MỤC LỤC

1. PHÉP ĐẾM (QUY TẮC CỘNG – QUY TẮC NHÂN)

Câu 1. Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 5 học sinh nam và 6 học sinh nữ ?

A. 11. **B.** 30. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

PA1 : Chọn 1 học sinh nam có 5 cách
PA2 : Chọn 1 học sinh nữ có 6 cách
Theo quy tắc cộng có 5 + 6 = 11 cách

Câu 2. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ?

A. 9. **B.** 54. **C.** 15. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Chọn 1 học sinh từ 15 học sinh ta có 15 cách chọn.

Câu 3. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 5 học sinh nam và 7 học sinh nữ là

A. 7. **B.** 12. **C.** 5. **D.** 35.

Lời giải

Chọn B

Tổng số học sinh là: $5+7=12$.
Số chọn một học sinh là: 12 cách.

2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

2.1 ĐẾM SỐ (CHỈ DÙNG MỘT LOẠI P HOẶC A HOẶC C)

Câu 4. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Có bao nhiêu cách xếp 6 học sinh thành một hàng dọc.

A. 36. **B.** 720. **C.** 6. **D.** 1.

Lời giải

Mỗi cách xếp ngẫu nhiên 6 bạn thành một hàng dọc là một hoán vị của 6 phần tử nên.
Số cách xếp là $6!=720$.

Câu 5. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Có bao nhiêu cách xếp 7 học sinh thành một hàng dọc?

A. 7. **B.** 5040. **C.** 1. **D.** 49.

Lời giải

Số cách xếp cần tìm là: $P_7=7!=5040$.

2.2 CHỌN NGƯỜI, VẬT

Câu 6. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh thành một hàng dọc?

A. 1. **B.** 25. **C.** 5. **D.** 120.

Lời giải

Chọn D

Có $5!=120$ cách xếp 5 học sinh thành một hàng dọc.

Câu 7. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Có bao nhiêu cách xếp 8 học sinh thành một hàng dọc?

A. 8. **B.** 1. **C.** 40320. **D.** 64.

Lời giải

Số cách xếp 8 học sinh thành một hàng là hoán vị của 8 phần tử. Đáp số: $8!=40320$ cách.

Câu 8. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Có bao nhiêu cách xếp 8 học sinh thành một hàng dọc?

A. 8. **B.** 1. **C.** 40320. **D.** 64.

Lời giải

Số cách xếp 8 học sinh thành một hàng là hoán vị của 8 phần tử. Đáp số: $8!=40320$ cách.

Câu 9. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 10 học sinh?

A. C_{10}^2. **B.** A_{10}^2. **C.** 10^2. **D.** 2^{10}.

Lời giải

Chọn A

Mỗi cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 10 học sinh tương ứng với một tổ hợp chập 2 của tập có 10 phần tử. Vậy số cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 10 học sinh là C_{10}^2.

Câu 10. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Số cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là

A. 2^7. **B.** A_7^2. **C.** C_7^2. **D.** 7^2.

Lời giải

Chọn C.

Câu 11. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang, xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C, ngồi vào hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng 1 học sinh. Xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{3}{20}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh trên 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang có $6!$ cách

Để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B ta có các trường hợp

TH1: Xét học sinh C ngồi ở vị trí đầu tiên:

C	B				

Ta có $2.4! = 48$ cách xếp chỗ.

TH2: Xét học sinh C ngồi ở vị trí thứ 2:

B	C	B			

Ta có $2!.3! = 12$ cách xếp chỗ.

TH3: Xét học sinh C ngồi ở vị trí thứ 3:

	B	C	B		

Ta có $2!.3! = 12$ cách xếp chỗ.

TH4: Xét học sinh C ngồi ở vị trí thứ 4:

		B	C	B	

Ta có $2!.3! = 12$ cách xếp chỗ.

TH5: Xét học sinh C ngồi ở vị trí thứ 5:

			B	C	B

Ta có $2!.3! = 12$ cách xếp chỗ.

TH6: Xét học sinh C ngồi ở vị trí cuối cùng:

				B	C

Ta có $2.4! = 48$ cách xếp chỗ.

Suy ra số cách xếp thỏa mãn là $48 + 12 + 12 + 12 + 12 + 48 = 144$ cách.

Vậy xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B bằng $\frac{144}{6!} = \frac{1}{5}$.

3. XÁC SUẤT

Câu 12. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{13}{25}$. **C.** $\frac{12}{25}$. **D.** $\frac{313}{625}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{25}^{2}=300$ (kết quả đồng khả năng xảy ra).

Gọi biến cố A là biến cố cần tìm.

Nhận xét: tổng của hai số là một số chẵn có 2 trường hợp:

+ TH1: tổng của hai số chẵn

Từ số 1 đến số 25 có 13 số chẵn, chọn 2 trong 13 số chẵn có: $C_{13}^{2}=78$ (cách)

+ TH2: tổng của hai số chẵn

Từ số 1 đến số 25 có 12 số chẵn, chọn 2 trong 12 số chẵn có: $C_{12}^{2}=66$ (cách)

Suy ra: $n(A)=78+66=144$

Vậy: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{144}{300}=\frac{12}{25}$.

Câu 13. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng

A. $\frac{25}{42}$. **B.** $\frac{5}{21}$. **C.** $\frac{65}{126}$. **D.** $\frac{55}{126}$.

Lời giải

Có A_9^4 cách tạo ra số có 4 chữ số phân biệt từ $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

$\Rightarrow |S|=A_9^4=3024$.

$\Rightarrow |\Omega|=3024$.

Gọi biến cố A:"chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn".

Nhận thấy không thể có 3 chữ số chẵn hoặc 4 chữ số chẵn vì lúc đó luôn tồn tại hai chữ số chẵn nằm cạnh nhau.

Trường hợp 1: Cả 4 chữ số đều lẻ.

Chọn 4 số lẻ từ X và xếp thứ tự có A_5^4 số.

Trường hợp 2: Có 3 chữ số lẻ, 1 chữ số chẵn.

Chọn 3 chữ số lẻ, 1 chữ số chẵn từ X và xếp thứ tự có $C_5^3.C_4^1.4!$ số.

Trường hợp 3: Có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ.

Chọn 2 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn từ X có $C_5^2.C_4^2$ cách.

Xếp thứ tự 2 chữ số lẻ có 2! cách.

Hai chữ số lẻ tạo thành 3 khoảng trống, xếp hai chữ số chẵn vào 3 khoảng trống và sắp thứ tự có 3! cách.

$\Rightarrow$ trường hợp này có $C_5^2.C_4^2.2!.3!$ số.

Vậy $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{A_5^4+C_5^3.C_4^1.4!+C_5^2.C_4^2.2!.3!}{3024}=\dfrac{25}{42}$.

Câu 14. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1;2;3;4;5;6;7\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng

A. $\dfrac{9}{35}$. **B.** $\dfrac{16}{35}$. **C.** $\dfrac{22}{35}$. **D.** $\dfrac{19}{35}$.

Lời giải

Ta có $n(\Omega)=A_7^4$.

Gọi số có 4 chữ số là $\overline{abcd}$.

Ký hiệu C là chữ số chẵn, L là chữ số lẻ.

Các số thuận lợi cho biến cố A là một trong 3 dạng sau:

Dạng 1: CLLL, LCLL, LLCL, LLLC có $C_3^1.A_4^3.4$ số

Dạng 2: CLCL, LCLC, CLLC có $3.A_3^2.A_4^2$ số.

Dạng 3: LLLL có P_4 số.

Số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là $n(A)=C_3^1.A_4^3.4+3.A_3^2.A_4^2+P_4$

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{22}{35}$.

Câu 15. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{13}{35}$. **C.** $\dfrac{9}{35}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải

* Số cần lập có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4}$

$n(\Omega)=A_7^4=840$

Gọi biến cố A:" số không có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ"

TH1: Hai chữ số lẻ và hai chữ số chẵn không liên tiếp

Có các cách sắp xếp như sau:

+ Các số chẵn và lẻ liên tiếp nhau

+ a và a_4 là chữ số lẻ, a_2 và a_3 là chữ số chẵn

Số các số cần chọn là: $2!.A_4^2.A_3^2+C_4^2.2!.C_3^2.2!=216$

TH2: một chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn

Số các số cần chọn là $4.C_3^3.4!=96$

Vậy $n(A)=216+96=312$

Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{13}{35}$.

Câu 16. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng khác tính chẵn lẻ bằng:

A. $\frac{50}{81}$. B. $\frac{5}{9}$. C. $\frac{5}{18}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi số cần lập là $\overline{abcdef}$ với $a \neq 0$. Ta có $n(\Omega) = 9A_9^5$

Gọi A: "số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau có hai chữ số tận cùng khác tính chẵn lẻ"

TH1: a chẵn, f chẵn, e lẻ có: $4.4.5.A_7^3 = 80.A_7^3$ số

TH2: a chẵn, f lẻ, e chẵn có: $4.5.4.A_7^3 = 80.A_7^3$ số

TH3: a lẻ, f lẻ, e chẵn có: $5.4.5.A_7^3 = 100.A_7^3$ số

TH4: a lẻ, f chẵn, e lẻ có: $5.5.4.A_7^3 = 100.A_7^3$ số

Suy ra $n(A) = 360A_7^3$

Vậy xác suất để chọn được một số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau có hai chữ số tận cùng khác tính chẵn lẻ là $P(A) = \frac{360.A_7^3}{9.A_9^5} = \frac{5}{9}$

Câu 17. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng có cùng tính chẵn lẻ bằng

A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{2}{9}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, $a_i \in \{0,1,...,9\}; i = \overline{1,6}; a_1 \neq 0$.

Gọi A là biến cố: "chọn được số tự nhiên thuộc tập S sao cho số đó có hai chữ số tận cùng có cùng tính chẵn lẻ".

Do đó $n(\Omega) = 9.A_9^5 = 136080$.

Trường hợp 1: a_1 chẵn và hai chữ số tận cùng chẵn.

Số cách lập: $4.A_4^2.A_7^3 = 10080$.

Trường hợp 2: a_1 chẵn và hai chữ số tận cùng lẻ.

Số cách lập: $4.A_5^2.A_7^3 = 16800$.

Trường hợp 3: a_1 lẻ và hai chữ số tận cùng chẵn.

Số cách lập: $5.A_5^2.A_7^3 = 21000$.

Trường hợp 4: a_1 lẻ và hai chữ số tận cùng lẻ.

Số cách lập: $5.A_4^2.A_7^3 = 12600$.

Xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng có cùng tính chẵn lẻ bằng:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{60480}{1360809} = \frac{4}{9}.$$

Câu 18. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Xét các số thực thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2+y^2-2x+2)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{8x+4}{2x-y+1}$ gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. 9 B. 6. **C.** 7. D. 8.

Lời giải

Chọn C

$2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$

$2^{x^2+y^2-2x+1} \le x^2+y^2-2x+2$

$2^{(x-1)^2+y^2} - \left[(x-1)^2+y^2\right] - 1 \le 0 (1)$

Đặt $t=(x-1)^2+y^2$

$(1) \Leftrightarrow 2^t - t - 1 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1$

$P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1} \Rightarrow (2P-8).x - P.y + (P-4) = 0$

Yêu cầu bài toán tương đương:

$\dfrac{|2P-8+P-4|}{\sqrt{(2P-8)^2+P^2}} \le 1 \Leftrightarrow |3P-12| \le \sqrt{(2P-8)^2+P^2} \Leftrightarrow 5-\sqrt{5} \le P \le 5+\sqrt{5}$

Câu 19. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng khác tính chẵn lẻ bằng

A. $\dfrac{50}{81}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{18}$. **D.** $\dfrac{5}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $x=\overline{abcde}$, $a \ne 0$ là số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

Khi đó có $9.9.8.7.6=27216$ số.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=27216$.

Gọi F là biến cố số x có hai chữ số tận cùng khác tính chẵn lẻ.

TH1: Một trong hai chữ số cuối có chữ số 0: Có $C_5^1.P_2.A_8^3=3360$ số.

TH2: Hai chữ số tận cùng không có chữ số 0: Có $C_4^1.C_5^1.P_2.7.7.6=11760$ số.

Suy ra $n(F)=3360+11760=15120$.

Vậy $P(F)=\dfrac{n(F)}{n(\Omega)}=\dfrac{5}{9}$.

Câu 20. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{13}{35}$. **C.** $\dfrac{9}{35}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải

* Số cần lập có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4}$

$n(\Omega)=A_7^4=840$

Gọi biến cố A:" số không có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ”

TH1: Hai chữ số lẻ và hai chữ số chẵn không liên tiếp

Có các cách sắp xếp như sau:

\+ Các số chẵn và lẻ liên tiếp nhau

+ a và a_4 là chữ số lẻ, a_2 và a_3 là chữ số chẵn

Số các số cần chọn là: $2!.A_4^2.A_3^2+C_4^2.2!.C_3^2.2!=216$

TH2: một chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn

Số các số cần chọn là $4.C_3^3.4!=96$

Vậy $n(A)=216+96=312$

Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{13}{35}$.

Câu 21. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ bằng

A. $\dfrac{17}{42}$. **B.** $\dfrac{41}{126}$. **C.** $\dfrac{31}{126}$. **D.** $\dfrac{5}{21}$.

Lời giải

Số các phần tử của S là $A_9^4=3024$.

Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S có 3024 (cách chọn). Suy ra $n(\Omega)=3024$.

Gọi biến cố A: " Chọn được số **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ".

Trường hợp 1: Số được chọn có 4 chữ số chẵn, có $4!=24$ (số).

Trường hợp 2: Số được chọn có 1 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn, có $5.4.4!=480$ (số).

Trường hợp 3: Số được chọn có 2 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn, có $3.A_5^2.A_4^2=720$ (số).

Do đó, $n(A)=24+480+720=1224$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1224}{3024}=\dfrac{17}{42}$.

4. CẤP SỐ CỘNG

Câu 22. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=3$ và $u_2=9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. -6. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Công sai của cấp số cộng đã cho là $d=u_2-u_1=9-3=6$.

Câu 23. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=11$ và công sai $d=3$. Giá trị của 7 bằng

A. 8. **B.** 33. **C.** $\frac{11}{3}$. **D.** 14.

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_2=u_1+d=11+3=14$.

Câu 24. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=9$ và công sai $d=2$. Giá trị của u_2 bằng

A. 11. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 18. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_2=u_1+d=9+2=11$.

Câu 25. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=8$ và công sai $d=3$. Giá trị của u_2 bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 24. **C.** 5. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức ta có: $u_2=u_1+d=8+3=11$.

Câu 26. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=3$ và $u_2=9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 12. **D.** -6.

Lời giải

Chọn A

Công sai của cấp số cộng đã cho bằng $u_2 - u_1 = 6$.

5. CẤP SỐ NHÂN

Câu 27. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_2.

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow u_2 = u_1.q = 3.2 = 6$.

Câu 28. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị của u_2 bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** 8. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có $u_2 = u_1.q = 2.3 = 6$.

Câu 29. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 4$. Giá trị của u_2 bằng

A. 64. **B.** 81. **C.** 12. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Áp dụng công thức cấp số nhân ta có: $u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow u_2 = u_1.q = 3.4 = 12$.

Câu 30. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Giá trị của u_2 bằng

A. 64. **B.** 81. **C.** 12. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

$u_2 = u_1 q = 4.3 = 12$.

Câu 31. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Giá trị của u_2 bằng

A. 64. **B.** 81. **C.** 12. **D.** $\frac{4}{3}$.

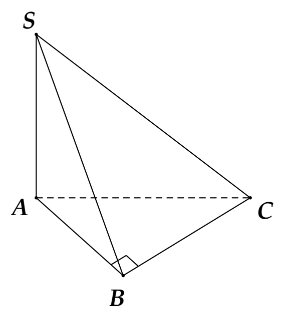
Lời giải

$u_2 = u_1 q = 4.3 = 12$.

6. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

6.1 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

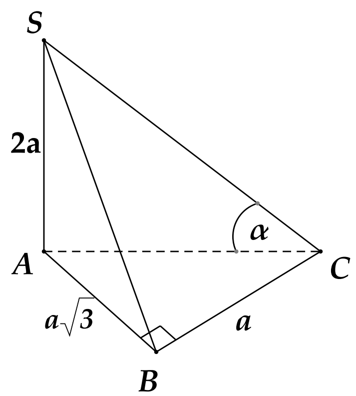
Câu 32. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn B.



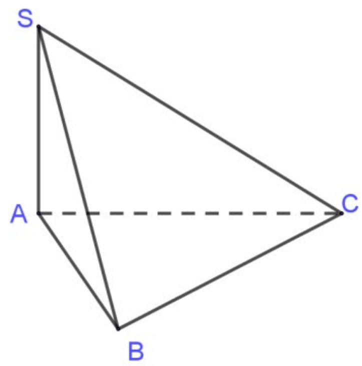
Ta có: $SA \perp (ABC)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa SC và (ABC) là $\widehat{SCA} = \alpha$.

$$\tan\alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{SA}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{2a}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2}} = 1$$

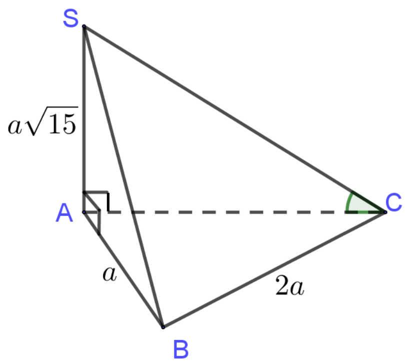
$\Rightarrow \alpha = 45°$.

Câu 33. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{15}\,a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng



A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

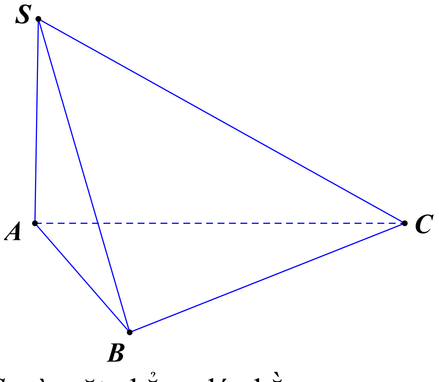


Ta có: $\widehat{\left(SC,(ABC)\right)} = \widehat{SCA}$.

Trong ΔABC vuông tại B, ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}a$.

Trong ΔSAC vuông tại A, ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{15}a}{\sqrt{5}a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60°$.

Câu 34. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = \sqrt{3}a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$ (tham khảo hình vẽ bên).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa SC và (ABC) bằng $\widehat{SCA}$.

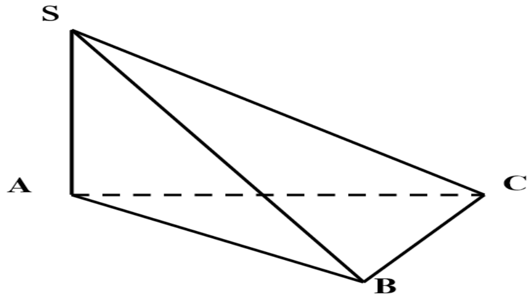
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2} = 2a\sqrt{3}$.

Suy ra $\tan\widehat{ASC} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SAC} = 30^{\circ}$.

Câu 35. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$; $BC = 3a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{30}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải



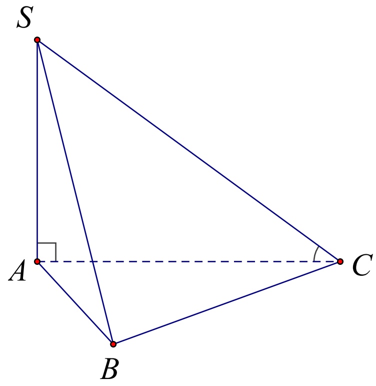
Vì SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên góc giữa SC và đáy là góc SCA.

Ta có $AC = a\sqrt{10}$.

Trong tam giác SAC ta có: $\tan C = \dfrac{SA}{AC} = \sqrt{3}$.

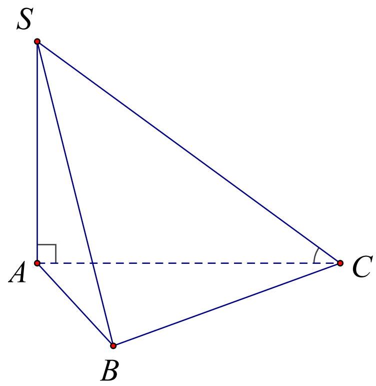
Vậy góc $SCA = 60°$.

Câu 36. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = a, BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (tham khảo hình bên dưới). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng



A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Ta có ΔABC vuông tại B

Có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

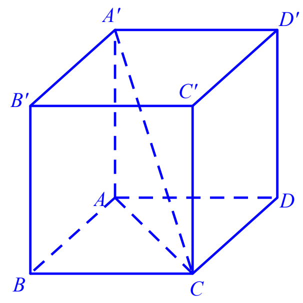
Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SC, AC}\right) = \widehat{SCA}$

Trong ΔSCA có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \widehat{SCA} = 30°$.

Vậy $\left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = 30°$.

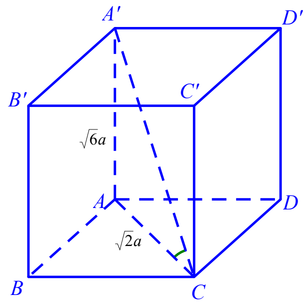
Câu 37. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = BC = a, AA' = \sqrt{6}a$ (tham khảo hình dưới). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:



A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A



Ta có góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa $A'C$ và AC và bằng góc $\widehat{A'CA}$.

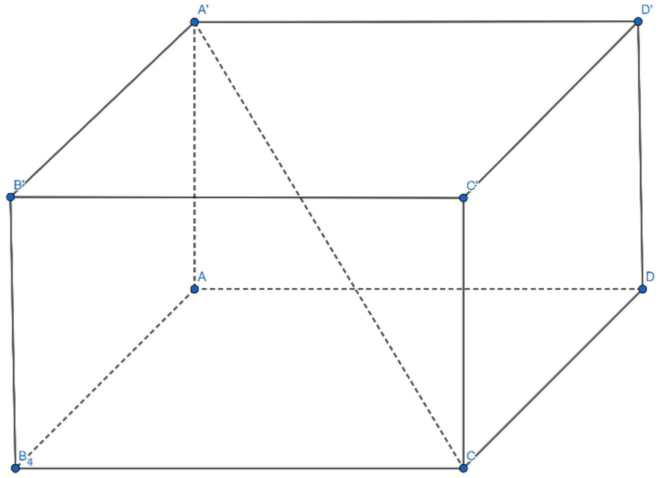
Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $\Delta A'CA$ có $\tan \widehat{A'CA} = \dfrac{A'A}{AC} = \dfrac{\sqrt{6}a}{\sqrt{2}a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{A'CA} = 60°$.

Vậy góc $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ và bằng $60°$.

Câu 38. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2\sqrt{2}a$, $AA' = \sqrt{3}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.



Lời giải

Chọn D

Ta thấy: hình chiếu của $A'C$ xuống $(ABCD)$ là AC do đó

$(A'C;(ABCD)) = (A'C;AC) = \widehat{A'CA}$.

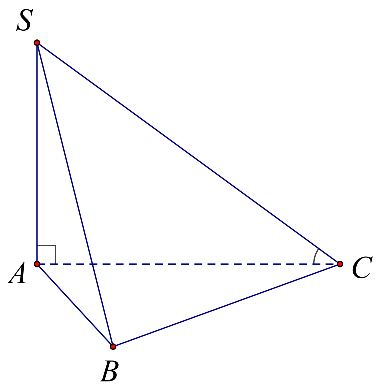
Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 3a$.

Xét tam giác $A'CA$ vuông tại C ta có:

$$\tan(A'CA) = \frac{A'A}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

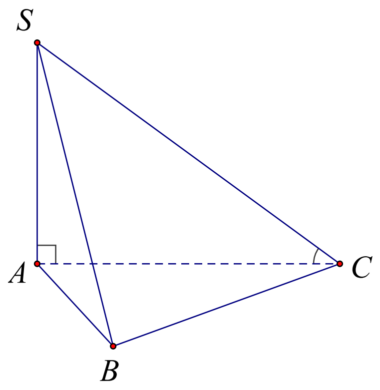
$\Rightarrow \widehat{A'CA} = 30^{\circ}$.

Câu 39. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = a, BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (tham khảo hình bên dưới). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng



A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Ta có ΔABC vuông tại B

Có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SC, AC}\right) = \widehat{SCA}$

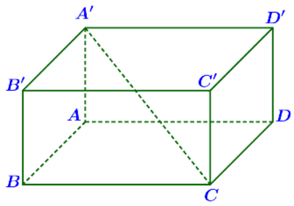
Trong ΔSCA có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \widehat{SCA} = 30°$.

Vậy $\left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = 30°$.

6.2 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Câu 40. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB = AA' = a$, $AD = a\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 30°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn A

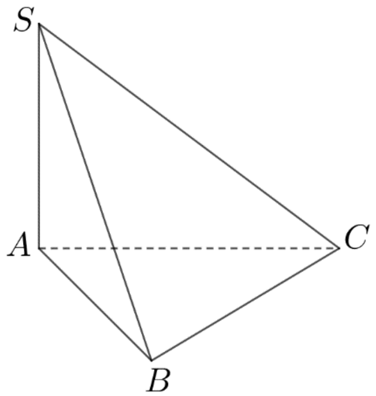
Vì $ABCD$ là hình chữ nhật, có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ nên

$AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$

Ta có $\left(A'C;(ABCD)\right) = (A'C;CA) = \widehat{A'CA}$

Do tam giác $A'AC$ vuông tại A nên $\tan \widehat{A'AC} = \dfrac{AA'}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{A'AC} = 30^\circ$.

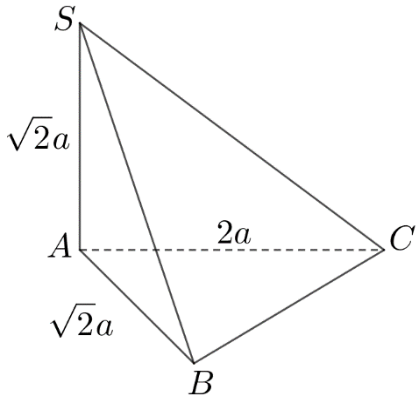
Câu 41. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = \sqrt{2}a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $SB \cap (ABC) = B$; $SA \perp (ABC)$ tại A.

$\Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (ABC) là AB.

$\Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là $\alpha = \widehat{SBA}$.

Do tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ nên $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a = SA$.

Suy ra tam giác SAB vuông cân tại A.

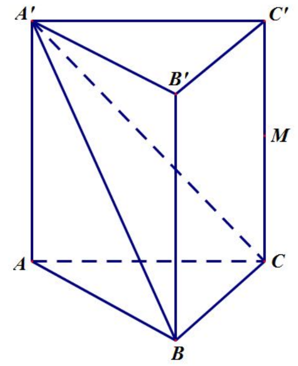
Do đó: $\alpha = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45°.

7. KHOẢNG CÁCH

7.1 Từ chân H của đường cao đến mp cắt đường cao

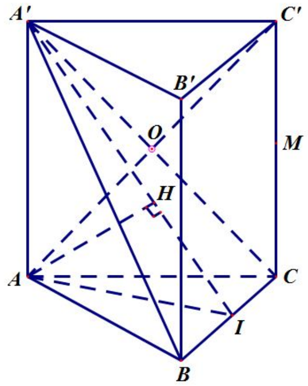
Câu 42. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$. Gọi M là trung điểm của CC' (tham k
Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng



A. $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

C. $\dfrac{2\sqrt{57}a}{19}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{57}a}{19}$.

Lời giải



Ta có : $d\left(M,\left(A'BC\right)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(C';\left(A'BC\right)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A;\left(A'BC\right)\right)=\dfrac{1}{2}.AH=\dfrac{1}{2}.\dfrac{AA'.AI}{\sqrt{AA'^2+AI^2}}(*)$.

Tam giác ABC đều cạnh a có AI là độ dài đường trung tuyến nên $AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có : $(*)\Rightarrow d\left(M,\left(A'BC\right)\right)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4+\frac{3}{4}}}.a=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}a=\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

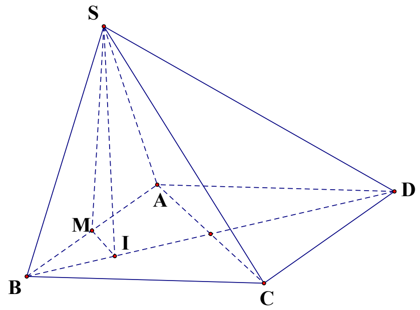
7.2 Từ điểm M (khác H) đến mp cắt đường cao

Câu 43. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (Minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến (SBD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$.

Lời giải

Chọn B



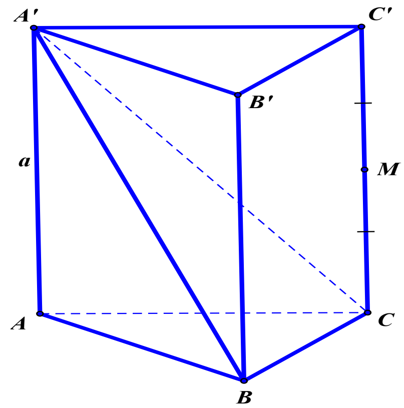
Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow SM \perp (ABCD)$.

Ta có $d(A.(SBD)) = 2d(M,(SBD))$.Kẻ $MI \perp BD$ ta có $(SMI) \perp (SBD)$.

$$d(M,(SBD)) = d(M,SI) = \frac{SM.MI}{\sqrt{SM^2+MI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{2a^2}{16}}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

Vậy $d(A,(SBD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 44. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là trung điểm của CC' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

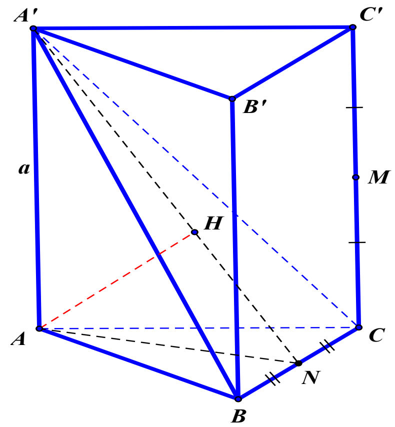
Lời giải

Ta có $d(M;(A'BC)) = \frac{1}{2}d(C';(A'BC)) = \frac{1}{2}d(A;(A'BC))$.

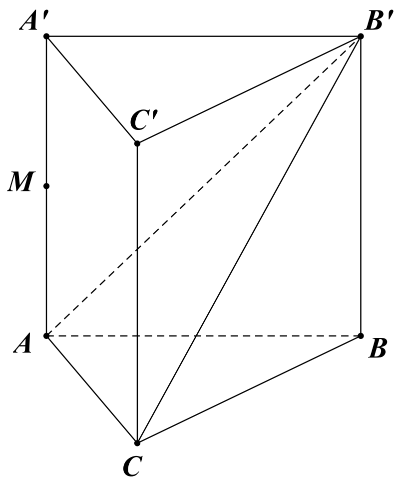
Gọi N là trung điểm của BC; $AH \perp A'N$

$$\Rightarrow d(A;(A'BC)) = AH = \frac{AA'.AN}{\sqrt{AA'^2+AN^2}} = \frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\Rightarrow d(M;(A'BC)) = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

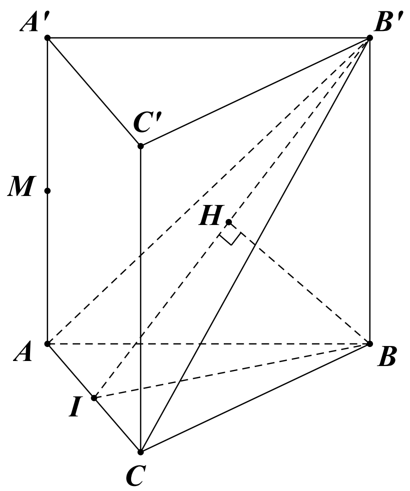


Câu 45. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$. Gọi M là trung điểm của AA' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$ bằng



A. $\dfrac{\sqrt{57}a}{19}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{57}a}{19}$.

Lời giải



- Ta có $d\left(M,\left(AB'C\right)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A',\left(AB'C\right)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(B,\left(AB'C\right)\right)$.
- Gọi I là trung điểm AC, H là hình chiếu của B trên $B'I$.

Ta có $\begin{cases} AC\perp BI \\ AC\perp BB' \end{cases}\Rightarrow AC\perp\left(BB'I\right)\Rightarrow AC\perp BH$.

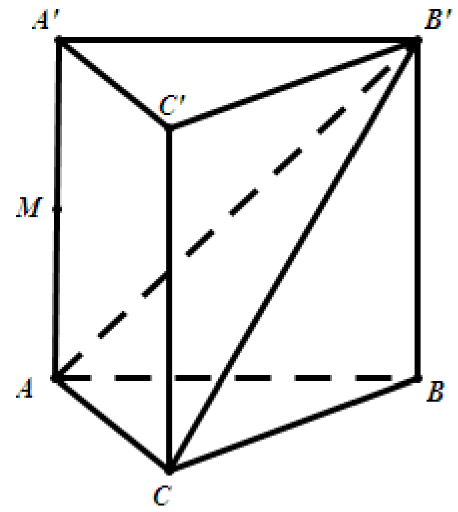
Mà $BH\perp B'I$ nên $BH\perp\left(AB'C\right)$, do đó $d\left(B,\left(AB'C\right)\right)=BH$.

- Có $BI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BB'=2a\Rightarrow BH=\dfrac{BI.BB'}{\sqrt{BI^2+BB'^2}}=\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Vậy $d\left(M,\left(AB'C\right)\right)=\dfrac{1}{2}BH=\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

Nhận xét: Bài toán tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng là bài toán không thể thiếu trong kỳ thi tốt nghiệp THPTQG. Lí do là lời giải cho bài toán này thường đủ ngắn gọn, không đánh đố, phù hợp khuôn khổ của một đề thi trắc nghiệm, đồng thời bài toán này cũng hàm chứa đủ nhiều kiến thức cơ bản về hình học không gian. Nếu thí sinh gặp bài toán này thì không đáng ngại, vì loại toán này có quy trình tính toán rất rõ ràng.

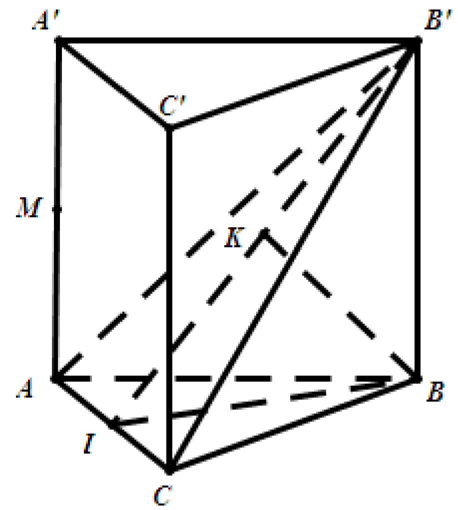
Câu 46. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AA' (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(AB'C\right)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{2}a}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

Lời giải

FB tác giả: Lục Minh Tân



Ta có: $d\left(M,\left(AB'C\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(B,\left(AB'C\right)\right)$

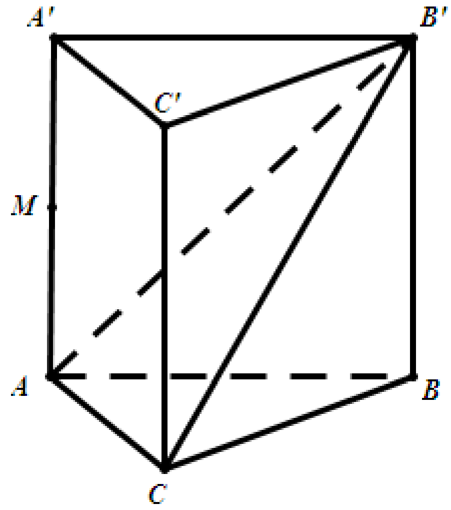
Gọi I là trung điểm của AC và kẻ $BK\perp B'I$ tại E.

Ta có: $\begin{cases} BK\perp B'I \\ BK\perp AC\left(AC\perp B'B, AC\perp BI\right) \end{cases}\Rightarrow BK\perp\left(AB'C\right)$

* Ta có: $BI=\frac{a\sqrt{3}}{2}; B'B=a$ và $BK=\frac{B'B.BI}{\sqrt{B'B^2+BI}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

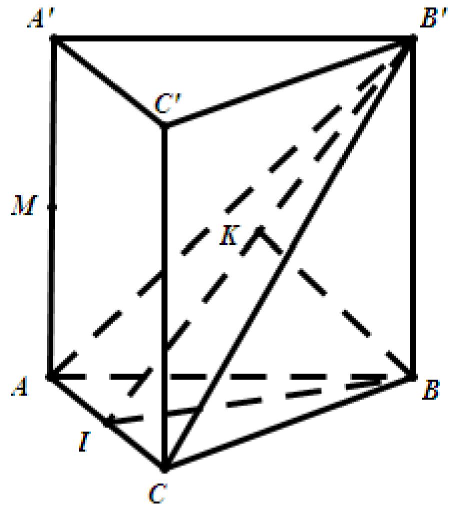
Vậy, $d\left(M,\left(AB'C\right)\right)=\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

Câu 47. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AA' (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(AB'C\right)$ bằng



A. $\dfrac{\sqrt{2}a}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$.

Lời giải



Ta có: $d\left(M,\left(AB'C\right)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(B,\left(AB'C\right)\right)$

Gọi I là trung điểm của AC và kẻ $BK\perp B'I$ tại E.

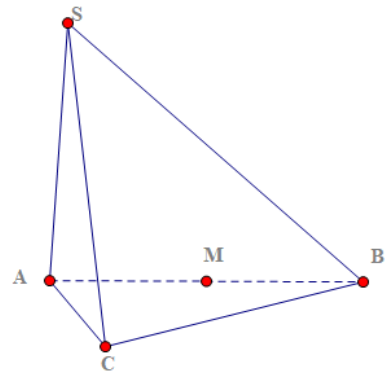
Ta có: $\begin{cases} BK\perp B'I \\ BK\perp AC\left(AC\perp B'B, AC\perp BI\right) \end{cases} \Rightarrow BK\perp\left(AB'C\right)$

* Ta có: $BI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; B'B=a$ và $BK=\dfrac{B'B.BI}{\sqrt{B'B^2+BI}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy, $d\left(M,\left(AB'C\right)\right)=\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$.

7.3 Hai đường chéo nhau (vẽ đoạn v.góc chung)

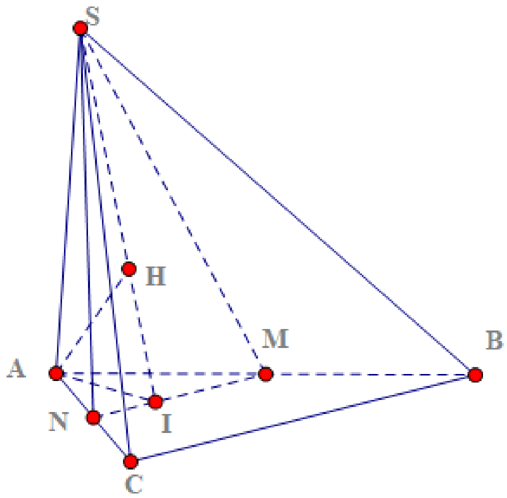
Câu 48. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=2a, AC=4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$ (minh họa như hình vẽ). Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng



A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm cạnh AC, khi đó mặt phẳng $(SMN)//BC$.

Ta có $d(SM,BC)=d(BC,(SMN))=d(B,(SMN))=d(A,(SMN))$.

Gọi AI là đường cao trong tam giác vuông AMN, ta có $AI=\frac{AM.AN}{\sqrt{AM^2+AN^2}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

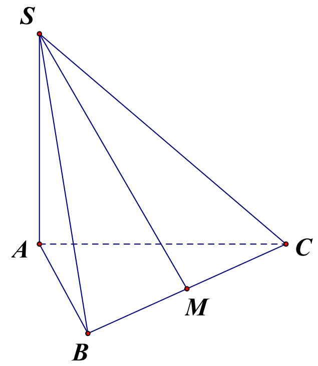
Lại có $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp MN$, suy ra $(SAI)\perp(SMN)$.

Kẻ $AH\perp SI\Rightarrow AH\perp(SMN)\Rightarrow d(A,(SMN))=AH=\frac{AI.SA}{\sqrt{AI^2+SA^2}}=\frac{2a}{3}$.

Vậy $d(SM,BC)=\frac{2a}{3}$.

7.4 Hai đường chéo nhau (mượn mặt phẳng)

Câu 49. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A. $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng

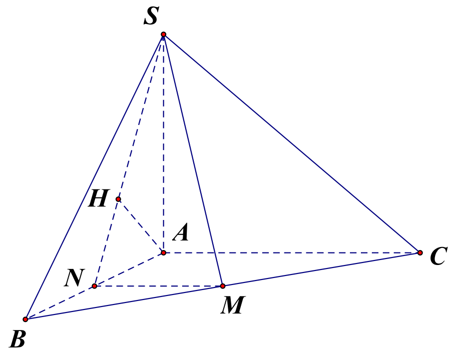


A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1 (Phương pháp hình học cổ điển):



Gọi N là trung điểm của AB, khi đó $MN//AC$.

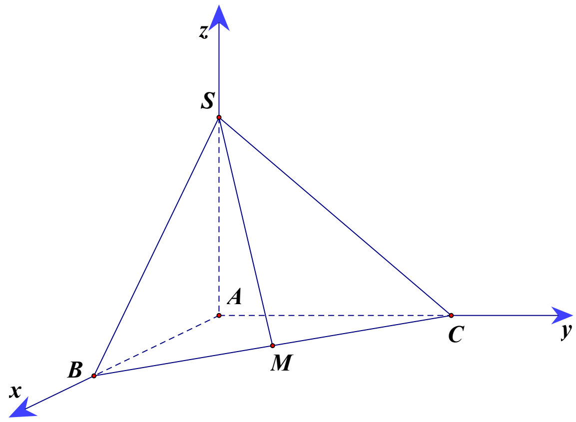
Gọi H là hình chiếu của A lên SN. Dễ dàng chứng minh được $AH\perp(SMN)$.

Suy ra $d(AC,SM)=d(AC,(SMN))=d(A,(SMN))=AH$.

Trong tam giác SAN vuông tại A có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AN^2}$, trong đó $AS=a\sqrt{3}$, $AN=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$.

Suy ra $AH=\frac{a\sqrt{39}}{13}$. Vậy $d(AC,SM)=\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Cách 2 (Phương pháp tọa độ hóa):

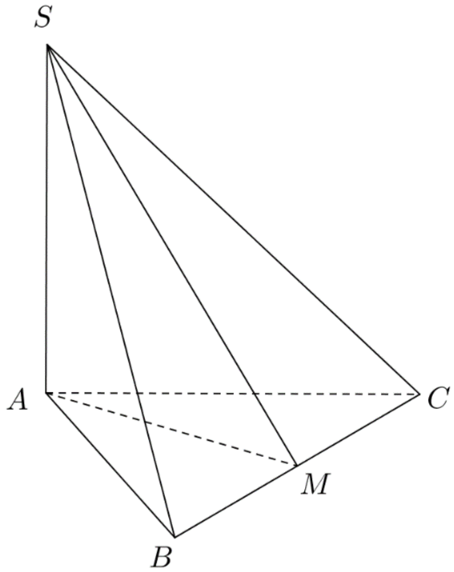


Chọn $a=1$, gắn bài toán vào hệ trục tọa độ $Axyz$, trong đó $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $S(0;0;\sqrt{3})$, $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

Ta có: $d\left(SM,AC\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{AC}\right]\right|}$ với $\overrightarrow{SM}=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};-\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(0;1;0\right)$, $\overrightarrow{AS}=\left(0;0;\sqrt{3}\right)$.

Suy ra $d\left(SM,AC\right)=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$, hay $d\left(SM,AC\right)=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

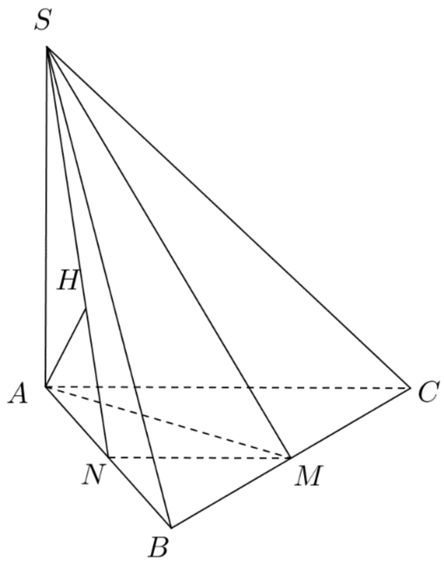
Câu 50. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=2a$, M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa AC và SM là



A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{17}}{17}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi N là trung điểm của AB nên $MN//AC$

Nên $AC//(SMN) \Rightarrow d(AC;SM) = d(AC;(SMN)) = d(A;(SMN))$

Ta có $MN//AC \Rightarrow MN \perp (SAB)$

Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $AH \perp SN$ tại H nên $AH \perp (SMN)$

Nên $d(A;(SMN)) = AH = \dfrac{AN.AS}{\sqrt{AN^2 + AS^2}} = \dfrac{2a\sqrt{17}}{17}$

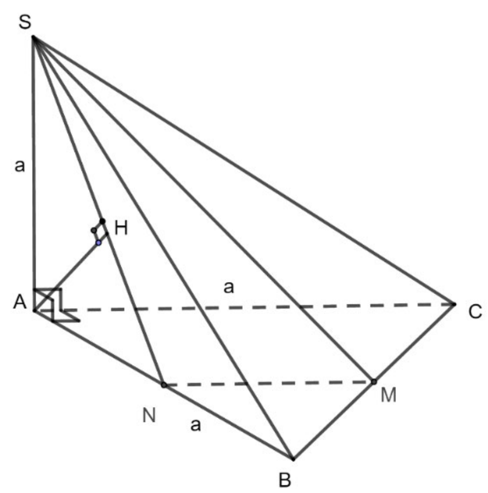
Câu 51. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



Gọi N là trung điểm AB, ta có $AC//MN$

Suy ra $AC//(AMN) \Rightarrow d(AC,SM) = d(AC,(SMN))$

$= d(A,(SMN))$.

Ta có $\left.\begin{array}{l}(SAB) \perp (SMN)(MN \perp (SAB)) \\ (SAB) \cap (SMN) = SN \\ AH \perp SN\end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SMN)$

Suy ra $AH = d(A,(SMN))$.

$$AH = \frac{AS.AN}{\sqrt{AS^2 + AN^2}} = \frac{a.\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}a}{5}.$$

Cách 2: (Tọa độ hóa)

Chọn hệ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, C, S.

Chọn $a=2$, ta có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;2;0)$, $S(0;0;2)$. Suy ra $M(1;1;0)$.

Ta có $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(0;2;0)\\ \overrightarrow{SM}=(1;1;-2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SM}\right]=(-4;0;-2)$

$\overrightarrow{AM}=(1;1;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{AM}=(-4).1+0.1+(-2).0=-4$.

Vậy $d(AC,SM)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SM}\right]\right|}=\dfrac{|-4|}{\sqrt{(-4)^2+0^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

8. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

8.1 Xét tính đơn điệu của hàm số (biết đồ thị, BBT của y)

Câu 52. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 53. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 54. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$

Câu 55. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng: $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Câu 56. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

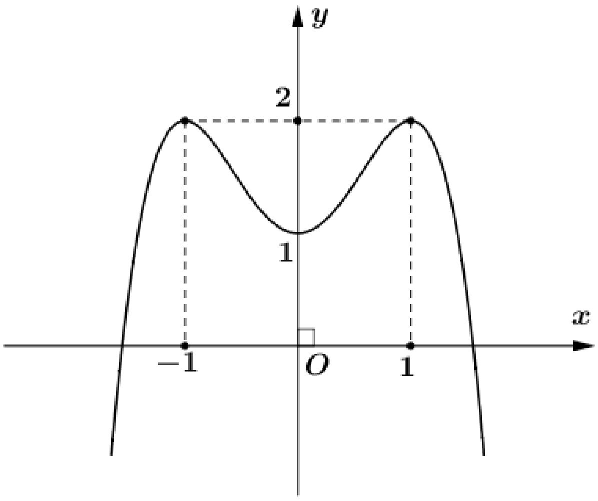
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;0)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-\infty;-3)$

Lời giải

Từ BBT ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên hai khoảng $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$

Câu 57. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



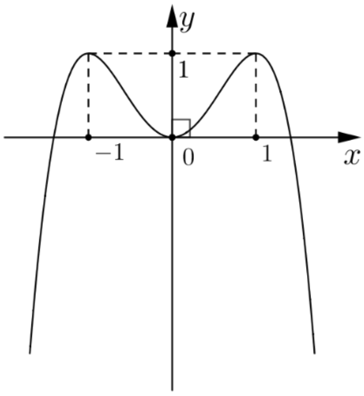
A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

Qua đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(0;1)$.

Câu 58. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(-\infty;-1\right)$. **C.** $\left(0;1\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

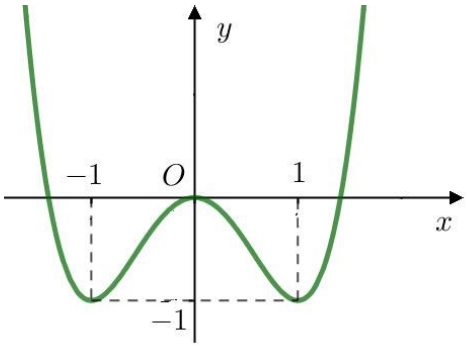
Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có:

Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$, đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(0;1\right)$.

Câu 59. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $(-1;0)$. B. $(-\infty;-1)$. C. $(0;+\infty)$. D. $(0;1)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 60. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;0)$. B. $(-3;3)$. C. $(0;3)$. D. $(-\infty;-3)$

Lời giải

Từ BBT ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên hai khoảng $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$

Câu 61. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. B. $(0;1)$. C. $(-1;0)$. D. $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $f'(x)<0$ trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty) \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$.

8.2 ĐK để hàm số-bậc ba đơn điệu trên khoảng K

Câu 62. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;1]$ B. $(-\infty;4]$ C. $(-\infty;1)$ D. $(-\infty;4)$

Lời giải

Chọn B

Ta có.

$y' = 3x^2 - 6x + 4 - m$. $ycbt \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 - m \ge 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \le 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le \min\limits_{(2;+\infty)} g(x)$ với $g(x) = 3x^2 - 6x + 4$

Ta có.

$g'(x) = 6x - 6$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	2		$+\infty$
$g'(x)$		0		$+$	
$g(x)$			4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \le 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy: $m \in (-\infty; 4]$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 63. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(-\infty;5]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 5 - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 - m \ge 0, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \le 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ trên khoảng $(2;+\infty)$.

Có $f'(x) = 6x - 6$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).

Bảng biến thiên

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $m \le 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \le 5$.

Vậy $m \in (-\infty;5]$.

Câu 64. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;-1]$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2 - m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+2-m\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$ $m\le 3x^2-6x+2,\forall x\in(2;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x)=3x^2-6x+2,\forall x\in(2;+\infty)$.

$f'(x)=6x-6$; $f'(x)=0\Rightarrow 6x-6=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2		$+\infty$
$f'(x)$		0		$+$	
$f(x)$			2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $m\le 2$. Vậy $m\in(-\infty;2]$.

Câu 65. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

* TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

* Ta có: $f'(x)=x^2+2mx+4$

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ điều kiện là $f'(x)\ge 0;\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'=m^2-4\le 0\Leftrightarrow -2\le m\le 2$

mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

8.3 ĐK để hàm số-nhất biến đơn điệu trên khoảng K

Câu 66. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ là

A. $[4;7)$. **<u>B.</u>** $(4;7]$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

$y'=\frac{m-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;7)\Leftrightarrow \begin{cases} y'>0 \\ -m\notin(-\infty;-7)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m>4 \\ -m\ge -7\end{cases}\Leftrightarrow 4<m\le 7$.

Vậy $m\in(4;7]$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$.

Câu 67. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

A. $(5;+\infty)$. **<u>B.</u>** $(5;8]$. **C.** $[5;8)$. **D.** $(5;8)$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)\Leftrightarrow\begin{cases}y'>0,\forall x\in(-\infty;-8)\\x\neq -m\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m-5}{(x+m)^2}>0,\forall x\in(-\infty;-8)\\-m\notin(-\infty;-8)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>5\\-m\geq -8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>5\\m\leq 8\end{cases}\Leftrightarrow 5<m\leq 8$.

Vậy $m\in(5;8]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 68. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Tìm m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$.

<u>A.</u> $(2;5]$. **B.** $[2;5)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(2;5)$.

Lời giải

Điều kiện: $x\neq -m$.

Ta có: $y'=\dfrac{m-2}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)\Leftrightarrow\begin{cases}y'>0\\-m\notin(-\infty;-5)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-2>0\\-m\geq -5\end{cases}\Leftrightarrow 2<m\leq 5.$

Vậy $m\in(2;5]$.

Nhận xét: Bài toán này không mới, tuy nhiên các bạn học sinh học không kĩ vẫn có thể bị sai khi thiếu điều kiện $-m\notin(-\infty;-5)$, và dẫn tới sai lầm khi chọn C làm đáp án.

Câu 69. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là

<u>A.</u> $(3;6]$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;6)$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{m-3}{(x+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)\Leftrightarrow y'>0\ \forall x\in(-\infty;-6)$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}m-3>0\\-m\notin(-\infty;-6)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>3\\-m\geq -6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>3\\m\leq 6\end{cases}\Leftrightarrow 3<m\leq 6.$

Câu 70. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là

A. $(3;6]$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;6)$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{m-3}{(x+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)\Leftrightarrow y'>0\ \forall x\in(-\infty;-6)$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-3>0\\-m\notin(-\infty;-6)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>3\\-m\geq -6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>3\\m\leq 6\end{cases}\Leftrightarrow 3<m\leq 6.$$

8.4 Đơn điệu liên quan hàm hợp, hàm ẩn

Câu 71. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dâu của $f'(x)$ như sau:

hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn B

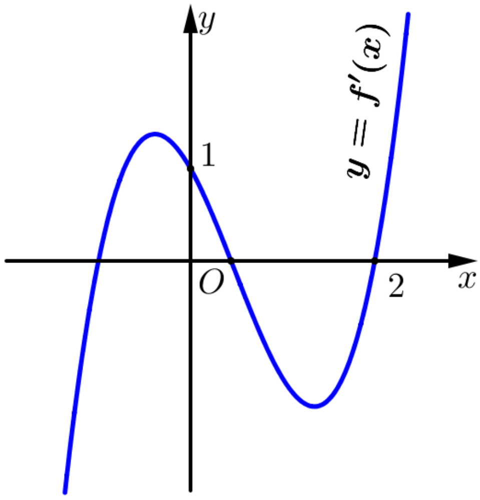
Ta có: $y'=-2.f'(3-2x)$.

$$y'\leq 0\Leftrightarrow -2.f'(3-2x)\leq 0\Leftrightarrow f'(3-2x)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3\leq 3-2x\leq -1\\3-2x\geq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\leq x\leq 3\\x\leq 1\end{array}\right..$$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $(2;3)$ và $(-\infty;1)$.

8.5 Ứng dụng tính đơn điệu vào PT, BPT, HPT, BĐ

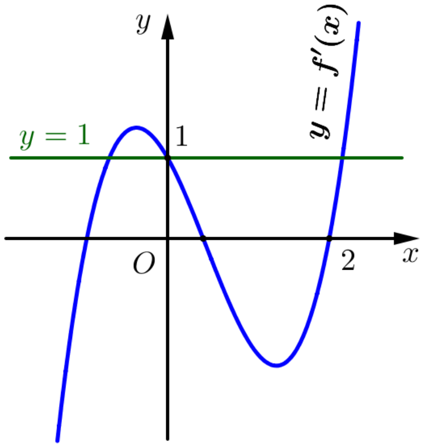
Câu 72. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. bất phương trình $f(x)<x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi



A. $m \ge f(2)-2$. **B.** $m \ge f(0)$. **C.** $m > f(2)-2$. **D.** $m > f(0)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $f(x) < x+m \Leftrightarrow g(x) = f(x) - x < m$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy: $g'(x) = f'(x) - 1 < 0 \Rightarrow \max\limits_{(0;2)} g(x) = g(0) = f(0)$.

Do đó: bất phương trình $f(x) < x+m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi $\max\limits_{(0;2)} g(x) \le m \Rightarrow f(0) \le m$.

Câu 73. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n \le 14$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng ba số thực $a \in (-1;1)$ thỏa mãn $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 14. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C.

Xét $f(x) = \dfrac{2}{n}.x^m - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ trên $(-1;1)$

Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{2m}{n}x^{m-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

Theo đề bài $f(x) = 0$ có ba nghiệm nên $\dfrac{2m}{n}x^{m-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ có ít nhất hai nghiệm

Xét đồ thị của hàm $y = x^{m-1}; y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, suy ra $m-1$ chẵn và $m-1>0$

Suy ra $m \in \{3;5;7;9;11;13\}$. Khi đó $f'(x)=0$ có nghiệm $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$

Phương trình có 3 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) > 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{n} > \ln\left(\sqrt{2}+1\right) \\ -\dfrac{2}{n} < \ln\left(\sqrt{2}-1\right) \end{cases} \Leftrightarrow n \le 2 \Rightarrow n = \{1;2\}$

$n \in \{1;2\}$ và $m \in \{3;5;7;9;11;13\}$, do $m+n \le 14$ nên ta có 11 cặp $(m;n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

9. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

9.1 Tìm cực trị của hàm số cho bởi công thức của y, y’

Câu 74. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.

Ta có phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm $x = 0$ và $x = -2$ (là nghiệm kép)

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

Câu 75. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số có đúng 1 điểm cực đại.

Câu 76. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu.

Câu 77. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)(x-4)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x(x+1)(x-4)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=4\end{array}\right..$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘	$f(-1)$	↗	$f(0)$	↘	$f(4)$	↗	

Vậy hàm số đã cho có một điểm cực đại.

9.2 Tìm cực trị, điểm cực trị, số điểm cực trị (khi biết đồ thị, BBT của y)

Câu 78. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

Lời giải

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại.

A. $x=2$ **B.** $x=1$ **C.** $x=-1$. **D.** $x=-3$.

Chọn C

Quan sát bảng biến thiên ta được:

Nghiệm của $y'=f'(x)=0$ là $x=-1$. Đổi dấu từ âm sang dương qua nghiệm $x=-1$ nên đạt cực tiểu tại $x=-1$

Câu 79. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** **[Mức độ 1]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$ suy ra giá trị cực tiểu của hàm số bằng -5.

Câu 80. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số có giá trị cực đại bằng 2.

Câu 81. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có điểm cực tiểu $x=-2$ và giá trị cực tiểu $y=-1$.

Câu 82. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ bằng 2.

Câu 83. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta có: hàm số đạt cực đại tại điểm $x=3$.

Câu 84. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn C

Từ BBT của hàm số $f(x)$ suy ra điểm cực đại của hàm số $f(x)$ là $x=1$.

Câu 85. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn D

Câu 86. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			2				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-3		

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ bằng 2.

Câu 87. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		+	0	$-$	0	+	
y			1				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-2		

Hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: y' đổ dấu từ dương sang ấm khi qua $x=-1$.

Vậy hàm số đạt cực đai tại điểm $x=-1$.

9.3 Tìm cực trị, điểm cực trị, số điểm cực trị (khi biết đồ thị, BXD của y')

Câu 88. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Từ bảng xét dấu ta thấy: $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=-1$ và $x=1$.

Mà hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực đại là $x=-1$ và $x=1$.

Câu 89. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu cuả $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $x=1$.

Câu 90. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ và $x=2$.

Vậy hàm số có 2 cực tiểu.

Nhận xét: Câu này kiểm tra hiểu biết của học sinh về mối quan hệ giữa điểm cực trị của hàm số và đạo hàm của hàm số đó. Một số bạn sẽ chọn D là đáp án, vì thấy tại $x=2$ thì đạo hàm không xác định. Thật ra, hàm số có thể đạt cực trị tại những điểm (thuộc tập xác định) mà đạo hàm không xác định, chẳng hạn hàm số $f(x)=|x|$ không có đạo hàm tại $x=0$ (các em thử nghĩ xem tại sao nhé), nhưng có cực tiểu tại $x=0$.

Câu 91. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Quan sát bảng xét dấu $f'(x)$ ta có: $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi đi qua các điểm $x=\pm 2$.

Do hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số có 2 điểm cực đại.

Câu 92. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Quan sát bảng xét dấu $f'(x)$ ta có: $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi đi qua các điểm $x=\pm 2$.

Do hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số có 2 điểm cực đại.

Câu 93. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x=-2$ và $x=0$ nên hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

9.4 Cực trị liên quan hàm hợp, hàm ẩn

Câu 94. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f'(x)=0$ có các nghiệm tương ứng là $\left[\begin{array}{l} x=a, a\in(-\infty;-1) \\ x=b, b\in(-1;0) \\ x=c, c\in(0;1) \\ x=d, d\in(1;+\infty) \end{array}\right.$

.

x	$-\infty$			-1		0			1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	a	-3	↗ b	2	↘	c	-1	↗ d	$+\infty$

Xét hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)\Rightarrow y'=2(x-1)f'\left(x^2-2x\right)$.

Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow 2(x-1)f'\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=1 & \\x^2-2x=a & (1)\\x^2-2x=b & (2)\\x^2-2x=c & (3)\\x^2-2x=d & (4)\end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x)=x^2-2x$ ta có $h(x)=x^2-2x=-1+(x-1)^2\geq -1,\forall x\in\mathbb{R}$ do đó

Phương trình $x^2-2x=a,(a<-1)$ vô nghiệm.

Phương trình $x^2-2x=b,(-1<b<0)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ không trùng với nghiệm của phương trình (1).

Phương trình $x^2-2x=c,(0<c<1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_3;x_4$ không trùng với nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2).

Phương trình $x^2-2x=d,(d>1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_5;x_6$ không trùng với nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2) và phương trình (3).

Vậy phương trình $y=0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 95. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hàm số $f(x)$ bậc 4 có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Ta chọn hàm bậc bốn $y=f(x)=5x^4-10x^2+3$ có bảng biến thiên như đề cho.

Ta có $g'(x)=4x^3\left[f(x+1)\right]^2+x^4.2.f(x+1)f'(x+1)=0$

$\Leftrightarrow 2x^3.f(x+1).\left[2f(x+1)+xf'(x+1)\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^3=0 & (1)\\f(x+1)=0 & (2)\\2f(x+1)+xf'(x+1)=0 & (3)\end{array}\right.$

+ Phương trình (1) có nghiệm bội $x=0$.

+ Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta có phương trình $f\left(x\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt $x\neq 1\Rightarrow$ Phương trình (2): $f\left(x+1\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt $x\neq 0$.

+ Giải (3): Đặt $x+1=t\Rightarrow x=t-1$, phương trình (3) trở thành:

$$2f\left(t\right)+\left(t-1\right).f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow 2\left(5t^4-10t^2+3\right)+\left(t-1\right)\left(20t^3-20t\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 30t^4-20t^3-40t^2+20t+6=0 \qquad (3')$$

Bấm MTCT thấy phương trình (3') có 4 nghiệm phân biệt $t\neq 1$.

$\Rightarrow$ Phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt $x\neq 0$.

Ngoài ra, nghiệm của phương trình (2) không phải là nghiệm của phương trình (3) vì những giá trị x thỏa mãn $f\left(x+1\right)=0$ không thỏa mãn phương trình (3).

Do đó phương trình $g'\left(x\right)=0$ có 9 nghiệm phân biệt nên hàm số $g\left(x\right)=x^4\left[f\left(x+1\right)\right]^2$ có 9 điểm cực trị.

Câu 96. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hàm số bậc bốn $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f\left(x\right)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=x^2\left[f\left(x-1\right)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Ta có hàm số $g\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm là

$$g'\left(x\right)=2x.\left[f\left(x-1\right)\right]^4+4.x^2.f'\left(x-1\right).\left[f\left(x-1\right)\right]^3=2x\left[f\left(x-1\right)\right]^3.\left(f\left(x-1\right)+2xf'\left(x-1\right)\right)$$

Cho $g\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1=0\\ f\left(x-1\right)=0\\ f\left(x-1\right)+2x.f'\left(x-1\right)=0\end{array}\right.$.

* Với phương trình $f\left(x-1\right)=0$.

Vì $f\left(x\right)$ là hàm bậc bốn và có bảng biến thiên như trên ta thấy phương trình $f\left(x-1\right)=0$ có bốn nghiệm đơn phân biệt x_2,x_3,x_4,x_5 khác x_1.

* Với phương trình $f\left(x-1\right)+2xf'\left(x-1\right)=0$

Ta thấy phương trình không nhận các số x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 làm nghiệm.

Gọi $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$, vì $f'\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $-1;0;1$ và $f\left(0\right)=-1,f\left(1\right)=3$ nên $c=-1,a=-4,b=8$, suy ra $f\left(x\right)=-4x^4+8x^2-1$.

Đặt $t=x-1$, phương trình $f\left(x-1\right)+2xf'\left(x-1\right)=0$ trở thành $f\left(t\right)+2\left(t+1\right)f'\left(t\right)=0$

$\Leftrightarrow -4t^4+8t^2-1+2\left(t+1\right)\left(-16t^3+16t\right)=0\Leftrightarrow -36t^4-32t^3+40t^2+32t-1=0$.

Xét hàm số $h\left(t\right)=-36t^4-32t^3+40t^2+32t-1$ có $h'\left(t\right)=-144t^3-96t^2+80t+32$, cho $h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-1;x=-\dfrac{1}{3},x=\dfrac{2}{3}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	$\frac{581}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

Do đó phương trình $h(t)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt hay phương trình $f(x-1)+2xf'(x-1)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt x_6,x_7,x_8,x_9. Hay hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị là $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9$.

Câu 97. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\left[f(x-1)\right]^2$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Cách 1. Từ giả thiết đề bài đã cho ta thấy rằng hàm số $f(x)$ có dạng $f(x)=ax^4+bx^2+c$.

Sử dụng giả thiết ta được

$f(x)=4x^4-8x^2+3 \Rightarrow f'(x-1)=16(x-1)^3-16(x-1)=16x(x-1)(x-2)$.

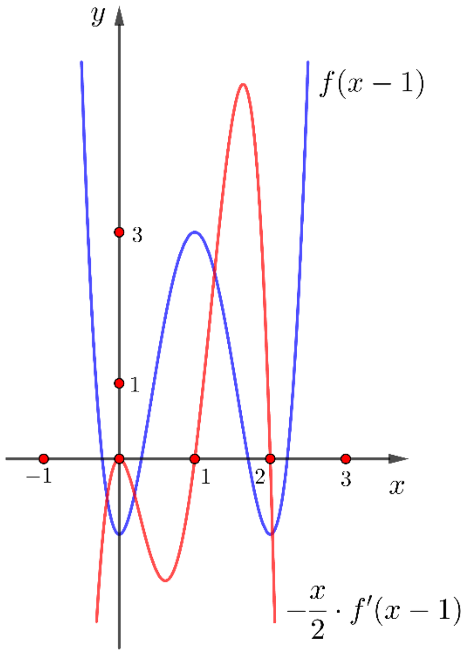
Ta có

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3\left[f(x-1)\right]^2+2x^4.f(x-1).f'(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x-1)=0 \\ 2f(x-1)+x.f'(x-1)=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Xét phương trình $(*) \Leftrightarrow f(x-1)=-\frac{x}{2}.f'(x-1)$, ta có $-\frac{x}{2}.f'(x-1)=-8x^2(x-1)(x-2)$.

Biểu diễn hai hàm số $f(x-1)$ và $-\frac{x}{2}.f'(x-1)$ trên cùng một đồ thị đồ thị ta có



Như vậy phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt.

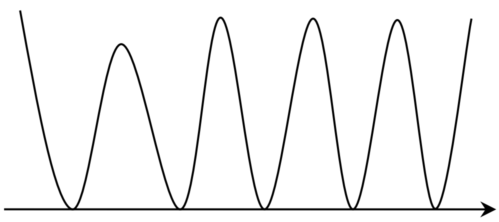
Xét phương trình $f(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=\frac{3}{2}\\(x-1)^2=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}+1\\x=\frac{5}{4}\\x=\frac{3}{4}\end{array}\right.$.

Thay 4 nghiệm này vào phương trình $(*)$ thì ta thấy rằng các nghiệm của phương trình này không phải là nghiệm của phương trình $(*)$.

Vậy hàm số đã cho có tất cả 9 điểm cực trị.

Cách 2.

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy rằng phương trình $f(x-1)=0$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0, suy ra phương trình $g(x)=x^4\left[f(x-1)\right]^2=0$ có tất cả 5 nghiệm bội chẵn, khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ sẽ có dạng như sau



Như vậy hàm $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 98. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x+1)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5.

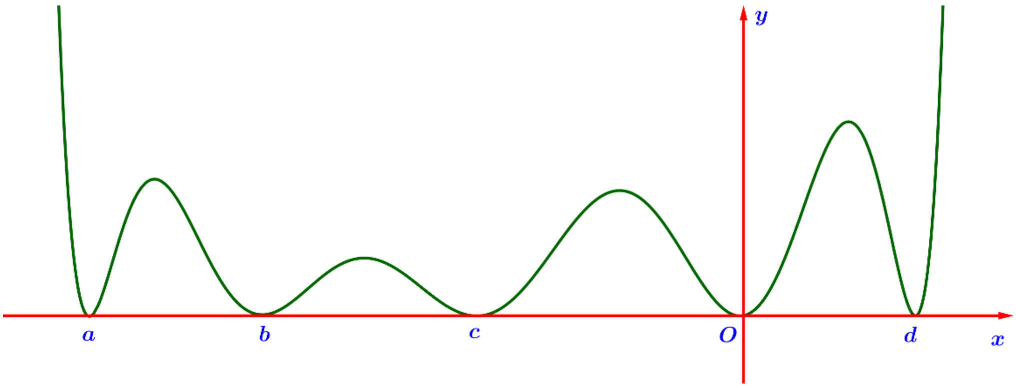
Lời giải

Nhận xét $\begin{cases} g(x)\geq 0, \forall x \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=+\infty \end{cases}$,

Cho $g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ \left[f(x+1)\right]^4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x+1)=0 \end{array}\right.$

Nhận thấy: Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang trái 1 đơn vị ta thu được đồ thị của $f(x+1)$

Do đó $f(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a,\ a<-2 \\ x=b,\ -2<b<-1 \\ x=c,\ -1<c<0 \\ x=d,\ d>0 \end{array}\right.$

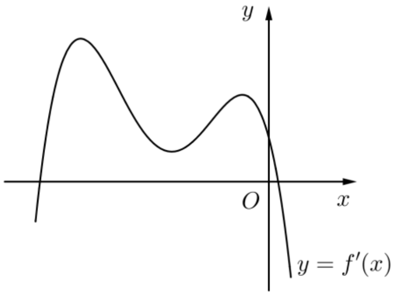


Vì thế $g(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt

Hay đồ thị $g(x)$ có 5 điểm tiếp xúc với trục hoành

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 cực trị.

Câu 99. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x^3)+x\right|$ là



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $h\left(x\right)=f\left(x^3\right)+x\Rightarrow h'\left(x\right)=3x^2f'\left(x^3\right)+1=0\Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=-\dfrac{1}{3x^2}$

Đặt $t=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{t}$ thế vào phương trình trên ta được $f'\left(t\right)=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$

Xét hàm số $y=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\Rightarrow y'=\dfrac{2}{9\sqrt[3]{t^5}}$ đổi dấu khi qua 0 và đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$. Khi vẽ đồ thị trên cùng một mặt phẳng tọa độ với đồ thị hàm số $y=f'\left(t\right)$ ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thuộc góc phần từ thứ 3 và 4, gọi 2 giao điểm lần lượt là $t_1<0,t_2>0\Rightarrow x_1=\sqrt[3]{t_1},x_2=\sqrt[3]{t_2}$. Như vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $h\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	x_1	$+$		$+$	0	$-$	
y		↘		↗	0	↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $h\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt và hàm số $h\left(x\right)$ có 2 điểm cực trị không nằm trên trục hoành, do đó hàm số $g\left(x\right)=\left|h\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 100. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số bậc bốn $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	3	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=x^2\left[f\left(x+1\right)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5.

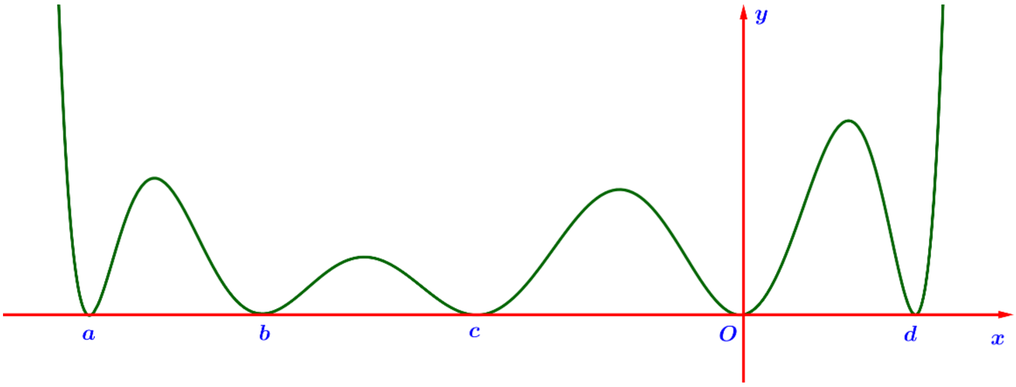
Lời giải

Nhận xét $\begin{cases} g(x) \geq 0, \forall x \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$,

Cho $g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ \left[f(x+1)\right]^4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x+1) = 0 \end{array}\right.$

Nhận thấy: Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang trái 1 đơn vị ta thu được đồ thị của $f(x+1)$

Do đó $f(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a,\ a < -2 \\ x = b,\ -2 < b < -1 \\ x = c,\ -1 < c < 0 \\ x = d,\ d > 0 \end{array}\right.$



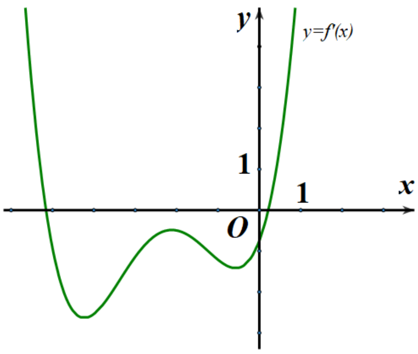
Vì thế $g(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt

Hay đồ thị $g(x)$ có 5 điểm tiếp xúc với trục hoành

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 cực trị.

9.5 Cực trị liên quan hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 101. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left|f\left(x^3\right) - x\right|$ là



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét $h(x) = f\left(x^3\right) - x$

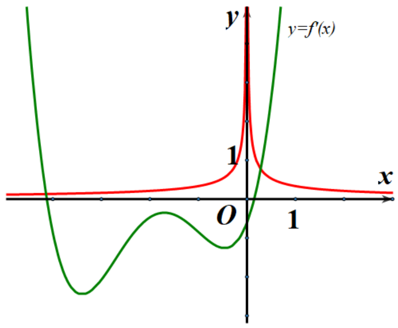
Có $h'(x)=3x^2f'(x^3)-1$

$h'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2f'(x^3)-1=0\Leftrightarrow f'(x^3)=\dfrac{1}{3x^2}\ \ (x\neq 0)\ \ (1)$

Đặt $x^3=t\Rightarrow x^2=\sqrt[3]{t^2}$ phương trình (1) trở thành:

$f'(t)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\ \ (t\neq 0)\ \ (2)$

Vẽ đồ thị hàm $y=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm $y=f'(x)$.



Dựa vào đồ thị ta có:

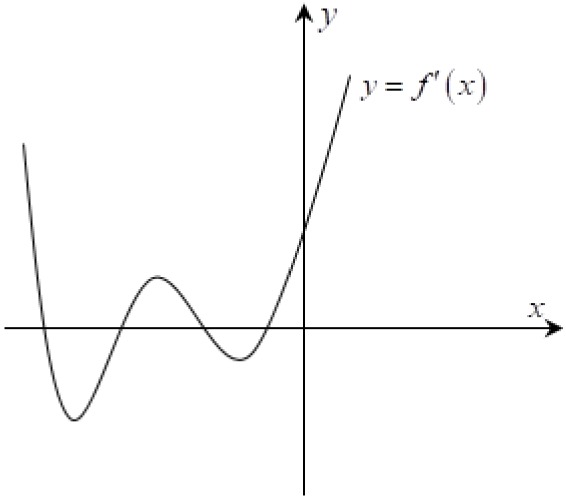
$f'(t)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=b<0\\ t=a>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3=b<0\\ x^3=a>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt[3]{b}<0\\ x=\sqrt[3]{a}>0\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\sqrt[3]{b}$		0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↗	$f(b)-\sqrt[3]{b}$	↘	0	↘	$f(a)-\sqrt[3]{a}$	↗	
$g(x)=\lvert h(x)\rvert=\lvert f(x^3)-x\rvert$	↘ 0 ↗		$f(b)-\sqrt[3]{b}$	↘	0	↗	$-f(a)+\sqrt[3]{a}$	↘ 0 ↗	

Dựa vào BBT ta thầy hàm số $g(x)=\left|f(x^3)-x\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 102. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x^4)-x^2\right|$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

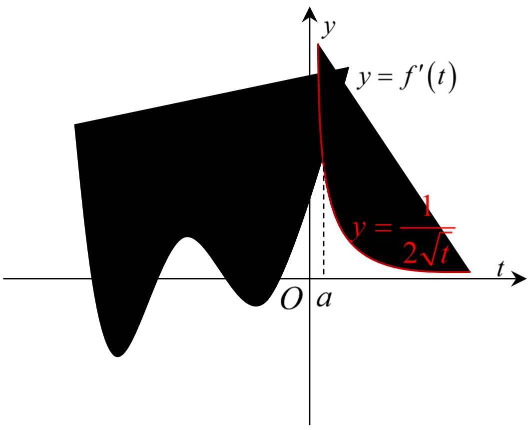
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f(x^4)-x^2$ có $h'(x)=4x^3f'(x^4)-2x$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^4)=\dfrac{1}{2x^2}\quad(*)\end{array}\right.$$

Xét phương trình $(*)$: Đặt $t=x^4$ thì $(*)$ thành $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ với $t>0$.



Dựa vào đồ thị, phương trình $(*)$ có duy nhất một nghiệm $a>0$.

Khi đó, ta được $x=\pm\sqrt[4]{a}$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f(x^4)-x^2$

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{a}$		0		$\sqrt[4]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x^4)-x^2\right|$ bằng số cực trị của hàm $h(x)=f(x^4)-x^2$ và số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình $h(x)=0$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f(x)$ thì số cực trị của $g(x)$ là 5.

10. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

10.1 GTLN, GTNN của f(x) trên đoạn [a;b] biết biểu thức f(x)

Câu 103. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. -16. **B.** 20. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=3x^2-3$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1\in[-3;3]$

$f(-3)=-16; f(3)=20; f(-1)=4; f(1)=0$

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=20$.

Câu 104. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-21x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -36. **B.** $-14\sqrt{7}$. **C.** $14\sqrt{7}$. **D.** -34.

Lời giải

Đạo hàm $f'(x)=3x^2-21,\ x\in(2;19)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{7}\quad (T/m) \\ x=-\sqrt{7}\ (L) \end{array}\right..$$

Ta có $f(2)=-34;\ f(\sqrt{7})=-14\sqrt{7};\ f(19)=6460$.

Do vậy $\underset{x\in[2;19]}{Min} f(x)=-14\sqrt{7}$, đạt được khi $x=\sqrt{7}$.

Câu 105. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $20\sqrt{10}$. **B.** -63. **C.** $-20\sqrt{10}$. **D.** -52.

Lời giải

Ta có $f'(x)=3x^2-30$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{10}$.

Hàm số $f(x)=x^3-30x$ liên tục trên đoạn $[2;19]$ và $f(2)=-52; f(\sqrt{10})=-20\sqrt{10}; f(19)=6289$.

So sánh các giá trị trên, ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng $-20\sqrt{10}$

Vậy chọn. **C.**

Câu 106. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -72. **B.** $-22\sqrt{11}$. **C.** -58. **D.** $22\sqrt{11}$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=3x^2-33$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2=11\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{11}$

Xét trên $[2;19]$ ta có $x=\sqrt{11}\in[2;19]$

Ta có $f(2)=-58; f\left(\sqrt{11}\right)=-22\sqrt{11}; f(19)=6232$.

Vậy $\min\limits_{[2;19]} f(x)=f\left(\sqrt{11}\right)=-22\sqrt{11}$

Câu 107. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2-4$ trên $[0;9]$ bằng

A. -28. **B.** -4. **C.** -13. **D.** -29.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;9]$.

Có $f'(x)=4x^3-20x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5}\notin[0;9] \end{array}\right.$

Ta có $f(0)=-4$, $f\left(\sqrt{5}\right)=-29$, $f(9)=5747$

Do đó $\min\limits_{[0;9]} f(x)=f\left(\sqrt{5}\right)=-29$.

Câu 108. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-4$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -39. **B.** -40. **C.** -36. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=4x^3-24x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

Tính được: $f(0)=-4$; $f(9)=5585$ và $f\left(\sqrt{6}\right)=-40$.

Suy ra $\min\limits_{[0;9]} f(x)=-40$.

Câu 109. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2-2$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -2. **B.** -11. **C.** -26. **D.** -27.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=4x^3-20x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-20x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin(0;9) \\ x=\sqrt{5}\in(0;9) \\ x=-\sqrt{5}\notin(0;9) \end{array}\right.$

$f(0)=-2$; $f\left(\sqrt{5}\right)=-27$; $f(9)=5749$.

Vậy $\min\limits_{[0;9]} f(x)=-27$.

Câu 110. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -72 . **B.** $-22\sqrt{11}$. **C.** -58 . **D.** $22\sqrt{11}$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=3x^2-33$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=11 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{11}$

Xét trên $[2;19]$ ta có $x=\sqrt{11}\in[2;19]$

Ta có $f(2)=-58; f(\sqrt{11})=-22\sqrt{11}; f(19)=6232$.

Vậy $\min\limits_{[2;19]} f(x)=f(\sqrt{11})=-22\sqrt{11}$

Câu 111. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-10x^2+2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

A. 2. **B.** -22. **C.** -23. **D.** -7.

Lời giải

Chọn B

$y=x^4-10x^2+2 \Rightarrow y'=4x^3-20x=4x(x^2-5)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \end{array}\right. .$$

Các giá trị $x=-\sqrt{5}$ và $x=\sqrt{5}$ không thuộc đoạn $[-1;2]$ nên ta không tính.

Có $f(-1)=-7; f(0)=2; f(2)=-22$.

Nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$ là -22.

10.2 Tìm m để hs f(x) có GTLN, GTNN thỏa mãn đk cho trước

Câu 112. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2$. Số phần tử của S là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

a/ Xét $m=1$, ta có $f(x)=1\ \forall x\neq -1$

Dễ thấy $\max\limits_{[0;1]}[f(x)]=1,\ \min\limits_{[0;1]}[f(x)]=1$

Tức là $m=1$ thảo mãn yêu cầu.

b/ Xét $m\neq 1$ ta có $f'(x)=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

i/ Với $m>1$ ta có

$$\max\limits_{[0;1]}[f(x)]+\min\limits_{[0;1]}[f(x)]=f(0)+f(1)=m+\frac{1+m}{2}$$

Phương trình $m+\dfrac{1+m}{2}=2$ có nghiệm $m=1$ (loại).

$\max_{[0;1]}\left[f(x)\right]+\min_{[0;1]}\left[f(x)\right]=\left[m\right]+0=-m$

Phương trình $-m=2$ có nghiệm $m=-2$ (loại)

2i/ với $m<1$, ta có

Xét $m\ge 0$:

$\max_{[0;1]}\left[f(x)\right]+\min_{[0;1]}\left[f(x)\right]=f(1)+f(0)=\frac{m+1}{2}+m$

Phương trình $\frac{m+1}{2}+m=2$ có nghiệm $m=1$ (loại).

Xét $\begin{cases} m<0 \\ |m|\le\frac{m+1}{2} \end{cases}$:

$\max_{[0;1]}\left[f(x)\right]+\min_{[0;1]}\left[f(x)\right]=\frac{m+1}{2}+0=\frac{m+1}{2}$

Phương trình $\frac{m+1}{2}=2$ có nghiệm $m=3$ (loại).

Xét $\begin{cases} m<0 \\ \frac{m+1}{2}\ge 0 \\ |m|>\frac{m+1}{2} \end{cases}$:

$\max_{[0;1]}\left[f(x)\right]+\min_{[0;1]}\left[f(x)\right]=\left[m\right]+0=-m$

Phương trình $-m=2$ có nghiệm $m=-2$ (loại).

Xét $\frac{m+1}{2}<0$:

$\max_{[0;1]}\left[f(x)\right]+\min_{[0;1]}\left[f(x)\right]=\left[m\right]+\left[\frac{m+1}{2}\right]=-m-\frac{m+1}{2}=\frac{-3m-1}{2}$

Phương trình $\frac{-3m-1}{2}=2$ có nghiệm $m=\frac{-5}{3}$ (nhận).

Vậy $S=\left\{1;-\frac{5}{3}\right\}$.

10.3 GTLN, GTNN hàm nhiều biến dạng khác

Câu 113. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Xét các số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

A. -2. **B.** -3. **C.** -5. **D.** -4.

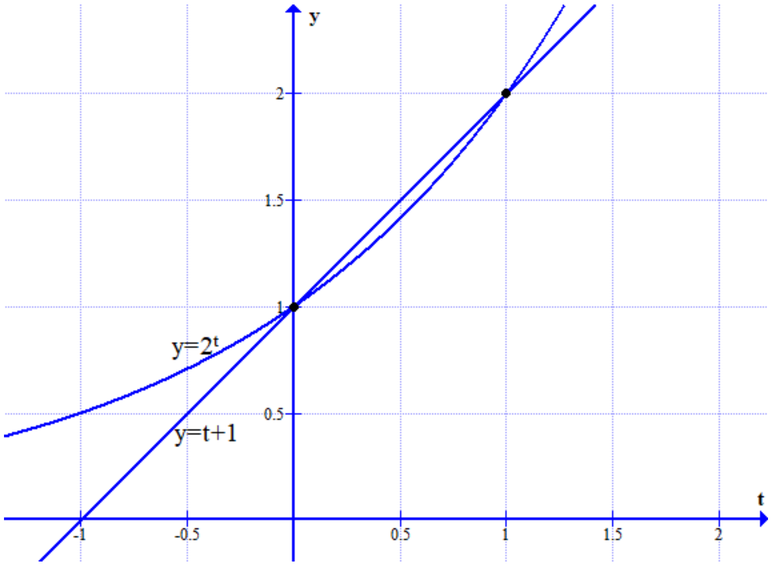
Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2+1-2x} \le x^2+y^2-2x+2$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2+y^2} \le (x-1)^2+y^2+1$. Đặt $t=(x-1)^2+y^2\ (t\ge 0)$, ta được BPT: $2^t \le t+1$.

Đồ thị hàm số $y=2^t$ và đồ thị hàm số $y=t+1$ như sau:



Từ đồ thị suy ra $2^t \le t+1 \Leftrightarrow 0\le t\le 1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$. Do đó tập hợp các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn thuộc hình tròn (C) tâm $I(1;0), R=1$.

Ta có $P=\dfrac{4y}{2x+y+1} \Leftrightarrow 2Px+(P-4)y+P=0$ là phương trình của đường thẳng d.

Do d và (C) có điểm chung $\Leftrightarrow d\left(I,(d)\right)\le R \Leftrightarrow \dfrac{|3P|}{\sqrt{4P^2+(P-4)^2}}\le 1 \Leftrightarrow 4P^2+8P-16\le 0$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le P\le -1+\sqrt{5}$, suy ra giá trị nhỏ nhất của P **gần nhất** với -3.

11. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

11.1 Tiệm cận đồ thị hàm số phân thức hữu tỷ,không chứa tham số

Câu 114. [Đề-BGD-2020-Mã-101] Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+1}{x-1}$ là

A. $y=\dfrac{1}{4}$. **B.** $y=4$.

D. $y=1$. **D.** $y=-1$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+1}{x-1}=4$ (hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+1}{x-1}=4$) nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=4$.

Câu 115. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1}{x-1}$ là

A. $y=1$. **B.** $y=\dfrac{1}{5}$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=5$.

Lời giải

Người giải: Nguyễn Văn Đắc; Fb: Đắc Nguyễn

Theo công thức ta có tiệm cận ngang của dồ thị hàm số là $y=5$ nên chọn **đáp án D**

Câu 116. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là

A. $y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=1$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$.

Nên đường thẳng $y=2$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 117. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$.

A. $y=\dfrac{1}{3}$. **B.** $y=3$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$

Do đó đường thẳng $y=3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 118. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ là

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}y=-\infty;\lim\limits_{x\to1^+}y=+\infty$, suy ra đồ thị có tiệm cận đứng là $x=1$.

Câu 119. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-3}$ là

A. $x=-3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Lời giải.

Chọn D

$\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x-1}{x-3}=-\infty$. Suy ta tiệm cận đứng là đường thẳng $x=3$.

Câu 120. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^+} y = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x-2}{x+1} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} y = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x-2}{x+1} = +\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 121. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$.

A. $y=\dfrac{1}{3}$. **B.** $y=3$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} y = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{3x+1}{x-1} = 3$

Do đó đường thẳng $y=3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 122. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y=-2$. **B.** $y=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-2}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-2}{x+1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là } y=1.$$

11.2 Tiệm cận đồ thị hàm số f(x) dựa vào BBT không tham số

Câu 123. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
y'		$-$	||		$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	-4 || $+\infty$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=2$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -4$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x=0$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng hai đường tiệm cận.

12. ĐỌC ĐỒ THỊ - BIẾN ĐỔI ĐỒ TH

12.1 Nhận dạng 3 hàm số thường gặp (biết đồ thị, BBT)

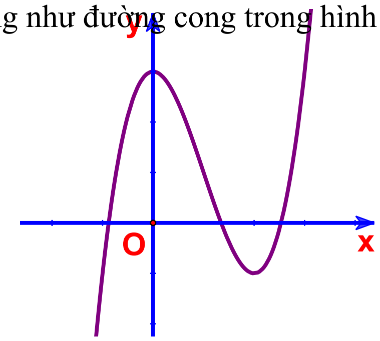
Câu 124. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên ?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

B. $y = -x^3 + 3x^2 + 3$.

C. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

D. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.



Lời giải

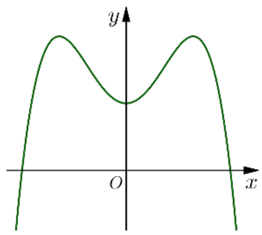
Chọn A

Đồ thị trên là đồ thị của hàm số bậc 3, với hệ số a dương. Do đó, chọn đáp án **A**

Câu 125. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

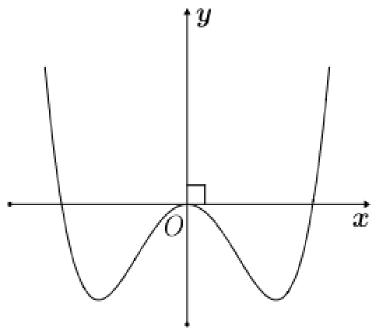


Lời giải

Ta có: Dựa vào đồ thị của hàm số ta thấy đây là hàm trùng phương và có hệ số a âm.

Câu 126. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình bên

A. $y = -x^4 + 2x^2$. **B.** $y = x^3 - 3x^2$. **C.** $y = x^4 - 2x^2$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2$.

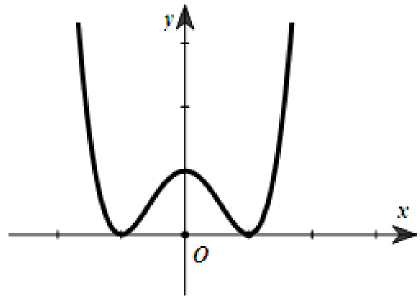


Lời giải

Vì đồ thị hàm số có 3 cực trị nên ta loại đáp án B và D. Ta lại thấy khi $x \to +\infty$ thì $y \to +\infty$. Nên hệ số trước x^4 phải dương.

Vậy ta chọn đáp án C.

Câu 127. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

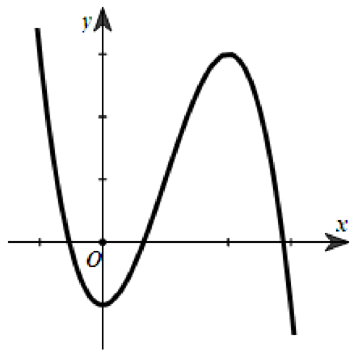


A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số bậc 4 có hệ số $a > 0 \Rightarrow$ chọn **A đúng.**

Câu 128. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



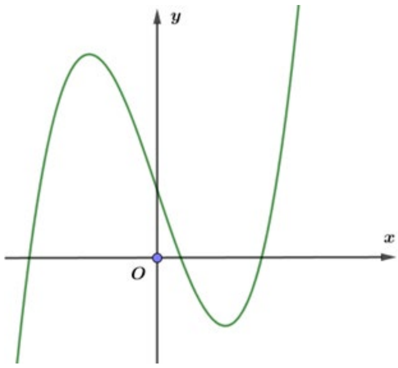
A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 1$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị có dạng đồ thị của hàm số bậc 3 có hệ số $a < 0$ nên đáp án D đúng.

Câu 129. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Đồ thị của hàm số dưới đây có dạng như đường cong bên?

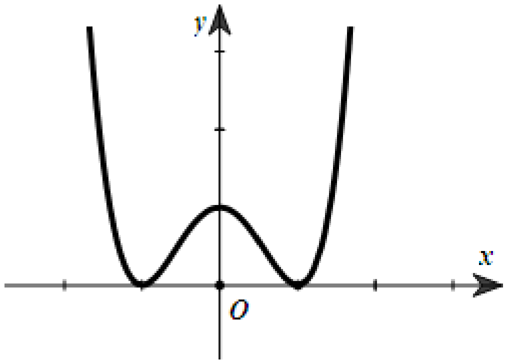


A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^4-2x^2+1$.
C. $y=-x^4+2x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Lời giải

Chọn A

Câu 130. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

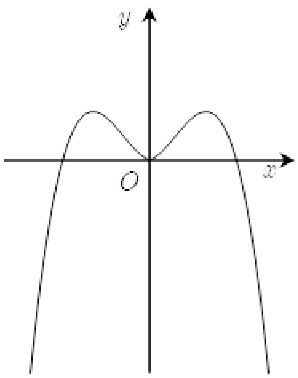


A. $y=x^4-2x^2+1$. **B.** $y=-x^3+3x^2+1$. **C.** $y=x^3-3x^2+1$. **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

Lời giải

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số bậc 4 có hệ số $a>0 \Rightarrow$ chọn **A đúng.**

Câu 131. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=-x^4+2x^2$. **B.** $y=-x^3+3x$. **C.** $y=x^4-2x^2$. **D.** $y=x^3-3x$.

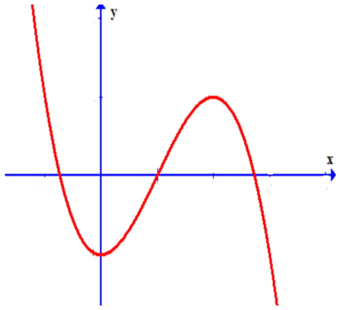
Lời giải

Từ hình dáng đồ thị ta thấy đó là đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương. Suy ra loại đáp án B, **D.**
Hàm số có hệ số $a<0$. Suy ra loại đáp án **C.**

Câu 132. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên

A. $y=x^4-2x^2-2$ **B.** $y=-x^3+2x^2-2$

C. $y=x^3-3x^2-2$ **D.** $y=-x^4+2x^2-2$

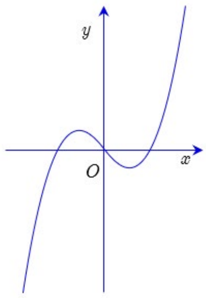


Lời giải

Chọn B

Qua đồ thị là hàm bậc 3 nên loại **A, D.**
Bên phải ngoài cùng của đồ thị đi xuống nên hệ số a < 0
$\Rightarrow$ loại đáp án **C**

Câu 133. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạn h dưới?



A. $y=x^3-3x$. **B.** $y=-x^3+3x$. **C.** $y=x^4-2x^2$. **D.** $y=-x^4+2x$.

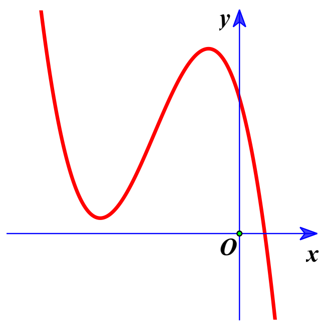
Lời giải

Chọn A

Ta thấy đây là đồ thị của hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\left(a\neq 0\right)$ và $a>0$.

Nên chọn. **A.**

Câu 134. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, $d\in\mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d>0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} y<0\Rightarrow a<0$.
- Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

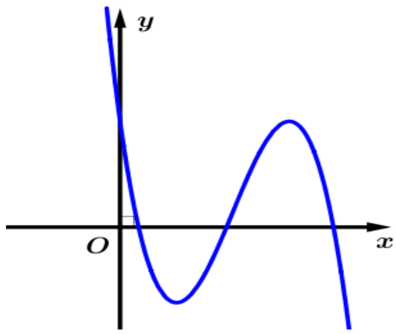
Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm về bên trái trục tung nên phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1<x_2<0$.

Khi đó theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} < 0 \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases}$. Từ đó suy ra $b<0$ và $c<0$.

Vậy trong các số a, b, c, d có 1 số dương.

12.2 Xét dấu hệ số của biểu thức (biết đồ thị, BBT)

Câu 135. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\left(a,b,c,d \in \mathbb{R}\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ đồ thị hàm số đề cho, suy ra:

+ $a<0$.

+ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

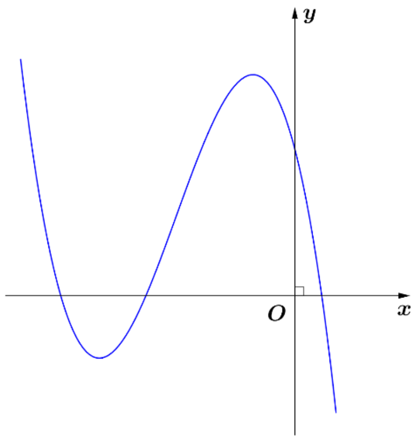
+ Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ dương

$\Rightarrow$ Phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt dương

$\Rightarrow \begin{cases} S = \dfrac{-2b}{3a} > 0 \\ P = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>0 \\ c<0 \end{cases}$ (Vì $a<0$).

Vậy có 2 số dương trong các số a,b,c,d.

Câu 136. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\left(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

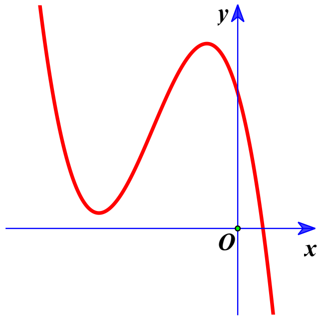
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$ nên $a<0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Hàm số có điểm cực trị $x_1<x_2<0$, suy ra $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}<0 \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b<0 \\ c<0 \end{cases}$.

Câu 137. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, $d\in\mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d>0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} y<0 \Rightarrow a<0$.
- Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm về bên trái trục tung nên phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1<x_2<0$.

Khi đó theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}<0 \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}>0 \end{cases}$. Từ đó suy ra $b<0$ và $c<0$.

Vậy trong các số a, b, c, d có 1 số dương.

Câu 138. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Từ bảng biến thiên, ta có

$$\begin{cases} f(0)=3 \\ f(4)=-5 \\ f'(0)=0 \\ f'(4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=3 \\ 64a+16b+4c+d=-5 \\ c=0 \\ 48a+8b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=-\dfrac{3}{2} \\ c=0 \\ d=3 \end{cases}$$

Vậy trong các số a,b,c,d có 2 số dương.

Câu 139. [ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102] Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ dáng điệu sự biến thiên hàm số ta có $a>0$.

Khi $x=0$ thì $y=d=1>0$.

Mặt khác $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Từ bảng biến thiên ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra $c=0; \dfrac{-2b}{3a}=-2 \Rightarrow b=3a>0$.

Vậy có 3 số dương là $a,\ b,\ d$.

Câu 140. [ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103] Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

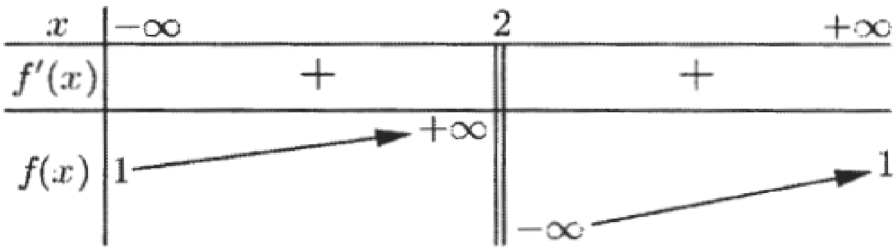
Lời giải

Chọn C

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow a>0$.
- $f(0)=-1 \Rightarrow d=-1<0$.
- $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_1x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{2b}{3a}=-2 \\ \dfrac{c}{3a}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3a>0 \\ c=0 \end{cases}$.

Câu 141. [ĐỀ BGD 2020-MH2] Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau



Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+1}{bx+c}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a+\frac{1}{x}}{b+\frac{c}{x}}=\dfrac{a}{b}$.

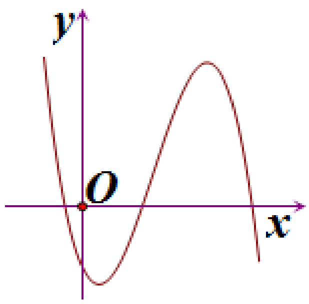
Theo gỉa thiết, ta có $\dfrac{a}{b}=1\Rightarrow a=b\ (1)$.

Hàm số không xác định tại $x=2$ nên suy ra $2b+c=0\Rightarrow b=-\dfrac{c}{2}\ (2)$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định $\Rightarrow f'(x)=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}>0\ (3)$ với mọi x khác 2.

Nếu $a=b>0$ thì từ (2) suy ra $c<0$. Thay vào (3), ta thấy vô lý nên trường hợp này không xảy ra. Suy ra, chỉ có thể xảy ra khả năng $a=b<0$ và $c>0$.

Câu 142. [ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102] Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



A. 4. **B.** 3.
C. 1. **D.** 2.

Lời giải

Quan sát hình dáng đồ thị ta thấy $a<0$.
Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $A(0;d)$ nằm bên dưới trục Ox nên $d<0$.
Lại thấy hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 là hai số dương nên phương trình $y'=0$ ($y'=3ax^2+2bx+c$) có hai nghiệm x_1,x_2 là hai số dương, do đó theo Vi – et ta có

$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0 \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b>0 \\ c<0 \end{cases}$. Vậy có một số dương là b.

12.3 Đọc đồ thị của đạo hàm (các cấp)

Câu 143. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ là:

A. 2. **B.** 3.
C. 1. **D.** 0.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-x^2=-x^2+5x \Leftrightarrow x^3-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=\sqrt{5} \Rightarrow y=-5+\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \Rightarrow y=-5-\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ là 3.

12. TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ TH

12.1 Tìm toạ độ (đếm) giao điểm

Câu 144. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là số nghiệm phân biệt của phương trình $x^3+3x^2=3x^2+3x$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right. .$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là 3.

Câu 145. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là: $-x^3+7x=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{7} \end{array}\right.$.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành bằng 3.

Câu 146. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2$ và đồ thị hàm số $y=x^2+5x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+x^2=x^2+5x \Leftrightarrow x^3-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$

Vậy có 3 giao điểm.

Câu 147. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+3x$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Số giao điểm của hai đồ thị là số nghiệm thực phân biệt của phương trình hoành độ giao điểm sau: $x^3-x^2=-x^2+3x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 148. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là nghiệm của phương trình $-x^3+6x=0$ (*) $\Leftrightarrow -x\left(x^2-6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt, do đó đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Câu 149. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ với trục hoành là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành dộ giao điểm $-x^3+3x=0 \Leftrightarrow x(-x^2+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy có 3 giao điểm.

Câu 150. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+3x$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Số giao điểm của hai đồ thị là số nghiệm thực phân biệt của phương trình hoành độ giao điểm sau: $x^3-x^2=-x^2+3x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 151. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục hoành là:

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$y=x^3-3x+1 \Rightarrow y'=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$y=0$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành (tức đường thẳng $y=0$) tại ba điểm phân biệt.

12.2 Đếm số nghiệm pt cụ thể (cho đồ thị, BBT)

Câu 152. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

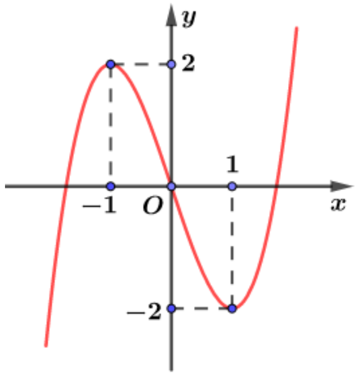
Lời giải

Chọn C.

Ta có: $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=\frac{3}{2}$ cắt đồ thị $y=f\left(x\right)$ tại 4 điểm phân biệt nên số nghiệm của phương trình đã cho là 4 nghiệm thực.

Câu 153. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



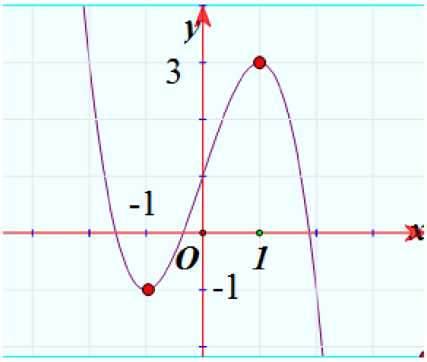
Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=-1$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=-1$ bằng số giao điểm của đường cong $y=f\left(x\right)$ với đường thẳng $y=-1$. Nhìn hình vẽ ta thấy có 3 giao điểm nên phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 154. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=1$ là.



A. 0 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2

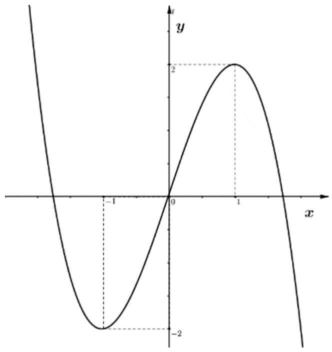
Lời giải

Chọn B

Ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt. Nên phương trình $f\left(x\right)=1$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

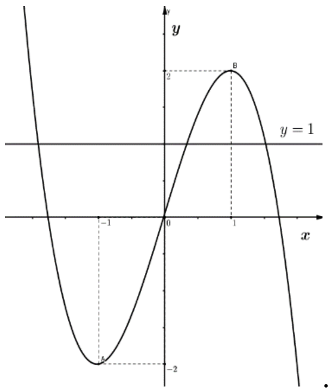
Câu 155. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=1$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

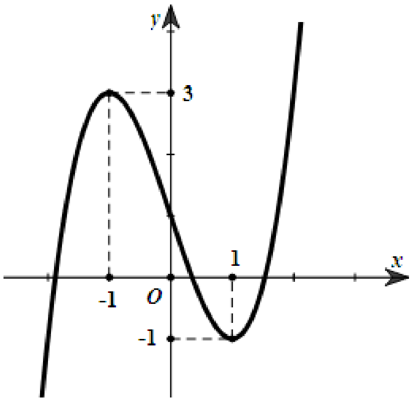


Lời giải

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là số giao điểm của đường thẳng $y=1$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$. Nhìn vào hình vẽ ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt. Vậy phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm thực.



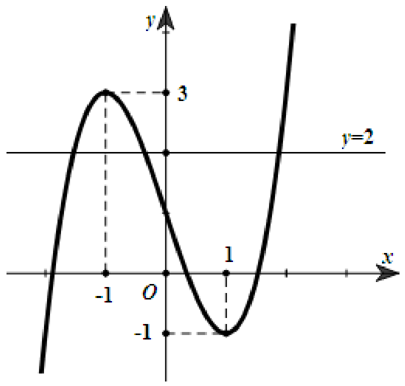
Câu 156. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho đồ thị hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=2$ là

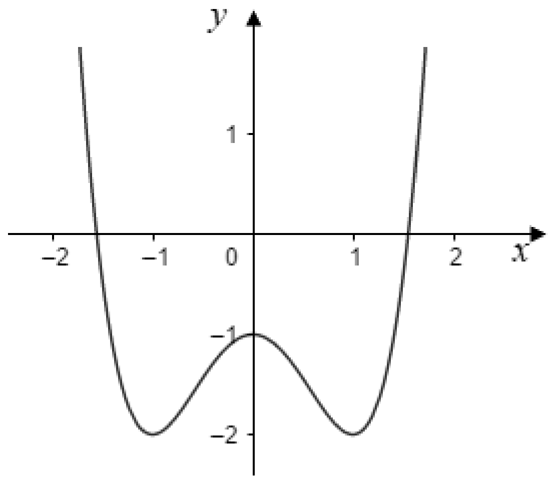
A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải



Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=2$ có 3 nghiệm thực.

Câu 157. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $x=1$.

Lời giải

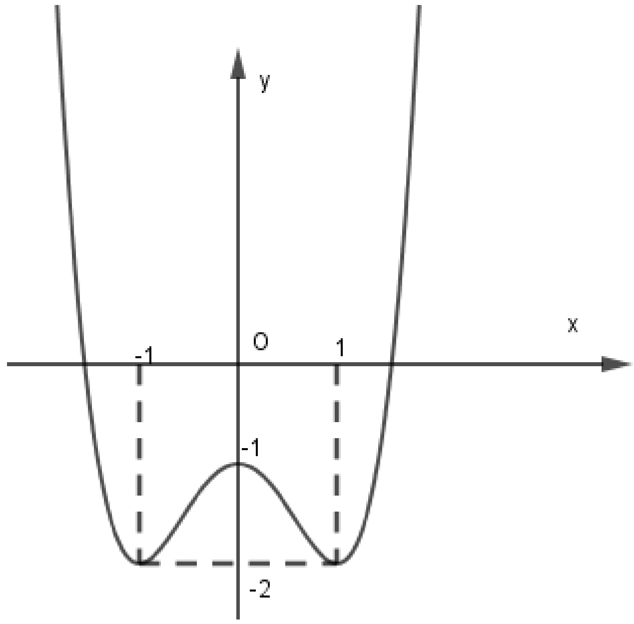
Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}$ cắt nhau tại 2 điểm.

Nên phương trình $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}$ có 2 nghiệm.

Câu 158. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực của

phương trình $f(x)=-\dfrac{3}{2}$ là

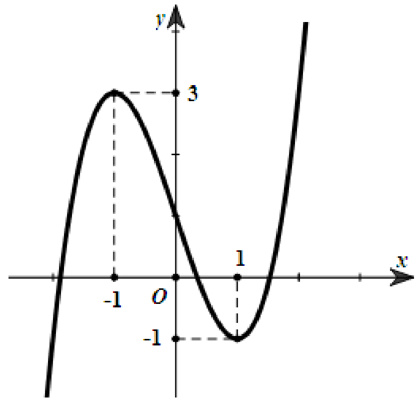


A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Từ đồ thị ta $f(x)=-\dfrac{3}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt

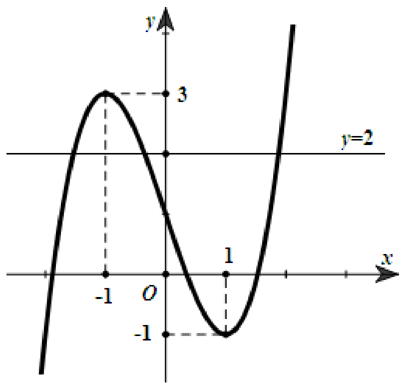
Câu 159. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho đồ thị hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=2$ là

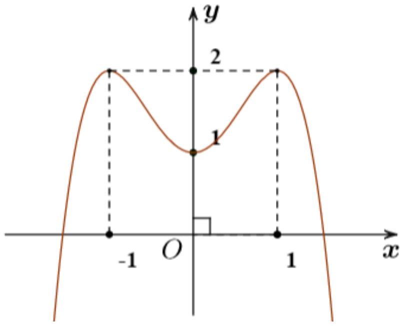
A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải



Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=2$ có 3 nghiệm thực.

Câu 160. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ là

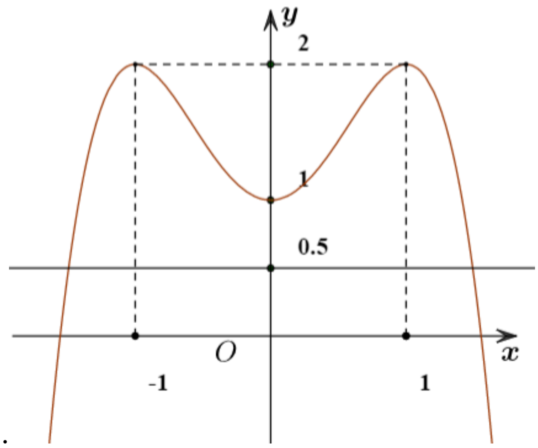


A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ với đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$

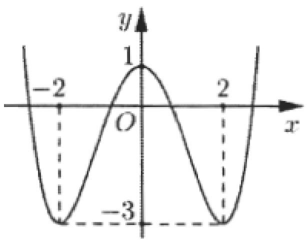


.

Dựa vào hình trên ta thấy đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ với đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ có 2 giao điểm.

Vậy phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ có hai nghiệm.

Câu 161. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị trong hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=-1$ là



A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

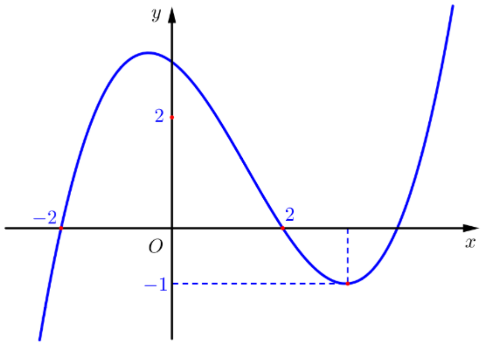
Lời giải

Chọn D

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = -1$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra số nghiệm của phương trình bằng 4.

12.3 Tương giao liên quan hàm hợp, hàm ẩn

Câu 162. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

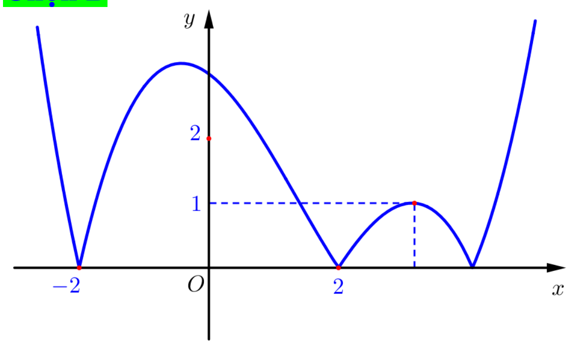


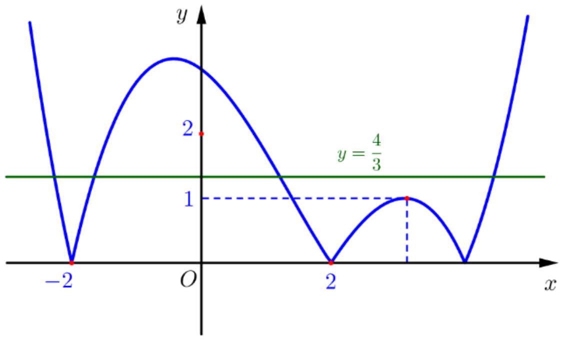
Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{4}{3}$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B





Ta có $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^3 - 3x\right) = \dfrac{4}{3} \\ f\left(x^3 - 3x\right) = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 3x = t_1 \ (1) \ \left(t_1 < -2\right) \\ x^3 - 3x = t_2 \ (2) \ \left(-2 < t_2 < 0\right) \\ x^3 - 3x = t_3 \ (3) \ \left(0 < t_3 < 2\right) \\ x^3 - 3x = t_4 \ (4) \ \left(t_4 > 4\right) \end{array}\right.$

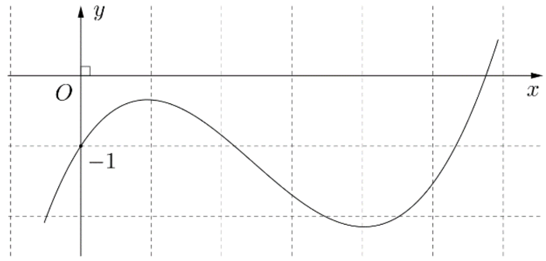
Hàm số $y = x^3 - 3x$ có bảng biến thiên là

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình (1) có một nghiệm; phương trình (2) có ba nghiệm; phương trình (3) cũng có ba nghiệm và phương trình (4) có một nghiệm.

Vậy phương trình ban đầu có 8 nghiệm.

Câu 163. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0$ là

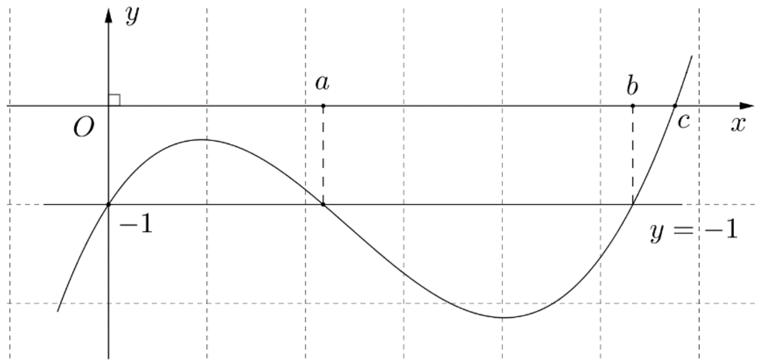


A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3 f(x) = 0 & (1) \\ x^3 f(x) = a \in (2;3) & (2) \\ x^3 f(x) = b \in (5;6) & (3) \end{array}\right.$



Ta có $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = c \end{array}\right.$.

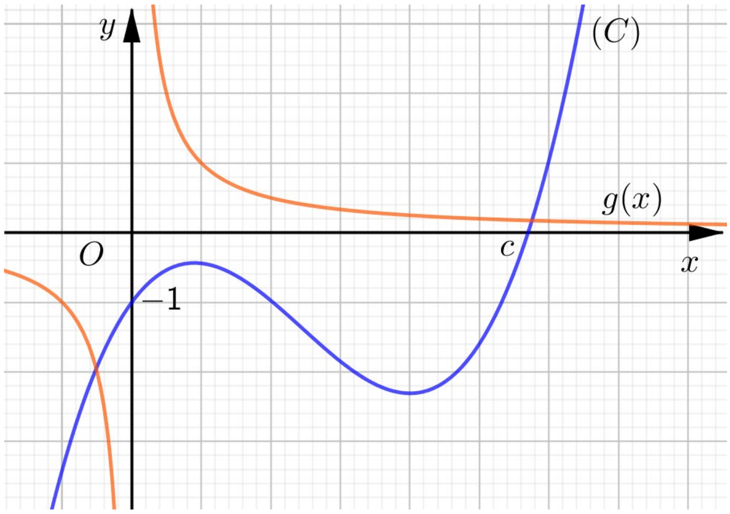
Xét $g(x) = \dfrac{k}{x^3}$, với $k > 0$. Ta có $g'(x) = -\dfrac{3k}{x^4} < 0, \forall x \neq 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Với $k = a$, dựa vào đồ thị suy ra phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0 và c.

Với $k = b$, dựa vào đồ thị suy ra phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khác 0, c và khác hai nghiệm của phương trình (2).

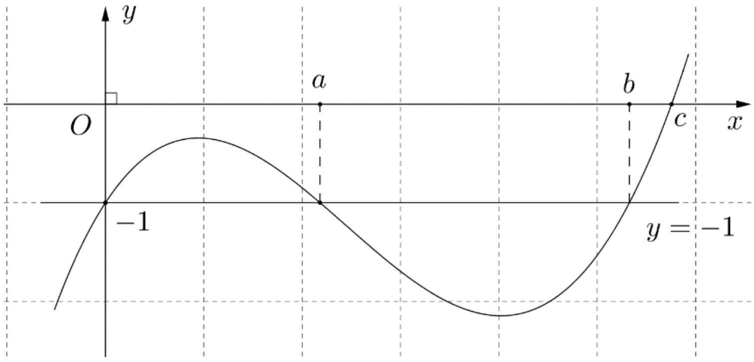


Vậy phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Cách 2:

Ta có:

$$f\left(x^3 f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 f(x)=0 \\ x^3 f(x)=a>0 \\ x^3 f(x)=b>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=\dfrac{a}{x^3}(\text{do } x\neq 0) \\ f(x)=\dfrac{b}{x^3}(\text{do } x\neq 0) \end{array}\right.$$



* $f(x)=0$ có một nghiệm dương $x=c$.

* Xét phương trình $f(x)=\dfrac{k}{x^3}$ với $x\neq 0,\ k>0$.

Đặt $g(x)=f(x)-\dfrac{k}{x^3}$; $g'(x)=f'(x)+\dfrac{3k}{x^4}$.

TH 1: Với $x>c$, đồ thị hàm $f(x)$ đồng biến trên $(c;+\infty)$ nên $f'(x)>0,\ x\in(c;+\infty)$

$\Rightarrow g'(x)=f'(x)+\dfrac{3k}{x^4}>0,\ x\in(c;+\infty)$

Mà $\begin{cases} g(c)<0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(c;+\infty)$

$\Rightarrow g(x)=0$ có duy nhất nghiệm trên $(c;+\infty)$.

TH 2: Với $0<x<c$ thì $f(x)<0<\dfrac{k}{x^3} \Rightarrow g(x)=0$ vô nghiệm trên $(0;c)$.

TH 3: Với $x<0$, đồ thị hàm $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;0)$ nên $f'(x)>0,\ x\in(-\infty;0)$

$\Rightarrow g'(x)=f'(x)+\dfrac{3k}{x^4}>0, x\in(-\infty;0)$

Mà $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)>0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty\end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(-\infty;0)$.

$\Rightarrow g(x)=0$ có duy nhất nghiệm trên $(-\infty;0)$.

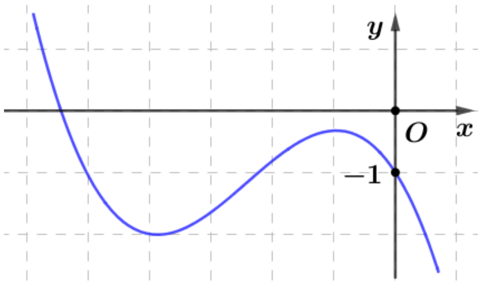
Do đó: $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

* Phương trình $f(x)=\dfrac{a}{x^3}$ $(k=a)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và khác c.

* Phương trình $f(x)=\dfrac{b}{x^3}$ $(k=b)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và khác c.

Kết luận: Phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ có đúng 6 nghiệm.

Câu 164. ---------- HẾT ---------- **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ là

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Ta có $f\left(x^3f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3f(x)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3f(x)=a & (-3<a<-1)\ (1)\\ x^3f(x)=b & (-6<b<-3)(2)\\ x^3f(x)=0 & (3)\end{array}\right.$.

+ Với $m<0$, xét phương trình $x^3f(x)=m \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{m}{x^3}$.

Đặt $g(x)=\dfrac{m}{x^3}$, $g'(x)=\dfrac{-3m}{x^4}>0, \forall x\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

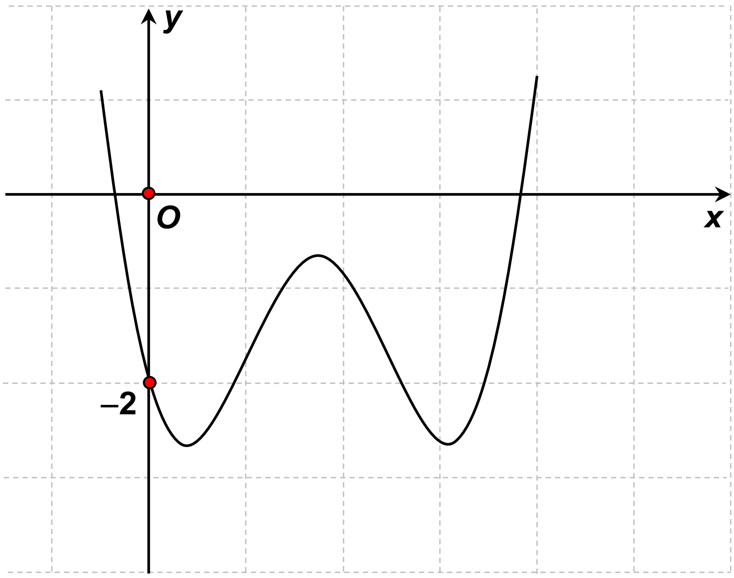
Dựa vào bảng biến thiên và đề bài, suy ra trong mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ phương trình $f(x)=g(x)$ có đúng một nghiệm.

Suy ra mỗi phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm và các nghiệm đều khác nhau.

+ Xét phương trình $(3): x^3 f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=c<0 \end{array}\right.$, với c khác các nghiệm của (1) và (2).

Vậy phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ có đúng 6 nghiệm.

Câu 165. [ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103] Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right)+2=0$ là



A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Cách 1:

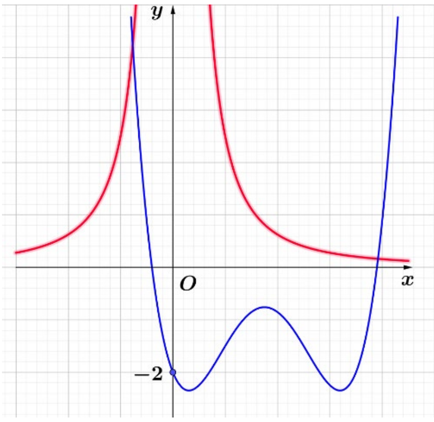
Ta có $f\left(x^2 f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \\ x^2 f(x)=a\in(0;1) \\ x^2 f(x)=b\in(2;3) \\ x^2 f(x)=c\in(3;4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ f(x)=0 & (1) \\ f(x)=\dfrac{a}{x^2},\ a\in(0;1) & (2) \\ f(x)=\dfrac{b}{x^2},\ b\in(2;3) & (3) \\ f(x)=\dfrac{c}{x^2},\ c\in(3;4) & (4) \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{k}{x^2}(k>0)$, Ta có $g'(x)=-\dfrac{2k}{x^3}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	||	$-$
$g(x)$	$0 \nearrow +\infty$	||	$+\infty \searrow 0$

Đồ thị của $f(x)$ và $g(x)$ được mô tả như sau:



Do đó ta có: (1), (2), (3) và (4) mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình đã cho có 9 nghiệm.

Cách 2:

Ta có $f\left(x^2 f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \\ x^2 f(x)=a\in(0;1) \\ x^2 f(x)=b\in\left(2;3\right) \\ x^2 f(x)=c\in(3;4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ f(x)=0 & (1) \\ f(x)-\dfrac{a}{x^2}=0,\ a\in(0;1) & (2) \\ f(x)-\dfrac{b}{x^2}=0,\ b\in\left(2;3\right) & (3) \\ f(x)-\dfrac{c}{x^2}=0,\ c\in(3;4) & (4) \end{array}\right.$

- (1) có 2 nghiệm phân biệt là $x=\alpha<0, x=\beta>3$.
- Xét hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{k}{x^2}(k>0)$ có $g'(x)=f'(x)+\dfrac{2k}{x^3}$. Ta có:

* $x\in\left[\alpha;\beta\right]$ thì $g(x)<0$ nên các phương trình (2), (3) và (4) không có nghiệm $x\in\left[\alpha;\beta\right]$.

* $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to\alpha^-} g(x)=-\dfrac{k}{\alpha^2}<0 \\ g'(x)<0, \forall x\in(-\infty;\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow$ Mỗi phương trình (2), (3) và (4) chỉ có đúng một nghiệm $x\in\left(-\infty;\alpha\right)$

* $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to\beta^+} g(x)=-\dfrac{k}{\beta^2}<0 \\ g'(x)>0, \forall x\in(\beta;+\infty), \beta>3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Mỗi phương trình (2), (3) và (4) đều chỉ có đúng một nghiệm $x\in\left(\beta;+\infty\right)$

Suy ra mỗi phương trình (1), (2), (3) và (4) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm.

Cách 3:

Ta có $f\left(x^2 f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 f(x)=0 & (1) \\ x^2 f(x)=a\in(0;1) & (2) \\ x^2 f(x)=b\in\left(2;3\right) & (3) \\ x^2 f(x)=c\in(3;4) & (4) \end{array}\right.$

Ta có (1) có ba nghiệm phận biệt là $x=0, x=\alpha<0, x=\beta>3$.

Xét $g(x)=x^2 f(x)$ có $g'(x)=2xf(x)+x^2 f'(x)$

- Với $x\in\left[\alpha;\beta\right]$ thì $g(x)=x^2 f(x)\le 0$ nên (2), (3), (4) không có nghiệm $x\in\left[\alpha;\beta\right]$.
- Với $x\in\left(-\infty;\alpha\right)$ta có: $g'(x)<0$. Và với $x\in\left(\beta;+\infty\right)$, $\beta>3$, thì $g'(x)>0$ nên ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

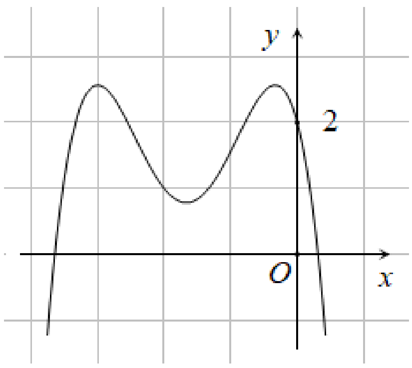
Do đó các phương trình (2), (3), (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Nhận xét : để chặt chẽ hơn cần lập luận thêm trong 9 nghiệm trên không có 2 nghiệm nào trùng nhau. Việc này không khó, xin dành cho bạn đọc.

Nhận xét chung : Đề thi THPTQG năm 2020 kiến thức chân phương, không đánh đố, không có bài quá lạ. Nhưng để đạt điểm tối đa cũng đòi hỏi phải học rất tốt, có một quá trình chuẩn bị bài bản, lâu dài, công phu. Điểm nhấn trong đề là câu 49 (mã đề 103). Phần vận dụng cao chưa thực sự làm khó được máy tính cầm tay, đây cũng là điều đáng tiếc.

Câu 166. ---------------------- **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2 f\left(x\right)\right)-2=0$ là

A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $f\left(x^2 f\left(x\right)\right)-2=0 \Leftrightarrow f\left(x^2 f\left(x\right)\right)=2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 f(x) = 0 \, (1) \\ x^2 f(x) = a \, (-1 < a < 0) \, (2) \\ x^2 f(x) = b \, (-3 < b < -2) \, (3) \\ x^2 f(x) = c \, (-4 < c < -3) \, (4) \end{array}\right..$$

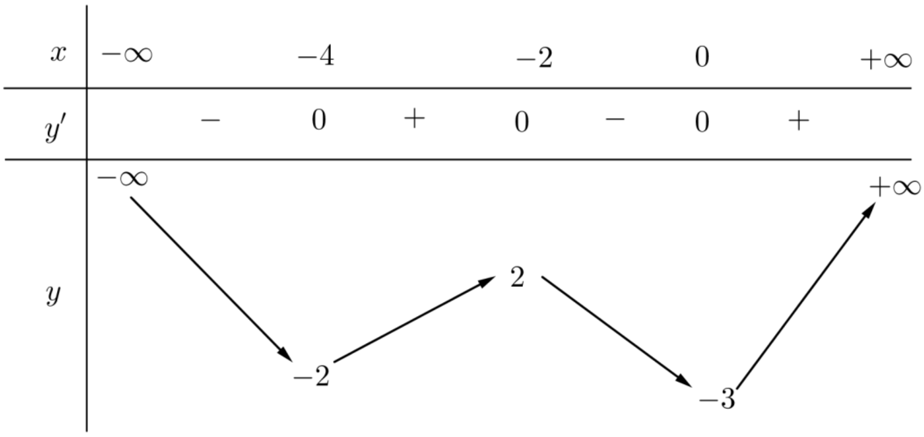
Giải $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \end{array}\right.$ (có 3 nghiệm phân biệt).

Giải $(2) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{a}{x^2}$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{a}{x^2}$ lên cùng hệ tọa độ Oxy. Ta thấy đồ thị hàm số $y = \dfrac{a}{x^2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 nghiệm phân biệt.

Tương tự với (3) và (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 167. Vậy có phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) = 2$ có 9 nghiệm phân biệt.**[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2 - 4x\right) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

A. 25. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 24.

Lời giải

Chọn B

Ta đặt: $g(x) = f\left(x^2 - 4x\right)$.

$g'(x) = (2x - 4) f'\left(x^2 - 4x\right)$

$= 2(x-2)\left(x^2 - 4x + 4\right)\left(x^2 - 4x + 2\right)\left(x^2 - 4x\right)$ (dựa vào bảng biến thiên)

$= 2(x-2)^3\left(x^2 - 4x + 2\right)x(x-4)$.

Mặt khác:

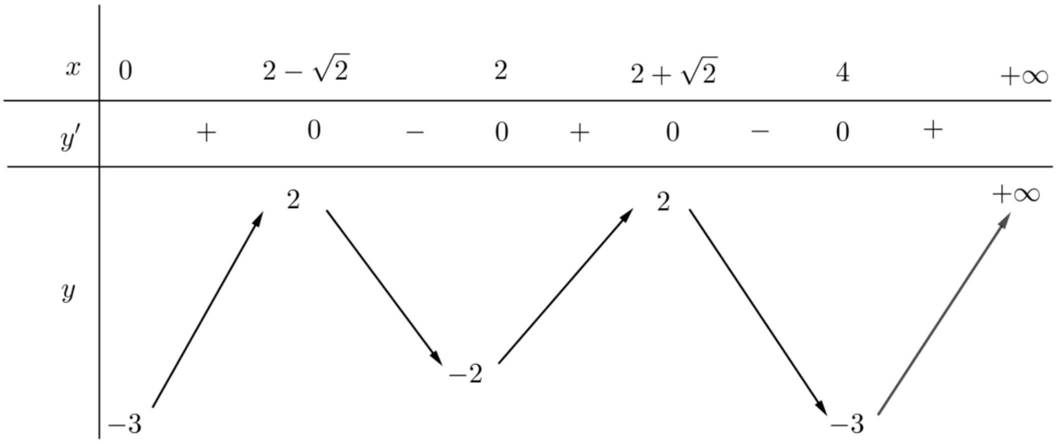
$g(0) = f(0) = -3$;

$g\left(2 - \sqrt{2}\right) = g\left(2 + \sqrt{2}\right) = f(-2) = 2$;

$g(2) = f(-4) = -2$;

$g(4) = f(0) = -3$.

Ta có bảng biến thiên:

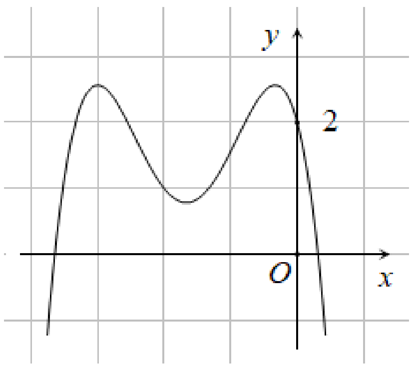


Từ bảng biến thiên ta được: yêu cầu bài toán tương đương $-3 < \dfrac{m}{6} \le 2$

$\Leftrightarrow -18 < m \le 12$.

Vậy có tất cả 30 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 168. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) - 2 = 0$ là

A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $f\left(x^2 f(x)\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow f\left(x^2 f(x)\right) = 2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 f(x) = 0 (1) \\ x^2 f(x) = a(-1 < a < 0) (2) \\ x^2 f(x) = b(-3 < b < -2) (3) \\ x^2 f(x) = c(-4 < c < -3) (4) \end{array}\right.$$

Giải $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \end{array}\right.$ (có 3 nghiệm phân biệt).

Giải $(2) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{a}{x^2}$.

Vẽ đồ thị hàm số $y=\dfrac{a}{x^2}$ lên cùng hệ tọa độ Oxy. Ta thấy đồ thị hàm số $y=\dfrac{a}{x^2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 2 nghiệm phân biệt.

Tương tự với $\left(3\right)$ và $\left(4\right)$ đều có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 169. Vậy có phương trình $f\left(x^2f\left(x\right)\right)=2$ có 9 nghiệm phân biệt. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(\sin x\right)=1$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

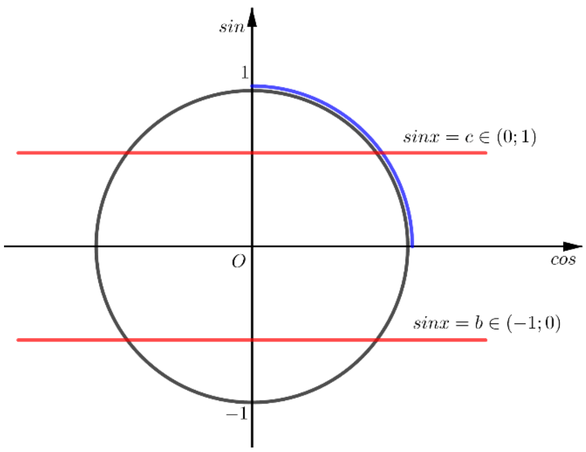
Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f\left(x\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in\left(-\infty;-1\right)\\x=b\in\left(-1;0\right)\\x=c\in\left(0;1\right)\\x=d\in\left(1;+\infty\right)\end{array}\right.$.

Như vậy $f\left(\sin x\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=a\in\left(-\infty;-1\right)\ \left(1\right)\\\sin x=b\in\left(-1;0\right)\ \left(2\right)\\\sin x=c\in\left(0;1\right)\ \left(3\right)\\\sin x=d\in\left(1;+\infty\right)\ \left(4\right)\end{array}\right.$.

Vì $\sin x\in\left[0;1\right],\forall x\in\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ nên $\left(1\right)$ và $\left(4\right)$ vô nghiệm.

Cần tìm số nghiệm của $\left(2\right)$ và $\left(3\right)$ trên $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Cách 1.



Dựa vào đường tròn lượng giác: (2) có 2 nghiệm trên $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$, (3) có 3 nghiệm trên $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 5 nghiệm.

Cách 2.

Xét $g(x)=\sin x, \forall x\in\left[0;\frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow g'(x)=\cos x, \forall x\in\left(0;\frac{5\pi}{2}\right)$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{3\pi}{2}\end{array}\right.$. Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên: (2) có 3 nghiệm trên $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$, (3) có 2 nghiệm trên $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 5 nghiệm.

12.4 ĐK để f(x) = g(m) có n-nghiệm (chứa GTTĐ)

Câu 170. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hai hàm số $y=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}$ và $y=|x+2|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}=|x+2|-x+m$

$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-|x+2|+x=m \quad (1)$

Hàm số

$$p(x)=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-|x+2|+x=\begin{cases}\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-2 & \text{khi } x\ge -2\\ \frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+2x+2 & \text{khi } x<-2\end{cases}$$

.

Ta có $p'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in(-2;+\infty)\setminus\{-1;0;1;2\}\\ \dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+2>0,\forall x<-2\end{cases}$ nên hàm số $y=p(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$	+		‖	+	‖	+	‖	+	‖	+	
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$49/12$	$\nearrow$ $+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=p(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m\geq 2$.

12.5 ĐK để f(x) = g(m) có n-nghiệm thuộc K (không GTTĐ)

Câu 171. [ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101] Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5f(x^2-4x)=m$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$

A. 24. **B.** 21. **C.** 25. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t=x^2-4x$. Ta có $t'=2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	
t	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Với $t=x^2-4x$.

x	0		2			$+\infty$
t	0	-2	-4	-2	0	$+\infty$
$f(t)$	-3	2	-2	2	-3	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-3<\dfrac{m}{5}\le 2 \Leftrightarrow -15<m\le 10$. Vì m nguyên nên $m\in\{-14;-13;....;10\}$. Do đó có 25 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 172. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-2		2		-3		$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 15. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u=x^2-4x$ (1)

Ta có BBT sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
u		0	-4	$+\infty$

Ta thấy:

+ Với $u<-4$, phương trình (1) vô nghiệm.

+ Với $u=-4$, phương trình (1) có một nghiệm $x=2>0$.

+ Với $-4<u<0$, phương trình (1) có hai nghiệm $x>0$.

+ Vơi $u\ge 0$, phương trình (1) có một nghiệm $x>0$

Khi đó $3f\left(x^2-4x\right)=m\Rightarrow f(u)=\dfrac{m}{3}$ (2), ta thấy:

+ Nếu $\dfrac{m}{3}=-3\Leftrightarrow m=-9$, phương trình (2) có một nghiệm $u=0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $x>0$.

+ Nếu $-3<\dfrac{m}{3}<-2\Leftrightarrow -9<m<-6$, phương trình (2) có một nghiệm $u>0$ và một nghiệm $u\in(-2;0)$ nên phương trình đã cho có ba ngiệm $x>0$.

+ Nếu $\frac{m}{3}=-2 \Leftrightarrow m=-6$, phương trình (2) có một nghiệm $u=-4$, một nghiệm $u \in (-2;0)$ và một nghiệm $u>0$ nên phương trình đã cho có bốn nghiệm $x>0$.

+ Nếu $-2<\frac{m}{3}<2 \Leftrightarrow -6<m<6$, phương trình (2) có một nghiệm $u<-4$, hai nghiệm $u \in (-4;0)$ và một nghiệm $u>0$ nên phương trình đã cho có năm nghiệm $x>0$.

+ Nếu $\frac{m}{3}=2 \Leftrightarrow m=6$, phương trình (2) có một nghiệm $u<-4$, một nghiệm $u=-2$ và một nghiệm $u>0$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm $x>0$.

+ Nếu $\frac{m}{3}>2 \Leftrightarrow m>6$, phương trình (2) có một nghiệm $u<-4$ và một nghiệm $u>0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $x>0$.

Vậy $-9<m \le 6 \Rightarrow$ có 15 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

13. MŨ - LŨY THỪA

13.1 Kiểm tra quy tắc biến đổi lũy thừa, tính chất

Câu 173. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Với mọi số thực a và m,n là hai số thực bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\left(a^m\right)^n = a^{m+n}$. **B.** $\left(a^m\right)^n = a^{m^n}$. **C.** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$. **D.** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Lời giải

Chọn D

13.2 Tính toán, rút gọn các biểu thức có chứa biến(a,b,c,x,y,….)

Câu 174. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho a,b là hai số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2\left(a^2b\right)} = 3a^3$. Giá trị của ab^2 bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $4^{\log_2\left(a^2b\right)} = 3a^3 \Leftrightarrow \left(a^2b\right)^{\log_2 4} = 3a^3 \Leftrightarrow \left(a^2b\right)^2 = 3a^3 \Leftrightarrow ab^2 = 3$.

14. LOGARIT

14.1 Câu hỏi lý thuyết và tính chất

Câu 175. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Với a,b là số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^2} b$ bằng.

A. $\frac{1}{2}+\log_a b$ **B.** $\frac{1}{2}\log_a b$ **C.** $2+\log_a b$ **D.** $2\log_a b$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{a^\alpha} b=\frac{1}{\alpha}\log_a b$, $a,b>0,a\neq 1$. Vậy: $\log_{a^2} b=\frac{1}{2}\log_a b$; $a,b>0,a\neq 1$

Câu 176. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Với a , b là các số dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{a^3} b$ bằng

A. $3+\log_a b$. **B.** $3\log_a b$. **C.** $\frac{1}{3}+\log_a b$. **D.** $\frac{1}{3}\log_a b$.

Lời giải

Chọn D

Câu 177. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Với a,b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$ thì $\log_{a^4} b$ bằng

A. $4+\log_a b$. **B.** $\frac{1}{4}\log_a b$. **C.** $4\log_a b$. **D.** $\frac{1}{4}+\log_a b$.

Lời giải

Ta có $\log_{a^4} b=\frac{1}{4}\log_a b$.

Câu 178. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5(5a)$ bằng

A. $5+\log_5 a$. **B.** $5-\log_5 a$. **C.** $1+\log_5 a$. **D.** $1-\log_5 a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_5(5a)=\log_5 5+\log_5 a=1+\log_5 a$.

Câu 179. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Với a,b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$ thì $\log_{a^4} b$ bằng

A. $4+\log_a b$. **B.** $\frac{1}{4}\log_a b$. **C.** $4\log_a b$. **D.** $\frac{1}{4}+\log_a b$.

Lời giải

Ta có $\log_{a^4} b=\frac{1}{4}\log_a b$.

Câu 180. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(a^3)$ bằng

A. $\left(\frac{3}{2}\log_2 a\right)$. **B.** $\frac{1}{3}\log_2 a$. **C.** $3+\log_2 a$. **D.** $3\log_2 a$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$ ta có $\log_2(a^3)=3\log_2 a$.

14.2 Biến đổi các biểu thức logarit liên quan a,b,x,y

Câu 181. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^2$ bằng

A. $2\log_5 a$. **B.** $2+\log_5 a$. **C.** $\frac{1}{2}+\log_5 a$. **D.** $\frac{1}{2}\log_5 a$.

Lời giải

Chọn A.

$\log_5 a^2 = 2\log_5 a$.

Câu 182. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Với $a,\ b$ là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^5} b$ bằng

A. $5\log_a b$. **B.** $\frac{1}{5}+\log_a b$. **C.** $5+\log_a b$. **D.** $\frac{1}{5}\log_a b$.

Lời giải

Ta có $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b.$

Vậy $\log_{a^5} b = \frac{1}{5}\log_a b.$

Câu 183. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_4(4a)$ bằng

A. $1+\log_4 a$. **B.** $4-\log_4 a$ **C.** $4+\log_4 a$. **D.** $1-\log_4 a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_4(4a) = \log_4 4 + \log_4 a = 1+\log_4 a$.

Câu 184. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 2a$ bằng

A. $1+\log_2 a$. **B.** $1-\log_2 a$. **C.** $2-\log_2 a$. **D.** $2+\log_2 a$.

Lời giải

Chọn A

$\log_2 2a = \log_2 2 + \log_2 a = 1+\log_2 a$.

Câu 185. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2(ab)} = 3a$. Giá trị của ab^2 bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 12.

Lời giải

$4^{\log_2(ab)} = 3a$

$\Leftrightarrow \left(2^2\right)^{\log_2(ab)} = 3a$

$\Leftrightarrow 2^{2\log_2(ab)} = 3a$

$\Leftrightarrow 2^{\log_2(ab)^2} = 3a$

$\Leftrightarrow (ab)^2 = 3a$, vì a và b là hai số thực dương

$\Leftrightarrow ab^2 = 3$.

Câu 186. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho a và b là hai số thực dương thoả mãn $9^{\log_3 ab} = 4a$. Giá trị của ab^2 bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $9^{\log_3 ab}=4a\Leftrightarrow\left(3^{\log_3 ab}\right)^2=4a\Leftrightarrow a^2b^2=4a$ mà $a\neq 0$.

Suy ra $ab^2=4$.

Câu 187. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Với a,b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a-2\log_4 b=3$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=8b^2$. **B.** $a=8b$. **C.** $a=6b$. **D.** $a=8b^4$.

Lời giải

Chọn B

Có $\log_2 a-2\log_4 b=3\Leftrightarrow\log_2 a=\log_2 b+3\Leftrightarrow\log_2 a=\log_2 8b\Leftrightarrow a=8b$.

Câu 188. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a-2\log_9 b=2$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=9b^2$. **B.** $a=9b$. **C.** $a=6b$. **D.** $a=9b^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_3 a-2\log_9 b=2\Leftrightarrow\log_3 a-\log_3 b=2\Leftrightarrow\log_3\left(\frac{a}{b}\right)=2\Leftrightarrow a=9b$.

Câu 189. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Với a,b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a-2\log_9 b=3$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=27b$. **B.** $a=9b$. **C.** $a=27b^4$. **D.** $a=27b^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_3 a-2\log_9 b=3\Leftrightarrow\log_3 a-\log_3 b=3\Leftrightarrow\log_3\frac{a}{b}=3\Leftrightarrow\frac{a}{b}=27\Leftrightarrow a=27b$.

Câu 190. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Xét các số thực $a;b$ thỏa mãn $\log_3\left(3^a.9^b\right)=\log_9 3$. Mệnh đề nào là đúng?

A. $a+2b=2$. **B.** $4a+2b=1$. **C.** $4ab=1$. **D.** $2a+4b=1$.

Lời giải

Chọn D

$\log_3\left(3^a.9^b\right)=\log_9 3\Rightarrow\log_3\left(3^a\right)+\log_3\left(9^b\right)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a+2b=\frac{1}{2}\Rightarrow 2a+4b=1$.

14.3 Tính giá trị các biểu thức logarit không dùng BĐT

Câu 191. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4b=16$. Giá trị $4\log_2 a+\log_2 b$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A.

Từ $a^4b=16$, lấy logarit cơ số 2 hai vế ta được $\log_2\left(a^4b\right)=\log_2 16 \Leftrightarrow \log_2 a^4+\log_2 b=4$ $\Leftrightarrow 4\log_2 a+\log_2 b=4$.

Câu 192. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3\left(a^2b\right)}=4a^3$. Giá trị của ab^2 bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Ta có:

$9^{\log_3\left(a^2b\right)}=4a^3 \Leftrightarrow 3^{2\log_3\left(a^2b\right)}=4a^3 \Leftrightarrow 3^{\log_3\left(a^2b\right)^2}=4a^3 \Leftrightarrow \left(a^2b\right)^2=4a^3 \Leftrightarrow a^4b^2=4a^3 \Leftrightarrow ab^2=4.$

Câu 193. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3\left(a^2b\right)}=4a^3$. Giá trị của ab^2 bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Ta có:

$9^{\log_3\left(a^2b\right)}=4a^3 \Leftrightarrow 3^{2\log_3\left(a^2b\right)}=4a^3 \Leftrightarrow 3^{\log_3\left(a^2b\right)^2}=4a^3 \Leftrightarrow \left(a^2b\right)^2=4a^3 \Leftrightarrow a^4b^2=4a^3 \Leftrightarrow ab^2=4.$

14.4 Dạng toán khác về logarit

Câu 194. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a>1, b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1;\,2)$. **B.** $\left[2;\,\frac{5}{2}\right)$. **C.** $[3;\,4)$. **D.** $\left[\frac{5}{2};\,3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Do $a, b>1$ và $x, y>0$ nên $a^x=b^y=\sqrt{ab} \Leftrightarrow \log_a a^x=\log_a b^y=\log_a\sqrt{ab}$.

Tìm được $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b \\ 2y=1+\log_b a \end{cases}$.

Tức $P=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log_a b+\log_b a$.

Lại do $a, b>1$ nên $\log_a b, \log_b a>0$.

Tức $P\ge\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{1}{2}\log_a b.\log_b a}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$, $P=\frac{3}{2}+\sqrt{2} \Leftrightarrow \log_a b=\sqrt{2}$.

Lưu ý rằng, luôn tồn tại $a, b>1$ thỏa mãn $\log_a b=\sqrt{2}$.

Vậy $\min P=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

Câu 195. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3\left(x+y\right)=\log_4\left(x^2+y^2\right)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện $x+y>0; x^2+y^2\neq 0$.

Ta đặt: $\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2)=t$. Ta có $\begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases}$ (1)

Vì $(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)\Rightarrow (3^t)^2\le 2.4^t \Rightarrow t\le \log_{\frac{9}{4}} 2$

Thế thì $x^2+y^2=4^t\le 4^{\log_{\frac{9}{4}} 2}\approx 3,27$, vì x nguyên vậy nên $x^2\in\{0;1\}$.

 Với $x=0$, ta có hệ $\begin{cases} y=3^t \\ y^2=4^t \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=1 \end{cases}$

 Với $x=1$, ta có hệ $\begin{cases} y=3^t-1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases}$. Hệ này có nghiệm $\begin{cases} t=0 \\ y=0 \end{cases}$.

 Với $x=-1$, ta có hệ $\begin{cases} y=3^t+1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases}$. Ta có phương trình

$(3^t+1)^2=4^t-1\Leftrightarrow 9^t+2.3^t-4^t+2=0\,(*)$

Đặt $f(t)=9^t+2.3^t-4^t+2$, ta có

Với $t\ge 0\Rightarrow 9^t\ge 4^t\Rightarrow f(t)>0$

Với $t<0\Rightarrow 4^t<2\Rightarrow f(t)>0$

Vậy phương trình $(*)$ vô nghiệm

Kết luận: Vậy $x\in\{0;1\}$

15. HÀM SỐ MŨ - LOGARIT

15.1 Tập xác định liên quan hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít

Câu 196. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Tập xác định của hàm số $y=\log_5 x$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $y=\log_5 x$.

Điều kiện xác định: $x>0$. Suy ra tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Câu 197. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Tập xác định của hàm số $y=\log_6 x$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Biểu thức $\log_6 x$ xác định khi $x>0$. Do đó tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)$.

Câu 198. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Tập xác định của hàm số $y=\log_3 x$ là

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $[0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\log_3 x$ có nghĩa khi $x>0$.

Vậy $D=(0;+\infty)$.

Câu 199. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Tập xác định của hàm số $\log_4 x$ là

A. $(-\infty;0)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $\log_4 x$ là $(0;+\infty)$.

Câu 200. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Tập xác định của hàm số $y=4^x$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 201. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Tập xác định của hàm số $y=5^x$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $[0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số $y=5^x$ là $\mathbb{R}$

Câu 202. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Tập xác định của hàm số $y=2^x$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số mũ $y=2^x$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Câu 203. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Tập xác định của hàm số $\log_4 x$ là

A. $(-\infty;0)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $\log_4 x$ là $(0;+\infty)$.

Câu 204. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Tập xác định của hàm số $y=\log_2 x$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi $x>0$. Vậy tập xác định $D=(0;+\infty)$.

15.2 Đạo hàm liên quan hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít

Câu 205. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Hàm số $y=2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-3)2^{x^2-3x}.\ln 2$. **B.** $2^{x^2-3x}.\ln 2$. **C.** $(2x-3)2^{x^2-3x}$. **D.** $(2x-3)2^{x^2-3x-1}$.

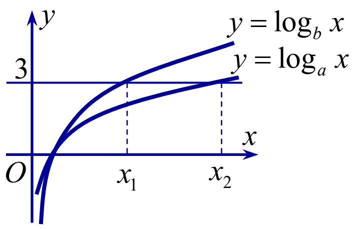
Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\left(a^u\right)'=u'.a^u.\ln a$, ta có: $y=2^{x^2-3x}\Rightarrow y'=(2x-3)2^{x^2-3x}.\ln 2$.

15.3 Đồ thị liên quan hàm số mũ, Logarit

Câu 206. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình bên.



Đường thẳng $y=3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ là $x_1;x_2$. Biết rằng $x_1=2x_2$. Giá trị của $\dfrac{a}{b}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\log_a x=3\Leftrightarrow x_1=a^3$, và $\log_b x=3\Leftrightarrow x_2=b^3$.

Ta có $x_1=2x_2\Leftrightarrow a^3=2b^3\Leftrightarrow\left(\dfrac{a}{b}\right)^3=2\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}=\sqrt[3]{2}$.

15.4 Câu hỏi tổng hợp liên quan hàm số lũy thừa, mũ, lô-ga-rít

Câu 207. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n\le 16$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m-n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 16. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(a)=2a^m-n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$, ta có $f'(a)=2ma^{m-1}-\dfrac{n}{\sqrt{a^2+1}}$.

$f'(a)=0\Leftrightarrow 2ma^{m-1}-\dfrac{n}{\sqrt{a^2+1}}=0\Leftrightarrow a^{m-1}\sqrt{a^2+1}=\dfrac{n}{2m}$ phải có một nghiệm $a_0<1$.

Suy ra $\dfrac{n}{2m}<2\Rightarrow\dfrac{n}{m}<4$ suy ra a_0 là nghiệm duy nhất.

Ta có bảng biến thiên

a	0		a_0		1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	0	$\searrow$	$f(a_0)$	$\nearrow$	$f(1)$

Ta thấy 0 là một nghiệm của phương trình $f(a)=0$.

Nếu $m=1$ suy ra để có nghiệm duy nhất thì $\dfrac{n}{2m}>1\Rightarrow n>2$ (loại)

Nếu m lẻ và $m\neq 1$ thì ta có a là một nghiệm thì $-a$ cũng là một nghiệm, do đó có đủ 3 nghiệm.
Nếu m chẵn thì phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm (vì không có nghiệm âm).
Suy ra m lẻ.
Để có 1 nghiệm dương thì theo BBT ta có

$f(1)>0\Rightarrow 2>n\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow n<\dfrac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\approx 2,2$.

Suy ra $n\in\{1;2\}$ suy ra $m\in\{3;5;\cdots;15\}$.

Suy ra có 13 cặp (m,n) (do $15+2=17>16$).

15.5 Bài toán lãi suất

Câu 208. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán năm trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bảo nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 810.000.000. **B.** 813.529.000. **C.** 797.258.000. **D.** 830.131.000.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $A=900.000.000, r=\dfrac{2}{100}$

Năm 2021 giá xe niêm yết là: $T_1=A-Ar$

Năm 2022 giá xe niêm yết là $T_2=A-Ar-(A-Ar)r=A(1-r)^2$

.

Năm 2025 giá xe niêm yết là: $T_5=T_4-T_4r=A(1-r)^5$

$$T_5=900.000.000\left(1-\frac{2}{100}\right)^5\approx 813.529.000$$

Câu 209. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Năm 2020 một hãng xe niêm yết giá bán loại xe X là 750.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn) ?

A. 677.941.000 đồng. **B.** 675.000.000 đồng.
C. 664.382.000 đồng. **D.** 691.776.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Giá xe năm 2020 là A

Giá xe năm 2021 là $A_1 = A - A.r = A(1-r)$.

Giá xe năm 2022 là $A_2 = A_1 - A_1.r = A(1-r)^2$.

Giá xe năm 2023 là $A_3 = A_2 - A_2.r = A(1-r)^3$.

Giá xe năm 2024 là $A_4 = A_3 - A_3.r = A(1-r)^4$.

Giá xe năm 2025 là $A_5 = A_4 - A_4.r = A(1-r)^5 = 750.000.000\left(1-\dfrac{2}{100}\right)^5 \approx 677.941.000$ đồng.

Câu 210. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Trong năm 2019, diện tích trồng rừng mới của tỉnh A là 1000 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên của tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha?

A. Năm 2043. **B.** Năm 2025. **C.** Năm 2024. **D.** Năm 2042.

Lời giải

Fb: Do Huu Nhan
Phản biện: Trần Quốc An

Đặt $A_0 = 1000$ ha, $r = 6\%$.

Diện tích rừng trồng mới sau n năm là: $A_n = A_0(1+r)^n$

$\Rightarrow 1400 < 1000(1+r)^n \Rightarrow n > \log_{1+r}\dfrac{14}{10} \Rightarrow n > 5,77$.

Vậy tới năm 2025 diện tích rừng trồng mới đạt trên 1400 ha.

Câu 211. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 800.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 708.674.000 đồng. **B.** 737.895.000 đồng. **C.** 723.137.000 đồng. **D.** 720.000.000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Giá bán loại xe X năm 2021 là: $800.000.000 - 800.000.000 \times 2\% = 800.000.000 \times (1-2\%)$

Giá bán loại xe X năm 2022 là: $800.000.000 \times (1-2\%) - 800.000.000 \times (1-2\%) \times 2\% = 800.000.000 \times (1-2\%)^2$.

Tương tự ta có: giá bán loại xe X năm 2025 sẽ là: $800.000.000 \times (1-2\%)^5 \approx 723.137.000$ đồng.

15.6 Bài toán tăng trưởng

Câu 212. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 600 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1000 ha?

A. Năm 2028. **B.** Năm 2047. **C.** Năm 2027. **D.** Năm 2046.

Lời giải

Gọi $S_0, S_n, r\%$ lần lượt là diện tích rừng trồng mới năm 2019, diện tích rừng trồng mới sau n năm và phần trăm diện tích rừng trồng mới tăng mỗi năm.

Sau 1 năm, diện tích rừng trồng mới là $S_1 = S_0 + S_0 r = S_0(1+r)$.

Sau 2 năm, diện tích rừng trồng mới là $S_2 = S_1 + S_1 r = S_1(1+r) = S_0(1+r)^2$.

…

Sau n năm, diện tích rừng trồng mới là $S_n = S_0(1+r)^n$.

Theo bài ra $S_0 = 600,\ r = 0,06,\ S_n > 1000 \Rightarrow 600(1+0,06)^n > 1000 \Rightarrow 1,06^n > \frac{5}{3} \Rightarrow n > \log_{1,06}\frac{5}{3} \approx 8,77$.

Vậy phải sau ít nhất 9 năm thì diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mới đạt trên 1000 ha. Đó là năm 2028.

Câu 213. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 900 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên của tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha?

A. Năm 2029. **B.** Năm 2051. **C.** Năm 2030. **D.** Năm 2050.

Lời giải

Gọi x là số năm tính từ 2019 đến năm có diện tích là 1700 ha, ta có

$1700 < 900(1+6\%)^x \Rightarrow x > 10,9$.

Năm đầu tiên của tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha chọn $x = 11$. Suy ra năm 2030.

Nhận xét: Bài toán này tương tự bài toán cơ bản về lãi suất quen thuộc với các em.

Câu 214. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha?

A. Năm 2029. **B.** Năm 2028. **C.** Năm 2048. **D.** Năm 2049.

Lời giải

Ta có: $S_n = 1400\,\text{ha}$; $A = 800\,\text{ha}$; $r = 6\%$.

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n \Rightarrow A(1+r)^n > 1400$

$\Leftrightarrow n > \log_{1+r}\left(\frac{1400}{A}\right) \Leftrightarrow n > \log_{1,06}\left(\frac{1400}{800}\right) \Leftrightarrow n > 9,609 \Rightarrow n = 10$.

Vậy năm đầu tiên là năm 2029.

Câu 215. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha?

A. Năm 2029. **B.** Năm 2028. **C.** Năm 2048. **D.** Năm 2049.

Lời giải

Ta có: $S_n = 1400\,\text{ha}$; $A = 800\,\text{ha}$; $r = 6\%$.

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n \Rightarrow A(1+r)^n > 1400$

$\Leftrightarrow n > \log_{1+r}\left(\frac{1400}{A}\right) \Leftrightarrow n > \log_{1,06}\left(\frac{1400}{800}\right) \Leftrightarrow n > 9,609 \Rightarrow n = 10$.

Vậy năm đầu tiên là năm 2029.

Câu 216. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỷ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức $P(n) = \frac{1}{1+49e^{-0,015n}}$. Hỏi cần phát **ít nhất** bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

A. 202. **B.** 203. **C.** 206. **D.** 207.

Lời giải

Chọn B

Để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30% điều kiện là $P(n) = \frac{1}{1+49e^{-0,015n}} > 30\% = \frac{3}{10}$

$\Leftrightarrow 1+49e^{-0,015n} < \frac{10}{3} \Leftrightarrow e^{-0,015n} < \frac{1}{21} \Leftrightarrow -0,015n < \ln\left(\frac{1}{21}\right) \Leftrightarrow n > -\frac{1}{0,015}\ln\left(\frac{1}{21}\right) \approx 202,968$

$\Rightarrow n \geq 203 \Rightarrow n_{\min} = 203$.

15.6 Hàm số mũ ,logarit chứa tham số

Câu 217. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 6x + 4y$ bằng

A. $\frac{65}{8}$. **B.** $\frac{33}{4}$. **C.** $\frac{49}{8}$. **D.** $\frac{57}{8}$.

Lời giải

Ta có $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow y.2^{2x+2y-2} \geq 3-2x \Leftrightarrow \boxed{2y.2^{2y} \geq (3-2x).2^{3-2x}}$ $(*)$

Hàm số $f(t) = t.2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên từ $(*)$ ta suy ra $2y \geq 3-2x \Leftrightarrow \boxed{2x+2y-3 \geq 0}$ (1)

Ta thấy (1) bất phương trình bậc nhất có miền nghiệm là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d: 2x+2y-3=0$ (phần không chứa gốc tọa độ O), kể cả các điểm thuộc đường thẳng d.

Xét biểu thức $P = x^2+y^2+6x+4y \Leftrightarrow \boxed{(x+3)^2+(y+2)^2 = P+13}$ (2)

Để P tồn tại thì ta phải có $P+13 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq -13$.

Trường hợp 1: Nếu $P = -13$ thì $x=-3;\ y=-2$ không thỏa (1). Do đó, trường hợp này không thể xảy ra.

Trường hợp 2: Với $P > -13$, ta thấy (2) là đường tròn (C) có tâm $I(-3;-2)$ và bán kính $R = \sqrt{P+13}$.

Để d và (C) có điểm chung thì $d(I;d) \leq R \Leftrightarrow \frac{13}{2\sqrt{2}} \leq \sqrt{P+13} \Leftrightarrow \boxed{P \geq \frac{65}{8}}$.

Khi $P=\dfrac{65}{8}$ đường tròn (C) tiếp xúc đường thẳng d tại $N\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{4}\right)$ (thỏa mãn vì N thuộc (T)).

Vậy $\boxed{\min P=\dfrac{65}{8}}$.

Câu 218. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $m+n\le 10$ và ứng với mỗi cặp $(m;n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\Leftrightarrow\dfrac{2a^m}{n}=\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.

Xét hai hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ và $g(x)=\dfrac{2}{n}x^m$ trên $(-1;1)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ nên $f(x)$ luôn đồng biến và $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ.

+ Nếu m chẵn thì $g(x)$ là hàm số chẵn và có bảng biến thiên dạng

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$g(1)$

Suy ra phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm, do đó m lẻ.

+ Nếu m lẻ thì hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ và luôn đồng biến.

Ta thấy phương trình luôn có nghiệm $x=0$. Dựa vào tính chất đối xứng của đồ thị hàm số lẻ, suy ra phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm trên $(-1;1)$ khi có 1 nghiệm trên $(0;1)$, hay

$f(1)>g(1)\Leftrightarrow\ln\left(1+\sqrt{2}\right)<\dfrac{2}{n}\Leftrightarrow n<\dfrac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\approx 2,26\Rightarrow n\in\{1;2\}$.

Đối chiếu điều kiện, với $n=1$ suy ra $m\in\{1;3;5;7;9\}$, có 5 cặp số thỏa mãn

Với $n=2$ thì $m\in\{1;3;5;7\}$ có 4 cặp số thỏa mãn.

Vậy có 9 cặp số thỏa mãn bài toán.

15.6 Min-Max liên quan hàm mũ, hàm lô-ga-rít(nhiều biến)

Câu 219. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+6y$ bằng

A. $\frac{33}{4}$. **B.** $\frac{65}{8}$. **C.** $\frac{49}{8}$. **D.** $\frac{57}{8}$.

Lời giải

Nhận xét: Giá trị của x, y thỏa mãn phương trình $2x+y\cdot 4^{x+y-1}=3(1)$ sẽ làm cho biểu thức P nhỏ nhất. Khi đó

$$(1): 2x+y\cdot 4^{x+y-1}=3 \Leftrightarrow 4^{x+y-1}+\frac{2}{y}(x+y)-2-\frac{3}{y}=0$$

Đặt $a=x+y$, từ (1) ta được phương trình

$$4^{a-1}+\frac{2}{y}.a-2-\frac{3}{y}=0\ (*).$$

Xét hàm số $f(a)=4^{a-1}+\frac{2}{y}.a-2-\frac{3}{y}$. Ta có $f'(a)=4^{a-1}.\ln 4+\frac{2}{y}>0,\ \forall y>0$ nên $f(a)$ hàm số đồng biến.

Mặt khác, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(a)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(a)=+\infty$.

Do đó, phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $a=\frac{3}{2}\Rightarrow x+y=\frac{3}{2}$.

Ta viết lại biểu thức $P=(x+y)^2+4(x+y)+2\left(y-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{8}=\frac{65}{8}$. Vậy $P_{\min}=\frac{65}{8}$.

Cách khác:

Với mọi x, y không âm ta có

$$2x+y.4^{x+y-1}\geq 3 \Leftrightarrow x+y.4^{x+y-\frac{3}{2}}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left(x+y-\frac{3}{2}\right)+y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}}-1\right)\geq 0\ (1)$$

Nếu $x+y-\frac{3}{2}<0$ thì $\left(x+y-\frac{3}{2}\right)+y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}}-1\right)<0+y.\left(4^0-1\right)=0$ (vô lí)

Vậy $x+y\geq\frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhyakovski ta được

$$P=x^2+y^2+4x+6y=(x+3)^2+(y+2)^2-13$$

$$\geq\frac{1}{2}(x+y+5)^2-13\geq\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+5\right)^2-13=\frac{65}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ x+3=y+2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=\frac{5}{4} \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$.

Vậy $\min P=\frac{65}{8}$.

Câu 220. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+2x+y^2+4y$.

A. $\frac{33}{8}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{41}{8}$.

Lời giải:

Cách 1 (Thầy Nguyễn Duy Hiếu).

Ta có $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3 \Leftrightarrow 2x-3+2y.2^{2x+2y-3}\ge 0 \Leftrightarrow 2x+2y-3+2y.\left(2^{2x+2y-3}-1\right)\ge 0$ (1)

Nếu $2x+2y-3<0$ thì VT(1) < 0, vô lý, nên từ (1) suy ra $2x+2y-3\ge 0 \Leftrightarrow x+y\ge \frac{3}{2}$

$$P=(x+1)^2+(y+2)^2-5=\frac{1}{2}(1+1)\left[(x+1)^2+(y+2)^2\right]-5$$

$$\ge \frac{1}{2}(x+1+y+2)^2-5\ge \frac{1}{2}\left(3+\frac{3}{2}\right)^2-5=\frac{41}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{5}{4},y=\frac{1}{4}$. Vậy $\min P=\frac{41}{8}$.

Cách 2 (Trần Văn Trưởng).

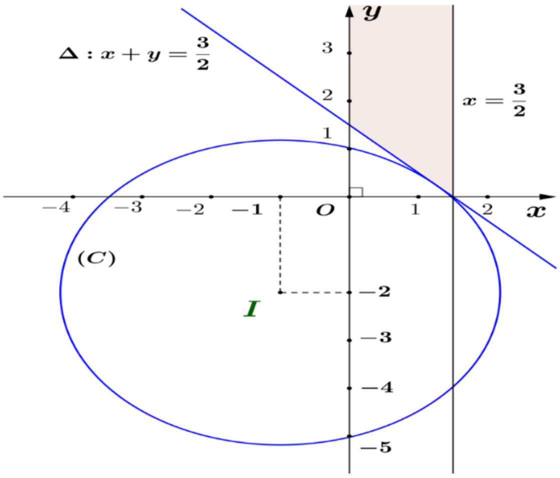
- Ta có $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3\Leftrightarrow y.4^{y}.4^{x-1}\ge 3-2x \Leftrightarrow y.2^{2y}\ge (3-2x).2^{2-2x}$

$\Leftrightarrow 2y.2^{2y}\ge (3-2x).2^{3-2x}$. (*)

Nếu $3-2x\le 0\Leftrightarrow x\ge \frac{3}{2}$ thì với mọi $x\ge \frac{3}{2}, y\ge 0$ đều thỏa mãn (*) và khi đó $P=x^2+y^2+2x+4y\ge \frac{21}{4}$.

Nếu $3-2x>0$.

- Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ với $t\in(0;+\infty)$.
- Ta có $f'(t)=2^t+t.2^t.\ln 2>0, \forall t\in(0;+\infty)$.
- Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Từ (*) suy ra $2y\ge 3-2x\Leftrightarrow 2x+2y\ge 3$.
- Xét $P=(x+1)^2+(y+2)^2-5\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=P+5$.
- Ta có hệ điều kiện sau: $\begin{cases} 0\le x<\frac{3}{2} & (1)\\ y\ge 0 & (2)\\ 2x+2y-3\ge 0 & (3)\\ (x+1)^2+(y+2)^2=P+5 & (4)\end{cases}$
- Hệ điều kiện (1), (2), (3) là phần tô màu trên hình vẽ.
- (4) coi như là đường tròn tâm $I(-1;-2), R=\sqrt{P+5}$.



 Để hệ có nghiệm thì $d(I;\Delta)\le R=\sqrt{P+5}$, ở đó $\Delta: 2x+2y-3=0$.

 Suy ra $\dfrac{|2(-1)+2(-2)-3|}{\sqrt{2^2+2^2}}\le\sqrt{P+5}\Leftrightarrow P\ge\dfrac{41}{8}$.

 Dấu bằng xảy ra khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases}0\le x<\dfrac{3}{2}\\ y\ge 0\\ 2x+2y-3=0\\ (x+1)^2+(y+2)^2=\dfrac{41}{8}+5\end{cases}$$

 Giải hệ này ta tìm được $\begin{cases}x=\dfrac{5}{4}\\ y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

 Vậy Min $P=\dfrac{41}{8}$ khi $x=\dfrac{5}{4},\ y=\dfrac{1}{4}$.

Cách 3 (Nguyễn Kim Duyên)

Giả thiết $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3\ (1)\Leftrightarrow 2x-2+y.2^{2x+2y-2}\ge 1$.

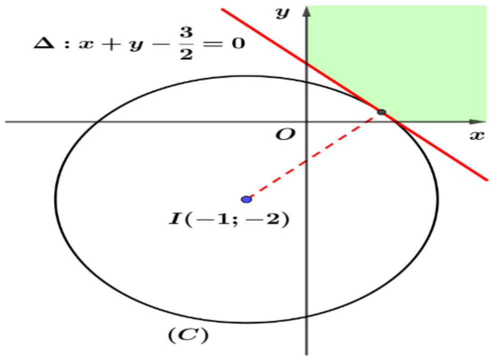
Đặt $a=2x+2y-2$; $b=2x-2\ \Rightarrow a\ge b$ và $y=\dfrac{a-b}{2}$.

(1) viết lại: $b+\dfrac{a-b}{2}.2^a\ge 1\Leftrightarrow 2(b-a)+(a-b)2^a\ge 2-2a\Leftrightarrow (a-b)(2^a-2)\ge 2-2a\ \ (*)$

• Nếu $a<1$ thì $VT(*)\le 0<VP(*)$. Vậy không xảy ra $a<1$.

• Nếu $a\ge 1$ thì $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ 2x+2y\ge 3\end{cases}\ (D)$.

Biểu diễn được $P+5=(x+1)^2+(y+2)^2$, xem như là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-1;-2)$, bán kính $\sqrt{P+5}$.



Ta cần tìm $\min P$ trên miền (D). Khi đó (C) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất chạm miền $(D) \Leftrightarrow d(I,\Delta)=\sqrt{P+5}$ (trong đó, $\Delta: 2x+2y-3=0$).

$\Leftrightarrow \frac{9}{2\sqrt{2}}=\sqrt{P+5} \Leftrightarrow P=\frac{41}{8}$. Khi đó Δ tiếp xúc (C) tại điểm $\left(\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Vậy $\min P=\frac{41}{8}$, đạt được khi $x=\frac{5}{4}$, $y=\frac{1}{4}$.

Cách 4 (NT AG). Ta có $2x+y.4^{x+y-1}\geq 3 \Leftrightarrow 2x+2y.2^{2x+2y-3}\geq 3$.

Nếu $2x+2y-3<0$ thì $3\leq 2x+2y.2^{2x+2y-3}<2x+2y.2^0=2x+2y$. Suy ra $2x+2y-3>0$. Mâu thuẫn.

Nếu $2x+2y-3\geq 0$ (1). Ta có (1) $\Leftrightarrow x+y\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow x+(y+1)\geq\frac{5}{2}$. Đặt $t=y+1$ ($t\geq 1$). Ta có $x+t\geq\frac{5}{2}$. Khi đó,

$$P=x^2+2x+y^2+4y=x^2+(y+1)^2+2x+2y+2-3=x^2+t^2+2(x+t)-3$$

$$\geq\frac{1}{2}(x+t)^2+2(x+t)-3\geq\frac{1}{2}.\left(\frac{5}{2}\right)^2+2.\left(\frac{5}{2}\right)-3=\frac{41}{8}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=t=\frac{5}{4}$ hay $x=\frac{5}{4}, y=\frac{1}{4}$.

Nhận xét: Thông qua đặt $t=y+1$ ta đưa được về giả thiết và kết luận đều có biểu thức đối xứng đối với x và t, vì thế thí sinh có thể dễ dàng phán đoán P đạt min khi $x=t=\frac{5}{4}$.

Câu 221. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\leq(x^2+y^2-2x+2).4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét $x^2+y^2-2x+2>0\forall x;y$

Bất phương trình $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x\Leftrightarrow\dfrac{2^{x^2+y^2+1}}{2^{2x}}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)$.

Đặt $t=x^2+y^2-2x+1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^t\le t+1\Leftrightarrow 2^t-t-1\le 0$

Đặt $f(t)=2^t-t-1$. Ta thấy $f(0)=f(1)=0$.

Ta có $f'(t)=2^t\ln 2-1$

$f'(t)=0\Leftrightarrow 2^t\ln 2=1\Leftrightarrow t=\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)\approx 0,52$

t	$-\infty$	0	$\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$	1	$+\infty$
$f'(t)$	$-$		0	$+$	
$f(t)$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$

Quan sats BBT ta thấy $f(t)\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 1$

$0\le x^2+y^2-2x+1\le 1\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2\le 1\ \ (1)$

Xét $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}\Leftrightarrow 2Px-Py+P=8x+4$

$\Leftrightarrow P-4=(8-2P)x+Py$

$\Leftrightarrow P-4+2P-8=(8-2P)x+2P-8+Py$

$\Leftrightarrow 3P-12=(8-2P)(x-1)+Py$

$\Leftrightarrow(3P-12)^2=\left[(8-2P)(x-1)+Py\right]^2\le\left[(8-2P)^2+P^2\right]\left[(x-1)^2+y^2\right]$

Thế (1) vào ta có $(3P-12)^2\le\left[(8-2P)^2+P^2\right]\Leftrightarrow 4P^2-40P+80\le 0\Leftrightarrow 5-\sqrt{5}\le P\le 5+\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{8-2P}{P}=\dfrac{x-1}{y}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y\\\left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y\right)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y\\y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\y=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}\\\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\y=\dfrac{-\sqrt{5}}{3}\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $5-\sqrt{5}\approx 2,76$ gần giá trị 3 nhất.

16. PHƯƠNG TRÌNH , BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

16.1 PT,BPT mũ cơ bản, gần cơ bản (không tham số)

Câu 222. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Nghiệm của phương trình $3^{2x-1}=27$ là

A. $x=5$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=4$.

Lời giải

Chọn C.

$3^{2x-1}=27 \Leftrightarrow 2x-1=3 \Leftrightarrow x=2$.

Câu 223. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=9$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Ta có: $3^{x-1}=9 \Leftrightarrow 3^{x-1}=3^2 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=3$.

Câu 224. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Nghiệm của phương trình $2^{2x-3}=2^x$ là

A. $x=8$. **B.** $x=-8$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{2x-3}=2^x \Leftrightarrow 2x-3=x \Leftrightarrow x=3$. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=3$.

Câu 225. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Nghiệm của phương trình $2^{2x-4}=2^x$ là

A. $x=16$. **B.** $x=-16$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^{2x-4}=2^x \Leftrightarrow 2x-4=x \Leftrightarrow x=4$.

Câu 226. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$ là

A. $x=4$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn A

$3^{x-1}=27 \Leftrightarrow 3^{x-1}=3^3 \Leftrightarrow x=4$.

Câu 227. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Tập nghiệm của bất phương trình $9^x+2.3^x-3>0$ là

A. $[0;+\infty)$.. **B.** $(0;+\infty)$.. **C.** $(1;+\infty)$.. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=3^x\,(t>0)$ bất phương trình đã cho trở thành $t^2+2t-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>1 \\ t<-3\,(loai) \end{array}\right.$

Với $t>1$ thì $3^x>1 \Leftrightarrow x>0$.

16.2 Phương pháp đưa về cùng cơ số (không tham số)

Câu 228. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-13}<27$ là

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(-4;4)$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $(0;4)$.

Lời giải

Ta có:

$3^{x^2-13}<27 \Leftrightarrow 3^{x^2-13}<3^3 \Leftrightarrow x^2-13<3 \Leftrightarrow x^2<16 \Leftrightarrow |x|<4 \Leftrightarrow -4<x<4$.

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(-4;4)$.

Kết luận: $S=(-4;4)$.

Câu 229. [ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102] Nghiệm của phương trình $3^{x-2}=9$ là

A. $x=-3$ **B.** $x=3$ **C.** $x=4$ **D.** $x=-4$

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^{x-2}=9 \Leftrightarrow 3^{x-2}=3^2 \Leftrightarrow x-2=2 \Leftrightarrow x=4$

Câu 230. [ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103] Nghiệm của phương trình $3^{x+1}=9$ là

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Ta có $3^{x+1}=9 \Leftrightarrow x+1=\log_3 9 \Leftrightarrow x=1$.

.

Câu 231. [ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104] Nghiệm của phương trình $3^{x+2}=27$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Ta có: $3^{x+2}=27 \Leftrightarrow 3^{x+2}=3^3 \Leftrightarrow x+2=3 \Leftrightarrow x=1$.

Câu 232. [ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104] Nghiệm của phương trình $3^{x+2}=27$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Ta có: $3^{x+2}=27 \Leftrightarrow 3^{x+2}=3^3 \Leftrightarrow x+2=3 \Leftrightarrow x=1$.

Câu 233. [ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102] Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-23}<9$ là :

A. $(-5;5)$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(0;5)$.

Lời giải

Ta có : $3^{x^2-23}<9 \Leftrightarrow 3^{x^2-23}<3^2 \Leftrightarrow x^2-23<2 \Leftrightarrow x^2<25 \Leftrightarrow -5<x<5$

Câu 234. [ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103] Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-7}<4$ là

A. $(-3;3)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $\Leftrightarrow x^2-7<2 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow -3<x<3$.

Câu 235. [ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104] Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-1}<8$ là

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $2^{x^2-1}<8 \Leftrightarrow 2^{x^2-1}<2^3 \Leftrightarrow x^2-1<3 \Leftrightarrow x^2-4<0 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;2)$.

Câu 236. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-1}<8$ là

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $2^{x^2-1}<8 \Leftrightarrow 2^{x^2-1}<2^3 \Leftrightarrow x^2-1<3 \Leftrightarrow x^2-4<0 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;2)$.

16.3 Phương pháp hàm số, đánh giá (không tham số)

Câu 237. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2+y)\ge\log_3(x+y)$?

A. 55. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 56.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y>0 \\ x,y\in\mathbb{Z} \end{cases}$. Khi đó

$\log_4(x^2+y)\ge\log_3(x+y) \Leftrightarrow x^2+y\ge 4^{\log_3(x+y)} \Leftrightarrow x^2+y\ge(x+y)^{\log_3 4}$

$\Leftrightarrow x^2-x>(x+y)^{\log_3 4}-(x+y)$ (1)

Đặt $t=x+y\Rightarrow t\ge 1$ thì (1) được viết lại là $x^2-x>t^{\log_3 4}-t$ (2)

Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1)

Tương đương với bất phương trình (2) có không quá 242 nghiệm t.

Nhận thấy $f(t)=t^{\log_3 4}-t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nếu $x^2-x>243^{\log_3 4}-243=781$ thì sẽ có ít nhất 243 nghiệm nguyên $t\ge 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2-x\le 781 \Leftrightarrow -27,4\le x\le 28,4$.

Mà x nguyên nên $x\in\{-27,-26,...,27,28\}$.

Vậy có tất cả $28+28=56$ số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 238. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+2y$ bằng

A. $\frac{33}{8}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{41}{8}$.

Lời giải

Ta có : $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3 \Leftrightarrow 2y.2^{2y-(3-2x)}\ge 3-2x \Leftrightarrow 2y.2^{2y}\ge(3-2x).2^{3-2x}$ $(*)$.

Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ có $f'(t)=2^t+t.2^t.\ln 2$.

Trường hợp 1 : Với $x\ge\frac{3}{2}\Rightarrow(*)$ luôn đúng $\forall y\ge 0$.

Ta có : $P=(x+2)^2+(y+1)^2-5\ge\left(\frac{3}{2}+2\right)^2+(0+1)^2-5=\frac{33}{4}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=0 \end{cases}$.

Trường hợp 2 : $0 \le x < \dfrac{3}{2}$ suy ra $t \ge 0 \Rightarrow f'(t) > 0$ hay hàm số $y = f(t)$ luôn đồng biến nên $(*) \Leftrightarrow 2y \ge 3 - 2x \Leftrightarrow y \ge \dfrac{3-2x}{2}$.

Ta có : $P = x^2 + y^2 + 4x + 2y \ge x^2 + \left(\dfrac{3-2x}{2}\right)^2 + 4x + 3 - 2x$

$= 2x^2 - x + \dfrac{21}{4} = 2\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{41}{8} \ge \dfrac{41}{8}$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$.

Câu 239. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y.4^{x+y-1} \ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 2y$ bằng

A. $\dfrac{33}{8}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** $\dfrac{21}{4}$. **D.** $\dfrac{41}{8}$.

Lời giải

Ta có : $2x + y.4^{x+y-1} \ge 3 \Leftrightarrow 2y.2^{2y-(3-2x)} \ge 3 - 2x \Leftrightarrow 2y.2^{2y} \ge (3-2x).2^{3-2x}$ $(*)$.

Xét hàm số $f(t) = t.2^t$ có $f'(t) = 2^t + t.2^t.\ln 2$.

Trường hợp 1 : Với $x \ge \dfrac{3}{2} \Rightarrow (*)$ luôn đúng $\forall y \ge 0$.

Ta có : $P = (x+2)^2 + (y+1)^2 - 5 \ge \left(\dfrac{3}{2} + 2\right)^2 + (0+1)^2 - 5 = \dfrac{33}{4}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$.

Trường hợp 2 : $0 \le x < \dfrac{3}{2}$ suy ra $t \ge 0 \Rightarrow f'(t) > 0$ hay hàm số $y = f(t)$ luôn đồng biến nên $(*) \Leftrightarrow 2y \ge 3 - 2x \Leftrightarrow y \ge \dfrac{3-2x}{2}$.

Ta có : $P = x^2 + y^2 + 4x + 2y \ge x^2 + \left(\dfrac{3-2x}{2}\right)^2 + 4x + 3 - 2x$

$= 2x^2 - x + \dfrac{21}{4} = 2\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{41}{8} \ge \dfrac{41}{8}$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$.

17. PHƯƠNG TRÌNH , BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGA

17.1 Câu hỏi lý thuyết

Câu 240. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=3$ là

A. $x=10$. **B.** $x=9$. **C.** $x=8$. **D.** $x=7$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(x-1)=3 \Leftrightarrow x=2^3+1=9$ nên

17.2 PT,BPT loga cơ bản, gần cơ bản (không tham số)

Câu 241. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)=2$ là

A. $x=8$. **B.** $x=9$. **C.** $x=7$. **D.** $x=10$.

Lời giải

Ta có $\log_3(x-1)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-1=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x=10 \end{cases} \Leftrightarrow x=10$.

Câu 242. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Nghiệm của phương trình $\log_2(x-2)=3$ là

A. $x=6$. **B.** $x=8$. **C.** $x=11$. **D.** $x=10$.

Lời giải

Điều kiện $x>2$.

$\log_2(x-2)=3 \Leftrightarrow x-2=2^3 \Leftrightarrow x=10$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy nghiệm của phương trình là $x=10$.

Câu 243. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Nghiệm của phương trình $\log_3(x-2)=2$ là

A. $x=11$. **B.** $x=10$. **C.** $x=7$. **D.** $x=8$.

Lời giải

Điều kiện : $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

Ta có: $\log_3(x-2)=2 \Leftrightarrow x-2=3^2 \Leftrightarrow x=11$ (Thỏa mãn điều kiện $x>2$).

Vậy phương trình $\log_3(x-2)=2$ có nghiệm là $x=11$.

Câu 244. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+8)=5$ bằng

A. $x=17$. **B.** $x=24$. **C.** $x=2$. **D.** $x=40$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(x+8)=5 \Leftrightarrow x+8=2^5 \Leftrightarrow x=24$.

Câu 245. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+9)=5$ là

A. $x=41$. **B.** $x=23$. **C.** $x=1$. **D.** $x=16$.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $x>-9$

Ta có: $\log_2(x+9)=5 \Leftrightarrow x+9=2^5 \Leftrightarrow x=23$.

Câu 246. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Nghiệm của phương trình $\log_3(x-2)=2$ là

A. $x=11$. **B.** $x=10$. **C.** $x=7$. **D.** $x=8$.

Lời giải

Điều kiện : $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

Ta có: $\log_3(x-2)=2 \Leftrightarrow x-2=3^2 \Leftrightarrow x=11$ (Thỏa mãn điều kiện $x>2$).

Vậy phương trình $\log_3(x-2)=2$ có nghiệm là $x=11$.

Câu 247. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(18-x^2)\ge 2$ là

A. $(-\infty;3]$. **B.** $(0;3]$.

C. $[-3;3]$. **D.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $18-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(-3\sqrt{2};3\sqrt{2})$ (*).

Khi đó ta có: $\log_3(18-x^2)\ge 2 \Leftrightarrow 18-x^2\ge 9 \Leftrightarrow -3\le x\le 3$.

Kết hợp với điều kiện (*) ta được tập ngiệm của bất phương trình đã cho là $[-3;3]$.

Câu 248. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(13-x^2)\ge 2$ là

A. $(-\infty;-2]\cup[2:+\infty)$. **B.** $(-\infty;2]$.

C. $(0;2]$. **D.** $[-2;2]$.

Lời giải

Chọn D

◆ Bất phương trình $\log_3(13-x^2)\ge 2 \Leftrightarrow \begin{cases}13-x^2>0\\13-x^2\ge 9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2<13\\x^2\le 4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-\sqrt{13}<x<\sqrt{13}\\-2\le x\le 2\end{cases} \Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

◆Vậy, tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(13-x^2)\ge 2$ là $[-2;2]$.

Câu 249. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+6)=5$ là:

A. $x=4$. **B.** $x=19$. **C.** $x=38$. **D.** $x=26$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x+6>0 \Leftrightarrow x>-6$

Ta có: $\log_2(x+6)=5 \Leftrightarrow \log_2(x+6)=\log_2 2^5 \Leftrightarrow (x+6)=32 \Leftrightarrow x=32-6 \Leftrightarrow x=26(TM)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=26$

Câu 250. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36-x^2)\ge 3$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3]$. **C.** $[-3;3]$. **D.** $(0;3]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3(36-x^2)\ge 3 \Leftrightarrow 36-x^2\ge 27 \Leftrightarrow 9-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 3$.

Câu 251. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Tập nghiệm của bất phương trình $\log x\ge 1$ là

A. $(10;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[10;+\infty)$. **D.** $(-\infty;10)$.

Lời giải

Chọn C

$\log x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 10$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[10;+\infty)$.

17.3 Phương pháp đưa về cùng cơ số (không tham số)

Câu 252. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Nghiệm của phương trình $\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$ là

A. $x=3$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=4$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{4}$

$\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1) \Leftrightarrow \log_3 3(x+1)=\log_3(4x+1)$

$\Leftrightarrow 3(x+1)=4x+1$

$\Leftrightarrow x=2$ (nhận).

17.4 PP phân tích thành nhân tử (không tham số)

Câu 253. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2+y) \ge \log_2(x+y)$?

A. 80. **B.** 79. **C.** 157. **D.** 158.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>-x \\ y>-x^2 \end{cases}$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x^2-x \ge 0, \forall x \in \mathbb{Z}$ suy ra $x^2 > x \Leftrightarrow -x^2 \le -x$ do đó có điều kiện $y>-x \Rightarrow y \ge 1-x$.

Xét hàm số $f(y)=\log_3(x^2+y)-\log_2(x+y)$.

Ta có $f'(y)=\dfrac{1}{(x^2+y)\ln 3}-\dfrac{1}{(x+y)\ln 2}=\dfrac{(x+y)\ln 2-(x^2+y)\ln 3}{(x^2+y)(x+y)\ln 3.\ln 2}$

Vì $x \le x^2 \Rightarrow 0<x+y \le x^2+y$

$0<\ln 2<\ln 3$

Suy ra $\ln 2(x+y)<\ln 3(x^2+y) \Rightarrow f'(y)<0$.

Nhận xét: $f(1-x)=\log_3(x^2-x+1)-\log_2 1 \ge 0, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Giả sử phương trình $f(y)=0$ có nghiệm, vì $f(y)<0$ $\Rightarrow$ phương trình $f(y)=0$ có nghiệm duy nhất $y=m$.

Có bảng biến thiên:

y	$1-x$		m		$+\infty$
$f'(y)$		$-$		$-$	
$f(y)$	$+$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-$

Nên bất phương trình $f(y)\ge 0 \Leftrightarrow 1-x\le y\le m$ do đó để bất phương trình có không quá 255 giá trị $y\in\mathbb{Z}$ thì $m\le 255-x$ nên $f(256-x)<0 \Leftrightarrow \log_3\left(x^2-x+256\right)-\log_2 256<0$ $\Leftrightarrow x^2-x+256<3^8 \Leftrightarrow -78{,}9<x<79{,}9$.

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $-78\le x\le 79 \Rightarrow$ có 158 giá trị x thỏa mãn

Câu 254. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2(x+y)$?

A. 80. **B.** 79. **C.** 157. **D.** 158.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>-x \\ y>-x^2 \end{cases}$

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x^2-x\ge 0,\forall x\in\mathbb{Z}$ suy ra $x^2>x \Leftrightarrow -x^2\le -x$ do đó có điều kiện $y>-x \Rightarrow y\ge 1-x$.

Xét hàm số $f(y)=\log_3\left(x^2+y\right)-\log_2(x+y)$.

Ta có $f'(y)=\dfrac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 3}-\dfrac{1}{(x+y)\ln 2}=\dfrac{(x+y)\ln 2-\left(x^2+y\right)\ln 3}{\left(x^2+y\right)(x+y)\ln 3.\ln 2}$

Vì $x\le x^2 \Rightarrow 0<x+y\le x^2+y$

$0<\ln 2<\ln 3$

Suy ra $\ln 2(x+y)<\ln 3\left(x^2+y\right) \Rightarrow f'(y)<0$.

Nhận xét: $f(1-x)=\log_3\left(x^2-x+1\right)-\log_2 1\ge 0,\forall x\in\mathbb{Z}$.

Giả sử phương trình $f(y)=0$ có nghiệm, vì $f(y)<0$ $\Rightarrow$ phương trình $f(y)=0$ có nghiệm duy nhất $y=m$.

Có bảng biến thiên:

y	$1-x$		m		$+\infty$
$f'(y)$		$-$		$-$	
$f(y)$	$+$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-$

Nên bất phương trình $f(y)\ge 0 \Leftrightarrow 1-x\le y\le m$ do đó để bất phương trình có không quá 255 giá trị $y\in\mathbb{Z}$ thì $m\le 255-x$ nên $f(256-x)<0 \Leftrightarrow \log_3\left(x^2-x+256\right)-\log_2 256<0$ $\Leftrightarrow x^2-x+256<3^8 \Leftrightarrow -78{,}9<x<79{,}9$.

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $-78\le x\le 79 \Rightarrow$ có 158 giá trị x thỏa mãn

17.5 Phương pháp hàm số, đánh giá (không tham số)

Câu 255. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3(x+y)$?

A. 59. **B.** 58. **C.** 116. **D.** 115.

Lời giải

Với mọi $x\in\mathbb{Z}$ ta có $x^2\ge x$.

Xét hàm số $f(y)=\log_3(x+y)-\log_4\left(x^2+y\right)$.

Tập xác định $\mathrm{D}=(-x;+\infty)$ (do $y>-x\Rightarrow y>-x^2$).

$f'(y)=\dfrac{1}{(x+y)\ln 3}-\dfrac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 4}\ge 0,\ \forall x\in D$ (do $x^2+y\ge x+y>0$, $\ln 4>\ln 3$)

$\Rightarrow f$ tăng trên D.

Ta có $f(-x+1)=\log_3(x-x+1)-\log_4\left(x^2-x+1\right)\le 0$.

Có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $f(y)\le 0$

$\Leftrightarrow f(-x+729)>0\Leftrightarrow \log_3 729-\log_4\left(x^2-x+729\right)>0$

$\Leftrightarrow x^2-x+729-4^6<0\Leftrightarrow x^2-x-3367<0$

$\Leftrightarrow -57,5\le x\le 58,5$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-57,-56,\dots,58\}$.

Vậy có $58-(-57)+1=116$ số nguyên x thỏa.

Câu 256. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2(x+y)$?

A. 89. **B.** 46. **C.** 45. **D.** 90.

Lời giải

Cách 1:

Với x nguyên tùy ý, ta có $x^2\ge x$

Xét hàm số $f(y)=\log_2(x+y)-\log_3\left(x^2+y\right)$

Tập xác định : $D=(-x;+\infty)$ $\left(y>-x\Rightarrow y>-x^2\right)$

$$f'(y)=\frac{1}{(x+y)\ln 2}-\frac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 3}=\frac{\left(x^2+y\right)\ln 3-(x+y)\ln 2}{(x+y)\left(x^2+y\right)\ln 2\cdot\ln 3}\ge 0\quad\forall y\in D$$

$\left(x^2+y\ge x+y>0;\ln 3>\ln 2>0\right)$ $\Rightarrow f(y)$ đồng biến trên D.

Ta có $f(-x+1)=-\log_3\left(x^2-x+1\right)\le 0$ (do $x^2-x+1\ge 1$)

Có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $f(y)\le 0$

$\Leftrightarrow f(-x+128)>0\Leftrightarrow \log_2 128-\log_3\left(x^2-x+128\right)>0$

$\Leftrightarrow x^2-x+128<3^7\Leftrightarrow x_1<x<x_2\left(x_1\approx -44,87;x_2\approx 45,87\right)$

$\Rightarrow x\in\{-44;-43;\dots;45\}$. Vậy có 90 giá trị x.

Cách 2:

Ta có: $\log_3(x^2+y)\ge\log_2(x+y)$ (1)

Đặt $t=x+y\ge 1$

(1) $\Leftrightarrow$ $\log_3(x^2-x+t)\ge\log_2 t$ $\Leftrightarrow$ $g(t)=\log_2 t-\log_3(x^2-x+t)\le 0$ (2)

Ta có $g'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}-\dfrac{1}{\left(x^2-x+t\right)\ln 3}>0$ với mọi $t\ge 1$. Do đó $g(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

Vì mỗi x nguyên có không quá 127 giá trị $t\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn (2) nên ta có

$g(128)>0\Leftrightarrow \log_2 128-\log_3\left(x^2-x+128\right)>0$

$\Leftrightarrow x^2-x+128<3^7 \Leftrightarrow -44{,}8\le x\le 45{,}8$.

Vậy có 90 giá trị thoả mãn YCBT.

Nhận xét: Đây là câu hay nhất đề năm nay. Trong trình bày tự luận, thí sinh có thể mắc sai lầm nếu ngay từ đầu đặt $t\in\mathbb{N}^*$, vì khi đó hàm $g(t)$ không liên tục trên tập $\mathbb{N}^*$, sẽ không có đạo hàm.

17.6 Phương trình loga có chứa tham số

Câu 257. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho phương trình $\log_9 x^2-\log_3\left(3x-1\right)=-\log_3 m$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm ?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện $x>\dfrac{1}{3}$ và $m>0$

Phương trình tương đương $\log_3 x-\log_3\left(3x-1\right)=\log_3\dfrac{1}{m} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3x-1}=\dfrac{1}{m}\Leftrightarrow m=\dfrac{3x-1}{x}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{3x-1}{x}$ với $x>\dfrac{1}{3}$.

$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}>0$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$ $\qquad$ $+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3

Vậy $0<m<3$ phương trình có nghiệm.

Do đó có 2 giá trị nguyên để phương trình có nghiệm.

17.7 Phương trình,bất phương trình tổ hợp cả mũ và loga có tham số

Câu 258. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho phương trình $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 49. **B.** 47. **C.** Vô số. **D.** 48.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 7^x-m\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 7^x\ge m \end{cases}$.

* Trường hợp $m\le 0$ thì $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0 \Leftrightarrow 4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0$

$\Leftrightarrow \left(\log_2 x-1\right)\left(4\log_2 x+5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=-\dfrac{5}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2^{-\frac{5}{4}} \end{array}\right.$.

Trường hợp này không thỏa điều kiện m nguyên dương.

* Trường hợp $m>0$, ta có $\begin{cases} x>0 \\ 7^x\ge m \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \log_7 m$ nếu $m>1$ và $x>0$ nếu $0<m\le 1$.

Khi đó $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0 \\ \sqrt{7^x-m}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2^{-\frac{5}{4}} \\ x=\log_7 m \end{array}\right.$.

+ Xét $0<m\le 1$ thì nghiệm $x=\log_7 m\le 0$ nên trường hợp này phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x=2; x=2^{-\frac{5}{4}}$ thỏa mãn điều kiện.

+ Xét $m>1$, khi đó điều kiện của phương trình là $x\ge \log_7 m$.

Vì $2>2^{-\frac{5}{4}}$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $2>\log_7 m\ge 2^{-\frac{5}{4}}$

$\Leftrightarrow 7^{2^{-\frac{5}{4}}}\le m<7^2$.

Trường hợp này $m\in\{3;4;5;...;48\}$, có 46 giá trị nguyên dương của m.

Tóm lại có 47 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Chọn phương án **B.**

18. NGUYÊN HÀM

18.1 Định nghĩa, tính chất của nguyên hàm

Câu 259. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x)=-f(x),\forall x\in K$.
B. $f'(x)=F(x),\forall x\in K$.
C. $F'(x)=f(x),\forall x\in K$.
D. $f'(x)=-F(x),\forall x\in K$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x)=f(x),\forall x\in K$

Câu 260. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Biết $F(x)=e^x+x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

A. $2e^x+2x^2+C.$ **B.** $\frac{1}{2}e^{2x}+x^2+C.$ **C.** $\frac{1}{2}e^{2x}+2x^2+C.$ **D.** $e^{2x}+4x^2+C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x)=e^x+x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \int f(2x)dx=\frac{1}{2}\int f(2x)d2x=\frac{1}{2}F(2x)+C=\frac{1}{2}e^{2x}+2x^2+C.$

18.2 Nguyên hàm của hs cơ bản, gần cơ bản

Câu 261. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+5$ là:

A. x^2+5x+C. **B.** $2x^2+5x+C$. **C.** $2x^2+C$. **D.** x^2+C.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\int(2x+5)\mathrm{d}x=x^2+5x+C$.

Câu 262. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** $\int x^2\mathrm{d}x$ bằng

A. $2x+C$. **D.** $\frac{1}{3}x^3+C$. **C.** x^3+C. **D.** $3x^3+C$.

Lời giải

Ta có $\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C$.

Câu 263. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** $\int x^3dx$ bằng.

A. $4x^4+C$ **B.** $3x^2+C$ **C.** x^4+C **D.** $\frac{1}{4}x^4+C$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C$

Câu 264. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** $\int x^4dx$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5+C$. **B.** $4x^3+C$. **C.** x^5+C. **D.** $5x^5+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$.

Câu 265. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** $\int x^5 dx$ bằng

A. $5x^4 + C$. **B.** $\frac{1}{6}x^6 + C$. **C.** $x^6 + C$. **D.** $6x^6 + C$.

Lời giải

Ta có: $\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C$ nên đáp án B đúng.

Câu 266. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** $\int 5x^4 dx$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5 + C$. **B.** $x^5 + C$. **C.** $5x^5 + C$. **D.** $20x^3 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int 5x^4 dx = x^5 + C$.

Câu 267. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** $\int 6x^5 dx$ bằng

A. $6x^6 + C$. **B.** $x^6 + C$. **C.** $\frac{1}{6}x^6 + C$. **D.** $30x^4 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int 6x^5 dx = x^6 + C$.

Câu 268. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** $\int 3x^2 dx$ bằng

A. $3x^3 + C$. **B.** $6x + C$. **C.** $\frac{1}{3}x^3 + C$. **D.** $x^3 + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int 3x^2 dx = 3.\frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$

Câu 269. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** $\int x^5 dx$ bằng

A. $5x^4 + C$. **B.** $\frac{1}{6}x^6 + C$. **C.** $x^6 + C$. **D.** $6x^6 + C$.

Lời giải

Ta có: $\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C$ nên đáp án B đúng.

Câu 270. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Biết $F(x) = e^x - x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$. **B.** $e^{2x} - 4x^2 + C$. **C.** $2e^x - 2x^2 + C$. **D.** $\frac{1}{2}e^{2x} - x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(2x) dx = \frac{1}{2}\int f(2x) d(2x) = \frac{1}{2}F(2x) + C = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$.

18.3 Nguyên hàm phân thức

Câu 271. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{\left(x+1\right)^2}$ trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$ là

A. $2\ln\left(x+1\right)+\dfrac{2}{x+1}+C$.
B. $2\ln\left(x+1\right)+\dfrac{3}{x+1}+C$.
C. $2\ln\left(x+1\right)-\dfrac{2}{x+1}+C$.
D. $2\ln\left(x+1\right)-\dfrac{3}{x+1}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\displaystyle\int\frac{2x-1}{\left(x+1\right)^2}dx=\int\frac{2\left(x+1\right)-3}{\left(x+1\right)^2}dx=\int\frac{2}{\left(x+1\right)}dx+\int\frac{-3}{\left(x+1\right)^2}dx=2\ln\left(x+1\right)+\frac{3}{x+1}+C$.

18.4 PP nguyên hàm từng phần

Câu 272. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g\left(x\right)=\left(x+1\right)f'\left(x\right)$ là

A. $\dfrac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$.
B. $\dfrac{x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$.
C. $\dfrac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$.
D. $\dfrac{2x^2+x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$.

Lời giải

$\int g\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(x+1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\left(x+1\right)\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$.

$\Rightarrow\displaystyle\int g\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(x+1\right)f\left(x\right)-\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(x+1\right)f\left(x\right)-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$.

Tính $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$, đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{t}\mathrm{d}t=\int 1\mathrm{d}t=t+C=\sqrt{x^2+4}+C$.

Khi đó: $\displaystyle\int g\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(x+1\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-\sqrt{x^2+4}+C=\frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}}+C$.

18.5 Nguyên hàm kết hợp đổi biến và từng phần hàm xđ

Câu 273. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g\left(x\right)=\left(x+1\right)f'\left(x\right)$ là

A. $\dfrac{x^2+2x-2}{2\sqrt{x^2+2}}+C$. **B.** $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}+C$. **C.** $\dfrac{2x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}}+C$. **D.** $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}}+C$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}\int g(x)dx &= \int (x+1)f'(x)dx\\ &=(x+1)f(x)-\int f(x)dx\\ &=\frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+2}}-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx\\ &=\frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+2}}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2)}{\sqrt{x^2+2}}\\ &=\frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+2}}-\frac{1}{2}.2\sqrt{x^2+2}+C\\ &=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}+C.\end{aligned}$$

Câu 274. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x)=(x+1)f'(x)$ là

A. $\dfrac{x^2+2x-3}{2\sqrt{x^2+3}}+C$. **B.** $\dfrac{x+3}{2\sqrt{x^2+3}}+C$. **C.** $\dfrac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+3}}+C$. **D.** $\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}+C$.

Lời giải

Ta có $\int g(x)\mathrm{d}x=\int (x+1)f'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$

$\Rightarrow\int g(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)-\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}\mathrm{d}x$.

Tính $\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+3}\Rightarrow t^2=x^2+3\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{t}{t}\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}t=t+C=\sqrt{x^2+3}+C$.

Vậy $\int g(x)dx=(x+1)f(x)-\sqrt{x^2+3}+C=\dfrac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+3}}-\sqrt{x^2+3}+C=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}+C$.

18.6 Nguyên hàm liên quan đến hàm ẩn

Câu 275. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Biết $F(x)=e^x-2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

A. $2e^x-4x^2+C$. **B.** $\dfrac{1}{2}e^{2x}-4x^2+C$. **C.** $e^{2x}-8x^2+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}e^{2x}-2x^2+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x)=e^x-2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$

Suy ra:

$f(x)=F'(x)=\left(e^x-2x^2\right)'=e^x-4x \Rightarrow f(2x)=e^{2x}-8x$

$\Rightarrow \int f(2x)\,dx=\int\left(e^{2x}-8x\right)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-4x^2+C.$

19. TÍCH PHÂN

19.1 Kiểm tra định nghĩa, tính chất của tích phân

Câu 276. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Biết $\int_1^5 f(x)\,dx=4$. Giá trị của $\int_1^5 3f(x)\,dx$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 64. **D.** 12.

Lời giải

Ta có : $\int_1^5 3f(x)\,dx=3\int_1^5 f(x)\,dx=3.4=12$

Câu 277. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$. Giá trị của $\int_1^2 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 8.

Lời giải

Ta có $\int_1^2 3f(x)dx=3\int_1^2 f(x)dx=3.2=6$.

Câu 278. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Biết $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của $\int_2^3 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 36. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $\int_2^3 2f(x)\mathrm{d}x=2\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=2\times 6=12$.

Câu 279. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Biết $\int_2^3 f(x)dx=4$ và $\int_2^3 g(x)dx=1$. Khi đó: $\int_2^3\left[f(x)-g(x)\right]dx$ bằng:

A. -3. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_2^3 \left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_2^3 f(x)dx-\int_2^3 g(x)dx=4-1=3$

Câu 280. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Biết $\int_2^3 f(x)dx=3$ và $\int_2^3 g(x)dx=1$. Khi đó $\int_2^3 \left[f(x)+g(x)\right]dx$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_2^3 \left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_2^3 g(x)dx=4$.

Câu 281. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x=2$. Khi đó $\int_1^2 \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng?

A. 6. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^2 \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x=3-2=1$.

Câu 282. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Biết $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của $\int_2^3 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 36. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $\int_2^3 2f(x)\mathrm{d}x=2\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=2\times 6=12$.

Câu 283. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 \left[1+f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 8. **C.** $\dfrac{26}{3}$. **D.** $\dfrac{32}{3}$.

Lời giải

Do $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)=\left(F(x)\right)'=\left(x^2\right)'=2x$.

Suy ra $\int_1^3 \left[1+f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_1^3 (1+2x)\mathrm{d}x=\left(x+x^2\right)\Big|_1^3=10$.

Câu 284. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Biết $\int_0^1 \left[f(x)+2x\right]dx=2$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng :

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$\int_0^1 [f(x)+2x]dx=2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 2xdx=2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=2-x^2\Big|_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=2-1$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=1$

Câu 285. [ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102] Biết $\int_0^1 [f(x)+2x]dx=3$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^1 [f(x)+2x]dx=3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx+2\int_0^1 xdx=3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx+2.\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=3$.

Suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3-x^2\Big|_0^1=3-(1-0)=2$.

Câu 286. [ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104] Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 [1+f(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 8. **C.** $\frac{26}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải

Do $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)=(F(x))'=(x^2)'=2x$.

Suy ra $\int_1^3 [1+f(x)]\mathrm{d}x=\int_1^3 (1+2x)\mathrm{d}x=(x+x^2)\Big|_1^3=10$.

19.2 Tích phân cơ bản(a), kết hợp tính chất (b)

Câu 287. [ĐỀ BGD 2019-MĐ 101] Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=3$, khi đó $\int_0^1 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$\int_0^1 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=-2-3=-5$.

Câu 288. [Đề-BGD-2020-Mã-101] Biết $\int_1^3 f(x)dx=3$. Giá trị của $\int_1^3 2f(x)dx$ bằng

A. 5. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\int_1^3 2f(x)dx = 2\int_1^3 f(x)dx = 2.3 = 6$.

Câu 289. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 [2+f(x)]dx$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

$F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Khi đó $\int_1^2 [2+f(x)]\mathrm{d}x = \int_1^2 2\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \left(2x+x^2\right)\Big|_1^2 = 5$.

Câu 290. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 [2+f(x)]dx$ bằng

A. $\frac{23}{4}$. **B.** 7. **C.** 9. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 [2+f(x)]\mathrm{d}x = [2x+F(x)]\Big|_1^2 = (2x+x^3)\Big|_1^2 = 12-3=9$

Câu 291. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 [1+f(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 20. **B.** 22. **C.** 26. **D.** 28.

Lời giải

Theo bài ra $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$\int_1^3 [1+f(x)]\mathrm{d}x = (x+x^3)\Big|_1^3 = 30-2=28$.

Câu 292. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Biết $\int_0^1 [f(x)+2x]\mathrm{d}x = 4$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$\int_0^1 [f(x)+2x]\mathrm{d}x = 4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 2x\mathrm{d}x = 4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4-1=3$

Câu 293. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Nếu $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

$\int\limits_0^1 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2.4 = 8$.

Câu 294. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2, y=-1, x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $S=\pi\int\limits_0^1 (2x^2+1)dx$. **B.** $S=\int\limits_0^1 (2x^2-1)dx$.

C. $S=\int\limits_0^1 (2x^2+1)^2 dx$. **D.** $S=\int\limits_0^1 (2x^2+1)dx$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích cần tìm là: $S=\int\limits_0^1 \left|2x^2+1\right|dx = \int\limits_0^1 (2x^2+1)dx.$.

Câu 295. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^\pi f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1042}{225}$. **B.** $\frac{208}{225}$. **C.** $\frac{242}{225}$. **D.** $\frac{149}{225}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có $\int f'(x)dx = \int \cos x.\cos^2 2x dx = \int \cos x.\frac{1+\cos 4x}{2}dx = \int \frac{\cos x}{2}dx + \int \frac{\cos x.\cos 4x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int \cos x dx + \frac{1}{4}\int(\cos 5x+\cos 3x)dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{20}\sin 5x + \frac{1}{12}\sin 3x + C$.

Suy ra $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x + C, \forall x\in\mathbb{R}$. Mà $f(0)=0 \Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$\int\limits_0^\pi f(x)dx = \int\limits_0^\pi\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x\right)dx = \left.\left(-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{100}\cos 5x-\frac{1}{36}\cos 3x\right)\right|_0^\pi = \frac{242}{225}$.

19.3 PP tích phân từng phần-hàm xđ

Câu 296. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Xét $\int\limits_0^2 x.e^{x^2}dx$, nếu đặt $u=x^2$ thì $\int\limits_0^2 x.e^{x^2}dx$ bằng

A. $2\int\limits_0^2 e^u du.$. **B.** $2\int\limits_0^4 e^u du.$. **C.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^2 e^u du.$. **D.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^4 e^u du.$

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=x^2 \to du=2xdx$

Với $x=0 \to u=0$ và $x=2 \to u=4$

Ta được $\int_0^2 x.e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^4 e^u du$..

19.4 Kết hợp đổi biến và từng phần tính tích phân-hàm xđ

Câu 297. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4)=1$ và $\int_0^1 xf(4x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{31}{2}$. **B.** -16. **C.** 8. **D.** 14.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: $\int_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=x^2 f(x)\Big|_0^4-\int_0^4 2xf(x)\mathrm{d}x=16.1-2\int_0^1 4tf(4t)\mathrm{d}(4t)=16-2.16.1=-16$.

Cách 2: Đặt $t=4x \Rightarrow \mathrm{d}t=4\mathrm{d}x$. Đổi cận:

Khi đó: $\int_0^1 xf(4x)\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\int_0^4 tf(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{16}\int_0^4 xf(x)\mathrm{d}x$.

Xét: $I=\int_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$: Đặt $\begin{cases} u=x^2 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x \\ v=\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x) \end{cases}$.

$\Rightarrow I=x^2 f(x)\Big|_0^4-2\int_0^4 xf(x)\mathrm{d}x=4^2.f(4)-2.16=-16$.

Câu 298. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hàm số $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x)=(x+1)f'(x)$ là

A. $\frac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}}+C$. **B.** $\frac{x+1}{2\sqrt{x^2+1}}+C$. **C.** $\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **D.** $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

Lời giải

Ta có $\int g(x)\mathrm{d}x=\int (x+1)f'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x+1 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$.

Khi đó $\int g(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}-\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}=$

$=\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}+C=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

Nhận xét: Nếu học sinh nắm được công thức vi phân của một hàm số, có thể đưa ngay $f'(x)$ vào vi phân mà không cần đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases}$.

Câu 299. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$ là

A. $\dfrac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. **B.** $\dfrac{x-4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. **C.** $\dfrac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. **D.** $\dfrac{2x^2+x+4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$.

Lời giải

$\int g(x)\mathrm{d}x = \int (x+1)f'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = (x+1) \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

$\Rightarrow \int g(x)\mathrm{d}x = (x+1)f(x) - \int f(x)\mathrm{d}x = (x+1)f(x) - \int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$.

Tính $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$, đặt $t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow t^2 = x^2+4 \Rightarrow t\mathrm{d}t = x\mathrm{d}x$.

$\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x = \int \dfrac{t}{t}\mathrm{d}t = \int 1\mathrm{d}t = t + C = \sqrt{x^2+4} + C$.

Khi đó: $\int g(x)\mathrm{d}x = (x+1)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \sqrt{x^2+4} + C = \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C$.

19.5 Tích phân liên quan đến phương trình hàm ẩn

Câu 300. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2+4}{16}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+14\pi}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int (2\cos^2 x + 1)dx = \int (\cos 2x + 2)dx = \dfrac{1}{2}\sin 2x + 2x + C$

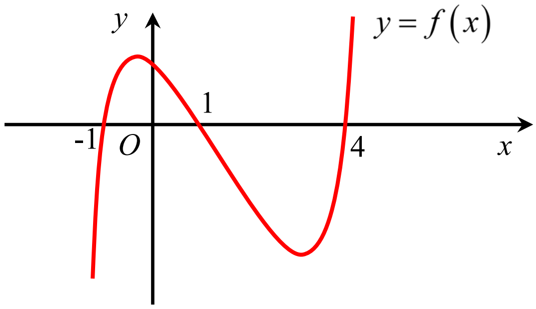
$f(0) = 4 \Leftrightarrow C = 4$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{1}{2}\sin 2x + 2x + 4\right)dx = \left(-\dfrac{1}{4}\cos 2x + x^2 + 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}$.

20. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

20.1 Xác định công thức tính diện tích, thể tích dựa vào đồ thị

Câu 301. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$ và $x=4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có diện tích hình phẳng cần tìm $S=\int\limits_{-1}^{4}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

20.2 Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm xác định

Câu 302. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ bằng

A. 36. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** 36π.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^2-4=2x-4 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-2x}_{f(x)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

x	0		2
$f(x)$		$-$	

$$\Rightarrow S=\int_0^2\left|f(x)\right|dx=-\int_0^2 f(x)dx=\int_2^0 f(x)=\int_2^0\left(x^2-2x\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right|_2^0=\frac{4}{3}.$$

Câu 303. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$ bằng ?

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị hàm số là:

$x^2-1=x-1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng là:

$S=\int_0^1\left|x^2-x\right|dx=\left|\int_0^1\left(x^2-x\right)dx\right|=\left|\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1\right|=\frac{1}{6}$.

Câu 304. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-2$ và y = $3x-2$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9\pi}{2}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{125\pi}{6}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường

$x^2-2=3x-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng

$=\int_0^3(3x-x^2)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^3=\frac{9}{2}$.

Câu 305. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-3$ và $y=x-3$ bằng

A. $\frac{125\pi}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

$x^2-3=x-3\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

$S=\int_0^1\left|x^2-3-(x-3)\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^1\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1\right|=\frac{1}{6}$.

Câu 306. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** **[Mức độ 2]** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-3$ và $y=x-3$ bằng

A. $\frac{125\pi}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

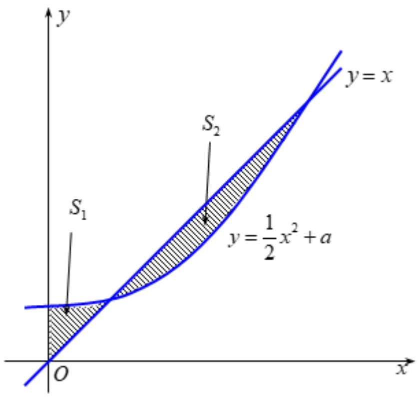
Lời giải

$x^2-3=x-3\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

$$S=\int_0^1\left|x^2-3-(x-3)\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^1\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\right|=\frac{1}{6}.$$

Câu 307. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho đường thẳng $y=x$ va parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{3}{7};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{7}\right)$.



Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x$ và $y=\frac{1}{2}x^2+a$:

$x=\frac{1}{2}x^2+a \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x+a=0$ (có $\Delta=1-2a$)

Theo hình, ta có: $0<a<\frac{1}{2}$.

Gọi $x_1,x_2\ (0<x_1<x_2)$ là hai hoành độ giao điểm: $x_1=1-\sqrt{1-2a}$, $x_2=1+\sqrt{1-2a}$ (1).

$$S_1=S_2 \Leftrightarrow \int_0^{x_1}\left(\frac{1}{2}x^2+a-x\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(x-\frac{1}{2}x^2-a\right)dx.$$

Khi $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}x^3+ax-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{x_1}=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3-ax\right)\Big|_{x_1}^{x_2}$.

$$\Leftrightarrow \frac{x_2^2}{2}-\frac{x_2^3}{6}-ax_2=0 \Leftrightarrow 3x_2-x_2^2-6a=0.\ (2)$$

Từ $(1),(2) \Leftrightarrow \sqrt{1-2a}=4a-1 \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge\frac{1}{4} \\ 16a^2-6a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{3}{8}$.

20.3 Thể tích giới hạn bởi các đồ thị (tròn xoay) hàm xác định

Câu 308. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^{3x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

$\pi\int\limits_0^1 \left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$.

Câu 309. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{2x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành kho quay D quanh Ox bằng

A. $\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay tạo thành kho quay D quanh Ox là $V=\pi\int_0^1\left(e^{2x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$.

Câu 310. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{4x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int\limits_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int\limits_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int\limits_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là:

$V=\pi\int\limits_0^1\left(e^{4x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x.$

21. KHÁI NIỆM SỐ PHỨC

21.1 Các yếu tố và thuộc tính cơ bản của số phức

Câu 311. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là.

A. $-3-4i$. **B.** $-3+4i$. **C.** $3+4i$. **D.** $-4+3i$.

Lời giải

Chọn C

Theo tính chất $z=a+bi \Rightarrow \overline{z}=a-bi$

Theo để bài $3-4i$, suy ra số phức liên hợp là $3+4i$.

Câu 312. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Số phức liên hợp của số phức $z=-3+5i$ là

A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Lời giải

Số phức $z=a+bi$ có số phức liên hợp là $\overline{z}=a-bi$.

$z=-3+5i \Rightarrow \overline{z}=-3-5i$.

Câu 313. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $M(-3;1)$ là điểm biển diễn số phức $z \Rightarrow z=-3+i$.

Vậy: Phần thực của số phức z bằng -3.

Câu 314. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-1;3)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Phần thực của z bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 1.

Lời giải

$M(-1;3)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Phần thực của z bằng -1

Câu 315. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Số phức liên hợp của số phức $z=-2+5i$ là

A. $\overline{z}=2-5i$. **B.** $\overline{z}=2+5i$. **C.** $\overline{z}=-2+5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Lời giải

Ta có $\overline{z}=-2-5i$.

Câu 316. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Số phức liên hợp của số phức $z=2-5i$ là

A. $\overline{z}=2+5i$. **B.** $\overline{z}=-2+5i$. **C.** $\overline{z}=2-5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Lời giải

Ta có: $z=2-5i \Rightarrow \overline{z}=2+5i$.

Câu 317. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z=-2+i$.

Suy ra phần thực của z bằng -2.

Câu 318. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Số phức liên hợp của số phức $z=3-5i$

A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Lời giải

Số phức liên hợp của $z=3-5i$ là $\overline{z}=3+5i$.

Câu 319. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trên mặt phẳng tọa độ, biết điểm $M\left(-1;2\right)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải

Điểm $M\left(-1;2\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=-1+2i$ nên phần thực là $a=-1$.

Câu 320. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là biểu diễn số phức $z=-3+4i$?:

A. $N(3;4)$. **B.** $M(4;3)$. **C.** $P(-3;4)$ **D.** $Q(4;-3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có. $z=-3+4i$ có phần thực là -3, phần ảo là $4\Rightarrow P(-3;4)$ là biểu diễn số phức z

Câu 321. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Phần thực của số phức $z=-3-4i$ bằng

A. 4. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Phần thực của số phức $z=-3-4i$ bằng $A'C$.

Câu 322. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Phần thực của số phức $z=3-4i$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** -3 **D.** -4

Lời giải

Ta có phần thực của số phức $z=3-4i$ bằng 3

Câu 323. Phần thực của số phức $z=-5-4i$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -5.

Lời giải

Chọn D

Số phức $z=-5-4i$ có phần thực là -5.

Câu 324. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Số phức liên hợp của số phức $z=3-5i$

A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Lời giải

Số phức liên hợp của $z=3-5i$ là $\overline{z}=3+5i$.

Câu 325. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trên mặt phẳng tọa độ, biết điểm $M\left(-1;2\right)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải

Điểm $M\left(-1;2\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=-1+2i$ nên phần thực là $a=-1$.

22. CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

22.1 Thực hiện các phép toán cơ bản về số phức

Câu 326. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hai số phức $z_1 = 3-2i$ và $z_2 = 2+i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $5+i$. **B.** $-5+i$. **C.** $5-i$. **D.** $-5-i$.

Lời giải

Ta có: $z_1 = 3-2i$; $z_2 = 2+i$.

$\Rightarrow z_1 + z_2 = (3+2) + (-2+1)i = 5-i$.

Câu 327. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hai số phức $z_1 = 3+2i$ và $z_2 = 2-i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $5-i$. **B.** $5+i$. **C.** $-5-i$. **D.** $-5+i$.

Lời giải

Người giải: Nguyễn Văn Đắc; Fb: Đắc Nguyễn

Áp dụng phép cộng số phức ta có $z_1 + z_2 = 5+i$ nên chọn **B.**

Câu 328. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hai số phức $z_1 = 1-2i$ và $z_2 = 2+i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $3+i$. **B.** $-3-i$. **C.** $3-i$. **D.** $-3+i$.

Lời giải

Ta có: $z_1 + z_2 = (1-2i) + (2+i) = (1+2) + (-2i+i) = 3-i$.

Câu 329. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hai số phức $z_1 = 1-3i$ và $z_2 = 3+i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $4-2i$. **B.** $-4+2i$. **C.** $4+2i$. **D.** $-4-2i$.

Lời giải

Ta có $z_1 + z_2 = 1-3i+3+i = 4-2i$.

Vậy $z_1 + z_2 = 4-2i$.

Câu 330. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho số phức $z = 1-2i$, số phức $(2+3i)\overline{z}$ bằng

A. $4-7i$. **B.** $-4+7i$ **C.** $8+i$. **D.** $-8+i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(2+3i)\overline{z} = (2+3i)(1+2i) = -4+7i$.

Câu 331. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho hai số phức $z_1 = 1+2i$ và $z_2 = 4-i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. $3+3i$. **B.** $-3-3i$. **C.** $-3+3i$. **D.** $3-3i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1 - z_2 = (1+2i) - (4-i) = -3+3i$.

Câu 332. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hai số phức $z_1 = 1-3i$ và $z_2 = 3+i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. $-2-4i$. **B.** $2-4i$. **C.** $-2+4i$. **D.** $2+4i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z_1 - z_2 = (1-3i) - (3+i) = 1-3i-3-i = -2-4i$.

Câu 333. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hai số phức $z_1 = 1-3i$ và $z_2 = 3+i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $4-2i$. **B.** $-4+2i$. **C.** $4+2i$. **D.** $-4-2i$.

Lời giải

Ta có $z_1 + z_2 = 1-3i+3+i = 4-2i$.

Vậy $z_1 + z_2 = 4-2i$.

Câu 334. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho số phức $z = 2-i$, số phức $(2-3i)\overline{z}$ bằng

A. $-1+8i$. **B.** $-7+4i$. **C.** $7-4i$. **D.** $1+8i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(2-3i)\overline{z} = (2-3i)(2+i) = 7-4i$.

Câu 335. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho số phức $z = -2+3i$, số phức $(1+i)\overline{z}$ bằng

A. $-5-i$. **B.** $-1+5i$. **C.** $1-5i$. **D.** $5-i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z = -2+3i \Rightarrow \overline{z} = -2-3i$. Do đó $(1+i)\overline{z} = (1+i).(-2-3i) = 1-5i$.

Câu 336. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho hai số phức $z_1 = 2+i$ và $z_2 = 1+3i$. Phần thực của số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z_1 + z_2 = 3+4i$.

Phần thực của số phức $z_1 + z_2$ bằng 3.

22.2 Xác định các yếu tố của số phức (phần thực, ảo, mô đun, liên hợp,…) qua các phép toán

Câu 337. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho hai số phức $z_1 = 3+2i$ và $z_2 = 1-i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. $2-3i$. **B.** $-2+3i$ **C.** $-2-3i$. **D.** $2+3i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z_1 - z_2 = 3+2i-(1-i) = 2+3i$.

Câu 338. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hai số phức $z = 1+2i$ và $w = 3+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** 26. **D.** 50.

Lời giải

Ta có $\overline{w} = 3-i$ nên $z.\overline{w} = 5+5i$. Do đó $\left|z.\overline{w}\right| = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$.

Câu 339. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hai số phức $z = 2+2i$ và $\mathrm{w} = 2+i$. Mô đun của số phức $z\overline{\mathrm{w}}$ bằng

A. 40. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Lời giải

$w=2+i\Rightarrow \overline{w}=2-i$.

$z\overline{w}=(2+2i)(2-i)=6+2i$.

Vậy $|z\overline{w}|=|6+2i|=2\sqrt{10}$.

Câu 340. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hai số phức $z=4+2i$ và $w=1+i$. Mođun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 8 8. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 40.

Lời giải

Ta có $z.\overline{w}=(4+2i).(1-i)=4-4i+2i+2=6-2i$.

Suy ra $|z.\overline{w}|=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$.

Câu 341. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hai số phức $z=1+3i$ và $w=1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 20. **D.** 8.

Lời giải

Ta có $w=1+i\Rightarrow \overline{w}=1-i$.

$z.\overline{w}=(1+3i)(1-i)=4+2i$.

$|z.\overline{w}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

Câu 342. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hai số phức $z=1+3i$ và $w=1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 20. **D.** 8.

Lời giải

Ta có $w=1+i\Rightarrow \overline{w}=1-i$.

$z.\overline{w}=(1+3i)(1-i)=4+2i$.

$|z.\overline{w}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

Câu 343. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Số phức liên hợp của số phức $z=2+i$ là

A. $\overline{z}=-2+i$. **B.** $\overline{z}=-2-i$. **C.** $\overline{z}=2-i$. **D.** $\overline{z}=2+i$.

Lời giải

Chọn C

Số phức liên hợp của số phức $z=2+i$ là $\overline{z}=2-i$.

Câu 344. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho hai số phức $z_1=3-i, z_2=-1+i$. Phần ảo của số phức z_1z_2 bằng

A. 4. **B.** $4i$. **C.** -1. **D.** $-i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z_1z_2=(3-i)(-1+i)=-2+4i$. Vậy phần ảo của số phức z_1z_2 bằng 4.

22.3 Giải phương trình bậc nhất theo z (và z liên hợp)

Câu 345. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho số phức z thỏa mãn $3\left(\overline{z}+i\right)-\left(2-i\right)z=3+10i$. Mô đun của z bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Dùng máy tính cầm tay

$az+b\overline{z}=c$

$\Rightarrow z=\dfrac{c.\overline{a}-b\overline{c}}{\left|a\right|^2-\left|b\right|^2}$

$3\left(\overline{z}+i\right)-\left(2-i\right)z=3+10i\Leftrightarrow -\left(2-i\right)z+3\overline{z}=3+7i$

$z=2-i\Rightarrow \left|z\right|=\sqrt{5}$

Cách 2: Gọi $\overline{z}$ $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow \overline{z}=x-yi$

Từ đề bài, ta có phương trình: $\left(x-y\right)+\left(x-5y+3\right)i=3+10i\Leftrightarrow \begin{cases}x-y=3\\x-5y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

$z=2-i\Rightarrow \left|z\right|=\sqrt{5}$.

23. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

23.1 Câu hỏi lý thuyết, biểu diễn hình học của 1 số phức

Câu 346. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z = 1 - 2i$?

A. $Q(1;2)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $P(-2;1)$. **D.** $N(1;-2)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm biểu diễn số phức $z = 1 - 2i$ là điểm $N(1;-2)$.

Câu 347. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 - 2i$?

A. $P(-3;2)$. **B.** $Q(2;-3)$. **C.** $N(3;-2)$. **D.** $M(-2;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z = a + bi \Rightarrow N(a;b)$ là điểm biểu diễn của số phức z

$z = 3 - 2i \Rightarrow N(3;-2)$

Câu 348. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$ là điểm nào dưới đây?

A. $Q(1;2)$. **B.** $P(-1;2)$. **C.** $N(1;-2)$. **D.** $M(-1;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$ là điểm $P(-1;2)$.

Câu 349. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Trên mặt phẳng Oxy, điểm biểu diễn số phức $3z_1 + z_2$ có tọa độ là

A. $(4;-1)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(4;1)$. **D.** $(1;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3z_1 + z_2 = 3(1-i) + 1 + 2i) = 4 - i$.

23.2 Tập hợp điểm biểu diễn là đường tròn, hình tròn

Câu 350. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{34}$ **B.** 26 **C.** 34 **D.** $\sqrt{26}$

Lời giải.

Ta có $w = \dfrac{4+iz}{1+z} \Leftrightarrow \mathrm{w}(1+z) = 4 + iz \Leftrightarrow \mathrm{w} - 4 = (i - \mathrm{w})z \Leftrightarrow z = \dfrac{\mathrm{w}-4}{i-\mathrm{w}}$ (do $\mathrm{w} = i$ không thỏa mãn)

Thay $z = \dfrac{\mathrm{w}-4}{i-\mathrm{w}}$ vào $|z| = \sqrt{2}$ ta được:

$\left|\dfrac{w-4}{i-w}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|w-4|=\sqrt{2}|i-w|(*)$. Đặt $w=x+yi$, ta được:

$(*)\Leftrightarrow(x-4)^2+y^2=2\left[x^2+(1-y)^2\right]\Leftrightarrow x^2+y^2+8x-4y-14=0$. Đây là đường tròn có Tâm là $I(-4;2)$, bán kính $R=\sqrt{34}$.. Chọn đáp án A

24. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

24.1 Tính toán biểu thức nghiệm

Câu 351. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+10=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 16. **B.** 56. **C.** 20. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình $z^2-6z+10=0$ có hai nghiệm phức $z_1=3+i$ và $z_2=3-i$.

Khi đó: $z_1^2+z_2^2=(3+i)^2+(3-i)^2=16$.

Câu 352. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-6z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn $1-z_0$ là:

A. $M(-2;2)$. **B.** $Q(4;-2)$. **C.** $N(4;2)$. **D.** $P(-2;-2)$.

Lời giải

Xét phương trình $z^2-6z+13=0$.

Ta có $\Delta'=9-13=-4=(2i)^2$.

Suy ra phương trình (1) có 2 nghiệm phức phân biệt là $\left[\begin{array}{l}z=3+2i\\z=3-2i\end{array}\right.$.

z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-6z+13=0$ nên $z_o=3+2i$.

$1-z_0=1-(3+2i)=-2-2i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là điểm $P(-2;-2)$.

Câu 353. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+2=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 4. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $z^2+z+2=0$, có $\Delta=1-4.1.2=-7<0$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phức $z_{1,2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$.

Do đó $|z_1|+|z_2|=\left|\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right|+\left|\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right|=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Vậy $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{2}$.

Câu 354. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+2=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z^2-z+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2} \\ z=\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$

Không mất tính tổng quát giả sử $z_1=\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}$ và $z_2=\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$

Khi đó $|z_1|+|z_2|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-\sqrt{7}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Câu 355. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Môđun của số phức z_0+i bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $z^2-2z+5=0$ có $\Delta'=-4<0$

Phương trình có hai nghiệm phức $z=1-2i$ và $z=1+2i$

z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm nên $z_0=1-2i$ nên $z_0+i=1-i \Rightarrow |z_0+i|=\sqrt{2}$.

24.1 Các bài toán biểu diễn hình học nghiệm của phương trình

Câu 356. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+6z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là

A. $N(-2;2)$. **B.** $M(4;2)$. **C.** $P(4;-2)$. **D.** $Q(2;-2)$.

Lời giải

Ta có $z^2+6z+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-3+2i \\ z=-3-2i \end{array}\right. \Rightarrow z_0=-3+2i$.

$\Rightarrow 1-z_0=1-(-3+2i)=4-2i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là $P(4;-2)$.

Câu 357. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+4z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là

A. $P(-1;-3)$. **B.** $M(-1;3)$. **C.** $N(3;-3)$. **D.** $Q(3;3)$.

Lời giải

Ta có: $z^2+4z+13=0 \Leftrightarrow z=-2\pm 3i$.

Do đó $z_0=-2+3i \Rightarrow 1-z_0=3-3i$.

Vậy điểm biểu diễn là $N(3;-3)$.

Câu 358. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-4z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là

A. $M(3;-3)$. **B.** $P(-1;3)$. **C.** $Q(1;3)$. **D.** $N(-1;-3)$.

Lời giải

$z^2-4z+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2+3i \\ z=2-3i \end{array}\right.$

Vậy $z_0=2+3i$.

$1-z_0=1-(2+3i)=-1-3i$.

Suy ra điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là $N(-1;-3)$.

Câu 359. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-4z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là

A. $M(3;-3)$. **B.** $P(-1;3)$. **C.** $Q(1;3)$. **D.** $N(-1;-3)$.

Lời giải

$z^2-4z+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2+3i \\ z=2-3i \end{array}\right.$

Vậy $z_0=2+3i$.

$1-z_0=1-(2+3i)=-1-3i$.

Suy ra điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là $N(-1;-3)$.

24.1 Các bài toán khác về phương trình

Câu 360. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+3=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Giải phương trình $z^2-z+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i \\ z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i \end{array}\right.$.

Khi đó: $|z_1|+|z_2|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i\right|+\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i\right|=2\sqrt{3}$.

25. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

25.1 Câu hỏi dạng lý thuyết(Công thức V,h,B ;có sẵn h, B;…)

Câu 361. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** **[Mức độ 1]** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=6$ và chiều cao $h=2$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 12.

Lời giải

Thể tích khối chóp là $V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}.6.2=4$.

Câu 362. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=2$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng.

A. 6 **B.** 12 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Ta có $V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}.3.2=2$

Câu 363. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=2$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 12. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Thể tích của khối chóp đã cho là: $V=\frac{1}{3}.B.h=\frac{1}{3}.2.3=2$.

Câu 364. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3$, chiều cao $h=8$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 24. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Thể tích khối chóp: $V=\frac{1}{3}.3.8=8$.

Câu 365. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=2a^2$ và chiều cao $h=6a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $12a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $6a^3$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối chóp đã cho bằng $V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}.2a^2.6a=4a^3$.

Câu 366. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=6a^2$ và chiều cao $h=2a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

A. $2a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $6a^3$. **D.** $12a^3$.

Lời giải

Chọn B

$V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}6a^2.2a=4a^3$

Câu 367. **]HH12.C2.2.D02.a]** **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho khối trụ có bán kính đáy bằng $r=5$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 5π. **B.** 30π. **C.** 25π. **D.** 75π.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối trụ là $V=\pi r^2.h=75\pi$.

Câu 368. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=2a^2$ và chiều cao $h=9a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $3a^3$. **B.** $6a^3$. **C.** $18a^3$. **D.** $9a^3$.

Lời giải

Chọn B

$V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}.2a^2.9a=6a^3$.

Câu 369. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3$, chiều cao $h=8$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 24. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Thể tích khối chóp: $V=\frac{1}{3}.3.8=8$.

Câu 370. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=4$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối chóp đã cho là $V=\frac{1}{3}.B.h=\frac{1}{3}.3.4=4$.

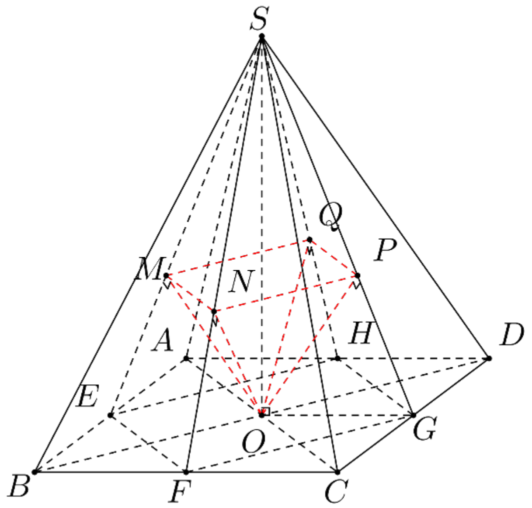
25.2 Thể tích khối chóp đều

Câu 371. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SAD). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{9a^3}{16}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** $\frac{9a^3}{32}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi E,F,G,H lần lượt là giao điểm của SM với AB, SN với BC, SP với CD, SQ với DA thì E,F,G,H là trung điểm của AB,BC,CD,DA thì

Ta có $\frac{SP}{SG}=\frac{SP.SG}{SG^2}=\frac{SO^2}{SG^2}=\frac{\frac{9a^2}{4}}{\frac{9a^2}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow P$ là trung điểm SG.

Chứng minh tương tự ta cũng có M, N,Q lần lượt là trung điểm AB,BC,DA.

Khi đó $d(O,(MNPQ))=\frac{1}{2}SO=\frac{3a}{4}$.

$$S_{MNPQ}=\frac{1}{4}S_{EFGH}=\frac{1}{8}S_{ABCD}=\frac{9a^2}{8}.$$

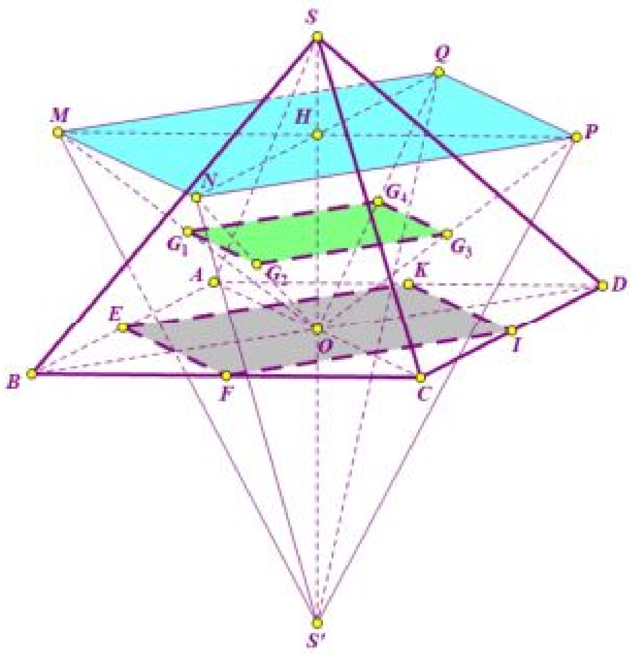
Vậy $V_{O.MNPQ}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{9a^2}{8}=\frac{9a^3}{32}$.

25.3 Thể tích khối chóp khác

Câu 372. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB,SBC,SCD,SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích khối chóp $S'MNPQ$ bằng

A. $\frac{40\sqrt{10}a^3}{81}$. **B.** $\frac{10\sqrt{10}a^3}{81}$. **C.** $\frac{20\sqrt{10}a^3}{81}$. **D.** $\frac{2\sqrt{10}a^3}{9}$.

Lời giải



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của $\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCD, \Delta SAD$.

Do $G_1G_2 // G_3G_4 // EF; G_1G_2 = G_3G_4 = \frac{1}{2}EF \Rightarrow$ Tứ giác $G_1G_2G_3G_4$ là hình bình hành.

$\Rightarrow MN // PQ // G_1G_2, MN = PQ = 2G_1G_2 \Rightarrow$ Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Gọi $H = QN \cap MP$. Ta có: $\frac{SH}{SO} = \frac{1}{3}$.

Ta có: $SO = \sqrt{\left(\sqrt{3}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

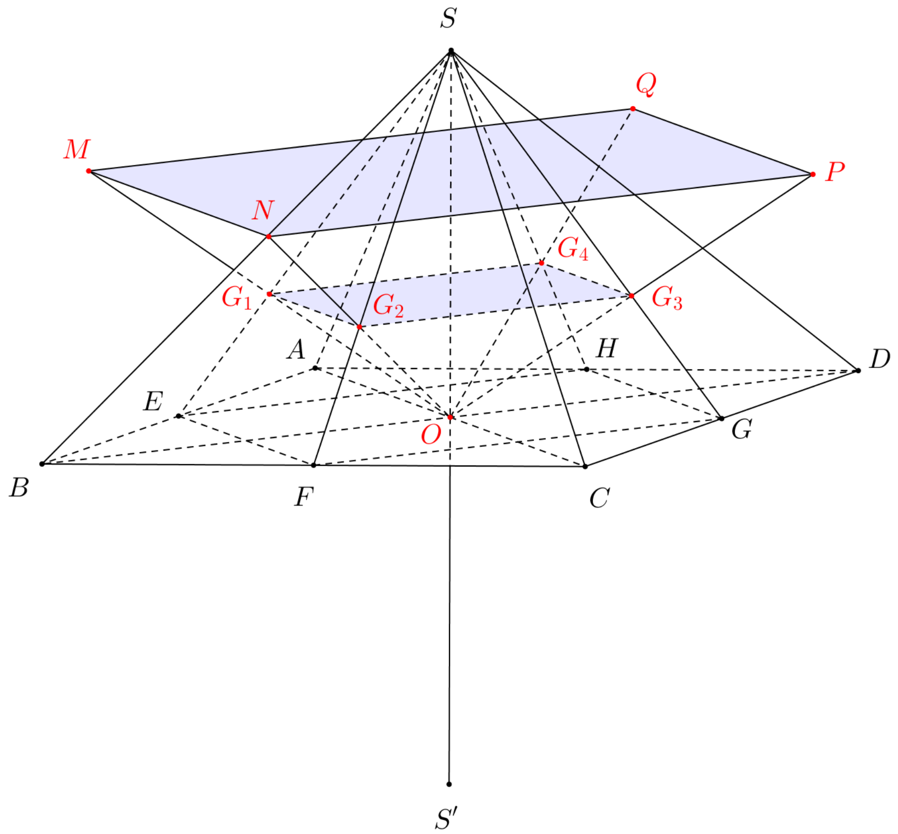
Ta có: $V_{S'.MNPQ} = 5.V_{S.MNPQ} = 5.2V_{S.G_1G_2G_3G_4} = 5.2.\left(\frac{2}{3}\right)^3.V_{S.EFIK} = \frac{80}{27}.V_{S.EFIK}$

$= \frac{80}{27}.\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{10}}{2}.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{20\sqrt{10}a^3}{81}$.

Câu 373. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\frac{20\sqrt{14}a^3}{81}$. **B.** $\frac{40\sqrt{14}a^3}{81}$. **C.** $\frac{10\sqrt{14}a^3}{81}$. **D.** $\frac{2\sqrt{14}a^3}{9}$.

Lời giải



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm $\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCD, \Delta SDA$.

E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

Ta có $S_{MNPQ} = 4S_{G_1G_2G_3G_4} = 4.\frac{4}{9}S_{EFGH} = 4.\frac{4}{9}.\frac{1}{2}EG.HF = \frac{8a^2}{9}$.

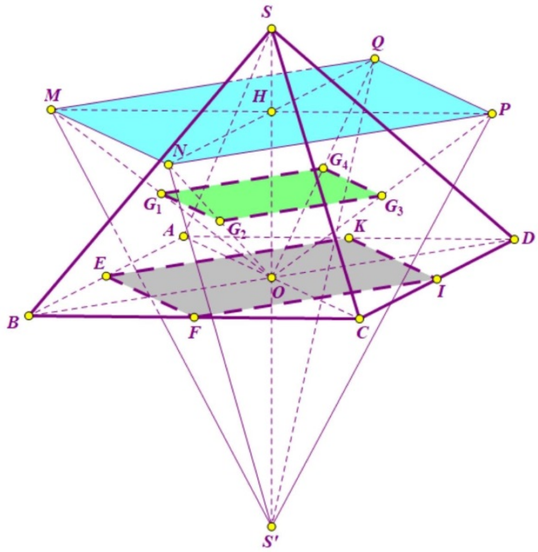
$$\begin{aligned} d\left(S',(MNPQ)\right) &= d\left(S',(ABCD)\right) + d\left(O,(MNPQ)\right) \\ &= d\left(S,(ABCD)\right) + 2d\left(O,(G_1G_2G_3G_4)\right) \\ &= d\left(S,(ABCD)\right) + \frac{2}{3}d\left(S,(ABCD)\right) \\ &= \frac{5}{3}d\left(S,(ABCD)\right) = \frac{5a\sqrt{14}}{6} \end{aligned}$$

Vậy $V_{S'.MNPQ} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5a\sqrt{14}}{6}\cdot\frac{8a^2}{9} = \frac{20a^3\sqrt{14}}{81}$.

Câu 374. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$.

A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{9}$. **B.** $\frac{40\sqrt{6}a^3}{81}$. **C.** $\frac{10\sqrt{6}a^3}{81}$. **D.** $\frac{20\sqrt{6}a^3}{81}$.

Lời giải:



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA.

E, F, I, K lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA.

Ta có: $S_{MNPQ} = 4S_{G_1G_2G_3G_4} = 4.\frac{4}{9}S_{EFIK} = \frac{16}{9}\cdot\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{8}{9}a^2$.

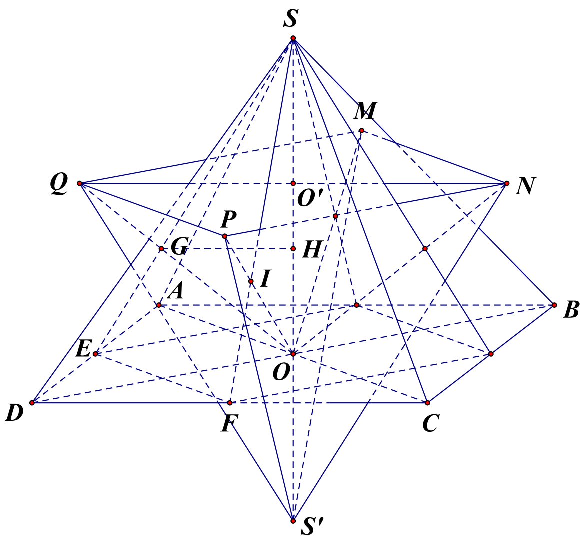
$$SO = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow S'H = S'O + OH = SO + \frac{2}{3}SO = \frac{5a\sqrt{6}}{6}.$$

$$\Rightarrow V_{S'.MNPQ} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5a\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{8}{9}a^2 = \frac{20a^3\sqrt{6}}{81} \text{ (đvtt).}$$

Câu 375. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và O là tâm đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$. **B.** $\frac{20\sqrt{2}a^3}{81}$. **C.** $\frac{40\sqrt{2}a^3}{81}$. **D.** $\frac{10\sqrt{2}a^3}{81}$.

Lời giải



Ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh đều bằng a $\Rightarrow SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi G,I lần lượt là trọng tâm các tam giác SDA, SDC.

Gọi E,F lần lượt là trung điểm $DA,\ DC$.

Ta có $GI=\dfrac{2}{3}EF,\ EF=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow GI=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Mà G,I lần lượt là trung điểm của OQ,OP $\Rightarrow QP=2GI=\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$.

Từ giả thiết cho dễ dàng suy ra được $MNPQ$ là hình vuông cạnh $PQ=\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}\Rightarrow S_{MNPQ}=\dfrac{8a^2}{9}$.

Gọi O' là tâm hình vuông $MNPQ$ kẻ $GH//QO'\left(H\in OO'\right)\Rightarrow H$ là trung điểm OO' (vì G là trung điểm OQ).

Ta có $QO'=\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2a}{3}$ và $OO'=2OH=2.\dfrac{1}{3}.SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

Theo giả thiết $OS'=OS=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow S'O'=S'O+OO'=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}+\dfrac{a\sqrt{2}}{3}=\dfrac{5\sqrt{2}a}{6}$

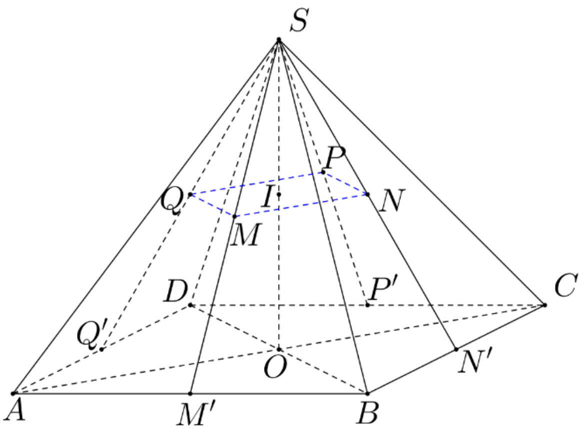
$V_{S'.MNPQ}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{5\sqrt{2}a}{6}.\dfrac{8a^2}{9}=\dfrac{20\sqrt{2}a^3}{81}$.

Câu 376. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M,N,P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{48}$. **B.** $\dfrac{2a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{a^3}{96}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M',N',P',Q' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DA.

Ta có $AB\perp OM'$ và $AB\perp SO$ nên $AB\perp\left(SOM'\right)$.

Suy ra $(SAB)\perp\left(SOM'\right)$ theo giao tuyến SM'.

Theo giả thiết ta có $OM\perp(SAB)$ nên $OM\perp SM'$, do đó M là hình chiếu vuông góc của O trên SM'.

Tương tự như vậy: N,P,Q là hình chiếu vuông góc của O lần lượt trên SN',SP',SQ'.

Ta có $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{2a^2}{4}}=\frac{a}{2}=OM'$.

Suy ra tam giác SOM' vuông cân tại O nên M là trung điểm của SM'.

Từ đó dễ chứng minh được $MNPQ$ là hình vuông có tâm I thuộc SO và nằm trong mặt phẳng song song với $(ABCD)$, với I là trung điểm của SO.

Suy ra $OI=\frac{1}{2}OS=\frac{a}{4}$.

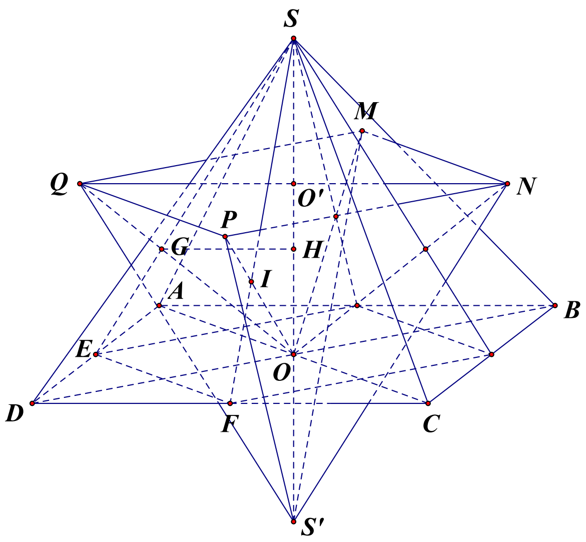
Do đó $MN=\frac{1}{2}M'N'=\frac{1}{4}AC=\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng $\frac{1}{3}S_{MNPQ}.OI=\frac{1}{3}.MN^2.OI=\frac{1}{3}.\frac{a^2}{8}.\frac{a}{4}=\frac{a^3}{96}$.

Câu 377. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và O là tâm đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$. **B.** $\frac{20\sqrt{2}a^3}{81}$. **C.** $\frac{40\sqrt{2}a^3}{81}$. **D.** $\frac{10\sqrt{2}a^3}{81}$.

Lời giải



Ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh đều bằng a $\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi G,I lần lượt là trọng tâm các tam giác SDA, SDC.

Gọi E,F lần lượt là trung điểm DA, DC.

Ta có $GI=\frac{2}{3}EF$, $EF=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow GI=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Mà G,I lần lượt là trung điểm của OQ,OP $\Rightarrow QP=2GI=\frac{2\sqrt{2}a}{3}$.

Từ giả thiết cho dễ dàng suy ra được $MNPQ$ là hình vuông cạnh $PQ=\frac{2\sqrt{2}a}{3}$ $\Rightarrow S_{MNPQ}=\frac{8a^2}{9}$.

Gọi O' là tâm hình vuông $MNPQ$ kẻ $GH//QO'\left(H\in OO'\right)\Rightarrow H$ là trung điểm OO' (vì G là trung điểm OQ).

Ta có $QO'=\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2a}{3}$ và $OO'=2OH=2.\dfrac{1}{3}.SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

Theo giả thiết $OS'=OS=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow S'O'=S'O+OO'=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}+\dfrac{a\sqrt{2}}{3}=\dfrac{5\sqrt{2}a}{6}$

$V_{S'.MNPQ}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{5\sqrt{2}a}{6}.\dfrac{8a^2}{9}=\dfrac{20\sqrt{2}a^3}{81}$.

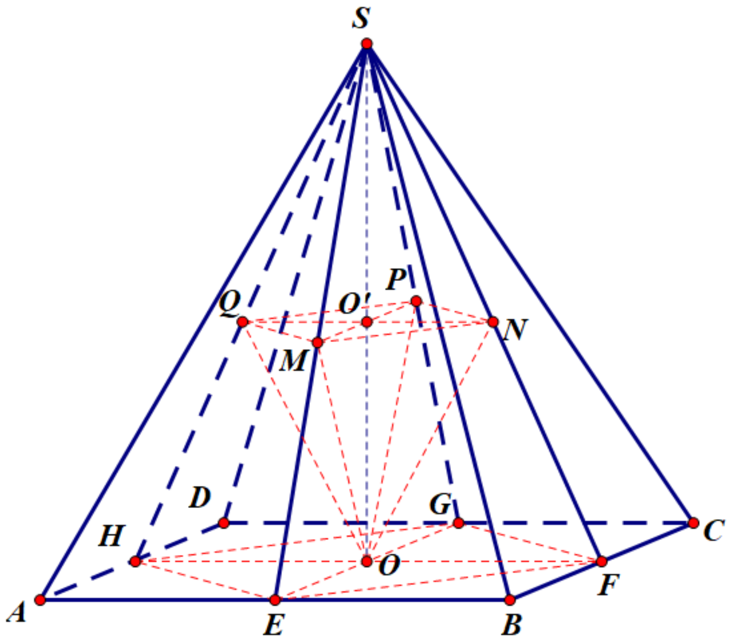
25.4 Tỉ số thể tích trong khối chóp

Câu 378. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $4a$, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{4a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{64a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{128a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi E,F,G,H lần lượt là trung điểm của AB,BC,CD và DA. Gọi M,N,P,Q lần lượt hình chiếu vuông góc của O lên các đường thẳng SE,SF,SG,SH ta suy ra M,N,P,Q lần lượt hình chiếu vuông góc của O mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCD)$ và (SDA).

Ta có $EFGH$ là hình vuông và $S_{EFGH}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$ suy ra $V_{S.EFGH}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Các độ dài $SO=\sqrt{SA^2-\dfrac{1}{4}AC^2}=\sqrt{(2a\sqrt{3})^2-\dfrac{1}{4}(4a\sqrt{2})^2}=2a$ và $SE=\sqrt{SO^2+OE^2}=2a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SOE ta có $\frac{SM}{SE}=\frac{SO^2}{SE^2}=\frac{1}{2}$ suy ra $\frac{SN}{SF}=\frac{SP}{SG}=\frac{SQ}{SH}=\frac{1}{2}$.

Xét hai hình chóp $S.EFGH$ và $O.MNPQ$ ta có hai đường cao OO' và SO tương ứng tỷ lệ $\frac{OO'}{SO}=\frac{1}{2}$, đồng thời diện tích đáy $\frac{S_{MNPQ}}{S_{EFGH}}=\left(\frac{MN}{EF}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Do vậy $\frac{V_{O.MNPQ}}{V_{S.EFGH}}=\frac{1}{8}$ hay $V_{O.MNPQ}=\frac{1}{8}V_{S.EFGH}=\frac{1}{16}V_{S.ABCD}=\frac{1}{16}.\frac{1}{3}.2a.(4a)^2=\frac{2}{3}a^3$.

26. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ-ĐA DIỆN KHÁC

26.1 Câu hỏi dạng lý thuyết(Công thức V,h,B ;có sẵn h, B;…)

Câu 379. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

A. $3Bh$. **B.** Bh. **C.** $\frac{4}{3}Bh$. **D.** $\frac{1}{3}Bh$.

Lời giải

Chọn B

Câu 380. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=6$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 9. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có thể tích khối lăng trụ là $V=B.h=18$.

Câu 381. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho khối trụ có bán kính đáy $r=4$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 48π. **B.** 4π. **C.** 16π. **D.** 24π.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối trụ là $V=\pi r^2h=\pi.4^2.3=48\pi$.

Câu 382. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

◆ Thể tích khối lăng trụ là $V=B.h=3.2=6$.

Câu 383. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B=6$, và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng.

A. 3. **B.** 18 **C.** 6 **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

ta có $V=B.h\Rightarrow V=6.3=18$.

Câu 384. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Thể tích của khối lập phương cạnh 2 bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $V=2^3=8$.

26.2 Thể tích khối lập phương, khối hộp chữ nhật

Câu 385. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước $3; 4; 5$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A. 10. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 60.

Lời giải

Thể tích của khối hộp đã cho là $V = 3.4.5 = 60$.

Câu 386. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho khối hộp chữ nhật có kích thước $2;4;6$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A. 16. **B.** 12. **C.** 48. **D.** 8.

Lời giải

Thể tích của khối hộp là $V = 2.4.6 = 48$.

Câu 387. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước 2; 6; 7. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A. 28. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 84.

Lời giải

Thể tích của khối hộp đã cho là $2.6.7 = 84$.

Câu 388. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước 2; 3; 7. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A. 7. **B.** 42. **C.** 12. **D.** 14.

Lời giải

Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước 2; 3; 7 là: $V = 2.3.7 = 42$.

Câu 389. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước 2; 3; 7. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

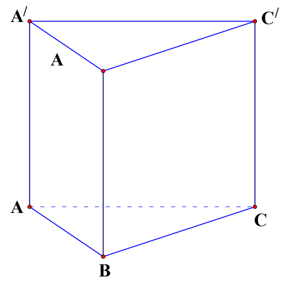
A. 7. **B.** 42. **C.** 12. **D.** 14.

Lời giải

Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước 2; 3; 7 là: $V = 2.3.7 = 42$.

26.3 Thể tích khối lăng trụ đều

Câu 390. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho khối chóp đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = a\sqrt{3}$ (minh hoạ như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



A. $\frac{3a^3}{4}$. **B.** $\frac{3a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}$.

26.4 Thể tích khối đa diện phức tạp

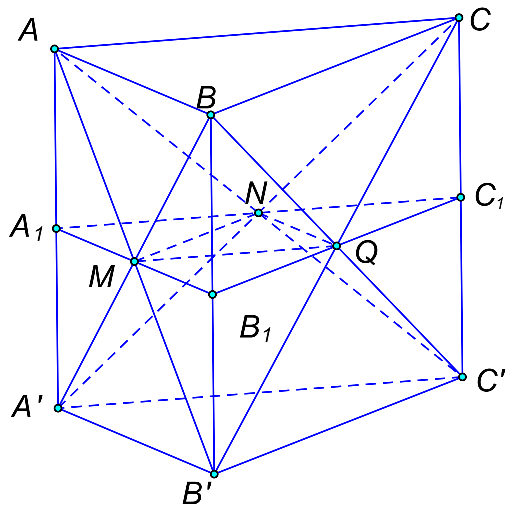
Câu 391. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $27\sqrt{3}$. **B.** $21\sqrt{3}$. **C.** $30\sqrt{3}$. **D.** $36\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:



Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = \dfrac{8.6^2\sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3}$.

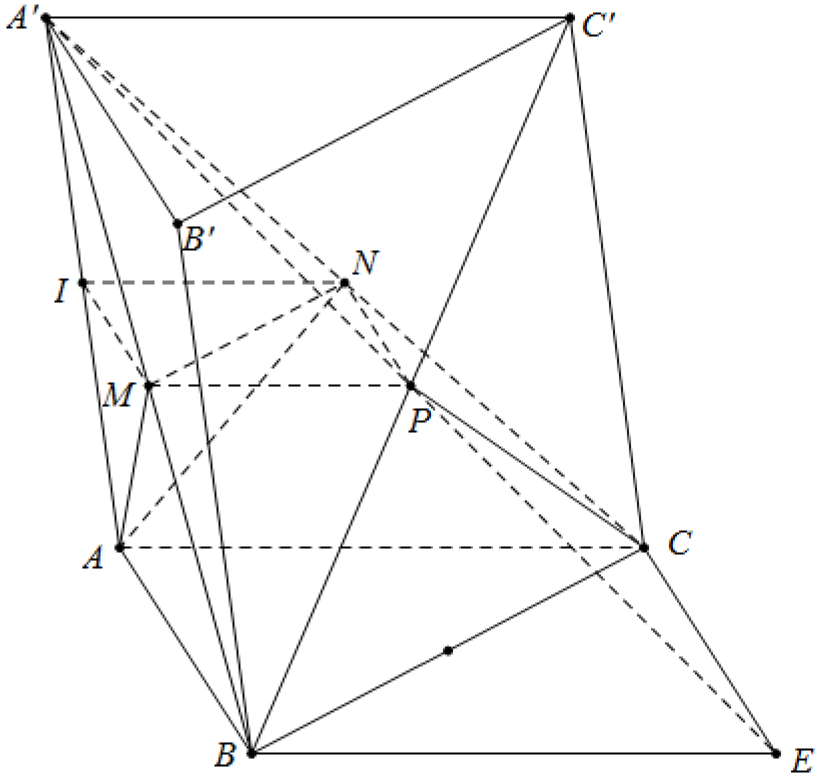
Gọi A_1, B_1, C_1 là trung điểm của AA', BB', CC'.

Thể tích khối đa diện cần tính là thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$, trừ đi thể tích các khối chóp $AA_1MN; BB_1MP; CC_1NP$.

Thể tích khối chóp AA_1MN bằng $\dfrac{1}{3}.\dfrac{8}{2}.\dfrac{\frac{6^2\sqrt{3}}{4}}{4} = \dfrac{V}{24}$.

Vậy thể tích khối đa diện cần tính là $V_{ABCMNP} = \dfrac{V}{2} - 3\dfrac{V}{24} = \dfrac{3V}{8} = 27\sqrt{3}$.

Cách 2:



Diện tích của đáy $S=6^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$, chiều cao lăng trụ $h=8$.

Gọi I là trung điểm AA'. Ta có $(MINP)//(ABC)$.

Gọi E là giao điểm của $A'P$ và (ABC), suy ra $BE//AC$ và $BE=2MP=AC$, hay E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABEC$.

Ta có $V=V_{A'.ABEC}-V_{P.BEC}-V_{A'.IMPN}-V_{A.IMN}$.

Trong đó:

$V_{A'.ABEC}=\frac{1}{3}.2S.h=\frac{2}{3}Sh$.

$V_{P.BEC}=\frac{1}{3}.S_{BEC}.d\left(P,(ABC)\right)=\frac{1}{3}S.\frac{1}{2}h=\frac{1}{6}Sh$.

$V_{A'.IMPN}=\frac{1}{3}S_{IMPN}.d\left(A',(IMPN)\right)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}S.\frac{1}{2}h=\frac{1}{12}Sh$.

$V_{A.IMN}=\frac{1}{3}S_{IMN}.d\left(A,(IMN)\right)=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}S.\frac{1}{2}h=\frac{1}{24}Sh$.

Vậy $V=V_{A'.ABEC}-V_{P.BEC}-V_{A'.IMPN}-V_{A.IMN}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{24}\right)Sh=\frac{3}{8}Sh=27\sqrt{3}$.

27. KHỐI NÓN

27.1 Câu hỏi lý thuyết về khối nón

Câu 392. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính r là

A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. **B.** $\pi r^2 h$. **C.** $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. **D.** $2\pi r^2 h$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính r là $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

27.1 Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, Thể tích(liên quan) khối nón khi biết các dữ kiện cơ bản

Câu 393. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho khối nón có bán kính đáy $r=5$ và chiều cao $h=2$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{10\pi}{3}$. **B.** 10π.

C. $\frac{50\pi}{3}$. **D.** 50π.

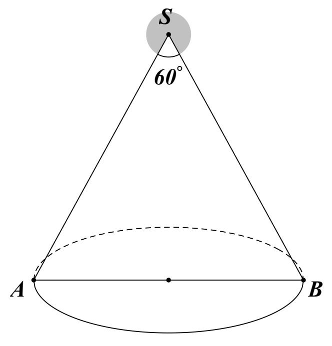
Lời giải

Thể tích khối nón đã cho bằng $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{50\pi}{3}$.

Câu 394. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 và góc ở đỉnh bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 8π. **B.** $\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** 16π.

Lời giải



Gọi S là đỉnh của hình nón và AB là một đường kính của đáy.
Theo bài ra, ta có tam giác SAB là tam giác đều $\Rightarrow$ $l=SA=AB=2r=4$.
Diện tích xung quanh của hình nón đã cho là $S_{xq}=\pi rl=8\pi$.

Kết luận: $S_{xq}=8\pi$.

Câu 395. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $32\sqrt{2}$. **B.** -40. **C.** $-32\sqrt{2}$. **D.** -45.

Lời giải

Ta có: $f(x)=x^3-24x$

$$f'(x)=3x^2-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{2}\in[2;19] \\ x=-2\sqrt{2}\notin[2;19] \end{array}\right..$$

$f(2)=2^3-24.2=-40$; $f\left(2\sqrt{2}\right)=\left(2\sqrt{2}\right)^3-24.2\sqrt{2}=-32\sqrt{2}$; $f(19)=19^3-24.19=6403$.

Mà $-32\sqrt{2}<-40<6403$.

Kết luận: $\min\limits_{x\in[2;19]} f(x)=-32\sqrt{2}$ tại $x=2\sqrt{2}$.

Câu 396. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho khối nón có bán kính $r=4$ và chiều cao $h=2$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{8\pi}{3}$. **B.** 8π. **C.** $\frac{32\pi}{3}$. **D.** 32π.

Lời giải

Người giải: Nguyễn Văn Đắc; Fb: Đắc Nguyễn

Theo công thức ta có thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}h.\pi.r^2=\frac{32\pi}{3}$ nên chọn **đáp án C.**

Câu 397. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho khối nón có bán kính đáy $r=2$ chiều cao $h=5$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\frac{20\pi}{3}$. **B.** 20π. **C.** $\frac{10\pi}{3}$. **D.** 10π.

Lời giải

Thể tích khối nón $V=\frac{1}{3}\pi.r^2.h=\frac{1}{3}.\pi.2^2.5=\frac{20\pi}{3}$.

Câu 398. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho khối nón có bán kính đáy $r=2$ và chiều cao $h=4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 8π. **B.** $\frac{8\pi}{3}$. **C.** $\frac{16\pi}{3}$. **D.** 16π.

Lời giải

Thể tích khối nón: $V=\frac{1}{3}\pi r^2.h=\frac{1}{3}\pi.2^2.4=\frac{16\pi}{3}$.

Câu 399. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho hình nón có bán kính đáy $r=2$ và độ dài đường sinh $l=5$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 20π. **B.** $\frac{20\pi}{3}$. **C.** 10π. **D.** $\frac{10\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có diện tích xung quanh của hình nón đã cho là: $S_{xq}=\pi rl=\pi.2.5=10\pi$.

Câu 400. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho hình nón có bán kính đáy $r=2$ và độ dài đường sinh $l=7$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 28π. **B.** 14π. **C.** $\frac{14\pi}{3}$. **D.** $\frac{98\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Có $S_{xq} = \pi rl = \pi.7.12 = 14\pi$.

Câu 401. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho khối nón có bán kính đáy $r = 2$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 8π . **B.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{16\pi}{3}$. **D.** 16π .

Lời giải

Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2.h = \dfrac{1}{3}\pi.2^2.4 = \dfrac{16\pi}{3}$.

Câu 402. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho khối nón có chiều cao $h = 3$ và bán kính đáy $r = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 16π . **B.** 48π . **C.** 36π . **D.** 4π .

Lời giải

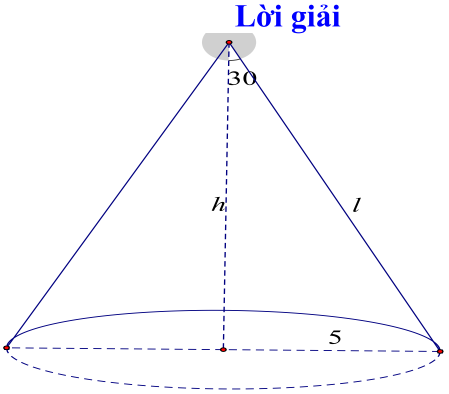
Chọn A

Thể tích của khối nón đã cho là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi 4^2.3 = 16\pi$.

Câu 403. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 5 và góc ở đỉnh bằng 60^0. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 50π . **B.** $\dfrac{100\sqrt{3}\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{50\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** 100π .

Lời giải

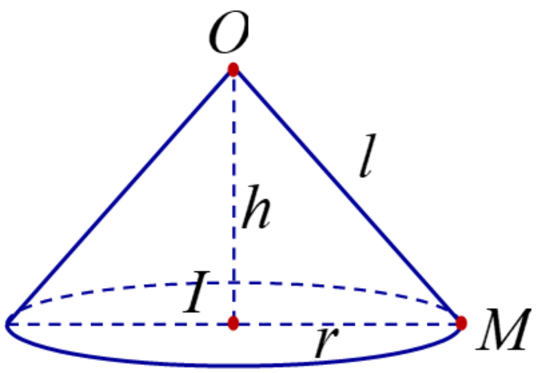


Ta có $\sin 30^0 = \dfrac{5}{l} \Rightarrow l = 10 \Rightarrow S_{xq} = \pi rl = \pi.5.10 = 50\pi$

Câu 404. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và góc ở đỉnh bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 18π . **B.** 36π . **C.** $6\sqrt{3}\pi$. **D.** $12\sqrt{3}\pi$.

Lời giải



Vì góc ở đỉnh bằng $60°$ nên $\widehat{IOM}=30°$.

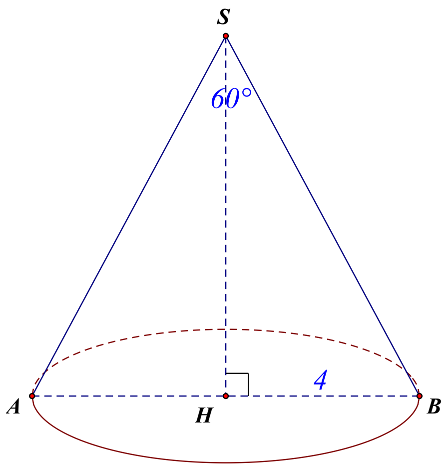
Trong tam giác vuông IOM ta có $IM=OM.\sin\widehat{IOM}$ hay $r=l\sin 30° \Leftrightarrow l=\dfrac{r}{\sin 30°}=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=6$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=\pi rl=\pi.3.6=18\pi$.

Câu 405. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 4 và góc ở đỉnh bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{64\sqrt{3}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** 64π. **D.** $\dfrac{32\sqrt{3}\pi}{3}$.

Lời giải



Ta có $\widehat{ASB}=60° \Rightarrow \widehat{HSB}=30°; HB=4$.

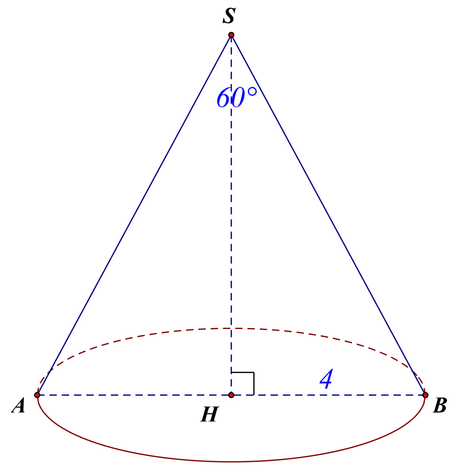
Áp dụng tỉ số lượng giác cho ΔSHB ta có $\sin 30°=\dfrac{HB}{SB} \Rightarrow SB=\dfrac{HB}{\sin 30°}=\dfrac{4}{\frac{1}{2}}=8$.

Vậy $S_{xq}=\pi rl=\pi.HB.SB=8.4.\pi=32\pi$.

Câu 406. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 4 và góc ở đỉnh bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{64\sqrt{3}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** 64π. **D.** $\dfrac{32\sqrt{3}\pi}{3}$.

Lời giải



Ta có $\widehat{ASB}=60^\circ \Rightarrow \widehat{HSB}=30^\circ; HB=4$.

Áp dụng tỉ số lượng giác cho ΔSHB ta có $\sin 30^\circ=\frac{HB}{SB}\Rightarrow SB=\frac{HB}{\sin 30^\circ}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$.

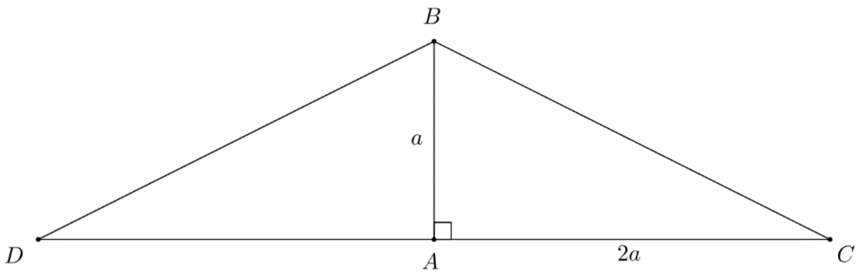
Vậy $S_{xq}=\pi rl=\pi.HB.SB=8.4.\pi=32\pi$.

Câu 407. [ĐỀ BGD 2020-MH2] Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$ và $AC=2a$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh góc vuông AB thì đường gấp khúc ACB tạo thành một hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng

A. $5\pi a^2$.. **B.** $\sqrt{5}\pi a^2$.. **C.** $2\sqrt{5}\pi a^2$.. **D.** $10\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C



Hình nón được tạo thành có bán kính đáy $R=2a$ và chiều cao $h=a$

Áp dụng Pitago: $l=BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=a\sqrt{5}$

Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq}=\pi Rl=\pi.2a.a\sqrt{5}=2\pi a^2\sqrt{5}$..

28. KHỐI TRỤ

28.1 Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, Thể tích (liên quan) khối trụ khi biết các dữ kiện cơ bản

Câu 408. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hình trụ có bán kính đáy $r=8$ và độ dài đường sinh $l=3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 24π. **B.** 192π. **C.** 48π. **D.** 64π.

Lời giải

Diện tích xung quanh hình trụ $S_{xq}=2\pi rl=2\pi.8.3=48\pi$.

Câu 409. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hình trụ có bán kính đáy $r=4$ và độ dài đường sinh $l=3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 48π. **B.** 12π. **C.** 16π. **D.** 24π.

Lời giải

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh hình trụ ta có: $S_{xq}=2\pi rl=2\pi.4.3=24\pi$

Câu 410. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hình trụ có bán kính đáy $r=5$ và độ dài đường sinh $l=3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 15π. **B.** 25π. **C.** 30π. **D.** 75π.

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng $S_{xq}=2\pi.r.l=2.5.3.\pi=30\pi$.

Câu 411. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hình lăng trụ có bán kính đáy $r=7$ và độ dài đường sinh $l=3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 42π. **B.** 147π. **C.** 49π. **D.** 21π.

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S=2\pi rl=2\pi.7.3=42\pi$.

Câu 412. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho khối trụ có bán kính $r=3$ và chiều cao $h=4$. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. 4π. **B.** 12π. **C.** 36π. **D.** 24π.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $V=\pi r^2h=\pi.3^2.4=36\pi$

Câu 413. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hình trụ có bán kính đáy $r=3$ và độ dài đường sinh $l=7$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 42π. **B.** 147π. **C.** 49π. **D.** 21π.

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S=2\pi rl=2\pi.3.7=42\pi$.

Câu 414. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

A. $4\pi rl$. **B.** πrl. **C.** $\frac{1}{3}\pi rl$. **D.** $2\pi rl$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng $2\pi rl$.

Câu 415. [ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101] Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 7. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\frac{49\pi}{4}$. **B.** $\frac{49\pi}{2}$. **C.** 49π. **D.** 98π.

Lời giải

Chọn C

Bán kính đáy của hình trụ là $r=\frac{7}{2}$.

Đường cao của hình trụ là $h=7$.

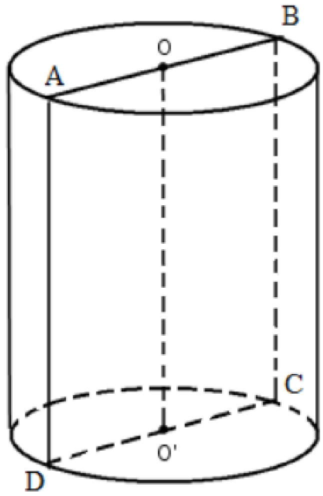
Diện tích xung quanh của hình trụ là $S=2\pi r.h=2\pi.\frac{7}{2}.7=49\pi$.

Câu 416. [ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102] Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 1. Diện tích xung quanh của (T) bằng.

A. π. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 2π. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh a

Do đó hình trụ có đường cao $h=1$ và bán kính đáy $r=\frac{CD}{2}=\frac{1}{2}$.

Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq}=2\pi rh=2\pi.1.\frac{1}{2}=\pi$

Câu 417. [ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103] Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 3. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\frac{9\pi}{4}$. **B.** 18π. **C.** 9π. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Vì thiết diện qua trục của hình trụ (T) là một hình vuông cạnh bằng 3 nên hình trụ (T) có đường sinh $l=3$, bán kính $r=\frac{l}{2}=\frac{3}{2}$.

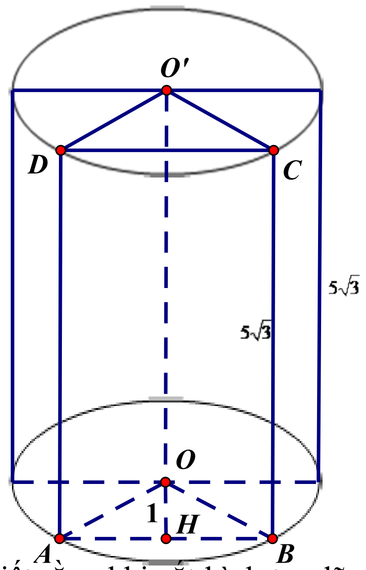
Diện tích xung quanh của hình trụ (T) là $S_{xq}=2\pi rl=2\pi.\frac{3}{2}.3=9\pi$

Câu 418. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Cho hình trụ có chiều cao $5\sqrt{3}$. Cắt mặt trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $10\sqrt{3}\pi$. **B.** $5\sqrt{39}\pi$. **C.** $20\sqrt{3}\pi$. **D.** $10\sqrt{39}\pi$.

Lời giải

Chọn C



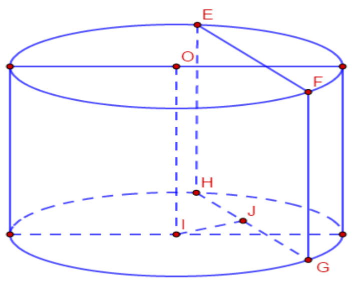
Ta có hình vẽ bên, với khoảng cách từ O đến mặt phẳng cắt là $OH=1$ (với H là trung điểm cạnh AB); $AD=BC=5\sqrt{3}$.
Gọi R là bán kính đường tròn mặt đáy của hình trụ.
Ta có diện tích thiết diện: $S_{ABCD}=30$.
$\Leftrightarrow AB.BC=30$
$\Leftrightarrow AB.5\sqrt{3}=30$
$\Leftrightarrow AB=2\sqrt{3}$.
Suy ra: $AH=\sqrt{3}$.
$OA=\sqrt{OH^2+AH^2}=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2=R$.
Vậy diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng:
$S_{xq}=2\pi.R.l=2\pi.2.5\sqrt{3}=20\sqrt{3}\pi$.

Câu 419. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$, Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $216\pi a^3$. **B.** $150\pi a^3$. **C.** $54\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi J là trung điểm GH. Khi đó $IJ\perp GH$ và $IJ=3a$.
Theo giả thiết, ta có $EFGH$ là hình vuông, có độ dài cạnh bằng $6a\Rightarrow GH=6a$.

Trong tam giác vuông IJH, ta có $IH=\sqrt{(3a)^2+(3a)^2}=3\sqrt{2}a$.

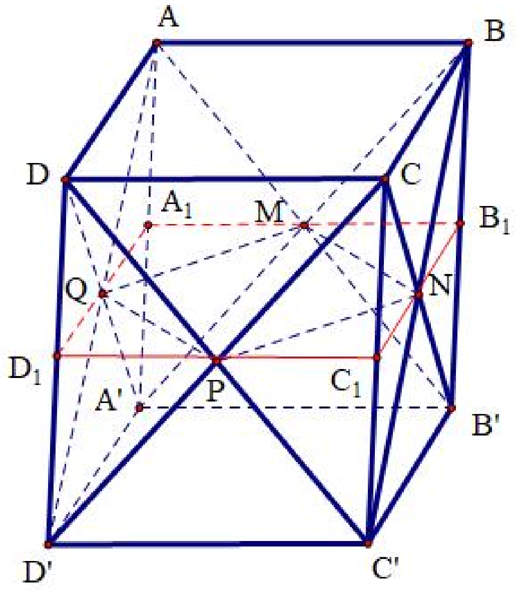
Vậy $V=\pi.IH^2.IO=\pi.18a^2.6a=108\pi a^3$.

Câu 420. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M,N,P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', BCC'B', CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,D,M,N,P và Q bằng

A. 27. **B.** 30. **C.** 18. **D.** 36

Lời giải

Chọn B



Mặt $(MNPQ)$ cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' tại A_1, B_1, C_1, D_1. Thể tích khối đa diện cần tìm là V, thì:

$V = V_{A_1B_1C_1D_1.A'B'C'D'} - V_{A'.QMA_1} - V_{B'.MNB_1} - V_{C'.PNC_1} - V_{D'.QPD_1}$

$= \dfrac{8.9}{2} - 4 \times \dfrac{V}{24}$.

$\Rightarrow V = 30$

28.2 D06 - Bài toán thực tế về khối trụ - Muc do 2

Câu 421. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1\,\text{m}$ và $1,2\,\text{m}$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. $1,8\,\text{m}$. **B.** $1,4\,\text{m}$. **C.** $2,2\,\text{m}$. **D.** $1,6\,\text{m}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi chiều cao của bể nước là $h(\text{m})$, bán kính bể mới là $r(\text{m})$

Khi đó tổng thể tích hai bể nước ban đầu là: $V = \pi.h + \pi.1,44.h = 2,44\pi h\left(\text{m}^3\right)$.

Vì bể mới có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích hai bể cũ nên: $\pi r^2 h = 2,44\pi h \Leftrightarrow r = \sqrt{2,44} \approx 1,56$.

29. KHỐI CẦU

29.1 Câu hỏi chỉ liên quan đến biến đổi V,S,R

Câu 422. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho khối cầu có bán kính $r=4$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A. $\frac{256\pi}{3}$. **B.** 64π. **C.** $\frac{64\pi}{3}$. **D.** 256π.

Lời giải

Thể tích khối cầu $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi.4^3=\frac{256\pi}{3}$.

Câu 423. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho khối cầu có bán kính $r=4$. Thể tích khối cầu đã cho bằng

A. 64π. **B.** $\frac{64\pi}{3}$. **C.** 256π. **D.** $\frac{256\pi}{3}$.

Lời giải

Ta có thể tích khối cầu là: $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{256\pi}{3}$.

Câu 424. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho khối cầu có bán kính $r=2$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A. 16π. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** 32π. **D.** $\frac{8\pi}{3}$.

Lời giải

Thể tích của khối cầu đã cho $V=\frac{4}{3}\pi.r^3=\frac{4}{3}\pi.2^3=\frac{32\pi}{3}$.

Câu 425. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho khối cầu có bán kính $r=2$. Thể tích khối cầu đã cho là

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** 16π. **C.** 32π. **D.** $\frac{8\pi}{3}$.

Lời giải

Thể tích khối cầu bán kính $r=2$ là $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}.\pi.2^3=\frac{32\pi}{3}$.

Câu 426. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Cho mặt cầu có bán kính $r=4$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. $\frac{256\pi}{3}$. **B.** $\frac{64\pi}{3}$. **C.** 16π. **D.** 64π.

Lời giải

Chọn D

Ta có diện tích mặt cầu là $S=4\pi r^2=64\pi$.

Câu 427. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Cho mặt cầu có bán kính $r=5$. Diện tích mặt cầu đã cho bằng

A. 25π. **B.** $\frac{500\pi}{3}$. **C.** 100π. **D.** $\frac{100\pi}{3}$.

Lời giải.

Chọn C

Diện tích mặt cầu $S=4\pi r^2=4\pi.5^2=100\pi$.

Câu 428. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho mặt cầu có bán kính $r=4$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. 16π. **B.** 64π. **C.** $\dfrac{64\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{256\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích của mặt cầu bằng $4\pi r^2=4.\pi.4^2=64\pi$

Câu 429. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho khối cầu có bán kính $r=2$. Thể tích khối cầu đã cho là

A. $\dfrac{32\pi}{3}$. **B.** 16π. **C.** 32π. **D.** $\dfrac{8\pi}{3}$.

Lời giải

Thể tích khối cầu bán kính $r=2$ là $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}.\pi.2^3=\dfrac{32\pi}{3}$.

Câu 430. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Cho mặt cầu có bán kính $R=2$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. $\dfrac{32\pi}{3}$. **B.** 8π. **C.** 16π. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn C

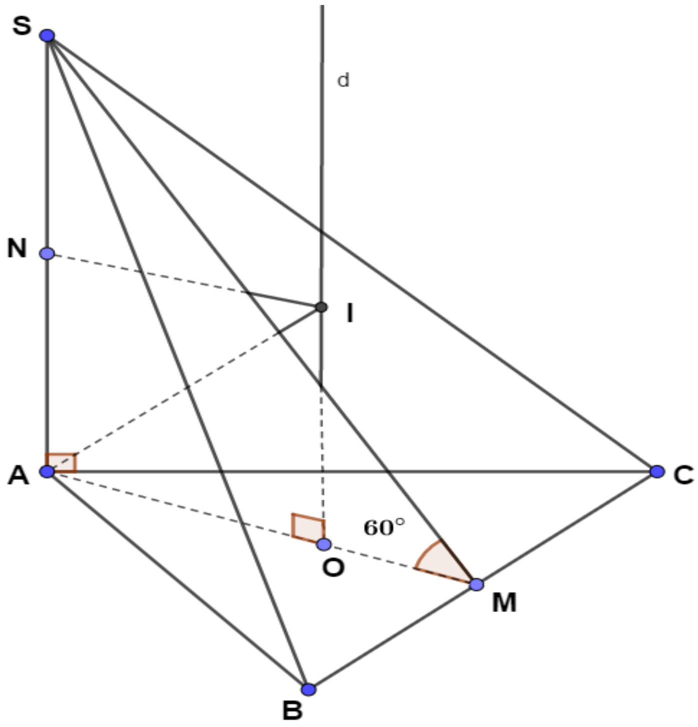
Diện tích của mặt cầu đã cho $S=4\pi R^2=4\pi.2^2=16\pi$.

29.2 Khối cầu nội - ngoại tiếp, liên kết khối đa diện

Câu 431. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 60°. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{172\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{76\pi a^2}{3}$. **C.** $84\pi a^2$. **D.** $\dfrac{172\pi a^2}{9}$.

Lời giải



Gọi O là tâm của tam giác ABC, M và N lần lượt là trung điểm của BC và SA, R,S là bán kính và diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Dựng trục d của tam giác ABC, $\Rightarrow d$ qua O và $d // SA$.

Trong mặt phẳng (SA,d) dựng đường thẳng qua N song song với AO cắt d tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $R = AI$.

Do ΔABC đều và $SA \perp (ABC)$ nên $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = \angle SMA = 60^\circ$.

$$AM = 4a\frac{\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} AO = \frac{2}{3}AM = \frac{4a\sqrt{3}}{3} \\ AN = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}AM\tan 60^\circ = 3a \end{cases}.$$

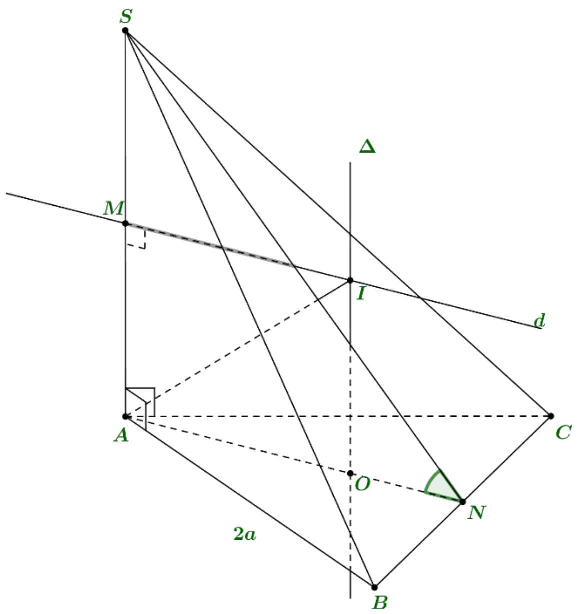
$ANIO$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AI = \sqrt{AN^2 + AO^2} = \sqrt{9a^2 + \frac{16a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{43}{3}}$.

Vậy $S = 4\pi R^2 = \frac{172\pi a^2}{3}$.

Câu 432. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A. $52\pi a^2$. **B.** $\frac{172\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{76\pi a^2}{9}$. **D.** $\frac{76\pi a^2}{3}$.

Lời giải

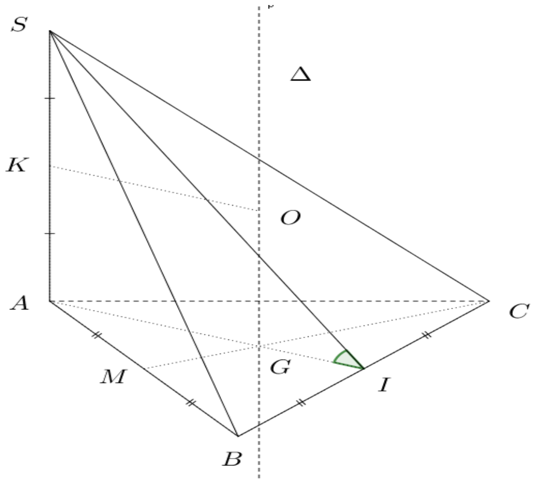


Gọi N là trung điểm của BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.
Dựng Δ qua O, $\Delta \perp (ABC) \Rightarrow \Delta$ là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC và Δ, SA đồng phẳng.
Trong mặt phẳng (SAN) dựng đường trung trực d của cạnh bên SA.
Gọi $I = \Delta \cap d$, suy ra $IA = IB = IC = IS$, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $R = IA$.
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AN \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAN) \Rightarrow BC \perp SN$.
Suy ra $\angle((SBC),(ABC)) = \angle(AN, SN) = \angle SNA = 30°$.
Mặt khác: $AN = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$, $AO = \frac{2}{3}AN = \frac{4\sqrt{3}a}{3}$.
Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AN \Rightarrow \Delta SAN$ vuông tại A.
Ta có $\tan \angle SNA = \frac{SA}{AN} \Rightarrow SA = AN \cdot \tan 30° = 2a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2a$, suy ra $MA = IO = \frac{SA}{2} = a$.
Xét tam giác IOA vuông tại O: $R = IA = \sqrt{IO^2 + AO^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{57}a}{3}$.
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S_{(S.ABC)} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{\sqrt{57}a}{3}\right)^2 = \frac{76\pi a^2}{3}$

Câu 433. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{43\pi a^2}{9}$. **D.** $21\pi a^2$.

Lời giải



Phân tích, nhận xét:

1. Bài toán kiểm tra kĩ năng xác định góc giữa hai mặt phẳng và kĩ năng xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp.

2. Để xác định góc giữa hai mặt phẳng có giao tuyến là d, ta cần xác định hai đường thẳng d_1, d_2 nằm trong hai mặt phẳng, cùng vuông góc với d tại cùng một điểm. Góc giữa hai mặt phẳng chính là góc giữa d_1, d_2.

3. Để tính diện tích của mặt cầu ta cần tìm bán kính của mặt cầu. Do đó cần xác định xem tâm của mặt cầu trong hình vẽ nằm ở đâu. Tâm O của mặt cầu cách đều A, B, C nên O phải nằm trên Δ, là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác đáy. Mặt khác, O cách đều S, A nên O phải nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng SA. Như vậy, O là giao điểm của mặt phẳng trung trực của SA với Δ. Trường hợp SA song song với Δ, thì trong mặt phẳng xác định bởi SA và Δ, ta có thể kẻ luôn đường trung trực của SA.

+ $\alpha = 60°$ là góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC). Lấy I là trung điểm $BC \Rightarrow \begin{cases} AI \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha = (SI, AI) = \widehat{SIA} = 60^o$.

+ $AI = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow SA = \sqrt{3}.AI = 3a$.

+ Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Qua G kẻ đường thẳng $\Delta \perp (ABC) \Rightarrow \Delta // SA$

Trong mp(SA, Δ): Đường trung trực SA cắt Δ ở O

$\Rightarrow$ Mặt cầu $S(O; OA)$ ngoại tiếp $S.ABC$. Gọi K là trung điểm AS

Ta có $AK = \dfrac{1}{2}AS = \dfrac{3a}{2}; AG = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

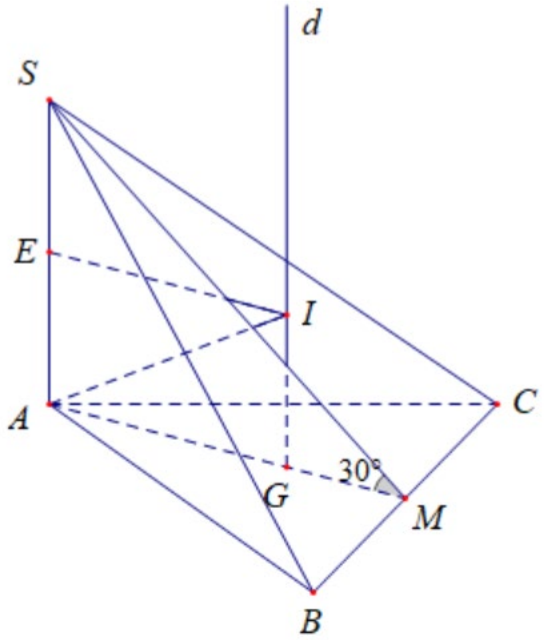
$R = \sqrt{AK^2 + AG^2} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4} + \dfrac{4a^2}{3}} = a\sqrt{\dfrac{43}{12}}$

+ Diện tích mặt cầu $S(O; OA)$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2 \dfrac{43}{12} = \dfrac{43\pi a^2}{3}$.

Câu 434. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30°. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{19\pi a^2}{9}$. **D.** $13\pi a^2$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC, ta có góc $\widehat{SMA}$ là góc giữa (SBC) và (ABC)

$\Rightarrow \widehat{SMA} = 30°$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC khi đó ta có:

$AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, $SA = AM.\tan 30° = a\sqrt{3}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = a$.

Qua G kẻ đường thẳng d vuông góc với $(ABC) \Rightarrow d // SA$.

Gọi E là trung điểm của SA, qua E kẻ mặt phẳng (P) sao cho: $\begin{cases}(P)\perp SA\\(P)\cap d = \{I\}\end{cases}$

Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ và khối cầu đó có bán kính là:

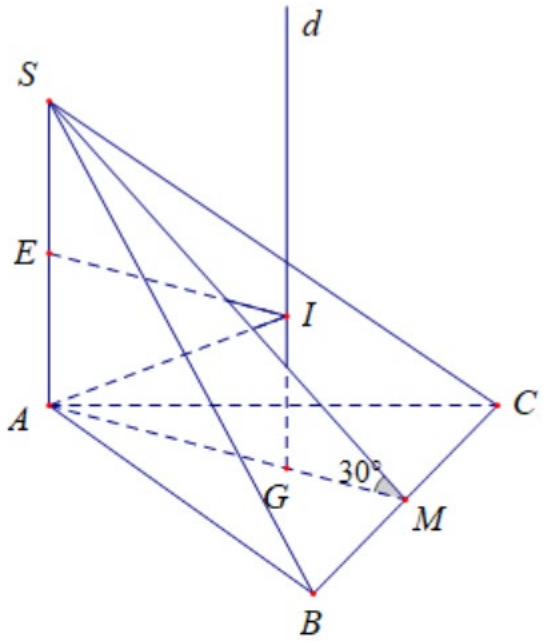
$R = IA = \sqrt{IG^2 + AG^2} = \sqrt{\left(\dfrac{SA}{2}\right)^2 + AG^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{4a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{57}}{6}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $S = 4\pi R^2 = \dfrac{19\pi a^2}{3}$.

Câu 435. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30°. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{19\pi a^2}{9}$. **D.** $13\pi a^2$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC, ta có góc $\widehat{SMA}$ là góc giữa (SBC) và (ABC)

$\Rightarrow \widehat{SMA} = 30°$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC khi đó ta có:

$AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, $SA = AM.\tan 30° = a\sqrt{3}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = a$.

Qua G kẻ đường thẳng d vuông góc với $(ABC) \Rightarrow d//SA$.

Gọi E là trung điểm của SA, qua E kẻ mặt phẳng (P) sao cho: $\begin{cases}(P)\perp SA \\ (P)\cap d = \{I\}\end{cases}$

Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ và khối cầu đó có bán kính là:

$R = IA = \sqrt{IG^2 + AG^2} = \sqrt{\left(\dfrac{SA}{2}\right)^2 + AG^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{4a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{57}}{6}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $S = 4\pi R^2 = \dfrac{19\pi a^2}{3}$.

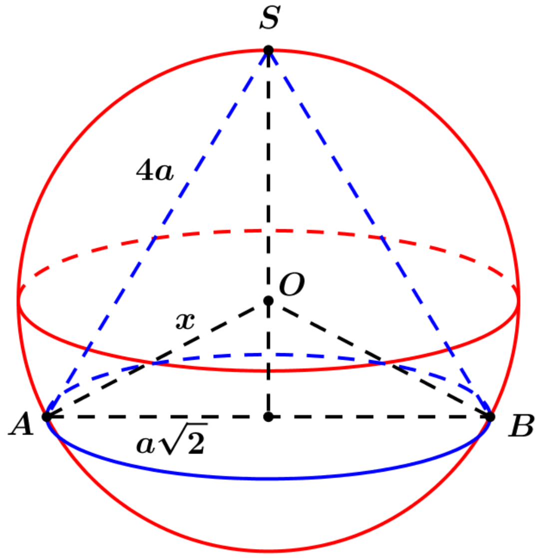
29.3 Bài toán tổng hợp về khối nón, khối trụ, khối cầu

Câu 436. [ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101] Cho hình nón (N) có đỉnh S ,bán kính đáy bằng $\sqrt{2}a$ và độ dài đường sinh bằng $4a$ .Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N).Bán kính của (T) bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}a$. **B.** $\sqrt{14}a$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{14}}{7}a$. **D.** $\dfrac{8\sqrt{14}}{7}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi R là bán kính mặt cầu (T) , SH là đường cao của hình nón $\Rightarrow SH=\sqrt{(4a)^2-(a\sqrt{2})^2}=a\sqrt{14}$

Gọi I là tâm mặt cầu $\Rightarrow R^2=(a\sqrt{2})^2+(R-a\sqrt{14})^2 \Rightarrow R=\dfrac{4\sqrt{14}}{7}a$

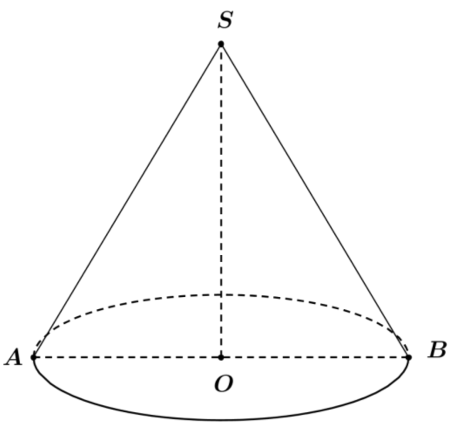
Câu 437. [ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102] Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng $\sqrt{3}a$ và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

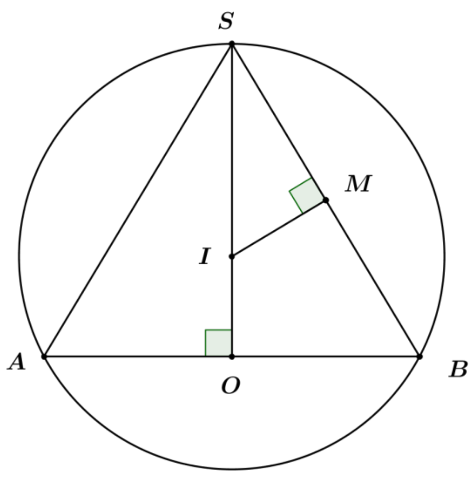
A. $\dfrac{2\sqrt{10}a}{3}$. **B.** $\dfrac{16\sqrt{13}a}{13}$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{13}a}{13}$. **D.** $\sqrt{13}a$.

Lời giải.

Chọn C

Cách 1.





Nếu cắt mặt cầu ngoại tiếp khối nón (N) bởi mặt phẳng (SAB), ta được mộ hình tròn ngoại tiếp tam giác SAB. Khi đó bán kính mặt cầu (T) bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Gọi M là trung điểm của SB. Kẻ đường vuông góc với SB tại M, cắt SO tại I.

Khi đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB và $r = SI$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔSAB.

Ta có: $\Delta SIM \backsim \Delta SBO \Rightarrow \frac{SI}{SB} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SM}{SO}.SB$.

Trong đó: $\begin{cases} SM = 2a \\ SB = 4a \\ SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = a\sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow r = SI = \frac{8a\sqrt{13}}{13}$.

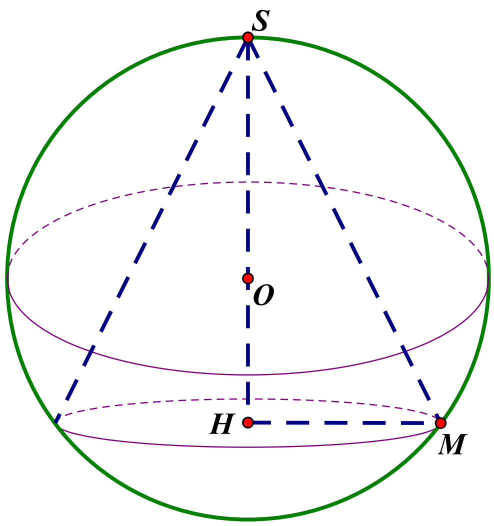
Cách 2.

Gọi O là tâm của mặt cầu (T), H là tâm đường tròn đáy của (N), M là một điểm trên đường tròn đáy của (N) và R là bán kính của (T).

Ta có: $SO = OM = R$; $OM^2 = OH^2 + HM^2$; $SH = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{13}a$.

Do $SH \neq HM$ nên chỉ xảy ra hai trường hợp sau

Trường hợp 1: $SH = SO + OH$

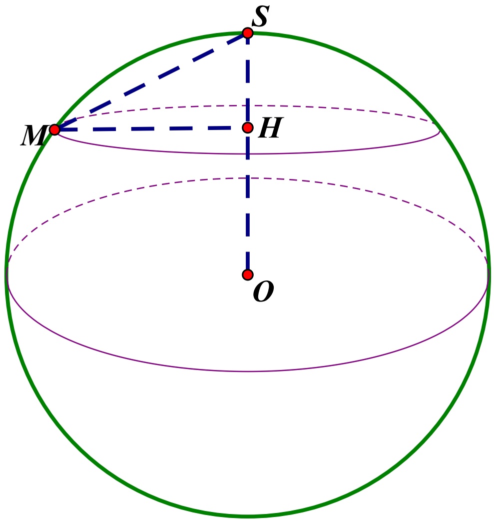


Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} R + OH = \sqrt{13}a \\ R^2 = OH^2 + 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OH = \sqrt{13}a - R \\ R^2 = 13a^2 - 2\sqrt{3}aR + R^2 + 3a^2 \ (*) \end{cases}.$$

Giải $(*)$ ta có $R = \frac{8\sqrt{13}a}{13}$.

Trường hợp 2: $SH = SO - OH$.



Ta có hệ phương trình $\begin{cases} R = OH + \sqrt{13}a \\ R^2 = OH^2 + 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OH = R - \sqrt{13}a \\ R^2 = 13a^2 - 2\sqrt{13}aR + R^2 + 3a^2 \ (*) \end{cases}$.

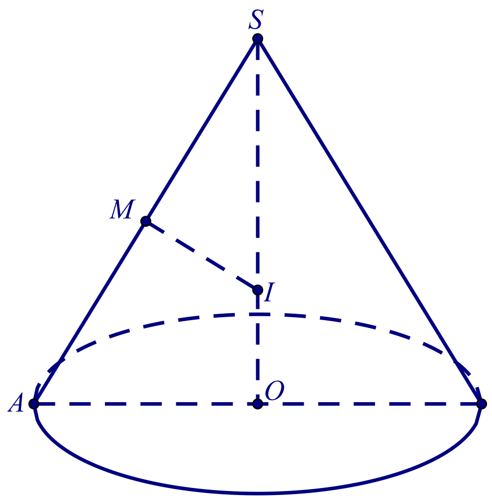
Giải $(*)$ ta có $R = \dfrac{8\sqrt{13}a}{13}$.

Câu 438. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{6}a}{3}$. **B.** $\dfrac{16\sqrt{15}a}{15}$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{15}a}{15}$. **D.** $\sqrt{15}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là tâm của (T) thì $I \in SO$ và $IS = IA$. Gọi M là trung điểm của SA thì $IM \perp SA$.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(4a)^2 - a^2} = a\sqrt{15}$.

Lại có $SM.SA = SI.SO \Rightarrow SI = \dfrac{SM.SA}{SO} = \dfrac{2a.4a}{a\sqrt{15}} = \dfrac{8\sqrt{15}a}{15}$.

30. TỌA ĐỘ ĐIỂM – VECTƠ

30.1 Hình chiếu của điểm lên các trục tọa độ, lên các mặt phẳng tọa độ và điểm đối xứng của nó

Câu 439. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M\left(2;1;-1\right)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $\left(2;1;0\right)$. **B.** $\left(0;0;-1\right)$. **C.** $\left(2;0;0\right)$. **D.** $\left(0;1;0\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 440. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A\left(3;2;1\right)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $\left(0;2;1\right)$. **B.** $\left(3;0;0\right)$. **C.** $\left(0;0;1\right)$. **D.** $\left(0;2;0\right)$.

Lời giải

Hình chiếu của điểm $A\left(3;2;1\right)$ trên trục Ox là $A'\left(3;0;0\right)$.

Câu 441. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A\left(1;2;5\right)$ lên trục Ox có tọa độ là

A. $\left(0;2;0\right)$. **B.** $\left(0;0;5\right)$. **C.** $\left(1;0;0\right)$. **D.** $\left(0;2;5\right)$.

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của điểm $A\left(1;2;5\right)$ lên trục Ox có tọa độ là $\left(1;0;0\right)$

Câu 442. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]**Trong không gian $Oxyz$ hình chiếu vuông góc của điểm $A\left(3;5;2\right)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $\left(0;5;2\right)$. **B.** $\left(0;5;0\right)$. **C.** $\left(3;0;0\right)$. **D.** $\left(0;0;2\right)$.

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của điểm $A\left(3;5;2\right)$ trên trục Ox là $\left(3;0;0\right)$.

Câu 443. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A\left(8;1;2\right)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $\left(0;1;0\right)$. **B.** $\left(8;0;0\right)$. **C.** $\left(0;1;2\right)$. **D.** $\left(0;0;2\right)$.

Lời giải

Tọa độ hình chiếu vuông góc của $A\left(8;1;2\right)$ lên trục Ox là $\left(8;0;0\right)$.

Câu 444. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Trong không gian $Oxyz$. Điểm nào sau đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;4;2)$ trên mặt phẳng Oxy?

A. $(0;4;2)$. **B.** $(1;4;0)$. **C.** $(1;0;2)$. **D.** $(0;0;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có hình chiếu của $A(1;4;2)$ trên mặt phẳng Oxy là $(1;4;0)$.

Câu 445. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng Oxy.

A. $Q(1;0;3)$ **B.** $P(1;2;0)$ **C.** $M(0;0;3)$ **D.** $N(0;2;3)$

Lời giải

Chọn B

Ta có hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng Oxy là điểm $P(1;2;0)$.

Câu 446. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Trong không gian $Oxyz$ điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên mặt phẳng (Oxy)?

A. $M(3;0;2)$ **B.** $(0;0;2)$ **C.** $Q(0;5;2)$ **D.** $N(3;5;0)$

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $N(3;5;0)$.

Câu 447. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(8;1;2)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;1;0)$. **B.** $(8;0;0)$. **C.** $(0;1;2)$. **D.** $(0;0;2)$.

Lời giải

Tọa độ hình chiếu vuông góc của $A(8;1;2)$ lên trục Ox là $(8;0;0)$.

Câu 448. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

A. $(0;1;0)$. **B.** $(2;1;0)$. **C.** $(0;1;-1)$. **D.** $(2;0;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là $(2;0;-1)$.

31. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

31.1 Tìm tâm và bán kính, ĐK xác định mặt cầu

Câu 449. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=9$. Bán kính của (S) bằng

A. 6. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải

Mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.

Vậy mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=9$ có tâm $I(0;0;-2)$ và bán kính $R=3$.

Câu 450. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-2)^2+z^2=9$. Bán kính mặt cầu (S) bằng

A. 6. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Người giải: Nguyễn Văn Đắc; Fb: Đắc Nguyễn

Áp dụng phép cộng số phức ta có bán kính mặt cầu trên bằng 3 nên chọn **đáp án C**

Câu 451. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]**Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=16$. Bán kính của (S) bằng

A. 32. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Bán kính của (S) bằng $R=\sqrt{16}=4$.

Câu 452. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=16$. Bán kính của (S) bằng:

A. 4. **B.** 32. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=16$ có bán kính bằng $R=4$.

Câu 453. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-4;6)$. **C.** $(1;-2;3)$. **D.** $(-2;4;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Tâm mặt cầu (S) có tọa độ là $(-1;2;-3)$.

Câu 454. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là:

A. $(-2;-4;6)$. **B.** $(2;4;-6)$. **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Lời giải

Chọn C

Tâm của (S) có tọa độ là: $(-1;-2;3)$

Câu 455. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;2;3)$. **B.** $(2;-4;-6)$. **C.** $(-2;4;6)$. **D.** $(1;-2;-3)$.

Lời giải

Chọn D

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(1;-2;-3)$.

Câu 456. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-2)^2=16$. Bán kính của (S) bằng:

A. 4. **B.** 32. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-2)^2=16$ có bán kính bằng $R=4$.

Câu 457. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** 9. **C.** 3. **D.** $\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$

Vậy bán kính mặt cầu là $R=3$.

Câu 458. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-2;4;-1)$. **B.** $(2;-4;1)$. **C.** $(2;4;1)$. **D.** $(-2;-4;-1)$.

Lời giải

Chọn B

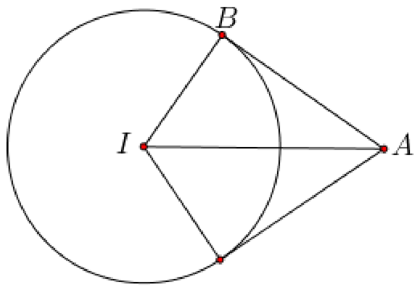
Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(2;-4;1)$.

32.1 Điểm thuộc mặt cầu thoả ĐK

Câu 459. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2=3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau ?

A. 12. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 4.

Lời giải



Chọn A

Ta có $A \in (Oxy) \Rightarrow c = 0$.

Suy ra $A(a;b;0)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;\sqrt{2})$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.

Từ giả thiết ta có $R \le IA \le R\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow 3 \le a^2 + b^2 + 2 \le 6$.

$\Leftrightarrow 1 \le a^2 + b^2 \le 4$.

Vì $a, b \in \mathbb{Z}$ nên có 12 điểm thỏa bài toán là $(\pm 1;0)$, $(\pm 2;0)$, $(0;\pm 1)$, $(0;\pm 2)$, $(1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$.

Vậy có 12 điểm A thỏa bài toán.

32. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

32.1 Tìm VTPT, các vấn đề về lý thuyết

Câu 460. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Trong không gian $Oxyz$,cho mặt phẳng (P): $x+2y+3z-1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)

A. $\vec{n}_3=(1;2;-1)$. **B.** $\vec{n}_4=(1;2;3)$. **C.** $\vec{n}_1=(1;3;-1)$. **D.** $\vec{n}_2=(2;3;-1)$.

Lời giải

Chọn B.

(P): $x+2y+3z-1=0$ có một vtpt là $\vec{n}_4=(1;2;3)$.

Câu 461. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):2x+4y-z+3=0$. Véctơ nào sau đây là véc tơ pháp tuyến của (α)?

A. $\overrightarrow{n_1}=(2;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(2;-4;1)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-2;4;1)$. **D.** $\overrightarrow{n_1}=(2;4;1)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng $(\alpha):2x+4y-z+3=0$ có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;4;-1)$.

Câu 462. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):2x-3y+4z-1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\overrightarrow{n_3}=(2;\,-3;\,4)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(2;\,3;\,-4)$. **C.** $\overrightarrow{n_1}=(2;\,3;\,4)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(-2;\,3;\,4)$.

Lời giải

Chọn A

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha):2x-3y+4z-1=0$ là $\overrightarrow{n_3}=(2;\,-3;\,4)$.

Câu 463. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Trong không gian $Oxyz$, Cho mặt phẳng $(\alpha):2x-y+3z+5=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α) ?

A. $\overrightarrow{n_3}=(-2;1;3)$. **B.** $\overrightarrow{n_4}=(2;1;-3)$. **C.** $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;3)$. **D.** $\overrightarrow{n_1}=(2;1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 464. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+3y+z+2=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_3=(2;3;2)$. **B.** $\vec{n}_1=(2;3;0)$. **C.** $\vec{n}_2=(2;3;1)$. **D.** $\vec{n}_4=(2;0;3)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(2;3;1)$.

32.2 PTMP trung trực của đoạn thẳng

Câu 465. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;0)$ và $B(5;1;-2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x-y-z+5=0$. **B.** $2x-y-z-5=0$. **C.** $x+2y+2z-3=0$. **D.** $3x+2y-z-14=0$.

Lời giải

Chọn B.

Mặt phẳng trung trực (P) của AB đi qua trung điểm $I(3;2;-1)$ của AB và nhận $\overrightarrow{AB}=(4;-2;-2)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4(x-3)-2(y-2)-2(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x-y-z-5=0$.

32.3 PTMP qua 1 điểm, dễ tìm VTPT (không dùng t.c.h)

Câu 466. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;4)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

A. $2x-2y+4z-21=0$. **B.** $2x-2y+4z+21=0$

C. $3x-2y+z-12=0$. **D.** $3x-2y+z+12=0$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

$3(x-2)-2(y+1)+(z-4)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-12=0$.

33.4 PTMP qua 1 điểm, song song với một mặt phẳng

Câu 467. **[ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;-2)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là:

A. $2x+y-2x+9=0$. **B.** $2x+y-2z-9=0$

C. $3x-2y+z+2=0$. **D.** $3x-2y+z-2=0$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình mặt phẳng (Q) song song mặt phẳng (P) có dạng: $3x-2x+z+D=0$.

Mặt phẳng (Q) qua điểm $M(2;1;-2)$, do đó: $3.2-2.1+(-2)+D=0 \Leftrightarrow D=-2$.

Vậy $(Q):3x-2y+z-2=0$.

Câu 468. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;3)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là

A. $3x-2y+z+11=0$. **B.** $2x-y+3z-14=0$.

C. $3x-2y+z-11=0$. **D.** $2x-y+3z+14=0$.

Lời giải

Chọn C

(P) nhận $\vec{n}=(3;-2;1)$ làm vectơ pháp tuyến

Mặt phẳng đã cho song song với (P) nên cũng nhận nhận $\vec{n}=(3;-2;1)$ làm vectơ pháp tuyến

Vậy mặt phẳng đi qua M và song song với (P) có phương trình là

$3(x-2)-2(y+1)+(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-11=0$

33.5 PTMP theo đoạn chắn

Câu 469. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;-2)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$. **B.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1$. **C.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$. **D.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng qua 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, $abc\neq 0$, có dạng là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ nên phương trình mặt phẳng qua 3 điểm $A(3;0;0)$, $B(0;1;0)$ và $C(0;0;-2)$ là $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1$.

Câu 470. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0), B(0;3;0)$ và $C(0;0;4)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$. **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$. **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{4}=1$. **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-4}=1$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua ba điểm $A(-2;0;0), B(0;3;0)$ và $C(0;0;4)$ có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn là: $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$.

Câu 471. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(-1,0,0)$, $B(0,2,0)$ và $C(0,0,3)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=1$. **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1$. **C.** $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **D.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$

Lời giải

Ta có phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 472. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2\,;0\,;0)$, $B(0\,;-1;\,0)$, $C(0\,;0\,;3)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$. **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-3}=1$. **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$. **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$.

Lời giải

Với ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ thuộc ba trục tọa độ và $abc \neq 0$ thì mặt phẳng (ABC) có phương trình: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Với 3 điểm $A(2;\,0;\,0)$, $B(0;-1;\,0)$, $C(0;\,0;\,3)$, theo phương trình đoạn chắn ta có phương trình mặt phẳng (ABC): $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 473. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2\,;0\,;0)$, $B(0\,;-1;\,0)$, $C(0\,;0\,;3)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$. **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-3}=1$. **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$. **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$.

Lời giải

Với ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ thuộc ba trục tọa độ và $abc \neq 0$ thì mặt phẳng (ABC) có phương trình: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Với 3 điểm $A(2;\,0;\,0)$, $B(0;-1;\,0)$, $C(0;\,0;\,3)$, theo phương trình đoạn chắn ta có phương trình mặt phẳng (ABC): $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$.

33.6 PTMP qua 1 điểm, vuông góc với đường thẳng

Câu 474. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $3x+2y-z+1=0$. **B.** $2x-2y+3z-17=0$.

C. $3x+2y-z-1=0$. **D.** $2x-2y+3z+17=0$.

Lời giải

Gọi mặt phẳng (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d.

Ta có: $(P)\perp d \Rightarrow (P)$ nhận vectơ chỉ phương của d làm vectơ pháp tuyến.

$\Rightarrow (P)\begin{cases}\text{qua } M(2;-2;3)\\ \text{có vectơ pháp tuyến } \overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_d}=(3;2;-1)\end{cases}$.

$\Rightarrow (P): 3(x-2)+2(y+2)-(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-z+1=0$.

Câu 475. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;-2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-3}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $x+2y-3z-9=0$. **B.** $x+y-2z-6=0$.

C. $x+2y-3z+9=0$. **D.** $x+y-2z+6=0$.

Lời giải

Đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-3}$ có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;-3)$.

Mặt phẳng (α) vuông góc với d có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=\vec{u}(1;2;-3)$.

Mặt phẳng (α) đi qua $M(1;1;-2)$, có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(1;2;-3)$ phương trình là

$1.(x-1)+2.(y-1)-3.(z+2)=0$

$\Leftrightarrow x+2y-3z-9=0$.

Câu 476. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$. Mặt phẳng qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $2x+3y+z-3=0$. **B.** $2x-y+2z-9=0$.

C. $2x+3y+z+3=0$. **D.** $2x-y+2z+9=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (α)qua M và vuông góc với đường thẳng d nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;3;1)$.

Vậy mặt phẳng (α) có phương trình là $2(x-2)+3(y+1)+1(z-2)=0$

$\Leftrightarrow 2x+3y+z-3=0$.

Câu 477. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;-2;2)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $x+2y-2z+5=0$. **B.** $3x-2y+2z-17=0$.

C. $3x-2y+2z+17=0$. **D.** $x+2y-2z-5=0$.

Lời giải

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $M(3;-2;2)$ và vuông góc với $d:\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-2}$.

Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(1;2;-2)$.

$(\alpha)\perp d$ nên vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=(1;2;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là:

$1(x-3)+2(y+2)-2(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-2z+5=0$.

Câu 478. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;-2;2)$, đường thẳng $d:\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $x+2y-2z+5=0$. **B.** $3x-2y+2z-17=0$.

C. $3x-2y+2z+17=0$. **D.** $x+2y-2z-5=0$.

Lời giải

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $M(3;-2;2)$ và vuông góc với $d:\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-2}$.

Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(1;2;-2)$.

$(\alpha)\perp d$ nên vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=(1;2;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là:

$1(x-3)+2(y+2)-2(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-2z+5=0$.

Câu 479. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ có phương trình là

A. $3x+y-z-7=0$. **B.** $x+4y-2z+6=0$. **C.** $x+4y-2z-6=0$. **D.** $3x+y-z+7=0$.

Lời giải

Chọn C

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Dễ thấy $(P)\perp\Delta$ nên (P) sẽ nhận vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;4;-2)$ của Δ làm vtpt.

Vậy (P) đi qua M và có vecto pháp tuyến là $(1;4;-2)$ nên:

$(P):1.(x-2)+4(y-1)-2(z-0)=0 \Rightarrow \boxed{(P):x+4y-2z-6=0}$.

33. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

33.1 Các câu hỏi chưa phân dạng

Câu 480. [ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102] Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x-4}{2}=\frac{z-2}{-5}=\frac{z+1}{1}$. Điểm nào sau đây thuộc d?

A. $N(4;2;-1)$. **B.** $Q(2;5;1)$. **C.** $M(4;2;1)$. **D.** $P(2;-5;1)$.

Lời giải

Chọn A

Thế điểm $N(4;2;-1)$ vào d ta thấy thỏa mãn nên chọn **A.**

33.2 Tìm VTCP, các vấn đề về lý thuyết

Câu 481. [ĐỀ BGD 2019-MĐ 101] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{1}$. Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_2}=(2;1;1)$. **B.** $\overrightarrow{u_4}=(1;2;-3)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(-1;2;1)$. **D.** $\overrightarrow{u_1}=(2;1;-3)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{1}$ có một vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u_3}=(-1;2;1)$.

Câu 482. [Đề-BGD-2020-Mã-101] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

A. $\overrightarrow{u_2}=(3;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_1}=(2;-5;3)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5;3)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(3;4;1)$.

Lời giải

Đường thẳng có phương trình dạng $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ thì có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ nên đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+1}{3}$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(2;-5;3)$.

Câu 483. [ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-2}{-1}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

A. $\overrightarrow{u_2}=(3;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_1}=(2;-5;2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5;-2)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(3;4;1)$.

Lời giải

Dựa vào phương trình chính tắc của đường thẳng d ta có vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_2}=(3;4;-1)$.

Câu 484. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{u}_3=(3;-1;-2)$. **B.** $\vec{u}_4=(4;2;3)$. **C.** $\vec{u}_2=(4;-2;3)$. **D.** $\vec{u}_1=(3;1;2)$.

Lời giải

Một véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_2}=(4;-2;3)$.

Câu 485. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-4}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{-2}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_2=(4;-2;3)$. **B.** $\vec{u}_4=(4;2;-3)$. **C.** $\vec{u}_3=(3;-1;-2)$. **D.** $\vec{u}_1=(3;1;2)$.

Lời giải

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_3=(3;-1;-2)$.

Câu 486. **[ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101]** Trong không gian *Oxyz,* cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$. Điểm nào dưới đây thuộc *d*?

A. $Q(4;-2;1)$. **B.** $N(4;2;1)$. **C.** $P(2;1;-3)$. **D.** $M(2;1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ điểm $P(2;1;-3)$ vào $d:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$ ta được

$\frac{2-2}{4}=\frac{1-1}{-2}=\frac{-3+3}{1}\Leftrightarrow 0=0=0$ đúng. Vậy điểm $P\in(d)$.

Câu 487. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $N(3;-1;-2)$ **B.** $Q(2;4;1)$ **C.** $P(2;4;-1)$ **D.** $M(3;1;2)$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\frac{3-3}{2}=\frac{-1+1}{4}=\frac{-2+2}{-1}=0$. Vậy $N(3;-1;-2)$ thuộc d.

Câu 488. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-4}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{-2}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_2=(4;-2;3)$. **B.** $\vec{u}_4=(4;2;-3)$. **C.** $\vec{u}_3=(3;-1;-2)$. **D.** $\vec{u}_1=(3;1;2)$.

Lời giải

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_3=(3;-1;-2)$.

Câu 489. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $P(1;2;-1)$. **B.** $M(-1;-2;1)$. **C.** $N(2;3;-1)$. **D.** $Q(-2;-3;1)$.

Lời giải

Chọn A

Thay lần lượt tọa độ các điểm M, N, P, Q vào phương trình của đường thẳng d ta có:

$\frac{-1-1}{2}=\frac{-2-2}{3}=\frac{1+1}{-1}\Leftrightarrow -1=-\frac{4}{3}=-2$ (vô lý) $\Rightarrow M\notin d$.

$\frac{2-1}{2}=\frac{3-2}{3}=\frac{-1+1}{-1}\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{3}=0$ (vô lý) $\Rightarrow N\notin d$.

$\frac{1-1}{2}=\frac{2-2}{3}=\frac{-1+1}{-1}\Leftrightarrow 0=0=0$ (đúng) $\Rightarrow P\in d$.

$\frac{-2-1}{2}=\frac{-3-2}{3}=\frac{1+1}{-1}\Leftrightarrow -\frac{3}{2}=-\frac{5}{3}=-2$ (vô lý) $\Rightarrow Q\notin d$.

Vậy điểm $P\left(1;2;-1\right)$ thuộc đường thẳng d.

33.3 PTĐT qua 1 điểm, dễ tìm VTCP (không dùng t.c.h)

Câu 490. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 102]** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(1;1;1)$ và $C(3;4;0)$. Đường thẳng đi qua A và song song BC có phương trình là

A. $\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{5}=\frac{z+3}{1}$.
B. $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{1}$.
C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-1}$.
D. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{-1}$.

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm ta có $\vec{u}_\Delta=\overrightarrow{BC}=(2;3;-1)$

Vậy phường trình chính tắc Δ đi qua A và song song BC là :

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-1}$

Câu 491. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A\left(1;2;0\right)$; $B\left(1;1;2\right)$; $C\left(2;3;1\right)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$.
B. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{3}$.
C. $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{3}$.
D. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BC}=\left(1;2;-1\right)$.

Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$.

Câu 492. **[Đề-BGD-2020-Mã-101]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(1;0;1\right)$, $B\left(1;1;0\right)$, $C\left(3;4;-1\right)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A. $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{-1}$.
B. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1}$. **D.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-1}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(2;3;-1)$.

Gọi d là đường thẳng cần lập phương trình. Vì $d\,//\,BC$ nên $\overrightarrow{BC}$ là một vectơ chỉ phương của d.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1}$.

Câu 493. [ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104] Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;0)$; $B(1;0;1)$; $C(3;1;0)$. Đường thẳng đi qua $A(1;1;0)$ và song song với BC có phương trình

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. **B.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$. **C.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$. **D.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$.

Lời giải

Đường thẳng cần tìm đi qua $A(1;1;0)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=\overrightarrow{BC}=(2;1;-1)$

Phương trình đường thẳng cần tìm là: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$.

Câu 494. [ĐỀ BGD 2020-L2-MĐ 101] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+3z+1=0$. Phương trình của đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) là

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=3+3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-t\\z=-3+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-2t\\z=3+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-2t\\y=-2-t\\z=3-3t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng cần tìm đi qua $M(1;-2;3)$, vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;3)$ là véc tơ chỉ phương. Phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=3+3t\end{cases}$.

Câu 495. [ĐỀ BGD 2020 L2-MĐ-102] Trong không gian $Oxyz$, cho $M(1;2;-3)$ và mặt phẳng (P): $2x-y+3z-1=0$. Phương trình của đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với (P) là

A. $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+2t\\z=3-3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2-t\\z=3+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-3+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-2t\\y=2-t\\z=-3-3t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $2x-y+3z-1=0$ là $\vec{n}=(2;-1;3)$.

Đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và và vuông góc với (P) có phương trình là $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-3+3t\end{cases}$

.

Câu 496. **[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-3z+1=0$. Phương trình của đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ z=2-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=-3+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P) nhận véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) làm véc tơ chỉ phương có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ z=2-3t \end{cases}$.

Câu 497. **[ĐỀ BGD-2020-L1-MĐ 104]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;0)$; $B(1;0;1)$; $C(3;1;0)$. Đường thẳng đi qua $A(1;1;0)$ và song song với BC có phương trình

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. **B.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$. **C.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$. **D.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$.

Lời giải

Đường thẳng cần tìm đi qua $A(1;1;0)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=\overrightarrow{BC}=(2;1;-1)$

Phương trình đường thẳng cần tìm là: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$.

Câu 498. **[ĐỀ BGD 2020-MH2]** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{MN}=(2;2;-2)$ nên chọn $\vec{u}=(1;1;-1)$ là vecto chỉ phương của MN

Đường thẳng MN có 1 vecto chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;-1)$ và đi qua điểm $M(1;0;1)$

nên có phương trình tham số là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$.

33.4 PTĐT qua 1 điểm, thoả ĐK khác

Câu 499. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;0)$, $B(2;0;2)$, $C(2;-1;3)$, $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=-2-3t \\ z=2-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=-1+3t \\ z=3-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-4+3t \\ z=2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=4+2t \\ y=3-t \\ z=1+3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng cần tìm đi qua $C(2;-1;3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(-4;-3;-1)$

nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x=2+4t \\ y=-1+3t \\ z=3+t \end{cases}$

Ta thấy điểm $M(-2;-4;2)$ thuộc đường thẳng đi qua C (ứng với $t=-1$) và vuông góc với mặt phẳng (ABD) nên ta chọn đáp án **C.**

33.5 Toán Max-Min liên quan đến đường thẳn

Câu 500. **[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(-3;0;-3)$. **B.** $M(0;-3;-5)$. **C.** $N(0;3;-5)$. **D.** $Q(0;5;-3)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Điểm A thuộc mặt phẳng (Oyz) và có tung độ dương.

Đường thẳng d thuộc mặt trụ có trục là Oz và có bán kính bằng 3 (phương trình: $x^2+y^2=9$).

Do đó khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất thì d phải nằm trong mặt phẳng (Oyz) và cách Oz một khoảng bằng 3, đồng thời đi qua điểm có tung độ dương.

Vậy d đi qua điểm $N(0;3;-5)$.

Cách 2

Vì d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d là đường sinh của mặt trụ tròn xoay có trục là Oz và bán kính bằng 3.

Dễ thấy: $d(A;Oz)=4$ nên $\min d(A;d)=d(A;Oz)-d(d;Oz)=1$.

Mặt khác, điểm $A\in(Oyz)$ nên $d\subset(Oyz)$

do $d(d;Oz)=3$ nên d đi qua điểm $K(0;0;3)$.

$$d\,//\,Oz \Rightarrow d:\begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=z_0+t \end{cases}.$$

Kiểm tra 4 đáp án ta thấy $N(0;3;-5)$ thỏa mãn.