$ thì sẽ khó hơn rất nhiều, có nghĩa là ta phải tìm hàm số $g(x)$ sao cho $g'(x)=f(x)$. Hãy cùng nghiên cứu kĩ hơn vấn đề này!

Định nghĩa. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập K (khoảng, nửa khoảng, đoạn của R). Nếu ta có hàm số $F(x)$ xác định trên K sao cho $F'(x)=f(x)$ thì $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K.

Định lí 1. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

Định lí 2. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $G(x)=F(x)+C$ với C là hằng số.

Định lí 3. Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Tính chất của nguyên hàm:

- $\int f'(x)dx=f(x)+C$ với C là hằng số.
- $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với k là hằng số khắc 0.
- $\int\left[f(x)+g(x)\right]f(x)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

Bảng nguyên hàm

Chú ý: Công thức tính vi phân của $f(x)$ là $d\left[f(x)\right]=f'(x)dx$. Ví dụ $du=u'.dx$, $dt=t'.dx$ với u,t là hàm theo biến x.

	Với u là một hàm số
$\int 0dx=C$	$\int 0du=C$
$\int dx=x+C$	$\int du=u+C$
$\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$	$\int u^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$
$\int\frac{1}{x}dx=ln\lvert x\rvert+C$	$\int\frac{1}{u}du=ln\lvert u\rvert+C$

$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

Các phương pháp tính nguyên hàm

- ***Phương pháp 1. Sử dụng bảng nguyên hàm:***

Ví dụ 1 Tính $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + x^4 \right) dx$

Lời giải.

Ta có $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + x^4 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^4 dx = \tan x + \frac{x^5}{5} + C$

Ví dụ 2 Tính: $\int \left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = 2\int x^2 dx + \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \frac{2}{3}x^3 + \int x^{-\frac{2}{3}} dx$

$= \frac{2}{3}x^3 + 3x^{\frac{1}{3}} + C = \frac{2}{3}x^3 + 3\sqrt[3]{x} + C$

Ví dụ 3 Tính $\int \left(3\cos x - 3^{x-1} \right) dx$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(3\cos x - 3^{x-1} \right) dx = \int 3\cos x dx - \int 3^{x-1} dx = 3\sin x - \frac{1}{3}\int 3^x dx + C = 3\sin x - \frac{1}{3} \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$

Ví dụ 4 Tính $\int \left(\frac{1}{x} - e^{x+1} \right) dx$

Lời giải.

Ta có $\int \left(\frac{1}{x} - e^{x+1} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - e\int e^x dx = \ln|x| - e.e^x + C$

- ***Phương pháp 2. Đổi biến số***

Ví dụ 5 Tính $\int \frac{sin^3 x}{cos^4 x}dx$

Phân tích. Để ý khi ta đặt $t = cosx \Rightarrow dt=d\left(cosx\right) = -sin\,xdx$, ta cần phải chuyển tất cả về theo biến t. Muốn như vậy ta biến đổi $sin^2 x = 1 - cos^2 x = 1 - t^2$

Lời giải.

Ta có: $\int \frac{sin^3 x}{cos^4 x}dx = \int \frac{\left(1-cos^2 x\right)s\,inx}{cos^4 x}dx$, đặt $t = cosx \Rightarrow dt=d\left(cosx\right) = -sin\,xdx$.

Lúc này

$$\int \frac{sin^3 x}{cos^4 x}dx = -\int \frac{1-t^2}{t^4}.dt = -\int t^{-4}dt + \int t^{-2}dt = -\frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{\left(cosx\right)^{-3}}{3} - \left(cos\,x\right)^{-1} + C$$

Ví dụ 6 Tính $\int \frac{x-1}{2x+1}dx$.

Phân tích. Khi nguyên hàm có dạng phân thức bậc tử lớn hơn hoặc bằng bậc mẫu ta thường dùng phép chia đa thức để giải.

Lời giải.

Ta có: $\int \frac{x-1}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{3}{2x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{x}{2} + C + \frac{3}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx$

Đặt: $t = 2x+1 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$,

Lúc này: $\int \frac{1}{2x+1}dx = \int \frac{1}{t}.\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}ln\left|t\right| = \frac{1}{2}ln\left|2x+1\right| + C$.

Do đó: $\int \frac{x-1}{2x+1}dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}ln\left|2x+1\right| + C$

- ***Phương pháp 3. Nguyên hàm từng phần***

Chú ý:

- Các loại hàm cơ bản: hàm logarit, hàm đa thức, hàm lượng giác, hàm mũ.

- Khi nguyên hàm có dạng tích hai hàm nhân nhau ta thường sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

- Thứ tự đặt u là logarit, đa thức, lượng giác, mũ (đọc tắt là lô đa lượng mũ), sau khi đặt u thì toàn bộ lượng còn lại đặt là dv.

Ví dụ 7 Tính $\int \frac{ln\left(sinx\right)}{cos^2 x}dx$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = ln\left(s\,inx\right) \Rightarrow du = \frac{cosx}{s\,inx}dx \\ dv = \frac{dx}{cos^2 x} \Rightarrow v = tan\,x \end{cases}$.

Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$$\int \frac{ln(sinx)}{cos^2x}dx = tan\,x.ln(sinx) - \int tan\,x.\frac{cos\,x}{sin\,x}dx = tan\,x.ln(sinx) - x + C$$

Ví dụ 8 Tính $\int cos\sqrt{x}dx$

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2t}dx \Rightarrow dx = 2tdt$, nguyên hàm viết lại thành:

$\int 2t\,cos\,tdt = 2\int t\,cos\,tdt$, tiếp tục dùng nguyên hàm từng phần để giải quyết.

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = costdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = sin\,t \end{cases}$, áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta được:

$$\int cos\sqrt{x}dx = 2\int t\,cos\,tdt = 2t.sin\,t - 2\int sin\,tdt = 2t.sin\,t + 2cost + C = 2\sqrt{x}.sin\sqrt{x} + 2cos\sqrt{x} + C$$

Chú ý: Khi đặt $dv = f(x)dx$ ta tính v theo công thức $v = \int f(x)dx$, chắc hẳn nhiều em sẽ hỏi sau khi tính xong sẽ có thêm hằng số C nhưng tại sao ở các ví dụ trên lại không thấy C, thật ra là người ta đã chọn $C = 0$.

TÍCH PHÂN

- **Định nghĩa.** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn:

- Liên tục trên đoạn $[a;b]$.

- $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Lúc đó hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Chú ý:

- a, b được gọi là 2 cận của tích phân.

- $a = b$ thì $\int_a^a f(x)dx = 0$.

- $a > b$ thì $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

- Tích phân không phụ thuộc vào biến số tức là $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

- **Tính chất của tích phân:**

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $a < c < b$.

- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Chú ý: Để tính tích phân từ a đến b, ta tiến hành tìm nguyên hàm rồi sau đó thay cận vào theo công thức $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Ví dụ 1 Tính tích phân $I=\int_2^{\sqrt{7}}\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}dx$

A. $I=2$ **B.** $I=3$ **C.** $I=0$ **D.** $I=1$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x^2-3}\Rightarrow t^2=x^2-3$

$\Rightarrow tdt=xdx$

Đổi cận: $x=2\Rightarrow t=1; x=\sqrt{7}\Rightarrow t=2$

Ta được $I=\int_1^2\frac{t}{t}dt=\int_1^2 dt=t\Big|_1^2=1$

Chọn đáp án D

Chú ý: Khi tích phân có căn ta thường đặt ẩn phụ t bằng căn.

Ví dụ 2 Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos^5 x)\sin xdx$.

A. $\frac{7}{6}$ **B.** 1 **C.** $\frac{7}{8}$ **D.** $\frac{7}{9}$

Lời giải

Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos^5 xdx$

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\sin xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\cos x\end{cases}$.

Khi đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=\left(-x\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=0+\left(\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$. Đổi cận $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\\x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\t=1\end{cases}$.

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos^5 xdx=\int_1^0-t^5dt=\int_0^1 t^5dt=\left(\frac{t^6}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}$.

Vậy $I=1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 3 Tính tích phân sau: $I=\int_1^3\frac{1}{x}\left(ln x\right)^2dx$

A. $I=\frac{\left(ln3\right)^2}{3}$ **B.** $I=\frac{\left(ln3\right)}{3}$ **C.** $I=\frac{\left(ln3\right)^3}{3}$ **D.** $I=\frac{\left(ln2\right)^3}{3}$

Lời giải

Đặt $u=ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

Đổi cận : $x=1 \Rightarrow u=0$; $x=3 \Rightarrow u=ln3$

Khi đó: $I=\int_0^{ln3} u^2du=\left.\frac{u^3}{3}\right|_0^{ln3}=\frac{(ln3)^3}{3}$

Chọn đáp án C

Ví dụ 4 Tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{5}} x^3\sqrt{(x^2+4)}dx$

A. $I=\frac{53}{15}$ **B.** $I=\frac{23}{15}$ **C.** $I=\frac{253}{7}$ **D.** $I=\frac{253}{15}$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}$. Suy ra $t^2=x^2+4$. Do đó $tdt=xdx$

$x=0 \Rightarrow t=2$, $x=\sqrt{5} \Rightarrow t=3$

Suy ra $I=\int_2^3 (t^2-4)t.tdt=\int_2^3 (t^4-4t^2)dt$

$I=\left.\left(\frac{t^5}{5}-\frac{4t^3}{3}\right)\right|_2^3=\frac{63}{5}+\frac{64}{15}=\frac{253}{15}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 5 Tính tích phân $I=\int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1+e^x}\right)dx$

A. $I=\frac{2\sqrt{2}-2}{3}$ **B.** $I=\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$ **C.** $I=\frac{2\sqrt{2}+2}{3}$ **D.** $I=\frac{2\sqrt{3}+2}{3}$

Lời giải

Có $I=\int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1}+e^x\right)dx=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx+\int_0^1 xe^xdx=I_1+I_2$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2=x^2+1 \Rightarrow tdt=xdx$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$

Suy ra $I_1=\int_1^{\sqrt{2}} t^2dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$, suy ra $I_2=\left.xe^x\right|_0^1-\int_0^1 e^xdx=e-\left.e^x\right|_0^1=1$

Vậy $I=\frac{2\sqrt{2}+2}{3}$

Chọn đáp án C

Ví dụ 6 Tính tích phân sau: $I=\int_e^{e^2}\frac{(x^2+1)\ln x+1}{x\ln x}dx$

A. $I=\frac{e^4-e^2}{2}+2+\ln 2$

B. $I=\frac{e^4-e^2}{2}-1+\ln 2$

C. $I=\frac{e^4-e^2}{2}+1+\ln 2$

D. $I=\frac{e^4-e^2}{2}+1+\ln 3$

Lời giải

$$I=\int_e^{e^2}\frac{(x^2+1)\ln x+1}{x\ln x}dx=\int_e^{e^2}\frac{x^2+1}{x}dx+\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_e^{e^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx+\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=J+K$$

$$J=\int_e^{e^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x|\right)\Bigg|_e^{e^2}=\frac{e^4-e^2}{2}+1$$

$$K=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}d(\ln x)=\ln|\ln x|\Big|_e^{e^2}=\ln 2$$

$$I=\frac{e^4-e^2}{2}+1+\ln 2$$

Chọn đáp án C.

Chú ý: $\frac{1}{x}dx=d(\ln x)$

Ví dụ 7 Tính tích phân $I=\int_1^2 x\left(e^x-\frac{1}{x}\right)dx$

A. $I=e^2-1$ **B.** $I=e^2$ **C.** $I=e^2+1$ **D.** $I=e^2-2$

Lời giải

$$I=\int_1^2 xe^x dx-\int_1^2 dx=I_1-I_2$$

Đặt: $\begin{cases}u=x\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}\Rightarrow I_1=xe^x\Big|_1^2-\int_1^2 e^x dx=2e^2-e-e^x\Big|_1^2=e^2$

$I_2=x\Big|_1^2=1\Rightarrow I=e^2-1$

Chọn đáp án A

Ví dụ 8 Tính tích phân $I=\int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}dx$

A. $I=\frac{7}{9}$ **B.** $I=\frac{2}{9}$ **C.** $I=\frac{4}{9}$ **D.** $I=\frac{5}{9}$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{3x^2+1}\Rightarrow t^2=3x^2+1\Rightarrow tdt=3xdx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1,\ x=1\Rightarrow t=2$

$$I=\frac{1}{3}\int_1^2 t^2dt=\frac{t^3}{9}\bigg|_1^2=\frac{7}{9}$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 9 Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-2)\sin 3x dx$.

A. $\frac{7}{9}$ **B.** $\frac{7}{8}$ **C.** $-\frac{7}{9}$ **D.** $\frac{7}{10}$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=x-2\\ dv=\sin 3xdx\end{cases}$ ta được $\begin{cases}du=dx\\ v=-\frac{\cos 3x}{3}\end{cases}$

Do đó: $I=\left(-\frac{(x-2)\cos 3x}{3}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3xdx$

$$I=\left(-\frac{(x-2)\cos 3x}{3}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}+\left(\frac{\sin 3x}{9}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{7}{9}.$$

Chọn đáp án C.

Ví dụ 10 Tính tích phân $I=\int_1^e x(1+\ln x)dx$

A. $I=\frac{3e^2+1}{4}$ **B.** $I=\frac{3e^2-2}{4}$ **C.** $I=\frac{3e^2}{4}$ **D.** $I=\frac{3e^2-1}{4}$

Lời giải

Đặt: $u=1+\ln x;\ dv=xdx$. Suy ra $du=\frac{1}{x}dx;\ v=\frac{x^2}{2}$

Khi đó: $I=\frac{x^2}{2}(1+\ln x)\bigg|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx$

$$=\frac{x^2}{2}(1+\ln x)\bigg|_1^e-\frac{x^2}{4}\bigg|_1^e=\frac{3e^2-1}{4}$$

Chọn đáp án D

Ví dụ 11 Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(2+\cos 2x)dx$

A. $I=\frac{3\pi^2}{16}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$ **B.** $I=\frac{3\pi^2}{16}+\frac{\pi}{8}$ **C.** $I=\frac{3\pi^2}{16}+\frac{\pi}{8}-\frac{3}{4}$ **D.** $I=\frac{3\pi^2}{16}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}$

Lời giải

Đặt: $u=x,\ dv=(2+\cos 2x)dx$. Suy ra: $du=dx,\ v=2x+\frac{1}{2}\sin 2x$.

$$I = x\left(2x+\frac{1}{2}sin2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2x+\frac{1}{2}sin2x\right)dx = \frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{8}-\left(x^2-\frac{1}{4}cos2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{3\pi^2}{16}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 12 Tính tích phân: $I = \int_{-1}^{1}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

A. $I = 2(\sqrt{3}-2)$ **B.** $I = 2(\sqrt{3}-4)$ **C.** $I = 2(\sqrt{3}-1)$ **D.** $I = 2(\sqrt{3}-3)$

Lời giải

Đặt: $u = \sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow u^2 = x^2+x+1 \Rightarrow 2udu = (2x+1)dx$

Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow u = 1$; $x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{3}$

$$I = \int_1^{\sqrt{3}}\frac{2udu}{u} = \int_1^{\sqrt{3}}2du = 2u\Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Chọn đáp án C

Ví dụ 13 Tính tích phân $I = \int_1^2\frac{x^2-1}{x^2}lnxdx$

A. $I = \frac{5}{2}ln2-\frac{3}{2}$ **B.** $I = \frac{5}{2}ln2-\frac{1}{2}$ **C.** $I = \frac{5}{2}ln2-1$ **D.** $I = \frac{5}{2}ln2$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = lnx \\ dv = \dfrac{x^2-1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dv \\ v = \left(x+\dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$

$$I = \left(x+\frac{1}{x}\right)lnx\Big|_1^2 - \int_1^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$I = \left(x+\frac{1}{x}\right)lnx\Big|_1^2 - \left(x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 \Rightarrow I = \frac{5}{2}ln2-\left(x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{2}ln2-\frac{3}{2}$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 14 Tính tích phân $I = \int_2^5\frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}}dx$

A. $\frac{386}{15}$ **B.** $\frac{385}{15}$ **C.** $\frac{384}{15}$ **D.** $\frac{387}{15}$

Lời giải

Đặt: $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2+1 = x \Rightarrow dx = 2t.dt$

Đổi cận: $x = 2 \Rightarrow t = 1$; $x = 5 \Rightarrow t = 2$

$$I=\int_1^2\frac{(t^2+1)^2+1}{t}.2t.dt=\int_1^2(2t^4+4t^2+4)dt=\left(\frac{2t^5}{5}+\frac{4t^3}{3}+4t\right)\Bigg|_1^2=\frac{386}{15}$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 15 Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+sin\,x}{cos^2x}dx$

A. $I=\sqrt{3}+1$ **B.** $I=\sqrt{3}+3$ **C.** $I=\sqrt{3}+2$ **D.** $I=\sqrt{3}-1$

Lời giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+sin\,x}{cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{cos^2x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sin\,x}{cos^2x}dx=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{cos^2x}dx=tan\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$$

Đặt $t=cos\,x\Rightarrow dt=-sin\,xdx$

Suy ra $I_2=\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{-dt}{t^2}=\frac{1}{t}\Big|_1^{\frac{1}{2}}=1$

Vậy $I=\sqrt{3}+1$. **Chọn đáp án A.**

Ví dụ 16 Tính: $I=\int_{-1}^{1}\left(3\sqrt{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)dx$

A. $I=4\sqrt{2}+ln3$ **B.** $I=4\sqrt{3}+ln3$ **C.** $I=4\sqrt{2}+ln2$ **D.** $I=2\sqrt{2}+ln3$

Lời giải

Ta có: $I=\int_{-1}^{1}3\sqrt{x+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+2}dx=I_1+I_2$

Tính: $I_1=\int_{-1}^{1}3(x+1)^{\frac{1}{2}}dx=2(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}=4\sqrt{2}$

Tính: $I_2=ln(x+2)\Big|_{-1}^{1}=ln3$

Vậy: $I=4\sqrt{2}+ln3$

Chọn đáp án A

Chú ý: $\int(ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C$.

Ví dụ 17 Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{4x+3}{2x+1}dx$

A. $I=2+\frac{1}{2}ln3$ **B.** $I=1+\frac{1}{2}ln3$ **C.** $I=2-\frac{1}{2}ln3$ **D.** $I=2+\frac{1}{2}ln2$

Lời giải

Ta có: $I=\int_0^1 \frac{4x+3}{2x+1}dx=\int_0^1\left(2+\frac{1}{2x+1}\right)dx$

$=\int_0^1 2dx+\int_0^1 \frac{1}{2x+1}dx=2x\Big|_0^1+\left(\frac{1}{2}ln|2x+1|\right)\Big|_0^1=2+\frac{1}{2}ln3$

Chọn đáp án A

Ví dụ 18 Tính tích phân: $I=\int_0^1\left(x+e^{2x}\right)xdx$

A. $I=\frac{e^2}{4}+\frac{7}{11}$ **B.** $I=\frac{e^2}{4}+\frac{7}{12}$ **C.** $I=\frac{e^2}{4}+\frac{5}{12}$ **D.** $I=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{12}$

Lời giải

$I=\int_0^1\left(x+e^{2x}\right)xdx=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 xe^{2x}dx=I_1+I_2$

$I_1=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

Tính $I_2=\int_0^1 xe^{2x}dx$

Đặt $u=x\Rightarrow du=dx$; $dv=e^{2x}dx\Rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}$

$I_2=\frac{x}{2}.e^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{e^{2x}}{4}\Big|_0^1=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{e^2}{4}+\frac{7}{12}$

Chọn đáp án B

Ví dụ 19 Tính tích phân: $I=\int_1^e\left(\frac{lnx}{x^2}+1\right)xdx$

A. $I=\frac{e^3}{2}$ **B.** $I=\frac{e}{2}$ **C.** $I=\frac{e^2}{3}$ **D.** $I=\frac{e^2}{2}$

Lời giải

$I=\int_1^e(\frac{lnx}{x^2}+1)xdx=\int_1^e\frac{lnx}{x}dx+\int_1^e xdx$

• $\int_1^e\frac{lnx}{x}dx=\int_1^e lnx\,d(lnx)=\frac{ln^2x}{2}\Big|_1^e=\frac{1}{2}$

• $\int_1^e xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}$

• $I=\frac{e^2}{2}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 20 Tính tích phân $I=\int_1^e\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)ln\,xdx.$

A. $I=\frac{3e-4}{2e}$ **B.** $I=\frac{e-4}{2e}$ **C.** $I=\frac{3e+4}{2e}$ **D.** $I=\frac{3e-3}{2e}$

Lời giải

Ta có: $I=\int_1^e\frac{ln\,x}{x}dx+\int_1^e\frac{ln\,x}{x^2}dx$

+ $I_1=\int_1^e\frac{ln\,x}{x}dx=\int_1^e ln\,xd(ln\,x)=\frac{1}{2}ln^2x\Big|_1^e=\frac{1}{2}$

+ Tính $I_2=\int_1^e\frac{ln\,x}{x^2}dx$

Đặt $u=ln\,x,\ dv=\frac{1}{x^2}dx\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx, v=\frac{-1}{x}$

$I_2=-\frac{ln\,x}{x}\Big|_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\Big|_1^e=1-\frac{2}{e}$

Vậy $I=\frac{3e-4}{2e}$

Chọn đáp án A

Ví dụ 21 Tính tích phân: $I=\int_2^{\frac{11}{3}}\frac{xdx}{(x-1)\sqrt{3x-2}}$.

A. $I=\frac{4}{3}+ln\frac{3}{2}$ **B.** $I=\frac{2}{3}+ln\frac{1}{2}$ **C.** $I=\frac{2}{3}+ln\frac{3}{2}$ **D.** $I=\frac{2}{3}+ln\frac{5}{2}$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{3x-2}\Rightarrow t^2=3x-2\Rightarrow 2tdt=3dx\Rightarrow dx=\frac{2}{3}tdt$

$x=2\Rightarrow t=2;\ x=\frac{11}{3}\Rightarrow t=3$

$\frac{xdx}{(x-1)\sqrt{3x-2}}=\frac{2}{3}\frac{t^2+2}{t^2-1}dt=\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]dt$

Suy ra $I=\int_2^3\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]dt=\left[\frac{2}{3}t+ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]\Big|_2^3=\frac{2}{3}+ln\frac{3}{2}$

Chọn đáp án C

Ví dụ 22 Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(x+\cos x)dx$.

A. $I=\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{2}$ **B.** $I=\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{2}+2$ **C.** $I=\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{2}-1$ **D.** $I=\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{2}-2$

Lời giải

Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx$

Với $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$

Với $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\sin x \end{cases}$

$I_2=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

Vậy $I=\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{2}-1$

Chọn đáp án C

Ví dụ 23 Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x+\sin x)\cos x dx$

A. $I=\pi-\frac{3}{2}$ **B.** $I=\pi$ **C.** $I=\pi-\frac{1}{2}$ **D.** $I=\pi+\frac{3}{2}$

Lời giải

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\cos x dx$

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.d(\sin x)=\frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u=2x \\ dv=\cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2dx \\ v=\sin x \end{cases}$

$I_2=2x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\pi+2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2 \Rightarrow I=\pi-\frac{3}{2}$

Chọn đáp án A

Ví dụ 24 Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\sin^2 x)\cos x\, dx$

A. $I=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$ **B.** $I=\frac{\pi}{2}-\frac{5}{3}$ **C.** $I=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}$ **D.** $I=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$

Lời giải

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x dx=I_1+I_2$

Đặt $\begin{cases} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=\cos x dx\Rightarrow v=\sin x \end{cases}$

$\Rightarrow I_1=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

$I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\, d(sin x) = \frac{sin^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$

$I = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$

Chọn đáp án A

Ví dụ 25 Tính tích phân: $I = \int\limits_0^1 (x+1)(e^x - 3)dx$.

A. $I = e - \frac{9}{2}$ **B.** $I = e - 3$ **C.** $I = e + \frac{9}{2}$ **D.** $I = e - \frac{3}{2}$

Lời giải

$\begin{cases} u = x+1 \\ dv = (e^x - 3)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = (e^x - 3x) \end{cases}$

$\Rightarrow I = (x+1)(e^x - 3x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (e^x - 3x)dx$

$= (x+1)(e^x - 3x)\Big|_0^1 - \left(e^x - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = e - \frac{9}{2}$

Chọn đáp án A

Chú ý: $v = \int (e^x - 3)dx = (e^x - 3x) + C$, chọn $C = 0$

Ví dụ 26 Tính tích phân: $I = \int\limits_0^1 2x[x + ln(1+x)]dx$

A. $I = \frac{2}{3}$ **B.** $I = \frac{7}{6}$ **C.** $I = \frac{5}{6}$ **D.** $I = \frac{11}{6}$

Lời giải

Ta có: $I = \int\limits_0^1 2x[x + ln(1+x)]dx = \int\limits_0^1 2x^2dx + \int\limits_0^1 2x\,ln(1+x)dx = I_1 + I_2$

Tính: $I_1 = \int\limits_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

Tính: $I_2 = \int\limits_0^1 2x\,ln(1+x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = ln(1+x) \\ dv = 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1}dx \\ v = x^2 \end{cases}$.

Do đó: $I_2 = x^2\,ln(1+x)t\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = ln2 - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = ln2 - \int\limits_0^1 (x - 1 + \frac{1}{x+1})dx$

$= ln2 - \left[\frac{1}{2}x^2 - x + ln(1+x)\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

Vậy: $I = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$

Chọn đáp án B

Ví dụ 27 Tính tích phân sau: $I=\int_1^2 x\left(\frac{2}{x^2+1}+\ln x\right)dx.$

A. $I=\ln 10-\frac{3}{4}$ **B.** $I=\ln 10-\frac{1}{4}$ **C.** $I=\ln 10-\frac{5}{4}$ **D.** $I=\ln 10+\frac{1}{4}$

Lời giải

$$I=\int_1^2 x\left(\frac{2}{x^2+1}+\ln x\right)dx=\int_1^2\frac{2x}{x^2+1}dx+\int_1^2 x.\ln x dx$$

Tính: $I_1=\int_1^2\frac{2x}{x^2+1}dx=\int_1^2\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^2=\ln 5-\ln 2$

Tính: $I_2=\int_1^2 x\ln x dx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$ $I_2=\frac{x^2}{2}.\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x}{2}dx=2\ln 2-\frac{3}{4}$

Vậy $I=\ln 5+\ln 2-\frac{3}{4}=\ln 10-\frac{3}{4}.$

Chọn đáp án A

Ví dụ 28 Tính tích phân $I=\int_1^e x\left(2x^2+\ln x\right)dx$

A. $I=\frac{2e^4+e^2}{4}$ **B.** $I=\frac{2e^4+e^2-1}{4}$ **C.** $I=\frac{2e^4+e^3}{4}$ **D.** $I=\frac{2e^4}{4}$

Lời giải

$$I=\int_1^e x\left(2x^2+\ln x\right)dx=2\int_1^e x^3dx+\int_1^e x\ln x dx$$

$$2\int_1^e x^3dx=\frac{1}{2}x^4\Big|_1^e=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)$$

Ta có: $\int_1^e x\ln x dx=\frac{1}{2}\left[x^2\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x^2\frac{1}{x}dx\right]=\frac{1}{2}\left[e^2-\frac{1}{2}x^2\Big|_1^e\right]=\frac{e^2+1}{4}$

$$I=\int_1^e x\left(2x^2+\ln x\right)dx=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)+\frac{e^2+1}{4}=\frac{2e^4+e^2-1}{4}$$

Chọn đáp án B

Ví dụ 29 Tính tích phân $I=\int_2^3 x\left[3x-2\ln\left(x-1\right)\right]dx$

A. $I=\frac{45}{2}$ **B.** $I=8\ln 2$ **C.** $I=\frac{45}{2}-8\ln 2$ **D.** $I=\frac{45}{2}+8\ln 2$

Lời giải

$$I=\int_2^3 3x^2dx-\int_2^3 2x\ln\left(x-1\right)dx=x^3\Big|_2^3-I_1=19-I_1$$

$I_1=\int\limits_2^3 2x\ln(x-1)dx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x-1)\\ dv=2xdx\end{cases}$, Suy ra $I_1=x^2\ln(x-1)\Big|_2^3-\int\limits_2^3 x^2d(\ln(x-1))=9\ln2-\int\limits_2^3\frac{x^2}{x-1}dx$

$=9\ln2-\int\limits_2^3\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=9\ln2-\left(\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|\right)\Bigg|_2^3=8\ln2-\frac{7}{2}$

Vậy $I=\frac{45}{2}-8\ln2$

Chọn đáp án C

Ví dụ 30 Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\frac{x^2+\ln^2x}{x}dx$

A. $I=\frac{\ln^3 2}{3}$ **B.** $I=\frac{3}{2}$ **C.** $I=\frac{3}{2}+\frac{\ln^3 2}{3}$ **D.** $I=\frac{5}{2}+\frac{\ln^3 2}{3}$

Lời giải

Ta tách tích phân I như sau: $I=\int\limits_1^2 xdx+\int\limits_1^2\frac{\ln^2x}{x}dx$

- $I_1=\int\limits_1^2 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{3}{2}$
- $I_2=\int\limits_1^2\frac{\ln^2x}{x}dx$. Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$

Đổi cận: $x=2\Rightarrow t=\ln2;\ x=1\Rightarrow t=0$

$I_2=\int\limits_0^{\ln2}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_0^{\ln2}=\frac{\ln^3 2}{3}$

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{3}{2}+\frac{\ln^3 2}{3}$

Chọn đáp án C

Ví dụ 31 Tính: $I=\int\limits_1^{\sqrt5}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}.x^3+\ln x}{x^2}\right)dx$

A. $I=-\frac{1}{\sqrt5}\ln\sqrt5-\frac{1}{\sqrt5}-\frac{11}{3}$ **B.** $I=-\frac{1}{\sqrt5}\ln\sqrt5+\frac{1}{\sqrt5}+\frac{11}{3}$

C. $I=\frac{1}{\sqrt5}\ln\sqrt5-\frac{1}{\sqrt5}+\frac{11}{3}$ **D.** $I=-\frac{1}{\sqrt5}\ln\sqrt5-\frac{1}{\sqrt5}+\frac{11}{3}$

Lời giải

$I=\int\limits_1^{\sqrt5}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}.x^3+\ln x}{x^2}\right)dx=\int\limits_1^{\sqrt5}\sqrt{x^2-1}.xdx+\int\limits_1^{\sqrt5}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx$

$\int\limits_1^{\sqrt5}\sqrt{x^2-1}.xdx=\frac{1}{2}\int\limits_1^{\sqrt5}\sqrt{x^2-1}.d(x^2-1)=\frac{(\sqrt{x^2-1})^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt5}=\frac{8}{3}$

$$\int_1^{\sqrt{5}}\left(\frac{lnx}{x^2}\right)dx=-\frac{1}{x}lnx\Big|_1^{\sqrt{5}}-\int_1^{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=-\frac{1}{\sqrt{5}}ln\sqrt{5}-\frac{1}{x}\Big|_1^{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}ln\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}+1$$

Do đó: $I=-\frac{1}{\sqrt{5}}ln\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{11}{3}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 32 Tính tích phân: $I=\int_0^{\pi}x\left(x+sinx\right)dx$

A. $I=\frac{1}{3}\pi^3+\pi$ **B.** $I=\frac{7\pi}{12}-\sqrt{3}$ **C.** $I=\pi\sqrt{3}$ **D.** $I=\frac{\pi}{4}$

Lời giải

$$I=\int_0^{\pi}x^2dx+\int_0^{\pi}xsinxdx=\int_0^{\pi}x^2dx-\int_0^{\pi}xd(cosx)$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}-\left(xcosx\right)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}cosxdx=\frac{\pi^3}{3}+\pi+sinx\Big|_0^{\pi}\quad I=\frac{1}{3}\pi^3+\pi$$

Chọn đáp án A.

Ví dụ 33 Tính tích phân: $I=\int_1^2\left(4x+3\right).lnxdx$.

A. $I=16ln3-4$ **B.** $I=14ln2+6$ **C.** $I=14ln2-6$ **D.** $I=16ln2-6$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=lnx\\dv=\left(4x+3\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\v=2x^2+3x\end{cases}$.

Khi đó $I=\left(2x^2+3x\right)lnx\Big|_1^2-\int_1^2\frac{2x^2+3x}{x}dx$

$=14ln2-0-\left(x^2+3x\right)\Big|_1^2$

$=14ln2-0-\left[\left(2^2+3.2\right)-\left(1^2+3.1\right)\right]$

$=14ln2-\left(10-4\right)$

$=14ln2-6.$

Chọn đáp án C.

Ví dụ 34 Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\pi}x\left(\frac{2}{x^2+1}+sinx\right)dx$

A. $ln\left(\pi^2+2\right)=\pi$ **B.** $ln\left(\pi^2+1\right)+\pi$ **C.** $ln\left(\pi^2+1\right)-\pi$ **D.** $ln\left(\pi^2+1\right)$

Lời giải

$$I=\int_0^{\pi}x\left(\frac{2}{x^2+1}+sinx\right)dx=\int_0^{\pi}\frac{2x}{x^2+1}dx+\int_0^{\pi}x.sinxdx$$

Tính $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{2x}{x^2+1}dx = \int_0^{\pi} \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^{\pi} = ln\left(\pi^2+1\right)$

Tính $I_2 = \int_0^{\pi} x\sin x dx$

Đặt $\begin{cases} x = u \\ \sin x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$I_2 = -x.\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi$

Vậy $I = ln(\pi^2+1) + \pi$

Chọn đáp án B.

Ví dụ 35 Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(2+\sin 2x)dx$.

A. $I = \frac{\pi+\sqrt{2}}{3}$ **B.** $I = \frac{\pi-2}{3}$ **C.** $I = \frac{\pi+\pi^2}{4}$ **D.** $I = \frac{\pi+\pi^2}{4}$

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx = x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx = \frac{\pi^2}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx$

Tính $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$\Rightarrow J = -\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2xdx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Vậy $I = \frac{\pi^2+\pi}{4}$

Chọn đáp án D.

Ví dụ 36 Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{1+\sqrt{3x+1}}dx$

A. $I = \frac{28}{27} + \frac{2}{3}ln\frac{3}{2}$ **B.** $I = \frac{2}{3} - \frac{28}{27}ln\frac{3}{2}$ **C.** $I = \frac{28}{27} - \frac{2}{3}ln\frac{3}{2}$ **D.** $I = \frac{3}{2} - \frac{28}{27}ln\frac{2}{3}$

Lời giải

Đặt: $\sqrt{3x+1} = t$ ta được $x = \frac{t^2-1}{3} \Rightarrow dx = \frac{2}{3}tdt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 2$

Khi đó: $I = \frac{2}{9}\int_1^2 \frac{2t^3+t}{1+t}dt = \frac{2}{9}\int_1^2 \left(2t^2 - 2t + 3 - \frac{3}{t+1}\right)dt$

$= \frac{28}{27} - \frac{2}{3}ln\frac{3}{2}$

Chọn đáp án A.

Ví dụ 37 Cho tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx$. Đáp án nào sau đây đúng:

A. $-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2$ **B.** $-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2+\int_1^2 \frac{1}{x^2}dxd$ **C.** $\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2+\int_1^2 \frac{1}{x^2}dxd$ **D.** $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dxd$

Lời giải

$I=\int_1^2 xdx-2\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-2\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{3}{2}-2\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$

Tính: $J=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$

Đặt: $u=\ln x, dv=\frac{1}{x^2}dx$. Khi đó $du=\frac{1}{x}dx, v=-\frac{1}{x}$

Do đó: $J=-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2+\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$

Chọn đáp án B.

Ví dụ 38 Tính tích phân: $I=\int_0^1 (1-x)e^x dx$.

A. $I=e-1$ **B.** $I=e+1$ **C.** $I=e+2$ **D.** $I=e-2$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=1-x \\ dv=e^x dx \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du=-dx \\ v=e^x \end{cases}$

Suy ra: $I=(1-x)e^x\Big|_0^1+\int_0^1 e^x dx=(1-x)e^x\Big|_0^1+e^x\Big|_0^1$

$I=e-2$

Chọn đáp án D.

Ví dụ 39 Tính tích phân $I=\int_0^1 x\left(\frac{2}{1+x^2}+e^x\right)dx$.

A. $I=1-\ln 2$ **B.** $I=1+\ln 2$ **C.** $I=2+\ln 2$ **D.** $I=1+\ln 3$

Lời giải

+ Tính được $I_1=\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx=\ln 2$

+ Tính được $I_2=\int_0^1 xe^x dx=1$

+ Tính đúng đáp số I = $1+\ln 2$

Chọn đáp án B.

Ví dụ 40 Tính tích phân $I=\int_1^2 x(x^2+\ln x)dx$

A. $I=2\ln 2-3$ **B.** $I=\ln 2+3$ **C.** $I=2\ln 2+3$ **D.** $I=2\ln 2-1$

Lời giải

$$I=\int_1^2 x(x^2+\ln x)dx=\int_1^2 x^3dx+\int_1^2 x\ln x dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2+I_1=\frac{15}{4}+I_1$$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}\Rightarrow I_1=\left.\dfrac{x^2\ln x}{2}\right|_1^2-\displaystyle\int_1^2\frac{x}{2}dx=2\ln 2-\left.\frac{x^2}{4}\right|_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}$

Vậy $I=\dfrac{15}{4}+2\ln 2-\dfrac{3}{4}=2\ln 2+3$

Chọn đáp án C.

DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

Diện tích hình phẳng

Nếu ta có hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases}y=f_1(x)\\ y=f_2(x)\\ x=a\\ x=b\end{cases}$

(Trong đó $f_1(x), f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$), thì diện tích S được tính theo công thức:

$S=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|dx$.

Thể tích khối tròn xoay

- ***Quay quanh trục Ox:*** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases}y=f(x)\\ Ox\\ x=a\\ x=b\end{cases}$

(Trong đó *f(x)* liên tục trên đoạn $[a;b]$) quay quanh trục Ox, ta được khối tròn xoay. Thể tích V_x của khối tròn xoay được tính theo công thức: $V_x=\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$

- ***Quay quanh trục Oy:*** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases}x=f(y)\\ Oy\\ y=a\\ y=b\end{cases}$

(Trong đó $f(y)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$) quay quanh trục Oy, ta được khối tròn xoay. Thể tích V_y của khối tròn xoay được tính theo công thức: $V_y=\pi\int_a^b [f(y)]^2 dy$

Ví dụ 41 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau đây:

$y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$

A. $S = \frac{2}{15}$ **B.** $S = 3$ **C.** $S = \frac{4}{15}$ **D.** $S = 5$

Lời giải

Ta thấy hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$ nên chưa áp dụng được công thức tính ngay, ta cần phải tìm thêm hai đường $x = a, x = b$. Ở đây a, b là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm.

Cho $x^2 + x - 1 = x^4 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$

$$S = \int_{-1}^{1} \left| x^2 - x^4 \right| dx$$

$$S = \left| \int_{-1}^{0} (x^2 - x^4) dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^2 - x^4) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_{-1}^{0} \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_{0}^{1} \right| = \frac{4}{15}$$

Chọn đáp án C

Chú ý: Các chú ý dưới đây nhằm mục đích phá dấu giá trị tuyệt đối khi tính tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối.

- Khi tính tích phân chứa trị tuyệt đối $\int_a^b |f(x)| dx$ nếu $f(x) = 0$ có một nghiệm $c \in [a; b]$ thì ta có: $\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_a^c |f(x)| dx = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$

- Khi tính tích phân chứa trị tuyệt đối $\int_a^b |f(x)| dx$ nếu $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $c, d \in [a; b]$ và $c < d$ thì ta có $\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^d |f(x)| dx + \int_d^b |f(x)| dx = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^d f(x) dx \right| + \left| \int_d^b f(x) dx \right|$

Ví dụ 42 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong: $y = x^3 - 2x^2$ và $y = x^2 - 4$?

A. $S = \frac{27}{2}$ **B.** $S = \frac{25}{4}$ **C.** $S = \frac{27}{4}$ **D.** $S = \frac{23}{4}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong $y = x^3 - 2x^2$ và $y = x^2 - 4$ là:

$$x^3 - 2x^2 = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_{-1}^{2} \left| x^3 - 3x^2 + 4 \right| dx$

$$= \left| \int_{-1}^{2} \left(x^3 - 3x^2 - 4 \right) dx \right| = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{27}{4}$$

Chọn đáp án C

Ví dụ 43 Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x$, trục hoành, hai đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ quay quanh trục hoành?

A. $\frac{\pi(\pi-2)}{4}$ **B.** $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$ **C.** $\frac{\pi(\pi-1)}{8}$ **D.** $\frac{\pi(\pi+2)}{8}$

Lời giải

Hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y=\sin x \\ Ox \\ x=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \end{cases}$ quay quanh trục Ox nên có thể tích:

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2x)dx=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi(\pi-2)}{8}$$

Chọn đáp án B

Ví dụ 44 Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường sau: $y=\sqrt{(x+1)\sin 2x}$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ khi (H) quay xung quanh trục Ox.

A. $V=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)\pi$ **B.** $V=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2\right)\pi$

C. $V=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\right)\pi$ **D.** $V=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\pi$

Lời giải

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin 2x dx$$

Xét $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin 2x dx$

Đặt $u=x+1\Rightarrow du=dx,\ dv=\sin 2x dx\Rightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$I=-\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\right)+\frac{1}{4}\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$$

$V=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\right)\pi$ (đvtt)

Chọn đáp án C

Ví dụ 46 Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường: $y=0, y=\sqrt{x(e^x+1)}$, $x=0, x=1$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay H quanh trục hoành?

A. $V=\pi$ **B.** $V=\frac{3\pi}{2}$ **C.** $V=\frac{\pi}{2}$ **D.** $V=\frac{5\pi}{2}$

Lời giải

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x(e^x+1)}\right)^2dx=\pi\int_0^1 x(e^x+1)dx=\pi\int_0^1 xe^xdx+\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\pi\int_0^1 xe^xdx+\frac{\pi}{2}$$

+) Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=e^x\end{cases}\Rightarrow\int_0^1 xe^xdx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^xdx=e-e^x\Big|_0^1=1$

Do đó $V=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$ (đvtt)

Chọn đáp án B.

Ví dụ 47 Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox, biết (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{\frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}}$ và các đường thẳng $x=0$; $x=\frac{\pi}{3}$?

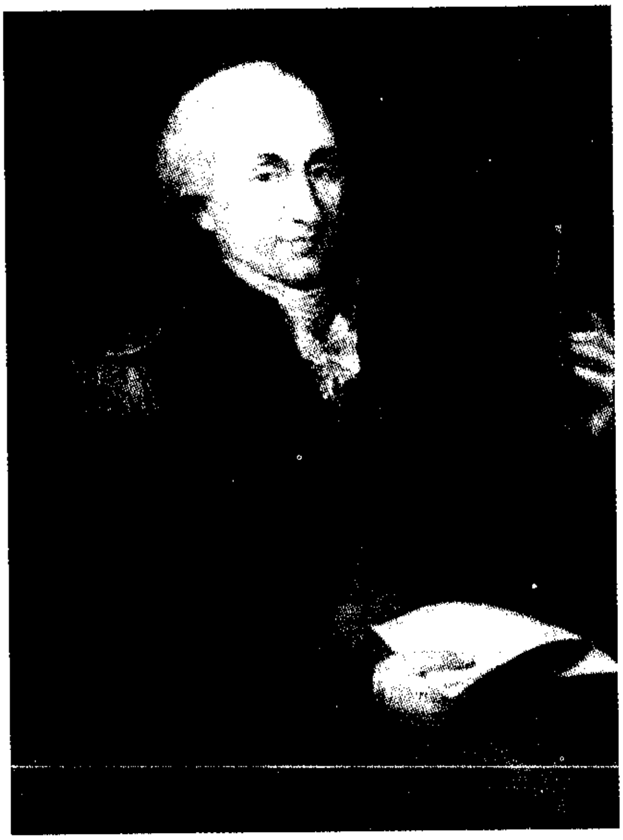
A. $I=\frac{3\pi}{2}$ **B.** $I=\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$ **C.** $I=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ **D.** $I=\frac{3\sqrt{5}\pi}{2}$

Lời giải

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\cos x\right)dx=\pi(\tan x+\sin x)=\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$$

Chọn đáp án B.

Charles Augustin de Coulomb
(1736-1806)



Nơi sinh: Angoulême, Pháp.

Coulomb là kĩ sư và là nhà vật lý người Pháp, nổi tiếng trong lĩnh vực điện trường và từ trường. Sau khi giải quyết các vấn đề liên quan đến ma sát và lực xoắn, ông đã bắt đầu yêu thích nghiên cứu bộ môn khoa học này. Các đơn vị điện tích đã được đặt theo tên của ông – Coulomb.

Vào năm 1777, Coulomb đã khám phá ra sự cân bằng lực xoắn, được ông sử dụng để đo lực hút và đẩy giữa các dòng điện và các cực của nam châm. Từ những kết quả thu được, ông đã đưa ra "Định luật Counlomb (Định luật Cu-lông)" về lực tĩnh điện. Định luật phát biểu rằng: "Lực tương tác giữa hai điện tích điểm có phương nằm trên một đường thẳng nối hai tích điểm, có chiều là chiều của lực hút nếu hai điện tích điểm cùng dấu và đẩy nếu hai điện tích điểm trái dấu, có độ lớn tỉ lệ thuận với tích các điện tích và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng".

Lực tĩnh điện, do đó, được đặt tên là lực Coulomb. Cống hiến này của Coulomb đã đặt nền tảng quan trọng cho việc phát triển nghiên cứu về điện và từ tính.

Chuyên đề 4. SỐ PHỨC

Trước kia, để diễn tả số lượng con người dùng các số tự nhiên, sau này phát hiện tiếp số hữu tỉ, ví dụ có một cái bánh chia cho bốn em 4 phần bằng nhau thì mỗi em được $\frac{1}{4}$ cái bánh. Không dừng lại ở đó, khi vẽ một tam giác vuông cân ABC vuông tại A có cạnh là 1, thì theo định lý Pi-ta-go ta có $BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, tuy nhiên chẳng có số tự nhiên hay hữu tỉ nào bình phương lên bằng 2 cả, do đó người ta nghĩ ra kí hiệu $\sqrt{2}$ để diễn tả một số mà bình phương của nó sẽ bằng 2, những số thế này là gọi số vô tỉ. Chúng ta thấy rằng chẳng có số nào bình phương lên là số âm, ví dụ tìm x để $x^2 = -1$, rõ ràng là không có số x nào cả. Vì mong muốn mở rộng tập hợp số nên số phức đã ra đời, người ta quy ước i là số thỏa mãn $i^2 = -1$.

Định nghĩa.

- Một biểu thức dạng $a + bi$ với $a, b \in R$, $i^2 = -1$ được gọi là một số phức.

- Đối với số phức $z = a + bi$, ta nói a là phần thực, b là phần ảo của z.

- Tập hợp số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.

• ***Hai số phức bằng nhau.***

- Hai số phức bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

- Công thức: $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

Biểu diễn hình học của số phức.

- Điểm $M(a;b)$ trong hệ tọa độ vuông góc Oxy được gọi là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$.

Mô-đun của số phức.

- Cho số phức $z = a + bi$ có điểm biểu diễn là $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Độ dài của véctơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là mô-đun của số phức z và kí hiệu là $|z|$.

- Công thức $|z| = |\overrightarrow{OM}| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

• ***Số phức liên hợp.***

- Cho số phức $z = a + bi$, số phức dạng $\overline{z} = a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của z.

Phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép chia.

- Cho số phức $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ta có $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

- Cho số phức $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ta có $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

- Cho số phức $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ta có $z_1 . z_2 = (a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

- Cho số phức $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ (với $z_2 \neq 0$) ta có:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} i.$$

Phương trình bậc hai với hệ số thực.

Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ với $a,b,c\in R$ và $a\neq 0$. Phương trình này có biệt thức $\Delta=b^2-4ac$, nếu:

- $\Delta=0$ phương trình có một nghiệm thực $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- $\Delta>0$ phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta<0$ phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Tìm số phức dựa vào các phép toán cộng trừ nhân chia.

Ví dụ 1 Tìm mô-đun của số phức z thỏa mãn $(1+i)z=(2+i)(3-i)$.

A. 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải.

Sử dụng phép nhân và phép chia số phức ta có

$(1+i)z=(2+i)(3-i)\Leftrightarrow(1+i)z=7+i\Leftrightarrow z=\dfrac{(7+i)}{(1+i)}$

$\Leftrightarrow 2z=(7+i)(1-i)\Leftrightarrow z=4-3i$

$\Rightarrow |z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5.$

Ví dụ 2 Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $(1+2i)z+(2-3i)\overline{z}=-2-2i$. Tính mô-đun của z?

A. $\sqrt{6}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{5}$

Lời giải.

Gọi $z=x+yi(x,y\in R)$. Phương trình đã cho trở thành:

$(1+2i)(x+yi)+(2-3i)(x-yi)=-2-2i$

$\Leftrightarrow (x-2y)+(2x+y)i+(2x-3y)+(-3x-2y)i=-2-2i$

$\Leftrightarrow (3x-5y)+(-x-y)i=-2-2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-5y=-2\\-x-y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Do đó $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Chọn B.

Ví dụ 3 Cho số phức z = 3 − 2i. Tính mô-đun của số phức $w=\frac{z^2}{z+\overline{z}}$?

A. $\frac{13}{6}$ **B.** $\frac{15}{6}$ **C.** $\frac{11}{6}$ **D.** 2

Lời giải.

$z^2=(3-2i)^2=5-2i$ và $z+\overline{z}=6$

Suy ra: $w=\frac{5-12i}{6}=\frac{5}{6}+2i$

Do đó: $|w|=\sqrt{\frac{25}{36}+4}=\frac{13}{6}$

Chọn A.

Ví dụ 4 Cho số phức z thỏa mãn: $(1+i)z+(3-i)\overline{z}=2-6i$. Tìm số phức $w=2z+1$.

A. $1+6i$ **B.** $4+6i$ **C.** $5-6i$ **D.** $5+6i$

Lời giải.

Giả sử: $z=a+bi\left(a,b\in R\right)\Rightarrow\overline{z}=a-bi$, khi đó:

$(1+i)z+(3-i)\overline{z}=2-6i\Leftrightarrow(1+i)(a+bi)+(3-i)(a-bi)=2-6i\Leftrightarrow 4a-2b-2bi=2-6i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4a-2b=2\\-2b=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$

$\Rightarrow z=2+3i$

Do đó: $w=2z+1=2(2+3i)+1=5+6i$

Chọn D.

Ví dụ 5 Tìm số phức z biết: $(z+1)^2+|z-1|^2-10i=\overline{z}+3$. Chọn đáp án đúng nhất:

A. $z=1+2i$ **B.** $z=-\frac{1}{2}+5i$

C. $z=-\frac{1}{2}+5i$ hoặc $z=1+2i$ **D.** $z=\frac{1}{2}+5i$

Lời giải.

Giả sử: $z=a+bi$. (1) $\Leftrightarrow(2a^2-a-1)+(2ab+3b-10)i=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2a^2-a-1=0\\2ab+3b-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}v\begin{cases}a=-\frac{1}{2}.\\b=5\end{cases}$

Vậy: $z=1+2i$ hoặc $z=-\frac{1}{2}+5i$

Chọn C.

Ví dụ 6 Cho số phức z thỏa mãn: $z.\overline{z}=1$ và $|\overline{z}-1|=2$. Xác định phần thực của z

A. 0 **B.** −1 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải.

Đặt: $z=a+ib$, với $a,b\in R$. Suy ra $\overline{z}=a-ib$

Ta có: $z.\bar{z}=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1$, và $\bar{z}-1=(a-1)+i(-b)$

$\Rightarrow |\bar{z}-1|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(-b)^2}=2 \Leftrightarrow (a-1)^2+b^2=4$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ (a-1)^2+b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=1-a^2 \\ (a-1)^2+1-a^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$

Kết luận: Số phức z có phần thực bằng -1, phần ảo bằng 0.

Chọn B.

Ví dụ 7 Tìm số phức z sao cho $(1+2i)z$ là số thuần ảo và $|2.z-\bar{z}|=\sqrt{13}$.

A. $z=2+i$ và $z=-2-i$ **B.** $z=-2-i$

C. $z=-i$ **D.** $z=-2-2i$

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi \ (a,b\in R)$, khi đó $(1+2i)z=(1+2i)(a+bi)=(a-2b)+(2a+b)i$

$(1+2i)z$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a-2b=0 \Leftrightarrow a=2b$

$|2.z-\bar{z}|=|a+3bi|=|2b+3bi|=\sqrt{13b^2}=\sqrt{13} \Leftrightarrow b=\pm1$

Có hai số phức thỏa mãn đề bài: $z=2+i$; $z=-2-i$

Chọn A.

Ví dụ 8 Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $z+2\bar{z}=(1+5i)^2$. Tính mô-đun của z.

A. $2\sqrt{45}$ **B.** $\sqrt{41}$ **C.** $2\sqrt{40}$ **D.** $2\sqrt{41}$

Lời giải.

Đặt: $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó $\bar{z}=a-bi$.

Ta có: $z+2\bar{z}=(1+5i)^2 \Leftrightarrow a+bi+2(a-bi)=-24+10i \Leftrightarrow 3a-bi=-24+10i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a=-24 \\ -b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=-10 \end{cases} \Rightarrow z=-8-10i \Rightarrow |z|=\sqrt{(-8)^2+(-10)^2}=2\sqrt{41}$

Chọn D.

Ví dụ 9 Tìm mô-đun của số phức z, biết rằng $|z-\bar{z}|=1$ và $z+\bar{z}=0$.

A. $|z|=\frac{1}{2}$ **B.** $|z|=\frac{1}{3}$ **C.** $|z|=\frac{1}{4}$ **D.** $|z|=\frac{1}{5}$

Lời giải.

Giả sử: $z=a+bi \Rightarrow \bar{z}=a-bi$, với $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có $z+\bar{z}=0 \Leftrightarrow a=0 \Rightarrow z=bi$

$|z-\bar{z}|=1 \Leftrightarrow b^2=\frac{1}{4} \Rightarrow |z|=\frac{1}{2}$

Vậy: $|z|=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 10 Cho số phức z thỏa mãn: $z+|z|=2-8i$. Tìm số phức liên hợp của z?

A. $-15+8i$ **B.** $-15+6i$ **C.** $-15+2i$ **D.** $-15+7i$

Lời giải.

Đặt: $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Khi đó: $z+|z|=2-8i\Leftrightarrow a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2-8i$

$\Leftrightarrow a+\sqrt{a^2+b^2}+bi=2-8i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+\sqrt{a^2+b^2}=2\\b=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-15\\b=-8\end{cases}$

Vậy $z=-15-8i\Rightarrow\overline{z}=-15+8i$

Chọn A.

Dạng 2. Tìm tập hợp điểm

Ví dụ 11 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $\log_2|z-(3-4i)|=1$.

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ. **B.** Đường tròn bán kính 1

C. Đường tròn tâm I(3;–4) bán kính 2 **D.** Đường tròn tâm I(3;–4) bán kính 3.

Lời giải.

Điều kiện: $z\neq3-4i$

Gọi $M(x;y)$ với $(x;y)\neq(3;-4)$ là điểm biểu diễn số phức: $z=x+yi;x,y\in\mathbb{R}$

Khi đó: $\log_2|z-(3-4i)|=1\Leftrightarrow|z-(3-4i)|=2$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=2\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+4)^2=4$

Vậy tập hợp các điểm số phức z trong mặt phẳng tọa độ là đường tròn tâm $I(3;-4)$ bán kính $R=2$.

Chọn C.

Ví dụ 12 Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn điều kiện: $|z|^2-5z-5\overline{z}=0$.

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ. **B.** Đường tròn bán kính 1

C. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 5 **D.** Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 3.

Lời giải.

Đặt: $z=x+yi$, ta có $\overline{z}=x+yi$.

Do đó: $|z|^2-5z-5\overline{z}=0\Leftrightarrow x^2+y^2-5x-5yi-5x+5yi=0\Leftrightarrow(x-5)^2+y^2=25$

Trên mặt phẳng tọa độ, đó là tập hợp các điểm thuộc đường tròn bán kính bằng 5 và tâm là $I(5;0)$.

Chọn C.

Ví dụ 13 Trên mặt phẳng tọa độ *Oxy*, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức *z* thỏa mãn điều kiện $|zi-(2+i)|=2$.

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ.
B. Đường tròn bán kính 1
C. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 5
D. Đường tròn tâm I(1; –2) bán kính 2.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi,\ x,y\in R$, ta có:

$|zi-(2+i)|=2 \Leftrightarrow |-y-2+(x-1)i|=2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=4$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm I(1; –2) và bán kính R = 2.

Chọn D.

Ví dụ 14 Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1|=|z-i|$.

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ.
B. Đường tròn bán kính 1
C. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 5
D. Đường tròn tâm I(1; –2) bán kính 2.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi,\ x,y\in R$, ta có: $|z+1|=|z-i| \Leftrightarrow |(x+1)+yi|^2=|x+(y-1)i|^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+1+2x+y^2=x^2+y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow y=-x$

Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường thẳng $y=-x$ đi qua gốc tọa độ.

Chọn A.

Ví dụ 15 Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|2+z|<|2-z|$.

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ.
B. Đường tròn bán kính 1
C. Nửa trái của mặt phẳng tọa độ không kể trục Oy.
D. Đường tròn tâm I(1; –2) bán kính 2.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi,\ x,y\in R$, ta có :

$|2+z|<|2-z| \Leftrightarrow |2+z|^2<|2-z|^2$

$\Leftrightarrow |(2+x)+iy|^2<|(2-x)-iy|^2$

$\Leftrightarrow (2+x)^2+y^2<(2-x)^2+(-y)^2$

$\Leftrightarrow x<0$

Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là nửa trái của mặt phẳng tọa độ không kể trục Oy.

Chọn C.

Dạng 3. Giải phương trình

Ví dụ 16 Giải phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ trên tập số phức. Chọn phát biểu đúng:

A. Phương trình chỉ có 1 nghiệm.

B. Phương trình này vô nghiệm.

C. Phương trình có hai nghiệm $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

D. Phương trình có hai nghiệm $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Lời giải.

Phương trình có: $\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$

Do đó phương trình có hai nghiệm $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Chọn C.

Ví dụ 17 Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$ trên tập số phức. Tìm mô-đun của số phức: $w = (z_1 - 1)^{2015} + (z_2 - 1)^{2016}$.

A. $|w| = \sqrt{5}$ **B.** $|w| = \sqrt{2}$ **C.** $|w| = 1$ **D.** $|w| = \sqrt{3}$

Lời giải.

Phương trình: $z^2 - 2z + 2 = 0$ có $\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z_1 = 1 - i \\ z_2 = 1 + i \end{array}\right.$

Thay $z_1 = 1 - i$ vào w ta được $\mathrm{w} = (-i)^{2015} + i^{2016} = -(i^2)^{1007}.i + (i^2)^{1013} = -1 + i$.

Thay $z_2 = 1 + i$ vào $\mathrm{w} = i^{2015} + (-i)^{2016} = (i^2)^{1002}.i + (i^2)^{1003} = -1 + i$.

Vậy $|w| = \sqrt{2}$

Chọn B.

Ví dụ 18 Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\frac{z-11}{z-2} = z - 1$. Hãy tính $\left|\frac{z-4i}{z+2i}\right|$?

A. $\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{29}}$ **B.** $\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{28}}$ **C.** $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{29}}$ **D.** $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{29}}$

Lời giải.

Ta có: $\frac{z-11}{z-2} = z - 1 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 13 = 0$, $\Delta' = -9 = 9i^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 + 3i \\ z = 2 - 3i \end{array}\right.$

Do đó

- $z = 2 + 3i \Rightarrow \left|\frac{z-4i}{z+2i}\right| = \left|\frac{2-i}{2-i}\right| = 1$

$z = 2 - 3i \Rightarrow \left|\dfrac{z-4i}{z+2i}\right| = \left|\dfrac{2-7i}{2+5i}\right| = \dfrac{\sqrt{53}}{\sqrt{29}}$

Chọn A.

Ví dụ 19 Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình: $z^2 - 2z + 5 = 0$ trên tập số phức. Hãy tính giá trị của biểu thức: $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. 11 **B.** 10 **C.** 12 **D.** $x = \pm 2$

Lời giải.

Phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ có $\Delta' = -4 < 0$ nên nó có hai nghiệm phức phân biệt là $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 1 - 2i$.

Khi đó $|z_1|^2 = |z_2|^2 = 5$. Do đó $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 10$

Chọn B.

Ví dụ 20 Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2(1+i)z^2 - 4(2-i)z - 5 - 3i = 0$. Tính $|z_1|^2 + |z_2|^2$?

A. 9 **B.** 10 **C.** 1 **D.** 12

Lời giải.

Phương trình: $\Delta' = 4(2-i)^2 + 2(1+i)(5+3i) = -16$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phức: $z_1 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i,\ z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Vậy $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 9$

Chọn A.

Phần II: BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài tập 1.

Cho số phức z thỏa mãn: $(1+2z)(3+4i)+5+6i=0$. Tìm số phức $w=1+z$?

A. $w=-\frac{7}{25}+\frac{1}{25}i$ **B.** $w=\frac{7}{25}+\frac{1}{25}i$ **C.** $w=-\frac{7}{25}-\frac{1}{25}i$ **D.** $w=-\frac{7}{25}+\frac{1}{5}i$

Lời giải

Gọi $z=a+bi,$ với $a,b\in R$. Ta có: $(1+2z)(3+4i)+5+6i=0$

$\Leftrightarrow(2a+1+2bi)(3+4i)+5+6i=0\Leftrightarrow(6a-8b+8)+(8a+6b+10)i=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6a-8b+8=0\\8a+6b+10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{32}{25}\\b=\dfrac{1}{25}\end{cases}\Rightarrow z=-\frac{32}{25}+\frac{1}{25}i\Rightarrow w=1+z=-\frac{7}{25}+\frac{1}{25}i.$$

Bài tập 2.

Tìm phần thực và phần ảo của số phức sau: $z=\frac{3-5i}{1+4i}+(5-2i)(-3-i)$?

A. 0; -18 **B.** -18 ; 0 **C.** 18 ; 0 **D.** 0 ; 18

Lời giải

Thực hiện đúng: $\frac{3-5i}{1+4i}=-1-i$

Tính $(5-2i)(-3-i)=-17+i$. Vậy $z=-18\Rightarrow$ phần thực: -18 ; phần ảo: 0

Chọn đáp án B.

Bài tập 3.

Cho số phức z thỏa mãn: $(1+i)z+(3-i)\overline{z}=2-6i$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $w=2z+1$.

A. 6 ; 5 **B.** 5 ; -6 **C.** -5 ; -6 **D.** 5 ; 6

Lời giải

Giả sử $z=a+bi(a,b\in R)\Rightarrow\overline{z}=a-bi$, khi đó:

$(1+i)z+(3-i)\overline{z}=2-6i\Leftrightarrow(1+i)(a+bi)+(3-i)(a-bi)=2-6i\Leftrightarrow4a-2b-2bi=2-6i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4a-2b=2\\-2b=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$$

Vậy: $z=2+3i$

Do đó $w=2z+1=2\left(2+3i\right)+1=5+6i$

Vậy số phức w có phần thực là 5, phần ảo là 6.

Chọn đáp án D.

Bài tập 4.

Tính mô-đun của số phức $z=(1-2i)(2+i)^2$.

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\pm 5\sqrt{5}$ **C.** $5\sqrt{5}$ **D.** $-5\sqrt{5}$

Lời giải

$z=(1-2i)(2+i)^2=(1-2i)(4+4i+i^2)=(1-2i)(3+4i)=3+4i-6i-8i^2=11-2i$

Vậy $z=11-2i \Rightarrow |z|=\sqrt{11^2+2^2}=5\sqrt{5}$

Chọn đáp án C.

Bài tập 5.

Cho số phức z = 3 – 2i. Tính mô đun của số phức $w=\dfrac{z^2}{z+\overline{z}}$

A. $\dfrac{13}{6}$ **B.** $-\dfrac{13}{6}$ **C.** $-\dfrac{6}{13}$ **D.** $\dfrac{6}{13}$

Lời giải

$z^2=(3-2i)^2=5-2i$ và $z+\overline{z}=6$

$+\ w=\dfrac{5-12i}{6}$

$+\ w=\dfrac{5}{6}+2i$

$+\ |w|=\sqrt{\dfrac{25}{36}+4}=\dfrac{13}{6}$

Chọn đáp án A.

Bài tập 6.

Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$ biết $\left(1+5i\right)z-23-11i=0$

A. 3; 4 **B.** 4 ; 3 **C.** -3; -4 **D.** -4; -3

Lời giải

$z=\dfrac{23+11i}{1+5i}=3-4i$; $\overline{z}=3+4i$.

Vậy phần thực, phần ảo của số phức $\overline{z}$ lần lượt là 3, 4.

Chọn đáp án A.

Bài tập 7.

Cho hai số phức z1, z2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=1$; $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$. Tính $|z_1-z_2|$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Lời giải

Ta có: $z_1=a_1+b_1i$; $z_2=a_2+b_2i$ $(a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R})$

$$\begin{cases}|z_1|=|z_2|=1\\|z_1+z_2|=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2=1\\(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2=3\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2(a_1b_1+a_2b_2)=1\Rightarrow(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=1$.

Vậy: $|z_1-z_2|=1$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 8.

Tìm số phức z thỏa mãn: $(2+i)z=i.\overline{z}+1-i$

A. $z=-\frac{1}{2}i$ B. $z=\frac{1}{2}i$ C. $z=-\frac{3}{2}i$ D. $z=-i$

Lời giải

Giả sử: $z=a+bi$; $a,b\in R\Rightarrow(2+i)z=i.\overline{z}+1-i\Leftrightarrow(2+i)(a+bi)=i.(a-bi)+1-i$

$\Leftrightarrow 2a+2bi+ai-b-ai-b-1+i=0\Leftrightarrow 2a-2b-1+(2b+1)i=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-2b-1=0\\b=-1/2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-1/2\end{cases}\Rightarrow z=\frac{-1}{2}i$$

Chọn đáp án A.

Bài tập 9.

Giải phương trình trên tập số phức: $\frac{12z+i-11}{2-iz}=1+7i$

A. $z=3-2i$ B. $z=3+2i$ C. $z=2+3i$ D. $z=2-3i$

Lời giải

Phương trình tương đương:

$z(5+i)=13+13i$

$$z=\frac{(13+13i)(5-i)}{(5+i)(5-i)}=3+2i$$

Chọn đáp án B.

Bài tập 10.

Cho số phức z thỏa mãn: (2 + i)z = 4 – 3i. Tính mô-đun của $w = iz + (1+i)\overline{z}$?

A. $|W| = \sqrt{17}$ **B.** $|W| = 17$ **C.** $|W| = \sqrt{16}$ **D.** $|W| = 16$

Lời giải

+) Số phức $z = \dfrac{4-3i}{2+i} = \dfrac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{5-10i}{5} = 1-2i$

$\Rightarrow w = iz + (1+i)\overline{z} = i(1-2i) + (1+i)(1+2i) = 1+4i \Rightarrow |w| = \sqrt{17}$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 11.

Tìm mô-đun của số phức $\overline{z}$ biết $(2+i^3)z + 1 + 3i = z + i^4$?

A. $\dfrac{3}{2}$ **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Ta có: $(2+i^3)z + 1 + 3i = z + i^4 \Leftrightarrow (2-i)z - z = -1 - 3i + 1$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-3i}{1-i} \Leftrightarrow z = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i$

Do đó $|\overline{z}| = |z| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án C.

Bài tập 12.

Tìm mô-đun của số phức z, biết $2z - 1 + i.\overline{z} = 3 + 5i$?

A. $|Z| = \sqrt{5}$ **B.** $|Z| = 5$ **C.** $|Z| = 5\sqrt{5}$ **D.** $|Z| = 7\sqrt{5}$

Lời giải

$z = a + bi$, giả thiết $\Leftrightarrow 2(a+bi) - 1 + i(a-bi) = 3 + 5i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b - 1 = 3 \\ 2b + a = 5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = 1; b = 2 \Rightarrow z = 1 + 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{5}$

Chọn đáp án A.

Bài tập 13.

Tìm phần thực và phần ảo của số phức z, biết $z+(1-i)\overline{z}=8-3i$?

A. $\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a=-3\\b=-2\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a=3\\b=-3\end{cases}$

Lời giải

$z=a+bi$, giả thiết $\Leftrightarrow a+bi+(1-i)(a-bi)=8-3i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2a-b=8\\-a=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}$

$\Rightarrow z=3-2i \Rightarrow$ phần thực của z bằng 3, phần ảo của z bằng –2.

Chọn đáp án A.

Bài tập 14.

Cho số phức z thoả mãn: $(z-i)(1-2i)-1-3i=0$. Tính mô-đun của số phức $w=z^2-\overline{z}$.

A. $|W|=5\sqrt{2}$ **B.** $|W|=2\sqrt{2}$ **C.** $|W|=\sqrt{2}$ **D.** $|W|=3\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có: $z-i=\dfrac{1+3i}{1-2i}=\dfrac{(1+3i)(1+2i)}{5}=-1+i \Rightarrow z=-1+2i.$

Vì vậy: $w=(-1+2i)^2-(-1-2i)=-2-2i \Rightarrow |w|=2\sqrt{2}.$

Chọn đáp án B.

Bài tập 15.

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+2i)z+(1-2\overline{z})i=1+3i$. Tính mô-đun của z.

A. $|z|=\sqrt{85}$ **B.** $|z|=\sqrt{83}$ **C.** $|z|=2\sqrt{85}$ **D.** $|z|=3\sqrt{85}$

Lời giải

Đặt: $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ ta có:

$(1+2i)z+(1-2\overline{z})i=1+3i \Leftrightarrow a-4b+(b+1)i=1+3i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a-4b=1\\b+1=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=9\\b=2\end{cases}.$

Vậy mô-đun của z là $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9^2+2^2}=\sqrt{85}$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 16.

Cho số phức: $z=\dfrac{2(1+i)^2+3(1-2i)}{1+i}$. Tìm $|z|$

A. $|z|=\dfrac{\sqrt{26}}{3}$ **B.** $|z|=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ **C.** $|z|=\dfrac{5}{2}$ **D.** $|z|=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$

Lời giải

$$z=\frac{3-2i}{1+i}=\frac{(3-2i)(1-i)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

Chọn đáp án D.

Bài tập 17.

Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2-2z+5=0$. Tính $A=\left|z_1^2\right|+\left|z_2^2\right|-3z_1z_2$

A. $A=-10$ **B.** $A=10$ **C.** $A=-9$ **D.** $A=-8$

Lời giải

$z_1=1-3i;\qquad z_2=1+3i$

$$A=\left|z_1^2\right|+\left|z_2^2\right|-3z_1.z_2=\left|(1-3i)^2\right|+\left|(1+3i)^2\right|-3(1-3i)(1+3i)$$

$$|-8-6i|+|-8+6i|-3.10=\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}+\sqrt{(-8)^2+6^2}-30=-10$$

Chọn đáp án A.

Bài tập 18.

Tìm số phức z thoả mãn đẳng thức: $z+2\bar{z}=3-2i$

A. $z=2+2i$ **B.** $z=1+2i$ **C.** $z=1-2i$ **D.** $z=1+3i$

Lời giải

$$z+2\bar{z}=3-2i\Leftrightarrow a+bi+2(a-bi)=3-2i$$

$$\Leftrightarrow 3a-bi=3-2i\Leftrightarrow\begin{cases}3a=3\\-b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$$

Với $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Rightarrow z=1+2i$

Chọn đáp án B.

Bài tập 19.

Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z=4-3i$. Tìm mô-đun của số phức $w=iz+2\overline{z}$.

A. $|w|=\sqrt{41}$ **B.** $|w|=\sqrt{43}$ **C.** $|w|=\sqrt{53}$ **D.** $|w|=\sqrt{23}$

Lời giải

$(2+i)z=4-3i \Leftrightarrow z=1-2i$

$w=iz+2\overline{z}=i(1-2i)+2(1+2i)=4+5i$. Vậy $|w|=\sqrt{41}$

Chọn đáp án A.

Bài tập 20.

Tìm phần ảo của số phức z, biết: $(1-2i)z+3-i=(1+i)\overline{z}$?

A. $b=-3$ **B.** $b=3$ **C.** $b=2$ **D.** $b=-2$

Lời giải

Giả sử $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow \overline{z}=a-bi$. Từ giả thiết ta suy ra: $(1-2i)(a+bi)+3-i=(1+i)(a-bi)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+2b+3=a+b \\ b-2a-1=a-b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-3 \\ a=-\dfrac{7}{3} \end{array}\right.$. Vậy phần ảo của z bằng -3.

Chọn đáp án A.

Bài tập 21.

Tìm mô đun của số phức z thỏa mãn: $(1+i)z=(2+i)(3-i)$.

A. $|z|=5$ **B.** $|z|=6$ **C.** $|z|=7$ **D.** $|z|=8$

Lời giải

$(1+i)z=(2+i)(3-i)\Leftrightarrow(1+i)z=7+i\Leftrightarrow 2z=(7+i)(1-i)\Leftrightarrow z=4-3i$

$\Rightarrow |z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5.$

Chọn đáp án A.

Bài tập 22.

Cho số phức $z=3-2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w=iz-\overline{z}$?

A. $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $z=3-2i\Rightarrow \overline{z}=3+2i\Rightarrow w=i(3-2i)-(3+2i)=-1+i$

$\Leftrightarrow w = -1 + i$

Vậy số phức w có phần thực là −1, phần ảo là 1

Chọn đáp án A.

Bài tập 23.

Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z+(3-i)\overline{z}=2-6i$. Tìm mô-đun của số phức z?

A. $|z|=\sqrt{5}$ **B.** $|z|=\sqrt{13}$ **C.** $|z|=\sqrt{3}$ **D.** $|z|=\sqrt{15}$

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$, khi đó:

$(*)\Leftrightarrow(1+i)(a+bi)+(3-i)(a-bi)=2-6i\Leftrightarrow 4a-2b-2bi=2-6i\Leftrightarrow\begin{cases}4a-2b=2\\-2b=-6\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\Rightarrow z=2+3i\Rightarrow|z|=\sqrt{13}$

Chọn đáp án B.

Bài tập 24.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=|1+3i|$?

A. $\begin{cases}I=(-2;1)\\R=\sqrt{10}\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}I=(-1;1)\\R=\sqrt{10}\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}I=(-2;3)\\R=\sqrt{10}\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}I=(-2;5)\\R=\sqrt{10}\end{cases}$

Lời giải

Gọi số phức $z=x+yi,(x;y\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$.

$|z+2-i|=|1+3i|\Leftrightarrow|x+yi+2-i|=|1+3i|\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-1)^2=10$,

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(-2;1)$, bán kính $R=\sqrt{10}$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 25.

Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $(1+2i)z+(2-3i)\overline{z}=-2-2i$. Tính mô đun của z?

A. $|z|=4\sqrt{2}$ **B.** $|z|=3\sqrt{2}$ **C.** $|z|=2\sqrt{2}$ **D.** $|z|=\sqrt{2}$

Lời giải

Gọi $z=x+yi$, $(x,y\in R)$. Phương trình đã cho trở thành: $(1+2i)(x+yi)+(2-3i)(x-yi)=-2-2i$

$\Leftrightarrow(x-2y)+(2x+y)i+(2x-3y)+(-3x-2y)i=-2-2i$

$\Leftrightarrow (3x-5y)+(-x-y)i=-2-2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5y=-2 \\ -x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Do đó: $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Chọn đáp án D.

Bài tập 26.

Cho số phức $z=a+bi$ (a, b $\in$ R) thỏa mãn điều kiện: $(3+i)z+(1+i)(2+i)=5-i$. Tìm phần thực và phần ảo của z?

A. $\begin{cases} a=\dfrac{14}{5} \\ b=\dfrac{-8}{5} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a=\dfrac{4}{5} \\ b=\dfrac{-8}{5} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a=\dfrac{4}{5} \\ b=\dfrac{8}{5} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a=\dfrac{4}{5} \\ b=\dfrac{-7}{5} \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $(3+i)z+(1+i)(2+i)=5-i \Leftrightarrow (3+i)z=4-4i \Leftrightarrow z=\dfrac{4-4i}{3+i}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{8}{5}i$

Số phức z có phần thực bằng $\dfrac{4}{5}$, phần ảo bằng $-\dfrac{8}{5}$.

Chọn đáp án B.

Bài tập 27.

Trong mặt phẳng Oxy, tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn: $z(2i-1)-i+2=0$?

A. $M\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$ **B.** $M\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{7}\right)$ **C.** $M\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{3}{5}\right)$ **D.** $M\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{3}{5}\right)$

Lời giải

$z(2i-1)-i+2=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{i-2}{2i-1}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$

Vậy điểm biểu diễn số phức z là $M\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 28.

Tìm số phức liên hợp của số phức z, biết $(1-i)z+(2-i)=4-5i$?

A. $\overline{z}=3+i$ **B.** $\overline{z}=3-i$ **C.** $\overline{z}=3+2i$ **D.** $\overline{z}=5+i$

Lời giải

$(1-i)z+(2-i)=4-5i \Leftrightarrow (1-i)z=2-4i$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{2-4i}{1-i}=3-i \Rightarrow \overline{z}=3+i$

Chọn đáp án A.

Bài tập 29.

Tìm phần thực và phần ảo của số phức z biết số phức z thỏa mãn: $\overline{z}+\dfrac{1+3i}{1-i}=3+4i$?

A. $\begin{cases} a=4 \\ b=-2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a=4 \\ b=-7 \end{cases}$

Lời giải

$\overline{z}+\dfrac{1+3i}{1-i}=3+4i \Leftrightarrow \overline{z}+\dfrac{(1+3i)(1+i)}{2}=3+4i \Leftrightarrow \overline{z}-1+2i=3+4i \Leftrightarrow \overline{z}=4+2i$

$\overline{z}=4+2i$ Vậy $z=4-2i$

Vậy phần thực của số phức z là 4, phần ảo của số phức z là -2

Chọn đáp án A.

Bài tập 30.

Cho số phức z thỏa mãn: $(1-i)z+2i\overline{z}=5+3i$. Tìm mô-đun của $w=2(z+1)-\overline{z}$?

A. $|w|=5$ **B.** $|w|=7$ **C.** $|w|=9$ **D.** $|w|=11$

Lời giải

Giả sử: $z=a+bi$; $a,b\in R \Rightarrow (1-i)z+2i.\overline{z}=5+3i \Leftrightarrow (1-i)(a+bi)+2i.(a-bi)=5+3i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=5 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow z=2+i$

Khi đó ta có: $w=2(3+i)-(2-i)=4+3i \Rightarrow |w|=\sqrt{16+9}=5$

Chọn đáp án A.

Bài tập 31.

Cho số phức $z=a+bi$ (a, b $\in$ R) thỏa mãn $(1+2i)z-5-5i=0$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w=\overline{z}+\dfrac{10}{z}$?

A. $\begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a=6 \\ b=3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a=7 \\ b=2 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a=6 \\ b=5 \end{cases}$

Lời giải

Ta có $(1+2i)z-5-5i=0 \Leftrightarrow z=3-i$

$w=\bar{z}+\frac{10}{z}=3+i+\frac{10}{3-i}=6+2i$

Do đó số phức w có phần thực là 6, phần ảo là 2.

Chọn đáp án A.

Bài tập 32.

Tìm mô-đun của số phức $\bar{z}$ biết $(2+i^3)z+1+3i=z+i^4$.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ **D.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Ta có: $(2+i^3)z+1+3i=z+i^4$

$\Leftrightarrow (2-i)z-z=-1-3i+1$

$\Leftrightarrow z=\frac{-3i}{1-i} \Leftrightarrow z=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$

Do đó: $|\bar{z}|=|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 33.

Giải phương trình sau trên tập số phức: $\frac{2-i}{2+i}z=\frac{-1+3i}{2-i}$

A. $z=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i$ **B.** $z=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i$ **C.** $z=\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i$ **D.** $z=-\frac{7}{5}-\frac{2}{5}i$

Lời giải

Phương trình được viết lại $z=\frac{-5+5i}{3-4i}=\frac{(-5+5i)(3+4i)}{3^2+4^2}=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i$

Chọn đáp án A.

Bài tập 34.

Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)\bar{z}-1-3i=0$. Tìm phần ảo của số phức $w=1-zi+\bar{z}$.

A. -1 **B.** - 2 **C.** - 3 **D.** - 4

Lời giải

Giả sử $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow \bar{z}=x-yi$.

Theo giả thiết, ta có $(1+i)(x-yi)-1-3i=0=0 \Leftrightarrow (x+y-1)+(x-y-3)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

Suy ra: $z=2-i$.

Ta có $w = 1-(2-i)i+2+i = 3+i^2-2i+i = 2-i$. Vậy phần ảo của số phức w là -1

Chọn đáp án A.

Bài tập 35.

Cho số phức z thỏa mãn : $(1+2i)z+(2-3i)\overline{z} = -2-2i$. Tính mô-đun của $w = 1+z+z^2$.

A. $\sqrt{12}$ B. $\sqrt{13}$ C. $\sqrt{14}$ D. $z = 1+2i$

Lời giải

Gọi $z = x + iy$, $(x, y \in R)$.

Hệ thức trở thành: $(1+2i)(x+yi)+(2-3i)(x-yi) = -2-2i$ (1)

$(1) \Leftrightarrow (3x-5y)+(-x-y)i = -2-2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5y=-2 \\ -x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy $z = 1+i$

Do đó $w = 1+z+z^2 = 1+(1+i)+(1+i)^2 = 2+3i \Rightarrow |w| = \sqrt{13}$

Chọn đáp án B

Bài tập 36.

Tìm số phức z thỏa mãn $(1+i)z+(3-i)\overline{z} = 2-6i$?

A. $z = 2+7i$ B. $z = 5+3i$ C. $z = 2+3i$ D. $z = 1+3i$

Lời giải

Đặt: $z = a+bi, (a, b \in \mathbb{R})$, hệ thức viết thành: $(4a-2b-2)+(6-2b)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a-2b-2=0 \\ 6-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow z = 2+3i$

Chọn đáp án C.

Bài tập 37.

Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+5=0$. Tính độ dài đoạn AB, biết A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2.

A. $AB = 4/3$ B. $AB = 3$ C. $AB = 4$ D. $AB = 3/4$

Lời giải

Xét phương trình: $z^2-2z+5=0$. $\Delta' = 1-5 = -4 = (2i)^2$

Phương trình có hai nghiệm $z_1 = 1-2i$; $z_2 = 1+2i$

Ta có: $A(1;-2)$; $B(1;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0;4) \Rightarrow AB = 4$

Chọn đáp án C.

Bài tập 38.

Cho số phức z thỏa mãn: $(2+i)z=4-3i$. Tìm mô-đun của số phức $w=iz+2\overline{z}$.

A. $|w|=\sqrt{41}$ **B.** $|w|=2\sqrt{41}$ **C.** $|w|=3\sqrt{41}$ **D.** $|w|=4\sqrt{41}$

Lời giải

$(2+i)z=4-3i \Leftrightarrow z=\dfrac{4-3i}{2+i} \Leftrightarrow z=1-2i$

$w=iz+2\overline{z} \Rightarrow w=i(1-2i)+2(1+2i)=4+5i$

Vậy $|w|=\sqrt{41}$

Chọn đáp án A.

Bài tập 39.

Cho số phức z thỏa mãn: $z=1+2i$. Tính mô-đun của số phức: $w=6+z^2$.

A. $|w|=4$ **B.** $|w|=5$ **C.** $|w|=6$ **D.** $|w|=7$

Lời giải

$w=6+(1+2i)^2=3+4i \Rightarrow |w|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

Chọn đáp án B

Bài tập 40.

Tìm $z\in\mathbb{C}$ thỏa mãn: $(1-z)(1+i)+\overline{z}(2-i)=3+6i$

A. $z=2-3i$ **B.** $z=2+3i$ **C.** $z=3-3i$ **D.** $z=2-i$

Lời giải

Gọi $z=a+b\,(a,b\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=a-bi$

Thay vào phương trình và giải tìm được: $z=2-3i$

Chọn đáp án A.

Bài tập 41.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1-i|=2$.

A. $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

B. $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

C. $(x+1)^2+(y-1)^2=8$

D. $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

Lời giải

$M(x;y), x,y\in R \Rightarrow z=x+yi \Rightarrow |z+1-i|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=2$

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn: $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

Chọn đáp án A.

Bài tập 42.

Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in R)$ z thỏa mãn $(1-i)z - 1 + 3i = 0$. Tìm phần thực và phần ảo của z

A. $\begin{cases} a=2 \\ b=-5 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Lời giải

$(1-i)z - 1 + 3i = 0 \Leftrightarrow (1-i)z = 1 - 3i$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{1-3i}{1-i}=\dfrac{(1-3i).(1+i)}{(1-i).(1+i)}=\dfrac{1-2i-3i^2}{2}=2-i$

Vậy phần thực của z là 2; phần ảo của z là -1.

Chọn đáp án B.

Bài tập 43.

Cho số phức z thỏa mãn $(1-2i)z+i = 4-i+iz$ (*). Tìm số phức $w = z^2-2\overline{z}$?

A. $w=-2+4i$ **B.** $w=-2-4i$ **C.** $w=2+4i$ **D.** $w=-3+4i$

Lời giải

(*) $\Rightarrow (1-3i)z = 4-2i \Leftrightarrow z=\dfrac{4-2i}{1-3i} \Leftrightarrow z=1+i$

$w=(1+i)^2-2(1-i)=-2+4i$

Chọn đáp án A.

Bài tập 44.

Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = a + bi$ (a, b $\in$ R) biết $\bar{z} = (\sqrt{2}+i)^2(1-i\sqrt{2})$

A. $\begin{cases} a=5 \\ b=-\sqrt{3} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a=5 \\ b=\sqrt{2} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a=5 \\ b=-\sqrt{2} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a=4 \\ b=-\sqrt{2} \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\bar{z} = (\sqrt{2}+i)^2(1-i\sqrt{2}) = (1+2\sqrt{2})(1-i\sqrt{2}) = 5+\sqrt{2}i$

Suy ra: $z = 5 - i\sqrt{2}$

Vậy phần thực và phần ảo của z lần lượt là $5,\ -\sqrt{2}$

Chọn đáp án C.

Bài tập 45.

Cho số phức z thỏa mãn: $2z + i\bar{z} = 4 - i$. Tìm mô-đun của z.

A. $|z| = \sqrt{13}$ **B.** $|z| = \sqrt{15}$ **C.** $|z| = \sqrt{17}$ **D.** $|z| = \sqrt{19}$

Lời giải

Đặt: $z = a + bi$ với $a, b \in R$, suy ra $\bar{z} = a - bi$

$2z + i\bar{z} = 4 - i \Leftrightarrow 2(a+bi) + i(a-bi) = 4 - i \Leftrightarrow 2a + b + (2b+a)i = 4 - i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=4 \\ 2b+a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$ Suy ra $z = 3 - 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{13}$

Chọn đáp án A.

Bài tập 46.

Cho số phức z thỏa mãn $2z - i.\bar{z} = 3$. Tìm z?

A. $z = 2 + 5i$ **B.** $z = 2 + i$ **C.** $z = 2 + 2i$ **D.** $z = 3 + i$

Lời giải

$z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có: $2z - i.\bar{z} = 3 \Leftrightarrow 2a - b + (2b - a)i = 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=3 \\ 2b-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$. Vậy $z = 2 + i$

Chọn đáp án B.

Bài tập 47.

Xác định phần thực, phần ảo, mô-đun của số phức z thỏa mãn $z-12i=2\bar{z}-3$.

A. $|z|=5$ **B.** $|z|=6$ **C.** $|z|=7$ **D.** $|z|=8$

Lời giải

+ Gọi $z=a+bi$ (a, b là số thực, $i^2=-1$)

+ Ta có: $z-12i=2\bar{z}-3 \Leftrightarrow a+bi-12i=2(a-bi)-3 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2a-3 \\ b-12=-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$

+ Vậy $z=3+4i$, phần thực của z là 3, phần ảo của z là 4, mô-đun là $|z|=5$

Chọn đáp án A.

Bài tập 48.

Giải phương trình: $(z^2+2z)^2+5(z^2+2z)+6=0$ trên tập hợp các số phức

A. $\left[\begin{array}{l} z=-1\pm i \\ z=-1\pm i\sqrt{2} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} z=-1\pm i \\ z=1\pm i\sqrt{2} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} z=1\pm i \\ z=-1\pm i\sqrt{2} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} z=-2\pm i \\ z=-1\pm i\sqrt{2} \end{array}\right.$

Lời giải

$(z^2+2z)^2+5(z^2+2z)+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+2z=-2 \\ z^2+2z=-3 \end{array}\right.$

$z^2+2z=-2 \Leftrightarrow z^2+2z+2=0 \Leftrightarrow z=-1\pm i$

$z^2+2z=-3 \Leftrightarrow z^2+2z+3=0 \Leftrightarrow z=-1\pm i\sqrt{2}$

Chọn đáp án A.

Bài tập 49.

Cho số phức z thoả mãn: $(2-i)z-\dfrac{2+6i}{1+i}=3+2i$. Tính $(zi+\bar{z})^{20}$.

A. -1023 **B.** -1024 **C.** -1025 **D.** -1026

Lời giải

Ta có: $(2-i)z-\dfrac{2+6i}{1+i}=3+2i \Leftrightarrow (2-i)z=7+4i$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{7+4i}{2-i}=\dfrac{(7+4i)(2+i)}{5}=2+3i$

$(zi+\bar{z})^{20}=(2i-3+2-3i)^{20}=\left[(-1-i)^2\right]^{10}=(2i)^{10}=-2^{10}=-1024$

Chọn đáp án B.

Bài tập 50.

Cho số phức $z=1-i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w=\dfrac{z^2+z+1}{\overline{z}}$?

A. $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{5}{2}\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{5}{2}\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\\\dfrac{5}{2}\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}\dfrac{1}{2}\\\dfrac{5}{2}\end{cases}$

Lời giải

Ta có: $w=\dfrac{(1-i)^2+(1-i)+1}{(1+i)}=\dfrac{2-3i}{1+i}=\dfrac{(2-3i)(1-i)}{2}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$

Vậy w có phần thực bằng $-\dfrac{1}{2}$, phần ảo bằng $-\dfrac{5}{2}$

Chọn đáp án A.

Enrico Fermi (1901-1954)

Nơi sinh: Rome, Italy (công dân Mỹ)

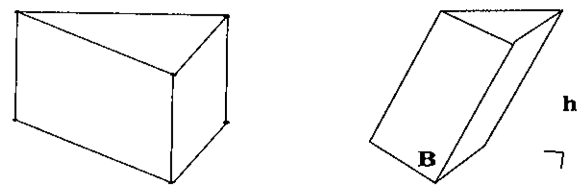
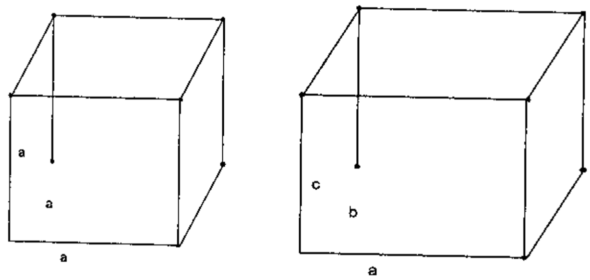
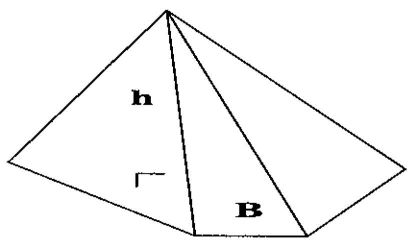
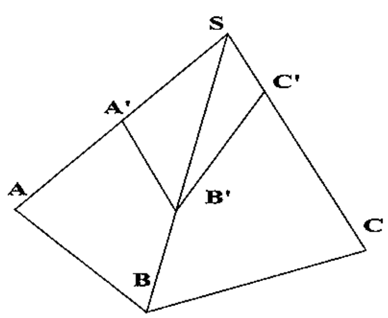
Nhà vật lý học người Mỹ Enrico Fermi là người có nhiều đóng góp cho vật lý hạt nhân. Ông là người đầu tiên đã phân chia được các nguyên tử, mặc dù tại thời điểm đó bản thân ông cũng không nhận ra được điều này. Ông được biến đến với công trình phát triển lò phản ứng hạt nhân đầu tiên, và phát triển lý thuyết lượng tử. Sự kiện này đã dẫn đến việc thử nghiệm thành công vũ khí nguyên tử đầu tiên. Fermi đoạt giải thưởng Nobel vật lý năm 1938 với những thành tựu liên quan đến phóng xạ. Tên của ông đã được đặt cho một nguyên tố tổng hợp – Fermium (có số nguyên tử là 100), phòng Thí nghiệm Quốc gia Fermi và kính viễn vọng tia Gamma Fermi.

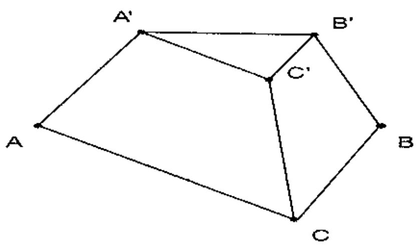
Chuyên đề 5. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Để học tốt phần này cần phải nắm vững tính chất của các khối lăng trụ, khối chóp và các kiến thức hình không gian từ lớp 11, kiến thức hình phẳng lớp 9. Tuy đề thi ở dạng trắc nghiệm nhưng đặc thù phần này học sinh phải vẽ hình ra, tính toán chính xác mới chọn được đáp án chính xác. Trong chuyên đề này tác giả trình bày các ví dụ dưới dạng tự luận, có đầy đủ lời giải chi tiết để học sinh hiểu rõ bản chất hình học.

Phần I: CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN

I. CÔNG THỨC TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN:

1. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ: $V = S.h$ Với S diện tích đáy, h là chiều cao lăng trụ.	
a) Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$ Với a, b, c là ba kích thước ***b) Thể tích khối lập phương:*** $V = a^3$ với a là độ dài cạnh	
2. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP: $V = \frac{1}{3}S.h$ Với S diện tích đáy, h là chiều chiều cao khối chóp.	
3. TỈ SỐ THỂ TÍCH TỨ DIỆN: Cho khối tứ diện SABC và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có: $\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}$	

4. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CỤT: $V=\frac{h}{3}\left(B+B'+\sqrt{BB'}\right)$ với B,B' là diện tích hai đáy, h là chiều cao khối chóp cụt.	

Chú ý:

1/ Đường chéo của hình vuông cạnh a dài $a\sqrt{2}$,

Đường chéo của hình lập phương cạnh a dài $a\sqrt{3}$,

Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c dài $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$,

2/ Đường cao của tam giác đều cạnh a là $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

3/ Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên đều bằng nhau (hoặc có đáy là đa giác đều, hình chiếu của đỉnh trùng với tâm của đáy).

4/ Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

II MẶT CẦU, KHỐI CẦU

Định nghĩa mặt cầu:

a) Định nghĩa: Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng cách R cho trước là mặt cầu tâm O và bán kính R. Kí hiệu $S(O;R)$

b) Như vậy khối cầu $S(O;R)$ là tập hợp các điểm M sao cho OM ≤ R

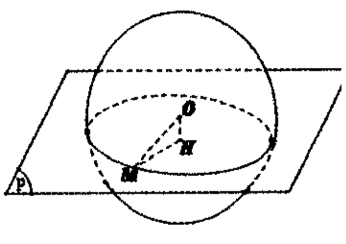
Vị trí tương đối của một mặt phẳng với mặt cầu S(O; R)

c) Cho mặt cầu S(O;R) và mặt phẳng (P), d là khoảng cách từ O tới (P) và H là hình chiếu của O lên (P). Khi đó:

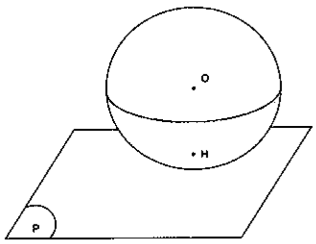
➢ Nếu d<R thì (P) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm H và có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$ (H.1)

➢ Nếu d=R thì (P) cắt mặt cầu tại điểm H duy nhất (H.2)

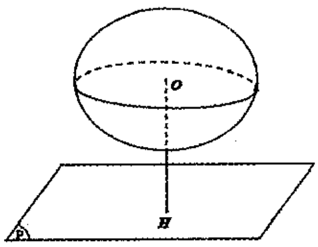
➢ Nếu d>R thì (P) không cắt mặt cầu. (H.3)



(H.1)



(H.2)

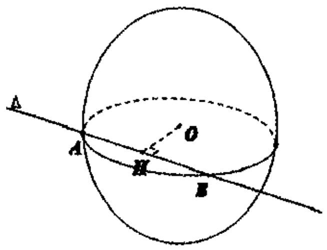


(H.3)

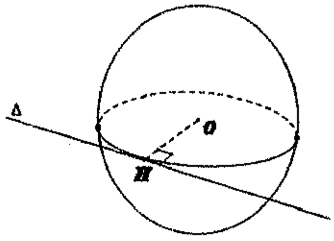
b) Trong trường hợp d=R mặt phẳng (P) và mặt cầu có điểm chung duy nhất là H. Khi đó ta nói mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H. Điểm H gọi là điểm tiếp xúc (hoặc tiếp điểm) của (P) và mặt cầu.

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng.

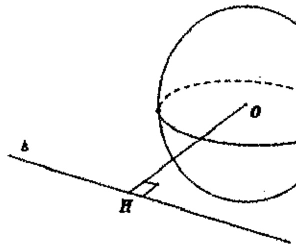
a) Cho mặt cầu S(O;R) và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ và d=OH là khoảng cách từ O đến Δ



(H.3.1)



(H.3.2)



(H.3.3)

- Nếu d<R thì Δ cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt (H.3.1)
- Nếu d=R thì Δ cắt mặt cầu tại 1 điểm duy nhất (H.3.2)
- Nếu d>R thì Δ không cắt mặt cầu (H.3.3)

b) Định lí:

Nếu A nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$ thì qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu. Khi đó:

i/ Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

ii/ Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn nằm trên mặt cầu.

Công thức tính diện tích mặt cầu, thể tích khối cầu:

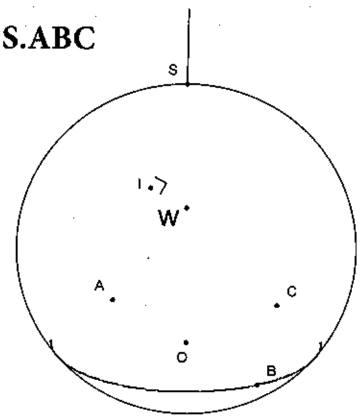
Gọi R là bán kính của mặt cầu, ta có:

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.
- Thể tích khối cầu: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Phương pháp tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

Để tìm mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp bất kì ta cần phải tìm được điểm I cách đều tất cả các đỉnh, muốn như vậy bắt buộc phải dựng được trục của đáy là đường thẳng đi qua tâm của đáy và vuông góc với đáy.

Ta nghiên cứu kĩ hơn trong trường hợp hình chóp có đáp là tam giác:



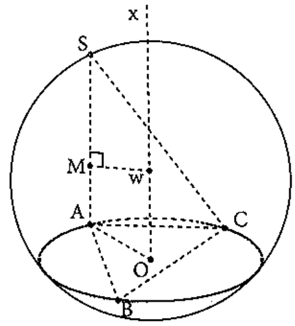
a) Trường hợp $SA = SB = SC = a$

- Vẽ đường $SO \perp \text{mp}(ABC)$

- Trong mp (SAO) vẽ đường trung trực của SA cắt SO tại ω

Lúc đó : mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC có tâm là ω, bán kính $R = \omega S = \dfrac{SA^2}{3SO} = \dfrac{a}{2h}$

b) Trường hợp $SA \perp \text{mp}(ABC)$



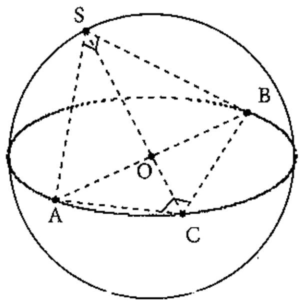
- Gọi O là tâm đường tròn (ABC)

- Vẽ đường thẳng $Ox \perp \text{mp}(ABC)$

- Trên mp(OX, SA)đường trung trực của SA cắt OX tại ω là tâm mặt cầu (SABC) và $\omega A = R = \sqrt{OA^2 + \omega O^2} = \sqrt{OA^2 + \dfrac{SA^2}{4}}$

c) Trường hợp $\widehat{ASB} = \widehat{ACB} = 1v$

Hai điểm S và C cùng nằm trêm mặt cầu đường kính AB.



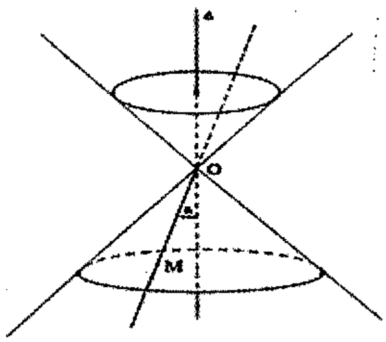
Mặt cầu nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện.

Chú ý: Điều kiện cần và đủ để hình chóp đỉnh S có hình cầu nội tiếp tâm I là trên mặt đáy tồn tại điểm M cách đều các mặt bên cả hình chóp. Lúc đó tâm $I \in$ đoạn SM thì thể tích V khối đa diện $V = \dfrac{rS_{tp}}{3}$

III. MẶT NÓN, HÌNH NÓN VÀ KHỐI NÓN

Định nghĩa mặt nón:

Cho đường thẳng Δ. Xét 1 đường thẳng l cắt Δ tại O và không vuông góc với Δ. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l như thế khi quay quanh Δ gọi là mặt nón tròn xoay hay đơn giản là mặt nón



- Δ gọi là trục của mặt nón
- l gọi là đường sinh của mặt nón
- O gọi là đỉnh mặt nón
- Nếu gọi α là góc giưa l và Δ thì 2α gọi là góc ở đỉnh của mặt nón $\left(0^0 < 2\alpha < 180^0\right)$

Hình nón và khối nón:

Cho mặt nón N với trục Δ, đỉnh O và góc ở đỉnh 2α. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với Δ tại I khác O.

Mặt phẳng (P) cắt mặt nón theo đường tròn (C) có tâm I. Gọi (P') là mặt phẳng vuông góc với Δ tại O. Khi đó

- Phần của mặt nón N giới hạn bởi 2 mặt phẳng (P) và (P') cùng với hình tròn xác định bởi (C) gọi là hình nón

- Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón.

Diện tích hình nón và thể tích khối nón

- Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi Rl$ với R là bán kính đáy, l là độ dài đường sinh.

- Thể tích khối nón $V = \frac{1}{2}\pi R^2.h$ với R là bán kính đáy, h là chiều cao.

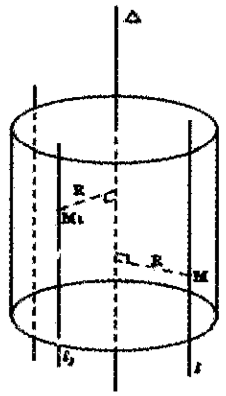
IV HÌNH TRỤ, KHỐI TRỤ

Định nghĩa mặt trụ

- Cho đường thẳng Δ. Xét 1 đường thẳng l song song với Δ, cách Δ một khoảng R. Khi đó:

Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l như thế được gọi là mặt trụ tròn xoay hoặc đơn giản là mặt trụ

- Δ gọi là trục của mặt trụ, l gọi là đường sinh và R gọi là bán kính mặt trụ.



Hình trụ và khối trụ

Cắt mặt trụ (T) trục Δ, bán kính R bởi 2 mặt phẳng phân biệt (P) và (P') cùng vuông góc với Δ ta được giao tuyến là 2 đường tròn (C) và (C').

a) Phần mặt trụ (T) nằm giữa 2 mặt phẳng (P) và (P') cùng với 2 hình tròn xác định bởi (C) và (C') được gọi là hình trụ

- Hai đường tròn (C) và (C') được gọi là 2 đường tròn đáy, 2 hình tròn xác định bởi chúng được gọi là 2 mặt đáy của hình trụ, bán kính của chúng gọi là bán kính hình trụ. Khoảng cách giữa 2 mặt đáy gọi là chiều cao của hình trụ

- Nếu gọi O và O' là tâm 2 hình tròn đáy thì đoạn OO' gọi là trục của hình trụ

- Phần mặt trụ nằm giữa 2 đáy gọi là mặt xung quanh của hình trụ

b) Hình trụ cùng với phần bên trong của nó gọi là khối trụ

Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích của khối trụ

Với R là bán kính đáy, h là chiều cao.

- Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = 2\pi Rh$

- Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

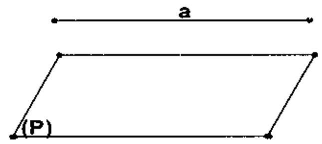
- Thể tích khối trụ $V = \pi R^2.h$ (chiều cao nhân diện tích đáy).

V. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN 11:

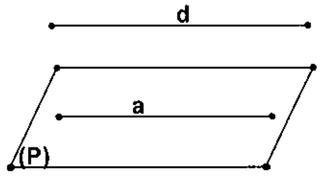
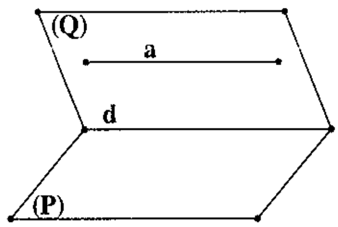
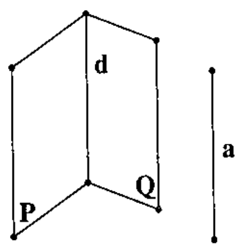
A. QUAN HỆ SONG SONG:

§1. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Định nghĩa:

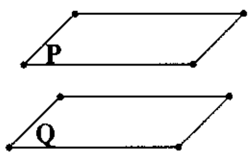
Đường thẳng và mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$a//(P) \Leftrightarrow a \cap (P) = \varnothing$	

2. Các định lý:

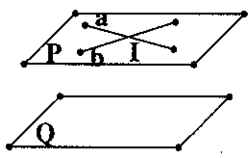
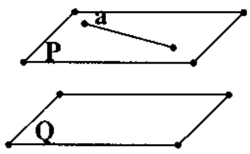
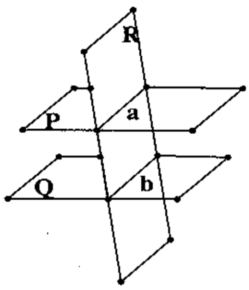
ĐL1: Nếu đường thẳng d không nằm trên mp(P) và song song với đường thẳng a nằm trên mp(P) thì đường thẳng d song song với mp(P)	$\begin{cases} d \not\subset (P) \\ d // a \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d//(P)$	
ĐL2: Nếu đường thẳng a song song với mp(P) thì mọi mp(Q) chứa a mà cắt mp(P) thì cắt theo giao tuyến song song với A.	$\begin{cases} a//(P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases} \Rightarrow d//a$	
ĐL3: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.	$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ (P)//a \\ (Q)//a \end{cases} \Rightarrow d//a$	

§2. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Định nghĩa:

Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$(P)//(Q) \Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \varnothing$	

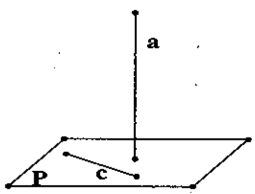
2. Các định lý:

ĐL1: Nếu mp(P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.	$\begin{cases} a,b \subset (P) \\ a \cap b = I \\ a//(Q), b//(Q) \end{cases} \Rightarrow (P)//(Q)$	
ĐL2: Nếu một đường thẳng nằm một trong hai mặt phẳng song song thì song song với mặt phẳng kia.	$\begin{cases} (P)//(Q) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a//(Q)$	
ĐL3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.	$\begin{cases} (P)//(Q) \\ (R) \cap (P) = a \Rightarrow a//b \\ (R) \cap (Q) = b \end{cases}$	

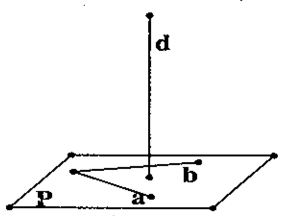
B. QUAN HỆ VUÔNG GÓC:

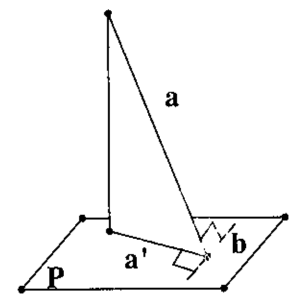
§1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa:

Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó.	$a \perp mp(P) \Leftrightarrow a \perp c, \forall c \subset (P)$	

2. Các định lý:

ĐL1: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp(P) thì đường thẳng d vuông góc với mp(P).	$\begin{cases} d \perp a, d \perp b \\ a, b \subset mp(P) \Rightarrow d \perp mp(P) \\ a, b \text{ cat nhau} \end{cases}$	

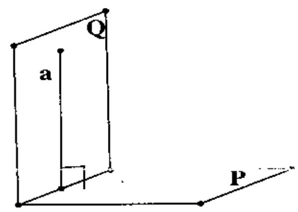
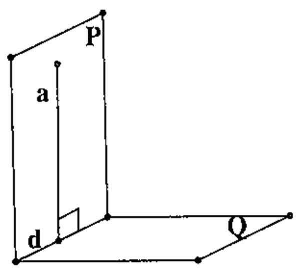
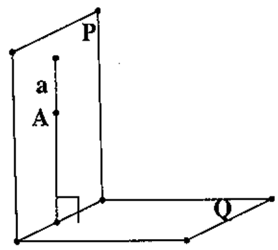
ĐL2: (Ba đường vuông góc) Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).	$a \not\perp mp(P), b \subset mp(P)$ $b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$	

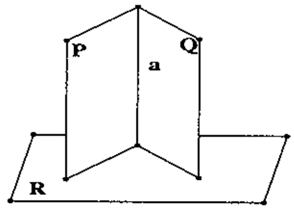
§2. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa:

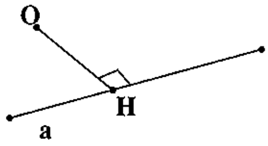
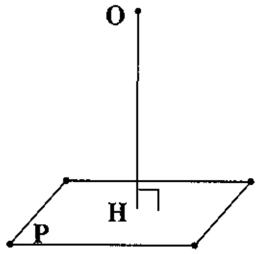
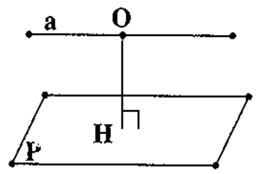
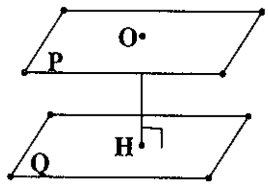
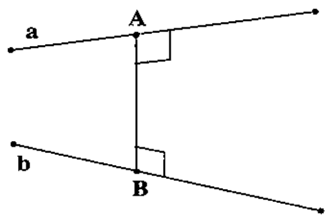
Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 900.

2. Các định lý:

ĐL1: Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.	$\begin{cases} a \perp mp(P) \\ a \subset mp(Q) \end{cases} \Rightarrow mp(Q) \perp mp(P)$	
ĐL2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$	
ĐL3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P)	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$	

ĐL4: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.	$\begin{cases}(P)\cap(Q)=a\\(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\end{cases}\Rightarrow a\perp(R)$	

§3. KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng đến 1 mặt phẳng: Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a (hoặc đến mặt phẳng (P)) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng a (hoặc trên mp(P)) d(O; A) = OH; d(O; (P)) = OH	 
2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song: Khoảng cách giữa đường thẳng a và mp(P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mp(P). d(a; (P)) = OH	
3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. d((P);(Q)) = OH	
4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó. d(a; b) = AB	

➢ **Thuật toán 3 bước tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P), kí hiệu** $d\left[A,(P)\right]$:

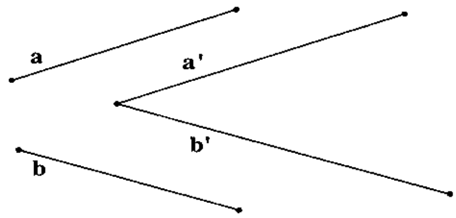
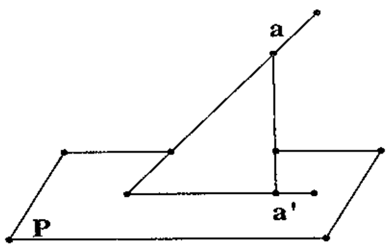
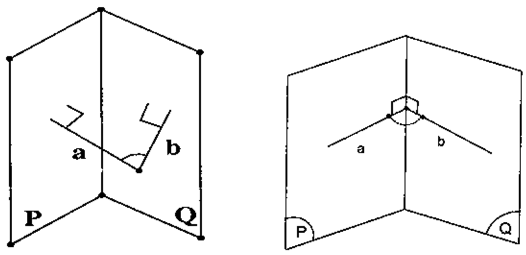
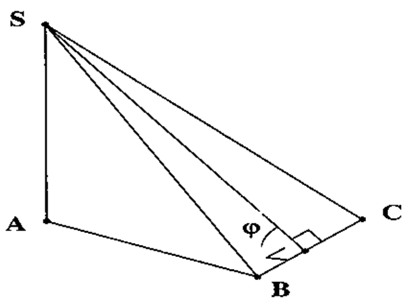
Bước 1: Tìm mặt phẳng (Q)chứa A sao cho (Q) vuông góc (P).

Bước 2: Tìm giao tuyến d của (P) và (Q), $d=(P)\cap(Q)$.

Bước 3: Từ A kẻ AH vuông góc với d tại H. Ta có $\begin{cases} AH\subset(Q) \\ (Q)\perp(P) \\ d=(Q)\cap(P) \\ AH\perp d \end{cases} \Rightarrow AH\perp(P)$.

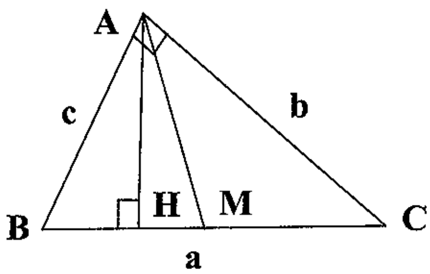
Vậy $d\left[A,(P)\right]=AH$.

§4. GÓC

<table>
<tr><td>1. Góc giữa hai đường thẳng a và b
là góc giữa hai đường thẳng a’ và b’ cùng đi qua một điểm và lần lượt cùng phương với a và b.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. Góc giữa đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P)
là góc giữa a và hình chiếu a’ của nó trên mp(P).
Đặc biệt: Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mp(P) là 900.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3. Góc giữa hai mặt phẳng
là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
Hoặc là góc giữa 2 đường thẳng nằm trong 2 mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại 1 điểm</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4. Diện tích hình chiếu:
Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong mp(P) và S’ là diện tích hình chiếu (H’) của (H) trên mp(P’) thì $S'=S\cos\varphi$ trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P), (P’).</td><td>
</td></tr>
</table>

VI CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC PHẲNG:

a. Hệ thức lượng trong tam giác vuông: Cho ΔABC vuông ở A ta có:



a) Định lý Pitago : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) $BA^2 = BH.BC;\ CA^2 = CH.CB$

c) AB. AC = BC. AH

d) BC = 2AM

e) $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

f) BC = 2AM

g) $\sin B = \dfrac{b}{a},\ \cos B = \dfrac{c}{a},\ \tan B = \dfrac{b}{c}, \cot B = \dfrac{c}{b}$

h) b = a. sinB = a. cosC, c = a. sinC = a. cosB, a = $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{b}{\cos C}$,

b = C. tanB = C. cot C

c. Hệ thức lượng trong tam giác thường:

* Định lý hàm số cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

* Định lý hàm số sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

c. Các công thức tính diện tích.

a/ Công thức tính diện tích tam giác:

$S = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}a.b\sin C = \dfrac{a.b.c}{4R} = p.r = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Đặc biệt : * ΔABC vuông ở A : $S = \dfrac{1}{2}AB.AC$,* ΔABC đều cạnh a: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b/ Diện tích hình vuông : S = cạnh *x* cạnh

c/ Diện tích hình chữ nhật : S = dài *x* rộng

d/ Diện tích hình thoi : S = $\dfrac{1}{2}$(chéo dài *x* chéo ngắn)

d/ Diện tích hình thang: $S = \dfrac{1}{2}$ (đáy lớn + đáy nhỏ) *x* chiều cao

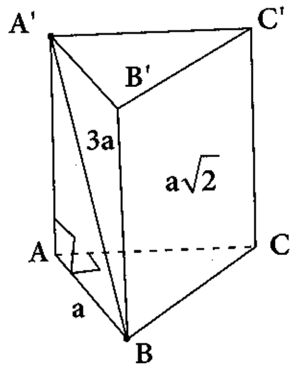
e/ Diện tích hình bình hành: S = đáy *x* chiều cao

f/ Diện tích hình tròn: $S = \pi.R^2$

CÁC DẠNG BÀI TẬP TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP VÀ KHỐI LĂNG TRỤ.

1. Thể tích lăng trụ đứng:

Ví dụ 1 Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh BC $= a\sqrt{2}$ và biết A'B = 3a. Tính thể tích khối lăng trụ?



Lời giải:

Ta có

ΔABC vuông cân tại A nên AB = AC = a

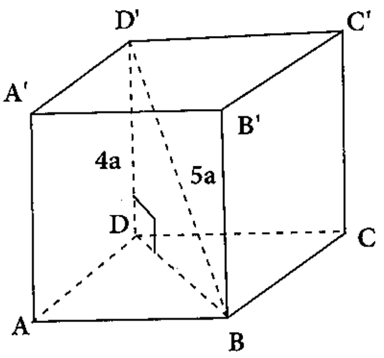
ABC A'B'C' là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp AB$

$\Delta AA'B \Rightarrow AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 8a^2$

$\Rightarrow AA' = 2a\sqrt{2}$

Vậy V = B. h = SABC .AA' = $a^3\sqrt{2}$

Ví dụ 2 Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD. A'B'C'D' có cạnh bên bằng 4a và đường chéo 5a. Tính thể tích khối lăng trụ này.



Lời giải:

ABCD A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên

$BD^2 = BD'^2 - DD'^2 = 9a^2 \Rightarrow BD = 3a$

ABCD là hình vuông $\Rightarrow AB = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$

Suy ra: B = SABCD = $\dfrac{9a^2}{4}$

Vậy: V = B. h = S_{ABCD}. AA' = $9a^3$

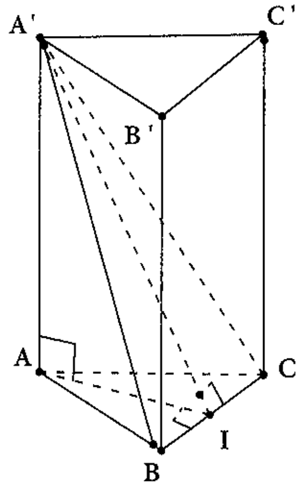
Ví dụ 3 Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác đều cạnh a = 4 và biết diện tích tam giác A'BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ?

Lời giải:

Gọi I là trung điểm BC. Ta có VABC đều nên

$AI = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ & $AI \perp BC$

$\Rightarrow A'I \perp BC$ (định lý 3 đường vuông góc)



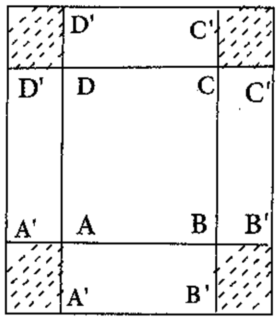
$S_{A'BC}=\frac{1}{2}BC.A'I\Rightarrow A'I=\frac{2S_{A'BC}}{BC}=4$

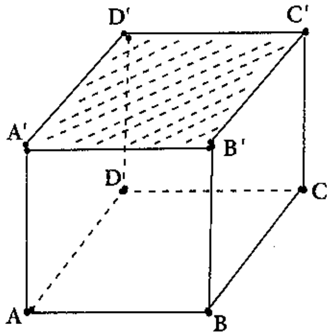
$AA'\perp(ABC)\Rightarrow AA'\perp AI$.

$\Delta A'AI\Rightarrow AA'=\sqrt{A'I^2-AI^2}=2$

Vậy : $V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.AA'=8\sqrt{3}$ (đvtt)

Ví dụ 4 Một tấm bìa hình vuông có cạnh 44 cm, người ta cắt bỏ đi ở mỗi góc tấm bìa một hình vuông cạnh 12 cm rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nhật không có nắp. Tính thể tích cái hộp này.





Lời giải

Theo đề bài, ta có

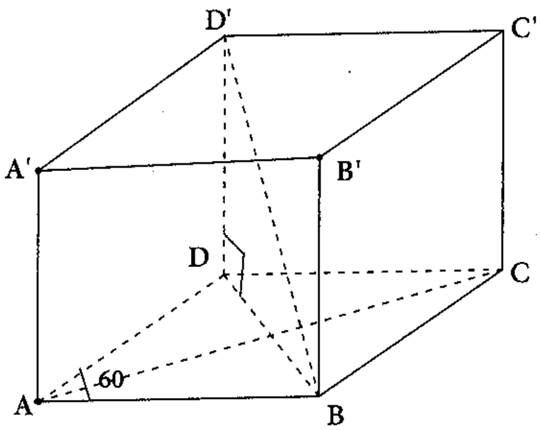
AA' = BB' = CC' = DD' = 12 cm nên ABCD là hình vuông có

AB = 44 cm - 24 cm = 20 cm và chiều cao hộp h = 12 cm

Vậy thể tích hộp là

$V=S_{ABCD}.h=4800cm^3$

Ví dụ 5 Cho hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a và có góc nhọn bằng 600. Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của lăng trụ. Tính thể tích hình hộp?



Lời giải:

Ta có tam giác ABD đều nên : BD = a

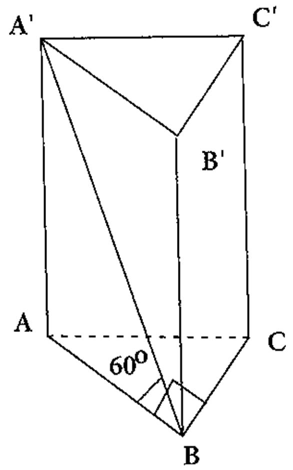
và $S_{ABCD}=2_{SABD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Theo đề bài: $BD'=AC=2\frac{a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$

$\Delta DD'B\Rightarrow DD'=\sqrt{BD'^2-BD^2}=a\sqrt{2}$

Vậy $V=S_{ABCD}.DD'=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ (đvtt)

Ví dụ 6 Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA = BC = a, biết A'B hợp với đáy ABC một góc 60°. Tính thể tích lăng trụ.



Lời giải:

Ta có: $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp AB \& AB$ là hình chiếu của A'B trên đáy ABC.

Vậy góc $[A'B,(ABC)] = \widehat{ABA'} = 60^o$

$\Delta ABA' \Rightarrow AA' = AB.tan60^0 = a\sqrt{3}$

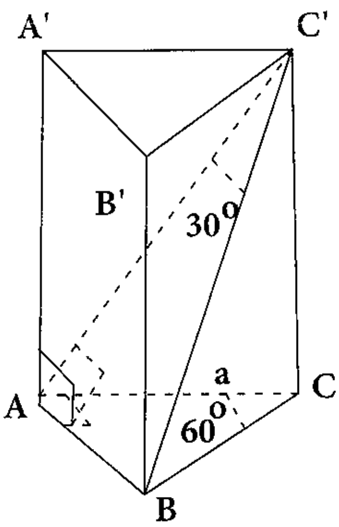
$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{a^2}{2}$.

Vậy: $V = S_{ABC}.AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 7 Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A với AC = a, $\widehat{ACB} = 60^o$ biết BC' hợp với (AA'C'C) một góc 30°.

Tính AC' và thể tích lăng trụ?

Lời giải:



$\Delta ABC \Rightarrow AB = AC.tan60^o = a\sqrt{3}$.

Ta có: $AB \perp AC; AB \perp AA' \Rightarrow AB \perp (AA'C'C)$

nên AC' là hình chiếu của BC' trên (AA'C'C).

Vậy góc [BC';(AA"C"C)] = $\widehat{BC'A} = 30^o$

$\Delta AC'B \Rightarrow AC' = \frac{AB}{tan30^o} = 3a$

Ta có $V = B.h = S_{ABC}.AA'$

$\Delta AA'C' \Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = 2a\sqrt{2}$

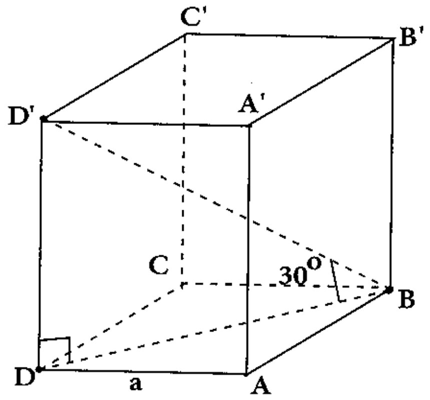
ΔABC là nửa tam giác đều nên $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V = a^3\sqrt{6}$ (đvtt)

Ví dụ 8 Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và đường chéo BD' của lăng trụ hợp với đáy ABCD một góc 30°. Tính thể tích và tổng diện tích của các mặt bên của lăng trụ?

Lời giải:

Ta có ABCD A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên ta có: $DD' \perp (ABCD) \Rightarrow DD' \perp BD$ và BD là hình chiếu của BD› trên ABCD.

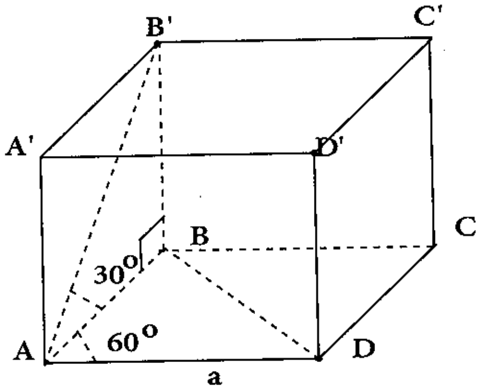


Vậy góc [BD';(ABCD)] = $\widehat{DBD'} = 30^0$

$\Delta BDD' \Rightarrow DD' = BD.tan30^0 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy V = S_{ABCD}. DD' = $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ S = $4S_{ADD'A'}$ = $\frac{4a^2\sqrt{6}}{3}$

Ví dụ 9 Cho hình hộp đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60°$ biết AB' hợp với đáy (ABCD) một góc 30°. Tính thể tích của hình hộp.



Lời giải

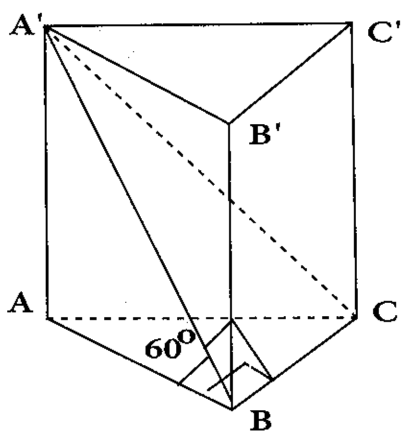
$\Delta\, ABD$ đều cạnh a $\Rightarrow S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Delta\, ABB'$ vuông tại B $\Rightarrow BB' = AB\,tan30^o = a\sqrt{3}$

Vậy $V = B.h = S_{ABCD}.BB' = \frac{3a^3}{2}$

Ví dụ 10 Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA = BC = a, biết (A'BC) hợp với đáy (ABC) một góc 60°. Tính thể tích lăng trụ.



Lời giải:

Ta có $A'A \perp (ABC) \& BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$

Vậy $góc[(A'BC),(ABC)] = \widehat{ABA'} = 60^o$

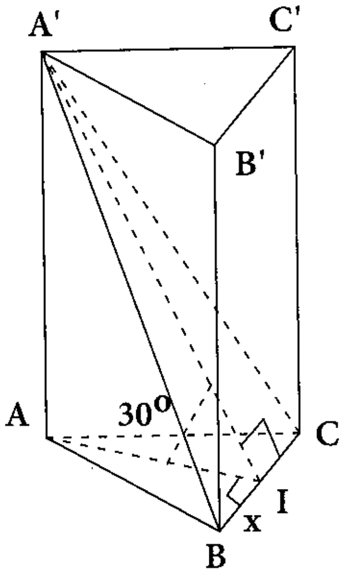
$\Delta ABA' \Rightarrow AA' = AB.tan60^0 = a\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{a^2}{2}$

Vậy V = S_{ABC}. AA' = $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 11 Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A’B’C’ là tam giác đều . Mặt (A’BC) tạo với đáy một góc 30° và diện tích tam giác A’BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

Lời giải:



$\Delta\ ABC$ đều $\Rightarrow AI \perp BC$ mà AA’$\perp (ABC)$ nên A’I $\perp BC$ (định lý 3 đường vuông góc).

Vậy góc [(A’BC);)ABC)] = $\widehat{A'IA}$ = 30°

Giả sử BI = x $\Rightarrow AI = \dfrac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$. Ta có

$\Delta A'AI{:}A' = AI{:}\ cos30^o = \dfrac{2AI}{\sqrt{3}} = \dfrac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2x$

A’A = AI.tan 30° = $x\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = x$

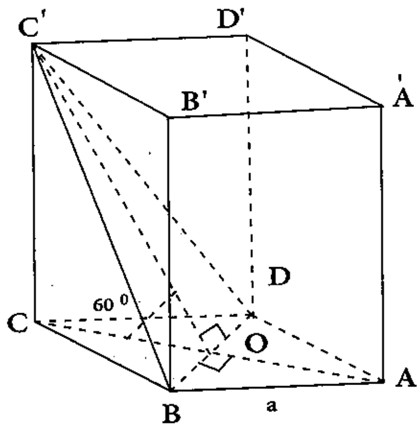
Vậy $V_{ABC.A'B'C'}$ = CI.AI.A’A = $x^3\sqrt{3}$

Mà $S_{A'BC}$ = BI.A’I = x.2x = 8 $\Rightarrow x = 2$

Do đó: (đvtt) $V_{ABC.A'B'C'} = 8\sqrt{3}$

Ví dụ 12 Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD A’B’C’D’ có cạnh đáy a và mặt phẳng (BDC’) hợp với đáy (ABCD) một góc 60°. Tính thể tích khối hộp chữ nhật?

Lời giải



Gọi O là tâm của ABCD. Ta có ABCD là hình vuông nên $OC \perp BD$ CC’$\perp$(ABCD) nên OC’$\perp$BD (định lý 3 đường vuông góc).

Vậy góc [(BDC’); (ABCD)] = $\widehat{COC'}$ = 60°

Ta có: V = B. h = $S_{ABCD.}$CC’

ABCD là hình vuông nên SABCD = a^2

$\Delta\ OCC'$ vuông nên CC’ = OC. tan60° = $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

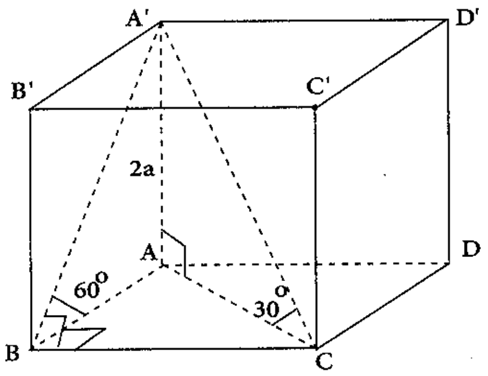
Vậy: $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$

Ví dụ 13 Cho hình hộp chữ nhật ABCD A’B’C’D’ có AA’ = 2a ; mặt phẳng (A’BC) hợp với đáy (ABCD) một góc 60° và A’C hợp với đáy (ABCD) một góc 30°. Tính thể tích khối hộp chữ nhật?

Lời giải

Ta có: AA’ $\perp (ABCD) \Rightarrow$ AC là hình chiếu của A’C trên (ABCD).

Vậy góc[A'C,(ABCD)] = $\widehat{A'CA} = 30^o$



$BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$ (đl 3⊥).

Vậy góc [(A'BC),(ABCD)] = $\widehat{A'BA} = 60^o$

$\Delta A'AC \Rightarrow AC = AA'.\cot 30^o = 2a\sqrt{3}$

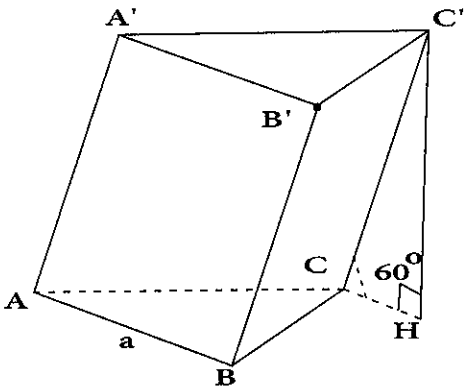
$\Delta A'AB \Rightarrow AB = AA'.\cot 60^o = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\Delta ABC \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$

Vậy V = AB. BC. AA' = $\dfrac{16a^3\sqrt{2}}{3}$

2. Thể tích lăng trụ xiên:

Ví dụ 14 Cho lăng trụ xiên tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, biết cạnh bên là $a\sqrt{3}$ và hợp với đáy ABC một góc 60°. Tính thể tích lăng trụ?



Lời giải:

Ta có: $C'H \perp (ABC) \Rightarrow CH$ là hình chiếu của CC' trên (ABC)

Vậy góc $[CC',(ABC)] = \widehat{C'CH} = 60^o$

$\Delta CHC' \Rightarrow C'H = CC'.\sin 60^0 = \dfrac{3a}{2}$

$S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy V = S_{ABC}. C'H = $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Ví dụ 15 Cho lăng trụ xiên tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết AA' hợp với đáy ABC một góc 60.

1) Chứng minh rằng BB'C'C là hình chữ nhật.

2) Tính thể tích lăng trụ?

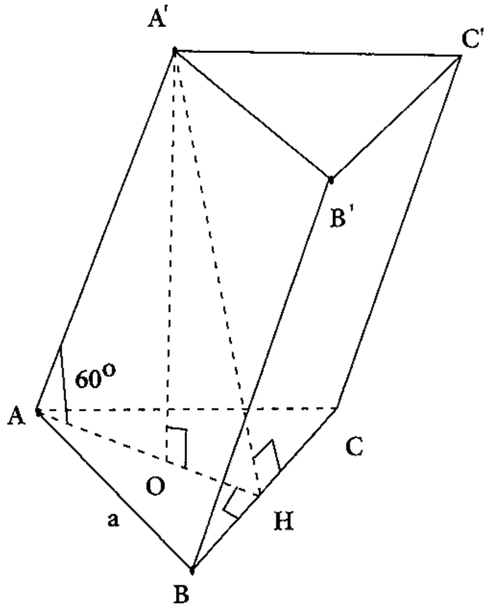
Lời giải:

1) Ta có $A'O \perp (ABC) \Rightarrow OA$ là hình chiếu của AA' trên (ABC)

Vậy $góc[AA',(ABC)] = \widehat{OAA'} = 60^o$

Ta có BB'CC' là hình bình hành (vì mặt bên của lăng trụ)

$AO \perp BC$ tại trung điểm H của BC nên $BC \perp A'H$ (đl 3 $\perp$)



$\Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ mà AA'//BB'

nên $BC \perp BB'$. Vậy BB'CC' là hình chữ nhật.

2) $\Delta\ ABC$ đều nên $AO = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

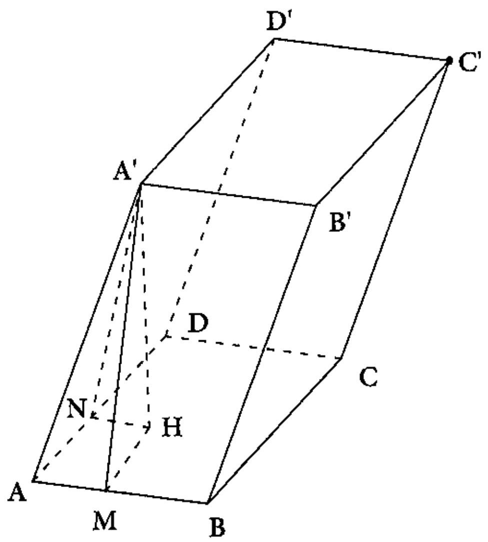
$\Delta\ AOA' \Rightarrow A'O = AO\tan 60^0 = a$

Vậy V = SABC. A'O = $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Ví dụ 16 Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật với AB = $\sqrt{3}$ AD = $\sqrt{7}$.

Hai mặt bên (ABB'A') và (ADD'A') lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60°. Tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1?

Lời giải:



Kẻ $A'H \perp (ABCD)$, $HM \perp AB$, $HN \perp AD \Rightarrow A'M \perp AB$, $A'N \perp AD$ (đl 3$\perp$)

$\Rightarrow \widehat{A'MH} = 45^o, \widehat{A'NH} = 60^o$

Đặt A'H = x. Khi đó

A'N = x : sin 60° = $\dfrac{2x}{\sqrt{3}}$

AN = $\sqrt{A'A^2 - A'N^2} = \sqrt{\dfrac{3-4x^2}{3}} = HM$

Mà HM = x.cot 45° = x

Nghĩa là x = $\sqrt{\dfrac{3-4x^2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$

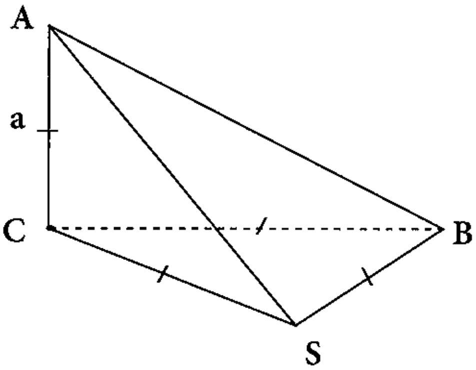
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}$ = AB. AD. x

$$= \sqrt{3}.\sqrt{7}.\sqrt{\frac{3}{7}} = 3$$

3. Thể tích khối chóp:

A. KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY:

Ví dụ 17 Cho hình chóp SABC có SB = SC = BC = CA = a. Hai mặt (ABC) và (ASC) cùng vuông góc với (SBC). Tính $\begin{cases}(ABC)\perp(SBC)\\(ASC)\perp(SBC)\end{cases}$ thể tích hình chóp.



Lời giải:

Ta có $\begin{cases}(ABC)\perp(SBC)\\(ASC)\perp(SBC)\end{cases}$

$\Rightarrow AC\perp(SBC)$

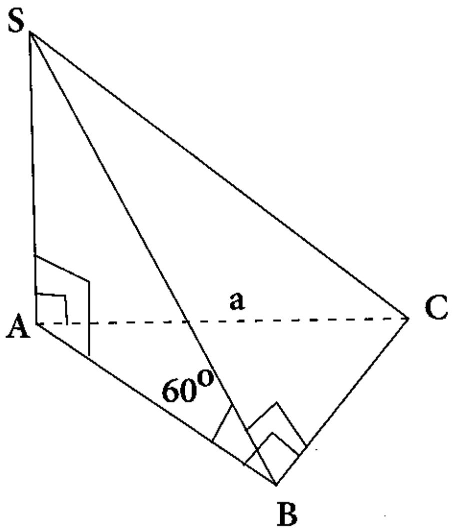
Do đó: $V=\dfrac{1}{3}S_{SBC}.AC=\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}a=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Ví dụ 18 Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với AC = a biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với đáy một góc 60°.

1) Chứng minh các mặt bên là tam giác vuông .

2) Tính thể tích hình chóp .

Lời giải:



1) $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp AB$ và $SA\perp AC$

mà $BC\perp AB\Rightarrow BC\perp SB$ (đl 3 $\perp$).

Vậy các mặt bên của hình chóp là tam giác vuông.

2) Ta có $SA\perp(ABC)\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên (ABC).

Vậy góc [SB,(ABC)] = $\widehat{SAB}=60^o$.

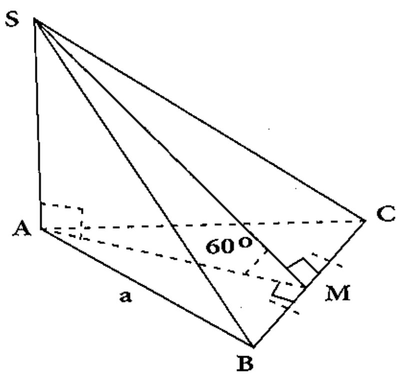
$\Delta\, ABC$ vuông cân nên BA = BC = $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

SABC = $\dfrac{1}{2}BA.BC=\dfrac{a^2}{4}$

$\Delta\, SAB\Rightarrow SA=AB.\tan 60^o=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.SA=\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2}{4}\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$

Ví dụ 19 Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và (SBC) hợp với đáy (ABC) một góc 60°. Tính thể tích hình chóp?



Lời giải:

M là trung điểm của BC, vì tam giác ABC đều nên AM $\perp$ BC $\Rightarrow$ SA $\perp$ BC (đl3 $\perp$).

Vậy góc [(SBC);(ABC)] = $\widehat{SMA} = 60^o$.

Ta có V = $\frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA$

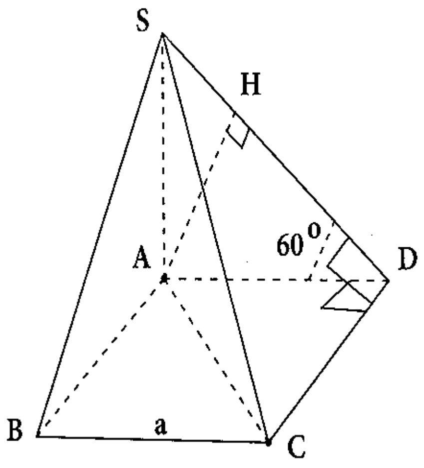
$\Delta\, SAM \Rightarrow SA = AM\tan 60^o = \frac{3a}{2}$

Vậy V = $\frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ (đvtt)

Ví dụ 20 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a và SA vuông góc đáy ABCD và mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60°.

1) Tính thể tích hình chóp SABCD?

2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)?



Lời giải:

Ta có $SA \perp (ABC)$ và $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp SD$ (đl 3 $\perp$).(*)

Vậy góc [(SCD),(ABCD)] = $\widehat{SDA}$ = 60°.

$\Delta\, SAD$ vuông nên SA = AD. tan60° = $a\sqrt{3}$

Vậy $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}a^2 a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Ta dựng AH $\perp SD$,vì CD $\perp$ (SAD) (do (*)) nên CD $\perp$ AH $\Rightarrow AH \perp (SCD)$

Vậy AH là khoảng cách từ A đến (SCD).

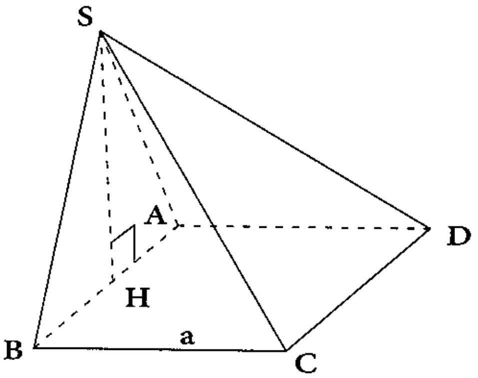
$\Delta\, SAD \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$. Vậy AH = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

B. KHỐI CHÓP CÓ MỘT MẶT BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY:

Ví dụ 21 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh A. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD.

1) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AB.

2) Tính thể tích khối chóp SABCD?



Lời giải:

Gọi H là trung điểm của AB.

ΔSAB đều $\Rightarrow SH \perp AB$

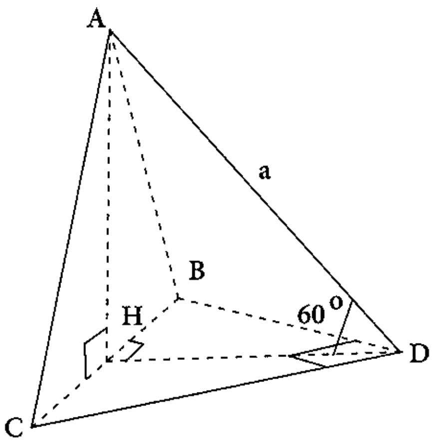
mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Vậy H là chân đường cao của khối chóp.

Ta có tam giác SAB đều nên SA $= \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3} S_{ABCD}.SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (đvtt)

Ví dụ 22 Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều, BCD là tam giác vuông cân tại D, (ABC) $\perp$ (BCD) và AD hợp với (BCD) một góc 60°. Tính thể tích tứ diện ABCD?



Lời giải:

Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có tam giác ABC đều nên AH $\perp$ (BCD), mà (ABC) $\perp$ (BCD) $\Rightarrow$ AH $\perp (BCD)$.

Ta có: AH $\perp$ HD $\Rightarrow$ AH = AD. tan60° $= a\sqrt{3}$

& HD = AD. cot60° $= \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Delta BCD \Rightarrow$ BC = 2HD = $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, suy ra:

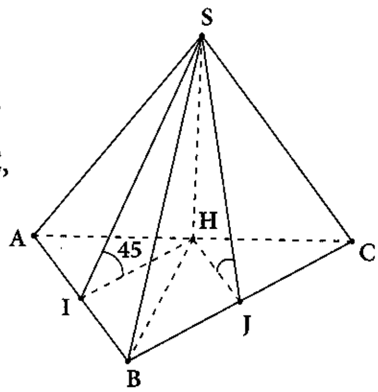
V = $\dfrac{1}{3} S_{BCD}.AH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2} BC.HD.AH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ (đvtt)

Ví dụ 23 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có BC = a. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45°.

a) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AC.

b) Tính thể tích khối chóp SABC?

Lời giải:



a) Kẻ SH $\perp$ BC vì mp(SAC) $\perp$ mp(ABC) nên SH $\perp$ mp(ABC).

Gọi I, J là hình chiếu của H trên AB và BC $\Rightarrow$ SI $\perp$ AB, SJ $\perp$ BC, theo giả thiết $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = 45^o$

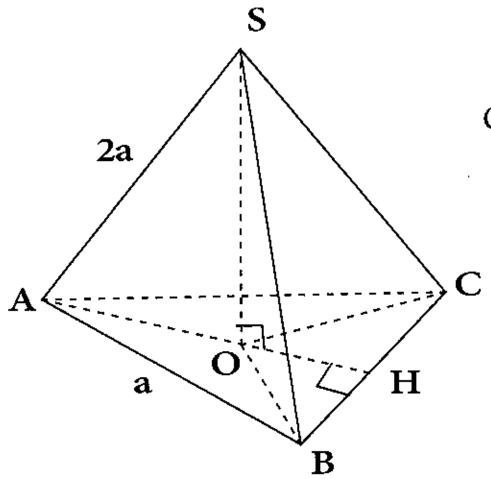
Ta có: $\Delta SHI = \Delta SHJ \Rightarrow$ HI = HJ nên BH là đường phân giác của $\Delta\ ABC$. Từ đó suy ra H là trung điểm của AC.

b) HI = HJ = SH $= \dfrac{a}{2} \Rightarrow$ VSABC$= \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{a^3}{12}$

C. KHỐI CHÓP ĐỀU:

Ví dụ 24 Cho chóp tam giác đều SABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a.

Chứng minh rằng chân đường cao kẻ từ S của hình chóp là tâm của tam giác đều ABC. Tính thể tích chóp đều SABC?



Lời giải:

Dựng $SO \perp (ABC)$ Ta có SA = SB = SC suy ra OA = OB = OC

Vậy O là tâm của tam giác đều ABC.

Ta có tam giác ABC đều nên

$$AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

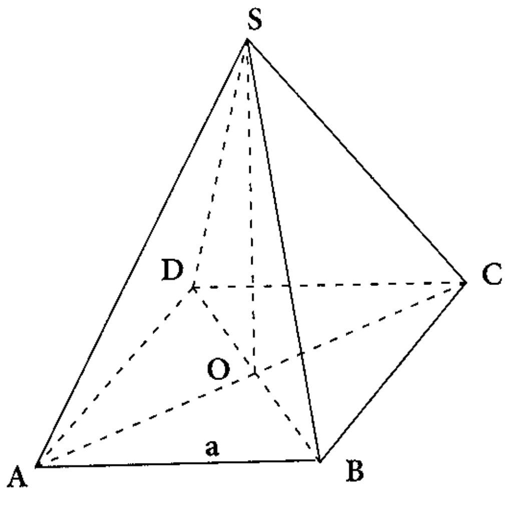
$$\Delta\, SAO \Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2 = \frac{11a^2}{3}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}. \text{Vậy } V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SO = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$$

Ví dụ 25 Cho khối chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh có độ dài bằng a.

1) Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều.

2) Tính thể tích khối chóp SABCD?



Lời giải:

Dựng $SO \perp (ABCD)$

Ta có SA = SB = SC = SD nên OA = OB = OC = OD

$\Rightarrow$ ABCD là hình thoi có đường tròn ngoại tiếp nên ABCD là hình vuông.

Ta có $SA^2 + SB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên $\Delta\, ASC$ vuông tại S $\Rightarrow OS = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

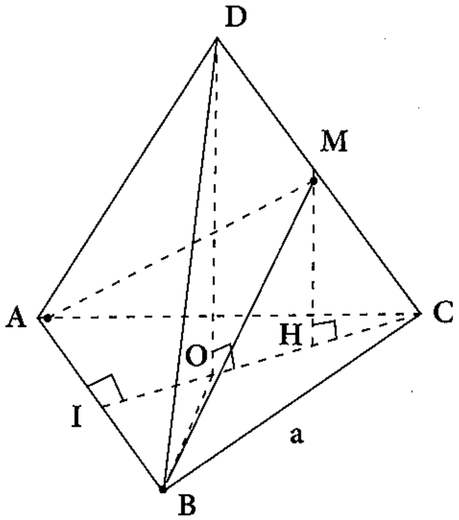
Vậy $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ (đvtt)

Ví dụ 26 Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng a, M là trung điểm DC.

a) Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD?

b)Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC). Suy ra thể tích hình chóp MABC?

Lời giải:



a) Gọi O là tâm của $\Delta ABC \Rightarrow DO \perp (ABC)$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.DO$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ OC = \frac{2}{3}CI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta DOC \text{ vuông có} : DO = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \text{ (đvtt)}$$

b) Kẻ MH// DO, khoảng cách từ M đến mp(ABC) là MH

$$MH = \frac{1}{2}DO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow V_{MABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.MH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

D. TỈ LỆ THỂ TÍCH:

Ví dụ 27 Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy ABC, $SA = a$

1) Tính thể tích của khối chóp S.ABC?

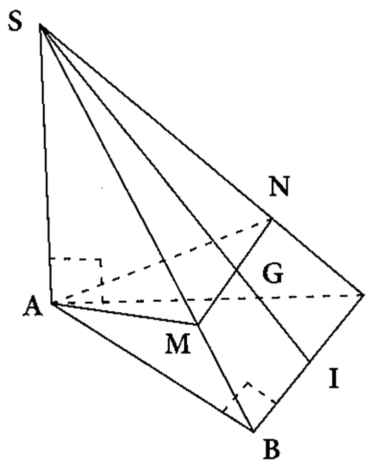
2) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Tính thể tích của khối chóp S.AMN?

Lời giải:

a)Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA$ và $SA = a$

+ ΔABC cân có : $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = a$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2$. Vậy: $V_{SABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a^2.a = \frac{a^3}{6}$



b) Gọi I là trung điểm BC.

G là trọng tâm, ta có: $\dfrac{SG}{SI} = \dfrac{2}{3}$

α // BC $\Rightarrow$ MN// BC $\Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SG}{SI} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{4}{9}$

Vậy: $V_{SAMN} = \dfrac{4}{9}V_{SABC} = \dfrac{2a^3}{27}$

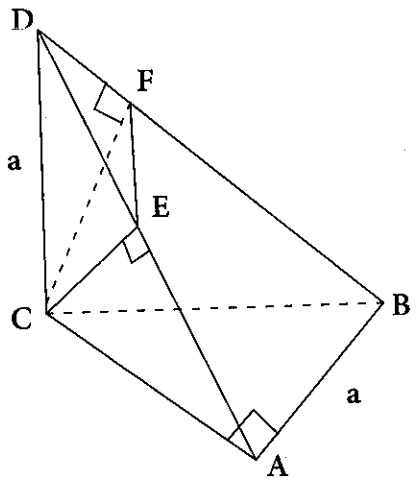
Ví dụ 28 Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD, cắt BD tại F và cắt AD tại E.

a) Tính thể tích khối tứ diện ABCD?

b) Chứng minh $CE \perp (ABD)$

c) Tính thể tích khối tứ diện CDEF.

Lời giải:



a) Tính: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.CD = \dfrac{a^3}{6}$

b) Tacó: $AB \perp AC, AB \perp CD \Rightarrow AB \perp (ACD)$

$\Rightarrow AB \perp EC$

Ta có: $DB \perp EC \Rightarrow EC \perp (ABD)$

c) Ta có: $\dfrac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \dfrac{DE}{DA}.\dfrac{DF}{DB}$ (*)

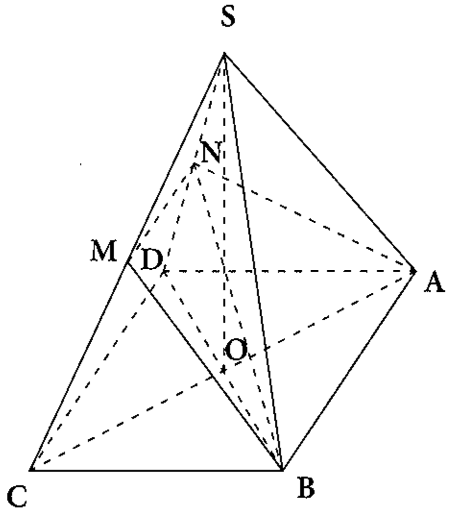
Mà $DE.DA = DC^2$, chia cả 2 vế cho DA^2

$\Rightarrow \dfrac{DE}{DA} = \dfrac{DC^2}{DA^2} = \dfrac{a^2}{2a^2} = \dfrac{1}{2}$

Tương tự: $\dfrac{DF}{DB} = \dfrac{DC^2}{DB^2} = \dfrac{a^2}{DC^2 + CB^2} = \dfrac{1}{3}$

Từ(*) $\Rightarrow \dfrac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \dfrac{1}{6}$ .Vậy $V_{DCEF} = \dfrac{1}{6}V_{ABCD} = \dfrac{a^3}{36}$

Ví dụ 29 Cho khối chóp tứ giác đều SABCD. Một mặt phẳng (α) qua A, B và trung điểm M của SC. Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.



Lời giải:

Kẻ MN // CD (N $\in$SD thì hình thang ABMN là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mặt phẳng (ABM).

$$\frac{V_{SAND}}{V_{SADB}}=\frac{SN}{SD}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{SANB}=\frac{1}{2}V_{SADB}=\frac{1}{4}V_{SABCD}$$

$$\frac{V_{SBMN}}{V_{SBCD}}=\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{SBMN}=\frac{1}{4}V_{SBCD}=\frac{1}{8}V_{SABCD}$$

Mà $V_{SABMN}=V_{SANB}+V_{SBMN}=\frac{3}{8}V_{SABCD}$.

Suy ra $V_{ABMN.ABCD}=\frac{5}{8}V_{SABCD}$

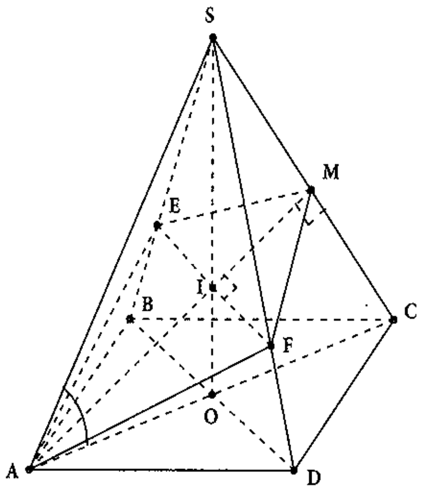
Do đó : $\frac{V_{SABMN}}{V_{ABMN.ABCD}}=\frac{3}{5}$

Ví dụ 30 Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60^o. Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F.

a) Hãy xác định mp(AEMF)?

b) Tính thể tích khối chóp S.ABCD?

c) Tính thể tích khối chóp S.AEMF?



Lời giải:

a) Gọi $I=SO\cap AM$.

Ta có (AEMF) //BD $\Rightarrow$ EF // BD

b) $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SO$ với $S_{ABCD}=a^2$

+ $\triangle SOA$ có : $SO=AO.\tan 60^o=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy : $V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

c) Phân chia chóp tứ giác ta có:

$V_{S.AEMF}=V_{SAMF}+V_{SAME}=2V_{SAMF}$

$V_{S.ABCD}=2V_{SACD}=2\,V_{SABC}$

Xét khối chóp S.AMF và S.ACD

Ta có : $\Rightarrow \dfrac{SM}{SC}=\dfrac{1}{2}$

ΔSAC có trọng tâm I, EF // BD nên: $\Rightarrow \dfrac{SI}{SO}=\dfrac{SF}{SD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow \dfrac{V_{SAMF}}{V_{SACD}}=\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SF}{SD}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow V_{SAMF}=\dfrac{1}{3}V_{SACD}=\dfrac{1}{6}V_{SACD}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$

$\Rightarrow V_{S.AEMF}=2\dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$

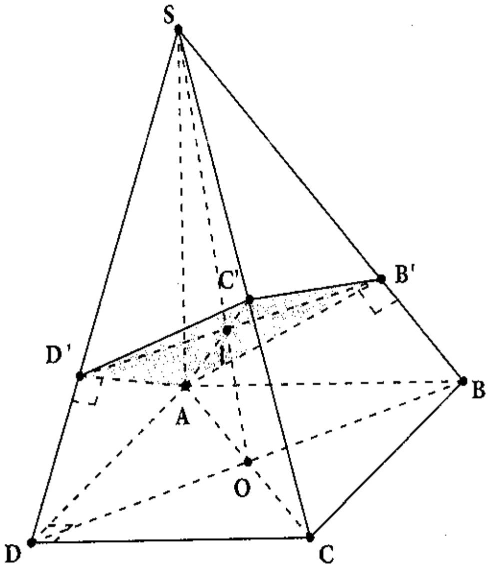
Ví dụ 31 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc đáy, $SA=a\sqrt{2}$. Gọi B', D' là hình chiếu của A lần lượt lên SB, SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD?

b) Chứng minh $SC\perp(AB'D')$

c) Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'?

Lời giải:



a) Ta có: $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

b) Ta có $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AB'$ & $SB\perp AB'$

Suy ra: $AB'\perp(SBC)$ nên AB' ⊥ SC.

Tương tự AD' ⊥ SC.

Vậy SC ⊥ (AB'D')

c) Tính $V_{S.AB'C'D'}$

+ Tính $V_{S.AB'C'}$: Ta có: $\dfrac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}}=\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$ (*)

ΔSAC vuông cân nên $\dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{1}{2}$

Ta có: $\dfrac{SB'}{SB}=\dfrac{SA^2}{SB^2}=\dfrac{2a^2}{SA^2+AB^2}=\dfrac{2a^2}{3a^2}=\dfrac{2}{3}$

Từ (*) $\Rightarrow \dfrac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow V_{SAB'C'}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$

+ $V_{S.AB'C'D'}=2V_{S.AB'C'}=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{9}$

Phần III: BÀI TẬP MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

Câu 1 Cho hình chữ nhật $ABCD$ cạnh $AB = 4, AD = 2$. Gọi M, N là trung điểm các cạnh AB và CD. Cho hình chữ nhật quay quanh MN, ta được hình trụ tròn xoay có thể tích bằng

A) $V = 4\pi$ B) $V = 8\pi$ C) $V = 16\pi$ D) $V = 32\pi$

Trả lời:

$V = \pi.MA^2.MN = \pi.4.2 = 8\pi\cdot$

Chọn B

Câu 2 Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2, AD = 2$. Quay hình chữ nhật ABCD lần lượt quanh AD và AB, ta được 2 hình trụ tròn xoay có thể tích V_1, V_2. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A) $V_1 = V_2$ B) $V_2 = 2V_1$

C) $V_1 = 2V_2$ D) $2V_1 = 3V_2$

Trả lời:

Quay quanh AD : $V_1 = \pi.AB^2.AD = 4\pi$

Quay quanh AB : $V_2 = \pi.AD^2.AB = 2\pi$

$V_1 = 2V_2$

Chọn C

Câu 3 Một hình chữ nhật ABCD có $AB = a$ và $\widehat{BAC} = \alpha\ (0^0 < \alpha < 90^0)$. Cho hình chữ nhật đó quay quanh cạnh AB, tam giác ABC tạo thành hình nón có diện tích xung quanh cho bởi 4 kết quả sau đây. Hỏi kết quả nào sai?

A) $S_{xq} = \dfrac{\pi.a^2\tan\alpha}{\cos\alpha}$ B) $S_{xq} = \dfrac{\pi.a^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$

C) $S_{xq} = \pi a^2 sin\alpha\left(1 + tan^2\alpha\right)$ D) $S_{xq} = \pi a^2 tan\alpha$

Trả lời:

$\Delta ABC\ :\ BC = a.tan\alpha,\ AC = \dfrac{a}{cos\alpha}$

$S_{xq} = \pi.BC.AC = \dfrac{\pi a^2 tan\alpha}{cos\alpha} = \dfrac{\pi a^2 sin\alpha}{cos^2\alpha} = \pi.a^2.sin\alpha\left(1 + tan^2\alpha\right)$

A), B), C) đúng .Vậy **D)** sai

Chọn D

Câu 4 Hình chữ nhật ABCD có $AB = 6$, $AD = 4$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm 4 cạnh AB, BC, CD, DA. Cho hình chữ nhật ABCD quay quanh QN, tứ giác MNPQ tạo thành vật tròn xoay có thể tích là:

A) $V = 8\pi$ **B)** $V = 6\pi$

C) $V = 4\pi$ **D)** $V = 2\pi$

Trả lời:

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ thì $MNPQ$ là hình thoi tâm O.

Ta có: $OQ = ON = \frac{1}{2}AB = 3$; $OM = OP = \frac{1}{2}AD = 2$

Vật tròn xoay là 2 hình nón bằng nhau, đỉnh Q, N chung đáy.

$V = 2.\frac{1}{3}\pi.OM^2.ON = \frac{2}{3}.\pi.4.3 = 8\pi$

Chọn A

Câu 5 Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Cho tam giác quay quanh AB và AC ta được 2 hình nón tròn xoay có diện tích xung quanh là S_1 và S_2. Hãy chọn câu đúng?

A) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$ **B)** $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}$

C) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{3}$ **D)** $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{4}$

Trả lời:

Ta có: $AB^2 + AC^2 = 25 = BC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$.

Quay quanh AB : $S_1 = \pi.AC.BC = 20\pi$

Quay quanh AC : $S_2 = \pi.AB.BC = 15\pi$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{3}$

Chọn C

Câu 6 Một tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5$, $AC = 12$. Cho tam giác ABC quay quanh cạnh huyền BC ta được vật tròn xoay có thể tích bằng:

A) $V = \frac{1200\pi}{13}$ **B)** $V = \frac{1200\pi}{5}$ **C)** $V = \frac{1200\pi}{12}$ **D)** Kết quả khác

Trả lời:

$\Delta ABC: BC^2 = 25+144 = 169 => BC = 13$

Kẻ $AH \perp BC$. Khi quay quanh BC, tam giác ABC tạo thành 2 hình nón chung đáy, tâm H, bán kính $HA = \frac{5.12}{13}$, đường cao lần lượt là BH và CH.

$V = \frac{1}{3}\pi HA^2.HB + \frac{1}{3}\pi.HA^2.HC = \frac{1}{3}\pi.HA^2.BC$

$V = \frac{1}{3}\pi\frac{5^2.12}{13^2} = \frac{1200\pi}{13}$

Chọn A

Câu 7 Một tam giác vuông ABC vuông tại A, có $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$. Kẻ $AH \perp BC$. Cho tam giác quay quanh BC, tam giác AHB và AHC tạo thành 2 hình nón có diện tích xung quanh là S_1, S_2 và thể tích V_1, V_2.

Xét 2 câu:

(I) $\sqrt{2}\ S_2 = \sqrt{3}S_1$

(II) $2V_2 = 3V_1$

Hãy chọn đáp án đúng?

A) Chỉ (I)

B) Chỉ (II)

C) Cả 2 câu đều sai

D) Cả 2 câu đều đúng

Trả lời:

Quay quanh BC, các tam giác AHB và AHC tạo thành hai hình nón tròn xoay bán kính đáy chung là AH nên.

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi.AH.AB}{\pi.AH.AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ => (I) Đúng

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi.AH^2.HB}{\frac{1}{3}\pi.AH^2.HC} = \frac{HB}{HC} = \frac{2}{3}$ => (II) Đúng

Chọn D

Câu 8 Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 45^0, \widehat{ACB} = 30^0$, $AB = \frac{1}{\sqrt{2}}$ quay quanh cạnh BC, ta được vật tròn xoay có thể tích là:

A) $V = \frac{\pi}{24}$

B) $V = \frac{\pi}{18}(1+\sqrt{3})$

C) $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}$

D) Kết quả khác

Trả lời:

Kẻ $AH \perp BC$ thì

ΔABH là tam giác vuông cân tại H: $HA = HB = \frac{1}{2}$

ΔACH là nửa tam giác đều cạnh AC nên $HC = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$V = \frac{1}{3}.\pi.AH^2\left(BH + HC\right) = \frac{1}{3}.\pi\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{48}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

Chọn D

Câu 9 Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R có $\widehat{BAC} = 75^0, \widehat{ACB} = 60^0$. Kẻ $BH \perp AC$. Quay ΔABC quanh AC thì ΔBHC tạo thành hình nón xoay có diện tích xung quanh bằng:

A) $S_{xq} = \frac{\pi R^2\sqrt{3}}{4}$

B) $S_{xq} = \frac{\pi R^2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+1)$

C) $S_{xq} = \frac{\pi R^2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}+1)$

D) $S_{xq} = \frac{\pi R^2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+1)^2$

Trả lời:

$$\Delta ABC: \frac{BC}{\sin\widehat{A}} = 2R \Rightarrow BC = 2R.sin75^0 = 2R.sin\left(45^0 + 30^0\right)$$

$$BC = 2R.\frac{\sqrt{2}}{2}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{R}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$\Delta BHC: BH = BC.sin60^0 = \frac{R}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{6}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$$S_{xq} = \pi.BH.BC = \pi\frac{R\sqrt{6}}{4}(\sqrt{3}+1).\frac{R\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1) = \pi\frac{R^2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+1)^2$$

Chọn B

Câu 10 Một hình thanh vuông ABCD có đường cao $AD = \pi$, đáy nhỏ $AB = \pi$, đáy lớn $CD = 2\pi$. Cho hình thang đó quay quanh CD, ta được vật tròn xoay có thể tích bằng:

A) $V = 2\pi^4$ B) $V = \frac{4}{3}\pi^4$ C) $V = \frac{4}{3}\pi^3$ D) $V = \frac{4}{3}\pi^2$

Trả lời:

Kẻ $BH \perp DC$ thì ABHD là hình vuông cạnh bằng π và BHC là tam giác vuông cân tại H có cạnh góc vuông $HB = HC = \pi$.

$V = \pi.AC^2.DC + \frac{1}{3}.\pi.HB^2 + HC$

$= \pi.\pi^2.\pi + \frac{1}{3}\pi.\pi^2.\pi = \frac{4}{3}\pi^4$

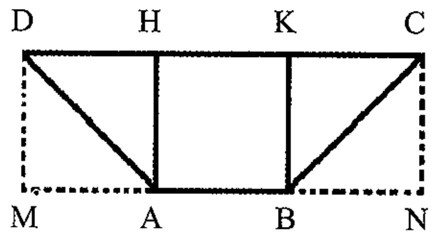
Chọn B

Câu 11 Một hình thang cân ABCD có đáy nhỏ $AB = 1$, đáy lớn $CD = 3$, cạnh bên $BC = DA = \sqrt{2}$. Cho hình thang đó quay quanh AB thì được vật tròn xoay có thể tích bằng:

A) $V = \frac{7}{3}\pi$ B) $V = \frac{4}{3}\pi$ C) $V = \frac{5}{3}\pi$ D) $V = 3\pi$

Trả lời:

Kẻ AH, BK cùng vuông góc với CD. Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng của H qua AD và của K qua BC thì ΔMAD và ΔNBC là 2 tam giác vuông cân bằng nhau có $MA = AB = BN = AH = 1$



$V = \pi.AH^2.MN - (\frac{1}{3}\pi.AH^2.MA + \frac{1}{3}\pi.AH^2.NB)$

$= \pi AH^2(MN - \frac{MA}{3} - \frac{NB}{3}) = \pi.AH^2.\frac{7}{3}.AB = \frac{7}{3}\pi$

Chọn A

Câu 12 Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{BDA} = \alpha$ ($0^0 < \alpha < 90^0$), $AD = a$ và $\widehat{ADB} = 90°$. Quay ABCD quanh AB, ta được vật tròn xoay có thể tích là:

A) $V = \pi a^3 sin^2\alpha$ B) $V = \pi a^3 sin\alpha.cos\alpha$

C) $V = \pi a^3 \frac{sin^2\alpha}{cos\alpha}$ D) $V = \pi a^3 \frac{cos^2\alpha}{sin\alpha}$

Trả lời:

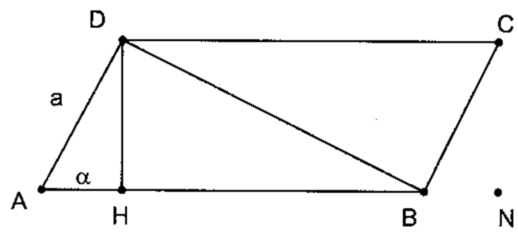
Kẻ $DH \perp AB$, $CN \perp AB$.

Các tam giác vuông HAD và NBC bằng nhau.

$DH = CN = a.sin\alpha$

$AH = BN = a.cos\alpha$

$\Rightarrow HN = AB = \frac{a}{\cos\alpha}$



Khi quay quanh AB, các tam giác vuông AHD và NBC tạo thành hai hình nón tròn xoay bằng nhau nên

$V = \frac{1}{3}\pi.DH^2.AH + (\pi.DH^2.HN - \frac{1}{3}\pi.CN^2.BN)$

$= \pi.DH^2.AB = \pi.a^2.sin^2\alpha.\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{\pi a^3 sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

Chọn C

Câu 13 Cho hình lăng trụ tam giác đều, có tất cả các cạnh bằng a. Xét hình trụ tròn xoay ngoại tiếp hình lăng trụ đó. Xét 2 câu:

(I) Thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông.

Thể tích hình trụ là $V = \pi a^3$

Hãy chọn câu đúng?

A) Chỉ (I) **B)** Chỉ (II)

C) Cả 2 câu sai **D)** Cả 2 câu đều đúng

Trả lời:

Gọi R là bán kính đáy của hình trụ, thì R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều của đáy hình lăng trụ, nên $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Thiết diện qua trục của hình trụ có kích thước (a, $2\frac{a}{\sqrt{3}}$) nên là hình chữ nhật.

Như vậy (I) sai

$V_{tru} = \pi.R^2.h = \pi.\frac{a^2}{3}.a = \frac{\pi a^3}{3}$: (II) sai

Chọn C

Câu 14 Một hình lập phương có cạnh bằng 1. Một hình trụ tròn xoay có đáy là 2 đường tròn nội tiếp 2 hình vuông đối diện của hình lập phương. Hiệu số thể tích của hình lập phương và hình trụ là:

A) $1 - \frac{\pi}{2}$ **B)** $1 - \frac{\pi}{4}$ **C)** $1 - \frac{\pi^2}{4}$ **D)** $\frac{3}{4}$

Trả lời:

$V_{lập\ phương} = 1^3 = 1$

$\Rightarrow V_{trụ} = \pi.(\frac{1}{2})^2.1 = \frac{\pi}{4}$

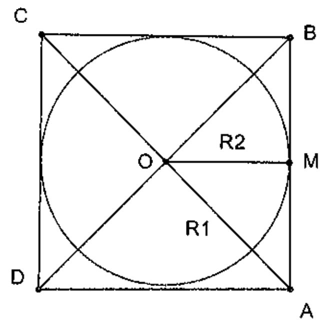
$V_{lập\ phương} - V_{trụ} = 1 - \frac{\pi}{4}$

Chọn B

Câu 15 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O', O là tâm của 2 hình vuông $A'B'C'D'$ và $ABCD$ và $O'O = a$. Gọi V_1 là thể tích của hình trụ tròn xoay đáy là 2 đường tròn ngoại tiếp các hình vuông $ABCD$, $A'B'C'D'$ và V_2 là thể tích hình nón tròn xoay đỉnh O' và đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6

Trả lời:



Gọi M là trung điểm của AB thì ΔOAM vuông cân tại M.

$R_1 = OA = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $R_2 = OM = \frac{1}{2}$

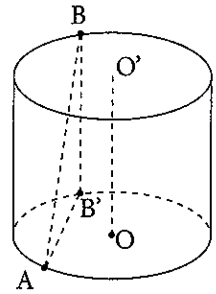
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R_1^2.h}{\pi R_2^2.h} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$

Chọn D

Câu 16 Một hình trụ tròn xoay, bán kính đáy bằng R, trục $OO' = R\sqrt{2}$. Một đoạn thẳng $AB = R\sqrt{6}$ đầu $A \in (O)$, $B \in (O')$. Góc giữa AB và trục hình trụ là:

A) 30^0 **B)** 55° **C)** 60^0 **D)** 75^0

Trả lời:



Kẻ đường sinh B'B thì $B'B = O'O = R\sqrt{2}$

$\Delta ABB' : cos\alpha = cos\widehat{ABB'} = \frac{BB'}{AB} = \frac{R\sqrt{2}}{R\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = 55^0$

Chọn A

Câu 17 Một hình trụ tròn xoay bán kính R = 1. Trên 2 đường tròn (O) và (O') lấy A và B sao cho $AB = 2$ và góc giữa AB và trục OO' bằng 30^0. Xét hai câu:

(I) Khoảng cách giữa O'O và AB bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(II) Thể tích của hình trụ là $V = \sqrt{3}$

Hãy chọn đáp án đúng?

A) Chỉ (I) **B)** Chỉ (II)

C) Cả 2 câu đều sai **D)** Cả 2 câu đều đúng

Trả lời:

Kẻ đường sinh BC thì OO' // (ABC). Vì (ABC) vuông góc với (OAC) nên kẻ $OH \perp AC$ thì $OH \perp (ABC)$.

Vậy $d(OO', AB) = OH$

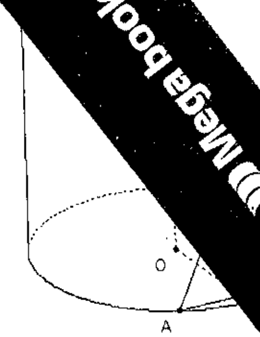
ΔABC : $BC = AB.cos30^0 = \sqrt{3}$

$AC = AB.sin30^0 = 1$

$\Rightarrow \Delta OAC$ là tam giác đều, có cạnh bằng 1,

nên $OH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: (I) đúng.

$V = \pi.R^2.h = \pi.1^2.\sqrt{3} = \pi\sqrt{3}$: (II) sai.



Chọn A

Câu 18 Cho ABA'B' là thiết diện song song với trục OO' của hình trụ (A, B thuộc đường tròn tâm O). Cho biết $AB = 4$, $AA' = 3$ và thể tích của hình trụ bằng $V = 24\pi$. Khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (AA'B'B) là:

A) $d = 1$ **B)** $d = 2$ **C)** $d = 3$ **D)** $d = 4$

Trả lời:

Kẻ $OH \perp AB$ thì $OH \perp (ABCD)$

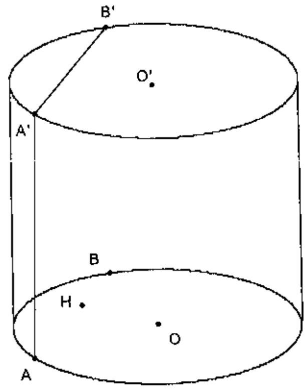
Và $AH = \dfrac{1}{2}AB = 2$

Ta có: $V = \pi.OA^2.AA' = 3\pi OA^2$

Mà: $V = 24\pi \Rightarrow OA^2 = 8$

ΔOAH : $d^2 = OH^2 = OA^2 - AH^2 = 8 - 4 = 4$

$\Rightarrow d(O,(AA'B'B)) = d = 2$



Chọn B

Câu 19 Cho ΔABC vuông cân tại C, nội tiếp trong đường tròn tâm O, đường kính AB. Xét điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC) sao cho SA, SB, SC tạo với (ABC) góc 45^0. Hãy chọn câu đúng:

A) Hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp ΔABC là hình nón tròn xoay.

B) Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân.

C) Khoảng cách từ O đến 2 thiết diện qua đỉnh (SAC) và (SBC) bằng nhau

D) Cả 3 câu trên đều đúng.

Trả lời:

Kẻ $SO' \perp (ABC)$

$\Delta SO'A = \Delta SO'B = \Delta SO'C$

$SA = SB = SC, O'A = O'B = O'C$

...ường tròn ngoại tiếp ΔABC nên O' ≡ O: Câu A) đúng.

... có $\widehat{SAB}=\widehat{SBA}=45^0$ nên là tam giác vuông cân tại S: B) đúng.

Vì ΔABC vuông cân tại C nên kẻ $OM\perp CA$ và $ON\perp CB$ thì $OM=\frac{1}{2}CB=\frac{1}{2}CA=ON$: C) đúng

Chọn D

Câu 20 Cho tứ diện $OABC$ có OAB là tam giác vuông cân. $OA = OB = a$, $OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ và $OC\perp(OAB)$. Xét hình nón tròn xoay đỉnh C, đáy là đường tròn tâm O, bán kính A. Hãy chọn câu sai?

A) Đường sinh hình nón bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

B) Khoảng cách từ O đến thiết diện (ABC) bằng $\frac{a}{2}$

C) Thiết diện (ABC) là tam giác đều

D) Thiết diện (ABC) hợp với đáy góc 45°

Trả lời:

Tam giác OAB vuông cân tại O nên $AB = a\sqrt{2}$

ΔOAC: $AC^2 = OA^2 + OC^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$

$AC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vì $AB \neq AC$: Câu C) sai

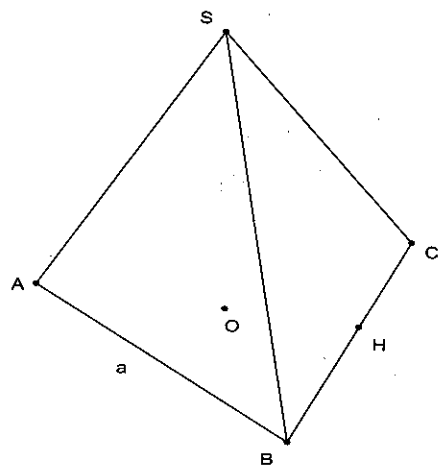
Chọn C

Câu 21 Hình nón tròn xoay nối tiếp trong tứ diện đều cạnh bằng a có diện tích xung quanh bằng

A) $S_{xq}=\frac{\pi}{4}a^2$ **B)** $S_{xq}=\frac{\pi}{6}a^2\sqrt{2}$ **C)** $S_{xq}=\frac{\pi}{6}a^2\sqrt{3}$ **D)** $S_{xq}=\frac{2\pi}{3}a^2$

Trả lời:

Gọi $SABC$ là tứ diện đều cạnh A. Gọi H là trung điểm cạnh BC. Kẻ $SO\perp(ABC)$ thì $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ là đường sinh của hình nón. Ba điểm A, O, H thẳng hàng.



$HO=\frac{1}{3}AH=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

$S_{xq} = \pi.OH.SH = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi a^2}{4}$

Chọn A

Câu 22 Hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh bằng a, có diện tích xung quanh là:

A) $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2}{3}$ **B)** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$ **C)** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ **D)** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{6}$

Trả lời:

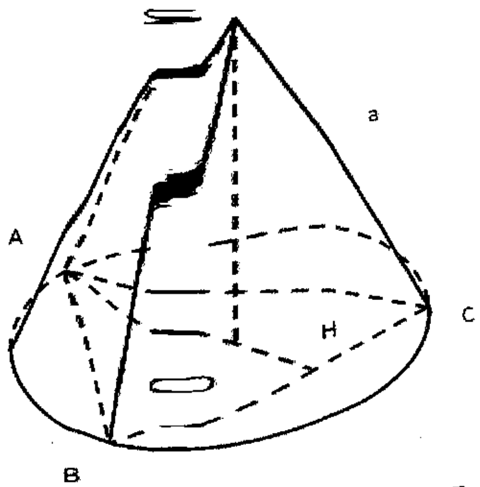
Kẻ $SO \perp (ABC)$, $SH \perp BC \Rightarrow OH \perp BC$

Ta có $OA = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$S_{xq} = \pi.OA.SA = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a$

$S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$

Chọn C



Câu 23 Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R = 5$. Một thiết diện qua đỉnh SAB sao cho tam giác SAB đều, cạnh bằng 8. Khoảng cách từ O đến thiết diện (SAB) là:

A) $d = \dfrac{4}{3}\sqrt{13}$ **B)** $d = \dfrac{3}{4}\sqrt{13}$ **C)** $d = 3$ **D)** $d = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

Trả lời:

$SO \perp (OAB)$, kẻ $SH \perp AB \Rightarrow OH \perp AB$

$AB \perp (SOH) \Rightarrow (SAB) \perp (SOH)$

Kẻ $OI \perp SH$ thì $OI \perp (SAB)$ nên $d = OI$

$\Delta SOA : OS^2 = 64 - 25 = 39$

$\Delta OHA : OH^2 = 25 - 16 = 9$

$\Rightarrow \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OH^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{39} = \dfrac{16}{117}$

$OI = \dfrac{3}{4}\sqrt{13}$

Chọn B

Câu 24 Cho hình nón tròn xoay có thiết diện qua đỉnh là 1 tam giác vuông cân. Hãy chọn câu sai trong các câu sau:

A) Đường cao bằng tích bán kính đáy

B) Đường sinh hợp với đáy góc 45^0

C) Đường sinh hợp với trục góc 45^0

D) Hai đường sinh tuỳ ý thì vuông góc với nhau.

Trả lời:

Câu D) sai vì thiết diện qua trục là tam giác vuông cân, nghĩa là 2 đường sinh tạo thành mặt phẳng chứa SO mới vuông góc với nhau, còn 2 đường sinh bất kì thì không chắc là vuông góc với nhau.

Chọn D

Câu 25 Một hình nón tròn xoay, đường sinh a, thiết diện qua trục SO là tam giác cân SAB có góc ở đỉnh $\widehat{ASB} = \alpha$. Thể tích hình nón là:

A) $V = \frac{1}{3}\pi a^3 sin^2\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}$

B) $V = \frac{1}{3}\pi a^3\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$

C) $V = \frac{1}{3}\pi a^3 sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$

D) Cả 3 câu trên

Trả lời:

ΔSAB cân tại O nên đường cao SO cũng là phân giác và là trung tuyến.

$\Delta SAO:\ OA = a.sin\frac{\alpha}{2}$ và $OS = a.cos\frac{\alpha}{2}$

$$V = \frac{1}{3}\pi.OA^2.OS = \frac{1}{3}\pi.a^2.sin^2\frac{\alpha}{2}.a.cos\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\pi.a^3.sin^2\frac{\alpha}{2}.cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}\pi.a^3.cos\frac{\alpha}{2}(1 - cos\frac{\alpha}{2})$$

$$= \frac{1}{6}\pi.a^3.sin\frac{\alpha}{2}.sin\alpha$$

Chọn D

Câu 26 Cho S.ABC là hình chóp tam giác đều, cạnh đáy là a, cạnh bên hợp với mặt đáy góc 60°. Hình nón tròn xoay có đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, có diện tích xung quanh là:

A) $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{3}$

B) $S_{xq} = \frac{2\pi a^2}{3}$

C) $S_{xq} = \pi a^2$

D) $S_{xq} = 2\pi a^2$

Trả lời:

Kẻ $SO \perp (ABC)$ thì O là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Do ΔABC là tam giác đều cạnh a nên:

$$SA=\frac{AO}{\cos 60^\circ}=\frac{\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$S_{xq}=\pi.OA.SA=\pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3}=\frac{2\pi a^2}{3}$$

Chọn B.

Câu 27 Cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều, cạnh đáy a, cạnh bên hợp với đáy góc 45°. Hình tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$, có diện tích xung quanh là:

A) $S_{xq}=2\pi a^2$ B) $S_{xq}=\pi a^2$ C) $S_{xq}=\frac{\pi a^2}{2}$ D) $S_{xq}=\frac{\pi a^2}{4}$

Trả lời:

Kẻ $SO\perp(ABCD)$ thì O là tâm của hình vuông ABCD. Do ΔSOA vuông cân tại O nên

$$SA=OA\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}=a$$

$$S_{xq}=\pi.\frac{AB}{2}.SA=\pi.\frac{a}{2}.a=\frac{\pi a^2}{2}.$$

Chọn C.

Câu 28 Một hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao bằng a. Một hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có diện tích xung quanh là $S_{xq}=\frac{2\pi a^2}{3}$ thì bán kính của hình nón là:

A) $R=\frac{a}{3\sqrt{3}}$ B) $R=a\sqrt{3}$ C) $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D) $R=2a\sqrt{3}$

Trả lời:

Kẻ $SO\perp(ABC)$ thì O là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Từ đó ta có: $SA=\sqrt{R^2+a^2}$ (R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

Theo giả thiết:

$$\pi R\sqrt{R^2+a^2}=\frac{2}{3}\pi a^2 \Leftrightarrow 9R^2+9a^2R^2-4a^4=0$$

Giải ra ta được $R^2=\frac{a^2}{3}$ (loại nghiệm $R^2=-\frac{4a^2}{3}$).

$$\Rightarrow R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Chọn C.

Câu 29 Cho hình nón tròn xoay đường cao SO, bán kính đáy R. Gọi SAB là thiết diện qua đỉnh sao cho $AB = R\sqrt{2}$. Cho biết thể tích của hình nón là $R = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{6}$. Mặt phẳng (SAB) hợp với đáy (OAB) một góc α là:

A) $\alpha = 30°$ B) $\alpha = 45°$ C) $\alpha = 60°$ D) Kết quả khác

Trả lời:

$SO \perp (OAB)$, kẻ $SH \perp AB \Rightarrow OH \perp AB$. Vậy góc $\alpha = \widehat{SHO}$

Vì $AB = R\sqrt{2} \Rightarrow \Delta OAB$ vuông cân tại $O \Rightarrow OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Mặt khác, $V = \frac{1}{3}\pi R^2.OS = \frac{\pi R^2\sqrt{2}}{6} \Rightarrow OS = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Từ đó suy ra ΔOSH vuông cân tại O, suy ra $\alpha = 45°$.

Chọn B.

Câu 30 Cho hình nón xoay chiều cao SO. Gọi ABCD là hình vuông nội tiếp trong đường tròn đáy của hình tròn. Cho biết $AB = a$ và thể tích của hình nón là $V = \frac{\pi a^3}{6}$. Gọi M, N là trung điểm của BC và SA thì độ dài của đoạn MN là :

A) $MN = a\sqrt{14}$ B) $MN = \frac{a\sqrt{14}}{2}$ C) $MN = \frac{a\sqrt{14}}{3}$ D) $MN = \frac{a\sqrt{14}}{4}$

Trả lời:

ABCD là hình vuông cạnh a nên $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $V = \frac{1}{3}\pi.OA^2.OS = \frac{\pi a^3}{6} \Leftrightarrow OS = a$.

$SO \perp (ABCD)$ nên từ N trung điểm của SA, kẻ $NH \perp OA$ thì $NH \perp (ABCD)$ và H là trung điểm của OA, đồng thời $NH = \frac{1}{2}OS = \frac{1}{2}a$.

ΔOHM có $\widehat{AOM} = 135°$ nên

$HM^2 = OH^2 + OM^2 - 2OH.OM.\cos 135°$

$HM^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a}{2}.\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{10a^2}{16}$

$\Delta MNH: MN^2 = \frac{10a^2}{16} + \frac{a^2}{4} = \frac{14a^2}{16} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{14}}{4}$

Chọn D

Câu 31 Cho tứ diện $SABC$ có $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$.

Tam giác ABC có $AB = a,\ BC = 2a,\ AC = a\sqrt{5}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ là :

A) $S = 9\pi a^2$ **B)** $S = 10\pi a^2$ **C)** $S = 27\pi a^2$ **D)** $S = 36\pi a^2$

Trả lời:

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC\ (1)$

$AB^2 + BC^2 = 5a^2 = AC^2 \Rightarrow AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC có đường kính $SC = \sqrt{4a^2 + 5a^2} = 3a$.

$\Rightarrow S = 4\pi\left(\frac{SC}{2}\right)^2 = 9\pi a^2$.

Chọn A.

Câu 32 Cho tứ diện $SABC$, đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = 3,\ BC = 4$. Hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC) và SC hợp với (ABC) góc 40°. Thể tích hình cầu ngoại tiếp $SABC$ là:

A) $V = \frac{5\pi\sqrt{2}}{3}$ **B)** $V = \frac{25\pi\sqrt{2}}{3}$ **C)** $V = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3}$ **D)** $V = \frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$

Trả lời:

$\Delta ABC : AC = \sqrt{9+16} = 5$

$(SAB) \perp (ABC), (SAC) \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp (ABC)$

$\Rightarrow \widehat{SAC} = 45° \Rightarrow SA = SC = 5$

$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{SC}{2}\right)^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$

Chọn D.

Câu 33 Cho tứ diện $ABCD$ hai mặt ABC và DCB là những tam giác đều có cạnh bằng 1, $AD = \sqrt{2}$. Gọi O là trung điểm của cạnh AD. Xét 2 câu:

(I) O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

(II) $OABC$ là hình chóp tam giác đều.

Chọn câu đúng?

A) Chỉ (I) **B)** Chỉ (II) **C)** Cả 2 câu sai **D)** Cả 2 câu đúng

Trả lời:

$AB^2 + AD^2 = CA^2 + CD^2 = 2 = AD^2$

Suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90°$: (I) đúng

Ngoài ra, O là trung điểm cạnh huyền của 2 tam giác vuông ABD và ACD nên

$$OA = OC = OD = OB = \frac{1}{2}AD = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Hơn nữa, ΔABC là tam giác đều cạnh bằng 1 nên $OABC$ là hình chóp tam giác đều (II) đúng.

Chọn D.

Câu 34 Cho tứ diện $M.ABC$ với ΔABC vuông tại A, cạnh huyền $BC = 2a$. Gọi I là trung điểm của BC và hình chiếu của M xuống (ABC) trùng với I. Xét hai câu:

(I) Hình chóp $M.ABC$ là hình chóp tam giác đều.

(II) Cho $AM = a\sqrt{2}$ thì I là tâm mặt cầu đi qua 4 đỉnh M.ABC

Hãy chọn câu đúng?

A) Chỉ (I) **B)** Chỉ (II) **C)** Cả 2 câu sai **D)** Cả 2 câu đúng

Trả lời:

(I) Sai vì ABC là tam giác vuông cân tại A (chứ không phải là tam giác đều)

(II) Xét ΔMAI : $IM^2 = AM^2 - AI^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$.

Vì $IA = IB = IC = IM = a$: (II) đúng.

Chọn B.

Câu 35 Cho tứ diện ABCD với $(ABC) \perp (DAB)$. Tam giác ABC vuông cân tại B, tam giác DAC cân tại D. Gọi O là trung điểm của AC. Xét hai câu:

(I) Ta có $DO \perp (ABC)$.

(II) Điểm O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Hãy chọn câu đúng?

A) Chỉ (I) **B)** Chỉ (II) **C)** Cả 2 câu sai **D)** Cả 2 câu đúng

Trả lời:

Theo tính chất của tam giác cân, $AC \perp OB$ và $AC \perp OD$.

$\Rightarrow AC \perp (OBD) \Rightarrow (ABC) \perp (OBD)$

Mặt khác $DO \perp AC$ nên suy ra $DO \perp (ABC)$: (I) đúng.

Trong ΔABC : $OB = OA = OC$

Trong ΔADC : $OA = OD$ nếu $\widehat{DAC} = 45^\circ$ nghĩa là tam giác ADC phải vuông cân tại D, trái với giả thiết, vậy câu (II) sai.

Chọn A.

Câu 36 Cho tứ diện $SABC$ có $SA = 5$, $SB = 4$, $SC = 3$ và 3 đường thẳng SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp SABC bằng:

A) $S = 25\pi$ **B)** $S = 45\pi$ **C)** $S = 50\pi$ **D)** $S = 100\pi$

Trả lời:

ΔSBC vuông nên từ trung điểm I của BC kẻ $(\Delta) \perp (SBC)$ thì (Δ) là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔSBC.

Đường trung trực đoạn SA cắt (Δ) tại I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

$$SI^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$$

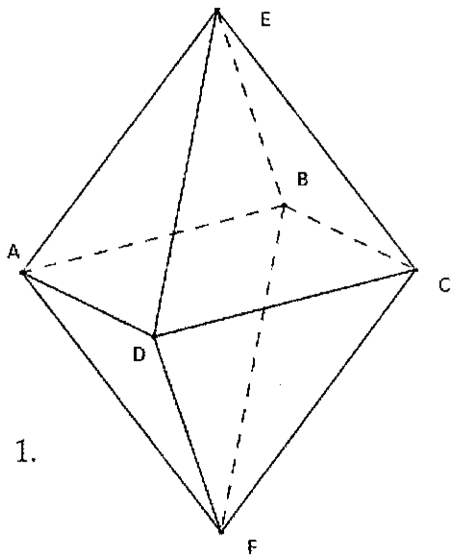
$$\Rightarrow S = 4\pi.SI^2 = 50\pi.$$

Chọn C

Câu 37 Mặt cầu ngoại tiếp hình 8 mặt đều cạnh bằng $\sqrt{2}$ có diện tích bằng:

A) $S = 4\pi$ **B)** $S = 8\pi$

C) $S = 12\pi$ **D)** $S = 4\pi\sqrt{2}$



Trả lời:

Cho hình 8 mặt đều ABCDEF cạnh bằng $\sqrt{2}$ thì điểm O tâm của hình vuông ABCD cũng là tâm của hình vuông AECF, nên

$$R = OA = OB = OC = OD = OE = OF = \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

$$\Rightarrow S = 4\pi.R^2 = 4\pi$$

Chọn A

Câu 38 Cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng 1. Xét hai câu:

(I) Hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn (C) ngoại tiếp hình vuông ABCD có thể tích $V_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$.

(II) Hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có thể tích $V_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Hãy chọn câu đúng.

A) Chỉ (I) **B)** Chỉ (II) **C)** Cả 2 câu sai **D)** Cả 2 câu đúng

Trả lời:

Kẻ $SO \perp (ABCD)$ thì O là tâm hình vuông ABCD.

Trong ΔSOA : $SO^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} \Rightarrow OS = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$V_1 = \frac{1}{3}.\pi.OA^2.OS = \frac{1}{3}.\pi.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}$: (I) sai.

Do $OA = OB = OC = OD = OS = \frac{\sqrt{2}}{2}$, nên

$V_2 = \frac{4}{3}.\pi.OA^3 = \frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$: (II) đúng

Chọn B.

Câu 39 Cho SABCD là hình chóp có $SA = 12a$, và $SA \perp (ABCD)$. ABCD là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = 4a$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là :

A) $R = \frac{5a}{2}$ B) $R = 6a$ C) $R = \frac{13a}{2}$ D) $R = \frac{15a}{2}$

Trả lời:

Ta có $SA \perp (ABCD)$, $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$ hay $\widehat{SBC} = 90°$

Tương tự, $CD \perp SD$ hay $\widehat{SDC} = 90°$.

Ngoài ra, $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$ hay $\widehat{SAC} = 90°$

Vậy, mặt cầu đi qua 5 điểm ABCDS có tâm là trung điểm cạnh SC.

$SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + AB^2 + BC^2 = 144a^2 + 9a^2 + 16a^2$

$SC^2 = 169a^2 \Rightarrow SC = 13a$

Bán kính mặt cầu $R = \frac{13a}{2}$

Chọn C

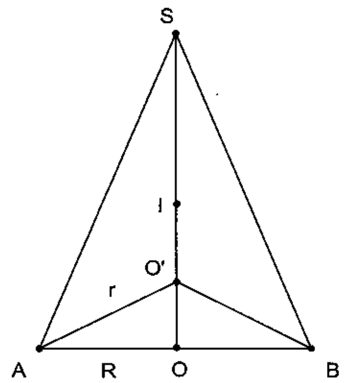
Câu 40 Hình nón tròn xoay có trục $SO = R\sqrt{3}$ với R là bán kính đáy, thiết diện qua trục SAB là tam giác đều. Gọi I là trung điểm của SO và $E, F \in SO$ sao cho $\frac{EI}{EO} = \frac{FI}{FO} = \frac{1}{2}$. Khi đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón là điểm:

A) I B) E C) F D) O

Trả lời:

Gọi O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì $r = O'S = O'A = O'B$.

Ta có:



$OO' = OS - r = R\sqrt{3} - \frac{R}{\cos 30^\circ}$

$OO' = R\sqrt{3} - \frac{2R\sqrt{3}}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \frac{OO'}{OI} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{3}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{OO'}{OI} = \frac{1}{2}$

Vậy $O' \equiv E$.

Chọn B

Câu 41 Cho hình chóp S.ACB với $SA = 4$, $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền $BC = 5$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A) $S = 25\pi$ **B)** $S = 41\pi$ **C)** $S = 45\pi$ **D)** $S = 50\pi$

Trả lời:

Gọi H là trung điểm cạnh BC, đường thẳng $(\Delta) \perp (ABC)$ tại H và đường trung trực của SA gặp nhau tại I, đó là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

$IA^2 = 2^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4 + \frac{25}{4} = \frac{41}{4}$

$\Rightarrow S = 4\pi.IA^2 = 4\pi.\frac{41}{4} = 41\pi$

Chọn B.

Câu 42 Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy là a. Xét hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD. Cho biết nữa góc ở đỉnh của hình nón bằng 45°. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón là:

A) Điểm O, tâm của hình vuông ABCD

B) Điểm I, trung điểm của SO

C) Điểm J, giao điểm của SO với đường trung trực của SH (H là trung điểm của AB)

D) Cả ba câu trên đều sai

Trả lời:

Vì O là tâm của hình vuông ABCD nên

$OA = OB = OC = OD$ (1)

SO là đường cao của hình nón, SA là đường sinh nên $\widehat{SOA} = 45^\circ$, do đó ΔSOA là tam giác vuông cân tại O nên OA = OS (2)

Từ (1) và (2) suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Chọn A.

Câu 43 Một hình tròn đỉnh S, đáy là đường tròn (C) tâm O, bán kính R bằng với đường cao của hình nón. Tỉ số thể tích của hình nón và hình cầu ngoại tiếp hình nón bằng :

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$

Trả lời:

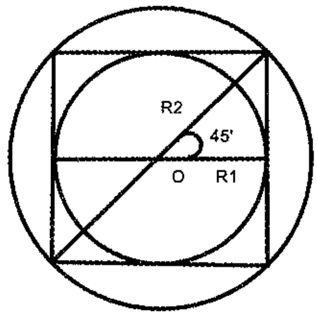
Từ $R = h$, ta có $\frac{V_N}{V_C} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 R}{\frac{1}{3}\pi . R^3} = \frac{1}{4}$.

Chọn C

Câu 44 Cho hình trụ tròn xoay có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tỉ số diện tích của 2 mặt cầu nột tiếp và ngoại tiếp hình trụ là :

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$



Trả lời:

Ta có : $\frac{S_1}{S_1} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = (\cos 45°)^2 = \frac{1}{2}$

Chọn D

Câu 45 Cho hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh bằng 2. Tỉ số thể tích hai mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón là :

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$

Trả lời:

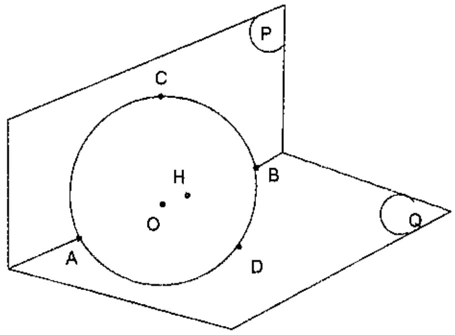
$$\frac{V_N}{V_C} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = (\cos 60°)^3 = \frac{1}{8}$$

Chọn A.

Câu 46 Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến (Δ). Lấy A, B cố định trên (Δ). Gọi S là mặt cầu có tâm O, đường kính AB. Gọi (C_1) là giao tuyến của (S) với (P), (C_2) là giao tuyến của (S) với (Q). Gọi C là một điểm thuộc (C_1) và là trung điểm của dây cung $\overset{\frown}{AB}$ và D là điểm tùy ý thuộc (C_2). Thể tích lớn nhất của tứ diện ABCD là:

A) $\frac{R^3}{2}$ **B)** $\frac{R^3}{3}$ **C)** $\frac{R^3}{6}$ **D)** $\frac{R^3}{12}$

Trả lời:



Vì $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$ nên

$CO \perp AB$

$\Rightarrow CO \perp (ABD)$.

Kẻ $DH \perp AB$.

Do ABC cố định, nên

$$V_{ABCD} = V = \frac{1}{6}.AB.OC.HD = \frac{1}{3}.R^3.DH.$$

Như vậy, thể tích cực đại khi DH lớn nhất khi và chỉ khi DH = R

Vậy $V_{max} = \frac{1}{3}.R^3$

Chọn B

Câu 47 Cho hình trụ tròn xoay, đáy là 2 đường tròn (C) tâm O và (C') tâm O'. Xét hình tròn xoay có đỉnh O' và đáy là (C). Xét hai câu:

(I) Nếu thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều O'AB thì thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông ABB'A'.

(II) Nếu thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông ABB'A' thì thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều O'AB.

Hãy chọn câu đúng?

A) Chỉ (I) **B)** Chỉ (II) **C)** Cả 2 câu sai **D)** Cả 2 câu đúng

Trả lời:

Gọi O'AB là thiết diện qua trục của hình nón.

ABB'A' là thiết diện qua trục của hình trụ.

Xét (I): Nếu ΔO'AB là tam giác đều, $AB = a$ thì $O'O = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'A = O'O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên ABB'A' chỉ là hình chữ nhật. Vậy (I) sai.

Xét (II): Nếu ABB'A' là hình vuông, $AB = a$, thì:

$O'A^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow O'A = \frac{5a^2}{4} \neq AB$.

Như vậy ΔO'AB không phải là tam giác đều: (II) sai.

Chọn C

Câu 48 Cho hình trụ trục OO', đường tròn đáy (C) và (C'). Xét hình nón đỉnh O', đáy (C) và có đường sinh hợp với đáy góc α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Cho biết tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng $\sqrt{3}$. Góc α có giá trị là:

A) 30° **B)** 45° **C)** 60° **D)** Kết quả khác.

Trả lời:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi R.\sin\alpha}{\pi.R.a} = 2\sin\alpha = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \text{ (do } 0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

Chọn C.

Câu 49 Cho hình lập phương (I) và hình trụ (II) có thể tích là V_1 và V_2. Cho biết chiều cao của (II) bằng đường kính đáy và bằng cạnh của (I). Hãy chọn câu đúng

A) $V_1 < V_2$ **B)** $V_1 > V_2$

C) $V_1 = V_2$ **D)** Không thể so sánh được

Trả lời:

Vì (II) nối tiếp trong (I) nên $V_1 > V_2$.

Chọn B.

Câu 50 Giả sử viên phấn viết bảng có dạng hình trụ tròn xoay đường kính đáy bằng 1cm, chiều dài 6cm. Người ta làm những hộp carton đựng phấn dạng hình hộp chữ nhật có kích thước $6 \times 5 \times 6$ cm. Muốn xếp 350 viên phấn vào 12 hộp, ta được kết quả nào trong 4 khả năng sao :

A) Vừa đủ **B)** Thiếu 10 viên **C)** Thừa 10 viên **D)** Không xếp được

Trả lời:

Vì chiều cao viên phấn là 6cm, nên chọn đáy của hộp carton có kích thước 5 x 6. Mỗi viên phấn có đường kính 1 cm nên mỗi hộp ta có thể đụng được 5 x 6 = 30 viên.

Số phấn đựng trong 12 hộp là: 30 x 12 = 360 viên

Do ta chỉ có 350 viên phấn nên thiếu 10 viên, nghĩa là đựng đầy 11 hộp, hộp 12 thiếu 10 viên

Chọn B.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Câu 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có AB = a, $BC = a\sqrt{3}$, H là trung điểm của cạnh AB. Biết hai mặt phẳng (SHC) và (SHD) cùng vuông góc với mặt đáy, đường thẳng SD tạo với mặt đáy một góc 60^0. Tính thể tích của khối chóp và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB theo a.

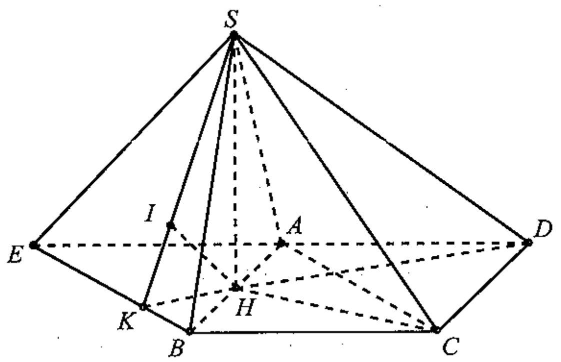
A. $\begin{cases} d(AC,SB) = \dfrac{a\sqrt{2067}}{53} \\ V = \dfrac{a^3\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} d(AC,SB) = \dfrac{a\sqrt{267}}{53} \\ V = \dfrac{a^3\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} d(AC,SB) = \dfrac{a\sqrt{20}}{53} \\ V = \dfrac{a^3\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} d(AC,SB) = \dfrac{a\sqrt{67}}{53} \\ V = \dfrac{a^3\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} (SHC) \perp (ABCD) \\ (SHD) \perp (ABCD) \\ (SHC) \cap (SHD) = SH \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SH$ là chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.

Ta có HD là hình chiếu vuông góc của SD lên $(ABCD)$

$\Rightarrow \left(\widehat{SD, ABCD}\right) = \left(\widehat{SD, HD}\right) = \widehat{SDH} = 60^0$

$\Rightarrow SH = HD.tan60^0 = \dfrac{a\sqrt{39}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH$

$= \dfrac{1}{3}AB.AD.SH$

$= \dfrac{1}{3}a.a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{39}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{13}}{2}$

Dựng hình bình hành $ACBE \Rightarrow AC // BE \Rightarrow AC // (SBE)$

$\Rightarrow d(AC,SB) = d(AC,(SBE)) = d(A,(SBE)) = 2d(H,(SBE))$

Gọi K, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên BE, SK.

Ta có : $BE \perp KH, BE \perp SH \Rightarrow BE \perp IH (1)$

Mặt khác, ta có : $HI \perp SK (2)$

Từ (1) và (2), ta có: $IH \perp (SBE) \Rightarrow d(H,(SBE)) = IH$.

Tính được $HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}; HI = \frac{a\sqrt{39}}{\sqrt{211}} \Rightarrow d(AC,SB) = 2HI = \frac{a\sqrt{39}}{\sqrt{53}} = \frac{a\sqrt{2067}}{53}$

Chọn đáp án A.

Câu 2 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 300. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

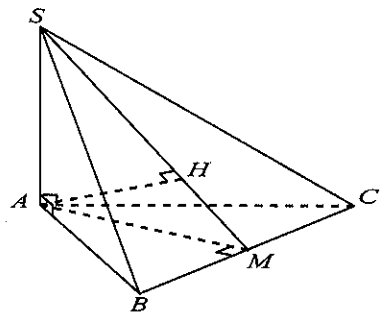
A. $d(A,(SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{13}$

B. $d(A,(SBC)) = \frac{a\sqrt{39}}{13}$

C. $d(A,(SBC)) = \frac{a\sqrt{39}}{3}$

D. $d(A,(SBC)) = \frac{a\sqrt{37}}{13}$

Lời giải



Ta có:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt),

$SA = \tan\widehat{SBA}.AB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{a^3}{12}$ (đvtt)

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC$

mà $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$

Kẻ $AH \perp SM$

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$

Ta có : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{13}{3a^2}$

$\Rightarrow AH^2 = \frac{3a^2}{13}$. Vậy $d(A,(SBC)) = \frac{a\sqrt{39}}{13}$

Chọn đáp án B.

Câu 3 Cho hình chóp S.ABCD có chiều cao SA bằng a. Mặt đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC}$ bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a?Gọi O là tâm của hình thoi; tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD)?

A. $\frac{\sqrt{21}}{15}a$ **B.** $\frac{\sqrt{23}}{14}a$ **C.** $\frac{\sqrt{21}}{14}a$ **D.** $\frac{\sqrt{21}}{4}a$

Lời giải

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{ABC} = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow$ Diện tích đáy: $S_{ABCD} = 2.S_{ABC} = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối chóp: $V = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ (đvtt)

Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho

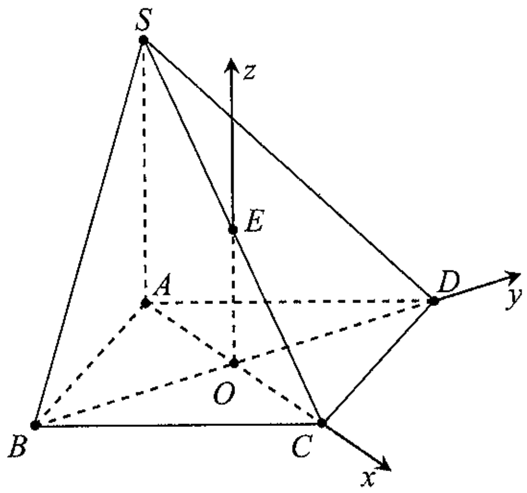
$Ox \equiv OC$, $Oy \equiv OD$, $Oz \equiv OE$,

với E là trung điểm của SC.

Tọa độ các đỉnh:

$C\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $D\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$E\left(0;0;\frac{a}{2}\right)$, O(0;0;0)



Phương trình mp(ECD): $\frac{x}{\frac{a}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} + \frac{z}{\frac{a}{2}} = 1$

Khoảng cách từ O đến (SCD) cũng là khoảng cách từ O đến (ECD):

$$d(O,(SCD)) = \frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{a\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2}} = \frac{\sqrt{21}}{14}a$$

Chọn đáp án C.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), cạnh bên SB hợp với mặt phẳng (ABCD) một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC?

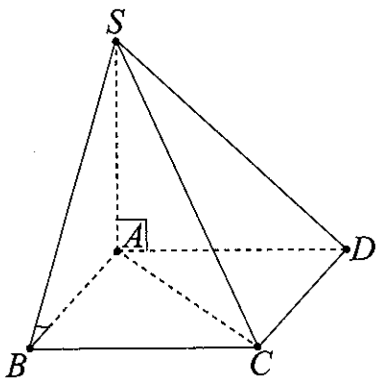
A. $AH = \frac{a.3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $AH = \frac{a\sqrt{7}}{4}$ **C.** $AH = \frac{a\sqrt{3}}{5}$ **D.** $AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

Ta có: AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\widehat{(SB,(ABCD))} = \widehat{SBA} = 60^0$ $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA$ là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$

Tính được: $AB = \frac{a}{2}; SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}; S_{ABCD} = \frac{a^2}{4}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ (đvtt)



$AD//BC \Rightarrow d(AD,SC)=d(A,(SBC))$; $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d(A,(SBC))$; $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

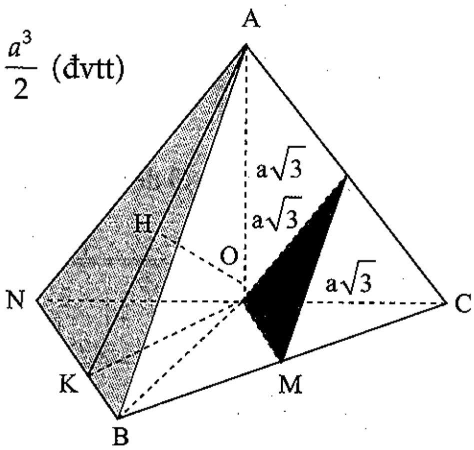
Chọn đáp án D.

Câu 5 Cho tứ diện OABC có đáy OBC là tam giác vuông tại O, OB = a, OC = $a\sqrt{3}$, (a > 0) và đường cao OA = $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích khối tứ diện theo a và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM.

A. $\begin{cases} d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5} \\ V = \dfrac{a^3}{2} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5} \\ V = \dfrac{a^3}{3} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} d = \dfrac{3.a\sqrt{15}}{5} \\ V = \dfrac{a^3}{2} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} d = 2.\dfrac{a\sqrt{15}}{5} \\ V = \dfrac{a^3}{2} \end{cases}$

Lời giải

$S_{OBC} = \dfrac{1}{2}OB.OC = \dfrac{1}{2}a(a\sqrt{3}) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$



Thể tích khối tứ diện: $V = \dfrac{1}{3}S_{OBC}.OA = \dfrac{1}{3}(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2})(a\sqrt{3}) = \dfrac{a^3}{2}$ (đvtt)

Ta có: $OM // BN$ (tính chất đường trung bình).

$\Rightarrow OM // (ABN)$

$\Rightarrow d(OM; AB) = d(OM; (ABN)) = d(O;(ABN))$.

Dựng $OK \perp BN, OH \perp AK$ $(K \in BN; H \in AK)$

Ta có: $AO \perp (OBC); OK \perp BN \Rightarrow AK \perp BN$

$BN \perp OK; BN \perp AK \Rightarrow BN \perp (AOK) \Rightarrow BN \perp OH$

$OH \perp AK; OH \perp BN \Rightarrow OH \perp (ABN) \Rightarrow d(O;(ABN) = OH$

Từ các tam giác vuông OAK; ONB có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

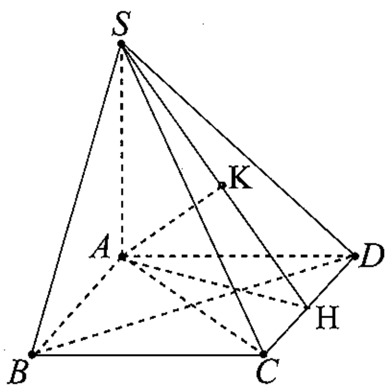
Vậy, $d(OM; AB) = OH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án A.

Câu 6 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$ cạnh SA vuông góc với đáy và SC tạo với đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD?

A. $\begin{cases} d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5} \\ V = \dfrac{a^3}{2} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} d = \dfrac{7.a\sqrt{15}}{5} \\ V = \dfrac{a^3}{3} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5} \\ V = \dfrac{a^3}{3} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5} \\ V = \dfrac{a^3}{9} \end{cases}$

Lời giải



Ta có ΔABC đều nên $AC = a$.

Có: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 120^\circ}$

$\Rightarrow BD = a\sqrt{3}$

Suy ra $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Mặt khác: $SA = AC.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{2}$

Do $AB//CD$ nên $d(AB,SD) = d(AB,(SCD)) = d(A,(SCD))$

Gọi H là trung điểm của CD. Do ΔACD đều nên $AH \perp CD$.

Trong tam giác SAH kẻ $AK \perp SH$ khi đó $d(A,(SCD)) = AK$

Ta có: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AK = \frac{AH.SA}{\sqrt{AH^2 + SA^2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}a$

Vậy $d(AB,SD) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

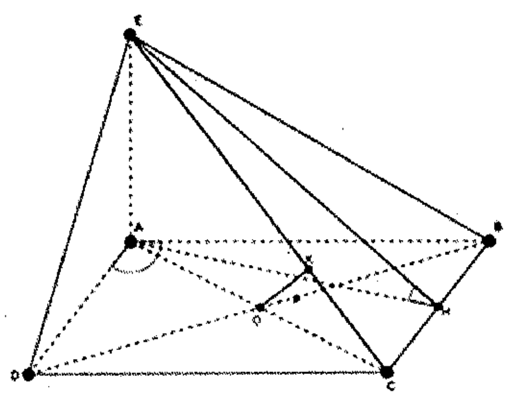
Chọn đáp án A.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 120^0$ và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SBC) và đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

A. $\begin{cases} d = \dfrac{3.a\sqrt{17}}{14} \\ V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} d = \dfrac{3.a\sqrt{17}}{14} \\ V = \dfrac{3.a^3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} d = \dfrac{.a\sqrt{17}}{14} \\ V = \dfrac{3.a^3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} d = \dfrac{3.a\sqrt{17}}{14} \\ V = \dfrac{3.a^3\sqrt{3}}{5} \end{cases}$

Lời giải

Do dáy $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{BAD} = 120^0$ nên các tam giác ABC, ADC đều cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi H là trung điểm của BC, ta có: $AH \perp BC$, $SA \perp BC \Rightarrow BC \perp SH$



Do đó: $\widehat{((SBC);(ABCD))} = \widehat{(AH;SH)} = \widehat{SHA} = 60^0$

Tam giác SAH vuông tại A: $SA = AH.\tan 60^0 = \frac{3a}{2}$

$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$

Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$.

Kẻ $OK \perp SC$ tại $K \Rightarrow OK$ là đường vuông góc chung của BD và SC

$\Rightarrow d(BD; SC) = OK$.

Tam giác SAC đồng dạng tam giác $OKC \Rightarrow OK = \dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$

Chọn đáp án B.

Câu 8 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^0$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, SA. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (CMN)?

A. $\begin{cases} d = \dfrac{2a\sqrt{87}}{29} \\ V = 2a^3 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} d = \dfrac{a\sqrt{87}}{29} \\ V = 2a^3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} d = \dfrac{2a\sqrt{87}}{29} \\ V = a^3 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} d = \dfrac{2a\sqrt{87}}{9} \\ V = 2a^3 \end{cases}$

Lời giải

Xét tam giác ABC có: $BC = AB.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = 2a^2\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = 2a^3$

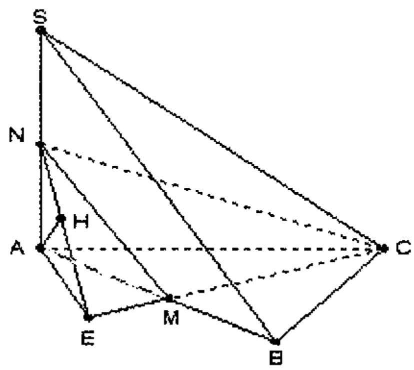
Do N là trung điểm SA nên $d\left(B,(CMN)\right)d\left(A,(CMN)\right)$

Kẻ $AE \perp CM, AH \perp NE$.

Chứng minh được: $AH \perp (CMN) \Rightarrow d\left(A,(CMN)\right) = AH$

$\Delta AEM, \Delta MBC$ đồng dạng nên $AE = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AN^2} \Rightarrow d\left(B,(CMN)\right) = AH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{29}} = \dfrac{2a\sqrt{87}}{29}$



Chọn đáp án A.

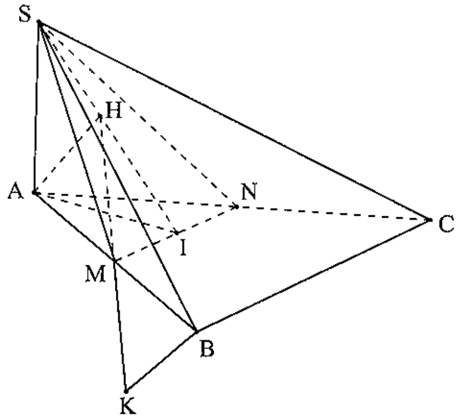
Câu 9 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SMN), với M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC?

A. $\begin{cases} d = a\dfrac{\sqrt{51}}{17} \\ V = \dfrac{a^3}{3} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} d = a\dfrac{\sqrt{55}}{17} \\ V = \dfrac{a^3}{3} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} d = a\dfrac{\sqrt{51}}{17} \\ V = \dfrac{a^3}{4} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} d = a\dfrac{\sqrt{55}}{17} \\ V = \dfrac{a^3}{4} \end{cases}$

Lời giải

$SA \perp (ABC)$ suy ra AB là hình chiếu vuông góc của SB lên (ABC)

Góc giữa SB và (ABC) là góc $\widehat{SBA} = 60^0$.



$SA = AB\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

$S_{ABC} = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3}{4}$

Kẻ $AI \perp MN$, Suy ra I là trung điểm MN,

kẻ $AH \perp SI$ tại H

$MN \perp SA, MN \perp AI \Rightarrow MN \perp AH$

$AH \perp (SMN)$. Vậy AH là khoảng cách từ A đến (SMN)

$AI = a\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{16}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{51}}{17}$

Mà $\dfrac{d(A,(SMN))}{d(B,(SMN))} = \dfrac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow d(B,(SMN)) = d(A,(SMN)) = a\dfrac{\sqrt{51}}{17}$

Chọn đáp án C.

Câu 10 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của đoạn AB, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mặt phẳng (SAC).

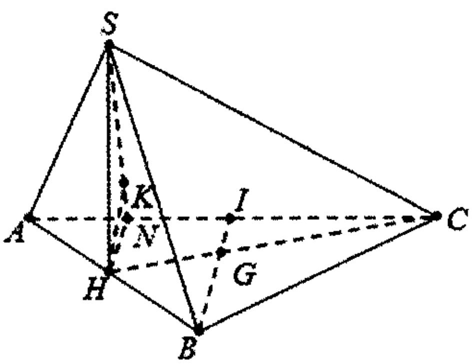
A. $\begin{cases} d = \dfrac{3a.\sqrt{15}}{5} \\ V = a^3\sqrt{3} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} d = \dfrac{2a.\sqrt{15}}{15} \\ V = a^3\sqrt{3} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} d = \dfrac{3a.\sqrt{15}}{15} \\ V = a^3\sqrt{3} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} d = \dfrac{3a.\sqrt{15}}{15} \\ V = 3.a^3\sqrt{3} \end{cases}$

Lời giải

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.3a.a^2\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$ (đvtt)

Ta có: $HG \cap (SAC) = C \Rightarrow \dfrac{d(G,(SAC))}{d(H,(SAC))} = \dfrac{GC}{HC} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow d(G,(SAC)) = \dfrac{2}{3}d(H,(SAC))$



Gọi I trung điểm của đoạn AC, N là trung điểm của IA, suy ra $HN \perp AC$. Mà $SH \perp AC$, nên $AC \perp (SHN)$

Trong mặt phẳng (SHN), kẻ $HK \perp SN, K \in SN$

Có $(SAC)\perp(SHN)$ theo giao tuyến SN và $HK\perp SN$ nên $HK\perp(SAC)$

$\Rightarrow\ d\left(H,(SAC)\right)=HK$

Có $HN=\dfrac{1}{2}BI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{HN^2}+\dfrac{1}{SH^2}$

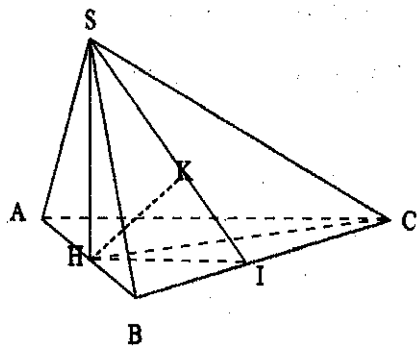
$\Rightarrow\ HK=\dfrac{HN.SH}{\sqrt{HN^2+SH^2}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}\Rightarrow\ d\left(G,(SAC)\right)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{15}}{5}=\dfrac{2a\sqrt{15}}{15}$

Chọn đáp án B.

Câu 11 Cho hình chóp S.ABC có góc giữa SC và mặt đáy bằng 450, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $AB=2a$, góc $\widehat{ABC}=60^0$ và hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm AB. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ A đến (SBC).

A. $\begin{cases} d=\dfrac{2.a\sqrt{39}}{\sqrt{55}} \\ V=\dfrac{2.a^3\sqrt{39}}{3} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} d=\dfrac{a\sqrt{39}}{\sqrt{55}} \\ V=\dfrac{2.a^3\sqrt{39}}{3} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} d=\dfrac{2.a\sqrt{39}}{\sqrt{55}} \\ V=\dfrac{a^3\sqrt{39}}{3} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} d=\dfrac{2.a\sqrt{39}}{\sqrt{55}} \\ V=\dfrac{2.a^3\sqrt{39}}{7} \end{cases}$

Lời giải



- Tam giác ABC vuông tại A:

$+\ AC=2a\sqrt{3}$

$+\ S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=2a^2\sqrt{3}$

- Tam giác AHC vuông tại H : $HC=a\sqrt{13}$
- $\widehat{SCH}=\left(\widehat{SC,(ABC)}\right)=45^0$, xét tam giác SHC vuông tại

H: $SH=HC=a\sqrt{13}$.

Vậy: $V_{S.ABC}=\dfrac{2a^3\sqrt{39}}{3}$

Vì $AB=2HB$ nên $d(A,(SBC))=2d(H,(SBC))$

Dựng $HI\perp BC\Rightarrow BC\perp(SHI)$ suy ra: $(SHI)\perp(SBC)$ theo giao tuyến SI

Dựng $HK\perp SI\Rightarrow d\left(H,(SBC)\right)=HK$

- ΔHIB vuông tại I: $HI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
- ΔSHI Vuông tại H: $SI=\dfrac{a\sqrt{55}}{2}\Rightarrow HK=\dfrac{SH.HI}{SI}=\dfrac{a\sqrt{39}}{\sqrt{55}}$

Vậy $d(A,(SBC))=\dfrac{2a\sqrt{39}}{\sqrt{55}}$

Chọn đáp án A.

Câu 12 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA=3a$, $BC=4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB=2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC}=30^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

A. $\begin{cases} d=\dfrac{6a\sqrt{7}}{7} \\ V=a^3.\sqrt{3} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} d=\dfrac{6a\sqrt{7}}{5} \\ V=2.a^3.\sqrt{3} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} d=\dfrac{a\sqrt{7}}{7} \\ V=2.a^3.\sqrt{3} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} d=\dfrac{6a\sqrt{7}}{7} \\ V=2.a^3.\sqrt{3} \end{cases}$

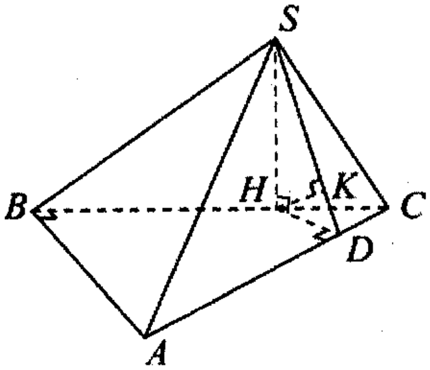
Lời giải

Kẻ SH vuông góc BC suy ra SH vuông góc mp(ABC);

$SH=SB.\sin\widehat{SBC}=a\sqrt{3}$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BA.BC=6a^2$;

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH=2a^3\sqrt{3}$



Kẻ HD vuông góc AC, HK vuông góc SD

suy ra HK vuông góc mp(SAC)

nên HK là khoảng cách từ H đến mp(SAC).

$BH=SB.\cos\widehat{SBC}=3a\Rightarrow BC=4HC$

$\Rightarrow d(B,(SAC))=4d(H,SAC))$

$AC=\sqrt{BA^2+BC^2}=5a$; $HC=BC-BH=a\Rightarrow HD=\dfrac{BA.HC}{AC}=\dfrac{3a}{5}$

$HK=\dfrac{SH.DH}{\sqrt{SH^2+DH^2}}=\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}\Rightarrow d(B,(SAC))=\dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$

Chọn đáp án D.

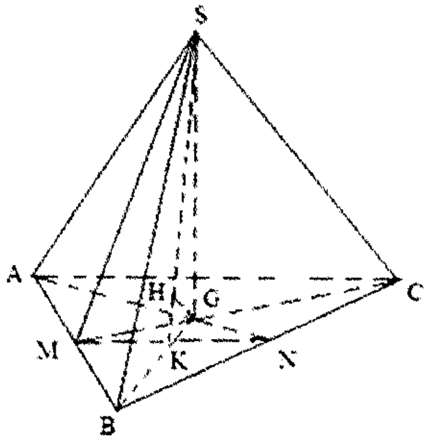
Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, BC. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SMN)?

A. $\begin{cases} d=\dfrac{a}{7} \\ V=\dfrac{a^3.\sqrt{3}}{12} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} d=\dfrac{3a}{7} \\ V=\dfrac{a^3.\sqrt{3}}{12} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} d=\dfrac{3a}{7} \\ V=\dfrac{a^3.\sqrt{5}}{12} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} d=\dfrac{3a}{7} \\ V=\dfrac{a^3.\sqrt{3}}{10} \end{cases}$

Lời giải

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên ABC là tam giác đều tâm G và $SG\perp(ABC)$:

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SG.S_{ABC}$



Tam giác ABC đều cạnh a nên $AN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Có AG là hình chiếu của AS trên (ABC) nên góc giữa cạnh bên SA với đáy là $(SA, AG) = \widehat{SAG} = 60°$ (vì $SG \perp AG \Rightarrow \widehat{SAG}$ nhọn)

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $AG = \frac{2}{3}AN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác SAG có $SG = AG.\tan 60° = a$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên C, G, M thẳng hàng và CM = 3GM mà M ∈ (SMN) nên $d_{(C,(SMN))} = 3d_{(G,(SMN))}$

Ta có tam giác ABC đều nên tại K.

$SG \perp (ABC) \Rightarrow SG \perp MN \Rightarrow MN \perp (SGK)$.

Trong (GKH), kẻ $GH \perp SK \Rightarrow GH \perp MN \Rightarrow GH \perp (SMN)$, $H \in SK$

$\Rightarrow d_{(G,(SMN))} = GH$

Ta có: $BK = \frac{1}{2}AN;\ BG = AG = \frac{2}{3}AN \Rightarrow GK = \frac{2}{3}AN - \frac{1}{2}AN = \frac{1}{6}AN = \frac{a\sqrt{3}}{12}$

Trong tam giác vuông SGK có GH là đường cao nên

$$\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{GK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{48}{a^2} = \frac{49}{a^2} \Rightarrow GH = \frac{a}{7}$$

Vậy $d_{(C,(SMN))} = 3GH = \frac{3a}{7}$

Chọn đáp án B.

Câu 14 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B; AB = 2a, AC = 4a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của đoạn AC. Góc giữa cạnh bên SA và mp(ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC?

A. $\begin{cases} d = \frac{4a\sqrt{15}}{5} \\ V = 3a^3 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} d = \frac{a\sqrt{15}}{5} \\ V = 4a^3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} d = \frac{4a\sqrt{15}}{5} \\ V = 4a^3 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} d = \frac{4a\sqrt{15}}{7} \\ V = 4a^3 \end{cases}$

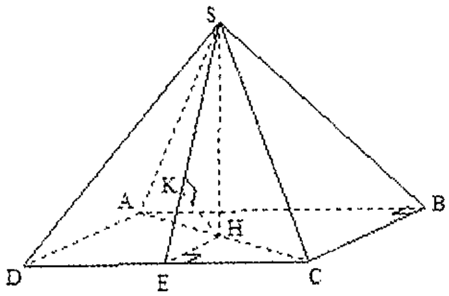
Lời giải

$SH \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ góc giữa SA và (ABC) là $\widehat{SAH} = 60^0 \Rightarrow SH = AH.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 2a^2\sqrt{3}$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = 4a^3$



Dựng hình chữ nhật $ABCD \Rightarrow AB//CD \Rightarrow AB//(SCD)$

$\Rightarrow d(AB,SC) = d(AB,(SCD)) = d(A;(SCD)) = 2d(H,(SCD))$ vì H là trung điểm AC

Gọi E là trung điểm $CD \Rightarrow HE \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHE)$. Kẻ $HK \perp SE$ tại K

$\Rightarrow HK \perp (SCD) \Rightarrow d(H;(SCD)) = HK$

Ta có: $HE = \frac{1}{2}AD = a\sqrt{3}$. Từ $\Delta SHE \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$

Vậy $d(AB;SC) = 2HK = \frac{4a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án C.

Câu 15 Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, BC. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SMN)?

A. $\begin{cases} d = \frac{3a}{7} \\ V = \frac{a^3.\sqrt{3}}{12} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} d = \frac{5a}{7} \\ V = \frac{a^3.\sqrt{3}}{12} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} d - \frac{3a}{7} \\ V = \frac{3.a^3.\sqrt{3}}{12} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} d = \frac{3a}{7} \\ V = \frac{a^3.\sqrt{3}}{15} \end{cases}$

Lời giải

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên ABC là tam giác đều tâm G và $SG \perp (ABC)$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SG.S_{ABC}$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

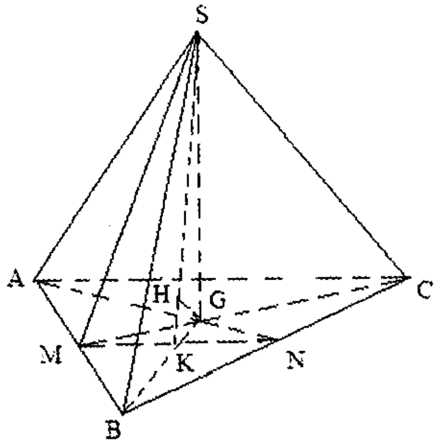
Có AG là hình chiếu của AS trên (ABC) nên góc giữa cạnh bên SA với đáy là $(SA,AG) = \widehat{SAG} = 60°$

(vì $SG \perp AG \Rightarrow \widehat{SAG}$ nhọn)

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $AG = \frac{2}{3}AN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác SAG có $SG = AG.\tan 60° = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvtt)



Do G là trọng tâm tam giác ABC nên C, G, M thẳng hàng và CM = 3GM mà M ∈ (SMN) nên $d\left(C,\left(SMN\right)\right)=3d\left(G,\left(SMN\right)\right)$

Ta có tam giác ABC đều nên tại K. $SG\perp\left(ABC\right)\Rightarrow SG\perp MN\Rightarrow MN\perp\left(SGK\right)$.

Trong (GKH), kẻ $GH\perp SK\Rightarrow GH\perp MN\Rightarrow GH\perp\left(SMN\right)$, $H\in SK$

$\Rightarrow d\left(G,\left(SMN\right)\right)=GH$

Ta có $BK=\frac{1}{2}AN;\ BG=AG=\frac{2}{3}AN\Rightarrow GK=\frac{2}{3}AN-\frac{1}{2}AN=\frac{1}{6}AN=\frac{a\sqrt{3}}{12}$

Trong tam giác vuông SGK có GH là đường cao nên

$\frac{1}{GH^2}=\frac{1}{SG^2}+\frac{1}{GK^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{48}{a^2}=\frac{49}{a^2}\Rightarrow GH=\frac{a}{7}$. Vậy $d\left(C,\left(SMN\right)\right)=3GH=\frac{3a}{7}$

Chọn đáp án A.

Niels Bohr (1885-1962)

Nơi sinh: Copenhagen, Đan Mạch

Bohr là nhà vật lý học người Đan Mạch, người đã nhận giải Nobel vật lý năm 1922 vì những đóng góp quan trọng trong việc nghiên cứu cấu trúc của nguyên tử và trong cơ học lượng tử. Đặc biệt là thuyết được ông đưa ra vào năm 1913, khẳng định các điện tử xung quanh hạt nhân nguyên tử chuyển động theo quỹ đạo cố định, và chỉ chuyển sang một quỹ đạo khác khi nó hấp thụ hoặc bức xạ năng lượng. Albert Einstein (nhà khoa học sẽ được nhắc tới sau đây) đã ca ngợi Bohr như là một trong những nhà khoa học vĩ đại nhất của mọi thời đại.

Chuyên đề 6. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Phần I: CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN

Trong không gian xét hệ trục Oxyz, có trục Ox vuông góc với trục Oy tại O, và trục Oz vuông góc với mặt phẳng (Oxy) tại O. Các véctơ đơn vị trên từng trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

I. TỌA ĐỘ ĐIỂM:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz:

1. $M(x_M;y_M;z_M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$

2. Cho $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$

ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ và $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

3. M là trung điểm AB thì $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

II. TỌA ĐỘ CỦA VÉCTƠ:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz.

1. $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

2. Cho $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ ta có

➢ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

➢ $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

➢ $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|cos(\vec{a};\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

➢ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

➢ $cos\varphi = cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (với $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$)

➢ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

III. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ VÀ ỨNG DỤNG:

Tích có hướng của $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ là:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ b_2 b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}\right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in R: \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$	**1. Tính chất:** $\left[\vec{a},\vec{b}\right] \perp \vec{a}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right] \perp \vec{b}$ $\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| sin(\vec{a},\vec{b})$ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{0}$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c} = 0$
	2. Các ứng dụng tích có hướng: Diện tích tam giác : $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right\|$ Thể tích tứ diện $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right\|$ Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right\|$

IV. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU:

1. Mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình là :

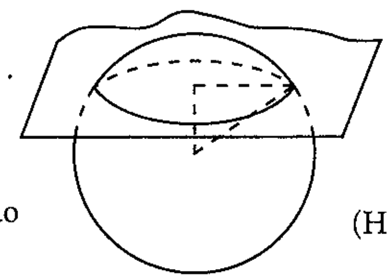
$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

2. Phương trình :

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

3. Vị trí tương đối của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S):



(H1)

- $d(I,(\alpha)) > R$ khi và chỉ khi (α) không cắt mặt cầu (S).
- $d(I,(\alpha)) = R$ khi và chỉ khi (α) tiếp xúc mặt cầu (S).
- $d(I,(\alpha)) < R$ khi và chỉ khi (α) cắt mặt cầu (S) (giao tuyến là một đường tròn). (H1)

V. ĐIỀU KIỆN KHÁC: (Kiến thức bổ sung)

1. Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k ($\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$) thì ta có:

$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1-k}; y_M = \frac{y_A - ky_B}{1-k}; z_M = \frac{z_A - kz_B}{1-k}$ Với $k \neq 1$

2. G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

4. G là trọng tâm của tứ diện ABCD $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

VI. MẶT PHẲNG:

Định nghĩa:

Trong không gian Oxyz phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$

với $A^2+B^2+C^2 > 0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng

➢ Phương trình mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2+B^2+C^2 > 0$. Có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$

➢ Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận véctơ $\vec{n}=(A;B;C)$, $\vec{n}\neq\vec{0}$ làm véctơ pháp tuyến có dạng (P): $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

➢ Nếu (P) có cặp véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương ,có giá song song hoặc nằm trên (P). Thì véctơ pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

1. Các trường hợp riêng của mặt phẳng:

Trong không gian Oxyz cho mp(α): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2+B^2+C^2 > 0$ Khi đó:

➢ $D = 0$ khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.

➢ $A=0, B\neq 0, C\neq 0, D\neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song với trục Ox

➢ $A=0, B = 0, C\neq 0, D\neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song mp (Oxy)

➢ $A, B, C, D\neq 0$. Đặt $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$. Khi đó (α): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

2. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Trong không gian Oxyz cho (α): $Ax+By+Cz+D=0$ và (α'): $A'x+B'y+C'z+D'=0$

➢ (α) cắt (α') $\Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C'$

➢ $(\alpha) // (\alpha')$ $\Leftrightarrow A : A' = B : B' = C : C' \neq D : D'$

➢ $(\alpha) \equiv (\alpha')$ $\Leftrightarrow A : B : C : D = A' : B' : C' : D'$

Đặc biệt

$(\alpha) \perp (\alpha') \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow A.A'+B.B'+C.C'=0$

VII. ĐƯỜNG THẲNG:

Định nghĩa:

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{a}\neq\vec{0}$

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \quad (t\in R) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác không. Phương trình đường thẳng Δ viết dưới dạng chính tắc như sau: $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

Chương trình cơ bản	Chương trình nâng cao
1) Vị trí tương đối của hai đường thẳng. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_o+a_1t\\y=y_o+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$ $d':\begin{cases}x=x_o'+a_1't'\\y=y_o'+a_2't'\\z=z_o'+a_3't'\end{cases}$ d có vtcp $\vec{u}$ đi qua M_o và d' có vtcp $\overrightarrow{u'}$ đi qua M_o' ➢ $\vec{u},\overrightarrow{u'}$ cùng phương ▪ d // d' $\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=k\overrightarrow{u'}\\M_0\notin d'\end{cases}$ ▪ d ≡ d' $\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=k\overrightarrow{u'}\\M_0\in d'\end{cases}$ ➢ $\vec{u},\overrightarrow{u'}$ không cùng phương $\begin{cases}x_o+a_1t=x_o'+a_1't'\\y_o+a_2t=y_o'+a_2't'\\z_0+a_3t=z_o'+a_3't'\end{cases}$ (I) ▪ d chéo d' ⇔ Hệ phương trình (I) vô nghiệm ▪ d cắt d' ⇔ Hệ phương trình (I) có một nghiệm	***1) Vị trí tương đối của hai đường thẳng.*** Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_o+a_1t\\y=y_o+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$ $d':\begin{cases}x=x_o'+a_1't'\\y=y_o'+a_2't'\\z=z_o'+a_3't'\end{cases}$ vtcp $\vec{u}$ đi qua M_o và d' có vtcp $\overrightarrow{u'}$ đi qua M_o' ➢ (d) / / (d') $\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\overrightarrow{u'}]=\vec{0}\\M_o\notin d'\end{cases}$ ➢ (d) ≡ (d') $\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\overrightarrow{u'}]=\vec{0}\\M_0\in d'\end{cases}$ ➢ (d) cắt (d') $\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\neq 0\\\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_oM_0'}=0\end{cases}$ ➢ (d) chéo (d') $\Leftrightarrow\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\neq 0$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp 1	Phương pháp 2
Trong không gian Oxyz cho $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $d:\begin{cases}x=x_o+a_1t\\y=y_o+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$ **Phương trình** $A(x_0+a_1t)+B(y_0+a_2t)+C(z_0+a_3t)+D=0$ (1) ➢ PT (1) vô nghiệm thì d // (α) ➢ PT (1) có một nghiệm thì d cắt (α) ➢ PT (1) có vô số nghiệm thì d thuộc (α) Đặc biệt: $(d)\perp(\alpha)\Leftrightarrow\vec{a},\vec{n}$ cùng phương	Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có vtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có vtpt $\vec{n}=(A;B;C)$ ➢ (d) cắt (α) ⇔ $\vec{a}.\vec{n}\neq 0$ ➢ (d) // (α) $\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\M\notin(\alpha)\end{cases}$ ➢ (d) nằm trên mp(α) $\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\M\in(\alpha)\end{cases}$

3. Khoảng cách:

<table>
<tr><td colspan="2">➤ Khoảng cách từ $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng (α): Ax+By+Cz+D=0 cho bởi công thức
$$d(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$</td></tr>
<tr><td>➤ Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d)
Phương pháp 1:
Lập phương trình mp(α) đi qua M và vuông góc với d.
Tìm tọa độ giao điểm H của mp(α) và d
d(M, d) =MH
➤ Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau
Phương pháp 1:
d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$; có vtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$
d' qua $M'(x'_0;y'_0;z'_0)$; vtcp $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$
Lập phương trình mp(α) chứa d và song song với d'
d (d, d')= d(M',(α))</td>
<td>➤ Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d)
Phương pháp 2:
(d đi qua M_0 có vtcp $\vec{u}$)
$$d(M,\Delta)=\frac{\left|[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}]\right|}{|\vec{u}|}$$
➤ Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau
Phương pháp 2:
d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$; có vtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$
d' qua $M'(x'_0;y'_0;z'_0)$; vtcp $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$
$$\boxed{d(\Delta,\Delta')=\frac{\left|[\vec{a},\vec{a'}].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|[\vec{a},\vec{a'}]\right|}=\frac{V_{hop}}{S_{day}}}$$</td></tr>
</table>

1. Kiến thức bổ sung:

➤ Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng ($0^0 \le \varphi \le 90^0$)

$(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$

$$\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{|A.A'+B.B'+C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

➤ Góc giữa hai đường thẳng

(Δ) đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

(Δ') đi qua $M'(x'_0;y'_0;z'_0)$ có VTCP $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{a},\vec{a'})\right|=\frac{\left|\vec{a}.\vec{a'}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a'}\right|}=\frac{|a_1.a'_1+a_2.a'_2+a_3.a'_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

➤ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

(Δ) đi qua M_0 có VTCP $\vec{a}$, mp(α) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$

Gọi φ là góc hợp bởi (Δ) và mp(α) $\sin\varphi=\left|\cos(\vec{a},\vec{n})\right|=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$

Phần II: BÀI TẬP

Ví dụ 1 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$ và hai điểm $A(1;-3;0)$, $B(5;-1;-2)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất?

A. $M(-2;-3;3)$ **B.** $M(-2;-3;2)$ **C.** $M(-2;-3;6)$ **D.** $M(-2;-3;0)$

Lời giải

Kiểm tra thấy A và B nằm khác phía so với mặt phẳng (P):

$(x_A + y_A - z_A - 1).(x_B + y_B + z_B - 1) < 0$

Gọi $B'(x;y;z)$ là điểm đối xứng với $B(5;-1;-2)$

Suy ra $B'(-1;-3;4)$

Lại có $|MA-MB| = |MA-MB'| \le AB' = const$

Vậy $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi M, A, B' thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thẳng AB' với mặt phẳng (P)

AB' có phương trình $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -3 \\ z = -2t \end{cases}$

Tọa độ $M(x;y;z)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -3 \\ z = -2t \\ x+y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ x = -2 \\ y = -3 \\ z = 6 \end{cases}$

Vậy điểm $M(-2;-3;6)$

Chọn đáp án C

Ví dụ 2 Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(3;-4;0)$, $B(0;2;4)$, $C(4;2;1)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục Ox sao cho $AD=BC$

A. $D(0;0;0)$ và $D(-6;0;0)$ **B.** $D(0;0;0)$ và $D(6;0;0)$

C. $D(0;0;2)$ và $D(6;0;0)$ **D.** $D(0;0;1)$ và $D(6;0;0)$

Lời giải

Tìm tọa độ điểm D trên trục Ox sao cho $AD=BC$.

Gọi $D(x;0;0)$. Ta có $AD=BC \Leftrightarrow (x-3)^2+4^2+0^2=4^2+0^2+3^2$

Vậy: $D(0;0;0)$ và $D(6;0;0)$

Chọn đáp án B

Ví dụ 3 Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(3;-4;0)$, $B(0;2;4)$, $C(4;2;1)$. Tính diện tích tam giác ABC?

A. $\frac{\sqrt{491}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{490}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{494}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{394}}{2}$

Lời giải

Tính diện tích tam giác ABC

$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-18;7;-24)$

$S=\frac{1}{2}\sqrt{18^2+7^2+24^2}=\frac{\sqrt{494}}{2}$

Chọn đáp án C

Ví dụ 4 Trong không gian *Oxyz*, cho hình lăng trụ tam giác *ABC.A'B'C'* có $A(1;1;1)$, $B(1;2;1)$, $C(1;1;2)$ và $A'(2;2;1)$. Tìm tọa độ đỉnh *B'*?

A. $B'(2;3;2)$ **B.** $B'(2;3;0)$ **C.** $B'(2;3;1)$ **D.** $B'(2;3;-1)$

Lời giải

Do ABC. A'B'C' là hình lăng trụ nên $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow B'(2;3;1)$

Chọn đáp án C

Ví dụ 5 Trong không gian *Oxyz*, cho hình lăng trụ tam giác *ABC.A'B'C'* có $A(1;1;1)$, $B(1;2;1)$, $C(1;1;2)$ và $A'(2;2;1)$. Tìm tọa độ đỉnh *C'* và viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm *A, B, C, A'*?

A. $C'(2;2;2)$ **B.** $C'(2;2;-2)$ **C.** $C'(2;-2;2)$ **D.** $C'(-2;2;2)$

Lời giải

$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow C'(2;2;2)$

Chọn đáp án A

Ví dụ 6 Trong không gian *Oxyz*, cho hình lăng trụ tam giác *ABC.A'B'C'* có $A(1;1;1)$, $B(1;2;1)$, $C(1;1;2)$ và $A'(2;2;1)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm *A, B, C, A'*?

A. $x^2+y^2+z^2-3x-3y+3z+6=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2+3x-3y-3z+6=0$

C. $x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z-6=0$

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm dạng

$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0, a^2+b^2+c^2-d>0$

Do A, B, C và A' thuộc mặt cầu (S) nên:

$$\begin{cases}2a+2b+2c+d=-3\\2a+4b+2c+d=-6\\2a+2b+4c+d=-6\\4a+4b+2c+d=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c=-\dfrac{3}{2}\\d=6\end{cases}$$

Do đó phương trình mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$

Chọn đáp án C

Ví dụ 7 Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $I(2;3;-2)$ và mặt phẳng (P) : x - 2y - 2z - 9 = 0. Viết phương trình của mặt cầu (*S*) có tâm *I* và tiếp xúc với mặt phẳng (*P*)?

A. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=9$ **B.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=9$

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$ **D.** $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=9$

Lời giải

Ta có: Bán kính $r=d(I,(P))=\dfrac{|2-2.3-2.(-2)-9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3$

Phương trình của mặt cầu (*S*) là $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=9$

Chọn đáp án B

Ví dụ 8 Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $I(2;3;-2)$ và mặt phẳng (P) : x - 2y - 2z - 9 = 0. Phương trình của mặt cầu (*S*) là $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=9$. Viết phương trình của mặt phẳng (*Q*) song song với mặt phẳng (*P*) và tiếp xúc với mặt cầu (*S*)?

A. $x-2y-2z+9=0$ **B.** $x-2y+2z+9=0$

C. $x+2y-2z+9=0$ **D.** $x-2y-2z-9=0$

Lời giải

Phương trình của mặt phẳng (*Q*) dạng: $x-2y-2z+D=0$ $(D\neq-9)$

Mặt phẳng (*Q*) tiếp xúc với (*S*) $\Rightarrow d(I,(Q))=r$

$\Leftrightarrow\dfrac{|2-2.3-2(-2)+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3\Leftrightarrow|D|=9\Leftrightarrow D=9(D\neq-9)$

Phương trình của mp(*Q*) là $x-2y-2z+9=0$

Chọn đáp án A

Ví dụ 9 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng (D) có phương trình là: $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=-3 \end{cases}$ và điểm $A(-2;0;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng (D)?

A. $-x+2y-2=0$ **B.** $-x+2y-1=0$ **C.** $-x-2y-2=0$ **D.** $-x+2y-3=0$

Lời giải

Do (P) vuông góc với (D) nên (P) có vtphương trình $\vec{n}(-1;2;0)$, (P) đi qua $A(-2;0;1)$

(P) có phương trình : $-x+2y-2=0$

Chọn đáp án A

Ví dụ 10 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$cho đường thẳng (d) có phương trình là: $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=-3 \end{cases}$ và điểm $A(-2;0;1)$. (P) có phương trình: $-x+2y-2=0$.

Tìm tọa độ giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d)

A. $N(4;3;3)$ **B.** $N(4;3;0)$ **C.** $N(4;-3;-3)$ **D.** $N(4;3;-3)$

Lời giải

Tọa độ giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=5-t \\ y=1+2t \\ z=-3 \\ -x+2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-t \\ y=1+2t \\ z=-3 \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=-3 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là điểm $N(4;3;-3)$

Chọn đáp án D

Ví dụ 11 Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$ và điểm $A(-1;2;7)$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên d?

A. H(3;-3;1) **B.**H(-3;3;1) **C.**H(3;3;1) **D.** H(3;3;-1)

Lời giải

d có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;1)$; gọi $H(2+t;1+2t;t)$

$\overrightarrow{AH}=(3+t;-1+2t;t-7)$

Ta có: $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow 1(3+t)+2(-1+2t)+1(t-7)=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1$

Vậy $H(3;3;1)$

Chọn đáp án C

Ví dụ 12 Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ và điểm $A(-1;2;7)$. viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm A

A. $\begin{cases}x=-5+t\\y=1+2t\\z=13+t\end{cases}$ B. $\begin{cases}x=-5+t\\y=1+2t\\z=-13+t\end{cases}$ C. $\begin{cases}x=-5+t\\y=-1+2t\\z=13+t\end{cases}$ D. $\begin{cases}x=-5+t\\y=1+2t\\z=13-t\end{cases}$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d => $H(2+t;1+2t;t)$

$\overrightarrow{AH}=(3+t;-1+2t;t-7)$

Ta có: $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow 1(3+t)+2(-1+2t)+1(t-7)=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1$

Vậy $H(3;3;1)$

Gọi H' là điểm đối xứng với H qua A=> $H'(-5;1;13)$

Phương trình d' qua H' và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;1)$: $\begin{cases}x=-5+t\\y=1+2t\\z=13+t\end{cases}$

Chọn đáp án A

Ví dụ 13 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình:

$\begin{cases}x=2+t\\y=-3-t\\z=-t\end{cases}$ và điểm $A(1;3;5)$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d?

A. $x-y-z-7=0$ B. $x-y+z+7=0$ C. $x-y-z+7=0$ D. $x+y-z+7=0$

Lời giải

$\vec{u}=(1;-1;-1)$ là véctơ chỉ phương của đường thẳng d

Vì $(P)\perp d$ nên $\vec{n}=(1;-1;-1)$ là véctơ pháp tuyến của (P)

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-1;-1)$ có dạng: $x-1-(y-3)-(z-5)=0 \Leftrightarrow x-y-z+7=0$

Chọn đáp án C

Ví dụ 14 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;0;1)$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z+1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (P)?

A. $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=4$ B. $(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=4$

C. $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=4$ D. $(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=4$

Lời giải

Lập phương trình mặt cầu (S) tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (P)

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên bán kính R của (S) là khoảng cách từ tâm A của (S) đến mp (P). $R=\frac{|4-0+1+1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=2$

Phương trình mặt cầu (S): $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=4$

Chọn đáp án A

Ví dụ 15 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;0;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+1=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$. Viết phương trình đường thẳng qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng (d)

A. $\begin{cases} x=2-t \\ y=0 \\ z=2+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ B. $\begin{cases} x=2-t \\ y=1 \\ z=1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ C. $\begin{cases} x=2-t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ D. $\begin{cases} x=1-t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng qua điểm A, vuông góc với đường thẳng (d) và cắt đường thẳng (d) tại M. vì M ∈ (d) nên $M(1+m;2m;2+m)$, $m\in\mathbb{R}$. $\vec{u}$ là véctơ chỉ phương của (d)

Vì d⊥Δ nên $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 4m=0 \Leftrightarrow m=0$

Do đó véc tơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AM}=(-1;0;1)$. Phương trình đường thẳng Δ cần tìm là:

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

Chọn đáp án C.

Ví dụ 16 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(7;4;6)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$.

Lập phương trình của mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

A. $(x-7)^2+(y-4)^2+(z+6)^2=4$ B. $(x-7)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=4$

C. $(x-7)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=4$ D. $(x+7)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=4$

Lời giải

Có $R = d(I,(P)) = \dfrac{|1.7 + 2.4 - 2.6 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 2$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là

$(x-7)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 4$

Chọn đáp án C

Ví dụ 17: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $I(7;4;6)$ và mặt phẳng (P) : x + 2y - 2z + 3 = 0. (S): $(x-7)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 4$, d là đường thẳng qua I và ⊥ (P).

Tìm tọa độ tiếp điểm của (*d*) và (*S*)?

A. $H\left(\frac{19}{3};\frac{8}{3};\frac{22}{3}\right)$ **B.** $H\left(\frac{19}{3};\frac{8}{3};\frac{23}{3}\right)$ **C.** $H\left(\frac{19}{3};\frac{8}{3};\frac{25}{3}\right)$ **D.** $H\left(\frac{19}{3};\frac{17}{3};\frac{22}{3}\right)$

Lời giải

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Khi đó véctơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d = \vec{n}_P = (1;2;-2)$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 4 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 6 - 2t \end{cases}$

Gọi H là tiếp điểm cần tìm, khi đó H là giao điểm của d và (P)

Do đó $H(7+t;4+2t;6-2t) \in d$

Mặt khác $H \in (P)$ nên $(7+t) + 2(4+2t) - 2(6-2t) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = -\dfrac{2}{3}$

Vậy $H\left(\dfrac{19}{3};\dfrac{8}{3};\dfrac{22}{3}\right)$ là điểm cần tìm

Chọn đáp án A

Ví dụ 18: Trong không gian *Oxyz* cho mặt phẳng (*P*): 2x + y - 2z + 1 = 0 và hai điểm A (1; -2; 3), B(3; 2;-1). Viết phương trình mặt phẳng (*Q*) qua *A*, *B* và vuông góc với (*P*).

A. 2x - 2y + 3z – 7 = 0 **B.** 2x + 2y + 3z – 7 = 0

C. 2x + 2y + 3z + 7 = 0 **D.** 2x - 2y - 3z – 7 = 0

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;4;-4)$, mp(*P*) có VTPT $\overrightarrow{n_P} = (2;1;-2)$

mp(Q) có vtphương trình là $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{n_P}\right]=(-4;-4;-6)\Rightarrow (Q): 2x+2y+3z-7=0$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 19 Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (P): $2x + y - 2z + 1 = 0$ và hai điểm A $(1; -2; 3)$, B$(3; 2;-1)$. (Q): $2x + 2y + 3z - 7 = 0$. Tìm điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến (Q) bằng $\sqrt{17}$?

A. $M(12; 0; 0)$ hoặc $M(-5; 0; 0)$

B. $M(-12; 0; 0)$ hoặc $M(-5; 0; 0)$

C. M$(-12; 0; 0)$ hoặc M$(5; 0; 0)$

D. M$(12; 0; 0)$ hoặc M$(5; 0; 0)$

Lời giải

$M\in Ox. \Leftrightarrow M(m; 0; 0)$, $d\left(M;(Q)\right)=\sqrt{17}\Leftrightarrow \dfrac{|2m-7|}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$ (*)

Giải (*) tìm được $m=12, m=-5$. Vậy: $M(12; 0; 0)$ hoặc $M(-5; 0; 0)$

Chọn đáp án A

Ví dụ 20 Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;7;3)$ và đường thẳng $(d): \dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng (d). Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng (d) sao cho $AM=2\sqrt{30}$?

A. $3x+2y-z-14=0$)

B. $3x+2y-z+4=0$

C. $3x+2y-z-4=0$

D. $3x+2y-z-8=0$

Lời giải

VTPhương trình của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(-3;-2;1)\Rightarrow \overrightarrow{u_d}=\vec{n}=(-3;-2;1)$

Phương trình mặt phẳng (P): $3x+2y-z-14=0$

Chọn đáp án A

Ví dụ 21 Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;7;3)$ và đường thẳng $(d): \dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng (d) sao cho $AM=2\sqrt{30}$?

A. $M\left(\dfrac{51}{7};-\dfrac{1}{7};-\dfrac{17}{7}\right); M(3;-3;0)$)

B. $M\left(\dfrac{51}{7};-\dfrac{1}{7};\dfrac{17}{7}\right); M(3;-3;1)$

C. $M\left(\dfrac{51}{7};-\dfrac{1}{7};-\dfrac{17}{7}\right); M(3;-3;1)$

D. $M\left(\dfrac{51}{7};-\dfrac{1}{7};-\dfrac{17}{7}\right); M(3;3;1)$

Lời giải

$M\in d\Rightarrow M(6-3t;-1-2t;-2+t)$

$AM=2\sqrt{30}\Leftrightarrow AM^2=120\Leftrightarrow 14t^2-8t-6=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{3}{7} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(3;-3;1) \\ M\left(\dfrac{51}{7};-\dfrac{1}{7};-\dfrac{17}{7}\right) \end{array}\right.$$

Chọn đáp án C

Ví dụ 22 Trong không gian Oxyz cho điểm $A(1;1;2)$, đường thẳng $(d): \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng (d)

A. $2x+y+2z-5=0$ **B.** $2x+y+2z-3=0$

C. $2x+y+2z-7=0$ **D.** $2x+y+2z-1=0$

Lời giải

VTPhương trình của mp(*P*) $\vec{n}=(2;1;2)$

Phương trình (*P*): $2x+y+2z-7=0$

Chọn đáp án C

Ví dụ 23 Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm *A*(2;1;−3), *B*(4;3;−2), *C*(6; −4; −1). Viết phương trình mặt cầu tâm *A* đi qua trọng tâm *G* của tam giác *ABC*?

A. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=6$ **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=6$

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=6$ **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=6$

Lời giải

Vì *G* là trọng tâm của tam giác *ABC* nên *G*(4;0; 2). Ta có: $AG=\sqrt{6}$

Mặt cầu cần tìm có tâm *A* và bán kính $AG=\sqrt{6}$ nên có phương trình:

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=6$

Chọn đáp án B

Ví dụ 24 Trong không gian *Oxyz*, cho 3 điểm $A(2;1;-1)$, $B(1;3;1)$, $C(1;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng qua *A* và vuông góc đường thẳng *BC* tại *H* và tính diện tích tam giác *ABH*?

A. $x-y-z-1=0$ **B.** $x-y-z+2=0$ **C.** $x-y-z+1=0$ **D.** $x-y-z-2=0$

Lời giải

Gọi (P) qua A và vuông góc với đt BC suy ra (P) nhận $\overrightarrow{BC}(1;-1;-1)$ làm VTPT.

Vậy (P): $x-y-z-2=0$

Chọn đáp án D.

Ví dụ 25 Trong không gian *Oxyz*, cho 3 điểm $A(2;1;-1)$, $B(1;3;1)$, $C(1;2;0)$. Phương trình mặt phẳng (P): $x-y-z-2=0$ qua *A* và vuông góc đường thẳng *BC* tại *H*. Tính diện tích tam giác *ABH*?

A. $S_{\Delta ABH}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ **B.** $S_{\Delta ABH}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ **C.** $S_{\Delta ABH}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ **D.** $S_{\Delta ABH}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Với $BH=d\left(B,(P)\right)=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

Mà $AB=3$, suy ra: $S_{\Delta ABH}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 26 Trong không gian *Oxyz*, cho hai điểm $A(-1;3;-2)$; $B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng (*P*) có phương trình $2x-y+z+1=0$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua 2 điểm *A*, *B* và tìm giao điểm của đường thẳng *d* với mặt phẳng (*P*).

A. $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=3+2t\\z=-2+8t\end{cases}$ **B.** $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=3+2t\\z=-2-8t\end{cases}$

C. $d:\begin{cases}x=1-t\\y=3+2t\\z=-2-8t\end{cases}$ **D.** $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=3+2t\\z=2-8t\end{cases}$

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(-2;4;-16)=2(-1;2;-8)$

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm A và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;2;-8)$. Phương trình $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=3+2t\\z=-2-8t\end{cases}$

Chọn đáp án B

Ví dụ 27 Trong không gian *Oxyz*, cho hai điểm $A(-1;3;-2)$; $B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng (*P*) có phương trình $2x-y+z+1=0$, phương trình $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=3+2t\\z=-2-8t\end{cases}$ Tìm giao điểm của đường thẳng *d* với mặt phẳng (*P*)?

A. $M\left(-\dfrac{1}{2};2;1\right)$ **B.** $M\left(-\dfrac{1}{2};2;0\right)$ **C.** $M\left(-\dfrac{1}{2};2;2\right)$ **D.** $M\left(-\dfrac{1}{2};1;2\right)$

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$ là giao điểm của đường thẳng d với mp(P). Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x=-1-t \\ y=3+2t \\ z=-2-8t \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2(-1-t)-(3+2t)+(-2-8t)+1=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}$

Vậy $M\left(-\dfrac{1}{2};2;2\right)$

Chọn đáp án C

Ví dụ 28 Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng *d*?

A. $2x+y-2z+1=0$ **B.** $2x+y-2z+2=0$ **C.** $2x+y-2z-2=0$ **D.** $2x+y+2z+2=0$

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và nhận véctơ chỉ phương $\vec{u}_d=(2;1;-2)$ làm véctơ pháp tuyến

Phương trình mặt phẳng (P): $2x+y-2z+2=0$

Chọn đáp án B

Ví dụ 29 Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với đường thẳng *d* và cắt trục *Ox*

A. $(\Delta):\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-2t \\ z=3+3t \end{cases}$ **B.** $(\Delta):\begin{cases} x=-2t \\ y=2-2t \\ z=3-3t \end{cases}$ **C.** $(\Delta):\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-2t \\ z=3-3t \end{cases}$ **D.** $(\Delta):\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+2t \\ z=3-3t \end{cases}$

Lời giải

Gọi $B(x;0;0)$ là giao điểm của đường thẳng Δ với trục Ox. Khi đó, đường thẳng Δ nhận véctơ $\overrightarrow{AB}=(x-1;-2;-3)$ làm véctơ pháp tuyến. Vì đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d nên $\overrightarrow{AB}.\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow (x-1)2-2+6=0 \Leftrightarrow x=-1$ đường thẳng Δ nhận véctơ $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;-3)$ làm véctơ pháp tuyến có phương trình:

$$(\Delta):\begin{cases}x=1-2t\\y=2-2t\\z=3-3t\end{cases}$$

Chọn đáp án C

Ví dụ 30 Trong không gian *Oxyz*, cho hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'* có đỉnh *A* trùng với gốc tọa độ *O*, đỉnh *B*(1; 1; 0), *D*(1; –1; 0). Tìm tọa độ *A'*, biết đỉnh *A'* có cao độ dương

A. $A'(0;0;\sqrt{3})$ **B.** $A'(0;0;\sqrt{5})$ **C.** $A'(0;0;\sqrt{6})$ **D.** $A'(0;0;\sqrt{2})$

Lời giải

Gọi A'(a ; b ; c). Ta có : $\begin{cases}\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB}=0\\\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD}=0\\\left|\overrightarrow{AA'}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2}\end{cases}$

$\Rightarrow A'(0;0;\sqrt{2})$

Chọn đáp án D

Ví dụ 31 Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-1=0$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z}{2}$ và điểm $I(2;1;-1)$. Viết phương trình mặt cầu tâm *I* tiếp xúc với mặt phẳng (*P*). Tìm tọa độ điểm *M* thuộc đường thẳng *d* sao cho $IM=\sqrt{11}$?

A. $\left[\begin{array}{l}M(1;-5;7)\\M\left(\frac{5}{7};6;9\right)\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}M(3;0;2)\\M\left(\frac{7}{17};\frac{66}{17};\frac{-10}{17}\right)\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}M(1;5;7)\\M\left(\frac{5}{7};6;9\right)\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}M(1;-5;7)\\M\left(\frac{5}{7};6;4\right)\end{array}\right.$

Lời giải:

Khoảng cách từ I tới (P) là

$$d(I,(P))=\frac{|2-2.1+2.(-1)-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{3}{3}=1$$

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) có bán kính $R=d(I,(P))=1$ có phương trình

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1.$

Từ giả thiết ta có

$$d:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-3t,(t\in\mathbb{R}).\\z=2t\end{cases}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM}=(2t-1;2-3t;2t+1)$

Từ giả thiết $IM=\sqrt{11}$

$\Leftrightarrow (2t-1)^2+(2-3t)^2+(2t+1)^2=11$

$\Leftrightarrow (4t^2-4t+1)+(4-12t+9t^2)+(4t^2+4t+1)=11$

$\Leftrightarrow 17t^2-12t-5=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{5}{17} \end{array}\right.$

Với $t_1=1 \Rightarrow M(3;0;2)$

Với $t=-\dfrac{5}{17} \Rightarrow M\left(\dfrac{7}{17};\dfrac{66}{17};-\dfrac{10}{17}\right)$

Vậy, có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là :

$M(3;0;2)$ và $M\left(\dfrac{7}{17};\dfrac{66}{17};-\dfrac{10}{17}\right)$.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 32 Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $A(4;0;1)$ và đường thẳng $(d):\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{2}$. Tìm tọa độ điểm *M* thuộc *d* và cách *A* một khoảng bằng $\sqrt{22}$

A. $M(1;2;4)$ hoặc $M\left(\dfrac{6}{7};\dfrac{17}{7};\dfrac{-1}{7}\right)$

B. $M(1;2;4)$ hoặc $M\left(\dfrac{6}{7};\dfrac{17}{7};\dfrac{30}{7}\right)$

C. $M(1;2;4)$ hoặc $M\left(\dfrac{6}{7};\dfrac{17}{7};\dfrac{3}{7}\right)$

D. $M(1;2;4)$ hoặc $M\left(\dfrac{6}{7};\dfrac{17}{7};\dfrac{1}{7}\right)$

Lời giải

Vì $M\in\Delta \Rightarrow M(2-t;-1+3t;2+2t)$

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(-2-t;-1+3t;1+2t)$

$AM=\sqrt{22} \Leftrightarrow AM^2=22$

$\Leftrightarrow (-2-t)^2+(-1+3t)^2+(1+2t)^2=22$

$\Leftrightarrow 14t^2+2t-16=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \Rightarrow M(1;2;4) \\ t=\dfrac{8}{7} \Rightarrow M\left(\dfrac{6}{7};\dfrac{17}{7};\dfrac{30}{7}\right) \end{array}\right.$

Chọn B.

Ví dụ 33 Trong khônggian tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(3;2;1)$, $B\left(-\dfrac{7}{3};-\dfrac{10}{3};\dfrac{11}{3}\right)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$. Viết phương trình mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB*?

A. $(\alpha):2x+2y-z=0$

B. $(\alpha):2x+2y-z+1=0$

C. $(\alpha):2x+2y-z+2=0$

D. $(\alpha):2x+2y-z+3=0$

Lời giải

Do (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB nên (α) đi qua trung điểm $I\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$ của AB và nhận véctơ $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{16}{3};-\frac{16}{3};\frac{8}{3}\right)=-\frac{8}{3}(2;2;-1)$ làm VTPT.

Suy ra phương trình $(\alpha): 2x+2y-z+3=0$

Chọn đáp án D

Ví dụ 34 Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): 6x+3y-2z-1=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$. Tìm tọa độ tâm của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (*P*) và mặt cầu (*S*)

A. $H(\frac{3}{7};\frac{5}{7};\frac{1}{7})$ **B.** $H(\frac{3}{7};\frac{5}{7};\frac{3}{7})$ **C.** $H(\frac{3}{7};\frac{5}{7};\frac{8}{7})$ **D.** $H(\frac{3}{7};\frac{5}{7};\frac{13}{7})$

Lời giải

Tâm của đường tròn giao tuyến H là hình chiếu vuông góc của *I* lên (P). Đường thẳng d qua I và vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases} x=3+6t \\ y=2+3t \\ z=1-2t \end{cases}$

Do $H\in d$ nên $H(3+6t;2+3t;1-2t)$

Ta có $H\in(P)$ nên $t=-\frac{3}{7}$. Vậy $H(\frac{3}{7};\frac{5}{7};\frac{13}{7})$

Chọn đáp án D

Ví dụ 35 Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(2;1;0)$, $B(0;3;4)$ và $C(5;6;7)$. Tính khoảng cách từ điểm *C* đến mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB*?

A. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ **B.** $\frac{5\sqrt{7}}{3}$ **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

Lời giải

Gọi M là trung điểm của AB, ta có $M(1;2;2)$

Mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại M là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Do $AB\perp(P)$ nên $\overrightarrow{AB}=(-2;2;4)$ là một VTPhương trình của (P)

Suy ra phương trình (P) $-2(x-1)+2(y-2)+4(z-2)=0 \Leftrightarrow x-y-2z+5=0$

Vậy $d(C,(P))=\dfrac{|5-6-2.7+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 36 Trong không gian *Oxyz*, cho $A(-4;1;3)$ và đường thẳng $(d): \frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{3}$. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua *A* và vuông góc với *d?*

A. $-2x+y+3z-1=0$

B. $-2x+y+3z-8=0$

C. $-2x+y+3z-11=0$

D. $-2x+y+3z-18=0$

Lời giải

Vtcp của d là $\vec{u}=(-2;1;3)$

Mp(P) đi qua A và nhận $\vec{u}=(-2;1;3)$ làm vtphương trình. Khi đó phương trình (P) là

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
$$\Leftrightarrow -2(x+4)+1(y-1)+3(z-3)=0$$
$$\Leftrightarrow -2x+y+3z-18=0$$

Chọn đáp án D

Ví dụ 37 Trong không gian *Oxyz*, cho $A(-4;1;3)$ và đường thẳng $(d): \frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{3}$. Tìm điểm *B* thuộc *d* sao cho $AB=\sqrt{27}$?

A. $B(-7;4;5)$ hoặc $B\left(-\frac{13}{7};\frac{10}{7};-\frac{12}{7}\right)$

B. $B(-7;4;2)$ hoặc $B\left(-\frac{13}{7};\frac{10}{7};-\frac{12}{7}\right)$

C. $B(-7;4;1)$ hoặc $B\left(-\frac{13}{7};\frac{10}{7};-\frac{12}{7}\right)$

D. $B(-7;4;6)$ hoặc $B\left(-\frac{13}{7};\frac{10}{7};-\frac{12}{7}\right)$

Lời giải

Vì $B\in d$ nên $B(-1-2t;1+t;-3+3t)$

Ta có:

$$AB=\sqrt{27}\Leftrightarrow(3-2t)^2+t^2+(3t-6)^2=27$$
$$\Leftrightarrow 14t^2-48t+18=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=\frac{3}{7}\end{array}\right.$$

Vậy $B(-7;4;6)$ hoặc $B\left(-\frac{13}{7};\frac{10}{7};-\frac{12}{7}\right)$

Chọn đáp án D

Ví dụ 38 Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm của *d* và (*P*)?

A. $M(0;0;-1)$ **B.** $M(0;0;-3)$ **C.** $M(0;0;-4)$ **D.** $M(0;0;-2)$

Lời giải

- Gọi M là giao điểm của d và $(P) \Rightarrow M(12+4t;9+3t;1+t)$
- $M \in (P) \Rightarrow 3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0$
- Suy ra $t=-3$. Do đó $M(0;0;-2)$

Chọn đáp án D

Ví dụ 39 Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng nằm trong mặt phẳng (*P*), đi qua giao điểm của *d* và (*P*), đồng thời vuông góc với *d*?

A. $\Delta: \dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+2}{-11}$ **B.** $\Delta: \dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+2}{-11}$

C. $\Delta: \dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+2}{-11}$ **D.** $\Delta: \dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+2}{-11}$

Lời giải

- Gọi M là giao điểm của d và $(P) \Rightarrow M(12+4t;9+3t;1+t)$
- $M \in (P) \Rightarrow 3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0$

Suy ra $t=-3$. Do đó $M(0;0;-2)$

- d có VTCP $\vec{u}=(4;3;1)$, (P) có VTPT $\vec{n}=(3;5;-1) \Rightarrow$ đường thẳng Δ cần tìm có VTCP $\vec{v}=[\vec{n},\vec{u}]=(8;-7;-11)$

$\Delta: \dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+2}{-11}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 40 Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(1;0;2), B(-1;2;-2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=-2-t. \end{cases}$ Tìm tọa độ điểm *H* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *d*?

A. H(0 ;–2 ;–1) **B.** H(1 ;–1 ;–1) **C.** H(0 ;–1 ;–2) **D.** H(0 ;–1 ;–1)

Lời giải

- d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-1)$
- $H \in d \Rightarrow H(1+t;1+2t;-2-t)$

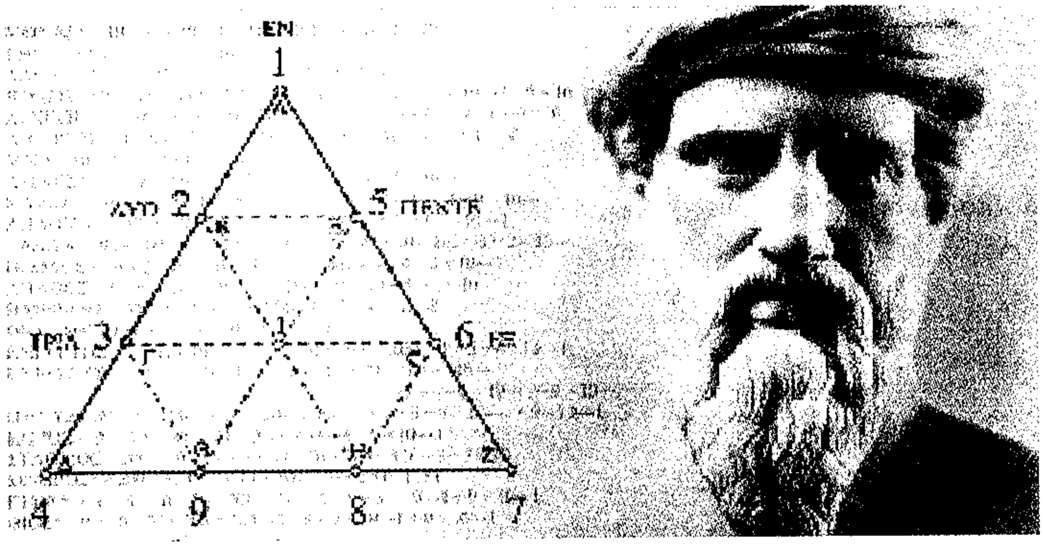
$\overrightarrow{AH}=(t;1+2t;-4-t)$

Do H là hình chiếu của A trên d nên $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0$

$\Leftrightarrow t+2+4t+4+t=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(0;-1;-1)$

Chọn đáp án D

Pytago (570 - 500 TCN)



Pytago - nhà toán học và triết học Hi Lạp cổ đại. Pytago sinh ra ở Xamôt, một hòn đảo lớn nằm ở ngoài khơi biển Êgiê, cách bờ biển Tiểu Á không xa. Hồi trẻ, ông đi Ai Cập Babilon và ở lại các nước đó 12 năm trời để học tập toán và thiên văn học. Khi trở về nước, thấy sống không phù hợp với phe dân chủ đang nắm chính quyền, ông di cư sang thành phố Crôtôn (Nam Italia), rồi sang đảo Xixilia. Ở đây, ông đã chiêu tập học sinh và tổ chức ra trường phái Pytago. Trường phái này đã đóng góp nhiều cho sự phát triển của toán học và thiên văn học. Pytago được mệnh danh là "người thầy của các con số". "Con số" của Pytago chính là toán học ngày nay. Ông không để lại một công trình viết nào. Ngoài định lý về đường huyền mang tên ông (thực ra định lý này đã được người Babilon khám phá ra trước ông một nghìn năm), người ta đã gán cho ông phát minh những định lý về tổng số các góc của tam giác, về hình đa giác đều, mở đầu việc tính những tỉ lệ... Pytago còn có những nhận thức đúng đắn về mặt thiên văn học như cho Trái Đất hình tròn và chuyển động theo một quỹ đạo nhất định (học thuyết của ông về sau được nhà thiên văn học BaLan Côpecnich tiếp thu và phát triển).

Về mặt khoa học học, Pytago và học trò của ông đạt được nhiều thành tựu, nhưng về mặt tư tưởng chính trị của ông lại là phản động. Pytago coi những con số là nguyên tố và nguồn gốc của mọi vật và nâng toán học thành một tín ngưỡng. Chẳng hạn ông cho một số chữ số mang lại thành công, mang lại điều tốt lành, một số chữ số khác lại mang lại tai nạn, rủi ro. Pytago và các học trò của ông coi tinh thần cũng là con số. Nó bất tử và được truyền từ người này sang người khác. Việc đề cao vai trò của con số, tuyệt đối hóa nó như cơ sở của thế giới và của sự vận động, tách rời con số khỏi thực tế vật chất đã đưa trường phái Pytago đến chủ nghĩa duy tâm, phục vụ cho tôn giáo.

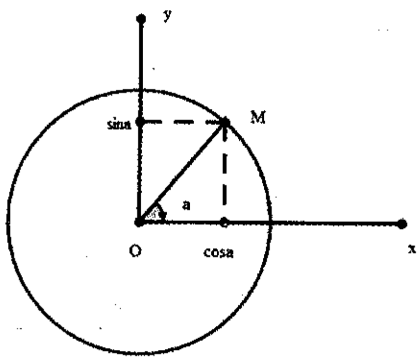
Công thức toán học của Pytago được áp dụng đa số vào mặt hình học, mà quan trọng nhất là công thức trong ***tam giác vuông.***

Chuyên đề 7. LƯỢNG GIÁC

I. XÁC ĐỊNH SỰ ÂM DƯƠNG CỦA SINA, COSA:

Xét đường tròn tâm O, bán kính 1 trong mặt phẳng Oxy.

- **Góc lượng giác** a: là góc tạo bởi hai tia OM và Ox, kí hiệu $a = \left(\widehat{OM, Ox}\right)$. Một góc sẽ được biểu diễn bởi một điểm M trên đường tròn.



Ví dụ

Góc 45°, điểm biểu diễn nằm chính giữa cung của góc phần tư thứ nhất.

- Hoành độ của điểm M trên trục Ox là giá trị sin của góc a, kí hiệu là *sina*.

- Tung độ của điểm M trên trục Ox là giá trị cos của góc a, kí hiệu là *cosa*.

Rõ ràng:

+ Nếu M nằm ở góc phần tư thứ nhất, nghĩa là a nằm từ 0° đến 90° thì *sina, cosa* không âm.

+ Nếu M nằm ở góc phần tư thứ hai, nghĩa là a nằm từ 90° đến 180° thì *sina* không âm, *cosa* âm.

+ Nếu M nằm ở góc phần tư thứ ba, nghĩa là a nằm từ 180° đến 270° thì *sina* âm, *cosa* âm.

+ Nếu M nằm ở góc phần tư thứ tư, nghĩa là a nằm từ 270° đến 360° thì *sina* âm, *cosa* không âm.

Bảng giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

α	Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	Độ	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$
$\cot\alpha$		$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

II CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC:

Các công thức lượng giác cơ bản:

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$

$1+tan^2\alpha = \dfrac{1}{cos^2\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

$1+cot^2\alpha = \dfrac{1}{sin^2\alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

$tan\alpha.cot\alpha = 1,\ \alpha \neq k\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

Các công thức liên hệ giữa các cung có liên quan đặc biệt:

A. Cung đối nhau:

$cos(-\alpha) = cos\alpha$; $sin(-\alpha) = -sin\alpha$; $tan(-\alpha) = -tan\alpha$; $cot(-\alpha) = -cot\alpha.$

B. Cung bù nhau:

$cos(\pi-\alpha) = -cos\alpha$; $sin(\pi-\alpha) = sin\alpha$; $tan(\pi-\alpha) = -tan\alpha$; $cot(\pi-\alpha) = -cot\alpha.$

C. Cung phụ nhau:

$cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = sin\alpha$; $sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = cos\alpha$; $tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = cot\alpha$; $cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = tan\alpha.$

D. Cung hơn kém π:

$cos(\alpha+\pi) = -cos\alpha$; $sin(\alpha+\pi) = -sin\alpha$; $tan(\alpha+\pi) = tan\alpha$; $cot(\alpha+\pi) = cot\alpha.$

E. Cung hơn kém $\dfrac{\pi}{2}$:

$cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right) = -sin\alpha$; $sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right) = cos\alpha$;

$tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right) = -cot\alpha$; $cot\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right) = -tan\alpha.$

Công thức cộng:

$sin(a+b) = sin\,a\,cos\,b + cos\,a\,sin\,b$; $sin(a-b) = sin\,a\,cos\,b - cos\,a\,sin\,b$;

$cos(a+b) = cos\,a\,cos\,b - sin\,a\,sin\,b$; $cos(a-b) = cos\,a\,cos\,b + sin\,a\,sin\,b$;

$tan(a+b) = \dfrac{tan\,a + tan\,b}{1 - tan\,a.tan\,b}$; $tan(a-b) = \dfrac{tan\,a - tan\,b}{1 + tan\,a.tan\,b}.$

Công thức nhân đôi:

$sin2a = 2sin\,a.cos\,a$

$cos2a = cos^2a - sin^2a = 2cos^2a - 1 = 1 - 2sin^2a$

$tan2a = \dfrac{2tan\,a}{1-tan^2a}.$

Ta cũng có: $sin2a = \dfrac{2tan\,a}{1+tan^2a}$; $cos2a = \dfrac{1-tan^2a}{1+tan^2a}.$

Công thức hạ bậc:

$cos^2 a = \frac{1+cos2a}{2}$; $sin^2 a = \frac{1-cos2a}{2}$; $tan^2 a = \frac{1-cos2a}{1+cos2a}$.

Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$cos a cos b = \frac{1}{2}\left[cos(a-b)+cos(a+b)\right]$$

$$sin a sin b = \frac{1}{2}\left[cos(a-b)-cos(a+b)\right]$$

$$sin a cos b = \frac{1}{2}\left[sin(a-b)+sin(a+b)\right].$$

Công thức biến đổi tổng thành tích:

$cos u + cos v = 2cos\frac{u+v}{2}cos\frac{u-v}{2}$; $cos u - cos v = -2sin\frac{u+v}{2}sin\frac{u-v}{2}$;

$sin u + sin v = 2sin\frac{u+v}{2}cos\frac{u-v}{2}$; $sin u - sin v = 2cos\frac{u+v}{2}sin\frac{u-v}{2}$.

III BÀI TẬP ÁP DỤNG.

DẠNG 1. Tính giá trị của biểu thức lượng giác.

Ví dụ 1 Cho $tan\alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{3sin\alpha - 2cos\alpha}{5sin^3\alpha + 4cos^3\alpha}$

A. $\frac{70}{139}$ **B.** 1 **C.** $\frac{71}{139}$ **D.** 2

Lời giải.

Ta có: $M = \frac{3sin\alpha\left(sin^2\alpha + cos^2\alpha\right) - 2cos\alpha\left(sin^2\alpha + cos^2\alpha\right)}{5sin^3\alpha + 4cos^3\alpha}$?

$= \frac{3sin^3\alpha - 2sin^2\alpha cos\alpha + 3sin\alpha cos^2\alpha - 2cos^3\alpha}{5sin^3\alpha + 4cos^3\alpha}$ (chia tử và mẫu cho $cos^3\alpha$)

$= \frac{3tan^3\alpha - 2tan^2\alpha + 3tan\alpha - 2}{5tan^3\alpha + 4}$

Thay $tan\alpha = 3$ vào ta được $M = \frac{3.3^3 - 2.3^2 + 3.3 - 2}{5.3^3 + 4} = \frac{70}{139}$

Chọn A.

Ví dụ 2 Cho $cot a = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{sin^4 a + cos^4 a}{sin^2 a - cos^2 a}$?

A. $\frac{17}{15}$ **B.** $-\frac{17}{15}$ **C.** $-\frac{16}{15}$ **D.** $-\frac{15}{17}$

Lời giải.

Ta có: $P=\dfrac{\sin^4 a+\cos^4 a}{\sin^2 a-\cos^2 a}=\dfrac{\sin^4 a+\cos^4 a}{\left(\sin^2 a-\cos^2 a\right)\left(\sin^2 a+\cos^2 a\right)}=\dfrac{\sin^4 a+\cos^4 a}{\sin^4 a-\cos^4 a}$

Chia tử và mẫu cho $\sin^4 a$, ta được $P=\dfrac{1+\cot^4 a}{1-\cot^4 a}=\dfrac{1+2^4}{1-2^4}=-\dfrac{17}{15}$

Chọn B.

Ví dụ 3 *Cho* $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ và $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$. *Tính giá trị biểu thức*

$$P=\frac{\sin\alpha\sin 2\alpha-2\cos^3\alpha+2\cos^5\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha+\sin^5\alpha}$$

A. $-\dfrac{128}{27}$ **B.** $-\dfrac{127}{27}$ **C.** $-\dfrac{126}{27}$ **D.** $-\dfrac{125}{27}$

Lời giải.

Ta có: $P=\dfrac{2\sin^2\alpha.\cos\alpha-2\cos^3\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\sin\alpha\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+\sin^5\alpha}$

$=\dfrac{2\sin^2\alpha.\cos\alpha-2\cos^3\alpha\sin^2\alpha}{\sin\alpha\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)+\sin^5\alpha}$

$P=\dfrac{2\sin^2\alpha.\cos\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\sin\alpha.\cos^4\alpha}=\dfrac{2\sin^4\alpha.\cos\alpha}{\sin\alpha.\cos^4\alpha}=2\tan^3\alpha\ (1)$

Bài ra ta có $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\dfrac{9}{25}\Rightarrow\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}\left(Do\ \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\right)$

Thế vào (1) ta được $P=2.\left(\dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}\right)^3=-\dfrac{128}{27}$.

Chọn A.

Ví dụ 4 Cho $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P=\sqrt{2}\left(1+\cot\alpha\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$?

A. 1 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** 3 **D.** $\sqrt{5}$

Lời giải.

Ta có: $P=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$

Thay $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ vào ta tính được P =1.

Chọn A.

Ví dụ 5 Cho $\tan\alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$.

A. 1 **B.** $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{15}}{10}$ **C.** $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{14}}{10}$ **D.** $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{10}$

Lời giải.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0$ nên $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin\alpha = \cos\alpha.\tan\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}.2 = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

Vậy $\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\alpha.\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\alpha.\sin\frac{2\pi}{3}$

$= \frac{-2\sqrt{5}}{5}.\frac{-1}{2} - \frac{-\sqrt{5}}{5}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{10}$

Chọn D.

Ví dụ 6 Cho $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$. Tính giá trị $P = \frac{(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2}{(\sin\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\beta + \cos\alpha)^2}$

A. $2+\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $3+\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{5}$

Lời giải.

Ta có: $P = \frac{2+2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}{2-2(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)} = \frac{2+2\cos(\alpha-\beta)}{2-2\sin(\alpha-\beta)}$

Suy ra: $P = \frac{2+2\cos\frac{\pi}{6}}{2-2\sin\frac{\pi}{6}} = 2+\sqrt{3}$.

Chọn A.

Ví dụ 7 Cho góc lượng giác α, biết $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\cos 2\alpha - 3}{\sin^2\alpha}$.

A. $-\frac{11}{2}$ **B.** 5 **C.** $-\frac{9}{2}$ **D.** $\frac{-7}{2}$

Lời giải.

Ta có: $P = \frac{\cos 2\alpha - 3}{\sin^2\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha - 4}{1-\cos^2\alpha}$

Mà $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{5}$.

Suy ra $P = -\frac{9}{2}$.

Chọn C

Ví dụ 8 Cho $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ và $sin\alpha = \dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = sin2\alpha - cos2\alpha$?

A. $-\dfrac{6+4\sqrt{2}}{9}$ **B.** $-\dfrac{7+4\sqrt{2}}{9}$ **C.** $-\dfrac{7+3\sqrt{2}}{9}$ **D.** $\sqrt{5}$

Lời giải.

Vì $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ nên $cos\alpha < 0$, suy ra $cos\alpha = -\sqrt{1-sin^2\alpha} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Do đó: $P = sin2\alpha - cos2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha - 1 + 2sin^2\alpha$

$\Rightarrow P = 2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) - 1 + 2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = -\dfrac{7+4\sqrt{2}}{9}$

Chọn B.

Ví dụ 9 Cho góc α thỏa mãn $cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $-\pi < \alpha < 0$. Tính giá trị biểu thức $A = sin2\alpha - cos2\alpha$?

A. $\dfrac{-17}{25}$ **B.** $\dfrac{-16}{25}$ **C.** $\dfrac{-18}{25}$ **D.** $\dfrac{-19}{25}$

Lời giải.

Do $-\pi < \alpha < 0 \Rightarrow sin\alpha < 0$ mà $sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha = \dfrac{16}{25}$ nên $sin\alpha = \dfrac{-4}{5}$

Ta có: $sin2\alpha = 2sin\alpha.cos\alpha = \dfrac{-24}{25}$; $cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = \dfrac{-7}{25}$.

Do đó: $A = \dfrac{-17}{25}$

Chọn A.

Ví dụ 10 Cho góc α thỏa mãn: $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ và $tan\alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $A = sin2\alpha + cos(\alpha + \dfrac{\pi}{2})$?

A. $\dfrac{4+2\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\dfrac{4+\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\dfrac{3+2\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\dfrac{2+2\sqrt{5}}{5}$

Lời giải.

Vì $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ nên $\begin{cases} sin\alpha < 0 \\ cos\alpha < 0 \end{cases}$. Do đó: $cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{1}{1+tan^2\alpha}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow sin\alpha = cos\alpha.tan\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Ta có: $A = 2sin\alpha.cos\alpha - sin\alpha = \dfrac{4+2\sqrt{5}}{5}$

Chọn A.

DẠNG 2. Giải phương trình lượng giác.

LOẠI 1. Phương trình lượng giác cơ bản

1. Phương trình cơ bản và phương trình đặc biệt:

A. Dạng cơ bản:

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\ \left(v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\ \left(v \neq k\pi\right)$$

B. Các dạng cơ bản đặc biệt:

$\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 11 Giải phương trình: $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$. Với $k \in Z$ nghiệm của phương trình là:

A. $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$ **B.** $x = \frac{5}{11}\pi + k\pi$ **C.** $x = \frac{5}{13}\pi + k\pi$ **D.** $x = \frac{5}{14}\pi + k\pi$

Lời giải.

Ta đưa về phương trình cơ bản như sau:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos x = \sin\left(-x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Mà $\sin\left(-x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right)$, do đó phương trình lúc này thành:

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{5}{12}\pi + k\pi\ \ (k \in Z).$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi\ (k \in Z)$.

Chọn A.

Ví dụ 12 Giải phương trình: $\tan 2x + \cot x = 0$. Với $k \in Z$ nghiệm của phương trình là:

A. $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$ **B.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ **C.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ **D.** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq k\pi \end{cases}$

Ta đưa về phương trình cơ bản như sau:

$\tan 2x + \cot x = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\cot x \Leftrightarrow \tan 2x = \cot(-x) \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in Z)$.

Chọn B.

LOẠI 2. Phương trình đưa về Phương trình bậc 2, bậc 3

Dạng

$A\sin^2 f(x) + B\sin f(x) + C = 0$

$A\cos^2 f(x) + B\cos f(x) + C = 0$

$A\tan^2 f(x) + B\tan f(x) + C = 0$

$A\cot^2 f(x) + B\cot f(x) + C = 0$

Phương pháp giải. Đặt $t = \sin f(x), \cos f(x), \tan f(x), \cot f(x)$ (có thể không cần đặt).

Ví dụ 13 Giải phương trình: $\cos 3x.\cos x = 1$. Với $k \in Z$ nghiệm của phương trình là:

A. $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$ **B.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ **C.** $x = k\pi$ **D.** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Lời giải.

$PT \Leftrightarrow \cos 4x + \cos 2x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -\frac{3}{2} (L) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Chọn C.

Ví dụ 14 Giải phương trình: $\cos 2x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Với $k \in Z$ họ nào sau đây không là nghiệm của phương trình:

A. $x = k\pi$ **B.** $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ **C.** $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ **D.** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x-\sin x=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$+\ \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$+\ \sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$

Chọn D.

Ví dụ 15 Giải phương trình: $\cos 2x-3\sin x-2=0$. Với $k\in Z$ họ nào sau đây không là nghiệm của phương trình?

A. $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ **B.** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ **C.** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ **D.** $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$

Lời giải.

Ta có phương trình $\cos 2x-3\sin x-2=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x+1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$

Chọn B.

LOẠI 3. PHƯƠNG TRÌNH CỔ ĐIỂN

Dạng $A\sin f(x)+B\cos f(x)=C$, cách giải chia hai vế phương trình cho $\sqrt{A^2+B^2}$, cố gắng đưa về phương trình cơ bản. Hãy cùng xem những ví dụ sau để thấy rõ hơn tư tưởng này.

Ví dụ 16 Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x-2\cos x=0$. Với $k\in Z$, họ nào sau đây không là nghiệm của phương trình?

A. $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ **B.** $x=-\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}$ **C.** $x=\frac{11\pi}{6}+k2\pi$ **D.** $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$

Lời giải.

Ta có: $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x-2\cos x=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x=\cos x$ ta thấy $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ nên phương trình lúc này thành $\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x=\cos x$

$$\Leftrightarrow cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Chú ý: $x=\frac{11\pi}{6}+k2\pi$ chính là họ $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$.

Chọn D

Ví dụ 17 Giải phương trình: $sinx+2cosx=\sqrt{5}\,sinx$. Với $k\in Z$ họ nào sau đây là nghiệm của phương trình:

A. $x=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}+k\pi$ với $cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

B. $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}+k\pi$ với $cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

C. $x=\frac{11\pi}{6}+k2\pi$

D. $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$

Lời giải.

Rõ ràng, phương trình có dạng cổ điển, ta chia hai vế phương trình cho $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ta được $\frac{1}{\sqrt{5}}sinx+\frac{2}{\sqrt{5}}cosx=sinx$.

Ta thấy tồn tại góc α sao cho $cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ nên phương trình viết lại thành

$cos\alpha.sinx+sin\alpha.cosx=sinx \Leftrightarrow sin(x+\alpha)=sinx$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\alpha=x+k2\pi \\ x+\alpha=\pi-x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}+k\pi \text{ với } (k\in Z).$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}+k\pi$ với $(k\in Z)$ và α sao cho:

$cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

Chọn A

Ví dụ 18 Giải phương trình: $2\sqrt{3}cos^2x+6sinx.cosx=3+\sqrt{3}$. Với $k\in Z$ họ nào sau đây không là nghiệm của phương trình?

A. $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ **B.** $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ **C.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ **D.** $x=\frac{5\pi}{4}+k\pi$

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{3}(1+cos2x)+3sin2x=3+\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}cos2x+3sin2x=3$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}sin2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Chú ý: họ $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ chính là họ $x=\frac{5\pi}{4}+k\pi$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$.

Chọn A

LOẠI 4. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Ví dụ 19 Giải phương trình: $2\sqrt{3}\cos^2 x+6\sin x.\cos x=3+\sqrt{3}$. Với $k\in Z$ họ nào sau đây là nghiệm của phương trình:

A. $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$ **B.** $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ **C.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ **D.** $x=\frac{5\pi}{4}+k\pi$

Lời giải.

Giải phương trình $\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

Phương trình $\Leftrightarrow\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)-\left(\sin x\cos x+\cos^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(\sin x-2\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=0 \quad (1) \\ \sin x-2\cos x=0 (2) \end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$

$(2)\Leftrightarrow \tan x=2\Leftrightarrow x=\arctan 2+k\pi(k\in\mathbb{Z})$

Chọn A.

Ví dụ 20 Giải phương trình: $\cos 2x+\cos 6x=\cos 4x$. Với $k\in Z$ họ nào sau đây là nghiệm của phương trình:

A. $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}$ **B.** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ **C.** $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ **D.** $x=\frac{5\pi}{4}+k\pi$

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x=\cos 4x \Leftrightarrow \cos 4x(2\cos 2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x=0 \\ \cos 2x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ 2x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4} \\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.$$

Chọn D.

Ví dụ 21 Giải phương trình: $2\sin x\cos x+6\sin x-\cos x-3=0$. Với $k\in Z$ họ nào sau đây không là nghiệm của phương trình:

A. $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ **B.** $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$ **C.** $x=\dfrac{13\pi}{6}+k2\pi$ **D.** $x=\dfrac{5\pi}{4}+k\pi$

Lời giải.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\cos x+3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=-3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+l2\pi\end{array}\right.$$, với k, l là số nguyên

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+l2\pi$ với k, l là số nguyên.

Chọn D

Ví dụ 22 Giải phương trình: $\cos 2x+(1+2\cos x)(\sin x-\cos x)=0$. Với $k\in Z$, họ nào sau đây không là nghiệm của phương trình?

A. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ **B.** $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ **C.** $x=\dfrac{13\pi}{6}+k2\pi$ **D.** $x=k2\pi$

Lời giải.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+\left(1+2\cos x\right)\left(\sin x-\cos x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sin x\right)\left[\left(\cos x+\sin x\right)-\left(1+2\cos x\right)\right]=0$$

$$\left(\cos x-\sin x\right)\left[\left(\cos x+\sin x\right)-\left(1+2\cos x\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sin x\right)\left[\sin x-1-\cos x\right]=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=0\\ \sin x-1-\cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=\pi+k2\pi\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có các nghiệm: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi;x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ ;x=k2\pi$,($k\in\mathbb{Z}$)

Chọn C

Ví dụ 23 Giải phương trình: $(2\sin x-1)(\sqrt{3}\sin x+2\cos x-\sqrt{2})=\sin 2x-\cos x$. Với $k\in Z$, họ nào sau đây là nghiệm của phương trình:

A. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ **B.** $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ **C.** $x=\dfrac{7\pi}{12}+k2\pi$ **D.** $x=k2\pi$

Lời giải.

Phương trình tương đương

$(2\sin x-1)(\sqrt{3}\sin x+2\cos x-\sqrt{2})=\sin 2x-\cos x\ (1)$

$(1)\Leftrightarrow(2\sin x-1)(\sqrt{3}\sin x+2\cos x-\sqrt{2})=\cos x(2\sin x-1)$

$\Leftrightarrow(2\sin x-1)(\sqrt{3}\sin x+\cos x-\sqrt{2})=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sin x-1=0(2)\\ \sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}(3)\end{array}\right.$

$(2)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$

$(3)\ \Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm: $x=\frac{\pi}{12}+k2\pi$, $x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi$.

Chọn C

Ví dụ 24 Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=4\sin x-1$. Với $k\in Z$ họ nào sau đây là nghiệm của phương trình:

A. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ **B.** $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ **C.** $x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi$ **D.** $x=k2\pi$

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=4\sin x-1\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x+1-\cos 2x-4\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin^2 x-4\sin x=0\Leftrightarrow 2\sin x\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sqrt{3}\cos x+\sin x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x=k\pi$, $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$.

Chọn B

Ví dụ 25 Giải phương trình: $\cos x+\sin 4x-\cos 3x=0$. Với $k\in Z$, họ nào sau đây không là nghiệm của phương trình?

A. $x=\frac{k\pi}{2}$ **B.** $x=\frac{-\pi}{6}+k2\pi$ **C.** $x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi$ **D.** $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$

Lời giải.

Ta có: $\cos x+\sin 4x-\cos 3x=0\Leftrightarrow 2\sin 2x.\sin x+2\sin 2x.\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x(\sin x+\cos 2x)=0\Leftrightarrow\sin 2x(-2\sin^2 x+\sin x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin x = 1 \\ \sin x = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 họ nghiệm: $x = \dfrac{k\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi$, $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Chọn C

Ví dụ 26 Giải phương trình: $\cos x + \sin 4x - \cos 3x = 0$. Với $k \in Z$ họ nào sau đây là nghiệm của phương trình:

A. $x = \dfrac{k\pi}{2}$ **B.** $x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi$ **C.** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$ **D.** $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$

Lời giải.

Ta có:

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 2x + 1 + \cos 2x - 4\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 4\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(\sin x + \cos x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = 2 \ (VN \ do \ 1^2 + 1^2 < 2^2) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

Chọn C

Ví dụ 27 Giải phương trình: $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1$. Với $k \in Z$ họ nào sau đây là nghiệm của phương trình:

A. $x = \dfrac{k\pi}{2}$ **B.** $x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}$ **C.** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$ **D.** $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$

Lời giải.

$$\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x - 2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 2x = \sin x \end{array}\right.$$

$+ \ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

$$+ \ \cos 2x = \sin x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Chọn B

Ví dụ 28 Giải phương trình: $(2sin x+1)(3cos 4x+2sin x-4)+4cos^2 x=3$. Với $k\in Z$ họ nào sau đây không là nghiệm của phương trình?

A. $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ **B.** $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi$ **C.** $x=k\dfrac{\pi}{2}$ **D.** $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi$

Lời giải.

Ta có

$(2sin x+1)(3cos 4x+2sin x-4)+4cos^2 x=3$

$\Leftrightarrow (2sin x+1)(3cos 4x+2sin x-4)+1-4sin^2 x$

$\Leftrightarrow (2sin x+1)(3cos 4x-3)=0$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\ hay\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\ hay\ x=k\dfrac{\pi}{2}$ với $k\in Z$.

Chọn D

Ví dụ 29 Giải phương trình: $tan 2x+tan x=-sin 3x.cos 2x$. Với $k\in Z$, họ nào sau đây là nghiệm của phương trình?

A. $x=\pi+k2\pi$ **B.** $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi$ **C.** $x=k\dfrac{\pi}{2}$ **D.** $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi$

Lời giải.

Điều kiện: $cos 3x\neq 0$ và $cos x\neq 0$.

Phương trình tương đương

$$\Leftrightarrow \frac{sin 2x}{cos 2x}+\frac{sin x}{cos x}+sin 3x.cos 2x=0\Leftrightarrow \frac{sin 2x.cos x+cos 2x.sin x}{cos 3x.cos x}+sin 3x.cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{sin 3x}{cos 2x.cos x}+sin 3x.cos 2x=0\Leftrightarrow sin 3x\left(\frac{1}{cos 2x.cos x}+cos 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sin 3x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{3}\\ \dfrac{1}{cos 2x.cos x}+cos 2x=0\end{array}\right.$$

Ta giải $\dfrac{1}{cos 2x.cos x}+cos 2x=0\Leftrightarrow 1+cos^2 2x.cos x=0\Leftrightarrow 1+cos x.\left(2cos^2x-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow 4cos^5 x-4cos^3 x+cosx+1=0\Leftrightarrow (cos x+1)(4cos^4 x-4cos^3 x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\\ 4cos^4 x-4cos^3 x+1=0\end{array}\right.$$

Với $4cos^4 x-4cos^3 x+1=0\Leftrightarrow 4cos^4 x-4cos^3 x+cos^2 x+1-cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow \left(2cos^2 x-cos x\right)^2+sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} sin^2 x = 0 \\ 2cos^2 x - cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos^2 x = 1 \\ \left[\begin{array}{l} cos x = 0 \\ cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$ rõ ràng điều này là vô lí nên phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pi + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{k\pi}{3}$.

Chọn A

Ví dụ 30 Giải phương trình $(2sin x + 1)(3cos 4x + 2sin x - 4) = 4sin^2 x - 1$ (*).

Khẳng định nào sau đây sai:

A. Nghiệm của phương trình $2sin x + 1 = 0$ cũng là nghiệm của phương trình (*).

B. Nghiệm của phương trình $3cos 4x - 3 = 0$ cũng là nghiệm của phương trình (*).

C. Phương trình (*) có hai họ nghiệm.

D. $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$ là nghiệm của phương trình (*).

Lời giải.

Đừng vội nhân ra, hãy xem thử có nhân tử chung không, dễ thấy phương trình tương đương:

$(2sin x + 1)(3cos 4x + 2sin x - 4) = 4sin^2 x - 1$

$\Leftrightarrow (2sin x + 1)(3cos 4x + 2sin x - 4) = (2sin x - 1)(2sin x + 1)$

$\Leftrightarrow (2sin x + 1)[3cos 4x + 2sin x - 4 - 2sin x + 1] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2sin x + 1 = 0 \\ 3cos 4x - 3 = 0 \end{array}\right.$

Chọn A

IV. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Ví dụ 1 Cho $\tan\alpha = \dfrac{3}{2}$. Tính $A = \dfrac{1 + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$?

A. $\dfrac{11}{2}$ B. $\dfrac{12}{2}$ C. $\dfrac{13}{2}$ D. $\dfrac{15}{2}$

Lời giải.

Cho $\tan\alpha = \dfrac{3}{2}$. Tính $A = \dfrac{1 + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

Ta có: $A = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \tan^2\alpha = 1 + 2\tan^2\alpha = 1 + 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{11}{2}$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 2 Cho $\sin a = \dfrac{1}{3}; a \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính giá trị biểu thức: $A = \dfrac{2\sin a - \sin 3a}{2\cos a + \cos 3a}$

A. $\dfrac{-\sqrt{2}}{92}$ B. $\dfrac{-7\sqrt{2}}{92}$ C. $\dfrac{-5\sqrt{2}}{97}$ D. $\dfrac{-5\sqrt{2}}{92}$

Lời giải.

Ta có: $\cos a=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow A=\dfrac{2\sin a-\sin 3a}{2\cos a+\cos 3a}=\dfrac{4\sin^3 a-\sin a}{4\cos^3 a-\cos a}$

$A=\dfrac{-5\sqrt{2}}{92}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 3

Cho $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ và $\sin\alpha+3\cos\alpha=-1$. Tính giá trị biểu thức: $N=\tan\alpha+\cot\alpha$.

A. $\dfrac{-27}{12}$ B. $\dfrac{-25}{12}$ C. $\dfrac{25}{12}$ D. $\dfrac{27}{12}$

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases}\sin\alpha+3\cos\alpha=-1\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\ (l)\ do\ \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\\ \cos\alpha=-\dfrac{3}{5}\,(n)\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$

Khi đó: $N=\tan\alpha+\cot\alpha=-\dfrac{4}{3}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{25}{12}$

Chọn đáp án B

Ví dụ 4 Cho hàm số $f(x)=2\sqrt{3}\sin x-\cos 2x+5$. Phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm nào dưới đây.

A. $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ B. $\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ C. $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ D. $\dfrac{\pi}{5}+k\pi$

Lời giải.

$f'(x)=2\sqrt{3}\cos x+2\sin 2x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\cos x(\sqrt{3}+2\sin x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$

Vậy f'(x) = 0 với $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,x=\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi,x=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi$

Chọn đáp án A

Ví dụ 5 Cho $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$ với $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Tính giá trị của $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$?

A. $\dfrac{-17\sqrt{3}}{26}$ B. $\dfrac{-15\sqrt{2}}{26}$ C. $\dfrac{-17\sqrt{2}}{2}$ D. $\dfrac{-17\sqrt{2}}{26}$

Lời giải.

Ta có: $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$.

Suy ra: $\cos\alpha = \frac{-12}{13}$ (vì $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ nên $\cos\alpha<0$)

Do đó: $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\alpha.\cos\frac{\pi}{4} - \sin\alpha.\sin\frac{\pi}{4} = \frac{-12}{13}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{13}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-17\sqrt{2}}{26}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 6 Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

A. $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\frac{7\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$

B. $x=-\frac{3\pi}{2}+k2\pi;\ x=\frac{7\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$

C. $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ x=\frac{7\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$

D. $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\frac{9\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

Chia hai vế cho 2, Phương trình $\Leftrightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{6}) = \sin(x-\frac{\pi}{3})$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\frac{7\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 7 Giải phương trình: $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin^2 x + \sin x$.

A. $x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi;\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$

B. $x=-\frac{\pi}{7}+k2\pi;\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$

C. $\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$

D. $\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\frac{3\pi}{18}+\frac{k\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

Có:

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, phương trình $\Leftrightarrow 2\cos 2x = \sqrt{3}\cos x + \sin x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}.$

Chọn đáp án C

Ví dụ 8 Giải phương trình: $2\sin x+\sin 2x=2\cos^2\dfrac{x}{2}$. Phương trình có nghiệm là:

A. $x=\pi+k2\pi;x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

B. $x=\pi+k\pi;x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

C. $x=\pi+k2\pi;x=\dfrac{\pi}{5}+k2\pi;x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

D. $x=k2\pi;x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin x(1+\cos x)=1+\cos x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1+\cos x=0\\2\sin x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\\sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\\sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\vee x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm là $x=\pi+k2\pi;x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Chọn đáp án A

Ví dụ 9 Cho $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2}{(\sin\alpha-\cos\beta)^2+(\cos\alpha+\sin\beta)^2}$.

A. $3+2\sqrt{2}$ **B.** $3+3\sqrt{2}$ **C.** 3 **D.** $3+\sqrt{2}$

Lời giải.

$P=\dfrac{2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}{2+2(\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)}=\dfrac{1+\cos(\beta-\alpha)}{1+\sin(\beta-\alpha)}.$

$=\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=3+2\sqrt{2}.$

Chọn đáp án A

Ví dụ 10

Giải phương trình $2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos 2x=1.$

A. $x=\dfrac{\pi}{7}+k\pi$ **B.** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ **C.** $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$ **D.** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

Lời giải.

Ta có: Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+2\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\cos 2x=1$

$\Leftrightarrow$ $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x-\sqrt{3}\cos 2x=1$

$\Leftrightarrow$ $\sin 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

Chọn đáp án D

Ví dụ 11

Cho $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Tính giá trị của biểu thức $P=10\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+25\cos 2\alpha$

A. $10-2\sqrt{3}$ **B.** 10 **C.** $-4\sqrt{3}$ **D.** $10-4\sqrt{3}$

Lời giải.

Áp dụng công thức: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

Mà $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow\cos\alpha<0\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

$A=10\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)+25\left(1-2\sin^2\alpha\right)$

$=10\left(\frac{3}{5}.\frac{1}{2}-\frac{4}{5}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+25\left(1-2.\frac{9}{25}\right)=10-4\sqrt{3}$

Áp dụng công thức: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

Mà $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow\cos\alpha<0\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

$A=10\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)+25\left(1-2\sin^2\alpha\right)$

$=10\left(\frac{3}{5}.\frac{1}{2}-\frac{4}{5}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+25\left(1-2.\frac{9}{25}\right)=10-4\sqrt{3}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 12 Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=4cosx+1$

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ **B.** $x=\frac{\pi}{3}+k\pi;x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

C. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;x=k2\pi$ **D.** $x=k\pi;x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

Lời giải.

$\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=4\cos x+1\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin 2x-(\cos 2x+1)-4\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\sqrt{3}\sin x-\cos x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sqrt{3}\sin x-\cos x-2=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ \sin(x-\frac{\pi}{6})=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in Z)$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 13 Giải phương trình: $4\sin 5x\sin x-2\cos 4x-\sqrt{3}=0$.

A. $x=\frac{k\pi}{3};x=-\frac{5\pi}{36}+\frac{k\pi}{3}$

B. $x=\frac{5\pi}{36}+\frac{k\pi}{3};x=\frac{k\pi}{3}$

C. $x=\frac{5\pi}{36}+\frac{k\pi}{3};x=-\frac{5\pi}{36}+\frac{k\pi}{3}$

D. $x=\frac{5\pi}{7}+\frac{k\pi}{3};x=-\frac{5\pi}{36}+\frac{k\pi}{3}$

Lời giải.

$4\sin 5x\sin x-2\cos 4x-\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow 2(\cos 4x-\cos 6x)-2\cos 4x-\sqrt{3}=0$

$$\Leftrightarrow \cos 6x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{36}+\frac{k\pi}{3} \\ x=-\frac{5\pi}{36}+\frac{k\pi}{3} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Chọn đáp án C

Ví dụ 14 Cho góc α thoả mãn $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ và $\cos\alpha=\frac{4}{5}$. Tính giá trị biểu thức $A=\frac{\tan\alpha-1}{2-\cos 2\alpha}$.

A. $-\frac{175}{172}$

B. $\frac{175}{172}$

C. $-\frac{173}{172}$

D. 5

Lời giải.

Ta có: $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}\Rightarrow \sin\alpha=\pm\frac{3}{5}$

Vì $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ nên $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$

$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$ và $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{32}{25}-1=\frac{7}{25}$

Vậy $A=\frac{-\frac{3}{4}-1}{2-\frac{7}{25}}=-\frac{175}{172}$

Chọn đáp án A

Ví dụ 15 Tính giá trị của biểu thức $A = cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(2015\pi - \alpha) - \cot(2016\pi + \alpha)$ biết góc α thỏa mãn: $5\sin 2\alpha - 6cos\alpha = 0$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?

A. $-\frac{1}{15}$ **B.** $-\frac{7}{15}$ **C.** $-\frac{2}{15}$ **D.** $-\frac{6}{15}$

Lời giải.

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha > 0$, $\cot\alpha > 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow 10\sin\alpha.\cos\alpha - 6\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha.(5\sin\alpha - 3) = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$ (vì $\cos\alpha > 0$)

Ta có: $\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{4}{3}$ (vì $\cot\alpha > 0$)

$\Rightarrow A = \sin\alpha + \sin\alpha - \cot\alpha = 2\sin\alpha - \cot\alpha = 2.\frac{3}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{15}$

Chọn đáp án C

Ví dụ 16 Giải phương trình: $2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = k2\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

$2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - 2\sin^2 x) + 8\sin x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\sin x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ (do $2\sin x - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm : $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 17 Giải phương trình: $\sin x\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x - 2\cos 2x\right) = 0$.

A. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$

B. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$

C. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$

D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$

Lời giải.

$$\sin x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-2\cos 2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin x=0 & (1)\\ \sin x+\sqrt{3}\cos x=2\cos 2x & (2)\end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow x=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

$$(2)\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=x-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x=-x+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Chọn đáp án C

Ví dụ 18 Giải phương trình: $\sin 2x+4=8\cos x+\sin x$.

A. $x=\pm\pi+k2\pi$ **B.** $x=\pm\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ **C.** $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ **D.** $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$

Lời giải.

Biến đổi phương trình về dạng: $(\sin x-4)(2\cos x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=4\ \textit{(vô nghiệm)}\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Chọn đáp án C

Ví dụ 19 Giải phương trình: $\sin 2x+1-\cos 2x=6\sin x$.

A. $x=\pm\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ **B.** $x=k\pi$ **C.** $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ **D.** $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$

Lời giải.

$\sin 2x+1-\cos 2x=6\sin x$

$\Leftrightarrow(\sin 2x-6\sin x)+(1-\cos 2x)=0\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x-3\right)+2\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x-3+\sin x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x+\cos x=3(Vn)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=k\pi$. Vậy nghiệm của phương trình là $x=k\pi,k\in Z$

Chọn đáp án B

Ví dụ 20 Giải phương trình $\sqrt{3}\sin x+2\cos^2\dfrac{x}{2}=2$.

A. $x=k2\pi;x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$ **B.** $x=k2\pi;x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$

C. $x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$ **D.** $x=k2\pi$

Lời giải.

$$\sqrt{3}\sin x+2\cos^2\frac{x}{2}=2\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Phương trình đã cho có các nghiệm là: $x=k2\pi;\quad x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 21 Cho $\sin\alpha=a;a\in\left[-1;1\right];A=\tan^2\alpha$. Khi đó A biểu diễn theo a theo hệ thức:

A. $A=\frac{a^2}{1-a^2}$ **B.** $A=\frac{1-a^2}{a^2}$ **C.** $A=\frac{a^2}{a^2-1}$ **D.** $A=\frac{2-a^2}{1-a^2}$

Lời giải.

Ta có: $A=\tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{a^2}{1-a^2}$.

Chọn A

Ví dụ 22 Hệ thức nào sau đây sai?

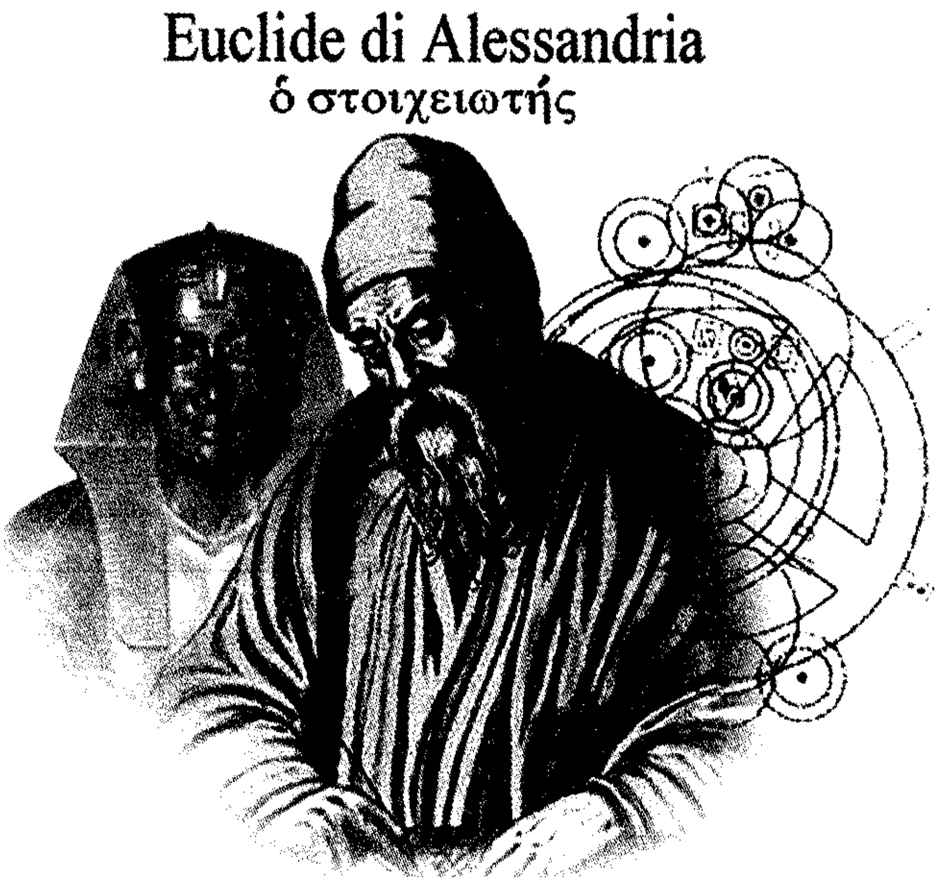
A. $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ **B.** $\cos\left(\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$

C. $\cos2\alpha=2\sin^2\alpha-1$ **D.** $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

Euclid ((322-275 BC CA)

Euclid là nhà toán học lỗi lạc người Hy Lạp. Ông được coi là "cha đẻ của hình học".

Hầu hết các kiến thức hình học ở trung học cơ sở hiện nay đều có trong bộ sách "Cơ sở" gồm 13 cuốn do Euclid viết ra (Sáu cuốn đầu gồm các kiến thức về hình học phẳng, ba cuốn tiếp theo có nội dung số học được trình bày dưới dạng hình học, cuốn thứ mười gồm các phép dựng hình có liên quan đến đại số, 3 cuốn cuối cùng nói về hình học không gian) đưa ra các định đề và tiên đề như "Qua hai điểm bất kỳ, luôn luôn vẽ được một đường thẳng", "Với tâm bất kỳ và bán kính bất kỳ, luôn luôn vẽ được một đường tròn" hay "Hai cái cùng bằng cái thứ 3 thì bằng nhau", "Toàn thể lớn hơn một phần",....



CHUYÊN ĐỀ 8. ĐẠI SỐ TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

Phần I: CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Đại số tổ hợp:

A. Quy tắc cộng:

Có n_1 cách chọn đối tượng A_1.

n_2 cách chọn đối tượng A_2.

$A_1 \cap A_2 = \varnothing$

$\Rightarrow$ Có $n_1 + n_2$ cách chọn một trong các đối tượng A_1, A_2.

B. Quy tắc nhân:

Có n_1 cách chọn đối tượng A_1. Ứng với mỗi cách Chọn A_1, có n_2 cách chọn đối tượng A_2.

$\Rightarrow$ Có $n_1.n_2$ cách chọn dãy đối tượng A_1, A_2.

C. Hoán vị:

– Mỗi cách sắp thứ tự n phần tử gọi là một hoán vị của n phần tử.

– Số hoán vị: $P_n = n!$.

D. Chỉnh hợp:

– Mỗi cách lấy ra k phần tử từ n phần tử $(0 < k \le n)$ và sắp thứ tự của chúng gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

– Số các chỉnh hợp: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

E. Tổ hợp:

– Mỗi cách lấy ra k phần tử từ n phần tử $(0 \le k \le n)$ gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

– Số các tổ hợp: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

– Hai tính chất: $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$

F. Nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n$$

– Số hạng tổng quát (Số hạng thứ k + 1): $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

– Đặc biệt: $(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + \ldots + x^nC_n^n$

II. XÁC SUẤT:

1. Tính xác suất bằng định nghĩa cổ điển: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$

$+\ 0 \le P(A) \le 1$ $\qquad$ $+\ P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$

2. Biến cố xung khắc và biến cố độc lập:

- Biến cố xung khắc: Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra. Nói cách khác, A và B xung khắc nếu A và B không bao giờ đồng thời xảy ra.

- Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

3. Tính xác suất theo các quy tắc:

a) Quy tắc cộng xác suất

Nếu A và B là hai biến cố xung khắc, thì:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

c) Quy tắc nhân xác suất

Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì:

$P(AB) = P(A)P(B)$

Phần II: CÁC DẠNG TOÁN:

1. Bài toán đếm:

Ví dụ 1 Cho tập $A = \{0;1;2;3;4;5\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có chữ số 0 và 3?

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$ $(a \neq 0)$

Tìm số các số có 5 chữ số khác nhau mà có mặt 0 và 3 không xét đến vị trí a.

Xếp 0 và 3 vào 5 vị trí có: A_5^2 cách

3 vị trí còn lại có A_4^3 cách

Suy ra có $A_5^2 A_4^3$ số

Tìm số các số có 5 chữ số khác nhau mà có mặt 0 và 3 với a = 0.

Xếp 3 có 4 cách

3 vị trí còn lại có A_4^3 cách

Suy ra có $4.A_4^3$ số

Vậy số các số cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $A_5^2 A_4^3 - 4.A_4^3 = 384$

Ví dụ 2 Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và ba chữ số lẻ?

Lời giải

Từ giả thiết bài toán ta thấy, có $C_5^2 = 10$ cách chọn 2 chữ số chẵn (kể cả số có chữ số 0 đứng đầu) và $C_5^3 = 10$ cách chọn 2 chữ số lẽ => có $C_5^2 . C_5^3$ = 100 bộ 5 số được chọn.

Mỗi bộ 5 số như thế có 5! số được thành lập => có tất cả $C_5^2 . C_5^3 .5!$ = 12000 số.

Mặt khác số các số được lập như trên mà có chữ số 0 đứng đầu là $C_4^1 . C_5^3 .4! = 960$.

Vậy có tất cả 12000 – 960 = 11040 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3 Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

Lời giải

Tổng số cách chọn 6 học sinh trong 12 học sinh là C_{12}^6

Số học sinh được chọn phải thuộc ít nhất 2 khối

Số cách **Chọn** Chỉ có học sinh khối 12 và khối 11 là: C_7^6

Số cách **Chọn** Chỉ có học sinh khối 11 và khối 10 là: C_9^6

Số cách **Chọn** Chỉ có học sinh khối 12 và khối 10 là: C_8^6

Số cách chọn thoả mãn đề bài là: $C_{12}^6 - C_7^6 - C_9^6 - C_8^6 = 805$ (cách)

Ví dụ 4 Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD lần lượt cho 1, 2, 3 và n điểm phân biệt khác A, B, C, D. Tìm n biết số tam giác có ba đỉnh lấy từ n + 6 điểm đã cho là 439.

Lời giải

Nếu n ≤ 2 thì n + 6 ≤ 8. Do đó số tam giác có ba đỉnh được lấy từ n + 6 điểm đó không vượt qua $C_8^3 = 56 < 439$ (loại). Vậy n ≥ 3

Vì mỗi tam giác được tạo thành ứng với 1 tổ hợp 3 chập n + 6 phần tử. Nhưng trên cạnh CD có 3 đỉnh, trên cạnh DA có n đỉnh nên số tam giác tạo thành là:

$$C_{n+6}^3 - C_3^3 - C_n^3 = \frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{6} - 1 - \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 439$$

⇔ (n + 4)(n + 5)(n + 6) – (n – 2)(n – 1)n = 2540

⇔ $n^2 + 4n - 140 = 0$

Từ đó tìm được n = 10.

2. Nhị thức Newton:

Ví dụ 1 Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(2.x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, biết rằng $A_n^2-C_{n+1}^{n-1}=4n+6$?

Lời giải

Giải phương trình: $A_n^2-C_{n+1}^{n-1}=4n+6$; Điều kiện: $n \geq 2$; $n \in N$.

Phương trình tương đương với: $n(n-1)-\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}=4n+6 \Leftrightarrow n(n-1)-\frac{n(n+1)}{2}=4n+6$

$\Leftrightarrow n^2 - 11n - 12 = 0 \Leftrightarrow n = -1$ (Loại) v $n = 12$.

Với $n = 12$ ta có nhị thức Niutơn: $\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$.

Số hạng thứ k + 1 trong khai triển là: $T_{k+1} = C_{12}^k(2x)^{12-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$; $k \in N, 0 \leq k \leq 12$

Hay $T_{k+1} = C_{12}^k(2x)^{12-k}.x^{-\frac{k}{2}} = C_{12}^k.2^{12-k}.x^{\frac{24-3k}{2}}$.

Số hạng này không chứa x khi $\begin{cases} k \in N,\ 0 \leq k \leq 12 \\ 24-3k=0 \end{cases} \Leftrightarrow k=8$.

Vậy số hạng thứ 9 không chứa x là $T_9 = C_{12}^8 2^4 = 7920$

Ví dụ 2 Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $(x^2 + 2)^n$, biết: $A_n^3-8C_n^2+C_n^1=49$.

Lời giải

Điều kiện: $n \geq 4$

Ta có: $\left(x^2+2\right)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2k} 2^{n-k}$

Hệ số của số hạng chứa x^8 là $C_n^4 2^{n-4}$

Hệ số của số hạng chứa x^8 là $C_n^4 2^{n-4}$

Ta có: $A_n^3-8C_n^2+C_n^1=49$

$\Leftrightarrow (n - 2)(n - 1)n - 4(n - 1)n + n = 49$

$\Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0 \Leftrightarrow (n - 7)(n^2 + 7) = 0 \Leftrightarrow n = 7$

Nên hệ số của x^8 là $C_7^4 2^3 = 280$

Ví dụ 3 (ĐH) Cho khai triển đa thức: $(1-2x)^{2013}=a_o+a_1x+a_2.x^2+\ldots+a_{2013}.x^{2013}$

Tính tổng: $S=|a_0|+2|a_1|+3|a_2|+\ldots+2014|a_{2013}|$

Lời giải

Ta có: $\left(x(1-2x)^{2013}\right)'=a_0+2a_1x+3a_2x^2+\ldots+2014a_{2014}x^{2013}$.

$\Leftrightarrow (1-2x)^{2013}-4026x(1-2x)^{1012}=a_0+2a_1x+3a_2x^2+\ldots+2014a_{2013}x^{2013}$ (*).

Nhận thấy: $a_k x^k = |a_k|(-x)^k$ do đó thay $x=-1$ vào cả hai vế của (*) ta có:

$S = |a_0| + 2|a_1| + 3|a_2| + \ldots + 2014|a_{2013}| = 1343.3^{2213}$

Ví dụ 4 (ĐH) Cho khai triển: $(1+2x)^{10}\left(x^2+x+1\right)^2 = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{14}x^{14}$. Hãy tìm giá trị của a_6.

Lời giải

Ta có $x^2+x+1 = \frac{1}{4}(2x+1)^2 + \frac{3}{4}$ nên

$(1+2x)^{10}(x^2+x+1)^2 = \frac{1}{16}(1+2x)^{14} + \frac{3}{8}(1+2x)^{12} + \frac{9}{16}(1+2x)^{10}$

Trong khai triển $(1+2x)^{14}$ hệ số của x^6 là: $2^6C_{14}^6$; Trong khai triển $(1+2x)^{12}$ hệ số của x^6 là: $2^6C_{12}^6$

Trong khai triển $(1+2x)^{10}$ hệ số của x^6 là: $2^6C_{10}^6$

Vậy hệ số $a_6 = \frac{1}{16}2^6C_{14}^6 + \frac{3}{8}2^6C_{12}^6 + \frac{9}{16}2^6C_{10}^6 = 41748.$

Ví dụ 5 (ĐH) Tính giá trị biểu thức: $A = 4C_{100}^2 + 8C_{100}^4 + 12C_{100}^6 + \ldots + 200C_{100}^{100}$.

Lời giải

Ta có: $(1+x)^{100} = C_{100}^0 + C_{100}^1x + C_{100}^2x^2 + \ldots + C_{100}^{100}x^{100}$ (1)

$(1-x)^{100} = C_{100}^0 - C_{100}^1x + C_{100}^2x^2 - C_{100}^3x^3 + \ldots + C_{100}^{100}x^{100}$ (2)

Lấy (1)+(2) ta được: $(1+x)^{100} + (1-x)^{100} = 2C_{100}^0 + 2C_{100}^2x^2 + 2C_{100}^4x^4 + \ldots + 2C_{100}^{100}x^{100}$

Lấy đạo hàm hai vế theo ẩn x ta được:

$100(1+x)^{99} - 100(1-x)^{99} = 4C_{100}^2x + 8C_{100}^4x^3 + \ldots + 200C_{100}^{100}x^{99}$

Thay x=1 vào => $A = 100.2^{99} = 4C_{100}^2 + 8C_{100}^4 + \ldots + 200C_{100}^{100}$

3. Xác suất:

Ví dụ 1 Một hộp chứa 4 quả cầu màu đỏ, 5 quả cầu màu xanh và 7 quả cầu màu vàng. Lấy ngẫu nhiên cùng lúc ra 4 quả cầu từ hộp đó. Tính xác suất sao cho 4 quả cầu được lấy ra có đúng một quả cầu màu đỏ và không quá hai quả cầu màu vàng.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{16}^4 = 1820$.

Gọi B là biến cố "4 quả lấy được có đúng một quả cầu màu đỏ và không quá hai quả màu vàng". Ta xét ba khả năng sau:

- Số cách lấy 1 quả đỏ, 3 quả xanh là: $C_4^1C_5^3$
- Số cách lấy 1 quả đỏ, 2 quả xanh, 1 quả vàng là: $C_4^1C_5^2C_7^1$
- Số cách lấy 1 quả đỏ, 1 quả xanh, 2 quả vàng là: $C_4^1C_5^1C_7^2$.

Khi đó $|\Omega_B| = C_4^1C_5^3 + C_4^1C_7^1C_5^2 + C_4^1C_7^2C_5^1 = 740$.

Xác suất của biến cố B là: $P(B) = \dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \dfrac{740}{1820} = \dfrac{37}{91}$.

Ví dụ 2 Chọn ngẫu nhiên 5 con bài trong bộ tú lơ khơ. Tính xác suất sao cho trong 5 quân bài đó có đúng 3 quân bài thuộc 1 bộ (ví dụ 3 con K).

Lời giải

Số cách chọn 5 quân bài trong bộ bài tú lơ khơ là: $C_5^{52} = 2598960$

Số cách chọn 5 quân bài trong bộ bài tú lơ khơ mà trong 5 quân bài đó có đúng 3 quân bài thuộc 1 bộ là: $13.C_3^4 = 52$

Xác suất để chọn 5 quân bài trong bộ bài tú lơ khơ mà trong 5 quân bài đó có đúng 3 quân bài thuộc 1 bộ là: $\dfrac{52}{2598960} = \dfrac{13}{649740}$.

Ví dụ 3 Cho E là tập các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số: 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Lấy ngẫu nhiên một số trong E. Tính xác suất để lấy được số chia hết cho 5.

Lời giải

Giả sử $\overline{abcde} \in E \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow$ *có 7 cách chọn a;*

Chọn $\overline{bcde}$ *có* $A_7{}^4 \Rightarrow n(E) = 7\ A_7{}^4 = 5880$

$\Rightarrow n(\Omega) = 5880;\ \overline{abcde} \in E$ *và* $\overline{abcde} \vdots 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e = 5 \\ e = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$ *Trong E có:* $A_7{}^4 + 6A^3{}_6 = 1560$

Số chia hết cho 5. Gọi A là biến cố chọn được số chia hết cho 5 thì n(A)=1560

$P(A) = \dfrac{1560}{5880} = \dfrac{13}{49}$

Ví dụ 4 Cho tập $E = \{1,2,3,4,5\}$. Viết ngẫu nhiên lên bảng hai số tự nhiên, mỗi số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập E. Tính xác suất để trong hai số đó có đúng một số có chữ số 5?

Lời giải

Số các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập E là: $5.4.3 = 60$

Trong đó số các số không có mặt chữ số 5 là 4.3.2 = 24, và số các số có mặt chữ số 5 là $60 - 24 = 36$.

Gọi A là biến cố "hai số được viết lên bảng đều có mặt chữ số 5", B là biến cố "hai số viết lên bảng đều không có mặt chữ số 5". Rõ ràng A, B xung khắc. Do đó áp dụng qui tắc cộng xác suất ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{C_{36}^1C_{36}^1}{C_{60}^1C_{60}^1} + \frac{C_{24}^1C_{24}^1}{C_{60}^1C_{60}^1} = \frac{13}{25}.$$

Suy ra xác suất để trong hai số đó có đúng một số có chữ số 5 là $P = 1 - P(A \cup B) = 1 - \dfrac{13}{25} = \dfrac{12}{25}$.

Ví dụ 5 Trong một kì thi. Thí sinh được phép thi 3 lần. Xác suất lần đầu vượt qua kì thi là 0,9. Nếu trượt lần đầu thì xác suất vượt qua kì thi lần hai là 0,7. Nếu trượt cả hai lần thì xác suất vượt qua kì thi ở lần thứ ba là 0,3. Tính xác suất để thí sinh thi đậu.

Lời giải

Gọi A_i là biến cố thí sinh thi đậu lần thứ i (i = 1;2;3). Gọi B là biến cố để thí sinh thi đậu.

Ta có: $B = A_1 \cup (\overline{A}_1A_2) \cup (\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$

Suy ra: $P(B) = P(A_1) + P(\overline{A}_1A_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$

Trong đó: $\begin{cases} P(A_1) = 0,9 \\ P(\overline{A}_1A_2) = P(\overline{A}_1).P(A_2/\overline{A}_1) = 0,1.0,7 \\ P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = P(\overline{A}_1).P(\overline{A}_2/\overline{A}_1).P(A_3/\overline{A}_1\overline{A}_2) = 0,1.0,3.0,3 \end{cases}$

Vậy: $P(B) = 0,9 + 0,1.0,7 + 0,1.0,3.0,3 = 0,979$

Phần III: BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài tập 1.

Một tổ có 5 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để làm trực nhật. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

A. $\frac{9}{11}$ B. $\frac{12}{11}$ C. $\frac{59}{11}$ D. $\frac{39}{11}$

Lời giải

$n(\Omega) = C_{11}^3 = 165$

Số cách chọn 3 học sinh có cả nam và nữ là $C_5^2.C_6^1 + C_5^1.C_6^2 = 135$

Do đó xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ là $\frac{135}{165} = \frac{9}{11}$

Chọn đáp án A.

Bài tập 2.

Một trường trung học phổ thông tổ Toán có 15 giáo viên trong đó có 8 giáo viên nam, 7 giáo viên nữ; tổ Lý gồm 12 giáo viên trong đó có 5 giáo viên nam, 7 giáo viên nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ 2 giáo viên đi dự tập huấn chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi. Tính xác suất sao cho trong các giáo viên được chọn có 2 nam và 2 nữ?

A. $\frac{297}{495}$ B. $\frac{197}{495}$ C. $\frac{297}{475}$ D. $\frac{197}{475}$

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{15}^2.C_{12}^2$

Gọi A là biến cố: "4 giáo viên được chọn có 2 nam và 2 nữ"

$n(A) = C_8^2.C_7^2 + C_7^2.C_5^2 + C_8^1.C_5^1.C_7^1.C_7^1$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{197}{495}$

Chọn đáp án B.

Bài tập 3.

Trong một bình có 2 viên bi trắng và 8 viên bi đen. Người ta bốc 2 viên bi bỏ ra ngoài rồi bốc tiếp một viên bi thứ ba. Tính xác suất để viên bi thứ ba là bi trắng

A. 0,012 **B.** 0,0146 **C.** 0,2 **D.** 0,002

Lời giải

A là biến cố: "lần đầu lấy 2 viên bi đen, lần sau lấy 1 viên bi trắng". $P(A) = \frac{7}{45}$

B là biến cố: "lần đầu lấy 1 viên bi đen, 1 viên bi trắng và lần sau lấy 1 viên bi trắng". $P(B) = \frac{2}{45}$.

C là biến cố " viên bi thứ ba là bi trắng". $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5} = 0,2$

Chọn đáp án C.

Bài tập 4.

Trường trung học phổ thông Việt Trì có 30 lớp trong đó có 10 lớp 10, 10 lớp 11 và 10 lớp 12, mỗi chi đoàn (lớp) có một em làm bí thư. Ban chấp hành Đoàn trường muốn chọn 5 em bí thư đi thi cán bộ đoàn giỏi. Tìm xác suất để 5 em được chọn có đủ cả ba khối lớp

A. $\frac{4975}{15834}$ **B.** $\frac{4675}{15834}$ **C.** $\frac{4975}{1584}$ **D.** $\frac{4975}{15804}$

Lời giải

Chọn 5 em không gian mẫu của phép thử là : $|\Omega| = C_{30}^5 = 142506$

Gọi A là biến cố chọn 5 em bí thư có đủ các khối lớp:

$|\Omega_A| = C_{10}^3.C_{10}^3.C_{10}^1.3 + C_{10}^2.C_{10}^2.C_{10}^1.3 = 42075$

Xác suất cần tính là: $P(A) = \frac{40275}{142506} = \frac{4675}{15834}$

Chọn đáp án B.

Bài tập 5.

Trong một đợt kiểm tra về vệ sinh an toàn thực phẩm của ngành y tế tại chợ X, ban quản lý chợ lấy ra 15 mẫu thịt lợn trong đó có 4 mẫu ở quầy A, 5 mẫu ở quầy B và 6 mẫu ở quầy C. Mỗi mẫu thịt này có khối lượng như nhau và để trong các hộp kín có kích thước giống hệt nhau. Đoàn kiểm tra lấy ra ngẫu nhiên ba hộp để phân tích, kiểm tra xem trong thịt lợn có chứa hóa chất "Super tạo nạc" (Clenbuterol) hay không. Tính xác suất để 3 hộp lấy ra có đủ ba loại thịt ở các quầy A, B, C?

A. $\frac{154}{191}$ **B.** $\frac{154}{91}$ **C.** $\frac{54}{91}$ **D.** $\frac{24}{91}$

Lời giải

Không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả các tập con gồm 3 phần tử của tập hợp các hộp đựng thịt gồm có $4+5+6=15$ phần tử, do đó: $n(\Omega)=C_{15}^{3}=\frac{15!}{12!.3!}=455.$

Gọi D là biến cố "Chọn được một mẫu thịt ở quầy A, một mẫu thịt ở quầy B, một mẫu thịt ở quầy C".

Tính $n(D)$

Có 4 khả năng chọn được một hộp thịt ở quầy A.

Có 5 khả năng chọn được một hộp thịt ở quầy B.

Có 6 khả năng chọn được một hộp thịt ở quầy C.

Suy ra, có $4.5.6=120$ khả năng chọn được 3 hộp đủ loại thịt ở các quầy A, B, C $\Rightarrow n(D)=120.$

Do đó: $\frac{154}{191}$

Chọn đáp án D.

Bài tập 6.

Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp $12A$, 3 học sinh lớp $12B$ và 2 học sinh lớp $12C$. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng năm học. Tính xác suất sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất 2 học sinh lớp $12A$.

A. $\frac{25}{26}$ **B.** $\frac{13}{21}$ **C.** $\frac{21}{13}$ **D.** $\frac{19}{13}$

Lời giải

Gọi không gian mẫu của phép chọn ngẫu nhiên là Ω

Số phần tử của không gian mẫu là: $C_9^5=126$

Gọi A là biến cố "Chọn 5 học sinh từ đội văn nghệ sao cho có học sinh ở cả ba lớp và có ít nhất 2 học sinh lớp 12A".

Chỉ có 3 khả năng xảy ra thuận lợi cho biến cố A là :

+ 2 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 2 học sinh lớp 12C

+ 2 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 2 học sinh lớp 12C

+ 3 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 1 học sinh lớp 12C

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $C_4^2.C_3^1.C_2^2 + C_4^2.C_3^2.C_2^1 + C_4^3.C_3^1.C_2^1 = 78$.

Xác suất cần tìm là $P = \frac{78}{126} = \frac{13}{21}$.

Chọn đáp án B.

Bài tập 7.

Trong đợt thi thử đại học lần 1 năm học 2015 – 2016 do Đoàn trường THPT Thuận Châu tổ chức có 5 em điểm cao nhất và bằng nhau khối A trong đó có 3 nam và 2 nữ, khối B có 5 em điểm cao nhất và bằng nhau trong đó có 1 nam và 4 nữ, khối C có 5 em điểm cao nhất và bằng nhau trong đó có 4 nam và 1 nữ, khối D có 5 em điểm cao nhất và bằng nhau trong đó có 2 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn mỗi khối một em để khen thưởng? Tính xác suất để có cả học sinh nam và học sinh nữ được khen thưởng?

A. 0,922 **B.** 0,8462 **C.** 0,9832 **D.** 0,9232

Lời giải

Khối A : 3 nam và 2 nữ

Khối B: 1 nam và 4 nữ

Khối C: 4 nam và 1 nữ

Khối D: 2 nam và 3 nữ

Số cách chọn mỗi khối thi 1 học sinh để khen thưởng là: n(Ω)=5.5.5.5=625

Gọi A là biến cố: "Có cả học sinh nam và học sinh nữ để khen thưởng"

Suy ra là biến cố: "Cả 4 học sinh được khen thưởng đều là nam hoặc đều là nữ".

$n(\bar{A}) = 3.1.4.2 + 2.4.3.1 = 48$

Số cách cách chọn mỗi khối 1 em để khen thưởng trong đó có cả nam và nữ là cách.

Xác suất để có cả học sinh nam và học sinh nữ được khen thưởng là:

$$P(A) = \frac{577}{625} = 0,9232$$

Chọn đáp án D.

Bài tập 8.

Một lớp học có 28 học sinh trong đó có 15 học sinh nam và 13 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh tham gia Hội trại chào mừng ngày thành lập đoàn 26/3. Tính xác suất để trong 5 học sinh được chọn có ít nhất 3 học sinh nam.

A. $\frac{103}{180}$ **B.** $\frac{130}{180}$ **C.** $\frac{172}{180}$ **D.** $\frac{127}{180}$

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ 28 học sinh của lớp, số cách chọn: $|\Omega| = C_{28}^5$

A là biến cố: Có ít nhất 3 học sinh nam.

Có ba khả năng:

Số cách chọn 3 nam và 2 nữ: $C_{15}^3.C_{13}^2$

Số cách chọn 4 nam và 1 nữ: $C_{15}^4.C_{13}^1$

Số cách chọn cả 5 học sinh nam: C_{15}^5

$$P(A) = \frac{C_{15}^3.C_{13}^2 + C_{15}^4.C_{13}^1 + C_{15}^5}{C_{28}^5} = \frac{103}{180}$$

Chọn đáp án A.

Bài tập 9.

Một người gọi điện thoại, quên hai chữ số cuối và chỉ nhớ rằng hai chữ số đó phân biệt. Tính xác suất để người đó gọi một lần đúng số cần gọi?

A. $\frac{83}{90}$ **B.** $\frac{1}{90}$ **C.** $\frac{13}{90}$ **D.** $\frac{83}{90}$

Lời giải

Hai chữ số cuối phân biệt nên gọi Ω là tập hợp tất cả các cách chọn 2 số phân biệt trong 10 chữ số $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ta có được $|\Omega| = A_{10}^2 = 90$

+ Gọi A là biến cố "Gọi 1 lần đúng số cần gọi", ta có $|\Omega_A| = 1$. Vậy xác suất cần tìm là $\frac{53}{90}$

Chọn đáp án B.

Bài tập 10.

Trong kì thi THPT quốc gia, tại hội đồng thi X, trường THPT A có 5 thí sinh dự thi. Tính xác suất để có đúng 3 thí sinh của trường THPT A được xếp vào cùng một phòng thi, biết rằng hội đồng thi X gồm 10 phòng thi, mỗi phòng thi có nhiều hơn 5 thí sinh và việc xếp các thí sinh vào các phòng thi là hoàn toàn ngẫu nhiên?

A. $\frac{81}{1000}$ **B.** $\frac{91}{1000}$ **C.** $\frac{123}{1000}$ **D.** $\frac{123}{1000}$

Lời giải

Số cách xếp ngẫu nhiên 5 thí sinh vào 10 phòng thi là $|\Omega| = 10^5 = 100000$

Gọi B là biến cố đã cho

Có C_5^3 cách chọn 3 thí sinh trong số 5 thí sinh của trường A và có 10 cách chọn phòng thi cho 3 thí sinh đó.

Ứng với mỗi cách chọn trên ta có 9.9 cách chọn phòng thi cho 2 thí sinh còn lại.

Do đó số cách xếp 5 thí sinh thỏa mãn điều kiện đề bài là $|\Omega_B| = C_5^3.10.9.9 = 8100$.

Xác suất cần tìm là: $P(B) = \dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \dfrac{8100}{100000} = \dfrac{81}{1000}$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 11.

Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 5 học sinh khối 10. Chọn ra 6 học sinh. Tính xác suất để 6 học sinh được chọn sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh.

A. 803 **B.** 805 **C.** 804 **D.** 807

Lời giải

Tổng số cách chọn 6 học sinh trong 12 học sinh là C_{12}^6

Số học sinh được chọn phải thuộc ít nhất 2 khối

- Số cách chọn chỉ có học sinh khối 12 và khối 11 là: C_7^6
- Số cách chọn chỉ có học sinh khối 11 và khối 10 là: C_9^6
- Số cách chọn chỉ có học sinh khối 12 và khối 10 là: C_8^6

Số cách chọn thoả mãn đề bài là: $C_{12}^6 - C_7^6 - C_9^6 - C_8^6 = 805$ (cách)

Chọn Đáp án B.

Bài tập 12.

Có 2 hộp bi, hộp thứ nhất có 4 bi đỏ và 3 bi trắng, hộp thứ hai có 2 bi đỏ và 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp 1 viên, tính xác suất để 2 bi lấy được cùng màu?

A. $\dfrac{10}{21}$ **B.** $\dfrac{11}{21}$ **C.** $\dfrac{17}{21}$ **D.** $\dfrac{9}{21}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu: tập hợp các cách chọn ngẫu nhiên mỗi hộp 1 viên bi

$\Rightarrow n(\Omega) = 7.6 = 42$

Gọi A là biến cố 2 bi được chọn cùng màu

$\Rightarrow n(A) = 4.2 + 3.4 = 20$

Vậy xác suất của biến cố A là P(A)= $\frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

Chọn đáp án A.

Bài tập 13.

Một lớp có 20 học sinh, trong đó có 12 học sinh nam và 8 học sinh nữ. Giáo viên dạy môn Toán chọn ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng làm bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được chọn có ít nhất 2 học sinh nữ.

A. $\frac{378}{969}$ **B.** $\frac{518}{969}$ **C.** $\frac{368}{969}$ **D.** $\frac{928}{969}$

Lời giải

Chọn 4 học sinh bất kì có $C_{20}^4 \Rightarrow n(\Omega) = C_{20}^4 = 4845$

Gọi A: "4 học sinh được chọn có ít nhất 2 nữ"

Suy ra n(A) = $C_8^2.C_{12}^2 + C_8^3.C_{12}^1 + C_8^4 = 2590$

Vậy P(A) = $\frac{378}{969}$

Chọn đáp án B.

Bài tập 14.

Một hộp có 9 thẻ giống nhau được đánh số liên tiếp từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ (không kể thứ tự) rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn?

A. $\frac{11}{18}$ **B.** $\frac{7}{18}$ **C.** $\frac{13}{18}$ **D.** $\frac{5}{18}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là: $C_9^2 = 36$

Gọi A là biến cố: "kết quả nhận được là số chẵn"

Số kết quả thuận lợi cho A là:

$C_5^1.C_4^1 + C_4^2 = 26$

Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$

Chọn đáp án C.

Bài tập 15.

Cho đa giác đều 12 đỉnh, trong đó có 7 đỉnh tô màu đỏ và 5 đỉnh tô màu xanh. Chọn ngẫu nhiên một tam giác có các đỉnh là 3 trong 12 đỉnh của đa giác. Tính xác suất để tam giác được chọn có 3 đỉnh cùng màu?

A. $\frac{9}{44}$ **B.** $\frac{19}{44}$ **C.** $\frac{39}{44}$ **D.** $\frac{41}{44}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = C_{12}^3 = 220$

Gọi A là biến cố chọn được tam giác có 3 đỉnh cùng màu. Số kết quả thuận lợi cho A là: $|\Omega_A| = C_7^3 + C_5^3$. Xác suất biến cố A là $\frac{41}{44}$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 16.

Một ngân hàng để thi gồm 20 câu hỏi. Mỗi để thi gồm 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ 20 câu hỏi trên. Thí sinh A đã học thuộc 10 câu trong ngân hàng để thi. Tìm xác suất để thí sinh A rút ngẫu nhiên được 1 để thi có ít nhất 2 câu đã thuộc.

A. $\frac{312}{323}$ **B.** $\frac{136}{323}$ **C.** $\frac{219}{323}$ **D.** $\frac{229}{323}$

Lời giải

Lấy ngẫu nhiên từ ngân hàng để thi 4 câu hỏi để lập một để thi có $C_{20}^4 = 4845$ để thi.

Thí sinh A rút ngẫu nhiên được 1 để thi có 2 câu đã thuộc, có $C_{10}^2.C_{10}^2 = 2025$ trường hợp.

Thí sinh A rút ngẫu nhiên được 1 để thi có 3 câu đã thuộc, có $C_{10}^3.C_{10}^1 = 1200$ trường hợp.

Thí sinh A rút ngẫu nhiên được 1 để thi có 4 câu đã thuộc, có $C_{10}^4 = 210$ trường hợp.

Do đó, thí sinh A rút ngẫu nhiên được 1 để thi có ít nhất 2 câu đã thuộc, có:

$2025 + 1200 + 210 = 3435$ trường hợp

Vậy xác suất để thí sinh A rút ngẫu nhiên được 1 để thi có ít nhất 2 câu đã thuộc là 2160.

Chọn đáp án D.

Bài tập 17.

Đội dự tuyển học sinh giỏi giải toán trên máy tính cầm tay môn toán của một trường phổ thông có 4 học sinh nam khối 12, 2 học sinh nữ khối 12 và 2 học sinh nam khối 11. Để thành lập đội tuyển dự thi học sinh giỏi giải toán trên máy tính cầm tay môn toán cấp tỉnh nhà trường cần chọn 5 em từ 8 em học sinh trên. Tính xác suất để trong 5 em được Chọn Có cả học sinh nam và học sinh nữ, có cả học sinh khối 11 và học sinh khối 12.

A. $\frac{21}{44}$ **B.** $\frac{30}{44}$ **C.** $\frac{11}{44}$ **D.** $\frac{40}{44}$

Lời giải

b)– Số cách chọn 5 em học sinh từ 8 học sinh trên là $C_8^5 = 56$ cách

– Để chọn 5 em thỏa mãn bài ra, ta xét các trường hợp sau

+) 1 nam khối 11, 1 nữ khối 12 và 3 nam khối 12 có: $C_2^1C_2^1C_4^3$ cách

+) 1 nam khối 11, 2 nữ khối 12 và 2 nam khối 12 có: $C_2^1C_2^2C_4^2$ cách

+) 2 nam khối 11, 1 nữ khối 12 và 2 nam khối 12 có: $C_2^2C_2^1C_4^2$ cách

+) 2 nam khối 11, 2 nữ khối 12 và 1 nam khối 12 có: $C_2^2C_2^2C_4^1$ cách

Số cách chọn 5 em thỏa mãn bài ra là:

$C_2^1C_2^1C_4^3 + C_2^1C_2^2C_4^2 + C_2^2C_2^1C_4^2 + C_2^2C_2^2C_4^1 = 44$ cách

– Vậy xác suất cần tính là: $\frac{44}{56} = \frac{11}{14}$

Chọn đáp án C.

Bài tập 18.

Gọi A là tập hợp các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp *A*. Tính xác suất để số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ?

A. $\frac{10}{21}$ **B.** $\frac{19}{21}$ **C.** $\frac{9}{21}$ **D.** $\frac{11}{21}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử: "Chọn ngẫu nhiên một số từ tập X".

Khi đó: $|\Omega| = A_9^6 = 60480$

Gọi A là biến cố: "Số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ". Khi đó:

+ Chọn 3 chữ số lẻ đôi một khác nhau từ các chữ số $1, 3, 5, 7, 9$ có C_5^3 cách.

+ Chọn 3 chữ số chẵn đội một khác nhau từ các chữ số $2, 4, 6, 8$ có C_4^3 cách.

+ Sắp xếp các chữ số trên để được số thỏa mãn biến cố A có $6!$ cách.

Do đó $|\Omega_A| = C_5^3.C_4^3.6! = 28800$

Vậy xác suất cần tìm là:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{28800}{60480} = \frac{10}{21}$$

Chọn đáp án A.

Bài tập 19.

Có 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ, xếp 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ thành một hàng ngang một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất để không có 3 học sinh nữ nào đứng cạnh nhau?

A. $\frac{15}{28}$ **B.** $\frac{23}{28}$ **C.** $\frac{3}{28}$ **D.** $\frac{13}{28}$

Lời giải

Gọi B là biến cố "không có hai học sinh nữ nào đứng cạnh nhau".

Khi đó $n(\Omega)=8!;n(B)=3!.6!\Rightarrow P(\overline{B})=\frac{3}{28}$.

Chọn đáp án C.

Bài tập 20.

Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số 1, 2, 3, ..., 9. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ và nhân 3 số ghi trên ba thẻ với nhau. Tính xác suất để tích nhận được là một số lẻ?

A. $\frac{5}{42}$ **B.** $\frac{15}{42}$ **C.** $\frac{25}{42}$ **D.** $\frac{39}{42}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_9^3 = 84$

Số cách chọn 3 thẻ có tích là số lẻ là $n(A) = C_5^3 = 10$

Suy ra xác suất cần tính là $P(A) = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$

Chọn đáp án A.

Bài tập 21.

Trong kỳ thi THPT quốc gia, mỗi thí sinh phải chọn thi ít nhất 4 môn trong 8 môn: Toán, Lý, Hóa, sinh, Anh, Văn, Sử, Địa. Hỏi một thí sinh có bao nhiêu phương án lựa chọn? Biết rằng trong các môn lựa chọn, bắt buộc phải có đủ ba môn Toán, Văn, Anh.

A. 31 **B.** 45 **C.** 24 **D.** 17

Lời giải

$C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=31$

Chọn đáp án A.

Bài tập 22.

Đội tuyểnhọc sinh giỏi môn Toán khối 10 trường THPT Đồng Xoài có 6 học sinh, trong đó có 2 nữ và 4 nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh tham dự kì thi Olympic cấp tỉnh. Tính xác suất để chọn được 3 học sinh trong đó có cả nam và nữ?

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D $\frac{2}{5}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=C_6^3=20$

+ Gọi A là biến cố " chọn được 3 HS có cả nam và nữ" thì $n(A)=C_4^1C_2^2+C_4^2C_2^1=16$

+ Vậy xác suất là $P(A)=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$

Chọn đáp án B.

Bài tập 23.

Trong một thùng có chứa 7 đèn màu xanh khác nhau và 8 đèn đỏ khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 3 đèn mắc vào 3 chuôi mắc nối tiếp nhau. Tính xác suất A: "mắc được đúng 2 đèn xanh"?

A. $\frac{24}{65}$ B. $\frac{44}{65}$ C. $\frac{34}{65}$ D. $\frac{39}{65}$

Lời giải

Ta có: $n(\Omega)=C_{15}^3\ n(A)=C_7^2.C_8^1\Rightarrow P(A)=\frac{24}{65}$

Chọn đáp án A.

Bài tập 24.

Một công ty có 10 mẫu sản phẩm khác nhau đôi một cần được kiểm tra, trong đó có 3 mẫu thuộc cùng lô thứa nhất, 3 mẫu thuộc cùng lô thứ hai và 4 mẫu thuộc cùng lô thứ ba. Chọn ngẫu nhiên 5 mẫu trong 10 mẫu để kiểm tra. Tính xác suất để trong 5 mẫu được lấy ra có 2 mẫu thuộc lô thứ nhất và 3 mẫu thuộc lô thứ ba?

A. $\frac{15}{21}$ B. $\frac{13}{21}$ C. $\frac{11}{21}$ D. $\frac{1}{21}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu Ω là $n(\Omega)=C_{10}^5=252$

Gọi A là biến cố trong 5 mẫu được chọn có 2 mẫu thuộc lô thứ nhất và 3 mẫu thuộc lô thứ ba.

Số phần tử của A là $n(A)=C_3^2.C_4^3=12$

Suy ra xác suất của biến cố A là: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{12}{252}=\frac{1}{21}$

Chọn đáp án D.

Bài tập 25.

Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và số đó chia hết cho 3?

A. 2148 B. 2467 C. 2160 D. 2467

Lời giải

Số có 5 chữ số cần lập là $\overline{abcde}$ ($a \neq 0$; $a, b, c, d, e \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$)

$\overline{abcde} \,\vdots\, 3 \Leftrightarrow (a+b+c+d+e) \,\vdots\, 3$

– Nếu $(a+b+c+d) \,\vdots\, 3$ thì chọn $e = 0$ hoặc $e = 3$

– Nếu $(a+b+c+d)$ chia 3 dư 1 thì chọn $e = 2$ hoặc $e = 5$

– Nếu $(a+b+c+d)$ chia 3 dư 2 thì chọn $e = 1$ hoặc $e = 4$

Như vậy với mỗi số $\overline{abcd}$ đều có 2 cách chọn e để được một số có 5 chữ số chia hết cho 3.

Số các số dạng $\overline{abcd}$ lập được từ tập A là: 5.6.6.6= 1080 số

Số các số cần tìm là 2 x 1080 = 2160 số

Chọn đáp án C.

Bài tập 26.

Một lớp học có 27 học sinh nữ và 21 học sinh nam. Cô giáo chọn ra 5 học sinh để lập một tốp ca chào mừng 20-11. Tính xác suất để trong tốp ca đó có ít nhất một học sinh nữ?

A. $\frac{1691955}{1712304}$ B. $\frac{1871955}{1712304}$ C. $\frac{1878755}{1712304}$ D. $\frac{1854755}{1712304}$

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong số 48 học sinh ta có số phần tử của không gian mẫu $n(\omega) = C_{48}^5 = 1712304$

Gọi A là biến cố " chọn 5 học sinh trong đó có ít nhất một học sinh nữ" thì $\overline{A}$ là biến cố " chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh nữ ".

Ta có số kết quả thuận lợi cho $\overline{A}$ là:

$$n(\overline{A}) = C_{21}^5 = 20349 \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(\omega)} = \frac{20349}{1712304}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{20349}{1712304} = \frac{1691955}{1712304}$$

Vậy chọn đáp án A.

Bài tập 27.

Hội đồng coi thi THPT Quốc gia gồm có 30 cán bộ coi thi đến từ ba trường THPT, trong đó có 12 giáo viên trường A, 10 giáo viên trường B, 8 giáo viên trường C. Chủ tịch Hội đồng coi thi chọn 2 cán bộ coi thi chứng kiến niêm phong gói đựng bì đề thi. Tính xác suất để 2 cán bộ coi thi được chọn là giáo viên của hai trường THPT khác nhau?

A. $\frac{15}{435}$ **B.** $\frac{156}{435}$ **C.** $\frac{296}{435}$ **D.** $\frac{196}{435}$

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Chọn 2 cán bộ coi thi là giáo viên của hai trường THPT khác nhau".

Số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = C_{20}^2 = 435$

$|A| = C_{12}^1 C_{10}^1 + C_{12}^1 C_8^1 + C_{10}^1 C_8^1 = 296$.

Vậy xác suất để 2 cán bộ coi thi ở hai trường THPT khác nhau là: $\frac{43}{55}$.

Chọn đáp án C.

Bài tập 28.

Giải bóng chuyền *VTV* Cup gồm 12 đội bóng tham dự, trong đó có 9 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 3 bảng *A*, *B*, *C* mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau?

A. 0,18 **B.** 0,11 **C.** 0,21 **D.** 0,31

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{12}^4.C_8^4.C_4^4 = 34.650$

Gọi *A* là biến cố "3 đội bong của Việt Nam ở ba bảng khác nhau"

Số các kết quả thuận lợi của *A* là $n(A) = 3C_9^3.2C_6^3.1.C_3^3 = 1080$

Xác suất của biến cố *A* là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega} = \frac{1080}{34650} = \frac{54}{173} \simeq 0,31$

Chọn đáp án D.

Bài tập 29.

Để chuẩn bị tiêm phòng dịch Sởi - Rubella cho học sinh khối 11 và khối 12. Bệnh viện tỉnh Nghệ An điều động 12 bác sĩ đến trường THPT Anh Sơn 2 để tiêm phòng dịch gồm 9 bác sĩ nam và 3 bác sĩ nữ. Ban chỉ đạo chia 12 bác sĩ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 bác sĩ làm 3 công việc khác nhau. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 bác sĩ nữ?

A. $\frac{43}{55}$ **B.** $\frac{28}{55}$ **C.** $\frac{16}{55}$ **D.** $\frac{36}{55}$

Lời giải

Số cách chọn 3 nhóm , mỗi nhóm gồm 4 bác sỹ làm 3 công việc khác nhau là:

+ Trong 12 người chọn 4 người có C_{12}^4

+ Trong 8 người còn lại chọn 4 người tiếp có C_8^4

+ Trong 4 người sau cùng chọn 4 người có C_4^4

Vậy không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{12}^4C_8^4C_4^4$

Gọi A là biến cố : "Chọn 3 nhóm, mỗi nhóm có 4 bác sỹ trong đó có đúng 1 bác sỹ nữ"

+ Chọn 1 bác sỹ nữ trong 3 bác sỹ nữ có 3 cách chọn, sau đó chọn 3 bác sỹ nam trong 9 bác sỹ nam $C_9^3 \Rightarrow 3.C_9^3$ cách chọn

+ Còn lại 8 bác sỹ (6 bác sỹ nam và 2 bác sỹ nữ). Chọn 1 nữ trong 2 nữ có 2 cách chọn, rồi chọn 3 nam trong 6 bác sỹ nam có $C_6^3 \Rightarrow 2.C_6^3$ cách chọn

+ Cuối cùng còn lại 1 bác sỹ nữa và 3 bác sỹ nam có 1 cách chọn.

Suy ra $n(A)=3C_9^3.2C_6^3.1$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{3C_9^3.2C_6^3.1}{C_{12}^4C_8^4C_4^4}=\dfrac{16}{55}$

Chọn đáp án C.

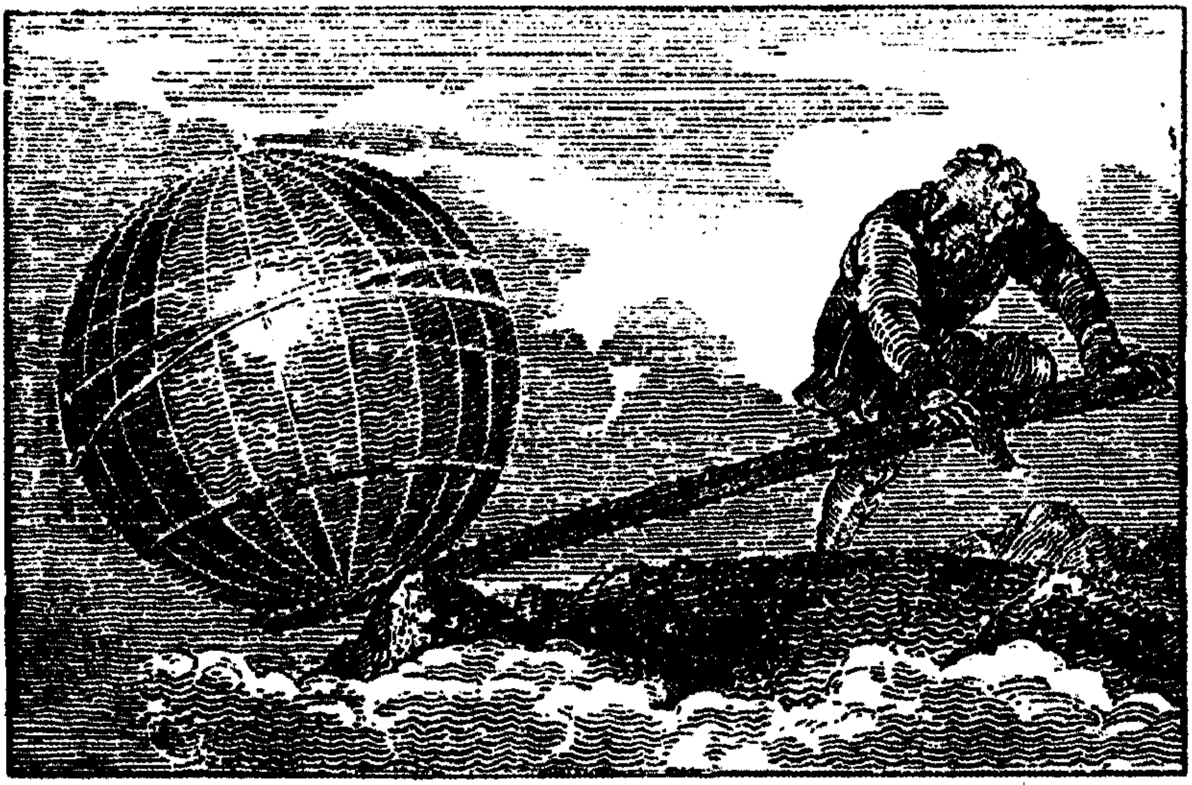
Archimedes (287-212 BC)

Archimedes (chúng ta hay gọi là Acsimet) là nhà toán học, vật lý học, thiên văn học, kỹ thuật học người Hy Lạp. Các công trình toán học của ông bao trùm khắp mọi lĩnh vực toán học đương thời : hình học, số học, đại số.

Các thành tựu toán học khác bao gồm việc suy ra một phép xấp xỉ tương đối chính xác số pi, định nghĩa một dạng đường xoáy ốc mang tên ông, và tạo ra một hệ sử dụng phép lũy thừa để biểu thị những số lớn. Ông cũng là một trong những người đầu tiên áp dụng toán học vào các bài toán vật lý, lập nên các ngành thủy tĩnh học và tĩnh học, bao gồm lời giải thích cho nguyên lý của đòn bẩy. Câu nói nổi tiếng của ông "Hãy cho ta một điểm tựa, ta sẽ bẩy tung cả trái đất này lên" vẫn còn được nhắc đến tận bay giờ.

Ông cũng là người phát minh ra các thành tựu như ròng rọc phức tạp,bơm xoắn ốc, định luật Ac-si-met.

Archimedes được coi là một trong những nhà khoa học hàng đầu của thời kỳ cổ đại.



CHUYÊN ĐỀ 9. GIỚI HẠN, LIÊN TỤC

Bài 1: GIỚI HẠN DÃY SỐ

A KIẾN THỨC CƠ BẢN:

0. Dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân:

➢ Một hàm số u xác định trên tập số tự nhiên N^* được gọi là dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số) nếu: u là ánh xạ từ N^* vào R: $n \to u(n)$ (ứng với mỗi $n \in N^*$ thì có một giá trị $u(n) \in R$).

Đặt $u(n) = u_n$ và gọi nó là số hạng tổng quát của dãy số $(u)_n$.

➢ $(u)_n$ là cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in N^*$, d là hằng số.

➢ $(u)_n$ là cấp số nhân khi và chỉ khi $u_{n+1} = u_n.q$ với $n \in N^*$, q là hằng số.

1. Giới hạn hữu hạn.

$\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow |u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bất kỳ kể từ một số hạng nào đó trở đi.

$\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (v_n - a) = 0$

2. Giới hạn ra vô tận.

$\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow |u_n|$ có thể lớn hơn một số dương bất kỳ kể từ một số hạng nào đó trở đi.

$\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (-u_n) = +\infty$

3. Các giới hạn đặc biệt.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Nếu $|q|<1$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

$|q|>1$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} C = C (C = const)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty \left(k \in Z^+\right)$

4. Các định lý về giới hạn hữu hạn.

a/ Định lý 1:

Cho $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = a$, $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = b$ lúc này ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(u_n+v_n\right)=a+b$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(u_n-v_n\right)=a-b$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(u_nv_n\right)=ab$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{u_n}=\sqrt{a}\left(u_n\geq\forall n\in N^*\right)$

b/ Định lý 2:

3 dãy số $u_n, v_n; w_n$ thỏa mãn $u_n<v_n<w_n, \forall n\in N^*$ lúc này ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}=v_n=a\to\lim\limits_{x\to+\infty}w_n=a$

c/ Định lý 3:

Mọi dãy tăng, bị chặn trên đề có giới hạn.

Mọi dãy giảm, bị chặn dưới đều có giới hạn.

5. Định lý về giới hạn tiên tới vô cùng.

a/ Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=a,$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n=\pm\infty$ thì $\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}u_n}{\lim\limits_{x\to+\infty}v_n}=0$.

b/ Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n>a,$ $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n=0$ và $v_n>0\left(n\in N^*\right)$ thì $\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}u_n}{\lim\limits_{x\to+\infty}v_n}=+\infty$

c/ Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=+\infty,$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n=a>0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(u_n.v_n\right)=+\infty$

6. Cấp số nhân lùi vô hạn.

Cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có công bội thỏa |q|<1 gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Công thức tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn:

$S=u_1+u_2+....+u_n=\frac{u_1}{1-q}$

7. Số e: người ta chứng minh dược giới hạn sau đây tồn tại và kết quả của nó người ta kí hiệu là e: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2{,}718$

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1 Cho dãy số $\left(u_n\right)$ với $\left(u_n\right)=\frac{1}{2n}$, chọn $M=\frac{1}{100}$ để $\frac{1}{2n}<\frac{1}{100}$ thì phải từ số hạng thứ bao nhiêu trở đi?

A. Thứ 51 **B.** Thứ 49 **C.** Thứ 48 **D.** Thứ 50

Chọn A

Từ $\frac{1}{2n}<\frac{1}{100}\to 2n>100\to n>50$

Câu 2 Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{2n+1}$.Chọn $M = \frac{1}{1000}$ để $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{1000}$ thì phải từ số hạng thứ bao nhiêu trở đi?

A. Thứ 498 **B.** Thứ 499 **C.** Thứ 500 **D.** Thứ 501

Chọn C

Từ $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{1000} \to 2n+2 > 1000 \leftrightarrow n > 499$

Câu 3 Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{2^n}$, chọn M= $\frac{1}{2^{10}}$ để $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{10}}$ thì phải từ số hạng thứ bao nhiêu trở đi?

A. Thứ 2^{10} -1 **B.** Thứ 2^{10} **C.** Thứ $2^{10}+1$ **D.** Thứ $\frac{1}{2^{10}}+1$

Chọn C

Từ $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{10}} \leftrightarrow 2^n > 2^{10} \leftrightarrow n > 10$

Câu 4 Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2^n$, *cho* M= $\frac{1}{2^{10}}$ để $2^n < \frac{1}{10}$ thì phải từ số hạng thứ mấy trở đi?

A. Không có số hạng nào thỏa mãn

B. Thứ $\frac{1}{2^{10}+1}$

C. Thứ $\frac{1}{2^{10}}+1$

D. Thứ $2^{10}+1$

Chọn A

Vì $2^n > \frac{1}{2^{10}}$ nên với mọi số tự nhiên dương n thì không có n để $2^n > \frac{1}{2^{10}}$

Câu 5 Chọn mệnh đề đúng?

A. $lim 10^{-n} \# 0$ **B.** $lim\left(\frac{4}{3}\right)^n = 0$

C. $lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = lim\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ **D.** $lim\left(\frac{3}{2}\right)^n = 0$

Chọn C

Áp dụng giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} q^n = 0; |q| < 1$

Câu 6 Chọn kết quả đúng: $lim\frac{1+\sqrt{n}}{n}$?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** $+\infty$

Chọn B

Vì $lim\frac{1+n}{\sqrt{n}} = lim\frac{1}{\sqrt{n}} + lim\sqrt{n} = 0$

Câu 7 Chọn kết quả đúng: $lim\frac{1+n}{\sqrt{n}}$?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** $+\infty$

Chọn B

Vì $lim\frac{1+\sqrt{n}}{n}=lim\frac{1}{n}+lim\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

Câu 8 Chọn kết quả đúng: $lim\frac{3^n+2^n}{4^n}$?

A. 0 **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $+\infty$ **D.** $\frac{3}{4}$

Chọn A

Vì $lim\frac{3^n+2^n}{4^n}=lim\left(\frac{3}{4}\right)^n+lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

Câu 9 Chọn kết quả đúng: $lim\frac{-n^2+2n-3}{n^2}$?

A. 1 **B.** $-\infty$ **C.** -1 **D.** 0

Chọn C

$$lim\frac{-n^2+2n-3}{n^2}=lim(-1)+lim\frac{2}{n}+lim\left(\frac{-3}{n^2}\right)=-1$$

Câu 10 Chọn kết quả đúng: $lim\frac{\frac{1}{3}\sqrt{n}+2n}{3n}$?

A. $-\frac{1}{9}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $-\infty$ **D.** kết quả khác

Chọn B

$$lim\frac{-\frac{1}{3}\sqrt{n}+2n}{3n}=lim\frac{-1}{9\sqrt{n}}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

Câu 11 Chọn kết quả đúng: $lim\frac{1-3n^2}{4-n^2}$?

A. -3 **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** - $\frac{1}{4}$ **D.** 3

Chọn D

$$lim\frac{1-3n^2}{4-n^2}=lim\frac{\frac{1}{n^2}-3}{\frac{4}{n^2}-1}=3$$

Câu 12 Chọn kết quả đúng: $lim\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$?

A. Không có giới hạn khi $n\to+\infty$ **B.** -1

C. 0 **D.** Một kết quả khác

Chọn C

$$lim\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)=lim\frac{n-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=lim\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0$$

Câu 13 Chọn mệnh đề đúng?

A. $lim\,sin\frac{\pi}{n}=0$ **B.** $lim\,sin\frac{\pi}{n}=-1$

C. $lim\,sin\frac{\pi}{n}=0$ **D.** Không có giới hạn khi $n\to+\infty$

Chọn C

$lim\frac{\pi}{n}=0,$ suy ra $lim\,sin\frac{\pi}{n}=sin\left(lim\frac{\pi}{n}\right)=sin0=0$

Câu 14 Chọn mệnh đề đúng?

A. $lim\frac{sin\frac{\pi}{n}}{n}$ không có giới hạn khi $n\to+\infty$ **B.** $lim\frac{sin\frac{\pi}{n}}{n}=1$

C. $lim\frac{sin\frac{\pi}{n}}{n}=0$ **D.** cả 3 kết quả đều sai

Chọn C

Câu 15 Chọn mệnh đề đúng?

A. $lim\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{12}$ **B.** $lim\left[\left(\frac{7}{3}\right)^n+sin\frac{1}{n}\right]=+\infty$

C. $lim\left[\left(\frac{7}{3}\right)^n+3^n\right]=0$ **D.** tất cả đều sai

Chọn B

$$lim\left[\left(\frac{7}{3}\right)^n+3^n\right]=lim\left(\frac{7}{3}\right)^n+lim3^n=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$$

Câu 16 Chọn đáp án đúng: $lim\sqrt{\frac{3n-5}{n^2}}$?

A. 0 **B.** 3 **C.** $+\infty$ **D.** $\sqrt{3}$

Chọn A

$$lim\sqrt{\frac{3n-5}{n^2}}=\sqrt{lim\frac{3}{n}-lim\frac{5}{n^2}}=\sqrt{0}=0$$

Câu 17 Chọn kết quả đúng?

A. $lim\sqrt{\frac{2n-7}{n}}=+\infty$ **B.** $lim\sqrt{\frac{2}{n}}=\sqrt{2}$ **C.** $lim\sqrt{\frac{2n^2}{n+1}}=\sqrt{2}$ **D.** $lim\sqrt{\frac{n-7}{2n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Chọn D.

$$lim\sqrt{\frac{n-7}{2n}}=lim\sqrt{lim\frac{1}{2}-lim\frac{7}{2n}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 18 Chọn mệnh đề đúng?

A. $\lim\cos\frac{2\pi}{n}=0$

B. $\lim\cos\frac{2\pi}{n}=1$

C. $\lim\cos\frac{2\pi}{n}=-1$

D. $\lim\cos\frac{2\pi}{n}$ không có giới hạn khi $n\to+\infty$

Chọn B

$\lim\cos\frac{2\pi}{n}=\cos\left(\lim\frac{2\pi}{n}\right)=\cos 0=1$

Câu 19 Chọn mệnh đề đúng?

A. $\lim n^2\cos\frac{2\pi}{n}=+\infty$ **B.** $\lim\frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{n^2}=+\infty$ **C.** $\lim\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n^2+2}=\frac{1}{2}$ **D.** cả 3 đều sai

Chọn A

$\lim n^2.\cos\frac{2\pi}{n}=\lim n^2.\lim\cos\frac{2\pi}{n}=+\infty$

Câu 20 Chọn kết quả đúng: $\lim\sqrt{\frac{7-2n}{4n+5}}$?

A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

B. $-\infty$

C. không có giới hạn khi $n\to+\infty$

D. 0

Chọn C

$\lim\sqrt{\frac{7-2n}{4n+5}}=\sqrt{\lim\frac{\frac{7}{n}-2}{4+\frac{5}{n}}}=\sqrt{\frac{-2}{4}}=\sqrt{\frac{-1}{2}}$ không tồn tại

Câu 21 Kết quả nào sau đây đúng?

A. Cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có công bội q thì tổng $S=\frac{u}{1-q}$

B. Cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có $u_1=4;q=\frac{4}{3}$ thì $S=\frac{4}{1-\frac{4}{3}}=-12$

C. Cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có $u_1=15;S=60$ thì công bội $q=\frac{3}{4}$

D. Cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có $u_1=-4;q=-\frac{5}{4}$ thì $S=-169$

Chọn C

Vì $q=\frac{3}{4}<1$ nên CSN lùi vô hạn có: $S=\frac{u_1}{1-q}=60$

Câu 22 Cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có $u_1=-50;S=100$. Năm số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là?

A. 50; 25; 12,5; 6,5; 3,25

B. 50; 25,5; 12,5; 6,25; 3,125

C. 50; 25; 12,5; 6,25; 3,125

D. 50; 25; 12,25; 6,125; 3,0625

Chọn C

Áp dụng công thức $S=\dfrac{u_1}{1-q}\to q=\dfrac{1}{2}$

Suy ra 5 số hạng đầu tiên của dãy số: 50; 25; 12,5; 6,25; 3,125

Câu 23 Cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có $u_1=-1;q=x,|x|<1$.Tìm tổng S và 3 số hạng đầu của cấp số này:

A. $S=\dfrac{-1}{1+x}$ và $-1;x;-x^2$

B. $S=\dfrac{-1}{1+x}$ và $1;x;x^2$

C. $S=\dfrac{-1}{1-x}$ và $-1;-x;-x^2$

D. $S=\dfrac{-1}{1-x}$ và $-1;x;-x^2$

Chọn C

$S=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{-1}{1-x}$, suy ra 3 số hạng đầu là: $-1;(-1)x;(-x)x\leftrightarrow -1;-x;-x^2$

Câu 24 Cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có $u_1=-x;q=x^2,|x|<1$. Tìm tổng S và 3 số hạng đầu của cấp số này:

A. $S=\dfrac{x}{1-x^2};-x;x^3;x^5$

B. $S=\dfrac{x}{1-x^2};x;x^3;x^4$

C. $S=\dfrac{x}{1+x};-x;-x^3;x^5$

D. $S=\dfrac{-x}{1-x^2};-x;-x^3;-x^6$

Chọn D

$S=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{-x}{1-x^2}$, suy ra 3 số hạng đầu là $-x;-x^3;-x^6$

Câu 25 Kết quả nào sau đây là đúng?

A. $lim\dfrac{5n+1}{1-5n}=-5$ **B.** $lim\dfrac{5n+1}{1-5n}=-1$ **C.** $lim\sqrt{2+n^2}=\sqrt{2}$ **D.** $lim\sqrt{n^2-2}=\sqrt{2}$

Chọn B

$$lim\frac{5n+1}{1-5n}=lim\frac{5+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-5}=-1$$

Câu 26 Kết quả nào sau đây là sai?

A. $lim\dfrac{3n}{3(n+1)}=-\dfrac{1}{3}$

B. $lim\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{4}$

C. $lim\dfrac{1}{(2n-1)(1+2n+1)}=0$

D. $lim\dfrac{3^{2n+1}}{5^{2n+2}}=0$

Chọn B

$$lim\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=lim\frac{1}{4n^2-1}=lim\frac{\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}}=0$$

Câu 27 Kết quả nào sau đây sai?

A. $lim\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}=1$

B. $lim\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-1}=-1$

C. $lim\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)=\dfrac{1}{2}$

D. $lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=-\dfrac{1}{2}$

Chọn B

$$lim\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-1}=lim\frac{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}=lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$$

Câu 28 Tìm tổng của cấp số nhân vô hạn sau: $5;\sqrt{5};1;\dfrac{1}{\sqrt{5}}$............?

A. $S=\dfrac{5\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$ **B.** $S=\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ **C.** $S=\dfrac{1-\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}$ **D.** $S=\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$

Chọn B

$$\begin{cases}u_1=5\\ q=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}\to S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$$

Câu 29 Tìm tổng của cấp số nhân vô hạn sau: $-3;0,3;-0,03;0,003$.....?

A. $S=-2\dfrac{8}{11}$ **B.** $S=\dfrac{30}{11}$ **C.** $S=\dfrac{-11}{30}$ **D.** $S=-2\dfrac{9}{11}$

Chọn A

$$\begin{cases}u_1=-3\\ q=-0,1\end{cases}\to S=\frac{u_1}{1-q}=-2\frac{8}{11}$$

Câu 30 Chọn kết quả đúng?

A. Dãy số $u_n=\dfrac{sin2n}{5n}$ có $\dfrac{sin2n}{5n}\geq\dfrac{1}{5n}$

B. Dãy số $(u_n)=\dfrac{sin2n}{5n-1}$ có $\dfrac{-1}{5n-1}\leq\dfrac{sin2n}{5n-1}\leq\dfrac{1}{5n}$

C. Dãy số $u_n=\dfrac{cos3n}{5n+1}$ là dãy số giảm và bị chặn

D. Dãy số $u_n=\dfrac{cos3n}{5n+1}$ là dãy số tăng và bị chặn

Chọn C

A sai, vì $\dfrac{sin2n}{5n}\leq\dfrac{1}{5n}$

B sai, vì $-\dfrac{1}{5n}\leq\dfrac{sin2n}{5n-1}\leq\dfrac{1}{5n-1}$

C đúng, vì $-\dfrac{1}{5n+1}\leq\dfrac{cos3n}{5n+1}\leq\dfrac{1}{5n+1}$

D sai

Bài 2: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các định nghĩa giới hạn hữu hạn

➢ Giới hạn hữu hạn: Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$. Lúc này $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in K/\{x_0\}$ và $x_n\to x_0$, ta có $\lim f(x_n)=L$.

➢ **Giới hạn bên phải:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$. Lúc này $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in(x_0;b)$ và $x_n\to x_0$, ta có $\lim f(x_n)=L$.

➢ **Giới hạn bên trái:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. Lúc này $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in(a;x_0)$ và $x_n\to x_0$, ta có $\lim f(x_n)=L$.

➢ Khi $x\to+\infty$: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Lúc này $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in(a;+\infty)$ và $x_n\to+\infty$, ta có $\lim f(x_n)=L$.

➢ Khi $x_n\to-\infty$: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;a)$. Lúc này $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in(-\infty;a)$ và $x_n\to-\infty$, ta có $\lim f(x_n)=L$.

2. Định nghĩa giới hạn $\pm\infty$

➢ **Giới hạn bằng $-\infty$ khi $x\to+\infty$:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Lúc này $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in(a;+\infty)$ và $x_n\to+\infty$, ta có $\lim f(x_n)=-\infty$.

➢ **Giới hạn bằng $+\infty$ khi $x\to x_0$:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K hoặc $K\setminus\{x_0\}$. Lúc này $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n\to x_0$, ta có $\lim f(x_n)=+\infty$.

➢ Nhận xét: $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi và chỉ khi $-f(x)$ có giới hạn $-\infty$.

3. Các giới hạn đặc biệt.

$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

$\lim\limits_{x\to x_0} c=c$; $\lim\limits_{x\to+\infty} c=c$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k là số nguyên dương.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$ (k:số lẻ); $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ (k:số chẵn)

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 301 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Chọn dãy số nào trong các dãy số nào sau đây có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x_n)=-1, khi\ x_n\to 0$?

A. Dãy số $x_n=\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ **B.** Dãy số $x_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

C. Dãy số $x_n=2^n$ **D.** Dãy số $x_n=n$

Chọn B

$$\lim_{x\to+\infty} f(x_n)=\lim\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=\lim\frac{1}{-1}=-1$$

Câu 32 Cho hàm số $f(x)=\frac{-2x}{x+1}$. Chọn dãy nào trong các dãy sau để $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x_n)=-1\ khi\ x_n\to 1$?

A. $x_n=1$ **B.** $x_n=(-1)^m$ **C.** $x_n=\frac{1}{n}$ **D.** $x_n=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

Chọn A

$\lim\limits_{x\to+\infty} x_n=\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1$

Chọn $(x_n)=1$

Câu 33 Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x+5}$. Chọn dãy nào trong các dãy sau để $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x_n)=+\infty\ khi\ x_n\to+\infty$?

A. $x=\frac{1}{n}$ **B.** $x_n=n$ **C.** $x_n=-n$ **D.** $x_n=5$

Chọn B

$\lim\limits_{x\to+\infty} x_n=\lim\limits_{x\to+\infty} n=+\infty$

Chọn $(x_n)=n$

Câu 34 Cho hàm số $f(x)=\sqrt{2-x}$. Chọn dãy nào trong các dãy sau để $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x_n)$ không tồn tại với $x_n\to+\infty$?

A. $x_n=-n$ **B.** $x=\frac{1}{n}$ **C.** $x_n=n$ **D.** $x_n=-2n$

Chọn C

Câu 35 Chọn kết quả đúng?

A. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x-1}=1$ **B.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x-1}=0$ **C.** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x+1}{x-1}=-3$ **D.** $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+1}{x-1}=-\frac{1}{3}$

Chọn B

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x-1}=\lim\frac{(-1)+1}{(-1)-1}=\lim 0=0$$

Câu 36 Chọn kết quả đúng?

A. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{2x-1}=\sqrt{2}$ **B.** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{2x-1}=0$

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x-1}=+\infty$ **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x-1}=-\infty$

Chọn B

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{2x-1}=\sqrt{\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(2.\frac{1}{2}-1\right)}=\sqrt{\lim 0}=0$$

Câu 37 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}$. Chọn dãy số (x_n) bất kỳ với $x_n \to 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ bằng?

A. $\dfrac{3}{2}$ **B.** 0 **C.** 4 **D.** $+\infty$

Chọn A

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+\frac{1}{2})}{x+1}=\lim_{x\to1}(x+\frac{1}{2})=\lim(1+\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$$

Câu 38 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$. Chọn dãy số (x_n) bất kỳ với $x_n \to -1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ bằng?

A. 0 **B.** $+\infty$ **C.** -3 **D.** 3

Chọn D

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x^2-x+1)=3$$

Câu 39 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. Chọn dãy số (x_n) bất kỳ với $x_n \to 2$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ bằng?

A. 0 **B.** 1 **C.** $\dfrac{1}{3}$ **D.** cả 3 đều sai

Chọn A

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=0$$

Câu 40 Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x}-4$. Chọn dãy số (x_n) bất kỳ với $x_n \to 4$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ bằng?

A. 0 **B.** -2 **C.** 2 **D.** một kết quả khác.

Chọn B

$$\lim_{x\to4} f(x)=\lim_{x\to4}\sqrt{x}-4=\sqrt{4}-4=-2$$

Câu 41 Cho hàm số $f(x)=-x^2+7$. Chọn dãy số (x_n) bất kỳ với $x_n \to -\infty$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ bằng?

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** cả 3 đều sai

Chọn B

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^2+7)=\lim_{x\to-\infty}(-x^2)+7=\lim_{x\to-\infty}(x^2)=-\infty$$

Câu 42 Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x}-4$. Chọn dãy số (x_n) bất kỳ với $x_n \to -\infty$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ bằng?

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** cả 3 đều sai

Chọn A

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4-x^3}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}(4-x^3)}=\sqrt{4-\lim_{x\to-\infty}x^3}=+\infty$$

Câu 43 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}}$. Chọn dãy số (x_n) bất kỳ với $x_n\to-\infty$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$ bằng?

A. $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **B.** 2 **C.** -2 **D.** Một kết quả khác.

Chọn C

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to-\infty}\frac{2x_n^{\ 2}}{\sqrt{2-x_n^{\ 2}}}=\lim\frac{2}{\dfrac{\sqrt{2}}{x_n^{\ 2}}-1}=-2$$

Câu 44 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{10}{1-x^2}$. Chọn dãy số (x_n) bất kì với $x_n\to-\infty$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ bằng?

A. -10 **B.** 10 **C.** $+\infty$ **D.** 0

Chọn D

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{-10}{1-x_n^{\ 2}}=0$$

Câu 45 Cho hàm số $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$. Kết quả nào sau đây là đúng?

A. $0\le x^2\sin\dfrac{1}{x}\le x^2$

B. $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$

C. $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=+\infty$

D. $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=1$

Chọn B

$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}=0$ vì khi $x\to0\Leftrightarrow x^2\to0$ và $\sin\dfrac{1}{x}$ là hàm bị chặn $\to\lim\limits_{x\to0}x^2.\sin\dfrac{1}{x}=0$

Câu 46 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{|x|}{2x}$. Kết quả nào đúng?

A. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{2x}=+\infty$ **B.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{2x}=\dfrac{1}{2}$ **C.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{2x}=-\infty$ **D.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{2x}=1$

Chọn B

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{2x}=\lim\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Câu 47 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\cos\pi x}{\pi(1+x)}$. Chọn kết quả đúng?

A. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\pi x}{\pi(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$

B. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\pi x}{\pi(1+x)}=-\dfrac{1}{2\pi}$

C. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\pi x}{\pi(1+x)}=\dfrac{1}{2\pi}$

D. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\pi x}{\pi(1+x)}=\dfrac{1}{2}$

Chọn B

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\pi x}{\pi(1+x)}=\lim_{x\to1}\frac{\cos\pi}{\pi.2}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2\pi}=\frac{-1}{2\pi}$$

Câu 48 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-1;x\geq 0\\2;x<0\end{cases}$. Chọn kết quả đúng?

A. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2=1$

B. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x-1)=-3$

C. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2=2$

D. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2$

Chọn C

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x-1=-1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2=2$

Vậy giới hạn không tồn tại nên C đúng D sai.

Câu 49 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-1;x<1\\2x\geq 1\end{cases}$. Kết quả nào đúng?

A. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2=1$

B. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-1)=-1$

C. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2=2$

D. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$

Chọn C

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2=2$

Câu 50 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1;x\leq 1\\3x;x>1\end{cases}$. Kết quả nào đúng?

A. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3=3$

B. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)=-1$

C. không có giới hạn

D. $\lim\limits_{x\to 1^-}=-3$

Chọn A

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 3=3$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x+1=3$

$\to \lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$

Câu 51 Chọn kết quả đúng: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2+x+6}$

A. $\dfrac{6}{5}$ **B.** $\dfrac{5}{6}$ **C.** $-\dfrac{5}{6}$ **D.** 0

Chọn C

$$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2+x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{-(x-3)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 3}-\frac{x+3}{x+2}=-\frac{6}{5}$$

Câu 52 Chọn kết quả đúng: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+4x-5}$

A. $-\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{3}$ **C.** $-\dfrac{3}{5}$ **D.** $\dfrac{3}{5}$

Chọn A

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-3}{x+5}=-\frac{1}{3}$$

Câu 53 Chọn kết quả đúng: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-25}$?

A. 4 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 16

Chọn B

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x-2)(\sqrt{x}+2)=2.4=8$$

Câu 54 Chọn kết quả đúng: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{x}}{x^2-25}$?

A. $-20\sqrt{5}$ **B.** $20\sqrt{5}$ **C.** $\dfrac{1}{20\sqrt{5}}$ **D.** $-\dfrac{1}{20\sqrt{5}}$

Chọn D

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{x}}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{(x^2-25)(\sqrt{5}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 5}\frac{-1}{(5+x)(\sqrt{5}+\sqrt{x})}=-\frac{1}{20\sqrt{5}}$$

Câu 55 Chọn kết qủa đúng: $\lim\dfrac{-3x^2+2x-5}{2x^2-7}$?

A. $\dfrac{3}{2}$ **B.** $\dfrac{2}{3}$ **C.** $-\dfrac{2}{3}$ **D.** $-\dfrac{3}{2}$

Chọn D

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+2x-5}{2x^2-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-2+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)}{x^2(2-\dfrac{7}{x^2})}=-\frac{3}{2}$$

Câu 56 Chọn kết quả đúng: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-4x}{5x}$?

A. $-\dfrac{4}{5}$ **B.** $-\dfrac{5}{4}$ **C.** $\dfrac{5}{4}$ **D.** $\dfrac{4}{5}$

Chọn A

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3-4x}{5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3}{x}-4}{5}=-\frac{4}{5}$$

Câu 57 Chọn kết quả đúng: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+x^2-8}{5+4x^2}$?

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Chọn A

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x^2-8}{5+4x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1-\dfrac{8}{x^2}}{\dfrac{5}{x^2}+4}=-\infty$$

Câu 58 Chọn kết quả đúng: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^4}{5x+3}$?

A. $-\dfrac{1}{5}$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{5}$ **D.** cả 3 đều sai

Chọn B

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^4}{5x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-x^3}{5+\frac{3}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{5}=-\infty$$

Câu 59 Chọn kết quả đúng: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$?

A. $+\infty$ **B.** 1 **C.** 0 **D.** một kết quả khác

Chọn C

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1-1}{x(x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

Câu 60 Chọn kết quả đúng?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-3x^2}=-\frac{1}{3}$

B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-x}{4x^2+x+5}=-1$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-2}}{x}=0$

D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^3+2x-4}{x^5+5}=3$

Chọn C

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{1}=0$$

Câu 61 Chọn mệnh đề đúng?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)=-2$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)=-\infty$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)=0$

D. cả 3 đều sai.

Chọn C

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1-x-1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}=0$$

Câu 62 Chọn mệnh đề đúng?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-x\right)=\frac{2}{5}$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-x\right)=-\frac{5}{2}$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-x\right)=-\frac{2}{5}$

D. cả 3 đều sai.

Chọn B

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x-x^2}{\sqrt{x^2-5x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{\sqrt{x^2-5x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{\sqrt{1-\frac{5}{x}}+1}=\frac{-5}{2}$$

Câu 63 Chọn mệnh đề đúng?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+5}=0$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+5}=5$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+5}=+\infty$

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+5}=1$

Chọn D

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}=1$$

Câu 64 Chọn mệnh đề đúng?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+5}=1$

B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+5}=-1$

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+5}=-\infty$

D. cả 3 đều sai.

Chọn B

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}=-1$$

Câu 65 Cho $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x};x>1\\2x-3;x\le1\end{cases}$. Kết quả nào sai?

A. $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2x-3)=-1$

B. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(2x-3)=-1$

C. $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-1}{x}=-1$

D. $\lim\limits_{x\to1}f(x)==-1$

Chọn A

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(2x-3)=-1$ sai vì $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1}{x}=-1$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2x-3)=-1$

Vậy $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-1$

Câu 66 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-x}{x}$ bằng giá trị nào sau đây?

A. 0

B. $+\infty$

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

Chọn C

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

Câu 67 Chọn kết qảu đúng?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-\infty$

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=+\infty$

Chọn D

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=+\infty$$

Câu 68 Cho $y=\left|\frac{\cos\pi x}{x}\right|$. Kết quả nào đúng?

A. Hàm số có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ $khi\ x\to\infty$

B. Giới hạn của hàm số là $+\infty$ $khi\ x\to 0$

C. $0\le y\le 1$

D. Giới hạn của hàm số là $+\infty$ $khi\ x\to+\infty$

Chọn B

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{\cos\pi x}{x}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{-1}{x}\right|=+\infty$$

Câu 69 Cho hàm số $y=\frac{x^2-1}{|x-1|}$. Kết quả nào sau đây đúng?

A. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{|x-1|}=0$ **B.** $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{|x-1|}=1$ **C.** $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{|x-1|}=2$ **D.** không tồn tại

Chọn D

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1^+}(x+1)=2$$
. Suy ra không tồn tại giới hạn.
$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1^-}-(x+1)=-2$$

Câu 70 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+1;x<1\\a;x\ge1\end{cases}$ (a:hằng số). Chọn khẳng định đúng?

A. $\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}a=1$ **B.** $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x^2+1)=0$

C. $\lim_{x\to1}f(x)=1$ $khi\ a=1$ **D.** $\lim_{x\to1}f(x)=2$ $khi\ a=2$

Chọn D

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}a=a$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1}(x^2+1)=2$$
$$\lim_{x\to1}f(x)=2\leftrightarrow\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)\leftrightarrow a=2$$

Câu 71 Để tìm $\lim_{x\to x_o^+}f(x);x\in(a;b)$ ta dùng dãy số (x_n) bất kì nào dưới đây?

A. $a<x_n<x_0$ **B.** $x_0<x_n<b$ **C.** $x_o<x_n<a$ **D.** $b<x_n<x_0$

Chọn B

Dùng dãy số (x_n) với $x_0<x_n<b$ (x_n nằm về phía bên phải x_0)

Câu 72 Để tìm $\lim_{x\to x_0^-} f(x); x\in(a;b)$ ta dùng dãy số (x_n) bất kì nào dưới đây?

A. $b<x_n<x_0$ **B.** $x_0<x_n<b$ **C.** $a<x_n<x_0$ **D.** $x_0<x_n<a$

Chọn C

Dùng dãy số (x_n) với $a<x_n<x_0$ (x_n nằm về phía bên trái x_0)

Bài 3: HÀM SỐ LIÊN TỤC

A KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0\in K$.

$f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$f(x)$ liên tục trên (a,b) suy ra F(x) liên tục tại mọi điểm của (a,b).

$f(x)$ liên tục trên [a,b] nếu F(x) liên tục trên (a,b) và $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a); \lim_{x\to b^-} f(x)=f(x_0)$

1. Các định lý.

Định lí 1.

- Hàm đa thức liên tục trên R.
- Hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của nó.
- Hàm số phân thức hữu tỉ liên tục trên từng khoảng xác định của nó.

Định lí 2.

Cho hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên K, lúc này:

- Hàm số $f(x)\pm g(x)$ cũng liên tục trên K
- Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\#0\forall x\in K)$ liên tục trên tập các định K của nó.
- Hàm số $\sqrt{f(x)};(f(x)\geq 0,\forall x\in K)$ cũng liên tục trên K

Định lí 3

Hàm số y=f(x) liên tục trên [a. b] và f(a).f(b)<0 thì tồn tại ít nhất một điểm c thuộc [a,b] để f'(c)=0

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 73 Chọn mệnh đề sai?

A. Hàm số $y=x^2+2x^2-5x+7$ liên tục trên R

B. Hàm số $y=\dfrac{3x+5}{x+1}$ liên tục trên R

C. Hàm số $y=\frac{-4x}{x^2+1}$ liên tục trên R

D. Hàm số $y=sinx$ liên tục trên R

Chọn B

Hàm số $y=\frac{3x+5}{x+1}$ không xác định tại x=-1 nên không liên tục tại x=-1

Các hàm ở câu A, C, D đều là những hàm liên tục trên R

Câu 74 Chọn mệnh đề sai?

A. Hàm số $y=\sqrt{x-1}$ liên tục trên R

B. Hàm số y = cosx liên tục trên R

C. Hàm số $y=\sqrt{x^2+1}$ liên tục trên R\{-1}

D. Hàm số y = tanx liên tục trên R

Chọn A.

Hàm số $y=\sqrt{x-1}$ liên tục tại mọi x thuộc R là sai vì hàm này chỉ liên tục với mọi x thỏa: $x-1\geq 0 \leftrightarrow x\geq 1$

Câu 75 Chọn kết quả đúng?

A. Hàm số y=tanx liên tục trên R

B. Hàm số y=tanx liên tục trên $R\setminus\{k\pi\}$

C. Hàm số y=tanx liên tục trên $R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\};k\in Z$

D. Hàm số y=cotx liên tục trên R

Chọn C

Hàm số y = tanx không xác định tại những giá trị của $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \rightarrow y=\tan x$ liên tục với mọi $x \# \frac{\pi}{2}+k\pi$

Câu 76 Chọn mệnh đề sai?

A. Hàm số $y=\frac{1}{x}$ liên tục tại mọi x # 0

B. Hàm số $y=\frac{-1}{x^2+2}$ liên tục trên R

C. Hàm số $y=\frac{\sqrt{x+1}}{3}$ liên tục tại mọi x #-1

D. Hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-3$ liên tục trên R

Chọn C

Hàm số $y=\frac{1}{3}\sqrt{x+1}$ liên tục với mọi x thỏa mãn $x\geq -1$

Câu 77 Cho hàm số $y=\dfrac{3x+5}{x+1}$. Chọn mệnh đề đúng?

A. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-5$ **C.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=8$ **D.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$

Chọn B

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+5}{x-1}=-1, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+5}{x-1}=-5$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+5}{x-1}=\varnothing, \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x+5}{x-1}=3$

Câu 78 Cho hàm số $y=\sqrt{x-2}$. Chọn mệnh đề đúng?

A. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\sqrt{2}$ **B.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\sqrt{-2}$ **C.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=8$ **D.** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Chọn A

$\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x-2}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 4}(x-2)}=\sqrt{2}$

Câu 79 Cho hàm số $y=\dfrac{3|x|}{x}$. Phát biểu nào đúng?

A. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3$ **C.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ **D.** có giới hạn khi $x\to 0$

Chọn B

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-3x}{x}=-3$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3x}{x}=3$

Từ hai điều này suy ra hàm số không có giới hạn khi $x\to 0$.

Câu 80 Cho hàm số $y=\dfrac{3|x|}{x}$. Kết quả nào sai?

A. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$ **B.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ **C.** $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=3$ **D.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-3$

Chọn C

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x}{|x|}=\dfrac{3.|-2|}{-2}=-3$

Câu 81 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2; x<0\\ x-2; x\ge 0\end{cases}$. Chọn mệnh đề đúng?

A. $f(0)=2$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2=2$

C. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2=2$ **D.** Hàm số liên tục tại x =0

Chọn C

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2=2$

Câu 82 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1; x>1\\ a; x\le 1\end{cases}$. Với giá tri nào của a thì hàm số liên tục tại x =1?

A. $a=-2$ **B.** a =1 **C.** a = 2 **D.** a = 0

Chọn D

Ta có: $f(1)=0$ và $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2-1)=0$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} a=a$. Suy $a=0$.

Câu 83 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} a-2; x>2 \\ \sin\dfrac{\pi}{x}; x\le 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại x = 2?

A. a =3 **B.** a = 2 **C.** a = - 2 **D.** a = -3

Chọn A

$f(2)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(a-2)=a-2$, suy ra a-2=1 tức a=3 thì hàm số liên tục tai x = 2.

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=1$

Câu 84 Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} ax+2; x\ge1 \\ x^2-2; x<1 \end{cases}$. Kết quả nào sau đây sai?

A. y = ax + 2 liên tục với mọi $x\ge1$

B. Tại x =1, hàm số liên tục với a = -3

C. Với x<1, ta có $f(x)=x^2-2$ nên hàm số liên tục.

D. Hàm số liên tục tại x =1 với mọi a thuộc R

Chọn C

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(ax+2\right)=a+2$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2-2)=-1$ $\Rightarrow$ a = 3 thì hàm số liên tục tại x =1

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=a+2$

Câu 85 Với hàm số đã cho câu 84. Chọn kết quả đúng?

A. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-1$ **B.** $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-1$

C. Hàm số không xác định tại x = 1 **D.** Với a =1 thì hàm liên tục tại x =1

Chọn B

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x^2-2)=-1$

Câu 86 Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x}{x}$ không xác định tại x = 0. Giả định $f(0)$ xác định ta cần gán cho f(0) giá trị bằng bao nhiêu để hàm số liên tục tại x = 0?

A. f(0) = -2 **B.** f(0) = -3 **C.** f(0) = 2 **D.** f(0) = 3

Chọn D

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2+3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}(3-x)=3$

Câu 87 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-5x}{x}$ chưa xác định tại x= 0. Cần phải gán cho f(0) giá trị bằng bao nhiêu để hàm số liên tục tại x = 0

A. f(0) = - 5 **B.** f(0) = 5 **C.** f(0) = 6 **D.** f(0) = - 6

Chọn A

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-5x}{x}=\lim_{x\to 0}(x-5)=-5$$

Câu 88 Cho hàm số $f(x)\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4};x\#4\\7;x=4\end{cases}$. Chọn khẳng định sai?

A. Với x # 4 thì f(x) = x + 4

B. Với x = 4 thì f(4) = 7

C. Hàm số liên tục trên R

D. Phải gán cho f(4) = 8 thì hàm số mới liên tục trên R

Chọn C

Hàm số liên tục trên R là sai

Vì tại x = 4 hàm không liên tục

$f(x)=7$

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4)}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8$$

Để hàm số liên tục tại x=4 thì $\lim_{x\to 4} f(x)=8$

Câu 89 Cho hàm số $f(x)\begin{cases}\cos\pi x;x\le 1\\a^2+1;x>1\end{cases}$. Kết quả nào đúng?

A. a =1 **B.** a = -1

C. Mọi a thuộc R **D.** Không có giá trị nào của a

Chọn D

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(a^2+1)=a^2+1$

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\cos\pi x=-1$

$f(1)=\cos\pi=-1$

Để hàm số liên tục tại x = 1 thì

$a^2+1=-1\leftrightarrow a^2=-2$ (VN)

Câu 90 Cho hàm số $f(x)\begin{cases}\cos\pi x;x\le 1\\a^2-2;x>1\end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại x =1

A. Mọi a thuộc R **B.** ±3 **C.** ±2 **D.** ±1

Chọn D

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \cos \pi x = -1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (a^2 - 2) = a^2 - 2$

Để hàm số liên tục tại x =1

$\leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = f(1) \leftrightarrow a^2 - 2 = -1 \leftrightarrow a = \pm 1$

Câu 91 Cho hàm số $f(x) = 3x^2 + 3x - 2$. Kết quả nào sai?

A. Phương trình f(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm trong (-1;1)

B. Phương trình f(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm trong (0;1)

C. Phương trình f(x) = 0 có vô nghiệm trong (0;1)

D. Phương trình f(x) = 0 có nhiều nhất 3 nghiệm

Chọn C

$f(0).f(1) = -24 < 0$

Suy ra tồn tại một số x thuộc (0,1) là nghiệm của phương trình $3x^2 + 2x - 2 = 0$

Câu 92 Chọn khẳng định đúng?

A. Phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ vô nghiệm trên tập R

B. Phương trình $x^3 + x - 1 = 0$ vô nghiệm trên khoảng (0;1)

C. Cả 2 phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ và $x^3 + x - 1 = 0$ đều có ít nhất 1 nghiệm trên khoảng (-2;1)

D. Cả A, B,C đều sai

Chọn C

Xét $f(x) = x^3 + x + 1$

$f(-2) = (-2)^3 - 2 + 1 = -9$

$f(1) = 3$

$f(-2).f(0) = -27 < 0$

Suy ra phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc (-2,1)

Xét hàm $g(x) = x^3 + x - 1$

$f(-2) = -11$

$f(1) = 1$

Suy ra phương trình $x^3 + x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc (-2,1)

Câu 93 Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\cos x}{\pi + x} - x$. Kết quả nào đúng?

A. Hàm số có tập xác định với mọi x thuộc R

B. $f(0).f(\pi) > 0$

C. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0;\pi)$

D. Phương trình $\dfrac{\cos x}{\pi + x} - x$ vô nghiệm

Chọn C

$f(\pi)=\dfrac{-1}{2\pi}-\pi=\dfrac{-1-2\pi^2}{2\pi}$

$f(0)=\dfrac{1}{\pi}>0$

$f(0).f(\pi)<0$

Suy ra phương trình $\dfrac{\cos x}{\pi+x}=x$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;\pi)$

Câu 94. Cho hàm số $y=f(x)=x^4+x^2-2$. Chọn kết quả đúng?

A. Hàm số đã cho liên tục trên R

B. Phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng (0; 2)

C. Ta có $f(-2)f(2)>0$ nên phương trình vô nghiệm trên khoảng (-2; 2)

D. Phương trình x^4+x^2-2 có tối đa 4 nghiệm trên R

Chọn C.

Hàm số liên tục trên R và f(0).f(2)<0

Suy ra phương trình f(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm thuộc (0, 2)

Suy ra phương trình có nghiệm trong (-2, 2)

Câu 95. Cho phương trình $x^4-x=3$. Khoảng nào dưới đây để phương trình có ít nhất một nghiệm trong đó?

A. (0;1) **B.** (-1;0) **C.** (0;2) **D.** (2;3)

Chọn C.

Xét hàm số $f(x)=x^4-x-3; f(0)=-3; f(1)=-3; f(2)=11; f(3)=75$

Chọn (0,2) vì f(0).f(2)<0

Câu 96. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4x-5}$. Kết quả nào sai?

A. $D=(-\infty;-1)\cup(-1;5)\cup(5;+\infty)$

B. Hàm số liên tục tại x = 2

C. Hàm số không liên tục tại x = -5

D. Hàm số liên tục tại mọi x thuộc tập xác định

Chọn C

Vì tại x = - 5. Hàm số xác định

Suy ra hàm số liên tục tại x = -5

Câu 97. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{(x-1)\sqrt{3-x}}$. Chọn kết quả sai?

A. Hàm số không liên tục tại x =1; x = 3

B. Hàm số liên tục tại x = 4

C. Hàm số liên tục tại x = 0

D. Hàm số liên tục tại mọi $x\in(-\infty;1)\cup(1;3)$

Chọn B

Tại x =4 hàm số không xác định

Vì $f(4)=\dfrac{4}{(4-1)\sqrt{3-4}}$ nên hàm không xác định tại x =4

Câu 98 Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-4}$. Chọn kết quả sai?

A. Hàm số liên tục trên khoảng (-2; 2)

B. Hàm số liên tục tại x =-3

C. Hàm số liên tục tại x =10

D. Hàm số liên tục tại mọi $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$

Chọn A

Mọi x thuộc (-2;2) không thuộc tập xác định của hàm số nên hàm không liên tục tại mọi x thuộc (-2;2)

Câu 99 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$. Chọn kết quả sai?

A. Hàm số liên tục tại mọi x # 0; x # 1

B. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty;\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

C. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x)=\dfrac{1}{2}$

D. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\dfrac{1}{2}$

Chọn C

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}=\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$

Câu 100 Cho hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$. Chọn kết quả sai?

A. Hàm số liên tục tại mọi x # 1

B. Hàm số liên tục tại mọi x thuộc $(1;+\infty)$

C. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$

D. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Chọn A.

Hàm số có tập xác định x>1. Do đó hàm liên tục tại mọi x>1

Issac Newton
(1642-1727)

Newton là nhà toán học, nhà vật lý, nhà thiên văn học, nhà triết học, nhà thần học và nhà giả kim người Anh, là nhà khoa học vĩ đại và có tầm ảnh hưởng lớn nhất.

Trong toán học, ông cùng với đồng nghiệp là Gottfried Leibniz phát triển phép tính tích phân và vi phân. Ông đã áp dụng tính toán để tìm tiếp tuyến, độ dài của đường cong, cực đại và cực tiểu của hàm. Ngoài các cải tiến quan trọng khác trong hình học giải tích, các công trình toán học của ông bao gồm các định lý nhị thức, phương pháp nội suy. Ông đã phát triển về phương trình bậc 3, định lý về tứ giác, parabol xác định bởi 4 điểm.

Năm 1687, Newton xuất bản cuốn luận thuyết về "Các nguyên lý toán học của triết lý về tự nhiên", mô tả về thuyết vạn vật hấp dẫn và 3 định luật Newton, được coi là nền tảng của cơ học cổ điển.

Trong cơ học, Newton đưa ra nguyên lý bảo toàn động lượng (bảo toàn quán tính). Trong quang học, ông khám phá ra sự tán sắc ánh sáng, giải thích việc ánh sáng trắng khi đi qua lăng kính thì trở thành nhiều màu.

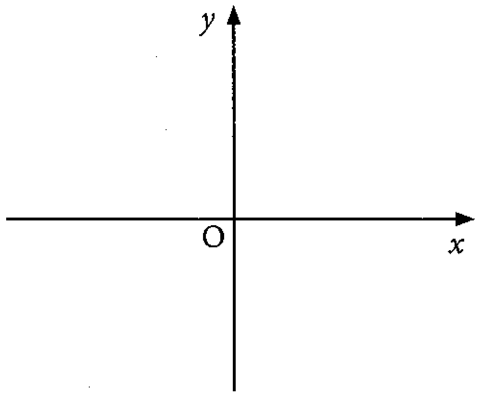
Có thể nói rằng Issac Newton là một trong những nhà khoa học có nhiều cống hiến nhất cho đến thời điểm hiện nay.

CHUYÊN ĐỀ 10. HÌNH HỌC OXY

Hình học Oxy là một chuyên đề khó, để học tốt phần này học sinh cần có kiến thức tốt về hình học phẳng. Thường thì những câu hỏi ở phần này sẽ là những câu hỏi phân loại học sinh.

Phần I: CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN

Xét hệ trục tọa độ Oxy với Ox là trục hoành nằm ngang với véctơ đơn vị là $\vec{i}$, Oy là trục tung véctơ đơn vị là $\vec{j}$, Oy vuông góc với Ox tại gốc tọa độ O, ta có các công thức được sử dụng sau:



• ***Công thức độ dài:***

Nếu có hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ thì độ dài đoạn thẳng AB được tính theo công thức.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

• ***Công thức tính tọa độ véctơ:***

Nếu có hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

• ***Phép cộng và trừ hai véctơ:***

Nếu có $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ thì $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm a_2; b_1 \pm b_2)$

• ***Hai véctơ bằng nhau:*** là hai véctơ dài bằng nhau, cùng phương, cùng hướng.

Nếu có $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ thì $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$. (hoành bằng hoành, tung bằng tung).

• ***Tích một số và một véctơ:***

Cho véctơ $\vec{a}$ khi đó $k\vec{a}$ với k là số thực khác 0:

- Nếu $k > 0$: $k\vec{a}$ là véctơ dài gấp k lần véctơ $\vec{a}$ và cùng hướng với $\vec{a}$.

- Nếu $k < 0$: $k\vec{a}$ là véctơ dài gấp k lần véctơ $\vec{a}$ và ngược hướng với $\vec{a}$.

Về mặt tọa độ: nếu $\vec{a} = (a_1; a_2)$ thì $k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$

• ***Tích vô hướng của hai véctơ:***

Định nghĩa. Người ta gọi tích số $|\vec{a}|.|\vec{b}|.cos(\vec{a}; \vec{b})$ là tích vô hướng của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}; \vec{b})$

Về mặt tọa độ: Nếu có $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$ thì $\vec{a}.\vec{b}=a_1.a_2+b_1.b_2$

• ***Hai véctơ vuông góc:***

Nếu có $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$ thì $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$ (hoành nhân hoàng cộng tung nhân tung = 0).

• ***Cos góc giữa hai véctơ:***

Nếu có $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$ thì $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

• ***Cos góc giữa hai đường thẳng:***

Nếu có $d_1:a_1x+b_1y+c_1=0$, $d_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ thì

$$\cos\left(d_1;d_2\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_{d_1}},\overrightarrow{n_{d_2}}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_{d_1}}.\overrightarrow{n_{d_2}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{d_1}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{d2}}\right|}=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$ với $\overrightarrow{n_{d_1}}=\left(a_1;b_1\right)$, $\overrightarrow{n_{d_2}}=\left(a_2;b_2\right)$.

Điểm thuộc đường thẳng:

Nếu có đường thẳng $d:ax+by+c=0$ thì $A\left(x_A;y_A\right)\in d\Leftrightarrow ax_A+by_A+c=0$.

• ***Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng:***

Nếu có đường thẳng $d:ax+by+c=0$ và $A\left(x_A;y_A\right)$ thì khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d được tính theo công thức $d\left[A,d\right]=\dfrac{\left|ax_A+by_A+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

• ***Vị trị tương đối của một điểm so với đường thẳng***

Cho đường thẳng $d:ax+by+c=0$ với $a^2+b^2\neq0$ và hai điểm $A\left(x_A;y_A\right)$, $B\left(x_B;y_B\right)$

+ Nếu $\left(ax_A+by_A+c\right)\left(ax_B+by_B+c\right)>0$ thì A, B nằm cùng một bên (cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d).

+ Nếu $\left(ax_A+by_A+c\right)\left(ax_B+by_B+c\right)<0$ thì A, B nằm khác bên (mỗi điểm nằm mỗi nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d).

• ***Vị trí tương đối của hai đường thẳng:***

Cho hai đường thẳng $d_1:a_1x+b_1y+c_1=0$ và $d_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ (giả sử a_2,b_2 khác không)

+ Nếu $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau.

+ Nếu $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng song song nhau.

+ Nếu $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng trùng nhau.

Phần II: BÀI TOÁN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG:

Định nghĩa. *Trong mặt phẳng Oxy, mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát dạng* $ax+by+c=0$ *với* $a^2+b^2\neq 0$.

Chú ý: Nếu đường thẳng d đi qua điểm $A(x_A;y_A)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n_d}=(a;b)$ thì đường thẳng d có phương trình $d: a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$.

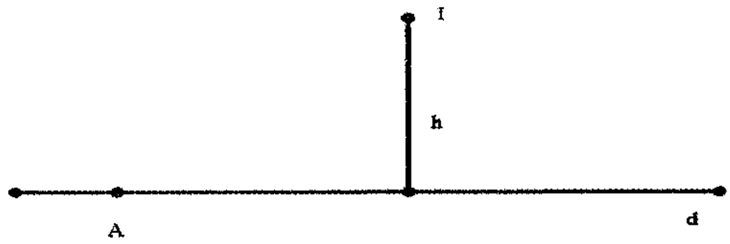
Chú ý:

- Véctơ pháp tuyến của đường thẳng là véctơ có phương vuông góc với đường thẳng đó.
- Véctơ chỉ phương của đường thẳng là véctơ có phương song song với đường thẳng đó.
- Nếu véctơ chỉ phương là $\vec{n_d}=(a;b)\Rightarrow \overrightarrow{u_d}=(-b;a)$

Dưới đây là hai bài toán viết phương trình đường thẳng biến thể, ở đó chúng ta sẽ sử dụng công thức khoảng cách, hoặc công thức góc để giải quyết.

Bài toán viết phương trình đường thẳng sử dụng khoảng cách:

Nếu đường thẳng d đi qua điểm $A(x_A;y_A)$ và khoảng cách từ điểm I (biết tọa độ) đến d_1 bằng h thì ta luôn viết được phương trình đường thẳng d.



Ví dụ Viết phương trình đường thẳng DM đi qua $E(-2;-1)$, và khoảng cách từ $I\left(\frac{13}{4};\frac{7}{2}\right)$ đến DM bằng $\sqrt{\frac{45}{4}}$.

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ là véctơ pháp tuyến của đường thẳng DM.

Phương trình đường thẳng DM là $a(x+2)+b(y+1)=0,\ (a^2+b^2>0)$.

$$d(I;DM)=\frac{\sqrt{45}}{4}\Leftrightarrow\frac{\left|\frac{21}{4}a+\frac{9}{2}b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{45}}{4}\Leftrightarrow|7a+6b|=\sqrt{5(a^2+b^2)}$$

$$\Leftrightarrow 44a^2+84ab+31b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}22a=-31b\\2a=-b\end{array}\right.$$

TH1: Với $22a=-31b$ ta chọn $a=31, b=-22$.

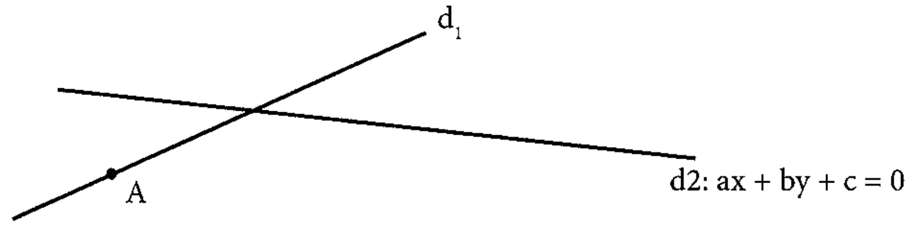
Suy ra, phương trình DM là $31x-22y+40=0$.

TH2: Với $2a=-b$ ta chọn $a=1, b=-2$.

Suy ra, phương trình đường thẳng DM là $x-2y=0$

Bài toán viết phương trình đường thẳng sử dụng góc:

Nếu đường thẳng d_1 đi qua điểm $A\left(x_A;y_A\right)$ và tạo với d_2:$ax+by+c=0$ một góc α thì ta luôn viết được phương trình đường thẳng d_1.



Ví dụ Viết phương trình đường thẳng EC tạo với đường thẳng CN một góc 45^0? Biết CN có phương trình: $y-1=0$ và $E(-1;7)$.

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là vtpt của đường thẳng EC ($a^2+b^2\neq 0$)

Do góc giữa EC và CN bằng 450 nên: $\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 4b^2=2b^2+2a^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a=-b\end{array}\right.$

• Với $a=-b$, chọn $\vec{n}=(1;-1)$ suy ra phương trình EC: $x-y+8=0$

Do C là giao điểm của CN và EC nên $C(-7;1)$ (loại)

• Với $a=b$, chọn $\vec{n}=(1;1)$ suy ra phương trình EC: $x+y-6=0$

Phần III: BỔ SUNG CÁC KIẾN THỨC HÌNH HỌC PHẲNG

Định lý hàm số cos: Cho tam giác ABC ta có:

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC.BC.cos\angle C$

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC.cos\angle B$

$BC^2=AC^2+AB^2-2AC.AB.cos\angle A$

Định lý hàm số sin: Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R ta có:

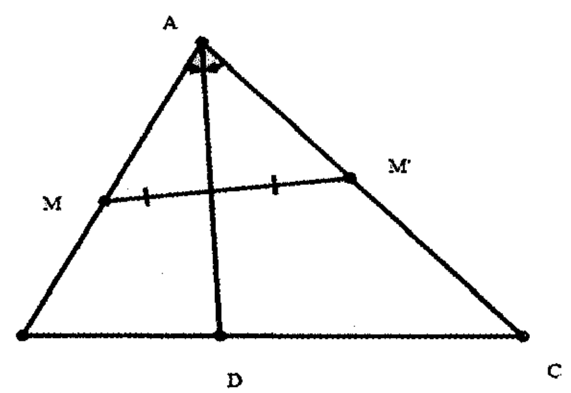
$\dfrac{BC}{sin\,A}=\dfrac{AC}{sin\,B}=\dfrac{AB}{sin\,C}=2R$

Tính chất phân giác: Cho tam giác ABC có phân giác trong góc A là AD, ta có:

+ $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$

+ Điểm đối xứng của M (bất kì) thuộc AB qua phân giác giác AD thuộc AC.

+ Điểm đối xứng của N bất kì thuộc AC qua phân giác giác AD thuộc AB.



Tính chất trung điểm:

- Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

- Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M ta có $2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

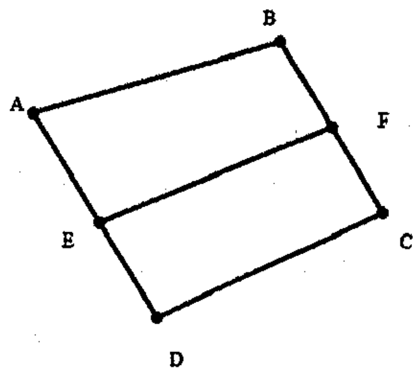
Tính chất trọng tâm:

- Điểm G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

- Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có $3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

Tính chất đường trung bình của tứ giác:

- Cho tứ giác ABCD có E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC. Ta luôn có: $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$



Điều kiện để ba điểm thẳng hàng:

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có một số k khác không sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

Hệ thức véctơ liên hệ giữa trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác:

Cho tam giác ABC có trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp O, trọng tâm G. Ta có:

- $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

- $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

- $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

MỘT SỐ CÂU HỎI LÍ THUYẾT:

Ví dụ 1 Cho tam giác MNP có E là trung điểm MN. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MN}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{PE}$

C. $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}=3\overrightarrow{PE}$ **D.** $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\vec{0}$

Dựa theo tính chất trung điểm ta thấy

Đáp án B. là đúng.

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC có trọng tâm là G, biết $\overrightarrow{GA}=(0;1)$, $\overrightarrow{GB}=(-2;3)$. Tính tọa độ véctơ $\overrightarrow{GC}$?

A. $\overrightarrow{GC}=(-1;3)$ **B.** $\overrightarrow{GC}=(1;2)$ **C.** $\overrightarrow{GC}=(2;-4)$ **D.** $\overrightarrow{GC}=(1;-2)$

Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}=(0;0)$ do đó

Đáp án C. là đúng.

Ví dụ 3 Trong hệ tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD có E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết $\overrightarrow{AB}=(1;2)$, $\overrightarrow{DC}=(-3;1)$ và $E(1;0)$. Tìm tọa độ điểm F.

Theo tính chất đường trung bình của tứ giác ta có.

$$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x_F-1)=-2\\2(y_F-0)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=0\\y_F=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Vậy $F\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có trọng tâm G, trực tâm H, và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là I. Phát biểu nào sau đây đúng:

A. $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

B. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AH}$

C. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$

D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}$

Đáp án A

Ví dụ 5 Cho tam giác ABC có góc $\angle A=60°$, bán kính đường tròn ngoại tiếp $R=2$. Phát biểu nào sau đây đúng nhất?

A. Cạnh BC có độ dài lớn hơn 3.

B. Cạnh AC có độ dài lớn nhất.

C. Cạnh AB có độ dài lớn nhất.

D. Cạnh AC có độ dài lớn hơn 4.

Ta có $2R=\dfrac{a}{sin\,A}=\dfrac{BC}{sin60}\Rightarrow BC=2R.sin60=4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ nên

Đáp án A đúng.

Tại sao b, c, d không đúng?

Vì $\angle A=60°$ nên hai góc còn lại sẽ có một góc lớn hơn hoặc bằng $60°$ chúng ta không thể xác định được đó là góc B, hay góc C nên không thể khẳng định được b hay c đúng. Chú ý cạnh nào đối diện với góc lớn nhất sẽ là cạnh dài nhất.

Còn d sai vì $2R=\dfrac{b}{sin\,B}=\dfrac{AC}{sin\,B}\Rightarrow AC=2R.sin\,B\le 2R=4$.

Ví dụ 6 Phát biểu nào sau đây đúng:

A. Góc giữa hai véctơ nhỏ hơn hoặc bằng 90 độ.

B. Góc giữa hai đường thẳng có thể lớn hơn 90 độ.

C. Hai véctơ dài bằng nhau và cùng phương thì bằng nhau.

D. $2\vec{a}$ là véctơ cùng hướng với véctơ $\vec{a}$.

Đáp án D

Phần V: MỘT SỐ BÀI TOÁN VÍ DỤ.

Ví dụ 1 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I(1;3)$. Gọi N là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AN=\frac{2}{3}AB$. Biết đường thẳng DN có phương trình $x+y-2=0$ và $AB=3AD$. Đáp án nào sau đây chính xác nhất:

A. $B(9;-3)$ **B.** $B(9;-3)$ và BD: $4x+3y-13=0$

C. $B(9;-3)$ hoặc $B(-5;11)$ **D.** $B(-1;1)$

Phân tích.

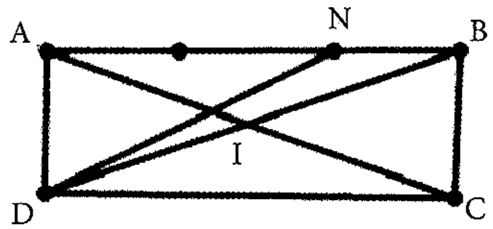
- Để cho DN : $x+y-2=0$, $I(1;3)$ nằm trên DB nên nếu tính được $cos\widehat{BDN}$ thì chúng ta viết được phương trình BD. Từ đó giải hệ DN và BD tìm được D.

- Dùng công thức trung điểm suy ra được B.

- Làm sao tính $cos\widehat{BDN}$? Khi để cho hình chữ nhật có mối quan hệ giữa chiều rộng và chiều dài thì nên đặt chiều rộng $AD=x$, sau đó tính các cạnh còn lại theo x, sau đó sẽ tính được $cos\widehat{BDN}$.

Lời giải.

Đặt $AD=x(x>0)\Rightarrow AB=3x, AN=2x, NB=x, DN=x\sqrt{5}, BD=x\sqrt{10}$



Xét tam giác BDN theo định lý cos có:

$$cos\widehat{BDN}=\frac{BD^2+DN^2-NB^2}{2BD.DN}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

Gọi $\vec{n}(a;b)(a^2+b^2\neq 0)$ là vectơ pháp tuyến của BD, BD đi qua điểm I(1;3),

PT BD: $ax+by-a-3b=0$

$D=BD\cap DN\Rightarrow D(7;-5)\Rightarrow B(-5;11)$

$$cos\widehat{BDN}=\left|cos(\vec{n},\vec{n_1})\right|=\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}\Leftrightarrow 24a^2+24b^2-50ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3a=4b\\4a=3b\end{array}\right.$$

Với $3a=4b$, chon a =4,b = 3, PT BD: 4x+ 3y -13 = 0

$\Rightarrow D=BD\cap DN\Rightarrow D(7;-5)\Rightarrow B(-5;11)$

Với $4a=3b$, chon a =3,b = 4, PT BD:3x + 4y -15 =0 $\Rightarrow D=BD\cap DN\Rightarrow D(-7;9)\Rightarrow B(9;-3)$

Đáp án C

Ví dụ 2 Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC. Hai điểm $M(4;-1), N(0;-5)$ lần lượt thuộc AB, AC và phương trình đường phân giác trong góc A là $x-3y+5=0$, trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(-\frac{2}{3};-\frac{5}{3}\right)$. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC?

A. $A(1;2), B(-2;5), C(-1;12)$ **B.** $A(1;2), B(-2;5), C(0;1)$

C. $A(1;2), B(-1;5), C(-1;12)$ **D.** $A(1;0), B(-2;5), C(-1;12)$

Phân tích.

- Ta thấy A thuộc đường phân giác trong góc A: $x-3y+5=0$, giờ chỉ cần viết được phương trình AC là tìm được A.

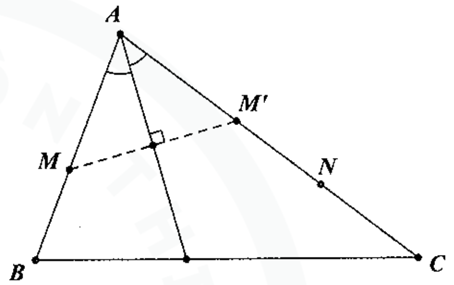
- Trên AC đã có một điểm N, cần tìm thêm một điểm nữa. Chú ý khi lấy M' đối xứng với M qua phân giác trong ta có M' thuộc cạnh AC.

- Tìm M' viết được phương trình AC từ đó suy ra A. Có A, M viết được phương trình AB.

- Gọi B, C và tham số hóa dựa vào B thuộc AB, C thuộc AC. Áp dụng công thức trọng tâm sẽ tìm ra được tọa độ B, C.

Lời giải.

Từ M kẻ MM' vuông góc với phân giác trong góc A tại I, $M'\in AC \Rightarrow$ I là trung điểm MM'.



Phương trình MM' là: $3x+y-11=0$

Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}3x+y-11=0\\x-3y+5=0\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{14}{5};\frac{13}{5}\right)$$

M' đối xứng với M qua I $\Rightarrow M'\left(\frac{8}{5};\frac{31}{5}\right)$

Đường thẳng AC qua N và M' nên có phương trình: $\frac{x}{1}=\frac{y+5}{7}\Leftrightarrow 7x-y-5=0$

Toạ độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}7x-y-5=0\\x-3y+5=0\end{cases}\Rightarrow A(1;2)$

Đường thẳng AB đi qua A, M nên có phương trình: $x+y-3=0$.

Gọi $B(b;3-b)$, $C(c;7c-5)$. Do G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases}b+c=-3\\b-7c=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\\c=-1\end{cases}\Rightarrow B(-2;5),C(-1;12).$$

Vậy toạ độ các đỉnh của tam giác ABC là: $A(1;2),B(-2;5),C(-1;12)$

Đáp án A

Ví dụ 3 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $DC=BC\sqrt{2}$, tâm I(−1; 2). Gọi M là trung điểm của cạnh CD, H(−2; 1) là giao điểm của hai đường thẳng AC và BM. Tìm tọa độ điểm B?

A. $\left[\begin{array}{l}B\left(-2-2\sqrt{2};1+2\sqrt{2}\right)\\B\left(-2+2\sqrt{2};1-2\sqrt{2}\right)\end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l}B\left(-1-2\sqrt{2};1+2\sqrt{2}\right)\\B\left(-1+2\sqrt{2};1-2\sqrt{2}\right)\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}B\left(-3-2\sqrt{2};1+2\sqrt{2}\right)\\B\left(-3+2\sqrt{2};1-2\sqrt{2}\right)\end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l}B\left(-2-2\sqrt{2};1+3\sqrt{2}\right)\\B\left(-2+2\sqrt{2};1-3\sqrt{2}\right)\end{array}\right.$

Phân tích.

- Có tọa độ I, H nên ta dễ dàng viết được phương trình IH.

- Có BM, CI là trung tuyến của tam giác BCD nên H là trọng tâm tam giác BCD, từ đây ta có $\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{HI}$ nên suy ra được tọa độ điểm A.

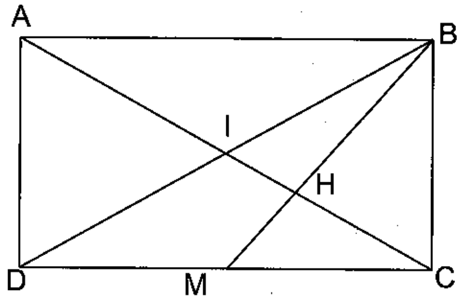
Vẽ hình chính xác ta thấy BM vuông góc với AC (phải chứng minh), BM lại đi qua H nên viết được phương trình BM. Tham số hóa điểm B, lại có IA = IB từ đó giải ra được tọa độ điểm B.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{IH}=\left(-1;-1\right)$

Nên đường thẳng IH có phương trình $x-y+3=0$.

Từ giả thiết ta suy ra H là trọng tâm của ΔBCD $\Rightarrow \overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{HI} \Rightarrow A(2;5)$.



Ta có $HB=\dfrac{2}{3}BM=\dfrac{2}{3}\sqrt{BC^2+MC^2}=\dfrac{BC\sqrt{6}}{3}$,

$HC=\dfrac{1}{3}AC=\dfrac{BC\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow HB^2+HC^2=BC^2$ nên $BM\perp AC$

$\Rightarrow$ BM đi qua H(−2; 1), nhận $\overrightarrow{IH}=\left(-1;-1\right)$ làm VTPT có phương trình $x+y+1=0 \Rightarrow$ tọa độ B có dạng B(t; − t − 1).

Lại có $IA=IB$ nên $18=\left(t+1\right)^2+\left(t+3\right)^2 \Leftrightarrow t^2+4t-4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2-\sqrt{8} \\ t=-2+\sqrt{8} \end{array}\right.$. Do đó $\left[\begin{array}{l} B\left(-2-2\sqrt{2};1+2\sqrt{2}\right) \\ B\left(-2+2\sqrt{2};1-2\sqrt{2}\right) \end{array}\right.$

Đáp án A

Ví dụ 4 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $OABC$ (O là gốc tọa độ) có diện tích bằng 6, OA song song với BC, đỉnh $A\left(-1;2\right)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $\left(d_1\right): x+y+1=0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $\left(d_2\right): 3x+y+2=0$. Đáp án nào sau đây chính xác nhất:

A. Chỉ có một cặp B, C thỏa mãn yêu cầu bài toán là $B\left(-2;1\right), C\left(1;-5\right)$.

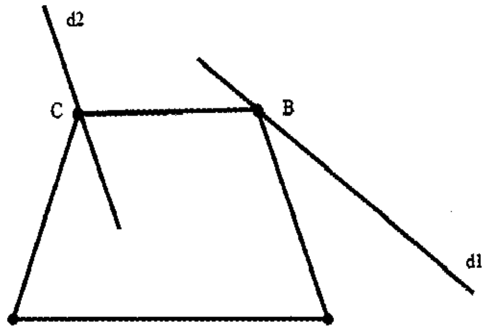
B. Chỉ có một cặp B, C thỏa mãn yêu cầu bài toán là $B\left(\sqrt{7};-1-\sqrt{7}\right), C\left(-1-\sqrt{7};1+3\sqrt{7}\right)$.

C. $B\left(-2;2\right)$

D. $B\left(\sqrt{7};-1-\sqrt{7}\right), C\left(-1-\sqrt{7};1+3\sqrt{7}\right)$ hoặc $B\left(-2;1\right), C\left(1;-5\right)$

Phân tích.

- Có O, A nên viết được phương trình $OA: 2x+y=0$, và $OA \parallel BC \Rightarrow BC: 2x+y+m=0 \left(m\neq 0\right)$



- Tham số điểm B dựa vào hệ :

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+y+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-m \\ y=m-2 \end{cases} \Rightarrow B(1-m;m-2)$$

- Tham số điểm C dựa vào hệ:

$$\begin{cases} 3x+y+2=0 \\ 2x+y+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m-2 \\ y=4-3m \end{cases} \Rightarrow C(m-2;4-3m)$$

- Bây giờ chỉ cần thiết lập một phương trình ẩn m dựa vào dữ kiện diện tích bằng 6 nữa là xong.

Lời giải.

$OA: 2x+y=0$.

$OA \parallel BC \Rightarrow BC: 2x+y+m=0\ (m \neq 0)$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+y+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-m \\ y=m-2 \end{cases} \Rightarrow B(1-m;m-2)$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x+y+2=0 \\ 2x+y+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m-2 \\ y=4-3m \end{cases} \Rightarrow C(m-2;4-3m)$.

$S_{OABC} = \frac{1}{2}(OA+BC).d(O,BC) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\left[\sqrt{(-1)^2+2^2}+\sqrt{(2m-3)^2+(4m-6)^2}\right].\frac{|m|}{\sqrt{2^2+1^2}}=6$

$\Leftrightarrow (|2m-3|+1)|m|=12$.

Giải phương trình này bằng cách chia trường hợp để phá dấu giá trị tuyệt đối ta được $m=1-\sqrt{7}; m=3$.

Vậy $B(\sqrt{7};-1-\sqrt{7}), C(-1-\sqrt{7};1+3\sqrt{7})$ hoặc $B(-2;1), C(1;-5)$

Đáp án D

Ví dụ 5 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình AB, AC lần lượt là $x+2y-2=0$, $2x+y+1=0$, điểm $M(1;2)$ thuộc đoạn thẳng BC. Tìm tọa độ điểm D sao cho tích vô hướng $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

A. Không tồn tại điểm D.

B. Có hai điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán.

C. Có một điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán.

D. $D(0;3)$ hoặc $D(1;2)$

Phân tích.

- Đầu tiên ta thấy BC đi qua $M(1;2)$ và góc B bằng góc C nên có thể viết được phương trình BC dựa vào góc.

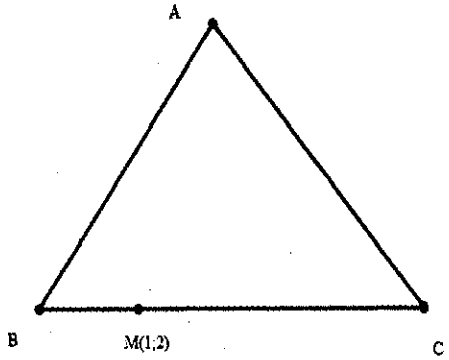
- Gọi trung điểm của BC là I.

Ta có $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IB})(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IB})(\overrightarrow{DI}-\overrightarrow{IB})$

$$= DI^2 - \frac{BC^2}{4} \geq -\frac{BC^2}{4}$$

Do đó $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{BC^2}{4}$ khi $D \equiv I$.

Lời giải



Gọi véctơ pháp tuyến của AB, AC, BC lần lượt là $\overrightarrow{n_1}(1;2)$

Pt BC có dạng $a(x-1)+b(y-2)=0$, với $a^2+b^2>0$.

Tam giác ABC cân tại A nên

$$\cos B = \cos C \Leftrightarrow \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3}\right)\right| = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3}\right)\right| \Leftrightarrow$$

$$\frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{5}} = \frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=b \end{array}\right.$$

Với $a=-b$. Chọn $b=-1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow BC: x-y+1=0 \Rightarrow B(0;1), C\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, không thỏa mãn M thuộc đoạn BC.

Với $a=b$. Chọn $a=b=1 \Rightarrow BC: x+y-3=0 \Rightarrow B(4;-1), C(-4;7)$, thỏa mãn M thuộc đoạn BC.

Gọi trung điểm của BC là $I \Rightarrow I(0;3)$.

Ta có: $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IC}\right) = \left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{DI}-\overrightarrow{IB}\right) = DI^2 - \frac{BC^2}{4} \geq -\frac{BC^2}{4}$.

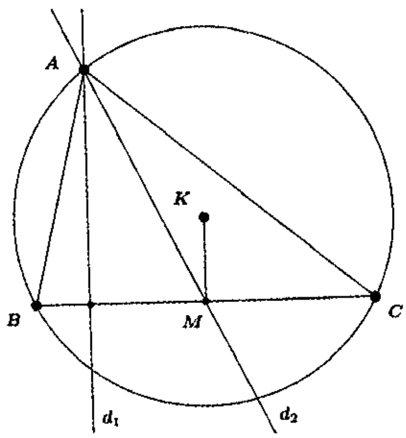
Dấu bằng xảy ra khi $D \equiv I$. Vậy $D(0;3)$

Đáp án C

Ví dụ 6 Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có tâm đường tròn ngoại tiếp là điểm $K\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$, đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh *A* lần lượt có phương trình là $3x-4y+5=0$ và $2x-y=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*?

A. $\begin{cases} A(3;1) \\ B(2;5) \\ C(0;2) \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} A(-1;6) \\ B(2;-1) \\ C(-1;3) \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} A(3;-4) \\ B(1;6) \\ C(4;3) \end{cases}$ **D.** $B(2;-1), C(-1;3)$

Lời giải



Từ giả thiết, tọa độ của A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x-4y+5=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A(1;2)$$

Gọi M là trung điểm của BC $KM // d_1$.

Đường thẳng KM đi qua $K\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}(4;3)$ có phương trình

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} + 4t \\ y = -\dfrac{1}{2} + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} + 4t \\ y = -\dfrac{1}{2} + 3t \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(\dfrac{1}{2};1)$

Đường thẳng BC đi qua điểm $M(\dfrac{1}{2};1)$ vuông góc với $d_1 : 3x - 4y + 5 = 0$

Có phương trình $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + 3m \\ y = 1 - 4m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow B(\dfrac{1}{2} + 3m; 1 - 4m)$

$\Rightarrow KB^2 = \left(\dfrac{1}{2} + 3m + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(1 - 4m + \dfrac{1}{2}\right)^2 = (2 + 3m)^2 + \left(\dfrac{3}{2} - 4m\right)^2 = 25m^2 + \dfrac{25}{4}$

Từ giả thiết, ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$AK^2 = \left(1 + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(2 + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{50}{4}.$

Mà: $BK^2 = AK^2 = CK^2 \Leftrightarrow 25m^2 + \dfrac{25}{4} = \dfrac{50}{4} \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{1}{2}$

Với $m = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ ta có điểm $(2;-1)$.

Với $m = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ ta có điểm $(-1;3)$.

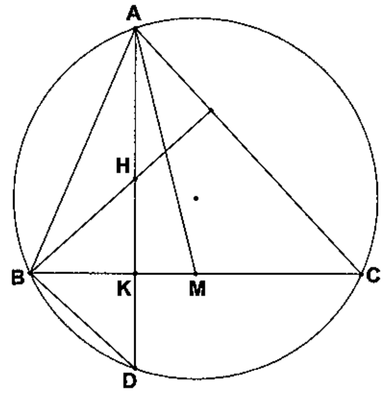
Vậy tọa độ 2 đỉnh còn lại B và C có tọa độ là $B(2;-1), C(-1;3)$.

Đáp án D

Ví dụ 7 Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ *Oxy*, cho tam giác nhọn *ABC*. Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh *A* và đường thẳng *BC* lần lượt có phương trình là $3x + 5y - 8 = 0$, $x - y - 4 = 0$. Đường thẳng qua *A* vuông góc với đường thẳng *BC* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* tại điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng *AB, AC*; biết rằng hoành độ của điểm *B* không lớn hơn 3.

A. $\begin{cases} AB : 3x + y - 4 = 0 \\ AC : y - 1 = 0. \end{cases}$ B. $\begin{cases} AB : x + y - 4 = 0 \\ AC : 2y - 1 = 0. \end{cases}$ C. $\begin{cases} AB : x + 3y - 4 = 0 \\ AC : y - 1 = 0. \end{cases}$ D. $\begin{cases} AB : 3x + y - 4 = 0 \\ AC : y - 9 = 0. \end{cases}$

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC, H là trực tâm tam giác ABC, ABC, K là giao điểm của BC và AD, E là giao điểm của BH và AC. Ta kí hiệu $\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{u_d}$ lần lượt là vtpt, vtcp của đường thẳng d. Do M là giao điểm của AM và BC nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y-4=0 \\ 3x+5y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

AD vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_{AD}}=\overrightarrow{u_{BC}}=(1;1)$, mà AD đi qua điểm D suy ra phương trình của $AD: 1(x-4)+1(y+2)=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$. Do A là giao điểm của AD và AM nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x+5y-8=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$$

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y-4=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow K(3;-1)$$

Tứ giác $HKCE$ nội tiếp nên $\widehat{BHK}=\widehat{KCE}$, mà $\widehat{KCE}=\widehat{BDA}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AB}$).

Suy ra $\widehat{BHK}=\widehat{BDK}$, vậy K là trung điểm của HD nên $H(2;4)$.

Do B thuộc $BC \Rightarrow B(t;t-4)$, kết hợp với M là trung điểm BC suy ra $C(7-t;3-t)$.

$\overrightarrow{HB}(t-2;t-8); \overrightarrow{AC}(6-t;2-t)$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên

$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (t-2)(6-t)+(t-8)(2-t)=0 \Leftrightarrow (t-2)(14-2t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=7 \end{array}\right.$

Do $t \le 3 \Rightarrow t=2 \Rightarrow B(2;-2), C(5;1)$. Ta có

Suy ra $AB: 3x+y-4=0;\ AC: y-1=0.\ \overrightarrow{AB}=(1;-3),\ \overrightarrow{AC}=(4;0) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}}=(3;1), \overrightarrow{n_{AC}}=(0;1)$

Đáp án A

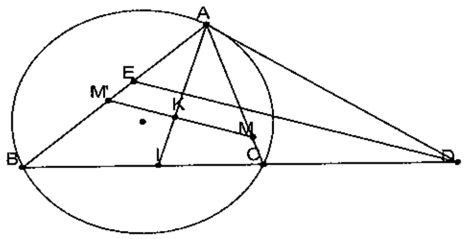
Ví dụ 8 Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của $\widehat{ADB}$ có phương trình $x-y+2=0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

A. $5x-3y+7=0$ B. $5x-y+7=0$ C. $5x-3y+8=0$ D. $x-3y+7=0$

Lời giải

Gọi AI là phân giác trong của $\widehat{BAC}$

Ta có: $\widehat{AID}=\widehat{ABC}+\widehat{BAI}$



$\widehat{IAD} = \widehat{CAD} + \widehat{CAI}$

Mà $\widehat{BAI} = \widehat{CAI}$, $\widehat{ABC} = \widehat{CAD}$ nên $\widehat{AID} = \widehat{IAD}$

$\Rightarrow \Delta DAI$ cân tại D $\Rightarrow DE \perp AI$

Phương trình đường thẳng AI là: $x + y - 5 = 0$.

Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AI

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng MM': $x - y + 5 = 0$

Gọi $K = AI \cap MM' \Rightarrow$ K(0;5) $\Rightarrow$ M'(4;9)

VTCP của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AM'} = (3;5)$

$\Rightarrow$ VTPT của đường thẳng AB là $\vec{n} = (5;-3)$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $5(x-1) - 3(y-4) = 0 \Leftrightarrow 5x - 3y + 7 = 0$.

Đáp án A

Ví dụ 9 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*. Cho hình vuông *ABCD*, *M* là trung điểm của *AD*, $N \in DC$ sao cho $NC = 3ND$, đường tròn tâm *N* qua *M* cắt *AC* tại *J*(3; 1), $J \neq I = AC \cap BD$, đường thẳng đi qua *M*, *N* có phương trình: $(d): x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm B.

A. $\begin{cases} B(3;9) \\ B(8;1) \end{cases}$ B. $\begin{cases} B(7;6) \\ B(8;1) \end{cases}$ C. $\begin{cases} B(3;6) \\ B(3;1) \end{cases}$ D. $\begin{cases} B(3;6) \\ B(8;1) \end{cases}$

Lời giải

MN cắt đường tròn tâm N tại K. Ta chứng minh được tứ giác MIJK nội tiếp

$\widehat{NKJ} = \widehat{AIM} = 45^0 \Rightarrow \widehat{JNK} = 90^0$

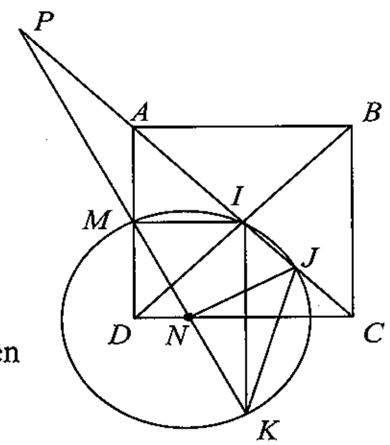
$NJ \perp MN$ nên có phương trình: $x - y - 2 = 0$.

Suy ra được $N\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$

ΔJMN vuông cân tại *N* nên $MJ = \sqrt{2}PN \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(3;-4) \\ M(-2;1) \end{array}\right.$

Với $M(-2;1)$ gọi $P = MN \cap JA$ ta có $\overrightarrow{NP} = 3.\overrightarrow{NM} \Rightarrow P(-7;6)$

$\overrightarrow{PA} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{PJ}$ tìm được $A(-3;4)$, vì *A* là trung điểm của *IP* nên *I*(1; 2)



Ta có $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow B(3;6)$

Tương tự với ta tìm được $A(6;-5)$, $I(4;-1)$ và $B(8;1)$

Vậy tọa độ điểm *B*(3;6) hoặc *B*(8;1).

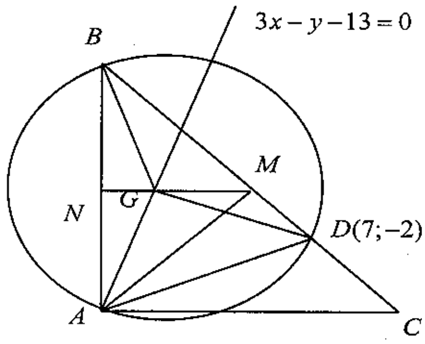
Đáp án D

Ví dụ 10 Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BG, G là trọng tâm tam giác ABM, điểm $D(7;\,-2)$ là điểm nằm trên đoạn MC sao cho $GA = GD$. Tìm tọa độ điểm A, lập phương trình AB? Biết hoành độ của điểm A nhỏ hơn 4 và AG có phương trình.

A. $\begin{cases} A(3;-4). \\ AB: 2x-3=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} A(1;-4). \\ AB: x-3=0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} A(3;-4). \\ AB: x-3=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} A(3;-4). \\ AB: x-6=0 \end{cases}$

Lời giải

Trên mặt phẳng tọa độ oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác ABM, điểm $D(7;-2)$ là điểm nằm trên đoạn MC sao cho GA = GD. Tìm tọa độ điểm A, lập phương trình AB , biết hoành độ của điểm A nhỏ hơn 4 và AG có phương trình $3x-y-13=0$.



Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng AG

$$d(D,AG)=\frac{|3.7+2-13|}{\sqrt{9+1}}(9+1)=\sqrt{10}$$

Xác định hình chiếu của D trên AG.

Ta có tam giác ABC vuông cân đỉnh A nên tam giác ABM vuông cân đỉnh M

Suy ra GB = GA. Theo giả thiết GA = GD nên tam giác ABM nội tiếp đường tâm G bán kính GA.

Ta có: $\widehat{AGD} = 2\widehat{ABD} = 90^0$ suy ra DG $\perp$ AG suy ra GD = $\sqrt{10}$

Suy ra tam giác AGD vuông cân đỉnh G suy ra AD = $2\sqrt{10}$

Tìm điểm A nằm trên đường thẳng AG sao cho AD = $2\sqrt{10}$

Giả sử A(t; $3t$ - 13)

AD = $2\sqrt{10}$ $\Leftrightarrow$ (t - 7)2 + (3t -11)2 = 20

$\Leftrightarrow$ t^2 -14t + 49 + 9t^2 - 66t +121 -20 = 0

$\Leftrightarrow$10t^2 -80t + 150 = 0 $\Leftrightarrow$ t^2 -8t + 15 = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=3 \end{array}\right.$

Với t = 3 suy ra A (3; -4).

Tìm số đo góc tạo bởi AB và AG.

$$\cos\widehat{NAG}=\frac{NA}{AG}=\frac{NM}{AG}=\frac{3NG}{AG}=\frac{3NG}{\sqrt{AN^2+NG^2}}=\frac{3NG}{\sqrt{9NG^2+NG^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Giả sử đường thẳng AB có véctơ pháp tuyến $\vec{n}$ = (a; b)ta có:

$\dfrac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ $\Leftrightarrow$ 9a^2 + b^2 - 6a =9a^2 + 9b^2 $\Leftrightarrow$ 8b^2 + 6a = 0

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 4b=-3a \end{array}\right.$

TH1: b = 0 chọn a = 1 sy ra suy ra $\vec{n}$ = (1; 0)AB: x-3 = 0

$$d(D,AB)=\frac{|7-3|}{\sqrt{1}}=4>\sqrt{10}=d(D,AG)$$

TH2: 4b = - 3a chọn suy ra $\vec{n}$ = (4: -3)AB: 4(x- 3) - 3(y+4) = 0

⇔ 4x - 3y -24 = 0

$$d(D,AB)=\frac{|4.7+3.2-24|}{\sqrt{16+9}}=\frac{10}{5}=2<\sqrt{10}$$

Trong hai trường hợp trên xét thấy d(D, AB)> d (A, AG) nên AB: x-3 = 0

Vậy: A(3 ;-4), AB: x-3 = 0.

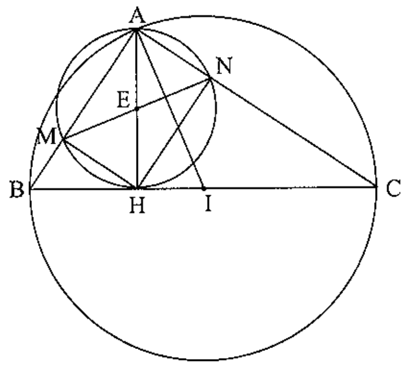
Đáp án C

Ví dụ 11 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* vuông tại *A* nội tiếp đường tròn (*T*) có phương trình: $x^2+y^2-6x-2y+5=0$. Gọi *H* là hình chiếu của *A* trên *BC*. Đường tròn đường kính *AH* cắt *AB*, *AC* lần lượt tại *M*, *N*. Tìm tọa độ điểm *A* và viết phương trình cạnh *BC*, biết đường thẳng *MN* có phương trình: $20x-10y-9=0$ và điểm *H* có hoành độ nhỏ hơn tung độ.

A. $\begin{cases}BC:2x+y-7=0\\A(1;2)\end{cases}$ B. $\begin{cases}BC:2x+y-7=0\\A(5;2)\end{cases}$ C. $\begin{cases}BC:2x+y-9=0\\A(1;2)\end{cases}$ D. $\begin{cases}BC:2x+y-7=0\\A(1;6)\end{cases}$

Lời giải

(T) có tâm bán kính $R=\sqrt{5}$.



Do $IA=IC\Rightarrow \widehat{IAC}=\widehat{ICA}I(3;1)$, (1)

Đường tròn đường kính AH cắt BC tại M (cùng vuông góc AB).

$\Rightarrow \widehat{MHB}=\widehat{ICA}$. (2)

Ta có: $\widehat{ANM}=\widehat{AHM}$ (chắn cung AM) (3) Từ (1), (2), (3) ta có:

$\widehat{IAC}+\widehat{ANM}=\widehat{ICA}+\widehat{AHM}=\widehat{MHB}+\widehat{AHM}=90^o$

Suy ra: AI vuông góc MN

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng IA là: $x+2y-5=0$

Giả sử $A(5-2a;a)\in IA.\Rightarrow MH\perp AB\Rightarrow MH//AC$

Mà $A\in(T)\Leftrightarrow(5-2a)^2+a^2-6(5-2a)-2a+5=0\Leftrightarrow 5a^2-10a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=2\end{array}\right.$

Với $a=2\Rightarrow A(1;2)$ (thỏa mãn vì A, I khác phía MN)

Với $a=0\Rightarrow A(5;0)$ (loại vì A, I cùng phía MN)

Gọi E là tâm đường tròn đường kính AH

Do E là trung điểm AH$\Rightarrow H\left(2t-1;4t-\frac{38}{10}\right)\Rightarrow E\in MN\Rightarrow E\left(t;2t-\frac{9}{10}\right)$

Vì

$AH \perp HI \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{IH} = \vec{0} \Leftrightarrow 20t^2 - \frac{272}{5}t + \frac{896}{25} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(2t-2;4t-\frac{58}{10}\right), \overrightarrow{IH} = \left(2t-4;4t-\frac{48}{10}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow H\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right) \\ t = \frac{28}{25} \Rightarrow H\left(\frac{31}{25};\frac{17}{25}\right) \end{array}\right.$$

Chỉ có $t = \frac{8}{5} \Rightarrow H\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right)$ (thỏa mãn).

Ta có: $\overrightarrow{AH} = \left(\frac{6}{5};\frac{3}{5}\right) \Rightarrow BC$ nhận $\vec{n} = (2;1)$ là VTPT

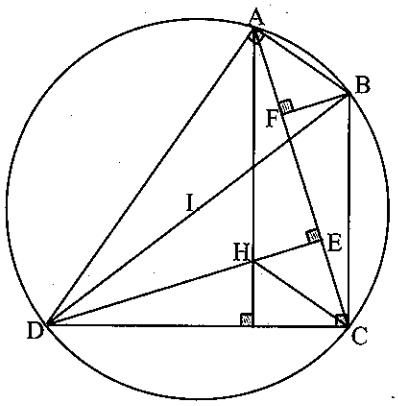
$\Rightarrow$ Phương trình BC là: $2x + y - 7 = 0$.

Đáp án A

Ví dụ 12 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD. Đỉnh B thuộc đường thẳng Δ có phương trình $x + y - 5 = 0$. Các điểm E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và B lên AC. Tìm tọa độ các đỉnh B, D biết $CE = \sqrt{5}$ và $A(4;3)$, $C(0;-5)$.

A. $\begin{cases} B(5;0) \\ D(-5;4) \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} B(5;3) \\ D(-5;0) \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} B(5;0) \\ D(-6;0) \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} B(5;0) \\ D(-5;0) \end{cases}$

Lời giải



Gọi H là trực tâm tam giác ACD, suy ra $CH \perp AD$ nên $CH // AB$(1)

Mặt khác $AH // BC$ (cùng vuông góc với CD) (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $ABCH$ là hình bình hành nên $CH=AB$ (3)

Ta có: $\widehat{HCE} = \widehat{BAF}$ (so le trong) (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\Delta HCE = \Delta BAF$ (cạnh huyền và góc nhọn). Vậy $CE = AF$.

Vì $\widehat{DAB} = \widehat{DCB} = 90^0$ nên E, F nằm trong đoạn AC.

Phương trình đường thẳng AC: $2x - y - 5 = 0$.

Vì $F \in AC$ nên $F(a;2a-5)$. Vì $AF = CE = \sqrt{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = 3 \end{array}\right.$

Với $a = 5 \Rightarrow F(5;5)$ (không thỏa mãn vì F nằm ngoài đoạn AC)

Với $a = 3 \Rightarrow F(3;1)$ (thỏa mãn). Vì $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EC} \Rightarrow E(1;-3)$

BF qua F và nhận $\overrightarrow{EF}(2;4)$ làm một véctơ pháp tuyến, do đó BF có phương trình:

$x+2y-5=0$.

B là giao điểm của Δ và BF nên tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x+2y-5=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B(5;0)$

Đường thẳng DE qua E và nhận $\overrightarrow{EF}(2;4)$ làm một véctơ pháp tuyến, DE có phương trình:

$x+2y+5=0$.

Đường thẳng DA qua A và nhận $\overrightarrow{AB}(1;-3)$ làm một véctơ pháp tuyến, DA có phương trình:

$x-3y+5=0$.

D là giao điểm của DA và DE nên tọa độ D là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x+2y+5=0 \\ x-3y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow D(-5;0)$. Kết luận: $B(5;0), D(-5;0)$

Đáp án D

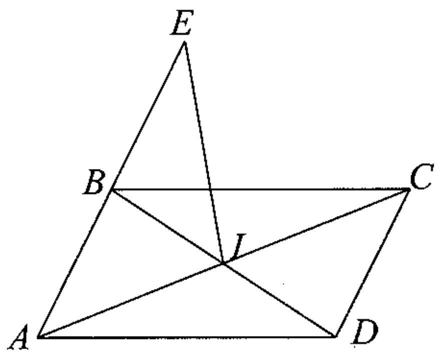
Ví dụ 13 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có tâm $I(2\sqrt{3}-2;5)$, $BC=2AB$, góc $\widehat{BAD}=60^0$. Điểm đối xứng với A qua B là $E(-2;9)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$ biết rằng A có hoành độ âm?

A. $\begin{cases} A(-2;1), B(-2;5) \\ C(4\sqrt{3}-2;9), D(4\sqrt{3}-2;5) \end{cases}$

b. $\begin{cases} A(-2;3), B(-2;5) \\ C(4\sqrt{3}-2;9), D(4\sqrt{3}-2;5) \end{cases}$

C. $\begin{cases} A(-2;6), B(-2;1) \\ C(4\sqrt{3}-2;9), D(4\sqrt{3}-2;5) \end{cases}$

Lời giải



Đặt: $AB=m \Rightarrow AD=2m$.

Ta có: $BD^2=AB^2+AD^2-2AB.AD\cos 60^0=3m^2$

$\Rightarrow BD=m\sqrt{3}$

Do đó: $AB^2+BD^2=AD^2$ nên tam giác ABD vuông tại B, nghĩa là $IB \perp AE$.

$IE^2=IB^2+BE^2=\left(\dfrac{m\sqrt{3}}{2}\right)^2+m^2=\dfrac{7m^2}{4}$.

Mặt khác: $IE^2=(2\sqrt{3})^2+4^2=28$ nên ta có

$\dfrac{7m^2}{4}=28 \Leftrightarrow m=4 \Rightarrow IB=\dfrac{m\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là vectơ pháp tuyến của AB $(a^2+b^2>0)$ khi đó AB có phương trình:

$a(x+2)+b(y-9)=0 \Leftrightarrow ax+by+2a-9b=0$

Ta lại có $d(I,AB)=IB \Rightarrow \dfrac{\left|2\sqrt{3}a-4b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow (2\sqrt{3}a-4b)^2=12(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow b(b-4\sqrt{3}a)=0 \Leftrightarrow b=0, b=4\sqrt{3}a$.

+) Với $b = 0$, chọn A = 1, khi đó AB có phương trình $x+2=0$, suy ra IB có phương trình $y-5=0$. Do $B=AB\cap IB$ nên $B(-2;5)$, mà B là $x+4\sqrt{3}y+2-36\sqrt{3}=0$ trung điểm của AE nên $A(-2;1)$ (thỏa mãn điều kiện $x_A<0$).

Do I là trung điểm của AC và BD nên ta suy ra $C(4\sqrt{3}-2;9), D(4\sqrt{3}-2;5)$

+) Với $b=4\sqrt{3}a$, chọn A = 1 $\Rightarrow b=4\sqrt{3}$, khi đó AB có phương trình, suy ra IB có phương trình $4\sqrt{3}(x-2\sqrt{3}+2)-(y-5)=0$.

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}x-y+8\sqrt{3}-19=0$

Do $B=AB\cap IB$ nên $B\left(\dfrac{16\sqrt{3}-14}{7};\dfrac{59}{7}\right)$, mà B là trung điểm của AE nên

$A\left(\dfrac{32\sqrt{3}-14}{7};\dfrac{55}{7}\right)$ (không thỏa mãn điều kiện $x_A<0$).

Vậy $A(-2;1), B(-2;5), C(4\sqrt{3}-2;9), D(4\sqrt{3}-2;5)$

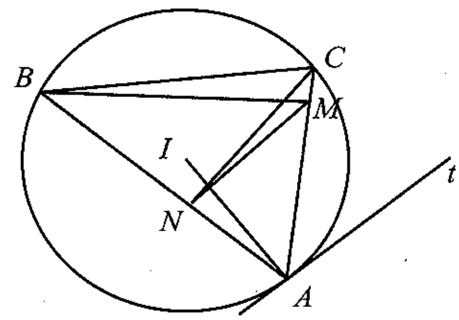
Đáp án A

Ví dụ 14 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(x-2)^2+(y-3)^2=25$. Chân các đường vuông góc hạ từ B và C xuống AC, AB thứ tự là $M(1;0)$, $N(4;0)$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết đỉnh A có tung độ âm?

A. $\begin{cases}A(2;-2)\\B(7;3)\\C(-2;6)\end{cases}$ B. $\begin{cases}A(2;-2)\\B(7;1)\\C(-2;3)\end{cases}$ C. $\begin{cases}A(6;-2)\\B(7;3)\\C(-2;6)\end{cases}$ D. $\begin{cases}A(2;-2)\\B(5;3)\\C(-2;6)\end{cases}$

Lời giải

Kẻ tiếp tuyến At với đường tròn (C) tại A. Ta có tứ giác $BCMN$ nội tiếp nên góc $\widehat{ABC}=\widehat{AMN}$ (cùng bù với góc $\widehat{NMC}$).



Lại có $\widehat{ABC}=\widehat{MAt}=\dfrac{1}{2}sd\widehat{AC}$, suy ra $\widehat{MAt}=\widehat{AMN}$. Mà chúng ở vị trí so le trong nên $MN//At$, hay IA vuông góc với MN (I là tâm đường tròn (C)).

Ta có $\overrightarrow{MN}(3;0), I(2;3) \Rightarrow AI: x=2$. A là giao của IA và (C) nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}x=2\\(x-2)^2+(y-3)^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2;y=8\\x=2;y=-2\end{array}\right.$.

A có tung độ âm nên $A(2;-2)$.

Phương trình $AN: x-y-4=0$.

B là giao điểm (khác A) của AN và (C) suy ra tọa độ của $B(7;3)$.

Phương trình $AM: 2x+y-2=0$.

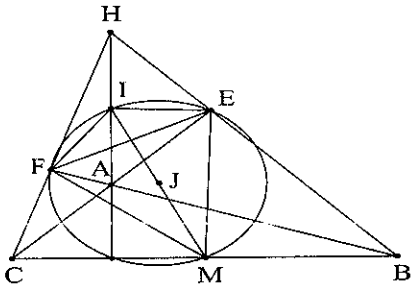
C là giao điểm (khác A) của AM và (C) suy ra tọa độ của $C(-2;6)$.

Đáp án A

Ví dụ 15 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H, phương trình đường thẳng AH là $3x-y+3=0$, trung điểm của cạnh BC là $M(3;0)$. Gọi E và F lần lượt là chân đường cao hạ từ B và C đến AC và AB, phương trình đường thẳng EF là $x-3y+7=0$. Tìm tọa độ điểm A, biết A có hoành độ dương.

$A(2+\sqrt{2};6+3\sqrt{2})$ b. $A(1+\sqrt{2};6+3\sqrt{2})$ c. $A(1+\sqrt{2};8+3\sqrt{2})$ d. $A(1+\sqrt{2};6+3\sqrt{3})$

Lời giải



Gọi I trung điểm AH. Tứ giác AEHF nội tiếp và bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn nên IM ⊥ EF (đoạn nối tâm vuông góc với dây chung).

Ta có: $\widehat{IEF}=\widehat{ABE}$ (cùng phụ góc A hoặc cùng phụ góc EHF)

và: $\widehat{ABE}=\frac{1}{2}\widehat{EMF}=\widehat{IME}$

$\Rightarrow \widehat{MEI}=90^0 \Rightarrow \widehat{MFI}=\widehat{MEI}=90^0$.

Do đó tứ giác MEIF nội tiếp đường tròn đường kính IM, tâm là trung điểm J của IM.

(Đường tròn (J) là đường tròn Euler)

Đường thẳng IM qua M và vuông góc EF nên có phương trình: 3x + y – 9 = 0.

I là giao điểm của AH và IM nên tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}3x-y+3=0\\3x+y-9=0\end{cases}$

$\Rightarrow$I(1; 6).

Đường tròn đường kính IM có tâm J(2 ; 3) và bán kính $r=JM=\sqrt{10}$ nên có phương trình: (x – 2)2 + (y – 3)2 = 10.

Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x-3y+7=0\\(x-2)^2+(y-3)^2=10\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=3y-7\\(y-3)^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases} \Rightarrow$E(5 ; 4) hoặc E(-1;2).

Vì A ∈ AH nên A(a ; 3a + 3)

Ta có: $IA=IE \Leftrightarrow IA^2=IE^2 \Leftrightarrow (a-1)^2+(3a-3)^2=20 \Leftrightarrow a=1\pm\sqrt{2}$

Vì A có hoành độ dương nên $A(1+\sqrt{2};6+3\sqrt{2})$.

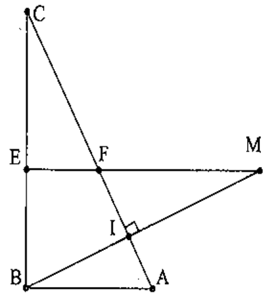
Đáp án B

Ví dụ 16 Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* vuông tại *B*, $BC = 2BA$. Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm của *BC, AC*. Trên tia đối của tia *FE* lấy điểm *M* sao cho $FM = 3FE$. Biết điểm *M* có tọa độ $(5;-1)$, đường thẳng *AC* có phương trình $2x + y - 3 = 0$, điểm *A* có hoành độ là số nguyên. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*.

A. $\begin{cases} A(3;-3) \\ B(1;-3) \\ C(1;2) \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} A(5;-3) \\ B(1;-3) \\ C(1;1) \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} A(3;-3) \\ B(1;-3) \\ C(1;1) \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} A(5;-3) \\ B(1;-3) \\ C(1;4) \end{cases}$

Lời giải

Gọi I là giao điểm của BM và AC.



Ta thấy $BC = 2BA \Rightarrow EB = BA, FM = 3FE \Rightarrow EM = BC$

$\Delta ABC = \Delta BEM \Rightarrow \widehat{EBM} = \widehat{CAB} \Rightarrow BM \perp AC$.

Đường thẳng BM đi qua M vuông góc với AC $BM: x - 2y - 7 = 0$.

Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{5} \\ y = \dfrac{-11}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow I\left(\dfrac{13}{5}; \dfrac{-11}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(\dfrac{12}{5}; \dfrac{6}{5}\right)$, $\overrightarrow{IB} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{IM} = \left(\dfrac{-8}{5}; \dfrac{-4}{5}\right) \Rightarrow B(1;-3)$

Trong ΔABC ta có: $\dfrac{1}{BI^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{5}{4BA^2} \Rightarrow BA = \dfrac{\sqrt{5}}{2}BI$

Mặt khác: $BI = \sqrt{\left(\dfrac{-8}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{-4}{5}\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, suy ra $BA = \dfrac{\sqrt{5}}{2}BI = 2$

Gọi toạ độ $A(a, 3-2a)$.

Ta có $BA^2 = 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (6-2a)^2 = 4 \Leftrightarrow 5a^2 - 26a + 33 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \vee a = \dfrac{11}{5}$

Do a là số nguyên suy ra $A(3;-3)$. $\overrightarrow{AI} = \left(\dfrac{-2}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AI} = (-2;4) \Rightarrow C(1;1)$. Vậy $A(3;-3), B(1;-3), C(1;1)$.

Đáp án C

Ví dụ 17 Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho hình thang *ABCD* vuông tại *A, B* và *AD* = 2BC. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của điểm *A* lên đường chéo *BD* và *E* là trung điểm của đoạn *HD*. Giả sử $H(-1;3)$, phương trình đường thẳng $AE: 4x + y + 3 = 0$ và $C\left(\dfrac{5}{2};4\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh *A, B* và *D* của hình thang *ABCD*?

A. $\begin{cases} A(-1;1) \\ B(3;3) \\ C(-2;5) \end{cases}$ B. $\begin{cases} A(-1;2) \\ B(3;3) \\ C(-2;3) \end{cases}$ C. $\begin{cases} A(-1;1) \\ B(1;3) \\ C(-2;3) \end{cases}$ D. $\begin{cases} A(-1;1) \\ B(3;3) \\ C(-2;3) \end{cases}$

Lời giải

– Qua E dựng đường thẳng song song với AD cắt AH tại K và cắt AB tại I

Suy ra: +) K là trực tâm của tam giác ABE, nên BK $\perp$ AE.

+) K là trung điểm của AH nên $KE \parallel = \frac{1}{2}AD$ hay $KE \parallel = BC$

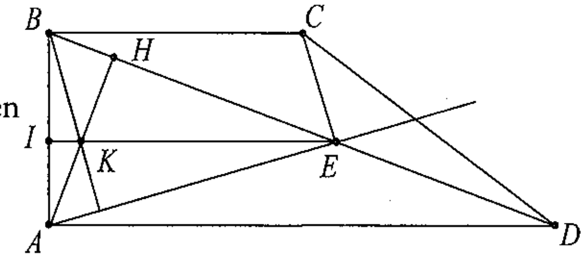
Do đó: $CE \perp AE \Rightarrow$ CE: 2x – 8y + 27 = 0

Mặt khác E là trung điểm của HD nên

– Khi đó BD: y – 3 = 0, suy ra AH: x + 1 = 0 nên A(–1; 1).

– Suy ra AB: x – 2y +3=0. Do đó: B(3; 3).

Vậy A(–1; 1), B (3; 3) và D(–2; 3).

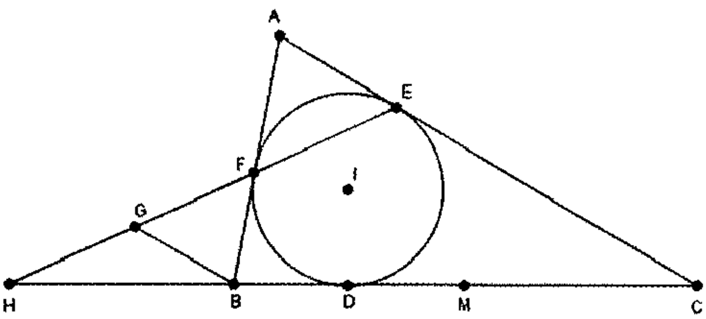


Đáp án D

Ví dụ 18 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết D(3;1), trung điểm của BC là M(4;2), phương trình EF: 3x – y – 2 = 0 và B có hoành độ bé hơn 4.

A. $\begin{cases} A(-1;3) \\ B(2;0) \\ C(6;4) \end{cases}$ B. $\begin{cases} A(-1;3) \\ B(2;0) \\ C(6;4) \end{cases}$ C. $\begin{cases} A(-1;3) \\ B(3;0) \\ C(6;4) \end{cases}$ D. $\begin{cases} A(-1;3) \\ B(2;0) \\ C(3;4) \end{cases}$

Lời giải



Phương trình đường thẳng *BC*: $x - y - 2 = 0$

Gọi *H* là giao điểm của *EF* và *BC* ta có tọa độ *H* là nghiệm của hệ:

$\frac{HB}{HC} = \frac{GB}{CE} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow HB.DC = DB.HC$

Từ các giả thiết ta thấy *H* nằm trên tia đối của tia *BC*.

Ta chứng minh $MD.MH = MB^2$.

Thật vậy, qua *B* kẻ đường thẳng song song với *CA* cắt *HE* tại *G*. Khi đó ta có $BG = BF = BD$ đồng thời $\frac{HB}{HC} = \frac{GB}{CE} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow HB.DC = DB.HC$. Vì M là trung điểm đoạn *BC* nên ta được:

$(MH - MB)(MB + MD) = (MB - MD)(MH + MB) \Leftrightarrow MH.MD = MB^2$.

Gọi $B(t;\, t-2)$, $t<4$ ta có $2(t-4)^2=8 \Leftrightarrow t-4=-2 \Leftrightarrow t=2, B(2;0) \Rightarrow C(6;4)$.

Phương trình đường tròn tâm B bán kính BD là (T): $(x-2)^2+y^2=2$.

Đường thẳng EF cắt (T) tại G và F có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=2\\3x-y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\y=-\dfrac{1}{5}\end{cases}$

Vì G nằm giữa H và F nên $F(1;1), G\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$. Khi đó phương trình AB: $x+y-2=0$, AC đi qua C và song song với BG nên có phương trình: $x-7y+22=0$. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$\begin{cases}x+y-2=0\\x-7y+22=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}, A(-1;3)$

Vậy $A(-1;3)$, $B(2;0)$, $C(6;4)$.

Đáp án B

Ví dụ 19 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhận trục hoành làm đường phân giác trong của góc A, điểm $E(3;-1)$ thuộc đường thẳng BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x^2+y^2-2x-10y-24=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết điểm A có hoành độ âm.

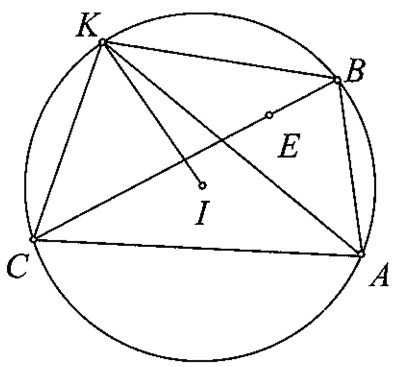
A. $\begin{cases}A(-4;0), B(8;4), C(2;-2)\\A(-4;0), B(2;-2), C(7;4)\end{cases}$

B. $\begin{cases}A(-5;0), B(8;4), C(2;-2)\\A(-3;0), B(2;-2), C(8;4)\end{cases}$

C. $\begin{cases}A(-4;0), B(8;4), C(2;-2)\\A(-4;0), B(2;-2), C(8;4)\end{cases}$

D. $\begin{cases}A(-4;0), B(7;4), C(2;-2)\\A(-4;0), B(2;-2), C(8;4)\end{cases}$

Lời giải



Đường tròn ngoại tiếp có tâm I(1;5).

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}x^2+y^2-2x-10y-24=0\\y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\y=0\end{cases} \vee \begin{cases}x=-4\\y=0\end{cases}$

Do A có hoành độ âm suy ra A(−4;0).

Và gọi K(6; 0),vì AK là phân giác trong góc A nên KB = KC, do đó $KI \perp BC$ và $\overrightarrow{IK}(-5;5)$ là vtpt của đường thẳng BC. $\Rightarrow BC: -5(x-3)+5(y+1)=0 \Leftrightarrow -x+y+4=0$.

Suy ra tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$\begin{cases}x^2+y^2-2x-10y-24=0\\-x+y+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=8\\y=4\end{cases} \vee \begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$

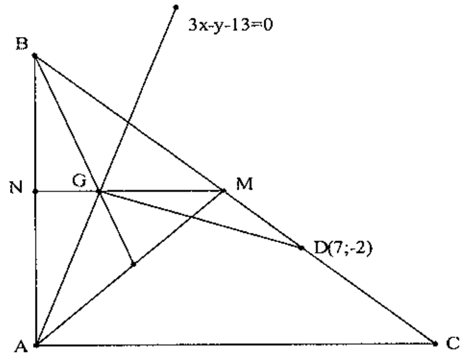
Vây A(− 4; 0), B(8; 4), C(2; −2) và A(−4; 0), C(8; 4), B(2; −2)

Đáp án C

Ví dụ 19 Cho ΔABC vuông cân tại A Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm ΔABM điểm $D(7;-2)$ là điểm nằm trên đoạn MC sao cho $GA = GD$. Tìm tọa độ điểm A lập phương trình AB? Biết hoành độ của A nhỏ hơn 4 và AG có phương trình $3x-y-13=0$.

A. $AB: x-3=0$ **B.** $AB: x-5=0$ **C.** $AB: x-8=0$ **D.** $AB: 2x-3=0$

Lời giải



Ta có $d(D;AG)=\dfrac{|3.7-(-2)-13|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

ΔABM vuông cân $\Rightarrow GA=GB \Rightarrow GA=GB=GD$

Vậy G là tâm đường tròn ngoại tiếp ABD

$\Rightarrow \widehat{AGD}=2\widehat{ABD}=90^0 \Rightarrow \Delta GAD$ vuông cân tại G.

Do đó $GA=GD=d(D;AG)=\sqrt{10} \Rightarrow AD^2=20;$

Gọi $A(a;3a-13); a<4$

$AD^2=20 \Leftrightarrow (a-7)^2+(3a-11)^2=20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5(loai) \\ a=3 \end{array}\right.$

Vậy $A(3;-4)$

Gọi VTPT của AB là $\vec{n}_{AB}(a;b)$

$cos\widehat{NAG}=|cos(\vec{n}_{AB},\vec{n}_{AG})|=\dfrac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{10}}$ (1)

Mặt khác $cos\widehat{NAG}=\dfrac{NA}{AG}=\dfrac{NM}{\sqrt{NA^2+NG^2}}=\dfrac{3NG}{\sqrt{9.NG^2+NG^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 6ab+8b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 3a=-4b \end{array}\right.$

Với $b=0$ chọn $a=1$ ta có $AB: x-3=0;$

Với $3a=-4b$ chọn $a=4; b=-3$ ta có $AB: 4x-3y-24=0$

Nhận thấy với $AB: 4x-3y-24=0$ $d(D;AB)=\dfrac{|4.7-3.(-2)-24|}{\sqrt{16+9}}=2<d(D;AG)=\sqrt{10}$ (loại)

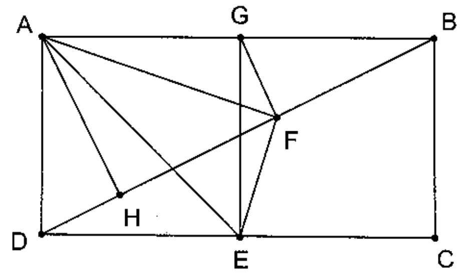
Vậy $AB: x-3=0.$

Đáp án A

Ví dụ 21 Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BD; E, F lần lượt là trung điểm đoạn CD và BH. Biết $A(1; 1)$, phương trình đường thẳng EF là $3x - y - 10 = 0$ và điểm E có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

A. $\begin{cases} B(1;5) \\ C(5;-1) \\ D(3;-1) \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} B(2;5) \\ C(5;-1) \\ D(1;-1) \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} B(1;5) \\ C(6;-1) \\ D(1;-1) \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} B(1;5) \\ C(5;-1) \\ D(1;-1) \end{cases}$

Lời giải



Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CD, $BHAB$. Ta chứng minh $AF \perp EF$.

Ta thấy các tứ giác $ADEG$ và $ADFG$ nội tiếp nên tứ giác $ADEF$ cũng nội tiếp, do đó $AF \perp EF$.

Đường thẳng AF có pt: $x + 3y - 4 = 0$. Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x-y=10 \\ x+3y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17}{5} \\ y=\dfrac{1}{5} \end{cases} \to F\left(\frac{17}{5};\frac{1}{5}\right) \to AF=\sqrt{\frac{32}{5}}$$

Theo giả thiết ta được $E(3;-1)$, phương trình AE: $x + y - 2 = 0$. Gọi $D(x; y)$, tam giác ADE vuông cân tại D nên $\begin{cases} AD=DE \\ AD\perp DE \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+1)^2 \\ (x-1)(x-3)=(y-1)(y+1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ (x-1)(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \text{ hay } D(1;-1) \vee D(3;1)$$

Vì D và F nằm về hai phía so với đường thẳng AE nên $D(1;-1)$.

Khi đó, $C(5; -1)$; $B(1; 5)$.

Vậy $B(1; 5)$; $C(5; -1)$ và $D(1; -1)$.

Đáp án D

Ví dụ 22 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$, đỉnh B thuộc đường thẳng d_1: $2x - y + 2 = 0$, đỉnh C thuộc đường thẳng d_2: $x - y - 5 = 0$. Gọi H là hình chiếu của B xuống đường chéo AC. Biết $M\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right)$; $K(9;2)$ lần lượt thuộc trung điểm AH và CD. Tìm hoành độ các đỉnh của hình chữ nhật biết hoành độ đỉnh C lớn hơn 4.

A. $\begin{cases} A(15;0) \\ B(1;4) \\ C(9;4) \\ D(9;0) \end{cases}$ B. $\begin{cases} A(17;0) \\ B(3;4) \\ C(9;4) \\ D(9;0) \end{cases}$ C. $\begin{cases} A(17;0) \\ B(1;4) \\ C(9;4) \\ D(9;0) \end{cases}$ D. $\begin{cases} A(17;0) \\ B(1;4) \\ C(9;4) \\ D(1;0) \end{cases}$

Lời giải

+ Qua M kẻ đường thẳng song song với CD cắt BH, BC lần lượt tại P, N. Tứ giác $MKCP$ là hình bình hành do $MP//CK$, $MP = CK = \frac{1}{2}AB$

+ Mặt khác ta có $MN \perp BC$ và $BH \perp MC$ suy ra P là trực tâm của tam giác MBC

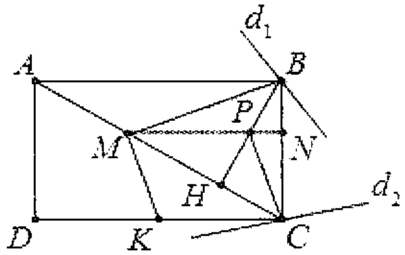
Vậy $CP \perp BM$ suy ra $MK \perp MB$

+ Gọi B(b; 2b+2)

$\Rightarrow \overrightarrow{MB} = \left(b - \frac{9}{5}; 2b + \frac{8}{5}\right), \overrightarrow{MK} = \left(\frac{36}{5}; \frac{8}{5}\right)$

Vì $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MK} = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow B(1;4)$

+ $BC \perp CK$ nên ta có $C(9; 4)$ và $D(9; 0) \Rightarrow A(17; 0)$



Đáp án A

Ví dụ 23 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $A(-1;4)$, $B(3;0)$, $C\left(-\frac{7}{3};0\right)$ và điểm $M(1;0)$ trên cạnh BC. Hãy xác định tọa độ điểm N trên AB và điểm P trên AC sao cho chu vi tam giác MNP nhỏ nhất?

A. $\begin{cases} N(2;5) \\ P(-2;3) \end{cases}$　　B. $\begin{cases} N(1;2) \\ P\left(-\frac{5}{3};2\right) \end{cases}$　　C. $\begin{cases} N(2;5) \\ P(-2;4) \end{cases}$　　D. $\begin{cases} N(2;5) \\ P(-7;3) \end{cases}$

Lời giải

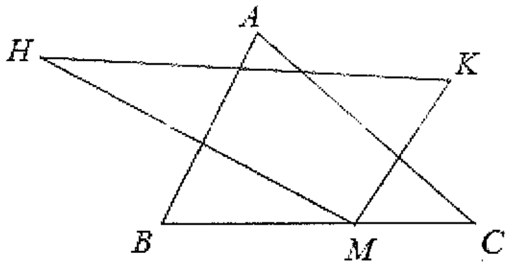
Gọi K là điểm đối xứng của M qua AC

H là điểm đối xứng của M qua AB.

Chu vi tam giác $MNP = MN + NP + PM = KN + NP + PH \geq HK$ không đổi.

Dấu bằng xảy ra khi H, N, P, K thẳng hàng.

Vậy chu vi tam giác MNP nhỏ nhất bằng HK



Khi H, N, P, K thẳng hàng. Tìm N, P.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên $AC \Rightarrow I(2;1)$ do đó $K(3; 2)$.

Gọi J là hình chiếu vuông góc của M trên $AB \Rightarrow J(-2;1)$ do đó $H(-5; 2)$. Phương trình các đường thẳng AB: $3x - y + 7 = 0$; AC: $x + y - 3 = 0$; HK: $y - 2 = 0$. $N = HK \cap AC$, $P = HK \cap AB$.

Do đó tọa độ các điểm N, P cần tìm là: $N(1; 2)$, $P\left(-\frac{5}{3}; 2\right)$.

Đáp án B

Ví dụ 24 Trong mặt phẳng Oxy, xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC? Biết hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1;-1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình: $x - y + 2 = 0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x + 3y - 1 = 0$.

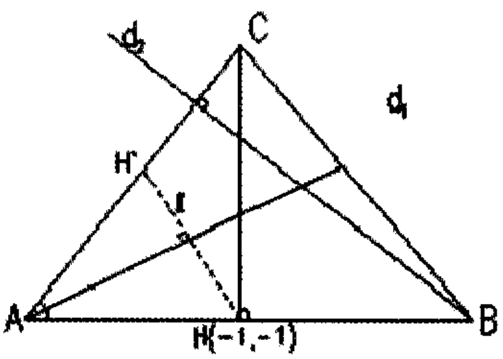
A. $C\left(\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right)$　　**B.** $C\left(\frac{10}{5}; \frac{3}{4}\right)$　　**C.** $C\left(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right)$　　**D.** $C\left(\frac{5}{3}; \frac{3}{4}\right)$

Lời giải

d1 : $x - y + 2 = 0$

d2 : $4x + 3y - 1 = 0$

Vì d_1 là phân giác trong của góc A nên đường thẳng l qua H và vuông góc với d1 cắt AC tại điểm H' đối xứng với H qua d_1. Gọi I là giao điểm của l và d_1, I là trung điểm của HH'. Phương trình đường thẳng l: $y+1=-(x+1)$



Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ y+1=-(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow I(-2;0)$$

Gọi tọa độ của H'(a;b) thì $\left.\begin{matrix} a-1=2x_I=-4 \\ b-1=2y_I=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow H'(-3;1)$

Đường thẳng AC qua H'(−3;1) và AC⊥ d2: $4x+3y-1=0$ nên AC có hệ số góc bằng $k=\frac{3}{4}$ nên có phương trình là: $y-1=\frac{3}{4}(x+3) \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$

Suy ra tọa độ của điểm A: $\begin{cases} x-y+2=0 \\ y=\frac{1}{4}(3x+13) \end{cases} \Leftrightarrow A(5;7)$

CH qua H(−1;−1) có vtpt là $\overrightarrow{HA}=(6;8)=2.(3;4)$.

Phương trình CH dạng: $3(x+1)+4(y+1)=0 \Leftrightarrow 3x+4y+7=0$

$C=AC\cap CH$ nên tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x-4y+13=0 \\ 3x+4y+7=0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{10}{3};\frac{3}{4}\right)$

Đáp án A

Ví dụ 25 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y+1)^2=20$. Biết rằng $AC=2BD$ và điểm B thuộc đường thẳng $d: 2x-y-5=0$. Viết phương trình cạnh AB của hình thoi $ABCD$ biết điểm B có hoành độ dương?

A. $\begin{cases} AB: 2x+y-11=0 \\ AB: 2x+y-40=0 \end{cases}$

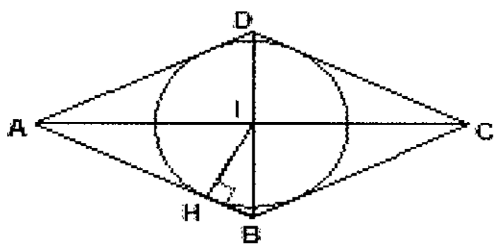
B. $\begin{cases} AB: 2x+y-2=0 \\ AB: 2x+y-41=0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} AB: x+y-11=0 \\ AB: 2x+y-41=0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} AB: 2x+y-11=0 \\ AB: 2x+11y-41=0 \end{cases}$

Lời giải

Gọi I là tâm đường tròn (C), suy ra $I(1;-1)$ và I là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng AB.



Ta có: $AC=2BD \Rightarrow IA=2IB$

Xét tam giác IAB vuông tại I, ta có:

$$\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}=\frac{1}{IH^2} \Rightarrow \frac{5}{4IB^2}=\frac{1}{20} \Rightarrow IB=5$$

Ta lại có điểm $B \in d \Rightarrow B(b; 2b-5)$

$*IB = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(b-1)^2+(2b-4)^2} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=4 \\ b=-\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$. Chọn B = 4 (vì $b>0$) $\Rightarrow B(4;3)$

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là VTPT của đường thẳng AB, phương trình đường thẳng AB có dạng:

$a(x-4)+b(y-3)=0$

Đường thẳng AB tiếp xúc với đường tròn (C) nên ta có: $d(I, AB) = \sqrt{20} \Leftrightarrow \dfrac{|-3a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{20}$

$\Leftrightarrow 11a^2 - 24ab + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{2}{11}b \\ a=2b \end{array}\right.$

* Với $a = 2b$, chọn B = 1, $a = 2 \Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB là: $2x + y - 11 = 0$

* Với $a=\dfrac{2}{11}b$, chọn B = 11, $a = 2 \Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB là: $2x + 11y - 41 = 0$

Đáp án B

Ví dụ 26 Cho ngũ giác ABCDE. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ. Biết $I(1;-1)$, $J(0;2)$, $E(4;5)$. Tìm tọa độ điểm A?

A. $\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{3}{4}\right)$ **B.** $\left(\dfrac{10}{5};\dfrac{3}{4}\right)$ **C.** $(8;-7)$ **D.** $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{3}{4}\right)$

Dự đoán. Vẽ hình chính xác sẽ thấy IJ song song với AE, điều này chưa đủ để tìm A, ta cần chỉ ra tỉ lệ độ dài nữa. Ở đây chính xác ta có $4\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AE}$, ta sẽ chứng minh điều này.

Lời giải.

Ta có: $4\overrightarrow{IJ} = 2\left(\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{IN}\right)$

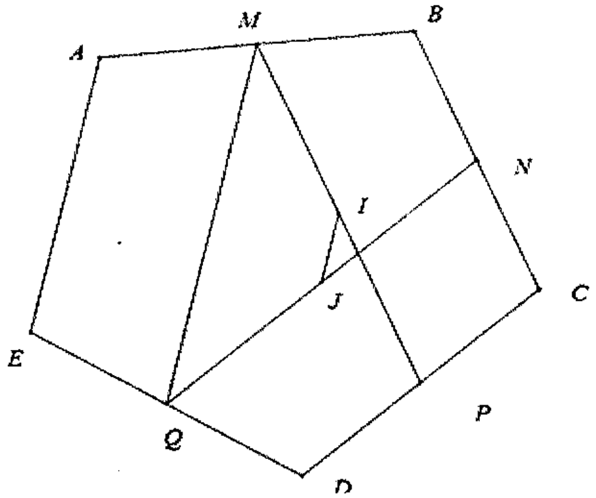
Mà $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IP}=\vec{0}$ do đó:

$\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}\right)+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

Suy ra:

$4\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(0-1)=4-x_A \\ 4(2+1)=5-y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=8 \\ y_A=-7 \end{cases}.$

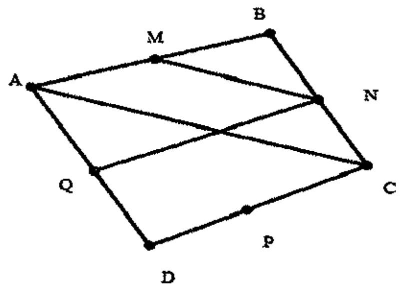


Đáp án C

Ví dụ 27 Trong mặt phẳng Oxy, cho tứ giác ABCD. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, và DA. Biết $A(1;2)$, $\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=(3;-1)$ và C có hoành độ là 2. Tính x_M+x_Q?

A. 2 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=(3;-1)\Rightarrow x_N+x_P=3$

Mà $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_M-x_N=\dfrac{1}{2}(x_A-x_C)\\ x_Q-x_P=\dfrac{1}{2}(x_A-x_C)\end{cases}$

$\Rightarrow x_M-x_N+x_Q-x_P=(x_A-x_C)\Leftrightarrow x_M+x_Q=(x_A-x_C)+x_N+x_P=1-2+3=2$

Đáp án A

Phần VI: CÁC BÀI TOÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Điểm E(2; 3) thuộc đoạn thẳng BD, các điểm H(−2; 3) và K(2; 4) lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm E trên AB và AD. Xác định toạ độ các đỉnh A, B, C, D của hình vuông ABCD.

A. $\begin{cases}A(-2;4)\\B(-2;-1)\\C(3;-1)\\D(3;4)\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}A(3;4)\\B(-2;-1)\\C(3;-1)\\D(3;4)\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}A(-2;4)\\B(5;-1)\\C(3;-1)\\D(3;4)\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}A(-2;4)\\B(-2;-1)\\C(6;-1)\\D(3;4)\end{cases}$

Đáp án A

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*,cho tam giác *ABC* cân tại *A* và nội tiếp đường tròn (*K*). Gọi *M* là trung điểm của *AC*; *G*, *E* lần lượt là trọng tâm của tam giác *ABC* và *ABM*. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*? Biết $E\left(\dfrac{4}{3};11\right)$, $G\left(2;\dfrac{23}{3}\right)$ và $K\left(2;\dfrac{53}{5}\right)$.

A. $\begin{cases}A(2;21)\\B(-2;1)\\C(6;1)\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}A(3;21)\\B(-2;1)\\C(6;1)\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}A(2;21)\\B(-5;1)\\C(6;1)\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}A(2;21)\\B(-2;1)\\C(2;1)\end{cases}$

Đáp án A

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi $H(5;5)$ là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên cạnh BC, đường phân giác trong góc A của tam giác ABC nằm trên đường thẳng $x-7y+20=0$. Đường thẳng chứa trung tuyến AM của tam giác ABC đi qua điểm $K(-10;5)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABCbiết điểm B có tung độ dương?

A. $\begin{cases}A(1;3)\\B(2;-5)\\C(2;0)\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}A(1;3)\\B(4;7)\\C(9;-3)\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}A(1;-3)\\B(2;-5)\\C(2;0)\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}A(1;3)\\B(3;-5)\\C(2;0)\end{cases}$

Đáp án A

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi E là trung điểm của cạnh AD và $H\left(\frac{11}{5};-\frac{2}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh CE; $M\left(\frac{3}{5};-\frac{6}{5}\right)$ là trung điểm của cạnh BH. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết đỉnh A có hoành độ âm.

A. $\begin{cases} A(-1;2) \\ D(3;2) \\ C(3;-2) \end{cases}$ B. $\begin{cases} A(1;2) \\ D(3;2) \\ C(3;-2) \end{cases}$ C. $\begin{cases} A(-1;2) \\ D(5;2) \\ C(3;-2) \end{cases}$ D. $\begin{cases} A(-1;2) \\ D(3;2) \\ C(3;2) \end{cases}$

Đáp án A

Bài 5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giácABC nhọn có đỉnh $A(-1;4)$, trực tâm H. Đường thẳng AH cắt cạnh BC tại M, đường thẳng CH cắt cạnh AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$, đường thẳng BC đi qua điểm $P(1;-2)$. Tìm toạ độ các đỉnh B, C của tam giác biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d: x+2y-2=0$.

A. $\begin{cases} B(4;-1) \\ C(-5;-4) \end{cases}$ B. $\begin{cases} B(4;1) \\ C(-5;-4) \end{cases}$ C. $\begin{cases} B(4;-1) \\ C(5;-4) \end{cases}$ D. $\begin{cases} B(4;-1) \\ C(-5;2) \end{cases}$

Đáp án A

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với đường cao AH có phương trình $3x+4y+10=0$ và đường phân giác trong BE có phương trình $x-y+1=0$. Điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB và cách đỉnh C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S=\frac{42}{3}$ B. $S=\frac{14}{9}$ C. $S=\frac{49}{8}$ D. $S=\frac{16}{7}$

Đáp án C

Bài 7. Trong mặt phẳng *Oxy* cho tam giác *ABC* có C(−1; −2) ngoại tiếp đường tròn tâm *I*. Gọi *M, N, H* lần lượt các tiếp điểm của (*I*) với cạnh *AB, AC, BC*. Gọi *K*(−1; −4) là giao điểm của *BI* với *MN*. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của tam giác *ABC*? Biết *H*(2; 1).

A. $\begin{cases} A\left(\frac{3}{4};-\frac{31}{4}\right) \\ B(-3;-4) \end{cases}$ B. $\begin{cases} A\left(\frac{3}{5};-\frac{31}{4}\right) \\ B(-3;-4) \end{cases}$ C. $\begin{cases} A\left(\frac{3}{4};-\frac{31}{4}\right) \\ B(3;-4) \end{cases}$ D. $\begin{cases} A\left(\frac{3}{4};\frac{31}{4}\right) \\ B(-3;-4) \end{cases}$

Đáp án A

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* cho tam giác *ABC* nội tiếp trong đường tròn tâm *I*; có đỉnh *A* thuộc đường thẳng *d*: $x+y-2=0$, *D*(2; −1) là chân đường cao của tam giác *ABC* hạ từ đỉnh *A*. Gọi điểm *E*(3; 1) là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AI; điểm P(2; 1) thuộc đường thẳng *AC*. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*?

A. $\begin{cases} A(4;2) \\ B\left(\frac{17}{7};-\frac{5}{7}\right) \\ C\left(\frac{26}{7};\frac{1}{7}\right) \end{cases}$ B. $\begin{cases} A(0;2) \\ B\left(\frac{17}{7};-\frac{5}{7}\right) \\ C\left(\frac{26}{7};\frac{1}{7}\right) \end{cases}$ C. $\begin{cases} A(0;2) \\ B\left(\frac{17}{8};-\frac{5}{7}\right) \\ C\left(\frac{26}{7};\frac{1}{7}\right) \end{cases}$ D. $\begin{cases} A(0;2) \\ B\left(\frac{17}{7};-\frac{5}{7}\right) \\ C\left(\frac{27}{7};\frac{1}{7}\right) \end{cases}$

Đáp án B

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm của AB. Biết $I\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3}\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $G(3;0)$, $K\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$ lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và ACM. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C.

A. $\begin{cases} A(1;-2) \\ B(5;0) \\ C(3;-2) \end{cases}$ B. $\begin{cases} A(1;2) \\ B(5;0) \\ C(3;-2) \end{cases}$ C. $\begin{cases} A(1;2) \\ B(5;0) \\ C(3;2) \end{cases}$ D. $\begin{cases} A(1;2) \\ B(4;0) \\ C(3;-2) \end{cases}$

Đáp án B

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm $I(2;2)$, điểm D là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại điểm thứ hai là M (khác A). Tìm tọa độ các điểm A, B, C. Biết điểm $J(-2;2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACD và phương trình đường thẳng CM là: $x+y-2=0$.

A. $\begin{cases} C(-1;3) \\ B\left(\frac{19}{5};\frac{23}{5}\right) \\ A(-1;1) \end{cases}$ B. $\begin{cases} C(1;3) \\ B\left(\frac{19}{5};\frac{23}{5}\right) \\ A(-1;1) \end{cases}$ C. $\begin{cases} C(-1;3) \\ B\left(\frac{19}{6};\frac{23}{5}\right) \\ A(-1;1) \end{cases}$ D. $\begin{cases} C(1;-3) \\ B\left(\frac{19}{5};\frac{23}{5}\right) \\ A(-1;1) \end{cases}$

Đáp án A

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BD và M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh CD, BH. Biết điểm A(0; −1), phương trình đườngthẳng MN là $3x-y-9=0$ và điểm M có hoành độ nguyên. Tìm toạ độ các đỉnh B, C, D.

A. $\begin{cases} B(2;-1) \\ C(3;-3) \\ D(0;-3) \end{cases}$ B. $\begin{cases} B(4;1) \\ C(4;-3) \\ D(0;-3) \end{cases}$ C. $\begin{cases} B(4;-1) \\ C(4;-3) \\ D(0;-3) \end{cases}$ D. $\begin{cases} B(4;-1) \\ C(4;-3) \\ D(6;-3) \end{cases}$

Đáp án C

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại C. Các điểm M, N lần lượt là chân đường cao hạ từ A và C của tam giác ABC. Trên tia đối của tia AM lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Biết tam giác ABC có diện tích bằng 8, đường thẳng CN có phương trình $y-1=0$, điểm $E(-1;7)$, điểm C có hoành độ dương và điểm A có tọa độ là các số nguyên.

Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

A. $\left[\begin{array}{l}A(1;3),B(1;-1),C(5;1)\\A(3;5),B(3;-3),C(-5;1)\end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l}A(1;3),B(1;-1),C(5;1)\\A(3;5),B(3;-3),C(5;1)\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}A(1;3),B(1;-1),C(5;-1)\\A(3;5),B(3;-3),C(5;1)\end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l}A(5;3),B(1;-1),C(5;1)\\A(7;5),B(3;-3),C(5;1)\end{array}\right.$

Đáp án D

Bài 13. Cho hình chữ nhật ABCD có A(1; 5), $AB = 2BC$ và điểm C thuộc đường thẳng $d: x+3y+7=0$. Gọi M là điểm nằm trên tia đối của tia CB, N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tìm tọa độ các điểm B và C biết $N\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ và điểm B có tung độ nguyên.

A. $\begin{cases}B(5;-1)\\C(2;-3)\end{cases}$ B. $\begin{cases}B(5;1)\\C(2;-3)\end{cases}$ C. $\begin{cases}B(5;-1)\\C(5;-3)\end{cases}$ D. $\begin{cases}B(5;6)\\C(2;-3)\end{cases}$

Đáp án A

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy . Gọi $H(-3;5)$, $I\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, lần lượt là trực tâm tâm đường tròn ngoại tiếp và chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC?

A. $\left[\begin{array}{l}A(1;1),B(0;1),C(-3;-2)\\A(1;1),B(-3;-2),C(0;1)\end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l}A(1;1),B(5;1),C(-3;-2)\\A(1;1),B(-3;2),C(0;1)\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}A(1;1),B(0;1),C(3;-2)\\A(1;1),B(-3;-2),C(0;1)\end{array}\right.$

Đáp án A

Bài 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD với AC có phương trình là: $x+7y-32=0$, hai đỉnh B, D lần lượt thuộc đường thẳng $d_1: x+y-8=0$, $d_2: x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi biết rằng diện tích hình thoi bằng 75 và đỉnh A có hoành độ âm?

A. $\begin{cases}A(-11;3)\\B(0;8)\\C(10;3)\\D(1;1)\end{cases}$ B. $\begin{cases}A(11;3)\\B(1;8)\\C(10;3)\\D(-1;1)\end{cases}$ C. $\begin{cases}A(-11;3)\\B(0;8)\\C(10;3)\\D(-1;1)\end{cases}$ D. $\begin{cases}A(-9;3)\\B(0;8)\\C(10;3)\\D(-1;1)\end{cases}$

Đáp án C

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD với AB//CD có diện tích bằng 14, $H\left(-\frac{1}{2};0\right)$ là trung điểm của cạnh BC và $I\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AH. Viết phương trình đường thẳng AB biết đỉnh D có hoành độ dương và D thuộc đường thẳng d: $5x-y+1=0$.

A. (AB): $3x-y-3=0$

B. (AB): $3x-y-2=0$

C. (AB): $3x-5y-2=0$

D. (AB): $3x-y=0$

Đáp án B

Bài 17. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, hãy tính diện tích tam giác ABC. Biết rằng hai điểm $H(5;5)$, $I(5;4)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là: $x+y-8=0$.

A. 12

B. 4

C. 5

D. 6

Đáp án D

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, B và $AD = 2BC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường chéo BD và E là trung điểm của đoạn HD. Giả sử $H(-1;3)$, phương trình đường thẳng $AE: 4x+y+3=0$ và $C\left(\frac{5}{2};4\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và D của hình thang $ABCD$.

A. $\begin{cases} A(-1;1) \\ B(3;3) \\ D(-2;3) \end{cases}$

B. $\begin{cases} A(1;1) \\ B(3;3) \\ D(-2;3) \end{cases}$

C. $\begin{cases} A(-1;1) \\ B(4;3) \\ D(-2;3) \end{cases}$

D. $\begin{cases} A(-1;1) \\ B(3;3) \\ D(2;3) \end{cases}$

Đáp án A

Bài 19. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của $\widehat{ADB}$ có phương trình $x-y+2=0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

A. (AB): $5x-3y+7=0$

B. (AB): $x-3y+7=0$

C. (AB): $5x-3y+5=0$

C. (AB): $5x-3y=0$

Đáp án A

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6; 6)$; đường thẳng đi qua trung điểm các cạnh AB và AC có phương trình: $x+y-4=0$. Tìm tọa độ đỉnh B và C biết điểm $E(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

A. $\left[\begin{array}{l} B(0;-4), C(-4;0) \\ B(-6;2), C(2;-6) \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} B(0;4), C(-4;0) \\ B(-6;2), C(2;-6) \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} B(0;-4), C(4;1) \\ B(-6;2), C(2;-6) \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} B(0;-4), C(-4;0) \\ B(6;2), C(2;-6) \end{array}\right.$

Đáp án A

Bài 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đường phân giác trong góc $\widehat{ABC}$ đi qua trung điểm M của cạnh AD, đường thẳng BM có phương trình $x-y+2=0$, điểm D nằm trên đường thẳng Δ có phương trình $x+y-9=0$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết đỉnh B có hoành độ âm và điểm $E(-1;2)$ nằm trên cạnh AB?

A. $\begin{cases} A(-1;4) \\ B(-1;1) \\ C(2;1) \\ D(8;4) \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} A(1;4) \\ B(-1;1) \\ C(5;1) \\ D(5;4) \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} A(-1;2) \\ B(1;1) \\ C(5;1) \\ D(5;4) \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} A(-1;4) \\ B(-1;1) \\ C(5;1) \\ D(5;4) \end{cases}$

Đáp án D

Bài 22. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*. Điểm *D* thuộc tia đối của tia *AC* sao cho *GD* = *GC*. Biết điểm *G* thuộc đường thẳng $d: 2x+3y-13=0$ và tam giác *BDG* nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-12y+27=0$. Tìm toạ độ điểm *B* và viết phương trình đường thẳng *BC*, biết điểm *B* có hoành độ âm và toạ độ điểm *G* là số nguyên?

A. $\begin{cases} B(-2;5) \\ BC: x+y-3=0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} B(2;5) \\ BC: x+y-3=0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} B(-2;5) \\ BC: 2x+y-3=0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} B(-2;5) \\ BC: x+y+3=0 \end{cases}$

Đáp án A

Bài 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H, phương trình đường thẳng AH là: $3x-y+3=0$, trung điểm của cạnh BC là M(3 ; 0). Gọi E và F lần lượt là chân đường cao hạ từ B và C đến AC và AB, phương trình đường thẳng EF là: $x-3y+7=0$. Tìm tọa độ điểm A, biết A có hoành độ dương?

A. $A\left(1+\sqrt{2};6+3\sqrt{2}\right)$ **B.** $A\left(2+\sqrt{2};6+3\sqrt{2}\right)$

C. $A\left(1+\sqrt{2};6+\sqrt{2}\right)$ **D.** $A\left(1-\sqrt{2};6+3\sqrt{2}\right)$

Đáp án A

Bài 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có đỉnh $D(-7;0)$. Một điểm M nằm trong hình bình hành sao cho $\widehat{MAB}=\widehat{MCB}$. Phương trình đường thẳng chứa *MB*, *MC* lần lượt là (Δ_1): $x+y-2=0$; (Δ_2): $2x-y-1=0$. Tìm tọa độ đỉnh A, biết rằng A thuộc đường thẳng $d: y=3x$ và A có hoành độ nguyên.

A. $A(2;7)$ **B.** $A(3;6)$ **C.** $A(2;6)$ **D.** $A(1;6)$

Đáp án C

Bài 25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm I; có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x+y-2=0$, $D(2;-1)$ là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ đỉnh A. Gọi điểm $E(3;1)$ là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AI; điểm $P(2;1)$ thuộc đường thẳng AC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

A. $\begin{cases} A(6;2) \\ B\left(\frac{17}{7};-\frac{5}{7}\right) \\ C\left(\frac{26}{7};\frac{1}{7}\right) \end{cases}$ B. $\begin{cases} A(0;2) \\ B\left(\frac{17}{7};-\frac{5}{7}\right) \\ C\left(\frac{26}{7};\frac{1}{7}\right) \end{cases}$ C. $\begin{cases} A(1;2) \\ B\left(\frac{15}{7};-\frac{5}{7}\right) \\ C\left(\frac{26}{7};\frac{1}{7}\right) \end{cases}$ D. $\begin{cases} A(3;2) \\ B\left(\frac{17}{7};\frac{5}{7}\right) \\ C\left(\frac{26}{7};\frac{1}{7}\right) \end{cases}$

Đáp án B

Bài 26. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;-2)$, trọng tâm $G(0;1)$ và trực tâm $H\left(\frac{1}{2};1\right)$. Tìm tọa độ của các đỉnh B,C và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\begin{cases} B(-4;1) \\ C(2;4) \\ R=\frac{15}{4} \end{cases}$ B. $\begin{cases} B(4;1) \\ C(2;4) \\ R=\frac{15}{4} \end{cases}$ C. $\begin{cases} B(-4;1) \\ C(2;3) \\ R=\frac{15}{4} \end{cases}$ D. $\begin{cases} B(7;1) \\ C(2;4) \\ R=\frac{15}{4} \end{cases}$

Đáp án A

Bài 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình vuông *ABCD* tâm $I(1;-1)$. Điểm *M* nằm trên cạnh *AB* sao cho *MA* = 2*MB*. Đường thẳng *(CM)* $2x-y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông *ABCD* biết đỉnh *C* có hoành độ nguyên.

A. $\begin{cases} A(1;1) \\ B(5;-1) \\ C(9;-3) \\ D(-1;-1) \end{cases}$ B. $\begin{cases} A(2;1) \\ B(3;1) \\ C(1;-3) \\ D(-1;-1) \end{cases}$ C. $\begin{cases} A(1;1) \\ B(3;-1) \\ C(1;-3) \\ D(1;1) \end{cases}$ D. $\begin{cases} A(1;1) \\ B(3;-1) \\ C(1;-3) \\ D(-1;-1) \end{cases}$

Đáp án D

Bài 28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình chữ nhật *ABCD* có *A*(5;–7), điểm *C* thuộc đường thẳng có phương trình: $x - y + 4 = 0$. Đường thẳng đi qua *D* và trung điểm của đoạn thẳng *AB* có phương trình: $3x - 4y - 23 = 0$. Tìm tọa độ điểm *B* và *C*, biết *B* có hoành độ dương?

A. $\begin{cases} B\left(\frac{33}{5};\frac{21}{5}\right) \\ C(1;5) \end{cases}$ B. $\begin{cases} B\left(\frac{13}{5};\frac{21}{5}\right) \\ C(1;5) \end{cases}$ C. $\begin{cases} B\left(\frac{33}{5};\frac{21}{5}\right) \\ C(1;4) \end{cases}$ D. $\begin{cases} B\left(\frac{33}{4};\frac{21}{5}\right) \\ C(1;5) \end{cases}$

Đáp án A

Bài 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thoi *ABCD* có đường chéo *AC* nằm trên đường thẳng $d: x+y-1=0$. Điểm $E(9;4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh *AB*, điểm $F(-2;-5)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh *AD*, $AC=2\sqrt{2}$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình thoi *ABCD* biết điểm *C* có hoành độ âm.

A. $\begin{cases} A(3;1) \\ B(-3;0) \\ C(-2;3) \\ D(1;4) \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} A(0;1) \\ B(3;0) \\ C(-2;3) \\ D(1;4) \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} A(0;1) \\ B(-3;0) \\ C(-2;3) \\ D(1;4) \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} A(0;1) \\ B(3;0) \\ C(2;3) \\ D(1;4) \end{cases}$

Đáp án C

Bài 30. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy* cho tam giác *ABC* có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại *A* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* cắt *BC* tại *D*, đường phân giác trong của $\widehat{ADB}$ có phương trình $x-y+2=0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh *AC*. Viết phương trình đường thẳng *AB*.

A. *(AB)*: $5x-3y+7=0$
B. *(AB)*: $5x+3y+7=0$
C. *(AB)*: $x-3y+7=0$
D. *(AB)*: $5x+3y-7=0$

Đáp án A

Bài 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có M là trung điểm BC. Biết D(2;–4) và đường thẳng AM có phương trình: $7x-y+2=0$. Tìm tọa độ điểm A?

A. $\left[\begin{array}{l} A(-1;-5) \\ A\left(-\frac{3}{5};-\frac{11}{5}\right) \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} A(1;5) \\ A\left(-\frac{3}{5};-\frac{11}{5}\right) \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} A(-1;-5) \\ A\left(\frac{3}{5};\frac{11}{5}\right) \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} A(-1;-4) \\ A\left(-\frac{3}{5};-\frac{11}{5}\right) \end{array}\right.$

Đáp án A

Wilhelm von Gottfried Leibniz
(1646-1716)

Leibniz là một nhà toán học, triết học, luật sư, nhà sử học, nhà ngoại giao và nhà phát minh nổi tiếng người Đức. Chỉ số IQ thời thơ ấu của ông được ước tính là cao thứ hai trong lịch sử, chỉ sáu Goethe.

Ông khám phá ra vi tích phân độc lập với Isaac Newton, và kí hiệu của ông được sử dụng rộng rãi từ đó. Ông cũng khám phá ra hệ thống số nhị phân, nền tảng của hầu hết các cấu trúc máy tính hiện đại. Ông phát minh ra các thuật ngữ toán học như phân tích, biến, trục hoành, tham số,...

Trong triết học, ông được nhớ đến với "chủ nghĩa lạc quan". Ông cũng có nhiều đóng góp trong vật lý học, và có nhiều dự đoán về các khái niệm trong sinh học, y học, tâm lý học, công nghệ thông tin,...

CHUYÊN ĐỀ 11: PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Phần I: PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Chú ý ta có các định nghĩa cơ bản sau:

➢Phương trình ẩn x là một mệnh đề chứa biến dạng $f(x)=g(x)$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các biểu thức chứa biến x.

➢ Điều kiện xác định của phương trình là những điều kiện của ẩn x để các biểu thức trong phương trình có nghĩa.

➢ Nếu $f(x_0)=g(x_0)$ thì x_0 được gọi là nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$.

➢ Giải phương trình là tìm tập tất cả các nghiệm của nó.

1. Sơ đồ hoocne: Chúng ta sẽ đi ngay vào ví dụ để từ đó có cái nhìn rõ ràng hơn về vấn đề này.

Ví dụ 1. Phân tích $x^4-5x^3+2x^2+16$ thành nhân tử.

Lời giải.

Vì máy tính chúng ta không có chức năng giải phương trình bậc 4 nên ta giải như sau:

Bước 1: dùng phím **Alpha** nhập phương trình $x^4-5x^3+2x^2+16=0$ vào máy tính Casio 570VN Plus, bấm: **Alpha X^4 – 5Alpha X^3 + 2Alpha X^2 + 16 Alpha = 0.** Rồi bấm **Shift Solve** máy hiện lên **Solve for X** ta bấm 0, chỗ này nghĩa là gì? **Solve for X 0** nghĩa là giá trị khởi tạo, máy sẽ giải từ $x=0$, nếu nghiệm là 1 máy chạy từ 0 tới 1 rất nhanh, nếu lỡ không may nghiệm là 10 thì vì chúng ta chọn $x=0$ nên máy sẽ dò ra nghiệm rất lâu (chúng ta sẽ có cách để chọn tốt, đừng quá lo lắng).

Bước 2: Sau khi bấm ở bước 1 máy hiện ra nghiệm $X=2$.

Do đó $x^4-5x^3+2x^2+16=(x-2)(ax^3+bx^2+cx+d)$ bậc 4 phân tích được thành bậc 1 nhân bậc 3, ta có sơ đồ hooc-ne sau:

	1 ↓	-5	2	0	16	Hàng này điền hệ số của phương trình từ bậc cao xuống bậc thấp, nếu không có thì điền là 0.
2 Ô này điền nghiệm mà ta tìm được ở Bước 1	1 Luôn hạ xuống					

Sử dụng câu nhân ngang cộng chéo để tính ô tiếp theo

	1	-5	2	0	16
2	1 Luôn hạ xuống	-3 vì 2*1-5	-4 vì 2*−4+2	-8 vì 2*-8 +0	0 Vì 2*-8 +16

a,b,c,d lần lượt là 1, -3, -4, -8.

Từ đây ta có $x^4-5x^3+2x^2+16=(x-2)(1x^3-3x^2-4x-8)$

Ví dụ 2 Phân tích $x^5-5x^3+2x^2+2$ thành nhân tử.

Bước 1: dùng phím **Alpha** nhập phương trình vào máy tính Casio 570VN Plus, bấm: **Alpha** X^5 – 5**Alpha** X^3 + 2**Alpha** X^2 + 2 **Alpha** = 0. Rồi bấm **Shift Solve** máy hiện lên **Solve for X** ta bấm 0.

Bước 2: sau khi bấm ở bước 1 máy hiện ra nghiệm $X=1$.

Do đó $x^5-5x^3+2x^2+2=(x-1)(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$ bậc 4 phân tích được thành bậc 1 nhân bậc 3, ta có sơ đồ Hooc-ne sau:

	1	0	-5	2	0	2
1	1 Luôn hạ xuống	1 vì 1*1+0	-4 vì 1*1-5	-2 vì 1*-4 +2	-2 vì 1*-2 +0	0 vì 1*-2+2

a,b,c,d,e lần lượt là 1, 1, -4, -2, -2.

Từ đây ta có $x^5-5x^3+2x^2+2=(x-1)(x^4+x^3-4x^2-2x-2)$

Nhận xét: Mục đích của sơ đồ Hooc-ne là gì? Là để chuyển một đa thức bậc cao về bậc thấp hơn, ví dụ như cần giải một phương trình bậc 4, MTCT không có chức năng giải phương trình bậc 4, nếu ta phân tích được bậc 4 thành bậc 1 nhân bậc 3, thì đã có thể sử dụng MTCT để giải được.

2. Phương trình dạng đa thức:

➢**Phương trình bậc hai:** $ax^2+bx+c=0$ với $a\neq 0$. Cách giải ta tính $\Delta=b^2-4ac$, nếu :

• $\Delta>0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

• $\Delta=0$: Phương trình có nghiệm kép $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

• $\Delta<0$: Phương trình vô nghiệm.

Chú ý: Ta có thể dùng MTCT Casio 570VN PLUS bấm Mode 5 3 rồi nhập các hệ số a,b,c vào để máy giải giúp phương trình.

➢**Phương trình bậc ba:** $ax^3+bx^2+cx+d=0$ với $a\neq 0$. Ta chỉ quan tâm các phương trình bậc 3 có ít nhất 1 nghiệm đẹp (nghiệm nguyên hoặc hữu tỉ), thực hiện các bước sau:

Bước 1: Sử dụng MTCT Casio 570VN PLUS bấm Mode 5 7 rồi nhập các hệ số a,b,c,d vào để máy giải giúp phương trình.

Bước 2: Quan sát các nghiệm mà máy hiển thị, nhiều nhất là ba nghiệm, nếu nghiệm nào có chữ i hoặc có dạng $1.23345+1.5556i$ thì đó là nghiệm phức nghĩa là nghiệm này không tính, chỉ kết luận nghiệm thực thôi.

➢ **Phương trình bậc bốn:** $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ với $a\neq 0$. Ta quan tâm các phương trình bậc 4 có ít nhất một nghiệm đẹp, bằng cách dò nghiệm bằng Shift Solve + sơ đồ hoocne.

3. Các phương pháp giải phương trình thường dùng:

➢ Phương pháp liên hợp. Thường dùng khi phương trình chứa căn, các biểu thức liên hợp thường dùng:

- $\sqrt{A}-B=\dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$
- $\sqrt{A}+B=\dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}-B}$
- $\sqrt[3]{A}-B=\dfrac{A-B^3}{\left(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{A}.B+B^2\right)}$
- $\sqrt[3]{A}+B=\dfrac{A+B^3}{\left(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{A}.B+B^2\right)}$

Ví dụ 1 Giải phương trình: $2\sqrt{x^2+5}-6=2\sqrt{x-1}-2+x^2-4$

Phân tích và hướng dẫn giải. Điều kiện xác định $x\geq 1$, dùng MTCT công cụ Mode 7 nhập $f\left(X\right)=2\sqrt{x^2+5}-6-2\sqrt{x-1}+2-x^2+4$ bằng phím Alpha, sau đó chọn Start? 1 End? 5 (đây là hai giá trị khởi tạo và kết thúc), Step? 0.5 (đây là bước nhảy, máy sẽ tính giúp tính hai mươi giá trị của $f\left(X\right)$, bắt đầu từ $f\left(1\right)$, $f\left(1.5\right)$, $f\left(2\right)$, ..., $f\left(5\right)$).

Chúng ta có bảng:

X	f(X)
1	3.8989
1.5	1.7209
2	0
2.5	-1.991
....	....
4.5	-13.94
5	-18.04

Cứ mỗi lần f(X) đổi dấu từ âm sang dương thì phương trình có một nghiệm nằm trong khoảng tương ứng của X, ví dụ ở đây $x \in (1.5;2.5)$ thì $f(x)$ đổi dấu từ dương sang âm, phương trình có một nghiệm nằm trong khoảng $(1.5;2.5)$ và nhìn vào bảng thấy rõ nghiệm đó là $x=2$.

Tiếp tục chạy Table thử từ 5 đến 10, $f(x)$ không lần nào đổi dấu nữa, vậy có thể dự đoán phương trình có một nghiệm duy nhất.

Với $x=2$ ta có $\begin{cases}\sqrt{x^2+5}=3\\ \sqrt{x-1}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+5}-3=0\\ \sqrt{x-1}-2=0\end{cases}$.

Do đó phương trình biến đổi như sau: $2\sqrt{x^2+5}-6=2\sqrt{x-1}-2+x^2-4$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5+3}}=2\frac{x-2}{\sqrt{x-1+1}}+(x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{2(x+2)}{\sqrt{x^2+5+3}}=\dfrac{2}{\sqrt{x-1+1}}+x+2 \quad (1)\end{array}\right.$$

Ta có phương trình (1) $\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x-1+1}}+(x+2)\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+5+3}}\right)=0$ nên (1) vô nghiệm vì $\begin{cases}x+2>0\\ 1-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+5+2}}>0\end{cases}$.

Chú ý: Phương trình chứa căn có một nghiệm đẹp thì thường liên hợp căn với con số.

Ví dụ 2 Giải phương trình: $3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

Phân tích và hướng dẫn giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$. Trong bài toán này chúng ta sẽ gặp một tình huống hoàn toàn khác ở ví dụ 1, khi phương trình có tới hai nghiệm. Cùng khảo sát bằng Table, bấm Mode 7 và nhập vào $f(X)=3x^2-x+3-\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+4}$ bằng phím Alpha, sau đó chọn Start? $-\frac{1}{3}$, End? 5, Step? 0.5 (có thể chọn Step khác miễn sao không quá 20 giá trị là được).

Chúng ta có bảng:

X	f(X)
$-\frac{1}{3}$	2.1391
$\frac{1}{6}$	-0.506

$\frac{2}{3}$	-0.773
$\frac{7}{6}$	0.6595
....	....
....	....

Ta kiểm kĩ thấy $f\left(x\right)$ đổi dấu hai lần vậy phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{6}\right)$ và một nghiệm thuộc $\left(\frac{2}{3};\frac{7}{6}\right)$.

Sau đó nhập phương trình $3x^2-x+3-\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+4}=0$ vào máy tính bằng phím Alpha sau đó bấm Shift Solve máy hỏi Solve for X ở nghiệm thứ nhất tạ chon 0, máy sẽ nhanh chóng tính ra $x=0$, nghiệm thứ hai ta chọn Solve for X $\frac{2}{3}$ máy nhanh chóng tính ra nghiệm $x=1$. Như vậy chúng ta đã giải quyết được vấn đề ở mục Sơ đồ Hooc-ne khi đó chúng ta chỉ chọn đại Solve for X, nhưng bây giờ đã khác khi biết nghiệm thuộc khoảng nào ta chỉ cần chọn Solve for X nằm trong khoảng đó là được.

Vì phương trình có hai nghiệm nên căn ở đây không liên hợp với con số nữa mà nó sẽ liên hợp như sau, xét căn thứ nhất nó sẽ liên hợp với $ax+b$:

$\sqrt{3x+1}=ax+b$, ta sẽ tìm a,b.

Với $x=0\Rightarrow\sqrt{3.0+1}=b\Leftrightarrow b=1$

Với $x=1\Rightarrow\sqrt{3.1+1}=a+b\Leftrightarrow a+b=2$

Từ hai điều trên ta có $a=b=1$, do đó $\sqrt{3x+1}=x+1\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}-x-1=0$. Một cách tương tự ta sẽ có $\sqrt{3x+4}=x+2\Leftrightarrow\sqrt{3x+4}-x-2=0$.

Ta có lời giải sau:

Phương trình tương đương:

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-x\right)\left(3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=1.$$

Chú ý:

Phương trình chứa căn có 2 nghiệm đẹp thì thường liên hợp căn với $ax+b$.

Ví dụ 3 Giải phương trình: $32x^4-16x^2-9x-9\sqrt{2x-1}+2=0$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$, phương trình đã cho tương đương

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[32x^2(x+1)+16x+7-\frac{18}{1+\sqrt{2x-1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[32x^3+32x^2+16x+7-\frac{18}{1+\sqrt{2x-1}}\right]=0\ (*)$$

Ta có

$$x\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}32x^3\ge\frac{32}{8}=4\\32x^2\ge\frac{32}{4}=8\\16x\ge\frac{16}{2}=8\end{cases}\Rightarrow 32x^3+32x^2+16x+7\ge 27$$

$$1+\sqrt{2x-1}\ge1\Rightarrow-\frac{18}{1+\sqrt{2x-1}}\ge-18$$

$$\Rightarrow 32x^3+32x^2+16x+7-\frac{18}{1+\sqrt{2x-1}}\ge9>0.$$

Vậy $(*)\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm x =1.

Ví dụ 4 Giải phương trình: $x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}$ trên tập số thực

Phân tích. Bài toán này lại là một câu chuyện hoàn toàn khác, dùng Table ta kiểm được phương trình có hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3};\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ nhưng khi dùng công cụ Shift Solve phương trình lại có nghiệm lẻ. Nghiệm thứ nhất $x_1=1.618033$ bấm Shift Sto A để lưu nghiệm vào biến A, $x_2=-0.618033$ bấm Shift Sto B để lưu nghiệm vào biến B, ta thấy rằng $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=-1\end{cases}$ do đó hai nghiệm này là nghiệm của biểu thức x^2-x-1. Vì phương trình có hai nghiệm nên $\sqrt{8-3x^2}$ sẽ liên hợp $ax+b$.

Với $x_1=1.618033...=A\Rightarrow\sqrt{8-3A^2}=aA+b\Leftrightarrow aA+b=\sqrt{8-3A^2}$

Với $x_2=-0.618033...=B\Rightarrow\sqrt{8-3B^2}=aB+b\Leftrightarrow aB+b=\sqrt{8-3B^2}$

Ta bấm Mode 5 1 để giải hệ phương trình bậc nhất với ẩn là a,b tìm được $a=-1,b=2$. Do đó $\sqrt{8-3x^2}$ sẽ liên hợp $-x+2$. Cùng xem lời giải chi tiết dưới đây!

Lời giải chi tiết

Điều kiện: $-\frac{2\sqrt{6}}{3}\le x\le\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$$x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}\Leftrightarrow x^3-3x+1-(-x+2)-\sqrt{8-3x^2}+(-x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x-1+\frac{(-x+2)^2-(8-3x^2)}{\sqrt{8-3x^2}+(-x+2)}=0 \Leftrightarrow x^3-2x-1+4\frac{x^2-x-1}{\sqrt{8-3x^2}+2-x}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left(x+1+\frac{4}{\sqrt{8-3x^2}+2-x}\right)=0$$

Xét hàm số: $f(x)=\sqrt{8-3x^2}+2-x$, với $x\in\left[\frac{-2\sqrt{6}}{3};\frac{2\sqrt{6}}{3}\right]$

$f'(x)=\frac{-3x}{\sqrt{8-3x^2}}-1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$, vì $x<0$.

Ta có bảng biến thiên

x	$\frac{-2\sqrt{6}}{3}$		$\frac{-\sqrt{6}}{3}$		$\frac{2\sqrt{6}}{3}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{6+2\sqrt{6}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{6+4\sqrt{6}}{3}$	$\searrow$	$\frac{6-2\sqrt{6}}{3}$

Từ bảng biến thiên ta có: $0<f(x)\le\frac{6+4\sqrt{6}}{3}$

Do đó: $x+1+\frac{4}{\sqrt{8-3x^2}+2-x}=x+1+\frac{4}{f(x)}\ge-\frac{2\sqrt{6}}{3}+1+\frac{12}{6+4\sqrt{6}}=\frac{-3+2\sqrt{6}}{15}>0$

Vậy phương trình đã cho tương đương: $x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Ví dụ 5 Giải phương trình: $(x+2)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)=0$

Lời giải chi tiết

$$\left[(x+1)+1\right]\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+\left[(x+1)-1\right]\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)\right]+\left(\sqrt{x^2+4x+7}-\sqrt{x^2+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)\right]+\frac{4(x+1)}{\sqrt{x^2+4x+7}+\sqrt{x^2+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+\sqrt{x^2+3}+2+\frac{4}{\sqrt{x^2+4x+7}+\sqrt{x^2+3}}\right)=0 \Leftrightarrow x=-1$$

➤ **Phương pháp đặt ẩn phụ**

Ví dụ 6 Giải phương trình: $(2x^2-2x+1)(2x-1)+(8x^2-8x+1)\sqrt{-x^2+x}=0$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải chi tiết

Điều kiện: $0\le x\le 1$

$(2x^2-2x+1)(2x-1)+(8x^2-8x+1)\sqrt{-x^2+x}=0$

$\Leftrightarrow \left(1-2(-x^2+x)\right)(2x-1)+\left(2(2x-1)^2-1\right)\sqrt{-x^2+x}=0$

Đặt $a=2x-1; b=\sqrt{-x^2+x}$, phương trình trở thành:

$\left(1-2b^2\right)a+\left(2a^2-1\right)b=0 \Leftrightarrow (a-b)(2ab+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ 2ab+1=0 \end{array}\right.$

Với $a=b$, ta có $\sqrt{-x^2+x}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ 5x^2-5x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$

Với $2ab+1=0$, ta có $2(2x-1)\sqrt{-x^2+x}+1=0 \Leftrightarrow 2(1-2x)\sqrt{-x^2+x}=1$ (1)

Phương trình có nghiệm khi: $0<x<\dfrac{1}{2} \Rightarrow 0<1-2x<1$

Mặt khác: $2\sqrt{-x^2+x}=2\sqrt{(1-x)x}\le (1-x)+x=1$

Suy ra $2\sqrt{-x^2+x}(1-2x)\le 1$. Do không tồn tại x để đẳng thức xảy ra nên phương trình (1) vô nghiệm. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{-5+\sqrt{5}}{10}$.

Ví dụ 7 Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

Lời giải chi tiết

Đặt $t=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}$, $t\ge 0$ thì $t^2=4x-3+\sqrt{3x^2-5x+2}$

Phương trình trở thành: $t=t^2-6 \Leftrightarrow t^2-t-6=0$

$\Leftrightarrow t=3$ (nhận) hoặc $t=-2$ (loại)

$t=3 \Rightarrow \sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-5x+2}=6-2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 = 36 - 24x + 4x^2 \\ x \le 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 19x + 34 = 0 \\ x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Ví dụ 8 Giải phương trình: $\sqrt{7x^2 + 25x + 19} - \sqrt{x^2 - 2x - 35} = 7\sqrt{x+2}$.

Lời giải chi tiết

Điều kiện $x \ge 7$

Phương trình tương đương $\sqrt{7x^2+25x+19} = 7\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2-2x-35}$.

Bình phương 2 vế suy ra: $3x^2 - 11x - 22 = 7\sqrt{(x+2)(x+5)(x-7)}$

$3(x^2-5x-14) + 4(x+5) = 7\sqrt{(x+5)(x^2-5x-14)}$

Đặt $a = \sqrt{x^2-5x-14}; b = \sqrt{x+5}$.(a ,b $\ge$ 0)

Khi đó ta có phương trình: $3a^2 + 4b^2 = 7ab \Leftrightarrow 3a^2 - 7ab + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ 3a = 4b \end{array}\right.$

Với a = b suy ra $x = 3 + 2\sqrt{7}\,(t/m);\ x = 3 - 2\sqrt{7}\,(l)$.

Với 3a = 4b suy ra $x = \dfrac{61+\sqrt{11137}}{18}(t/m);\ x = \dfrac{61-\sqrt{11137}}{18}(l)$.

Ví dụ 9 Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+6x+6} = x + 1 + \sqrt{x+2}$.

Lời giải chi tiết

Điều kiện: $x \ge -2$

$\sqrt{2x^2+6x+6} = x+1+\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \sqrt{2(x+1)^2 + 2(x+2)} = x+1+\sqrt{x+2}$

Ta thấy $x = -1$ không phải là nghiệm của phương trình, $x \ne -1$ phương trình tương đương với $\sqrt{2 + \dfrac{2(x+2)}{(x+1)^2}} = 1 + \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$

Đặt $t = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$, phương trình trở thành: $\sqrt{2+2t^2} = 1 + t \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1 \\ 2 + 2t^2 = 1 + 2t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$

Với $t = 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x+1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ thỏa điều kiện.

Ví dụ 10 Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$

Lời giải chi tiết

Điều kiện: $x \ge -1$

Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1} \quad (t \ge 1)$

Khi đó phương trình trở thành $t^2-t-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=5 & (\textit{nhận}) \\ t=-4 & (\textit{loại}) \end{array}\right.$

$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3}=21-3x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 21-3x \ge 0 \\ 4\left(2x^2+5x+3\right)=\left(21-3x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 7 \\ x^2-146x+429=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 7 \\ \left[\begin{array}{l} x=143 \\ 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=3$

➢ **Phương pháp hàm số**

Tính chất 1: *Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên K, nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên K thì phương trình $f\left(x\right)=c$ (c là hằng số) có nhiều nhất một nghiệm trên K.*

Tính chất 2: *Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên K, nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ luôn đồng biến hoặc luôn trên K thì với $u,v \in K$ ta có $f\left(u\right)=f\left(v\right) \Leftrightarrow u=v$.*

Ví dụ 11 Giải phương trình: $x^3+6x^2-171x-40\left(x+1\right)\sqrt{5x-1}+20=0, x \in \mathbb{R}$

Lời giải chi tiết

Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{5}$

Khi đó phương trình tương đương với:

$\left(x^3+6x^2+12x+8\right)-\left(3x+6\right)=\left[8\left(5x-1\right)\sqrt{5x-1}+36\left(5x-1\right)+54\sqrt{5x-1}+27\right]-\left(6\sqrt{5x-1}+9\right)$

$\Leftrightarrow \left(x+2\right)^3-3\left(x+2\right)=\left(2\sqrt{5x-1}+3\right)^3-3\left(2\sqrt{5x-1}+3\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3-3t$. Phương trình (1) có dạng $f\left(x+2\right)=f\left(2\sqrt{5x-1}+3\right)$

Ta có: $f'\left(t\right)=3t^2-3; f'\left(t\right)=0 \Leftrightarrow t=\pm 1$

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	0	+	
f(t)	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra: Hàm số $f(t)=t^3-3t$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Với điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{5}\Rightarrow\begin{cases}x+2>1\\2\sqrt{5x-1}+3>1\end{cases}$

Từ đó suy ra $(1)\Leftrightarrow x+2=2\sqrt{5x-1}+3$

$\Leftrightarrow x-1=2\sqrt{5x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x^2-2x+1=4(5x-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x^2-22x+5=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x=11\pm\sqrt{116}\end{cases}\Leftrightarrow x=11+\sqrt{116}\quad (t/m)$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $x=-11+\sqrt{116}$

Ví dụ 12 Giải phương trình: $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}=(x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$.

Lời giải chi tiết

ĐK: $x\ge -2$

Phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \dfrac{x+4}{x^2-2x+3}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}\end{array}\right.$ (1)

(1) $\Leftrightarrow(x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=(x+1)\left(x^2-2x+3\right)$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^2+2\right]=\left[(x-1)+2\right]\left[(x-1)^2+2\right]$ (2)

Xét pt $=(t+2)\left(t^2+2\right)$ có pt $f'(t)=3t^2+4t+2>0\forall t\in\mathbb{R}$

Vậy f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó: $(2)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f(x-1)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x^2-3x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm: x = 2, $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

Ví dụ 13 Giải phương trình: $x\sqrt{x-1}=(2x-3)^2(2x-2)+x-2$.

Lời giải chi tiết

TXĐ $D=[1;+\infty)$

Phương trình $\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x-1}+(x-1)+\sqrt{x-1}=(2x-3)^3+(2x-3)^2+2x-3$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t^2+t \Rightarrow f'(t)=3t^2+2t+1 \Rightarrow f'(t)>0, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1) có dạng $f(\sqrt{x-1})=f(2x-3)$. Từ hai điều trên phương trình (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2x-3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3/2 \\ x-1=4x^2-12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3/2 \\ 4x^2-13x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Ví dụ 14 Giải phương trình: $\sqrt{x+1}=\dfrac{x^2-x-2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$.

Lời giải chi tiết

Điều kiện: $x\ge -1, x\ne 13$

Pt $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+2=\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt[3]{2x+1}-3} \Leftrightarrow 1=\dfrac{(x+2)(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$ (x=3 không là nghiệm)

$\Leftrightarrow (2x+1)+\sqrt[3]{2x+1}=(x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}$

Hàm số $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ do đó phương trình $\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}=\sqrt{x+1}$

$\begin{cases} x\ge -1/2 \\ (2x+1)^2=(x+1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1/2 \\ x^3-x^2-x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1/2 \\ x=0, x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=0, x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm $S=\{1,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\}$

Ví dụ 15 Giải phương trình: $x^4+x^2+(x^2+2x-1)^3=2-4x+2\sqrt[3]{x^2-x^4}$.

Lời giải chi tiết

Điều kiện $\forall x\in\mathbb{R}$

Phương trình tương đương $(x^2+2x-1)^3+2(x^2+2x-1)=x^2-x^4+2\sqrt[3]{x^2-x^4}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t, t\in\mathbb{R}$

Ta có: $f'(t)=3t^2+2>0 \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Phương trình (1) có dạng $f\left(x^2+2x-1\right)=f\left(\sqrt[3]{x^2-x^4}\right)\Leftrightarrow x^2+2x-1=\sqrt[3]{x^2-x^4}$ (2)

Nếu $x=0$ thay vào (2) không thỏa mãn

Nếu $x\neq 0$ thì phương trình (2) $\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}+2=\sqrt[3]{\frac{1}{x}-x}$. Đặt $\sqrt[3]{\frac{1}{x}-x}=t$, ta có phương trình

$t^3+t-2=0\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+t+2\right)=0\Leftrightarrow t=1$ (Vì $t^2+t+2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$)

Với $t=1\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{x}-x}=1\Leftrightarrow \frac{1}{x}-x=1\Leftrightarrow -x^2-x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện: $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ và $x=(-1;2)\cup[3;+\infty)$

Phần II: BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

➢ **Sử dụng tính chất của hàm số đồng biến, nghịch biến:**

Tính chất 1: *Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên K, nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến trên K thì với $u,v\in K$ ta có $f(u)\le f(v)\Leftrightarrow u\le v$.*

Tính chất 2: *Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên K, nếu hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến trên K thì với $u,v\in K$ ta có $f(u)\le f(v)\Leftrightarrow u\ge v$.*

➢ **Đưa bất phương trình về dạng tích**

- $f(x).g(x)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0\\ g(x)=0\\ \begin{cases} f(x)>0\\ g(x)>0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)<0\\ g(x)<0\end{cases}\end{array}\right.$

- $f(x).g(x)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0\\ g(x)=0\\ \begin{cases} f(x)>0\\ g(x)<0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)<0\\ g(x)>0\end{cases}\end{array}\right.$

Chú ý: $\begin{cases} A\ge B\\ A\ge 0\Leftrightarrow A^2\ge B^2\\ B\ge 0\end{cases}$

Bài tập 1.

Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x}} \ge 1$

A. $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **B.** $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **C.** $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ **D.** $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{3}$

Lời giải

ĐK: $x \ge 0$

Với $x \ge 0 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x}>0$ nên bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x(x+2)} \ge \sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x^2+2x \ge x^3+3x^2+4x+1-2(x+1)\sqrt{x(x+1)}$

$\Leftrightarrow x^3+2x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{x(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow (x+1)\left[x^2+x+1-2\sqrt{x(x+1)}\right] \le 0$

$\Leftrightarrow x^2+x+1-2\sqrt{x(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x(x+1)}-1\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)}-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Do $x \ge 0$ nên

Chọn đáp án A.

Bài tập 2.

Giải bất phương trình $\sqrt{2x+7}-\sqrt{5-x} \ge \sqrt{3x-2}$

A. $\dfrac{2}{3} \le x \le 1$ hoặc $\dfrac{14}{3} \le x \le 5$ **B.** $\dfrac{2}{3} \le x \le 1$ hoặc $\dfrac{14}{3} < x \le 5$

C. $\dfrac{2}{3} < x \le 1$ hoặc $\dfrac{14}{3} < x \le 5$ **D.** $\dfrac{2}{3} < x \le 1$ hoặc $\dfrac{14}{3} < x < 5$

Lời giải chi tiết

+ ĐK: $\dfrac{2}{3} \le x \le 5$.

Biến đổi PT về dạng $\sqrt{2x+7} \ge \sqrt{3x-2}+\sqrt{5-x}$

+ Bình phương hai vế, đưa về được $3x^2-17x+14 \ge 0$

+ Giải ra được $x \le 1$ hoặc $x \ge \dfrac{14}{3}$

+ Kết hợp với điều kiện, nhận được $\dfrac{2}{3} < x \le 1$ hoặc $\dfrac{14}{3} \le x \le 5$

Chọn đáp án A.

Bài tập 3.

Giải bất phương trình $\sqrt{x}(x+1) \ge x^3 - 5x^2 + 8x - 6$ $(x \in \mathbb{R})$.

A. $0 \le x < 4$ **B.** $0 < x < 4$ **C.** $0 \le x \le 4$ **D.** $0 < x \le 4$

Lời giải chi tiết

Điều kiện: $x \ge 0$.

$(1) \Leftrightarrow x\sqrt{x} + x \ge (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + (x^2 - 4x + 4) - 2$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^3 + x + \sqrt{x} \ge (x-2)^3 + (x-2)^2 + (x-2)$ (2)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t$, có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 > 0,\ \forall t$.

Do đó hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên R, mặt khác (2) có dạng

$f\left(\sqrt{x}\right) \ge f\left(x-2\right) \Leftrightarrow \sqrt{x} \ge x - 2$ (3).

+) Với $0 \le x \le 2$ là nghiệm của (3).

+) Với $x > 2$, bình phương hai vế (3) ta được $x^2 - 5x + 4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 4$

Kết hợp nghiệm ta được $2 < x \le 4$ là nghiệm của (3).

Vậy nghiệm của (3) là $0 \le x \le 4$, cũng là nghiệm của bất phương trình (1).

Chọn đáp án C.

Bài tập 4.

Giải bất phương trình $2x^2 + \sqrt{x+2} + 5 \le \sqrt{2}\left(\sqrt{x+2} + x\right)\sqrt{x^2 - x + 3} + x$

A. $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ **B.** $x = -\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

C. $x = -\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ **D.** $x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

Lời giải chi tiết

Gọi bất phương trình đã cho là (1). Điều kiện xác định: $x \ge -2$.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sqrt{x+2} + x\right)\sqrt{x^2 - x + 3} - \left(\sqrt{x+2} + x\right) \ge 2x^2 - 2x + 5$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2} + x\right)\left(\sqrt{2x^2 - 2x + 6} - 1\right) \ge 2x^2 - 2x + 5$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2} + x\right)\left(2x^2 - 2x + 6 - 1\right) \ge (2x^2 - 2x + 5)\left(\sqrt{2x^2 - 2x + 6} + 1\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} + x \ge \sqrt{2x^2 - 2x + 6} + 1$ (Do $2x^2 - 2x + 5 > 0, \forall x \in R$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}+x-1 \geq \sqrt{2(x-1)^2+2(x+2)}$ (2)

Đặt $a=\sqrt{x+2}, b=x-1 (a \geq 0)$, (2) trở thành

$$a+b \geq \sqrt{2a^2+2b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ (a+b)^2 \geq 2a^2+2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ (a-b)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b \geq 0$$

Do đó ta có $\sqrt{x+2}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm.

Chọn đáp án A.

Bài tập 5.

Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1} \leq 3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

A. $S=[-3;+\infty)$ **B.** $S=(-3;+\infty)$

C. $S=(3;+\infty)$ **D.** $S=[3;+\infty)$

Lời giải chi tiết

Điều kiện: $x \geq -1$.

Bất phương trình (1) tương đương: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1} \leq \left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}\right)^2-20$

Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}$, t >0

Bất phương trình trở thành: $t^2-t-20 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 5 \\ t \leq -4 \end{array}\right.$. Đối chiếu đk được $t \geq 5$.

Với $t \geq 5$, ta có: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1} \geq 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3} \geq -3x+21$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3x+21<0 \\ 2x^2+5x+3 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -3x+21 \geq 0 \\ x^2-146x+429 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>7 \\ 3 \leq x \leq 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq 3$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq -1$ suy ra tập nghiệm bất pt là: S= $S=[-3;+\infty)$

Chọn đáp án D.

Bài tập 6.

Giải bất phương trình $\sqrt{x+1} \geq \dfrac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}$ trên tập hợp số thực.

A. $x \in [-1;0] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$ **B.** $x \in [1;0] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$

C. $x \in [1;0] \cup \left[-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$ **D.** $x \in (0;1) \cup \left[-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$

Lời giải chi tiết

– ĐK: $x \geq -1, x \neq 13$. Khi đó:

$$\sqrt{x+1} \geq \frac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2 \geq \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{(x+2)\left(\sqrt{x+1} - 2\right)}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}, (*)$$

– Nếu $\sqrt[3]{2x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 13$ (1) thì (*) $\Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \geq (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (*):

$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \geq f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \geq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x \leq 0$$

Suy ra: $x \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[0; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \xrightarrow{DK(1)} \text{VN}$

– Nếu $\sqrt[3]{2x+1} - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 13$ (2)

thì (2*) $\Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \leq (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (2*):

$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \leq f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \leq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \vee \begin{cases} -\dfrac{1}{2} < x < 13 \\ (2x+1)^2 \leq (x+1)^3 \end{cases}$$

Suy ra: $x \in [-1;0] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \xrightarrow{DK(2)} x \in [-1;0] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; 13\right)$

Vậy: $x \in (0;1) \cup \left[-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; 13\right)$

Chọn đáp án A.

Bài tập 7.

Giải bất phương trình: $x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x(x^2+2x-4)}\right)$ (x∈R).

A. $S=\left[-1-\sqrt{5};0\right]\cup\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\frac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$

B. $S=\left[-1-\sqrt{5};0\right]\cup\left(-\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$

C. $S=\left[-1-\sqrt{5};0\right]\cup\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$

D. $S=\left[1-\sqrt{5};0\right]\cup\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$

Lời giải chi tiết

$x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x(x^2+2x-4)}\right)$ (*)

ĐK: x(x2 + 2x – 4) ≥ 0 $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1-\sqrt{5}\le x\le 0\\ x\ge -1+\sqrt{5}\end{array}\right.$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow 4\sqrt{x(x^2+2x-4)}>x^2+5x-4$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x(x^2+2x-4)}>(x^2+2x-4)+3x$ (**)

TH1: $x\ge -1+\sqrt{5}$, chia hai vế cho x > 0, ta có: (**) $\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{x^2+2x-4}{x}}>\frac{x^2+2x-4}{x}+3$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x^2+2x-4}{x}}$, $t\ge 0$, ta có bpt: $t^2-4t+3<0\Leftrightarrow 1<t<3$

$1<\sqrt{\frac{x^2+2x-4}{x}}<3\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-7x-4<0\\ x^2+x-4>0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{-1+\sqrt{17}}{2}<x<\frac{7+\sqrt{65}}{2}$

TH2: $-1-\sqrt{5}\le x\le 0$, $x^2+5x-4<0$, (**) luôn thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm bất phương trình (*) là $S=\left[-1-\sqrt{5};0\right]\cup\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$

Chọn đáp án C.

Bài tập 8.

Giải bất phương trình $\sqrt{x+1} \geq \dfrac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}$ trên tập hợp số thực.

A. $x \in [0;1] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};12\right)$ **B.** $x \in [-1;0] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$

C. $x \in [0;1] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$ **D.** $x \in [-1;0] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};12\right)$

Lời giải chi tiết

ĐK: $x \geq -1, x \neq 13$

– Khi đó: $\sqrt{x+1} \geq \dfrac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2 \geq \dfrac{x^2 - x - 6}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}$

$\Leftrightarrow 1 \geq \dfrac{(x+2)\left(\sqrt{x+1} - 2\right)}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}, (*)$

– Nếu $\sqrt[3]{2x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 13$ (1)

thì (*) $\Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \geq (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (*):

$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \geq f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \geq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x \leq 0$

Suy ra: $x \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[0; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \Rightarrow$ ĐK (1)VN

– Nếu $\sqrt[3]{2x+1} - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 13$ (2)

thì (2*) $\Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \leq (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (2*):

$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \leq f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \leq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq -\dfrac{1}{2} \vee \begin{cases} -\dfrac{1}{2} < x < 13 \\ (2x+1)^2 \leq (x+1)^3 \end{cases}$

Suy ra: $x \in [-1;0] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$

Kết hợp điều kiện có $x \in [-1;0] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$. Vậy: $x \in [-1;0] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};12\right)$

Chọn đáp án B.

Bài tập 9.

Giải phương trình : $8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}$

A. $x=-2\cup x=\dfrac{5-\sqrt{3}}{4}$

B. $x=2\cup x=\dfrac{5-\sqrt{3}}{4}$

C. $x=-2\cup x=\dfrac{5-\sqrt{3}}{4}$

D. $x=2\cup x=\dfrac{5+\sqrt{3}}{4}$

Lời giải chi tiết

$8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow (2x-3)^3+(2x-3)=\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3+\sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow f(2x-3)=f\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)$

Hàm số đặc trưng có dạng $f(t)=t^3+t$ là hàm số xác định và liên tục trên R

$f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in R$. Suy ra hàm số đồng biến trên R nên

+) $\Leftrightarrow f(2x-3)=f\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)\Leftrightarrow 2x-3=\sqrt[3]{3x-5}\Leftrightarrow 8x^3-36x^2+51x-22=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(8x^2-20x+11\right)=0\Leftrightarrow x=2\vee x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}$

Chọn đáp án C.

Bài tập 10.

Giải bất phương trình:

$\left(5x^2-5x+10\right)\sqrt{x+7}+(2x+6)\sqrt{x+2}\ge x^3+13x^2-6x+32$.

A. $x=(-2;2]$

B. $x=[-2;2]$

C. $x=(-2;2)$

D. $x=(-2;2]$

Lời giải chi tiết

Điều kiện $x\ge -2$. Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$(5x^2-5x+10)\left(\sqrt{x+7}-3\right)+(2x+6)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$

$+3(5x^2-5x+10)+2(2x+6)\ge x^3+13x^2-6x+32$

$\Leftrightarrow (5x^2-5x+10)\left(\sqrt{x+7}-3\right)+(2x+6)\left(\sqrt{x+2}-2\right)-x^3+2x^2-5x+10\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}-x^2-5\right)\ge 0\ (*)$

Do $x\ge -2\Rightarrow \sqrt{x+2}+2\ge 2\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\le\dfrac{1}{2}$ và vì $2x+6>0$

$\Rightarrow \dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2} \le \dfrac{2x+6}{2} = x+3$ (1)

Do $x \ge -2 \Rightarrow \sqrt{x+7}+3 \ge \sqrt{5}+3 > 5 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3} < \dfrac{1}{5}$ và vì $5x^2-5x+10>0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3} < \dfrac{5x^2-5x+10}{5} = x^2-x+2 \Rightarrow \dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3} - x^2 - 5 < -x-3$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3} + \dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2} - x^2 - 5 < 0$. Do đó (*) $\Leftrightarrow x-2 \le 0 \Leftrightarrow x \le 2$

Kết hợp điều kiện $x \ge -2 \Rightarrow -2 \le x \le 2$.

Chọn đáp án B.

Bài tập 11.

Giải bất phương trình: $x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x(x^2+2x-4)}\right)$ (x∈ R).

A. $S=\left[1-\sqrt{5};1\right]\cup\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2};\dfrac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$

B. $S=\left[-1-\sqrt{5};0\right]\cup\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2};\dfrac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$

C. $S=\left[1-\sqrt{5};0\right]\cup\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2};\dfrac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$

D. $S=\left[-1-\sqrt{5};0\right]\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2};\dfrac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$

Lời giải chi tiết

$x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x(x^2+2x-4)}\right)$ (*)

ĐK: $x(x^2+2x-4)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1-\sqrt{5}\le x\le 0 \\ x\ge -1+\sqrt{5}\end{array}\right.$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow 4\sqrt{x(x^2+2x-4)} > x^2+5x-4$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x(x^2+2x-4)} > (x^2+2x-4)+3x$ (**)

TH1: $x\ge -1+\sqrt{5}$, chia hai vế cho x > 0, ta có:

(**) $\Leftrightarrow 4\sqrt{\dfrac{x^2+2x-4}{x}} > \dfrac{x^2+2x-4}{x}+3$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+2x-4}{x}}$, $t\ge 0$, ta có bất phương trình: $t^2-4t+3<0 \Leftrightarrow 1<t<3$

$1<\sqrt{\dfrac{x^2+2x-4}{x}}<3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x-4<0 \\ x^2+x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}<x<\dfrac{7+\sqrt{65}}{2}$

TH2: $-1-\sqrt{5}\le x\le 0$, $x^2+5x-4<0$, (**) luôn thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm bất phương trình (*) là $S=\left[-1-\sqrt{5};0\right]\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2};\dfrac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$

Chọn đáp án D.

Bài tập 12.

Giải bất phương trình: $(4x^2-x-7)\sqrt{x+2}>10+4x-8x^2$

A. $T=[-2;-1]\cup\left(\dfrac{5+\sqrt{41}}{8};+\infty\right)$ **B.** $T=[-2;1]\cup\left(\dfrac{5+\sqrt{41}}{8};+\infty\right)$

C. $T=[-2;-1)\cup\left(\dfrac{5+\sqrt{41}}{8};+\infty\right)$ **D.** $T=[-2;1)\cup\left(\dfrac{5+\sqrt{41}}{8};+\infty\right)$

Lời giải chi tiết

Điều kiện: $x\ge -2$, bất phương trình đã cho tương đương:

$(4x^2-x-7)\sqrt{x+2}+2(4x^2-x-7)>2\left[(x+2)-4\right]$

$(4x^2-x-7)(\sqrt{x+2}+2)>2(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)$

$\Leftrightarrow 4x^2-x-7>2\sqrt{x+2}-4 \Leftrightarrow 4x^2>(x+2)+2\sqrt{x+2}+1$

$\Leftrightarrow (2x)^2>(\sqrt{x+2}+1)^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x+2}+1-2x)(\sqrt{x+2}+1+2x)<0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}>2x-1 \\ \sqrt{x+2}<-2x-1 \end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}<2x-1 \\ \sqrt{x+2}>-2x-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -2\le x<-1$ hoặc $\Leftrightarrow x>\dfrac{5+\sqrt{41}}{8}$

Vậy tập nghiệm $x=2\cup x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$

Chọn đáp án C.

Bài tập 13.

Giải bất phương trình : $\sqrt{2x^4-6x^3+10x^2-6x+8}-\sqrt{x^3+x}\le\sqrt{x^2+1}(x-2)$

A. $x=4$ **B.** $x=-4$ **C.** $x=-3$ **D.** $x=3$

Lời giải chi tiết

$$\sqrt{2x^4-6x^3+10x^2-6x+8}-\sqrt{x^3+x}\le\sqrt{x^2+1}(x-2)\,(1)$$

Điều kiện : $\begin{cases}2x^4-6x^3+10x^2-6x+8\ge 0\\ x^3+x\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+1)(2x^2-6x+8)\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 0$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\sqrt{2x^2-6x+8}-\sqrt{x^2+1}\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}(x-2)\le 0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{2x^2-6x+8}\right)-\sqrt{x}-x+2\le 0$

$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-6x+8}-\sqrt{x}-x+2\le 0\qquad(2)$

Xét TH1 : Với $x=0$ khi đó (2) vô nghiệm

Xét TH2 : Với x > 0, chia hai vế của (2) cho $\sqrt{x}$ ta được :

$$\sqrt{2\left(x+\frac{4}{x}\right)-6}-1-\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\le 0\Leftrightarrow\sqrt{2\left(x+\frac{4}{x}\right)-6}\le\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)+1\quad(3)$$

Đặt $t=\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\Rightarrow x+\frac{4}{x}=t^2+4$, thay vào (3) ta được :

$$\sqrt{2t^2+2}\le t+1\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ t^2-2t+1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ (t-1)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow t=1$$

Với $t=1$ ta có : $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=1\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-2=0\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=-1(vn)\\ \sqrt{x}=2\Rightarrow x=4\end{array}\right.$

Kết hợp hai trường hợp và điều kiện ta thấy bất phương trình (1) có nghiệm x = 4.

Chọn đáp án A.

Bài tập 14.

Giải bất phương trình $\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+x^2\le\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+1$ trên tập số thực

A. $S=(-1;1]$ **B.** $S=[-1;1]$ **C.** $S=(-1;1)$ **D.** $S=[-1;1)$

Lời giải chi tiết

Điều kiện $x>-3$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+x^2-1\le 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{x^2+x+2}{x+3}-\frac{4}{x^2+3}}{\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}}+x^2-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{(x^2-1)(x^2+x+6)}{(x+3)(x^2+3)}}{\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}}+x^2-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)\left[\frac{x^2+x+6}{(x+3)(x^2+3)\left(\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}\right)}+1\right]\le 0$$

$\Leftrightarrow x^2-1\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$ (Với $x>-3$ thì biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương). Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-1;1]$

Chọn đáp án B.

Bài tập 15.

Giải bất phương trình sau: $\sqrt{-x^2+2x+4}\ge x-2$

A. $1-\sqrt{5}\le x<3$

B. $1-\sqrt{5}<x<3$

C. $1-\sqrt{5}<x\le 3$

D. $1-\sqrt{5}\le x\le 3$

Lời giải chi tiết

$a)\sqrt{-x^2+2x+4}\ge x-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ -x^2+2x+4\ge (x-2)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x\le 2 \\ -x^2+2x+4\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ -2x^2+6x\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\le 2 \\ 1-\sqrt{5}\le x\le 1+\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ 0\le x\le 3 \end{cases} \vee 1-\sqrt{5}\le x\le 2$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{5}\le x\le 3$$

Chọn đáp án D.

Bài tập 16.

Giải bất phương trình: $\sqrt{9x^2+3}+9x-1\ge\sqrt{9x^2+15}$

A. $x\ge\frac{1}{3}$ **B.** $x\ge-\frac{1}{3}$ **C.** $x\ge-\frac{1}{9}$ **D.** $x\ge\frac{1}{9}$

Lời giải chi tiết

Nhận xét : $9x-1\ge\sqrt{9x^2+15}-\sqrt{9x^2+3}\ge0\Rightarrow x\ge\frac{1}{9}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow\left(\sqrt{9x^2+3}-2\right)+3(3x-1)\ge\sqrt{9x^2+15}-4$

$$\Leftrightarrow\frac{9x^2-1}{\sqrt{9x^2+3}+2}+3(3x-1)-\frac{9x^2-1}{\sqrt{9x^2+15}+4}\ge0$$

$$(3x-1)\left[\frac{3x+1}{\sqrt{9x^2+3}+2}-\frac{3x+1}{\sqrt{9x^2+15}+4}+3\right]\ge0$$

$$(3x-1)\left[(3x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{9x^2+3}+2}-\frac{1}{\sqrt{9x^2+15}+4}\right)+3\right]\ge0\Rightarrow3x-1\ge0\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{3}$$

Kết hợp các điều kiện suy ra nghiệm của BPT là $x\ge\frac{1}{3}$ là nghiệm của bất phương trình.

Chọn đáp án A.

Bài tập 17.

Giải bất phương trình: $1+\sqrt{4x^2+20}\le x+\sqrt{4x^2+9}$

A. $x\ge2$ **B.** $x>2$ **C.** $x<2$ **D.** $x\le2$

Lời giải chi tiết

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{4x^2+9}-5+6-\sqrt{4x^2+20}+x-2\ge0\Leftrightarrow\frac{4x^2-16}{\sqrt{4x^2+9}+5}+\frac{16-4x^2}{6+\sqrt{4x^2+20}}+x-2\ge0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\left(\frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+9}+5}-\frac{4x+8}{6+\sqrt{4x^2+20}}+1\right)\ge0$$

Từ (1) suy ra $x-1\ge\sqrt{4x^2+20}-\sqrt{4x^2+9}>0\Rightarrow x>1$.

Do đó:

$$\frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+9}+5}-\frac{4x+8}{6+\sqrt{4x^2+20}}+1=(4x+8).\frac{1+\sqrt{4x^2+20}-\sqrt{4x^2+9}}{\left(\sqrt{4x^2+9}+5\right)\left(6+\sqrt{4x^2+20}\right)}+1>0$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \ge 2$.

Chọn đáp án A.

Bài tập 18.

Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{6(x^2+2x+4)}-2(x+2)} \ge \dfrac{1}{2}$

A. $x=-2+2\sqrt{3}$ **B.** $x=-2-2\sqrt{3}$

C. $x=2+2\sqrt{3}$ **D.** $x=2-2\sqrt{3}$

Lời giải chi tiết

Điều kiện : $x \ge -2$

Ta có: $\sqrt{6\left(x^2+2x+4\right)}-2(x+2)=\dfrac{2\left(x^2-2x+4\right)}{\sqrt{6\left(x^2+2x+4\right)}+2(x+2)}>0, \forall x \ge -2$

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+2}-2\right) \ge \sqrt{6\left(x^2+2x+4\right)}-2(x+2)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}+2x \ge \sqrt{12(x+2)+6x^2}$ (1)

Nhận xét $x=-2$ không là nghiệm của bất phương trình

Khi $x>-2$ chia hai vế bất phương trình (1) cho $\sqrt{x+2}>0$ ta được .

$2+2\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x+2}} \ge \sqrt{12+6\cdot\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}\right)^2}$ (2).

Đặt $t=\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$ thì bất phương trình (2) được.

$$2+2t \ge \sqrt{12+6t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2t \ge 0 \\ 4+8t+4t^2 \ge 12+6t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1 \\ 2(t-2)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2$$

$$t=2 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+2}}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-4x-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2+2\sqrt{3}.$$

Bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=2+2\sqrt{3}$. *(Chú ý bài này có nhiều cách giải khác như dùng vécto, dùng bất đẳng thức, dùng phép biến đổi tương đương)*

Chọn đáp án C.

Bài tập 19.

Giải bất phương trình $\left(x^2-x-6\right)\sqrt{x-1}+\left(x-2\right)\sqrt{x-1}\geq 3x^2-9x+2,(x\in\mathbb{R})$,

A. $x=[1;2]\cup[3;+\infty)$ **B.** $x=[-1;2]\cup[3;+\infty)$

C. $x=[-1;2)\cup[3;+\infty)$ **D.** $x=(-1;2)\cup[3;+\infty)$

Lời giải chi tiết

$$\left(x^2-x-6\right)\sqrt{x-1}+\left(x-2\right)\sqrt{x+1}\geq 3x^2-9x+2$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-x-6\right)\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(x-2\right)\left(\sqrt{x+1}-2\right)\geq 2x^2-10x+12$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2-x-6\right)\left(x-2\right)}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}{\sqrt{x+1}+2}\geq 2x^2-10x+12$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2-5x+6\right)\left(x+2\right)}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{\left(x^2-5x+6\right)}{\sqrt{x+1}+2}\geq 2\left(x^2-5x+6\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-5x+6\right)\left[\frac{x+2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}-2\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-5x+6\right)\left[\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[1;2\right]\cup\left[3;+\infty\right)$$

Chọn đáp án A.

Bài tập 20.

Giải bất phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-5}}\leq\dfrac{2}{\sqrt{x^2-2+1}}$ trên tập số thực

A. $T=(-\infty;-\sqrt{2}]\cup(\sqrt{2};+\infty)$. **B.** $T=(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty)$.

C. $T=(-\infty;-\sqrt{2})\cup[\sqrt{2};+\infty)$. **D.** $T=(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$.

Lời giải chi tiết

+) Đặt $t=x^2-2$, bpt trở thành: $\dfrac{1}{\sqrt{t+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3t+1}}\leq\dfrac{2}{\sqrt{t}+1}$

ĐK: $t\geq 0$ với đk trên, bpt tương đương $(\sqrt{t}+1)(\dfrac{1}{\sqrt{t+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3t+1}})\leq 2$.

Theo Cô-si ta có:

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+3}}=\sqrt{\frac{t}{t+1}.\frac{t+1}{t+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t+1}+\frac{t+1}{t+3}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{t+3}}=\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2}{t+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{t+3}\right)$$

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{3t+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2t}{3t+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2t}{3t+1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3t+1}}=\sqrt{\frac{1}{t+1}.\frac{t+1}{3t+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{t+1}{3t+1}\right)$$

$\Rightarrow VT\le 2\forall t\ge 0.$

+) Thay ẩn x được $x^2\ge 2 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty)\Rightarrow T=(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty).$

Chọn đáp án

Johann Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Được mệnh danh là "hoàng tử của các nhà toán học", với ảnh hưởng sâu sắc cho sự phát triển của toán học và khoa học. Theo giai thoại kể lại, tài năng bẩm sinh của Gauss được phát hiện khi ông mới lên ba, qua việc ông sửa lại lỗi của cha trong tính toán tài chính.

Một câu chuyện khác kể rằng khi ông học tiểu học, thầy giáo yêu cầu học sinh tính cộng các số nguyên từ 1 đến 100. Gauss đã trả lời đúng chỉ trong vài giây bằng một cách giải nhanh và độc đáo.

Carl Gauss là nhà toán học và nhà khoa học tài năng người Đức, có nhiều đóng góp lớn cho các lĩnh vực khoa học, như lý thuyết số, giải tích, hình học vi phân, khoa trắc địa, từ học, thiên văn học và quang học.

Ông là người đã tìm ra cách dựng hình thất thập giác, ông chứng minh rằng mọi đa giác đều với số cạnh bằng số nguyên tố Fermat (và, do đó, mọi đa giác đều với số cạnh bằng tích của các số nguyên tố Fermat khác nhau và lũy thừa của 2) đều có thể dựng được bằng compa và thước kẻ. Ông cũng giới thiệu "Hằng số hấp dẫn Gauss" và hoàn chỉnh phương pháp bình phương tối thiểu. Với những ảnh hưởng sâu sắc cho sự phát triển của toán học và khoa học, ông được xếp ngang hàng cùng Leonhard Euler, Isaac Newton và Archimedes như là những nhà toán học vĩ đại nhất của lịch sử.

PHẦN B

5 ĐỀ MINH HỌA KÌ THI THPT QUỐC GIA 2017

BỘ GIÁO DỤC

Đề số 1

ĐỀ MINH HỌA KÌ THI THPT QUỐC GIA 2017

MÔN: TOÁN (50 câu trắc nghiệm)

Thời gian làm bài: 90 phút

Họ tên:..

Số báo danh: ....

Câu 1 Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=3x+1$?

A. $d: y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ **B.** $d: y=3x+\frac{1}{3}$ **C.** $d: y=-\frac{1}{3}x+1$ **D.** $y=3x-\frac{29}{3}$

Câu 2 Tìm m lớn nhất để hàm số $y=x^3-3mx^2+x$ đồng biến trên R?

A. 1 **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ **D.** 2

Câu 3 Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $f(x)=\frac{6-8x}{x^2+1}$

A. -2 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** 8 **D.** 10

Câu 4 Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}(C)$. Tìm các giá trị m để đường thẳng $d: y=x+m-1$ cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt A; B sao cho $AB=2\sqrt{3}$

A. $m=4\pm\sqrt{10}$ **B.** $m=2\pm\sqrt{10}$ **C.** $m=4\pm\sqrt{3}$ **D.** $m=2\pm\sqrt{3}$

Câu 5 Cho hàm số $y=-2x^3+6x^2-5(C)$. Viết phương tình tiếp tuyến của đồ thị C, biết tiếp tuyến đi qua A(-1;-13)?

A. $\left[\begin{array}{l}y=6x-7\\y=-48x-61\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}y-6x-7\\y=48x-61\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}y=-6x-10\\y=48x-63\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}y=-3x-7\\y=24x-61\end{array}\right.$

Câu 6 Tìm các giá trị của m để hàm số $y=-x^3+(m+3)x^2-(m^2+2m)x-2$ đạt cực đại tại $x=2$?

A. $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=2\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=3\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m=5\\m=2\end{array}\right.$

Câu 7 Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục Ox.

B. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về cùng phía trục Oy.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$

D. Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt

Câu 8 Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = -3$?

A. $y = 7x + 29$ **B.** $y = 7x + 30$ **C.** $y = 7x + 31$ **D.** $y = 7x + 32$

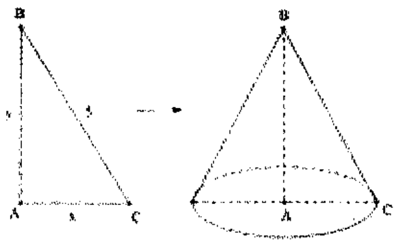
Câu 9 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ x_0 là nghiệm của phương trình $f''(x_0) = 10$

A. $y = 12x - 23$ **B.** $y = 12x - 24$ **C.** $y = 12x - 25$ **D.** $y = 12x - 26$

Câu 10 Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m + 2$ (1). Gọi A là điểm thuộc đồ thị hàm số (1) có hoành độ $x_A = 1$. Tìm các giá trị của m để tiếp tuyến với đồ thị hàm số (1) tại A vuông góc với đường thẳng $d: y = \frac{1}{4}x - 2016$

A. $m = -1$ **B.** $m = 0$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 2$

Câu 11 Cho tam giác vuông ABC có độ dài cạnh huyền bằng 5 (đơn vị độ dài). Người ta quay tam giác ABC quanh trục một cạnh góc vuông để sinh ra hình nón, với kích thước nào của tam giác ABC thì hình nón sinh ra có thể tích lớn nhất?



A. $x = 5\sqrt{\frac{2}{3}}, y = \frac{5}{\sqrt{3}}$. **B.** $x = 3, y = 4$.

C. $x = \sqrt{10},\ y = \sqrt{15}$. **D.** Kết quả khác.

Câu 12 Giải phương trình $x^2.5^{x-1} - (3^x - 3.5^{x-1})x + 2.5^{x-1} - 3^x = 0$

A. $x = 1, x = 2$ **B.** $x = 0, x = 1$ **C.** $x = \pm 1$ **D.** $x = \pm 2$

Câu 13 Phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}.\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}} = \frac{9}{16}$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$. Tổng 2 nghiệm có giá trị?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 14 Giải bất phương trình $log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) \ge -1$

A. $x \in (1;+\infty)$ **B.** $x \in [0;2)$ **C.** $x \in [0;2) \cup (3;7]$ **D.** $[0;1) \cup (2;3]$

Câu 15 Số nghiệm của phương trình $|x-3|^{x^2-x}=(x-3)^2$ là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 16 Giải phương trình $log_2 x^2 + log_{\frac{1}{2}}(x+2) = log_{\sqrt{2}}(2x+3)$

A. $x=1$ **B.** $x=-1$ **C.** $x=0$ **D.** $x=-2$

Câu 17 Cho hàm số $y=e^{2x}.cos4x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3y-2y'+4y''=0$ **B.** $y+2y'-4y''=0$

C. $10y'+2y'-5y=0$ **D.** $20y-4y'+y''=0$

Câu 18 Cho các phát biểu sau:

(i) Hàm số $y=\sqrt{x}$ đồng nhất với hàm số $y=x^{\frac{1}{2}}$

(ii) Hàm số $y=\sqrt[3]{x}$ đồng nhất với hàm số $y=x^{\frac{1}{3}}$

(iii) Nếu $\left(\frac{2}{3}\right)^p < \left(\frac{3}{2}\right)^{-q}$ thì p<q .

(iv) Với n là số nguyên dương thì $\sqrt[n]{a^n}=a$.

Tổng số phát biểu sai trong các phát biểu trên là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 19 Nghiệm của bất phương trình: $x^{lnx}+e^{ln^2 x}\le 2e^4$ là:

A. $1\le x\le e$ **B.** $\frac{1}{e'}\le x\le e$

C. $e\le x\le e^2$ **D.** $\frac{1}{e^2}\le x\le e^2$

Câu 20 Giải phương trình: $log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)-(2-x)log_2(x-2)+3(x-5)=0$

A. $x=\frac{17}{8}$ **B.** $x=4$

C. $x=1$ **D.** $x=5$

Câu 21 Với giá trị nào của m phương trình $9^x-3^x+m=0$ vô nghiệm.

A. $m>\frac{1}{4}$ **B.** $m>\frac{1}{2}$

C. $m<-\frac{1}{2}$ **D.** $-6<m<-3$

Câu 22 Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+cos^2 x)sinxdx$

A. . -1. **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 0

Câu 23. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{sin^2x+2cosx.cos^2\frac{x}{2}}dx$

A. $2ln2$ **B.** $2ln3$ **C.** $ln3$ **D.** $ln2$

Câu 24. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi trục hoành Ox và đồ thị hàm số: $y=\sqrt{(2-x)(4+x)}$. Cho (H) quay xung quanh đường thẳng $x=-1$ ta sẽ được một vật thể tròn xoay có thể tích:

A. $V=2t\pi$ **B.** $V=18\pi$ **C.** $V=36\pi$ **D.** $V=45\pi$

Câu 25. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường: y^2-2x và $x^2+y^2=8$ là:

A. $S=2\left(\pi+\frac{2}{3}\right)$ **B.** $2\left(\pi-\frac{2}{3}\right)$ **C.** $2\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)$ **D.** $2\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)$

Câu 26. Cho tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}(x+1)\left(e^x-3\right)dx$. Kết quả tích phân này có dạng $I=e-a$. Đáp án nào sau đây đúng?

A. $a=\frac{9}{2}$ **B.** $a=\frac{9}{4}$ **C.** $a=\frac{9}{5}$ **D.** $a=\frac{8}{3}$

Câu 27. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường: $y=0, y=\sqrt{x(e^x+1)}$, $x=0, x=1$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay H quanh trục hoành

A. $V=\pi$ **B.** $V=\frac{3\pi}{2}$ **C.** $V=\frac{\pi}{2}$ **D.** $V=\frac{5\pi}{2}$

Câu 28. Cho tích phân $J=\int\limits_{1}^{2}\frac{lnx}{x^2}dx$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. $J=-lnx\Big|_1^2+\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{x^2}dx$ **B.** $J=-\frac{1}{x}lnx\Big|_1^2+\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{x^2}dx$

C. $J=-lnx\Big|_1^2+\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{x}dx$ **D.** $\sqrt{5}$

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $2z+\bar{z}=3+i$. Tính $A=|iz+2i+1|$?

A. 1 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** 3 **D.** $\sqrt{5}$

Câu 30. Số nghiệm của phương trình: $z^3-2(i+1)z^2+3iz+1-i=0$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 31. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $1+i, 4+\left(\sqrt{3}+1\right)i, 1+\left(2\sqrt{3}+1\right)i$. Tam giác ABC là:

A. Tam giác vuông tại A **B.** Tam giác vuông tại B

C. Tam giác cân tại A **D.** Tam giác đều

Câu 32. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn z^2 là số ảo là:

B. Đường tròn $x^2+y^2=1$. **B.** Đường thẳng $y=x$.

C. Đường thẳng $y=-x$. **D.** Các đường thẳng $y=\pm x$ trừ $O(0;0)$.

Câu 33 Điểm nào sau đây biểu diễn số phức: $z_1.z_2+i=-8+i$?

A. $(-8,1)$ B. $(4,8)$ C. $(8,-1)$ D. $(-4,-1)$

Câu 34 Nếu $z=i$ thì z^{2007} bằng:

A. z B. 1 C. 0 D. $-z$

Câu 35 Cho hình chop S.ABCD có đáy là hình bình hành với AB=a; AD=2a; góc BAD=60.SA vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng đáy là 60 độ. Thể tính khối chóp S.ABCD là V. Tỉ số $\frac{V}{a^3}$ là:

A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{7}$

Câu 36 Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông tại A, AC=a; góc ACB=60. Đường chéo BC' của mặt bên (BCC'B) tạo với mặt (AA'C'C) một góc 30 độ. Tính thể tích khối lăng trụ theo a?

A. $V=a^3\sqrt{6}$ B. $V=a^3\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $V=a^3\frac{2\sqrt{6}}{3}$ D. $V=a^3\frac{4\sqrt{6}}{3}$

Câu 37 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC), gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $MC=2MS$. Biết $AB=3$, $BC=3\sqrt{3}$, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM?

A. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ B. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Câu 38 Cho hình chop đều S.ABCD có cạnh bằng 2a. Mặt bên hình chóp tạo với đáy một góc 60 độ. Mặt phẳng (P) chứa AB đi qua trọng tâm G của tam giác SAC cắt SC, SD lần lượt tại M, N. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABMN?

A. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$ C. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$ D.

Câu 39 Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng ABC là trung điểm củaAB. Mặt bên (AA' C'C) tạo với đáy một góc bằng 45. Tính thể tích của khối lăng trụ này?

A. $\frac{3a^3}{16}$ B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$ D. $\frac{a^3}{16}$

Câu 40 Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(4,-11,-4)$ lên mặt phẳng: $2x-5y-z-7=0$ là:

A. $(-2,-1,0)$ B. $(2,0,-1)$

C. $-1,0,-2$ D. $(0,-1,-2)$

Câu 41 Mặt cầu $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=49$ tiếp xúc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $3x-2y-6z+16=0$

B. $2x-y-2z+16=0$

C. $2x+y-2z-16=0$

D. Một mặt phẳng khác.

Câu 42 Tâm của đường tròn: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6x+2y+8z+10=0\\2x-2y-z-3=0\end{cases}$

A. $H(1,-1,1)$

B. $H(1,1,-3)$

C. $H(-2,2,5)$

D. $(0,0,-3)$

Câu 43 Phương trình mặt phẳng qua $A(0,0,-2)$; $B(2,-1,1)$ và vuông góc với mặt phẳng: $3x-2y+z+1=0$.

A. $4x+5y-z-2=0$

B. $9x-3y-7z-14=0$

C. $5x+7y-z-2=0$

D. Một phương trình khác

Câu 44 Định m để mặt phẳng $2x-y-2z+2m-3=0$ không cắt mặt cầu $x^2+y^2+z^2+2x-4z+1=0$

A. $m<-1 \vee m>3$

B. $-1<m<3$

C. $m<\dfrac{3}{2} \vee m>\dfrac{15}{2}$

D. $\dfrac{3}{2}<m<\dfrac{15}{2}$

Câu 45 Trong không gian Oxyz cho 2 mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-3=0; (\beta): 2x-y+z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với (α) và (β) đồng thời khoảng cách từ M(2;-3;1) đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{14}$

A. Có hai mặt phẳng thỏa mãn là (P_1) $x+2y-3z+16=0$ và (P_2) $x+2y-3z-12=0$.

B. Có hai mặt phẳng thỏa mãn là (P_1) $2x+y-3z-16$ và (P_2) $2x+y-3z+12=0$.

C. Có hai mặt phẳng thỏa mãn là (P_1) $2x+y-3z+16=0$ và (P_2) $2x+y-3z-12=0$.

D. Có một mặt phẳng thỏa mãn là (P_1) $x+2y-3z-16=0$.

Câu 46 Trong không gian hệ tọa độ Oxyz cho 2 điểm A(1;3;0) và B(-2;1;1) và đường thẳng $(\Delta): \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$. Viết phương tình mặt cầu đi qua A, B có tâm I thuộc đường thẳng (Δ)

A. $\left(x+\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{13}{10}\right)^2+\left(z+\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{521}{100}$

B. $\left(x+\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{13}{10}\right)^2+\left(z+\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{25}{3}$

C. $\left(x-\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{13}{10}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{521}{100}$

D. $\left(x-\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{13}{10}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{25}{3}$

Câu 47 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ và điểm $A(-2;1;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa d?

A. $x-7y-4z+9=0$ **B.** $x-7y-4z+8=0$

C. $x-6y-4z+9=0$ **D.** $x-y-4z+3=0$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1 **Chọn D**

Ta có $y'=x^2-4x+3$

Gọi $M(x_0,y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0,y_0)$ có dạng $y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$

Đường thẳng y = 3x + 1 có hệ số góc 3

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng nên: $y'(x_0)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=4 \end{array}\right.$

Với $x=0 \Rightarrow y=1$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=3x+1$

Với $x=4 \Rightarrow y=\frac{7}{3}$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=3x-\frac{29}{3}$

Thử lại, ta được $y=3x-\frac{29}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2 **Chọn B**

Tập xác định: $D=R$

Ta có: $y'=3x^2-6mx+1$

Hàm số đồng biến trên R khi và chỉ khi $y'\geq 0$ với $\forall x\in R$

$\Leftrightarrow 3x^2-6mx+1\geq 0\ \forall x\in R$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ 36m^2-12\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Vậy $m\in\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ thì hàm số đồng biến trên R.

Câu 3 **Chọn C**

Ta có: $f'(x)=\frac{8x^2-12x-8}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0 \leftrightarrow 8x^2-12x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\Rightarrow f(2)=-2 \\ x=-\frac{1}{2}\Rightarrow f(-\frac{1}{2})=-8 \end{array}\right.$

Ta vẽ bảng biến thiên và thấy $min=-2; max=8$.

Câu 4 **Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $\frac{2x+1}{x+1}=x+m-1 \Leftrightarrow x^2+(m-2)x+m-2=0(*)$

Vì A,B là giao điểm của (C) và d nên A, B thuộc đường thẳng d và tọa độ $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình (*)

$A(x_1;x_1+m-1);B(x_2;x_2+m-1)$

$\rightarrow AB=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_1)^2=2(x_1-x_2)=2\left[(x_1+x_2)^2-4(x_1.x_2)\right]$

Theo Vi-ét: $(x_1+x_2)=2-m;(x_1x_2)=m-2$

$AB^2=12\leftrightarrow m=4\pm\sqrt{10}$

Câu 5 **Đáp án A.**

Giải tự luận

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)$ là: $y=y'(x_0).(x-x_0)+y_0$

Tiếp tuyến đi qua A(-1;-13) nên $-13=y'(x_0).(-1-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow 4x_0{}^3-12x_0{}^2+8=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=1\end{array}\right.$

Tính $y'(2),y(2)$ suy ra tiếp tuyến $y=-48x-61$.

Tính $y'(1),y(1)$ suy ra tiếp tuyến $y=6x-7$.

Câu 6 **Đáp án A.**

TXĐ: $D=R$

$y'=-3x^2+2(m+3)x-(m^2+2m)$; $y''=-6x+2(m+3)$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-12+4(m+3)-m^2-2m=0\\-12+2m+6<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m=0\\m<3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$. Kết luận : Giá trị m cần tìm là $m=0$, $m=2$

Câu 7 **Đáp án D**

$y'=3x^2-4x+1$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{3}\\x'=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x.x'>0$.

Câu 8 **Đáp án C.**

Tại điểm có hoành độ $x=-3$ ta có tung độ tương ứng $y=10$

$y'=\dfrac{7}{(x+2)^2}$, $y'(-3)=7$

Phương trình tiếp tuyến cần viết là $y=7(x+3)+10\Leftrightarrow y=7x+31$

Câu 9 **Đáp án D.**

$f'(x) = 2x^2 - 2x; \quad f''(x) = 4x - 2$

Theo đề bài, ta có: $f''(x_0) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 4x_0 - 2 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 3$

Với $x_0 = 3 \quad \Rightarrow \quad f(3) = 10; \quad f'(3) = 12$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(3;10)$ là: $y = 12x - 26$

Câu 10 **Đáp án C.**

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x$

Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm A là: $y'(1) = -4m$

Tiếp tuyến tại A vuông góc với đường thẳng d $\Leftrightarrow y'(1).\frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow m = 1$

Câu 11 **Đáp án A.**

Mẹo: lấy máy tính mode+5+4 "giải phương tình bậc 3"

Với đáp án A: Thay m=2+0,0001 và m=-2-0,0001, với mỗi m phương trình có 3 nghiệm nên đáp án thỏa mãn.

Tương tự thử với đáp án B, C, D thấy không thỏa.

Câu 12 **Đáp án C**

Nhập phương trình vào MTCT bằng phím Alpha

Calc từng đáp án thấy x=1; x=-1 thì ra 0

Câu 13 **Đáp án C.**

Hiểu công thức mũ + biến đổi mũ

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}} = \frac{9}{16} \quad \leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \leftrightarrow x - 1 - \frac{4}{x} = 2 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{array}\right. \rightarrow x_1 + x_2 = 3$$

Câu 14 **Đáp án C**

Giải tự luận: Điều kiện $(x^2 - 3x + 2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 1 \end{array}\right.$

Chú ý hệ số a logarit $0 < a < 1$

$log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1 \leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) \leq 2 \leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$

Kết hợp điều kiện chọn C

Mẹo: Giải trắc nghiệm

Nhập máy tính $log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1$ (xét lớn hơn hoặc bằng 0)

Với đáp án

Đáp án A: Bấm calc: -9999 và calc 1-0,0001 (sát 1 để kiểm tra) suy ra loại vì calc -999 ra số âm

Đáp án B: Bấm calc: 0 và 2-0,0001 suy ra loại vì calc1,9999 không xác định do điều kiện

Đáp án C: Bấm cac:0; calc 1-0,0001; calc 2+0,0001; calc:3=>thỏa mãn dương và bằng 0

Tự xét **Đáp án D.**

Câu 15 **Đáp án C.**

Kiến thức hay về dạng trị tuyệt đối hàm mũ với a chứa ẩn: $|a|^{f(x)}=|a|^{g(x)} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right.$

Giải phương tình trên thu được x=4; x=-1; x=2.

Câu 16 **Đáp án B.**

Nhập phương trình vào MTCT bằng phím Alpha và Calc từng đáp án.

Đáp án B.

Câu 17 **Đáp án D.**

$$y=e^{2x}\cos 4x$$
$$\Rightarrow y'=2e^{2x}\cos 4x-4e^{2x}\sin 4x=2e^{2x}\left(\cos 4x-2\sin 4x\right)$$
$$y''=4e^{2x}\left(\cos 4x-2\sin 4x\right)+e^{2x}\left(-\sin 4x-8\cos 4x\right)$$
$$=4e^{2x}\left(-3\cos 4x-4\sin 4x\right)$$

Xét mệnh đề: $Ay+by'+Cy''=0,\ \forall\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow e^{2x}\left[\left(A+2V-12C\right)\cos 4x-\left(4B+16C\right)\sin 4x\right]=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+2B-12C=0 \\ 4B+16C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+2B-12C=0 \\ B=-4C \end{cases} \Leftrightarrow A-20C=0$$

Chọn $A=20, C=1$ và $B=-4$

Ta có: $20y-4y'+y''=0$

Câu 18 **Đáp án D.**

Ta cần lưu ý các hàm x^{α} có tập xác định dựa theo số mũ α của chúng

$+)\alpha\in\mathbb{Z}^{+}\Rightarrow D=\mathbb{R}$

$+)\left[\begin{array}{l} \alpha\in\mathbb{Z}^{-} \\ \alpha=0 \end{array}\right.\Rightarrow D=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$+)\alpha\notin\mathbb{Z}\Rightarrow D=(0;+\infty)$

Lưu ý: $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra khi x>0. Do đó, hàm số $y=\sqrt[n]{x}$ không đồng nhất với hàm số $y=x^{\frac{1}{n}}(n\in\mathbb{N}^{+})$

Dó đó phát biểu (i),(ii) sai

(iii) sai vì $\left(\frac{2}{3}\right)^{p}<\left(\frac{3}{2}\right)^{-q}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{p}<\left(\frac{2}{3}\right)^{q}\overrightarrow{\frac{2}{3}<1}\ \ p>q$

Sai vì $\sqrt[n]{a^{n}}=\begin{cases} |a|, n=2k(k\in\mathbb{N}) \\ a, n=2k+1(k\geq 1, k\in\mathbb{N}^{+}) \end{cases}$

Câu 19 **Đáp án D.**

$$x^{\ln x}+e^{\ln^{2}x}\leq 2e^{4}\ \ (*)$$

Ta có: $e^{ln^2 x} = \left(e^{lnx}\right)^{lnx} = x^{lnx}$.

Vậy $(*)$

$\Leftrightarrow 2e^{ln^2 x} \le 2e^4 \Leftrightarrow ln^2 x \le 4 \Leftrightarrow |lnx| \le 2$

$\Leftrightarrow -2 \le lnx \le 2 \Leftrightarrow e^{-2} \le x \le e^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e^2} \le x \le e^2$

Câu 20 **Đáp án B.**

Thay từng đáp án vào phương trình ta thấy đáp án B thỏa mãn yêu cầu.

Câu 21 **Đáp án A.**

Đặt $t = 3^x > 0$ phương trình trở thành $t^2 - t + m = 0$ (1), phương trình để bài cho vô nghiệm khi phương trình (1) vô nghiệm hoặc không có nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ \begin{cases} t_1 + t_2 < 0 \\ t_1.t_2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - 4m < 0 \\ \begin{cases} 1 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$$

Câu 22 **Đáp án B.**

Shirt Mode+4 (chuyển chế dộ rad)

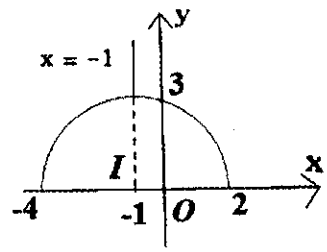
Nhập máy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + cosx\,cosx) sinx dx$ rồi bấm $"="$.

Câu 23 **Chọn D**

Nhập shirt +mode+4 "rad"

Nhập $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{sinx}{sin^2 x + 2cosx.cos\frac{x}{2}.cos\frac{x}{2}} dx = 0,693 = ln2$.

Câu 24



$y = \sqrt{(2-x)(4+x)} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2 = (2-x)(4+x) \end{cases}$

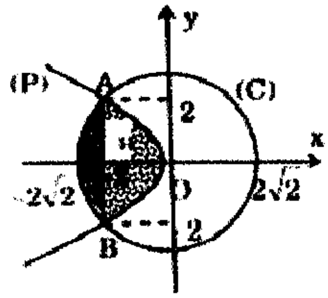
$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2 = 8 - 2x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ (x+1)^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

Đây là nửa đường tròn tâm $I(-1;0)$, bán kính $R = 3$, ở trên Ox.

Vậy khi cho (H) quay xung quanh đường thẳng $x = -1$ ta sẽ được vật thể tròn xoay là nửa hình cầu có bán kính $R = 3$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay là: $V = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{2}{3}\pi(3)^3 = 18\pi(dvdt)$

Câu 25



$(C): x^2+y^2=8$ và $(P): y^2=-2x$

• (C) và (P) cắt nhau tại $A(-2;2)$ và $B(-2;-2)$

• Ta dễ thấy $\widehat{AOB}=90^o$

- Gọi S_1 là diện tích hình viên phấn của đường tròn (C) giới hạn bởi cung nhỏ $\widehat{AB}$ và S_2 là diện tích tam giác cong giới hạn bởi (P) và đoạn thẳng AB.

Ta có: $S=S_1+S_2$

• $S_1=\frac{1}{4}$ diện tích hình tròn - diện tích ΔOAB

$$=\frac{\pi R^2}{4}-\frac{1}{2}AB.OH=2\pi-4$$

$$=2\pi-4\left(v\times\begin{cases}R=2\sqrt{2}\\AB=4\\OH=2\end{cases}\right)$$

• $S_2=2\int_0^2\left(x_{(P)}-x_{AB}\right)dy=2\int_0^2\left(-\frac{y^2}{2}+2\right)dy=2\left[-\frac{1}{6}y^3+2y\right]_0^2=\frac{16}{3}$

$$S=2\pi+\frac{16}{3}-4=\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)dvdt$$

Hay $S=2\left(\pi+\frac{2}{3}\right)$

Câu 26 **Đáp án A.**

$$\begin{cases}u=x+1\\dv=\left(e^x-3\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\int\left(e^x-3\right)dx=\left(e^x-3x\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=(x+1)\left(e^x-3x\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left(e^x-3x\right)dx$$

$$=(x+1)\left(e^x-3x\right)\Big|_0^1-\left(e^x-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^1=e-\frac{9}{2}$$

Câu 27 **Đáp án B.**

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x(e^x+1)}\right)^2dx=\pi\int_0^1 x(e^x+1)dx=\pi\int_0^1 xe^xdx+\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\pi\int_0^1 xe^xdx+\frac{\pi}{2}$$

+) Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}\Rightarrow\int_0^1 xe^xdx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^xdx=e-e^x\Big|_0^1=1$

Do đó: $V=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$ (đvtt)

Thật ra để tính $V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x(e^x+1)}\right)^2dx$ ta dùng MTCT và dễ dàng ra đáp án B.

Câu 28 **Đáp án B.**

$$J=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$$

Đặt $u=\ln x, dv=\frac{1}{x^2}dx$. Khi đó $du=\frac{1}{x}dx, v=-\frac{1}{x}$

Do đó $J=-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$

Câu 29 Chọn C

Thủ thuật giải phương trình số phức (chứa $z;\bar{z}$)

Nhập Mode+2 (Cmplx)=> chuyển chế độ số phức

Cách nhập số phức liên hợp :Shirt+2+2"conjg"+"X"

Nhập $2X+\overline{X}-3-i$, rồi bấm $Calc: 100+0,01i \Rightarrow 297-0,99i$

$\Rightarrow (3x-3)-(-y+1)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow z=1+i$

(bấm Calc $100+0,01i$ nghĩa là gán $x=100, y=0.01$)

Nhập $A: |iX+2i+1|$ rồi bấm $calc: 1+i+"="\Rightarrow A=3$

Câu 30 **Đáp án C.**

Thủ thuật chia số phức

Nhẩm A+B+C+D=0. Suy ra phương trình có nghiệm z=1

Tách bằng máy tính

$\frac{X^3-2(i+1)X^2+3iX+1-i}{X-1}+calc: X=1000$

Được kết quả: $998999-1999i \rightarrow z^2-z-1-(2z-1)i=z^2-(1+2i)z-1+i$

$\rightarrow z^3-2(i+1)z^2+3iz+1-i=(z-1)(z^2-(1+2i)z-1+i)=0$

$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z^2-(1+2i)z-1+i=0 \leftrightarrow \Delta=(-(1+2i))^2-4(-1+i)=1 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+i \\ z=i \end{array}\right. \end{array}\right.$

Có 3 nghiệm

Câu 31 **Đáp án D.**

Ta có $AB=BC=CA=2\sqrt{3}$ nên tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 32 **Đáp án D.**

Giả sử $z=x+yi$ với $x,y\in R$

suy ra $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, vì z^2 là số ảo nên $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \end{cases}$.

Vậy tập hợp các điểm thỏa yêu cầu bài toán là hai đường thẳng $x = \pm y$ bỏ đi gốc tọa độ.

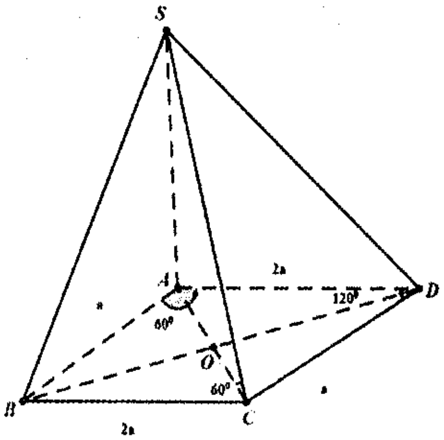
Câu 33 **Đáp án A.**

$z_1.z_2 + i = -8 + i$ có điểm biểu diễn là $(-8;1)$.

Câu 34 **Đáp án D.**

$z^{2017} = (i)^{2017} = i.(i^2)^{2013} = -i = -z$

Câu 35 **Đáp án C**



Ta có

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB.AD\cos A} = a\sqrt{3}$

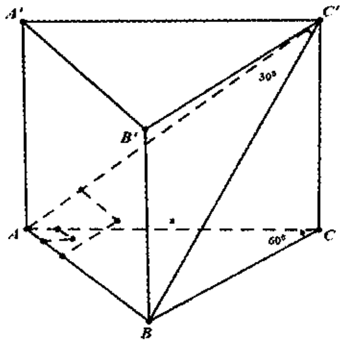
$AO = \sqrt{\frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}} = a\frac{\sqrt{7}}{2} \to AC = a\sqrt{7}$

$\to SA = a\sqrt{21}$

Mà $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AD\sin A = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ do đó $S_{ABCD} = a^2\sqrt{3}$.

Vậy $\frac{V}{a^3} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \sqrt{7}$

Câu 36 **Chọn A**

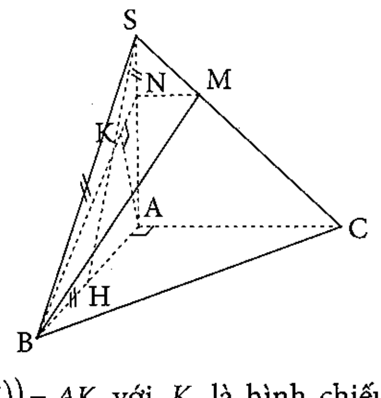


$AB = \tan\widehat{ACB}.BC = a\sqrt{3}$; $C'A = \frac{AB}{\tan AC'B} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3a$

$\to CC' = 2a\sqrt{2}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \to V = a^3\sqrt{6}$

Câu 37 **Đáp án A.**



Từ M kẻ đường thẳng song song với AC cắt SA tại $N \Rightarrow AC \parallel MN \Rightarrow AC \parallel (BMN)$

$AC \perp AB, AC \perp SH \Rightarrow AC \perp (SAB)$,

$AC \parallel MN \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow MN \perp (SAB)$

$\Rightarrow (BMN) \perp (SAB)$ theo giao tuyến BN.

Ta có:

$AC \parallel (BMN) \Rightarrow d(AC, BM) = d(AC, (BMN)) = d(A, (BMN)) = AK$ với K là hình chiếu của A trên BN

$\frac{NA}{SA}=\frac{MC}{SC}=\frac{2}{3}\Rightarrow S_{ABN}=\frac{2}{3}S_{SAB}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (đvdt) và $AN=\frac{2}{3}SA=2$

$BN=\sqrt{AN^2+AB^2-2AN.AB.\cos 60^0}=\sqrt{7}$

$\Rightarrow AK=\frac{2S_{ABN}}{BN}=\frac{2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$

Vậy $d(AC,BM)=\frac{3\sqrt{21}}{7}$ (đvđd)

Câu 38 **Đáp án B.**

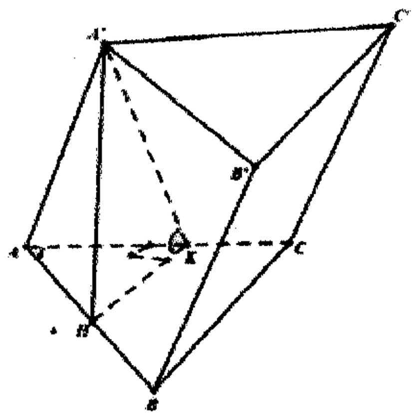
Ứng dụng công thức tỉ lệ thể tích

$\rightarrow V_{S.ABMN}=\frac{V_{ABCD}}{2}$

$SH=HI\tan SIH=a\sqrt{3};S_{ABCD}=4a^2\rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

$\rightarrow V_{ABCMN}=\frac{2a^3\sqrt{3}}{2}$

Câu 39 **Đáp án A**



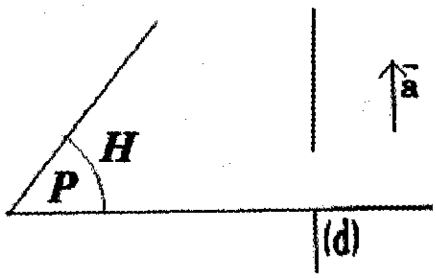
Hiểu cách xác định góc giữa 2 mặt phẳng

$HK=AH\sin A=\frac{a}{2}\sin 60=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\rightarrow SH=HK\tan SKH=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\rightarrow V=SH.S_{ABC}=.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^3}{16}$

Câu 40 **Đáp án D.**



- $A(4;-11;-4)$
- $(P):2x-5y-z-7=0$ (1)

  (P) có vtpt $\vec{n}=(2;-5;-1)$

  Đường thẳng (d) qua A vuông góc với (P).

  Phương trình tham số của (d) là: $\begin{cases}x=4+2t\\ y=-11-5t\\ z-4-t\end{cases}$ (2)

- Tọa độ giao điểm H của (d) và (P) là nghiệm hệ phương trình $(1)+(2)$.

  Ta có: Thay x,y,z ở (2) vào (1):

  $2(4+2t)-5(-11-5t)-(-4-t)-7=0$

  $\Leftrightarrow 30t+60=0\Leftrightarrow t=-2$

  Vậy $(0;-1;-2)$ là tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P)

Câu 41 **Đáp án B.**

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;0)$ và bán kính $R=7$

Xét mặt phẳng $(P): 2x-y-2x+16=0$

$$d(I,mpP)=\frac{|2(2)-(-1)-2(0)+16|}{\sqrt{4+1+4}}$$

Vậy mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $2x-y-2z+16=0$

Câu 42 **Đáp án B.**

Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x+2y+8z+10=0$

Có tâm $I(3;-1;-4)$ và bán kính $R=\sqrt{9+1+4-10}=2$

- Mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-3=0$ có vtpt $\vec{n}=(2;-2;-1)$

Tâm của đường tròn $(C)=(S)\cap(P)$ laf hình chiếu vuông góc của I lên mp(P). Đường thẳng (d) đi qua I và vuông góc với (P)

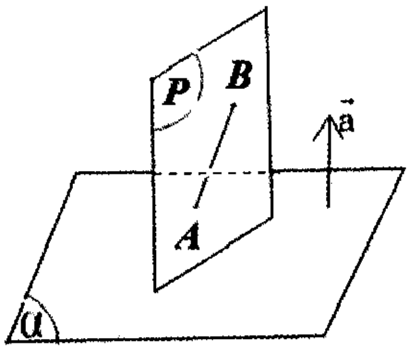
- Phương trình tham số của $(d): \begin{cases} x=3+2t \\ y=-1-2t \\ z=-4-t \end{cases}$

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}(P)\\(d)\end{cases}$ ta có:

- $2(3+2t)-2(-1-2t)-(-4-t)-3=0$
  $\Leftrightarrow 9t+9=0 \Leftrightarrow t=-1$

Vậy tâm của đường tròn (C) là: $H(1;1;-3)$

Câu 43 **Đáp án C.**



$A(0;0;-2); B(2;-1;1)$

$mp(\alpha): 3x-2y+z+1=0$

$Vtpt\ \vec{n}=(3;-2;1)$

$mp(P)\begin{cases} qua\ A\ v\mu\ B \\ \perp\ mp(\alpha)\end{cases}$

$\Rightarrow$ mp(P) có cặp vtcp là: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2;-1;3)\\ \vec{n}=(3;-2;1)\end{cases}$

$\Rightarrow$ vtpt của (P) là $\vec{u}\perp\begin{cases}\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\end{cases} \Rightarrow \vec{u}=(5;7;-1)$

Tóm lại mp(P) là: $5(x-0)+7(y-0)-1(z+2)=0$

Hay: $5x+7y-z-2=0$

Câu 44 **Đáp án C.**

$mp(P): 2x-y-2z+2m-3=0$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$, bán kính $R=2$.

$(P)\cap(S)=\varnothing \Leftrightarrow d(I,mp(P))>R$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2(-1)-0-2(3)\_2m-3|}{3}>2 \Leftrightarrow |2m-9|>6$

$\Leftrightarrow 2m-9<-6 \vee 2m-9>6 \Leftrightarrow m<\dfrac{3}{2} \vee m>\dfrac{15}{2}$

Câu 45 **Đáp án C**

Thủ thuật:

Thế đáp án: Với (P) là Ax+By+Cz+D=0

Nhớ công thức khoảng cách $d(A;(P))=\dfrac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

dùng MTCT phím alpha nhấp vào $d(A;(P))=\dfrac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Khoảng cách từ M đến (P) nhập $d(M:(P))=\dfrac{|A.2+B(-3)+C.1+D|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}-\sqrt{14}$

Với đáp án C nhập $\left[\begin{array}{l}(P):2x+y-3z+16=0\rightarrow calc:A=2;B=1;C=-3;D=16\\(P):2x+y-3z-12=0\rightarrow calc:A=2;B=1;C=-3;D=-12\end{array}\right.$

Thay điểm M và nhập D thấy bằng 0

Câu 46 **Đáp án A**

Cách 1: Giải tự luận $R=IA^2=IB^2$ và $I\in d\Rightarrow I(-1+2t;1+t;-2t)$.

Vì mặt cầu đi qua A,B nên $IA^2=IB^2 \Leftrightarrow (-2+2t)^2+(-2+t)^2+(-2t)^2=(1+2t)^2+t^2+(-2t-1)^2\,a$

Nhập máy chuyển vế+calc: X=1000 để phá ta được

$-19994\Rightarrow -(20t-6)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{10}\Rightarrow I\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{13}{10};-\dfrac{3}{5}\right);R^2=IA^2=\dfrac{521}{100}$

Cách 2: Mẹo nhanh hơn: phương tình mặt cầu $(x-a)^2+(y-b)^2+(y-c)^2=R^2$

Vì A thuộc mặt cầu nhập 4 biến $(1-A)^2+(3-B)^2+(0-C)^2-D$

Với A; B; C là tâm I còn D là R^2 chuyển sang dấu "-"

Với đáp án A: calc $A=-\dfrac{2}{5};B=\dfrac{13}{10};C=-\dfrac{3}{5};D=\dfrac{521}{100}$ (sẽ thấy =0)

Câu 47

$x-y-4z+3=0$

Đáp án C.

Đường thẳng d qua điểm $I=e+1$ và có một VTCP $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(4;0;1)$, suy ra mặt phẳng (P) có một VTPT $\vec{n}=\left[\vec{u},\overrightarrow{BA}\right]=(-1;7;4)$.

Mặt khác, (P) qua A nên có phương trình $x-7y-4z+9=0$.

BỘ GIÁO DỤC

Đề số 2

ĐỀ MINH HỌA KÌ THI THPT QUỐC GIA 2017

MÔN: TOÁN (50 câu trắc nghiệm)

Thời gian làm bài: 90 phút

Họ tên:..

Số báo danh: ....

Câu 1: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ giao với trục hoành tại điểm M. Khi đó tọa độ điểm M là

A. $M(3;0)$ **B.** $M(0;-3)$ **C.** $f(x)=0$ **D.** $\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$

Câu 2: Hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x+1}{x-m}$ có tiệm cận ngang là y=3. Giá trị tham số m:

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** Không tồn tại

Câu 3: Tất cả các giá trị của a để hàm số $y=\text{ax-sinx}+3$ đồng biến trên R là?

A. $a=1$ **B.** $a=-1$ **C.** $a\geq 1$ **D.** $a\geq -1$

Câu 4: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x^4+2x^2-1$ trên đoạn [-1;2] lần lượt là M và m. Khi đó giá trị (M.m) là:

A. -2 **B.** 46 **C.** -23 **D.** một số lớn hơn

Câu 5: Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+2$ đồng biến trên tập nào sau đây?

A. $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$ **B.** $(-3;1)$ **C.** $(3;+\infty)$ **D.** $(-1;3)$

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x(C)$ có đúng một tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ có hệ số góc k bằng:

A. $k=4$ **B.** $k=-\dfrac{1}{2}$ **C.** $k=\dfrac{1}{4}$ **D.** $k=-\dfrac{1}{4}$

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-2}(C)$. Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận, khi đó:

A. $I(-3;0)$ **B.** $I(0;-\dfrac{3}{2})$ **C.** $I(1;2)$ **D.** $I(2;1)$

Câu 8: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2-12x+1$ song song (d): 12x+y=0 có dạng $y=\text{ax}+b$. Tổng a+b là

A. -11 hoặc -12 **B.** -11 **C.** -12 **D.** đáp án khác

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{1-x}{x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** vô số giá trị

Câu 10 Trong tất cả các giá trị của m làm cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - mx - m$ đồng biến trên R. Giá trị nhỏ nhất của m là:

A.-4 **B.**-1 **C.**0 **D.**1

Câu 11 Một công ty muốn xây hồ chứa nước dạng hình nón. Họ đã xác định được diện tích toàn phần của khối nón, tuy nhiên họ cần tính toán với những khối nón có diện tích toàn phần bằng nhau khối nào có thể tích lớn nhất. Cần xây dựng khối nón có chiều cao bằng bao nhiêu để thể tích lớn nhất?

A.-4 **B.** $h = \sqrt{2}$ **C.** $h = \sqrt{3}$ D. $h = \sqrt{5}$

Câu 12 Cho $\log_a b > 0$. Khi đó phát biểu nào sau đây là đúng nhất?

A. a,b là các số thực cùng lớn hơn 1.

B. a,b là các số thực cùng nhỏ hơn 1.

C. a,b là các số thực cùng lớn hơn 1 hoặc cùng thuộc khoảng (0;1).

D. a là số thực lớn hơn 1 và b là số thực thuộc khoảng (0;1).

Câu 13 Hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x}}{\ln(x-2)}$ có tập xác định D. Khi đó

A. $D = [2;4]$ **B.** $D = (2;4]$ **C.** $D = (2;4)$ **D.** $D = (2;4]/\{3\}$

Câu 14 Đạo hàm của hàm số $y = (x-1)\ln x$

A. $\ln x$ **B.** $\frac{x-1}{x}$ **C.** $\frac{x-1}{x} - \ln x$ D. $\frac{x-1}{x} + \ln x$

Câu 15 Cho $\begin{cases} a = \log_2 m; m > 0; m\#1 \\ A = \log_m(8m) \end{cases}$. Khi đó mối quan hệ giữa A và a là:

A. $\frac{3+a}{a}$ **B.** $(3+a)a$ **C.** $\frac{3-a}{a}$ **D.** $(3-a)a$

Câu 16 Cho phương trình $\log_4(3.2^x - 1) = x - 1$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$. Tổng 2 nghiệm trên là:

A. 2 **B.** 4 **C.** $6 + 4\sqrt{2}$ **D.** $\log_2(6 - 4\sqrt{2})$

Câu 17 Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x - x^2) \geq 0$. Khi đó

A. $S = \theta$ **B.** $S = (0;2)$ **C.** $S = [0;2]$ **D.** $S = \{1\}$

Câu 18 Cho a^x với x vô tỉ. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $a > 0$ **B.** $a < 0$ **C.** $a \neq 0$ **D.** $a \in R$

Câu 19 Phát biểu nào sau đây sai?

A. $log_a b + log_a c = log_a bc$ với $a,b,c > 0$.

B. $log_{a^2} b = \frac{1}{2} log_{|a|} b$ với $b > 0, a \neq 1$.

C. $log_a b^2 = \frac{1}{2} log_a |b|$ với $b \neq 0, 1 \neq a > 0$.

D. $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$ với các số dương a, b, c và $a \neq 1$.

Câu 20 Cho $A = \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right)}{\left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)}$ với a, b dương, $a \neq b$. Đáp án đúng là:

A. $A = a + b$ **B.** $A = a - b$ **C.** $A = a^2 - b^2$ **D.** $A = a^2 + b^2$

Câu 21 Dân số thành phố A là 200.000 người, tăng trưởng 3% năm, và của thành phố B là 300.000 tăng trưởng 1% năm. Sau bao nhiêu năm thì dân số hai thành phố bằng nhau, đáp án gần nhất với số năm thực tế nhất là?

A. 20 **B.** 21 **C.** 22 **D.** 23

Câu 22 Kết quả của tích phân $\int_{-1}^{0}\left(x + 1 + \frac{2}{x-1}\right)dx$ được viết dưới dạng $a - 2\ln 2$. Khi đó $a + b$ bằng

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $-\frac{5}{2}$

Câu 23 Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2; y = x + 2$ là:

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** $\frac{15}{2}$ D. $\frac{21}{2}$

Câu 24 Tích phân $I = \int_{-1}^{2} |x|\, dx$ có kết quả là

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{7}{2}$

Câu 25 Số dương a để $\int_{0}^{a}\left(x - x^2\right)dx$ có giá trị lớn nhất là:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** 1 **D.** 2

Câu 26 Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{e^x}, y = 0, x = 0, x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox là:

A. $\pi(e+1)$ **B.** πe **C.** $\pi(e-1)$ **D.** $\pi\sqrt{e-1}$

Câu 27 Nguyên hàm $\int e^{2x} dx$ là:

A. e^{2x} **B.** e^{x^2} **C.** $\frac{e^{2x}}{2}$ **D.** e^{4x}

Câu 28 Cho $I = \int_{-1}^{1} 2^{x^3} dx$. Chọn khẳng định đúng:

A. $I = \frac{1}{2^8}$ **B.** $I = 8$ **C.** $1 \le I \le 4$ **D.** $I > 108$

Câu 29 Nếu $f'(x) = \frac{15\sqrt{x}}{14}$ và $f(1) = 4$ thì

A. $I = \frac{1}{2^8}$ **B.** $I = 8$ **C.** $f(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{7} + \frac{23}{7}$ **D.** $I > 108$

Câu 30 Cho số phức $z = a + bi, a; b \in R$. Hỏi trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

A. bi là phần ảo

B. $a^2 + b^2$ là mô-đun của z

C. Điểm M(a; b) biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức Oxy

D. $z; \overline{z}$ có mô-đun khác nhau

Câu 31 Số phức z có mô-đun bằng $\sqrt{17}$ và phần thực lớn hơn phần ảo 5 đơn vị. Biết z có phần thực nhỏ hơn 2. Khi đó mô-đun có số phức w=2+z có giá trị:

A. 5 **B.** $\sqrt{7}$ **C.** 4 **D.** $\sqrt{15}$

Câu 32 Số lượng các số phức z thỏa mãn $z^3 = 1$ có phần thực âm là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 33 Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $\frac{4i}{i-1}$, $(1-i)(1+2i)$, $\frac{2+6i}{3-i}$. Khi đó số phức biểu diễn bởi điểm D sao cho ABCD là hình vuông là:

A. $-1-i$ **B.** $1+i$ **C.** $-1+i$ **D.** $1-i$

Câu 34 Tổng của hai số phức liên hợp là:

A. Tổng của hai số phức liên hợp là một số thực.

B. Tổng của hai số phức liên hợp là một số ảo.

C. Tổng của hai số phức liên hợp là số phức có đủ phần thực và ảo.

D. Tích của hai số phức liên hợp là một số ảo.

Câu 35 Với z_1, z_2 là hai số phức. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

A. $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$ **B.** $|z_1 + z_2| \ge |z_1| + |z_2|$

C. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ với $z_2 \ne 0$. **D.** $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.

Câu 36 Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a và SA vuông góc với đáy, góc tạo bởi SB và phẳng (ABC) bằng 60 độ. Khi đó thể tích khối chóp SABC được tính theo a là:

A. $\frac{a^3}{12}$ **B.** $\frac{a^3}{8}$ **C.** $\frac{3a^3}{4}$ **D.** $\frac{a^3}{4}$

Câu 37 Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA= $a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC*D*). Góc tạo bởi hai đường thẳng SB và CD là

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 38 Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' với ABC là tam giác vuông cân tại B và AC= $a\sqrt{2}$. Biết thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' bằng $2a^3$. Khi đó chiều cao của hình lăng trụ ABC.A'B'C là:

A. $12a$ **B.** $3a$ **C.** $6a$ **D.** $4a$

Câu 39 Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a và SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi SB và mặt phẳng đáy (ABC) là 60 độ. Khoảng cách từ A đến (SBC) được tính theo a là:

A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$ **C.** $\frac{3a}{5}$ **D.** $\frac{5a}{3}$

Câu 40 Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh a, *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABC*), góc giữa *SB* và mặt phẳng (*ABC*) bằng 600. Tính theo *a* khoảng cách từ *B* đến mặt phẳng (*SMN*), với *M*, *N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *AC*?

A. $V=\frac{a^3}{3}$ **B.** $V=\frac{a^3}{3}$ **C.** $V=\frac{a^3}{4}$ **D.** $V=\frac{a^3}{4}$

Câu 41 Một hình nón được cắt bởi một mặt phẳng (P) song song với đáy. Mặt phẳng này chia với mặt xung quanh của hình nón thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tỉ số thể tích của hình nón phía trên mặt phẳng (P) và hình nón cho trước là số nào?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$

Câu 42 Cho hình lăng trụ tứ giác để ABCD.A'B'C'D' có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 4a. Thể tích của khối trụ nội tiếp trong hình lăng trụ là:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$

Câu 43 Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, điểm M(1;2;-3) và mặt phẳng $(P): x-2y+2z+3=0$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) có giá trị là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 44 Trong không gian hệ tọa dộ Oxyz, đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3}$ đi qua điểm $M(2;m;n)$. Khi đó giá trị m; n là

A. m=-2 và n=1 **B.** m=2 và n=-1 **C.** m=-4 và n=7 **D.** m=0 và n=7

Câu 45 Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$ song song với mặt phẳng $(P): x + y - z + m = 0$ .Khi đó giá trị m thỏa mãn

A. $m \# 0$ **B.** $\forall m \in R$ **C.** $m = 0$ **D.** A,B,C sai

Câu 46 Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. Khi đó (S) có:

A. $I(-2;4;-6); R = \sqrt{58}$ **B.** $I(2;-4;6); R = \sqrt{58}$

C. $I(-1;2;-3); R = 4$ **D.** $I(1;-2;3); R = 4$

Câu 47 Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$; $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-7}{-3}$ có vị trí tương đối là:

A. song song **B.** trùng nhau **C.** cắt nhau D. chéo nhau

Câu 48 Trong không gian hệ tọa độ Oxyz. Gọi M là tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ và $(P): x + 2y - 3z + 2 = 0$, khi đó

A. $M(5;-1-;-3)$ **B.** $-15 + 8i$ **C.** $M(2;0;-1)$ **D.** $M(-1;1;1)$

Câu 49 Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d": \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$;
và $A(2;1;0); B(-2;3;2)$. Phương trình mặt cầu đi qua A,B có tâm thuộc đường thẳng d là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$ **B.** $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 5$ **D.** $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 16$

Câu 50 Cho A(1;-2;3) và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$, viết phương tình mặt cầu tâm A, tiếp xúc với d?

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 50$ **B.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 25$ **D.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1 Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ giao với trục hoành tại điểm M . Khi đó tọa độ điểm M là

A. $M(3;0)$ **B.** $M(0;-3)$ **C.** $M(0;3)$ **D.** $\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$

Đáp án A.

Đồ thị giao trục hoành, phương trình hoành độ giao điểm

$\dfrac{x-3}{x+1}=0 \leftrightarrow x-3=0 \leftrightarrow x=3 \rightarrow M(3;0)$.

(**Chú ý:** Nếu để bài cho giao với trục tung Oy thì cho $x=0 \rightarrow y=-3$)

Câu 2 Hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x+1}{x-m}$ có tiệm cận ngang là y=3. Giá trị tham số m:

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** Không tồn tại

Đáp án B.

Tiệm cận ngàng của hàm số là $y=2m-1 \rightarrow 2m-1=3 \leftrightarrow m=2$.

Chú ý: hàm số $y=\dfrac{\text{ax}+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$

Câu 3 Tất cả các giá trị của a để hàm số $y=\text{ax-sinx}+3$ đồng biến trên R là

A. $a=1$ **B.** $a=-1$ **C.** $a\geq 1$ **D.** $a\geq 2$

Đáp án C.

Yêu cầu bài toán $\leftrightarrow y'=a+\sin x\geq 0, \forall x\in R \leftrightarrow a\geq -\sin x \leftrightarrow a\geq \max(\text{-sinx})=1$ hay $a\geq 1$.

Câu 4 Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x^4+2x^2-1$ trên đoạn [-1;2] lần lượt là M và m. Khi đó giá trị (M.m) là:

A. -2 **B.** 46 **C.** -23 **D.** một số lớn hơn

Đáp án C.

Ta có: $y'=4x^3+4x=4x(x^2+1); y'=0 \leftrightarrow x=0$

$$\rightarrow \begin{cases} y(0)=2 \\ y(-1)=-1 \rightarrow M=23, m=-1 \rightarrow M.m=-23 \\ y(2)=23 \end{cases}$$

Câu 5 Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+2$ đồng biến trên tập nào sau đây:

A. $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$ **B.** $(-3;1)$ **C.** $(3;+\infty)$ **D.** $(-1;3)$

Ta có $y'=3x^2-6x-9; y'=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1);(3;+\infty)$. **Chọn C**

Câu 6 Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x(C)$ có đúng một tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ có hệ số góc k bằng:

A. $k=4$ **B.** $k=-\frac{1}{2}$ **C.** $k=\frac{1}{4}$ **D.** $k=-\frac{1}{4}$

Đáp án D.

Tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_0;y_0)$ có hệ số góc bằng $y'(x_0)=x_0^2-2x_0-3$

Vì d vuông góc với Δ nên $y'(x_0).k=-1 \leftrightarrow kx_0^2-2kx_0-3k+1=0$ (1)

Với yêu cầu bài toán (1) có 1 nghiệm $\Delta'=k^2-k(-3k+1)=4k^2+k=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0(l) \\ k=-\frac{1}{4} \end{array}\right.$

Câu 7 Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-2}(C)$. Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận, khi đó:

A. $I(-3;0)$ **B.** $I(0;-\frac{3}{2})$ **C.** $I(1;2)$ **D.** $I(2;1)$

Đáp án D.

Hàm số $y=\frac{x+3}{x-2}(C)$ có tiệm cận đứng x=2, tiệm cận ngang y=1 suy ra I(2;1).

Chú ý: Hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng là $x=-\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y=\frac{a}{c}$

Câu 8 Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2-12x+1$ song song d:12x+y=0 có dạng $y=ax+b$. Tổng a+b là

A. -11 hoặc -12 **B.** -11 **C.** -12 **D.** đáp án khác

Đáp án B.

Ta có $y'=6x^2-6x-12$ và đường thẳng 12x+y=0 $\leftrightarrow y=-12x$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần lập.Do đó tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng 12x+y=0 nên:

$y'(x_0)=12 \leftrightarrow 6x_0^2-6x_0-12=-12 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=1 \end{array}\right.$

Với $x_0=0 \to y_0=1$ suy ra tiếp tuyến y=-12x+1

Với $x_0=1 \to y_0=-12$ suy ra tiếp tuyến y=-12(x-1)-12=-12x (loại vì trùng với đường thẳng y=-12x)

Vậy tiếp tuyến cần lập là y=-12x+1 suy ra a=-12;b=1.

Câu 9 Cho hàm số $y=\frac{1-x}{x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** vô số giá trị

Đáp án B.

$D=R\backslash\{m\}$; $y'=\frac{m-1}{(x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2) \leftrightarrow \begin{cases} m-1<0 \\ m \geq -2 \end{cases} -2 \leq m < 1$

Khi đó m=-2;m=-1.

Câu 10 Trong tất cả các giá trị của m làm cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2-mx-m$ đồng biến trên R. Giá trị nhỏ nhất của m là:

A. -4 **B.**-1 **C.**0 D.1

Đáp án B.

Hàm số đồng biến trên R $\leftrightarrow y'=x^2+2mx-m>0, \forall x \in R \leftrightarrow \Delta'=m^2+m \leq 0 \leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của m là -1.

Câu 11 Một công ty muốn xây hồ chứa nước dạng hình nón. Họ đã xác định được diện tích toàn phần của khối nón, tuy nhiên họ cần tính toán với những khối nón có diện tích toàn phần bằng nhau khối nào có thể tích lớn nhất. Cần xây dựng khối nón có chiều cao bằng bao nhiêu để thể tích lớn nhất?

A.-4 **B.** $h=\sqrt{2}$ **C.** $h=\sqrt{3}$ D. $h=\sqrt{5}$

Đáp án B.

Gọi R là bán kính đáy, *l* là đường sinh. Chiều cao khối nón là $SH=h$.

Ta có: $S_{tp}=S_{xq}+S_d \Leftrightarrow \pi=\pi Rl+\pi R^2$

$\Leftrightarrow 1=R\sqrt{h^2+R^2}+R^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-R^2=R\sqrt{h^2+R^2} \\ R \leq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2R^2=R^2h^2 \\ R \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R \leq 1 \\ R^2=\dfrac{1}{2+h^2} \end{cases}$

Ta có: $V=\dfrac{1}{2}\pi R^2h=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{h}{h^2+2} \leq \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{h}{2\sqrt{2}h}=\dfrac{\pi}{6\sqrt{2}}$, do đó

$V_{max}=\dfrac{\pi}{6\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} h^2=2 \\ R^2=\dfrac{1}{h^2+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h=\sqrt{2} \\ R=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$

Câu 12 Cho $\log_a b>0$. Khi đó phát biểu nào sau đây là đúng nhất?

A. a, b là các số thực cùng lớn hơn 1.

B. a, b là các số thực cùng nhỏ hơn 1.

C. a, b là các số thực cùng lớn hơn 1 hoặc cùng thuộc khoảng (0;1).

D. a là số thực lớn hơn 1 và b là số thực thuộc khoảng (0;1).

Đáp án C.

Ta có $\log_a b>0 \leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ b>1 \end{cases} v \begin{cases} 0<a<1 \\ 0<b<1 \end{cases}.$

Chú ý: Dấu của $\log_a b$ nhớ bằng cách "cùng thì dương, khác thì âm" (cùng: a,b cùng lớn hơn 1 hoặc cùng khoảng $(0;1)$)

Nếu $\log_a b<0 \to \begin{cases} a>1 \\ 0<b<1 \end{cases} v \begin{cases} 0<a<1 \\ b>1 \end{cases}$

Câu 13 Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\ln(x-2)}$ có tập xác định D. Khi đó

A. $D=[2;4]$ **B.** $D=(2;4]$ **C.** $D=(2;4)$ **D.** $D=(2;4]/\{3\}$

Đáp án D.

Điều kiện $\begin{cases} 4-x\ge 0 \\ x-2>0 \\ \ln(x-2)\#0=\ln 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2<x\le 4 \\ x\#3 \end{cases} \to D=(2;4]/\{3\}$.

Câu 14 Đạo hàm của hàm số $y=(x-1)\ln x$

A. $\ln x$ **B.** $\dfrac{x-1}{x}$ **C.** $\dfrac{x-1}{x}-\ln x$ **D.** $\dfrac{x-1}{x}+\ln x$

Đáp án D.

Dựa vào công thức $(uv)'=u'v+uv';(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$, ta được

$y'=(x-1)'\ln x+(x-1)(\ln x)'=\ln x+\dfrac{x-1}{x}$.

Câu 15 Cho $\begin{cases} a=\log_2 m; m>0; m\#1 \\ A=\log_m(8m) \end{cases}$. Khi đó mối quan hệ giữa A và a là:

A. $\dfrac{3+a}{a}$ **B.** $(3+a)a$ **C.** $C.\dfrac{3-a}{a}$ **D.** $(3-a)a$

Đáp án A.

Sử dụng công thức log , $\log_x y=\dfrac{\log_z y}{\log_z x}=\dfrac{\log_2(8m)}{\log_2 m}=\dfrac{3+\log_2 m}{\log_2 m}=\dfrac{3+a}{a}$.

Câu 16 Cho phương trình $\log_4(3.2^x-1)=x-1$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$. Tổng 2 nghiệm trên là:

A. 2 **B.** 4 **C.** $6+4\sqrt{2}$ **D.** $\log_2(6-4\sqrt{2})$

Đáp án A.

Ta có $\log_4(3.2^x-1)=x-1 \leftrightarrow 3.2^x-1=4^{x-1} \leftrightarrow 4^x-12.2^x+4=0, vi-et$

$\to 2^{x_1}2^{x_2}=4 \leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2^2 \to x_1+x_2=2$

Câu 17 Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x-x^2)\ge 0$. Khi đó

A. $S=\theta$ **B.** $S=(0;2)$ **C.** $S=[0;2]$ **D.** $S=\{1\}$

Đáp án A.

Điều kiện $2x-x^2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<0 \end{array}\right.$.

Bất phương trình: $\log_2(2x-x^2)\ge 0 \Leftrightarrow 2x-x^2\ge 1 \Leftrightarrow x=1$ không thỏa mãn điều kiện.

Câu 18 Cho a^x với x vô tỉ. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $a>0$ **B.** $a<0$ **C.** $a\neq 0$ **D.** $a\in R$

Đáp án A.

Câu 19 Phát biểu nào sau đây sai?

A. $log_a b+log_a c=log_a bc$ với $a,b,c>0$.

B. $log_{a^2} b=\frac{1}{2}log_{|a|} b$ với $b>0,a\neq 1$.

C. $log_a b^2=\frac{1}{2}log_a |b|$ với $b\neq 0,1\neq a>0$.

D. $log_a b=\frac{log_c b}{log_c a}$ với các số dương a,b,c và $a\neq 1$.

Đáp án D.

Cơ số $c\neq 1$.

Câu 20 Cho $A=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\right)}{\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)}$ với a,b dương, $a\neq b$. Đáp án đúng là:

A. $A=a+b$ **B.** $A=a-b$ **C.** $A=a^2-b^2$ **D.** $A=a^2+b^2$

Đáp án A.

$$A=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3-\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3}{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}=\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$$

Câu 21 Dân số thành phố A là 200.000 người, tăng trưởng 3% năm, và của thành phố B là 300.000 tăng trưởng 1% năm. Sau bao nhiêu năm thì dân số hai thành phố bằng nhau, đáp án gần nhất với số năm thực tế nhất là?

A. 20 **B.** 21 **C.** 22 **D.** 23

Đáp án B.

Gọi V_A, V_B lần lượt là dân số các thành phố A, B sau n năm.

Theo đề ta có

$$V_A=V_B \Leftrightarrow 200.000*1.03^n=300.000*1.01^n \Leftrightarrow \frac{2}{3}=\left(\frac{1.01}{1.03}\right)^n \Leftrightarrow n=log_{\frac{1.01}{1.03}}\frac{2}{3}\approx 20.68$$

Câu 22 Kết quả của tích phân $\int_{-1}^{0}\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx$ được viết dưới dạng $a-2\ln 2$.
Khi đó $a+b$ bằng

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $-\frac{5}{2}$

Đáp án B.

Ta có: $\int_{-1}^{0}\left(x+1+\dfrac{2}{x-1}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\dfrac{1}{2}-2\ln 2\to a=\dfrac{1}{2}$.

Câu 23 Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2; y=x+2$ là:

A. $\dfrac{3}{2}$ **B.** $\dfrac{9}{2}$ **C.** $\dfrac{15}{2}$ **D.** $\dfrac{21}{2}$

Đáp án B.

Phương tình hoành độ giao điểm $x^2=x+2\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.\to S=\int_{-1}^{2}\left|x^2-(x+2)\right|dx=\dfrac{9}{2}$.

Chú ý: dấu trị tuyệt đối | | trong dòng máy casio đượng bấm Shift rồi bấm Hyp.

Câu 24 Tích phân $I=\int_{-1}^{2}|x|\,dx$ có kết quả là

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{3}{2}$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{7}{2}$

Đáp án B.

Dùng MTCT $I=\int_{-1}^{2}|x|\,dx=\dfrac{5}{2}$.

Câu 25 Số dương a để $\int_0^a\left(x-x^2\right)dx$ có giá trị lớn nhất là:

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{3}$ **C.** 1 **D.** 2

Đáp án C.

Ta có $\int_0^a\left(x-x^2\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^3}{3}=f(a)\Rightarrow f'(a)=a-a^2$, với $a\in\left[0;+\infty\right]$.

Bảng biến thiên

x	0		1		+∞
f'		+	0	-	
f	-∞	↗		↘	+∞

Vậy $\int_0^a\left(x-x^2\right)dx$ lớn nhất khi $a=1$.

Câu 26 Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{e^x}, y=0, x=0, x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox là:

A. $\pi(e+1)$ **B.** πe **C.** $\pi(e-1)$ **D.** $\pi\sqrt{e-1}$

Câu 27 Nguyên hàm $\int e^{2x}dx$ là:

A. e^{2x} **B.** e^{x^2} **C.** $\frac{e^{2x}}{2}$ **D.** e^{4x}

Đáp án C.

Câu 28 Cho $I=\int_{-1}^{1}2^{x^3}dx$. Chọn khẳng định đúng?

A. $I=\frac{1}{2^8}$ **B.** $I=8$ **C.** $1\le I\le 4$ **D.** $I>108$

Đáp án C.

Sử dụng MTCT ta có $I\approx 2.070$.

Câu 29 Nếu $f'(x)=\frac{15\sqrt{x}}{14}$ và $f(1)=4$ thì

A. $I=\frac{1}{2^8}$ **B.** $I=8$ **C.** $f(x)=\frac{5\sqrt{x^3}}{7}+\frac{23}{7}$ **D.** $I>108$

Đáp án C.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\frac{15}{14}\int\sqrt{x}dx=\frac{15}{14}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{15}{14}.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{5\sqrt{x^3}}{7}+C$$

$$f(1)=4\Rightarrow\frac{5.1}{7}+C=4\Leftrightarrow C=\frac{23}{7}$$

Câu 30 Cho số phức $z=a+bi,a;b\in R$. Hỏi trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

A. bi là phần ảo

B. a^2+b^2 là mô-đun của z

C. Điểm M(a; b) biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức Oxy

D. $z;\bar{z}$ có mô-đun khác nhau

Đáp án C.

Số phức z=a+bi có b là phần ảo=>A sai. Ta có $\bar{z}=a-bi\rightarrow|z|=|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$ suy ra B, D sai.

Câu 31 Số phức z có mô-đun bằng $\sqrt{17}$ và phần thực lớn hơn phần ảo 5 đơn vị. Biết z có phần thực nhỏ hơn 2. Khi đó mô-đun có số phức w=2+z có giá trị:

A. 5 **B.** $\sqrt{7}$ **C.** 4 **D.** $\sqrt{15}$

Đáp án A.

Gọi $z=a+bi(a;b\in R,a<2)$. Ta có $\begin{cases}|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{17}\\a-b=5\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-4\end{cases}\cup\begin{cases}a=4\\b=-1\end{cases}$(loại)

Suy ra z=1-4i

Suy ra $w=2+z=3-4i\rightarrow|w|=5$.

Câu 32 Số lượng các số phức z thỏa mãn $z^3=1$ có phần thực âm là

B. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Đáp án C.

Ta có $z^3 = 1 \leftrightarrow z^3 - 1 = 0 \leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

z có phần thực âm $\leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 33 Xét các điểm A,B,C trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $\frac{4i}{i-1}$, $(1-i)(1+2i)$, $\frac{2+6i}{3-i}$. Khi đó số phức biểu diễn bởi điểm D sao cho ABCD là hình vuông là:

A. $-1-i$ **B.** $1+i$ **C.** $-1+i$ **D.** $1-i$

Đáp án A.

Ta có

$\frac{4i}{i-1} = 2-2i \to A(2;-2); (1-i)(1+2i) = 3+i \to B(3;1); \frac{2+6i}{3-i} = 2i \to C(0;2) \to \overrightarrow{AB} = (1;30.$

Gọi D(x;y) $\to \overrightarrow{DC} = (-x; 2-y)$

Ta có ABCD là hình vuông thỏa mãn điều kiện cần $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \leftrightarrow \begin{cases} -x = 1 \\ 2-y = 3 \end{cases} \leftrightarrow D(-1;-1)$

Chú ý: có thể dung casio để tính các phép toán về số phức trên (CMPLX) và bấm kí hiệu i bằng cách bấm **Shift rồi bấm Eng.**

Câu 34 Tổng của hai số phức liên hợp là:

E. Tổng của hai số phức liên hợp là một số thực.

F. Tổng của hai số phức liên hợp là một số ảo.

G. Tổng của hai số phức liên hợp là số phức có đủ phần thực và ảo.

H. Tích của hai số phức liên hợp là một số ảo.

Đáp án A.

$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi \Rightarrow z + \bar{z} = 2a$.

Câu 35 Với z_1, z_2 là hai số phức. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

E. $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

F. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| + |z_2|$

G. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ với $z_2 \neq 0$.

H. $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.

Đáp án B.

B sai ví dụ ta lấy $z_1 = i, z_2 = -i \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = |i| = 1 \\ |z_2| = |-i| = 1 \\ |z_1 + z_2| = 0 \end{cases}$

Câu 36 Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a và SA vuông góc với đáy, góc tạo bởi SB và phẳng (ABC) bằng 60 độ. Khi đó thể tích khối chóp SABC được tính theo a là:

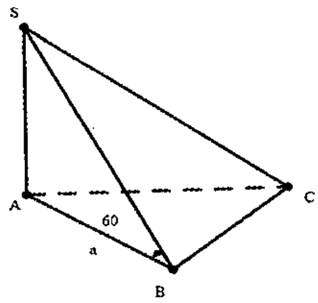
A. $\frac{a^3}{12}$ B. $\frac{a^3}{8}$ C. $\frac{3a^3}{4}$ D. $\frac{a^3}{4}$

Đáp án D.

Ta có: $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\to V_{SABC}=\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=\frac{a^3}{4}$. Suy ra

$\left(SB,(ABC\right)=\angle SBA=60\to SA=AB\tan 60=a\sqrt{3}$

Chú ý: tam giác đều cạnh m $\to\begin{cases}S=\frac{m^2\sqrt{3}}{4}\\ h=\frac{m\sqrt{3}}{2}\end{cases}$



Câu 37 Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA=$a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD).Góc tạo bởi hai đường thẳng SB và CD là

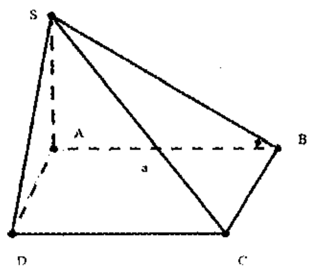
A. 30^0 **B.** 45^0

C. 60^0 **D.** 90^0

Đáp án C.

Ta có: CD//AB=>$\left(SB,CD\right)=\left(SB,AB\right)=\angle SBA$

Xét tam giác SAB có $\tan SBA=\frac{SA}{AB}=\sqrt{3}\to\angle SBA=60^0$.



Câu 38 Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' với ABC là tam giác vuông cân tại B và AC=$a\sqrt{2}$. Biết thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' bằng $2a^3$. Khi đó chiều cao của hình lăng trụ ABC.A'B'C là:

A. $12a$ **B.** $3a$ **C.** $6a$ **D.** $4a$

Đáp án D.

Ta có: $AB=\frac{AC}{\sqrt{2}}=a\to S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AB=\frac{a^2}{2}\to h=\frac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ABC}}=4a$.

Lưu ý: Trong tam giác vuông cân cạnh huyền bằng $\sqrt{2}$ cạnh góc vuông.

Câu 39 Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a và SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi SB và mặt phẳng đáy (ABC) là 60 độ. Khoảng cách từ A đến (SBC) được tính theo a là:

A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$ **C.** $\frac{3a}{5}$ **D.** $\frac{5a}{3}$

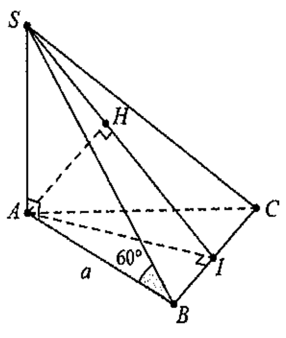
Đáp án A.

Kẻ $\begin{cases}AI\perp BC(I\in BC)\\ AH\perp SI(H\in SI)\end{cases}\to AH\perp(SBC)\to d\left(A,(SBC)\right)=AH$

Ta có: $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (do tam giác ABC đều cạnh A)

Và $\left(SB,(ABC)\right)=\angle SBA=60^0\to SA=AB\tan 60^0=a\sqrt{3}$

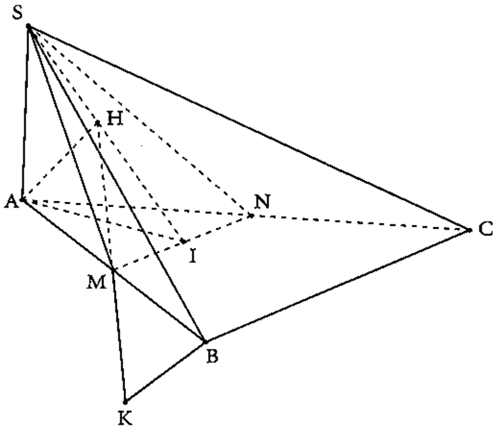
Khi đó: $d\left(A,(SBC)\right)=AH=\frac{SA.AI}{\sqrt{SA^2+AI^2}}=\frac{a\sqrt{15}}{5}$.



Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng 600. Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SMN), với M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

A. $V=\dfrac{a^3}{3}$ **B.** $V=\dfrac{a^3}{3}$ **C.** $V=\dfrac{a^3}{4}$ **D.** $V=\dfrac{a^3}{4}$

Đáp án C.



$SA\perp(ABC)$ suy ra AB là hình chiếu vuông góc của SB lên (ABC)

Góc giữa SB và (ABC) là góc $\widehat{SBA}=60^0$.

$SA=AB\tan 60^0=a\sqrt{3}$

Kẻ $AI\perp MN$. Suy ra I là trung điểm MN, kẻ $AH\perp SI$ tại H

$MN\perp SA, MN\perp AI\Rightarrow MN\perp AH$

$AH\perp(SMN)$. Vậy AH là khoảng cách từ A đến (SMN)

$AI=a\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AI^2}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{16}{3a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{51}}{17}$

Mà $\dfrac{d(A,(SMN))}{d(B,(SMN))}=\dfrac{MA}{MB}=1\Rightarrow d(B,(SMN))=d(A,(SMN))=a\dfrac{\sqrt{51}}{17}$

Câu 41. Một hình nón được cắt bởi một mặt phẳng (P) song song với đáy. Mặt phẳng này chia với mặt xung quanh của hình nón thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tỉ số thể tích của hình nón phía trên mặt phẳng (P) và hình nón cho trước là số nào?

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{8}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

Đáp án C.

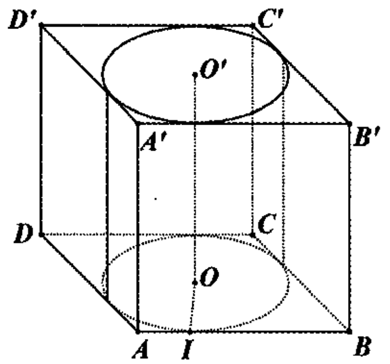
Gọi O là tâm của đáy, mặt phẳng (P) cắt SO tại O'.

Theo đề $\dfrac{S'}{S}=\dfrac{S'}{S'+S'}=\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{SO'}{SO}\right)^2\Rightarrow\dfrac{SO'}{SO}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\dfrac{V'}{V}=\left(\dfrac{SO'}{SO}\right)^3=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Câu 42. Cho hình lăng trụ tứ giác đề ABCD.A'B'C'D' có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 4a. Thể tích của khối trụ nội tiếp trong hình lăng trụ là:

B. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{8}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$



Đáp án D.

Khối trụ nội tiếp trong hình lăng trụ tứ giác đều ABCD.
A'B'C'D' có bán kính $R = OI = \frac{a}{2}$ (I là trung điểm AB) và có chiều cao $h = 4a$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.4a = \pi a^3$.

Câu 43 Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, điểm M(1;2;-3) và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 3 = 0$
Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) có giá trị là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Đáp án B.

Ta có $d\left(M,(P)\right) = \frac{|1 - 2.2 + 2(-3) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 2$

Chọn B

Chú ý: nếu $M(x_o; y_0; z_0); (P): \text{ax} + by + cz + d = 0 \rightarrow d\left(M,(P)\right) = \frac{|ax_o + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Câu 44 Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ đi qua điểm $M\left(2; m; n\right)$ Khi đó giá trị m; n là

A.m=-2 và n=1 **B.**m=2 và n=-1 **C.**m=-4 và n=7 **D.**m=0 và n=7

Đáp án C.

Do $M \in \Delta \rightarrow M(t; -2-t; 1+3t) \equiv M(2; m; n) \rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ -2 - t = m \\ 1 + 3t = n \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = 7 \end{cases}$.

Câu 45 Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$ song song với mặt phẳng $(P): x + y - z + m = 0$.Khi đó giá trị m thỏa mãn

A. $m \# 0$ **B.** $\forall m \in R$ **C.** $m = 0$ **D.** A,B,C sai

Đáp án A.

Đường thẳng Δ có $\overrightarrow{u_\Delta} = (2; -1; 1)$ và M(1;-2;-1) $\in \Delta$

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P} = (1; 1; -1)$

Kiểm tra điều kiện cần: $\Delta // (P) \rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{n_P} = 1.1 + (-2).1 + (-1).(-1) = 0$ (đúng)

Điều kiện đủ: $M \notin (P) \rightarrow 1 - 2 - (-1) + m \# 0 \leftrightarrow m \# 0$

Câu 46 Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. Khi đó (S) có:

A. $I(-2; 4; -6); R = \sqrt{58}$ **B.** $I(2; -4; 6); R = \sqrt{58}$

C. $I(-1; 2; -3); R = 4$ **D.** $I(1; -2; 3); R = 4$

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$

Đáp án D.

Suy ra I(1;-2;3) và bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2+2}=4$.

Chú ý: Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \to \begin{cases} I\left(\frac{a}{-2};\frac{b}{-2};\frac{c}{-2}\right) \\ R=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d} \end{cases}$

Câu 47 Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$; $d_2: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-7}{-3}$ có vị trí tương đối là:

B. song song **B.** trùng nhau **C.** cắt nhau **D.** chéo nhau

Đáp án C.

$$d_1: \begin{cases} \overrightarrow{u_1}=(-2;3;1) \\ M_1(1;0;-1)\in d_1 \end{cases}$$

Ta có $d_2: \begin{cases} \overrightarrow{u_2}=(-1;2;-3) \\ M_2(-1;2;7)\in d_2 \end{cases}$

$$\to \begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right]=(-11;-7;-1) \\ \overrightarrow{M_1M_2}=(-2;2;8) \end{cases} \to \left[\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}=22-14-8=0$$

Suy ra hai đường thẳng trên cắt nhau.

Câu 48 Trong không gian hệ tọa độ Oxyz. Gọi M là tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$ và $(P): x+2y-3z+2=0$, khi đó

A. $M(5;-1-;-3)$ **B.** $M(1;0;1)$ **C.** $M(2;0;-1)$ **D.** $M(-1;1;1)$

Đáp án D.

Do $M\in\Delta \to M(2-3t;t;-1+2t)$.

Mà $M\in(P) \leftrightarrow 2-3t+2t-3(-1+2t)+2=0 \leftrightarrow t=1 \to M(-1;1;1)$

Câu 49 Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d'': \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$; và $A(2;1;0); B(-2;3;2)$. Phương trình mặt cầu đi qua A,B có tâm thuộc đường thẳng d là

A. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=17$ **B.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=5$ **D.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=16$

Đáp án A.

Gọi mặt cầu tâm $I(2t+1;t;-2t)\in d$.

Mặt cầu đi qua A,B nên

$IA=IB=R \to IA^2=IB^2 \leftrightarrow (2t-1)^2+(t-1)^2+4t^2=(2t+3)^2+(t-3)^2+(2t+2)^2 \leftrightarrow t=-1$

Suy ra: $I(-1;-1;2); R = IA = \sqrt{17}$

Suy ra phương tình mặt cầu là $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=17$

Câu 50 Cho A(1;-2;3) và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$, viết phương tình mặt cầu tâm A, tiếp xúc với d?

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=50$ **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=50$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$ **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$

Đáp án B.

Chú ý tâm A=> loại A và C vì $(x-1)^2$

Xét B và D

Nếu tiếp xúc thì d tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm (tức là phương trình có một nghiệm)

Gọi H là tiếp điểm $\Rightarrow \begin{cases} H(-1+2t;2+t;-3-t) \\ H\in(S)\to(-1+2t-1)^2+(2+t+2)^2+(-3-t-3)^2-B \end{cases}$

(B ở đây là 50 hoặc 25)

Nhập calc X=t=1000, B=50 ta được $6012006=6t^2+12t+6=6(t+1)^2=0$ => có 1 nghiệm

BỘ GIÁO DỤC	ĐỀ MINH HỌA KÌ THI THPT QUỐC GIA 2017
Đề số 3	MÔN: TOÁN (50 câu trắc nghiệm)
	Thời gian làm bài: 90 phút

Họ tên:..

Số báo danh: ....

Câu 1 Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 (C)$. Cho các phát biểu sau

(1) Đồ thị hàm số có điểm uốn A(-1,-4)

(2) Hàm số nghịch biến trong khoảng (-∞;0) ; (2;+∞)

(3) Hàm số có giá trị cực đại tại x = 0

(4) Hàm số có $y_{cd} - y_{ct} = 4$.

Có bao nhiêu phát biểu đúng?

A. 2 **B**. 3 **C**. 4 **D**. 5

Câu 2 Cho hàm số $y = \dfrac{x}{2x-1}$ (C). Cho các phát biểu sau đây:

(1) Hàm số có tập xác định $D = R \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

(2) Hàm số đồng biến trên tập xác định

(3) Hàm số nghịch biến trên tập xác định

(4) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = \dfrac{1}{2}$, tiệm cận ngang là $y = \dfrac{1}{2}$, tâm đối xứng là $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

(5) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} y = -\infty; \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} = +\infty$

Số phát biểu sai là:

A. 1 **B**. 2 **C**. 3 **D**. 4

Câu 3 Cho hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3 (1)$. Cho các phát biểu sau:

(1)Hàm số đạt cực trị tại $x = 0, x = \pm\sqrt{2}$

(2) Tam giác được tạo ra từ 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là tam giác cân có đường cao lớn nhất là 4

(3) Điểm uốn của đồ thị hàm số có hoành độ $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(4) Phương trình $-x^4 + 4x^2 - 3 - 2m = 0$ có 3 nghiệm khi m=-3.

Phát biểu đúng là:

A. (1),(2),(3) **B**. (1),(3),(4) **C**. (1),(2),(4) **D.** (2),(3),(4)

Câu 4 Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}$(1)

Cho các phát biểu sau :

(1) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là I(1,1)

(2) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x = 2

(3) Hàm số đồng biến trên tập xác định

(4) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ y = 2 .

Số phát biểu sai là:

A . 2 **B** . 0 **C** . 1 **D** . 4

Câu 5 Tìm cực trị của hàm số : $y=x-\sin 2x+2$. Chọn đáp án đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu $y_{CT}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}+2+k\pi, k\in Z$

B. Hàm số có giá trị cực tiểu $y_{CT}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}+2$

C. Hàm số có giá trị cực đại $y_{CĐ}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-2+k\pi, k\in Z$

D. Hàm số có giá trị cực đại $y_{CĐ}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}+2$

Câu 6 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left(x-\sqrt{2}\right)^2\left(x+\sqrt{2}\right)^2$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};2\right]$. Chọn đáp án đúng?

A . GTLN là -4 , GTNN là 0

B . GTLN là 8

C . GTLN , GTNN Của hàm số trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};2\right]$ lần lượt là 4; 0

D. Hàm số có cực giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};2\right]$ khi $x=\pm\sqrt{2}$

Câu 7 Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ (1). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) song song với đường thẳng $y=3x+1$ có dạng $y=ax+b$. Tìm giá trị S=a+b

A. $-\frac{29}{3}$ **B.** $-\frac{20}{3}$ **C.** $-\frac{19}{3}$ **D.** $\frac{20}{3}$

Câu 8 Cho hàm số: $y=\frac{2mx+1}{x-1}$(1) với m là tham số. Tìm m để đường thẳng:

$d: y=-2x+m$ cắt đồ thị của hàm số (1) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $\left|4(x_1+x_2)-6x_1x_2\right|=21$. Tìm tất cả các giá trị của m?

A. m = 4 **B.** m = 5 **C.** m = - 4 **D.** m = -5

Câu 9 Tìm các giá trị của m để hàm số $y=-x^3+(m+3)x^2-(m^2+2m)x-2$ đạt cực đại tại x=2 .

A. m = 0, m = -2 **B.** m =2, m = 4 **C.** m=-2, m = 2 **D.** m=0, m=2

Câu 10 Cho hàm số: $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ (1).

Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 đồng thời $\left|x_1-x_2\right|=2$.

A. $m=\pm1$ **B.** $m=\pm2$ **C.** $m=\pm3$ **D.** $m=\pm4$

Câu 11 Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Tìm điểm M trên (C) để khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng của đồ thị (C) bằng khoảng cách từ M đến trục Ox.

A. $\left[\begin{array}{l}M(0;-1)\\M(4;3)\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}M(0;1)\\M(4;3)\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}M(0;-1)\\M(4;5)\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}M(1;-1)\\M(4;3)\end{array}\right.$

Câu 12 Cho phương trình: $2\log_8(2x)+\log_8(x^2-2x+1)=\dfrac{4}{3}$ có nghiệm là x. Chọn phát biểu sai:

A. x là số nguyên tố chẵn duy nhất **B.** $\log_x\sqrt{32}=\dfrac{5}{2}$

C. $\log_x 6=1+\log_x 3$ **D.** $\sqrt{2^x}<x$

Câu 13 Cho phương trình $\log_2\left(\dfrac{5.2^x-8}{2^x+2}\right)=3-x$ có nghiệm là x. giá trị $P=x^{\log_2 4x}$ là:

A. 4 **B.** 8 **C.** 2 **D.** 1

Câu 14 Cho $A=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{6}+\log_4 81-\log_2 27+81^{\frac{1}{\log_5 3}}$. Chọn nhận định đúng

A. $\log_A 626=2$ **B.** $616^{\log_A 9}=3$ **C.** A=313 **D.** $\log_2 A=1+\log_2 31$

Câu 15 Tập nghiệm của bất phương trình: $2\log_3(x-1)+\log_{\sqrt{3}}(2x-1)\le 2$:

A. $(1;2)$ **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$ **C.** $[1;2]$ **D.** $(1;2]$

Câu 16 Cho $\log_3 15=a;\log_3 10=b$. Giá trị biểu thức $P=\log_3 50$ là

A. a+b-1 **B.** a-b-1 **C.** 2a+b-1 **D.** a+2b-1

Câu 17 Cho biểu thức $Q=\log_a\left(a\sqrt{b}\right)-\log_{\sqrt{a}}\left(a\sqrt[4]{b}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b$, biết a,b là các số thực dương khác 1. Chọn nhận định chính xác nhất?

A. $2^Q=\log_Q 16$ **B.** $2^Q>\log 16$ **C.** $2^Q<\log_Q 15$ **D.** $Q=4$

Câu 18 Cho phương trình $3.25^x-2.5^{x+1}+7=0$ và các phát biểu sau:

(1). x=0 là nghiệm của phương trình

(2). Phương trình có nghiệm dương

(3). Cả 2 nghiệm của phương trình đã cho đều nhỏ hơn 1

(4). Phương tình có tổng 2 nghiệm là $-\log_5\left(\frac{3}{7}\right)$

Số phát biểu đúng là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 19 Tập nghiệm của bất phương trình: $3^{x^2+\sqrt{x-1}-1}+3\le 3^{x^2}+3^{\sqrt{x-1}}$.

A. $1\le x\le 2$ **B.** $1\le x\le 3$ **C.** $1\le x\le 7$ **D.** $1\le x\le 9$

Câu 20 Tập nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2(2-x^2)\right]>0 \quad (x\in R)$ là:

A. $x=(-1;0)x=(-1;0)$ **B.** $x=(-1;0)\cup(0;1)x=(-1;0)\cup(0;1)$

C. $x=(0;1)x=(0;1)$ **D.** $x=(-1;1)x=(-1;1)$

Câu 21 Cho hàm số $y=e^{-\frac{mx}{1+x^2}}$. Tìm số dương m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\frac{1}{\sqrt{e}}$:

A. $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=3$ **D.** $m=\frac{1}{2}$

Câu 22 Tính tích phân: $I=\int_0^1 x(2+e^x)dx$

A. 2 **B.** -2 **C.** 3 **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 23 Nguyên hàm của $f(x)=\sin(5x-2)$

A. $\frac{1}{5}\sin(5x-2)+c$ **B.** $5\sin(5x-2)+c$

C. $-\frac{1}{5}\cos(5x-2)+c$ **D.** $-\frac{1}{5}\cos(5x-2)+c$

Câu 24 Cho hình thang cong tạo bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=b$. Với $a>b$ diện tích S của hình phẳng này bằng:

A. $S=\int_a^b\left|f(x)\right|dx$ **B.** $S=\int_0^b\left|f(x)\right|dx$ **C.** $S=\int_0^a\left|f(x)\right|dx$ **D.** $S=\int_b^a\left|f(x)\right|dx$

Câu 25 Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}$ và các trục Ox, Oy có giá trị bằng:

A. $-3\ln\frac{2}{3}-1$ **B.** $3\ln\frac{3}{2}+1$ **C.** $\ln\frac{3}{2}-1$ **D.** $2\ln\frac{3}{2}-1$

Câu 26 Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(x+\cos 2x\right)dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I=1-\left(\frac{1}{6}cos3x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ **B.** $I=\frac{2}{3}$

C. $I=2-\left(\frac{1}{6}cos3x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ **D.** $I=3$

Câu 27 Kết quả tích phân $\int_0^2 \left(2x+ln(x+1)\right)dx = 3ln3+b$. Giá trị $3+b$ là:

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 7

Câu 28 Với giá trị nào của m thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=-x^2+2x$ và $(d): y=mx(m<0)$ bằng 27 đơn vị diện tích:

A. $m=-1$ **B.** $m=-2$ **C.** $m\in\varnothing$ **D.** $m\in R$

Câu 29 Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)\overline{z}-1=3i$. Số phức $w=1-zi+\overline{z}$ có phần ảo bằng bao nhiêu?

A. -1 **B.** -2 **C.** -3 **D.** -4

Câu 30 Trên mặt phẳng phức tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả mãn: $|z-1+i|=1$. Chọn đáp án đúng?

A. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường thẳng : x + y = 0

B. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường tròn $(x-1)^2+(y+1)^2=9$

C. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường tròn $(x-1)^2+(y+1)^2=1$

D. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường tròn $(x-2)^2+(y+2)^2=4$

Câu 31 Cho số phức $z=(1-2i)(4-3i)-2+8i$. Xác định phần thực, phần ảo và tính mô-đun số phức z. Chọn đáp án đúng?

A. Số phức Z có phần thực: –4, phần ảo: –3, mô-đun là 5

B. Số phức Z có phần thực: 4, phần ảo: 3, mô-đun là 5

C. Số phức Z có phần thực: –3, phần ảo: –4, mô-đun là 5

D. Số phức Z có phần thực: 3, phần ảo: 4, mô-đun là 5

Câu 32 Tìm số phức z thỏa hệ thức $\begin{cases} \left|z^2+\overline{z}\right|=2 \\ |z|=2 \end{cases}$?

A. $z=3; z=1\pm\sqrt{3i}$ **B.** $z=-2; z=1\pm\sqrt{3i}$

C. $z=-1; z=1\pm\sqrt{3i}$ **D.** $z=-2; z=2\pm\sqrt{3i}$

Câu 33 Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z-2\overline{z}=3+4i$. Phát biểu nào sau đây sai?

A. z có phần thực là -3 **B.** $\overline{z}+\frac{4}{3}i$ có mô-đun $\frac{\sqrt{97}}{3}$

C. z có phần ảo là $\frac{4}{3}$ **D.** z có mô-đun $\frac{\sqrt{97}}{3}$

Cho các số phức z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 có điểm biểu diễn lần lượt là A, B, C, D, E trong mặt phẳng phức tạo thành một ngũ giác lồi. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ. Biết I, J là điểm biểu diễn hai số phức $1-i$, $2i$ và $4-5i$ là số phức có điểm biểu diễn là E. Tìm số phức z_1?

A. $z_1 = 2-3i$ **B.** $z_1 = 4-7i$ **C.** $z_1 = 8-7i$ **D.** $z_1 = 8-2i$

Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $AC = a\sqrt{2}$

A. $V = a^3$ **B.** $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$ **C.** $V = 3\sqrt{3}a^3$ **D.** $V = \frac{1}{3}a^3$

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 30^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC?

A. $V = \frac{a^3}{6}$ **B.** $V = \frac{a^3}{4}$ **C.** $V = \frac{a^3}{12}$ **D.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau. $AB = 6a$, $AC = 7a$, $AD = 4a$. Gọi P, N lần lượt là các điểm thuộc đoạn thẳng DB, DC sao cho $2DP = PB, 2DN = NC$. Tính theo a thể tích V của tứ diện $DAPN$.

A. $V = \frac{7}{2}a^3$ **B.** $V = \frac{28}{9}a^3$ **C.** $V = \frac{28}{3}a^3$ **D.** $V = 7a^3$

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với trọng tâm của tam giác ABD. Mặt bên SAB tạo với đáy một góc 60^0. Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD)?

A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh trục AB.

A. $l = a$ **B.** $l = \sqrt{2}a$ **C.** $l = \sqrt{3}a$ **D.** $l = 2a$

Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh a. Tính thể tích hình trụ đó?

A. $V = \frac{\pi a^3}{2}$ **B.** $V = \frac{\pi a^3}{4}$ **C.** $V = \frac{\pi a^3}{3}$ **D.** $V = \frac{\pi a^3}{5}$

Trong không gian, một hình trụ có bán kính đáy $R = 1$ và đường cao $R\sqrt{3}$. Diện tích toàn phần của hình trụ là:

A. $S_{tp} = 2\pi\left(1+2\sqrt{3}\right)$ **B.** $S_{tp} = 2\pi$

C. $S_{tp} = 6\pi$ **D.** $S_{tp} = 2\pi\left(1+\sqrt{3}\right)$

Câu 42 Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$ tam giác ABC cân tại A, $BC = 2a\sqrt{2}$, $\cos\widehat{ACB} = \frac{1}{3}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $S = \frac{97\pi.a^2}{\sqrt{4}}$ **B.** $S = \frac{97\pi.a^2}{\sqrt{3}}$ **C.** $S = \frac{97\pi a^2}{4}$ **D.** $S = \frac{97\pi a^2}{5}$

Câu 43 Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm A(2;-1;0), B(3;-3;-1) và (P): $x + y + z - 3 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P). Chọn đáp án đúng

A. M(7;1;-2) **B.** M(-3;0;6) **C.** M(2;1;-7) **D.** M(1;1;1)

Câu 44 Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z + 1 = 0$. Xác định bán kính R của mặt cầu (S). Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại M(1;1;1). Chọn đáp án đúng

A. Bán kính của mặt cầu R = 5, phương trình mặt phẳng (P): $4y + 3z - 7 = 0$

B. Bán kính của mặt cầu R = 5, phương trình mặt phẳng (P): $4x + 3z - 7 = 0$

C. Bán kính của mặt cầu R = 5, phương trình mặt phẳng (P): $4y + 3z + 7 = 0$

D. Bán kính của mặt cầu R = 3, phương trình mặt phẳng (P): $4x + 3y - 7 = 0$

Câu 45 Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $(P): 2x + y + z + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm A là giao của đường thẳng (D) với (P). Viết phương trình đường thẳng qua A nằm trên mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d. Chọn đáp án đúng?

A. $A(-3;4;1), d': \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ **B.** $A(-3;4;1), d': \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 4 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

C. $A(-3;4;1), d': \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 4 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ **D.** $A.(3;4;1), d': \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 4 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Câu 46 Trong không gian Oxyz viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{1}$. Tính khoảng cách từ điểm A(2;3;-1) đến mặt phẳng (P)?

A. $d(A,(P)) = \frac{10}{\sqrt{13}}$ **B.** $d(A,(P)) = \frac{12}{\sqrt{15}}$

C. $d(A,(P)) = \frac{12}{\sqrt{14}}$ **D.** $d(A,(P)) = \frac{12}{\sqrt{13}}$

Câu 47 Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho hai điểm A(7;2;1) và B(-5;-4;-3) mặt phẳng (P): 3x - 2y - 6z + 3 = 0. Chọn đáp án đúng?

A. Đường thẳng AB không đi qua điểm (1,-1,-1)

B. Đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng : 6x + 3y – 2z + 10 =0

C. Đường thẳng AB song song với đường thẳng $\begin{cases} x = 1 - 12t \\ y = -1 - 6t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$

D. Đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 - 2t \\ z = 3t \end{cases}$

Câu 48 Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1;-3;0)$, $B(5;-1;-2)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $M(-2;-3;3)$ **B.** $M(-2;-3;2)$ **C.** $M(-2;-3;6)$ **D.** $M(-2;-3;0)$

Câu 49 Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(3;-4;0)$, $B(0;2;4)$, $C(4;2;1)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục Ox sao cho AD = BC?

A. $D(-6;0;0)$, $D(0;0;0)$ **B.** $D(6;0;0)$, $D(0;0;0)$

C. $D(6;0;0)$, $D(0;0;2)$ **D.** $D(6;0;0)$, $D(0;0;1)$

Câu 50 Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm của đường tròn đó.

A. $H(3;0;2)$ **B.** $H(3;1;2)$ **C.** $H(5;0;2)$ **D.** $H(3;7;2)$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1 **Đáp án A.**

TXĐ: D=R

Sự biến thiên:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2); y' = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;+\infty)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. Hàm số đạt cực tiểu tại x = 2, y_{CT} = -4, cực đại tại x = 0 ; $y_{CĐ}$ = 0.

Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty; \lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$

Câu 2 **Đáp án C.**

TXĐ: $D = R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \frac{1}{2}$, đồ thị có TCN $y = \frac{1}{2}; \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} y = +\infty; \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} y = -\infty$, đồ thị có TCĐ $x = \frac{1}{2}$

$$y' = -\frac{1}{(2x-1)^2} \to y' < 0 \forall x \in D$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Đồ thị nhận $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng

Vậy số phát biểu sai là 3. (2), (3), (5)

Câu 3 **Đáp án A.**

TXĐ: D=R

Sự biến thiên: $y' = -4x^3 + 8x; y' = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

Các khoảng đồng biến $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt{2}\right)$ và các khoảng nghịch biến $\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu $x_{CT} = 0 \to y_{CT} = 3$

Hàm số đạt cực đại $x_{CĐ} = \pm\sqrt{2} \to y_{CĐ} = 1$

Giới hạn tại vô cực $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = -\infty$

Quan sát thấy đáp án A chính xác.

Câu 4 **Đáp án C.**

TXĐ: D=R\{1}

Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 1$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng y = 1

$\lim\limits_{x\to 1^-} = +\infty; \lim\limits_{x\to 1^+} = -\infty$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng x = 1

Chiều biến thiên

$y' = \dfrac{1}{(x-1)^2} > 0 \forall x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1);(1;+\infty)$

Cực trị: Hàm số không có cực trị

Đồ thị

Đồ thị cắt trục Ox tại điểm (2 ; 0)

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm (0 ; 2)

Đồ thị nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận I(1 ; 1) là tâm đối xứng

Đáp án A.

TXĐ: D=R

$f'(x) = 1 - 2\cos 2x, f''(x) = 4\sin 2x$

$f'(x) = 0 \leftrightarrow 1 - 2\cos 2x = 0 \leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$

$f''\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0$

Hàm số đạt cực đại tại $x_{CĐ} = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$

Với $y_{CĐ} = f\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 + k\pi, k \in Z$

$f''\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\dfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} > 0$ hàm số đạt cực tiểu tại $x_{CT} = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$

Với $y_{CT} = f\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 + k\pi, k \in Z$

Đáp án C.

Ta có: $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4; f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2};2\right]$

$f'(x) = 4x^3 - 8x$

Với $x \in \left[-\dfrac{1}{2};2\right], f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 0; x = \sqrt{2}$

Ta có: $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3.\dfrac{1}{16}, f(0) = 4, f(\sqrt{2}) = 0, f(2) = 4$

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2};2\right]$ lần lượt là 4 và 0.

Đáp án B.

$y' = x^2 - 4x + 3$

Đường thẳng $y = 3x + 1$ có hệ số góc 3

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên $y'(x) = 3 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$

$x = 0 \to y = 1 \to PTTT: y = 3x + 1$

$x = 4 \to y = \frac{7}{3} \to PTTT: y = 3x - \frac{29}{3}$

Thử lại, ta được $y = 3x - \frac{29}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8 **Đáp án C.**

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và d là nghiệm của phương trình:

$$\frac{2mx+1}{x-1} = -2x + m \leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 + (m-2)x + m + 1 = 0 (2) \end{cases}$$

Đồ thị hàm số (1) cắt d tại hai điểm phân biệt có 2 nghiệm phân biệt #1

$$\leftrightarrow \begin{cases} 2 + m - 2 + m \neq 0 \\ \Delta = m^2 - 12m - 4 > 0 \end{cases} \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m > 6 + 2\sqrt{10} \\ m < 6 - 2\sqrt{10} \end{array}\right. \end{cases}$$

Do x_1, x_2 là nghiệm của (2) $\leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2-m}{2} \\ x_1.x_2 = \frac{m+1}{2} \end{cases}$

Theo giả thiết ta có: $\left|4(x_1 + x_2) - 6x_1x_2\right| = 21 \leftrightarrow |1 - 5m| = 21 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - 5m = 21 \\ 1 = 5m = -21 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m = \frac{22}{5} (loại) \end{array}\right.$

Vậy giá trị m thỏa mãn đề bài là m=-4

Câu 9 **Đáp án D.**

TXĐ: D=R

$y' = -3x^2 + 2(m+3)x - (m^2 + 2m); y'' = -6x + 2(m+3)$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại x=2

$$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) < 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -12 + 4(m+3) - m^2 - 2m = 0 \\ -12 + 2m + 6 < 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m = 0 \\ m < 3 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

Kết luận : Giá trị m cần tìm là m=0; m=2

Câu 10 **Đáp án A.**

Cho hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ (1)

Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 đồng thời $|x_1 - x_2| = 2$.

y' = -3x2 + 6x + 3(m2 - 1)

+ Hàm số (1) có hai điểm cực trị khi y' = 0 có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

+ $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$

Trong đó: $x_1 + x_2 = 2; x_1x_2 = 1 - m^2$

Nên $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$ (TMĐK). Vậy $S(O;R)$

Câu 11 **Đáp án A.**

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$, $\left(x_0 \neq 1\right)$, $y_0 = \dfrac{2x_0+1}{x_0-1}$, Ta có $d\left(M,\Delta_1\right) = d\left(M,Ox\right) \Leftrightarrow \left|x_0-1\right| = \left|y_0\right|$

$\Leftrightarrow \left|x_0-1\right| = \left|\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right| \Leftrightarrow \left(x_0-1\right)^2 = \left|2x_0+1\right|$

Với $x_0 \geq \dfrac{-1}{2}$, ta có : $x_0^2 - 2x_0 + 1 = 2x_0 + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 4 \end{array}\right.$

Suy ra $M\left(0;-1\right), M\left(4;3\right)$

Với $x_0 < \dfrac{-1}{2}$, ta có pt $x_0^2 - 2x_0 + 1 = -2x_0 - 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 2 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy $M\left(0;-1\right), M\left(4;3\right)$

Câu 12 **Đáp án D.**

Điều kiện: x>0, x#1

Với điều kiện đó, PT đã cho tương đương với

$\log_8 (2x)^2(x-1)^2 = \dfrac{4}{3} \leftrightarrow \left[2x(x-1)\right]^2 = 16 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x(x-1) = 4 \\ 2x(x-1) = -4 \end{array}\right. \leftrightarrow x = 2$

Câu 13 **Đáp án: B.**

$\log_2\left(\dfrac{5.2^x-8}{2^x+2}\right) = 3-x$ (1), điều kiện $\dfrac{5.2^x-8}{2^x+2} > 0$

$(1) \leftrightarrow \dfrac{5.2^x-8}{2^x+2} = 2^{3-x} \leftrightarrow 2^x(5.2^x-8) = 8(2^x+2) \leftrightarrow 5.2^x - 16.2^x - 16 = 0 (2)$

Đặt $2^x = t > 0 \rightarrow 5t^2 - 16t - 16 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \leftrightarrow x = 2 \\ t = -\dfrac{4}{5} (L) \end{array}\right.$

Suy ra $P = 8$.

Câu 14 **Đáp án D.**

$A = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{6} + \log_4 81 - \log_2 27 + 81^{\frac{1}{\log_5 3}} = \log_2 6 + \log_2 9 - \log_2 27 + \left(3^{\log_3 5}\right)^4$

$= \log_2 \dfrac{6.9}{27} + 5^4 = 1 + 625 = 626$

$\rightarrow \log_2 626 = \log_2(2.313) = 1 + \log_2 313$

Câu 15 **Đáp án D.**

Điều kiện: x>1.

$2\log_3(x-1) + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) \leq 2 \leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}\left[(x-1)(2x-1)\right] \leq 1 \leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 \leq 0 \leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2$

kết hợp với điều kiện ta được $x \in \left(1;2\right]$

Câu 16 **Đáp án A.**

$$\log_3 50 = \frac{\log_3 150}{3} = \log_3 15 + \log_3 10 - 1 = a + b - 1$$

Câu 17 **Đáp án A.**

$$Q = \log_a\left(a\sqrt{b}\right) - 2\log_a\left(a\sqrt[4]{b}\right) + 3\log_b b = \log_a\left(a\sqrt{b}\right) - \log_a\left(a^2\sqrt{b}\right) + 3 = \log_a \frac{a\sqrt{b}}{a^2\sqrt{b}} + 3$$

$$= \log_a \frac{1}{a} + 3 = -1 + 3 = 2$$

Câu 18 **Đáp án: B.**

Phương trình $\leftrightarrow 3.25^x - 10.5^x + 7 = 0$.

Đặt $t = 5^x (t > 0) \rightarrow 3t^2 - 10t + 7 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \leftrightarrow x = 0 \\ t = \frac{7}{3} \leftrightarrow x = \log_5 \frac{7}{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Câu 19 **Đáp án A.**

Điều kiện: $x \geq 1$.

Ta có: $3^{x^2+\sqrt{x-1}-1} + 3 \leq 3^{x^2} + 3^{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow 3^{x^2+\sqrt{x-1}} - 3.3^{x^2} - 3.3^{\sqrt{x-1}} + 9 \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(3^{x^2} - 3\right)\left(3^{\sqrt{x-1}} - 3\right) \leq 0$

+ Với $x = 1$: (2) thoả mãn;

+ Với $x > 1$: $(2) \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x-1}} \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 < x \leq 2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $1 \leq x \leq 2$

Câu 20 **Đáp án: B.**

$log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2(2-x^2)\right] > 0 \quad (x \in R)$ (2).

Điều kiện: $\log_2(2-x^2) > 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 > 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow \log_2(2-x^2) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 2 - x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm bpt là $S = (-1;0) \cup (0;1)$

Câu 21 **Đáp án A.**

Ta có: $1 + x^2 \geq 2x$ suy ra $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ vì $m > 0 \Rightarrow -\frac{mx}{1+x^2} \geq -\frac{m}{2} \Rightarrow e^{-\frac{mx}{1+x^2}} \geq e^{-\frac{m}{2}}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là $e^{\frac{-m}{2}}$ xảy ra khi $x = 1$. Theo đề $e^{\frac{-m}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow m = 1$

Đáp án A.

Sử dụng MTCT ta được kết quả $I = 2$.

Đáp án C.

$$\int sin(5x-2)dx = -\frac{1}{5}cos(5x-2)+c$$

Đáp án B.

Đáp án A.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại (– 1; 0). Do đó $S = \int_{-1}^{0}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|dx$

Ta có $S = \int_{-1}^{0}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|dx = \left|\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)dx\right| = \left|\left(x+3\ln|x-2|\Big|_{-1}^{0}\right)\right| = \left|1+3\ln\frac{2}{3}\right| = 3\ln\frac{3}{2}-1$

Đáp án B.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.(x+\cos 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}x.\sin xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos 2xdx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}x.\sin xdx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx = 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 3x - \sin x)dx = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 3x.d(3x) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.dx$$

$$= -\frac{1}{6}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{2}{3}$$

Đáp án C.

$$I = \int_0^2 (2x + \ln(x+1))dx = A + B$$

Tính $A = \int_0^2 2xdx = x^2\Big|_0^2 = 4$

Tính $B = \int_0^2 (\ln(x+1))dx$

Xem: $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases}$ ta chọn được $\begin{cases} du = \dfrac{dx}{x+1} \\ v = x+1 \end{cases}$

Dùng công thức tích phân từng phần

$$B=\int_0^2\left(\ln(x+1)\right)dx=(x+1).\ln(x+1)\Big|_0^2-\int_0^2\frac{x+1}{x+1}dx=3\ln3-x\Big|_0^2=3\ln3-2$$

Vậy: $I=\int_0^2\left(2x+\ln(x+1)\right)dx=3\ln3+2$

Câu 28 **Đáp án A.**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$-x^2+2x=mx\Leftrightarrow x^2-\left(2-m\right)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2-m>0\end{array}\right.$$

$$S=\int_0^{2-m}\left|-x^2+2x-mx\right|dx=\int_0^{2-m}\left(-x^2+2x-mx\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{mx^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-m}$$

$$=-m^3+6m^2-12m+8=27$$

Do đó $m=-1$.

Câu 29 **Đáp án A.**

$$(1+i)\bar{z}-1-3i=0\leftrightarrow\bar{z}=\frac{1+3i}{1+i}=2+i$$

$$\to \text{w}=2-i$$

Số phức w có phần ảo bằng – 1

Câu 30 **Đáp án C.**

Trên mặt phẳng phức tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả mãn: $|z-1+i|=1$

Gọi số phức $z=x+yi(x,y\in R)$ điểm biểu diễn M(x;y) trên mặt phẳng phức

$$|z-1+i|=1\leftrightarrow|x-1+(y+1)i|=1\leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=1$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm I(1;0) bán kính R =1

Câu 31 **Đáp án A.**

$z=(1-2i)(4-3i)-2+8i=-4-3i$. Phần thực: –4, phần ảo: –3

$$|z|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$$

Câu 32 **Đáp án A.**

Giả sử $z=x+yi;(x,y\in R)$

$$|z|=2\leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)=4$$

$$|z^2+\bar{z}|=2\leftrightarrow\left(x^2-y^2+x\right)+(2xy-y)^2=4\leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)^2+\left(x^2+y^2\right)-6xy^2+2x^3=4$$

$$\leftrightarrow4^2+4-6x(4-x^2)+2x^3=4\leftrightarrow8x^3-24x+16=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\to y=1\pm\sqrt{3}\\x=-2\to y=0\end{array}\right.$$

Vậy $z=-2;z=1\pm\sqrt{3i}$

Câu 33 **Đáp án B.**

Đặt $z = x + yi(x, y \in R) \to \bar{z} = x - yi \to -2\bar{z} = -2x + 2yi$

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$x + yi - 2x + 2yi = 3 + 4i \leftrightarrow -x + 3yi = 3 + 4i \leftrightarrow \begin{cases} -x = 3 \\ 3y = 4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy $z = -3 + \frac{4}{3}i \to |z| = \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{97}{9}} = \frac{\sqrt{97}}{3}$

Câu 34 **Đáp án C.**

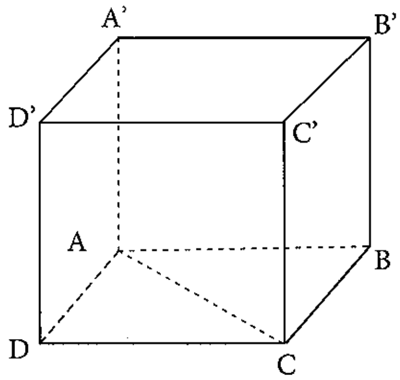
Ta có: $4\overrightarrow{IJ} = 2\left(\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN}\right)$

Mà $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IP} = \vec{0}$ do đó $\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

Suy ra $4\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(0-1) = 4 - x_A \\ 4(2+1) = 5 - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 8 \\ y_A = -7 \end{cases}.$

Câu 35

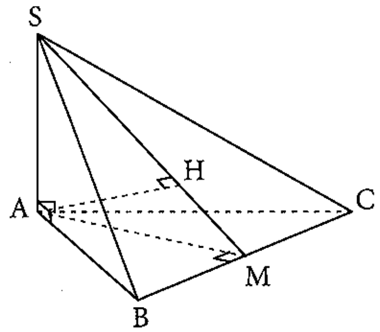


Ta có: AC= $a\sqrt{2}$

Theo đề cho ABCD. A'B'C'D' là khối lập phương .

Suy ra cạnh của lập phương là $\frac{AC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow V = a^3$

Câu 36 **Đáp án C.**



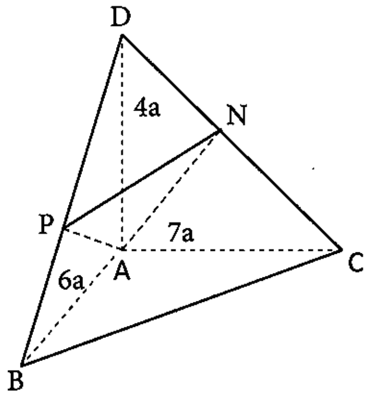
Ta có:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt),

$SA = \tan\widehat{SBA}.AB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{a^3}{12}$ (đvtt)

Câu 37 **Đáp án B.**



Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AB.AC.AD=28a^3$

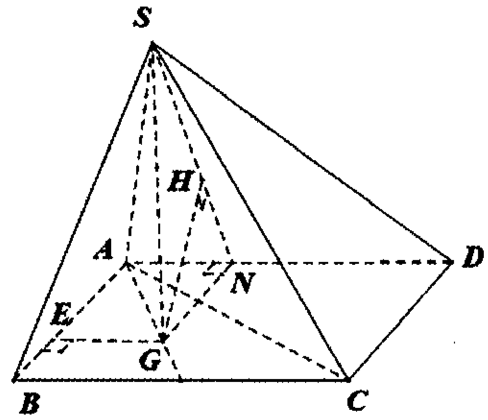
$\Rightarrow V_{DAPN}=\frac{1}{9}.V_{ABCD}=\frac{28}{9}a^3$

Câu 38 **Đáp án A.**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, E là hình chiếu của G lên AB

Ta có

$AB\perp(SGE)\Rightarrow\widehat{SAG}=60^0\Rightarrow SG=GE.\tan60^0$



Mà $GE=\frac{1}{3}BC$ nên tính được SG.

Hạ $GN\perp AD$ và $GH\perp SN$

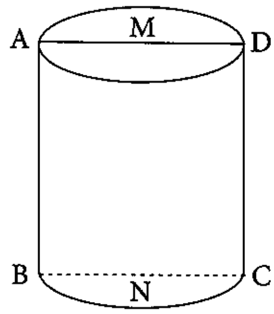
$\Rightarrow d\left(B,(SAB)\right)=3d\left(G,(SAB)\right)=3GH$

$=3\frac{GN.GS}{\sqrt{GN^2+GS^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 39 **Đáp án D.**

Thực chất độ dài đường sinh l là $BC=\frac{AB}{cos30^0}=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$

Câu 40 **Đáp án D.**

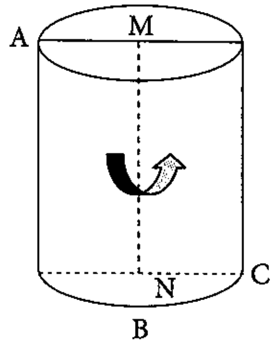


Rõ ràng chiều cao hình trụ $h=a$,

và đường kính đáy $2R=a$.

Do đó thể tích: $V=\pi R^2h=\frac{\pi a^3}{4}$.

Câu 41 **Đáp án D.**



Ta có: $S_{tp}=S_{xq}+2S_d$.

Ta có bán kính đường tròn $R=1$, chiều cao $l=MN=R\sqrt{3}=\sqrt{3}$

Suy ra: $S_{xq}=2\pi Rl=2\pi\sqrt{3}$, $S_d=\pi R^2=\pi$

Suy ra $S_{tp}=2\pi\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Câu 42 **Đáp án C.**

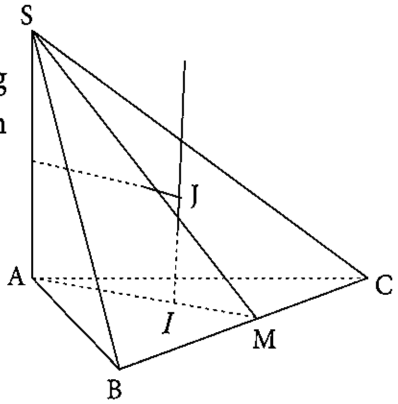
Ta có:

$\sin C = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}; \tan C = 2\sqrt{2}; CM = a\sqrt{2}; AM = CM.\tan C = 4a$

$\sin A = \sin 2C = 2\sin C.\cos C = 2\dfrac{1}{3}\dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

Theo định lý hàm số sin trong tam giác ABC ta có $2R = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{9a}{4}$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có IA = R. Dựng trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mặt phẳng trung trực SA cắt trục đường tròn tại J khi đó J chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp SABC



Gọi r là bán kính mặt cầu ngoại tiếp S.ABC khi đó

$r = JA = JB = JS = JC = \sqrt{IA^2 + \left(\dfrac{SA}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{97}}{4}$

Diện tích mặt cầu cần tính là $S = 4\pi.r^2 = \dfrac{97\pi.a^2}{4}$

Câu 43 **Đáp án D.**

Đường thẳng AB có pt: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{-1}$

Gọi M là giao điểm của AB và (P). Do M thuộc AB nên M(2+t;-1-2t;-t). M thuộc (P) nên 2+t-1-2t-t-3=0⇔t=-1

Do đó M(1;1;1)

Câu 44 **Đáp án A.**

Tâm của mặt cầu (S): là I(1;-3;4), bán kính R=5

$\overrightarrow{IM} = (0;4;3)$

Phương trình mặt phẳng (P) qua M là: $4y + 3z - 7 = 0$

Câu 45 **Đáp án B.**

Tọa độ A là nghiệm của hệ $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \\ 2x + y + z + 1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow t = -2 \leftrightarrow A(-3;4;1)$

Đường thẳng d' nằm trên mặt phẳng (P) và vuông góc với d nên có

$VTCP\overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_p}\right] = (-2;0;4)$

Phương trình d': $\begin{cases} x=-3-t \\ y=4 \\ z=1+2t \end{cases}$

Câu 46 **Đáp án C.**

Ta có VTCP của đường thẳng d: $\overrightarrow{u_d}=(2;3;1)$

Vì d vuông góc với (P) nên $\overrightarrow{n_p}=\overrightarrow{u_d}=(2;3;1)$

Phương trình mặt phẳng (P): 2x+3y+z=0

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là: $d(A,(P))=\dfrac{|4+9-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\dfrac{12}{\sqrt{14}}$

Câu 47 **Đáp án D.**

Đường thẳng AB đi qua A, VTCP $\overrightarrow{AB}=(-12;-6;-4)$ có phương trình tham số: $\begin{cases} x=7-12t \\ y=2-6t \\ z=1-4t \end{cases}$

Kiểm thấy đáp án A, B, C sai.

VTCP của $\begin{cases} x=5 \\ y=-1-2t \\ z=3t \end{cases}$ là $\vec{u}=(0;-2;3)$, rõ ràng $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0$.

Câu 48 **Đáp án C.**

Kiểm tra thấy A và B nằm khác phía so với mặt phẳng (P).

Gọi $B'(x;y;z)$ là điểm đối xứng với $B(5;-1;-2)$

Suy ra $B'(-1;-3;4)$

Lại có $|MA-MB|=|MA-MB'|\le AB'=\text{const}$

Vậy $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi M,A,B' thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thẳng AB' với mặt phẳng (P)

AB' có phương trình $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3 \\ z=-2t \end{cases}$

Tọa độ $M(x;y;z)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3 \\ z=-2t \\ x+y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-3 \\ x=-2 \\ y=-3 \\ z=6 \end{cases}$

Vậy điểm $M(-2;-3;6)$

Câu 49

Gọi $D(x;0;0)$ thuộc trục hoành.

Ta có $AD=BC$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+4^2+0^2=4^2+0^2+3^2$

Vậy: $D(0;0;0)$ và $D(6;0;0)$

Câu 50 **Đáp án A.**

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$

Khoảng cách từ điểm I tới mp(P) là $d(I,(P))=3$

Vì $d(I,(P))<R \Rightarrow$ mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Bán kính của đường tròn là $r=\sqrt{R^2-d^2(I,(P))}=4$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm I trên (P) suy ra đường thẳng IH đi qua I và vuông góc với mp(P)

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng IH : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3-t \end{cases}$

Khi đó H là giao của mp(P)với IH $\Rightarrow H(3;0;2)$

BỘ GIÁO DỤC	ĐỀ MINH HỌA KÌ THI THPT QUỐC GIA 2017
Đề số 4	MÔN: TOÁN (50 câu trắc nghiệm)
	Thời gian làm bài: 90 phút

Họ tên:..

Số báo danh: ....

Câu 1 Cho hàm số $y = f(x)$. Mệnh đề nào đúng trong những mệnh đề sau?

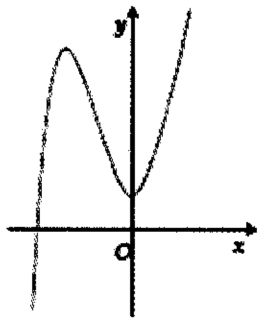
A. $f'(x) > 0$ với $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng (a,b)

B. $f'(x) > 0$ với $\forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng (a,b)

C. $f(x)$ đồng biến trên khoảng (a,b) $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

D. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng (a,b) $\Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

Câu 2 Đồ thị hàm số sau là của hàm số nào?



A. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ **B.** $-x^4 + 2x^2 + 2$

C. $y = x^4 + 2x^2 + 2$ **D.** $x^3 + 3x^2 + 1$

Câu 3 Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - x + 7$ là?

A. 1 **B.** 0

C. 3 **D.** 2

Câu 4 Cho hàm số sau: $y = \frac{x-1}{x-3}$, những mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

(1) hàm số luôn nghịch biến trên $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

(2) Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x = 1;$ 1 tiệm cận ngang là $y = 3$

(3) Hàm số đã cho không có cực trị

(4) Đồ thị hàm số là hypebol nhận giao điểm $I(3;1)$ của 2 đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

A. (1), (3), (4) **B.** (3), (4) **C.** (2), (3), (4) **D.** (1), (4)

Câu 5 Hàm số $y = \frac{x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(1;+\infty)$ **C.** $(-1;1)$ **D.** $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

Câu 6 Cho hàm số: $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Cực đại của hàm số bằng?

A. 2 **B.** 1 **C.** -1 **D.** 0

Câu 7 Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (6-m)x + 2}{mx + 2}$ có đồ thị là (C_m). Hỏi đồ thị hàm số luôn đi qua mấy điểm cố định?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 8. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua $A(0;2)$ có hệ số góc m cắt đồ thị (C) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh của đồ thị?

A. $m \ge 0$. **B.** $m>0$. **C.** $m<-5$ **D.** $m>0$ hoặc $m<-5$.

Câu 9. Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx-2$ có đồ thị (C_m). Tìm tất cả giá trị của m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm?

A. $m<1-\sqrt{3}$ hoặc $m>1+\sqrt{3}$. **B.** $1-\sqrt{3}<m<1+\sqrt{3}$.

C. $m=1$. **D.** $\begin{cases} m \ne 1 \\ 1-\sqrt{3}<m<1+\sqrt{3} \end{cases}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-5}{x-1}$ có đồ thị là (C). Hỏi trên đồ thị (C) có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?

A. 3 điểm. **B.** 4 điểm. **C.** 6 điểm. **D.** Vô số điểm.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và $f'(x)>0\ \forall x \in (a;b)$. Khẳng định nào sau luôn luôn đúng?

A. Phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

B. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

D. Phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Câu 12. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Việt Nam là 1%. Năm 2010, dân số nước ta là 88360000 người. Sau khoảng bao nhiêu năm thì dân số nước ta sẽ là 128965000 người ? Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm là không thay đổi.

A. 36. **B.** 37. **C.** 38. **D.** 39.

Câu 13. Nghiệm của phương trình $log_3 x+log_3(x+2)=1$ là bao nhiêu?

A. $x=1$ hoặc $x=-3$. **B.** $x=-3$.

C. $x=1$. **D.** Phương trình vô nghiệm.

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số: $y=(x^2-2x+2)e^x$?

A. $y'=(2x-2)e^x$. **C.** $y'=(2x-1)e^x$.

C. $y'=x^2e^x$. **D.** $y'=(2x-2)e^x+x(2x-2)e^{x-1}$.

Câu 15. Giải bất phương trình: $log_3(x-1)^2-\dfrac{2}{3}log_3 x^3>0$

A. $x<\dfrac{1}{2}$. **B.** $x>0$. **C.** $x<\dfrac{1}{4}$. **D.** $0<x<\dfrac{1}{2}$.

Câu 16. Cho $a=log_{27}5; b=log_8 7; c=log_2 3$. Khi đó $log_6 35$ được biểu diễn là:

A. $\dfrac{3(b+ac)}{1+c}$. **B.** $\dfrac{2(b+ac)}{1+c}$. **C.** $\dfrac{b+ac}{1+c}$. **D.** $\dfrac{b+ac}{2(1+c)}$.

Câu 17 Cho hàm số: $y=e^{x^2-2x+2}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $y'=2e^2(x-1)e^{x^2-2x}$.

C. Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=1$.

B. Trên R, hàm số có giá trị nhỏ nhất là e.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$.

Câu 18 Hàm số $y=\log_{a^2-2a+1}x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ với giá trị nào của a?

A. $a\in(0;2)\setminus\{1\}$.

B. $a\in(-2;1)\setminus\{0\}$

C. $a>2$ hoặc $a<0$.

D. $|a|>1$ và $a\neq 2$.

Câu 19 Tập xác định của hàm số: $y=\log_2\left(\log\dfrac{1+3x}{1-3x}\right)$ là:

A. $D=\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

C. $D=\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$.

B. $D=\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$.

D. $D=(0;+\infty)$.

Câu 20 Phương trình $x^{\log_2 x^3-\log_2^2 x-3}=\dfrac{1}{x}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. Vô nghiệm.

B. 1 nghiệm.

C. 2 nghiệm.

D. 3 nghiệm.

Câu 21 Với $a,b,c,x>1$, cho các khẳng định sau

1. $a^{\log_b c}=c^{\log_b c}$.

2. Phương trình $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=-2x^2+4x-9$ vô nghiệm.

3. Khi $m>1$ thì phương trình $|x|+\dfrac{1}{|x|}=\left(\dfrac{2017}{2016}\right)^m$ luôn có nghiệm duy nhất.

Có bao nhiêu khẳng định sai trong các khẳng định trên?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 22 Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)\ (m/s)$ có gia tốc $v'(t)=\dfrac{3}{t+1}\left(m/s^2\right)$. Vận tốc ban đầu của vật là $6m/s$. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn đến kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất) có giá trị gần với giá trị nào sau đây?

A. $13\ (m/s)$.

B. $13{,}1\ (m/s)$.

C. $13{,}2\ (m/s)$.

D. $13{,}3\ (m/s)$.

Câu 23 Kí hiệu (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b\ (a<b)$. Khi đó thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:

A. $V=\pi\displaystyle\int_a^b\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx$.

C. $V=\pi\displaystyle\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)^2dx$.

B. $V=\pi\displaystyle\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$.

D. $V=\pi\displaystyle\int_a^b\left(g^2(x)-f^2(x)\right)dx$.

Câu 24 Giá trị của tích phân $\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$ là:

A. 1

B. e

C. $\dfrac{1}{2}$

D. e^2

Câu 25 Tính đạo hàm của hàm số sau: $F(x)=\int_1^{\sqrt{x}} sin t^2 dt (x>0)$?

A. $F'(x)=\frac{sin x}{\sqrt{x}}$. **B.** $F'(x)=\frac{sin x}{2\sqrt{x}}$. **C.** $F'(x)=\frac{2 sin x}{\sqrt{x}}$. **D.** $F'(x)=sin\sqrt{x}$.

Câu 26 Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x)=\int \frac{3sin x-2cos x}{3cos x+2sin x}dx$?

A. $\int f(x)dx=-ln(3cos x+2sin x)+C$.
C. $\int f(x)dx=ln|3sin x-2cos x|+C$.
B. $\int f(x)dx=-ln|-3cos x+2sin x|+C$.
D. $\int f(x)dx=ln|3cos x+2sin x|+C$.

Câu 27 Tìm các số a,b để hàm số $f(x)=a sin \pi x+b$ thỏa mãn: $f(1)=2$ và $\int_0^1 f(x)dx=4$?

A. $a=\pi, b=2$. **B.** $a=-\pi, b=2$. **C.** $a=\frac{\pi}{2}, b=2$. **D.** $a=-\frac{\pi}{2}, b=2$.

Câu 28 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}$ và đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{4\sqrt{2}}$?

A. $2\pi+4$. **B.** $2\pi+\frac{4}{3}$. **C.** $2\pi-\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 29 Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$. Biết rằng $z=(1+2i)(-2+i)$.
Phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$ lần lượt là:

A. $-4;-3$. **B.** $-4;3$. **C.** $4;-3$. **D.** $4;3$.

Câu 30 Tập hợp biểu diễn của số phức z thỏa mãn: $z+3\overline{z}=(2+\sqrt{3}i)|\overline{z}|$:

A. Là đường thẳng $y=-\sqrt{3}x$.
C. Là đường thẳng $y=\sqrt{3}x$.
B. Là đường thẳng $y=-3x$.
D. Là đường thẳng $y=3x$.

Câu 31 Kí hiệu z_1,z_2 (qui ước: z_1 là số có phần ảo của lớn hơn) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} z.\overline{z}=1 \\ |z^2+2\overline{z}-1|=\sqrt{\frac{8}{27}} \end{cases}$. Khi đó $3z_1+6z_2$ bằng:

A. $6+\sqrt{5}i$. **B.** $-6+\sqrt{5}i$. **C.** $-6-\sqrt{5}i$. **D.** $6-\sqrt{5}i$.

Câu 32 Tập hợp điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$ thỏa điều kiện $|z+1+2i|=1$ nằm trên đường tròn có tâm là:

A. $I(1;2)$. **B.** $I(-1;2)$. **C.** $I(1;-2)$. **D.** $I(-1;-2)$.

Câu 33 Số phức $z=4-3i$ có mô đun bằng:

A. 25. **B.** 5. **C.** 7. **D.** $\sqrt{7}$.

Câu 34 Khi sản xuất vỏ lon sữa Ông Thọ hình trụ, các nhà sản xuất luôn đặt chỉ tiêu sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất, tức là nguyên liệu (sắt tây) được dùng là ít nhất. Hỏi khi đó tổng diện tích toàn phần của lon sữa là bao nhiêu, khi nhà sản xuất muốn thể tích của hộp là $V\ cm^3$.

A. $S_{tp} = 3\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$ **B.** $S_{tp} = 6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$ **C.** $S_{tp} = 3\sqrt{\frac{\pi V^2}{4}}$ **D.** $S_{tp} = 6\sqrt{\frac{\pi V^2}{4}}$

Câu 35 Tính thể tích của khối hình thu được sau khi quay nửa đường tròn tâm **O** đường kính AB quanh trục AB, biết $OA = 4$?

A. $256\pi(dvtt)$ **B.** $32\pi(dvtt)$ **C.** $64\pi\ (dvtt)$ **D.** $\frac{32}{3}\pi\ (dvtt)$

Câu 36 Số cạnh của hình mười hai mặt đều là:

A.12. **B.** 16. **C.** 20. **D.** 30.

Câu 37 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V. Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Khi đó thể tích chóp $S.A'B'C'D'$ bằng?

A. $\frac{V}{3}$. **B.** $\frac{V}{9}$. **C.** $\frac{V}{27}$. **D.** $\frac{V}{81}$.

Câu 38 Cho khối chóp $S.ABC$ có các cạnh đáy $AB = AC = 5a, BC = 6a$ và các mặt bên tạo với đáy một góc 60^0. Hãy tính thể tích V của khối chóp đó?

A. $V = 2a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = 6a^3\sqrt{3}$. **C.** $V = 12a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 18a^3\sqrt{3}$.

Câu 39 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích xung quanh của khối nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$.

A. $S_{xp} = \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{8}$. **B.** $S_{xp} = \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{2}$. **C.** $S_{xp} = \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{16}$. **D.** $S_{xp} = \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}$.

Câu 40 Cho ba điểm A, B, C cùng thuộc một mặt cầu và biết rằng $\angle ACB = 90^0$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. AB là một đường kính của mặt cầu đã cho.

B. Luôn luôn có một đường tròn thuộc mặt cầu ngoại tiếp tam giác ABC.

C. ABC là một tam giác vuông cân tại C.

D. AB là đường kính của một đường tròn lớn trên mặt cầu đã cho.

Câu 41 Trong một chiếc hộp hình trụ, người ta bỏ vào đấy ba quả banh ten-nis, biết rằng đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả banh và chiều cao của hình trụ bằng ba lần đường kính quả banh. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả banh, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số diện tích $\frac{S_1}{S_2}$ là:

A. 1. **B.** 1. **C.** 5. **D.** Là một số khác.

Câu 42. Thể tích hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh a bằng:

A. $\frac{\pi a^3}{9}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{18}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$.

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Cho ba mặt phẳng $(P): 2x+y+z+3=0$, $(Q): x-y-z-1=0$, $(R): y-z+2=0$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Không có điểm nào cùng thuộc ba mặt phẳng trên.

B. $(P)\perp(Q)$. **C.** $(Q)\perp(R)$. **D.** $(P)\perp(R)$.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{-2}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{-4}$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. d_1 và d_2 cắt nhau. **C.** d_1 và d_2 song song.

B. d_1 và d_2 chéo nhau. **D.** d_1 và d_2 trùng nhau.

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Cho $A(0;0;a), B(b;0;0), C(0;c;0)$ với $a,b,c \in R$ và $a.b.c \neq 0$. Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là:

A. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. **C.** $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=1$. **B.** $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}+\frac{z}{a}=1$. **D.** $\frac{x}{c}+\frac{y}{b}+\frac{z}{a}=1$.

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Cho hai mặt phẳng $(P): x+3my-z+2=0$ và $(Q): mx-y+z+1=0$. Tìm m để giao tuyến hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với mặt phẳng $(R): x-y-2z+5=0$?

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Hãy xác định tâm I của mặt cầu có phương trình: $2x^2+2y^2+2z^2+8x-4y+12z-100=0$.

A. $I(4;-2;6)$. **B.** $I(-4;2;-6)$. **C.** $I(2;-1;3)$. **D.** $I(-2;1;-3)$.

Câu 48. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Tính bán kính R của mặt cầu đi qua 4 điểm $A(1;0;0), B(0;-2;0), C(0;0;4)$ và gốc tọa độ O?

A. $R=\frac{\sqrt{21}}{2}$. **B.** $R=\frac{\sqrt{21}}{4}$. **C.** $R=\frac{\sqrt{21}}{6}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{21}}{8}$.

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho bốn điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$ và $D(2;2;-1)$. Mặt cầu đi qua 4 điểm A,B,C,D là:

A. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=\frac{21}{4}$. **C.** $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=\frac{21}{16}$.

B. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=\frac{21}{4}$. **D.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=\frac{21}{4}$.

Câu 50 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ và $d_2: \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$. Xét các khẳng định sau:

1. Đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

2. Đường thẳng d_1 và d_2 vuông góc với nhau.

3. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng nay bằng $\frac{\sqrt{386}}{3}$.

Hỏi có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định trên?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1 **Đáp án A.**

Ta có định lí:

"Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K.

A. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.

B. Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K."

Chúng ta nhận thấy rõ ở đây, chỉ có chiều suy ra và không có chiều ngược lại, vậy chúng ta có thể loại được ý B, C. Với ý A và D, soi vào định lý chúng ta có thể thấy được ý A đúng.

Vì sao ý D lại sai. Chúng ta cùng nhớ lại định lý mở rộng ở trang 7 SGK, và nhận thấy mệnh đề này còn thiếu rằng $f(x)$ tại hữu hạn điểm.

Câu 2 **Đáp án D.**

Nhận thấy đây là đồ thị hàm bậc ba nên ta có thể loại ngay đáp án B và C.

Để so sánh giữa ý A và D thì chúng ta cùng đến với bảng tổng quát các dạng đồ thị của hàm bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d(a \neq 0)$ (đã được đề cập ở trang 35 SGK cơ bản).

Nhìn vào bảng ta nhận thấy với ý D có hệ số $a = 1 > 0$ nên đúng dạng đồ thị ta chọn đáp án D. (Ngoài ra các em nên tìm hiểu bảng trang 38 SGK về hàm bậc 4 trùng phương, bảng trang 41 SGK cơ bản về hàm phân thức bậc nhất).

Câu 3 **Đáp án B.**

Ta tính đạo hàm của hàm số được $y' = -x^2 - 1$, nhận thấy phương trình $y' = 0$ vô nghiệm, nên đáp án đúng là B, không có cực trị.

Câu 4 **Đáp án B.**

Ta cùng đi phân tích từng mệnh đề một:

(1) : Ở mệnh đề này, nhiều quý độc giả sẽ có sai lầm như sau:

Vì $y' = \frac{-2}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in D$ nên hàm số nghịch biến trên D

Mệnh đề (1) nếu sửa lại đúng sẽ là "Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$."

(2): Cách giải thích rõ ràng về mặt toán học

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=1;\Rightarrow$ đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to3^-} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to3^+} y=+\infty;\Rightarrow$ đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy mệnh đề này là sai.

Tuy nhiên mình hay nhẩm nhanh bằng cách sau (chỉ là làm nhanh thôi)

Đối với hàm phân thức bậc nhất như thế này, ta nhận thấy phương trình mẫu số $\Leftrightarrow x=3\Rightarrow$ đây là TCĐ.

Còn tiệm cận ngang thì $y=$ (hệ số của **x** ở tử số) $\div$ (hệ số của **x** ở mẫu số). Ở ví dụ này thì $y=\frac{1}{1}=1$ chính là TCN.

(3) Đây là mệnh đề đúng. Hàm phân thức bậc nhất không có cực trị.

(4). Từ việc phân tích mệnh đề (2) ta suy ra được mệnh đề (4) này là mệnh đề đúng.

Vậy đáp án đúng của chúng ta là B. (3), (4).

Câu 5 **Đáp án C.**

Cách 1: Làm theo các bước thông thường: $y'=\frac{x^2+1-x.2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$. Ta thấy với $x\in(-1;1)$ thì $y'>0$. Vậy đáp án đúng là C.

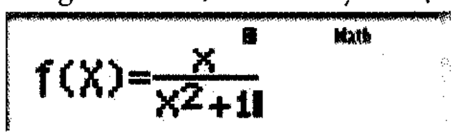
Cách 2: Dùng máy tính CASIO *fx*-570 *VN PLUS.*

Ta có thể nhập hàm vào máy tính, dùng công cụ

TABLE trong máy tính

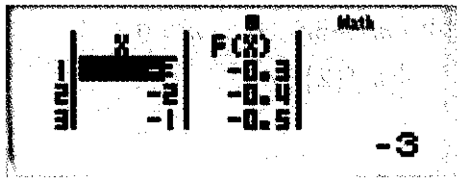
Bước 1: ấn nút MODE trên máy tính

Bước 2: Ấn 7 để chọn chức năng 7:TABLE, khi đó máy sẽ hiện f(x)= ta nhập hàm vào như sau:



Ấn 2 lần = và máy hiện START?, ta ấn -3 =, máy hiện END? Ta ấn 3 = . STEP? Ta giữ nguyên 1 và ấn =. (Lý giải vì sao chọn khoảng xét là -3 đến 3: vì ở đáp án là các khoảng $(-\infty,1);(-1,1);(1;+\infty)$ vì thế ta sẽ xét từ -3 đến 3 để nhận rõ được xem hàm số đồng biến nghịch biến trên khoảng nào?)

Bước 3: Sau khi kết thúc các bước trên máy sẽ hiện như sau:



Ở bên tay trái, cột X chính là các giá trị của x chạy từ -3 đến 3, ở tay phải cột F(x) chính là các giá trị của y tương ứng với X ở cột trái. Khi ấn nút (xuống) ta nhận thấy từ giá trị $X=-1$ đến $X=1$ là hàm F(x) có giá trị tăng dần, vậy ở khoảng $(-1;1)$ là hàm số đồng biến.

Câu 6 Đáp án A.

Nhìn qua đề bài thì ta có thể đánh giá rằng đây là một câu hỏi dễ ăn điểm, tuy nhiên nhiều độc giả dễ mắc sai lầm như sau:

1. Sai lầm khi nhầm lẫn các khái niệm "giá trị cực đại (cực đại), giá trị cực tiểu (cực tiểu)", "điểm cực đại, điểm cực tiểu" của hàm số. Ở đây chúng ta cùng nhắc lại những khái niệm này:

- Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của ***hàm số,*** $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là cực đại (cực tiểu) của hàm số. Điểm $M(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số.

Chúng ta nhận thấy nếu nhầm lẫn giữa các khái niệm điểm cực đại của hàm số, và cực đại của hàm số thì chắc hẳn quý độc giả đã sai khi nhầm lẫn giữa ý D, C với 2 ý còn lại. Vì ở ý D là điểm cực đại của hàm số chứ không phải cực đại.

2. Sai lầm khi phân biệt giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số :

Ở đây vì đây là hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a=1>0$ nên đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại tại $x=0$ (xem lại bảng dạng của đồ thị hàm trùng phương trang 38 SGK) Þgiá trị cực đại của hàm số là $y_{CD}=f(0)=2$. Vậy đáp án là A.

Câu 7 Đáp án D.

Ta có: $y=\dfrac{2x^2+(6-m)x+2}{mx+2} \Leftrightarrow mx(y+1)=2x^2+6x+2-2y\left(x\neq\dfrac{-2}{m}\right)$.

Khi đó tọa độ điểm cố định mà đồ thị hàm số đi qua là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x(y+1)=0 \\ 2x^2+6x+2-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right. \text{ suy ra có 3 điểm cố định.}$$

Câu 8 Đáp án B.

Đường thẳng (d) đi qua $A(0;2)$ có phương trình là: $y=mx+2$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{x-2}=mx+2(x\neq 2)$

$\Leftrightarrow f(x)=mx^2-2mx-5=0$ ta có $\Delta'=m^2+5m$. Để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh của đồ thị (C) thì: $\begin{cases} m\neq 0 \\ m^2+5m>0 \Leftrightarrow m>0 \\ m.f(2)<0 \end{cases}$.

Câu 9 Đáp án B.

- Cách 1: Có thể chọn m là 1 số thay vào giải phương trình để loại các đáp án sai.
- Cách 2: Giải theo tự luận

Hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx-2$ có TXĐ là: $D=R$.

$y' = 6x^2 - 6(m+1)x + 6m;\ \Delta' = 9(m-1)^2$. Khi đó phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm là:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 3(m-1) \\ x_2 = m \Rightarrow y_2 = (m-1)(-m^2+2m+2) \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm thì đồ thị không có điểm cực trị hoặc có 2 điểm cực trị có tung độ cùng dấu.

* Đồ thị (C_m) không có cực trị khi và chỉ khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

* Đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị với tung độ cùng dấu khi và chỉ khi:

$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ y_1.y_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 - 2m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1-\sqrt{3} < m < 1+\sqrt{3} \end{cases}$ vậy $1-\sqrt{3} < m < 1+\sqrt{3}$ thỏa.

Câu 10 **Đáp án C.**

Ta có: $y = \dfrac{-x^2+2x-5}{x-1} = -x+1-\dfrac{4}{x-1}$. Gọi $M(x_0;y_0) \in (C)$ suy ra $y_0 = -x_0 + 1 - \dfrac{4}{x_0-1}$.

Ta có: $x_0, y_0 \in Z \Rightarrow \dfrac{4}{x_0-1}$.

$$\left[\begin{array}{l} x_0 - 1 = \pm 1 \\ x_0 - 1 = \pm 2 \\ x_0 - 1 = \pm 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = -3 \\ x_0 = 5 \end{array}\right..$$

Vậy có 6 điểm có tọa độ nguyên.

Câu 11 **Đáp án D.**

Câu 12 **Đáp án C.**

Gọi n là số năm dân số nước ta tăng từ $88360000 \to 128965000$

Sau n năm dân số nước Việt Nam là: $88360000(1{,}01)^n$. Theo đề

$88360000(1{,}01)^n = 128965000 \Leftrightarrow n = log_{1{,}01}\left(\dfrac{128965000}{88360000}\right) \approx 38$ (năm).

Câu 13 **Đáp án C.**

$log_3 x + log_3(x+2) = 1$ điều kiện $x > 0$. Phương trình tương đương:

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

Câu 14 **Đáp án C.**

$y = (x^2 - 2x + 2)e^x \Rightarrow y' = (2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x = e^x x^2$.

Câu 15 **Đáp án A.**

$log_3(x-1)^2 - \dfrac{2}{3}log_3 x^3 > 0\ (1)$ điều kiện $\begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow \frac{|x-1|}{x} > 1 \Leftrightarrow |x-1| > x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 > x \forall x > 1 \\ 1 > 2x \forall x \in (0;1) \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$.

Câu 16 **Đáp án A.**

Ta có: $\begin{cases} 3a = log_3 5 \\ 3b = log_2 7 \Rightarrow log_2 5 = 3ac \\ c = log_2 3 \end{cases}$ khi đó $log_6 35 = \frac{log_2 35}{log_2 6} = \frac{3(b+ac)}{1+c}$.

Câu 17 **Đáp án D.**

$y = e^{x^2-2x+2} \Rightarrow y' = 2e^2(x-1)e^{x^2-2x}$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2e^2(x-1)e^{x^2-2x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 18 **Đáp án C.**

$y = log_{a^2-2a+1} x$ điều kiện $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 0 \\ a \neq 2 \end{cases}$ và $x > 0$.

$y = \frac{1}{2} log_{|a-1|} x \Rightarrow y' = \frac{1}{2} . \frac{1}{x ln|a-1|}$. Theo đề suy ra $y' > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{ln|a-1|} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 2 \end{array}\right.$.

Câu 19 **Đáp án C.**

Hàm số $y = log_2\left(log\frac{1+3x}{1-3x}\right)$ có nghĩa khi và chỉ khi:

$\begin{cases} \frac{1+3x}{1-3x} > 0 \\ log\frac{1+3x}{1-3x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1+3x}{1-3x} > 1 \Leftrightarrow \frac{6x}{1-3x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{3}$.

Câu 20 **Đáp án D.**

Điều kiện $x > 0$. Phương trình tương đương: $-log_2^3 x + 3log_2^2 x - 2log_2 x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} log_2 x = 0 \\ log_2 x = 1 \\ log_2 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$. Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 21 **Đáp án C.**

1, 2 là các khẳng định đúng, các em tự chứng minh. Đối với ý 3 khi thế $m=1,5$ thì

$VT>2$ (theo BĐT CAUCHY) còn $VP<2$ suy ra phương trình đã cho vô nghiệm suy ra khẳng định 3 sai.

Câu 22 **Đáp án C.**

$v(t)=3ln(t+1)+6 \Rightarrow v(10)=3ln11+6 \simeq 13,2$ (m/s).

Câu 23 **Đáp án B.**

Câu 24 **Đáp án C.**

$$\int_1^e \frac{lnx}{x}dx=\int_1^e lnx\,d(lnx)=\frac{1}{2}(lnx)^2\Big|_1^e=\frac{1}{2}$$

Câu 25 **Đáp án B.**

Ta có: $H(t)=\int sint^2dt \Rightarrow H'(t)=sint^2$

Khi đó: $F'(x)=\left(H(\sqrt{x})-H(1)\right)'=\dfrac{H'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}=\dfrac{sinx}{2\sqrt{x}}$.

Câu 26 **Đáp án A.**

Ta có: $\int f(x)dx=-\int\dfrac{d(3cosx+2sinx)}{3cosx+2sinx}dx=-ln(3cosx+2sinx)+C$.

Câu 27 **Đáp án A.**

Ta có $f(1)=2 \Leftrightarrow asin\pi+b=2 \Leftrightarrow b=2$.

$$\int_0^1 f(x)dx=4 \Leftrightarrow \int_0^1(asin\pi x+2)dx=4 \Leftrightarrow \left(\frac{-acos\pi x}{\pi}+2x\right)\Bigg|_0^1=4 \Leftrightarrow a=\pi.$$

Câu 28 **Đáp án B.**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{x^2}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-16(l) \\ x^2=8\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm2\sqrt{2}$. Khi đó $S=\displaystyle\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left|\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{4\sqrt{2}}\right|=2\pi+\frac{4}{3}$.

Câu 29 **Đáp án B.**

$z=(1+2i)(-2+i) \Leftrightarrow z=-4-3i$ suy ra $\overline{z}=-4+3i$.

Vậy phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$ lần lượt là: $-4;3$.

Câu 30 **Đáp án A.**

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in R)$ suy ra $\overline{z}=x-yi$. Khi đó ta được

$4x-2yi=2\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{3(x^2+y^2)}i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=2x \\ \sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, y\le 0 \\ 3\left(x^2+y^2\right)=4y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, y\le 0 \\ 3x^2=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y=-\sqrt{3}x.$$

Câu 31 **Đáp án D.**

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in R)$ suy ra $\overline{z}=x-yi$. Khi đó ta được

$$\begin{cases} (x+yi)(x-yi)=1 \\ \left|(x+yi)^2+2(x-yi)-1\right|=\sqrt{\dfrac{8}{27}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1-x^2 \\ 4x^3-x^2-2x+\dfrac{52}{27}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y^2=\dfrac{5}{9} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{13}{12} \\ y^2=-\dfrac{25}{144} \end{cases} (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \end{array}\right. \text{ suy ra } z_1=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}, z_2=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Vậy: $3z_1+6z_2=6-\sqrt{5}i$.

Câu 32 **Đáp án B.**

$z=x+yi\ (x,y\in R)$ suy ra $\overline{z}=x-yi$. Khi đó ta được $\left|(x+1)+(2-y)i\right|=1 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=1$.

Vậy tập hợp số phức $\overline{z}$ nằm trên đường tròn có tâm $I(-1;2)$.

Câu 33 **Đáp án B.**

$|z|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

Câu 34 **Đáp án B.**

Đây là bài toán vừa kết hợp yếu tố hình học và yếu tố đại số. Yếu tố hình học ở đây là các công thức tính diện tích toàn phần, diện tích xung quanh, thể tích của hình trụ. Còn yếu tố đại số ở đây là tìm GTNN của S_{tp}.

Ta có yếu tố đề bài

$$V=B.h=\pi R^2.h \Rightarrow h=\frac{V}{\pi R^2}(*)$$

$$S_{tp}=S_{xq}+2S_{day}=2\pi R^2+2\pi R.h=2\left(\pi R^2+\pi R.\frac{V}{\pi R^2}\right)=2\left(\pi R^2+\frac{V}{R}\right)$$

Đến đây ta có hai hướng giải quyết, đó là tìm đạo hàm rồi xét $y'=0$ rồi vẽ BBT tìm GTNN. Tuy nhiên ở đây tôi giới thiệu đến quý độc giả cách làm nhanh bằng BĐT Cauchy.

Ta nhận thấy ở đây chỉ có một biến R và bậc của R ở hạng tử thứ nhất là bậc 2, nhưng bậc của R ở hạng tử thứ 2 chỉ là 1. Vậy làm thế nào để khi áp dụng BĐT Cauchy triệt tiêu được biến R. Ta sẽ tìm cách tách $\frac{V}{R}$ thành 2 hạng tử bằng nhau để khi nhân vào triệt tiêu được R^2 ban đầu. Khi đó ta có như sau:

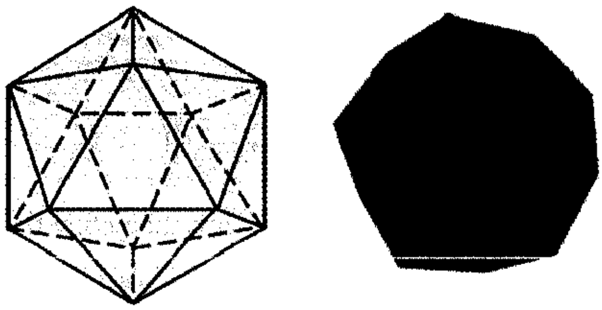
$$S_{tp} = 2\left(\pi R^2 + \frac{V}{2R} + \frac{V}{2R}\right) \geq 2.3.\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}} \Rightarrow$$

Câu 35 **Đáp án D.**

Khi quay nửa đường tròn quanh trục AB ta được khối cầu tâm O, bán kính $\frac{AB}{2} = 2$. Khi đó:
$V_{cau} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32}{3}\pi$ (đvtt)

Câu 36 **Đáp án D.**

Hình 12 mặt đều



Câu 37 **Đáp án D.**

Vì $(A'B'C'D')//(ABCD) \Rightarrow A'B'//AB, B'C'//BC, C'D'//CD$

Mà: $\frac{SA'}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{3}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là $V_{S.ABC}, V_{S.ACD}$.

Ta có: $V_1 + V_2 = V$

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}. = \frac{1}{27} \Leftrightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{V_1}{27}.$$

$$\frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SD'}{SD}. = \frac{1}{27} \Leftrightarrow V_{S.A'C'D'} = \frac{V_2}{27}$$

Vậy $V_{S.A'BC'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'} = \frac{V_1 + V_2}{27} = \frac{V}{27}$.

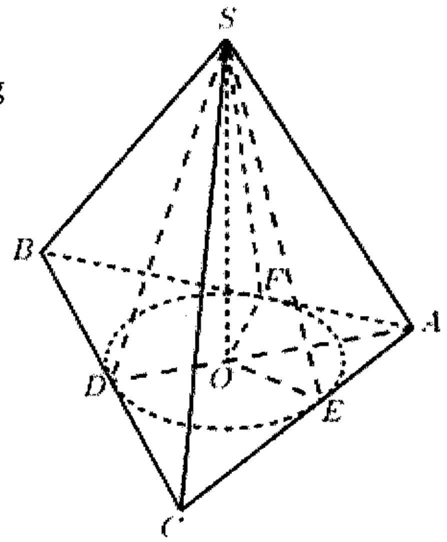
Vậy $V_{S.A'BC'D'} = \frac{V}{27}$.

Câu 38 **Đáp án B.**

Kẻ $SO \perp (ABC)$ và OD, OE, OF lần lượt vuông góc với BC, AC, AB. Theo định lí ba đường vuông góc ta có $SD \perp BC, SE \perp AC, SF \perp AB$ (như hình vẽ).

Từ đó suy ra $\angle SDO = \angle SEO = \angle SFO = 60^0$. Do đó các tam giác vuông SDO, SEO, SFO bằng nhau. Từ đó suy ra $OD = OE = OF$. Vậy O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Vì tam giác ABC cân tại A nên OA vừa là đường phân giác, vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến. Suy ra A, O, D thẳng hàng và D là trung điểm của BC.

Suy ra $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{16a^2} = 4a$.



Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp của nó.

Khi đó $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}6a.4a = 12a^2 = pr = 8ar$.

Suy ra $r = \frac{3}{2}a$.

Do đó $SO = OD.tan60^0 = \frac{3\sqrt{3}a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = 6\sqrt{3}a^3$.

Câu 39 **Đáp án D.**

Khối nón có chiều cao là a và có bán kính đáy là $r = \frac{a}{2}$.

Do đó diện tích xung quanh của khối nón được tính theo công thức:

$S_{xq} = \pi rl$ với $l = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $S_{xq} = \pi.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}$

Câu 40 **Đáp án B.**

Câu 41 **Đáp án A.**

Gọi S, r lần lượt là diện tích xung quanh của một quả banh và bán kính của quả banh. Khi đó $S = 4\pi r^2$, suy ra $S_1 = 12\pi r^2$.

Vì đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả banh và chiều cao của hình trụ bằng ba lần đường kính quả banh nên bán kính đáy hình trụ $R = r$, và chiều cao $l = 6r$.

Suy ra $S_2 = 2\pi Rl = 12\pi r^2$. Vậy $\frac{S_1}{S_2} = 1$.

Câu 42 **Đáp án D.**

Đáy là tam giác đều nên bán kính r ngoại tiếp đường tròn là $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chiều cao của khối nón là $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy thể tích cần tìm là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$.

Câu 43 **Đáp án A.**

Các em kiểm chứng B, C, D bằng cách lấy tích vô hướng các vec-tơ pháp tuyến. Suy ra các đáp án B, C, D đều đúng.

Đối với đáp án A các em giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y+z+3=0 \\ x-y-z-1=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$.

Ở đây hệ có nghiệm $\begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{-11}{6} \\ z=\dfrac{1}{6} \end{cases}$ nên khẳng định A sai.

Câu 44 **Đáp án D.**

Đường thẳng d_1, d_2 có vec-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=(1;-1;2)$, $\vec{u}_2=(-2;2;-4)$. Ta có $\dfrac{1}{-2}=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{2}{-4}$ nên d_1, d_2 song song hoặc trùng nhau. Chọn $M(0;1;1)\in d_1$, lúc này M thỏa phương trình của d_2, suy ra $M(0;1;1)\in d_2$. Vậy $d_1\equiv d_2$.

Câu 45 **Đáp án B.**

Phương trình chính tắc của mặt phẳng đi qua 3 điểm A,B,C là $\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{c}+\dfrac{z}{a}=1$.

Câu 46 **Đáp án C.**

Các mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_p}=(1;3m;-1)$, $\overrightarrow{n_Q}=(m;-1;1)$, $\overrightarrow{n_R}=(1;-1;-2)$, khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) có vec-tơ chỉ phương là $\vec{u}=\overrightarrow{n_p}\wedge\overrightarrow{n_Q}=(3m-1;-m-1;-1-3m^2)$. Để giao tuyến hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với mặt phẳng (R) thì $\vec{u},\overrightarrow{n_R}$ cùng phương, suy ra $\dfrac{3m-1}{1}=\dfrac{-m-1}{-1}=\dfrac{-1-3m^2}{-2}\Leftrightarrow m=1$.

Câu 47 **Đáp án:.**

Mặt cầu có phương trình là $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z-50=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=8^2$, suy ra tâm của mặt cầu là $I(-2;1;-3)$.

Câu 48 **Đáp án A.**

Phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A,B,C,O có dạng

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Vì $A,B,C,O\in(S)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -2a+d=-1 \\ 4b+d=-4 \\ -8c+d=-16 \\ d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,5 \\ b=-1 \\ c=2 \\ d=0 \end{cases},$$

Suy ra $(S): x^2+y^2+z^2-x+2y-4z=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=\frac{21}{4}$

Vậy $R=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Câu 49 **Đáp án A.**

Các em giải tương tự Câu 48.

Câu 50 **Đáp án B.**

Hướng dẫn giải: Đường thẳng d_1, d_2 có véc-tơ chỉ phương lần lượt là:
$\overrightarrow{u_1}=(2;1;-2), \overrightarrow{u_2}=(-4;-2;4)$. Chọn $M(1;-3;4)\in d_1, N(-2;1;-1)\in d_2$. Ta có:
$\begin{cases}\overrightarrow{u_2}=-2\overrightarrow{u_1}\\ M\notin d_2\end{cases} \Rightarrow d_1 // d_2$. Suy ra khẳng định 1, 2 sai.

Khoảng cách giữa 2 đường thẳng này là: $d(d_1,d_2)=\frac{\left|\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{u_1}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}=\frac{\sqrt{386}}{3}$ suy ra 3 đúng.

Vậy trong các khẳng định trên có 1 khẳng định đúng.

BỘ GIÁO DỤC

Đề số 5

ĐỀ MINH HỌA KÌ THI THPT QUỐC GIA 2017

MÔN: TOÁN (50 câu trắc nghiệm)

Thời gian làm bài: 90 phút

Họ tên:...

Số báo danh: ....

Câu 1 Cho hàm số: $y = x^3 - bx^2 - cx + 2016$ với $b,c \in R$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số luôn có 2 cực trị $\forall c \in R$.

B. Hàm số luôn có 2 cực trị $\forall c \in (0;+\infty)$.

C. Hàm số luôn có 2 cực trị $\forall c \in (0;-\infty)$.

D. Hàm số luôn có 2 cực trị $\forall c \in Z$.

Câu 2 Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 3 Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2016$. Trong các giá trị sau giá trị nào là giá trị cực trị của hàm số?

A. 2. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** –1.

Câu 4 Cho hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$?

A. $-2 < m \le -1$. **B.** $-2 \le m < -1$. **C.** $-1,5 < m \le -1$. **D.** $-2 \le m$.

Câu 5 Gọi M,N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x + \sqrt{4-x^2}$. Giá trị của biểu thức $M + 2N$ là:

A. $2\sqrt{2} - 2$. **B.** $2\sqrt{2} - 4$. **C.** $2\sqrt{2} + 2$. **D.** $2\sqrt{2} + 4$.

Câu 6 Một trang chữ của một tạp chí cần diện tích là $384cm^2$. Lề trên, lề dưới là $3cm$; lề phải, lề trái là 2cm. Khi đó chiều ngang và chiều dọc tối ưu của trang giấy lần lượt là:

A. $24cm, 25cm$. **B.** $15cm, 40cm$. **C.** $20cm, 30cm$. **D.** $22,\overline{2}cm, 27cm$.

Câu 7 Cho hàm số $y = |x|$ và các mệnh đề sau:

A. Hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$ nên không đạt cực tiểu tại $x = 0$

B. Hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng vẫn đạt cực tiểu tại $x = 0$

C. Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ nên đạt cực tiểu tại $x = 0$

D. Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng không đạt cực tiểu tại $x = 0$

Câu 8 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ trên $[-4;4]$

A. $\underset{[-4;4]}{Min} f(x) = -21$ **B.** $\underset{[-4;4]}{Min} f(x) = -14$ **C.** $\underset{[-4;4]}{Min} f(x) = 11$ **D.** $\underset{[-4;4]}{Min} f(x) = -70$

Câu 9 Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 - 3mx}{x - 3}$ (C) cắt đường thẳng $y = mx - 7$ (d) tại 2 điểm phân biệt?

A. $m > -6$ **B.** $m > -6$ và $m \neq 1$ **C.** $m < -6$ **D.** $m \geq -6$ và $m \neq 1$

Câu 10 Hỏi hàm số $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ **B.** $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ **C.** $(-\infty; 1)$ **D.** $(-\infty; +\infty)$

Câu 11 Đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 2x}$ có mấy tiệm cận?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Câu 12 Giải phương trình $log_5(2x - 3) = 5$

A. $x = 3128$ **B.** $x = 1564$ **C.** $x = 4$ **D.** $x = 2$

Câu 13 Giải bất phương trình: $log(2x^2 - 4x) > 1$

A. $x > \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$ hoặc $x < \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$ **B.** $x \in \left(\frac{2 - \sqrt{6}}{2}; \frac{2 + \sqrt{6}}{2}\right)$

C. $x < \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$ **D.** $x > \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$

Câu 14 Tìm đạo hàm của hàm số $y = log(2x^2)$

A. $y' = \frac{2ln10}{x}$ **B.** $y' = \frac{2}{x.ln10}$ **C.** $y' = \frac{1}{2x^2.ln10}$ **D.** $\frac{ln10}{2x^2}$

Câu 15 Tập xác định của hàm số $y = log\frac{x - 3}{x - 1}$ là:

A. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ **B.** $(3; +\infty)$ **C.** $(1; 3)$ **D.** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Câu 16 Khẳng định nào sau đây là luôn luôn đúng với mọi a, b dương phân biệt khác 1?

A. $b = a^{logb}$ **B.** $a = b^{lna}$ **C.** $log_a b = log_b a$ **D.** $a^{logb} = b^{loga}$

Câu 17 Nếu $log_2 6 = a$ và $log_2 7 = b$ thì $log_3 7$ bằng bao nhiêu?

A. $log_3 7 = \frac{b}{a - 1}$ **B.** $log_3 7 = \frac{a}{b - 1}$ **C.** $log_3 7 = \frac{b}{1 - a}$ **D.** $log_3 7 = \frac{a}{1 - b}$

Câu 18 Cho hàm số $f(x) = 3^x.6^{lnx}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow xln3 + lnx.ln2 < 0$ **B.** $f(x) < 1 \Leftrightarrow xln3 + lnx.ln2 < 0$

C. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x + lnx.log_3 6 > 0$ **D.** $f(x) > 1 \Leftrightarrow x + lnx.log_3 6 > 0$

Câu 19 Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$?

A. $y'=\dfrac{(x+1)^2e^x}{(x^2+1)^2}$

B. $y'=\dfrac{e^x\left(lnx\left(x^2+1\right)+2x\right)+1}{\left(x^2+1\right)}$

C. $y'=\dfrac{(x-1)^2e^x}{(x^2+1)^2}$

D. $y'=\dfrac{e^x\left(lnx\left(x^2+1\right)-2x\right)+1}{\left(x^2+1\right)}$

Câu 20 Tính đạo hàm của hàm số $y=x.2^x$

A. $y'=2^x(1+xln2)$ B. $y'=2^x(x+ln2)$ C. $y'=2^x.ln2$ D. $y'=2^x.(x+1)$

Câu 21 Ông A cần thanh toán các khoản nợ sau:

- 10.000.000 đồng thanh toán sau 2 năm (khoản nợ 1).
- 20.000.000 đồng thanh toán sau 5 năm (khoản nợ 2).
- 50.000.000 đồng thanh toán sau 7 năm (khoản nợ 3).

Người ta đồng ý cho ông thanh toán bằng một khoản nợ duy nhất (khoản nợ 4) 99.518.740 đồng sau n năm tính từ lúc này, khoản nợ 4 có tiền nợ ban đầu bằng tổng tiền nợ ban đầu của ba khoảng nợ 1, 2, 3. Biết mức lãi kép là 4,5% năm. Giá trị n gần với đáp án nào sau đây nhất:

A. 10 (năm) B. 11 (năm) C. 9 (năm) D. 12 (năm)

Câu 22 Nếu $F(x)=\int\dfrac{dx}{xlnx}$ thì:

A. $F(x)=lnx+C$ B. $F(x)=ln|lnx|+C$ C. $F(x)=-(lnx)^2+C$ D. $F(x)=lg(lnx)+C$

Câu 23 Nếu $F(x)=\int\dfrac{2x+3}{x^2+5x+6}dx$ thì:

A. $F(x)=ln\left|\dfrac{(x+3)^3}{x+2}\right|+C$

B. $F(x)=ln\dfrac{3(x+2)}{x+3}+C$

C. $F(x)=ln\left|x^2+5x+6\right|+C$

D. $F(x)=3ln\left|\dfrac{x+3}{x+2}\right|+C$

Câu 24 Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan^3xdx$ là:

A. $\dfrac{1}{2}(1-ln2)$ B. $\dfrac{ln2}{2}$ C. $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1

Câu 25 Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{sin2xdx}{\sqrt{7-4cos2x}}$ là:

A. -4 B. $\dfrac{1}{4}(3-\sqrt{3})$ C. $\dfrac{1}{4}(4-\sqrt{3})$ D. $\dfrac{8}{3}$

Câu 26 Giá trị của tích phân $\int_1^{e}x^x(1+lnx)dx$ là:

A. e^e-1 B. $\dfrac{e^2-1}{2}$ C. $\dfrac{e^e}{2}$ D. $\dfrac{e^e\left(e^2-1\right)}{2}$

Câu 27 Diện tích của hình (H) giới hạn bởi đường thẳng $y = x + sin^2 x, y = x,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$ là:

A. $\frac{\pi}{4}$ **B.** $\frac{3\pi}{2}$ **C.** π **D.** $\frac{\pi}{2}$

Câu 28 Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \frac{5}{x}, y = 0, x = 1, x = 5$ quay quanh trục Ox tạo thành là:

A. 9π **B.** 20π **C.** $\frac{2\pi}{3}$ **D.** 18π

Câu 29 Tìm mô đun của số phức: $z = 2 + 3i - \frac{1+5i}{3-i}$

A. $|z| = \frac{\sqrt{170}}{3}$ **B.** $|z| = \frac{\sqrt{170}}{5}$ **C.** $|z| = \frac{\sqrt{171}}{5}$ **D.** $|z| = \frac{\sqrt{170}}{4}$

Câu 30 Tìm phần thực của số phức $\omega = z^3 - \frac{2}{z} + z.\bar{z}$ biết $z = 1 - 2i$.

A. $\frac{-31}{5}$ **B.** $\frac{-32}{5}$ **C.** $\frac{-33}{5}$ **D.** $\frac{32}{5}$

Câu 31 Phương trình $z^2 + 2z + 26 = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2. Khẳng định nào sau đây sai:

A. $z_1.z_2 = 26$ **B.** z_1 là số phức liên hợp của z_2

C. $z_1 + z_2 = -2$ **D.** $|z_1| > |z_2|$

Câu 32 Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào không đúng?

A. Hình tạo bởi một số hữu hạn đa giác được gọi là hình đa diện

B. Khối đa diện bao gồm không gian được giới hạn bởi hình đa diện và cả hình đa diện đó

C. Mỗi cạnh của một đa giá trong hình đa diện là cạnh chung của đúng hai đa giác

D. Hai đa giác bất kì trong hình đa diện hoặc không có điểm chung, hoặc là có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

Câu 33 Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD . Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp S.A'B'C'D' và S.ABCD bằng?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Câu 34 Cho các số phức $z_2 = 1 - 2i$ và $z_2 = 1 - 2i$. Hỏi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình phức nào sau đây:

A. $z^2 + 2z + 5 = 0$. **B.** $z^2 - 2z + 5 = 0$. **C.** $z^2 - 2z + 5 = 0$. **D.** $z^2 - 2z + 5 = 0$.

Câu 35 Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = BC = a$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V = \frac{a^3}{3}$.

Câu 36 Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại C có đường cao kẻ từ C là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CA = a$ Khi đó đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC qua trục CA là?

A. $l = a$ **B.** $l = \sqrt{2}a$ **C.** $l = \sqrt{3}a$ **D.** $l = 2a$

Câu 37 Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật $AB = a,\ AD = 2a$ và $SA = 2a$ vuông góc với đáy. Tính thể tích của hình chóp S.ABCD ?

A. $\frac{4}{3}a^3(dvtt)$ **B.** $4a^3(dvtt)$ **C.** $\frac{2}{3}a^3(dvtt)$ **D.** $2a^3(dvtt)$

Câu 38 Một hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu có ba kích thước là a,b,c . Khi đó bán kính r của mặt cầu bằng?

A. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ **B.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ **C.** $\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$ **D.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3}$

Câu 39 Một hình trụ có 2 đáy là hình tròn nội tiếp một hình vuông cạnh A. Tính thể tích của khối trụ đó, biết chiều cao của khối trụ là a?

A. $\frac{1}{2}a^3\pi$ **B.** $\frac{1}{4}a^3\pi$ **C.** $\frac{1}{3}a^3\pi$ **D.** $a^3\pi$

Câu 40 Khái niệm nào sau đây đúng với khối chóp?

A. là hình có đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.

B. là phần không gian được giới hạn bởi hình chóp và cả hình chóp đó.

C. là phần không gian được giới hạn bởi hình chóp.

D. là khối đa diện có hình dạng là hình chóp.

Câu 41 Cho mặt phẳng $(P): 5x+6y+2=0$. Tìm vecto pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(5,6,0)$ **B.** $\vec{n}=(-6,5,0)$ **C.** $\vec{n}=(5,6,2)$ **D.** $\vec{n}=(-5,6,2)$

Câu 42 Cho 3 điểm $A(6;9;1),\ B(-2;1;3),\ C(1;1;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC)

A. $(ABC): -6x+5y+2z-11=0$ **B.** $(ABC): 3x-5y-2z+11=0$

C. $(ABC): 6x-5y-2z+11=0$ **D.** Không viết được do không đủ dữ kiện

Câu 43 Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-6)^2=25$. Tìm tâm I, bán kính R của mặt cầu (S)

A. $I(1;2;6);\ R=5$ **B.** $I(-1;-2;-6);\ R=5$

C. $I(1;2;6);\ R=25$ **D.** $I(-1;-2;-6);\ R=25$

Câu 44 Trong không gian cho điểm $A(2;6;9)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z+9=0$. Tính $x=\frac{2}{3}d\left(A;(P)\right)$

A. $x=\frac{25\sqrt{14}}{7}$ **B.** $x=\frac{50\sqrt{14}}{21}$ **C.** $x=\frac{75\sqrt{14}}{14}$ **D.** $x=50$

Câu 45 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua Δ và cách $A(1;1;3)$ một khoảng lớn nhất.

A. $(P): -15x-12y+21z-28=0$ **B.** $(P): +15x+12y+21z-28=0$

C. $(P): 15x+12y-21z-28=0$ **D.** Không có mặt phẳng nào thỏa mãn

Câu 46 Cho mặt cầu (S) tâm $I(1;1;3)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x+2y+2z+9=0$. Viết phương trình mặt cầu (S)?

A. $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z-36=0$ **B.** $(S): x^2+y^2+z^2+2x+2y+6z-25=0$

C. $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z-25=0$ **D.** $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z-18=0$

Câu 47 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;1)$. Tìm tọa độ hình chiếu của M lên đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$

A. $(1;0;2)$ **B.** $(-1;1;2)$ **C.** $(0;2;1)$ **D.** $(1;1;2)$

Câu 48 Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho 3 điểm $A(0;6;0)$; $B(0;0;8)$ và $C(4;0;8)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. BC vuông góc với CA. **B.** BC vuông góc với mặt phẳng (OAB)

C. AB vuông góc với AC **D.** Câu A và câu B đều đúng.

Câu 49 Cho $m\neq 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{m}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{m}$ cắt đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=t+5 \\ y=2t+3 \\ z=-t+3 \end{cases}$ Giá trị m là:

A. Một số nguyên dương **B.** Một số nguyên âm

C. Một số hữu tỉ dương **D.** Một số hữu tỉ âm

Câu 50 Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $S(1;2;-1)$ và tam giác ABC có diện tích bằng 6 nằm trên mặt phẳng $(P): x-2y+z+2=0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$?

A. $V=2\sqrt{6}$ **B.** $V=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ **C.** $V=\sqrt{6}$ **D.** $V=4$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1 Cho hàm số: $y=x^3-bx^2-cx+2016$ với $b,c\in R$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số luôn có 2 cực trị $\forall c\in R$. **B.** Hàm số luôn có 2 cực trị $\forall c\in(0;+\infty)$.

C. Hàm số luôn có 2 cực trị $\forall c\in(0;-\infty)$. **D.** Hàm số luôn có 2 cực trị $\forall c\in Z$.

Đáp án B

$y=x^3-bx^2-cx+2016$ có tập xác định là: $D=R$.

Suy ra: $y'=3x^2-2bx-c$; $\Delta'=b^2+3c$.

Đối với các trường hợp ở Đáp án A, C, D, chọn $c=-10, b=1$, khi đó $\Delta'<0$, suy ra phương trình $y'=0$ vô nghiệm, suy ra hàm số không có cực trị $\Rightarrow$ loại A, C, D.

Câu 2 Đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Đáp án D

$y=\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}$ TXĐ: $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-2$ suy ra đường thẳng $y=-2$ là TCN của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=2$ suy ra đường thẳng $y=2$ là TCN của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to1^+} y=-\infty$ suy ra đường thẳng $x=1$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-1^-} y=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=-1$ là TCĐ của đồ thị hàm sô.

Vậy đồ thị của hàm số đã cho có tổng cộng 4 đường tiệm cận.

Câu 3 Cho hàm số $y=x^3-3x+2016$. Trong các giá trị sau giá trị nào là giá trị cực trị của hàm số?

A. 2. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** -1.

Đáp án B.

$y=x^3-3x+2016$ có $y'=3x^2-3$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Các giá trị cực trị là: $y(1)=2014$ và $y(-1)=2018$. Trong các đáp án trên chỉ có 1 **Đáp án B** thỏa.

Câu 4 Cho hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$?

A. $-2<m\le-1$. **B.** $-2\le m<-1$. **C.** $-1,5<m\le-1$. **D.** $-2\le m$.

Đáp án A

Hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ có TXĐ: $D=R\setminus\{-m\}$.

$y'=\frac{m^2-4}{(x+m)^2}$ hàm số nghịch biến khi $y'<0\Leftrightarrow m^2-4<0\Leftrightarrow-2<m<2$. Khi đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-m)$ và $(-m;+\infty)$. Để hàm số nghịc biến trên khoảng $(-\infty;1)$ thì $1\le-m\Leftrightarrow m\le-1$. Vậy $-2<m\le-1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 5 Gọi M,N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=x+\sqrt{4-x^2}$. Giá trị của biểu thức $M+2N$ là:

A. $2\sqrt2-2$. **B.** $2\sqrt2-4$. **C.** $2\sqrt2+2$. **D.** $2\sqrt2+4$.

Đáp án B

Hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$ có TXĐ là: $D=[-2;2]$.

$y'=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0\Leftrightarrow x=\sqrt2$. Khi đó:

$M=\underset{x\in[-2;2]}{Max}\,y=y(\sqrt2)=2\sqrt2$; $N=\underset{x\in[-2;2]}{Min}\,y=y(-2)=-2$ suy ra $M+2N=2\sqrt2-4$.

Câu 6 Một trang chữ của một tạp chí cần diện tích là $384cm^2$. Lề trên, lề dưới là $3cm$; lề phải, lề trái là $2cm$. Khi đó chiều ngang và chiều dọc tối ưu của trang giấy lần lượt là:

A. $24cm, 25cm$. **B.** $15cm, 40cm$. **C.** $20cm, 30cm$. **D.** $22,\bar{2}cm, 27cm$.

Đáp án C

Gọi $a,b(cm)(a>0,b>0)$ là độ dài chìu dọc và chìu ngang của trang chữ suy ra kích thước trang giấy là $a+6,b+4$.

Ta có: $a.b=384 \Rightarrow b=\frac{384}{a}(1)$

Diện tích trang sách là: $S=(a+6)(b+4) \Leftrightarrow S=4a+\frac{2304}{a}+408$.

Theo bất đẳng thức CAUCHY ta có: $\Leftrightarrow S \geq 2\sqrt{4a.\frac{2304}{a}}+408=600$.

Suy ra $MinS=600 \Leftrightarrow 4a=\frac{2304}{a} \Leftrightarrow a=24$, suy ra chiều dọc và chiều ngang tối ưu là: $30cm,20cm$.

Câu 7 Cho hàm số $y=|x|$ và các khẳng định sau. Tìm khẳng định đúng:

A. Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ nên không đạt cực tiểu tại $x=0$

B. Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ nhưng vẫn đạt cực tiểu tại $x=0$

C. Hàm số có đạo hàm tại $x=0$ nên đạt cực tiểu tại $x=0$

D. Hàm số có đạo hàm tại $x=0$ nhưng không đạt cực tiểu tại $x=0$

Đáp án B.

Ta có $y'=\sqrt{x^2}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2}} \Rightarrow$ hàm số không có đạo hàm tại $x=0$

Ta có thể loại ngay 2 đáp án sau vì hàm số này không có đạo hàm tại $x=0$.

Tuy nhiên ta thấy hàm số vẫn đạt cực tiểu tại $x=0$. Nên **Đáp án B** đúng.

Câu 8 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+6$ trên $[-4;4]$

A. $\underset{[-4;4]}{Min} f(x)=-21$ **B.** $\underset{[-4;4]}{Min} f(x)=-14$ **C.** $\underset{[-4;4]}{Min} f(x)=11$ **D.** $\underset{[-4;4]}{Min} f(x)=-70$

Đáp án D.

Đây là một câu hỏi dễ lấy điểm. Để tìm được GTNN của hàm số trên đoạn $[-4;4]$ ta giải phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$. Ta lần lượt so sánh $f(-4), f(4), f(-1), f(3)$ thì thấy $f(-4)=-70$ là nhỏ nhất.

Câu 9 Tìm m để hàm số $y=\frac{x^2-3mx}{x-3}$ (C) cắt đường thẳng $y=mx-7$ (d) tại 2 điểm phân biệt?

A. $m>-6$ **B.** $m>-6$ và $m\neq 1$ **C.** $m<-6$ **D.** $m\geq -6$ và $m\neq 1$

Đáp án B.

Cách giải nhanh bằng MTCT.

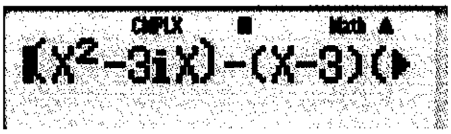
Nhận xét $x\neq 3$ vậy phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị phải có 2 nghiệm phân biệt khác 3.

Phương trình $\Leftrightarrow x^2-3mx=(mx-7)(x-3)$

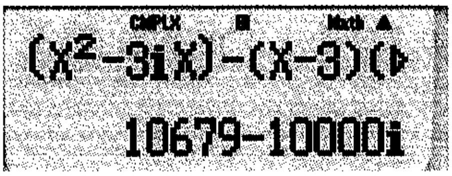
Dùng máy tính ấn nút $\boxed{\text{MODE}}$ chọn 2: CMPLX

(định dạng số phức)

Nhập vào máy tính như sau: $\left(X^2-3iX\right)-\left(X-3\right)\left(?-7\right)$



Ấn CALC và gán từ đó màn hình hiện kết quả như sau



$10679 = 1\ 06\ 79 = x^2+6x+x-21 = x^2+7x-21$

$10000 = 1\ 00\ 00 = x^2$

Vậy phương trình $\Leftrightarrow x^2+7x-21-mx^2=0 \Leftrightarrow \left(1-m\right)x^2+7x-21=0$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác 3 thì

$\begin{cases} f\left(3\right)\neq 0 \\ 7^2-4\left(1-m\right).\left(-21\right)>0 \end{cases}$. Vế đầu của hệ ta không cần giải để sau đó thay vào.

Phương trình $\left(2\right)\Leftrightarrow m>-6$ và $m\neq 1$

Hỏi hàm số $y=-x^4+2x^3-2x-1$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ **C.** $\left(-\infty;1\right)$ **D.** $\left(-\infty;+\infty\right)$

Đáp án B.

Ta có $y'=-4x^3+6x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	-	
y	$-\infty$	↗	$\frac{-5}{16}$	↘		↘	$-\infty$

Do đó, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+1}{x^2-2x}$ có mấy tiệm cận?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Đáp án D.

Giải phương trình $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 0^-} y=+\infty; \Rightarrow x=0$ là 1 TCĐ.

$\lim\limits_{x\to 2^+} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 2^-} y=-\infty; \Rightarrow x=2$ là 1 TCĐ.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=2;\ \lim\limits_{x\to -\infty} y=2; \Rightarrow y=2$ là 1 TCN.

Câu 12 Giải phương trình $log_5(2x-3)=5$

A. $x=3128$ **B.** $x=1564$ **C.** $x=4$ **D.** $x=2$

Đáp án B.

Phương trình $\Leftrightarrow 2x-3=5^5 \Leftrightarrow x=1564$.

Câu 13 Giải bất phương trình $log_2(2x^2-4x)>1$

A. $x>\frac{2+\sqrt{6}}{2}$ hoặc $x<\frac{2-\sqrt{6}}{2}$

B. $x\in\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2};\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$

C. $x<\frac{2+\sqrt{6}}{2}$

D. $x>\frac{2-\sqrt{6}}{2}$

Đáp án A.

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right.$

Khi đó bất phương trình

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x>1 \Leftrightarrow 2x^2-4x-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{2+\sqrt{6}}{2} \\ x<\frac{2-\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$$

Giới thiệu thêm: trong máy tính Casio 570 VN Plus có tính năng giải bất phương trình đa thức bậc 2, bậc 3. Các bạn chỉ cần ấn $\boxed{\text{MODE}}\rightarrow$ mũi tên xuống và chọn 1: INEQ (inequality), sau đó chọn các dạng bất phương trình phù hợp.

Câu 14 Tìm đạo hàm của hàm số $y=log(2x^2)$

A. $y'=\frac{2ln10}{x}$ **B.** $y'=\frac{2}{x.ln10}$ **C.** $y'=\frac{1}{2x^2.ln10}$ **D.** $\frac{ln10}{2x^2}$

Đáp án B.

Ta có $(log_a u)'=\frac{u'}{u.lna}$. Áp dụng vào hàm số trên ta có $y'=\frac{4x}{2x^2.ln10}=\frac{2}{xln10}\Rightarrow$ **Đáp án B.**

Câu 15 Tập xác định của hàm số $y=log\frac{x-3}{x-1}$ là:

A. $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(1;3)$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Đáp án A.

Đây là một câu dễ ăn điểm nên chúng ta cần chú ý cẩn thận từng chi tiết: Ở đây có 2 điều kiện cần đáp ứng:

1. Điều kiện để hàm phân thức có nghĩa

2. Điều kiện để hàm log xác định

Vậy ta có: $\begin{cases} x \neq 1 \\ (x-3)(x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 1 \end{array}\right.$

Câu 16 Khẳng định nào sau đây là luôn luôn đúng với mọi a, b dương phân biệt khác 1?

A. $b = a^{log b}$ **B.** $a = b^{ln a}$ **C.** $log_a b = log_b a$ **D.** $a^{log b} = b^{log a}$

Đáp án D.

Nhận thấy a,b là 2 số dương phân biệt:

Với ý A.

$\Leftrightarrow log_a b = log b \Leftrightarrow \dfrac{log b}{log a} = log b$

$\Leftrightarrow log b = log a.log b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ a = 10 \end{array}\right.$

(không luôn đúng với mọi a, b) Tương tự với ý B.

Với ý C. Ta có $C \Leftrightarrow \dfrac{log b}{log a} = \dfrac{log a}{log b}$ (do a,b) phân biệt nên đẳng thức không đúng

Theo PP loại trừ ta chọn đáp án D.

Ta cùng chứng minh đáp án D.

$D \Leftrightarrow log a^{log b} = log b^{log a} \Leftrightarrow log b.log a = log a.log b$ (luôn đúng)

TH2: Nếu không nghĩ ra hướng giải quyết nào, ta có thể dùng máy tính và thay 2 số a, b bất kì thỏa mãn yêu cầu để soát đáp án (do luôn đúng). Ta cũng chọn được đáp án D.

Câu 17 Nếu $log_2 6 = a$ và $log_2 7 = b$ thì $log_3 7$ bằng bao nhiêu?

A. $log_3 7 = \dfrac{b}{a-1}$ **B.** $log_3 7 = \dfrac{a}{b-1}$ **C.** $log_3 7 = \dfrac{b}{1-a}$ **D.** $log_3 7 = \dfrac{a}{1-b}$

Đáp án A.

Với dạng bài biểu diễn một logarit theo 2 logarit đã cho thì bước đầu tiên là chuyển log cơ số cần tìm về cơ số ban đầu, rồi phân tách như sau:

Ta có: $log_3 7 = \dfrac{log_2 7}{log_2 3} = \dfrac{b}{log_2 6 - log_2 2} = \dfrac{b}{a-1}$

Câu 18 Cho hàm số $f(x) = 3^x.6^{ln x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + ln x.log_3 6 < 0$ **B.** $f(x) < 1 \Leftrightarrow x ln 3 + ln x.ln 2 < 0$

C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x log_7 2 + x^2 < 0$ **D.** $f(x) > 1 \Leftrightarrow x + ln x.log_3 6 > 0$

Đáp án A.

$f(x)<1 \Leftrightarrow log_3 f(x)<log_3 1 \Leftrightarrow x+lnx.log_3 6<0$

Câu 19 Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$?

A. $y'=\dfrac{(x+1)^2 e^x}{(x^2+1)^2}$

B. $y'=\dfrac{e^x\left(lnx(x^2+1)+2x\right)+1}{(x^2+1)}$

C. $y'=\dfrac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)^2}$

D. $y'=\dfrac{e^x\left(lnx(x^2+1)-2x\right)+1}{(x^2+1)}$

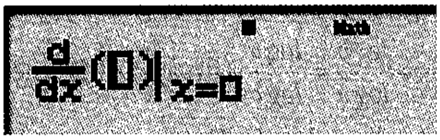
Đáp án C.

Đây là bài toán tính đạo hàm đòi hỏi quý độc giả phải nhớ công thức. Ta cùng nhắc lại các công thức đạo hàm cần sử dụng

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2};\ (e^x)'=e^x$

Vậy ở đây $y'=\dfrac{e^x(x^2+1)-2x.e^x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)^x}$

Vậy ta chọn đáp án C.

Ngoài ra các bạn có thể sử dụng nút  trên máy tính rồi thử từng đáp án, tuy nhiên đây là một bài toán đạo hàm khá đơn giản nên ta không cần thiết sử dụng máy tính, sẽ làm tốn thời gian hơn rất nhiều.

Câu 20 Tính đạo hàm của hàm số $y=x.2^x$

A. $y'=2^x(1+xln2)$

B. $y'=2^x(x+ln2)$

C. $y'=2^x.ln2$

D. $y'=2^x.(x+1)$

Đáp án A.

Ta có $y'=2^x+x.2^x.ln2=2^x(1+xln2)$.

Câu 21 Ông A cần thanh toán các khoản nợ sau:

- 10.000.000 đồng thanh toán sau 2 năm (khoản nợ 1).
- 20.000.000 đồng thanh toán sau 5 năm (khoản nợ 2).
- 50.000.000 đồng thanh toán sau 7 năm (khoản nợ 3).

Người ta đồng ý cho ông thanh toán bằng một khoản nợ duy nhất (khoản nợ 4) 99.518.740 đồng sau n năm tính từ lúc này, khoản nợ 4 có tiền nợ ban đầu bằng tổng tiền nợ ban đầu của ba khoảng nợ 1, 2, 3. Biết mức lãi kép là 4,5% năm. Giá trị n gần với đáp án nào sau đây nhất:

A. 10 (năm) **B.** 11 (năm) **C.** 9 (năm) **D.** 12 (năm)

Đáp án B.

Gọi V_1, V_2, V_3, V lần lượt là tiền nợ gốc của các khoản nợ 1, 2, 3, 4.

Ta có:

$10.000 = V_1.1,045^2 \Rightarrow V_1 = 1,045^{-2} * 10.000$

$20.000 = V_2.1,045^5 \Rightarrow V_2 = 20.000 * 1,045^{-5}$

$50.000 = V_3.1,045^7 \Rightarrow V_3 = 50.000 * 1,045^{-7}$

$99.518.740 = V.1,045^n \Rightarrow V = 99.518.740 * 1,045^{-n}$

Suy ra $99.518.740 * 1,045^{-n} = 1,045^{-2} * 10.000 + 20.000 * 1,045^{-5} + 50.000 * 1,045^{-7} \Leftrightarrow n = 10,77$

Câu 22 Nếu $F(x) = \int \frac{dx}{x \ln x}$ thì:

$A. F(x) = \ln x + C$

$B. F(x) = \ln|\ln x| + C$

$C. F(x) = -(\ln x)^2 + C$

$D. F(x) = \lg(\ln x) + C$

Đáp án B

Ta có $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$

Câu 23 Nếu $F(x) = \int \frac{2x+3}{x^2+5x+6} dx$ thì:

A. $F(x) = \ln\left|\frac{(x+3)^3}{x+2}\right| + C$

B. $F(x) = \ln\frac{3(x+2)}{x+3} + C$

C. $F(x) = \ln|x^2+5x+6| + C$

D. $F(x) = 3\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right| + C$

Đáp án A

Ta có:

$$\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+5x+6} = \int \frac{3(x+2)-(x+3)}{(x+2)(x+3)} dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+3}\right) dx$$

$$= 3\ln|x+2| - \ln|x+3| = \ln\left|\frac{(x+2)^3}{x+3}\right| + C$$

Vậy $\int \frac{2x+3}{x^2+5x+6} dx = \ln\left|\frac{(x+3)^3}{x+2}\right| + C$

Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$ là:

A. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ **B.** $\frac{\ln 2}{2}$ **C.** $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** 1

Đáp án A

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^3 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[tan x\left(1+tan^2 x\right)-tan x\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan xd tan x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan xdx$$

$$= \left.\frac{(tan x)^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d cos x}{cos x} = \frac{1}{2} + \left. ln|cos x|\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} + ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(1-ln2)$$

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^3 xdx = \frac{1}{2}(1-ln2)$

Câu 25 Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sin2xdx}{\sqrt{7-4cos2x}}$ là:

A. -4 **B.** $\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{3}\right)$ **C.** $\frac{1}{4}\left(4-\sqrt{3}\right)$ **D.** $\frac{8}{3}$

Đáp án B

Đặt $t=\sqrt{7-4cos2x}$ ta có khi x=0 thì $t=\sqrt{3}$, khi $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=3$

$$\Rightarrow dt = \frac{8sin2xdx}{2\sqrt{7-3cos2x}} \Leftrightarrow \frac{sin2xdx}{\sqrt{7-3cos2x}} = \frac{1}{4}dt$$

Vậy nên: $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sin2xdx}{\sqrt{7-4cos2x}} = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{3}}^{3} dt = \frac{1}{4}\left(3-\sqrt{3}\right)$

Câu 26 Giá trị của tích phân $\int_1^e x^x(1+ln x)dx$ là:

A. e^e-1 **B.** $\frac{e^2-1}{2}$ **C.** $\frac{e^e}{2}$ **D.** $\frac{e^e\left(e^2-1\right)}{2}$

Đáp án A

Đặt $t=x^x$. Khi $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=1 \\ x=e\Rightarrow t=e^e \end{cases}$

Ta có:

$$ln t = x ln x, (ln t)' = (ln x+1)dx \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = (1+ln x)dx$$

$$\Rightarrow dt = t(1+ln x)dx = x^x(1+ln x)dx$$

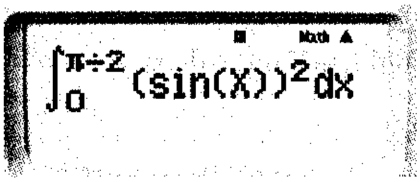
Vậy $\int_1^e x^x(1+ln x)dx = \int_1^{e^e} dt = e^e - 1$

Câu 27 Diện tích của hình (H) giới hạn bởi đường thẳng $y=x+sin^2 x, y=x,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$ là:

A. $\frac{\pi}{4}$ **B.** $\frac{3\pi}{2}$ **C.** π **D.** $\frac{\pi}{2}$

Đáp án A

Diện tích của hình (H) giới hạn giới hạn bởi các đường $y=x+sin^2 x, y=x, x=0, x=\frac{\pi}{2}$ là:



$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\left(x+sin^2x\right)-x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^2 xdx=\frac{\pi}{4}$

Vậy diện tích của hình (H) là $S=\frac{\pi}{4}$ (đvdt)

Câu 28 Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\frac{5}{x}, y=0, x=1, x=5$ quay quanh trục Ox tạo thành là:

A. 9π **B.** 20π **C.** $\frac{2\pi}{3}$ **D.** 18π

Đáp án B

Áp dụng công thức $V_x=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$, ta tính được thể tích hình (H) giới hạn bởi $y=\frac{5}{x}, y=0, x=1, x=5$ quay quanh trục Ox tạo thành là:

$V_x=\pi\int_1^5\frac{25}{x^2}dx=-\frac{25\pi}{x}\Big|_1^5=-25\pi\left(\frac{1}{5}-1\right)=20\pi$

Vậy $Vx=20\pi$ (đvdt)

Câu 29 Tìm mô đun của số phức: $z=2+3i-\frac{1+5i}{3-i}$

A. $|z|=\frac{\sqrt{170}}{3}$ **B.** $|z|=\frac{\sqrt{170}}{5}$ **C.** $|z|=\frac{\sqrt{171}}{5}$ **D.** $|z|=\frac{\sqrt{170}}{4}$

Đáp án B

Ta có: $z = 2 + 3i - \frac{(1+5i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = 2 + 3i - (\frac{-1}{5}+\frac{8}{5}i) = \frac{11}{5}+\frac{7}{5}i$

$|z|=\sqrt{\left(\frac{11}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{170}}{5}$

Câu 30 Tìm phần thực của số phức $\omega=z^3-\frac{2}{z}+z.\bar{z}$ biết $z=1-2i$.

A. $\frac{-31}{5}$ **B.** $\frac{-32}{5}$ **C.** $\frac{-33}{5}$ **D.** $\frac{32}{5}$

Đáp án B

Ta có $\omega=\frac{-32}{5}+\frac{6}{5}i$

Phần thực là: $\frac{-32}{5}$; phần ảo là: $\frac{6}{5}$

Câu 31 Phương trình $z^2+2z+26=0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2. Khẳng định nào sau đây sai:

A. $z_1.z_2=26$ **B.** z_1 là số phức liên hợp của z_2

C. $z_1+z_2=-2$ **D.** $|z_1|>|z_2|$

Đáp án D.

Theo định lí Viete dễ thấy A, D đúng. B cũng đúng vì hai nghiệm luôn có dạng $z_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Câu 32 Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào không đúng?

A. Hình tạo bởi một số hữu hạn đa giác được gọi là hình đa diện

B. Khối đa diện bao gồm không gian được giới hạn bởi hình đa diện và cả hình đa diện đó

C. Mỗi cạnh của một đa giá trong hình đa diện là cạnh chung của đúng hai đa giác

D. Hai đa giác bất kì trong hình đa diện hoặc không có điểm chung, hoặc là có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung

Đáp án A.

Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thoả mãn hai tính chất:

a. Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

b. Mỗi cạnh của đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

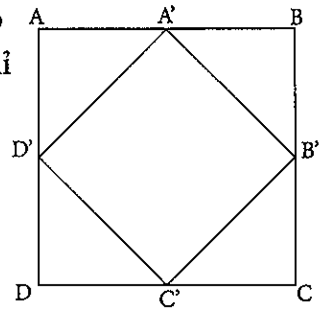
+ Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó. Vậy từ các thông tin mà tôi đã đưa ra ở trên, quý độc giả có thể nhận ra được các ý B, C, D là các đáp án đúng. Còn đáp án A không thỏa mãn tính chất của hình đa diện, thiếu hẳn 2 điều kiện đủ quan trọng để có hình đa diện.

Câu 33 Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD . Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp S.A'B'C'D' và S.ABCD bằng?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Đáp án A.

Ta thấy 2 hình chóp S.ABCD và S.A' B'C ' D' . Có chung chiều cao kẻ từ đỉnh S xuống đáy. Vậy để đi tìm tỉ số khoảng cách thì chúng ta chỉ cần tìm tỉ số diện tích 2 đáy mà ta có hình vẽ như sau:



Ta thấy

$$S_{A'B'C'D'}=A'D'.A'B'=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}}=\frac{1}{2}$$

Câu 34 Cho các số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=1-2i$. Hỏi z_1,z_2 là nghiệm của phương trình phức nào sau đây:

A. $z^2+2z+5=0$. **B.** $z^2+2z-5=0$.

C. $z^2-2z-5=0$. **D.** $z^2-2z+5=0$.

Đáp án D.

Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = BC = a$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{3}$.

Đáp án B.

$V = AA'.S_{ABC} = a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại C có đường cao kẻ từ C là $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $CA = a$ Khi đó đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC qua trục CA là?

A. $l = a$ **B.** $l = \sqrt{2}a$ **C.** $l = \sqrt{3}a$ **D.** $l = 2a$

Đáp án D.

Đường sinh của hình nón quay được thực chất chính là cạnh huyền AB của tam giác vuông ABC. Mà tam giác vuông đã có một cạnh bên và đường cao, ta chỉ cần áp dụng công thức hệ thức lượng trong tam giác :

$\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{CA^2} + \dfrac{1}{CB^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{CB^2}$

$\Rightarrow CB = a\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2a$ (theo định lý Pytago).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = 2a$ và $SA = 2a$ vuông góc với đáy. Tính thể tích của hình chóp S.ABCD?

A. $\dfrac{4}{3}a^3(dvtt)$ **B.** $4a^3(dvtt)$ **C.** $\dfrac{2}{3}a^3(dvtt)$ **D.** $2a^3(dvtt)$

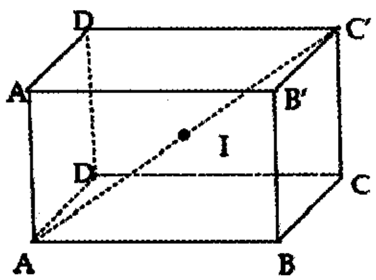
Đáp án A.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.h = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}AB.AD.SA = \dfrac{1}{3}a.2a.2a = \dfrac{4}{3}a^3$

Một hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu có ba kích thước là a, b, c. Khi đó bán kính r của mặt cầu bằng?

A. $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ **B.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ **C.** $\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3}$

Đáp án A



Ta có tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật trùng với tâm đối xứng của hình hộp. Như hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm là I, là trung điểm của AC', bán kính $r = \dfrac{AC'}{2}$

Tam giác $A'C'A$ vuông tại:

$A' \Rightarrow AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = \sqrt{c^2 + A'C'^2}$ (1)

Mặt khác tam giác $A'D'C'$ vuông tại D':

$\Rightarrow a'C' = \sqrt{A'D'^2 + D'C'^2} = \sqrt{a^2+b^2}$ (2)

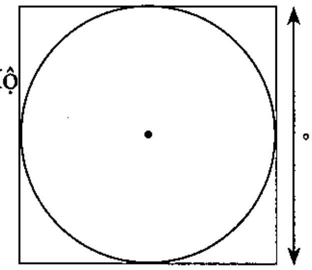
Từ (1) và (2) ta có: $r = \dfrac{1}{2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 39 Một hình trụ có 2 đáy là hình tròn nội tiếp một hình vuông cạnh A. Tính thể tích của khối trụ đó, biết chiều cao của khối trụ là a?

A. $\frac{1}{2}a^3\pi$ **B.** $\frac{1}{4}a^3\pi$ **C.** $\frac{1}{3}a^3\pi$ **D.** $a^3\pi$

Đáp án B.

Ta có hình vẽ sau



Ta thấy hình tròn nội tiếp hình vuông cạnh a có đường kính có độ dài a. Khi đó thể tích của khối trụ là $V = B.h = a\pi R^2 = a\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}a^3\pi$.

Câu 40 Khái niệm nào sau đây đúng với khối chóp?

A. là hình có đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.

B. là phần không gian được giới hạn bởi hình chóp và cả hình chóp đó.

C. là phần không gian được giới hạn bởi hình chóp.

D. là khối đa diện có hình dạng là hình chóp.

Câu 41 Cho mặt phẳng $(P): 5x+6y+2=0$. Tìm vecto pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(5,6,0)$ **B.** $\vec{n}=(-6,5,0)$ **C.** $\vec{n}=(5,6,2)$ **D.** $\vec{n}=(-5,6,2)$

Đáp án A.

Ta có cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ thì vecto pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(a,b,c)$.

Áp dụng vào bài toán ta thấy $5x+6y+2=5x+6y+0z+2 \Rightarrow \vec{n}=(5,6,0)$

Câu 42 Cho 3 điểm $A(6;9;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(1;1;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC)

A. $(ABC): -6x+5y+2z-11=0$ **B.** $(ABC): 3x-5y-2z+11=0$

C. $(ABC): 6x-5y-2z+11=0$ **D.** Không viết được do không đủ dữ kiện

Đáp án A.

Ta có $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$

Mà: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-24;20;8)$ do đó $\vec{n}=(-24;20;8)$.

(ABC): qua $A(6;9;1)$ và $vtpt\ \vec{n}=(-24;20;8)$ $\Rightarrow (ABC): -24(x-6)+20(y-9)+8(z-1)=0$ $\Leftrightarrow (ABC): -24x+20y+8z-44=0$ $\Leftrightarrow -6x+5y+2z-11=0$

Thủ thuật MTCT tính tích vô hướng: Ấn nút $\boxed{\text{MODE}}$ chọn 8:

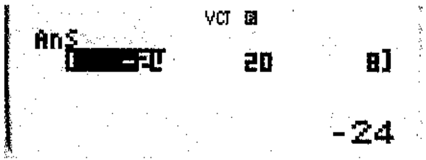
VECTOR $\rightarrow$ Chọn 1: VctA $\rightarrow$ 1: 3

Bước 2: Nhập tọa độ của vecto $\overrightarrow{AB}$ vào, ấn $\boxed{\text{AC}}$ để xóa màn hình.

Bước 3: Tiếp tục ấn nút $\boxed{\text{MODE}}$ chọn 8: VECTOR $\rightarrow$ Chọn 2: VctB $\rightarrow$ 1: 3

Bước 4: Nhập tọa độ của vecto $\overrightarrow{AC}$ vào, ấn $\boxed{\text{AC}}$ để xóa màn hình.

Bước 5: Ấn $\boxed{\text{SHIFT 5}}$ → chọn 3: VctA, tiếp tục lặp lại bước 5 và chọn VctB. Nhân 2 vecto với nhau ta được kết quả như sau:



Câu 43 Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-6)^2=25$. Tìm tâm I, bán kính R của mặt cầu (S)

A. $I(1;2;6);\ R=5$ **B.** $I(-1;-2;-6);\ R=5$

C. $I(1;2;6);\ R=25$ **D.** $I(-1;-2;-6);\ R=25$

Đáp án A.

Câu 44 Trong không gian cho điểm $A(2;6;9)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z+9=0$. Tính $x=\frac{2}{3}d(A;(P))$

A. $x=\frac{25\sqrt{14}}{7}$ **B.** $x=\frac{50\sqrt{14}}{21}$ **C.** $x=\frac{75\sqrt{14}}{14}$ **D.** $x=50$

Đáp án B.

Công thức tính khoảng cách từ điểm $A(2;6;9)$ đến mặt phẳng (P)

$d(A,(P))=\frac{|2+2.6+3.9+9|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{25\sqrt{14}}{7}$. Nhiều độc giả đến đây đã vội vàng khoanh ý A.

Nhìn kĩ vào bài toán thì còn thiếu nhân với $\frac{2}{3}$.

Khi đó sau khi nhân vào ta được $x=\frac{50\sqrt{21}}{14}$.

Câu 45 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua Δ và cách $A(1;1;3)$ một khoảng lớn nhất.

A. $(P): -15x-12y+21z-28=0$ **B.** $(P): +15x+12y+21z-28=0$

C. $(P): 15x+12y-21z-28=0$ **D.** Không có mặt phẳng nào thỏa mãn

Đáp án A.

Vì khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là thay đổi nên cần tìm một đại lượng là hằng số sao cho $AH \geq const$

Nhận thấy đề cho điểm $A(1;1;3)$ và đường thẳng Δ. Vậy khoảng cách từ A đến Δ là hằng số. Từ đó ta đã định hướng được cách làm.

Gọi H, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống (P), Δ. Tam giác AHK vuông tại H.

$\Rightarrow AH \leq AK = d(A;\Delta)$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv K \Leftrightarrow (P)$ qua A và nhận AK làm vtpt.

Vì $K \in \Delta$ nên $K(t,1+2t,2+2t) \Rightarrow \overrightarrow{AK}=(t-1,2t,2t-1)$. Mà $AK \perp \Delta$ do đó $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_\Delta}=0$

$\Leftrightarrow t+2(1+2t)+2(2+2t)=0$

$\Leftrightarrow 9t+6=0 \Leftrightarrow t=\frac{-2}{3} \Rightarrow K\left(\frac{-2}{3};\frac{-1}{3};\frac{2}{3}\right)$

(P): Qua $K\left(\frac{-2}{3};\frac{-1}{3};\frac{2}{3}\right)$, và có vtpt $\vec{n}=\left(\frac{-5}{3};\frac{-4}{3};\frac{7}{3}\right)$

$\Rightarrow (P): -\frac{5}{3}\left(x+\frac{2}{3}\right)-\frac{4}{3}\left(y+\frac{1}{3}\right)+\frac{7}{3}\left(z-\frac{2}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow (P): -15x-12y+21z-28=0$

Câu 46 Cho mặt cầu (S) tâm $I(1;1;3)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x+2y+2z+9=0$. Viết phương trình mặt cầu (S)?

A. $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z-36=0$

B. $(S): x^2+y^2+z^2+2x+2y+6z-25=0$

C. $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z-25=0$

D. $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z-18=0$

Đáp án C.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x+2y+2z+9=0$ thì khoảng cách từ I đến mặt phẳng(P) chính là bán kính R.

$d(I;(P))=R=\frac{|1+1.2+2.3+9|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=6$

$\Rightarrow (S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=36$

$\Leftrightarrow (S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z-25=0$

Câu 47 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;1)$. Tìm tọa độ hình chiếu của M lên đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$

A. $(1;0;2)$ **B.** $(-1;1;2)$ **C.** $(0;2;1)$ **D.** $(1;1;2)$

Đáp án A.

Gọi H là hình chiếu của $M(2;0;1)$ lên đường thẳng d.

$\Rightarrow H(1++t;2t;2+t) \Rightarrow \overrightarrow{MH}=(t-1;2t;t+1)$

$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_d}=0 \Leftrightarrow (t-1).1+2t.2+(t+1).1=0$

$\Leftrightarrow 6t=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow H(1;0;2)$

Câu 48 Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho 3 điểm $A(0;6;0)$; $B(0;0;8)$ và $C(4;0;8)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. BC vuông góc với CA.

B. BC vuông góc với mặt phẳng (OAB)

C. AB vuông góc với AC

D. Câu A và câu B đều đúng.

Đáp án B.

Đây là dạng toán tìm mệnh đề đúng vì thế ta cần kiểm tra từng mệnh đề một chứ không thể thử được.

Mệnh đề A: ta thấy $\overrightarrow{BC}=(4;0;0)$; $\overrightarrow{CA}=(-4;6;-8)$

Nhận thấy $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}\neq 0$ nên mệnh đề A không đúng, từ đó ta loại được **Đáp án D.**

Mệnh đề B: Ta thấy nếu BC vuông góc với mp(OAB) thì BC song song hoặc trùng với vtpt của mp(AOB)

Mà $\overrightarrow{n_{OAB}}=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(48;0;0)$ Nhận thấy BC song song với vtpt của (OAB) nên mệnh đề này đúng vậy ta chọn luôn đáp án B mà không cần xét đến C nữa.

Cho $m\neq 0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{m}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{m}$ cắt đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t+5\\y=2t+3\\z=-t+3\end{cases}$ Giá trị m là:

A. Một số nguyên dương

B. Một số nguyên âm

C. Một số hữu tỉ dương

D. Một số hữu tỉ âm

Đáp án C

Ta có hệ giao điểm như sau: $\begin{cases}1+mt'=t+5\\3+t'=2t+3\\-5+mt'=-t'+3\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}t'=2t\\2mt+1=t+5\\2mt-5=-t+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2m-1)t=4\\(2m+1)t=8\end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow\dfrac{4}{2m-1}=\dfrac{8}{2m+1}\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$.

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $S(1;2;-1)$ và tam giác ABC có diện tích bằng 6 nằm trên mặt phẳng $(P):x-2y+z+2=0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$?

A. $V=2\sqrt{6}$

B. $V=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

C. $V=\sqrt{6}$

D. $V=4$

Đáp án B.

$$d(S;(P))=\frac{|1.1-2.2+1.-1+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}.6=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối, Hai Bà Trưng, Hà Nội.
Điện thoại: Biên tập (04) 39714896
Quản lý xuất bản: (04) 39728806; Tổng biên tập: (04) 39715011
Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản
Giám đốc - Tổng biên tập:
TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: **Đặng Thị Phương Anh - Đinh Thị Thảo**
Sửa bản in: **Tác giả**
Chế bản: **Lam Hạnh**
Vẽ bìa: **Trọng Kiên**

LIÊN KẾT XUẤT BẢN
CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH VÀ GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN MEGABOOK
Số 14, ngõ 93 Vũ Hữu, Phường Thanh Xuân Bắc, Quận Thanh Xuân, Hà Nội

TIẾP CẬN 11 CHUYÊN ĐỀ TRỌNG TÂM
GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM
MÔN TOÁN

Mã số: 1L-623PT2016
In 3.000 cuốn, khổ 20.5x29.5cm, tại Công ty TNHH In và Thương mại Hải Nam
Địa chỉ: Số 18, ngách 68/53/9, Phường Quan Hoa, Cầu Giấy, Hà Nội
Số xuất bản: 3692-2016/CXBIPH/11-305/ĐHQGHN ngày 26/10/2016
Quyết định xuất bản số: 646 LK-TN/QĐ-NXB ĐHQGHN, ngày 15/11/2016
In xong và nộp lưu chiểu năm 2016
Mã ISBN: 978-604-62-6669-3