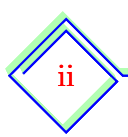


Mục lục

Phần I Đại số

Chương 1. Phép nhân và phép chia đa thức	2
1. Nhân đơn thức với đa thức	2
1. Tóm tắt lý thuyết	2
2. Bài tập và các dạng toán	2
. Dạng 1. Làm phép tính nhân đơn thức với đa thức	2
. Dạng 2. Sử dụng phép nhân đơn thức với đa thức, rút gọn biểu thức cho trước	3
. Dạng 3. Tính giá trị của biểu thức cho trước	4
. Dạng 4. Tìm x biết x thỏa mãn điều kiện cho trước	5
. Dạng 5. Chứng tỏ giá trị biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của biến	5
3. Bài tập về nhà	6
2. Nhân đa thức với đa thức	8
1. Tóm tắt lý thuyết	8
2. Bài tập và các dạng toán	8
. Dạng 6. Làm phép tính nhân đa thức với đa thức	8
. Dạng 7. Chứng tỏ giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của biến .	9
. Dạng 8. Tìm x thỏa mãn điều kiện cho trước	10
. Dạng 9. Chứng minh đẳng thức	10
. Dạng 10. Chứng minh các bài toán về số nguyên	11
3. Bài tập về nhà	12
3. Những hằng đẳng thức đáng nhớ (Phần 1)	13
1. Tóm tắt lý thuyết	13
2. Bài tập và các dạng toán	13
. Dạng 11. Thực hiện phép tính	13
. Dạng 12. Chứng minh các đẳng thức, rút gọn biểu thức	15

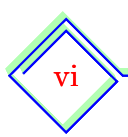


. Dạng 13. Tính nhanh	16
. Dạng 14. Chứng minh bất đẳng thức; tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thức	18
3. Bài tập về nhà	20
4. Những hằng đẳng thức đáng nhớ (phần 2)	22
1. Tóm tắt lý thuyết	22
2. Bài tập và các dạng toán	22
. Dạng 15. Khai triển biểu thức cho trước	22
. Dạng 16. Tính giá trị của biểu thức cho trước	23
. Dạng 17. Rút gọn biểu thức	24
. Dạng 18. Tính nhanh	25
3. Bài tập về nhà	25
5. Những hằng đẳng thức đáng nhớ (phần 3)	28
1. Tóm tắt lý thuyết	28
2. Bài tập và các dạng toán	28
. Dạng 19. Sử dụng hằng đẳng thức để phân tích hoặc rút gọn biểu thức cho trước	28
. Dạng 20. Tìm x	30
. Dạng 21. Khai triển biểu thức cho trước	31
3. Bài tập về nhà	32
6. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung	34
1. Tóm tắt lý thuyết	34
2. Bài tập và các dạng toán	34
. Dạng 22. Khai triển biểu thức cho trước	34
. Dạng 23. Khai triển biểu thức cho trước	35
. Dạng 24. Khai triển biểu thức cho trước	36
. Dạng 25. Chứng minh tính chia hết	37
3. Bài tập về nhà	39
7. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức .	41
1. Tóm tắt lý thuyết	41
2. Bài tập và các dạng toán	41
. Dạng 26. Phân tích đa thức thành nhân tử	41

. Dạng 27. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách thêm bớt	44
. Dạng 28. Tính nhanh biểu thức	46
. Dạng 29. Tìm x thỏa mãn điều kiện cho trước.....	47
. Dạng 30. Chứng minh các bài toán về số học.....	48
3. Bài tập về nhà	48
8. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử	52
1. Tóm tắt lý thuyết	52
2. Bài tập và các dạng toán.....	52
. Dạng 31. Phân tích đa thức thành nhân tử.....	52
. Dạng 32. Tính giá trị của biểu thức cho trước.....	55
. Dạng 33. Tìm giá trị của ẩn thỏa mãn đẳng thức cho trước.....	56
. Dạng 34. Chứng minh tính chia hết	58
3. Bài tập về nhà	60
9. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp ..	64
1. Tóm tắt lý thuyết	64
2. Bài tập và các dạng toán.....	64
. Dạng 35. Phân tích đa thức thành nhân tử.....	64
. Dạng 36. Tính giá trị của biểu thức cho trước.....	65
. Dạng 37. Tìm giá trị của ẩn thỏa mãn đẳng thức cho trước.....	67
. Dạng 38. Chứng minh tính chia hết	68
3. Bài tập về nhà	69
10. Chia đơn thức cho đơn thức	73
1. Tóm tắt lý thuyết	73
2. Bài tập và các dạng toán.....	73
. Dạng 39. Thu gọn biểu thức	73
. Dạng 40. Tính giá trị của biểu thức	74
. Dạng 41. Tìm giá trị của ẩn thỏa mãn đẳng thức cho trước.....	75
. Dạng 42. Chứng minh tính chia hết	77
3. Bài tập về nhà	78
11. Chia đa thức cho đơn thức.....	81
1. Tóm tắt lý thuyết	81

2. Bài tập và các dạng toán	81
. Dạng 43. Xét xem đa thức A có chia hết cho đơn thức B hay không	81
. Dạng 44. Thực hiện phép tính chia	82
. Dạng 45. Bài toán chia đa thức cho đơn thức áp dụng hằng đẳng thức	83
. Dạng 46. Tìm giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán	85
3. Bài tập về nhà	85
12. Chia đa thức một biến đã sắp xếp	88
1. Tóm tắt lý thuyết	88
2. Bài tập và các dạng toán	89
. Dạng 47. Thực hiện phép tính chia	89
. Dạng 48. Tìm giá trị chưa biết thỏa mãn yêu cầu bài toán	93
3. Bài tập về nhà	97
13. Ôn tập chương 1	101
1. Tóm tắt lý thuyết	101
2. Bài tập và các dạng toán	101
3. Bài tập về nhà	107
Chương 2. Phân thức đại số	118
1. Phân thức đại số	118
1. Tóm tắt lý thuyết	118
2. Bài tập và các dạng toán	119
. Dạng 49. Chứng minh đẳng thức	119
. Dạng 50. Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức cho trước	120
. Dạng 51. Chứng minh đẳng thức có điều kiện	122
3. Bài tập về nhà	122
2. Tính chất cơ bản của phân thức	124
1. Tóm tắt lý thuyết	124
2. Bài tập và các dạng toán	124
. Dạng 52. Tính giá trị của phân thức	124
. Dạng 53. Biến đổi phân thức theo yêu cầu	126
. Dạng 54. Chứng minh cặp phân thức bằng nhau	128
. Dạng 55. Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức cho trước	128

3. Bài tập về nhà.....	131
3. Rút gọn phân thức	134
1. Tóm tắt lý thuyết.....	134
2. Các dạng bài tập.....	134
. Dạng 56. Rút gọn phân thức.....	134
. Dạng 57. Chứng minh đẳng thức.....	136
3. Bài tập về nhà.....	137
4. Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức	139
1. Tóm tắt lý thuyết.....	139
2. Bài tập và các dạng toán.....	139
3. Bài tập về nhà.....	144
5. Phép cộng các phân thức đại số.....	146
1. Tóm tắt lý thuyết.....	146
2. Bài tập và các dạng toán.....	146
. Dạng 58. Cộng các phân thức đại số thông thường	146
. Dạng 59. Cộng các phân thức đại số kết hợp quy tắc đổi dấu.....	148
. Dạng 60. Rút gọn phân thức và tính giá trị biểu thức đó.....	151
. Dạng 61. Bài toán thực tế	152
3. Bài tập về nhà.....	153
6. Phép trừ các phân thức đại số	156
1. Tóm tắt lý thuyết.....	156
2. Bài tập và các dạng toán.....	156
. Dạng 62. Áp dụng phép trừ hai phân thức để thực hiện phép tính.....	156
. Dạng 63. Tìm phân thức thỏa mãn yêu cầu	157
. Dạng 64. Phân tích một phân thức thành tổng (hiệu) của các phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất	158
. Dạng 65. Bài toán thực tế	160
3. Bài tập về nhà.....	162
7. Phép nhân các phân thức đại số	165
1. Tóm tắt lý thuyết.....	165
2. Bài tập và các dạng toán.....	165



. Dạng 66. Áp dụng phép nhân hai phân thức để thực hiện phép tính.....	165
. Dạng 67. Rút gọn biểu thức kết hợp nhiều quy tắc đã học.....	166
3. Bài tập về nhà.....	168
8. Phép chia các phân thức đại số.....	171
1. Tóm tắt lý thuyết.....	171
2. Bài tập và các dạng toán.....	171
. Dạng 68. Sử dụng quy tắc chia để thực hiện phép tính.....	171
. Dạng 69. Tìm phân thức thỏa mãn đẳng thức cho trước.....	173
3. Bài tập về nhà.....	173
9. Biến đổi biểu thức hữu tỉ. Giá trị của phân thức.....	175
1. Tóm tắt lý thuyết.....	175
2. Bài tập và các dạng toán.....	175
. Dạng 70. Biến đổi biểu thức hữu tỷ thành phân thức.....	175
. Dạng 71. Tìm điều kiện xác định của phân thức.....	176
. Dạng 72. Thực hiện phép tính với các biểu thức hữu tỉ.....	177
. Dạng 73. Tìm x để giá trị của một phân thức đã cho thỏa mãn điều kiện cho trước.....	179
3. Bài tập về nhà.....	181
10. Ôn tập chương II (phần 1).....	184
1. Tóm tắt lý thuyết.....	184
2. Bài tập và các dạng toán.....	184
3. Bài tập về nhà.....	187
11. Ôn tập chương II (phần 2).....	191
1. Tóm tắt lý thuyết.....	191
2. Bài tập và các dạng toán.....	191
3. Bài tập về nhà.....	193
Chương 3. Phương trình bậc nhất một ẩn.....	196
1. Mở đầu về phương trình.....	196
1. Tóm tắt lý thuyết.....	196
2. Bài tập và các dạng toán.....	196
. Dạng 74. Xét xem một số cho trước có là nghiệm của phương trình hay không?	196

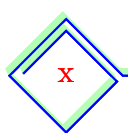
. Dạng 75. Xét sự tương đương của hai phương trình	198
3. Bài tập về nhà.....	200
2. Phương trình bậc nhất một ẩn và cách giải.....	202
1. Tóm tắt lý thuyết.....	202
2. Bài tập và các dạng toán.....	202
. Dạng 76. Nhận dạng phương trình bậc nhất một ẩn.....	202
. Dạng 77. Tìm điều kiện của tham số để phương trình là phương trình bậc nhất một ẩn.....	203
. Dạng 78. Cách giải phương trình bậc nhất một ẩn.....	204
3. Bài tập về nhà.....	210
3. Phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$	214
1. Tóm tắt lý thuyết.....	214
2. Bài tập và các dạng toán.....	214
. Dạng 79. Sử dụng các phép biến đổi thường gặp để giải một số phương trình đơn giản	214
. Dạng 80. Phương trình có chứa tham số.....	218
. Dạng 81. Tìm điều kiện để biểu thức chứa ẩn ở mẫu xác định	220
. Dạng 82. Một số bài toán đưa về giải phương trình bậc nhất một ẩn	221
3. Bài tập về nhà.....	223
4. Phương trình tích.....	228
1. Tóm tắt lý thuyết.....	228
2. Các dạng toán	228
. Dạng 83. Giải phương trình tích	228
. Dạng 84. Giải phương trình đưa về phương trình tích	230
3. Bài tập về nhà.....	235
5. Phương trình chứa ẩn ở mẫu.....	238
1. Tóm tắt lý thuyết.....	238
2. Các dạng toán	238
. Dạng 85. Tìm điều kiện xác định của biểu thức	238
. Dạng 86. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu	239
3. Bài tập về nhà.....	243
6. Giải bài toán bằng cách lập phương trình	246

1. Tóm tắt lý thuyết	246
2. Các dạng toán	246
. Dạng 87. Bài toán liên quan đến tìm số	246
. Dạng 88. Bài toán liên quan đến tỉ số phần trăm	248
. Dạng 89. Bài toán liên quan đến tỉ số phần trăm	249
. Dạng 90. Bài toán liên quan đến công việc làm chung, làm riêng	250
. Dạng 91. Bài toán liên quan đến tính tuổi	251
3. Bài tập về nhà	251
Chương 4. Bất phương trình	254
1. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng	254
1. Tóm tắt lý thuyết	254
2. Bài tập và các dạng toán	255
. Dạng 92. Sắp xếp thứ tự các số trên trục số. Biểu diễn mối quan hệ giữa các tập số	255
. Dạng 93. Xét tính đúng sai của khẳng định cho trước.	256
. Dạng 94. So sánh	257
3. Bài tập về nhà	258
2. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân	260
1. Tóm tắt lý thuyết	260
2. Bài tập và các dạng toán	260
. Dạng 95. Xét tính đúng sai của khẳng định cho trước.	260
. Dạng 96. So sánh.	261
3. Bài tập về nhà	263
3. Bất phương trình một ẩn	264
1. Tóm tắt lý thuyết	264
2. Bài tập và các dạng toán	265
. Dạng 97. Kiểm tra $x = a$ có là nghiệm của bất phương trình hay không?	265
. Dạng 98. Viết bằng kí hiệu tập hợp và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình trên trục số.	266
3. Bài tập về nhà	267
4. Bất phương trình bậc nhất một ẩn	269
1. Tóm tắt lý thuyết	269

2. Các dạng toán	269
. Dạng 99. Nhận dạng bất phương trình bậc nhất một ẩn	269
. Dạng 100. Giải bất phương trình	270
. Dạng 101. Biểu diễn tập nghiệm trên trục số	273
. Dạng 102. Bất phương trình tương đương	276
. Dạng 103. Giải bài toán bằng cách lập phương trình	277
3. Bài tập về nhà	278
5. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối	282
1. Tóm tắt lý thuyết	282
2. Các dạng toán	282
. Dạng 104. Rút gọn biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối	282
. Dạng 105. Giải các phương trình chứa giá trị tuyệt đối	283
3. Bài tập về nhà	293
6. Ôn tập chương IV	297
1. Tóm tắt lý thuyết	297
2. Bài tập	297
3. Bài tập về nhà	302

Phần II Hình học

Chương 1. Tứ giác	306
1. Tứ giác	306
1. Tóm tắt lý thuyết	306
2. Bài tập và các dạng toán	306
. Dạng 1. Tính số đo góc	306
. Dạng 2. Dạng toán chứng minh hình học	309
3. Bài tập về nhà	310
2. Hình thang	312
1. Tóm tắt lý thuyết	312
2. Bài tập và các dạng toán	312
. Dạng 3. Tính số đo góc của hình thang	312
. Dạng 4. Chứng minh tứ giác là hình thang	313



. Dạng 5. Chứng minh các tính chất hình học.....	314
3. Bài tập về nhà.....	316
3. Hình thang cân.....	318
1. Tóm tắt lý thuyết.....	318
2. Bài tập và các dạng toán.....	318
. Dạng 6. Tính số đo các góc, chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau, các góc bằng nhau.....	318
. Dạng 7. Chứng minh hình thang cân.....	321
3. Bài tập về nhà.....	322
4. Đường trung bình của tam giác, của hình thang.....	324
1. Tóm tắt lý thuyết.....	324
2. Bài tập và các dạng toán.....	324
. Dạng 8. Sử dụng định nghĩa và các định lý về đường trung bình trong tam giác để chứng minh một tính chất hình học.....	324
. Dạng 9. Sử dụng định nghĩa và các định lý về đường trung bình trong hình thang để chứng minh một tính chất hình học.....	326
3. Bài tập về nhà.....	328
5. Đối xứng trục.....	331
1. Tóm tắt lý thuyết.....	331
2. Bài tập và các dạng toán.....	332
. Dạng 10. Nhận biết và thực hành vẽ các hình có đối xứng trục.....	332
. Dạng 11. Chứng minh hai điểm hoặc hai hình đối xứng nhau qua một đường thẳng.....	333
. Dạng 12. Sử dụng tính chất đối xứng trục để giải toán.....	334
3. Bài tập về nhà.....	336
6. Hình bình hành.....	337
1. Tóm tắt lý thuyết.....	337
2. Bài tập và các dạng toán.....	338
. Dạng 13. Sử dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh tính chất hình học.....	338
. Dạng 14. Chứng minh tứ giác là hình bình hành.....	339
. Dạng 15. Ba điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy.....	340
3. Bài tập về nhà.....	341

7. Đối xứng tâm.....	344
1. Tóm tắt lý thuyết.....	344
2. Bài tập và các dạng toán.....	344
. Dạng 16. Chứng minh hai điểm hoặc hai hình đối xứng với nhau qua một điểm	344
. Dạng 17. Sử dụng tính chất đối xứng để giải toán.....	345
3. Bài tập về nhà.....	346
8. Hình chữ nhật.....	349
1. Tóm tắt lý thuyết.....	349
2. Bài tập và các dạng toán.....	350
. Dạng 18. Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật.....	350
. Dạng 19. Sử dụng định lý thuận và đảo của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông.....	350
. Dạng 20. Sử dụng tính chất hình chữ nhật để tính độ dài đoạn thẳng.....	352
. Dạng 21. Tìm điều kiện để tứ giác là hình chữ nhật.....	353
3. Bài tập về nhà.....	355
9. Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.....	358
1. Bài tập và các dạng toán.....	358
. Dạng 22. Phát biểu cơ bản về tập hợp điểm.....	358
. Dạng 23. Sử dụng tập hợp các điểm để chứng minh các quan hệ hình học..	361
2. Bài tập về nhà.....	362
10. Hình thoi.....	364
1. Tóm tắt lý thuyết.....	364
2. Bài tập và các dạng toán.....	365
. Dạng 24. Chứng minh tứ giác là hình thoi.....	365
. Dạng 25. Vận dụng tính chất của hình thoi để tính toán và chứng minh các tính chất hình học.....	365
. Dạng 26. Tìm điều kiện để tứ giác là hình thoi.....	367
3. Bài tập về nhà.....	369
11. Hình vuông.....	371
1. Tóm tắt lý thuyết.....	371
2. Bài tập và các dạng toán.....	372

. Dạng 27. Chứng minh tứ giác là hình vuông	372
. Dạng 28. Vận dụng tính chất của hình vuông để chứng minh các tính chất hình học	373
. Dạng 29. Tìm điều kiện để tứ giác là hình vuông	374
3. Bài tập về nhà	375
12. Ôn tập chương 1	378
1. Bài tập và các dạng toán	378
2. Tóm tắt lý thuyết	378
3. Bài tập luyện tập	378
4. Bài tập về nhà	383
Chương 2. Đa giác. Diện tích đa giác	386
1. Đa giác. Đa giác đều	386
1. Tóm tắt lý thuyết	386
2. Bài tập và các dạng toán	386
3. Bài tập về nhà	389
2. Diện tích hình chữ nhật	392
1. Tóm tắt lý thuyết	392
2. Bài tập và các dạng toán	393
. Dạng 30. Tính diện tích hình chữ nhật	393
. Dạng 31. Diện tích hình vuông, diện tích tam giác vuông	395
3. Bài tập về nhà	396
3. Diện tích tam giác	398
1. Tóm tắt lý thuyết	398
2. Bài tập và các dạng toán	398
. Dạng 32. Tính toán, chứng minh hệ thức về diện tích tam giác	398
. Dạng 33. Sử dụng công thức tính diện tích để tính độ dài đoạn thẳng. Chứng minh hệ thức hình học	400
3. Bài tập về nhà	401
4. Diện tích hình thang	404
1. Tóm tắt lý thuyết	404
2. Bài tập và các dạng toán	404
. Dạng 34. Tính diện tích hình thang	404

. Dạng 35. Tính diện tích hình bình hành.....	406
3. Bài tập về nhà.....	407
5. Diện tích hình thoi	410
1. Tóm tắt lý thuyết.....	410
2. Bài tập và các dạng toán.....	410
3. Bài tập về nhà.....	412
6. Diện tích đa giác	414
1. Tóm tắt lý thuyết.....	414
2. Bài tập và các dạng toán.....	414
3. Bài tập về nhà.....	416
7. Ôn tập chương II.....	417
1. Tóm tắt lý thuyết.....	417
2. Bài tập và các dạng toán.....	417
3. Bài tập về nhà.....	420
Chương 3. Tam giác đồng dạng.....	422
1. Định lý Ta-lét	422
1. Tóm tắt lý thuyết.....	422
2. Bài tập và các dạng toán.....	423
. Dạng 36. Viết tỉ số các cặp đoạn thẳng hoặc tính tỉ số của hai đoạn thẳng..	423
. Dạng 37. Sử dụng định lý Ta-lét để tính độ dài đoạn thẳng hoặc chứng minh đoạn thẳng tỉ lệ.....	424
3. Bài tập về nhà.....	426
2. Định lý đảo và hệ quả của định lý Ta-lét.....	428
1. Tóm tắt lý thuyết.....	428
2. Bài tập và các dạng toán.....	429
. Dạng 38. Sử dụng hệ quả của định lý Ta-lét để tính độ dài đoạn thẳng.....	429
. Dạng 39. Sử dụng định lý Ta-lét đảo để chứng minh các đường thẳng song song	430
. Dạng 40. Sử dụng hệ quả định lý Ta-lét để chứng minh các hệ thức, các đoạn thẳng bằng nhau.....	431
3. Bài tập về nhà.....	433
3. Tính chất của đường phân giác của tam giác.....	436

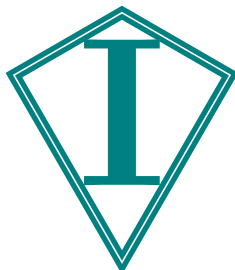
1. Tóm tắt lý thuyết.....	436
2. Bài tập và các dạng toán.....	436
. Dạng 41. Sử dụng tính chất đường phân giác của tam giác để tính độ dài đoạn thẳng.....	436
. Dạng 42. Sử dụng tính chất đường phân giác của tam giác để tính tỉ số, chứng minh các hệ thức, các đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng song song.....	438
3. Bài tập về nhà.....	440
4. Khái niệm hai tam giác đồng dạng.....	443
1. Tóm tắt lý thuyết.....	443
2. Bài tập và các dạng toán.....	444
. Dạng 43. Chứng minh hai tam giác đồng dạng.....	444
. Dạng 44. Tìm tỉ số đồng dạng, tính độ dài cạnh, chứng minh đẳng thức cạnh thông qua tam giác đồng dạng.....	444
3. Bài tập về nhà.....	447
5. Trường hợp đồng dạng thứ nhất.....	449
1. Tóm tắt lý thuyết.....	449
2. Bài tập và các dạng toán.....	449
. Dạng 45. Chứng minh hai tam giác đồng dạng.....	449
. Dạng 46. Sử dụng trường hợp đồng dạng thứ nhất để tính độ dài các cạnh hoặc chứng minh các góc bằng nhau.....	451
3. Bài tập về nhà.....	452
6. Trường hợp đồng dạng thứ hai.....	453
1. Tóm tắt lý thuyết.....	453
2. Bài tập và các dạng toán.....	453
. Dạng 47. Chứng minh hai tam giác đồng dạng.....	453
. Dạng 48. Sử dụng trường hợp đồng dạng thứ hai để tính độ dài cạnh hoặc chứng minh các góc bằng nhau.....	454
3. Bài tập về nhà.....	456
7. Trường hợp đồng dạng thứ ba.....	458
1. Tóm tắt lý thuyết.....	458
2. Bài tập và các dạng toán.....	458
. Dạng 49. Chứng minh hai tam giác đồng dạng.....	458

. Dạng 50. Sử dụng trường hợp đồng dạng thứ ba để tính độ dài các cạnh, chứng minh hệ thức cạnh, hoặc chứng minh các góc bằng nhau.....	459
3. Bài tập về nhà.....	461
8. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông.....	463
1. Tóm tắt lý thuyết.....	463
2. Bài tập và các dạng toán.....	463
. Dạng 51. Chứng minh hai tam giác vuông đồng dạng.....	463
. Dạng 52. Sử dụng trường hợp đồng dạng của tam giác vuông tính độ dài cạnh, chứng minh hệ thức cạnh hoặc chứng minh các góc bằng nhau.....	464
. Dạng 53. Tỷ số diện tích của hai tam giác đồng dạng.....	466
3. Bài tập về nhà.....	467
9. ôn tập chương III.....	469
1. Tóm tắt lý thuyết.....	469
2. Bài tập và các dạng toán.....	469
3. Bài tập về nhà.....	472
4. Đề kiểm tra chương III.....	474
Chương 4. Hình lăng trụ đứng. Hình chóp đều.....	479
1. Hình hộp chữ nhật.....	479
1. Tóm tắt lý thuyết.....	479
2. Bài tập và các dạng toán.....	480
. Dạng 54. Nhận biết các đỉnh, các cạnh và các mặt của hình hộp chữ nhật ..	480
. Dạng 55. Nhận biết vị trí tương đối của hai đường thẳng, của đường thẳng với mặt phẳng và của hai mặt phẳng của hình hộp chữ nhật	482
. Dạng 56. Tính toán các số liệu liên quan đến cạnh, mặt của hình hộp chữ nhật	484
3. Bài tập về nhà.....	486
2. Thể tích của hình hộp chữ nhật.....	488
1. Tóm tắt lý thuyết.....	488
2. Bài tập và các dạng toán.....	488
. Dạng 57. Nhận biết quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong hình hộp chữ nhật	488
. Dạng 58. Tính thể tích hình hộp chữ nhật và các bài toán liên quan đến cạnh và mặt của hình hộp chữ nhật	489

3. Bài tập về nhà.....	492
3. Hình lăng trụ đứng.....	494
1. Tóm tắt lý thuyết.....	494
2. Bài tập và các dạng toán.....	495
. Dạng 59. Xác định các đỉnh, các cạnh, các mặt và mối quan hệ giữa các cạnh với nhau của hình lăng trụ đứng.....	495
. Dạng 60. Tính độ dài các cạnh và các đoạn thẳng khác trong hình lăng trụ đứng.....	497
3. Bài tập về nhà.....	499
4. Diện tích xung quanh và thể tích hình lăng trụ đứng.....	503
1. Tóm tắt lý thuyết.....	503
2. Bài tập và các dạng toán.....	503
. Dạng 61. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ đứng.....	503
. Dạng 62. Một số bài toán thực tế trong cuộc sống liên quan đến lăng trụ đứng.....	505
3. Bài tập về nhà.....	506
5. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều.....	511
1. Tóm tắt lý thuyết.....	511
2. Bài tập và các dạng toán.....	512
. Dạng 63. Nhận biết các kiến thức cơ bản hình chóp đều.....	512
. Dạng 64. Tính độ dài các cạnh của hình chóp đều.....	513
3. Bài tập về nhà.....	515
6. Diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp đều.....	517
1. Tóm tắt lý thuyết.....	517
2. Bài tập và các dạng toán.....	517
. Dạng 65. Các bài toán về diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp đều.....	517
. Dạng 66. Các bài toán cơ bản về mối quan hệ giữa hình lập phương, hình hộp chữ nhật với hình chóp đều.....	520
3. Bài tập về nhà.....	521
7. Ôn tập chương 4.....	523
1. Tóm tắt lý thuyết.....	523

2. Bài tập và các dạng toán.....	523
3. Bài tập về nhà.....	526
8. Đề kiểm tra chương 4.....	528
1. Đề số 1	528
2. Đề số 2	531

Phần



Đại số

Chương 1

Phép nhân và phép chia đa thức

§1 Nhân đơn thức với đa thức

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1. Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

Ta có $A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Ví dụ $3x \cdot (2x^3 - x + 1) = 3x \cdot 2x^3 + 3x \cdot (-x) + 3x \cdot 1 = 6x^4 - 3x^2 + 3x$.

Vậy $3x \cdot (2x^3 - x + 1) = 6x^4 - 3x^2 + 3x$.

 **1.** Ta thường sử dụng các phép toán liên quan đến lũy thừa sau khi thực hiện phép nhân:

- $a^0 = 1$ với $a \neq 0$;
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- $a^m : a^n = a^{m-n}$ với $m \geq n$;
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

với m, n là số tự nhiên.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 1. Làm phép tính nhân đơn thức với đa thức

Sử dụng quy tắc nhân đơn thức với đa thức và các phép toán liên quan đến lũy thừa.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Thực hiện phép tính

a) $M = 2x^2(1 - 3x + 2x^2)$;

b) $N = (2x^2 - 3x + 4) \cdot \left(\frac{-1}{2}x\right)$;

c) $P = \frac{1}{2}xy(-x^3 + 2xy - 4y^2)$.

 Lời giải.

a) $M = 2x^2 - 6x^3 + 4x^4.$

b) $N = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x.$

c) $P = -\frac{1}{2}x^4y + x^2y^2 - 2xy^3.$

□

 Ví dụ 2. Làm tính nhân

a) $M = 2x^3(x^2 - 2x + 1);$

b) $N = (2x^3 - 4x - 8) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right);$

c) $P = x^2y \cdot \left(xy^2 - x^2 - \frac{1}{2}y^3\right).$

 Lời giải.

a) $M = 2x^5 - 4x^4 + 2x^3.$

b) $N = x^4 - 2x^2 - 4x.$

c) $P = x^3y^3 - x^4y - \frac{1}{2}x^2y^4.$

□

 Ví dụ 3. Nhân đơn thức A với đa thức B biết rằng $A = \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2$ và $B = 4x^2 + 4xy^2 - 3.$

 Lời giải.

Ta có $A \cdot B = \frac{1}{4}x^4y^2 \cdot (4x^2 + 4xy^2 - 3) = x^6y^2 + x^5y^4 - \frac{3}{4}x^4y^2.$

□

 Ví dụ 4. Nhân đa thức A với đơn thức B biết rằng $A = \frac{1}{4}x^3y + \frac{-1}{2}x^2 - y^3$ và $B = (-2xy)^2.$

 Lời giải.

Ta có $A \cdot B = \left(\frac{1}{4}x^3y + \frac{-1}{2}x^2 - y^3\right) \cdot 4x^2y^2 = x^5y^3 - 2x^4y^2 - 4x^2y^5$

□

 Dạng 2. Sử dụng phép nhân đơn thức với đa thức, rút gọn biểu thức cho trước

Thực hiện theo hai bước

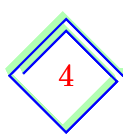
- ☒ Sử dụng quy tắc nhân đơn thức với đa thức để phá ngoặc;
- ☒ Nhóm các đơn thức đồng dạng và rút gọn biểu thức đã cho.

 BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau

1. $M = 2x(-3x + 2x^3) - x^2(3x^2 - 2) - (x^2 - 4)x^2;$

ĐS: $M = 0$



2. $N = x(y^2 - x) - y(yx - x^2) - x(xy - x - 1).$

ĐS: $N = x$

Lời giải.

1. Ta có $M = -6x^2 + 4x^4 - 3x^4 + 2x^2 - x^4 + 4x^2 = 0.$

2. Ta có $N = xy^2 - x^2 - y^2x + x^2y - x^2y + x^2 + x = x.$

□

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau

1. $A = 3x^2(6x^2 + 1) - 9x(2x^3 - x);$

ĐS: $A = 12x^2$

2. $B = x^2(x - 2y) + 2xy(x - y) + \frac{1}{3}y^2(6x - 3y).$

ĐS: $B = x^3 - y^3$

Lời giải.

1. $A = 18x^4 + 3x^2 - 18x^4 + 9x^2 = 12x^2.$

2. $B = x^3 - 2x^2y + 2x^2y - 2xy^2 + 2xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$

□

Dạng 3. Tính giá trị của biểu thức cho trước

Thực hiện theo hai bước

☒ Rút gọn biểu thức đã cho;☒ Thay các giá trị của biến vào biểu thức sau khi đã rút gọn ở bước 1. **BÀI TẬP MẪU** **Ví dụ 1.** Tính giá trị của biểu thức

1. $P = 2x^3 - x(3 + x^2) - x(x^2 - x - 3)$ tại $x = 10;$

ĐS: $P = 100$

2. $Q = x^2(x - y + y^2) - x(xy^2 + x^2 - xy - y)$ tại $x = 5$ và $y = 20.$

ĐS: $Q = 100$

Lời giải.

1. Rút gọn được $P = x^2$, thay $x = 10$ ta được $P = 100.$

2. Rút gọn được $Q = xy$, thay $x = 5$ và $y = 20$ ta được $Q = 100.$

□

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức

1. $M = 2x^2(x^2 - 5) + x(-2x^3 + 4x) + (6 + x)x^2$ tại $x = -4;$

ĐS: $M = -64$

2. $N = x^3(y + 1) - xy(x^2 - 2x + 1) - x(x^2 + 2xy - 3y)$ tại $x = 8$ và $y = -5.$

ĐS: $Q = -80$

Lời giải.

1. Rút gọn được $M = x^3$, thay $x = -4$ ta được $P = -64$.
2. Rút gọn được $N = 2xy$, thay $x = 8$ và $y = -5$ ta được $Q = -80$.

□

Dạng 4. Tìm x biết x thỏa mãn điều kiện cho trước

Thực hiện theo hai bước

- B1. Sử dụng quy tắc nhân đơn thức với đa thức để phá ngoặc;
- B2. Nhóm các đơn thức đồng dạng và rút gọn biểu thức ở hai vế để tìm x .

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x , biết $3x(1 - 4x) + 6x(2x - 1) = 9$.

ĐS: $x = -3$

 **Lời giải.**

Biến đổi phương trình thành: $3x - 12x^2 + 12x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow -3x = 9 \Leftrightarrow x = -3$.

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết $3x(2 - 8x) - 12x(1 - 2x) = 6$.

ĐS: $x = -1$

 **Lời giải.**

Biến đổi phương trình thành: $6x - 24x^2 - 12x + 24x^2 = 6 \Leftrightarrow -6x = 6 \Leftrightarrow x = -1$.

□

Dạng 5. Chứng tỏ giá trị biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của biến

Rút gọn biểu thức đã cho và chứng tỏ kết quả đó không phụ thuộc vào biến.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức $Q = 3x(x^3 - x + 4) - \frac{1}{2}x^2(6x^2 - 2) - 2x(6 - x) + 1$ không phụ thuộc vào giá trị của biến x .

 **Lời giải.**

Rút gọn $Q = 1 \Rightarrow Q$ không phụ thuộc vào biến x .

□

 **Ví dụ 2.** Cho biểu thức $P = x^2(1 - 2x^3) + 2x(x^4 - x + 2) + x(x - 4)$. Chứng tỏ giá trị của P không phụ thuộc vào giá trị của x .

 **Lời giải.**

Rút gọn $P = 0 \Rightarrow P$ không phụ thuộc vào biến x .

□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Thực hiện phép tính

a) $A = 2x^2y^2 \left(x^3y^2 - x^2y^3 - \frac{1}{2}y^5 \right);$

b) $B = -\frac{1}{3}xy(3x^3y^2 - 6x^2 + y^2);$

c) $C = \left(-2xy^2 + \frac{2}{3}y^2 + 4xy^2 \right) \cdot \frac{3}{2}xy.$

✍ Lời giải.

a) $A = 2x^5y^4 - 2x^4y^5 - x^2y^7.$

b) $B = -x^4y^3 + 2x^3y - \frac{1}{3}xy^3.$

c) $C = 5x^2y^3 + xy^3.$

□

Bài 2. Làm tính nhân

a) $M = 2x(-3x^3 + 2x - 1);$

b) $N = (x^2 - 3x + 2)(-x^2);$

c) $P = (-xy^2)^2 \cdot (x^2 - 2x + 1).$

✍ Lời giải.

a) $M = -6x^4 + 4x^2 - 2x.$

b) $N = -x^4 + 3x^3 - 2x^2.$

c) $P = x^4y^4 - 2x^3y^4 + x^2y^4.$

□

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

1. $A = (-x)^2(x + 3) - x^2(2 - 3x) - 4x^3;$

ĐS: $A = x^2$

2. $B = x^2(x - y^2) - xy(1 - yx) - x^3;$

ĐS: $B = -xy$

3. $C = x(x + 3y + 1) - 2y(x - 1) - (y + x + 1)x.$

ĐS: $C = 2y$

Bài 4. Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức

1. $P = x(x^2 - y) + y(x - y^2)$ tại $x = -\frac{1}{2}$ và $y = -\frac{1}{2};$

ĐS: $P = 0$

2. $Q = x^2(y^3 - xy^2) + (-y + x + 1)x^2y^2$ tại $x = -10$ và $y = -10.$

ĐS: $Q = 10000$

✍ Lời giải.

1. Rút gọn $P = x^3 - y^3$, thay $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$ ta được $P = 0.$

2. Rút gọn $Q = x^2y^2$, thay $x = -10, y = -10$ ta được $Q = 10000.$

□

Bài 5. Tìm x , biết

1. $2(3x - 2) - 3(x - 2) = -1$; ĐS: $x = -1$
2. $3(3 - 2x^2) + 3x(2x - 1) = 9$; ĐS: $x = 0$
3. $(2x)^2(x - x^2) - 4x(-x^3 + x^2 - 5) = 20$. ĐS: $x = 1$

 **Lời giải.**

1. Biến đổi phương trình thành $6x - 4 - 3x + 6 = -1 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1$.
2. Biến đổi phương trình thành $9 - 6x^2 + 6x^2 - 3x = 9 \Leftrightarrow -3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. Biến đổi phương trình thành $4x^3 - 4x^4 + 4x^4 - 4x^3 + 20x = 20 \Leftrightarrow 20x = 20 \Leftrightarrow x = 1$.

□

 **Bài 6.** Chứng tỏ rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

1. $P = x(3x + 2) - x(x^2 + 3x) + x^3 - 2x + 3$;
2. $Q = x(2x - 3) + 6x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right) + 1$.

 **Lời giải.**

1. Rút gọn $P = 3 \Rightarrow P$ không phụ thuộc vào biến x .
2. Rút gọn $Q = 1 \Rightarrow Q$ không phụ thuộc vào biến x .

□

§2 Nhân đa thức với đa thức

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 2. Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với mỗi hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích lại với nhau.

Ta có

$$(A + B)(C + D) = A(C + D) + B(C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$$

với A, B, C, D là các đơn thức.

Ví dụ

$$(x + 2)(x - 1) = x(x - 1) + 2(x - 1) = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2.$$

Vậy $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 6. Làm phép tính nhân đa thức với đa thức

Sử dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Nhân các đa thức sau

a) $(x - 2)(3x + 5)$; b) $(-2x^2 + x - 1)(x + 2)$; c) $(x - y)(y^2 + xy + x^2)$.

 **Lời giải.**

a) $3x^2 - x - 10$. b) $-2x^3 - 3x^2 + x - 2$. c) $x^3 - y^3$.

□

 **Ví dụ 2.** Thực hiện phép nhân

a) $(x + 1)(x^2 - x)$; b) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$; c) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$.

 **Lời giải.**

a) $x^3 - x$. b) $x^3 + 8$. c) $x^3 - 8y^3$.

□

 **Ví dụ 3.** Tính giá trị của biểu thức

1. $M = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$ tại $x = \frac{-1}{2}$; ĐS: $M = -2$

2. $N = (2x - y^2)(4x^2 + 2xy^2 + y^4)$ tại $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$. ĐS: $N = -63$

 **Lời giải.**

1. Rút gọn $M = 8x^3 - 1$, thay $x = \frac{-1}{2}$ ta được $M = -2$.

2. Rút gọn $N = 8x^3 - y^6$, thay $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$ ta được $N = -63$.

□

 **Ví dụ 4.** Tính giá trị của biểu thức

1. $P = (4x - 3)(4x + 3)$ tại $x = \frac{1}{4}$; ĐS: $P = -8$

2. $Q = (3y + x)(9y^2 - 3xy + x^2)$ tại $x = 3$ và $y = \frac{1}{3}$. ĐS: $Q = 28$

 **Lời giải.**

1. Rút gọn $P = 16x^2 - 9$, thay $x = \frac{1}{4}$ ta được $P = -8$.

2. Rút gọn $Q = 27y^3 + x^3$, thay $x = 3$ và $y = \frac{1}{3}$ ta được $Q = 28$.

□

Dạng 7. Chứng tỏ giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của biến

Thực hiện theo hai bước

B1. Sử dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức;

B2. Áp dụng các quy tắc rút gọn đa thức để thu được kết quả không còn chứa biến.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

$$A = (x - 2)(2x - 1) - (2x - 3)(x - 1) - 2.$$

 **Lời giải.**

Rút gọn $A = -3 \Rightarrow A$ không phụ thuộc vào biến x .

□

 **Ví dụ 2.** Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

$$B = (3 - 2x)(3 + 2x) + (2x - 1)(2x + 1).$$

 Lời giải.

Rút gọn $B = 8 \Rightarrow B$ không phụ thuộc vào biến x . □

 Dạng 8. Tìm x thỏa mãn điều kiện cho trước

Thực hiện theo hai bước

B1. Sử dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức để khai triển;

B2. Nhóm các đơn thức đồng dạng và rút gọn biểu thức ở hai vế để tìm x .

 BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x , biết $(2x + 1)(2x - 3) - (4x + 1)(x + 2) = 8$.

ĐS: $x = -1$

 Lời giải.

Biến đổi phương trình thành $4x^2 - 4x - 3 - 4x^2 - 9x - 2 = 8 \Leftrightarrow -13x = 13 \Leftrightarrow x = -1$. □

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết $(1 - 2x)(3x + 1) + 3x(2x - 1) = 9$.

ĐS: $x = -4$

 Lời giải.

Biến đổi phương trình thành $-6x^2 + x + 1 + 6x^2 - 3x = 9 \Leftrightarrow -2x = 8 \Leftrightarrow x = -4$. □

 Dạng 9. Chứng minh đẳng thức

Thực hiện phép nhân đa thức với đa thức ở vế thứ nhất, sau đó rút gọn đa thức để thu được kết quả như vế còn lại.

 BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh

a) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = 8x^3 - 1$;

b) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4$.

 Lời giải.

1. Ta có $VT = 8x^3 + 4x^2 + 2x - 4x^2 - 2x - 1 = 8x^3 - 1$ (đpcm).

2. Ta có $VT = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4$ (đpcm). □

 **Ví dụ 2.** Chứng minh

a) $(x^2 - 2x + 4)(x + 2) = x^3 + 8$;

b) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.

 Lời giải.

1. Ta có $VT = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + 4x + 8 = x^3 + 8$.

2. Ta có $VT = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$.

Dạng 10. Chứng minh các bài toán về số nguyên

Thực hiện theo 4 bước

- B1. Gọi số phải tìm và đặt điều kiện;
- B2. Biểu diễn các dữ kiện của đề bài theo số phải tìm;
- B3. Áp dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức để tìm ra đáp án của bài toán;
- B4. Kiểm tra điều kiện và kết luận.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 24. **ĐS:** 11; 12; 13

Lời giải.

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp lần lượt là $x; x + 1; x + 2$ ($x \in \mathbb{N}$).
 Tích hai số sau là $(x + 1)(x + 2)$, tích hai số đầu là $x(x + 1)$.
 Vì tích hai số sau lớn hơn hai số trước là 24 nên:

$$(x + 1)(x + 2) - x(x + 1) = 24 \Leftrightarrow 2x = 22 \Leftrightarrow x = 11.$$

Vậy ba số tự nhiên cần tìm là 11; 12; 13.

Ví dụ 2. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết tích của hai số trước lớn hơn tích của hai số sau là 26. **ĐS:** 12; 13; 14

Lời giải.

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp lần lượt là $x; x + 1; x + 2$ ($x \in \mathbb{N}$).
 Tích hai số sau là $(x + 1)(x + 2)$, tích hai số đầu là $x(x + 1)$.
 Vì tích của hai số trước lớn hơn tích của hai số sau là 26 nên:

$$(x + 1)(x + 2) - x(x + 1) = 26 \Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow x = 12.$$

Vậy ba số tự nhiên cần tìm là 12; 13; 14.

Ví dụ 3. Chứng minh $n^2(3 - 2n) - n(3n - 2n^2 - 3)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên n .

Lời giải.

Rút gọn $n^2(3 - 2n) - n(3n - 2n^2 - 3) = 3n$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên n .

Ví dụ 4. Chứng minh $n(1 - 2n) - (n - 1)(5 - 2n) + 1$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

Lời giải.

Rút gọn $n(1 - 2n) - (n - 1)(5 - 2n) + 1 = -6n + 6$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Nhân các đa thức sau

a) $(2x + 3)(x - 2);$

b) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4);$

c) $4\left(x^2 - \frac{1}{2}y\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}y\right).$

 **Lời giải.**

a) $2x^2 - x - 6.$

b) $x^3 + 8.$

c) $4x^4 - y^2.$

□

Bài 2. Cho biểu thức $P = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2(x - 2)(x + 2) - x^2(2 + x)$. Chứng minh giá trị của P không phụ thuộc vào x .

 **Lời giải.**

Rút gọn $P = x^3 - 1 + 2(x^2 - 4) - 2x^2 - x^3 = -9$. Vậy giá trị của P không phụ thuộc vào x . □

Bài 3. Tìm x biết

1. $(x^2 - 2x + 4)(x + 2) - x(x - 1)(x + 1) + 3 = 0;$

ĐS: $x = -11$

2. $(x - 1)(3 - 2x) + (2x - 1)(x + 3) = 4.$

ĐS: $x = 1$

 **Lời giải.**

1. Biến đổi phương trình thành $x^3 + 8 - x^3 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -11.$

2. Biến đổi phương trình thành $3x - 2x^2 - 3 + 2x + 2x^2 + 6x - x - 3 = 4 \Leftrightarrow 10x = 10 \Leftrightarrow x = 1.$

□

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi x, y ta luôn có $(xy + 1)(x^2y^2 - xy + 1) + (x^3 - 1)(1 - y^3) = x^3 + y^3$.

 **Lời giải.**

Ta có $VT = x^3y^3 + 1 + x^3 - x^3y^3 - 1 + y^3 = x^3 + y^3.$

□

Bài 5. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết tích hai số sau lớn hơn hai số trước là 30.
14; 15; 16

ĐS:

 **Lời giải.**

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp lần lượt là $x; x + 1; x + 2$ ($x \in \mathbb{N}$).

Tích hai số sau là $(x + 1)(x + 2)$, tích hai số đầu là $x(x + 1)$.

Vì tích hai số sau lớn hơn hai số trước là 30 nên:

$$(x + 1)(x + 2) - x(x + 1) = 30 \Leftrightarrow 2x = 28 \Leftrightarrow x = 14.$$

Vậy ba số tự nhiên cần tìm là 14; 15; 16. □

Bài 6. Cho biểu thức $Q = (2n - 1)(2n + 3) - (4n - 5)(n + 1) + 3$. Chứng minh Q luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Rút gọn $Q = (2n - 1)(2n + 3) - (4n - 5)(n + 1) + 3 = 5n + 5$ chia hết cho 5 với mọi số nguyên n .

□

§3 Những hằng đẳng thức đáng nhớ (Phần 1)

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Bình phương của một tổng

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Ví dụ $(x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4 = x^2 + 4x + 4.$

1.2 Bình phương của một hiệu

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Ví dụ $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 = x^2 - 6x + 9.$

1.3 Hiệu hai bình phương

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Ví dụ $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2).$

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 11. Thực hiện phép tính

Sử dụng trực tiếp các hằng đẳng thức đã học để khai triển các biểu thức.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

📖 Ví dụ 1. Thực hiện phép tính

a) $(x + 3)^2$; b) $(3x - 1)^2$; c) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - x\right)$; d) $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2$.

✍️ Lời giải.

a) $x^2 + 6x + 9.$ b) $9x^2 - 6x + 1.$ c) $\frac{1}{4} - x^2.$ d) $x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}.$

□

📖 Ví dụ 2. Thực hiện phép tính

a) $(x + 1)^2$; b) $(2x - 1)^2$; c) $(x - 3)(3 + x)$; d) $(x^2 + 2)^2.$

✍️ Lời giải.

- a) $x^2 + 2x + 1$. b) $4x^2 - 4x + 1$. c) $x^2 - 9$. d) $x^4 + 4x^2 + 4$.

□

 **Ví dụ 3.** Khai triển các biểu thức sau

- a) $(2x + 3y)^2$; b) $(xy - 3)^2$;
c) $(2xy - 1)(2xy + 1)$; d) $2\left(\frac{1}{2}x^2 + y\right)(x^2 - 2y)$.

 **Lời giải.**

- a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$. b) $x^2y^2 - 6xy + 9$. c) $4x^2y^2 - 1$. d) $x^4 - 4y^2$.

□

 **Ví dụ 4.** Khai triển các biểu thức sau

- a) $(2x + y)^2$; b) $(2 - xy)^2$;
c) $(3x - 2y)(3x + 2y)$; d) $2\left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)(2x^2 - y)$.

 **Lời giải.**

- a) $4x^2 + 4xy + y^2$ b) $4 - 4xy + x^2y^2$ c) $9x^2 - 4y^2$ d) $4x^4 - y^2$

□

 **Ví dụ 5.** Viết các biểu thức dưới dạng bình phương của một tổng hoặc hiệu

- a) $x^2 + 4x + 4$; b) $4x^2 - 4x + 1$;
c) $x^2 - x + \frac{1}{4}$; d) $4(x + y)^2 - 4(x + y) + 1$.

 **Lời giải.**

- a) $(x + 2)^2$ b) $(2x - 1)^2$ c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ d) $(2x + 2y - 1)^2$

□

 **Ví dụ 6.** Viết các biểu thức dưới dạng bình phương của một tổng hoặc hiệu

- a) $x^2 + 6x + 9$; b) $9x^2 - 6x + 1$;
c) $x^2y^2 + xy + \frac{1}{4}$; d) $(x - y)^2 + 6(x - y) + 9$.

 **Lời giải.**

- a) $(x + 3)^2$. b) $\left(3x - \frac{1}{3}\right)^2$.
c) $\left(xy + \frac{1}{2}\right)^2$. d) $\left(x - y + 3\right)^2$.

□

Ví dụ 7. Điền các đơn thức vào chỗ “...” để hoàn thành các hằng đẳng thức sau

- a) $x^2 + 6x + \dots = (x + \dots)^2$; b) $4x^2 - 4x + \dots = (2x - \dots)^2$;
c) $9x^2 - \dots + \dots = (3x - 2y)^2$; d) $(x - \dots) \left(\dots + \frac{y}{3} \right) = \dots - \frac{y^2}{9}$.

Lời giải.

- a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$. b) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.
c) $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2$. d) $\left(x - \frac{y}{3}\right) \left(x + \frac{y}{3}\right) = x^2 - \frac{y^2}{9}$.

□

Ví dụ 8. Hoàn thiện các hằng đẳng thức sau

- a) $\dots - 10x + 25 = (x - \dots)^2$; b) $\dots - 4x^2 + x^4 = (\dots - x^2)^2$;
c) $x^2 - \dots + 9y^2 = (x - \dots)^2$; d) $(2x + \dots)(\dots - y^2) = 4x^2 - y^4$.

Lời giải.

- a) $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. b) $4 - 4x^2 + x^4 = (2 - x^2)^2$.
c) $x^2 - 6xy + 9y^2 = (x - 3y)^2$. d) $(2x + y^2)(2x - y^2) = 4x^2 - y^4$.

□

Dạng 12. Chứng minh các đẳng thức, rút gọn biểu thức

Áp dụng các hằng đẳng thức một cách linh hoạt trong các phép biến đổi.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Chứng minh các đẳng thức sau

- a) $(a^2 - 1)^2 + 4a^2 = (a^2 + 1)^2$. b) $(x - y)^2 + (x + y)^2 + 2(x^2 - y^2) = 4x^2$.

Lời giải.

1. Ta có $VT = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2$.
2. Ta có $VT = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 + 2xy + y^2) + 2x^2 - 2y^2 = 4x^2$.

□

Ví dụ 2. Chứng minh các đẳng thức sau

- a) $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$; b) $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$.

Lời giải.

1. Ta có $VP = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$;
2. Ta có $VT = (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2) = 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2)$.

□

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau

$$1. M = (x + 3y)^2 - (x - 3y)^2;$$

$$\text{ĐS: } M = 12xy$$

$$2. Q = (x - y)^2 - 4(x - y)(x + 2y) + 4(x + 2y)^2.$$

$$\text{ĐS: } Q = (-x - 5y)^2$$

Lời giải.

$$1. M = x^2 + 6xy + 9y^2 - x^2 + 6xy - 9y^2 = 12xy.$$

$$2. Q = (x - y - 2x - 4y)^2 = (-x - 5y)^2.$$

□

Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức

$$1. A = (2x + y)^2 - (2x - y)^2;$$

$$\text{ĐS: } M = 8xy$$

$$2. B = (x - 2y)^2 - 4(x - 2y)y + 4y^2.$$

$$\text{ĐS: } Q = x^2 - 8xy + 16y^2$$

Lời giải.

$$1. A = 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x^2 + 2xy - y^2 = 8xy.$$

$$2. B = (x - 2y - 2y)^2 = x^2 - 8xy + 16y^2.$$

□

Ví dụ 5. Khai triển các biểu thức sau

$$1. A = (x + y + z)^2;$$

$$\text{ĐS: } A = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$2. B = (a - b - c)^2.$$

$$\text{ĐS: } B = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

Lời giải.

$$1. A = (x + y)^2 + 2x(x + y) + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx.$$

$$2. B = (a - b)^2 - 2c(a - b) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc.$$

□

Ví dụ 6. Khai triển các biểu thức sau

$$1. C = (x + y - z)^2;$$

$$\text{ĐS: } C = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx$$

$$2. D = (a + 1 - b)^2.$$

$$\text{ĐS: } D = a^2 + 1 + b^2 + 2a - 2ab - 2b$$

Lời giải.

$$1. C = (x + y)^2 - 2z(x + y) + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx.$$

$$2. D = (a + 1)^2 - 2b(a + 1) + b^2 = a^2 + 1 + b^2 + 2a - 2ab - 2b.$$

□

Dạng 13. Tính nhanh

Áp dụng linh hoạt các hằng đẳng thức cho các số tự nhiên.

BÀI TẬP MẪU

Giáo viên:

 Ví dụ 1. Tính nhanh

- a) 501^2 ; **ĐS:** 251001 b) $88^2 + 24 \cdot 88 + 12^2$; **ĐS:** 10000
c) $52 \cdot 48$. **ĐS:** 2496

 Lời giải.

1. $501^2 = (500 + 1)^2 = 500^2 + 2 \cdot 500 \cdot 1 + 1 = 251001$.
2. $88^2 + 24 \cdot 88 + 12^2 = (88 + 12)^2 = 100^2 = 10000$.
3. $52 \cdot 48 = (50 + 2)(50 - 2) = 50^2 - 2^2 = 2496$.

□

 Ví dụ 2. Tính nhanh

- a) 101^2 ; **ĐS:** 10201 b) $75^2 - 50 \cdot 75 + 25^2$; **ĐS:** 2500
c) $103 \cdot 97$. **ĐS:** 9991

 Lời giải.

1. $101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1 = 10201$.
2. $75^2 - 50 \cdot 75 + 25^2 = (75 - 25)^2 = 50^2 = 2500$.
3. $103 \cdot 97 = (100 + 3)(100 - 3) = 100^2 - 3^2 = 9991$.

□

 Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức $P = 9x^2 - 12x + 4$ trong mỗi trường hợp sau

- a) $x = 34$; **ĐS:** $P = 10000$ b) $x = \frac{2}{3}$; **ĐS:** $P = 0$
c) $x = \frac{-8}{3}$. **ĐS:** $P = 100$

 Lời giải.

Ta có $P = 9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$ nên

1. Thay $x = 34$ ta được $P = 100^2 = 10000$.
2. Thay $x = \frac{2}{3}$ ta được $P = 0$.
3. Thay $x = \frac{-8}{3}$ ta được $P = (-10)^2 = 100$.

□

 Ví dụ 4. Tính giá trị của biểu thức $Q = 9x^2 + 6x + 1$ trong mỗi trường hợp sau

- a) $x = 33$; **ĐS:** $Q = 10000$ b) $x = \frac{-1}{3}$; **ĐS:** $Q = 0$

c) $x = \frac{-11}{3}$.

ĐS: $Q = 100$

 **Lời giải.**Ta có $Q = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$ nên

1. Thay $x = 33$ ta được $Q = 100^2 = 10000$.
2. Thay $x = \frac{-1}{3}$ ta được $Q = 0$.
3. Thay $x = \frac{-11}{3}$ ta được $Q = (-10)^2 = 100$.

□

Dạng 14. Chứng minh bất đẳng thức; tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thứcSử dụng các hằng đẳng thức và chú ý rằng $A^2 \geq 0$ và $-A^2 \leq 0$ với A là một biểu thức bất kỳ**BÀI TẬP MẪU** **Ví dụ 1.** Chứng minh

1. Biểu thức $4x^2 - 4x + 3$ luôn dương với mọi x .
2. Biểu thức $y - y^2 - 1$ luôn âm với mọi y .

 **Lời giải.**

1. Ta có $4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2 > 0 \forall x$.
2. Ta có $y - y^2 - 1 = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} < 0 \forall x$.

□

 **Ví dụ 2.** Chứng tỏ

- a) $x^2 - 6x + 10 > 0$ với mọi x ; b) $4y - y^2 - 5 < 0$ với mọi y .

 **Lời giải.**

1. $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 > 0$ với mọi x .
2. $4y - y^2 - 5 = -(y - 2)^2 - 1 < 0$ với mọi y .

□

 **Ví dụ 3.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

1. $M = x^2 - 4x + 5$;

ĐS: $M_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

2. $N = y^2 - y - 3;$

ĐS: $N_{\min} = \frac{-13}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$

3. $P = x^2 + y^2 - 4x + y + 7.$

ĐS: $P_{\min} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

 **Lời giải.**

1. Từ $M = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow M_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = 2.$

2. Từ $N = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \geq -\frac{13}{4} \Rightarrow N_{\min} = \frac{-13}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}.$

3. Từ $P = (x - 2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} \Rightarrow P_{\min} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$

□

 **Ví dụ 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

1. $P = x^2 - 6x + 11;$

ĐS: $P_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 3$

2. $Q = y^2 + y;$

ĐS: $Q_{\min} = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$

3. $K = x^2 + y^2 - 6x + y + 10.$

ĐS: $K_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

 **Lời giải.**

1. Từ $P = (x - 3)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow P_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 3.$

2. Từ $Q = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow Q_{\min} = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}.$

3. Từ $K = (x - 3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow K_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}.$

□

 **Ví dụ 5.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -x^2 - 6x + 1.$
 $A_{\max} = 10 \Leftrightarrow x = -3$

ĐS:

 **Lời giải.**

Từ $A = -(x + 3)^2 + 10 \leq 10 \Rightarrow A_{\max} = 10 \Leftrightarrow x = -3.$

□

 **Ví dụ 6.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = 4x - x^2 + 5.$ ĐS: $B_{\max} = 9 \Leftrightarrow x = 2$

 **Lời giải.**

Từ $B = -(x - 2)^2 + 9 \leq 9 \Rightarrow B_{\max} = 9 \Leftrightarrow x = 2.$

□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Khai triển biểu thức sau

- a) $(x + 3)^2$; b) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$; c) $(3x - y)^2$;
 d) $\left(x - \frac{1}{2}x^2y\right)^2$; e) $(2xy^2 - 1)(1 + 2xy^2)$; f) $(x - y + 2)^2$.

Lời giải.

- a) $x^2 + 6x + 9$. b) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$.
 c) $9x^2 - 6xy + y^2$. d) $x^2 - x^3y + \frac{1}{4}x^4y^2$.
 e) $4x^2y^4 - 1$. f) $x^2 + y^2 + 4 + 4x - 2xy - 4y$.

□

Bài 2. Viết các biểu thức dưới dạng bình phương của một tổng hoặc hiệu

- a) $x^2 + 8x + 16$; b) $9x^2 - 24x + 16$;
 c) $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$; d) $4x^2y^4 - 4xy^3 + y^2$;
 e) $(x - 2y)^2 - 4(x - 2y) + 4$; f) $(x + 3y)^2 - 12xy$.

Lời giải.

- a) $(x + 4)^2$. b) $(3x - 4)^2$. c) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.
 d) $(2xy^2 - y)^2$. e) $(x - 2y - 2)^2$. f) $(x - 3y)^2$.

□

Bài 3. Tính nhanh

- a) 103^2 ; **ĐS:** 10609 b) $96^2 + 8 \cdot 96 + 4^2$; **ĐS:** 10000
 c) $99 \cdot 101$. **ĐS:** 9999

Lời giải.

1. $103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10609$.
 2. $96^2 + 8 \cdot 96 + 4^2 = (96 + 4)^2 = 100^2 = 10000$.
 3. $99 \cdot 101 = (100 - 1)(100 + 1) = 100^2 - 1^2 = 9999$.

□

Bài 4. Rút gọn biểu thức

1. $A = (2x - 3)^2 - (2x + 3)^2$; **ĐS:** $A = -24x$

2. $B = (x + 1)^2 - 2(2x - 1)(1 + x) + 4x^2 - 4x + 1.$

ĐS: $B = (-x + 2)^2$

 **Lời giải.**

1. $A = 4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 - 12x - 9 = -24x.$

2. $B = (x + 1 - 2x + 1)^2 = (-x + 2)^2.$

□

 **Bài 5.** Tính giá trị của biểu thức

1. $N = x^2 - 10x + 25$ tại $x = 55$;

ĐS: $N = 2500$

2. $P = \frac{x^4}{4} - x^2y + y^2$ tại $x = 4; y = \frac{1}{2}.$

ĐS: $P = \frac{225}{9}$

 **Lời giải.**

1. Ta có $N = (x - 5)^2 \Rightarrow N = 2500$ tại $x = 55$;

2. Ta có $P = \left(\frac{x^2}{2} - y\right)^2 \Rightarrow P = \frac{225}{9}$ tại $x = 4; y = \frac{1}{2}.$

□

 **Bài 6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

1. $A = x^2 - 4x + 6$;

ĐS: $A_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 2$

2. $B = y^2 - y + 1$;

ĐS: $B_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

3. $C = x^2 - 4x + y^2 - y + 5.$

ĐS: $C_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

 **Lời giải.**

1. Từ $A = (x - 2)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow A_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 2.$

2. Từ $B = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow B_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

3. Từ $C = (x - 2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow C_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$

□

 **Bài 7.** Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

a) $A = -x^2 + 4x + 2$; **ĐS:** $A_{\max} = 6 \Leftrightarrow x = 2$ b) $B = x - x^2 + 2.$ **ĐS:** $B_{\max} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

 **Lời giải.**

1. Từ $A = -(x - 2)^2 + 6 \leq 6 \Rightarrow A_{\max} = 6 \Leftrightarrow x = 2.$

2. Từ $B = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4} \Rightarrow B_{\max} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

□

§4 Những hằng đẳng thức đáng nhớ (phần 2)

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Lập phương của một tổng

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Ví dụ: $(x + 1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

1.2 Lập phương của một hiệu

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

Ví dụ: $(x - 1)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 15. Khai triển biểu thức cho trước

Áp dụng trực tiếp các hằng đẳng thức đã học để khai triển biểu thức.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 Ví dụ 1. Thực hiện phép tính:

a) $(x + 2)^3$; b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$; c) $(x - 2y)^3$; d) $\left(x + \frac{y^2}{2}\right)^3$.

 Lời giải.

a) $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$.

c) $(x - 2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$. d) $\left(x + \frac{y^2}{2}\right)^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{3}{4}xy^4 + \frac{y^6}{8}$.

□

 Ví dụ 2. Thực hiện phép tính:

a) $(x + 3)^3$; b) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3$; c) $(x - 3y)^3$; d) $\left(x + \frac{y^2}{3}\right)^3$.

 Lời giải.

a) $(x + 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27.$

b) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = x^3 - x^2 + \frac{x}{3} - \frac{1}{27}.$

c) $(x - 3y)^3 = x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3.$

d) $\left(x + \frac{y^2}{3}\right)^3 = x^3 + x^2y^2 + \frac{xy^4}{3} + \frac{y^6}{27}.$

□

Ví dụ 3. Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc hiệu:

a) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1;$

b) $x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27};$

c) $x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3;$

d) $(x - y)^3 + (x - y)^2 + \frac{1}{3}(x - y) + \frac{1}{27}.$

Lời giải.

a) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = (-x + 1)^3.$

b) $x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^3.$

c) $x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3 = (x^2 - y)^3.$

d) $(x - y)^3 + (x - y)^2 + \frac{1}{3}(x - y) + \frac{1}{27} = \left(x - y + \frac{1}{3}\right)^3.$

□

Ví dụ 4. Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc hiệu:

a) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8;$

b) $-8x^3 + 12x^2 - 6x + 1;$

c) $x^3 - \frac{3}{2}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{1}{8}y^3;$

d) $(x - y)^3 + 6(x - y)^2 + 12(x - y) + 8.$

Lời giải.

a) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3.$

b) $-8x^3 + 12x^2 - 6x + 1 = (-2x + 1)^3.$

c) $x^3 - \frac{3}{2}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{1}{8}y^3 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^3.$

d) $(x - y)^3 + 6(x - y)^2 + 12(x - y) + 8 = (x - y + 2)^3.$

□

Dạng 16. Tính giá trị của biểu thức cho trước

Áp dụng các hằng đẳng thức để rút gọn biểu thức trước, sau đó thay số và tính toán hợp lí.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính giá trị biểu thức:

1. $A = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$ tại $x = -28;$

ĐS: 27000

2. $B = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ tại $x = \frac{1}{2};$

ĐS: 8

3. $C = (x + 2y)^3 - 6(x + 2y)^2 + 12(x + 2y) - 8$ tại $x = 20, y = 1.$

ĐS: 8000

Lời giải.

1. Khi $x = -28$, ta có $A = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = (-x + 2)^3 = (28 + 2)^3 = 27000$.

2. Khi $x = \frac{1}{2}$, ta có $B = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)^3 = (1 + 1)^3 = 8$.

3. Khi $x = 20$, $y = 1$, ta có

$$C = (x + 2y)^3 - 6(x + 2y)^2 + 12(x + 2y) - 8 = (x + 2y - 2)^3 = (20 + 2 - 2)^3 = 8000.$$

□

 **Ví dụ 2.** Tính giá trị biểu thức:

1. $M = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ tại $x = 99$; **ĐS:** 1000000

2. $P = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$ tại $x = -\frac{1}{3}$; **ĐS:** -8

3. $N = (x - y)^3 + 3(x - y)^2 + 3(x - y) + 1$ tại $x = 10$, $y = 1$. **ĐS:** 1000

 **Lời giải.**

1. Khi $x = 99$, ta có $M = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3 = (99 + 1)^3 = 1000000$.

2. Khi $x = -\frac{1}{3}$, ta có $P = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x - 1)^3 = (-1 - 1)^3 = -8$.

3. Khi $x = 10$, $y = 1$, ta có $N = (x - y)^3 + 3(x - y)^2 + 3(x - y) + 1 = (x - y + 1)^3 = (10 - 1 + 1)^3 = 1000$.

□

Dạng 17. Rút gọn biểu thức

Áp dụng linh hoạt các hằng đẳng thức, lựa chọn biến đổi về đẳng thức có thể áp dụng hằng đẳng thức dễ dàng.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Rút gọn biểu thức:

a) $A = (x + 2)^3 + (x - 2)^3 - 2x(x^2 + 12)$; b) $B = (xy + 2)^3 - 6(xy + 2)^2 + 12(xy + 2) - 8$.

 **Lời giải.**

1. $A = (x + 2)^3 + (x - 2)^3 - 2x(x^2 + 12) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 2x^3 - 24x = 0$.

2. $B = (xy + 2)^3 - 6(xy + 2)^2 + 12(xy + 2) - 8 = (xy + 2 - 2)^3 = x^3y^3$.

□

 **Ví dụ 2.** Rút gọn biểu thức:

a) $C = (x + 1)^3 + (x - 1)^3 - 2x(x^2 + 3)$; b) $D = (x + y)^3 - 3(x + y)^2y + 3(x + y)y^2 - y^3$.

 **Lời giải.**

1. $C = (x + 1)^3 + (x - 1)^3 - 2x(x^2 + 3) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 2x^3 - 6x = 0$.

$$2. D = (x + y)^3 - 3(x + y)^2y + 3(x + y)y^2 - y^3 = (x + y - y)^3 = x^3.$$

□

Dạng 18. Tính nhanh

Áp dụng linh hoạt các hằng đẳng thức cho các số tự nhiên.

BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Tính nhanh:

a) 101^3 ; **ĐS:** 1030301 b) $98^3 + 6 \cdot 98^2 + 12 \cdot 98 + 8$; **ĐS:** 1000000

c) 99^3 ; **ĐS:** 970299 d) $13^3 - 9 \cdot 13^2 + 27 \cdot 13 - 27$. **ĐS:** 1000

 Lời giải.

1. $101^3 = (100 + 1)^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1^2 + 1^3 = 1000000 + 30000 + 300 + 1 = 1030301.$

2. $98^3 + 6 \cdot 98^2 + 12 \cdot 98 + 8 = (98 + 2)^3 = 1000000.$

3. $99^3 = (100 - 1)^3 = 100^3 - 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1^2 - 1^3 = 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 970299.$

4. $13^3 - 9 \cdot 13^2 + 27 \cdot 13 - 27 = (13 - 3)^3 = 1000.$

□

 Ví dụ 2. Tính nhanh:

a) 199^3 ; **ĐS:** 7880599 b) $199^3 + 3 \cdot 199^2 + 3 \cdot 199 + 1$; **ĐS:** 8000000

c) 103^3 ; **ĐS:** 1092727 d) $103^3 - 9 \cdot 103^2 + 27 \cdot 103 - 27$. **ĐS:** 1000000

 Lời giải.

1. $199^3 = (200 - 1)^3 = 200^3 - 3 \cdot 200^2 \cdot 1 + 3 \cdot 200 \cdot 1^2 - 1^3 = 8000000 - 120000 + 600 - 1 = 7880599.$

2. $199^3 + 3 \cdot 199^2 + 3 \cdot 199 + 1 = (199 + 1)^3 = 8000000.$

3. $103^3 = (100 + 3)^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot 3 + 3 \cdot 100 \cdot 3^2 + 113^3 = 1000000 + 90000 + 2700 + 27 = 1092727.$

4. $103^3 - 9 \cdot 103^2 + 27 \cdot 103 - 27 = (103 - 3)^3 = 1000000.$

□

Bài tập về nhà

 Bài 1. Tính:

a) $(x - 2)^3$; b) $(2x - 3y)^3$; c) $\left(x + \frac{y}{x}\right)^3$; d) $(2x^2 + 3y)^3$.

 Lời giải.

a) $(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8.$

b) $(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3.$

c) $\left(x + \frac{y}{x}\right)^3 = x^3 + 3xy + \frac{3y^2}{x} + \frac{y^3}{x^3}.$

d) $(2x^2 + 3y)^3 = 8x^6 + 36x^4y + 54x^2y^2 + 27y^3.$

□

 **Bài 2.** Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc một hiệu:

a) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27;$

b) $-\frac{x^3}{8} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1;$

c) $x^6 - \frac{3}{2}x^4y + \frac{3}{4}x^2y^2 - \frac{1}{8}y^3.$

 Lời giải.

a) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3.$

b) $-\frac{x^3}{8} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = \left(-\frac{x}{2} + 1\right)^3.$

c) $x^6 - \frac{3}{2}x^4y + \frac{3}{4}x^2y^2 - \frac{1}{8}y^3 = \left(x^2 - \frac{y}{2}\right)^3.$

□

 **Bài 3.** Rút gọn biểu thức:

a) $A = x^3 - 6x^2 + 12x - 8;$

b) $B = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{8};$

c) $C = (2x + y)^3 - 6(2x + y)^2 \cdot x + 12(2x + y)x^2 - 8x^3.$

 Lời giải.

1. $A = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3.$

2. $B = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{8} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^3.$

3. $C = (2x + y)^3 - 6(2x + y)^2 \cdot x + 12(2x + y)x^2 - 8x^3.$

□

 **Bài 4.** Tính giá trị biểu thức:

1. $M = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ tại $x = 25,5;$

ĐS: 125000

2. $N = 1 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27}$ tại $x = -27;$

ĐS: 1000

3. $Q = \frac{x^3}{y^3} + 6\frac{x^2}{y^2} + 12\frac{x}{y} + 8$ tại $x = 36, y = 2.$

ĐS: 8000 **Lời giải.**

1. Khi $x = 25,5$, ta có $M = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3 = (51 - 1)^3 = 125000.$

2. Khi $x = -27$, ta có $N = 1 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27} = \left(1 - \frac{x}{3}\right)^3 = (1 + 9)^3 = 1000.$

3. Khi $x = 36, y = 2$, ta có $Q = \frac{x^3}{y^3} + 6\frac{x^2}{y^2} + 12\frac{x}{y} + 8 = \left(\frac{x}{y} + 2\right)^3 = (18 + 2)^3 = 8000.$



Bài 5. Tính nhanh:

a) 51^3 ; **ĐS:** 132651 b) $89^3 + 33 \cdot 89^2 + 3 \cdot 121 \cdot 89 + 11^3$; **ĐS:**
1000000

c) $23^3 - 9 \cdot 23^2 + 27 \cdot 23 - 27$. **ĐS:** 8000

Lời giải.

1. $51^3 = (50 + 1)^3 = 50^3 + 3 \cdot 50^2 \cdot 1 + 3 \cdot 50 \cdot 1^2 + 1^3 = 125000 + 7500 + 150 + 1 = 132651$.

2. $89^3 + 33 \cdot 89^2 + 3 \cdot 121 \cdot 89 + 11^3 = (89 + 11)^3 = 1000000$.

3. $23^3 - 9 \cdot 23^2 + 27 \cdot 23 - 27 = (23 - 3)^3 = 8000$.



§5 Những hằng đẳng thức đáng nhớ (phần 3)

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Tổng hai lập phương

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

Ví dụ: $x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

⚠ 2. Chú ý: $A^2 - AB + B^2$ được gọi là bình phương thiếu của hiệu.

1.2 Hiệu hai lập phương

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

Ví dụ: $x^3 - 3^2 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3^2) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

⚠ 3. Chú ý: $A^2 + AB + B^2$ được gọi là bình phương thiếu của tổng.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 19. Sử dụng hằng đẳng thức để phân tích hoặc rút gọn biểu thức cho trước

Áp dụng trực tiếp các hằng đẳng thức đã học để khai triển các biểu thức đã cho.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

 Ví dụ 1. Viết các biểu thức sau dưới dạng tích:

a) $x^3 + 27$; b) $x^3 - \frac{1}{8}$; c) $8x^3 + y^3$; d) $8x^3 - 27y^3$.

 Lời giải.

a) $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$. b) $x^3 - \frac{1}{8} = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$.
c) $8x^3 + y^3 = (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$. d) $8x^3 - 27y^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$.

□

 Ví dụ 2. Viết các biểu thức sau dưới dạng tích:

a) $x^3 + 1$; b) $x^3 - \frac{1}{27}$; c) $x^3 - 27y^3$; d) $27x^3 + 8y^3$.

 **Lời giải.**

a) $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. b) $x^3 - \frac{1}{27} = \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right)$.
c) $(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$. d) $(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$.

□

 **Ví dụ 3.** Viết các biểu thức sau dưới dạng tổng hoặc hiệu các lập phương:

a) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$; b) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$;
c) $\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)$; d) $\left(y - \frac{x}{y}\right)\left(y^2 + x + \frac{x^2}{y^2}\right)$.

 **Lời giải.**

a) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 2^3$. b) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = (2x)^3 + 1^3$.
c) $\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) = 1^3 - \left(\frac{x}{2}\right)^3$. d) $\left(y - \frac{x}{y}\right)\left(y^2 + x + \frac{x^2}{y^2}\right) = y^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^3$.

□

 **Ví dụ 4.** Viết các biểu thức sau dưới dạng tổng hoặc hiệu các lập phương:

a) $M = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$; b) $N = (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2)$;
c) $P = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$; d) $Q = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$.

 **Lời giải.**

a) $M = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 + 3^3$. b) $N = (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2) = 1^3 - (3x)^3$.
c) $P = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) = x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$. d) $Q = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) = (2x)^3 + (3y)^3$.

□

 **Ví dụ 5.** Rút gọn các biểu thức:

1. $A = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - (x^3 + 3)$;
2. $B = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 8\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$;
3. $C = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - (2y - 3x)(4y^2 + 6xy + 9x^2)$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $A = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - (x^3 + 3) = x^3 - 27 - x^3 - 3 = -30$.

2. Ta có

$$\begin{aligned} B &= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 8\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \\ &= 8x^3 + 1^3 - 8\left(x^3 + \frac{1}{8}\right) = 8x^3 + 1 - 8x^3 - 1 = 0. \end{aligned}$$

3. Ta có

$$\begin{aligned} C &= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - (2y - 3x)(4y^2 + 6xy + 9x^2) \\ &= x^3 + (2y)^3 - (8y^3 - 27x^3) = x^3 + 8y^3 - 8y^3 + 27x^3 = 28x^3. \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 6.** Rút gọn các biểu thức:

1. $A = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x^3 + 2$;
2. $B = (x - 1)(x^2 + x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1)$;
3. $C = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + (y - 3x)(y^2 + 3xy + 9x^2)$.

 **Lời giải.**

1. $A = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x^3 + 2 = x^3 + 8 - x^3 + 2 = 10$.
2. $B = (x - 1)(x^2 + x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - 1 - (x^3 + 1) = -2$.
3. $C = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + (y - 3x)(y^2 + 3xy + 9x^2) = 8x^3 - y^3 + y^3 - 27x^3 = -19x^3$.

□

Dạng 20. Tìm x

Áp dụng các hằng đẳng thức đã học để rút gọn biểu thức từ đó tìm được x .

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x biết:

1. $(1 - x)(1 + x + x^2) + x(x^2 - 5) = 11$; **ĐS:** $x = -2$
2. $8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - x(1 + 8x^2) + 2 = 0$. **ĐS:** $x = 1$

 **Lời giải.**

1. Rút gọn $VT = 1 - x^3 + x^3 - 5x = 1 - 5x$. Từ đó $x = -2$.
2. Rút gọn $VT = 8x^3 - 8 \cdot \frac{1}{8} - x - 8x^3 = -x + 1$. Từ đó $x = 1$.

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x biết:

1. $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 8x(x^2 - 1) = 15;$

ĐS: $x = 2$

2. $(x - 1)(x^2 + x + 1) - (2 + x)(4 - 2x + x^2) = 3x.$

ĐS: $x = -3$

 **Lời giải.**

1. Rút gọn $VT = (2x)^3 - 1^3 - (8x^3 - 8x) = 8x - 1$. Từ đó $x = 2$.

2. Rút gọn $VT = x^3 - 1^3 - (2^3 + x^3) = -9$. Từ đó $x = -3$.

□

Dạng 21. Khai triển biểu thức cho trước

Áp dụng các hằng đẳng thức đã học để rút gọn các biểu thức đã cho, sau đó thay số và tính giá trị các biểu thức.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** 1. Chứng minh $A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$ và $A^3 - B^3 = (A - B)^3 + 3AB(A - B)$.

2. Áp dụng để tính $101^3 - 1$.

ĐS: 1030300

3. Tính giá trị biểu thức $x^3 + y^3$ biết $x + y = 2$ và $x \cdot y = -3$.

ĐS: 26

 **Lời giải.**

1. Ta có

$$A^3 + B^3 = (A + B) [(A + B)^2 - 3AB] = (A + B)^3 - 3AB(A + B).$$

$$A^3 - B^3 = (A - B) [(A - B)^2 + 3AB] = (A - B)^3 + 3AB(A - B).$$

2. Áp dụng với $A = 101$, $B = 1$ ta được $101^3 - 1^3 = 100^3 + 3 \cdot 101 \cdot 1 \cdot 100 = 1030300$.

3. Ta có $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 2^3 - 3 \cdot (-3) \cdot 2 = 26$.

□

 **Ví dụ 2.** Tính bằng cách hợp lí:

1. Tính $11^3 - 1$;

ĐS: 1330

2. Tính giá trị biểu thức $x^3 - y^3$ biết $x - y = 6$ và $x \cdot y = 9$.

ĐS: 378

 **Lời giải.**

1. Áp dụng phần a bài trước ta có $11^3 - 1^3 = 10^3 + 3 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 10 = 1330$.

2. Ta có $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = 6^3 + 3 \cdot 9 \cdot 6 = 378$.

□

 **Ví dụ 3.** Tính giá trị biểu thức:

1. $M = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (3 - 2x)(4x^2 + 6x + 9)$ tại $x = 20$; **ĐS:** 72000

2. $N = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) + 16y^3$ biết $x + 2y = 0$. **ĐS:** 0

 **Lời giải.**

1. Khi $x = 20$, ta có

$$M = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (3 - 2x)(4x^2 + 6x + 9) = x^3 + 3^3 - (3^3 - (2x)^3) = 9x^3 = 72000.$$

2. Khi $x + 2y = 0$, ta có

$$N = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) + 16y^3 = x^3 - (2y)^3 + 16y^3 = x^3 + 8y^3 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 0.$$

□

 **Ví dụ 4.** Tính giá trị biểu thức:

1. $P = (x + 4)(x^2 - 4x + 16) - (64 - x^3)$ tại $x = 100$; **ĐS:** 2000000

2. $Q = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + 2y^3$ biết $2x + y = 0$. **ĐS:** 0

 **Lời giải.**

1. Khi $x = 100$, ta có

$$P = (x + 4)(x^2 - 4x + 16) - (64 - x^3) = x^3 + 4^3 - 64 + x^3 = 2x^3 = 2000000.$$

2. Khi $2x + y = 0$, ta có

$$Q = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + 2y^3 = (2x)^3 - y^3 + 2y^3 = 8x^3 + y^3 = (2x + y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 0.$$

□

3

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Đơn giản biểu thức:

a) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$;

b) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$;

c) $\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)$;

d) $\left(\frac{x}{3} - y\right)\left(\frac{x^2}{9} + \frac{xy}{3} + y^2\right)$.

 **Lời giải.**

a) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - 27$.

b) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) = 27x^3 - 1$.

c) $\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) = 1 - \frac{x^3}{8}$.

d) $\left(\frac{x}{3} - y\right)\left(\frac{x^2}{9} + \frac{xy}{3} + y^2\right) = \frac{x^3}{27} - y^3$.

□

 **Bài 2.** Rút gọn biểu thức:

1. $P = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) + (x + 1)(x^2 - x + 1)$;
2. $Q = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)(x^2 - xy + y^2) + 2y^3$.

 **Lời giải.**

1. $P = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) + (x + 1)(x^2 - x + 1) = 8x^3 - 1 + x^3 + 1 = 9x^3$;
2. $Q = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)(x^2 - xy + y^2) + 2y^3 = x^3 - y^3 - (x^3 + y^3) + 2y^3 = 0$.

□

 **Bài 3.** Chứng minh giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x

- a) $A = 6(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 6x^3 - 2$;
- b) $B = 2(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) - 54x^3$.

 **Lời giải.**

1. $A = 6(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 6x^3 - 2 = 6(x^3 + 8) - 6x^3 - 2 = 46$.
2. $B = 2(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) - 54x^3 = 2(27x^3 + 1) - 54x^3 = 2$.

□

 **Bài 4.** Tính giá trị biểu thức:

- a) $A = (x + y)^3 + x^3$ biết $2x + y = 0$; **ĐS:** 0
- b) $B = x^3 - y^3 - 3xy$ biết $x - y = 1$. **ĐS:** 1

 **Lời giải.**

1. $A = (x + y)^3 + x^3 = (2x + y)(x^2 + xy + y^2) = 0$ (do $2x + y = 0$).
2. $B = x^3 - y^3 - 3xy = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = 1$ (do $x - y = 1$).

□

§6 Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Phân tích đa thức thành nhân tử

Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.

1.2 Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung

Khi các số hạng của đa thức có một thừa số chung, ta đặt thừa số chung đó ra ngoài dấu ngoặc có được bằng cách lấy số hạng của đa thức chia cho nhân tử chung.

Ví dụ: Hãy viết $x^2 + 2x$ thành tích của những đa thức.

Ta có $x^2 + 2x = x(x + 2)$.

Cách làm này gọi là phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 22. Khai triển biểu thức cho trước

Đặt các nhân tử chung của biểu thức cho trước và đưa biểu thức về dạng tích.

 4. Chú ý: Một số trường hợp để làm xuất hiện nhân tử chung ta cần đổi dấu các hạng tử.

Tức là $A = -(-A)$.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x - 6y$;

b) $\frac{1}{2}x^3 - 5x^2y + x$;

c) $3x^3y - 6xy + 8x^2y^2$;

d) $2x(y - 2) - 2y(y - 2)$;

e) $x^2(x - y) - xy(x - y)$;

f) $3x(y - x) + 6y(y - x)$.

Lời giải.

a) $4x - 6y = 2(2x - 3y)$.

b) $\frac{1}{2}x^3 - 5x^2y + x = x\left(\frac{1}{2}x^2 - 5xy + 1\right)$.

c) $3x^3y - 6xy + 8x^2y^2 = xy(3x^2 + 8xy - 6)$.

d) $2x(y - 2) - 2y(y - 2) = 2(y - 2)(x - y)$.

e) $x^2(x - y) - xy(x - y) = x(x - y)^2$.

f) $3x(y - x) + 6y(y - x) = 3(y - x)(x - 2y)$.

□

Ví dụ 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $2x + 4y$;

b) $\frac{1}{4}x^2 + xy + x$;

c) $x^3y + 2xy + xy^2$;

d) $x(y + 1) - 2y(y + 1)$;

e) $x^2(x + y) - y(x + y)$;

f) $x(y - x) + 2y(y - x)$.

Lời giải.

a) $2x + 4y = 2(x + 2y)$.

b) $\frac{1}{4}x^2 + xy + x = x\left(\frac{1}{4}x + y + 1\right)$.

c) $x^3y + 2xy + xy^2 = xy(x^2 + 2 + y)$.

d) $x(y + 1) - 2y(y + 1) = (x - 2y)(y + 1)$.

e) $x^2(x + y) - y(x + y) = (x^2 - y)(x + y)$.

f) $x(y - x) + 2y(y - x) = (x + 2y)(y - x)$.

□

Dạng 23. Khai triển biểu thức cho trước

Sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử, thay giá trị của biến (nếu cần) để tính nhanh giá trị biểu thức.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $15 \cdot 80,5 + 15 \cdot 19,5$;

ĐS: 1500

b) $46 \cdot 101,5 - 46 \cdot 1,5$;

ĐS: 4600

c) $28 \cdot 92,5 + 280 \cdot 0,75$;

ĐS: 2800

d) $110 \cdot 102,9 - 1100 \cdot 0,29$.

ĐS: 11000

Lời giải.

1. $15 \cdot 80,5 + 15 \cdot 19,5 = 15 \cdot (80,5 + 19,5) = 15 \cdot 100 = 1500$.

2. $46 \cdot 101,5 - 46 \cdot 1,5 = 46 \cdot (101,5 - 1,5) = 46 \cdot 100 = 4600$.

3. $28 \cdot 92,5 + 280 \cdot 0,75 = 28 \cdot (92,5 + 7,5) = 2800$.

4. $110 \cdot 102,9 - 1100 \cdot 0,29 = 110(102,9 - 2,9) = 11000$.

□

Ví dụ 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $10 \cdot 81,5 + 10 \cdot 18,5$;

ĐS: 1000

b) $25 \cdot 11,5 - 25 \cdot 1,5$;

ĐS: 250

c) $13 \cdot 91,5 + 130 \cdot 0,85$;

ĐS: 1300

d) $10 \cdot 105,9 - 100 \cdot 0,59$.

ĐS: 1000

Lời giải.

1. $10 \cdot 81,5 + 10 \cdot 18,5 = 10 \cdot (81,5 + 18,5) = 10 \cdot 100 = 1000$.

$$2. 25 \cdot 11,5 - 25 \cdot 1,5 = 25 \cdot (11,5 - 1,5) = 25 \cdot 10 = 250.$$

$$3. 13 \cdot 91,5 + 130 \cdot 0,85 = 13 \cdot 91,5 + 13 \cdot 8,5 = 13 \cdot (91,5 + 8,5) = 13 \cdot 100 = 1300.$$

$$4. 10 \cdot 105,9 - 100 \cdot 0,59 = 10 \cdot 105,9 - 10 \cdot 5,9 = 10 \cdot (105,9 - 5,9) = 10 \cdot 100 = 1000.$$

□

Ví dụ 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$1. y(x - 2) + x(x - 2) \text{ tại } x = 102, y = 8; \quad \text{ĐS: } 11000$$

$$2. x(x - 1) + y(1 - x) \text{ tại } x = 101, y = 1. \quad \text{ĐS: } 10000$$

Lời giải.

$$1. \text{ Khi } x = 102, y = 8, \text{ ta có } y(x - 2) + x(x - 2) = (y + x)(x - 2) = 110 \cdot 100 = 11000.$$

$$2. \text{ Khi } x = 101, y = 1, \text{ ta có } x(x - 1) + y(1 - x) = (x - 1)(x - y) = 100 \cdot 100 = 10000.$$

□

Ví dụ 4. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$1. y(x + 1) + x(x + 1) \text{ tại } x = 99, y = 1; \quad \text{ĐS: } 10000$$

$$2. x(x - 2) + y(2 - x) \text{ tại } x = 102, y = 2. \quad \text{ĐS: } 10000$$

Lời giải.

$$1. \text{ Khi } x = 99, y = 1, \text{ ta có } y(x + 1) + x(x + 1) = (y + x)(x + 1) = 100 \cdot 100 = 10000.$$

$$2. \text{ Khi } x = 102, y = 2, \text{ ta có } x(x - 2) + y(2 - x) = (x - y)(x - 2) = 100 \cdot 100 = 10000.$$

□

Dạng 24. Khai triển biểu thức cho trước

☑ **Bước 1.** Chuyển tất cả các hạng tử về vế trái (nếu cần), vế phải bằng 0;
Ví dụ số đó có ba chữ số thì tập giá trị là $\{100; 101; \dots; 999\}$;

☑ **Bước 2.** Phân tích vế trái thành tích các nhân tử dạng $A \cdot B = 0$;

☑ **Bước 3.** Lần lượt tìm x sao cho $A = 0$ hoặc $B = 0$ và kết luận.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm x , biết:

$$\text{a) } x^3 + 4x = 0; \quad \text{ĐS: } x = 0 \quad \text{b) } x(x - 2) + 3(x - 2) = 0; \quad \text{ĐS: } \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\text{c) } 3x(2x - 1) - 2x + 1 = 0; \quad \text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{d) } 3(x - 1) = (x - 1)^2. \quad \text{ĐS: } \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Lời giải.

1. $x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 4 = 0 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$
2. $x(x - 2) + 3(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3. \end{cases}$
3. $3x(2x - 1) - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases}$
4. $3(x - 1) = (x - 1)^2 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4. \end{cases}$

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết:

- a) $x^3 + 2x = 0$; **ĐS:** $x = 0$ b) $x(x + 1) + 2(x + 1) = 0$; **ĐS:** $\begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$
- c) $x(x + 1) - x - 1 = 0$; **ĐS:** $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ d) $2x + 1 = (2x + 1)^2$. **ĐS:** $\begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

 **Lời giải.**

1. $x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$
2. $x(x + 1) + 2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1. \end{cases}$
3. $x(x + 1) - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$
4. $2x + 1 = (2x + 1)^2 \Leftrightarrow 2x(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

□

Dạng 25. Chứng minh tính chia hết

Để chứng minh biểu thức P chia hết cho biểu thức Q , ta phân tích biểu thức P về dạng tích các nhân tử trong đó có ít nhất một nhân tử là biểu thức Q .

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh rằng $A = n^2(n + 1) - n(n + 1)$ chia hết cho 6 với một số nguyên n .

 **Lời giải.**

$A = n^2(n+1) - n(n+1) = (n-1)n(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên A chia hết cho 2 và 3.

Suy ra A chia hết cho 6. □

 **Ví dụ 2.** Chứng minh rằng $B = n^2(n+2) + n(n+2)$ chia hết cho 6 với một số nguyên n .

 **Lời giải.**

$B = n^2(n+2) + n(n+2) = n(n+1)(n+2)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên B chia hết cho 3. □

 **Ví dụ 3.** Chứng minh rằng $A = 20^{n+1} - 20^n$ chia hết cho 19 với một số tự nhiên n .

 **Lời giải.**

$A = 20^{n+1} - 20^n = 20^n \cdot 19$ suy ra A chia hết cho 19. □

 **Ví dụ 4.** Chứng minh rằng $B = 18^{n+1} - 18^n$ chia hết cho 17 với một số nguyên n .

 **Lời giải.**

$B = 18^{n+1} - 18^n = 18^n \cdot 17$ suy ra B chia hết cho 17. □

 **Ví dụ 5.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì

1. $A = x(x^2 - 2x) + (x^2 - 2x)$ chia hết cho $x - 2$;
2. $B = x^3y^2 - 3yx^2 + xy$ chia hết cho xy ;
3. $C = x^3y^2 - 3x^2y^3 + xy^2$ chia hết cho $x^2 - 3xy + 1$.

 **Lời giải.**

1. $A = x(x^2 - 2x) + (x^2 - 2x) = x(x-2)(x+1)$ suy ra A chia hết cho $x - 2$.
2. $B = x^3y^2 - 3yx^2 + xy = xy(x^2y - 3x + 1)$ suy ra B chia hết cho xy .
3. $C = x^3y^2 - 3x^2y^3 + xy^2 = xy^2(x^2 - 3xy + 1)$ suy ra C chia hết cho $x^2 - 3xy + 1$. □

 **Ví dụ 6.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì

1. $A = x(x+2) + x+2$ chia hết cho $x+2$;
2. $B = x^2y^2 + yx^2 + xy$ chia hết cho xy ;
3. $C = xy(xy + y + 1) + xy$ chia hết cho $xy + y + 2$.

 **Lời giải.**

1. $A = x(x+2) + x+2 = (x+1)(x+2)$ suy ra A chia hết cho $x+2$.
2. $B = x^2y^2 + yx^2 + xy = xy(xy + x + 1)$ suy ra B chia hết cho xy .
3. $C = xy(xy + y + 1) + xy = xy(xy + y + 2)$ suy ra C chia hết cho $xy + y + 2$. □

 Lời giải.

$$1. x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 5 = 0 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$2. 2x(x - 3) + (x - 3) = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 3. \end{cases}$$

$$3. (x + 2)(x - 1) - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1. \end{cases}$$

$$4. x + 3 = (x + 3)^2 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2. \end{cases}$$

□

 **Bài 5.** Chứng minh rằng $A = (n - 1)^2(n + 1) + (n - 1)(n + 1)$ chia hết cho 6 với một số nguyên n .

 Lời giải.

$A = (n - 1)^2(n + 1) + (n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên A chia hết cho 2 và 3.

Suy ra A chia hết cho 6. □

 **Bài 6.** Chứng minh rằng $A = 10^{n+1} - 10^n$ chia hết cho 3 với một số tự nhiên n .

 Lời giải.

$A = 10^{n+1} - 10^n = 10^n \cdot 9$ suy ra A chia hết cho 3. □

 **Bài 7.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì

1. $A = x(x^2 + x) + x(x + 1)$ chia hết cho $x + 1$;
2. $B = xy^2 - yx^2 + xy$ chia hết cho xy ;
3. $C = x^2y^3 + x^3y^3 - xy^2$ chia hết cho $x^2y + xy - 1$.

 Lời giải.

$$1. A = x(x^2 + x) + x(x + 1) = x(x + 1)^2 \text{ suy ra } A \text{ chia hết cho } x + 1.$$

$$2. B = xy^2 - yx^2 + xy = xy(y - x + 1) \text{ suy ra } B \text{ chia hết cho } xy.$$

$$3. C = x^2y^3 + x^3y^3 - xy^2 = xy^2(x^2y + xy - 1) \text{ suy ra } C \text{ chia hết cho } x^2y + xy - 1.$$

□

§7 Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.
2. Để phân tích một đa thức thành nhân tử, bên cạnh *Phương pháp đặt nhân tử chung* đã học ở *Bài 6*, ta còn có phương pháp dùng các hằng đẳng thức sau đây:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2; & \text{b) } A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2; \\ \text{c) } A^2 - B^2 = (A + B)(A - B); & \text{d) } A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3; \\ \text{e) } A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3; & \text{f) } A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2); \\ \text{g) } A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2). \end{array}$$

3. Ví dụ minh họa:

a) Để phân tích đa thức $x^2 - 4$ ta làm như sau: $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$.

b) Để phân tích đa thức $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ ta làm như sau

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3 = (x - 2)^3.$$

c) Để phân tích đa thức $x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ ta làm như sau

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 12x - 9 &= (x^3 - 6x + 12x - 8) - 1 \\ &= (x - 2)^3 - 1 \\ &= (x - 2 - 1) [(x - 2)^2 + (x - 2) + 1] \\ &= (x - 3)(x^2 - 3x + 3). \end{aligned}$$

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 26. Phân tích đa thức thành nhân tử

Biến đổi đa thức đã cho về đúng dạng hằng đẳng thức cần sử dụng, từ đó phân tích đa thức thành nhân tử.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 + 4x + 4$. **ĐS:** $(x + 2)^2$ b) $4x^2 - 4x + 1$. **ĐS:** $(2x - 1)^2$

c) $2x - 1 - x^2$. **ĐS:** $-(x - 1)^2$ d) $x^2 + x + \frac{1}{4}$. **ĐS:** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

Lời giải.

1. Ta có $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2.2x + 2^2 = (x + 2)^2$.
2. Ta có $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2.2x + 1 = (2x - 1)^2$.
3. Ta có $2x - 1 - x^2 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x - 1)^2$.
4. Ta có $x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2.\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

□

Ví dụ 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 + 6x + 9$. **ĐS:** $(x + 3)^2$ b) $9x^2 - 6x + 1$. **ĐS:** $(3x - 1)^2$

c) $4x - 4 - x^2$. **ĐS:** $-(x - 2)^2$ d) $x^2 - x + \frac{1}{4}$. **ĐS:** $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Lời giải.

1. Ta có $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2.3x + 3^2 = (x + 3)^2$.
2. Ta có $9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2.3x + 1 = (3x - 1)^2$.
3. Ta có $4x - 4 - x^2 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x - 2)^2$.
4. Ta có $x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 - 2.\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

□

Ví dụ 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $3 - x^2$. **ĐS:** $(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)$ b) $3 - (x + 1)^2$. **ĐS:**
 $(\sqrt{3} + x + 1)(\sqrt{3} - x - 1)$

c) $(x + 5)^2 - 4x^2$. **ĐS:** $(3x + 5)(5 - x)$ d) $(x + 1)^2 - (2x - 1)^2$. **ĐS:** $3x(-x + 2)$

Lời giải.

1. Ta có $3 - x^2 = (\sqrt{3})^2 - x^2 = (\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)$.
2. Ta có $3 - (x + 1)^2 = (\sqrt{3})^2 - (x + 1)^2 = (\sqrt{3} + x + 1)(\sqrt{3} - x - 1)$.
3. Ta có $(x + 5)^2 - 4x^2 = (x + 5)^2 - (2x)^2 = (3x + 5)(5 - x)$.
4. Ta có $(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 3x(-x + 2)$.

□

 **Ví dụ 4.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $x^2 - 9$. **ĐS:** $(x - 3)(x + 3)$ b) $(x + 1)^2 - 9$. **ĐS:** $(x - 2)(x + 4)$
 c) $(4x - 1)^2 - 9x^2$. **ĐS:** $(x - 1)(7x - 1)$ d) $(x + 2)^2 - (3x - 1)^2$. **ĐS:**
 $(3 - 2x)(4x + 1)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$.
2. Ta có $(x + 1)^2 - 9 = (x + 1)^2 - 3^2 = (x - 2)(x + 4)$.
3. Ta có $(4x - 1)^2 - 9x^2 = (4x - 1)^2 - (3x)^2 = (x - 1)(7x - 1)$.
4. Ta có $(x + 2)^2 - (3x - 1)^2 = (3 - 2x)(4x + 1)$.

□

 **Ví dụ 5.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^2 - 6xy + 9y^2$. **ĐS:** $(x - 3y)^2$
2. $x^2 - 9y^2$. **ĐS:** $(x - 3y)(x + 3y)$
3. $x^2y^2 - 4xy + 4$. **ĐS:** $(xy - 2)^2$
4. $y^2 - (x^2 - 2x + 1)$. **ĐS:** $(y - x + 1)(y + x - 1)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $x^2 - 6xy + 9y^2 = x^2 - 2.x.3y + (3y)^2 = (x - 3y)^2$.
2. Ta có $x^2 - 9y^2 = x^2 - (3y)^2 = (x - 3y)(x + 3y)$.
3. Ta có $x^2y^2 - 4xy + 4 = (xy)^2 - 2.xy.2 + 2^2 = (xy - 2)^2$.
4. Ta có $y^2 - (x^2 - 2x + 1) = y^2 - (x - 1)^2 = (y - x + 1)(y + x - 1)$.

□

 **Ví dụ 6.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^2 - 4xy + 4y^2$. **ĐS:** $(x - 2y)^2$
2. $9x^2 - y^2$. **ĐS:** $(3x - y)(3x + y)$
3. $9x^2y^2 - 6xy + 1$. **ĐS:** $(3xy - 1)^2$
4. $x^2 - (y^2 - 4y + 4)$. **ĐS:** $(x + y - 2)(x - y + 2)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 - 2.x.2y + (2y)^2 = (x - 2y)^2$.
2. Ta có $9x^2 - y^2 = (3x)^2 - y^2 = (3x - y)(3x + y)$.
3. Ta có $9x^2y^2 - 6xy + 1 = (3xy)^2 - 2.3xy.1 + 1^2 = (3xy - 1)^2$.

4. Ta có $x^2 - (y^2 - 4y + 4) = x^2 - (y - 2)^2 = (x + y - 2)(x - y + 2)$. □

Ví dụ 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $8x^3 - 1$. **ĐS:** $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

2. $8(x + 2)^3 - 1$. **ĐS:** $(2x + 3)(4x^2 + 18x + 21)$

3. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. **ĐS:** $(x + 2)^3$

4. $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$. **ĐS:** $(2x - y)^3$

Lời giải.

1. Ta có $8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$.

2. Ta có $8(x + 2)^3 - 1 = (2x + 4)^3 - 1^3 = (2x + 3)(4x^2 + 18x + 21)$.

3. Ta có $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 = (x + 2)^3$.

4. Ta có $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = (2x)^3 - 3 \cdot 4x^2y + 3 \cdot xy^2 - y^3 = (2x - y)^3$. □

Ví dụ 8. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 - 8$. **ĐS:** $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ b) $x^3 - (x + 3)^3$. **ĐS:** $-3(3x^2 + 9x + 9)$

c) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$. **ĐS:** $(x + 2)^3$ d) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$. **ĐS:** $(2x - y)^3$

Lời giải.

1. Ta có $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

2. Ta có $x^3 - (x + 3)^3 = (x - x - 3)(x^2 + x(x + 3) + (x + 3)^2) = -3(3x^2 + 9x + 9)$.

3. Ta có $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 = (x + 2)^3$.

4. Ta có $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = (2x)^3 - 3 \cdot 4x^2y + 3 \cdot xy^2 - y^3 = (2x - y)^3$. □

Dạng 27. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách thêm bớt

Sử dụng các phép phân tách hoặc thêm bớt hợp lý để đưa biểu thức đã cho về dạng hằng đẳng thức cần sử dụng và phân tích thành nhân tử.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $4x^2 - 4x + 1$. **ĐS:** $(2x - 1)^2$

2. $4x^2 - 4x - 3$. **ĐS:** $(2x - 3)(2x + 1)$

3. $4x^2 + 4x - 1$.

ĐS: $(2x + 1 - \sqrt{2})(2x + 1 + \sqrt{2})$

4. $x^2 - 4xy - 5y^2$.

ĐS: $(x - 5y)(x + y)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.
2. Ta có $4x^2 - 4x - 3 = (2x - 1)^2 - 4 = (2x - 3)(2x + 1)$.
3. Ta có $4x^2 + 4x - 1 = (2x + 1)^2 - 2 = (2x + 1 - \sqrt{2})(2x + 1 + \sqrt{2})$.
4. Ta có $x^2 - 4xy - 5y^2 = (x - 2y)^2 - (3y)^2 = (x - 5y)(x + y)$.

□

 **Ví dụ 2.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^2 + 2x + 1$.

ĐS: $(x + 1)^2$

2. $x^2 + 2x - 3$.

ĐS: $(x + 3)(x - 1)$

3. $x^2 - 2x - 2$.

ĐS: $(x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3})$

4. $4x^2 - 4xy - y^2$.

ĐS: $(2x - y - \sqrt{2}y)(2x - y + \sqrt{2}y)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.
2. Ta có $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4 = (x + 3)(x - 1)$.
3. Ta có $x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3 = (x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3})$.
4. Ta có $4x^2 - 4xy - y^2 = (2x - y)^2 - (\sqrt{2}y)^2 = (2x - y - \sqrt{2}y)(2x - y + \sqrt{2}y)$.

□

 **Ví dụ 3.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $(x + 2)^3 + 1$.

ĐS: $(x + 3)(x^2 + 3x + 3)$

2. $x^3 + 6x^2 + 12x + 9$.

ĐS: $(x + 3)(x^2 + 3x + 3)$

3. $x^3 + 6x^2 + 12x + 7$.

ĐS: $(x + 1)(x^2 + 5x + 7)$

4. $2x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

ĐS: $(2x + 2)(x^2 + 2x + 4)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $(x + 2)^3 + 1 = (x + 3)[(x + 2)^2 - (x + 2) + 1] = (x + 3)(x^2 + 3x + 3)$.
2. Ta có $x^3 + 6x^2 + 12x + 9 = (x + 2)^3 + 1 = (x + 3)[(x + 2)^2 - (x + 2) + 1] = (x + 3)(x^2 + 3x + 3)$.
3. Ta có $x^3 + 6x^2 + 12x + 7 = (x + 2)^3 - 1 = (x + 1)[(x + 2)^2 + (x + 2) + 1] = (x + 1)(x^2 + 5x + 7)$.
4. Ta có $2x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + (x + 2)^3 = (2x + 2)(x^2 + 2x + 4)$.

□

 **Ví dụ 4.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $(x - 1)^3 - 1$. **ĐS:** $(x - 2)(x^2 - x + 1)$

2. $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$. **ĐS:** $(x - 2)(x^2 - x + 1)$

3. $x^3 - 3x^2 + 3x + 7$. **ĐS:** $(x + 1)(x^2 - 4x + 7)$

4. $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. **ĐS:** $(2x - 1)(x^2 - x + 1)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $(x - 1)^3 - 1 = (x - 2) [(x - 1)^2 + (x - 1) + 1] = (x - 2)(x^2 - x + 1)$.

2. Ta có $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x - 1)^3 - 1 = (x - 2)(x^2 - x + 1)$.

3. Ta có $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = (x - 1)^3 + 8 = (x + 1)(x^2 - 4x + 7)$.

4. Ta có $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + (x - 1)^3 = (2x - 1)(x^2 - x + 1)$.

□

Dạng 28. Tính nhanh biểu thức

Sử dụng hằng đẳng thức một cách hợp lý để phân tích các biểu thức đã cho thành tích rồi tính.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tính nhanh:

a) $65^2 - 35^2$. **ĐS:** 3000 b) $65^2 - 35^2 + 83^2 - 17^2$. **ĐS:** 9600

c) $35^2 + 40.35 + 20^2 - 45^2$. **ĐS:** 1000 d) $\frac{83^2 - 17^2}{(51,5)^2 - (48,5)^2}$. **ĐS:** 22

 **Lời giải.**

1. Ta có $65^2 - 35^2 = (65 - 35)(65 + 35) = 30 \cdot 100 = 3000$.

2. Ta có $65^2 - 35^2 + 83^2 - 17^2 = (65 - 35)(65 + 35) + (83 - 17)(83 + 17) = 3000 + 6600 = 9600$.

3. Ta có $35^2 + 40.35 + 20^2 - 45^2 = (30 + 25)^2 - 45^2 = 55^2 - 45^2 = (55 - 45)(55 + 45) = 1000$.

4. Ta có $\frac{83^2 - 17^2}{(51,5)^2 - (48,5)^2} = \frac{(83 - 17)(83 + 17)}{(51,5 - 48,5)(51,5 + 48,5)} = \frac{6600}{300} = 22$.

□

 **Ví dụ 2.** Tính nhanh:

a) $85^2 - 15^2$. **ĐS:** b) $85^2 - 15^2 + 77^2 - 23^2$. **ĐS:**

c) $30^2 + 60.45 + 45^2 - 25^2$. **ĐS:** d) $\frac{77^2 - 23^2}{(50,5)^2 - (49,5)^2}$. **ĐS:**

 **Lời giải.**

1. Ta có $85^2 - 15^2 = (85 - 15)(85 + 15) = 70 \cdot 100 = 7000$.
2. Ta có $85^2 - 15^2 + 77^2 - 23^2 = (85 - 15)(85 + 15) + (77 - 23)(77 + 23) = 7000 + 5400 = 12400$.
3. Ta có $30^2 + 60 \cdot 45 + 45^2 - 25^2 = (30 + 45)^2 - 25^2 = 75^2 - 25^2 = (75 - 25)(75 + 25) = 5000$.
4. Ta có $\frac{77^2 - 23^2}{(50,5)^2 - (49,5)^2} = \frac{(77 - 23)(88 + 23)}{(50,5 - 49,5)(50,5 + 49,5)} = \frac{5400}{100} = 54$.

□

Dạng 29. Tìm x thỏa mãn điều kiện cho trước

Thực hiện theo 3 bước:

Bước 1. Chuyển tất cả các hạng tử về về trái, về phải bằng 0.

Bước 2. Phân tích về trái thành nhân tử để được dạng tích, chẳng hạn $A \cdot B = 0$. Từ đó suy ra $A = 0$ hoặc $B = 0$.

Bước 3. Lần lượt tìm x để $A = 0$ hoặc $B = 0$ rồi kết luận.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x , biết:

- | | | |
|----------------------------|---|--|
| a) $x^2 + 4 = 4x$. | ĐS: $x = 2$ b) $4x^2 - 1 = 0$. | ĐS: $x = \pm \frac{1}{2}$ |
| c) $x^3 - 3x^2 + 3x = 1$. | ĐS: $x = 1$ d) $(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 0$. | ĐS: $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ |

Lời giải.

1. Ta có $x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
2. Ta có $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$.
3. Ta có $x^3 - 3x^2 + 3x = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
4. Ta có $(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x(-x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết:

- | | | |
|------------------------------|--|--|
| a) $x^2 + 6x = -9$. | ĐS: $x = -3$ b) $2x^2 - 9 = 0$. | ĐS: $x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$ |
| c) $8x^3 - 12x^2 + 6x = 1$. | ĐS: $x = \frac{1}{2}$ d) $(2x + 1)^2 - (3x + 2)^2 = 0$. | ĐS: $\begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{3}{5} \end{cases}$ |

Lời giải.

1. Ta có: $x^2 + 6x = -9 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.
2. Ta có: $2x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}x - 3)(\sqrt{2}x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$.
3. Ta có: $8x^3 - 12x^2 + 6x = 1 \Leftrightarrow (2x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
4. Ta có: $(2x + 1)^2 - (3x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (-x - 1)(5x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{3}{5} \end{cases}$.

□

Dạng 30. Chứng minh các bài toán về số học

Phân tích biểu thức đang cần chứng minh thành nhân tử. Từ đó suy ra kết luận cần tìm.

 **5.** Chú ý: Số nguyên a chia hết cho số nguyên b nếu có số nguyên k sao cho $a = b.k$.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh:

- a) $(2k - 1)^2 - 9$ chia hết cho 4. b) $4 - (1 + 3k)^2$ chia hết cho 3.

 **Lời giải.**

1. Ta có $(2k - 1)^2 - 9 = (2k - 1)^2 - 3^2 = (2k - 4)(2k + 2) = 4(k - 1)(k + 1)$.
Suy ra $(2k - 1)^2 - 9$ chia hết cho 4.
2. Ta có $4 - (1 + 3k)^2 = 2^2 - (1 + 3k)^2 = 3(1 + k)(1 - 3k)$. Suy ra $4 - (1 + 3k)^2$ chia hết cho 3.

□

 **Ví dụ 2.** Chứng minh:

- a) $(3k - 2)^2 - 4$ chia hết cho 3. b) $9 - (1 + 4k)^2$ chia hết cho 8.

 **Lời giải.**

1. Ta có $(3k - 2)^2 - 4 = (3k - 2)^2 - 2^2 = 3k \cdot (3k - 4) \Rightarrow (3k - 2)^2 - 4$ chia hết cho 3.
2. Ta có $9 - (1 + 4k)^2 = 3^2 - (1 + 4k)^2 = 8(1 - 2k)(k + 1) \Rightarrow 9 - (1 + 4k)^2$ chia hết cho 8.

□

3

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $x^2 + 8x + 16$. **ĐS:** $(x + 4)^2$ b) $9x^2 - 6x + 1$. **ĐS:** $(3x - 1)^2$
- c) $10x - 25 - x^2$. **ĐS:** $-(x - 5)^2$ d) $x^2 + 5x + \frac{25}{4}$. **ĐS:** $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$

 Lời giải.

1. Ta có $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$.
2. Ta có $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$.
3. Ta có $10x - 25 - x^2 = -(x^2 - 10x + 25) = -(x - 5)^2$.
4. Ta có $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$.

□

 Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $16 - x^2$. **ĐS:** $(4 - x)(4 + x)$ b) $16 - (3x + 1)^2$. **ĐS:** $(3 - 3x)(5 + 3x)$
 c) $(2x + 5)^2 - 9x^2$. **ĐS:** $(5 - x)(5x + 5)$ d) $(2x - 1)^2 - (3x - 1)^2$. **ĐS:** $-x(5x - 2)$

 Lời giải.

1. $16 - x^2 = 4^2 - x^2 = (4 - x)(4 + x)$.
2. $16 - (3x + 1)^2 = 4^2 - (3x + 1)^2 = (3 - 3x)(5 + 3x)$.
3. $(2x + 5)^2 - 9x^2 = (2x + 5)^2 - (3x)^2 = (5 - x)(5x + 5)$.
4. $(2x - 1)^2 - (3x - 1)^2 = -x(5x - 2)$.

□

 Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $4x^2 - 4xy + y^2$. **ĐS:** $(2x - y)^2$ b) $(x + 1)^2 - 9y^2$. **ĐS:**
 $(x + 3y + 1)(x - 3y + 1)$
 c) $x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4$. **ĐS:** $(x^2y^2 + 2)^2$ d) $y^2 - 4y + 4 - x^2$. **ĐS:** $(y - 2 - x)(y - 2 + x)$

 Lời giải.

1. Ta có $4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$.
2. Ta có $(x + 1)^2 - 9y^2 = (x + 3y + 1)(x - 3y + 1)$.
3. Ta có $x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4 = (x^2y^2 + 2)^2$.
4. Ta có $y^2 - 4y + 4 - x^2 = (y - 2)^2 - x^2 = (y - 2 - x)(y - 2 + x)$.

□

 Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $1 - 27x^3$. **ĐS:** $(1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2)$ b) $(x - 3)^3 + 27$. **ĐS:** $x(x^2 - 9x + 27)$
 c) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$. **ĐS:** $(3x + 1)^3$ d) $\frac{x^6}{27} - \frac{x^4y}{3} + x^2y - y^3$. **ĐS:** $\left(\frac{x^2}{3} - y\right)^3$

 Lời giải.

1. Ta có $1 - 27x^3 = 1^3 - (3x)^3 = (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2)$.

2. Ta có $(x-3)^3 + 27 = (x-3)^2 + 3^3 = x(x^2 - 9x + 27)$.

3. Ta có $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = (3x+1)^3$.

4. Ta có $\frac{x^6}{27} - \frac{x^4y}{3} + x^2y - y^3 = \left(\frac{x^2}{3} - y\right)^3$.

□

Bài 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $(2x-1)^3 + 8$.

ĐS: $(2x+1)(4x^2 - 8x + 7)$

2. $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.

ĐS: $(2x-1)^3$

3. $8x^3 - 12x^2 + 6x - 2$.

ĐS: $(2x-2)(4x^2 - 2x + 1)$

4. $9x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.

ĐS: $(3x-1)(3x^2 - 3x + 1)$

Lời giải.

1. Ta có $(2x-1)^3 + 8 = (2x-1)^3 + 2^3 = (2x+1)(4x^2 - 8x + 7)$.

2. Ta có $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x-1)^3$.

3. Ta có $8x^3 - 12x^2 + 6x - 2 = (2x-1)^3 - 1 = (2x-2)(4x^2 - 2x + 1)$.

4. Ta có $9x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = x^3 + (2x-1)^3 = (3x-1)(3x^2 - 3x + 1)$.

□

Bài 6. Tìm x , biết:

a) $4x^2 = 4x - 1$.

ĐS: $\frac{1}{2}$

b) $4x^2 - 27 = 0$.

ĐS: $\pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $8x^3 + 6x - 1 = 12x^2$.

ĐS: $\frac{1}{2}$

d) $(2x+1)^2 - (x-3)^2 = 0$.

ĐS: $\begin{cases} x = -4 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có $4x^2 = 4x - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

2. Ta có $4x^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - (3\sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 3\sqrt{3})(2x + 3\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3. Ta có $8x^3 + 6x - 1 = 12x^2 \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

4. Ta có $(2x+1)^2 - (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(3x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$.

□

Bài 7. Tính nhanh:

a) $75^2 - 25^2$.

ĐS: 5000

b) $86^2 - 14^2 + 87^2 - 13^2$.

ĐS: 14600

c) $33^2 - 52.33 + 26^2 - 17^2$.

ĐS: -240

d) $\frac{112^2 - 12^2}{(52,5)^2 - (47,5)^2}$.

ĐS: $\frac{124}{5}$

 Lời giải.

1. Ta có $75^2 - 25^2 = (75 + 25)(75 - 25) = 100.50 = 5000$.

2. Ta có $86^2 - 14^2 + 87^2 - 13^2 = (86 + 14)(86 - 14) + (87 + 13)(87 - 13) = 100.72 + 100.74 = 7200 + 7400 = 14600$.

3. Ta có $33^2 - 52.33 + 26^2 - 17^2 = (33 - 26)^2 - 17^2 = 7^2 - 17^2 = (7 - 17)(7 + 17) = -240$.

4. Ta có $\frac{112^2 - 12^2}{(52,5)^2 - (47,5)^2} = \frac{(112 - 12)(112 + 12)}{(52,5 - 47,5)(52,5 + 47,5)} = \frac{12400}{500} = \frac{124}{5}$.

□

 Bài 8. Chứng minh:

a) $(2k - 3)^2 - 5$ chia hết cho 4.

b) $9 - (2 + 5k)^2$ chia hết cho 5.

 Lời giải.

1. Ta có $(2k - 3)^2 - 5 = 4k^2 - 12k + 9 - 5 = 4k^2 - 12k + 4 = 4(k^2 - 3k + 1)$.
Suy ra $(2k - 3)^2 - 5$ chia hết cho 4.

2. Ta có $9 - (2 + 5k)^2 = 3^2 - (2 + 5k)^2 = 5(1 - 5k)(k + 1) \Rightarrow 9 - (2 + 5k)^2$ chia hết cho 5.

□

§8

Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử

1

Tóm tắt lý thuyết

1. Để phân tích một đa thức thành nhân tử, ta thường sử dụng các phương pháp cơ bản:

a) Đặt nhân tử chung.

b) Dùng các hằng đẳng thức.

2. Tuy nhiên, một số trường hợp không thể áp dụng ngay hai phương pháp này, mà cần nhóm các hạng tử một cách thích hợp để xuất hiện dạng hằng đẳng thức hoặc xuất hiện nhân tử chung mới.

3. Ví dụ: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 - 2x + xy - 2y$.
Thực hiện biến đổi như sau

$$x^2 - 2x + xy - 2y = (x^2 - 2x) + (xy - 2y) = x(x - 2) + y(x - 2) = (x - 2)(x + y).$$

4. Với phương pháp này để tìm cách nhóm hạng tử một cách thích hợp, cần thay đổi vị trí các hạng tử (nếu cần) sao cho khi nhóm thì từng nhóm đa thức có thể phân tích được thành nhân tử bằng hai phương pháp đã nêu ở trên. Khi đó, đa thức đã cho mới xuất hiện nhân tử chung.

2

Bài tập và các dạng toán

Dạng 31. Phân tích đa thức thành nhân tử

Nhóm các hạng tử để tạo nhân tử chung của biểu thức cho trước và đưa biểu thức về dạng tích.

 6. Chú ý: Một số trường hợp để làm xuất hiện nhân tử chung, ta cần thay đổi vị trí các hạng tử (nếu cần) hoặc đổi dấu các hạng tử, tức là: $A = -(-A)$.

BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x$.

ĐS: $x(x - 2)(x^2 + 1)$

2. $x^4 + x^3 - 8x - 8$.

ĐS: $(x - 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

3. $x^2 + xy - x - y$.

ĐS: $(x + y)(x - 1)$

4. $xy + 1 - x^2 + y$.

ĐS: $(1 + x)(y + 1 - x)$

5. $xy + 2y - 3(x + 2)$.

ĐS: $(x + 2)(y - 3)$

6. $3(x - y) + ay - ax$.

ĐS: $(x - y)(3 - a)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = x^3(x - 2) + x(x - 2) = (x - 2)(x^3 + x) = x(x - 2)(x^2 + 1)$.
2. Ta có $x^4 + x^3 - 8x - 8 = x^3(x + 1) - 8(x + 1) = (x - 1)(x^3 - 8) = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.
3. Ta có $x^2 + xy - x - y = x(x + y) - (x + y) = (x + y)(x - 1)$.
4. Ta có $xy + 1 - x^2 + y = (xy + y) + (1 - x^2) = y(1 + x) + (1 + x)(1 - x) = (1 + x)(y + 1 - x)$.
5. Ta có $xy + 2y - 3(x + 2) = y(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(y - 3)$.
6. Ta có $3(x - y) + ay - ax = 3(x - y) - a(x - y) = (x - y)(3 - a)$.

□

 **Ví dụ 2.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^4 + x^3 + x^2 + x$.

ĐS: $x(x + 1)(x^2 + 1)$

2. $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

ĐS: $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$

3. $x^2 - xy - x + y$.

ĐS: $(x - y)(x - 1)$

4. $xy + 4 - x^2 + 2y$.

ĐS: $(2 + x)(y + 2 - x)$

5. $xy + y - 2(x + 1)$.

ĐS: $(x + 1)(y - 2)$

6. $2(x + y) + ay + ax$.

ĐS: $(x + y)(2 + a)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $x^4 + x^3 + x^2 + x = x^3(x + 1) + x(x + 1) = (x + 1)(x^3 + x) = x(x + 1)(x^2 + 1)$.
2. Ta có $x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$.
3. Ta có $x^2 - xy - x + y = x(x - y) - (x - y) = (x - y)(x - 1)$.
4. Ta có $xy + 4 - x^2 + 2y = (xy + 2y) + (4 - x^2) = y(2 + x) + (2 - x)(2 + x) = (2 + x)(y + 2 - x)$.
5. Ta có $xy + y - 2(x + 1) = y(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(y - 2)$.
6. Ta có $2(x + y) + ay + ax = 2(x + y) + a(x + y) = (x + y)(2 + a)$.

□

 **Ví dụ 3.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^2 - 2x + 1 - y^2$.

ĐS: $(x - 1 + y)(x - 1 - y)$

2. $x^2 - 2xy + y^2 - 9z^2$.

ĐS: $(x - y - 3z)(x - y + 3z)$

3. $x^2 - 4xy + 4y^2 - z^2 + 4zt - 4t^2$.

ĐS: $(x - 2y - z + 2t)(x - 2y + z - 2t)$

4. $a^4 - ax^3 - ay + xy.$

ĐS: $(a - x)(a^3 + a^2x + ax^2 - y)$

5. $2x^2(y + 2z) + 2y^2(z + 2x) + 2z^2(x + 2y) + 9xyz.$

ĐS: $(y + 2z)(2x + z)(x + 2y)$

 Lời giải.

1. $x^2 - 2x + 1 - y^2 = (x - 1)^2 - y^2 = (x - 1 + y)(x - 1 - y).$

2. $x^2 - 2xy + y^2 - 9z^2 = (x - y)^2 - (3z)^2 = (x - y - 3z)(x - y + 3z).$

3. $x^2 - 4xy + 4y^2 - z^2 + 4zt - 4t^2 = (x - 2y)^2 - (z - 2t)^2 = (x - 2y - z + 2t)(x - 2y + z - 2t).$

4. $a^4 - ax^3 - ay + xy = a(a^3 - x^3) - y(a - x) = a(a - x)(a^2 + ax + x^2) - y(a - x) = (a - x)(a^3 + a^2x + ax^2 - y).$

5. Đặt $2x^2(y + 2z) + 2y^2(z + 2x) + 2z^2(x + 2y) + 9xyz = T$ thì

$$\begin{aligned}
 T &= 2x^2(y + 2z) + (xyz + 2y^2z + 4xy^2) + (2z^2x + 4z^2y + 8xyz) \\
 &= 2x^2(y + 2z) + y(xz + 2yz + 4xy) + 2z(xz + 2yz + 4xy) \\
 &= 2x^2(y + 2z) + (xz + 2yz + 4xy)(y + 2z) \\
 &= (y + 2z)(2x^2 + xz + 2yz + 4xy) \\
 &= (y + 2z)(x(2x + z) + 2y(2x + z)) \\
 &= (y + 2z)(2x + z)(x + 2y).
 \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 4.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^2 + 2x + 1 - y^2.$

ĐS: $(x + 1 + y)(x + 1 - y)$

2. $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2.$

ĐS: $(x + y + 2z)(x + y - 2z)$

3. $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2.$

ĐS: $(x - y + z - t)(x - y - z + t)$

4. $a^3 - ax^2 - ay + xy.$

ĐS: $(a - x)(a^2 + ax - y)$

5. $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 2xyz.$

ĐS: $(y + z)(x + z)(x + y)$

 Lời giải.

1. $x^2 + 2x + 1 - y^2 = (x + 1)^2 - y^2 = (x + 1 + y)(x + 1 - y).$

2. $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2 = (x + y)^2 - (2z)^2 = (x + y + 2z)(x + y - 2z).$

3. $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2 = (x - y)^2 - (z - t)^2 = (x - y + z - t)(x - y - z + t).$

4. $a^3 - ax^2 - ay + xy = a(a^2 - x^2) - y(a - x) = a(a - x)(a + x) - y(a - x) = (a - x)(a^2 + ax - y).$

5. Đặt $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 2xyz = T$ thì

$$\begin{aligned}
 T &= x^2(y + z) + (xyz + y^2z + xy^2) + (z^2x + z^2y + xyz) \\
 &= x^2(y + z) + y(xz + yz + xy) + z(xz + yz + xy) \\
 &= x^2(y + z) + (xz + yz + xy)(y + z) \\
 &= (y + z)(x^2 + xz + yz + xy) \\
 &= (y + z)(x(x + z) + y(x + z)) \\
 &= (y + z)(x + z)(x + y).
 \end{aligned}$$

Dạng 32. Tính giá trị của biểu thức cho trước

Sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử, thay giá trị của biến (nếu cần) để tính nhanh giá trị các biểu thức.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $11.81,5 + 11.18,5 - 10.28,5 - 10.71,5$. **ĐS:** 100

2. $40^2 - 28^2 + 32^2 + 80.32$. **ĐS:** 4400

Lời giải.

1. $11.81,5 + 11.18,5 - 10.28,5 - 10.71,5 = 11(81,5 + 18,5) - 10(28,5 + 71,5) = 1100 - 1000 = 100$.

2.

$$\begin{aligned} 40^2 - 28^2 + 32^2 + 80.32 &= (40^2 + 2.40.32 + 32^2) - 28^2 \\ &= (40 + 32)^2 - 28^2 \\ &= 72^2 - 28^2 \\ &= (72 - 28)(72 + 28) \\ &= 4400 \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $13 \cdot 65,5 + 13 \cdot 34,5 - 3 \cdot 9,5 - 3 \cdot 90,5$. **ĐS:** 1000

2. $39^2 - 35^2 + 26^2 + 52 \cdot 39$. **ĐS:** 3000

Lời giải.

1. $13 \cdot 65,5 + 13 \cdot 34,5 - 3 \cdot 9,5 - 3 \cdot 90,5 = 13(65,5 + 34,5) - 3(9,5 + 90,5) = 1300 - 300 = 1000$.

2.

$$\begin{aligned} 39^2 - 35^2 + 26^2 + 52 \cdot 39 &= (39^2 + 2 \cdot 39 \cdot 26 + 26^2) - 35^2 \\ &= (39 + 26)^2 - 35^2 \\ &= 65^2 - 35^2 \\ &= (65 + 35)(65 - 35) \\ &= 100 \cdot 30 \\ &= 3000. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $A = x(x - 2) + x - 2$ tại $x = 102$. **ĐS:** 10300

2. $B = xy - 1 + x - y$ tại $x = 101$ và $y = 99$. ĐS: 10000

3. $C = x^2 + 2xy - z^2 + y^2$ tại $x = 25$, $y = 35$ và $z = 40$. ĐS: 2000

4. $D = x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2$ tại $x = 26$, $y = 6$, $z = 13$ và $t = 3$. ĐS: 300

 Lời giải.

1. $A = x(x - 2) + x - 2 = (x - 2)(x + 1)$.

Thay $x = 102$ ta được $A = (102 - 2)(102 + 1) = 100.103 = 10300$

2. $B = xy - 1 + x - y = x(y + 1) - (y + 1) = (y + 1)(x - 1)$.

Thay $x = 101$ và $y = 99$ ta được $B = (99 + 1)(101 - 1) = 100.100 = 10000$.

3. $C = x^2 + 2xy - z^2 + y^2 = (x + y)^2 - z^2 = (x + y + z)(x + y - z)$.

Thay $x = 25$, $y = 35$ và $z = 40$ ta được $C = 100.20 = 2000$.

4. $D = x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2 = (x - y)^2 - (z - t)^2 = (x - y + z - t)(x - y - z + t)$.

Thay $x = 26$, $y = 6$, $z = 13$ và $t = 3$ ta được $D = 30.10 = 300$.

□

 **Ví dụ 4.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $A = 2x(x + 1) + x + 1$ tại $x = 99$. ĐS: 19900

2. $B = xy + 1 + x + y$ tại $x = 99$ và $y = 99$. ĐS: 10000

3. $C = x^2 + 2xz + z^2 - y^2$ tại $x = 25$, $y = 35$ và $z = 40$. ĐS: 3000

4. $D = x^2 + 2xy + y^2 - z^2 - 2zt - t^2$ tại $x = 89$, $y = 11$, $z = 60$ và $t = 30$. ĐS: 1900

 Lời giải.

1. $A = 2x(x + 1) + x + 1 = (x + 1)(2x + 1)$.

Thay $x = 99$ ta được $A = 100.199 = 19900$.

2. $B = xy + 1 + x + y = x(y + 1) + (y + 1) = (y + 1)(x + 1)$.

Thay $x = 99$ và $y = 99$ ta được $B = 100.100 = 10000$.

3. $C = x^2 + 2xz + z^2 - y^2 = (x + z)^2 - y^2 = (x + z + y)(x + z - y)$.

Thay $x = 25$, $y = 35$ và $z = 40$ ta được $C = 100.30 = 3000$.

4. $D = x^2 + 2xy + y^2 - z^2 - 2zt - t^2 = (x + y)^2 - (z + t)^2 = (x + y + z + t)(x + y - z - t)$.

Thay $x = 89$, $y = 11$, $z = 60$ và $t = 30$ ta được $D = 190.10 = 1900$.

□

 Dạng 33. Tìm giá trị của ẩn thỏa mãn đẳng thức cho trước

Bước 1 Chuyển tất cả các hạng tử về về trái (nếu cần), về phải bằng 0;

Bước 2 Phân tích về trái thành tích các nhân tử dạng $A.B = 0$;

Bước 3 Lần lượt tìm x sao cho $A = 0$ và $B = 0$ và kết luận.

 BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x , biết:

a) $x(x+2) + x + 2 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$ b) $4x(x-1) - x + 1 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$

c) $x^3 - 4x + x - 2 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$ d) $x^2(x-6) - x^2 + 36 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = 6 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

e) $x^3 + x - x^2 - 1 = 0$. **ĐS:** $x = 1$ f) $a^3 - x - x^3 + a = 0$. **ĐS:** $x = a$

 **Lời giải.**

1. $x(x+2) + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2. \end{cases}$

2. $4x(x-1) - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{4}. \end{cases}$

3. $x^3 - 4x + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) + (x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1. \end{cases}$

4.

$$\begin{aligned} x^2(x-6) - x^2 + 36 = 0 &\Leftrightarrow x^2(x-6) - (x-6)(x+6) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-6)(x^2 - x - 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-6)(x-3)(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 3 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

5. $x^3 + x - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) - (x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

6. $a^3 - x - x^3 + a = 0 \Leftrightarrow (a-x)(a^2 + ax + x^2) + (a-x) = 0 \Leftrightarrow (a-x)(a^2 + ax + x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = a$.

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết:

a) $x(x-1) + x - 1 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ b) $x(x+2) - x - 2 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

c) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$. **ĐS:** $x = 1$ d) $x^2(2x-1) - 1 + 4x^2 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$

e) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ f) $a^2 + x - x^2 - a = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = a \\ x = 1 - a \end{cases}$

 **Lời giải.**

$$1. x(x-1) + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

$$2. x(x+2) - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1. \end{cases}$$

$$3. x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

4.

$$\begin{aligned} x^2(2x-1) - 1 + 4x^2 = 0 &\Leftrightarrow x^2(2x-1) + (2x-1)(2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)(x+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2(x-1) - (x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$6. a^2 + x - x^2 - a = 0 \Leftrightarrow (a-x)(a+x) - (a-x) = 0 \Leftrightarrow (a-x)(a+x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = 1 - a. \end{cases}$$

□

Dạng 34. Chứng minh tính chia hết

Để chứng minh biểu thức P chia hết cho biểu thức Q , ta phân tích biểu thức P về dạng tích các nhân tử trong đó có ít nhất một nhân tử là biểu thức Q .
Tương tự cho trường hợp đặc biệt nếu Q là hằng số.

✎✎✎ BÀI TẬP MẪU ✎✎✎

 **Ví dụ 1.** Chứng minh $A = n^3 + 2n^2 - 2n - 1$ chia hết cho $n - 1$ với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Ta có $A = (n^3 - 1) + (2n^2 - 2n) = (n-1)(n^2 + n + 1) + 2n(n-1) = (n-1)(n^2 - n + 1)$.
Suy ra A chia hết cho $n - 1$ với mọi số nguyên n . □

 **Ví dụ 2.** Chứng minh $B = n^3 + n^2 + n + 1$ chia hết cho $n + 1$ với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Ta có $B = n^3 + n^2 + n + 1 = n^2(n+1) + (n+1) = (n+1)(n^2+1)$.
Suy ra B chia hết cho $n + 1$ với mọi số nguyên n . □

 **Ví dụ 3.** Chứng minh với mọi số nguyên x, y, z thì:

1. $A = x^3 - x + x^2 - 1$ chia hết cho $x - 1$.
2. $B = x^2 - xy + y - x$ chia hết cho $x - y$.
3. $C = xy(x + y) + xy - x - y - 1$ chia hết cho $x + y + 1$.
4. $D = x^2 + 4xy + 4y^2 - 9z^2$ chia hết cho $x + 2y + 3z$.

 **Lời giải.**

1. $A = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)^2(x - 1)$.
Vậy A chia hết cho $x - 1$.
2. $B = x^2 - xy + y - x = x(x - y) - (x - y) = (x - y)(x - 1)$.
Vậy B chia hết cho $x - y$.
3. $C = xy(x + y) + xy - x - y - 1 = xy(x + y + 1) - (x + y + 1) = (x + y + 1)(xy - 1)$.
Vậy C chia hết cho $x + y + 1$.
4. $D = x^2 + 4xy + 4y^2 - 9z^2 = (x + 2y)^2 - (3z)^2 = (x + 2y + 3z)(x + 2y - 3z)$.
Vậy D chia hết cho $x + 2y + 3z$.

□

 **Ví dụ 4.** Chứng minh với mọi số nguyên x, y, z thì:

1. $A = x^3 + x + x^2 + 1$ chia hết cho $x + 1$.
2. $B = x^2 + xy + y + x$ chia hết cho $x + y$.
3. $C = x^2y + xy^2 - x - y + 2(xy - 1)$ chia hết cho $x + y + 2$.
4. $D = x^2 + 2xy + y^2 - z^2$ chia hết cho $x + y + z$.

 **Lời giải.**

1. $A = x^3 + x + x^2 + 1 = x(x^2 + 1) + (x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x + 1)$.
Vậy A chia hết cho $x + 1$.
2. $B = x^2 + xy + y + x = x(x + y) + (x + y) = (x + y)(x + 1)$.
Vậy B chia hết cho $x + y$.
3. $C = x(xy - 1) + y(xy - 1) + 2(xy - 1) = (xy - 1)(x + y + 2)$.
Vậy C chia hết cho $x + y + 2$.
4. $D = x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = (x + y)^2 - z^2 = (x + y + z)(x + y - z)$.
Vậy D chia hết cho $x + y + z$.

□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Phân tích các đa thức thành nhân tử:

$$1. x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x. \quad \text{ĐS: } x(x+3)(x^2+1)$$

$$2. x^4 + x^2 - 27x - 9. \quad \text{ĐS: } (x-3)(x^3+3x^2+10x+3)$$

$$3. x^2 - xy - x + y. \quad \text{ĐS: } (x-y)(x-1)$$

$$4. xy + 4 - x^2 + 2y. \quad \text{ĐS: } (2+x)(y+2-x)$$

$$5. xy + y - 2(x+1). \quad \text{ĐS: } (x+1)(y-2)$$

$$6. 5(x-y) + ax - ay. \quad \text{ĐS: } (x-y)(5+a)$$

Lời giải.

$$1. x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x = x^3(x+3) + x(x+3) = x(x+3)(x^2+1).$$

2.

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 27x - 9 &= x(x^3 - 27) + (x^2 - 9) \\ &= x(x-3)(x^2+3x+9) + (x-3)(x+3) \\ &= (x-3)(x^3+3x^2+10x+3). \end{aligned}$$

$$3. x^2 - xy - x + y = x(x-y) - (x-y) = (x-y)(x-1).$$

$$4. xy + 4 - x^2 + 2y = y(2+x) + (2-x)(2+x) = (2+x)(y+2-x).$$

$$5. xy + y - 2(x+1) = y(x+1) - 2(x+1) = (x+1)(y-2).$$

$$6. 5(x-y) + ax - ay = 5(x-y) + a(x-y) = (x-y)(5+a).$$

□

Bài 2. Phân tích các đa thức thành nhân tử:

$$1. x^2 + 4x + 4 - 4y^2. \quad \text{ĐS: } (x+2+2y)(x+2-2y)$$

$$2. x^2 + 6xy + 9y^2 - 4z^2. \quad \text{ĐS: } (x+3y+2z)(x+3y-2z)$$

$$3. x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 4zt - 4t^2. \quad \text{ĐS: } (x+y+z-2t)(x+y-z+2t)$$

$$4. a^2 - x^2 - ay + xy. \quad \text{ĐS: } (a-x)(a+x-y)$$

$$5. x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y). \quad \text{ĐS: } (y-z)(x-y)(x-z)$$

Lời giải.

$$1. x^2 + 4x + 4 - 4y^2 = (x+2)^2 - (2y)^2 = (x+2+2y)(x+2-2y).$$

$$2. x^2 + 6xy + 9y^2 - 4z^2 = (x+3y)^2 - (2z)^2 = (x+3y+2z)(x+3y-2z).$$

$$3. x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 4zt - 4t^2 = (x+y)^2 - (z-2t)^2 = (x+y+z-2t)(x+y-z+2t).$$

$$4. a^2 - x^2 - ay + xy = (a-x)(a+x) - y(a-x) = (a-x)(a+x-y).$$

5.

$$\begin{aligned}
 x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) &= x^2(y-z) + (y^2z - z^2y) - (xy^2 - xz^2) \\
 &= x^2(y-z) + yz(y-z) - x(y-z)(y+z) \\
 &= (y-z)(x^2 + yz - xy - xz) \\
 &= (y-z)(x(x-y) - z(x-y)) \\
 &= (y-z)(x-y)(x-z).
 \end{aligned}$$

□

Bài 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $10 \cdot 80,5 + 10 \cdot 19,5 - 8 \cdot 20,5 - 8 \cdot 79,5$.

ĐS: 200

2. $50^2 - 18^2 + 32^2 + 100 \cdot 32$.

ĐS: 6400

Lời giải.

1. $10 \cdot 80,5 + 10 \cdot 19,5 - 8 \cdot 20,5 - 8 \cdot 79,5 = 10(80,5 + 19,5) - 8(20,5 + 79,5) = 10 \cdot 100 - 8 \cdot 100 = 200$.

2.

$$\begin{aligned}
 50^2 - 18^2 + 32^2 + 100 \cdot 32 &= 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 32 + 32^2 - 18^2 \\
 &= (50 + 32)^2 - 18^2 \\
 &= 82^2 - 18^2 \\
 &= (82 + 18)(82 - 18) \\
 &= 6400.
 \end{aligned}$$

□

Bài 4. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $A = x(3x + 1) + 3x + 1$ tại $x = 33$.

ĐS: 3400

2. $B = xy + 2x + 2y + 4$ tại $x = 98, y = 98$.

ĐS: 1000

3. $C = x^2 - z^2 + 4y^2 + 4xy$ tại $x = 40, y = 20, z = 20$.

ĐS: 6000

4. $D = x^2 + 4xy + 4y^2 - z^2 + 2zt - t^2$ tại $x = 10, y = 40, z = 30$ và $t = 20$.

ĐS: 8000

Lời giải.

1. $A = x(3x + 1) + 3x + 1 = (3x + 1)(x + 1)$.

Thay $x = 33$ ta có $A = 100 \cdot 34 = 3400$.

2. $B = xy + 2x + 2y + 4 = x(y + 2) + 2(y + 2) = (x + 2)(y + 2)$.

Thay $x = 98, y = 98$ ta có $B = 100 \cdot 100 = 1000$.

3. $C = x^2 - z^2 + 4y^2 + 4xy = (x + 2y)^2 - z^2 = (x + 2y + z)(x + 2y - z)$.

Thay $x = 40, y = 20, z = 20$ ta có $C = 100 \cdot 60 = 6000$.

4. $D = x^2 + 4xy + 4y^2 - z^2 + 2zt - t^2 = (x + 2y)^2 - (z - t)^2 = (x + 2y + z - t)(x + 2y - z + t)$.

Thay $x = 10, y = 40, z = 30$ và $t = 20$ ta có $D = 100 \cdot 80 = 8000$.

□

Bài 5. Tìm x , biết:

1. $2x(x-3) + x - 3 = 0.$

ĐS: $x = 3; x = -\frac{1}{2}$

2. $x(x+1) - x - 1 = 0.$

ĐS: $x = -1; x = 1$

3. $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0.$

ĐS: $x = 3$

4. $3x^2(2x-1) + 1 - 4x^2 = 0.$

ĐS: $x = \frac{1}{2}; x = 1; x = -\frac{1}{3}$

5. $x^3 + 2x - x^2 - 2 = 0.$

ĐS: $x = 1$

6. $4a^2 + x - x^2 - 2a = 0.$

ĐS: $x = 2a; x = 1 - 2a$

Lời giải.

1. $2x(x-3) + x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$

2. $x(x+1) - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$

3. $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) + (x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$

4.

$$\begin{aligned} 3x^2(2x-1) + 1 - 4x^2 = 0 &\Leftrightarrow 3x^2(2x-1) - (2x-1)(2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)(3x^2 - 2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)(3x(x-1) + x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)(x-1)(3x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

5. $x^3 + 2x - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2+2) - (x^2+2) = 0 \Leftrightarrow (x^2+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

6. $4a^2 + x - x^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow (2a-x)(2a+x) - (2a-x) = 0 \Leftrightarrow (2a-x)(2a+x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ x = 1 - 2a \end{cases}.$

□

Bài 6. Chứng minh $A = n^3 + 2n - n^2 - 2$ chia hết cho $n-1$ với mọi số nguyên n .

Lời giải.

Ta có $A = n^3 + 2n - n^2 - 2 = n^2(n-1) + 2(n-1) = (n-1)(n^2+2).$

Suy ra A chia hết cho $n-1$ với mọi số nguyên n .

□

Bài 7. Chứng minh với mọi số nguyên x, y, z thì:

1. $A = x^2 - 3x + 2(x-3)$ chia hết cho $x-3$.

2. $B = y^2 - xy + y - x$ chia hết cho $x - y$.
3. $C = x^2y + xy^2 + 2x + 2y$ chia hết cho $x + y$.
4. $D = x^2 + 6xy + 9y^2 - z^2$ chia hết cho $x + 3y + z$.

 Lời giải.

1. $A = x^2 - 3x + 2(x - 3) = x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(x + 2)$.
Vậy A chia hết cho $x - 3$.
2. $B = y^2 - xy + y - x = y(y - x) + (y - x) = (y - x)(y + 1)$.
Vậy B chia hết cho $x - y$.
3. $C = x^2y + xy^2 + 2x + 2y = xy(x + y) + 2(x + y) = (x + y)(xy + 2)$.
Vậy C chia hết cho $x + y$.
4. $D = x^2 + 6xy + 9y^2 - z^2 = (x + 3y)^2 - z^2 = (x + 3y + z)(x + 3y - z)$.
Vậy D chia hết cho $x + 3y + z$.

□

§9 Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp

1 Tóm tắt lý thuyết

- a) Ngoài trừ một số trường hợp đơn giản có thể sử dụng một trong các phương pháp như đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức hay nhóm hạng tử thì trong nhiều bài toán, ta phải phối hợp nhiều phương pháp ấy mới giải quyết được bài toán.
- b) *Ví dụ:* Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 + 4x + 3$.
Biểu diễn đa thức đã cho dưới dạng:

$$x^2 + 4x + 3 = (x^2 + 4x + 4) - 1 = (x + 2)^2 - 1 = (x + 1)(x + 3).$$

Cách làm này gọi là phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 35. Phân tích đa thức thành nhân tử

Đối với loại toán phân tích đa thức thành nhân tử, cần làm nhiều bài tập để qua đó có thể rút ra kinh nghiệm, tạo được thói quen có thể thêm bớt, ghép hạng tử, ... sao cho phù hợp.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 **Ví dụ 1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x(x - 1) + x(x + 3)$. ĐS: $2x(x + 1)$

2. $x^2 + 3x + 2$. ĐS: $(x + 2)(x + 1)$

3. $2x^2 - 5x + 3$. ĐS: $(x - 1)(2x - 3)$

4. $-4x^2 + 8x - 4$. ĐS: $-4(x - 1)^2$

5. $4x^4 + 1$. ĐS: $(2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$

6. $xy + 2x + y + 2$. ĐS: $(y + 2)(x + 1)$

7. $3xy^2 - 6xy + 3x$. ĐS: $3x(y - 1)^2$

 **Lời giải.**

1. $x(x-1) + x(x+3) = x(x-1+x+3) = x(2x+2) = 2x(x+1).$
2. $x^2 + 3x + 2 = x(x+2) + (x+2) = (x+2)(x+1).$
3. $2x^2 - 5x + 3 = 2x(x-1) - 3(x-1) = (x-1)(2x-3).$
4. $-4x^2 + 8x - 4 = -4(x^2 - 2x + 1) = -4(x-1)^2.$
5. $4x^4 + 1 = (2x^2 + 1)^2 - (2x)^2 = (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1).$
6. $xy + 2x + y + 2 = x(y+2) + (y+2) = (y+2)(x+1).$
7. $3xy^2 - 6xy + 3x = 3x(y^2 - 2y + 1) = 3x(y-1)^2.$

□

 **Ví dụ 2.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- | | |
|------------------------|---|
| 1. $x(x-2) + x(x+4).$ | ĐS: $2x(x+1)$ |
| 2. $x^2 + 5x + 4.$ | ĐS: $(x+1)(x+4)$ |
| 3. $x^2 - 3x + 2.$ | ĐS: $(x-1)(x-2)$ |
| 4. $-5x^2 + 10x - 5.$ | ĐS: $-5(x-1)^2$ |
| 5. $x^4 + 4.$ | ĐS: $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ |
| 6. $xy - 3x + y - 3.$ | ĐS: $(y-3)(x+1)$ |
| 7. $4xy^2 - 8xy + 4x.$ | ĐS: $4x(y-1)^2$ |

 **Lời giải.**

1. $x(x-2) + x(x+4) = x(x-2+x+4) = x(2x+2) = 2x(x+1).$
2. $x^2 + 5x + 4 = x(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x+4).$
3. $x^2 - 3x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x-2).$
4. $-5x^2 + 10x - 5 = -5(x^2 - 2x + 1) = -5(x-1)^2.$
5. $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$
6. $xy - 3x + y - 3 = x(y-3) + (y-3) = (y-3)(x+1).$
7. $4xy^2 - 8xy + 4x = 4x(y^2 - 2y + 1) = 4x(y-1)^2.$

□

Dạng 36. Tính giá trị của biểu thức cho trước

Sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử, thay giá trị của biến (nếu cần) để tính nhanh giá trị các biểu thức.

  **BÀI TẬP MẪU**  

 **Ví dụ 1.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $7^3 + 2 \cdot 7^2 \cdot 13 + 7 \cdot 13^2$. **ĐS:** 2800
2. $17^3 - 2 \cdot 17^2 \cdot 7 + 17 \cdot 7^2$. **ĐS:** 1700
3. $10^3 \cdot 7^2 + 42000 + 10^3 \cdot 9$. **ĐS:** 100000
4. $75^2 - 25^2 + 35^2 - 65^2$. **ĐS:** 2000
5. $x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$ tại $x = 1$. **ĐS:** $\frac{16}{25}$
6. $4x^2 - y^2 + 6y - 9$ tại $x = 2, y = 1$. **ĐS:** 12
7. $x(2x^2 + 2y^2) - x(x^2 + 3y^2)$ tại $x = 12, y = 2$. **ĐS:** 1680
8. $xy(y - 1) + y(1 + x)$ tại $x = 1, y = 201$. **ĐS:** 40602

 **Lời giải.**

1. $7^3 + 2 \cdot 7^2 \cdot 13 + 7 \cdot 13^2 = 7(7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 13 + 13^2) = 7(7 + 13)^2 = 7 \cdot 20^2 = 2800$.
2. $17^3 - 2 \cdot 17^2 \cdot 7 + 17 \cdot 7^2 = 17(17^2 - 2 \cdot 17 \cdot 7 + 7^2) = 17(17 - 7)^2 = 1700$.
3. $10^3 \cdot 7^2 + 42000 + 10^3 \cdot 9 = 10^3(7^2 + 42 + 9) = 10^3 \cdot 100 = 100000$.
4. $75^2 - 25^2 + 35^2 - 65^2 = (75 - 25)(75 + 25) - (65 - 35)(65 + 35) = 5000 - 3000 = 2000$.
5. $A = x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25} = \left(x - \frac{1}{5}\right)^2$. Thay $x = 1$ ta được $A = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.
6. $B = 4x^2 - y^2 + 6y - 9 = (2x)^2 - (y - 3)^2 = (2x + y - 3)(2x - y + 3)$.
Thay $x = 2, y = 1$ ta được $B = 2 \cdot 6 = 12$.
7. $C = x(2x^2 + 2y^2) - x(x^2 + 3y^2) = x(x^2 - y^2) = x(x - y)(x + y)$.
Thay $x = 12, y = 2$ ta được $C = 12 \cdot 10 \cdot 14 = 1680$.
8. $D = xy(y - 1) + y(1 + x) = xy^2 + y = y(xy + 1)$.
Thay $x = 1, y = 201$ ta được $D = 201 \cdot 202 = 40602$.

□

 **Ví dụ 2.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $5^3 + 2 \cdot 5^2 \cdot 15 + 5 \cdot 15^2$. **ĐS:** 2000
2. $11^3 - 2 \cdot 11^2 \cdot 9 + 11 \cdot 9^2$. **ĐS:** 44
3. $10^3 \cdot 3^2 + 24000 + 10^3 \cdot 4$. **ĐS:** 37000
4. $89^2 - 11^2 + 13^2 - 87^2$. **ĐS:** 400
5. $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ tại $x = 9$. **ĐS:** $\frac{676}{9}$
6. $x^2 - y^2 + 10y - 25$ tại $x = 4, y = 6$. **ĐS:** 15
7. $x(3x^2 + 3y^2) - x(2x^2 + 4y^2)$ tại $x = 6, y = 1$. **ĐS:** 210

8. $xy(y-2) + 2y(1+x)$ tại $x = -1, y = 2$.

ĐS: 0

 **Lời giải.**

1. $5^3 + 2 \cdot 5^2 \cdot 15 + 5 \cdot 15^2 = 5(5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 15 + 15^2) = 5(5 + 15)^2 = 5 \cdot 20^2 = 2000$.
2. $11^3 - 2 \cdot 11^2 \cdot 9 + 11 \cdot 9^2 = 11(11^2 - 2 \cdot 11 \cdot 9 + 9^2) = 11(11 - 9)^2 = 11 \cdot 2^2 = 44$.
3. $10^3 \cdot 3^2 + 24000 + 10^3 \cdot 4 = 10^3(3^2 + 24 + 4) = 10^3 \cdot 37 = 37000$.
4. $89^2 - 11^2 + 13^2 - 87^2 = (89 + 11)(89 - 11) - (87 + 13)(87 - 13) = 7800 - 7400 = 400$.
5. $A = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$.
Thay $x = 9$ ta được $A = \left(9 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{676}{9}$.
6. $B = x^2 - y^2 + 10y - 25 = x^2 - (y - 5)^2 = (x + y - 5)(x - y + 5)$.
Thay $x = 4, y = 6$ ta được $C = 5 \cdot 3 = 15$.
7. $C = x(3x^2 + 3y^2) - x(2x^2 + 4y^2) = x^3 - xy^2 = x(x - y)(x + y)$.
Thay $x = 6, y = 1$ ta được $C = 6 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.
8. Thay $x = -1, y = 2$ ta được $D = -2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$.

□

Dạng 37. Tìm giá trị của ẩn thỏa mãn đẳng thức cho trước

Bước 1 Chuyển tất cả các hạng tử về về trái (nếu cần), về phải bằng 0;

Bước 2 Phân tích về trái thành tích các nhân tử dạng $A \cdot B = 0$;

Bước 3 Lần lượt tìm x sao cho $A = 0$ và $B = 0$ và kết luận.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x , biết:

1. $2x(x-2) + x(x+5) = 0$. ĐS: $x = 0; x = -\frac{1}{3}$
2. $x(3x^2 + 3) - x(2x^2 + 3) = 0$. ĐS: $x = 0$
3. $2x(x-1)^2 - 2x(x+1)^2 = 0$. ĐS: $x = 0$
4. $4 - 5x + x^2 = 0$. ĐS: $x = 1; x = 4$
5. $3x^3 - 48x = 0$. ĐS: $x = 0; x = 4; x = -4$

 **Lời giải.**

1. $2x(x-2) + x(x+5) = 0 \Leftrightarrow x(3x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$.
2. $x(3x^2 + 3) - x(2x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x(3x^2 + 3 - 2x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$3. 2x(x-1)^2 - 2x(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(-4x) = 0 \Leftrightarrow -8x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$4. 4 - 5x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x-1) - 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4. \end{cases}$$

$$5. 3x^3 - 48x = 0 \Leftrightarrow 3x(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -4. \end{cases}$$

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết:

$$1. x(x-5) + x(x+15) = 0. \quad \text{ĐS: } x = 0; x = -5$$

$$2. x(2x^2 + 5) - x(x^2 + 5) = 0. \quad \text{ĐS: } x = 0$$

$$3. x(x-2)^2 - x(x+2)^2 = 0. \quad \text{ĐS: } x = 0$$

$$4. 5 - 6x + x^2 = 0. \quad \text{ĐS: } x = 1; x = 5$$

$$5. 2x^3 - 16x = 0. \quad \text{ĐS: } x = 0; x = \pm 2\sqrt{2}$$

 **Lời giải.**

$$1. x(x-5) + x(x+15) = 0 \Leftrightarrow x(2x+10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5. \end{cases}$$

$$2. x(2x^2 + 5) - x(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 5 - x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$3. x(x-2)^2 - x(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x(-4x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$4. 5 - 6x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x-1) - 5(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5. \end{cases}$$

$$5. 2x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

□

Dạng 38. Chứng minh tính chia hết

Để chứng minh biểu thức P chia hết cho biểu thức Q , ta phân tích biểu thức P về dạng tích các nhân tử trong đó có ít nhất một nhân tử là biểu thức Q .

Tương tự cho trường hợp đặc biệt nếu Q là hằng số.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh $n(7n^2 + 5) - n(6n^2 + 6)$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Đặt $A = n(7n^2 + 5) - n(6n^2 + 6)$ thì ta có $A = n(7n^2 + 5 - 6n^2 - 6) = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$. Vì A là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên A chia hết cho 2 và 3. Do đó, A chia hết cho 6. □

Ví dụ 2. Chứng minh $5(n^2 + 7n + 12) + n(n^2 + 7n + 12)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên n .

Lời giải.

Đặt $A = 5(n^2 + 7n + 12) + n(n^2 + 7n + 12)$ thì ta có

$$A = (n^2 + 7n + 12)(n + 5) = [n(n + 3) + 4(n + 3)](n + 5) = (n + 3)(n + 4)(n + 5).$$

Vì A là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên A chia hết cho 3. □

Ví dụ 3. Chứng minh với mọi số nguyên x, y thì:

1. $A = x(5x^2 + 1) - x(4x^2 + 2)$ chia hết cho $x - 1$.
2. $B = x^3y^2 - 3x^2y + 2x$ chia hết cho $xy - 1$.
3. $C = xy(x^3 + 2) - y(xy^3 + 2x)$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.

Lời giải.

1. $A = x(5x^2 + 1) - x(4x^2 + 2) = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$. Vậy A chia hết cho $x - 1$.
2. $B = x^3y^2 - 3x^2y + 2x = x(x^2y^2 - 3xy + 2) [xy(xy - 1) - 2(xy - 1)] = x(xy - 1)(xy - 2)$.
Vậy B chia hết cho $xy - 1$.
3. $C = xy(x^3 + 2) - y(xy^3 + 2x) = x^4y - xy^4 = xy(x^3 - y^3) = xy(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
Vậy C chia hết cho $x^2 + xy + y^2$. □

Ví dụ 4. Chứng minh với mọi số nguyên x, y thì:

1. $A = x(3x^2 + 1) - x(2x^2 + 2)$ chia hết cho $x - 1$.
2. $B = x^3y^2 - 2x^2y + x$ chia hết cho $xy - 1$.
3. $C = xy(x^3 + 2) - y(xy^3 + 3x)$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.

Lời giải.

1. $A = x(3x^2 + 1) - x(2x^2 + 2) = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$. Vậy A chia hết cho $x - 1$.
2. $B = x^3y^2 - 2x^2y + x = x(x^2y^2 - 2xy + 1) = x(xy - 1)^2$. Vậy B chia hết cho $xy - 1$.
3. $C = xy(x^3 + 2) - y(xy^3 + 3x) = x^4y - xy^4 = xy(x^3 - y^3) = xy(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
Vậy C chia hết cho $x^2 + xy + y^2$. □

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:



1. $x(x - 3) + x(x + 5)$. ĐS: $2x(x + 1)$
2. $x^2 + 4x + 3$. ĐS: $(x + 3)(x + 1)$
3. $x^2 - 7x + 6$. ĐS: $(x - 1)(x - 6)$
4. $-3x^2 + 6x - 3$. ĐS: $-3(x - 1)^2$
5. $x^4 - 81$. ĐS: $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$
6. $xy - 7x + y - 7$. ĐS: $(y - 7)(x + 1)$
7. $8xy^2 - 16xy + 8x$. ĐS: $8x(y - 1)^2$

Lời giải.

1. $x(x - 3) + x(x + 5) = x(x - 3 + x + 5) = x(2x + 2) = 2x(x + 1)$.
2. $x^2 + 4x + 3 = x(x + 3) + (x + 3) = (x + 3)(x + 1)$.
3. $x^2 - 7x + 6 = x(x - 1) - 6(x - 1) = (x - 1)(x - 6)$.
4. $-3x^2 + 6x - 3 = -3(x^2 - 2x + 1) = -3(x - 1)^2$.
5. $x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$.
6. $xy - 7x + y - 7 = x(y - 7) + (y - 7) = (y - 7)(x + 1)$.
7. $8xy^2 - 16xy + 8x = 8x(y^2 - 2y + 1) = 8x(y - 1)^2$.

□

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $13^3 - 2 \cdot 13^2 \cdot 3 + 13 \cdot 3^2$. ĐS: 1300
2. $23^3 - 2 \cdot 23^2 \cdot 3 + 23 \cdot 3^2$. ĐS: 9200
3. $10^3 \cdot 5^2 + 110000 + 10^3 \cdot 11$. ĐS: 146000
4. $73^2 - 27^2 + 21^2 - 79^2$. ĐS: -1200
5. $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ tại $x = 16$. ĐS: $\frac{3969}{16}$
6. $9x^2 - y^2 + 4y - 4$ tại $x = 1, y = 5$. ĐS: 0
7. $x(4x^2 + 3y^2) - x(3x^2 + 4y^2)$ tại $x = -3, y = -2$. ĐS: -15
8. $xy(y - 7) + 7y(1 + x)$ tại $x = -6, y = 1$. ĐS: 1

Lời giải.

1. $13^3 - 2 \cdot 13^2 \cdot 3 + 13 \cdot 3^2 = 13(13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 3 + 3^2) = 13(13 - 3)^2 = 1300$.
2. $23^3 - 2 \cdot 23^2 \cdot 3 + 23 \cdot 3^2 = 23(23^2 - 2 \cdot 23 \cdot 3 + 3^2) = 23(23 - 3)^2 = 9200$.
3. $10^3 \cdot 5^2 + 110000 + 10^3 \cdot 11 = 10^3(5^2 + 110 + 11) = 146 \cdot 10^3 = 146000$.
4. $73^2 - 27^2 + 21^2 - 79^2 = (73 - 27)(73 + 27) - (79 - 21)(79 + 21) = 4600 - 5800 = -1200$.

5. $A = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2$. Thay $x = 16$ ta được $A = \left(16 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3969}{16}$.

6. $B = 9x^2 - y^2 + 4y - 4 = (3x)^2 - (y - 2)^2 = (3x + y - 2)(3x - y + 2)$.
Thay $x = 1, y = 5$ ta được $B = 6 \cdot 0 = 0$.

7. $C = x(4x^2 + 3y^2) - x(3x^2 + 4y^2) = x^3 - xy^2 = x(x - y)(x + y)$.
Thay $x = -3, y = -2$ ta được $C = -3 \cdot (-1) \cdot (-5) = -15$.

8. $D = xy(y - 7) + 7y(1 + x) = xy^2 + 7y = y(xy + 7)$.
Thay $x = -6, y = 1$ ta được $D = 1 \cdot (-6 + 7) = 1$.

□

Bài 3. Tìm x , biết:

1. $5x(x - 1) + x(x + 17) = 0$. **ĐS:** $x = 0; x = -2$

2. $x(5x^2 + 6) - x(4x^2 + 6) = 0$. **ĐS:** $x = 0$

3. $3x(x - 3)^2 - 3x(x + 3)^2 = 0$. **ĐS:** $x = 0$

4. $7 - 9x + 2x^2 = 0$. **ĐS:** $x = 1; x = \frac{7}{2}$

5. $4x^3 - 4x = 0$. **ĐS:** $x = 0; x = 1; x = -1$

Lời giải.

1. $5x(x - 1) + x(x + 17) = 0 \Leftrightarrow x(5x - 5 + x + 17) = 0 \Leftrightarrow x(6x + 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

2. $x(5x^2 + 6) - x(4x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow x.x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3. $3x(x - 3)^2 - 3x(x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x[(x - 3)^2 - (x + 3)^2] = 0 \Leftrightarrow 3x(-12x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

4. $7 - 9x + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 1) - 7(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$.

5. $4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

□

Bài 4. Chứng minh $2n(1 - n) + n^2(n - 1)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên n .

Lời giải.

Đặt $A = 2n(1 - n) + n^2(n - 1)$ thì ta có:

$$A = -2n(n - 1) + n^2(n - 1) = (n - 1)(n^2 - 2n) = n(n - 1)(n - 2).$$

Vì A là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên suy ra A chia hết cho 3.

□

Bài 5. Chứng minh với mọi số nguyên x, y thì:

1. $A = x(7x^2 + 2) - x(6x^2 + 3)$ chia hết cho $x - 1$.

2. $B = x^3y^2 - 4x^2y + 3x$ chia hết cho $xy - 1$.

3. $C = xy(x^3 + 4) - y(xy^3 + 4x)$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.

 Lời giải.

1. $A = x(7x^2 + 2) - x(6x^2 + 3) = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$. Vậy A chia hết cho $x - 1$.

2. $B = x(x^2y^2 - 4xy + 3) = x(xy(xy - 1) - 3(xy - 1)) = x(xy - 1)(xy - 3)$.

Vậy B chia hết cho $xy - 1$.

3. $C = x^4y - xy^4 = xy(x^3 - y^3) = xy(x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Vậy C chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.

□

§10 Chia đơn thức cho đơn thức

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Chia đơn thức cho đơn thức

Cho A và B là hai đơn thức, $B \neq 0$.

Đơn thức A chia hết cho đơn thức B khi mỗi biến của B đều là biến của A với số mũ của B không lớn hơn số mũ của A .

1.2 Quy tắc

Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B) ta làm như sau:

- ☒ Chia hệ số của A cho hệ số của B .
- ☒ Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của từng biến đó trong B .
- ☒ Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 39. Thu gọn biểu thức

Nội dung phương pháp

- ☒ Sử dụng kiến thức chia hai lũy thừa cùng cơ số: $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($m \geq n, m, n \in \mathbb{N}$).
- ☒ Một số trường hợp cần phân tích đa thức bị chia thành nhân tử để rút gọn các nhân tử.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 Ví dụ 1. Làm phép tính

- a) $9(x-1)^3 : [3(x-1)^2]$; **ĐS:** $3x-3$ b) $(-5x+2)^3 : (5x-2)$; **ĐS:** $-(5x-2)^2$
 c) $27^2 : (-3)^3$; **ĐS:** -27 d) $(x^3-3x+2)^3 : (x^3-3x+2)^2$; **ĐS:** x^3-3x+2
 e) $\frac{(-17)^4}{15^4} : \left(\frac{17}{15}\right)^2$; **ĐS:** $\frac{289}{225}$ f) $18(-x)^5 y^2 : (9x^2 y)$. **ĐS:** $-2x^3 y$

 Lời giải.

- $9(x-1)^3 : [3(x-1)^2] = 3(x-1)^{3-2} = 3(x-1) = 3x-3;$
- $(-5x+2)^3 : (5x-2) = -(5x-2)^3 : (5x-2) = -(5x-2)^2;$
- $27^2 : (-3)^3 = 3^6 : (-3^3) = -3^3 = -27;$
- $(x^3-3x+2)^3 : (x^3-3x+2)^2 = (x^3-3x+2)^{3-2} = x^3-3x+2$
- $\frac{(-17)^4}{15^4} : \left(\frac{17}{15}\right)^2 = \frac{(17)^4}{15^4} : \left(\frac{17}{15}\right)^2 = \frac{17^2}{15^2} = \frac{289}{225};$
- $18(-x)^5y^2 : (9x^2y) = -2x^{5-2}y^{2-1} = -2x^3y.$

□

Ví dụ 2. Làm phép tính

- a) $3(x+1)^2 : (x+1)^2;$ **ĐS:** 3 b) $6(3x+2)^3 : (3x+2)^2;$ **ĐS:** $6(3x+2)$
 c) $17^7 : (-17)^3;$ **ĐS:** -17^4 d) $(x^2+3x+4)^4 : (x^2+3x+4)^3;$ **ĐS:**
 x^2+3x+4
 e) $\frac{(7)^4}{13^4} : \left(\frac{7}{13}\right)^2;$ **ĐS:** $\frac{49}{169}$ f) $16x^5y^2 : (4x^3y).$ **ĐS:** $4x^2y$

Lời giải.

- a) $3(x+1)^2 : (x+1)^2 = 3(x+1)^{2-2} = 3;$ b) $6(3x+2)^3 : (3x+2)^2 = 6(3x+2);$
 c) $17^7 : (-17)^3 = -17^4;$ d) $(x^2+3x+4)^4 : (x^2+3x+4)^3 = x^2+3x+4$
 e) $\frac{(7)^4}{13^4} : \left(\frac{7}{13}\right)^2 = \frac{7^2}{13^2} = \frac{49}{169};$ f) $16x^5y^2 : (4x^3y) = 4x^2y.$

□

Dạng 40. Tính giá trị của biểu thức

Sử dụng chia đơn thức cho đơn thức để rút gọn biểu thức, thay giá trị của biến (nếu cần) để tính nhanh giá trị các biểu thức

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- $15(x+2)^3 : [3(x+2)^2]$ tại $x = -102;$ **ĐS:** 500
- $(x^2-3x+2)^3 : [(x-1)^2 \cdot (x-2)^3]$ tại $x = 101;$ **ĐS:** 100
- $27x^5y^3 : (9x^3y^2)$ tại $x = -3, y = 2;$ **ĐS:** 54
- $x^2(x+y)^3 : [x^2(x+y)^2]$ tại $x = -7, y = 3;$ **ĐS:** -4
- $(x+y)^2z^3 : (z^3x+z^3y)$ tại $x = 102, y = -2, z = 100.$ **ĐS:** 100

Lời giải.

1. Ta có $15(x+2)^3 : [3(x+2)^2] = 5(x+2)$. Thay $x = -102$, ta được kết quả là $5(-102+2) = 500$.

2. Ta có $(x^2 - 3x + 2)^3 : [(x - 1)^2 \cdot (x - 2)^3] = [(x - 1)^3 \cdot (x - 2)^3] : [(x - 1)^2 \cdot (x - 1)^3] = x - 1$.
Thay $x = 101$, ta được kết quả là $101 - 1 = 100$.
3. Ta có $27x^5y^3 : (9x^3y^2) = 3x^2y$. Thay $x = -3, y = 2$, ta được kết quả là $3 \cdot (-3)^2 \cdot 2 = 54$.
4. Ta có $x^2(x + y)^3 : [x^2(x + y)^2] = x + y$. Thay $x = -7, y = 3$, ta được kết quả là $-7 + 3 = -4$.
5. Ta có $(x + y)^2z^3 : (z^3x + z^3y) = (x + y)^2z^3 : (x + y)z^3 = x + y$. Thay $x = 102, y = -2, z = 100$, ta được kết quả là $102 - 2 = 100$.

□

 **Ví dụ 2.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $21(x + 3)^3 : (3x + 9)^2$ tại $x = -6$; **ĐS:** -7
2. $(2x^2 - 5x + 3)^4 : [(2x - 3)^3 \cdot (x - 1)^2]$ tại $x = 2, y = 3$; **ĐS:** 1
3. $36x^4y^3 : (-6x^3y^2)$ tại $x = 10, y = 7$; **ĐS:** -280
4. $y^2(x - y)^3 : [y^2(x - y)^2]$ tại $x = 13, y = 3$; **ĐS:** 10
5. $(x - y)^2z^2 : (z^2x - z^2y)$ tại $x = 54, y = 4, z = 10$. **ĐS:** 50

 **Lời giải.**

1. Ta có $21(x + 3)^3 : (3x + 9)^2 = \frac{7}{3}(x + 3)$. Thay $x = -6$, ta được kết quả là $\frac{7}{3}(-6 + 3) = -7$.
2. Ta có $(2x^2 - 5x + 3)^4 : [(2x - 3)^3 \cdot (x - 1)^2] = [(2x - 3)^4 \cdot (x - 1)^4] : [(2x - 3)^3 \cdot (x - 1)^2] = (2x - 3) \cdot (x - 1)^2$. Thay $x = 2$, ta được kết quả là 1 .
3. Ta có $36x^4y^3 : (-6x^3y^2) = -4xy$. Thay $x = 10, y = 7$, ta được kết quả là -280 .
4. Ta có $y^2(x - y)^3 : [y^2(x - y)^2] = x - y$. Thay $x = 13, y = 3$, ta được kết quả là $13 - 3 = 10$.
5. Ta có $(x - y)^2z^2 : (z^2x - z^2y) = x - y$. Thay $x = 54, y = 4$, ta được kết quả là $54 - 4 = 50$.

□

Dạng 41. Tìm giá trị của ẩn thỏa mãn đẳng thức cho trước

Thực hiện phép chia đơn thức cho đơn thức để rút gọn và tìm x .

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x , biết:

1. $(x - 2)^2 = x - 2$ với $x \neq 2$; **ĐS:** $x = 3$
2. $(7x - 28)^3 : (7x - 28)^2 = 1$ với $x \neq 4$; **ĐS:** $x = \frac{29}{7}$
3. $18(x - 1)^4 = 3(x - 1)^3$ với $x \neq 1$; **ĐS:** $x = \frac{7}{6}$
4. $2 - 15x + 13x^2 = (x - 1)^2$ với $x \neq 1$; **ĐS:** $x = \frac{1}{12}$

5. $27x^3 - 3x = 2(3x)^2 - 2$ với $x \neq \pm \frac{1}{3}$.

ĐS: $x = \frac{2}{3}$

 **Lời giải.**

1. Ta có $(x - 2)^2 = x - 2 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$;

2. $(7x - 28)^3 : (7x - 28)^2 = 1 \Leftrightarrow 7x - 28 = 1 \Leftrightarrow 7x = 29 \Leftrightarrow x = \frac{29}{7}$;

3. $18(x - 1)^4 = 3(x - 1)^3 \Leftrightarrow \frac{18(x - 1)^4}{3(x - 1)^3} = 1 \Leftrightarrow 6(x - 1) = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{7}{6}$;

4. $2 - 15x + 13x^2 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow (x - 1)(13x - 2) = (x - 1)^2 \Leftrightarrow 13x - 2 = x - 1 \Leftrightarrow 12x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}$;

5. $27x^3 - 3x = 2(3x)^2 - 2 \Leftrightarrow 3x(9x^2 - 1) = 2(9x^2 - 1) \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết:

1. $(x - 3)^2 = x - 3$ với $x \neq 3$;

ĐS: $x = 3$

2. $(5x - 15)^3 : (5x - 15)^2 = 1$ với $x \neq 3$;

ĐS: $x = \frac{29}{7}$

3. $8(x - 2)^4 = 4(x - 2)^3$ với $x \neq 2$;

ĐS: $x = \frac{10}{9}$

4. $1 - 12x + 11x^2 = (x - 1)^2$ với $x \neq 1$;

ĐS: $x = \frac{1}{12}$

5. $8x^3 - 2x = 3(2x)^2 - 3$ với $x \neq \pm \frac{1}{2}$.

ĐS: $x = \frac{3}{2}$

 **Lời giải.**

1. Ta có $(x - 3)^2 = x - 3 \Leftrightarrow x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 4$;

2. $(5x - 15)^3 : (5x - 15)^2 = 1 \Leftrightarrow 5x - 15 = 1 \Leftrightarrow 5x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$;

3. $8(x - 2)^4 = 4(x - 2)^3 \Leftrightarrow \frac{8(x - 2)^4}{4(x - 2)^3} = 1 \Leftrightarrow 2(x - 2) = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$;

4. $1 - 12x + 11x^2 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow (x - 1)(11x - 1) = (x - 1)^2 \Leftrightarrow 11x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

5. $8x^3 - 2x = 3(2x)^2 - 3 \Leftrightarrow 2x(4x^2 - 1) = 3(4x^2 - 1) \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

□

Dạng 42. Chứng minh tính chia hết

Để chứng minh biểu thức P chia hết cho biểu thức Q , ta thực hiện chia đơn thức cho đơn thức hoặc phân tích biểu thức P về dạng tích các nhân tử trong đó có ít nhất một nhân tử là biểu thức Q .

Tương tự trường hợp đặc biệt nếu Q là hằng số.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh rằng $A = [n^2(n+2) + n(n+2)]^4$ chia hết cho $n^2(n+1)^2(n+2)^2$ với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= [n^2(n+2) + n(n+2)]^4 = [n(n+2)(n+1)]^4 = [n(n+2)(n+1)]^2 \cdot [n(n+2)(n+1)]^2 \\ &= n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^2 \cdot [n(n+2)(n+1)]^2. \end{aligned}$$

Suy ra khi phân tích A thành nhân tử thì có nhân tử $n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^2$ nên A chia hết cho $n^2(n+1)^2(n+2)^2$. □

 **Ví dụ 2.** Chứng minh rằng $B = (n^2 - 2n + 1)^3$ chia hết cho $(n-1)^2$ với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Ta có $B = (n^2 - 2n + 1)^3 = (n-1)^6 = (n-1)^2 \cdot (n-1)^4$.

Suy ra khi phân tích B thành nhân tử thì có nhân tử $(n-1)^2$ nên B chia hết cho $(n-1)^2$. □

 **Ví dụ 3.** Chứng minh rằng $A = 111^{n+1} : 111^n + 1$ chia hết cho 112 với mọi số tự nhiên n .

 **Lời giải.**

Ta có $A = 111^{n+1-n} + 1 = 111 + 1 = 112$. Suy ra A chia hết cho 112. □

 **Ví dụ 4.** Chứng minh rằng $B = 101^{2n+1} : 101^n$ chia hết cho 101 với mọi số tự nhiên n .

 **Lời giải.**

Ta có $B = 101^{2n+1-n} = 101^{n+1}$. Suy ra B chia hết cho 101. □

 **Ví dụ 5.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì:

1. $A = x(x+5)^3 : (x+5)^2 + x^2 + x$ chia hết cho $x+3$;
2. $B = x^4y^4 : y^3x^3 + xy + 2$ chia hết cho $xy+1$;
3. $C = xy(xy+y+1)^3 : (xy+y+1)^2 + xy$ chia hết cho $xy+y+2$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $A = x(x+5)^3 : (x+5)^2 + x^2 + x = x(x+5) + x^2 + x = x(x+5+x+1) = x(2x+6) = 2x(x+3)$.
Suy ra A khi hết cho $x+3$.
2. Ta có $B = x^4y^4 : y^3x^3 + xy + 2 = xy + xy + 2 = 2xy + 2 = 2(xy+1)$.
Suy ra B chia hết cho $xy+1$.
3. Ta có $C = xy(xy+y+1)^3 : (xy+y+1)^2 + xy = xy(xy+y+1) + xy = xy(xy+y+2)$.
Suy ra C chia hết cho $xy+y+2$.

□

3 Bài tập về nhà

📁 Bài 1. Làm phép tính

- a) $64(x+2)^3 : [32(x+2)^2]$; **ĐS:** $2(x+2)$ b) $(13x+1)^4 : (13x+1)^2$; **ĐS:** $(13x+1)^2$
 c) $8^7 : (-2)^3$; **ĐS:** -2^{18} d) $(2x^3+7)^7 : (-2x^3-7)^2$; **ĐS:** $(2x^3+7)^5$
 e) $\frac{(-115)^4}{19^2} : \left(\frac{115}{19}\right)^3$; **ĐS:** 2185 f) $18(-xy)^4 : (4x^2y)^2$. **ĐS:** $\frac{9}{8} \cdot y^2$

✍️ Lời giải.

1. Ta có $64(x+2)^3 : [32(x+2)^2] = 2(x+2)$.
2. Ta có $(13x+1)^4 : (13x+1)^2 = (13x+1)^2$.
3. Ta có $8^7 : (-2)^3 = -2^{21} : 2^3 = -2^{18}$.
4. Ta có $(2x^3+7)^7 : (-2x^3-7)^2 = (2x^3+7)^7 : (2x^3+7)^2 = (2x^3+7)^5$.
5. Ta có $\frac{(-115)^4}{19^2} : \left(\frac{115}{19}\right)^3 = \frac{115^4}{19^2} : \frac{115^3}{19^3} = 115 \cdot 19 = 2185$.
6. Ta có $18(-xy)^4 : (4x^2y)^2 = 18x^4y^4 : 16x^4y^2 = \frac{9}{8} \cdot y^2$.

□

📁 Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $(x+11)^3 : (2x+22)^2$ tại $x = -12$; **ĐS:** $-\frac{1}{4}$
2. $(7x^2 - 11x + 4)^3 : [(7x-4)^3 \cdot (x-1)^2]$ tại $x = \frac{1}{7}$; **ĐS:** $-\frac{6}{7}$
3. $125x^4y^4 : (-5x^2y^2)$ tại $x = 8, y = -2$; **ĐS:** -1280
4. $xy(5x^2 + y^2) : [xy(4x^2 + 2y^2)]$ tại $x = 22, y = -2$; **ĐS:** $\frac{101}{81}$
5. $(x+y)^2z^3 : (z^3x + z^3y)$ tại $x = 5, y = 5, z = 12$. **ĐS:** 10

 Lời giải.

$$1. (x + 11)^3 : (2x + 22)^2 = (x + 11)^3 : [2(x + 11)]^2 = \frac{x + 11}{4}.$$

Thay $x = -12$ vào biểu thức ta được kết quả $\frac{-12 + 11}{4} = -\frac{1}{4}$.

$$2. (7x^2 - 11x + 4)^3 : [(7x - 4)^3 \cdot (x - 1)^2] = [(x - 1) \cdot (7x - 4)]^3 : [(7x - 4)^3 \cdot (x - 1)^2] = x - 1.$$

Thay $x = \frac{1}{7}$ vào biểu thức ta được kết quả $\frac{1}{7} - 1 = -\frac{6}{7}$.

$$3. 125x^4y^4 : (-5x^2y^2) = -5x^2y^2.$$

Thay $x = 8, y = -2$ vào biểu thức ta được kết quả $-5 \cdot 8^2(-2)^2 = -1280$.

$$4. xy(5x^2 + y^2) : [xy(4x^2 + 2y^2)] = (5x^2 + y^2) : (4x^2 + 2y^2).$$

Thay $x = 22, y = -2$ vào biểu thức ta được kết quả

$$[5 \cdot 22^2 + (-2)^2] : [4 \cdot 22^2 + 2(-2)^2] = 2424 : 1944 = \frac{101}{81}.$$

$$5. (x + y)^2z^3 : (z^3x + z^3y) = (x + y)^2z^3 : (x + y)z^3 = x + y.$$

Thay $x = 5, y = 5$ vào biểu thức ta được kết quả $5 + 5 = 10$.

□

 Bài 3. Tìm x , biết:

$$1. (x - 4)^2 = x - 4 \text{ với } x \neq 4;$$

$$\text{ĐS: } x = 5$$

$$2. (3x - 6)^3 : (3x - 6)^2 = 1 \text{ với } x \neq 2;$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{7}{3}$$

$$3. 9(x - 5)^4 = 3(x - 5)^3 \text{ với } x \neq 5;$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{16}{3}$$

$$4. 4 - 11x + 7x^2 = x - 1 \text{ với } x \neq 1;$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{5}{7}$$

$$5. x^3 - x = 2x^2 - 2 \text{ với } x \neq \pm 1.$$

$$\text{ĐS: } x = 2$$

 Lời giải.

$$1. \text{Ta có } (x - 4)^2 = x - 4 \Leftrightarrow x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = 5;$$

$$2. (3x - 6)^3 : (3x - 6)^2 = 1 \Leftrightarrow 3x - 6 = 1 \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3};$$

$$3. 9(x - 5)^4 = 3(x - 5)^3 \Leftrightarrow \frac{9(x - 5)^4}{3(x - 5)^3} = 1 \Leftrightarrow 3(x - 5) = 1 \Leftrightarrow x - 5 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{16}{3};$$

$$4. 4 - 11x + 7x^2 = x - 1 \Leftrightarrow (x - 1)(7x - 4) = x - 1 \Leftrightarrow 7x - 4 = 1 \Leftrightarrow 7x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{7};$$

$$5. x^3 - x = 2x^2 - 2 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) \Leftrightarrow x = 2.$$

□

Bài 4. Chứng minh rằng $A = (n - 3)^4(n + 3)^4 : [(n^2 - 9)^2]$ chia hết cho $(n^2 - 9) \cdot (n - 3)$ với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= (n - 3)^4(n + 3)^4 : [(n^2 - 9)^2] = (n - 3)^4(n + 3)^4 : (n - 3)^2(n + 3)^2 = (n - 3)^2(n + 3)^2 \\ &= (n^2 - 9)(n - 3)(n + 3). \end{aligned}$$

Suy ra khi phân tích A thành nhân tử thì có nhân tử $(n^2 - 9)(n - 3)$, suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 5. Chứng minh rằng $B = 10^{3n+1} : 10^{3n} + 1$ chia hết cho 11 với mọi số tự nhiên n .

 **Lời giải.**

Ta có $B = 10^{3n+1-3n} + 1 = 10 + 1 = 11$. Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì:

1. $A = 7x(x + 3)^3 : (x + 3)^2 + 5x^2 + 5x$ chia hết cho $6x + 13$;
2. $B = 34x^7y^7 : (2y^6x^6) + 3xy + 2$ chia hết cho $10xy + 1$;
3. $C = 3xy(2xy + 3y + 1)^5 : (2xy + 3y + 1)^4 + xy$ chia hết cho $6xy + 9y + 4$.

 **Lời giải.**

1. Ta có

$$\begin{aligned} A &= 7x(x + 3)^3 : (x + 3)^2 + 5x^2 + 5x = 7x(x + 3) + 5x^2 + 5x = 7x^2 + 21x + 5x^2 + 5x \\ &= 12x^2 + 26x = 2x(6x + 13). \end{aligned}$$

Suy ra A khi hết cho $6x + 13$.

2. Ta có $B = 34x^7y^7 : (2y^6x^6) + 3xy + 2 = 17xy + 3xy + 2 = 20xy + 2 = 2(10xy + 1)$.
Suy ra B chia hết cho $10xy + 1$.

3. Ta có

$$\begin{aligned} C &= 3xy(2xy + 3y + 1)^5 : (2xy + 3y + 1)^4 + xy = 3xy(2xy + 3y + 1) + xy \\ &= xy(6xy + 9y + 3 + 1) = xy(6xy + 9y + 4). \end{aligned}$$

Suy ra C chia hết cho $6xy + 9y + 4$. □

§11 Chia đa thức cho đơn thức

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Quy tắc

Muốn chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp các hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B) ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 43. Xét xem đa thức A có chia hết cho đơn thức B hay không

Xét xem tất cả các hạng tử của đa thức A có thể chia hết cho đơn thức B hay không (hay đa thức A có thể có nhân tử chung là phần biến của đơn thức B hay không).

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Không làm phép tính chia, hãy xét xem đa thức A có chia hết cho đơn thức B hay không:

1. $A = 4x^2y^3 - 6xy^2 + 2y^5, B = 5y^2;$ **ĐS:** chia hết

2. $A = \frac{12}{5}x^6y^3 + 5, 1x^4y^7 - \frac{2}{3}xy^2, B = 3xy^2;$ **ĐS:** chia hết

3. $A = 2x^3y + 3x^2y^2 + 5xy^2, B = y^2.$ **ĐS:** không chia hết

Lời giải.

1. Ta thấy A chia hết cho B vì mỗi hạng tử của A đều chia hết cho y^2 .
2. Ta thấy A chia hết cho B vì mỗi hạng tử của A đều chia hết cho xy^2 .
3. Ta thấy A không chia hết cho B vì hạng tử $2x^3y$ của A không chia hết cho y^2 .

□

 **Ví dụ 2.** Không làm phép tính chia, hãy xét xem đa thức A có chia hết cho đơn thức B hay không:

1. $A = x^2y^4 + 2x^2y^2 + 5x^4, B = 7x^2;$ **ĐS:** chia hết

$$2. A = \frac{5}{6}x^6y^5 - 3,3x^3y^3 + \frac{7}{2}x^6y^2, B = \frac{1}{2}x^2y^2;$$

ĐS: chia hết

$$3. A = 5xy^2 + 4x^3y^4 + 3x^5y^6, B = x^2.$$

ĐS: không chia hết

Lời giải.

1. Ta thấy A chia hết cho B vì mỗi hạng tử của A đều chia hết cho x^2 .
2. Ta thấy A chia hết cho B vì mỗi hạng tử của A đều chia hết cho x^2y^2 .
3. Ta thấy A không chia hết cho B vì hạng tử $5xy^2$ của A không chia hết cho x^2 .

□

Dạng 44. Thực hiện phép tính chia

Sử dụng quy tắc chia đa thức cho đơn thức.

BÀI TẬP MẪU **Ví dụ 1.** Thực hiện phép chia

$$a) (15 \cdot 2^4 + 7 \cdot 4^3 - 2^6) : 2^3; \quad \text{ĐS: } 78 \quad b) (3^8 + 4 \cdot 9^5 - 5 \cdot 27^3) : 3^7. \quad \text{ĐS: } 66$$

Lời giải.

1. $(15 \cdot 2^4 + 7 \cdot 4^3 - 2^6) : 2^3 = 15 \cdot 2^4 : 2^3 + 7 \cdot 2^6 : 2^3 - 2^6 : 2^3 = 15 \cdot 2 + 7 \cdot 2^3 - 2^3 = 30 + 56 - 8 = 78.$
2. $(3^8 + 4 \cdot 9^5 - 5 \cdot 27^3) : 3^7 = 3^8 : 3^7 + 4 \cdot 3^{10} : 3^7 - 5 \cdot 3^9 : 3^7 = 3 + 4 \cdot 27 - 5 \cdot 9 = 3 + 108 - 45 = 66.$

□

Ví dụ 2. Thực hiện phép chia

$$a) (7 \cdot 4^4 - 6 \cdot 4^3 - 5 \cdot 4^5) : 4^3; \quad \text{ĐS: } -58 \quad b) (2 \cdot 5^7 + 3 \cdot 25^2 + 5^6) : 5^4. \quad \text{ĐS: } 278$$

Lời giải.

1. $(7 \cdot 4^4 - 6 \cdot 4^3 - 5 \cdot 4^5) : 4^3 = 7 \cdot 4^4 : 4^3 - 6 \cdot 4^3 : 4^3 - 5 \cdot 4^5 : 4^3 = 7 \cdot 4 - 6 - 5 \cdot 4^2 = 28 - 6 - 80 = -58.$
2. $(2 \cdot 5^7 + 3 \cdot 25^2 + 5^6) : 5^4 = 2 \cdot 5^7 : 5^4 + 3 \cdot 5^4 : 5^4 + 5^6 : 5^4 = 2 \cdot 5^3 + 3 + 5^2 = 250 + 3 + 25 = 278$

□

Ví dụ 3. Làm tính chia:

$$1. (2x^4 + 4x^3 - x^6) : 2x^3; \quad \text{ĐS: } x + 2 - \frac{1}{2}x^3$$

$$2. (x^8y^8 + 2x^5y^5 + 7x^3y^3) : (-x^2y^2); \quad \text{ĐS: } -x^6y^6 - 2x^3y^3 - 7xy$$

$$3. \left(2x^5y^3 - 5x^3y^5 + \frac{3}{4}x^3y^3 \right) : \frac{2}{3}xy; \quad \text{ĐS: } 3x^4y^2 - \frac{15}{2}x^2y^4 + \frac{9}{8}x^2y^2$$

$$4. (9x^2y^4z - 12x^3y^2z^4 - 4xy^3z^2) : xyz. \quad \text{ĐS: } 9xy^3 - 12x^2yz^3 - 4y^2z$$

Lời giải.

$$1. (2x^4 + 4x^3 - x^6) : 2x^3 = 2x^4 : (2x^3) + 4x^3 : (2x^3) - x^6 : (2x^3) = x + 2 - \frac{1}{2}x^3;$$

2.

$$\begin{aligned}(x^8y^8 + 2x^5y^5 + 7x^3y^3) : (-x^2y^2) &= x^8y^8 : (-x^2y^2) + 2x^5y^5 : (-x^2y^2) + 7x^3y^3 : (-x^2y^2) \\ &= -x^6y^6 - 2x^3y^3 - 7xy.\end{aligned}$$

$$3. 2x^5y^3 : \frac{2}{3}xy - 5x^3y^5 : \frac{2}{3}xy + \frac{3}{4}x^3y^3 : \frac{2}{3}xy = 3x^4y^2 - \frac{15}{2}x^2y^4 + \frac{9}{8}x^2y^2;$$

4.

$$\begin{aligned}(9x^2y^4z - 12x^3y^2z^4 - 4xy^3z^2) : xyz &= 9x^2y^4z : xyz - 12x^3y^2z^4 : xyz - 4xy^3z^2 : xyz \\ &= 9xy^3 - 12x^2yz^3 - 4y^2z\end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 4.** Làm tính chia:

$$1. (3y^5 + 2y^7 - 4y^4) : 6y^3; \quad \text{ĐS: } \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^4 - \frac{2}{3}y$$

$$2. (2x^2y^4 + 3x^5y^6 - 5x^7y^2) : (-xy); \quad \text{ĐS: } -2xy^3 - 3x^4y^5 + 5x^6y$$

$$3. \left(\frac{2}{5}x^4y^6 + 2x^2y^4 - \frac{1}{5}x^4y^2 \right) : \frac{4}{5}x^2y^2; \quad \text{ĐS: } \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{1}{4}x^2$$

$$4. (3x^3y^2z^2 + 5x^4y^5z^3 + 6x^6y^4z^7) : x^3yz^2. \quad \text{ĐS: } 3y + 5xy^4z + 6x^3y^3z^5$$

 **Lời giải.**

$$1. (3y^5 + 2y^7 - 4y^4) : 6y^3 = 3y^5 : 6y^3 + 2y^7 : 6y^3 - 4y^4 : 6y^3 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^4 - \frac{2}{3}y.$$

$$2. 2x^2y^4 : (-xy) + 3x^5y^6 : (-xy) - 5x^7y^2 : (-xy) = -2xy^3 - 3x^4y^5 + 5x^6y.$$

3.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{5}x^4y^6 + 2x^2y^4 - \frac{1}{5}x^4y^2 \right) : \frac{4}{5}x^2y^2 &= \frac{2}{5}x^4y^6 : \frac{4}{5}x^2y^2 + 2x^2y^4 : \frac{4}{5}x^2y^2 - \frac{1}{5}x^4y^2 : \frac{4}{5}x^2y^2 \\ &= \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{1}{4}x^2.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(3x^3y^2z^2 + 5x^4y^5z^3 + 6x^6y^4z^7) : x^3yz^2 &= 3x^3y^2z^2 : x^3yz^2 + 5x^4y^5z^3 : x^3yz^2 + 6x^6y^4z^7 : x^3yz^2 \\ &= 3y + 5xy^4z + 6x^3y^3z^5.\end{aligned}$$

□

 **Dạng 45. Bài toán chia đa thức cho đơn thức áp dụng hằng đẳng thức**

Vận dụng các hằng đẳng thức đã học để thực hiện.

   **BÀI TẬP MẪU**   

Ví dụ 1. Làm tính chia

$$1. [(x-y)^3 - (x-y)^2 + (x-y)] : (y-x); \quad \text{ĐS: } -(x-y)^2 + (x-y) - 1$$

$$2. [3(2x+y)^2 + 5(2x+y)^5 - 6(2x+y)^3] : (2x+y)^2; \quad \text{ĐS: } 3 + 5(2x+y)^3 - 6(2x+y)$$

$$3. (3x+4y)^3 : (6x+8y); \quad \text{ĐS: } \frac{1}{2}(3x+4y)^2$$

$$4. (8x^3 + 27y^3) : (2x+3y). \quad \text{ĐS: } 4x^2 - 6xy + 9y^2$$

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} [(x-y)^3 - (x-y)^2 + (x-y)] : (y-x) &= -[(x-y)((x-y)^2 - (x-y) + 1)] : (x-y) \\ &= -[(x-y)^2 - (x-y) + 1] \\ &= -(x-y)^2 + (x-y) - 1. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &[3(2x+y)^2 + 5(2x+y)^5 - 6(2x+y)^3] : (2x+y)^2 \\ &= [(2x+y)^2 (3 + 5(2x+y)^3 - 6(2x+y))] : (2x+y)^2 = 3 + 5(2x+y)^3 - 6(2x+y). \end{aligned}$$

$$3. (3x+4y)^3 : (6x+8y) = (3x+4y)^3 : [2(3x+4y)] = \frac{1}{2}(3x+4y)^2.$$

$$4. (8x^3 + 27y^3) : (2x+3y) = (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) : (2x+3y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2.$$

□

Ví dụ 2. Làm tính chia

$$1. [4(x-y)^4 - (x-y)^5 + 3(x-y)^3] : (y-x)^2; \quad \text{ĐS: } 4(x-y)^2 - (x-y)^3 + 3(x-y)$$

$$2. [2(x+y)^4 - 2(x+y)^3 + (x+y)^2] : 3(x+y)^2; \quad \text{ĐS: } \frac{1}{3}(2(x+y)^2 - 2(x+y) + 1)$$

$$3. 3(2x-y)^3 : (4x-2y); \quad \text{ĐS: } \frac{3}{2}(2x-y)^2$$

$$4. (64x^3 - y^3) : (4x-y). \quad \text{ĐS: } 16x^2 + 4xy + y^2$$

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} [4(x-y)^4 - (x-y)^5 + 3(x-y)^3] : (y-x)^2 &= [(x-y)^2 (4(x-y)^2 - (x-y)^3 + 3(x-y))] : (x-y)^2 \\ &= 4(x-y)^2 - (x-y)^3 + 3(x-y). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} [2(x+y)^4 - 2(x+y)^3 + (x+y)^2] : 3(x+y)^2 &= [(x+y)^2 (2(x+y)^2 - 2(x+y) + 1)] : 3(x+y)^2 \\ &= \frac{1}{3}(2(x+y)^2 - 2(x+y) + 1). \end{aligned}$$

$$3. 3(2x - y)^3 : (4x - 2y) = 3(2x - y)^3 : [2(2x - y)] = \frac{3}{2}(2x - y)^2;$$

$$4. (64x^3 - y^3) : (4x - y) = (4x - y)(16x^2 + 4xy + y^2) : (4x - y) = 16x^2 + 4xy + y^2.$$

□

Dạng 46. Tìm giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vận dụng Dạng 1

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

$$1. (6x^3 + 3x^2 - x) : x^n; \quad \text{ĐS: } n = 1$$

$$2. (5x^5y^4 - 2x^3y^2 + x^4y^5) : 3x^ny^n. \quad \text{ĐS: } n \in \{1, 2\}$$

Lời giải.

1. Để $(6x^3 + 3x^2 - x) : x^n$ là phép chia hết thì từng hạng tử của $6x^3 + 3x^2 - x$ phải chia hết cho x^n .

Để x chia hết cho x^n thì $n \leq 1$ suy ra $n = 1$.

2. Để $(5x^5y^4 - 2x^3y^2 + x^4y^5) : 3x^ny^n$ là phép chia hết thì từng hạng tử của $5x^5y^4 - 2x^3y^2 + x^4y^5$ phải chia hết cho x^ny^n .

Để $2x^3y^2$ chia hết cho x^ny^n thì $n \leq 2$, suy ra $n \in \{1, 2\}$.

□

 **Ví dụ 2.** Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

$$1. (27^7 + 5y^4 + 4y) : y^n; \quad \text{ĐS: } n = 1$$

$$2. (3x^7y^7 - 4x^6y^6 - 5x^3y^3) : 2x^ny^n. \quad \text{ĐS: } n \in \{1, 2, 3\}$$

Lời giải.

1. Để $(27^7 + 5y^4 + 4y) : y^n$ là phép chia hết thì từng hạng tử của $27^7 + 5y^4 + 4y$ phải chia hết cho y^n . Để $4y$ chia hết cho y^n thì $y \leq 1$ suy ra $n = 1$.

2. Để $(3x^7y^7 - 4x^6y^6 - 5x^3y^3) : 2x^ny^n$ là phép chia hết thì từng hạng tử của $3x^7y^7 - 4x^6y^6 - 5x^3y^3$ phải chia hết cho x^ny^n . Để $5x^3y^3$ chia hết cho x^ny^n thì $n \leq 3$, suy ra $n \in \{1, 2, 3\}$.

□

3

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Không làm phép tính chia, hãy xét xem đa thức A có chia hết cho đơn thức B hay không:

$$1. A = 2x^3y^2 - 3yx^2 + xy^5, B = 3xy; \quad \text{ĐS: chia hết}$$

$$2. A = \frac{3}{5}x^3y^2 - 6,3x^2y^3 + 2x^4y^2, B = 2x^2;$$

ĐS: chia hết

$$3. A = x^3y^4 + x^4y^6 + 3x^2y^3, B = 2x^3.$$

ĐS: không chia hết

Lời giải.

1. Ta thấy A chia hết cho B vì mỗi hạng tử của A đều chia hết cho $3xy$.
2. Ta thấy A chia hết cho B vì mỗi hạng tử của A đều chia hết cho $2x^2$.
3. Ta thấy A không chia hết cho B vì hạng tử $3x^2y^3$ của A không chia hết cho x^3 .

□

Bài 2. Thực hiện phép chia

$$a) (6 \cdot 2^7 + 8^4 - 4^3) : 2^5;$$

ĐS: 150

$$b) (2 \cdot 3^9 + 5 \cdot 9^3 - 2 \cdot 27^2) : 3^5.$$

ĐS: 171

Lời giải.

1. $(6 \cdot 2^7 + 8^4 - 4^3) : 2^5 = (6 \cdot 2^7 + 2^{12} - 2^6) : 2^5 = 6 \cdot 2^7 : 2^5 + 2^{12} : 2^5 - 2^6 : 2^5 = 6 \cdot 2^2 + 2^7 - 2 = 24 + 128 - 2 = 150;$
2. $(2 \cdot 3^9 + 5 \cdot 9^3 - 2 \cdot 27^2) : 3^5 = (2 \cdot 3^9 + 5 \cdot 3^6 - 2 \cdot 3^6) : 3^5 = (2 \cdot 3^9 + 3 \cdot 3^6) : 3^5 = 2 \cdot 3^9 : 3^5 + 3 \cdot 3^6 : 3^5 = 2 \cdot 3^4 + 3 \cdot 3 = 162 + 9 = 171.$

□

Bài 3. Làm tính chia:

$$1. (3x^5 - 5x^6 - 7x^3) : 5x^2;$$

ĐS: $\frac{3}{5}x^3 - x^4 - \frac{7}{5}x$

$$2. (5x^6y^7 + 4x^5y^6 + 3x^4y^5) : (-x^3y^2);$$

ĐS: $-5x^3y^5 - 4x^2y^4 - 3xy^3$

$$3. \left(\frac{5}{8}x^5y^8 - 5x^4y^2 + \frac{7}{9}x^7y^9\right) : \frac{5}{3}x^3y;$$

ĐS: $\frac{3}{8}x^2y^7 - 3xy + \frac{7}{15}x^4y^8$

$$4. (x^3y^4z^2 - 2x^4y^2z^4 + 7x^5y^2z^3) : x^2y^2z^2.$$

ĐS: $xy^2 - 2x^2z^2 + 7x^3z$ **Lời giải.**

$$1. (3x^5 - 5x^6 - 7x^3) : 5x^2 = 3x^5 : 5x^2 - 5x^6 : 5x^2 - 7x^3 : 5x^2 = \frac{3}{5}x^3 - x^4 - \frac{7}{5}x.$$

2.

$$\begin{aligned} (5x^6y^7 + 4x^5y^6 + 3x^4y^5) : (-x^3y^2) &= 5x^6y^7 : (-x^3y^2) + 4x^5y^6 : (-x^3y^2) + 3x^4y^5 : (-x^3y^2) \\ &= -5x^3y^5 - 4x^2y^4 - 3xy^3. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{8}x^5y^8 - 5x^4y^2 + \frac{7}{9}x^7y^9\right) : \frac{5}{3}x^3y &= \frac{5}{8}x^5y^8 : \frac{5}{3}x^3y - 5x^4y^2 : \frac{5}{3}x^3y + \frac{7}{9}x^7y^9 : \frac{5}{3}x^3y \\ &= \frac{3}{8}x^2y^7 - 3xy + \frac{7}{15}x^4y^8. \end{aligned}$$

$$4. (x^3y^4z^2 - 2x^4y^2z^4 + 7x^5y^2z^3) : x^2y^2z^2 = x^3y^4z^2 : x^2y^2z^2 - 2x^4y^2z^4 : x^2y^2z^2 + 7x^5y^2z^3 : x^2y^2z^2 = xy^2 - 2x^2z^2 + 7x^3z.$$



Bài 4. Làm tính chia

1. $[3(x - y)^6 - (y - x)^4 + 2(x - y)^3] : (y - x);$ **ĐS:** $-[3(x - y)^5 - (x - y)^3 + 2(x - y)^2]$
2. $[2(3x + 2y)^7 - 4(3x + 2y)^3 + 9(3x + 2y)^5] : (3x + 2y)^3;$ **ĐS:** $2(3x + 2y)^4 - 4 + 9(3x + 2y)^2$
3. $(4x - 2y)^3 : (2x - y);$ **ĐS:** $8(2x - y)^2$
4. $(x^3 - 27y^3) : (6y - 2x).$ **ĐS:** $-2(x^2 + 3xy + 9y^2)$

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} & [3(x - y)^6 - (y - x)^4 + 2(x - y)^3] : (y - x) \\ &= -[3(x - y)^6 : (x - y) - (y - x)^4 : (x - y) + 2(x - y)^3 : (x - y)] \\ &= -[3(x - y)^5 - (x - y)^3 + 2(x - y)^2]. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & [2(3x + 2y)^7 - 4(3x + 2y)^3 + 9(3x + 2y)^5] : (3x + 2y)^3 \\ &= 2(3x + 2y)^7 : (3x + 2y)^3 - 4(3x + 2y)^3 : (3x + 2y)^3 + 9(3x + 2y)^5 : (3x + 2y)^3 \\ &= 2(3x + 2y)^4 - 4 + 9(3x + 2y)^2. \end{aligned}$$

$$3. (4x - 2y)^3 : (2x - y) = 8(2x - y)^3 : (2x - y) = 8(2x - y)^2;$$

$$4. (x^3 - 27y^3) : (6y - 2x) = (x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2) : [2(3y - x)] = -2(x^2 + 3xy + 9y^2).$$



Bài 5. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

1. $(x^2 - x^5 + 8x^6) : 2x^n;$ **ĐS:** $n \in \{1, 2\}$
2. $(4x^2y^3 - 3x^3y^2 - 2x^3y^3) : (-x^ny^n).$ **ĐS:** $n \in \{1, 2\}$

Lời giải.

1. Để $(x^2 - x^5 + 8x^6) : 2x^n$ là phép chia hết thì từng hạng tử của $x^2 - x^5 + 8x^6$ phải chia hết cho x^n .
Để x^2 chia hết cho x^n thì $n \leq 2$ suy ra $n \in \{1, 2\}$.
2. Để $(4x^2y^3 - 3x^3y^2 - 2x^3y^3) : (-x^ny^n)$ là phép chia hết thì từng hạng tử của $4x^2y^3 - 3x^3y^2 - 2x^3y^3$ phải chia hết cho x^ny^n . Để $4x^2y^3$ chia hết cho x^ny^n thì $n \leq 2$, suy ra $n \in \{1, 2\}$.



§12 Chia đa thức một biến đã sắp xếp

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Phép chia hết

Phép chia có số dư bằng 0 là phép chia hết.

Muốn chia đa thức A cho đa thức B (A và B đều là các đa thức một biến đã sắp xếp), ta làm như sau:

- ☒ Đặt phép chia.
- ☒ Chia hạng tử bậc cao nhất của đa thức bị chia cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia.
- ☒ Nhân thương vừa tìm được với đa thức chia rồi lấy đa thức bị chia trừ đi tích đó nhận được một hiệu. Hiệu vừa tìm được gọi là dư thứ nhất.
- ☒ Chia hạng tử bậc cao nhất của dư thứ nhất cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia.
- ☒ Nhân thương vừa tìm được với đa thức chia rồi lấy dư thứ nhất trừ đi tích đó nhận được dư thứ hai.
- ☒ Cứ tiếp tục như vậy đến khi được dư bằng 0, ta được thương cần tìm.

1.2 Phép chia có dư

Khác với phép chia hết, phép chia có dư khác 0 là phép chia có dư.

Chia hai đa thức một biến đã sắp xếp với phép chia có dư ta thực hiện tương tự như phép chia hết, đến khi đa thức dư có bậc nhỏ hơn đa thức chia thì dừng lại. Đa thức đó gọi là dư.

⚠ 7. Đối với hai đa thức tùy ý A và B của cùng một biến ($B \neq 0$), tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho $A = B \cdot Q + R$, trong đó R bằng 0 hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B (R được gọi là dư trong phép chia A cho B).

Khi $R = 0$, phép chia A cho B là phép chia hết.

2

Bài tập và các dạng toán

Dạng 47. Thực hiện phép tính chia

Nội dung phương pháp: Xem phần Tóm tắt lý thuyết.

   **BÀI TẬP MẪU**   

Sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến rồi thực hiện phép chia:

a) $(6x + x^3 + 4 + 4x^2) : (x + 2);$

b) $(x^2 + x^4 + 1) : (x^2 - x + 1);$

c) $(x + x^3 - 3x^2 - 3) : (x - 3);$

d) $(2x - 5x^3 + 2x^4 + 2x^2 - 1) : (x^2 - x - 1);$

e) $(x^4 - 14 - x) : (x - 2);$

f) $(x^3 + 2x^2 + 1) : (x^2 + 1).$

 **Lời giải.**

a) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

b) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 4x^2 + 6x + 4 \\
 -(x^3 + 2x^2) \\
 \hline
 2x^2 + 6x + 4 \\
 -(2x^2 + 4x) \\
 \hline
 2x + 4 \\
 -(2x + 4) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 x + 2 \\
 \hline
 x^2 + 2x + 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^4 \quad + x^2 \quad + 1 \\
 -(x^4 - x^3 + x^2) \\
 \hline
 x^3 \quad + 1 \\
 -(x^3 - x^2 + x) \\
 \hline
 x^2 - x + 1 \\
 -(x^2 - x + 1) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 x^2 - x + 1 \\
 \hline
 x^2 + x + 1
 \end{array}$$

c) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 + x - 3 \\
 -(x^3 - 3x^2) \\
 \hline
 x - 3 \\
 -(x - 3) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x - 3 \\
 \hline
 x^2 + 1
 \end{array}$$

d) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \\
 -(2x^4 - 2x^3 - 2x^2) \\
 \hline
 -3x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \\
 -(-3x^3 + 3x^2 + 3x) \\
 \hline
 x^2 - x - 1 \\
 -(x^2 - x - 1) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^2 - x - 1 \\
 \hline
 2x^2 - 3x + 1
 \end{array}$$

e) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^4 - x - 14 \\
 -(x^4 - 2x^3) \\
 \hline
 2x^3 - x - 14 \\
 -(2x^3 - 4x^2) \\
 \hline
 4x^2 - x - 14 \\
 -(4x^2 - 8x) \\
 \hline
 7x - 14 \\
 -(7x - 14) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

f) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 2x^2 + 1 \\
 -(x^3 + x) \\
 \hline
 2x^2 - x + 1 \\
 -(2x^2 + 2) \\
 \hline
 -x - 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^2 + 1 \\
 \hline
 x + 2
 \end{array}$$

□

Ví dụ 2. Sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến rồi thực hiện phép chia:

- a) $(-2x + 2x^3 - 3 - 5x^2) : (x - 3);$ b) $(-x^3 + 3x + x^4 + x^2) : (x^2 - 2x + 3);$
 c) $(2 + x + 8x^3 - 2x^2) : (2x + 1);$ d) $(22x^2 + 5x^3 + 10 - 13x) : (5x^2 - 3x + 2);$
 e) $(-x^2 + 6x^3 - 26x + 21) : (x - 1);$ f) $(8x - 5 - 3x^3 - 3x^2 + x^4) : (x - 1).$

 Lời giải.

a) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được: b) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$ \begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3 \\ -(2x^3 - 6x^2) \\ \hline x^2 - 2x - 3 \\ -(x^2 - 3x) \\ \hline x - 3 \\ -(x - 3) \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^4 - x^3 + x^2 + 3x \\ -(x^4 - 2x^3 + 3x^2) \\ \hline x^3 - 2x^2 + 3x \\ -(x^3 - 2x^2 + 3x) \\ \hline 0 \end{array} $
--	---

c) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được: d) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$ \begin{array}{r} 8x^3 - 2x^2 + x + 2 \\ -(8x^3 + 4x^2) \\ \hline -6x^2 + x + 2 \\ -(-6x^2 - 3x) \\ \hline 4x + 2 \\ -(4x + 2) \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 5x^3 + 22x^2 - 13x + 10 \\ -(5x^3 - 3x^2 + 2x) \\ \hline 25x^2 - 15x + 10 \\ -(25x^2 - 15x + 10) \\ \hline 0 \end{array} $
--	---

e) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được: f) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$ \begin{array}{r} 6x^3 - x^2 - 26x + 21 \\ -(6x^3 - 9x^2) \\ \hline 8x^2 - 26x + 21 \\ -(8x^2 - 12x) \\ \hline -14x + 21 \\ -(-14x + 21) \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 2x - 3 \\ \hline 3x^2 + 4x - 7 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 8x - 5 \\ -(x^4 - x^3) \\ \hline -2x^3 - 3x^2 + 8x - 5 \\ -(-2x^3 + 2x^2) \\ \hline -5x^2 + 8x - 5 \\ -(-5x^2 + 5x) \\ \hline 3x - 5 \\ -(3x - 3) \\ \hline -2 \end{array} $
--	---	---

□

Ví dụ 3. Cho hai đa thức $A = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 4$ và $B = x^2 - 2x + 3$. Tìm thương Q và dư R sao cho $A = B \cdot Q + R$. **ĐS:** $Q = x^2 + 5x + 9$ và dư là $R = 2x - 31$

 **Lời giải.**

Thực hiện phép chia ta được

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 4 \\
 -(x^4 - 2x^3 + 3x^2) \\
 \hline
 5x^3 - x^2 - x - 4 \\
 -(5x^3 - 10x^2 + 15x) \\
 \hline
 9x^2 - 16x - 4 \\
 -(9x^2 - 18x + 27) \\
 \hline
 2x - 31
 \end{array}$$

Suy ra thương $Q = x^2 + 5x + 9$ và dư là $R = 2x - 31$. □

Ví dụ 4. Cho hai đa thức $A = x^3 + x + 1$ và $B = x^2 + x + 1$. Tìm thương Q và dư R sao cho $A = B \cdot Q + R$. **ĐS:** $Q = x - 1$ và dư là $R = x + 2$

 Lời giải.

Thực hiện phép chia ta được

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & + x + 1 & x^2 + x + 1 \\
 -(x^3 + x^2 + x) & & x - 1 \\
 \hline
 & -x^2 & + 1 \\
 & -(-x^2 - x - 1) & \\
 \hline
 & & x + 2
 \end{array}$$

Suy ra thương $Q = x - 1$ và dư là $R = x + 2$. □

 **Ví dụ 5.** Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ để thực hiện phép chia:

- a) $(4x^2 + 4xy + y^2) : (2x + y)$; **ĐS:** $2x + y$ b) $(27x^3 + 8) : (3x + 2)$; **ĐS:** $9x^2 - 6x + 4$
 c) $(x^4 - 2x^2y + y^2) : (y - x^2)$. **ĐS:** $y - x^2$

 Lời giải.

1. $(4x^2 + 4xy + y^2) : (2x + y) = (2x + y)^2 : (2x + y) = 2x + y$;
 2. $(27x^3 + 8) : (3x + 2) = [(3x)^3 + 2^3] : (3x + 2) = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4) : (3x + 2) = 9x^2 - 6x + 4$;
 3. $(x^4 - 2x^2y + y^2) : (y - x^2) = (x^2 - y)^2 : (y - x^2) = (y - x^2)^2 : (y - x^2) = y - x^2$.
-

 **Ví dụ 6.** Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ để thực hiện phép chia:

- a) $(x^2 + 6xy + 9y^2) : (x + 3y)$; **ĐS:** $x + 3y$ b) $(64y^3 - 27) : (4y - 3)$; **ĐS:** $16y^2 + 12y + 9$
 c) $(x^2 - 2xy^2 + y^4) : (x - y^2)$. **ĐS:** $x - y^2$

 Lời giải.

1. $(x^2 + 6xy + 9y^2) : (x + 3y) = (x + 3y)^2 : (x + 3y) = x + 3y$;
 2. $(64y^3 - 27) : (4y - 3) = [(4y)^3 - 3^3] : (4y - 3) = (4y - 3)(16y^2 + 12y + 9) : (4y - 3) = 16y^2 + 12y + 9$;
 3. $(x^2 - 2xy^2 + y^4) : (x - y^2) = (x - y^2)^2 : (x - y^2) = x - y^2$.
-

 Dạng 48. Tìm giá trị chưa biết thỏa mãn yêu cầu bài toán

Nội dung phương pháp: Dựa vào tính chia hết, chia có dư của đa thức để thực hiện.

 BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm a, b để đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ với:

1. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b, g(x) = x^2 - x - 2;$ **ĐS:** $a = 1, b = -30$

2. $f(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a, g(x) = x^2 - x + 5.$ **ĐS:** $a = 5$

Lời giải.

1. Thực hiện phép chia đa thức ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b \\
 -(x^4 - x^3 - 2x^2) \\
 \hline
 -8x^3 + 23x^2 + ax + b \\
 -(-8x^3 + 8x^2 + 16x) \\
 \hline
 15x^2 + (a - 16)x + b \\
 -(15x^2 - 15x - 30) \\
 \hline
 (a - 1)x + b + 30
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x^2 - x - 2 \\
 \hline
 x^2 - 8x + 15
 \end{array}$$

Suy ra phép chia có dư là $(a - 1)x + b + 30$.

Đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ khi dư là 0, hay $\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b + 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -30 \end{cases}$

2. Thực hiện phép chia đa thức ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a \\
 -(x^4 - x^3 + 5x^2) \\
 \hline
 x^2 - x + a \\
 -(x^2 - x + 5) \\
 \hline
 a - 5
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x^2 - x + 5 \\
 \hline
 x^2 + 1
 \end{array}$$

Suy ra phép chia có dư là $a - 5$.

Đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ khi dư là 0, hay $a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = 5$.

□

Ví dụ 2. Tìm a để đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ với:

1. $f(x) = 3x^3 + 10x^2 - 5 + a, g(x) = 3x + 1;$ **ĐS:** $a = 4$

2. $f(x) = x^3 - 3x + a, g(x) = x^2 - 2x + 1.$ **ĐS:** $a = 2$

Lời giải.

1. Thực hiện phép chia đa thức ta được:

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 + 10x^2 & -5 + a \\
 -(3x^3 + x^2) & \\
 \hline
 9x^2 & -5 + a \\
 -(9x^2 + 3x) & \\
 \hline
 & -3x - 5 + a \\
 -(-3x - 1) & \\
 \hline
 & -4 + a
 \end{array}$$

Suy ra phép chia có dư là $-4 + a$.

Đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ khi dư là 0, hay $-4 + a = 0 \Leftrightarrow a = 4$.

2. Thực hiện phép chia ta được

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & -3x + a \\
 -(x^3 - 2x^2 + x) & \\
 \hline
 2x^2 - 4x + a & \\
 -(2x^2 - 4x + 2) & \\
 \hline
 & a - 2
 \end{array}$$

Suy ra phép chia có dư là $a - 2$.

Đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ khi dư là 0, hay $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

□

Ví dụ 3. Tìm các số nguyên x để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

1. $x^2 + 7$ chia hết cho $x - 2$;

ĐS: Tập các giá trị của x là $\{-9, 1, 3, 13\}$

2. $x^3 + 2x^2 + 15$ chia hết cho $x + 3$.
 $\{-9, -6, -5, -4, -2, 0, 1, 3, \}$

ĐS: Tập các giá trị của x là

Lời giải.

1. Ta có phép chia $\frac{x^2 + 7}{x - 2} = \frac{x^2 - 4 + 11}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} + \frac{11}{x - 2} = x + 2 + \frac{11}{x - 2}$.

Với x nguyên, $x^2 + 7$ chia hết cho $x - 2$ khi $x - 2$ là ước của 11.

Ta có bảng giá trị:

$x - 2$	11	1	-1	-11
x	13	3	1	-9

Vậy tập các giá trị của x là $\{-9, 1, 3, 13\}$.

2. Ta có phép chia

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + 2x^2 + 15}{x + 3} &= \frac{(x^3 + 3x^2) - (x^2 + 3x) + (3x + 9) + 6}{x + 3} \\ &= \frac{x^2(x + 3)}{x + 3} - \frac{x(x + 3)}{x + 3} + \frac{3(x + 3)}{x + 3} + \frac{6}{x + 3} = x^2 - x + 3 + \frac{6}{x + 3}.\end{aligned}$$

Với x nguyên, $x^3 + 2x^2 + 15$ chia hết cho $x + 3$ khi $x + 3$ là ước của 6.

Ta có bảng giá trị:

$x + 3$	6	1	-1	-6	-3	-2	2	3
x	3	-2	-4	-9	-6	-5	1	0

Vậy tập các giá trị của x là $\{-9, -6, -5, -4, -2, 0, 1, 3\}$.

□

Ví dụ 4. Tìm các số nguyên x để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

1. $x^3 + 4x^2 - 2x + 4$ chia hết cho $x - 1$; **ĐS:** Tập các giá trị của x là $\{-8, -2, 2, 8\}$

2. $x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 10$ chia hết cho $x^2 + 1$. **ĐS:** Tập các giá trị của x là $\{-2, 0, 2\}$

Lời giải.

a) Ta có phép chia
$$\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 4}{x - 1} = \frac{(x^3 - x^2) + 5(x^2 - x) + 3(x - 1) + 7}{x - 1} = x^2 + 5x + 3 + \frac{7}{x - 1}.$$

Với x nguyên, $x^3 + 4x^2 - 2x + 4$ chia hết cho $x - 1$ khi $x - 1$ là ước của 7.

Ta có bảng giá trị:

$x - 1$	7	1	-1	-7
x	8	2	-2	-8

Vậy tập các giá trị của x là $\{-8, -2, 2, 8\}$.

b) Ta có phép chia

$$\begin{aligned}\frac{x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 10}{x^2 + 1} &= \frac{(x^5 + x^3) - 3(x^4 + x^2) + 3(x^3 + x) + 5(x^2 + 1) + 5}{x^2 + 1} \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x + 5 + \frac{5}{x^2 + 1}.\end{aligned}$$

Với x nguyên, $x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 10$ chia hết cho $x^2 + 1$ khi $x^2 + 1$ là ước của 5.

Do $x^2 + 1 \geq 1$ nên ta có 2 trường hợp:

TH1. $x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

TH2. $x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy tập các giá trị của x là $\{-2, 0, 2\}$.

□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến rồi thực hiện phép chia:

- a) $(x^3 - 3x^2) : (x - 3);$ b) $(2x^2 + 2x - 4) : (x + 2);$
 c) $(12 - x^3 - x^2) : (x - 2);$ d) $(6x - 5x^2 - 15 + 2x^3) : (2x - 5);$
 e) $(6x - 5x^2 - 15 + 2x^3) : (2x - 5);$ f) $(5x^2 + 15 - 3x^3 - 9x) : (5 - 3x);$
 g) $(x^3 + 2x^4 - 5x^2 - 3 - 3x) : (x^2 - 3);$ h) $(x^3 + x^5 + x^2 + 1) : (x^3 + 1);$
 i) $(3 - 2x + 2x^3 + 5x^2) : (2x^2 - x + 1).$

Lời giải.

- a) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được: b) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 \\ -(x^3 - 3x^2) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 3 \\ \hline x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 2x - 4 \\ -(2x^2 + 4x) \\ \hline -2x - 4 \\ -(-2x - 4) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x + 2 \\ \hline 2x - 2 \end{array}$$

- c) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được: d) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r} -x^3 - x^2 + 12 \\ -(-x^3 + 2x^2) \\ \hline -3x^2 + 12 \\ -(-3x^2 + 6x) \\ \hline -6x + 12 \\ -(-6x + 12) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 2 \\ \hline -x^2 - 3x - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 + 6x - 15 \\ -(2x^3 - 5x^2) \\ \hline 6x - 15 \\ -(6x - 15) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x - 5 \\ \hline x^2 + 3 \end{array}$$

e) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 -3x^3 + 5x^2 - 9x + 15 \\
 -(-3x^3 + 5x^2) \\
 \hline
 -9x + 15 \\
 -(-9x + 15) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 -3x + 5 \\
 \hline
 x^2 + 3
 \end{array}$$

f) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x - 3 \\
 -(2x^4 - 6x^2) \\
 \hline
 x^3 + x^2 - 3x - 3 \\
 -(x^3 - 3x) \\
 \hline
 x^2 - 3 \\
 -(x^2 - 3) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 x^2 - 3 \\
 \hline
 2x^2 + x + 1
 \end{array}$$

g) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^5 + x^3 + x^2 + 1 \\
 -(x^5 + x^2) \\
 \hline
 x^3 + 1 \\
 -(x^3 + 1) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

h) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 5x^2 - 2x + 3 \\
 -(2x^3 - x^2 + x) \\
 \hline
 6x^2 - 3x + 3 \\
 -(6x^2 - 3x + 3) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 2x^2 - x + 1 \\
 \hline
 x + 3
 \end{array}$$

□

Bài 2. Cho hai đa thức $A = 3x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 8x - 5$ và $B = 3x^2 - 2x + 3$. Tìm thương Q và dư R sao cho $A = B \cdot Q + R$.

ĐS: $Q = x^2 - 2x - 6$ và dư là $R = 2x + 13$

 **Lời giải.**

Thực hiện phép chia ta được

Giáo viên:

$$\begin{array}{r|l}
 3x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 8x - 5 & 3x^2 - 2x + 3 \\
 -(3x^4 - 2x^3 + 3x^2) & x^2 - 2x - 6 \\
 \hline
 -6x^3 - 14x^2 + 8x - 5 & \\
 -(-6x^3 + 4x^2 - 6x) & \\
 \hline
 -18x^2 + 14x - 5 & \\
 -(-18x^2 + 12x - 18) & \\
 \hline
 2x + 13 &
 \end{array}$$

Suy ra thương $Q = x^2 - 2x - 6$ và dư là $R = 2x + 13$. □

Bài 3. Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ để thực hiện phép chia:

1. $(4x^2 + 12xy + 9y^2) : (2x + 3y);$ **ĐS:** $2x + 3y$
2. $(125x^3 + 27) : (5x + 3);$ **ĐS:** $25x^2 - 15x + 9$
3. $(9x^4 - 12x^2y + 4y^2) : (2y - 3x^2).$ **ĐS:** $2y - 3x^2$

Lời giải.

1. $(4x^2 + 12xy + 9y^2) : (2x + 3y) = (2x + 3y)^2 : (2x + 3y) = 2x + 3y;$
2. $(125x^3 + 27) : (5x + 3) = [(5x)^3 + 3^3] : (5x + 3) = (5x + 3)(25x^2 - 15x + 9) : (5x + 3) = 25x^2 - 15x + 9;$
3. $(9x^4 - 12x^2y + 4y^2) : (2y - 3x^2) = (3x^2 - 2y)^2 : (2y - 3x^2) = (2y - 3x^2)^2 : (2y - 3x^2) = 2y - 3x^2.$

□

Bài 4. Tìm a, b để đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ với:

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b, g(x) = x^2 - 3x + 4;$ **ĐS:** $a = 1, b = 4$
2. $f(x) = x^4 - x^3 - 10x^2 + ax + b, g(x) = x^2 + 2x + 3.$ **ĐS:** $a = -23, b = -21$

Lời giải.

1. Thực hiện phép chia đa thức ta được:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 2x^2 + ax + b & x^2 - 3x + 4 \\
 -(x^3 - 3x^2 + 4x) & x + 1 \\
 \hline
 x^2 + (a - 4)x + b & \\
 -(x^2 - 3x + 4) & \\
 \hline
 (a - 1)x + b - 4 &
 \end{array}$$

Suy ra phép chia có dư là $(a - 1)x + b - 4$.

Đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ khi dư là 0, hay $\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$.

2. Thực hiện phép chia đa thức ta được:

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 - 10x^2 + ax + b \\ -(x^4 + 2x^3 + 3x^2) \\ \hline -3x^3 - 13x^2 + ax + b \\ -(-3x^3 - 6x^2 - 9x) \\ \hline -7x^2 + (a + 9)x + b \\ -(-7x^2 - 14x - 21) \\ \hline (a + 23)x + b + 21 \end{array}$$

Suy ra phép chia có dư là $(a + 23)x + b + 21$.

Đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ khi dư là 0, hay $\begin{cases} a + 23 = 0 \\ b + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -23 \\ b = -21 \end{cases}$.

□

Bài 5. Tìm các số nguyên x để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

- $2x^2 + 3x - 4$ chia hết cho $2x + 1$; **ĐS:** Tập các giá trị của x là $\{-3, -1, 0, 2\}$
- $3x^3 + x^2 - 12$ chia hết cho $x - 2$. **ĐS:** Tập các giá trị của x là $\{-14, -6, -2, 0, 1, 3, 4, 6, 10, 18\}$

Lời giải.

- Ta có phép chia $\frac{2x^2 + 3x - 4}{2x + 1} = \frac{(2x^2 + x) + (2x + 1) - 5}{2x + 1} = x + 1 - \frac{5}{2x + 1}$.

Với x nguyên, $2x^2 + 3x - 4$ chia hết cho $2x + 1$ khi $2x + 1$ là ước của 5.

Ta có bảng giá trị:

$2x + 1$	5	1	-1	-5
x	2	0	-1	-3

Vậy tập các giá trị của x là $\{-3, -1, 0, 2\}$.

- Ta có phép chia $\frac{3x^3 + x^2 - 12}{x - 2} = \frac{(3x^3 - 6x^2) + (7x^2 - 14x) + (14x - 28) + 16}{x - 2} = 3x^2 + 7x + 14 + \frac{16}{x - 2}$.

Với x nguyên, $3x^3 + x^2 - 12$ chia hết cho $x - 2$ khi $x - 2$ là ước của 16.

Ta có bảng giá trị:

$x - 2$	16	8	4	2	1	-1	-2	-4	-8	-16
x	18	10	6	4	3	1	0	-2	-6	-14

Vậy tập các giá trị của x là $\{-14, -6, -2, 0, 1, 3, 4, 6, 10, 18\}$.

□

§13 Ôn tập chương 1

1 Tóm tắt lý thuyết

Xem lại phần Tóm tắt lý thuyết từ Bài 1 đến Bài 12.

2 Bài tập và các dạng toán

 **Ví dụ 1.** Rút gọn biểu thức

$$1. A = (x + 3)(x + 2) - (x + 1)(x + 4); \quad \text{ĐS: } 2$$

$$2. B = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x^2(x - 1); \quad \text{ĐS: } x^2 + 8$$

$$3. C = (x + y)^2 - 2(x - y)(x + y) + (x - y)^2. \quad \text{ĐS: } 4y^2$$

 **Lời giải.**

$$\text{a) } A = x^2 + 5x + 6 - x^2 - 5x - 4 = 2. \quad \text{b) } B = x^3 + 8 - x^3 + x^2 = x^2 + 8.$$

$$\text{c) } C = (x + y - x + y)^2 = 4y^2.$$

□

 **Ví dụ 2.** Rút gọn biểu thức

$$1. M = (x + 5)(x - 7) - (x - 5)(x + 3); \quad \text{ĐS: } -20$$

$$2. N = (x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6x^2; \quad \text{ĐS: } 2$$

$$3. P = (x + 2y)(x - 6y) - (x - 2y)^2. \quad \text{ĐS: } -16y^2$$

 **Lời giải.**

$$1. M = x^2 - 2x - 35 - x^2 + 2x + 15 = -20.$$

$$2. N = 2(x^2 + 2x + 1 + x^2 - 1 + x^2 - 2x + 1) - 6x^2 = 2(3x^2 + 1) - 6x^2 = 2.$$

$$3. P = x^2 - 4xy - 12y^2 - x^2 + 4xy - 4y^2 = -16y^2.$$

□

 **Ví dụ 3.** Tính nhanh giá trị của biểu thức sau

$$1. A = x^2 + 16y^2 - 8xy \text{ tại } x = 16 \text{ và } y = 3; \quad \text{ĐS: } 16$$

2. $B = x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$ tại $x = -12$ và $y = 8$.

ĐS: 64

 **Lời giải.**

1. $A = x^2 + 16y^2 - 8xy = (x - 4y)^2$. Với $x = 16$ và $y = 3$ thì $A = (16 - 12)^2 = 16$.

2. $B = x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2 = (x + 2y)^3$. Với $x = -12$ và $y = 8$ thì $B = (-12 + 16)^3 = 64$.

□

 **Ví dụ 4.** Tính nhanh giá trị của biểu thức sau

1. $A = x^2 + 9y^2 - 6xy$ tại $x = 8$ và $y = -2$.

ĐS: 196

2. $B = x^3 + 27y^3 + 9x^2y + 27xy^2$ tại $x = -18$ và $y = 5$.

ĐS: 27

 **Lời giải.**

1. $A = x^2 + 9y^2 - 6xy = (x - 3y)^2$. Với $x = 8$ và $y = -2$ thì $A = (8 + 6)^2 = 196$.

2. $B = x^3 + 27y^3 + 9x^2y + 27xy^2 = (x + 3y)^3$. Với $x = -18$ và $y = 5$ thì $B = (-18 + 15)^3 = -27$.

□

 **Ví dụ 5.** Tính giá trị của biểu thức

1. $M = (3x - 1)^2 + (2x - 3)^2 - (6x - 2)(2x - 3)$ tại $x = 18$;

ĐS: 400

2. $N = 4(x - y)^2 + 4(x - y)(y - 1) + y^2 - 2y + 1$ tại $x = 3$ và $y = 5$.

ĐS: 0

 **Lời giải.**

1. $M = (3x - 1)^2 + (2x - 3)^2 - (6x - 2)(2x - 3) = (3x - 1 - 2x + 3)^2 = (x + 2)^2$. Với $x = 18$ thì

$$M = (18 + 2)^2 = 20^2 = 400.$$

2. $N = 4(x - y)^2 + 4(x - y)(y - 1) + y^2 - 2y + 1 = (2x - 2y + y - 1)^2 = (2x - y - 1)^2$. Với $x = 3$ và $y = 5$ thì $N = (6 - 5 - 1)^2 = 0$.

□

 **Ví dụ 6.** Tính giá trị của biểu thức

1. $A = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - x(8x^2 - x)$ tại $x = 10$;

ĐS: 99

2. $B = (2x - y^2)(2x + y^2) - (y^2 - 2x)^2 - 4xy^2$ tại $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$.

ĐS: -32

 **Lời giải.**

1. $A = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - x(8x^2 - x) = 8x^3 - 1 - 8x^3 + x^2 = x^2 - 1$.

Với $x = 10$ thì $A = 10^2 - 1 = 99$.

2. $B = (2x - y^2)(2x + y^2) - (y^2 - 2x)^2 - 4xy^2 = 4x^2 - y^4 - y^4 + 4xy^2 - 4x^2 - 4xy^2 = -2y^4$.

Với $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$ thì $B = -2 \cdot 2^4 = -32$.

□

Ví dụ 7. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x

$$A = (x - 1)^3 + (x + 1)^3 + 2(2 - x)(x^2 + 2x + 4) - 6x.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= (x - 1)^3 + (x + 1)^3 + 2(2 - x)(x^2 + 2x + 4) - 6x \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 2(8 - x^3) - 6x \\ &= 2x^3 + 16 - 2x^3 \\ &= 16. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x . □

Ví dụ 8. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x

$$B = (x + 1)^3 + x \cdot (2 - x)(x + 2) - (3x + 4)(x + 1).$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= (x + 1)^3 + x \cdot (2 - x)(x + 2) - (3x + 4)(x + 1) \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x(4 - x^2) - 3x^2 - 7x - 4 \\ &= x^3 - 4x - 3 + 4x - x^3 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x . □

Ví dụ 9. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. $4x^2 + 1 - 4x$; | ĐS: $(2x - 1)^2$ |
| 2. $x^2 - y^2 + 2x - 2y$; | ĐS: $(x - y)(x + y + 2)$ |
| 3. $x^2 - y^2 + 4y - 4$; | ĐS: $(x - y + 2)(x + y - 2)$ |
| 4. $(x^2 - 2xy)^2 + 2(x^2 - 2xy)y^2 + y^4$. | ĐS: $(x + y)^4$ |

Lời giải.

1. $4x^2 + 1 - 4x = (2x - 1)^2$.
2. $x^2 - y^2 + 2x - 2y = (x + 1)^2 - (y + 1)^2 = (x - y)(x + y + 2)$.
3. $x^2 - y^2 + 4y - 4 = x^2 - (y - 2)^2 = (x - y + 2)(x + y - 2)$.
4. $(x^2 - 2xy)^2 + 2(x^2 - 2xy)y^2 + y^4 = (x^2 + 2xy + y^2)^2 = (x + y)^4$.

Ví dụ 10. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1. $x^3 - 2x^2 - 2x + 4$; | ĐS: $(x - 2)(x^2 - 2)$ |
|----------------------------|-------------------------------|

2. $x^2 - 4y^2 + 3x - 6y$;

ĐS: $(x - 2y)(x + 2y + 3)$

3. $4x^2 + 4x + 1 - y^2$;

ĐS: $(2x - y + 1)(2x + y + 1)$

4. $x^3 - y^3 - x^2 + y^2$.

ĐS: $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y)$

 Lời giải.

1. $x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = x^2(x - 2) - 2(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 2)$.

2. $x^2 - 4y^2 + 3x - 6y = (x - 2y)(x + 2y) + 3(x - 2y) = (x - 2y)(x + 2y + 3)$.

3. $4x^2 + 4x + 1 - y^2 = (2x + 1)^2 - y^2 = (2x - y + 1)(2x + y + 1)$.

4. $x^3 - y^3 - x^2 + y^2 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x - y)(x + y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y)$. □

 Ví dụ 11. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

1. $x^2 - 4x - 5$;

ĐS: $(x + 1)(x - 5)$

2. $x^2 + 3x + 2$;

ĐS: $(x + 1)(x + 2)$

3. $x^4 + 4y^4$;

ĐS: $(x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$

4. $(x^2 - 1)^2 - 2y(x + 1)(x - 1) + y^2$.

ĐS: $(x^2 - 1 - y)^2$

 Lời giải.

1. $x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$.

2. $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$.

3. $x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$.

4. $(x^2 - 1)^2 - 2y(x + 1)(x - 1) + y^2 = (x^2 - 1 - y)^2$. □

 Ví dụ 12. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

1. $x^2 - 3x - 4$;

ĐS: $(x + 1)(x - 4)$

2. $x^2 - x - 6$;

ĐS: $(x + 2)(x - 3)$

3. $x^4 + 4$;

ĐS: $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

4. $x^3 + 8y^3 - 3x^2y - 6xy^2$.

ĐS: $(x + 2y)(x - y)(x - 4y)$

 Lời giải.

1. $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$.

2. $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$.

3. $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

4. $x^3 + 8y^3 - 3x^2y - 6xy^2 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - 3xy(x + 2y) = (x + 2y)(x^2 - 5xy + 4y^2) = (x + 2y)(x - y)(x - 4y)$. □

 **Ví dụ 13.** Tìm x , biết

1. $3x(4x^2 - 1) = 0$;

ĐS: $x \in \left\{0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

2. $(x + 5)^2 - (x + 5)(x - 2) = 0$;

ĐS: $x = -5$

3. $x^3 + 7x^2 + 6x = 0$;

ĐS: $x \in \{0; -1; -6\}$

4. $(x + 1)^2 - (2x + 3)^2 = 0$.

ĐS: $x \in \left\{-\frac{4}{3}; -2\right\}$

 **Lời giải.**

$$1. 3x(4x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x(2x - 1)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$2. (x + 5)^2 - (x + 5)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x + 5 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5.$$

$$3. x^3 + 7x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1)(x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \\ x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -6 \end{cases}.$$

$$4. (x + 1)^2 - (2x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x + 4)(-x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4 = 0 \\ -x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ x = -2 \end{cases}.$$

□

 **Ví dụ 14.** Tìm x , biết

1. $4x(9x^2 - 1) = 0$;

ĐS: $x \in \left\{0; \pm\frac{1}{3}\right\}$

2. $(x + 2)^2 - (x + 2)(x - 3) = 0$;

ĐS: $x = -2$

3. $2x^3 - 4x^2 + 2x = 0$;

ĐS: $x = 0; x = 1$

4. $(x - 1)^2 - (2x + 1)^2 = 0$.

ĐS: $x = 0; x = -2$

 **Lời giải.**

$$1. 4x(9x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x(3x - 1)(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 3x - 1 = 0 \\ 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$2. (x + 2)^2 - (x + 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 2 - x + 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

$$3. 2x^3 - 4x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$4. (x-1)^2 - (2x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x(-x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

□

 **Ví dụ 15.** Làm tính chia

$$1. (x^2 - 11x + 10) : (x - 1); \quad \text{ĐS: } x - 10$$

$$2. (2x^3 - 2x^2 + x - 1) : (2x^2 + 1); \quad \text{ĐS: } x - 1$$

$$3. (x^2 - 4y^2 + 6x + 9) : (x + 2y + 3). \quad \text{ĐS: } x - 2y + 3$$

 **Lời giải.**

$$1. (x^2 - 11x + 10) : (x - 1) = x - 10.$$

$$2. (2x^3 - 2x^2 + x - 1) : (2x^2 + 1) = x - 1.$$

$$3. (x^2 - 4y^2 + 6x + 9) : (x + 2y + 3) = x - 2y + 3.$$

□

 **Ví dụ 16.** Làm tính chia

$$1. (x^2 + 5x + 4) : (x + 1); \quad \text{ĐS: } x + 4$$

$$2. (3x^3 - 3x^2 + x - 1) : (3x^2 + 1); \quad \text{ĐS: } x - 1$$

$$3. (x^2 - 9y^2 + 10x + 25) : (x + 3y + 5). \quad \text{ĐS: } x - 3y + 5$$

 **Lời giải.**

$$1. (x^2 + 5x + 4) : (x + 1) = x + 4.$$

$$2. (3x^3 - 3x^2 + x - 1) : (3x^2 + 1) = x - 1.$$

$$3. (x^2 - 9y^2 + 10x + 25) : (x + 3y + 5) = x - 3y + 5.$$

□

 **Ví dụ 17.** Chứng minh rằng

$$\text{a) } 4x^2 - 4xy + y^2 + 1 > 0 \text{ với mọi số thực } x \text{ và } y; \quad \text{b) } -9x^2 + 3x - 1 < 0 \text{ với mọi số thực } x.$$

 **Lời giải.**

$$1. \text{ Vì } 4x^2 - 4xy + y^2 + 1 = (2x - y)^2 + 1 > 0 \text{ nên } 4x^2 - 4xy + y^2 + 1 > 0 \text{ với mọi số thực } x \text{ và } y.$$

$$2. \text{ Vì } -9x^2 + 3x - 1 = -\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0 \text{ nên } -9x^2 + 3x - 1 < 0 \text{ với mọi số thực } x.$$

□

 **Ví dụ 18.** Chứng minh rằng

- a) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 1 > 0$ với mọi số thực x và y ; b) $-25x^2 + 5x - 1 < 0$ với mọi số thực x .

 **Lời giải.**

1. Vì $x^2 - 6xy + 9y^2 + 1 = (x - 3y)^2 + 1 > 0$ nên $x^2 - 6xy + 9y^2 + 1 > 0$ với mọi số thực x và y ;
 2. Vì $-25x^2 + 5x - 1 = -\left(5x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$ nên $-25x^2 + 5x - 1 < 0$ với mọi số thực x .

□

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Thực hiện phép tính

- a) $\frac{1}{2}x^2(2x^3 - 4x^2 + 3)$; **ĐS:** $x^5 - 2x^4 + \frac{3}{2}x^2$ b) $2y(xy - 1)(xy + 1)$; **ĐS:** $2x^2y^3 - 2y$
 c) $(x + 2)(x^2 - x + 1)$; **ĐS:** $x^3 + x^2 - x + 2$ d) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$. **ĐS:** $x^3 - 8y^3$

 **Lời giải.**

- a) $\frac{1}{2}x^2(2x^3 - 4x^2 + 3) = x^5 - 2x^4 + \frac{3}{2}x^2$. b) $2y(xy - 1)(xy + 1) = 2y(x^2y^2 - 1) = 2x^2y^3 - 2y$.
 c) $(x + 2)(x^2 - x + 1) = x^3 + x^2 - x + 2$. d) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = x^3 - 8y^3$.

□

 **Bài 2.** Tính nhanh giá trị của biểu thức

1. $A = (x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x^2 - 1)$ tại $x = 7$; **ĐS:** 6
 2. $B = x^2 + 25y^2 + 10xy$ tại $x = -20$ và $y = 2$; **ĐS:** 100
 3. $C = x^3 - 64y^3 - 12x^2y + 48xy^2$ tại $x = 25$ và $y = 6$. **ĐS:** 1

 **Lời giải.**

1. Ta có $A = (x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x^2 - 1) = x^3 - 1 - x^3 + x = x - 1$. Với $x = 7$ thì $A = 7 - 1 = 6$.
 2. Ta có $B = x^2 + 25y^2 + 10xy = (x + 5y)^2$. Với $x = -20$ và $y = 2$ thì $B = (-20 + 10)^2 = 100$.
 3. Ta có $C = x^3 - 64y^3 - 12x^2y + 48xy^2 = (x - 4y)^3$. Với $x = 25$ và $y = 6$ thì $C = (25 - 24)^3 = 1$.

□

 **Bài 3.** Phân tích đa thức thành nhân tử

1. $(x - 7)^2 + x^2 - 49$; **ĐS:** $2x(x - 7)$
 2. $y + x^2y + 3x^2 + 3$; **ĐS:** $(x^2 + 1)(y + 3)$

$$3. 2y^3 - 6y^2 + 12y - 8.$$

$$\text{ĐS: } 2(y-1)(y^2 - 2y + 4)$$

 **Lời giải.**

$$1. (x-7)^2 + x^2 - 49 = (x-7)^2 + (x-7)(x+7) = (x-7)(x-7+x+7) = 2x(x-7).$$

$$2. y + x^2y + 3x^2 + 3 = y(1+x^2) + 3(x^2+1) = (x^2+1)(y+3).$$

$$3. 2y^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 2(y^3 - 3y^2 + 6y - 4) = 2(y^3 - y^2 - 2y^2 + 2y + 4y - 4) = 2(y-1)(y^2 - 2y + 4).$$

□

 **Bài 4.** Tìm x , biết

$$1. 7x(16x^2 - 1) = 0;$$

$$\text{ĐS: } x = 0; x = \pm \frac{1}{4}$$

$$2. (x+4)^2 - (x+4)(x-5) = 0;$$

$$\text{ĐS: } x = -4$$

$$3. x^3 + 3x^2 + 2x = 0.$$

$$\text{ĐS: } x = 0; x = -1; x = -2$$

 **Lời giải.**

$$1. 7x(16x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 7x(4x-1)(4x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 0 \\ 4x-1 = 0 \\ 4x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$2. (x+4)^2 - (x+4)(x-5) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x+4-x+5) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

$$3. x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

□

 **Bài 5.** Phân tích đa thức thành nhân tử

$$1. x^2 + 5x + 6;$$

$$\text{ĐS: } (x+2)(x+3)$$

$$2. x^3 - 3x^2 + 3x - 1;$$

$$\text{ĐS: } (x-1)^3$$

$$3. 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1;$$

$$\text{ĐS: } (2x-1)(x^2 - x + 1)$$

$$4. 4x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 4y.$$

$$\text{ĐS: } (2x-y)(2x-y-4)$$

 **Lời giải.**

$$1. x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3).$$

$$2. x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3.$$

$$3. 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + (x-1)^3 = (2x-1)[x^2 - x(x-1) + x^2 - 2x + 1] = (2x-1)(x^2 - x + 1).$$

$$4. 4x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 4y = (2x-y)^2 - 4(2x-y) = (2x-y)(2x-y-4).$$

□

 **Bài 6.** Làm tính chia

1. $(x^2 - 8x + 7) : (x - 7);$

ĐS: $x - 1$

2. $(7x^3 - 7x^2 + x - 1) : (7x^2 + 1);$

ĐS: $x - 1$

3. $(x^2 - 16y^2 + 2x + 1) : (x + 4y + 1).$

ĐS: $x - 4y + 1$

 **Lời giải.**

a) $(x^2 - 8x + 7) : (x - 7) = x - 1.$

b) $(7x^3 - 7x^2 + x - 1) : (7x^2 + 1) = x - 1.$

c) $(x^2 - 16y^2 + 2x + 1) : (x + 4y + 1) = x - 4y + 1.$

□

 **Bài 7.** Chứng minh rằng

a) $16x^2 - 8xy + y^2 + 1 > 0$ với mọi x và y ; b) $-4x^2 + 2x - 1 < 0$ với mọi x .

 **Lời giải.**

Chứng minh rằng

1. Vì $16x^2 - 8xy + y^2 + 1 = (4x - y)^2 + 1 > 0$ nên $16x^2 - 8xy + y^2 + 1 > 0$ với mọi x và y .

2. Vì $-4x^2 + 2x - 1 = -\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$ nên $-4x^2 + 2x - 1 < 0$ với mọi x .

□

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I - ĐỀ 01

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM Khoanh tròn vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng

Câu 1. Cho hai đa thức $P = -2x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2y - 3x^3y^2$ và $Q = 2x^2y$. Kết quả của biểu thức $P \cdot Q$ là

(A) $4x^4y^3 + x^4y^2 - 6x^5y^3$.

(B) $-4x^4y^3 + x^4y^2 - 6x^5y^3$.

(C) $4x^4y^2 + x^4y - 6x^5y^3$.

(D) $-4x^4y^3 + 4x^4y - 6x^5y^3$.

Lời giải.

$$P \cdot Q = -4x^4y^3 + x^4y^2 - 6x^5y^3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho hai đa thức $P = -2x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2y - 3x^3y^2$ và $Q = 2x^2y$. Kết quả của phép chia đa thức P cho đơn thức Q là

(A) $y + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}xy$.

(B) $y + 1 - \frac{3}{2}xy$.

(C) $-y + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}xy$.

(D) $-y + 1 - \frac{3}{2}xy$.

Lời giải.

$$P : Q = -y + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}xy.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Khai triển của hằng đẳng thức $(x - 3)^2$ là

(A) $x^2 - 3^2$.

(B) $3 + 6x + x^2$.

(C) $9 - 6x + x^2$.

(D) $9 + 6x + x^2$.

Lời giải.

$$(x - 3)^2 = 9 - 6x + x^2$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Giá trị của biểu thức $x^2 + 4x + 4$ tại $x = -2$ là

(A) 0.

(B) -2.

(C) -9.

(D) 4.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ nên tại $x = -2$ thì giá trị của biểu thức bằng 0.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

(A) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

(B) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

(C) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

(D) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 - xy + y^2)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Giá trị của a để đa thức $x^3 + 2x + 2 - a$ chia hết cho đa thức $x - 1$ là

(A) $a = 1$.

(B) $a = 5$.

(C) $a = 2$.

(D) $a = -3$.

Lời giải.

Đặt $A(x) = x^3 + 2x + 2 - a$. Để $A(x)$ chia hết cho $x - 1$ thì

$$A(1) = 0 \Leftrightarrow 5 - a = 0 \Leftrightarrow a = 5.$$

Chọn đáp án **B**

□

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1. Thu gọn biểu thức: $M = (x + y)^2 + (x - y)^2 - 2 \cdot (x + y)(x - y) - 4x^2$.

Lời giải.

$$M = (x + y)^2 + (x - y)^2 - 2 \cdot (x + y)(x - y) - 4x^2 = (x + y - x + y)^2 - 4x^2 = 4y^2 - 4x^2.$$

□

Bài 2. Tìm x , biết

a) $x^2 - 5x = 0$;

b) $3(x - 1)^2 - 3x(x - 5) = 1$;

c) $x^4 + 2x^3 - 6x - 9 = 0$.

Lời giải.

$$1. \quad x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5. \end{cases}$$

$$2. \quad 3(x - 1)^2 - 3x(x - 5) = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 - 3x^2 + 15x - 1 = 0 \Leftrightarrow 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{9}.$$

3.

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 6x - 9 = 0 &\Leftrightarrow (x^4 + 2x^3 + x^2) - (x^2 + 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x)^2 - (x + 3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \text{ (vì } x^2 + 2x + 3 > 0) \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

□

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^3 - x^2y + 5x - 5y$;

b) $x^3 - 2x^2 - 4xy^2 + x$;

c) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 8$.

Lời giải.

1. Ta có $x^3 - x^2y + 5x - 5y = x^2(x - y) + 5(x - y) = (x - y)(x^2 + 5)$.

2. Ta có $x^3 - 2x^2 - 4xy^2 + x = x(x^2 - 2x + 1 - 4y^2) = x[(x - 1)^2 - (2y)^2] = x(x - 1 - 2y)(x - 1 + 2y)$.

3. Ta có

$$\begin{aligned} (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 8 &= (x + 2)(x + 5)(x + 3)(x + 4) - 8 \\ &= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 8 \\ &= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 8 \\ &= (x^2 + 7x + 11)^2 - 9 \\ &= (x^2 + 7x + 11 - 3)(x^2 + 7x + 11 + 3) \\ &= (x^2 + 7x + 8)(x^2 + 7x + 14). \end{aligned}$$

□

 **Bài 4.** Làm tính chia: $(x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2) : (x^2 - 1)$.

 **Lời giải.**

$$\begin{array}{r}
 x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 \quad | \quad x^2 - 1 \\
 \underline{-x^4 \qquad \qquad + x^2} \qquad \qquad \qquad \\
 -x^3 - 2x^2 + x \qquad \qquad \qquad \\
 \underline{x^3 \qquad \qquad - x} \qquad \qquad \qquad \\
 -2x^2 \qquad \qquad + 2 \qquad \qquad \qquad \\
 \underline{2x^2 \qquad \qquad - 2} \qquad \qquad \qquad \\
 0
 \end{array}$$

□

ĐÁP ÁN

1 B 2 C 3 C 4 A 5 D 6 B

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I - ĐỀ 02

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM Khoanh tròn vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng

Câu 1. Kết quả của phép nhân $2x^2y(x^2 - y^2 + 3xy)$ là

(A) $2x^4y + 2x^2y^3 - 6x^3y^2$.

(B) $2x^4y - 2x^2y^3 + 6x^3y^2$.

(C) $x^4y - x^2y^3 + x^3y^2$.

(D) $x^4y - x^2y^3 + x^3y^2$.

Lời giải.

Ta có $2x^2y(x^2 - y^2 + 3xy) = 2x^4y - 2x^2y^3 + 6x^3y^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

(A) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

(B) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

(C) $(3 - x)(x + 3) = -x^2 + 9$.

(D) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

Lời giải.

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Giá trị của biểu thức $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$ tại $x = 1, y = \frac{1}{2}$ là

(A) 2.

(B) 8.

(C) 0.

(D) -1.

Lời giải.

Ta có $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 = (x - 2y)^3$. Với $x = 1, y = \frac{1}{2}$ thì giá trị của biểu thức là

$$(1 - 2 \cdot \frac{1}{2})^3 = 0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Kết quả phân tích đa thức $x^3 - y^2x$ thành nhân tử là

(A) $(x + y)(x - y)$.

(B) $x(x^2 + y^2)$.

(C) $x(x - y)(x + y)$.

(D) $x(x - y)^2$.

Lời giải.

Ta có $x^3 - y^2x = x(x^2 - y^2) = x(x - y)(x + y)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Các giá trị của x thỏa mãn $x^2 - 2x - 3 = 0$ là

(A) -1; 3.

(B) 1; -3.

(C) -1; -3.

(D) 1; 3.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Kết quả phép chia đa thức $2x^3 + x^2 - 3x + 1$ cho đa thức $2x - 1$ là

(A) $x^2 - x - 1$.

(B) $x^2 - 1$.

(C) $x^2 - x + 1$.

(D) $x^2 + x - 1$.

Lời giải.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 + x^2 - 3x + 1 & 2x - 1 \\
 -2x^3 + x^2 & \\
 \hline
 2x^2 - 3x & \\
 -2x^2 + x & \\
 \hline
 -2x + 1 & \\
 2x - 1 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 7. Giá trị n để biểu thức $A = 2x^n y^5 z$ chia hết cho biểu thức $B = 3x^2 y^{3+n}$ là

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Xét $A : B = (2x^n y^5 z) : (3x^2 y^{3+n}) = \frac{2}{3} x^{n-2} y^{2-n} z$. Để A chia hết cho B thì $n - 2 \geq 0$ và $2 - n \geq 0$ hay $n = 2$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 8. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2 - 4x + 3$ là

(A) 1.

(B) -1.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x - 2)^2 - 1 \geq -1$ với mọi x nên biểu thức $x^2 - 4x + 3$ có giá trị nhỏ nhất là -1 khi $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án **(B)**

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^2 - 6x + 9$;

b) $x^3 - 3xy^2 + 3x^2y - y^3 + 1$;

c) $x^2 + 4x - 5$;

d) $x^2 - 2x + 1 - 4y^2$.

Lời giải.

1. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

2. $x^3 - 3xy^2 + 3x^2y - y^3 + 1 = (x - y)^3 + 1 = (x - y + 1)(x^2 - 2xy + y^2 - x + y + 1)$.

3. $x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$.

4. $x^2 - 2x + 1 - 4y^2 = (x - 1)^2 - (2y)^2 = (x - 1 + 2y)(x - 1 - 2y)$.

Bài 2. Tìm x , biết

a) $(x - 1)^2 + (3 - x)(x + 3) = 0$;

b) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) + (1 - x)^3 = 9$;

c) $(x - 2)^2 - (2x + 1)^2 = 0$.

Lời giải.

1. $(x - 1)^2 + (3 - x)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow -2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.
 Vậy $x = 5$.

2. Ta có

$$\begin{aligned}(x+2)(x^2-2x+4) + (1-x)^3 &= 9 \Leftrightarrow x^3 + 8 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $x = 0, x = 1$.

$$3. (x-2)^2 - (2x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(-x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -3. \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{3}, x = -3$.

□

Bài 3. 1. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến x :

$$A = (x+1)^2 - 4(x-1)(x+1) + x(3x-2).$$

2. Tính giá trị của biểu thức $M = (x^2 - 2xy)^2 + 2(x^2 - 2xy)y^2 + y^4$ biết $x = 24$ và $y = 4$.

 **Lời giải.**

1. Ta có

$$\begin{aligned}A &= (x+1)^2 - 4(x-1)(x+1) + x(3x-2) = x^2 + 2x + 1 - 4(x^2 - 1) + 3x^2 - 2x \\ &= 4x^2 + 1 - 4x^2 + 4 = 5.\end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến x .

2. Ta có $M = (x^2 - 2xy)^2 + 2(x^2 - 2xy)y^2 + y^4 = (x^2 - 2xy + y^2)^2 = (x - y)^4$. Với $x = 24$ và $y = 4$ thì $M = (24 - 4)^4 = 20^4 = 160000$.

□

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = -x^2 - 3x + 2$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } P = -x^2 - 3x + 2 = -\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) + \frac{17}{4} = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} \leq \frac{17}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{17}{4}$ khi và chỉ khi $x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

□

ĐÁP ÁN

1 B 2 D 3 C 4 C 5 A 6 D 7 C 8 B

§1 Phân thức đại số

1 Tóm tắt lý thuyết

Một phân thức đại số (hay gọi là phân thức) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$ với A và B là các đa thức, B khác đa thức 0. A được gọi là tử thức (hay tử), B được gọi là mẫu thức (hay mẫu).

Hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ được gọi là bằng nhau nếu $A \cdot D = B \cdot C$.

Ta viết $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $A \cdot D = B \cdot C$.

8. Chú ý

- ☒ Các tính chất về tỉ lệ thức và dãy tỉ số bằng nhau của phân số cũng đúng cho phân thức.
- ☒ Các giá trị của biến làm cho mẫu nhận giá trị bằng 0 gọi là giá trị hàm phân thức vô nghĩa hay không xác định.

2

Bài tập và các dạng toán

Dạng 49. Chứng minh đẳng thức

Thực hiện theo ba bước

Bước 1 Lựa chọn 1 trong 3 cách biến đổi thường dùng sau

- ☒ Biến đổi về trái thành về phải.
- ☒ Biến đổi về phải thành về trái.
- ☒ Biến đổi đồng thời hai vế.

Bước 2 Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử.

Bước 3 Rút gọn bằng cách triệt tiêu nhân tử chung và sử dụng định nghĩa hai phân thức bằng nhau nếu cần, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\frac{3x+6}{x+2} = 3$ với $x \neq -2$.

b) $\frac{x^2+2x}{3x+6} = \frac{x}{3}$ với $x \neq -2$.

c) $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$ với $x \neq \pm 1$.

d) $\frac{x^2+3x-4}{x-1} = x+4$ với $x \neq 1$.

Lời giải.

a) $\frac{3x+6}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} = 3$.

b) $\frac{x^2+2x}{3x+6} = \frac{x(x+2)}{3(x+2)} = \frac{x}{3}$.

c) $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$.

d) $\frac{x^2+3x-4}{x-1} = \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x+4$.

□

Ví dụ 2. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\frac{2x+4}{x+2} = 2$ với $x \neq -2$.

b) $\frac{x^2+x}{2(x+1)} = \frac{x}{2}$ với $x \neq -1$.

c) $\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$ với $x \neq \pm 2$.

d) $\frac{x^2+4x-5}{x-1} = x+5$ với $x \neq 1$.

Lời giải.

a) $\frac{2x+4}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} = 2$.

b) $\frac{x^2+x}{2(x+1)} = \frac{x(x+1)}{2(x+1)} = \frac{x}{2}$.

c) $\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$.

d) $\frac{x^2+4x-5}{x-1} = \frac{(x-1)(x+5)}{x-1} = x+5$.

□

Ví dụ 3. Ba phân thức sau có bằng nhau không? Tại sao?

$$\frac{x^3 - 1}{x(x - 1)}; \frac{x^2 + x + 1}{x}; \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{x^3 - 1}{x(x - 1)} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x(x - 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x} \text{ và } \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2} = \frac{x(x^2 + x + 1)}{x^2} = \frac{x^2 + x + 1}{x}.$$

Vậy ba phân thức trên bằng nhau. $\square$

Ví dụ 4. Ba phân thức sau có bằng nhau không?

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x(x - 1)}; \frac{x - 1}{x}; \frac{2x - 2}{2x}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{x^2 - 2x + 1}{x(x - 1)} = \frac{(x - 1)^2}{x(x - 1)} = \frac{x - 1}{x} \text{ và } \frac{2x - 2}{2x} = \frac{2(x - 1)}{2x} = \frac{x - 1}{x}.$$

Vậy ba phân thức trên bằng nhau. $\square$

Dạng 50. Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức cho trước

Thực hiện theo hai bước

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử ở hai vế.

Bước 2. Triệt tiêu các nhân tử chung và rút ra đa thức cần tìm.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm đa thức A trong mỗi đẳng thức sau

$$1. \frac{A}{x} = \frac{x}{2} \text{ với } x \neq 0.$$

$$\text{ĐS: } A = \frac{x^2}{2}$$

$$2. \frac{x^2 + x}{2x + 2} = \frac{A}{2} \text{ với } x \neq -1.$$

$$\text{ĐS: } A = x$$

$$3. \frac{2x - 1}{(x - 3)A} = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \text{ với } x \neq \frac{1}{2}; x \neq 1; x \neq 3.$$

$$\text{ĐS: } A = (x - 1)(2x - 1)$$

Lời giải.

$$1. \frac{A}{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow A = x^2 \Rightarrow A = \frac{x^2}{2}.$$

$$2. \frac{x^2 + x}{2x + 2} = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{x(x + 1)}{2(x + 1)} = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{A}{2} \Rightarrow A = x.$$

$$3. \frac{2x - 1}{(x - 3)A} = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \Rightarrow (2x - 1)(x - 1)(x - 3) = (x - 3)A \Rightarrow A = (x - 1)(2x - 1).$$

Ví dụ 2. Tìm đa thức B trong mỗi đẳng thức sau

$$1. \frac{B}{x+1} = \frac{x-1}{2} \text{ với } x \neq -1.$$

$$\text{ĐS: } B = \frac{(x-1)(x+1)}{2}$$

$$2. \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{B}{x+2} \text{ với } x \neq \pm 2.$$

$$\text{ĐS: } B = 1$$

$$3. \frac{x-3}{(x-1)B} = \frac{1}{x^2-4x+3} \text{ với } x \neq 1; x \neq 3.$$

$$\text{ĐS: } B = (x-3)^2$$

Lời giải.

$$1. \frac{B}{x+1} = \frac{x-1}{2} \Rightarrow B = \frac{(x-1)(x+1)}{2}.$$

$$2. \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{B}{x+2} \Rightarrow B = 1.$$

$$3. \frac{x-3}{(x-1)B} = \frac{1}{x^2-4x+3} \Rightarrow (x-3)(x-3)(x-1) = (x-1)B \Rightarrow B = (x-3)^2.$$

Ví dụ 3. Tìm một cặp đa thức A và B thỏa mãn đa thức

$$1. (x+1)A = (x-1)B.$$

$$\text{ĐS: } A = x-1 \text{ và } B = x+1$$

$$2. \frac{x^2-1}{x+1}A = (x+1)B \text{ với } x \neq -1.$$

$$\text{ĐS: } A = x+1 \text{ và } B = x-1$$

Lời giải.

$$1. (x+1)A = (x-1)B. \text{ Chọn } A = x-1 \text{ và } B = x+1.$$

$$2. \frac{x^2-1}{x+1}A = (x+1)B \Rightarrow (x-1)A = (x+1)B. \text{ Chọn } A = x+1 \text{ và } B = x-1.$$

Ví dụ 4. Tìm một cặp đa thức A và B thỏa mãn đa thức

$$1. (x+2)A = (x-2)B.$$

$$\text{ĐS: } A = x-2 \text{ và } B = x+1$$

$$2. \frac{x^2-4}{x+2}A = (x+2)B, \text{ với } x \neq -2$$

$$\text{ĐS: } A = x+2 \text{ và } B = x-2$$

Lời giải.

$$1. (x+2)A = (x-2)B. \text{ Chọn } A = x-2 \text{ và } B = x+2.$$

$$2. \frac{x^2-4}{x+2}A = (x+2)B \Rightarrow (x-2)A = (x+2)B. \text{ Chọn } A = x+2 \text{ và } B = x-2.$$

Dạng 51. Chứng minh đẳng thức có điều kiện

Thực hiện theo hai bước

Bước 1. Xuất phát từ điều phải chứng minh, áp dụng tính chất hai phân thức bằng nhau (xem phần Tóm tắt lý thuyết).

Bước 2. Thu gọn biểu thức và dựa vào điều kiện đề bài để lập luận.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ thỏa mãn $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ và $B \neq D$. Chứng minh $\frac{A}{B} = \frac{A-C}{B-D}$.

Lời giải.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow AD = BC \Rightarrow AB - AD = BA - BC \Rightarrow A(B-D) = B(A-C) \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{A-C}{B-D}.$$

□

Ví dụ 2. Cho hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ thỏa mãn $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ và $B \neq -D$. Chứng minh $\frac{A}{B} = \frac{A+C}{B+D}$.

Lời giải.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow AD = BC \Rightarrow AB + AD = BA + BC \Rightarrow A(B+D) = B(A+C) \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{A+C}{B+D}.$$

□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\frac{4x-8}{x-2} = 4$ với $x \neq 2$.

b) $\frac{x+3}{x^2+3x} = \frac{1}{x}$ với $x \neq 0$; $x \neq -3$.

c) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{x-1}{x+1}$ với $x \neq \pm 1$.

d) $\frac{x^2-3x-4}{x+1} = x-4$ với $x \neq -1$.

Lời giải.

a) $\frac{4x-8}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x-2} = 4.$

b) $\frac{x+3}{x^2+3x} = \frac{x+3}{x(x+3)} = \frac{1}{x}.$

c) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}.$

d) $\frac{x^2-3x-4}{x+1} = \frac{(x+1)(x-4)}{x+1} = x-4.$

□

Bài 2. Ba phân thức sau có bằng nhau không? Tại sao?

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x(x + 1)}; \frac{x + 1}{x}; \frac{2x + 2}{2x}.$$

Lời giải.

Ta có $\frac{x^2 + 2x + 1}{x(x + 1)} = \frac{(x + 1)^2}{x(x + 1)} = \frac{x + 1}{x}$ và $\frac{2x + 2}{2x} = \frac{2(x + 1)}{2x} = \frac{x + 1}{x}$.

Vậy ba phân thức trên bằng nhau. □

Bài 3. Tìm đa thức A trong mỗi đẳng thức sau

1. $\frac{A}{x + 5} = \frac{x - 5}{2}$ với $x \neq -5$. **ĐS:** $A = \frac{(x - 5)(x + 5)}{2}$

2. $\frac{2x^2 + 4x}{x + 2} = \frac{A}{2}$ với $x \neq -2$. **ĐS:** $A = 4x$

3. $\frac{x - 1}{(x - 4)A} = \frac{1}{x^2 - 16}$ với $x \neq \pm 4$. **ĐS:** $A = (x - 1)(x + 4)$

Lời giải.

1. $\frac{A}{x + 5} = \frac{x - 5}{2} \Rightarrow A = \frac{(x - 5)(x + 5)}{2}$.

2. $\frac{2x^2 + 4x}{x + 2} = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{2x(x + 2)}{x + 2} = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{2x}{1} = \frac{A}{2} \Rightarrow A = 4x$.

3. $\frac{x - 1}{(x - 4)A} = \frac{1}{x^2 - 16} \Rightarrow \frac{x - 1}{(x - 4)A} = \frac{1}{(x - 4)(x + 4)} \Rightarrow \frac{x - 1}{A} = \frac{1}{x + 4} \Rightarrow A = (x - 1)(x + 4)$. □

Bài 4. Tìm một cặp đa thức A và B thỏa mãn đa thức

1. $(x + 3)A = (x - 3)B$. **ĐS:** $A = x - 3$ và $B = x + 3$

2. $\frac{x^2 - 16}{x + 4}A = (x + 4)B$ với $x \neq -4$. **ĐS:** $A = x + 4$ và $B = x - 4$

Lời giải.

1. $(x + 3)A = (x - 3)B$. Chọn $A = x - 3$ và $B = x + 3$.

2. $\frac{x^2 - 16}{x + 4}A = (x + 4)B \Rightarrow (x - 4)A = (x + 4)B$. Chọn $A = x + 4$ và $B = x - 4$. □

Bài 5. Cho hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ thỏa mãn $\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$. Chứng minh $\frac{A + B}{A} = \frac{C + D}{D}$ với $A \neq 0$; $D \neq 0$.

Lời giải.

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{C} \Rightarrow BD = AC \Rightarrow AD + BD = AC + AD \Rightarrow D(A + B) = A(C + D) \Rightarrow \frac{A + B}{A} = \frac{C + D}{D}.$$

□

§2 Tính chất cơ bản của phân thức

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Tính chất cơ bản của phân thức.

Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức mới bằng phân thức đã cho. Ta có $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M}$.

Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức mới bằng phân thức đã cho. Ta có $\frac{A}{B} = \frac{A : N}{B : N}$ với N là một nhân tử chung của A và B .

2. Quy tắc đổi dấu.

Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho. Ta có $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$.

Nếu đổi dấu tử hoặc mẫu đồng thời đổi dấu của phân thức được một phân thức bằng phân thức đã cho. Ta có $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{-A}{-B} = -\frac{A}{-B}$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 52. Tính giá trị của phân thức

Thực hiện theo ba bước

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức của mỗi phân thức thành nhân tử.

Bước 2. Rút gọn từng phân thức.

Bước 3. Thay giá trị của biến vào phân thức và tính.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 **Ví dụ 1.** Tính giá trị của phân thức

$$1. A(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ với } x \neq 1 \text{ tại } x = 2.$$

$$\text{ĐS: } A(2) = 3$$

2. $B(x) = \frac{x+1}{x-1}$ với $x \neq 1$ tại $2x-4=0$.

ĐS: $B(2) = 3$

3. $C(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$ với $x \neq -1$ tại $x^2=4$.

ĐS: $C(2) = 0; C(-2) = -12$

4. $D(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ với $x \neq \pm 2$ tại $|x|=3$.

ĐS: $D(3) = \frac{6}{5}; D(-3) = 0$

 **Lời giải.**

1. $A(2) = \frac{2+1}{2-1} = 3$.

2. $2x-4=0 \Rightarrow x=2$. Suy ra $B(2) = \frac{2+1}{2-1} = 3$.

3. $x^2=4 \Rightarrow x=2$ hoặc $x=-2$.

Ta có $C(2) = \frac{2^2-3 \cdot 2+2}{2+1} = 0$ và $C(-2) = \frac{(-2)^2-3 \cdot (-2)+2}{-2+1} = -12$.

4. $|x|=3 \Rightarrow x=3$ hoặc $x=-3$.

Ta có $D(3) = \frac{3+3}{3^2-4} = \frac{6}{5}$ và $D(-3) = \frac{-3+3}{(-3)^2-4} = 0$.

□

 **Ví dụ 2.** Tính giá trị của phân thức

1. $A(x) = \frac{x+1}{3x+3}$ với $x \neq -1$ tại $x=2$.

ĐS: $A(2) = \frac{1}{3}$

2. $B(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ với $x \neq -2$ tại $3x-6=0$.

ĐS: $B(2) = \frac{3}{4}$

3. $C(x) = \frac{x^2-4x+3}{x+1}$ với $x \neq -1$ tại $x^2=9$.

ĐS: $C(3) = 0; C(-3) = -12$

4. $D(x) = \frac{-2x}{x-3}$ với $x \neq 3$ tại $|x|=1$.

ĐS: $D(1) = 1; D(-1) = -\frac{1}{2}$

 **Lời giải.**

1. $A(2) = \frac{2+1}{3 \cdot 2+3} = \frac{1}{3}$.

2. $3x-6=0 \Rightarrow x=2$. Suy ra $B(2) = \frac{2 \cdot 2-1}{2+2} = \frac{3}{4}$.

3. $x^2=9 \Rightarrow x=3$ hoặc $x=-3$.

Ta có $C(3) = \frac{3^2-4 \cdot 3+3}{3+1} = 0$ và $C(-3) = \frac{(-3)^2-4 \cdot (-3)+3}{-3+1} = -12$.

4. $|x|=1 \Rightarrow x=1$ hoặc $x=-1$.

Ta có $D(1) = \frac{-2 \cdot 1}{1-3} = 1$ và $D(-1) = \frac{-2 \cdot (-1)}{(-1)-3} = -\frac{1}{2}$.

□

Dạng 53. Biến đổi phân thức theo yêu cầu

Thực hiện theo hai bước

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử hoặc lựa chọn tử thức (hay mẫu thức) thích hợp tùy theo yêu cầu đề bài.

Bước 2. Sử dụng tính chất cơ bản của phân thức (xem phân Tóm tắt lý thuyết) để đưa về phân thức mới thỏa mãn yêu cầu.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho phân thức $\frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x - 3)}$ với $x \neq -1; x \neq 3$. Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức $A = x - 1$. **ĐS:** $\frac{x - 1}{x - 3}$

Lời giải.

$$\frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{x - 1}{x - 3} = \frac{A}{x - 3}.$$

□

Ví dụ 2. Cho phân thức $\frac{x^2 - 4}{(x - 2)(x - 3)}$ với $x \neq 2; x \neq 3$. Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức $A = x + 2$. **ĐS:** $\frac{x + 2}{x - 3}$

Lời giải.

$$\frac{x^2 - 4}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{x + 2}{x - 3} = \frac{A}{x - 3}.$$

□

Ví dụ 3. Cho phân thức $\frac{x - 1}{x + 1}$ với $x \neq -1$. Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức $A = x^2 - 1$. **ĐS:** $\frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2}$

Lời giải.

$$\frac{x - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)(x + 1)} = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2}.$$

□

Ví dụ 4. Cho phân thức $\frac{x - 2}{x + 2}$ với $x \neq -2$. Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức $A = x^2 - 4$. **ĐS:** $\frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2}$

Lời giải.

$$\frac{x - 2}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)(x + 2)} = \frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2}.$$

□

Ví dụ 5. Cho hai phân thức $\frac{x+3}{2x}$ và $\frac{x^2-9}{x+1}$ với $x \neq 0; x \neq -1$ và $x \neq 3$, biến đổi hai phân thức này thành cặp phân thức bằng nó và có cùng tử thức. **ĐS:** $\frac{x^2-9}{2x(x-3)}$

Lời giải.

$$\frac{x+3}{2x} = \frac{(x+3)(x-3)}{2x(x-3)} = \frac{x^2-9}{2x(x-3)}. \text{ Vậy kết quả là cặp phân thức } \frac{x^2-9}{2x(x-3)} \text{ và } \frac{x^2-9}{x+1}. \quad \square$$

Ví dụ 6. Cho hai phân thức $\frac{x+2}{2x}$ và $\frac{x^2-4}{x+1}$ với $x \neq 0; x \neq -1$ và $x \neq 2$, biến đổi hai phân thức này thành cặp phân thức bằng nó và có cùng tử thức. **ĐS:** $\frac{x^2-4}{2x(x-2)}$ và $\frac{x^2-4}{x+1}$

Lời giải.

$$\frac{x+2}{2x} = \frac{(x+2)(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{x^2-4}{2x(x-2)}. \text{ Vậy kết quả là cặp phân thức } \frac{x^2-4}{2x(x-2)} \text{ và } \frac{x^2-4}{x+1}. \quad \square$$

Ví dụ 7. Cho hai phân thức $\frac{x+3}{2x}$ và $\frac{x-3}{x+1}$ với $x \neq 0; x \neq -1$, biến đổi hai phân thức này thành cặp phân thức bằng nó và có cùng mẫu thức. **ĐS:** $\frac{(x+3)(x+1)}{2x(x+1)}$ và $\frac{(x-3)2x}{2x(x+1)}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{x+3}{2x} = \frac{(x+3)(x+1)}{2x(x+1)} \text{ và } \frac{x-3}{x+1} = \frac{(x-3)2x}{(x+1)2x}.$$

$$\text{Vậy kết quả là cặp phân thức } \frac{(x+3)(x+1)}{2x(x+1)} \text{ và } \frac{(x-3)2x}{2x(x+1)}. \quad \square$$

Ví dụ 8. Cho hai phân thức $\frac{x+1}{x}$ và $\frac{x+1}{x-1}$ với $x \neq 0$ và $x \neq 1$, biến đổi hai phân thức này thành cặp phân thức bằng nó và có cùng mẫu thức. **ĐS:** $\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}$ và $\frac{x(x+1)}{x(x-1)}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{x+1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} \text{ và } \frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x+1)}{x(x-1)}.$$

$$\text{Vậy kết quả là cặp phân thức } \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} \text{ và } \frac{x(x+1)}{x(x-1)}. \quad \square$$

Dạng 54. Chứng minh cặp phân thức bằng nhau

Thực hiện theo hai bước

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức của mỗi phân thức thành nhân tử.

Bước 2. Rút gọn từng phân thức, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

⚠ 9. Chú ý: Trong nhiều trường hợp, có thể sử dụng định nghĩa hai phân thức bằng nhau $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $A \cdot D = B \cdot C$.

BÀI TẬP MẪU

📖 Ví dụ 1. Cho cặp phân thức $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ và $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ với $x \neq \pm 1$. Chứng tỏ cặp phân thức trên bằng nhau.

✍ Lời giải.

Ta có $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2}{x + 1} = x + 1$ và $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$.

Vậy $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. □

📖 Ví dụ 2. Cho cặp phân thức $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ và $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ với $x \neq \pm 1$. Cặp phân thức trên có bằng nhau không?

✍ Lời giải.

Ta có $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = x - 1$ và $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1$.

Vậy $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$. □

Dạng 55. Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức cho trước

Thực hiện theo hai bước

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử ở hai vế.

Bước 2. Triệt tiêu các nhân tử chung và rút ra đa thức cần tìm.

BÀI TẬP MẪU

📖 Ví dụ 1. Hãy điền một đa thức thích hợp vào các chỗ trống trong mỗi đẳng thức sau

a) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{\dots}{x + 1}$ với $x \neq \pm 1$. **ĐS:** x b) $\frac{x^2 + 2x}{3x + 6} = \frac{\dots}{3}$ với $x \neq -2$. **ĐS:** x

c) $\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{\dots}{x + 1}$ với $x \neq \pm 1$. **ĐS:** 1 d) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \frac{x + 4}{\dots}$ với $x \neq 1$. **ĐS:** 1

 Lời giải.

$$\text{a) } \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}.$$

Vậy đa thức cần tìm là x .

$$\text{b) } \frac{x^2 + 2x}{3x + 6} = \frac{x(x+2)}{3(x+2)} = \frac{x}{3}.$$

Vậy đa thức cần tìm là x .

$$\text{c) } \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Vậy đa thức cần tìm là 1.

$$\text{d) } \frac{x^2 + 3x - 4}{x-1} = \frac{(x+4)(x-1)}{x-1} = \frac{x+4}{1}.$$

Vậy đa thức cần tìm là 1.

□

 **Ví dụ 2.** Hãy điền một đa thức thích hợp vào các chỗ trống trong mỗi đẳng thức sau

$$\text{a) } \frac{2x+4}{x+2} = \frac{2}{\dots} \text{ với } x \neq -2.$$

ĐS: 1

$$\text{b) } \frac{x^2+x}{2(x+1)} = \frac{\dots}{2} \text{ với } x \neq -1.$$

ĐS: x

$$\text{c) } \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{\dots} \text{ với } x \neq \pm 2.$$

ĐS: $x+2$

$$\text{d) } \frac{x^2+4x-5}{x-1} = \frac{x+5}{\dots} \text{ với } x \neq 1.$$

ĐS: 1

 Lời giải.

$$\text{a) } \frac{2x+4}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} = \frac{2}{1}.$$

Vậy đa thức cần tìm là 1.

$$\text{b) } \frac{x^2+x}{2(x+1)} = \frac{x(x+1)}{2(x+1)} = \frac{x}{2}.$$

Vậy đa thức cần tìm là x .

$$\text{c) } \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2}.$$

Vậy đa thức cần tìm là $x+2$.

$$\text{d) } \frac{x^2+4x-5}{x-1} = \frac{(x-1)(x+5)}{x-1} = \frac{x+5}{1}.$$

Vậy đa thức cần tìm là 1.

□

 **Ví dụ 3.** Tìm đa thức A thỏa mãn đẳng thức sau

$$\text{a) } \frac{A}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} \text{ với } x \neq \pm 1.$$

ĐS:

$$\text{b) } \frac{x^2+2x}{A} = \frac{x}{3} \text{ với } x \neq 0.$$

ĐS:

$$\text{c) } \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} \text{ với } x \neq \pm 3. \text{ **ĐS: } A = 1**$$

$$\text{d) } \frac{x^2+3x-4}{A} = x+4. \text{ **ĐS: } A = x-1**$$

$$\text{e) } \frac{2x^2-2y^2}{A} = \frac{2(x+y)}{3}.$$

ĐS:

$$A = 3(x-y)$$

 Lời giải.

$$\text{a) } \frac{A}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{A}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \\ \Rightarrow A = x+1.$$

$$\text{b) } \frac{x^2+2x}{A} = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{x(x+2)}{A} = \frac{x}{3} \\ \Rightarrow A = 3(x+2).$$

$$\text{c) } \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} \Rightarrow \frac{x-3}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} \\ \Rightarrow A = 1.$$

$$\text{d) } \frac{x^2+3x-4}{A} = x+4 \Rightarrow \frac{(x+4)(x-1)}{A} = x+4 \\ \Rightarrow A = x-1.$$

$$\text{e) } \frac{2x^2 - 2y^2}{A} = \frac{2(x+y)}{3} \Rightarrow \frac{2(x+y)(x-y)}{A} = \frac{2(x+y)}{3} \\ \Rightarrow A = 3(x-y).$$

□

Ví dụ 4. Tìm đa thức A thỏa mãn đẳng thức sau

$$\text{a) } \frac{-2x+4}{x-2} = \frac{2}{A} \text{ với } x \neq -2. \text{ĐS: } A = -1 \quad \text{b) } \frac{2x^2+4x}{x+2} = \frac{A}{2} \text{ với } x \neq -2. \text{ĐS: } A = 4x$$

$$\text{c) } \frac{x-4}{x^2-16} = \frac{1}{A} \text{ với } x \neq \pm 4. \quad \text{ĐS: } A = x+4 \quad \text{d) } \frac{x^3+8}{x+2} = \frac{A}{2} \text{ với } x \neq 2. \quad \text{ĐS: } A = 2(x^2-2x+4)$$

$$\text{e) } \frac{x^2-y^2}{A} = \frac{x+y}{3}. \quad \text{ĐS: } A = 3(x-y)$$

Lời giải.

$$\text{a) } \frac{-2x+4}{x-2} = \frac{2}{A} \Rightarrow \frac{-2(x-2)}{x-2} = \frac{2}{A} \\ \Rightarrow A = -1.$$

$$\text{b) } \frac{2x^2+4x}{x+2} = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{2x(x+2)}{x+2} = \frac{A}{2} \\ \Rightarrow A = 4x.$$

$$\text{c) } \frac{x-4}{x^2-16} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{x-4}{(x-4)(x+4)} = \frac{1}{A} \\ \Rightarrow A = x+4.$$

$$\text{d) } \frac{x^3+8}{x+2} = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = \frac{A}{2} \\ \Rightarrow A = 2(x^2-2x+4).$$

$$\text{e) } \frac{x^2-y^2}{A} = \frac{x+y}{3} \Rightarrow \frac{(x+y)(x-y)}{A} = \frac{x+y}{3} \\ \Rightarrow A = 3(x-y).$$

□

Ví dụ 5. Hoàn thành chuỗi đẳng thức sau: $\frac{x+1}{x+2} = \frac{\dots}{x^2-4} = \frac{\dots}{x^2+x-2}$, với $x \neq \pm 2; x \neq 1$.
ĐS: $(x+1)(x-2)$ và $(x+1)(x-1)$

Lời giải.

Ta có $\frac{x+1}{x+2} = \frac{A}{(x-2)(x+2)} = \frac{B}{(x-1)(x+2)}$. Chọn $A = (x+1)(x-2)$ và $B = (x+1)(x-1)$.
□

Ví dụ 6. Hoàn thành chuỗi đẳng thức sau: $\frac{1}{x+1} = \frac{\dots}{x^2-1} = \frac{\dots}{x^2+3x+2}$, với $x \neq \pm 1; x \neq -2$.
ĐS: $x-1$ và $x+2$

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{x+1} = \frac{M}{(x+1)(x-1)} = \frac{N}{(x+1)(x+2)}$. Chọn $M = x-1$ và $N = x+2$. □

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Tính giá trị của phân thức

1. $A(x) = \frac{x+2}{x-4}$ với $x \neq 4$ tại $x = 5$. **ĐS:** $A(5) = 7$

2. $B(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ với $x \neq -1$ tại $2x-2=0$. **ĐS:** $B(1) = 1$

3. $C(x) = \frac{x^2-5x+6}{x+1}$ với $x \neq -1$ tại $x^2=1$. **ĐS:** $C(1) = 1$

4. $D(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$ với $x \neq \pm 1$ tại $|x+1|=3$. **ĐS:** $D(2) = \frac{5}{3}; D(-4) = -\frac{1}{15}$

Lời giải.

1. $A(5) = \frac{5+2}{5-4} = 7$.

2. $2x-2=0 \Rightarrow x=1$. Suy ra $B(1) = \frac{1^2+1}{1+1} = 1$.

3. $x^2=1 \Rightarrow x=1$ hoặc $x=-1$ (loại). Ta có $C(1) = \frac{1^2-5 \cdot 1+6}{1+1} = 1$.

4. $|x+1|=3 \Rightarrow x=2$ hoặc $x=-4$. Ta có $D(2) = \frac{2+3}{2^2-1} = \frac{5}{3}$ và $D(-4) = \frac{-4+3}{(-4)^2-1} = -\frac{1}{15}$. □

Bài 2. Cho phân thức $\frac{x^2-25}{(x+5)(x-3)}$ với $x \neq -5; x \neq 3$. Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức $A = x-5$. **ĐS:** $\frac{x-5}{x-3}$

Lời giải.

$$\frac{x^2-25}{(x+5)(x-3)} = \frac{(x+5)(x-5)}{(x+5)(x-3)} = \frac{x-5}{x-3}.$$
□

Bài 3. Cho phân thức $\frac{x+3}{x-3}$ với $x \neq 3$. Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức $A = x^2-9$. **ĐS:** $\frac{x^2-9}{(x-3)^2}$

Lời giải.

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x^2-9}{(x-3)^2}.$$
□

Bài 4. Cho hai phân thức $\frac{x-6}{x}$ và $\frac{x+6}{x+1}$ với $x \neq 0$ và $x \neq -1$. Biến đổi hai phân thức này thành cặp phân thức bằng nó và có cùng tử thức. **ĐS:** $\frac{x^2-36}{x(x+6)}$ và $\frac{x^2-36}{(x+1)(x-6)}$

Lời giải.

Ta có $\frac{x-6}{x} = \frac{(x-6)(x+6)}{x(x+6)} = \frac{x^2-36}{x(x+6)}$ và $\frac{x+6}{x+1} = \frac{(x+6)(x-6)}{(x+1)(x-6)} = \frac{x^2-36}{(x+1)(x-6)}$.

Vậy cặp phân thức cần tìm là $\frac{x^2-36}{x(x+6)}$ và $\frac{x^2-36}{(x+1)(x-6)}$. $\square$

Bài 5. Cho hai phân thức $\frac{x+3}{x-1}$ và $\frac{x-9}{x+1}$ với $x \neq \pm 1$. Biến đổi hai phân thức này thành cặp phân thức bằng nó và có cùng mẫu thức.

ĐS: $\frac{(x+3)(x+1)}{x^2-1}$ và $\frac{(x-9)(x-1)}{x^2-1}$

Lời giải.

Ta có $\frac{x+3}{x-1} = \frac{(x+3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+3)(x+1)}{x^2-1}$ và $\frac{x-9}{x+1} = \frac{(x-9)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-9)(x-1)}{x^2-1}$.

Vậy cặp phân thức cần tìm là $\frac{(x+3)(x+1)}{x^2-1}$ và $\frac{(x-9)(x-1)}{x^2-1}$. $\square$

Bài 6. Cho cặp phân thức $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ và $\frac{x^2-1}{x+1}$ với $x \neq \pm 1$. Chứng tỏ cặp phân thức trên bằng nhau.

Lời giải.

Ta có $\frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1$ và $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$.

Vậy cặp phân thức trên bằng nhau. $\square$

Bài 7. Hãy điền một đa thức thích hợp vào các chỗ trống trong mỗi đẳng thức sau

a) $\frac{-2x+4}{x^2-4} = \frac{\dots}{x+2}$ với $x \neq \pm 2$. **ĐS:** -2 b) $\frac{x^2+3x}{3x+9} = \frac{\dots}{3}$ với $x \neq -3$. **ĐS:** x

c) $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\dots}{x+1}$ với $x \neq \pm 1$. **ĐS:** $(x+1)^2$ d) $\frac{x^2-5x+6}{x-3} = \frac{x-2}{\dots}$ với $x \neq 3$. **ĐS:** 1

Lời giải.

a) $\frac{-2x+4}{x^2-4} = \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{x+2}$. b) $\frac{x^2+3x}{3x+9} = \frac{x(x+3)}{3(x+3)} = \frac{x}{3}$.

Vậy đa thức cần tìm là -2 .

Vậy đa thức cần tìm là x .

c) $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 = \frac{(x+1)^2}{x+1}$. d) $\frac{x^2-5x+6}{x-3} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \frac{x-2}{1}$.

Vậy đa thức cần tìm là $(x+1)^2$.

Vậy đa thức cần tìm là 1 .

$\square$

Bài 8. Tìm đa thức A thỏa mãn mỗi đẳng thức sau

1. $\frac{A}{x^2-25} = \frac{1}{x-5}$ với $x \neq \pm 5$. **ĐS:** $x+5$

2. $\frac{x^2-2x}{A} = x$ với $x \neq 0$. **ĐS:** $x-2$

3. $\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{A}{x+3}$ với $x \neq -3$ và $x \neq 1$. **ĐS:** $(x+3)(x^2+x+1)$

4. $\frac{x^2-5x+6}{A} = x-2$ với $x \neq 2$ và $x \neq 3$. **ĐS:** $x-3$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{A}{x^2 - 25} = \frac{1}{x - 5} \Rightarrow \frac{A}{(x - 5)(x + 5)} = \frac{1}{x - 5} \Rightarrow A = x + 5.$$

$$2. \frac{x^2 - 2x}{A} = x \Rightarrow \frac{x(x - 2)}{A} = x \Rightarrow A = x - 2.$$

$$3. \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{A}{x + 3} \Rightarrow \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \frac{A}{x + 3} \Rightarrow A = (x + 3)(x^2 + x + 1).$$

$$4. \frac{x^2 - 5x + 6}{A} = x - 2 \Rightarrow \frac{(x - 2)(x - 3)}{A} = x - 2 \Rightarrow A = x - 3.$$

□

 **Bài 9.** Hoàn thành chuỗi đẳng thức sau: $\frac{x + 1}{x + 3} = \frac{\dots}{x^2 - 9} = \frac{\dots}{x^2 + 5x + 6}$ với $x \neq \pm 3; x \neq -2$.
ĐS: $(x + 1)(x - 3)$ và $(x + 1)(x + 2)$

 **Lời giải.**

$$\frac{x + 1}{x + 3} = \frac{A}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{B}{(x + 2)(x + 3)}$$

Chọn $A = (x + 1)(x - 3)$ và $B = (x + 1)(x + 2)$.

□

§3 Rút gọn phân thức

1 Tóm tắt lý thuyết

Để rút gọn phân thức cho trước ta làm như sau

Bước 1. Sử dụng các phương pháp phân tích thức thành nhân tử để biến đổi cả tử và mẫu của phân thức.

Bước 2. Sử dụng các tính chất cơ bản của phân thức đã học để rút gọn phân thức đã cho.

2 Các dạng bài tập

Dạng 56. Rút gọn phân thức

Thực hiện theo hai bước sau

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử.

Bước 2. Rút gọn bằng cách triệt tiêu nhân tử chung.

 **10.** $A = -(-A)$.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{2(x+1)^2}{4x(x+1)}$	ĐS: $\frac{x+1}{2x}$	b) $\frac{2x^2+4x+2}{4x(x+1)}$	ĐS: $\frac{x+1}{2x}$
c) $\frac{(8-x)(-x-2)}{(x+2)^2}$	ĐS: $\frac{x-8}{x+2}$	d) $\frac{2(x-y)}{y-x}$	ĐS: -2

 **Lời giải.**

a) $\frac{2(x+1)^2}{4x(x+1)} = \frac{x+1}{2x}$	b) $\frac{2x^2+4x+2}{4x(x+1)} = \frac{2(x+1)^2}{4x(x+1)} = \frac{x+1}{2x}$
c) $\frac{(8-x)(-x-2)}{(x+2)^2} = \frac{(x-8)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x-8}{x+2}$	d) $\frac{2(x-y)}{y-x} = \frac{2(x-y)}{-(x-y)} = -2$

□

 **Ví dụ 2.** Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{(x+2)^2}{2x+4}$. **ĐS:** $\frac{x+2}{2}$ b) $\frac{x^2+4x+4}{2x+4}$. **ĐS:** $\frac{x+2}{2}$
 c) $\frac{(1-x)(-x-2)}{x+2}$. **ĐS:** $x-1$ d) $\frac{x^2-y^2}{x+y}$. **ĐS:** $x-y$

 **Lời giải.**

a) $\frac{(x+2)^2}{2x+4} = \frac{(x+2)^2}{2(x+2)} = \frac{x+2}{2}$. b) $\frac{x^2+4x+4}{2x+4} = \frac{(x+2)^2}{2(x+2)} = \frac{x+2}{2}$.
 c) $\frac{(1-x)(-x-2)}{x+2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x+2} = x-1$. d) $\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = x-y$.

□

 **Ví dụ 3.** Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+x}$. **ĐS:** $\frac{(x+1)^2}{x}$ b) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{2x-2}$. **ĐS:** $\frac{(x-1)^2}{2}$

 **Lời giải.**

a) $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+x} = \frac{(x+1)^3}{x(x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x}$. b) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{2x-2} = \frac{(x-1)^3}{2(x-1)} = \frac{(x-1)^2}{2}$.

□

 **Ví dụ 4.** Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{3x-6}{x^3-6x^2+12x-8}$. **ĐS:** $\frac{3}{(x-2)^2}$ b) $\frac{x^3+2x^2}{x^3+6x^2+12x+8}$. **ĐS:** $\frac{x^2}{(x+2)^2}$

 **Lời giải.**

a) $\frac{3x-6}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{3(x-2)}{(x-2)^3} = \frac{3}{(x-2)^2}$. b) $\frac{x^3+2x^2}{x^3+6x^2+12x+8} = \frac{x^2(x+2)}{(x+2)^3} = \frac{x^2}{(x+2)^2}$.

□

 **Ví dụ 5.** Cho phân thức $A = \frac{2x^3+2x^2}{x^3+x^2+x+1}$.

1. Rút gọn phân thức. **ĐS:** $\frac{2x^2}{x^2+1}$
2. Tính giá trị của phân thức tại $x=2$. **ĐS:** $\frac{8}{5}$
3. Chứng minh A luôn dương với mọi giá trị của $x \neq -1$.

 **Lời giải.**

1. $A = \frac{2x^3+2x^2}{x^3+x^2+x+1} = \frac{2x^2(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{2x^2}{x^2+1}$.

$$2. A(2) = \frac{2 \cdot 2^2}{2^2 + 1} = \frac{8}{5}.$$

$$3. 2x^2 \geq 0 \text{ và } x^2 + 1 > 0 \text{ nên } A \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

□

 **Ví dụ 6.** Cho phân thức $A = \frac{3 - 6x}{2x^3 - x^2 + 2x - 1}$.

1. Rút gọn phân thức.

$$\text{ĐS: } \frac{-3}{x^2 + 1}$$

2. Tính giá trị của phân thức tại $x = 3$.

$$\text{ĐS: } \frac{-3}{10}$$

3. Chứng minh A luôn âm với mọi giá trị của $x \neq \frac{1}{2}$.

 **Lời giải.**

$$1. A = \frac{3 - 6x}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} = \frac{-3(2x - 1)}{(2x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{-3}{x^2 + 1}.$$

$$2. A(3) = \frac{-3}{3^2 + 1} = \frac{-3}{10}.$$

$$3. -3 < 0 \text{ và } x^2 + 1 > 0 \text{ nên } A < 0 \text{ với mọi } x.$$

□

Dạng 57. Chứng minh đẳng thức

Thực hiện tương tự các bước chứng minh đẳng thức đã học trong bài 1 và bài 2.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh đẳng thức $\frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{x + 1}{2x - 1}$.

 **Lời giải.**

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)(2x - 1)} = \frac{x + 1}{2x - 1}.$$

□

 **Ví dụ 2.** Chứng minh đẳng thức $\frac{2x^2 - 12x + 18}{x^2 - 7x + 12} = \frac{2x - 6}{x - 4}$.

 **Lời giải.**

$$\frac{2x^2 - 12x + 18}{x^2 - 7x + 12} = \frac{2(x - 3)^2}{(x - 3)(x - 4)} = \frac{2(x - 3)}{x - 4} = \frac{2x - 6}{x - 4}.$$

□

 **Ví dụ 3.** Chứng tỏ rằng hai phân thức $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + xy}$ và $\frac{x^2 - y^2}{x(x - y)}$ bằng nhau.

 **Lời giải.**

Ta có $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + xy} = \frac{(x + y)^2}{x(x + y)} = \frac{x + y}{x}$ và $\frac{x^2 - y^2}{x(x - y)} = \frac{(x - y)(x + y)}{x(x - y)} = \frac{x + y}{x}$.

Vậy hai phân thức trên bằng nhau. □

 **Ví dụ 4.** Chứng tỏ rằng hai phân thức $\frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{x + 2y}$ và $x + 2y$ bằng nhau.

 **Lời giải.**

$$\frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{x + 2y} = \frac{(x + 2y)^2}{x + 2y} = x + 2y.$$
□

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{2x - 6}{(x - 3)^2}$.	ĐS: $\frac{2}{x - 3}$	b) $\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 6x + 9}$.	ĐS: $\frac{x^2}{x - 3}$
c) $\frac{2x^2 - 8}{x^2 + 4x + 4}$.	ĐS: $\frac{2(x - 2)}{x + 2}$	d) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$.	ĐS: $\frac{x}{x - 3}$

 **Lời giải.**

a) $\frac{2x - 6}{(x - 3)^2} = \frac{2(x - 3)}{(x - 3)^2} = \frac{2}{x - 3}$.	b) $\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 6x + 9} = \frac{x^2(x - 3)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2}{x - 3}$.
c) $\frac{2x^2 - 8}{x^2 + 4x + 4} = \frac{2(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)^2} = \frac{2(x - 2)}{x + 2}$.	d) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \frac{x(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{x}{x - 3}$.

□

 **Bài 2.** Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$.	ĐS: $\frac{x^2 + 1}{x + 1}$	b) $\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2x + 3}$.	ĐS: $\frac{x + 1}{2x + 3}$
--	-----------------------------	---	----------------------------

 **Lời giải.**

a) $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$.	b) $\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2x + 3} = \frac{(x^2 + 1)(x + 1)}{(x^2 + 1)(2x + 3)} = \frac{x + 1}{2x + 3}$.
--	---

□

 **Bài 3.** Cho phân thức $A = \frac{2x - 6}{x^3 - 3x^2 + x - 3}$.

1. Rút gọn biểu thức.

ĐS: $\frac{2}{x^2 + 1}$

2. Tính giá trị của phân thức tại $x = -2$.

ĐS: $\frac{2}{5}$

3. Chứng minh A luôn dương với mọi giá trị $x \neq 3$.

 **Lời giải.**

$$1. A = \frac{2x - 6}{x^3 - 3x^2 + x - 3} = \frac{2(x - 3)}{(x^2 + 1)(x - 3)} = \frac{2}{x^2 + 1}.$$

$$2. A(-2) = \frac{2}{(-2)^2 + 1} = \frac{2}{5}.$$

3. $2 > 0$ và $x^2 + 1 > 0$ nên $A > 0$ với mọi x .

□

 **Bài 4.** Chứng minh đẳng thức $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{x + 1}{x + 2}$.

 **Lời giải.**

$$VT = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{(x + 1)(x^2 - 1)}{(x + 2)(x^2 - 1)} = \frac{x + 1}{x + 2} = VP.$$

□

 **Bài 5.** Chứng tỏ rằng hai phân thức $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - xy}$ và $\frac{x - y}{x}$ bằng nhau.

 **Lời giải.**

$$VT = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - xy} = \frac{(x - y)^2}{x(x - y)} = \frac{x - y}{x} = VP$$

□

§4 Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Tìm mẫu thức chung

Tìm mẫu thức chung ta làm như sau:

Bước 1. Phân tích mẫu thức của các phân thức đã cho thành nhân tử;

Bước 2. Mẫu thức chung cần tìm là một tích mà các nhân tử được chọn theo quy tắc sau:

- + Nhân tử bằng số của mẫu thức chung là tích các nhân tử bằng số ở các mẫu thức của phân thức đã cho. (Nếu các nhân tử bằng số ở các mẫu thức là những số nguyên dương thì nhân tử bằng số của mẫu thức chung là BCNN của chúng);
- + Với mỗi lũy thừa của cùng một biểu thức có mặt trong các mẫu thức, ta chọn lũy thừa với số mũ cao nhất.

1.2 Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức

Để quy đồng mẫu thức nhiều phân thức ta thực hiện các bước sau đây:

Bước 1. Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung;

Bước 2. Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức;

Bước 3. Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

2 Bài tập và các dạng toán

 **Ví dụ 1.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

$$1. \frac{5}{xy} \text{ và } \frac{1}{xy^2}. \quad \text{ĐS: } \frac{5y}{xy^2}; \frac{1}{xy^2}.$$

$$2. \frac{1}{x^2 - x} \text{ và } \frac{2}{x - 1}. \quad \text{ĐS: } \frac{1}{x(x - 1)}; \frac{2x}{x(x - 1)}.$$

$$3. \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} \text{ và } \frac{x}{x - 2}. \quad \text{ĐS: } \frac{x^2}{x(x - 2)}; \frac{(x - 2)^2}{x(x - 2)}.$$

$$4. \frac{2}{x^2 - 5x + 6} \text{ và } \frac{3}{x - 3}. \quad \text{ĐS: } \frac{2}{(x - 2)(x - 3)}; \frac{3(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)}.$$

5. $\frac{4}{x^2 - 3x + 2}$ và $\frac{1}{x^2 - x}$.

ĐS: $\frac{4x}{x(x-1)(x-2)}; \frac{x-2}{x(x-1)(x-2)}$.

 Lời giải.

1. MTC = xy^2 , suy ra $\frac{5}{xy} = \frac{5y}{xy^2}$ và giữ nguyên $\frac{1}{xy^2}$.

2. Ta có $(x^2 - x) = x(x-1)$. MTC = $x(x-1)$.
Suy ra $\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$; $\frac{2}{x-1} = \frac{2x}{x(x-1)}$.

3. Ta có $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{x-2}{x}$. MTC = $x(x-2)$.
Suy ra $\frac{x-2}{x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)}$; $\frac{x}{x-2} = \frac{x^2}{x(x-2)}$.

4. Ta có $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. MTC = $(x-2)(x-3)$.
Suy ra $\frac{2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2}{(x-2)(x-3)}$; $\frac{3}{x-3} = \frac{3(x-2)}{(x-2)(x-3)}$.

5. Ta có $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$; $x^2 - x = x(x-1)$. MTC = $x(x-1)(x-2)$.
Suy ra $\frac{4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{4x}{x(x-1)(x-2)}$; $\frac{1}{x^2 - x} = \frac{x-2}{x(x-1)(x-2)}$.

□

 **Ví dụ 2.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

1. $\frac{1}{xy^3}$ và $\frac{2}{x^2y}$. ĐS: $\frac{x}{x^2y^3}; \frac{2y^2}{x^2y^3}$.

2. $\frac{1}{x^2 - 2x}$ và $\frac{2}{x}$. ĐS: $\frac{1}{x(x-2)}; \frac{2(x-2)}{x(x-2)}$.

3. $\frac{x}{x^2 - 9}$ và $\frac{x}{x-3}$. ĐS: $\frac{x}{(x-3)(x+3)}; \frac{x(x+3)}{(x-3)(x+3)}$.

4. $\frac{2}{x^2 - x - 6}$ và $\frac{3}{x+2}$. ĐS: $\frac{2}{(x+2)(x-3)}; \frac{3(x-3)}{(x+2)(x-3)}$.

5. $\frac{4x}{x^2 - x - 6}$ và $\frac{1}{x^2 + 2x}$. ĐS: $\frac{4x^2}{x(x-3)(x+2)}; \frac{x-3}{x(x-3)(x+2)}$.

 Lời giải.

1. MTC = x^2y^3 . Suy ra $\frac{1}{xy^3} = \frac{x}{x^2y^3}$; $\frac{2}{x^2y} = \frac{2y^2}{x^2y^3}$.

2. Ta có $x^2 - 2x = x(x-2)$. MTC = $x(x-2)$. Suy ra $\frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{1}{x(x-2)}$; $\frac{2}{x} = \frac{2(x-2)}{x(x-2)}$.

3. Ta có $\frac{x}{x^2 - 9} = \frac{x}{(x-3)(x+3)}$; $\frac{x}{x-3} = \frac{x(x+3)}{(x-3)(x+3)}$.

4. Ta có $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$. Suy ra $\frac{2}{x^2 - x - 6} = \frac{2}{(x+2)(x-3)}$; $\frac{3}{x+2} = \frac{3(x-3)}{(x+2)(x-3)}$.

5. Ta có $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$; $x^2 + 2x = x(x+2)$.
Suy ra $\frac{4x}{x^2 - x - 6} = \frac{4x^2}{x(x-3)(x+2)}$; $\frac{1}{x^2 + 2x} = \frac{x-3}{x(x-3)(x+2)}$.

□

Ví dụ 3. Đưa các phân thức sau về cùng mẫu thức:

1. $\frac{x}{x^2 + x}$ và $\frac{x+1}{x^2 - 1}$. **ĐS:** $\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}$.

2. $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ và $\frac{3}{x+1}$. **ĐS:** $\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$; $\frac{3}{x+1}$.

Lời giải.

1. MTC = $(x-1)(x+1)$. Suy ra $\frac{x}{x^2 + x} = \frac{x}{x(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{x+1}{x^2 - 1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$.

2. MTC = $x+1$. Suy ra $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$; giữ nguyên $\frac{3}{x+1}$.

□

Ví dụ 4. Đưa các phân thức sau về cùng mẫu thức:

1. $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$ và $\frac{x+1}{x^2 - 1}$. **ĐS:** $\frac{(x-2)(x-1)}{x(x-1)}$; $\frac{x}{x(x-1)}$.

2. $\frac{x^3 - 2^3}{x^2 - 4}$ và $\frac{3}{x+2}$. **ĐS:** $\frac{x^2 + 2x + 4}{x+2}$; $\frac{3}{x+2}$.

Lời giải.

1. $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-1)}$.
 $\frac{x+1}{x^2 - 1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x(x-1)}$.

2. $\frac{x^3 - 2^3}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2}$; giữ nguyên $\frac{3}{x+2}$.

□

Ví dụ 5. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

1. $\frac{2}{5x^3y^2}$ và $\frac{3}{4xy}$. **ĐS:** $\frac{8}{20x^3y^2}$; $\frac{15x^2y}{20x^3y^2}$.

2. $\frac{x}{x^2 - 2xy + y^2}$ và $\frac{x}{x^2 - xy}$. **ĐS:** $\frac{x}{(x-y)^2}$; $\frac{x-y}{(x-y)^2}$.

Lời giải.

$$1. \text{MTC} = 20x^3y^2. \text{ Suy ra } \frac{2}{5x^3y^2} = \frac{8}{20x^3y^2}; \frac{3}{4xy} = \frac{15x^2y}{20x^3y^2}.$$

$$2. \frac{x}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{x}{(x - y)^2}; \frac{x}{x^2 - xy} = \frac{x}{x(x - y)} = \frac{1}{x - y} = \frac{x - y}{(x - y)^2}.$$

□

 **Ví dụ 6.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

$$1. \frac{1}{x^2y} \text{ và } \frac{3}{xy}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{1}{x^2y}; \frac{3x}{x^2y}.$$

$$2. \frac{x}{x^2 + 2xy + y^2} \text{ và } \frac{2x}{x^2 + xy}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{x}{(x + y)^2}; \frac{2(x + y)}{(x + y)^2}.$$

 **Lời giải.**

$$1. \text{Giữ nguyên } \frac{1}{x^2y}; \frac{3}{xy} = \frac{3x}{x^2y}.$$

$$2. \frac{x}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{x}{(x + y)^2}; \frac{2x}{x^2 + xy} = \frac{2x}{x(x + y)} = \frac{2}{x + y} = \frac{2(x + y)}{(x + y)^2}.$$

□

 **Ví dụ 7.** Đưa các phân thức sau về cùng mẫu thức:

$$1. \frac{1}{x + 2}; \frac{2}{2x + 4} \text{ và } \frac{3}{3x + 6}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{1}{x + 2}$$

$$2. \frac{1}{x + 3}; \frac{2}{2x - 6} \text{ và } \frac{3}{3x - 9}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{x - 3}{(x + 3)(x - 3)}; \frac{x + 3}{(x + 3)(x - 3)}; \frac{x + 3}{(x + 3)(x - 3)}.$$

$$3. \frac{1}{x^2 - 4}; \frac{2}{x + 2} \text{ và } \frac{3}{x - 2}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{1}{x^2 - 4}; \frac{2x - 4}{x^2 - 4}; \frac{3x + 6}{x^2 - 4}.$$

$$4. \frac{1}{x}; \frac{2}{x + 2} \text{ và } \frac{3}{x(x + 2)}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{x + 2}{x(x + 2)}; \frac{2x}{x(x + 2)}; \frac{3}{x(x + 2)}.$$

 **Lời giải.**

$$1. \text{Giữ nguyên } \frac{1}{x + 2}; \frac{2}{2x + 4} = \frac{1}{x + 2}; \frac{3}{3x + 6} = \frac{1}{x + 2}.$$

$$2. \frac{1}{x + 3} = \frac{x - 3}{(x + 3)(x - 3)};$$

$$\frac{2}{2x - 6} = \frac{2}{2(x - 3)} = \frac{1}{x - 3} = \frac{x + 3}{(x + 3)(x - 3)};$$

$$\frac{3}{3x - 9} = \frac{3}{3(x - 3)} = \frac{1}{x - 3} = \frac{x + 3}{(x + 3)(x - 3)}.$$

$$3. \text{Giữ nguyên } \frac{1}{x^2 - 4}; \frac{2}{x + 2} = \frac{2x - 4}{x^2 - 4}; \frac{3}{x - 2} = \frac{3x + 6}{x^2 - 4}.$$

$$4. \frac{1}{x} = \frac{x + 2}{x(x + 2)}; \frac{2}{x + 2} = \frac{2x}{x(x + 2)}; \text{giữ nguyên } \frac{3}{x(x + 2)}.$$

□

 **Ví dụ 8.** Đưa các phân thức sau về cùng mẫu thức:

1. $\frac{1}{x-2}$; $\frac{2}{2x-4}$ và $\frac{3}{3x-6}$. **ĐS:** $\frac{1}{x-2}$
2. $\frac{1}{x+4}$; $\frac{1}{2x+8}$ và $\frac{3}{x-4}$. **ĐS:** $\frac{2x-8}{2(x-4)(x+4)}$; $\frac{x-4}{2(x-4)(x+4)}$; $\frac{6x+24}{2(x-4)(x+4)}$
3. $\frac{1}{x^2-1}$; $\frac{2}{x-1}$ và $\frac{2}{x+1}$. **ĐS:** $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{2x+2}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}$
4. $\frac{1}{2x}$; $\frac{2}{x-2}$ và $\frac{3}{2x(x-2)}$. **ĐS:** $\frac{x-2}{2x(x-2)}$; $\frac{4x}{2x(x-2)}$; $\frac{3}{2x(x-2)}$

 **Lời giải.**

1. Giữ nguyên $\frac{1}{x-2}$; $\frac{2}{2x-4} = \frac{1}{x-2}$; $\frac{3}{3x-6} = \frac{1}{x-2}$.
2. $\frac{1}{x+4} = \frac{2x-8}{2(x-4)(x+4)}$; $\frac{1}{2x+8} = \frac{x-4}{2(x-4)(x+4)}$; $\frac{3}{x-4} = \frac{6x+24}{2(x-4)(x+4)}$.
3. $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{2}{x-1} = \frac{2x+2}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{2}{x+1} = \frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}$.
4. $\frac{1}{2x} = \frac{x-2}{2x(x-2)}$; $\frac{2}{x-2} = \frac{4x}{2x(x-2)}$; giữ nguyên $\frac{3}{2x(x-2)}$.

□

 **Ví dụ 9.** Cho hai phân thức $\frac{1}{x^2-ax}$ và $\frac{2}{x-b}$ với $a < b$.

1. Hãy xác định a và b biết rằng khi quy đồng mẫu thức chúng trở thành những phân thức có mẫu thức chung là $x^3 - 5x^2 + 6x$. **ĐS:** $a = 2, b = 3$
2. Với a và b tìm được hãy viết hai phân thức đã cho và hai phân thức thu được sau khi quy đồng với mẫu thức chung là $x^3 - 5x^2 + 6x$. **ĐS:** $\frac{1}{x^2-2x}$ và $\frac{2}{x-3}$;
 $\frac{x-3}{x(x-2)(x-3)}$ và $\frac{2x^2-4x}{x(x-2)(x-3)}$.

 **Lời giải.**

1. Ta có: $x^3 - 5x^2 + 6x = (x^2 - 2x)(x - 3) = (x - 2)(x^2 - 3x)$. Mà $a < b$ nên suy ra $a = 2$; $b = 3$.
2. Cặp phân thức ban đầu: $\frac{1}{x^2-2x}$ và $\frac{2}{x-3}$.
 Hai phân thức sau khi quy đồng: $\frac{x-3}{x(x-2)(x-3)}$ và $\frac{2x^2-4x}{x(x-2)(x-3)}$.

□

 **Ví dụ 10.** Cho hai phân thức $\frac{1}{x-a}$ và $\frac{2}{x-b}$ với $a < b$.

1. Hãy xác định a và b biết rằng khi quy đồng mẫu thức chúng trở thành những phân

thức có mẫu thức chung là $x^2 - 5x + 6$.

ĐS: $a = 2, b = 3$.

2. Với a và b tìm được hãy viết hai phân thức đã cho và hai phân thức thu được sau khi quy đồng với mẫu thức chung là $x^2 - 5x + 6$. ĐS: $\frac{1}{x-2}$ và $\frac{2}{x-3}$; $\frac{x-3}{(x-2)(x-3)}$ và $\frac{2x-4}{(x-2)(x-3)}$.

Lời giải.

1. Ta có: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Mà $a < b$ nên suy ra $a = 2; b = 3$.

2. Cặp phân thức ban đầu: $\frac{1}{x-2}$ và $\frac{2}{x-3}$.

Hai phân thức sau khi quy đồng: $\frac{x-3}{(x-2)(x-3)}$ và $\frac{2x-4}{(x-2)(x-3)}$.

□

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

1. $\frac{-1}{x^2 - 2x}$ và $\frac{x}{x-2}$.

ĐS: $\frac{-1}{x(x-2)}$; $\frac{x^2}{x(x-2)}$.

2. $\frac{2}{x^2 - 6x + 8}$ và $\frac{3}{x-4}$.

ĐS: $\frac{2}{(x-2)(x-4)}$; $\frac{3x-6}{(x-2)(x-4)}$.

3. $\frac{x-1}{x^2 - 5x + 4}$ và $\frac{1}{x^2 - 4x}$.

ĐS: $\frac{x}{x(x-4)}$; $\frac{1}{x(x-4)}$.

Lời giải.

1. $\frac{-1}{x^2 - 2x} = \frac{-1}{x(x-2)}$; $\frac{x}{x-2} = \frac{x^2}{x(x-2)}$.

2. $\frac{2}{x^2 - 6x + 8} = \frac{2}{(x-2)(x-4)}$; $\frac{3}{x-4} = \frac{3x-6}{(x-2)(x-4)}$.

3. $\frac{x-1}{x^2 - 5x + 4} = \frac{x-1}{(x-1)(x-4)} = \frac{1}{x-4} = \frac{x}{x(x-4)}$; $\frac{1}{x^2 - 4x} = \frac{1}{x(x-4)}$.

□

 **Bài 2.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

1. $\frac{25}{14x^2y}$ và $\frac{14}{21xy^5}$.

ĐS: $\frac{75y^4}{42x^2y^5}$; $\frac{28x}{42x^2y^5}$.

2. $\frac{x-y}{8y^2 - 2x^2}$ và $\frac{4}{x-2y}$.

ĐS: $\frac{y-x}{2(x-2y)(x+2y)}$; $\frac{8(x+2y)}{2(x-2y)(x+2y)}$.

Lời giải.

$$1. \frac{25}{14x^2y} = \frac{75y^4}{42x^2y^5}; \frac{14}{21xy^5} = \frac{28x}{42x^2y^5}.$$

$$2. \frac{x-y}{8y^2-2x^2} = \frac{x-y}{2(4y^2-x^2)} = \frac{y-x}{2(x-2y)(x+2y)}; \frac{4}{x-2y} = \frac{8(x+2y)}{2(x-2y)(x+2y)}.$$

□

 **Bài 3.** Đưa các phân thức sau về cùng mẫu thức:

$$1. \frac{1}{x-3}; \frac{-1}{2x-6} \text{ và } \frac{3}{3x-9}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{2}{2(x-3)}; \frac{-1}{2(x-3)}; \frac{2}{2(x-3)}.$$

$$2. \frac{1}{x^2-2x}; \frac{2}{2x-4} \text{ và } \frac{x}{x-2}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{1}{x(x-2)}; \frac{x}{x(x-2)}; \frac{x^2}{x(x-2)}.$$

$$3. \frac{1}{x^2-1}; \frac{2}{x+1} \text{ và } \frac{1}{x-1}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{1}{(x-1)(x+1)}; \frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}; \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}.$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{1}{x-3} = \frac{2}{2(x-3)}; \frac{-1}{2x-6} = \frac{-1}{2(x-3)}; \frac{3}{3x-9} = \frac{1}{x-3} = \frac{2}{2(x-3)}.$$

$$2. \frac{1}{x^2-2x} = \frac{1}{x(x-2)}; \frac{2}{2x-4} = \frac{1}{x-2} = \frac{x}{x(x-2)}; \frac{x}{x-2} = \frac{x^2}{x(x-2)}.$$

$$3. \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}; \frac{2}{x+1} = \frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}; \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}.$$

□

 **Bài 4.** Cho hai phân thức $\frac{2}{x^2-ax}$ và $\frac{-1}{x+b}$ với $a; b > 0$.

1. Hãy xác định a và b biết rằng khi quy đồng mẫu thức chúng trở thành những phân thức có mẫu thức chung là $x^3 - x^2 - 6x$. **ĐS:** $a = 3; b = 2$.

2. Với a và b tìm được hãy viết hai phân thức đã cho và hai phân thức thu được sau khi quy đồng với mẫu thức chung là $x^3 - x^2 - 6x$.

$$\text{ĐS: } \frac{2}{x^2-3x} \text{ và } \frac{-1}{x+2}; \frac{2x+4}{x(x+2)(x-3)} \text{ và } \frac{-x^2+3x}{x(x+2)(x-3)}.$$

 **Lời giải.**

1. Ta có: $x^3 - x^2 - 6x = x(x+2)(x-3) = (x^2+2x)(x-3) = (x+2)(x^2-3x)$.
Mà $a; b > 0$ nên suy ra $a = 3; b = 2$.

2. Cặp phân thức ban đầu: $\frac{2}{x^2-3x}$ và $\frac{-1}{x+2}$.

Hai phân thức sau khi quy đồng: $\frac{2x+4}{x(x+2)(x-3)}$ và $\frac{-x^2+3x}{x(x+2)(x-3)}$.

□

§5 Phép cộng các phân thức đại số

1 Tóm tắt lý thuyết

- Quy tắc cộng hai phân thức cùng mẫu thức:** Muốn cộng hai phân thức cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.
- Quy tắc cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau:** Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức, đưa về quy tắc cộng hai phân thức cùng mẫu thức.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 58. Cộng các phân thức đại số thông thường

Áp dụng hai quy tắc đã nêu trong phần *Tóm tắt lý thuyết*.

✎✎✎ BÀI TẬP MẪU ✎✎✎

 **Ví dụ 1.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \frac{2x-4}{5} + \frac{3x+14}{5}. \quad \text{ĐS: } x+2. \quad \text{b) } \frac{x+1}{x-5} + \frac{x-18}{x-5} + \frac{x+2}{x-5}. \quad \text{ĐS: } 3.$$

Lời giải.

$$1. \frac{2x-4}{5} + \frac{3x+14}{5} = \frac{(2x-4) + (3x+14)}{5} = \frac{5x+10}{5} = \frac{5(x+2)}{5} = x+2.$$

$$2. \frac{x+1}{x-5} + \frac{x-18}{x-5} + \frac{x+2}{x-5} = \frac{(x+1) + (x-18) + (x+2)}{x-5} = \frac{3x-15}{x-5} = \frac{3(x-5)}{x-5} = 3.$$

□

 **Ví dụ 2.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \frac{x-4}{7} + \frac{6x+4}{7}. \quad \text{ĐS: } x. \quad \text{b) } \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-10}{x-2} + \frac{x+3}{x-2}. \quad \text{ĐS: } 3.$$

Lời giải.

$$1. \frac{x-4}{7} + \frac{6x+4}{7} = \frac{(x-4) + (6x+4)}{7} = \frac{7x}{7} = x.$$

$$2. \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-10}{x-2} + \frac{x+3}{x-2} = \frac{(x+1) + (x-10) + (x+3)}{x-2} = \frac{3x-6}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} = 3.$$

□

 **Ví dụ 3.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{-2x}{x^2-1}$. **ĐS:** $\frac{x-1}{2(x+1)}$. b) $\frac{2x}{x^2+4x+4} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{2-x}{(x+2)^2}$. **ĐS:** 1.

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{2x-2} + \frac{-2x}{x^2-1} \\ = & \frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{-2x}{(x-1)(x+1)} \\ = & \frac{(x+1)^2}{2(x-1)(x+1)} + \frac{-4x}{2(x-1)(x+1)} \\ = & \frac{(x+1)^2 - 4x}{2(x-1)(x+1)} \\ = & \frac{x^2 - 2x + 1}{2(x-1)(x+1)} \\ = & \frac{(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)} \\ = & \frac{x-1}{2(x+1)} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{x^2+4x+4} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{2-x}{(x+2)^2} \\ = & \frac{2x}{(x+2)^2} + \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)^2} + \frac{2-x}{(x+2)^2} \\ = & \frac{2x + (x+1)(x+2) + (2-x)}{(x+2)^2} \\ = & \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+2)^2} \\ = & \frac{(x+2)^2}{(x+2)^2} \\ = & 1 \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 4.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{6}{x^2+4x} + \frac{3}{2x+8}$. **ĐS:** $\frac{3}{2x}$. b) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-14}{x^2-4}$. **ĐS:** 2.

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}
 \frac{6}{x^2+4x} + \frac{3}{2x+8} &= \frac{12}{2x(x+4)} + \frac{3x}{2x(x+4)} \\
 &= \frac{3x+12}{2x(x+4)} \\
 &= \frac{3(x+4)}{2x(x+4)} \\
 &= \frac{3}{2x}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-14}{x^2-4} \\
 &= \frac{(x+1)(x+2)}{x^2-4} + \frac{(x-2)^2}{x^2-4} + \frac{x-14}{x^2-4} \\
 &= \frac{2x^2-8}{x^2-4} \\
 &= \frac{2(x^2-4)}{x^2-4} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

□

Dạng 59. Cộng các phân thức đại số kết hợp quy tắc đổi dấu

Bước 1. Áp dụng quy tắc đổi dấu phân thức: $\frac{-A}{-B} = \frac{A}{B}$; $\frac{A}{-B} = \frac{-A}{B}$;

Bước 2. Thực hiện quy tắc cộng theo Dạng 1.

BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x-2x^2}{3-x} + \frac{5-4x}{x-3}$. **ĐS:** $x-3$. b) $\frac{2}{x+2} + \frac{-4}{2-x} + \frac{5x+2}{4-x^2}$. **ĐS:** $\frac{1}{x-2}$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}
 &\frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x-2x^2}{3-x} + \frac{5-4x}{x-3} \\
 &= \frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x^2-2x}{x-3} + \frac{5-4x}{x-3} \\
 &= \frac{(4-x^2) + (2x^2-2x) + (5-4x)}{x-3} \\
 &= \frac{x^2-6x+9}{x-3} \\
 &= \frac{(x-3)^2}{x-3} \\
 &= x-3
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 &\frac{2}{x+2} + \frac{-4}{2-x} + \frac{5x+2}{4-x^2} \\
 &= \frac{2}{x+2} + \frac{4}{x-2} + \frac{-5x-2}{x^2-4} \\
 &= \frac{2(x-2)}{x^2-4} + \frac{4(x+2)}{x^2-4} + \frac{-5x-2}{x^2-4} \\
 &= \frac{2(x-2) + 4(x+2) + (-5x-2)}{x^2-4} \\
 &= \frac{x+2}{x^2-4} \\
 &= \frac{1}{x-2}
 \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 2.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{2x^2 - x}{x - 1} + \frac{x + 1}{1 - x} + \frac{2 - x^2}{x - 1}$. **ĐS:** $x - 1$. b) $\frac{2}{x + 1} + \frac{-4}{1 - x} + \frac{5x + 1}{1 - x^2}$. **ĐS:** $\frac{1}{x - 1}$.

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} & \frac{2x^2 - x}{x - 1} + \frac{x + 1}{1 - x} + \frac{2 - x^2}{x - 1} \\ = & \frac{2x^2 - x}{x - 1} + \frac{-x - 1}{x - 1} + \frac{2 - x^2}{x - 1} \\ = & \frac{(2x^2 - x) + (-x - 1) + (2 - x^2)}{x - 1} \\ = & \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \\ = & x - 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x + 1} + \frac{-4}{1 - x} + \frac{5x + 1}{1 - x^2} \\ = & \frac{2}{x + 1} + \frac{4}{x - 1} + \frac{-(5x + 1)}{x^2 - 1} \\ = & \frac{2(x - 1)}{x^2 - 1} + \frac{4(x + 1)}{x^2 - 1} + \frac{-5x - 1}{x^2 - 1} \\ = & \frac{2x - 2 + 4x + 4 - 5x - 1}{x^2 - 1} \\ = & \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} \\ = & \frac{1}{x - 1} \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 3.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{y}{2x^2 - xy} + \frac{4x}{y^2 - 2xy}$. **ĐS:** $\frac{-2x - y}{xy}$. b) $\frac{x}{x^2 + xy} + \frac{x - 3y}{y^2 - x^2} + \frac{x}{xy - x^2}$. **ĐS:** $\frac{-1}{x + y}$.

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}
 & \frac{y}{2x^2 - xy} + \frac{4x}{y^2 - 2xy} \\
 = & \frac{y}{x(2x - y)} + \frac{4x}{y(y - 2x)} \\
 = & \frac{y^2}{xy(2x - y)} + \frac{-4x^2}{xy(2x - y)} \\
 = & \frac{y^2 - 4x^2}{xy(2x - y)} \\
 = & \frac{-2x - y}{xy}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 & \frac{x}{x^2 + xy} + \frac{x - 3y}{y^2 - x^2} + \frac{x}{xy - x^2} \\
 = & \frac{x}{x(x + y)} + \frac{-x + 3y}{x^2 - y^2} + \frac{-x}{x(x - y)} \\
 = & \frac{1}{x + y} + \frac{-x + 3y}{x^2 - y^2} + \frac{-1}{x - y} \\
 = & \frac{x - y}{x^2 - y^2} + \frac{-x + 3y}{x^2 - y^2} + \frac{-x - y}{x^2 - y^2} \\
 = & \frac{(x - y) + (-x + 3y) + (-x - y)}{x^2 - y^2} \\
 = & \frac{-x + y}{x^2 - y^2} \\
 = & \frac{-1}{x + y}
 \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 4.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{y}{x^2 - xy} + \frac{x}{y^2 - xy}$. ĐS: $\frac{-x - y}{xy}$. b) $\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{2}{y^2 - x^2} + \frac{1}{xy - x^2}$. ĐS: $\frac{-2}{x(x - y)}$.

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}
 & \frac{y}{x^2 - xy} + \frac{x}{y^2 - xy} \\
 = & \frac{y}{x(x - y)} + \frac{x}{y(y - x)} \\
 = & \frac{y^2}{xy(x - y)} + \frac{-x^2}{xy(x - y)} \\
 = & \frac{y^2 - x^2}{xy(x - y)} \\
 = & \frac{-x - y}{xy}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x^2 + xy} + \frac{2}{y^2 - x^2} + \frac{1}{xy - x^2} \\
 = & \frac{1}{x(x + y)} + \frac{-2}{x^2 - y^2} + \frac{-1}{x(x - y)} \\
 = & \frac{x - y}{x(x^2 - y^2)} + \frac{-2x}{x(x^2 - y^2)} + \frac{-x - y}{x(x^2 - y^2)} \\
 = & \frac{(x - y) + (-2x) + (-x - y)}{x(x^2 - y^2)} \\
 = & \frac{-2x - 2y}{x(x^2 - y^2)} \\
 = & \frac{-2}{x(x - y)}
 \end{aligned}$$

□

Dạng 60. Rút gọn phân thức và tính giá trị biểu thức đó

Bước 1. Rút gọn biểu thức theo Dạng 1 hoặc Dạng 2;

Bước 2. Tính giá trị biểu thức sau khi rút gọn.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho biểu thức: $P = \frac{2}{x^2 - x} + \frac{2}{x^2 + x + 1} + \frac{4x}{1 - x^3}$ với $x \neq 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P ;

$$P = \frac{2}{x(x^3 - 1)}.$$

ĐS: b) Tính giá trị biểu thức P tại $x = 2$. **ĐS:**

$$\frac{1}{7}.$$

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{x^2 - x} + \frac{2}{x^2 + x + 1} + \frac{4x}{1 - x^3} \\ &= \frac{2}{x(x-1)} + \frac{2}{x^2 + x + 1} + \frac{-4x}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{2(x^2 + x + 1)}{x(x-1)(x^2 + x + 1)} + \frac{2x(x-1)}{x(x-1)(x^2 + x + 1)} + \frac{-4x^2}{x(x-1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{2}{x(x-1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{2}{x(x^3 - 1)}. \end{aligned}$$

2. Với $x = 2$ thế vào P ta có: $P = \frac{2}{2(2^3 - 1)} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$

□

Ví dụ 2. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2}{x+1} + \frac{2(x-1)}{x} + \frac{x+2}{x^2+x}$ với $x \neq 0; x \neq -1$.

a) Rút gọn biểu thức P ; **ĐS:** $P = x + 1$. b) Tính giá trị biểu thức P tại $x = 1$. **ĐS:** 2.

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2}{x+1} + \frac{2(x-1)}{x} + \frac{x+2}{x^2+x} = \frac{x^3}{x(x+1)} + \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)} + \frac{x+2}{x(x+1)} \\ &= \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x(x+1)} = \frac{x(x+1)^2}{x(x+1)} = x + 1. \end{aligned}$$

2. Với $x = 1$ thế vào P ta có: $P = 1 + 1 = 2$.



Dạng 61. Bài toán thực tế

Bước 1. Thiết lập các biểu thức theo yêu cầu của đề bài;

Bước 2. Sử dụng hai quy tắc cộng kết hợp với quy tắc đổi dấu.

✎✎✎ BÀI TẬP MẪU ✎✎✎

Ví dụ 1. Một đội máy xúc nhận nhiệm vụ xúc 11600 m^3 . Giai đoạn đầu, đội chỉ xúc được 5000 m^3 với năng suất trung bình của máy xúc là $x \text{ m}^3/\text{ngày}$. Giai đoạn sau, năng suất làm việc của máy xúc tăng được $25 \text{ m}^3/\text{ngày}$. Khi đó:

1. Hãy biểu diễn:

i) Thời gian xúc 5000 m^3 ở giai đoạn đầu tiên; ĐS: $\frac{5000}{x}$ ngày

ii) Thời gian làm nốt phần việc còn lại ở giai đoạn sau; ĐS: $\frac{6600}{x+25}$ ngày

iii) Tổng thời gian hoàn thành công việc. ĐS: $\frac{5000}{x} + \frac{6600}{x+25}$ ngày.

2. Giả sử năng suất trung bình của máy xúc là $250 \text{ m}^3/\text{ngày}$ thì tổng thời gian hoàn thành công việc là bao nhiêu ngày? ĐS: 44 ngày.

Lời giải.

1. Gọi ý công thức: Khối lượng công việc = thời gian làm việc $\times$ năng suất.

i) Thời gian xúc 5000 m^3 ở giai đoạn đầu tiên: $\frac{5000}{x}$ (ngày);

ii) Thời gian làm phần việc còn lại = (khối lượng công việc còn lại):(năng suất mới), được biểu thức $\frac{6600}{x+25}$ (ngày);

iii) Tổng thời gian hoàn thành công việc: $T = \frac{5000}{x} + \frac{6600}{x+25}$ (ngày).

2. Thay $x = 250$ vào biểu thức T , thì tổng thời gian hoàn thành công việc của đội máy xúc là $T = 44$ (ngày).



Ví dụ 2. Một tàu du lịch đi từ Hà Nội tới Việt Trì, sau đó nó nghỉ lại tại Việt Trì 2 giờ trước khi quay trở lại Hà Nội. Quãng đường từ Hà Nội tới Việt Trì là 70 km. Vận tốc của dòng nước là 5 km/h. Gọi vận tốc thực của tàu là $x \text{ km/h}$.

1. Hãy biểu diễn:

i) Thời gian tàu đi ngược dòng từ Hà Nội tới Việt Trì; ĐS: $\frac{70}{x-5}$ (giờ)

ii) Thời gian tàu đi xuôi dòng từ Việt Trì tới Hà Nội; ĐS: $\frac{70}{x+5}$ (giờ)

iii) Thời gian kể từ lúc tàu xuất phát đến khi tàu quay trở về Hà Nội. ĐS: $\frac{70}{x-5} + \frac{70}{x+5} + 2$ (giờ).

2. Tính thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi tàu về tới Hà Nội, biết rằng vận tốc lúc ngược dòng của tàu là 20 km/h. ĐS: 7 giờ 50 phút.

 Lời giải.

1. Áp dụng công thức chuyển động $s = v \cdot t$;
 Trong đó s là quãng đường; v là vận tốc; t là thời gian.
 Ta có vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước;
 Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng - vận tốc dòng nước;
 i) Thời gian tàu đi ngược dòng từ Hà Nội tới Việt Trì: $\frac{70}{x-5}$ (giờ);
 ii) Thời gian tàu đi xuôi dòng từ Việt Trì tới Hà Nội: $\frac{70}{x+5}$ (giờ);
 iii) Thời gian kể từ lúc tàu xuất phát đến khi tàu quay trở về Hà Nội.

$$T = \frac{70}{x-5} + \frac{70}{x+5} + 2 \text{ (giờ).}$$
2. Vận tốc thực: 25 km/h. Thay $x = 25$ vào biểu thức T.
 Thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi tàu về tới Hà Nội: $\frac{47}{6}$ giờ = 7 giờ 50 phút.

□

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{11x-4}{x-1} + \frac{10x+4}{2-2x}. & \text{ĐS: 6.} \quad \text{b) } \frac{1}{x+2} + \frac{5}{2x^2+3x-2}. \quad \text{ĐS: } \frac{2}{2x-1}. \\ \text{c) } \frac{-3x^2}{x^3+1} + \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x+1}. & \text{ĐS: } \frac{-2(x-1)}{x^2-x+1}. \quad \text{d) } \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4}. \quad \text{ĐS: } \frac{8}{1-x^8}. \end{array}$$

 Lời giải.

$$1. \frac{11x-4}{x-1} + \frac{10x+4}{2-2x} = \frac{11x-4}{x-1} + \frac{-2(5x+2)}{2(x-1)} = \frac{11x-4}{x-1} + \frac{-5x-2}{x-1} = \frac{6x-6}{x-1} = \frac{6(x-1)}{x-1} = 6.$$

$$2. \text{Ta có: } 2x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x(x+2) - (x+2) = (2x-1)(x+2).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} + \frac{5}{2x^2+3x-2} &= \frac{1}{x+2} + \frac{5}{(2x-1)(x+2)} = \frac{2x-1}{(2x-1)(x+2)} + \frac{5}{(2x-1)(x+2)} \\ &= \frac{2x+4}{(2x-1)(x+2)} = \frac{2}{2x-1}. \end{aligned}$$

$$3. \text{Ta có: } x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

$$\begin{aligned} \frac{-3x^2}{x^3+1} + \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x+1} &= \frac{-3x^2}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{-2(x^2-1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{-2(x-1)}{x^2-x+1}. \end{aligned}$$

4. Ta có: $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4) = (1-x^4)(1+x^4) = 1-x^8$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} &= \frac{1+x+1-x}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} \\ &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{2(1+x^2) + 2(1-x^2)}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} \\ &= \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{4(1+x^4) + 4(1-x^4)}{1-x^8} = \frac{8}{1-x^8}. \end{aligned}$$

□

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

1. $\frac{x+4y}{x^2-2xy} + \frac{x+y}{2y^2-xy}$. **ĐS:** $\frac{-x-2y}{xy}$.

2. $\frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(y-z)(z-x)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)}$. **ĐS:** 0.

 **Lời giải.**

1.

$$\begin{aligned} \frac{x+4y}{x^2-2xy} + \frac{x+y}{2y^2-xy} &= \frac{x+4y}{x(x-2y)} + \frac{-x-y}{y(x-2y)} = \frac{y(x+4y)}{xy(x-2y)} + \frac{x(-x-y)}{xy(x-2y)} \\ &= \frac{4y^2-x^2}{xy(x-2y)} = \frac{-x-2y}{xy}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(y-z)(z-x)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)} &= \frac{(z-x) + (x-y) + (y-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\ &= \frac{0}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0. \end{aligned}$$

□

Bài 3. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2+x}{x^3+x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+1}$

a) Rút gọn biểu thức P . **ĐS:** $P = \frac{x+1}{x^2+1}$. b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x=1$. **ĐS:** 1.

 **Lời giải.**

1. Ta có: $x^3+x^2+x+1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$

$$P = \frac{x^2+x}{x^3+x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

2. Thay $x=1$ vào P ta có: $P = \frac{1+1}{1^2+1} = 1$.

□

Bài 4. Đầu tháng 5 năm 2017, toàn thế giới ghi nhận hàng chục ngàn máy tính bị nhiễm một loại virus mới mang tên WannaCry. Theo ước tính, có 150000 thiết bị điện tử trở thành nạn nhân của cuộc tấn công mạng này. Trong thời gian đầu virus mới được phát tán, trung bình một ngày ghi nhận x thiết bị nhiễm virus và giai đoạn này khiến 60000 thiết bị bị thiệt hại. Sau đó tốc độ lan truyền gia tăng 500 thiết bị nhiễm virus mỗi ngày.

1. Hãy biểu diễn:

i) Thời gian 60000 thiết bị đầu tiên nhiễm virus;

$$\text{ĐS: } \frac{60000}{x}.$$

ii) Thời gian số thiết bị còn lại bị lây nhiễm;

$$\text{ĐS: } \frac{90000}{x+500}.$$

iii) Thời gian để 150000 thiết bị nêu trên bị nhiễm virus.

$$\text{ĐS: } \frac{90000}{x+500} + \frac{60000}{x}.$$

2. Tính thời gian để 150000 thiết bị nêu trên bị nhiễm virus với $x = 4000$.

$$\text{ĐS: } 35.$$

Lời giải.

1.

i) Thời gian 60000 thiết bị đầu tiên nhiễm virus: $\frac{60000}{x}$ (ngày);

ii) Thời gian số thiết bị còn lại bị lây nhiễm: $\frac{150000 - 60000}{x+500} = \frac{90000}{x+500}$ (ngày);

iii) Thời gian để 150000 thiết bị nêu trên bị nhiễm virus là $\frac{90000}{x+500} + \frac{60000}{x}$ (ngày).

2. Thời gian để 150000 thiết bị nêu trên bị nhiễm virus với $x = 4000$ là

$$\frac{90000}{4000+500} + \frac{60000}{4000} = 35 \text{ (ngày)}.$$

□

§6 Phép trừ các phân thức đại số

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Phân thức đối

- + Phân thức đối của $\frac{A}{B}$ là $-\frac{A}{B}$.
- + Hai phân thức gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0.

2. Quy tắc trừ hai phân thức đại số

Muốn trừ phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$, ta cộng phân thức $\frac{A}{B}$ với phân thức đối của phân thức $\frac{C}{D}$, tức là

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right)$$

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 62. Áp dụng phép trừ hai phân thức để thực hiện phép tính

Sử dụng phân thức đối trong phép trừ để chuyển thành phép cộng các phân thức đại số.

BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau:

$$1. \frac{2x-1}{x-1} - \frac{x-2}{x-1} \quad \text{ĐS: } \frac{x+1}{x-1}.$$

$$2. \frac{2(2xy-1)}{3x^2y^2} - \frac{xy-2}{3x^2y^2} \quad \text{ĐS: } \frac{1}{xy}.$$

$$3. \frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^3+1}{x^2+x} \quad \text{ĐS: } 2.$$

$$4. \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{y^2}{xy-y^2} - \frac{x^2}{x^2-xy} \quad \text{ĐS: } -\frac{2xy}{(x-y)(x+y)}.$$

 Lời giải.

$$1. \frac{2x-1}{x-1} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{(2x-1) - (x-2)}{x-1} = \frac{2x-1-x+2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}.$$

$$2. \frac{2(2xy-1)}{3x^2y^2} - \frac{xy-2}{3x^2y^2} = \frac{(4xy-2) - (xy-2)}{3x^2y^2} = \frac{3xy}{3x^2y^2} = \frac{1}{xy}.$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^3+1}{x^2+x} &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)} - \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} \\ &= \frac{x^2+x+1}{x} - \frac{x^2-x+1}{x} = \frac{2x}{x} = 2. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{y^2}{xy-y^2} - \frac{x^2}{x^2-xy} &= \frac{x^2+y^2}{(x-y)(x+y)} - \frac{y^2}{y(x-y)} - \frac{x^2}{x(x-y)} \\ &= \frac{x^2+y^2}{(x-y)(x+y)} - \frac{y}{x-y} - \frac{x}{x-y} \\ &= \frac{(x^2+y^2) - y(x+y) - x(x+y)}{(x-y)(x+y)} \\ &= -\frac{2xy}{(x-y)(x+y)}. \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 2.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{3x-2}{x+1} - \frac{2x-1}{x+1} & \text{ĐS: } \frac{x-1}{x+1} & \text{b) } \frac{2(xy-1)}{x^2y^2} - \frac{xy-2}{x^2y^2} \quad \text{ĐS: } \frac{1}{xy} \\ \text{c) } \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} & \text{ĐS: } \frac{x+1}{x} & \text{d) } \frac{1}{xy-y^2} - \frac{1}{x^2-xy} \quad \text{ĐS: } \frac{1}{xy} \end{array}$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{3x-2}{x+1} - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{(3x-2) - (2x-1)}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}.$$

$$2. \frac{2(xy-1)}{x^2y^2} - \frac{xy-2}{x^2y^2} = \frac{(2xy-2) - (xy-2)}{x^2y^2} = \frac{xy}{x^2y^2} = \frac{1}{xy}.$$

$$3. \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{x^2-1}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}.$$

$$4. \frac{1}{xy-y^2} - \frac{1}{x^2-xy} = \frac{1}{y(x-y)} - \frac{1}{x(x-y)} = \frac{x}{xy(x-y)} - \frac{y}{xy(x-y)} = \frac{x-y}{xy(x-y)} = \frac{1}{xy}.$$

□

Dạng 63. Tìm phân thức thỏa mãn yêu cầu

- Đưa phân thức cần tìm về riêng một vế.
- Sử dụng quy tắc cộng và quy tắc trừ để rút gọn lại biểu thức. Từ đó suy ra phân thức cần tìm.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm phân thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện: $\frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - P(x) = \frac{2x(1-x)}{9-x^2}$.
ĐS: $\frac{2}{x-3}$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - P(x) &= \frac{2x(1-x)}{9-x^2} \\ \Rightarrow P(x) &= \frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - \frac{2x(1-x)}{9-x^2} \\ &= \frac{(x+1)(x+3)}{x^2-9} - \frac{(1-x)(x-3)}{x^2-9} - \frac{-2x(1-x)}{x^2-9} \\ &= \frac{(x^2+4x+3) - (-x^2+4x-3) - (2x^2-2x)}{x^2-9} \\ &= \frac{2x+6}{x^2-9} = \frac{2}{x-3}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Tìm phân thức $Q(x)$ thỏa mãn đẳng thức sau: $Q(x) + \frac{x-3}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$.
ĐS: $\frac{3}{x-3}$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} Q(x) + \frac{x-3}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} &= \frac{x-1}{x^2-5x+6} \\ \Rightarrow Q(x) &= \frac{x-1}{x^2-5x+6} - \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-3} \\ &= \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} - \frac{(x-3)^2}{(x-2)(x-3)} + \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x-1 - (x^2-6x+9) + (x^2-4x+4)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{3x-6}{(x-2)(x-3)} = \frac{3}{x-3}. \end{aligned}$$

□

Dạng 64. Phân tích một phân thức thành tổng (hiệu) của các phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất

- Với bài toán đơn giản, ta có thể sử dụng kĩ thuật thêm, bớt hệ số để đưa bài toán về dạng tách phân số như sau: $\frac{a+b}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
- Với bài toán phức tạp hơn, ta đặt trước các tử số là các biến $A, B, C, \dots$. Từ đó quy đồng phân thức, tìm hệ số $A, B, C, \dots$ bằng cách chọn các giá trị x đặc biệt.

BÀI TẬP MẪU

Giáo viên:

Ví dụ 1. Chứng minh đẳng thức $\frac{1}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right)$.

Áp dụng tính nhanh biểu thức sau:

$$1. P = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2017 \cdot 2018}. \quad \text{ĐS: } \frac{2017}{2018}.$$

$$2. Q(x) = \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \cdots + \frac{1}{(x+2016)(x+2018)}. \quad \text{ĐS: } \frac{1009}{x(x+2018)}.$$

Lời giải.

$$\frac{1}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{x+a-x}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \left[\frac{x+a}{x(x+a)} - \frac{x}{x(x+a)} \right] = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right).$$

1.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2017 \cdot 2018} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2018} = \frac{2017}{2018}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \cdots + \frac{1}{(x+2016)(x+2018)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \cdots + \frac{1}{x+2016} - \frac{1}{x+2018} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2018} \right) = \frac{1009}{x(x+2018)}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. 1. Chứng tỏ rằng hiệu của phân thức dưới đây có tử bằng 1: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.
ĐS: $\frac{1}{x(x+1)}$.

2. Tính nhanh biểu thức sau: $Q(x) = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{(x+99)(x+100)}$.
ĐS: $\frac{100}{x(x+100)}$.

Lời giải.

$$1. \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

2.

$$Q(x) = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{(x+99)(x+100)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+99} - \frac{1}{x+100} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+100} = \frac{100}{x(x+100)}.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 3. Phân tích phân thức thành tổng (hiệu) của hai phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất:

a) $\frac{2x-5}{(x-3)(x-2)}$. **ĐS:** $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$. b) $\frac{-4x+7}{(2x-1)(x+2)}$. **ĐS:** $\frac{2}{2x-1} - \frac{3}{x+2}$.

 **Lời giải.**

1. $\frac{2x-5}{(x-3)(x-2)} = \frac{x-3+x-2}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$.

2. Đặt $\frac{-4x+7}{(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+2}$

Quy đồng, tử thức thu được $-4x+7 = A(x+2) + B(2x-1)$.

Cho $x = -2 \Rightarrow B = -3$; Cho $x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 2$.

Vậy ta có $\frac{-4x+7}{(2x-1)(x+2)} = \frac{2}{2x-1} - \frac{3}{x+2}$.

□

Ví dụ 4. Phân tích phân thức thành tổng (hiệu) của hai phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất:

a) $\frac{2x+2}{x(x+2)}$. **ĐS:** $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$. b) $\frac{-x+12}{(x-2)(x+3)}$. **ĐS:** $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+3}$.

 **Lời giải.**

1. $\frac{2x+2}{x(x+2)} = \frac{x+x+2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$.

2. Đặt $\frac{-x+12}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$

Quy đồng, tử thức thu được $-x+12 = A(x+3) + B(x-2)$.

Cho $x = -3 \Rightarrow B = -3$; Cho $x = 2 \Rightarrow A = 2$.

Vậy ta có $\frac{-x+12}{(x-2)(x+3)} = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+3}$.

□

Dạng 65. Bài toán thực tế

Bước 1. Thiết lập các biểu thức theo yêu cầu của đề bài.

Bước 2. Áp dụng quy tắc cộng, trừ phân thức đại số để tìm ra kết quả của bài toán.

   **BÀI TẬP MẪU**   

Giáo viên:

Ví dụ 1. Công ty da giày Hải Phòng nhận sản xuất 10000 đôi giày cho một đối tác nước ngoài với thời hạn là x ngày. Do cải tiến kĩ thuật, công ty không những hoàn thành trước kế hoạch đề ra một ngày mà còn sản xuất thêm được 200 đôi giày.

1. Hãy biểu diễn qua x :

- i) Số lượng đôi giày công ty phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch. **ĐS:** $\frac{10000}{x}$
- ii) Số lượng đôi giày thực tế công ty đã sản xuất được trong một ngày. **ĐS:** $\frac{10200}{x-1}$
- iii) Số lượng đôi giày làm thêm trong một ngày. **ĐS:** $\frac{200x + 10000}{x(x-1)}$.

2. Tính số lượng đôi giày mà công ty làm thêm trong một ngày với $x = 25$. **ĐS:** 25.

Lời giải.

1.

- i) Số lượng đôi giày công ty phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch là $\frac{10000}{x}$.
- ii) Số lượng đôi giày thực tế công ty đã sản xuất được trong một ngày là $\frac{10000 + 200}{x-1} = \frac{10200}{x-1}$.
- iii) Số lượng đôi giày làm thêm trong một ngày là $M = \frac{10200}{x-1} - \frac{10000}{x} = \frac{200x + 10000}{x(x-1)}$.

2. Số lượng đôi giày mà công ty làm thêm trong một ngày với $x = 25$:

$$M = \frac{200 \cdot 25 + 10000}{25(25-1)} = 25.$$

□

Ví dụ 2. Một công ty may mặc phải sản xuất 10000 sản phẩm trong x ngày. Khi thực hiện không những đã làm xong sớm một ngày mà còn làm thêm được 80 sản phẩm.

1. Hãy biểu diễn qua x :

- i) Số sản phẩm phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch. **ĐS:** $\frac{10000}{x}$
- ii) Số lượng sản phẩm thực tế đã làm được trong một ngày. **ĐS:** $\frac{10080}{x-1}$
- iii) Số sản phẩm làm thêm trong một ngày. **ĐS:** $\frac{80x + 10000}{x(x-1)}$.

2. Tính số sản phẩm làm thêm trong một ngày với $x = 25$. **ĐS:** 20.

Lời giải.

1.

- i) Số sản phẩm phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch là $\frac{10000}{x}$.
- ii) Số sản phẩm thực tế đã làm được trong một ngày là $\frac{10000 + 80}{x-1} = \frac{10080}{x-1}$.
- iii) Số sản phẩm làm thêm trong một ngày là $M = \frac{10080}{x-1} - \frac{10000}{x} = \frac{80x + 10000}{x(x-1)}$.

2. Số sản phẩm làm thêm trong một ngày với $x = 25$:

$$M = \frac{80 \cdot 25 + 10000}{25(25 - 1)} = 20.$$

□

3

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{3x+4}{x^3y^2} - \frac{4-x}{x^3y^2} & \text{ĐS: } \frac{4}{x^2y^2} & \text{b) } \frac{x^2+2}{x^3+1} - \frac{1}{x+1} & \text{ĐS: } \frac{1}{x^2-x+1} \\ \text{c) } \frac{1}{x-1} - \frac{5x-4}{x^2-x} & \text{ĐS: } \frac{-4}{x} & \text{d) } \frac{x}{xy-y^2} - \frac{y-2x}{xy-x^2} & \text{ĐS: } \frac{x-y}{xy} \end{array}$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{3x+4}{x^3y^2} - \frac{4-x}{x^3y^2} = \frac{(3x+4) - (4-x)}{x^3y^2} = \frac{4}{x^3y^2}.$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2}{x^3+1} - \frac{1}{x+1} &= \frac{x^2+2}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x^2+2}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{x^2+2-x^2+x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{1}{x^2-x+1}. \end{aligned}$$

$$3. \frac{1}{x-1} - \frac{5x-4}{x^2-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{5x-4}{x(x-1)} = \frac{x}{x(x-1)} - \frac{5x-4}{x(x-1)} = \frac{x-5x+4}{x(x-1)} = \frac{-4x+4}{x(x-1)} = \frac{-4}{x}.$$

$$4. \frac{x}{xy-y^2} - \frac{y-2x}{xy-x^2} = \frac{x}{y(x-y)} + \frac{y-2x}{x(x-y)} = \frac{x^2+y(y-2x)}{xy(x-y)} = \frac{(x-y)^2}{xy(x-y)} = \frac{x-y}{xy}.$$

□

 **Bài 2.** Tìm phân thức $P(x)$ thỏa mãn đẳng thức sau:

$$1. \frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - P(x) = \frac{6x-4}{x^2-1} \quad \text{ĐS: } P(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

$$2. \frac{2x+4}{x^3-1} - P(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1} \quad \text{ĐS: } \frac{-x}{x^2+x+1}.$$

 **Lời giải.**

1.

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - P(x) &= \frac{6x-4}{x^2-1} \\ \Rightarrow P(x) &= \frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{6x-4}{x^2-1} \\ &= \frac{x(x+1)}{x^2-1} + \frac{3(x-1)}{x^2-1} + \frac{-6x+4}{x^2-1} \\ &= \frac{x^2+x+3x-3-6x+4}{x^2-1} \\ &= \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} \\ &= \frac{x-1}{x+1}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{2x+4}{x^3-1} - P(x) &= \frac{2}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1} \\ \Rightarrow P(x) &= \frac{2x+4}{x^3-1} - \frac{2}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+x+1} \\ &= \frac{2x+4}{x^3-1} + \frac{(-2)(x^2+x+1)}{x^3-1} + \frac{(x-1)(x+2)}{x^3-1} \\ &= \frac{-x^2+x}{x^3-1} \\ &= \frac{-x}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

□

Bài 3. Tính nhanh biểu thức sau:

$$Q(x) = \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} + \frac{1}{x^2+12x+35}. \quad \text{ĐS: } Q(x) = \frac{4}{(x-1)(x+7)}.$$

Lời giải.

Ta sử dụng phương pháp tách mẫu các phân thức để xuất hiện thừa số.

Áp dụng đẳng thức $\frac{1}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right)$ với $a = 2$.

$$\begin{aligned}Q(x) &= \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} + \frac{1}{x^2+12x+35} \\ &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+7)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+7} \right) \\ &= \frac{4}{(x-1)(x+7)}.\end{aligned}$$

□

Bài 4. Phân tích phân thức thành tổng (hiệu) của hai phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất:

$$1. P(x) = \frac{1}{(x+1)(2-x)}.$$

$$\text{ĐS: } P(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2-x} \right).$$

$$2. Q(x) = \frac{-7}{(2x+3)(x-2)}.$$

$$\text{ĐS: } Q(x) = \frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x-2}.$$

 Lời giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{(x+1)(2-x)} = \frac{1}{3} \left[\frac{x+1+2-x}{(x+1)(2-x)} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{x+1}{(x+1)(2-x)} + \frac{2-x}{(x+1)(2-x)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2-x} \right). \end{aligned}$$

$$2. \text{ Đặt } \frac{-7}{(2x+3)(x-2)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{x-2}$$

Quy đồng, tử thức thu được $-7 = A(x-2) + B(2x+3)$.

$$\text{Cho } x = 2 \Rightarrow B = -1; \text{ Cho } x = \frac{-3}{2} \Rightarrow A = 2.$$

$$\text{Vậy ta có } Q(x) = \frac{-7}{(2x+3)(x-2)} = \frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x-2}.$$

□

 **Bài 5.** Nếu mua lẻ thì giá một chiếc bút bi là x đồng. Nhưng nếu mua từ 10 bút trở lên thì giá mỗi chiếc rẻ hơn 100 đồng. Cô Dung dùng 180000 đồng để mua bút cho văn phòng. Hãy biểu diễn qua x :

$$1. \text{ Tổng số bút mua được khi mua lẻ. } \quad \text{ĐS: } \frac{180000}{x}.$$

$$2. \text{ Tổng số bút mua được khi mua cùng một lúc, biết rằng giá tiền một bút không quá 1200 đồng. } \quad \text{ĐS: } \frac{180000}{x-100}.$$

$$3. \text{ Số bút được lợi khi mua cùng một lúc so với khi mua lẻ. } \quad \text{ĐS: } \frac{18000000}{x(x-100)}.$$

 Lời giải.

$$1. \text{ Tổng số bút mua được khi mua lẻ là } \frac{180000}{x}.$$

$$2. \text{ Tổng số bút mua được khi mua cùng một lúc là } \frac{180000}{x-100} \text{ với } x \geq 1200 \text{ đồng.}$$

$$3. \text{ Số bút được lợi khi mua cùng một lúc so với khi mua lẻ là } \frac{180000}{x} - \frac{180000}{x-100} = \frac{18000000}{x(x-100)}.$$

□

§7 Phép nhân các phân thức đại số

1 Tóm tắt lý thuyết

Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 66. Áp dụng phép nhân hai phân thức để thực hiện phép tính

Vận dụng quy tắc đã nêu trong phần *Tóm tắt lý thuyết* để thực hiện yêu cầu của bài toán.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{6x}{15y^3} \cdot \left(-\frac{5y^2}{3x^2}\right)$	ĐS: $-\frac{2}{3xy}$	b) $\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{(x+1)^2}$	ĐS: $\frac{x+2}{x+1}$
c) $\frac{3-3x}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{x-1}$	ĐS: $\frac{-3}{x+3}$	d) $\frac{6x+4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-2x}{3x+2}$	ĐS: $\frac{2x}{x+2}$

Lời giải.

- $\frac{6x}{15y^3} \cdot \left(-\frac{5y^2}{3x^2}\right) = -\frac{6x \cdot 5y^2}{15y^3 \cdot 3x^2} = -\frac{30xy^2}{45x^2y^3} = -\frac{2}{3xy}$.
- $\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(x^2-4)}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$.
- $\frac{3-3x}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{x-1} = \frac{(3-3x)(x-3)}{(x^2-9)(x-1)} = \frac{3(1-x)(x-3)}{(x+3)(x-3)(x-1)} = \frac{-3}{x+3}$.
- $\frac{6x+4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-2x}{3x+2} = \frac{(6x+4)(x^2-2x)}{(x^2-4)(3x+2)} = \frac{2(3x+2)x(x-2)}{(x-2)(x+2)(3x+2)} = \frac{2x}{x+2}$.

□

 **Ví dụ 2.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } \frac{4x^2}{9y^4} \cdot \left(-\frac{3y^3}{2x}\right). \quad \text{ĐS: } -\frac{2x}{3y} \quad \text{b) } \frac{x^2}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^3}. \quad \text{ĐS: } \frac{x+2}{x}$$

$$\text{c) } \frac{2x-2}{x^2-4} \cdot \frac{2-x}{x-1}. \quad \text{ĐS: } \frac{-2}{x+2} \quad \text{d) } \frac{6x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-3x+2}{3x-2}. \quad \text{ĐS: } \frac{2(x-1)}{x+2}$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{4x^2}{9y^4} \cdot \left(-\frac{3y^3}{2x}\right) = -\frac{4x^2 \cdot 3y^3}{9y^4 \cdot 2x} = -\frac{12x^2y^3}{18xy^4} = -\frac{2x}{3y}.$$

$$2. \frac{x^2}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^3} = \frac{x^2(x^2-4)}{(x-2)x^3} = \frac{x^2(x-2)(x+2)}{x^3(x-2)} = \frac{x+2}{x}.$$

$$3. \frac{2x-2}{x^2-4} \cdot \frac{2-x}{x-1} = \frac{(2x-2)(2-x)}{(x^2-4)(x-1)} = \frac{2(x-1)(2-x)}{(x+2)(x-2)(x-1)} = \frac{-2}{x+2}.$$

$$4. \frac{6x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-3x+2}{3x-2} = \frac{(6x-4)(x^2-3x+2)}{(x^2-4)(3x-2)} = \frac{2(3x-2)(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(3x-2)} = \frac{2(x-1)}{x+2}.$$

□

Dạng 67. Rút gọn biểu thức kết hợp nhiều quy tắc đã học

☒ Phân tích đa thức thành nhân tử.

☒ Ưu tiên tối giản phân thức (nếu có thể) ngay từ đầu.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}. \quad \text{ĐS: } \frac{2x+1}{x+1} \quad \text{b) } \frac{2x-4}{x^2-1} \cdot \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-2} \cdot \frac{2(x-1)^2}{x+1}. \quad \text{ĐS:}$$

$$\text{c) } \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{2x-5}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{6-x}{x-1}. \quad \text{ĐS:} \quad \text{d) } \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} \cdot \frac{x^2-x-6}{x^2-2x+1}. \quad \text{ĐS: } \frac{x+2}{x-1}$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6} = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{(2x+1)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{2x+1}{x-2} = \frac{2x+1}{x+1}.$$

$$2. \frac{2x-4}{x^2-1} \cdot \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-2} = \frac{(2x-4)(x^3-3x^2+3x-1)}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{2(x-2)(x-1)^3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{2(x-1)^2}{x+1}.$$

$$3. \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{2x-5}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{6-x}{x-1} = \frac{x^2}{x+1} \left(\frac{2x-5}{x-1} + \frac{6-x}{x-1} \right) = \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{2x-5+6-x}{x-1} \\ = \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}.$$

$$4. \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} \cdot \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} \cdot \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x-3} \cdot \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x-3)(x-1)^2} = \frac{x+2}{x-1}.$$

□

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{x-3}{x-1} \cdot \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-12}$. **ĐS:** $\frac{x-2}{x+4}$ b) $\frac{2-x}{x^2-1} \cdot \frac{x^3+1}{x-2}$. **ĐS:** $-\frac{x^2-x+1}{x-1}$

c) $\frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{5-x}{x+1} + \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{2x-6}{x+1}$. **ĐS:** $\frac{x^2}{x+1}$ d) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} \cdot \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$. **ĐS:** $\frac{x-3}{x-1}$

Lời giải.

1. $\frac{x-3}{x-1} \cdot \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-12} = \frac{x-3}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(x+4)(x-3)} = \frac{(x-3)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+4)(x-3)} = \frac{x-2}{x+4}.$

2. $\frac{2-x}{x^2-1} \cdot \frac{x^3+1}{x-2} = \frac{(2-x)(x^3+1)}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{(2-x)(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} = -\frac{x^2-x+1}{x-1}.$

3. $\frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{5-x}{x+1} + \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{2x-6}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \left(\frac{5-x}{x+1} + \frac{2x-6}{x+1} \right) = \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{5-x+2x-6}{x+1}$

$$= \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}.$$

4. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} \cdot \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} \cdot \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$

$$= \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{x-3}{x-1}.$$

□

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức:

a) $\frac{x^4+2x^2+1}{x^2-2} \cdot \frac{x-1}{2x+2} \cdot \frac{2x^2-4}{(x^2+1)^2}$. **ĐS:** $\frac{x-1}{x+1}$ b) $\frac{1-x}{x^3} \cdot \left(x^2+x+1 - \frac{x^3}{x-1} \right)$. **ĐS:** $\frac{1}{x^3}$

Lời giải.

1. $\frac{x^4+2x^2+1}{x^2-2} \cdot \frac{x-1}{2x+2} \cdot \frac{2x^2-4}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2}{x^2-2} \cdot \frac{x-1}{2(x+1)} \cdot \frac{2(x^2-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}.$

2. $\frac{1-x}{x^3} \cdot \left(x^2+x+1 - \frac{x^3}{x-1} \right) = \frac{1-x}{x^3} \cdot \frac{(x-1)(x^2+x+1) - x^3}{x-1} = \frac{1-x}{x^3} \cdot \frac{x^3-1-x^3}{x-1}$

$$= \frac{1-x}{x^3} \cdot \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{x^3}.$$

□

Ví dụ 4. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2} \cdot \frac{x + 1}{2x - 2} \cdot \frac{2x^2 - 4}{(x^2 - 1)^2} \cdot \frac{x + 1}{x - 1} \quad \text{ĐS: } \frac{x + 1}{x - 1} \quad \text{b) } \frac{x + 1}{x^3} \cdot \left(x^2 - x + 1 - \frac{x^3}{x + 1} \right) \cdot \text{ĐS: } \frac{1}{x^3}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2} \cdot \frac{x + 1}{2x - 2} \cdot \frac{2x^2 - 4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2 - 2} \cdot \frac{x + 1}{2(x - 1)} \cdot \frac{2(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x + 1}{x - 1}. \\ 2. \quad & \frac{x + 1}{x^3} \cdot \left(x^2 - x + 1 - \frac{x^3}{x + 1} \right) = \frac{x + 1}{x^3} \cdot \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1) - x^3}{x + 1} = \frac{x + 1}{x^3} \cdot \frac{x^3 + 1 - x^3}{x + 1} \\ & = \frac{x + 1}{x^3} \cdot \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{x^3}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức $P = xy$, biết $(2a^3 + 2b^3)x + b = a$ và $(2a - 2b)y = 3(a + b)^2$ ($a \neq b, a \neq -b$).
ĐS: $P = \frac{3(a + b)}{4(a^2 - ab + b^2)}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Do } (2a^3 + 2b^3)x + b &= a \text{ nên } x = \frac{a - b}{2a^3 + 2b^3} = \frac{a - b}{2(a + b)(a^2 - ab + b^2)}. \\ \text{Do } (2a - 2b)y &= 3(a + b)^2 \text{ nên } y = \frac{3(a + b)^2}{2a - 2b} = \frac{3(a + b)^2}{2(a - b)}. \\ \text{Khi đó } P = xy &= \frac{a - b}{2(a + b)(a^2 - ab + b^2)} \cdot \frac{3(a + b)^2}{2(a - b)} = \frac{3(a + b)}{4(a^2 - ab + b^2)}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 6. Rút gọn biểu thức $P = xy$, biết $(3a^3 - 3b^3)x - 4b = 4a$ và $(4a + 4b)y = 3(a - b)^2$ ($a + b \neq 0, a - b \neq 0$).
ĐS: $P = \frac{a - b}{a^2 + ab + b^2}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Do } (3a^3 - 3b^3)x - 4b &= 4a \text{ nên } x = \frac{4a + 4b}{3a^3 - 3b^3} = \frac{4(a + b)}{3(a - b)(a^2 + ab + b^2)}. \\ \text{Do } (4a + 4b)y &= 3(a - b)^2 \text{ nên } y = \frac{3(a - b)^2}{4a + 4b} = \frac{3(a - b)^2}{4(a + b)}. \\ \text{Khi đó } P = xy &= \frac{4(a + b)}{3(a - b)(a^2 + ab + b^2)} \cdot \frac{3(a - b)^2}{4(a + b)} = \frac{a - b}{a^2 + ab + b^2}. \end{aligned}$$

□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{1 - x} \quad \text{ĐS: } -\frac{x + 1}{x + 2} \quad \text{b) } \frac{x + 2}{x - 1} \cdot \frac{1 - x^3}{x^3 + 8} \quad \text{ĐS: } -\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 4}$$

Giáo viên:

c) $\frac{x+4}{x-3} \cdot \frac{x^2+x-12}{x^2+5x+4}$. ĐS: $\frac{x+4}{x+1}$ d) $\frac{x^2}{x^2-4x} \cdot (8-2x)$. ĐS: $-2x$

 Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. & \frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x^2-1}{(x+2)(1-x)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(1-x)} = -\frac{x+1}{x+2}. \\ 2. & \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{1-x^3}{x^3+8} = \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = -\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+4}. \\ 3. & \frac{x+4}{x-3} \cdot \frac{x^2+x-12}{x^2+5x+4} = \frac{x+4}{x-3} \cdot \frac{(x-3)(x+4)}{(x+1)(x+4)} = \frac{x+4}{x+1}. \\ 4. & \frac{x^2}{x^2-4x} \cdot (8-2x) = \frac{x^2}{x(x-4)} \cdot 2(4-x) = -2x. \end{aligned}$$

□

 Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{aligned} 1. & \frac{x^3-1}{x^2-4} \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1} \right). & \text{ĐS: } \frac{1}{x-2} \\ 2. & \frac{x^3+8}{x-1} \cdot \frac{10-2x}{x+2} + \frac{x^3+8}{x-1} \cdot \frac{x-9}{x+2}. & \text{ĐS: } -(x^2-2x+4) \\ 3. & \frac{x^2-2x+1}{x^2-x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+x-2}. & \text{ĐS: } \frac{x-1}{x+1} \\ 4. & \frac{x-1}{2-x} \cdot \left(\frac{x^3}{1-x} + x^2+x+1 \right). & \text{ĐS: } \frac{1}{x-2} \end{aligned}$$

 Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. & \frac{x^3-1}{x^2-4} \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1} \right) = \frac{x^3-1}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+x+1-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ & = \frac{x^3-1}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x^2+x+1-(x^2-1)}{x^3-1} = \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2}. \\ 2. & \frac{x^3+8}{x-1} \cdot \frac{10-2x}{x+2} + \frac{x^3+8}{x-1} \cdot \frac{x-9}{x+2} = \frac{x^3+8}{x-1} \left(\frac{10-2x}{x+2} + \frac{x-9}{x+2} \right) \\ & = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x+2} = -(x^2-2x+4). \\ 3. & \frac{x^2-2x+1}{x^2-x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-2)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x-1}{x+1}. \\ 4. & \frac{x-1}{2-x} \cdot \left(\frac{x^3}{1-x} + x^2+x+1 \right) = \frac{x-1}{2-x} \cdot \frac{x^3+(1-x)(x^2+x+1)}{1-x} = \frac{1-x}{x-2} \cdot \frac{x^3+1-x^3}{1-x} = \\ & \frac{1}{x-2}. \end{aligned}$$

□

 **Bài 3.** Cho $(6a+15b)x = 3a+3$ và $(a^3+1)y = 4a^2-25b^2$. Rút gọn biểu thức $A = \frac{x^2-x}{2} \cdot \frac{2y}{x-1}$ theo a và b .

ĐS: $\frac{2a-5b}{a^2-a+1}$

 **Lời giải.**

Do $(6a+15b)x = 3a+3$ nên $x = \frac{3a+3}{6a+15b} = \frac{a+1}{2a+5b}$.

Do $(a^3+1)y = 4a^2-25b^2$ nên $y = \frac{4a^2-25b^2}{a^3+1} = \frac{(2a+5b)(2a-5b)}{(a+1)(a^2-a+1)}$.

Mặt khác $A = \frac{x^2-x}{2} \cdot \frac{2y}{x-1} = \frac{x(x-1)}{2} \cdot \frac{2y}{x-1} = xy$ nên

$$A = \frac{a+1}{2a+5b} \cdot \frac{(2a+5b)(2a-5b)}{(a+1)(a^2-a+1)} = \frac{2a-5b}{a^2-a+1}$$

□

§8 Phép chia các phân thức đại số

1 Tóm tắt lý thuyết

- ☑ Phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{A}{B}$ là $\frac{B}{A}$. Tích của hai phân thức nghịch đảo bằng 1.
- ☑ Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D} \neq 0$, ta nhân phân thức $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{C}{D}$, tức là: $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$ với $\frac{C}{D} \neq 0$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 68. Sử dụng quy tắc chia để thực hiện phép tính

- ☑ Vận dụng quy tắc đã nêu trong phần *Tóm tắt lý thuyết* để thực hiện yêu cầu bài toán.
- ☑ Bài toán có nhiều phép chia phân thức $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} : \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \cdot \frac{F}{E}$.
- ☑ Ưu tiên thực hiện các phép tính trong ngoặc đơn trước (nếu có).

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1-x^2}{x^2+2x} : \frac{2-2x}{3x} & \quad \text{ĐS: } \frac{3}{2} \cdot \frac{x+1}{x+2} & \text{b) } \frac{x^3+1}{x-1} : (x^2-x+1) & \quad \text{ĐS: } \frac{x+1}{x-1} \\ \text{c) } \frac{x^2-x-2}{x^2+3x+2} : \frac{x^2-4x+4}{x^2+2x} & \quad \text{ĐS: } \frac{x}{x-2} & \text{d) } \frac{x-2y}{x^2-xy+y^2} : \frac{x^2-4xy+4y^2}{x^3+y^3} & \quad \text{ĐS: } \frac{x+y}{x-2y} \end{aligned}$$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{1-x^2}{x^2+2x} : \frac{2-2x}{3x} &= \frac{(1-x)(1+x)}{x(x+2)} \cdot \frac{3x}{2(1-x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x+1}{x+2} \\ 2. \quad \frac{x^3+1}{x-1} : (x^2-x+1) &= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{x+1}{x-1} \\ 3. \quad \frac{x^2-x-2}{x^2+3x+2} : \frac{x^2-4x+4}{x^2+2x} &= \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x+2)} \cdot \frac{x(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{x}{x-2} \end{aligned}$$

$$4. \frac{x-2y}{x^2-xy+y^2} : \frac{x^2-4xy+4y^2}{x^3+y^3} = \frac{x-2y}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-2y)^2} = \frac{x+y}{x-2y}.$$

□

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1-x^2}{x^2-2x} : \frac{x+1}{x} & \quad \text{ĐS: } \frac{1-x}{x-2} & \text{b) } \frac{x^3-1}{x+2} : (x^2+x+1) & \quad \text{ĐS: } \frac{x-1}{x+2} \\ \text{c) } \frac{x^2-1}{x^2+x-2} : \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2} & \quad \text{ĐS: } & \text{d) } \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2} : \frac{x^2+4xy+4y^2}{x^3-y^3} & \quad \text{ĐS: } \\ & & \frac{x-y}{x+2y} & \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. \frac{1-x^2}{x^2-2x} : \frac{x+1}{x} &= \frac{(1-x)(1+x)}{x(x-2)} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{1-x}{x-2}. \\ 2. \frac{x^3-1}{x+2} : (x^2+x+1) &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+2} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{x-1}{x+2}. \\ 3. \frac{x^2-1}{x^2+x-2} : \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2} &= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} \cdot \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)^2} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2. \\ 4. \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2} : \frac{x^2+4xy+4y^2}{x^3-y^3} &= \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^2} = \frac{x-y}{x+2y}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức:

$$\begin{aligned} 1. A &= \frac{x^2}{(y+1)^2} : \frac{2x}{y+1} : \frac{2x}{y+1} & \text{ĐS: } \frac{1}{4} \\ 2. B &= \frac{x^2}{(y+1)^2} : \left(\frac{2x}{y+1} : \frac{2x}{y+1} \right) & \text{ĐS: } \frac{x^2}{(y+1)^2} \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. A &= \frac{x^2}{(y+1)^2} : \frac{2x}{y+1} : \frac{2x}{y+1} = \frac{x^2}{(y+1)^2} \cdot \frac{y+1}{2x} \cdot \frac{y+1}{2x} = \frac{1}{4}. \\ 2. B &= \frac{x^2}{(y+1)^2} : \left(\frac{2x}{y+1} : \frac{2x}{y+1} \right) = \frac{x^2}{(y+1)^2} : \left(\frac{2x}{y+1} \cdot \frac{y+1}{2x} \right) = \frac{x^2}{(y+1)^2}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } A = \frac{x^2}{4y^2} : \frac{3x}{2y} : \frac{3x}{2y} \quad \text{ĐS: } \frac{1}{9} \quad \text{b) } B = \frac{x^2}{4y^2} : \left(\frac{3x}{2y} : \frac{3x}{2y} \right) \quad \text{ĐS: } \frac{x^2}{4y^2}$$

Lời giải.

$$1. A = \frac{x^2}{4y^2} : \frac{3x}{2y} : \frac{3x}{2y} = \frac{x^2}{4y^2} \cdot \frac{2y}{3x} \cdot \frac{2y}{3x} = \frac{1}{9}.$$

$$2. B = \frac{x^2}{4y^2} : \left(\frac{3x}{2y} : \frac{3x}{2y} \right) = \frac{x^2}{4y^2} : \left(\frac{3x}{2y} \cdot \frac{2y}{3x} \right) = \frac{x^2}{4y^2}.$$

□

Dạng 69. Tìm phân thức thỏa mãn đẳng thức cho trước

Đưa phân thức cần tìm về riêng một vế. Bài toán đưa về Dạng 1.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm biểu thức A , biết: $\frac{2x+3y}{x^3-y^3} \cdot A = \frac{2x^2+3xy}{x^2+xy+y^2}$. **ĐS:** $x(x-y)$

 **Lời giải.**

$$A = \frac{2x^2+3xy}{x^2+xy+y^2} : \frac{2x+3y}{x^3-y^3} = \frac{x(2x+3y)}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{2x+3y} = x(x-y)$$

□

 **Ví dụ 2.** Cho đẳng thức $\frac{x-2y}{x^3+y^3} \cdot B = \frac{x^2-2xy}{x^2-xy+y^2}$. Tìm biểu thức B . **ĐS:** $x(x+y)$

 **Lời giải.**

$$B = \frac{x^2-2xy}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{x^3+y^3}{x-2y} = \frac{x(x-2y)}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x-2y} = x(x+y).$$

□

3

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

$$1. (x^2-9) : \frac{2x+6}{x-3}. \quad \text{ĐS: } \frac{(x-3)^2}{2}$$

$$2. \frac{xy}{2x-3} : \frac{x^2y^2}{6-4x}. \quad \text{ĐS: } \frac{-2}{xy}$$

$$3. \frac{x^2+2x}{x^2-2x+1} : \frac{x^2-4}{x^2-x}. \quad \text{ĐS: } \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$$

$$4. \frac{2x+3y}{2-x} : \frac{4x^2+12xy+9y^2}{x^3-8}. \quad \text{ĐS: } -\frac{x^2+2x+4}{2x+3y}$$

 **Lời giải.**

$$1. (x^2-9) : \frac{2x+6}{x-3} = (x-3)(x+3) \cdot \frac{x-3}{2(x+3)} = \frac{(x-3)^2}{2}.$$

$$2. \frac{xy}{2x-3} : \frac{x^2y^2}{6-4x} = \frac{xy}{2x-3} \cdot \frac{2(3-2x)}{x^2y^2} = \frac{-2}{xy}.$$

$$3. \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} : \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} = \frac{x(x+2)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}.$$

$$4. \frac{2x + 3y}{2 - x} : \frac{4x^2 + 12xy + 9y^2}{x^3 - 8} = \frac{2x + 3y}{2 - x} \cdot \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(2x + 3y)^2} = -\frac{x^2 + 2x + 4}{2x + 3y}.$$

□

 **Bài 2.** Rút gọn biểu thức:

$$a) \frac{x+4}{x+5} : \frac{x+5}{x+6} : \frac{x+6}{x+4}. \quad \text{ĐS: } \left(\frac{x+4}{x+5}\right)^2 \quad b) \frac{x-7}{x+8} : \left(\frac{x-7}{x-9} : \frac{x+8}{x-9}\right). \quad \text{ĐS: } 1$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{x+4}{x+5} : \frac{x+5}{x+6} : \frac{x+6}{x+4} = \frac{x+4}{x+5} \cdot \frac{x+6}{x+5} \cdot \frac{x+4}{x+6} = \left(\frac{x+4}{x+5}\right)^2.$$

$$2. \frac{x-7}{x+8} : \left(\frac{x-7}{x-9} : \frac{x+8}{x-9}\right) = \frac{x-7}{x+8} : \left(\frac{x-7}{x-9} \cdot \frac{x-9}{x+8}\right) = \frac{x-7}{x+8} : \frac{x-7}{x+8} = 1.$$

□

 **Bài 3.** Tìm phân thức thỏa mãn đẳng thức sau:

$$1. \frac{x^2 + 3x}{x-4} : P = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x}. \quad \text{ĐS: } P = \frac{x^2}{x-3}$$

$$2. Q : \frac{x-2}{2x+3} = \frac{4x^2 + 12x + 9}{x^2 - 4}. \quad \text{ĐS: } Q = \frac{2x+3}{x+2}$$

 **Lời giải.**

$$1. P = \frac{x^2 + 3x}{x-4} : \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x} = \frac{x(x+3)}{x-4} \cdot \frac{x(x-4)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2}{x-3}.$$

$$2. Q = \frac{(2x+3)^2}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{2x+3} = \frac{2x+3}{x+2}.$$

□

§9 Biến đổi biểu thức hữu tỉ. Giá trị của phân thức

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Biến đổi các biểu thức hữu tỉ

- ☑ Biểu thức hữu tỉ là một phân thức hoặc biểu thị một dãy các phép toán: cộng, trừ, nhân, chia trên những phân thức.
- ☑ Biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức nhờ các quy tắc của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức đã học.

1.2 Giá trị của phân thức

- ☑ Giá trị của một phân thức chỉ được xác định với điều kiện giá trị của mẫu thức khác 0.
- ☑ *Chú ý:* Biểu thức hữu tỉ có hai biến x và y thì giá trị của biểu thức đó chỉ được xác định với các cặp $(x; y)$ làm cho giá trị của mẫu thức khác 0.

2 Bài tập và các dạng toán

► Dạng 70. Biến đổi biểu thức hữu tỉ thành phân thức

Thực hiện theo hai bước:

- ☑ *Bước 1:* Sử dụng kết hợp các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia phân thức đại số đã học để biến đổi.
- ☑ *Bước 2:* Biến đổi cho tới khi được một phân thức có dạng $\frac{A}{B}$ với A, B là các đa thức và B khác đa thức 0.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

📖 **Ví dụ 1.** Đưa các biểu thức sau thành phân thức:

$$\text{a) } A = \frac{\frac{x}{4} - 2 + \frac{15}{4x}}{\frac{x}{2} + \frac{6}{x} - \frac{7}{2}} \quad \text{ĐS: } \frac{x-5}{2(x-4)} \quad \text{b) } B = \frac{1 - \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{2x-3}{x^2-2x+1}} \quad \text{ĐS: } \frac{x-1}{x-2}$$

✍ **Lời giải.**

$$1. A = \left(\frac{x}{4} - 2 + \frac{15}{4x}\right) : \left(\frac{x}{2} + \frac{6}{x} - \frac{7}{2}\right) = \frac{x^2 - 8x + 15}{4x} : \frac{x^2 - 7x + 12}{2x}$$

$$= \frac{(x-3)(x-5)}{4x} \cdot \frac{2x}{(x-3)(x-4)} = \frac{x-5}{2(x-4)}.$$

$$2. B = \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) : \left(1 - \frac{2x-3}{x^2-2x+1}\right) = \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{(x-2)^2} = \frac{x-1}{x-2}.$$

□

 **Ví dụ 2.** Biến đổi các biểu thức sau thành phân thức:

$$a) A = \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{x}{2}}. \quad \text{ĐS: } A = \frac{x-2}{x+2} \quad b) B = \frac{1 + \frac{1}{x+1}}{1 + \frac{2x+3}{x^2+2x+1}}. \quad \text{ĐS: } B = \frac{x+1}{x+2}$$

 **Lời giải.**

$$1. A = \left(1 - \frac{2}{x}\right) : \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{x-2}{x} : \frac{x+2}{2} = \frac{x-2}{x} \cdot \frac{2}{x+2} = \frac{x-2}{x+2}.$$

$$2. B = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) : \left(1 + \frac{2x+3}{x^2+2x+1}\right) = \frac{x+2}{x+1} : \frac{x^2+4x+4}{x^2+2x+1} = \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2} = \frac{x+1}{x+2}.$$

□

Dạng 71. Tìm điều kiện xác định của phân thức

Ta xác định các giá trị của biến để mẫu thức khác 0.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x để giá trị của mỗi phân thức sau được xác định:

$$a) \frac{4x}{3x-8}. \quad \text{ĐS: } x \neq \frac{8}{3} \quad b) \frac{8}{x^2-1}. \quad \text{ĐS: } x \neq \pm 1$$

$$c) \frac{x+2}{x^3-8}. \quad \text{ĐS: } x \neq 2 \quad d) \frac{x^2}{x^3-3x+2}. \quad \text{ĐS: } \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2. \end{cases}$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{4x}{3x-8} \text{ xác định} \Leftrightarrow 3x-8 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{8}{3}.$$

$$2. \frac{8}{x^2-1} \text{ xác định} \Leftrightarrow x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$$

$$3. \frac{x+2}{x^3-8} \text{ xác định} \Leftrightarrow x^3-8 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 \neq 8 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

$$4. \frac{x^2}{x^3-3x+2} \text{ xác định} \Leftrightarrow x^3-3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2. \end{cases}$$

□

Ví dụ 2. Tìm điều kiện xác định của mỗi phân thức sau:

a) $\frac{5x}{2x+6}$. **ĐS:** $x \neq -3$ b) $\frac{3}{x^2+1}$. **ĐS:** $\forall x \in \mathbb{R}$
 c) $\frac{3x-6}{x^3+1}$. **ĐS:** $x \neq -1$ d) $\frac{2x+1}{x^2-x-2}$. **ĐS:** $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2. \end{cases}$

Lời giải.

- DKXD: $2x+6 \neq 0 \Leftrightarrow x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$.
- DKXD: $x^2+1 \neq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ (Do $x^2+1 > 0 \forall x$).
- DKXD: $x^3+1 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -1$.
- DKXD: $x^2-x-2 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2. \end{cases}$

□

Dạng 72. Thực hiện phép tính với các biểu thức hữu tỉ

Sử dụng kết hợp các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia phân thức đại số đã học để biến đổi.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau:

1. $A = \left(\frac{3}{x+3} - \frac{9}{x^2+6x+9} \right) : \left(\frac{3}{x^2-9} + \frac{1}{3-x} \right)$. **ĐS:** $\frac{-3(x-3)}{x+3}$
 2. $B = \left(\frac{4a+b}{a^2-4ab} + \frac{4a-b}{a^2+4ab} \right) \cdot \frac{a^2-16b^2}{a^2+b^2}$. **ĐS:** $B = \frac{8}{a}$

Lời giải.

1. $A = \left[\frac{3}{x+3} - \frac{9}{(x+3)^2} \right] : \left[\frac{3}{(x+3)(x-3)} - \frac{1}{x-3} \right] = \frac{3(x+3)-9}{(x+3)^2} : \frac{3-(x+3)}{(x+3)(x-3)}$
 $= \frac{3x}{(x+3)^2} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{-x} = \frac{-3(x-3)}{x+3}$
 2. $B = \frac{(4a+b)(a^2+4ab) + (4a-b)(a^2-4ab)}{(a^2-4ab)(a^2+4ab)} \cdot \frac{a^2-16b^2}{a^2+b^2} = \frac{8a^3+8ab^2}{a^2(a-4b)(a+4b)} \cdot \frac{(a-4b)(a+4b)}{a^2+b^2}$
 $= \frac{8a(a^2+b^2)}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{8}{a}$

□

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = \left(\frac{x}{x+2} + 1 \right) : \left(1 - \frac{3x^2}{4-x^2} \right)$. **ĐS:** $A = \frac{x-2}{2(x-1)}$
 2. $B = \left(\frac{2a^2}{b^2} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2a-b} - \frac{1}{2a+b} \right)$. **ĐS:** $B = \frac{-1}{b}$

 Lời giải.

$$1. A = \frac{2x+2}{x+2} : \frac{4-4x^2}{4-x^2} = \frac{2(x+1)}{x+2} \cdot \frac{(x+2)(2-x)}{4(x+1)(1-x)} = \frac{x-2}{2(x-1)}.$$

$$2. B = \frac{4a^2-b^2}{2b^2} \cdot \frac{2a+b-(2a-b)}{4a^2-b^2} = \frac{-2b}{2b^2} = \frac{-1}{b}$$

□

 **Ví dụ 3.** Cho biểu thức: $P = \frac{x^2+2x}{2x+12} + \frac{54-3x}{x^2+6x} - \frac{6}{x} + 1$.

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định. **ĐS:** $x \neq 0; -6$

b) Rút gọn phân thức. **ĐS:** $P = \frac{x^2-2x+6}{2x}$

c) Tìm giá trị của x để:

$$1) P = \frac{3}{2}. \quad \text{ĐS: } x \in \{2; 3\} \quad 2) P = -\frac{9}{2}. \quad \text{ĐS: } x = -1 \quad 3) P = 1. \quad \text{ĐS: } x \in \emptyset$$

 Lời giải.

$$a) P \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+12 \neq 0 \\ x^2+6x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0; -6. \\ x \neq 0 \end{cases}$$

b) Với $x \neq 0; -6$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2+2x}{2(x+6)} + \frac{54-3x}{x(x+6)} - \frac{6}{x} + 1 \\ &= \frac{x(x^2+2x) + 2(54-3x) - 12(x+6) + 2x(x+6)}{2x(x+6)} \\ &= \frac{x^3+4x^2-6x+36}{2x(x+6)} \\ &= \frac{(x+6)(x^2-2x+6)}{2x(x+6)} \\ &= \frac{x^2-2x+6}{2x}. \end{aligned}$$

c)

$$1) P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+6}{2x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện thấy $x=2, x=3$ thỏa mãn ĐKXD.

$$2) P = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+6}{2x} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-6. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện thấy $x=-1$ thỏa mãn ĐKXD và $x=-6$ không thỏa mãn ĐKXD.

$$3) P = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+6}{2x} = 1 \Leftrightarrow x^2-4x+6=0.$$

Do $x^2-4x+6 = (x-2)^2+2 > 0$ nên không tồn tại x thỏa mãn.

□

Ví dụ 4. Cho phân thức $P = \frac{x^2 + 10x + 25}{x + 5}$.

- a) Với điều kiện nào của x thì phân thức được xác định? **ĐS:** $x \neq -5$
- b) Rút gọn phân thức. **ĐS:** $P = x + 5$
- c) Tìm giá trị của x để:
- 1) $P = 1$. **ĐS:** $x = -4$ 2) $P = 0$. **ĐS:** $x \in \emptyset$

Lời giải.

- a) P xác định $\Leftrightarrow x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$.
- b) $P = \frac{(x + 5)^2}{x + 5} = x + 5$.
- c) 1) $P = 1 \Leftrightarrow x + 5 = 1 \Leftrightarrow x = -4$ (thỏa mãn ĐKXD).
 Vậy $x = -4$.
- 2) $P = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ (không thỏa mãn ĐKXD).
 Vậy không tồn tại x thỏa mãn.

□

Dạng 73. Tìm x để giá trị của một phân thức đã cho thỏa mãn điều kiện cho trước

Ta sử dụng các kiến thức sau:

- ☑ Hằng đẳng thức đáng nhớ và $a^2 \geq 0$ với mọi giá trị của a .
- ☑ $\frac{A}{B} > 0 \Leftrightarrow A$ và B cùng dấu; $\frac{A}{B} < 0 \Leftrightarrow A$ và B trái dấu.
- ☑ Với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$ ta có: $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b \in U(a)$.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho phân thức $B = \frac{x^2 - x + 2}{x - 3}$ với $x \neq 3$.

1. Tìm x để $B < 0$. **ĐS:** $x < 3$
2. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $B \in \mathbb{Z}$. **ĐS:** $x \in \{-5; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 11\}$

Lời giải.

1. Do $x^2 - x + 2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \forall x$ nên $B < 0 \Leftrightarrow x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$.
2. Ta có $B = x + 2 + \frac{8}{x - 3}$ nên $B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{8}{x - 3} \in \mathbb{Z}$ hay $x - 3 \in U(8)$.
 Khi đó: $x - 3 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$ hay $x \in \{-5; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 11\}$.

□

Ví dụ 2. Cho phân thức $A = \frac{x+2}{x-1}$ với $x \neq 1$.

a) Tìm x để $A > 1$.

ĐS: $x > 1$ b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$.

ĐS:

$x \in \{0; 2; 4; 6\}$

Lời giải.

$$1. A > 1 \Leftrightarrow A - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

$$2. \text{Ta có } A = 1 + \frac{3}{x-1} \text{ nên } A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z} \text{ hay } x-3 \in \mathcal{U}(3).$$

Khi đó $x-3 \in \{\pm 1; \pm 3\}$ hay $x \in \{0; 2; 4; 6\}$

□

Ví dụ 3. 1. Tìm x để phân thức $M = \frac{3}{x^2-4x+7}$ đạt giá trị lớn nhất. **ĐS:** $x = 2$

2. Tìm x để phân thức $N = \frac{-3}{x^2+4x+7}$ đạt giá trị nhỏ nhất. **ĐS:** $x = -2$

Lời giải.

$$1. \text{Do } x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3 \geq 3 \forall x \text{ nên } \frac{3}{x^2-4x+7} \leq 1 \text{ hay } M \leq 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi và chỉ khi $x = 2$.

$$2. \text{Do } x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3 \geq 3 \forall x \text{ nên } \frac{3}{x^2+4x+7} \leq 1 \text{ hay } N \geq -1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của N là -1 khi và chỉ khi $x = -2$.

□

Ví dụ 4. 1. Tìm x để phân thức $M = \frac{4}{x^2-2x+5}$ đạt giá trị lớn nhất. **ĐS:** $x = 1$

2. Tìm x để phân thức $M = \frac{-2}{x^2+2x+7}$ đạt giá trị nhỏ nhất. **ĐS:** $x = -1$

Lời giải.

$$1. \text{Do } x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4 \forall x \text{ nên } \frac{4}{x^2-2x+5} \leq 1 \text{ hay } M \leq 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi và chỉ khi $x = 1$.

$$2. \text{Do } x^2 + 2x + 7 = (x+1)^2 + 6 \geq 6 \forall x \text{ nên } \frac{2}{x^2+2x+7} \leq \frac{1}{3} \text{ hay } N \geq -\frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của N là $-\frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x = -1$.

□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Đưa các biểu thức sau thành phân thức:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\frac{2a}{a-3} + 1}{\frac{a^2-9}{3}}. & \text{ĐS: } A &= (a-1)(a-3) & \text{b) } B &= \frac{1 - \frac{6}{a+3}}{1 - \frac{a^2-10}{a^2-9}}. & \text{ĐS: } B &= (a-3)^2 \\ \text{c) } C &= \frac{4 - \frac{4b}{a} + \frac{b^2}{a^2}}{\frac{1}{a} - \frac{2}{b}}. & \text{ĐS: } C &= \frac{b(b-2a)}{a} \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. \quad A &= \frac{3a-3}{a-3} : \frac{3}{a^2-9} = \frac{3(a-1)}{a-3} \cdot \frac{(a-3)(a+3)}{3} = (a-1)(a-3). \\ 2. \quad B &= \frac{a+3-6}{a+3} : \frac{a^2-9-(a^2-10)}{a^2-9} = \frac{a-3}{a+3} \cdot \frac{(a-3)(a+3)}{a^2-9} = (a-3)^2. \\ 3. \quad C &= \frac{4a^2-4ab+b^2}{a^2} : \frac{b-2a}{ab} = \frac{(b-2a)^2}{a^2} \cdot \frac{ab}{b-2a} = \frac{b(b-2a)}{a}. \end{aligned}$$

□

Bài 2. Tìm giá trị của a để mỗi phân thức sau được xác định:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{a^2-1}{9a^2-16}. & \quad \text{ĐS: } a \neq \pm \frac{4}{3} & \text{b) } \frac{2a+1}{a^2-6a+9}. & \quad \text{ĐS: } a \neq 3 \\ \text{c) } \frac{a+1}{a^3-4a^2+3a}. & \quad \text{ĐS: } a \notin \{0; 1; 3\} \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{a^2-1}{9a^2-16} \text{ xác định} &\Leftrightarrow 9a^2-16 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 \neq \frac{16}{9} \Leftrightarrow a \neq \pm \frac{4}{3}. \\ 2. \quad \frac{2a+1}{a^2-6a+9} \text{ xác định} &\Leftrightarrow a^2-6a+9 \neq 0 \Leftrightarrow (a-3)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 3. \\ 3. \quad \frac{a+1}{a^3-4a^2+3a} \text{ xác định} &\Leftrightarrow a^3-4a^2+3a \neq 0 \Leftrightarrow a(a-1)(a-3) \neq 0 \Leftrightarrow a \notin \{0; 1; 3\}. \end{aligned}$$

□

Bài 3. Tìm điều kiện xác định của mỗi phân thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x-2y}{x^2+2y^2+3}. & \quad \text{ĐS: } x, y \in \mathbb{R} & \text{b) } \frac{x+y}{(x-1)^2+(y+1)^2}. & \quad \text{ĐS: } \begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq -1. \end{cases} \\ \text{c) } \frac{2x-y}{x^2+y^2+2y+2}. & \quad \text{ĐS: } x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lời giải.

- Do $x^2 + 2y^2 + 3 > 0 \forall x, y$ nên ĐKXD: $x, y \in \mathbb{R}$.
- $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ nên ĐKXD: $\begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq -1 \end{cases}$.
- Do $x^2 + y^2 + 2y + 2 = x^2 + (y+1)^2 + 1 > 0 \forall x, y$ nên ĐKXD: $x, y \in \mathbb{R}$.

□

Bài 4. Cho biểu thức $A = \frac{x^2 + 2x}{x+5} + \frac{50-5x}{2x^2+10x} + \frac{x-5}{x}$.

- Tìm điều kiện xác định của biểu thức A . **ĐS:** $x \neq 0; -5$.
- Rút gọn biểu thức A . **ĐS:** $A = \frac{2x^2 + 6x - 5}{2(x+5)}$
- Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -4$. **ĐS:** $A = \frac{3}{2}$
- Tìm giá trị của x để $A = -\frac{3}{2}$. **ĐS:** $x \in \{-2; -\frac{5}{2}\}$

Lời giải.

$$1. \text{ ĐKXD: } \begin{cases} x+5 \neq 0 \\ 2x^2+10x \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

2. Với $x \neq 0; -5$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x(x^2+2x) + 50-5x + 2(x-5)(x+5)}{2x(x+5)} \\ &= \frac{2x^3+4x^2+50-5x+2x^2-50}{2x(x+5)} = \frac{2x^3+6x^2-5x}{2x(x+5)} = \frac{2x^2+6x-5}{2(x+5)}. \end{aligned}$$

$$3. \text{ Với } x = -4 \text{ thỏa mãn điều kiện xác định thì } A = \frac{2(-4)^2+6(-4)-5}{2(-4+5)} = \frac{3}{2}.$$

$$4. A = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2+9x+10=0 \Leftrightarrow (x+2)(2x+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta thấy $x = -2, x = -\frac{5}{2}$ đều thỏa mãn ĐKXD.

□

Bài 5. Cho biểu thức $B = \left(1 - \frac{x^2}{x+2}\right) \cdot \frac{(x+2)^2}{x} - \frac{x^2+6x+4}{x}$.

- Tìm điều kiện xác định của biểu thức B . **ĐS:** $x \neq 0; -2$
- Rút gọn biểu thức B . **ĐS:** $B = -(x^2+2x+2)$
- Tìm giá trị của x để biểu thức B đạt giá trị lớn nhất. **ĐS:** $x = -1$

Lời giải.

1. ĐKXD: $x \neq 0; -2$.

2. Với $x \neq 0; -2$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{(x+2)^2}{x} - \frac{x^2}{x+2} \cdot \frac{(x+2)^2}{x} - \frac{x^2+6x+4}{x} \\ &= \frac{x^2+4x+4-(x^2+6x+4)}{x} - x(x+2) = \frac{-2x}{x} - x^2 - 2x = -(x^2+2x+2). \end{aligned}$$

3. Do $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \geq 1$ nên $B \leq -1$.

Vậy giá trị lớn nhất của B là -1 khi và chỉ khi $x = -1$.

□

 **Bài 6.** Cho biểu thức $C = \frac{3}{x^2-2x+2}$.

1. Tìm x để biểu thức C đạt giá trị lớn nhất.

ĐS: $x = 1$

2. Tìm x để biểu thức C có giá trị nguyên âm.

ĐS: $x \in \emptyset$

 **Lời giải.**

1. Do $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1 \geq 1 > 0$ nên $0 < \frac{3}{x^2-2x+2} \leq 3$ hay $0 < C \leq 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của C là 3 khi và chỉ khi $x = 1$.

2. Do $0 < C \leq 3$ nên C không thể nhận giá trị nguyên âm.

□

§10 Ôn tập chương II (phần 1)

1 Tóm tắt lý thuyết

Xem lại tóm tắt lý thuyết từ Bài 1 đến Bài 9.

2 Bài tập và các dạng toán

Bài 1. Tìm điều kiện của x để các phân thức sau xác định:

a) $\frac{x}{2x-4}$. **ĐS:** $x \neq 2$ b) $\frac{2x-3}{x^2+x+1}$. **ĐS:** $\forall x \in \mathbb{R}$

c) $\frac{2x-3}{8x^3-12x^2+6x-1}$. **ĐS:** $x \neq \frac{1}{2}$

 **Lời giải.**

1. ĐKXD: $2x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

2. $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$. ĐKXD: $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. $8x^3-12x^2+6x-1 = (2x-1)^3$. ĐKXD: $2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

□

Bài 2. Tìm điều kiện của x để các phân thức sau xác định:

a) $\frac{x}{2x-1}$. **ĐS:** $x \neq \frac{1}{2}$ b) $\frac{2x-3}{x^2+x-2}$. **ĐS:** $x \neq 1; x \neq -2$

c) $\frac{2x-3}{x^3+x}$. **ĐS:** $x \neq 0$

 **Lời giải.**

1. ĐKXD: $x \neq \frac{1}{2}$.

2. $x^2+x-2 = (x^2-x) + (2x-2) = (x-1)(x+2)$. ĐKXD: $x \neq 1; x \neq -2$.

3. $x^3+x = x(x^2+1)$.
Ta có $x^2+1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. ĐKXD: $x \neq 0$.

□

 **Bài 3.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\frac{3x^2 - 2x}{9x^2 - 12x + 4}$ tại $x = \frac{1}{2}$. **ĐS:** -1 b) $\frac{x^2 + 7x + 6}{x^3 + 6x^2 - x - 6}$ tại $x = 10001$. **ĐS:**

 **Lời giải.**

1. ĐKXD: $x \neq \frac{2}{3}$.

$$\frac{3x^2 - 2x}{9x^2 - 12x + 4} = \frac{x(3x - 2)}{(3x - 2)^2} = \frac{x}{3x - 2}.$$

Tại $x = \frac{1}{2}$ thỏa điều kiện xác định ta có: $\frac{\frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{1}{2} - 2} = -1$.

2. ĐKXD: $x \neq -6, x \neq \pm 1$

$$\frac{x^2 + 7x + 6}{x^3 + 6x^2 - x - 6} = \frac{(x + 1)(x + 6)}{(x + 6)(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{x - 1}.$$

Tại $x = 10001$ thỏa điều kiện xác định ta có: $\frac{1}{10001 - 1} = \frac{1}{10000}$.

□

 **Bài 4.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\frac{2x^2 - 6x}{x^2 - 6x + 9}$ tại $x = 4$. **ĐS:** 8 b) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$ tại $x = 10001$. **ĐS:**

 **Lời giải.**

1. ĐKXD: $x \neq 3$.

$$\frac{2x^2 - 6x}{x^2 - 6x + 9} = \frac{2x(x - 3)}{(x - 3)^2} = \frac{2x}{x - 3}.$$

Tại $x = 4$ thỏa điều kiện xác định ta có: $\frac{2 \cdot 4}{4 - 3} = 8$.

2. ĐKXD: $x \neq -2, x \neq \pm 1$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{x - 1}.$$

Tại $x = 10001$ thỏa điều kiện xác định ta có: $\frac{1}{10001 - 1} = \frac{1}{10000}$.

□

 **Bài 5.** Tìm x biết $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{43}{30}$.

ĐS: $x = 4$

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{43}{30} &\Leftrightarrow \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{13}{30} \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{30}{13} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{4}{13} \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{x} = \frac{13}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy $x = 4$. □

 **Bài 6.** Tìm x biết $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{53}{37}$.

ĐS: $x = 5$

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{53}{37} &\Leftrightarrow \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{16}{37} \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{37}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{5}{16} \\ &\Leftrightarrow 3 + \frac{1}{x} = \frac{16}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = 5. \end{aligned}$$

Thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy $x = 5$. □

 **Bài 7.** Tìm x biết $\frac{3}{x-2} + \frac{x}{x+2} - \frac{4x}{4-x^2} = 0$.

ĐS: $x = -3$

 **Lời giải.**

ĐKXD: $x \neq \pm 2$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-2} + \frac{x}{x+2} - \frac{4x}{4-x^2} = 0 &\Leftrightarrow 3(x+2) + x(x-2) + 4x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ (loại)} \\ x=-3 \text{ (nhận)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x = -3$. □

 **Bài 8.** Tìm x biết $\frac{2x+1}{x^2-4x+4} - \frac{2x+5}{x^2-4} = 0$.

ĐS: $x = -3$

 **Lời giải.**

ĐKXD: $x \neq \pm 2$.

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^2-4x+4} - \frac{2x+5}{x^2-4} = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-2)^2} - \frac{2x+5}{(x-2)(x+2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x+1)(x+2) - (2x+5)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x+12=0 \Leftrightarrow x=-3 \text{ (thỏa mãn)}. \end{aligned}$$

□

Bài 9. Tìm giá trị nguyên của biến x để tại đó giá trị của biểu thức $A = \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x + 1}$ với $x \neq -\frac{1}{3}$ nhận giá trị nguyên.

ĐS: $x \in \{0; -1\}$

Lời giải.

$$A = \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x + 1} = \frac{x(3x + 1) - (3x + 1) + 2}{3x + 1} = x - 1 + \frac{2}{3x + 1}$$

$$A \text{ nguyên} \Leftrightarrow 3x + 1 \in \mathbb{U}(2) \text{ hay } 3x + 1 \in \{1; -1; 2; -2\}$$

1. $3x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A = 1$. (nhận)
2. $3x + 1 = -1 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$. (loại)
3. $3x + 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. (loại)
4. $3x + 1 = -2 \Rightarrow x = -1$ (nhận) $\Rightarrow A = -3$. (nhận)

□

Bài 10. Tìm giá trị nguyên của biến x để tại đó giá trị của biểu thức $B = \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ với $x \neq 2$ nhận giá trị nguyên.

ĐS: $x \in \{1; -1; 3; 5\}$

Lời giải.

$$B = \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2} = \frac{(x - 2)^2 + (x - 2) + 3}{x - 2} = x - 1 + \frac{3}{x - 2}$$

$$B \text{ nguyên} \Leftrightarrow x - 2 \in \mathbb{U}(3) \text{ hay } x - 2 \in \{1; -1; 3; -3\}$$

1. $x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow B = 5$ (nhận)
2. $x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow B = -3$ (nhận)
3. $x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow B = 5$ (nhận)
4. $x - 2 = -3 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow B = -3$ (nhận)

Vậy $x \in \{1; -1; 3; 5\}$.

□

3 Bài tập về nhà

Bài 11. Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định:

a) $\frac{3x^3}{(x - 1)(x^2 + 4)}$.

ĐS: $x \neq 1$

b) $\frac{-4x^2}{25 - 20x + 4x^2}$.

ĐS: $x \neq \frac{5}{2}$

c) $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$.

ĐS: $x \neq \pm 3$

Lời giải.

1. Do $x^2 + 4 > 0, \forall x$. Suy ra điều kiện xác định của biểu thức $x \neq 1$.

$$2. \frac{-4x^2}{25 - 20x + 4x^2} = \frac{-4x^2}{(2x - 5)^2}. \text{ Suy ra điều kiện xác định của biểu thức } x \neq \frac{5}{2}.$$

3. Điều kiện xác định của biểu thức $x \neq \pm 3$.

□

Bài 12. Tìm x biết:

$$1. \frac{x}{x^2 - 9} + \frac{2}{x^2 + 6x + 9} = 0.$$

ĐS: $x = 1, x = -6$

$$2. \frac{8}{x^2 + 2x + 4} = 2 - x.$$

ĐS: $x = 0$

Lời giải.

1. DKXD $x \neq \pm 3$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 - 9} + \frac{2}{x^2 + 6x + 9} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{(x - 3)(x + 3)} + \frac{2}{(x + 3)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x + 3) + 2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy $x = 1, x = -6$.

2. DKXD $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{8}{x^2 + 2x + 4} = 2 - x \Leftrightarrow 8 = (x^2 + 2x + 4)(2 - x) \Leftrightarrow 2^3 = (2 - x)^3 \Leftrightarrow 2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy $x = 0$.

□

Bài 13. Cho biểu thức $A = \frac{9x^2 - 9x^3 + x^4}{x^3 - 3x^2}$. Tìm giá trị của x để:

a) $A = -3$.

ĐS: $x = 6$ b) $A = 5$.

ĐS: $x = 2, x = 12$

Lời giải.

DKXD $x \neq 0, x \neq 3$.

$$A = \frac{9x^2 - 9x^3 + x^4}{x^3 - 3x^2} = \frac{x^2(9 - 9x + x^2)}{x^2(x - 3)} = \frac{9 - 9x + x^2}{x - 3}.$$

$$1. A = -3 \Leftrightarrow \frac{9 - 9x + x^2}{x - 3} = -3 \Rightarrow 9 - 9x + x^2 = -3(x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 6 \text{ (nhận).} \end{cases}$$

Vậy $x = 6$.

$$2. A = 5 \Leftrightarrow \frac{9 - 9x + x^2}{x - 3} = 5 \Leftrightarrow 9 - 9x + x^2 = 5(x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 14x + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 12 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $x = 2, x = 12$.

□

Bài 14. Tìm giá trị của x để giá trị tương ứng của biểu thức bằng 1:

$$\text{a) } M = \frac{1+x^2+\frac{4}{x}}{2+\frac{4}{x}}. \quad \text{ĐS: } x = \pm 1 \quad \text{b) } N = \frac{1+x^2-\frac{7}{x+1}}{2-\frac{7}{x+1}}. \quad \text{ĐS: } x = 1$$

 **Lời giải.**

1. ĐK: $x \neq 0$.

$$M = \frac{1+x^2+\frac{4}{x}}{2+\frac{4}{x}} = 1 \Leftrightarrow 1+x^2+\frac{4}{x} = 2+\frac{4}{x} \Leftrightarrow 1+x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ (nhận).}$$

Vậy $x = \pm 1$.

2. ĐK: $x \neq -1$.

$$N = \frac{1+x^2-\frac{7}{x+1}}{2-\frac{7}{x+1}} = 1 \Leftrightarrow 1+x^2-\frac{7}{x+1} = 2-\frac{7}{x+1} \Leftrightarrow 1+x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -1 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy $x = 1$.

□

 **Bài 15.** Tìm x nguyên để tại đó giá trị của mỗi biểu thức sau là một số nguyên:

$$\text{a) } \frac{2}{x+3}. \quad \text{ĐS: } x \in \{-2; -1; 1; 2\} \quad \text{b) } \frac{x^2-3x+3}{x-4}. \quad \text{ĐS: } x \in \{-3; 3; 5; 11\}$$

 **Lời giải.**

1. ĐK: $x \neq -3$

$$\frac{2}{x+3} \text{ nguyên} \Leftrightarrow x+3 \in U(2) \text{ hay } x+3 \in \{1; -1; 2; -2\}$$

$$x+3 = 1 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow \frac{2}{-2+3} = 2. \text{ (nhận)}$$

$$x+3 = -1 \Leftrightarrow x = -4 \Rightarrow \frac{2}{-4+3} = -2. \text{ (nhận)}$$

$$x+3 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow \frac{2}{-1+3} = 1. \text{ (nhận)}$$

$$x+3 = -2 \Leftrightarrow x = -5 \Rightarrow \frac{2}{-5+3} = -1. \text{ (nhận)}$$

Vậy $x \in \{-2; -1; 1; 2\}$.

2. ĐK: $x \neq 4$

$$\frac{x^2-3x+3}{x-4} = x+1 + \frac{7}{x-4}.$$

$$\frac{x^2-3x+3}{x-4} \text{ nhận giá trị nguyên} \Leftrightarrow \frac{7}{x-4} \text{ nguyên} \Leftrightarrow x-4 \in U(7) \text{ hay } x-4 \in \{1; -1; 7; -7\}$$

$$x-4 = 1 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow 5+1 + \frac{7}{5-4} = 13. \text{ (nhận)}$$

$$x-4 = -1 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow 3+1 + \frac{7}{3-4} = -3. \text{ (nhận)}$$

$$x-4 = 7 \Leftrightarrow x = 11 \Rightarrow 11+1 + \frac{7}{11-4} = 13. \text{ (nhận)}$$

$$x-4 = -7 \Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow -3+1 + \frac{7}{-3-4} = -3. \text{ (nhận)}$$

Vậy $x \in \{-3; 3; 5; 11\}$.



§11 Ôn tập chương II (phần 2)

1 Tóm tắt lý thuyết

Xem lại tóm tắt lý thuyết từ Bài 1 đến Bài 9.

2 Bài tập và các dạng toán

 **Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau

$$A = \left(\frac{4}{x^3 - 4x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(\frac{x - 2}{x^2 + 2x} - \frac{x}{2x + 4} \right) \text{ với } x \neq 0 \text{ và } x \neq \pm 2.$$

ĐS: $\frac{-2}{x - 2}$

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{4}{x^3 - 4x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(\frac{x - 2}{x^2 + 2x} - \frac{x}{2x + 4} \right) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x(x - 2)(x + 2)} : \frac{2x - 4 - x^2}{2x(x + 2)} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 4}{x(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{2x(x + 2)}{2x - 4 - x^2} = \frac{-2}{x - 2}. \end{aligned}$$

□

 **Bài 2.** Thực hiện các phép tính sau

$$B = \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{4} \text{ với } x \neq \pm 1.$$

ĐS: $\frac{x + 1}{2(x - 1)}$

 **Lời giải.**

Ta có

$$B = \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{4} = \frac{2}{(x - 1)(x + 1)} \cdot \frac{(x + 1)^2}{4} = \frac{x + 1}{2(x - 1)}.$$

□

 **Bài 3.** Giả thiết biểu thức có nghĩa, chứng minh đẳng thức sau

$$\left[\frac{2}{5a} - \frac{2}{a + 1} \cdot \left(\frac{a + 1}{5a} - \frac{3a + 3}{5} \right) \right] : \frac{a - 1}{a} = \frac{6a}{5(a - 1)}.$$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \left[\frac{2}{5a} - \frac{2}{a+1} \cdot \left(\frac{a+1}{5a} - \frac{3a+3}{5} \right) \right] : \frac{a-1}{a} &= \left(\frac{2}{5a} - \frac{2}{a+1} \cdot \frac{(a+1)(-3a+1)}{5a} \right) \cdot \frac{a}{a-1} \\ &= \left(\frac{2}{5a} - \frac{2(-3a+1)}{5a} \right) \cdot \frac{a}{a-1} \\ &= \frac{6a}{5a} \cdot \frac{a}{a-1} = \frac{6a}{a-1}. \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left[\frac{2}{5a} - \frac{2}{a+1} \cdot \left(\frac{a+1}{5a} - \frac{3a+3}{5} \right) \right] : \frac{a-1}{a} = \frac{6a}{5(a-1)}.$$

□

Bài 4. Giả thiết biểu thức có nghĩa, chứng minh đẳng thức sau:

$$\left(\frac{3}{a^2+6a+9} - \frac{1}{a+3} \right) : \left(\frac{3}{a^2-9} - \frac{1}{a-3} \right) = \frac{a-3}{a+3}.$$

 **Lời giải.**

$$\left(\frac{3}{a^2+6a+9} - \frac{1}{a+3} \right) : \left(\frac{3}{a^2-9} - \frac{1}{a-3} \right) = \frac{-a}{(a+3)^2} : \frac{-a}{a^2-9} = \frac{a-3}{a+3}.$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{3}{a^2+6a+9} - \frac{1}{a+3} \right) : \left(\frac{3}{a^2-9} - \frac{1}{a-3} \right) = \frac{a-3}{a+3}.$$

□

Bài 5. Cho biểu thức $M = \frac{a^2-1}{15} \cdot \left(\frac{a+1}{2a-2} + \frac{3}{a^2-1} - \frac{a+3}{2a+2} \right)$.

- Hãy tìm điều kiện của a để giá trị biểu thức được xác định; **ĐS:** $a \neq \pm 1$
- Chứng minh biểu thức M được xác định thì giá trị của nó không phụ thuộc vào giá trị của biến a .

 **Lời giải.**

- DKXD: Ta có $a \neq \pm 1$.

$$2. \quad M = \frac{a^2-1}{15} \cdot \left(\frac{a+1}{2a-2} + \frac{3}{a^2-1} - \frac{a+3}{2a+2} \right) = \frac{a^2-1}{15} \cdot \frac{10}{2(a^2-1)} = \frac{1}{3}.$$

□

Bài 6. Cho biểu thức $M = \frac{2}{a-1} - \frac{2a^3-2a}{a^2+1} \cdot \left(\frac{a}{a^2-2a+1} + \frac{1}{1-a^2} \right)$.

- Hãy tìm điều kiện của a để giá trị biểu thức được xác định; **ĐS:** $a \neq \pm 1$
- Chứng minh biểu thức M được xác định thì giá trị của nó không phụ thuộc vào giá trị của biến a .

 **Lời giải.**

- DKXD: $a \neq \pm 1$.

- Ta có

$$\begin{aligned} M &= \frac{2}{a-1} - \frac{2a^3-2a}{a^2+1} \cdot \left(\frac{a}{a^2-2a+1} + \frac{1}{1-a^2} \right) \\ &= \frac{2}{a-1} - \frac{2a(a^2-1)}{a^2+1} \cdot \frac{a^2+1}{(a^2-1)(a-1)} = \frac{2}{a-1} - \frac{2a}{a-1} = -2. \end{aligned}$$

□

Bài 7. Tìm x biết biểu thức $M = \frac{3x^2 - 4x - 15}{x + 2} \in \mathbb{Z}$ **ĐS:** $x \in \{-7; -3; -1; 3\}$
 **Lời giải.**

$$M = \frac{3x^2 - 4x - 15}{x + 2} = 3x - 10 + \frac{5}{x + 2}$$

Ta có, $M \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x + 2) \in U(5) = \{-1; 1; -5; 5\} \Leftrightarrow x \in \{-7; -3; -1; 3\}$. □

Bài 8. Tìm x biết biểu thức $N = \frac{x^2 - x}{x - 3} \in \mathbb{Z}$ **ĐS:** $x \in \{-3; 0; 1; 2; 4; 5; 6; 9\}$
 **Lời giải.**

$$N = \frac{x^2 - x}{x - 3} = x + 2 + \frac{6}{x - 3}$$

Ta có $N \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x - 3) \in U(6) = \{-1; 1; -2; 2; -3; 3; -6; 6\} \Leftrightarrow x \in \{2; 4; 1; 5; 0; 6; -3; 9\}$. □

Bài 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \left(x - 16 + \frac{64}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x - 8} + 17$ **ĐS:** $\min P = 1$
 **Lời giải.**

Ta có

$$P = \left(x - 16 + \frac{64}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x - 8} + 17 = \frac{(x - 8)^2}{x} \cdot \frac{x^2}{x - 8} + 17 = x(x - 8) + 17 = (x - 4)^2 + 1 \geq 1.$$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = 4$. □

Bài 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \left(x - 12 + \frac{36}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x - 6} + 10$ **ĐS:** $\min Q = 1$
 **Lời giải.**

ĐKXD: $x \neq 0, x \neq 6$.

$$Q = \left(x - 12 + \frac{36}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x - 6} + 10 = \frac{(x - 6)^2}{x} \cdot \frac{x^2}{x - 6} + 10 = x(x - 6) + 10 = (x - 3)^2 + 1 \geq 1.$$

Vậy $\min Q = 1 \Leftrightarrow x = 3$. □

Bài tập về nhà

Bài 11. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{8}{x^2 + 1} + \frac{4x - 4x^3}{x^2 + 1} \cdot \left[\frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{1 - x^2} \right]$$

ĐS: $A = \frac{-8}{(x^2 + 1)(x - 1)}$

 **Lời giải.**

ĐKXD: $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{8}{x^2 + 1} + \frac{4x - 4x^3}{x^2 + 1} \cdot \left[\frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{1 - x^2} \right] \\ &= \frac{8}{x^2 + 1} + \frac{4x(1 - x^2)}{x^2 + 1} \cdot \frac{2}{(1 - x^2)(1 - x)} = \frac{8}{x^2 + 1} + \frac{8x}{(x^2 + 1)(1 - x)} = \frac{-8}{(x^2 + 1)(x - 1)}. \end{aligned}$$

Bài 12. Chứng minh giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến

1. $B = \frac{x}{7 - x} + \left(\frac{x}{x^2 - 49} - \frac{x - 7}{x^2 + 7x} \right) : \frac{2x - 7}{x^2 + 7x}.$

$$2. C = \frac{3x}{x-3} - \frac{x^2+3x}{2x+3} \cdot \left(\frac{3x+9}{x^2-3x} - \frac{3x}{x^2-9} \right).$$

 **Lời giải.**

1. ĐKXD: $x \neq 0, x \neq \pm 7$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{x}{7-x} + \left(\frac{x}{x^2-49} - \frac{x-7}{x^2+7x} \right) : \frac{2x-7}{x^2+7x} \\ &= \frac{x}{7-x} + \frac{14x-19}{x(x-7)(x+7)} : \frac{2x-7}{x(x+7)} = \frac{x}{7-x} + \frac{7}{x-7} = -1 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức B không phụ thuộc vào biến.

2. ĐKXD: $x \neq 0, x \neq \pm 3, x \neq \frac{-3}{2}$.

$$\begin{aligned} C &= \frac{3x}{x-3} - \frac{x^2+3x}{2x+3} \cdot \left(\frac{3x+9}{x^2-3x} - \frac{3x}{x^2-9} \right) \\ &= \frac{3x}{x-3} - \frac{x(x+3)}{2x+3} \cdot \frac{9(2x+3)}{x(x-3)(x+3)} = \frac{3x}{x-3} - \frac{9}{x-3} = 3. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức C không phụ thuộc vào biến.

□

 **Bài 13.** Chứng minh đẳng thức sau với $x \neq 0; x \neq \pm 1$: $\left[\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x} + \frac{2}{(x+1)^2} \right] : \frac{x-1}{x^2} = \frac{x}{x-1}$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \left[\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x} + \frac{2}{(x+1)^2} \right] : \frac{x-1}{x^2} &= \left[\frac{x^2+1}{x(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} \right] : \frac{x-1}{x^2} \\ &= \frac{x^2+2x+1}{x(x+1)^2} : \frac{x-1}{x^2} = \frac{(x+1)^2}{x(x+1)^2} \cdot \frac{x^2}{x-1} = \frac{x}{x-1}. (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left[\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x} + \frac{2}{(x+1)^2} \right] : \frac{x-1}{x^2} = \frac{x}{x-1} \text{ với } x \neq 0; x \neq \pm 1.$$

□

 **Bài 14.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+2}{2-x} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{4x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{2}{2-x} \right)$.

1. Rút gọn và tìm điều kiện của x để biểu thức P xác định. **ĐS:** $x \neq \pm 2, x \neq 0, P = \frac{4x^2}{x-3}$

2. Tìm các giá trị nguyên dương của x để $P < 0$. **ĐS:** $x = 1$

 **Lời giải.**

1. Điều kiện: $x \neq \pm 2, x \neq 0$.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+2}{2-x} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{4x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{2}{2-x} \right) \\ &= \frac{4x^2+8x}{4-x^2} : \frac{x-3}{x(2-x)} = \frac{4x(x+2)}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x(2-x)}{x-3} = \frac{4x^2}{x-3}. \end{aligned}$$

2. $P < 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} < 0 \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$.

Kết hợp điều kiện xác định và $x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x = 1$.

□

Bài 15. Tìm giá trị lớn nhất của $Q = \frac{(x+2)^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{x+2}\right) - \left(x + 10 + \frac{4}{x}\right)$
 $\max Q = -5$

ĐS:

 **Lời giải.**

Điều kiện $x \neq 0; x \neq -2$.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{(x+2)^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{x+2}\right) - \left(x + 10 + \frac{4}{x}\right) = \frac{(x+2)^2}{x} \cdot \frac{x+2-x^2}{x+2} - \frac{x^2+10x+4}{x} \\ &= \frac{(x+2)(x+2-x^2)}{x} - \frac{x^2+10x+4}{x} = \frac{-x^3-2x^2-6x}{x} = -x^2-2x-6 = -(x+1)^2-5 \leq -5. \end{aligned}$$

Vậy $\max Q = -5 \Leftrightarrow x = -1$.

□

Chương 3

Phương trình bậc nhất một ẩn

§1 Mở đầu về phương trình

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Khái niệm phương trình một ẩn

- ☑ Phương trình một ẩn x là phương trình có dạng $A(x) = B(x)$, trong đó $A(x)$ và $B(x)$ là các biểu thức của biến x .

1.2 Các khái niệm khác liên quan

- ☑ Giá trị x_0 được gọi là *ng nghiệm* của phương trình $A(x) = B(x)$ nếu đẳng thức $A(x_0) = B(x_0)$ đúng.
 - ☑ *Giải phương trình* là đi tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó.
 - ☑ Tập nghiệm của phương trình là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình đó.
 - ☑ Hai phương trình được gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng tập nghiệm.
- ⚠ 11. Hai phương trình cùng vô nghiệm tương đương nhau.

2 Bài tập và các dạng toán

📁 Dạng 74. Xét xem một số cho trước có là nghiệm của phương trình hay không?

Để xem số thực x_0 có là nghiệm của phương trình $A(x) = B(x)$ hay không, ta thay x_0 vào phương trình để kiểm tra:

- ☑ Nếu $A(x_0) = B(x_0)$ đúng, ta nói x_0 là *ng nghiệm* của phương trình đã cho.
- ☑ Nếu $A(x_0) \neq B(x_0)$, ta nói x_0 *không* là *ng nghiệm* của phương trình đã cho.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 **Ví dụ 1.** Hãy xét xem $x = 1$ có là nghiệm của mỗi phương trình sau hay không?

a) $x^2 + x + 1 = x + 2$;

ĐS: có

b) $3(x^2 + 1) - 2 = 3x + 1$.

ĐS: có

 **Lời giải.**

1. Thay $x = 1$ vào phương trình ta được $1^2 + 1 + 1 = 1 + 2 \Leftrightarrow 3 = 3$ (đúng) nên $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.
2. Thay $x = 1$ vào phương trình ta được $3(1^2 + 1) - 2 = 3 \cdot 1 + 1 \Leftrightarrow 4 = 4$ (đúng) nên $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

□

 **Ví dụ 2.** Hãy xét xem $x = 2$ có là nghiệm của mỗi phương trình sau hay không?

a) $x^2 - x + 1 = -x + 3$;

ĐS: không

b) $5x - 3 + 2(x - 1) = 10$.

ĐS: không

 **Lời giải.**

1. Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $2^2 - 2 + 1 = -2 + 3 \Leftrightarrow 3 = 1$ (không đúng) nên $x = 2$ không là nghiệm của phương trình đã cho.
2. Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $5 \cdot 2 - 3 + 2(2 - 1) = 10 \Leftrightarrow 9 = 10$ (không đúng) nên $x = 2$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

□

 **Ví dụ 3.** Trong các giá trị $y = -1$; $y = 2$; $y = 0$; $y = 5$ giá trị nào là nghiệm của phương trình $(y - 2)^2 = y + 4$.

ĐS: $y = 0$; $y = 5$

 **Lời giải.**

Ta có thể lập bảng như sau

y	-1	2	0	5
$(y - 2)^2$	9	0	4	9
$y + 4$	3	6	4	9

Vậy $y = 0$ và $y = 5$ là hai nghiệm của phương trình đã cho.

□

 **Ví dụ 4.** Trong các giá trị $z = -1$; $z = -2$; $z = 0$ giá trị nào là nghiệm của phương trình $(z + 2)(z - 1) = z^2 + 2z$.

ĐS: $z = -2$

 **Lời giải.**

Ta có thể lập bảng như sau

z	-2	-1	0
$(z+2)(z-1)$	0	-2	-2
z^2+2z	0	-1	0

Vậy $z = -2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

 Ví dụ 5. Cho phương trình ẩn x : $x^2 - 3(x + 3) + 2m = 6 - x$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm $x = -3$. **ĐS:** $m = 0$

 Lời giải.

Vì $x = -3$ là nghiệm của phương trình đã cho nên $(-3)^2 - 3(-3 + 3) + 2m = 6 + 3 \Leftrightarrow m = 0$.
 Vậy $m = 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = -3$.

 Ví dụ 6. Cho phương trình ẩn x : $x^2 - (x + 4) + 5m = 12x$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm $x = -1$. **ĐS:** $m = -2$

 Lời giải.

Vì $x = -1$ là nghiệm của phương trình đã cho nên $(-1)^2 - (-1 + 4) + 5m = -12 \Leftrightarrow m = -2$.
 Vậy $m = -2$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = -1$.

Dạng 75. Xét sự tương đương của hai phương trình

Thông thường ta thực hiện theo các bước sau đây:

- ☑ *Bước 1.* Tìm các tập nghiệm S_1, S_2 lần lượt của hai phương trình đã cho;
- ☑ *Bước 2.* Nếu $S_1 = S_2$ ta kết luận hai phương trình tương đương, nếu $S_1 \neq S_2$ ta kết luận hai phương trình không tương đương.
- ⚠ **12.** Nếu chỉ ra được một nghiệm của phương trình này mà không là nghiệm của phương trình kia thì hai phương trình không tương đương.

BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Xét xem hai phương trình sau có tương đương không? Vì sao?

- a) $x = -3$ và $2x = -6$; b) $-2x = 3x - 1$ và $x = -1$.

 **Lời giải.**

1. Ta thấy $x = -3$ là nghiệm duy nhất của phương trình $2x = -6$.
Do đó hai phương trình đã cho tương đương với nhau.
2. Thay $x = -1$ vào phương trình đầu tiên ta thấy $-2(-1) \neq 3(-1) - 1$.
Do đó hai phương trình đã cho không tương đương với nhau.

- Thay $x = 4$ vào phương trình (1) ta được $4^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (đúng).
Suy ra $x = 4$ là nghiệm của phương trình (1).
Thay $x = 4$ vào phương trình (2) ta được $(4 - 2)(4 - 4) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (đúng).
Suy ra $x = 4$ là nghiệm của phương trình (2). Vậy $x = 4$ là nghiệm chung của hai phương trình đã cho.
- Thay $x = 2$ vào phương trình (1) ta được $2^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (đúng).
Vậy $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1).
- Thay $x = 2$ vào phương trình (2) ta được $(2 - 2)(2 - 4) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (đúng).
Suy ra $x = 2$ là nghiệm của phương trình (2).
Vì mỗi phương trình đều chỉ có hai nghiệm nên chúng có chung một tập nghiệm là $S_1 = S_2 = \{2; 4\}$.
Do đó hai phương trình đã cho tương đương với nhau.

□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Hãy xét xem số $x = -1$ có là nghiệm của mỗi phương trình sau hay không?

- $x^3 - 2(x^2 + 1) = 3(x - 2) + 4$. **ĐS:** có
- $3\left(x + \frac{1}{3}\right) - 2(x^2 + 1) = 6(x - 1)$. **ĐS:** không

Lời giải.

- Thay $x = -1$ vào phương trình đã cho ta được $(-1)^3 - 2[(-1)^2 + 1] = 3(-1 - 2) + 4 \Leftrightarrow -5 = -5$ (đúng).
Vậy $x = -1$ là nghiệm của phương trình đã cho.
- Thay $x = -1$ vào phương trình đã cho ta được $3\left(-1 + \frac{1}{3}\right) - 2[(-1)^2 + 1] = 6(-1 - 1) \Leftrightarrow -6 = -12$ (không đúng).
Vậy $x = -1$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

□

Bài 2. Cho phương trình ẩn x : $x(x - 4) - x^2 + 3mx = 2mx^2$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm $x = 1$. **ĐS:** $m = 4$

Lời giải.

Vì $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho nên $1(1 - 4) - 1^2 + 3m \cdot 1 = 2m \cdot 1^2 \Leftrightarrow m = 4$.
Vậy với $m = 4$ thì phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1$.

□

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình $2(x - 2m) + 3 = \frac{1}{2}x + 1$ nhận $x = \frac{1}{2}$ làm nghiệm. **ĐS:** $m = \frac{11}{16}$

Lời giải.

Vì $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho nên $2\left(\frac{1}{2} - 2m\right) + 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow m = \frac{11}{16}$.

Vậy với $m = \frac{11}{16}$ thì phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$. $\square$

Bài 4. Cho hai phương trình $\frac{2}{3}(1 - x) = 2\left(\frac{-1}{6} + \frac{2}{3}x\right)$ (1) và $(2x - 1)(x + 1) = 0$ (2).

1. Chứng minh $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm chung của hai phương trình.
2. Chứng minh $x = -1$ là nghiệm của phương trình (2) nhưng không phải là nghiệm của phương trình (1).
3. Hai phương trình đã cho có tương đương với nhau không? Vì sao? **ĐS:** không

Lời giải.

1. Thay $x = \frac{1}{2}$ vào phương trình (1) ta được $\frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{-1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (đúng).

Suy ra $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình (1).

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào phương trình (2) ta được $\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (đúng).

Suy ra $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình (2).

Vậy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm chung của hai phương trình đã cho.

2. Thay $x = -1$ vào phương trình (1) ta được $\frac{2}{3}(1 + 1) = 2\left(\frac{-1}{6} + \frac{2}{3} \cdot (-1)\right) \Leftrightarrow \frac{4}{3} = -\frac{5}{3}$ (không đúng).

Suy ra $x = -1$ không là nghiệm của phương trình (1).

Thay $x = -1$ vào phương trình (2) ta được $[2(-1) - 1](-1 + 1) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (đúng).

Suy ra $x = -1$ là nghiệm của phương trình (2).

Vậy $x = -1$ là nghiệm của phương trình (2) nhưng không là nghiệm của phương trình (1).

3. Hai phương trình đã cho không tương đương vì không cùng tập nghiệm. $\square$

Bài 5. Chứng minh tập nghiệm của phương trình $2(x - 3) = 3(x + 1) - (x + 9)$ là tập số thực $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $2(x - 3) = 3(x + 1) - (x + 9) \Leftrightarrow 2x - 6 = 2x - 6$.

Vì $2x - 6 = 2x - 6$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. $\square$

§2 Phương trình bậc nhất một ẩn và cách giải

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Khái niệm

Phương trình dạng $ax + b = 0$, với a, b là các số đã cho và $a \neq 0$ được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

1.2 Hai quy tắc cơ bản biến đổi phương trình

a) Quy tắc chuyển vế:

Trong một phương trình, khi chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia cần đổi dấu hạng tử đó.

b) Quy tắc nhân (hoặc chia) với một số khác 0:

Trong cùng một phương trình, ta có thể nhân (hoặc chia) hai vế với cùng một số khác 0.

1.3 Cách giải phương trình bậc nhất

☑ Từ một phương trình, khi sử dụng quy tắc chuyển vế hay quy tắc nhân (hoặc chia) hai vế với một số khác 0, ta thu được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

☑ Tổng quát cách giải phương trình bậc nhất dạng $ax + b = 0$ ($a \neq 0$):

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 76. Nhận dạng phương trình bậc nhất một ẩn

Dựa vào định nghĩa phương trình bậc nhất một ẩn.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 **Ví dụ 1.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất một ẩn. Hãy chỉ ra hệ số a và b tương ứng.

a) $x + 2 = 0$;

b) $x - 2x^2 = 1$;

c) $\frac{1}{5x} + 1 = 0$;

d) $3y = 0$;

e) $1 - 3y = 0$;

f) $0 \cdot x - 1 = 0$.

 Lời giải.

1. Phương trình $x + 2 = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn với hệ số $a = 1$ và $b = 2$.
2. Phương trình $x - 2x^2 = 1$ không là phương trình bậc nhất một ẩn.
3. Phương trình $\frac{1}{5x} + 1 = 0$ không là phương trình bậc nhất một ẩn.
4. Phương trình $3y = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn với hệ số $a = 3$ và $b = 0$.
5. Phương trình $1 - 3y = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn với hệ số $a = -3$ và $b = 1$.
6. Phương trình $0 \cdot x - 1 = 0$ không là phương trình bậc nhất một ẩn.

□

 **Ví dụ 2.** Hãy chỉ ra các phương trình bậc nhất một ẩn trong các phương trình sau. Nếu có hãy chỉ ra hệ số a và b tương ứng.

a) $x - 1 = 0$;

b) $x^2 = 1 + x$;

c) $\frac{1}{x} - 1 = 0$;

d) $2y = 0$;

e) $5 - 2y = 0$;

f) $0 \cdot x + 3 = 0$.

 Lời giải.

1. Phương trình $x - 1 = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn với hệ số $a = 1$ và $b = -1$.
2. Phương trình $x^2 = 1 + x$ không là phương trình bậc nhất một ẩn.
3. Phương trình $\frac{1}{x} - 1 = 0$ không là phương trình bậc nhất một ẩn.
4. Phương trình $2y = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn với hệ số $a = 2$ và $b = 0$.
5. Phương trình $5 - 2y = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn với hệ số $a = -2$ và $b = 5$.
6. Phương trình $0 \cdot x + 3 = 0$ không là phương trình bậc nhất một ẩn.

□

 **Dạng 77. Tìm điều kiện của tham số để phương trình là phương trình bậc nhất một ẩn.**

Phương trình $ax + b = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn x khi $a \neq 0$.

 BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm điều kiện của m để các phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn x :

a) $(m - 2)x + 1 = 0$;

ĐS: $m \neq 2$

b) $(m^2 - 4)x - 2 = 0$;

ĐS: $m \neq \pm 2$

c) $mx - 2x + 1 = 0$;

ĐS: $m \neq 2$

d) $(m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x - 4 = 0$.

ĐS:

$m = 2$

 Lời giải.

- Để phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x thì $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.
- Để phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x thì $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.
- Ta có $mx - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (m - 2)x + 1 = 0$.
Để phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x thì $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.
- Để phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x thì

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ -(m + 2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

□

 **Ví dụ 2.** Tìm điều kiện của m để các phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn x :

- a) $(m - 1)x - 2 = 0$; **ĐS:** $m \neq 1$ b) $(m^2 - 1)x + 3 = 0$; **ĐS:** $m \neq \pm 1$
 c) $mx - x + 1 = 0$; **ĐS:** $m \neq 1$ d) $(m^2 - 1)x^2 - (m - 1)x + 3 = 0$. **ĐS:**
 $m = -1$

 Lời giải.

- Để phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x thì $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.
- Để phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x thì $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.
- Ta có $mx - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)x + 1 = 0$.
Để phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x thì $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.
- Để phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x thì

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ -(m - 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

□

 Dạng 78. Cách giải phương trình bậc nhất một ẩn.

Xem cách giải phương trình bậc nhất một ẩn trong phần *Tóm tắt lý thuyết*.

 **13.**  Nếu phương trình thu gọn có dạng $0 \cdot x = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm hay $S = \mathbb{R}$.

 Nếu phương trình thu gọn có dạng $0 \cdot x = m$ với $m \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm hay $S = \emptyset$.

 BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau:

- a) $3x + 9 = 0$; **ĐS:** $S = \{-3\}$ b) $3x - 2 = 0$; **ĐS:** $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$
 c) $4 - 2x = 0$; **ĐS:** $S = \{2\}$ d) $-2x + 6 = 0$; **ĐS:** $S = \{3\}$

- e) $0,5x - 1 = 0$; **ĐS:** $S = \{2\}$ f) $3,6 - 0,6x = 0$; **ĐS:** $S = \{6\}$
 g) $\frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{3}$; **ĐS:** $S = \{2\}$ h) $-\frac{1}{3}x + 1 = \frac{2}{3}x - 3$; **ĐS:** $S = \{4\}$
 i) $4x - 3 = 2x + 1$; **ĐS:** $S = \{2\}$ j) $-\frac{1}{2}(x+1) + 1 = 2x + \frac{1}{3}$. **ĐS:** $S = \left\{\frac{1}{15}\right\}$

 Lời giải.

- a) Ta có $3x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3$.
Suy ra $S = \{-3\}$.
 b) Ta có $3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.
Suy ra $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.
 c) Ta có $4 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.
Suy ra $S = \{2\}$.
 d) Ta có $-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.
Suy ra $S = \{3\}$.
 e) Ta có $0,5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 0,5x = 1 \Leftrightarrow x = 2$.
Suy ra $S = \{2\}$.
 f) Ta có $3,6 - 0,6x = 0 \Leftrightarrow 0,6x = 3,6 \Leftrightarrow x = 6$.
Suy ra $S = \{6\}$.
 g) Ta có $\frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 2$.
Suy ra $S = \{2\}$.
 h) Ta có $-\frac{1}{3}x + 1 = \frac{2}{3}x - 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x = -3 - 1 \Leftrightarrow x = 4$.
Suy ra $S = \{4\}$.
 i) Ta có $4x - 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.
Suy ra $S = \{2\}$.
 j) Ta có $-\frac{1}{2}(x+1) + 1 = 2x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x - 2x = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{2}x = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{15}$.
Suy ra $S = \left\{\frac{1}{15}\right\}$.

□

 **Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau:

- a) $2x - 4 = 0$; **ĐS:** $S = \{2\}$ b) $2x - 5 = 0$; **ĐS:** $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
 c) $6 - 2x = 0$; **ĐS:** $S = \{3\}$ d) $-3x - 9 = 0$; **ĐS:** $S = \{-3\}$
 e) $0,25x - 1 = 0$; **ĐS:** $S = \{4\}$ f) $4,9 - 0,7x = 0$; **ĐS:** $S = \{7\}$
 g) $\frac{2}{5}x + 1 = \frac{4}{5}$; **ĐS:** $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ h) $-\frac{1}{2}x + 2 = \frac{5}{2}x - 1$; **ĐS:** $S = \{1\}$
 i) $3x + 2 = 2x - 3$; **ĐS:** $S = \{-5\}$ j) $-\frac{1}{2}(2x + 1) + \frac{1}{2} = x - 1$. **ĐS:** $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

 Lời giải.

- a) Ta có $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.
Suy ra $S = \{2\}$.
 b) Ta có $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.
Suy ra $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

- c) Ta có $6 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.
Suy ra $S = \{3\}$.
- d) Ta có $-3x - 9 = 0 \Leftrightarrow -3x = 9 \Leftrightarrow x = -3$.
Suy ra $S = \{-3\}$.
- e) Ta có $0,25x - 1 = 0 \Leftrightarrow 0,25x = 1 \Leftrightarrow x = 4$.
Suy ra $S = \{4\}$.
- f) Ta có $4,9 - 0,7x = 0 \Leftrightarrow 0,7x = 4,9 \Leftrightarrow x = 7$.
Suy ra $S = \{7\}$.
- g) Ta có $\frac{2}{5}x + 1 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{5}x = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.
Suy ra $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
- h) Ta có $-\frac{1}{2}x + 2 = \frac{5}{2}x - 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}x = -1 - 2 \Leftrightarrow -3x = -3 \Leftrightarrow x = 1$.
Suy ra $S = \{1\}$.
- i) Ta có $3x + 2 = 2x - 3 \Leftrightarrow 3x - 2x = -3 - 2 \Leftrightarrow x = -5$.
Suy ra $S = \{-5\}$.
- j) Ta có $-\frac{1}{2}(2x + 1) + \frac{1}{2} = x - 1 \Leftrightarrow -x - x = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
Suy ra $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

□

 **Ví dụ 3.** Chứng minh các phương trình sau đây vô nghiệm:

- a) $2(x + 3) - 4 = 2x - 5$; b) $2(1 - 4x) - 7 = -8x$;
c) $2(1 - 1,5x) = 1 - 3x$; d) $2|x| = -1$.

 **Lời giải.**

- Ta có $2(x + 3) - 4 = 2x - 5 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -7$.
Suy ra phương trình vô nghiệm.
- Ta có $2(1 - 4x) - 7 = -8x \Leftrightarrow 0 \cdot x = -5$.
Suy ra phương trình vô nghiệm.
- Ta có $2(1 - 1,5x) = 1 - 3x \Leftrightarrow 0 \cdot x = 1$.
Suy ra phương trình vô nghiệm.
- Phương trình $2|x| = -1$ có vế trái không âm và vế phải âm cho nên phương trình vô nghiệm.

□

 **Ví dụ 4.** Chứng minh các phương trình sau đây vô nghiệm:

- a) $4(2 + x) + 4 = 4x - 1$; b) $2(1 - 5x) + 5 = -10x$;
c) $2(0,5x + 1) = x - 1$; d) $|x| = -2$.

 **Lời giải.**

- Ta có $4(2 + x) + 4 = 4x - 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 13$.
Suy ra phương trình vô nghiệm.
- Ta có $2(1 - 5x) + 5 = -10x \Leftrightarrow 0 \cdot x = 7$.
Suy ra phương trình vô nghiệm.
- Ta có $2(0,5x + 1) = x - 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 3$.
Suy ra phương trình vô nghiệm.

4. Phương trình $|x| = -2$ có vế trái không âm và vế phải âm cho nên phương trình vô nghiệm.

□

 **Ví dụ 5.** Giải các phương trình sau:

- | | |
|--|-------------------------|
| 1. $(m - 2)x = 3$ khi $m = 3$; | ĐS: $S = \{3\}$ |
| 2. $(2m - 1)x - 3 = x + 2m - 5$ khi $m = -1$; | ĐS: $S = \{1\}$ |
| 3. $(m^2 - 4m + 9)x = x - 4$ khi $m = 2$. | ĐS: $S = \{-1\}$ |

 **Lời giải.**

1. Khi $m = 3$ thì phương trình đã cho trở thành $(3 - 2)x = 3 \Leftrightarrow x = 3$.
Vậy với $m = 3$ thì phương trình có nghiệm là $x = 3$.
2. Khi $m = -1$ thì phương trình đã cho trở thành $[2(-1) - 1]x - 3 = x + 2(-1) - 5 \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy với $m = -1$ thì phương trình có nghiệm là $x = 1$.
3. Khi $m = 2$ thì phương trình đã cho trở thành $(2^2 - 4 \cdot 2 + 9)x = x - 4 \Leftrightarrow x = -1$.
Vậy với $m = 2$ thì phương trình có nghiệm là $x = -1$.

□

 **Ví dụ 6.** Giải các phương trình sau:

- | | |
|--|------------------------|
| 1. $(m + 1)x = 2$ khi $m = 1$; | ĐS: $S = \{1\}$ |
| 2. $(m - 1)x = 2x - 2$ khi $m = 2$; | ĐS: $S = \{2\}$ |
| 3. $(m^2 + 3m)x - 4m + 6 = 0$ khi $m = -1$. | ĐS: $S = \{5\}$ |

 **Lời giải.**

1. Khi $m = 1$ thì phương trình đã cho trở thành $2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy với $m = 1$ thì phương trình có nghiệm là $x = 1$.
2. Khi $m = 2$ thì phương trình đã cho trở thành $x = 2x - 2 \Leftrightarrow x = 2$.
Vậy với $m = 2$ thì phương trình có nghiệm là $x = 2$.
3. Khi $m = -1$ thì phương trình đã cho trở thành $[(-1)^2 + 3(-1)]x - 4(-1) + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.
Vậy với $m = -1$ thì phương trình có nghiệm là $x = 5$.

□

 **Ví dụ 7.** Tìm giá trị của m sao cho phương trình:

- | | |
|--|---------------------|
| 1. $(m - 2)x = 3$ nhận $x = 1$ làm nghiệm; | ĐS: $m = 5$ |
| 2. $4x - m = 3x + 5$ nhận $x = -2$ làm nghiệm. | ĐS: $m = -7$ |

 **Lời giải.**

1. Vì phương trình đã cho nhận $x = 1$ làm nghiệm nên $(m - 2) \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow m = 5$.
2. Vì phương trình đã cho nhận $x = -2$ làm nghiệm nên $4(-2) - m = 3(-2) + 5 \Leftrightarrow m = -7$.

□

 **Ví dụ 8.** Tìm giá trị của m sao cho phương trình:

1. $(m + 1)x = 2$ nhận $x = 1$ làm nghiệm; **ĐS:** $m = 1$

2. $x + 1 = 3m - 2$ nhận $x = 2$ làm nghiệm. **ĐS:** $m = \frac{5}{3}$

 **Lời giải.**

1. Vì phương trình đã cho nhận $x = 1$ làm nghiệm nên $(m + 1) \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$.

2. Vì phương trình đã cho nhận $x = 2$ làm nghiệm nên $2 + 1 = 3m - 2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}$.

□

 **Ví dụ 9.** Tìm giá trị của k sao cho nghiệm của phương trình (1) cũng là nghiệm của phương trình (2):

$$5(2x + 5) - 4 = 3(2x - 1) \quad (1) \text{ và } (2k - 1)x + 6 = 4x - 9k - 3 \quad (2).$$

ĐS: $k = 13$

 **Lời giải.**

Ta có $5(2x + 5) - 4 = 3(2x - 1) \Leftrightarrow 4x = -24 \Leftrightarrow x = -6$.

Suy ra phương trình (1) có một nghiệm duy nhất là $x = -6$.

Vì $x = -6$ cũng là nghiệm của phương trình (2) nên

$$(2k - 1)(-6) + 6 = 4(-6) - 9k - 3 \Leftrightarrow -12k + 6 + 6 = -9k - 27 \Leftrightarrow 3k = 39 \Leftrightarrow k = 13.$$

□

 **Ví dụ 10.** Tìm giá trị của k sao cho nghiệm của phương trình (1) cũng là nghiệm của phương trình (2):

$$2x - 6 = 3(3 - x) \quad (1) \text{ và } 6kx + 7 = 2(x - k) - 9 \quad (2).$$

ĐS: $k = -\frac{1}{2}$

 **Lời giải.**

Ta có $2x - 6 = 3(3 - x) \Leftrightarrow 2x - 6 = 9 - 3x \Leftrightarrow x = 3$.

Suy ra phương trình (1) có một nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Vì $x = 3$ cũng là nghiệm của phương trình (2) nên

$$18k + 7 = 2(3 - k) - 9 \Leftrightarrow 18k + 7 = 6 - 2k - 9 \Leftrightarrow 20k = -10 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

□

 **Ví dụ 11.** Tìm giá trị của k biết rằng một trong hai phương trình $2x = -4$ và $5 - kx = 9$ nhận $x = -2$ làm nghiệm, phương trình còn lại nhận $x = 1$ làm nghiệm. **ĐS:** $k = -4$

 Lời giải.

Dễ thấy phương trình $2x = -4$ có nghiệm là $x = -2$, do đó phương trình $5 - kx = 9$ nhận $x = 1$ làm nghiệm nên ta có $5 - k \cdot 1 = 9 \Leftrightarrow k = -4$. $\square$

 **Ví dụ 12.** Tìm giá trị của k biết rằng một trong hai phương trình $2x = 6$ và $10 - kx = 9$ nhận $x = 3$ làm nghiệm, phương trình còn lại nhận $x = -1$ làm nghiệm. **ĐS:** $k = -1$

 Lời giải.

Dễ thấy phương trình $2x = 6$ có nghiệm là $x = 3$, do đó phương trình $10 - kx = 9$ nhận $x = -1$ làm nghiệm nên ta có $10 - k(-1) = 9 \Leftrightarrow k = -1$. $\square$

 **Ví dụ 13.** Cho phương trình $(m^2 - 4)x - 2 = m$. Giải phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a) $m = 2$; **ĐS:** $S = \emptyset$ b) $m = -2$; **ĐS:** $S = \mathbb{R}$ c) $m = 1$. **ĐS:** $S = \{-1\}$

 Lời giải.

- Khi $m = 2$ thì phương trình đã cho trở thành $(2^2 - 4)x - 2 = 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 4$.
Suy ra phương trình vô nghiệm hay $S = \emptyset$.
- Khi $m = -2$ thì phương trình đã cho trở thành $[(-2)^2 - 4]x - 2 = -2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$.
Suy ra phương trình có vô số nghiệm hay $S = \mathbb{R}$.
- Khi $m = 1$ thì phương trình đã cho trở thành $(1^2 - 4)x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$.
Suy ra $S = \{-1\}$.

$\square$

 **Ví dụ 14.** Cho phương trình $(m^2 - 1)x + 1 = m$. Giải phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a) $m = 1$; **ĐS:** $S = \mathbb{R}$ b) $m = -1$; **ĐS:** $S = \emptyset$ c) $m = 2$. **ĐS:** $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

 Lời giải.

- Khi $m = 1$ thì phương trình đã cho trở thành $(1^2 - 1)x + 1 = 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$.
Suy ra phương trình có vô số nghiệm hay $S = \mathbb{R}$.
- Khi $m = -1$ thì phương trình đã cho trở thành $[(-1)^2 - 1]x + 1 = -1 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -2$.
Suy ra phương trình vô nghiệm hay $S = \emptyset$.
- Khi $m = 2$ thì phương trình đã cho trở thành $(2^2 - 1)x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.
Suy ra $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

$\square$

3

Bài tập về nhà

 Bài 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất một ẩn. Hãy chỉ ra hệ số a và b tương ứng.

a) $2x - 1 = 0$;

b) $-x + x^2 = 2$;

c) $\frac{1}{x} - 3 = 0;$

d) $5y = 0$;

e) $3 - 2y = 0$;

f) $0 \cdot x = -1$.

 **Lời giải.**

1. Phương trình $2x - 1 = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn với hệ số $a = 2$ và $b = -1$.
2. Phương trình $-x + x^2 = 2$ không là phương trình bậc nhất một ẩn.
3. Phương trình $\frac{1}{x} - 3 = 0$ không là phương trình bậc nhất một ẩn.
4. Phương trình $5y = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn với hệ số $a = 5$ và $b = 0$.
5. Phương trình $3 - 2y = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn với hệ số $a = -2$ và $b = 3$.
6. Phương trình $0 \cdot x = -1$ không là phương trình bậc nhất một ẩn.

☐

 **Bài 2.** Tìm điều kiện của m để các phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn x :

a) $(m+1)x+1=0$;

DS: $m \neq -1$

b) $(m^2 - 9)x + 3 = 0;$

DS: $m \neq \pm 3$

c) $mx + x + 1 = 0$;

DS: $m \neq -1$

d) $(m^2 - 9)x^2 - (m - 3)x + 1 = 0$.
 $m = -3$

DS:

 **Lời giải.**

- Để phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x thì $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.
- Để phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x thì $m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$.
- Ta có $mx + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (m + 1)x + 1 = 0$.
Để phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x thì $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.
- Để phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x thì

$$\begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ -(m - 3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

☐

Bài 3. Giải các phương trình sau:

- a) $2x - 8 = 0$; ĐS: $S = \{4\}$ b) $2x - 7 = 0$; ĐS: $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$
 c) $9 - 3x = 0$; ĐS: $S = \{3\}$ d) $-2x - 4 = 0$; ĐS: $S = \{-2\}$
 e) $0,25x - 2 = 0$; ĐS: $S = \{8\}$ f) $8,1 - 0,9x = 0$; ĐS: $S = \{9\}$
 g) $\frac{1}{4}x + 2 = \frac{3}{4}$; ĐS: $S = \{-5\}$ h) $\frac{1}{2}x + 2 = \frac{5}{2}x - 1$; ĐS: $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
 i) $-2x + 3 = x + 2$; ĐS: $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ j) $-\frac{1}{4}(x + 4) + 1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$. ĐS: $S = \{-1\}$

 Lời giải.

- a) Ta có $2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.
Suy ra $S = \{4\}$.
 b) Ta có $2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$.
Suy ra $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$.
 c) Ta có $9 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
Suy ra $S = \{3\}$.
 d) Ta có $-2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
Suy ra $S = \{-2\}$.
 e) Ta có $0,25x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 8$.
Suy ra $S = \{8\}$.
 f) Ta có $8,1 - 0,9x = 0 \Leftrightarrow x = 9$.
Suy ra $S = \{9\}$.
 g) Ta có $\frac{1}{4}x + 2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow x = -5$.
Suy ra $S = \{-5\}$.
 h) Ta có $\frac{1}{2}x + 2 = \frac{5}{2}x - 1 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.
Suy ra $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
 i) Ta có $-2x + 3 = x + 2 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.
Suy ra $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.
 j) Ta có $-\frac{1}{4}(x + 4) + 1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + 1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{x}{4} + \frac{2}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = \frac{x}{4} + \frac{2}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x - \frac{x}{4} = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{2}{4}x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -1$.
Suy ra $S = \{-1\}$.

□

 Bài 4. Chứng minh các phương trình sau đây vô nghiệm:

- a) $x - 4 = x + 3$; b) $3(1 - x) + 1 = -3x$;
 c) $2(1 + 2,5x) = 3 + 5x$; d) $|x| = -6$.

 Lời giải.

- Ta có $x - 4 = x + 3 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 7$.
Suy ra phương trình vô nghiệm.
- Ta có $3(1 - x) + 1 = -3x \Leftrightarrow 3 - 3x + 1 = -3x \Leftrightarrow 0 \cdot x = 4$.
Suy ra phương trình vô nghiệm.
- Ta có $2(1 + 2,5x) = 3 + 5x \Leftrightarrow 2 + 5x = 3 + 5x \Leftrightarrow 0 \cdot x = 1$.
Suy ra phương trình vô nghiệm.
- Phương trình $|x| = -6$ có vế trái không âm và vế phải âm nên phương trình vô nghiệm.

□

Bài 5. Giải các phương trình sau:

1. $(m - 1)x = 2$ khi $m = 2$; **ĐS:** $S = \{2\}$

2. $mx + 1 = 2 + x$ khi $m = -1$; **ĐS:** $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

3. $(m^2 - 1)x = x + 3$ khi $m = 2$. **ĐS:** $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

 **Lời giải.**

1. Khi $m = 2$ thì phương trình đã cho trở thành $(2 - 1)x = 2 \Leftrightarrow x = 2$.
Suy ra $S = \{2\}$.

2. Khi $m = -1$ thì phương trình đã cho trở thành $-1 \cdot x + 1 = 2 + x \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.
Suy ra $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

3. Khi $m = 2$ thì phương trình đã cho trở thành $(2^2 - 1)x = x + 3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.
Suy ra $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

□

Bài 6. Tìm giá trị của m sao cho phương trình:

1. $(m + 3)x = 3$ nhận $x = 1$ là nghiệm; **ĐS:** $m = 0$

2. $x + m = 2x - 5$ nhận $x = 2$ là nghiệm. **ĐS:** $m = -3$

 **Lời giải.**

1. Vì $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho nên $(m + 3) \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow m = 0$.

2. Vì $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho nên $2 + m = 2 \cdot 2 - 5 \Leftrightarrow m = -3$.

□

Bài 7. Tìm giá trị của k sao cho nghiệm của phương trình (1) cũng là nghiệm của phương trình (2):

$$2x + 1 = 3(x - 2) \quad (1) \text{ và } (k - 1)x = 2x - 3k + 5 \quad (2).$$

ĐS: $k = \frac{13}{5}$

 **Lời giải.**

Ta có $2x + 1 = 3(x - 2) \Leftrightarrow 2x + 1 = 3x - 6 \Leftrightarrow x = 7$.

Suy ra phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = 7$.

Vì $x = 7$ cũng là nghiệm của phương trình (2) nên $(k - 1) \cdot 7 = 2 \cdot 7 - 3k + 5 \Leftrightarrow 7k - 7 = -3k + 19 \Leftrightarrow k = \frac{13}{5}$. □

Bài 8. Tìm giá trị của k biết rằng một trong hai phương trình $2x = 8$ và $kx - 3 = 9$ nhận $x = 4$ làm nghiệm, phương trình còn lại nhận $x = 6$ làm nghiệm. **ĐS:** $k = 2$

 **Lời giải.**

Dễ thấy phương trình $2x = 8$ có nghiệm là $x = 4$ nên phương trình $kx - 3 = 9$ nhận $x = 6$ làm nghiệm do đó $6k - 3 = 9 \Leftrightarrow k = 2$. □

 **Bài 9.** Cho phương trình $(4m^2 - 1)x - 1 = 2m$. Giải phương trình trong mỗi trường hợp sau:

- a) $m = \frac{1}{2}$; **ĐS:** $S = \emptyset$ b) $m = -\frac{1}{2}$; **ĐS:** $S = \mathbb{R}$ c) $m = 1$. **ĐS:** $S = \{1\}$

 **Lời giải.**

1. Khi $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình đã cho trở thành $\left[4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right]x - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \cdot x = 2$.
Suy ra $S = \emptyset$.
2. Khi $m = -\frac{1}{2}$ thì phương trình đã cho trở thành $\left[4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right]x - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$.
Suy ra $S = \mathbb{R}$.
3. Khi $m = 1$ thì phương trình đã cho trở thành $(4 \cdot 1^2 - 1)x - 1 = 2 \cdot 1 \Leftrightarrow 3x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$.
Suy ra $S = \{1\}$.

□

§3 Phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$

1 Tóm tắt lý thuyết

Sử dụng các quy tắc trong bài học trước để đưa phương trình đã cho về dạng $ax + b = 0$.
Chú ý đến các kiến thức liên quan, bao gồm:

- ☒ Các hằng đẳng thức đáng nhớ;
- ☒ Cách giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối cơ bản;
- ☒ Quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân, chia với số khác 0.
- ☒ ...

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 79. Sử dụng các phép biến đổi thường gặp để giải một số phương trình đơn giản

Các bước để giải phương trình:

Bước 1. Thực hiện phép tính để bỏ dấu ngoặc hoặc quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu;

Bước 2. Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang một vế, các hằng số sang một vế;

Bước 3. Thu gọn, giải phương trình tìm được.

 **14.** Để hai biểu thức A và B bằng nhau ta cho $A = B$ và giải phương trình tìm được.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 **Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau:

a) $5 + 3x = 4x - 9$; **ĐS:** $S = \{14\}$ b) $3,2x - 5(x - 0,2) = 5 + 0,2x$; **ĐS:**
 $S = \{-2\}$

c) $1,5 - (x + 2) = -3(x + 0,1)$; **ĐS:** d) $(x - 1) - (2x - 1) = x + 4$; **ĐS:**
 $S = \left\{\frac{1}{10}\right\}$ $S = \{-2\}$

e) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}(x + 2) = -x + 1$; **ĐS:** $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$ f) $3t - 4 + 13 + 2(t + 2) = -3t$. **ĐS:**
 $S = \left\{-\frac{13}{8}\right\}$

 Lời giải.

1. Ta có $5 + 3x = 4x - 9 \Leftrightarrow 4x - 3x = 5 + 9 \Leftrightarrow x = 14$.
Vậy $S = \{14\}$.
2. Ta có $3,2x - 5(x - 0,2) = 5 + 0,2x \Leftrightarrow 3,2x - 5x - 0,2x = 5 - 1 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$.
Vậy $S = \{-2\}$.
3. Ta có $1,5 - (x + 2) = -3(x + 0,1) \Leftrightarrow -x + 3x = -0,3 - 1,5 + 2 \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}$.
Vậy $S = \left\{\frac{1}{10}\right\}$.
4. Ta có $(x - 1) - (2x - 1) = x + 4 \Leftrightarrow x - 1 - 2x + 1 = x + 4 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$.
Vậy $S = \{-2\}$.
5. Ta có $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}(x + 2) = -x + 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$.
Vậy $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$.
6. Ta có $3t - 4 + 13 + 2(t + 2) = -3t \Leftrightarrow 3t + 2t + 3t = 4 - 13 - 4 \Leftrightarrow 8t = -13 \Leftrightarrow t = -\frac{13}{8}$.
Vậy $S = \left\{-\frac{13}{8}\right\}$.

□

 **Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau:

- | | | | |
|--|-----------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $4 - 2x = x - 2$; | ĐS: $S = \{2\}$ | b) $-3(x - 2) - (x + 1) = 5x - 4$; | ĐS: |
| | | $S = \{1\}$ | |
| c) $x - 4x + 2x - 29 = 4x + 1$; | ĐS: | d) $(2x - 1) - (4x - 1) = x + 6$; | ĐS: |
| $S = \{-6\}$ | | $S = \{-2\}$ | |
| e) $\frac{4}{5} + \left(x - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}(x + 1)$; | ĐS: | f) $3u - 4 + 2u - 3 = u - 2$. | ĐS: $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$ |
| $S = \left\{\frac{9}{10}\right\}$ | | | |

 Lời giải.

1. Ta có $4 - 2x = x - 2 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$.
Vậy $S = \{2\}$.
2. Ta có $-3(x - 2) - (x + 1) = 5x - 4 \Leftrightarrow -3x + 6 - x - 1 = 5x - 4 \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy $S = \{1\}$.
3. Ta có $x - 4x + 2x - 29 = 4x + 1 \Leftrightarrow -5x = 30 \Leftrightarrow x = -6$.
Vậy $S = \{-6\}$.
4. Ta có $(2x - 1) - (4x - 1) = x + 6 \Leftrightarrow 2x - 1 - 4x + 1 = x + 6 \Leftrightarrow -3x = 6 \Leftrightarrow x = -2$.
Vậy $S = \{-2\}$.

5. Ta có $\frac{4}{5} + \left(x - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow \frac{4}{5} + x - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \frac{9}{20} \Leftrightarrow x = \frac{9}{10}$.

Vậy $S = \left\{\frac{9}{10}\right\}$.

6. Ta có $3u - 4 + 2u - 3 = u - 2 \Leftrightarrow 3u + 2u - u = -2 + 4 + 3 \Leftrightarrow 4u = 5 \Leftrightarrow u = \frac{5}{4}$.

Vậy $\left\{\frac{5}{4}\right\}$.

□

 **Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau:

1. $\frac{2(x-3)}{4} - \frac{1}{2} = \frac{6x+9}{3} - 2;$ **ĐS:** $S = \{-2\}$

2. $\frac{2(3x+1)+1}{4} - 5 = \frac{2(3x-1)}{5} - \frac{3x+2}{10};$ **ĐS:** $S = \left\{\frac{73}{12}\right\}$

3. $\frac{x}{3} + \frac{x-2}{4} = 0,5x - 2,5;$ **ĐS:** $S = \{-24\}$

4. $\frac{2x-4}{3} - 2x = -\frac{6x+3}{5} + \frac{1}{15}.$ **ĐS:** $S = \{-6\}$

 **Lời giải.**

1. Ta có $\frac{2(x-3)}{4} - \frac{1}{2} = \frac{6x+9}{3} - 2 \Leftrightarrow \frac{6(x-3)-6}{12} = \frac{4(6x+9)-24}{12}$
 $\Leftrightarrow 6x - 18 - 6 = 24x + 36 - 24 \Leftrightarrow 18x = -36 \Leftrightarrow x = -2.$

Vậy $S = \{-2\}.$

2. Ta có $\frac{2(3x+1)+1}{4} - 5 = \frac{2(3x-1)}{5} - \frac{3x+2}{10} \Leftrightarrow \frac{10(3x+1)+5-100}{20} = \frac{8(3x-1)-2(3x+2)}{20}$
 $\Leftrightarrow 30x + 10 + 5 - 100 = 24x - 8 - 6x - 4 \Leftrightarrow 12x = 73 \Leftrightarrow x = \frac{73}{12}.$

Vậy $S = \left\{\frac{73}{12}\right\}.$

3. Ta có $\frac{x}{3} + \frac{x-2}{4} = 0,5x - 2,5 \Leftrightarrow \frac{4x+3(x-2)}{12} = \frac{12(0,5x-2,5)}{12}$
 $\Leftrightarrow 4x + 3x - 6 = 6x - 30 \Leftrightarrow x = -24.$

Vậy $S = \{-24\}.$

4. Ta có $\frac{2x-4}{3} - 2x = -\frac{6x+3}{5} + \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{5(2x-4)-30x}{15} = \frac{-3(6x+3)+1}{15}$
 $\Leftrightarrow 10x - 20 - 30x = -18x - 9 + 1 \Leftrightarrow -2x = 12 \Leftrightarrow x = -6.$

Vậy $S = \{-6\}.$

□

 **Ví dụ 4.** Giải các phương trình sau:

1. $\frac{5x-3}{2} - 3 = \frac{2+5x}{4};$ **ĐS:** $S = \{4\}$

$$2. \frac{3(x+3)}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5x+9}{3} - \frac{7x-9}{4};$$

$$\text{ĐS: } S = \{3\}$$

$$3. 2(0,2 - 1,3x) = \frac{5x-6}{3} + 4;$$

$$\text{ĐS: } S = \left\{-\frac{3}{8}\right\}$$

$$4. \frac{7-3x}{12} + \frac{3}{4} = 2(x-2) + \frac{5(5-2x)}{6}.$$

$$\text{ĐS: } S = \{2\}$$

 Lời giải.

$$1. \text{ Ta có } \frac{5x-3}{2} - 3 = \frac{2+5x}{4} \Leftrightarrow \frac{2(5x-3)-12}{4} = \frac{2+5x}{4}$$

$$\Leftrightarrow 10x-6-12=2+5x \Leftrightarrow 5x=20 \Leftrightarrow x=4.$$

$$\text{Vậy } S = \{4\}.$$

$$2. \text{ Ta có } \frac{3(x+3)}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5x+9}{3} - \frac{7x-9}{4} \Leftrightarrow \frac{9(x+3)+6}{12} = \frac{4(5x+9)-3(7x-9)}{12}$$

$$\Leftrightarrow 9x+27+6=20x+36-21x+27 \Leftrightarrow 10x=30 \Leftrightarrow x=3.$$

$$\text{Vậy } S = \{3\}.$$

$$3. \text{ Ta có } 2(0,2 - 1,3x) = \frac{5x-6}{3} + 4 \Leftrightarrow \frac{6(0,2 - 1,3x)}{3} = \frac{5x-6+12}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1,2 - 7,8x = 5x+6 \Leftrightarrow 12,8x = -4,8 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{8}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{-\frac{3}{8}\right\}.$$

$$4. \text{ Ta có } \frac{7-3x}{12} + \frac{3}{4} = 2(x-2) + \frac{5(5-2x)}{6} \Leftrightarrow \frac{7-3x+9}{12} = \frac{24(x-2)+10(5-2x)}{12}$$

$$\Leftrightarrow 7-3x+9=24x-48+50-20x \Leftrightarrow -7x=-14 \Leftrightarrow x=2.$$

$$\text{Vậy } S = \{2\}.$$

□

 **Ví dụ 5.** Tìm các giá trị của x sao cho hai biểu thức A và B sau đây có giá trị bằng nhau:

$$1. A = 2(x-3) + 5x(x-1) \text{ và } B = 5x^2;$$

$$\text{ĐS: } x = -2$$

$$2. A = 5x(x+1) \text{ và } B = 5x^2 + 3(x-2);$$

$$\text{ĐS: } x = -3$$

$$3. A = (x-3)(x+3) + 3x^2 \text{ và } B = (2x-1)^2 + x;$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{10}{3}$$

$$4. A = (x+2)^3 - (x-6)^3 \text{ và } B = 6(2x-1)(2x+1).$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{115}{48}$$

 Lời giải.

$$1. \text{ Ta có } A = B \Leftrightarrow 2(x-3) + 5x(x-1) = 5x^2 \Leftrightarrow 2x-6+5x^2-5x = 5x^2 \Leftrightarrow -3x=6 \Leftrightarrow x=-2.$$

$$2. \text{ Ta có } A = B \Leftrightarrow 5x(x+1) = 5x^2 + 3(x-2) \Leftrightarrow 5x^2 + 5x = 5x^2 + 3x - 6 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3.$$

$$3. \text{ Ta có } A = B \Leftrightarrow (x-3)(x+3) + 3x^2 = (2x-1)^2 + x \Leftrightarrow x^2 - 9 + 3x^2 = 4x^2 - 4x + 1 + x \Leftrightarrow 3x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}.$$

4. Ta có $A = B \Leftrightarrow (x+2)^3 - (x-6)^3 = 6(2x-1)(2x+1) \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (x^3 - 18x^2 + 108x - 216) = 6(4x^2 - 1) \Leftrightarrow -96x = -230 \Leftrightarrow x = \frac{115}{48}$.

□

Ví dụ 6. Tìm các giá trị của x sao cho hai biểu thức A và B sau đây có giá trị bằng nhau:

1. $A = 2x(x+5)$ và $B = (x+3)^2 + (x-1)^2 + 20$; **ĐS:** $x = 5$

2. $A = (x-2)(x+3) + 2x$ và $B = (x-2)^2 + 4$; **ĐS:** $x = 2$

3. $A = (2x-1)(2x+1) - x^2$ và $B = x(3x+4) + x - 2$; **ĐS:** $x = \frac{1}{5}$

4. $A = (x+3)^3 - (x-1)^3$ và $B = 3(2x-3)(2x+3)$. **ĐS:** $x = -\frac{55}{24}$

Lời giải.

1. Ta có $A = B \Leftrightarrow 2x(x+5) = (x+3)^2 + (x-1)^2 + 20 \Leftrightarrow 2x^2 + 10x = x^2 + 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 + 20 \Leftrightarrow 6x = 30 \Leftrightarrow x = 5$.

2. Ta có $A = B \Leftrightarrow (x-2)(x+3) + 2x = (x-2)^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2x - 6 + 2x = x^2 - 4x + 4 + 4 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2$.

3. Ta có $A = B \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) - x^2 = x(3x+4) + x - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 - x^2 = 3x^2 + 4x + x - 2 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$.

4. Ta có $A = B \Leftrightarrow (x+3)^3 - (x-1)^3 = 3(2x-3)(2x+3) \Leftrightarrow x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 3(4x^2 - 9) \Leftrightarrow 24x = -55 \Leftrightarrow x = -\frac{55}{24}$.

□

Dạng 80. Phương trình có chứa tham số

☒ Thực hiện quy tắc chuyển vế đổi dấu, quy tắc nhân, hằng đẳng thức, quy đồng mẫu rồi khử mẫu,... để biến đổi phương trình về dạng $ax + b = 0$.

☒ Nếu giá trị x_0 là nghiệm của phương trình $A(x) = B(x)$ thì $A(x_0) = B(x_0)$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho phương trình $3(a-2)x + 2a(x-1) = 4a + 3$ (1).

1. Giải phương trình (1) với $a = -2$. **ĐS:** $S = \left\{ \frac{16}{9} \right\}$

2. Tìm a để phương trình (1) có nghiệm $x = 1$. **ĐS:** $a = -9$

Lời giải.

1. Khi $a = -2$ thì phương trình (1) trở thành

$$3(-2-2)x + 2(-2)(x-1) = 4(-2) + 3 \Leftrightarrow -16x = -9 \Leftrightarrow x = \frac{16}{9}.$$

Vậy với $a = -2$ thì $S = \left\{ \frac{16}{9} \right\}$.

2. Vì phương trình (1) có nghiệm $x = 1$ nên

$$3(a - 2) \cdot 1 + 2a(1 - 1) = 4a + 3 \Leftrightarrow a = -9.$$

Vậy để phương trình (1) có nghiệm $x = 1$ thì $a = -9$.

□

Ví dụ 2. Cho phương trình $2ax - 3(a + 1)x = a - 2$ (1).

1. Giải phương trình (1) với $a = 3$.

$$\text{ĐS: } S = \left\{ -\frac{1}{6} \right\}$$

2. Tìm a để phương trình (1) có nghiệm $x = -2$.

$$\text{ĐS: } a = -8$$

Lời giải.

1. Khi $a = 3$ thì phương trình đã cho trở thành

$$2 \cdot 3x - 3(3 + 1)x = 3 - 2 \Leftrightarrow -6x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}.$$

Vậy với $a = 3$ thì $S = \left\{ -\frac{1}{6} \right\}$.

2. Vì phương trình (1) có nghiệm $x = -2$ nên

$$2a(-2) - 3(a + 1)(-2) = a - 2 \Leftrightarrow a = -8.$$

Vậy để phương trình (1) có nghiệm $x = -2$ thì $a = -8$.

□

Ví dụ 3. Cho phương trình

$$\frac{7x - 108}{8} - 2(x - 9) = \frac{-1}{4}(x + 3) \quad (3.1)$$

$$2(a - 1)x + a(x - 1) = 3a. \quad (3.2)$$

1. Chứng tỏ phương trình (1) có nghiệm duy nhất, tìm nghiệm duy nhất đó.

ĐS:

$$S = \{6\}$$

2. Giải phương trình (2) khi $a = 2$.

$$\text{ĐS: } x = 2$$

3. Tìm giá trị của a để phương trình (2) có một nghiệm bằng $\frac{1}{2}$ nghiệm của phương trình (1).

$$\text{ĐS: } a = \frac{6}{5}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có } \frac{7x - 108}{8} - 2(x - 9) &= \frac{-1}{4}(x + 3) \Leftrightarrow \frac{7x - 108 - 16(x - 9)}{8} = \frac{-2(x + 3)}{8} \\ &\Leftrightarrow 7x - 16x + 2x = -6 + 108 - 144 \Leftrightarrow -7x = -42 \Leftrightarrow x = 6. \end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = 6$.

2. Khi $a = 2$ thì phương trình (2) trở thành

$$2(2 - 1)x + 2(x - 1) = 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy khi $a = 2$ thì phương trình (2) có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

3. Theo đề ta suy ra phương trình (2) có một nghiệm bằng 3 nên

$$2(a - 1) \cdot 3 + a(3 - 1) = 3a \Leftrightarrow 5a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{6}{5}.$$

□

 **Ví dụ 4.** Cho phương trình

$$\frac{2x - 1}{4} - 2(x - 3) = \frac{-1}{4}(x + 5) \quad (1)$$

$$3(a - 1)x + a(x - 1) = 4a. \quad (2)$$

1. Chứng tỏ phương trình (1) có nghiệm duy nhất, tìm nghiệm duy nhất đó. **ĐS:**

$$S = \left\{ \frac{28}{5} \right\}$$

2. Giải phương trình (2) khi $a = 2$. **ĐS:** $x = 2$

3. Tìm giá trị của a để phương trình (2) có một nghiệm bằng $\frac{1}{4}$ nghiệm của phương trình (1). **ĐS:** $a = 7$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có } \frac{2x - 1}{4} - 2(x - 3) &= \frac{-1}{4}(x + 5) \Leftrightarrow \frac{2x - 1 - 8(x - 3)}{4} = \frac{-(x + 5)}{4} \\ &\Leftrightarrow -5x = -28 \Leftrightarrow x = \frac{28}{5}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = \frac{28}{5}$.

2. Khi $a = 2$ thì phương trình (2) trở thành

$$3(2 - 1)x + 2(x - 1) = 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 3x + 2(x - 1) = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy khi $a = 2$ thì phương trình (2) có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

3. Theo đề ta suy ra phương trình (2) có nghiệm bằng $\frac{7}{5}$ nên

$$3(a - 1)\frac{7}{5} + a\left(\frac{7}{5} - 1\right) = 4a \Leftrightarrow 21(a - 1) + 2a = 20a \Leftrightarrow 3a = 21 \Leftrightarrow a = 7.$$

□

 **Dạng 81. Tìm điều kiện để biểu thức chứa ẩn ở mẫu xác định**

$\frac{A(x)}{B(x)}$ xác định khi và chỉ khi $B(x) \neq 0$.

❖❖❖ **BÀI TẬP MẪU** ❖❖❖

Giáo viên:

Ví dụ 1. Tìm điều kiện của x để giá trị mỗi phân thức sau xác định

a) $\frac{4x}{5(2x+1)}$; **ĐS:** $x \neq -\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{(x-2)(x+3)}$. **ĐS:** $x \neq 2; x \neq -3$

Lời giải.

1. ĐKXD: $5(2x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$.

2. ĐKXD: $(x-2)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2; x \neq -3$.

□

Ví dụ 2. Tìm điều kiện của x để giá trị mỗi phân thức sau xác định

a) $\frac{1}{-3(x-3)}$; **ĐS:** $x \neq 3$ b) $\frac{4x-2}{2(x-1)}$. **ĐS:** $x \neq 1$

Lời giải.

1. ĐKXD: $-3(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

2. ĐKXD: $2(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

□

Dạng 82. Một số bài toán đưa về giải phương trình bậc nhất một ẩn

Dựa vào các dữ kiện của bài toán để lập phương trình bậc nhất một ẩn.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Một nhóm phượt phủ khởi hành từ Hà Nội đi Sa Pa với vận tốc trung bình 36 km/h. Sau đó 1 giờ, một nhóm phượt phủ khác cũng khởi hành từ Hà Nội đi Sa Pa, cùng đường với nhóm đi trước, với vận tốc trung bình 54 km/h. Hãy viết phương trình biểu thị việc hai nhóm phượt phủ gặp nhau x giờ, kể từ khi nhóm thứ hai khởi hành. Tìm x . **ĐS:** $x = 2$

Lời giải.

Quãng đường đi được đến lúc gặp nhau của nhóm phượt phủ đi trước là $36(x+1)$.

Quãng đường đi được đến lúc gặp nhau của nhóm phượt phủ đi sau là $54x$.

Hai nhóm phượt phủ gặp nhau khi quãng đường đi bằng nhau nên ta có phương trình

$$54x = 36(x+1) \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy hai nhóm gặp nhau khi nhóm thứ hai đi được 2 giờ.

□

Ví dụ 2. Một xe máy khởi hành từ thành phố Hồ Chí Minh đi Cần Thơ với vận tốc trung bình 40 km/h. Sau đó 2 giờ, một ô tô cũng khởi hành từ thành phố Hồ Chí Minh đi Cần Thơ, cùng đường với nhóm đi trước, với vận tốc trung bình 60 km/h. Hãy viết phương trình biểu thị việc ô tô gặp xe máy sau y giờ, kể từ khi ô tô khởi hành. Tìm y . **ĐS:** $y = 4$

 Lời giải.

Quãng đường đi được của xe máy đến lúc gặp nhau là $40(y + 2)$.

Quãng đường đi được của ô tô đến lúc gặp nhau là $60y$.

Ô tô gặp xe máy khi quãng đường đi bằng nhau nên ta có phương trình

$$60y = 40(y + 2) \Leftrightarrow y = 4.$$

Vậy xe máy và ô tô gặp nhau khi ô tô đi được 4 giờ. □

 **Ví dụ 3.** Bằng cách đặt ẩn phụ, giải các phương trình sau

$$1. \frac{5(3x - 7)}{5} - 4 = \frac{2(3x - 7)}{5} + 8. \quad \text{ĐS: } S = \{9\}$$

$$2. (x\sqrt{3} - 1)(4 + 2\sqrt{2}) = 4x\sqrt{3} - 2\sqrt{2}. \quad \text{ĐS: } S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right\}$$

 Lời giải.

$$1. \text{ Đặt } u = \frac{3x - 7}{5}, \text{ khi đó phương trình trở thành } 5u - 4 = 2u + 8 \Leftrightarrow u = 4.$$

$$\text{Suy ra } \frac{3x - 7}{5} = 4 \Leftrightarrow 3x - 7 = 20 \Leftrightarrow x = 9.$$

$$\text{Vậy } S = \{9\}.$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Ta có } (x\sqrt{3} - 1)(4 + 2\sqrt{2}) &= 4x\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow (x\sqrt{3} - 1)(4 + 2\sqrt{2}) = 4x\sqrt{3} - 4 + 4 - 2\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow (x\sqrt{3} - 1)(4 + 2\sqrt{2}) = 4(x\sqrt{3} - 1) + 4 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Đặt $u = x\sqrt{3} - 1$, khi đó phương trình trở thành

$$u(4 + 2\sqrt{2}) = 4u + 4 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4u + 2\sqrt{2}u = 4u + 4 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow u = \sqrt{2} - 1.$$

$$\text{Suy ra } x\sqrt{3} - 1 = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right\}. \quad \text{□}$$

 **Ví dụ 4.** Bằng cách đặt ẩn phụ, giải các phương trình sau:

$$1. \frac{7(22x + 5)}{3} - 9 = \frac{6(22x + 5)}{3} + 22; \quad \text{ĐS: } S = \{4\}$$

$$2. (x\sqrt{5} - 2)(1 + \sqrt{2}) = x\sqrt{5} - \sqrt{2}. \quad \text{ĐS: } S = \left\{ \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{5}} \right\}$$

 Lời giải.

$$1. \text{ Đặt } u = \frac{22x + 5}{3}, \text{ khi đó phương trình trở thành } 7u - 9 = 6u + 22 \Leftrightarrow u = 31.$$

$$\text{Suy ra } \frac{22x + 5}{3} = 31 \Leftrightarrow 22x + 5 = 93 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$\text{Vậy } S = \{4\}.$$

2. Ta có $(x\sqrt{5} - 2)(1 + \sqrt{2}) = x\sqrt{5} - \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow (x\sqrt{5} - 2)(1 + \sqrt{2}) = x\sqrt{5} - 2 + 2 - \sqrt{2}$$

Đặt $u = x\sqrt{5} - 2$, khi đó phương trình trở thành

$$u(1 + \sqrt{2}) = u + 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}u = 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow u = \sqrt{2} - 1.$$

Suy ra $x\sqrt{5} - 2 = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{5}}.$

Vậy $S = \left\{ \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{5}} \right\}.$

□

3 Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Giải các phương trình sau

a) $2 + 3x = 5x - 3$; **ĐS:** $S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}.$ b) $(3x - 5) - 2(2x + 1) = x + 2$; **ĐS:**
 $S = \left\{ -\frac{9}{2} \right\}$

c) $x + 2x - 3x - 9 = 2x + 3$; **ĐS:** $S = \{-6\}$ d) $(5x + 2) - 4(3x + 1) = -2x + 8$; **ĐS:**
 $S = \{-2\}$

e) $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \left(3x - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}x + 2$; **ĐS:** $S = \left\{ \frac{7}{22} \right\}$ f) $u + 2 - 2u + 3 = 3u - 4$. **ĐS:** $S = \left\{ \frac{9}{4} \right\}$

 **Lời giải.**

1. Ta có $2 + 3x = 5x - 3 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$

Suy ra $S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}.$

2. Ta có $(3x - 5) - 2(2x + 1) = x + 2 \Leftrightarrow 2x = -9 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2}.$

Suy ra $S = \left\{ -\frac{9}{2} \right\}.$

3. Ta có $x + 2x - 3x - 9 = 2x + 3 \Leftrightarrow -2x = 12 \Leftrightarrow x = -6.$

Suy ra $S = \{-6\}.$

4. Ta có $(5x + 2) - 4(3x + 1) = -2x + 8 \Leftrightarrow -5x = 10 \Leftrightarrow x = -2.$

Suy ra $S = \{-2\}.$

5. Ta có $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \left(3x - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}x + 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + 4x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}x + 2 \Leftrightarrow \frac{11}{3}x = \frac{7}{6} \Leftrightarrow x = \frac{7}{22}.$

Suy ra $S = \left\{ \frac{7}{22} \right\}.$

6. Ta có $u + 2 - 2u + 3 = 3u - 4 \Leftrightarrow 4u = 9 \Leftrightarrow u = \frac{9}{4}$.

Suy ra $S = \left\{\frac{9}{4}\right\}$.

□

Bài 2. Giải các phương trình sau

1. $\frac{3x+2}{2} - \frac{3x+1}{6} = \frac{5}{3} + 2x;$ **ĐS:** $S = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$

2. $\frac{x+2}{3} - \frac{3x-1}{5} = -2;$ **ĐS:** $S = \left\{\frac{43}{4}\right\}$

3. $\frac{x}{20} - \frac{x-10}{25} = -2;$ **ĐS:** $S = \{-240\}$

4. $\frac{x+1}{11} - \frac{2x-5}{15} = \frac{3x-47}{17} - \frac{4x-59}{19}.$ **ĐS:** $S = \{10\}$

Lời giải.

1. Ta có $\frac{3x+2}{2} - \frac{3x+1}{6} = \frac{5}{3} + 2x \Leftrightarrow \frac{3(3x+2) - (3x+1)}{6} = \frac{10+12x}{6}$
 $\Leftrightarrow 6x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{6}.$

Vậy $S = \left\{-\frac{5}{6}\right\}.$

2. Ta có $\frac{x+2}{3} - \frac{3x-1}{5} = -2 \Leftrightarrow \frac{5(x+2) - 3(3x-1)}{15} = \frac{-30}{15}$
 $\Leftrightarrow -4x = -43 \Leftrightarrow x = \frac{43}{4}.$

Vậy $S = \left\{\frac{43}{4}\right\}.$

3. Ta có $\frac{x}{20} - \frac{x-10}{25} = -2 \Leftrightarrow \frac{5x - 4(x-10)}{100} = \frac{-200}{100} \Leftrightarrow x = -240.$

Vậy $S = \{-240\}.$

4. Ta có $\frac{x+1}{11} - \frac{2x-5}{15} = \frac{3x-47}{17} - \frac{4x-59}{19}$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{11} - 1\right) - \left(\frac{2x-5}{15} - 1\right) = \left(\frac{3x-47}{17} + 1\right) - \left(\frac{4x-59}{19} + 1\right)$
 $\Leftrightarrow \frac{x-10}{11} - \frac{2(x-10)}{15} = \frac{3(x-10)}{17} - \frac{4(x-10)}{19}$
 $\Leftrightarrow \frac{x-10}{11} - \frac{2(x-10)}{15} - \frac{3(x-10)}{17} + \frac{4(x-10)}{19} = 0$
 $\Leftrightarrow (x-10) \left(\frac{1}{11} - \frac{2}{15} - \frac{3}{17} + \frac{4}{19}\right) = 0$
 $\Leftrightarrow x-10 = 0 \Leftrightarrow x = 10.$

Vậy $S = \{10\}.$

□

Bài 3. Tìm các giá trị của x sao cho hai biểu thức A và B sau đây có giá trị bằng nhau

1. $A = 2x(x - 5) - (x + 3)^2$ và $B = -2x - x(5 - x)$; ĐS: $x = -1$
2. $A = 2(26 - x) - 4x(x + 5)$ và $B = 2x + 1 - (2x - 1)^2$; ĐS: $x = \frac{13}{7}$
3. $A = (x + 1)^2 + (x - 1)^2$ và $B = 2x(x + 1) - 6$. ĐS: $x = 4$

 **Lời giải.**

1. Ta có $A = B \Leftrightarrow 2x(x - 5) - (x + 3)^2 = -2x - x(5 - x)$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 10x - (x^2 + 6x + 9) = -2x - 5x + x^2$
 $\Leftrightarrow -9x = 9 \Leftrightarrow x = -1.$
2. Ta có $A = B \Leftrightarrow 2(26 - x) - 4x(x + 5) = 2x + 1 - (2x - 1)^2$
 $\Leftrightarrow 52 - 2x - 4x^2 - 20x = 2x + 1 - (4x^2 - 4x + 1)$
 $\Leftrightarrow -28x = -52 \Leftrightarrow x = \frac{13}{7}.$
3. Ta có $A = B \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 2x(x + 1) - 6$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + 2x - 6$
 $\Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$

□

 **Bài 4.** Cho phương trình $(a - 4)x + a(x + 3) = a + 1$ (1).

1. Giải phương trình (1) với $a = 3$; ĐS: $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$
2. Tìm a để phương trình (1) có nghiệm $x = -2$. ĐS: $a = \frac{7}{2}$

 **Lời giải.**

1. Khi $a = 3$ thì phương trình (1) trở thành

$$(3 - 4)x + 3(x + 3) = 3 + 1 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

Vậy khi $a = 3$ thì phương trình (1) có nghiệm là $x = -\frac{5}{2}$.

2. Vì phương trình (1) có nghiệm $x = -2$ nên

$$(a - 4)(-2) + a(-2 + 3) = a + 1 \Leftrightarrow -2a = -7 \Leftrightarrow a = \frac{7}{2}.$$

□

 **Bài 5.** Cho phương trình

$$\begin{aligned} \frac{3x + 1}{2} - 2(x - 3) &= 3(x + 2) & (1) \\ 2(a - 1)x - 3a(x - 1) &= a & (2) \end{aligned}$$

1. Chứng tỏ phương trình (1) có nghiệm duy nhất, tìm nghiệm duy nhất đó; ĐS: $S = \left\{\frac{1}{7}\right\}$

2. Giải phương trình (2) khi $a = 2$;

ĐS: $S = \{1\}$

3. Tìm giá trị của a để phương trình (2) có một nghiệm bằng 7 lần nghiệm của phương trình (1).

ĐS: $a = 2$

 Lời giải.

$$1. \text{ Ta có } \frac{3x+1}{2} - 2(x-3) = 3(x+2) \Leftrightarrow \frac{3x+1-4(x-3)}{2} = \frac{6(x+2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow -7x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}.$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{7}$.

2. Khi $a = 2$ thì phương trình (2) trở thành

$$2(2-1)x - 3 \cdot 2(x-1) = 2 \Leftrightarrow -4x = -4 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy khi $a = 2$ thì phương trình (2) có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

3. Theo đề phương trình (2) có nghiệm bằng 1 nên $2(a-1) \cdot 1 - 3a(1-1) = a \Leftrightarrow a = 2$.

□

 **Bài 6.** Tìm điều kiện của x để giá trị mỗi phân thức sau xác định

a) $\frac{3x-6}{2(-x+3)}$;

ĐS: $x \neq 3$ b) $\frac{12x}{(x+1)(x-4)}$.

ĐS: $x \neq -1; x \neq 4$

 Lời giải.

1. DKXD: $2(-x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

2. DKXD: $(x+1)(x-4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1; x \neq 4$.

□

 **Bài 7.** Một xe máy khởi hành từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc trung bình 40 km/h. Sau 1 giờ một ô tô cũng khởi hành từ thành phố A đến thành phố B cùng đường với xe máy và với vận tốc trung bình là 52 km/h. Hãy viết phương trình biểu thị việc ô tô gặp xe máy sau x giờ, kể từ khi ô tô khởi hành. Tìm x .

ĐS: $x = \frac{10}{3}$

 Lời giải.

Quãng đường xe máy đi được đến lúc gặp nhau là $40(x+1)$.

Quãng đường ô tô đi được đến lúc gặp nhau là $52x$.

Ô tô gặp xe máy khi quãng đi được bằng nhau nên ta có phương trình

$$52x = 40(x+1) \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}.$$

Vậy ô tô và xe máy gặp nhau sau khi ô tô đi được $\frac{10}{3}$ giờ.

□

 **Bài 8.** Bằng cách đặt ẩn phụ, giải các phương trình sau

1. $\frac{12(10x+3)}{7} - 5 = \frac{8(10x+3)}{7} + 1$;

ĐS: $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

2. $(x\sqrt{2} + 1)(3 + \sqrt{3}) = 3x\sqrt{2} + \sqrt{3}.$

ĐS: $S = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right\}$

 **Lời giải.**

1. Đặt $u = \frac{10x + 3}{7}$, phương trình trở thành

$$12u - 5 = 8u + 1 \Leftrightarrow 4u = 6 \Leftrightarrow u = \frac{3}{2}.$$

Suy ra $\frac{10x + 3}{7} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(10x + 3) = 21 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$

Vậy $S = \left\{ \frac{3}{4} \right\}.$

2. Ta có $(x\sqrt{2} + 1)(3 + \sqrt{3}) = 3x\sqrt{2} + \sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow (x\sqrt{2} + 1)(3 + \sqrt{3}) = 3x\sqrt{2} + 3 + \sqrt{3} - 3$
 $\Leftrightarrow (x\sqrt{2} + 1)(3 + \sqrt{3}) = 3(x\sqrt{2} + 1) + \sqrt{3} - 3.$

Đặt $u = x\sqrt{2} + 1$, phương trình trở thành

$$u(3 + \sqrt{3}) = 3u + \sqrt{3} - 3 \Leftrightarrow \sqrt{3}u = \sqrt{3} - 3 \Leftrightarrow u = 1 - \sqrt{3}.$$

Suy ra $x\sqrt{2} + 1 = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$

Vậy $S = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right\}.$

□

§4 Phương trình tích

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Phương trình tích dạng $A(x) \cdot B(x) = 0$

Giải phương trình dạng $A(x) \cdot B(x) = 0$ ta sử dụng công thức

$$A(x) \cdot B(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0. \end{cases}$$

Ví dụ: Phương trình $(2x - 1)(x + 3) = 0$ được gọi là một phương trình tích. Ta có:

$$(2x - 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -3. \end{cases}$$

1.2 Mở rộng với phương trình tích:

$$A(x) \cdot B(x) \cdots M(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \\ \dots \\ M(x) = 0. \end{cases}$$

2 Các dạng toán

Dạng 83. Giải phương trình tích

✓ Bước 1. Áp dụng công thức $A(x) \cdot B(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0. \end{cases}$

✓ Bước 2. Lấy tất cả các nghiệm rồi kết luận.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

1. $(x - 2)(x + 3) = 0;$

ĐS: $\{-3; 2\}$

2. $(2x - 3)(x^2 + 1) = 0;$

ĐS: $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

$$3. (x+2)\left(\frac{x+1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 0;$$

$$\text{ĐS: } \left\{-2; -\frac{1}{3}\right\}$$

$$4. (x+1)(2x-1)(x-2) = 0.$$

$$\text{ĐS: } \left\{-1; \frac{1}{2}; 2\right\}$$

 **Lời giải.**

$$\text{a) } (x-2)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-3; 2\}$.

$$\text{b) } (2x-3)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \\ x^2+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x^2 = -1 \text{ (vô nghiệm vì } x^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

$$\text{c) } (x+2)\left(\frac{x+1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ \frac{x+1}{2} - \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ 3x+3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x = \frac{-1}{3}. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-2; -\frac{1}{3}\right\}$.

$$\text{d) } (x+1)(2x-1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 2x-1=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x=2. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-1; \frac{1}{2}; 2\right\}$.

□

 **Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau

$$1. (x-1)(x+8) = 0;$$

$$\text{ĐS: } \{-8; 1\}$$

$$2. (x-5)(4+x^2) = 0;$$

$$\text{ĐS: } \{5\}$$

$$3. (x-3)\left(\frac{2x}{3} + 1\right) = 0;$$

$$\text{ĐS: } \left\{-\frac{3}{2}; 3\right\}$$

$$4. (x+1)(x+4)(x-1) = 0.$$

$$\text{ĐS: } \{-4; -1; 1\}$$

 **Lời giải.**

$$\text{a) } (x-1)(x+8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-8. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-8; 1\}$.

$$\text{b) } (x-5)(4+x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ 4+x^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x^2 = -4 \text{ (vô nghiệm vì } x^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{5\}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } (x-3)\left(\frac{2x}{3}+1\right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \frac{2x}{3}+1=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{2x}{3}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}. \\ \text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } &\left\{-\frac{3}{2}; 3\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (x+1)(x+4)(x-1) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x+4=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-4 \\ x=1 \end{cases}. \\ \text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } &\{-4; -1; 1\}. \end{aligned}$$

□

Dạng 84. Giải phương trình đưa về phương trình tích

☒ Bước 1. Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích;

☒ Bước 2. Áp dụng công thức:

$$A(x) \cdot B(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0; \end{cases}$$

☒ Bước 3. Kết luận.

BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1. $3x(x-2) + 4(x-2) = 0;$ | ĐS: $\left\{-\frac{4}{3}; 2\right\}$ |
| 2. $x^2 - 9 + (x+3)(5-2x) = 0;$ | ĐS: $\{-3; 2\}$ |
| 3. $4x(3-2x) - 15 + 10x = 0;$ | ĐS: $\left\{\frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right\}$ |
| 4. $(3x-4)^2 - (x-3)^2 = 0.$ | ĐS: $\left\{\frac{7}{4}; \frac{1}{2}\right\}$ |

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } 3x(x-2) + 4(x-2) &= 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(3x+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 3x+4=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-\frac{4}{3}; 2\right\}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 - 9 + (x+3)(5-2x) &= 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x-3) + (x+3)(5-2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x-3+5-2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)(2-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ 2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-3; 2\}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } 4x(3-2x) - 15 + 10x &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x(3-2x) - 5(3-2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (3-2x)(4x-5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=3 \\ 4x=5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{5}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right\}$.

$$\begin{aligned} \text{d) } (3x-4)^2 - (x-3)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x-4+x-3)[(3x-4)-(x-3)] &= 0 \\ \Leftrightarrow (4x-7)(2x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{4} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{7}{4}; \frac{1}{2}\right\}$.

□

 **Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau

1. $2(x+6) + x(x+6) = 0;$ **ĐS:** $\{-6; -2\}$

2. $x^2 - 1 - (x-1)(1-2x) = 0;$ **ĐS:** $\{0; 1\}$

3. $3x(x-2) + 4x - 8 = 0;$ **ĐS:** $\left\{-\frac{4}{3}; 2\right\}$

4. $(3x+1)^2 - (1+2x)^2 = 0.$ **ĐS:** $\left\{-\frac{2}{5}; 0\right\}$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } 2(x+6) + x(x+6) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+6)(2+x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+6=0 \\ 2+x=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ x=-2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-6; -2\}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 - 1 - (x-1)(1-2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-1) - (x-1)(1-2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)[(x+1) - (1-2x)] &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)3x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0; 1\}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } 3x(x-2) + 4x - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x(x-2) + 4(x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(3x+4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 3x+4=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-\frac{4}{3}; 2\right\}$.

$$\begin{aligned} \text{d) } (3x+1)^2 - (1+2x)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x+1+1+2x)[(3x+1)-(1+2x)] &= 0 \\ \Leftrightarrow (5x+2)x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2=0 \\ x=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{5} \\ x=0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-\frac{2}{5}; 0\right\}$.

□

 **Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau

1. $x(x-1) = 2x(x-2);$ **ĐS:** $\{0; 3\}$

2. $\frac{x}{3}(2x+5) = (2x+5)(x-1);$ **ĐS:** $\left\{-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

3. $2x + 6 = 4x(x + 3);$

ĐS: $\left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$

4. $\frac{2}{5}x - 2 = 3x(x - 5).$

ĐS: $\left\{\frac{2}{15}; 5\right\}$

 Lời giải.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & x(x - 1) = 2x(x - 2) \\
 & \Leftrightarrow x(x - 1) = x(2x - 4) \\
 & \Leftrightarrow x[(2x - 4) - (x - 1)] = 0 \\
 & \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0; 3\}$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \frac{x}{3}(2x + 5) = (2x + 5)(x - 1) \\
 & \Leftrightarrow x(2x + 5) = (2x + 5)(3x - 3) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (2x + 5)(3x - 3 - x) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (2x + 5)(2x - 3) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5 = 0 \\ 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ x = \frac{3}{2}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right\}$.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & 2x + 6 = 4x(x + 3) \\
 & \Leftrightarrow 2(x + 3) = 4x(x + 3) \\
 & \Leftrightarrow (x + 3)(4x - 2) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ 4x - 2 = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$.

$$\begin{aligned}
 \text{d) } & \frac{2}{5}x - 2 = 3x(x - 5) \\
 & \Leftrightarrow 2(x - 5) = 15x(x - 5) \\
 & \Leftrightarrow (x - 5)(15x - 2) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \\ 15x - 2 = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{2}{15}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{2}{15}; 5\right\}$.

□

 Ví dụ 4. Giải các phương trình sau

1. $x(x - 2) = x(2x + 1);$

ĐS: $\{-3; 0\}$

2. $\frac{x}{2}(x - 2) = (x - 2)(3x + 1);$

ĐS: $\left\{-\frac{2}{5}; 2\right\}$

3. $3x(x - 2) = 4x - 8;$

ĐS: $\left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$

4. $\frac{x}{3} - 1 = x(x - 3).$

ĐS: $\left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$

 Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } & x(x-2) = x(2x+1) \\ & \Leftrightarrow x[(x-2) - (2x+1)] = 0 \\ & \Leftrightarrow x(-x-3) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x-3 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-3; 0\}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{x}{2}(x-2) = (x-2)(3x+1) \\ & \Leftrightarrow x(x-2) = (x-2)(6x+2) \\ & \Leftrightarrow (x-2)(6x+2-x) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-2)(5x+2) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \\ 5x+2 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-\frac{2}{5}; 2\right\}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } & 3x(x-2) = 4x-8 \\ & \Leftrightarrow 3x(x-2) - 4(x-2) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-2)(3x-4) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \\ 3x-4 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$.

$$\begin{aligned} \text{d) } & \frac{x}{3} - 1 = x(x-3) \\ & \Leftrightarrow x-3 = 3x(x-3) \\ & \Leftrightarrow (x-3)(1-3x) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 0 \\ 1-3x = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$.

□

 **Ví dụ 5.** Giải các phương trình bậc hai sau bằng cách đưa về dạng phương trình tích:

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. $(x^2 + 4x + 4) - 16 = 0;$ | ĐS: $\{-6; 2\}$ |
| 2. $x^2 + x = 2x + 2;$ | ĐS: $\{-1; 2\}$ |
| 3. $x^2 + 3x + 2 = 0;$ | ĐS: $\{-2; -1\}$ |
| 4. $2x^2 + 7x - 9 = 0.$ | ĐS: $\left\{-\frac{9}{2}; 1\right\}$ |

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } & (x^2 + 4x + 4) - 16 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+2)^2 - 4^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+2+4)(x+2-4) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+6)(x-2) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x+6 = 0 \\ x-2 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-6; 2\}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } & x^2 + x = 2x + 2 \\ & \Leftrightarrow x(x+1) - 2(x+1) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ x-2 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-1; 2\}$.

c) $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) + 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-2; -1\}$.

d) $2x^2 + 7x - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 9x - 2x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 2x) + (9x - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x-1) + 9(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2x+9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{9}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-\frac{9}{2}; 1\right\}$.

□

Ví dụ 6. Giải các phương trình bậc hai sau bằng cách đưa về dạng phương trình tích:

1. $(x^2 + 2x + 1) - 9 = 0;$

ĐS: $\{-4; 2\}$

2. $x^2 - 2x = 4x - 8;$

ĐS: $\{4; 2\}$

3. $x^2 - 7x + 6 = 0;$

ĐS: $\{1; 6\}$

4. $2x^2 - 3x - 5 = 0.$

ĐS: $\left\{\frac{5}{2}; -1\right\}$

Lời giải.

a) $(x^2 + 2x + 1) - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1+3)(x+1-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4=0 \\ x-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-4; 2\}$.

b) $x^2 - 2x = 4x - 8$

$$\Leftrightarrow x(x-2) - 4(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ x-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{4; 2\}$.

c) $x^2 - 7x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) - 6(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=6 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1; 6\}$.

d) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 2x) - (5x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x+1) - 5(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 2x-5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2x-5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{5}{2}; -1\right\}$.

□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1. $(3x - 1)(2x + 5) = 0;$ **ĐS:** $\left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{3}\right\}$
2. $(3 - 4x)(x^2 + 2) = 0;$ **ĐS:** $\left\{\frac{3}{4}\right\}$
3. $(x + 1)\left(\frac{2}{5} + \frac{2 - x}{4}\right) = 0;$ **ĐS:** $\left\{-1; \frac{18}{5}\right\}$
4. $(3 - x)(x - 4)(2x + 7) = 0.$ **ĐS:** $\left\{-\frac{7}{2}; 3; 4\right\}$

Lời giải.

- a) $(3x - 1)(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}.$
 Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{3}\right\}.$
- b) $(3 - 4x)(x^2 + 2) = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4x = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \text{ (vô lí vì } x^2 + 2 > 0 \text{ với mọi } x) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$
 Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{3}{4}\right\}.$
- c) $(x + 1)\left(\frac{2}{5} + \frac{2 - x}{4}\right) = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ \frac{2}{5} + \frac{2 - x}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \frac{x - 2}{4} = \frac{2}{5} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 5x - 10 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{18}{5} \end{cases}.$
 Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-1; \frac{18}{5}\right\}.$
- d) $(3 - x)(x - 4)(2x + 7) = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = 0 \\ x - 4 = 0 \\ 2x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases}.$
 Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-\frac{7}{2}; 3; 4\right\}.$

□

Bài 2. Giải các phương trình sau:

1. $\frac{1}{8}x(2x - 1) - 5(2x - 1) = 0;$ **ĐS:** $\left\{\frac{1}{2}; 40\right\}$
2. $x^2 - 4 + (x - 2)(3 - 5x) = 0;$ **ĐS:** $\left\{\frac{5}{4}; 2\right\}$
3. $\frac{x}{2}(x - 5) - 25 + 5x = 0;$ **ĐS:** $\{-10; 5\}$
4. $(2 - 3x)^2 - (1 + 2x)^2 = 0.$ **ĐS:** $\left\{\frac{1}{5}; 3\right\}$

Lời giải.

$$\text{a) } \frac{1}{8}x(2x-1) - 5(2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x-40) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ x-40=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=40. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{1}{2}; 40\right\}$.

$$\text{b) } x^2 - 4 + (x-2)(3-5x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) + (x-2)(3-5x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2+3-5x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(5-4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 5-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{5}{4}. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{5}{4}; 2\right\}$.

$$\text{c) } \frac{x}{2}(x-5) - 25 + 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-5) + (10x-50) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-5) + 10(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x+10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-10. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-10; 5\}$.

$$\text{d) } (2-3x)^2 - (1+2x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(2-3x) + (1+2x)][(2-3x) - (1+2x)] = 0$$

$$0 \Leftrightarrow (3-x)(1-5x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=0 \\ 1-5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{1}{5}; 3\right\}$.

□

 **Bài 3.** Giải các phương trình sau:

$$1. \quad x(3+2x) = x(5-3x); \quad \text{ĐS: } \left\{\frac{2}{5}; 0\right\}$$

$$2. \quad \frac{x}{5}(3+2x) = (7x-5)(2x+3); \quad \text{ĐS: } \left\{-\frac{3}{2}; \frac{25}{34}\right\}$$

$$3. \quad \frac{x}{3}(5x+3) = 10x+6; \quad \text{ĐS: } \left\{-\frac{3}{5}; 6\right\}$$

$$4. \quad \frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{6}(x+2). \quad \text{ĐS: } \{-2; 3\}$$

 **Lời giải.**

$$\text{a) } x(3+2x) = x(5-3x)$$

$$\Leftrightarrow x[(3+2x) - (5-3x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow x(5x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 5x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2}{5}. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{2}{5}; 0\right\}$.

$$\text{b) } \frac{x}{5}(3+2x) = (7x-5)(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow x(2x+3) = (35x-25)(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)(35x-25-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)(34x-25) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3=0 \\ 34x-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ x=\frac{25}{34}. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{25}{34}\right\}$.

$$c) \frac{x}{3}(5x+3) = 10x+6$$

$$\Leftrightarrow x(5x+3) = 6(5x+3)$$

$$\Leftrightarrow (5x+3)(x-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3=0 \\ x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{5} \\ x=6. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-\frac{3}{5}; 6\right\}$.

$$d) \frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{6}(x+2) \Leftrightarrow 3x+6 = x(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 3(x+2) = x(x+2) \Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-2; 3\}$.

□

 **Bài 4.** Giải các phương trình bậc hai sau bằng cách đưa về dạng phương trình tích:

$$1. (x^2 - 4x + 4) - 25 = 0;$$

$$\text{ĐS: } \{-3; 7\}$$

$$2. x^2 + 3x = 5x + 15;$$

$$\text{ĐS: } \{-3; 5\}$$

$$3. x^2 - 9x + 8 = 0;$$

$$\text{ĐS: } \{1; 8\}$$

$$4. 4x^2 - 12x + 5 = 0.$$

$$\text{ĐS: } \left\{\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right\}$$

 **Lời giải.**

$$a) (x^2 - 4x + 4) - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 5^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2+5)(x-2-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=7. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-3; 7\}$.

$$b) x^2 + 3x = 5x + 15$$

$$\Leftrightarrow x(x+3) - 5(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=5. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-3; 5\}$.

$$c) x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 8x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) - 8(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=8. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1; 8\}$.

$$d) 4x^2 - 12x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 10x - 2x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 2x) - (2x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(2x-1) - 5(2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(2x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 2x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right\}$.

□

§5 Phương trình chứa ẩn ở mẫu

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

- ✓ *Bước 1.* Tìm điều kiện xác định của phương trình;
- ✓ *Bước 2.* Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu;
- ✓ *Bước 3.* Giải phương trình vừa nhận được;
- ✓ *Bước 4* (Kết luận). Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định chính là nghiệm của phương trình đã cho.

Lưu ý: Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta cần đặc biệt chú ý đến *điều kiện xác định* (ĐKXD) là tất cả các mẫu thức phải khác 0.

2 Các dạng toán

Dạng 85. Tìm điều kiện xác định của biểu thức

Biểu thức $\frac{A(x)}{B(x)}$ [với $A(x), B(x)$ là các đa thức] xác định khi và chỉ khi $B(x)$ khác 0.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

 **Ví dụ 1.** Tìm điều kiện xác định của biểu thức

$$1. A = \frac{3x+2}{x-1} + \frac{2}{1-x}; \quad \text{ĐS: } x \neq 1$$

$$2. B = \frac{-2x+3}{x^2-4x+3} + \frac{1}{x-3}; \quad \text{ĐS: } x \neq 1; 3$$

$$3. C = \frac{x+2}{x^2-x+1} + \frac{1-x}{2}; \quad \text{ĐS: } x \in \mathbb{R}$$

$$4. D = \frac{x-2}{x^3-1} + \frac{3x+2}{x^2+x+1}. \quad \text{ĐS: } x \neq 1$$

Lời giải.

1. Biểu thức A xác định khi và chỉ khi $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

2. Biểu thức B xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \neq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x - 3)(x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

3. Ta có:

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi số thực } x$$

Vậy biểu thức C xác định với mọi số thực x .

4. Ta có:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi số thực } x$$

Vậy biểu thức D xác định khi và chỉ khi $x^3 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

□

Ví dụ 2. Tìm điều kiện xác định của biểu thức

a) $A = \frac{x}{x-4} + \frac{-2}{3-x};$

b) $B = \frac{9x+3}{4x+8} + \frac{1}{2x};$

c) $C = \frac{x-1}{x^2+x+1} + \frac{3-x}{5};$

d) $D = \frac{x+2}{x^3-8} + \frac{3x-1}{x^2+2x+4}.$

Lời giải.

1. Biểu thức A xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x-4 \neq 0 \\ 3-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq 3. \end{cases}$

2. Biểu thức B xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 4x+8 \neq 0 \\ 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 0. \end{cases}$

3. Ta có:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi số thực } x$$

Vậy biểu thức C xác định với mọi số thực x .

4. Ta có:

$$x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + 3 = (x + 1)^2 + 3 > 0 \text{ với mọi số thực } x$$

Vậy biểu thức D xác định khi và chỉ khi $x^3 - 8 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

□

Dạng 86. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Áp dụng các bước giải trong phần Tóm tắt lý thuyết

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau

$$1. \frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2};$$

ĐS: PT vô nghiệm

$$2. \frac{3}{1-4x} = \frac{2}{4x+1} - \frac{8+6x}{16x^2-1};$$

ĐS: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

 **Lời giải.**

a) ĐKXD : $x \neq 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} + 3 &= \frac{3-x}{x-2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} + \frac{3(x-2)}{x-2} &= \frac{3-x}{x-2} \\ \Rightarrow 1 + 3(x-2) &= 3-x \\ \Leftrightarrow 1 + 3x - 6 &= 3-x \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (không TM ĐKXD).} \\ \text{Vậy phương trình vô nghiệm.} \end{aligned}$$

b) ĐKXD : $x \neq \left\{-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right\}$

$$\begin{aligned} \frac{3}{1-4x} &= \frac{2}{4x+1} - \frac{8+6x}{16x^2-1} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{2}{8+6x} + \frac{3}{4x-1} &= 0 \\ \Rightarrow 2(4x-1) - (8+6x) + 3(4x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 8x - 2 - 8 - 6x + 12x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 14x = 7 \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \text{ (TM ĐKXD).} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

□

 **Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau

$$1. \frac{x+3}{2-x} - \frac{1}{2} = -2;$$

ĐS: $\{-12\}$

$$2. \frac{3x+2}{3x-2} - \frac{6}{2+3x} = \frac{9x^2+4}{9x^2-4}.$$

ĐS: $\{2\}$

 **Lời giải.**

a) ĐKXD : $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{2-x} - \frac{1}{2} &= -2 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2-x} = -2 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x+3}{2-x} &= -\frac{3}{2} \Rightarrow 2(x+3) = 3(x-2) \\ \Leftrightarrow 2x+6 &= 3x-6 \Leftrightarrow x = -12 \text{ (TM ĐKXD).} \\ \text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } &\{-12\}. \end{aligned}$$

b) ĐKXD: $x \neq \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{3x-2} - \frac{6}{2+3x} &= \frac{9x^2+4}{9x^2-4} \\ \Rightarrow (3x+2)^2 - 6(3x-2) &= 9x^2+4 \\ \Leftrightarrow 9x^2+12x+4-18x+12 &= 9x^2+4 \\ \Leftrightarrow 6x &= 12 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (TM ĐKXD).} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{2\}$.

□

 **Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau

$$a) \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2+x+1} = \frac{3x^2}{x^3-1};$$

ĐS:

$$b) \frac{x-1}{x-2} - \frac{5}{x^2-4} = \frac{12}{x^2-4} + 1. \quad \text{ĐS: } \{0\}$$

$\left\{\frac{1}{2}\right\}$

 **Lời giải.**

1. ĐKXD: $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2+x+1} &= \frac{3x^2}{x^3-1} \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^3-1} + \frac{2(x-1)}{x^3-1} = \frac{3x^2}{x^3-1} \\ \Leftrightarrow x^2+x+1+2x-2 &= 3x^2 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow (2x^2-2x)-(x-1)=0 \\ \Leftrightarrow 2x(x-1)-(x-1) &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (không TM ĐKXD)} \\ x=\frac{1}{2} \text{ (TM ĐKXD)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2. ĐKXD: $x \neq \{-2; 2\}$.

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x-2} - \frac{5}{x^2-4} &= \frac{12}{x^2-4} + 1 \Rightarrow (x-1)(x+2) - 5(x-2) = 12 + (x^2-4) \\ \Leftrightarrow x^2-x+2x-2-5x+10 &= 12+x^2-4 \Leftrightarrow 4x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (TM ĐKXD)}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0\}$.

□

 **Ví dụ 4.** Giải các phương trình sau

$$1. \frac{2}{x-1} + \frac{2x+3}{x^2+x+1} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x^3-1}; \quad \text{ĐS: } \{0\}$$

$$2. 5 + \frac{96}{x^2-16} = \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x}. \quad \text{ĐS: } \{8\}$$

 **Lời giải.**

1. ĐKXD: $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-1} + \frac{2x+3}{x^2+x+1} &= \frac{(2x-1)(2x+1)}{x^3-1} \\ \Rightarrow 2(x^2+x+1) + (2x+3)(x-1) &= (2x-1)(2x+1) \\ \Leftrightarrow 2x^2+2x+2+2x^2+3x-2x-3 &= 4x^2-1 \Leftrightarrow 3x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (TM ĐKXD)}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0\}$.

2. ĐKXD: $x \neq \{-4; 4\}$.

$$\begin{aligned} 5 + \frac{96}{x^2-16} &= \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x} \\ \Rightarrow 5(x^2-16) + 96 &= (2x-1)(x-4) + (3x-1)(x+4) \\ \Leftrightarrow 5x^2-80+96 &= 2x^2-x-8x+4+3x^2+12x-x-4 \Leftrightarrow 2x=16 \Leftrightarrow x=8 \text{ (TM ĐKXD)}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{8\}$.

□

 **Ví dụ 5.** Giải các phương trình chứa ẩn ở mẫu sau

$$1. \frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2x+2} = \frac{2x}{(x+1)(x-3)}; \quad \text{ĐS: } \{0; 3\}$$

$$2. \frac{3x}{x^2-2x+4} = \frac{3}{x+2} + \frac{72}{x^3+8}. \quad \text{ĐS: } \{7\}$$

 **Lời giải.**

1. ĐKXD: $x \neq \{-1; 3\}$.

$$\frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2x+2} = \frac{2x}{(x+1)(x-3)}$$

$$\Rightarrow x(x+1) + x(x-3) = 2x \cdot 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x + x^2 - 3x = 4x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (TM ĐKXD)} \\ x = 3 \text{ (KTM ĐKXD)} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0; 3\}$.

2. ĐKXD: $x \neq -2$. $\frac{3x}{x^2 - 2x + 4} = \frac{3}{x+2} + \frac{72}{x^3 + 8}$
 $\Rightarrow 3x(x+2) = 3(x^2 - 2x + 4) + 72 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 3x^2 - 6x + 12 + 72$
 $\Leftrightarrow 12x = 84 \Leftrightarrow x = 7 \text{ (TM ĐKXD)}$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{7\}$.

□

Ví dụ 6. Giải các phương trình chứa ẩn ở mẫu sau

1. $1 + \frac{1}{x-1} + \frac{3x}{3x^2 - 6x + 3} = 0$; **ĐS:** $\{0\}$

2. $\frac{-2}{x-1} = \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 1} = 4 + \frac{4}{x^2 + x + 1}$. **ĐS:** $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

 **Lời giải.**

a) ĐKXD: $x \neq 1$.

$$1 + \frac{1}{x-1} + \frac{3x}{3x^2 - 6x + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{3x}{3(x-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (TM ĐKXD)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0\}$.

b) ĐKXD: $x \neq 1$.

$$\frac{-2}{x-1} = \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 1} = 4 + \frac{4}{x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow -2(x^2 + x + 1) + (2x^2 - 5) = 4(x-1)$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 - 2x - 2 + 2x^2 - 5 = 4x - 4$$

$$\Leftrightarrow 6x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (TM ĐKXD)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

□

Ví dụ 7. Cho phương trình ẩn x : $\frac{2x+m}{2-x} + \frac{2x-m}{2+x} = \frac{4}{4-x^2}$.

1. Giải phương trình với $m = -1$; **ĐS:** $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

2. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm $x = 1$. **ĐS:** $m = -2$

 **Lời giải.**

1. Với $m = -1$, ta có phương trình:

$$\frac{2x-1}{2-x} + \frac{2x+1}{2+x} = \frac{4}{4-x^2}$$

ĐKXD: $x \neq \{-2; 2\}$.

$$\frac{2x-1}{2-x} + \frac{2x+1}{2+x} = \frac{4}{4-x^2} \Rightarrow (2x-1)(2+x) + (2x+1)(2-x) = 4$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2 + 2x^2 - x + 4x + 2 - 2x^2 - x = 4 \Leftrightarrow 6x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ (TM ĐKXD)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

2. $x = 1$ là nghiệm của phương trình, ta có:

$$\frac{2+m}{1} + \frac{2-m}{3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 6 + 3m + 2 - m = 4 \Leftrightarrow 2m = -4 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy với $m = -2$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

□

Ví dụ 8. Cho phương trình ẩn x : $\frac{x+m}{x+3} + \frac{x-3}{x-1} = 2$.

1. Giải phương trình với $m = 1$;

ĐS: $\{-1\}$

2. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm $x = 2$.

ĐS: $m = 13$

Lời giải.

1. Với $m = 1$, ta có phương trình:

$$\frac{x+1}{x+3} + \frac{x-3}{x-1} = 2$$

ĐKXD: $x \neq \{-3; 1\}$.

$$\frac{2x-1}{2-x} + \frac{2x+1}{2+x} = \frac{4}{4-x^2} \Rightarrow (x+1)(x-1) + (x-3)(x+3) = 2(x+3)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 + x^2 - 9 = 2x^2 + 4x - 6 \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (TM ĐKXD).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-1\}$.

2. $x = 2$ là nghiệm của phương trình, ta có:

$$\frac{2+m}{5} - 1 = 2 \Leftrightarrow \frac{2+m}{5} = 3 \Leftrightarrow 2+m = 15 \Leftrightarrow m = 13.$$

Vậy với $m = 13$ thì phương trình có nghiệm $x = 2$.

□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

a) $\frac{2x+1}{x^2+7x+10}$;

ĐS: $x \neq \{-5; -2\}$

b) $\frac{3-2x}{x^2-4} + \frac{x}{2-x}$.

ĐS: $x \neq \{-2; 2\}$

Lời giải.

a) Biểu thức xác định khi và chỉ khi

$$x^2 + 7x + 10 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 2x + 10) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+5) + 2(x+5) \neq 0 \Leftrightarrow (x+5)(x+2) \neq 0$$

0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq -2. \end{cases}$$

b) Biểu thức xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ 2 - x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ 2 - x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2. \end{cases}$$

□

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$1. \frac{1}{4x^2 - 12x + 9} - \frac{3}{9 - 4x^2} = \frac{-2}{4x^2 + 12x + 9}; \quad \text{ĐS: } \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$$

$$2. 1 + \frac{14}{(x-4)^2} = \frac{-9}{x-4}; \quad \text{ĐS: } \{-3; 2\}$$

$$3. \frac{1+8x}{1+2x} - \frac{2x}{2x-1} + \frac{12x^2-9}{1-4x^2} = 0; \quad \text{ĐS: } \{1\}$$

$$4. \frac{1}{2x-6} - \frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{1}{2}. \quad \text{ĐS: } \{-3; 2\}$$

Lời giải.

$$1. \text{ĐKXĐ } x \neq \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4x^2 - 12x + 9} - \frac{3}{9 - 4x^2} = \frac{-2}{4x^2 + 12x + 9} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{(2x-3)^2} + \frac{3}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{-2}{(2x+3)^2} \\ \Rightarrow & (2x+3)^2 + 3(2x+3)(2x-3) = -2(2x-3)^2 \\ \Leftrightarrow & 4x^2 + 12x + 9 + 3(4x^2 - 9) + 2(4x^2 - 12x + 9) = 0 \\ \Leftrightarrow & 4x^2 + 12x + 9 + 12x^2 - 27 + 8x^2 - 24x + 18 = 0 \\ \Leftrightarrow & 24x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 12x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{TMDKXĐ}). \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$.

$$2. \text{ĐKXĐ } x \neq 4.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{14}{(x-4)^2} = \frac{-9}{x-4} \Rightarrow (x-4)^2 + 14 = -9(x-4) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 8x + 16 + 14 + 9x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + 3x - 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x(x+3) - 2(x+3) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \end{cases} \quad (\text{TMDKXĐ}). \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-3; 2\}$.

$$3. \text{ĐKXĐ } x \neq \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}.$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+8x}{1+2x} - \frac{2x}{2x-1} + \frac{12x^2-9}{1-4x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1+8x}{1+2x} + \frac{2x}{1-2x} + \frac{12x^2-9}{(1-2x)(1+2x)} = 0 \\ \Rightarrow & (1+8x)(1-2x) + 2x(1+2x) + 12x^2 - 9 = 0 \\ \Leftrightarrow & 1 + 6x - 16x^2 + 2x + 4x^2 + 12x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 8x = 8 \Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{TMDKXĐ}). \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1\}$.

4. ĐKXD $x \neq \{1; 3\}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x-6} - \frac{3x-5}{x^2-4x+3} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2(x-3)} + \frac{5-3x}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow (x-1) + (5-3x) \cdot 2 &= (x-3)(x-1) \Leftrightarrow x-1+10-6x = x^2-4x+3 \\ \Leftrightarrow x^2+x-6 &= 0 \Leftrightarrow x^2+3x-2x-6 = 0 \Leftrightarrow x(x+3) - 2(x+3) = 0 \\ \Leftrightarrow (x+3)(x-2) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \end{cases} \quad (\text{TMĐKXD}). \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-3; 2\}$.

□

 **Bài 3.** Cho phương trình ẩn x : $\frac{x+2}{x-m} + \frac{x+m}{x-2} = 2$.

1. Giải phương trình với $m = 1$;

ĐS: $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

2. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm $x = 0$.

ĐS: $m = 13$

 **Lời giải.**

1. Với $m = 1$, ta có phương trình:

$$\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+1}{x-2} = 2$$

ĐKXD: $x \neq \{1; 2\}$.

$$\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+1}{x-2} = 2 \Rightarrow (x-2)(x+2) + (x+1)(x-1) = 2(x-2)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 + x^2 - 1 = 2(x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow 6x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \quad (\text{TM ĐKXD}).$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

2. $x = 0$ là nghiệm của phương trình, ta có:

$$\frac{-2}{m} - \frac{m}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{2+m}{5} = 3 \Leftrightarrow 2+m = 15 \Leftrightarrow m = 13.$$

Vậy với $m = 13$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = 2$.

□

§6 Giải bài toán bằng cách lập phương trình

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Các bước để giải bài toán bằng cách lập phương trình

- ✓ **Bước 1.** Lập phương trình:
 - Đặt ẩn số và điều kiện thích hợp cho ẩn số;
 - Biểu diễn các dữ kiện bài toán chưa biết thông qua ẩn và các đại lượng đã biết;
 - Lập phương trình biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng;
- ✓ **Bước 2.** Giải phương trình đã lập;
- ✓ **Bước 3.** Kiểm tra điều kiện và đưa ra kết luận của bài toán.

2 Các dạng toán

Dạng 87. Bài toán liên quan đến tìm số

Từ các dữ kiện đề bài ta cần thiết lập phương trình của ẩn đã đặt. Lưu ý thêm về biểu diễn các số:

$$\overline{ab} = 10a + b; \overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

trong đó các chữ số $a, b, c \in \mathbb{N}; 0 < a \leq 9; 0 \leq b \leq 9; 0 \leq c \leq 9$.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Cho một phân số có tử nhỏ hơn mẫu là 8, nếu tăng tử lên 2 đơn vị và giảm mẫu đi 3 đơn vị thì được một phân số bằng $\frac{3}{4}$. Tìm phân số đó.

ĐS: $\frac{7}{15}$

Lời giải.

Gọi x là tử của phân số cần tìm (điều kiện $x \in \mathbb{N}$).

Suy ra mẫu của phân số cần tìm là $x + 8$.

Nếu tăng tử lên 2 đơn vị và giảm mẫu đi 3 đơn vị thì ta được phân số mới là $\frac{x+2}{x+5}$.

Vì phân số mới bằng $\frac{3}{4}$ nên ta có phương trình:

$$\frac{x+2}{x+5} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4x+8 = 3x+15 \Leftrightarrow x=7 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy phân số ban đầu cần tìm là $\frac{7}{15}$.

□

Ví dụ 2. Cho hai số nguyên dương có hiệu là 8, tỉ số giữa chúng bằng $\frac{2}{3}$. Tìm hai số đó.
ĐS: 16 và 24

 **Lời giải.**

Gọi số bé trong hai số cần tìm là x , điều kiện $x \in \mathbb{Z}^+$.

Suy ra số còn lại là $x+8$.

Vì tỉ số giữa chúng bằng $\frac{2}{3}$ nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{x+8} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 2x+16 \Leftrightarrow x=16 \text{ (TMĐK)}.$$

Vậy hai số cần tìm là 16 và 24.

□

Ví dụ 3. Cho một số tự nhiên có hai chữ số, chữ số hàng đơn vị gấp đôi chữ số hàng chục và nếu xen thêm chữ số 2 vào giữa hai chữ số ấy thì được số mới lớn hơn số ban đầu là 200. Tìm số đó.

ĐS: 24

 **Lời giải.**

Gọi chữ số hàng chục của số cần tìm là a , điều kiện $a \in \mathbb{N}; 0 < a \leq 4$.

Suy ra chữ số hàng đơn vị của số cần tìm là $2a$ và số cần tìm là $12a$. Nếu xen thêm chữ số 2 vào giữa hai chữ số ấy thì ta được số mới là $102a+20$. Vì số mới lớn hơn số ban đầu là 200 nên ta có phương trình:

$$(102a+20) - 12a = 200 \Leftrightarrow 90a = 180 \Leftrightarrow x=2 \text{ (TMĐK)}.$$

Vậy số cần tìm là 24.

□

Ví dụ 4. Cho một số tự nhiên có hai chữ số, nếu lấy chữ số hàng đơn vị chia cho chữ số hàng chục thì được thương là 2 dư 1. Nếu viết thêm chữ số 1 vào bên trái số đó ta được một số mới gấp 5 lần chữ số ban đầu. Tìm số đã cho.

ĐS: 25

 **Lời giải.**

Gọi chữ số hàng chục của số cần tìm là a , điều kiện $a \in \mathbb{N}; 0 < a \leq 4$.

Suy ra chữ số hàng đơn vị của số cần tìm là $2a+1$ và số cần tìm là $12a+1$. Nếu xen thêm chữ số 1 vào bên trái số đó thì ta được số mới là $12a+101$. Vì số mới gấp 5 lần số ban đầu nên ta có phương trình:

$$12a+101 = 5(12a+1) \Leftrightarrow 12a+101 = 60a+5 \Leftrightarrow 48a = 96 \Leftrightarrow a=2 \text{ (TMĐK)}.$$

Vậy số cần tìm là 25.

□

Dạng 88. Bài toán liên quan đến tỉ số phần trăm

Chú ý đổi các số liệu phần trăm trong bài toán ra phân số $a\% = \frac{a}{100}$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Hai tổ công nhân trong một công xưởng, sản xuất được 600 sản phẩm trong tháng đầu. Sang tháng thứ hai, tổ I làm vượt mức 25%, tổ II vượt mức 15% do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 725 sản phẩm. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

ĐS: Tổ I sản xuất được 350 sản phẩm và tổ II sản xuất được 250 sản phẩm

Lời giải.

$$\text{Đổi } 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}; 15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}.$$

Gọi x (sản phẩm) là số sản phẩm tổ I sản xuất được trong tháng đầu, điều kiện $x \in \mathbb{N}, 0 < x < 600$. Suy ra số sản phẩm tổ II sản xuất được trong tháng đầu là $600 - x$.

Sang tháng thứ hai, vì tổ I làm vượt mức 25% nên số sản phẩm của tổ I làm được là $x + x \cdot \frac{1}{4}$.

Vì tổ II làm vượt mức 15% nên số sản phẩm của tổ II làm được là: $(600 - x) + (600 - x) \cdot \frac{3}{20}$ (sản phẩm). Do tháng thứ hai, cả hai tổ sản xuất được 725 sản phẩm nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} x + x \cdot \frac{1}{4} + (600 - x) + (600 - x) \cdot \frac{3}{20} &= 725 \\ \Leftrightarrow x \left(1 + \frac{1}{4} - 1 - \frac{3}{20} \right) &= 725 - 600 + 600 \cdot \frac{3}{20} \\ \Leftrightarrow x &= 350 \text{ (TMDK)}. \end{aligned}$$

Vậy trong tháng đầu, tổ I sản xuất được 350 sản phẩm và tổ II sản xuất được 250 sản phẩm. $\square$

Ví dụ 2. Năm ngoái, tổng số dân của tỉnh A và B là 6 triệu người. Năm nay dân số của tỉnh A tăng 1,5%, dân số tỉnh B tăng 1,2%. Do đó tổng dân số hai tỉnh năm nay tăng thêm 83400 người. Tính số dân năm ngoái của mỗi tỉnh.

ĐS: Tỉnh A có 3,8 triệu người và tỉnh B có 2,2 triệu người

Lời giải.

$$\text{Đổi } 1,2\% = \frac{12}{1000} = \frac{3}{250}; 1,5\% = \frac{15}{1000} = \frac{3}{200}; 83400 \text{ (người)} = \frac{417}{5000} \text{ (triệu người)}.$$

Gọi x (triệu người) là dân số tỉnh A năm ngoái, điều kiện $x \in \mathbb{N}, 0 < x < 6$.

Suy ra dân số tỉnh B năm ngoái là $6 - x$ (triệu người).

Năm nay, dân số của tỉnh A tăng 1,5% nên dân số của tỉnh A năm nay là $x + x \cdot \frac{3}{200}$ (triệu người).

Vì dân số tỉnh B tăng 1,2% nên dân số năm nay của tỉnh B là $(6 - x) + (6 - x) \cdot \frac{3}{250}$ (triệu người).

Do đó năm nay dân số hai tỉnh tăng thêm 83400 người nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} x + x \cdot \frac{3}{200} + (6 - x) + (6 - x) \cdot \frac{3}{250} &= 6 + \frac{417}{5000} \\ \Leftrightarrow x \left(1 + \frac{3}{200} - 1 - \frac{3}{250} \right) &= 6 + \frac{417}{5000} - 6 - 6 \cdot \frac{3}{250} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = 3,8 \text{ (TMDK).}$$

Vậy năm ngoái, tỉnh A có 3,8 triệu người và tỉnh B có 2,2 triệu người.

□

Dạng 89. Bài toán liên quan đến tỉ số phần trăm

Ta sử dụng công thức $A = N.t$ với A là khối lượng công việc, N là năng suất và t là thời gian.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Một công xưởng sản xuất một lượng hàng, theo kế hoạch mỗi ngày phải sản xuất được 380 sản phẩm. Nhưng khi thực hiện, do cải tiến kĩ thuật mỗi ngày công xưởng sản xuất được 480 sản phẩm. Do đó, công xưởng đã hoàn thành kế hoạch trước 1 ngày và còn vượt mức 20 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, công xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm? **ĐS:** 1900 sản phẩm

Lời giải.

Gọi x sản phẩm là số sản phẩm mà công xưởng phải sản xuất theo kế hoạch, điều kiện $x \in \mathbb{N}, x > 0$. Suy ra số sản phẩm mà công xưởng đã sản xuất được theo thực tế là $x + 20$ sản phẩm.

Theo kế hoạch, thời gian mà công xưởng hoàn thành sản xuất là $\frac{x}{380}$ (ngày).

Theo thực tế, thời gian mà công xưởng hoàn thành sản xuất là $\frac{x+20}{480}$ (ngày).

Do công xưởng hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{x}{380} - \frac{x+20}{480} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{380} - \frac{x}{480} &= 1 + \frac{20}{480} \\ \Leftrightarrow x \left(\frac{1}{380} - \frac{1}{480} \right) &= \frac{25}{24} \\ \Leftrightarrow x &= 1900 \text{ (TMDK).} \end{aligned}$$

Vậy theo kế hoạch, công xưởng phải sản xuất 1900 (sản phẩm).

□

 **Ví dụ 2.** Một đội xe tải mỗi ngày theo kế hoạch phải chở 3 tấn hàng. Khi thực hiện, mỗi ngày đội chở thêm 0,5 tấn. Do đó, đội không chỉ hoàn thành kế hoạch trước 2 ngày mà còn vượt mức 2 tấn hàng. Hỏi theo kế hoạch, đội phải chở được bao nhiêu tấn hàng?

ĐS: 54 tấn hàng

Lời giải.

Gọi số tấn hàng đội phải chở theo kế hoạch là x (tấn, $x > 0$).

	Năng suất (tấn/ngày)	Thời gian (ngày)	Sản phẩm (tấn)
Kế hoạch	3	$\frac{x}{3}$	x
Thực tế	3,5	$\frac{x+2}{3,5}$	$x+2$

Vì thực tế đội hoàn thành trước 2 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{3} - \frac{x+2}{3,5} = 2$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{x}{3} - \frac{x}{3,5} &= \frac{4}{7} + 2 \\ \Leftrightarrow x \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{7} \right) &= \frac{18}{7} \\ \Leftrightarrow x &= 54 \text{ (TMĐK)}. \end{aligned}$$

Vậy theo kế hoạch, đội xe tải phải chở 54 tấn hàng. □

Dạng 90. Bài toán liên quan đến công việc làm chung, làm riêng

Ta coi công việc là 1 đơn vị, biểu diễn khối lượng của mỗi đội theo cùng 1 đơn vị thời gian (ngày, giờ, ...).

Ví dụ: Một người hoàn thành công việc một mình trong x giờ thì mỗi giờ người đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Hai tổ công nhân cùng làm thì sau 4 giờ sẽ hoàn thành công việc. Nếu tổ I làm công việc trong 3 giờ rồi đi làm việc khác, tổ II làm tiếp công việc trong 1 giờ nữa thì sẽ hoàn thành được $\frac{7}{12}$ công việc. Tính thời gian mỗi tổ làm riêng để hoàn thành công việc.

ĐS: Tổ I mất 6 giờ, tổ II mất 12 giờ

Lời giải.

Gọi thời gian tổ I hoàn thành công việc là x (giờ, $x > 4$).

Trong một giờ một mình tổ I làm được $\frac{1}{x}$ (công việc), tổ II một mình làm được $\frac{1}{4} - \frac{1}{x}$ (công việc).

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x} \right) &= \frac{7}{12} \\ \Leftrightarrow \frac{4}{x} &= \frac{7}{12} - \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x &= 6 \text{ (TMĐK)}. \end{aligned}$$

Vậy tổ I mất 6 giờ, tổ II mất 12 giờ để một mình hoàn thành công việc. □

 **Ví dụ 2.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể sau 2 giờ 24 phút thì đầy bể. Mỗi giờ lượng nước vòi II chảy được gấp 1,5 lần lượng nước chảy của vòi I. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu thì đầy bể?

ĐS: Vòi I mất 6 giờ, vòi II mất 4 giờ

Lời giải.

Đổi 2 giờ 24 phút = $\frac{12}{5}$ (giờ).

Gọi thời gian vòi I chảy một mình đầy bể là x (giờ, $x > \frac{12}{5}$).

Suy ra mỗi giờ vòi I chảy được là $\frac{1}{x}$ (bể), vòi II chảy được $1,5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{2x}$ (bể).

Mỗi giờ cả hai vòi chảy được $\frac{5}{12}$ (bể). Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{12} \Leftrightarrow x = 6 \text{ (TMDK)}.$$

Vậy vòi I mất 6 giờ, vòi II mất 4 giờ để một mình chảy đầy bể. □

Dạng 91. Bài toán liên quan đến tính tuổi

Ta vận dụng các dữ liệu của đề bài để lập phương trình với chú ý rằng sau mỗi năm thì tuổi của mỗi người tăng lên 1.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Năm nay tuổi bố gấp 5 lần tuổi con. Biết sau 15 năm nữa tuổi bố chỉ gấp 3 lần tuổi con. Tính tuổi của hai bố con hiện nay.

ĐS: con 15 tuổi và bố 75 tuổi

Lời giải.

Gọi tuổi con hiện nay là x (tuổi), điều kiện $x \in \mathbb{N}, x > 0$.

Suy ra tuổi bố hiện nay là $5x$ (tuổi).

Tuổi con 15 năm sau là $x + 15$ (tuổi).

Tuổi bố 15 năm sau là $5x + 15$ (tuổi).

Vì sau 15 năm nữa, tuổi bố gấp 3 lần tuổi con nên ta có phương trình :

$$5x + 15 = 3(x + 15) \Leftrightarrow 2x = 30 \Leftrightarrow x = 15 \text{ (Thoả mãn điều kiện)}.$$

Vậy năm nay con 15 tuổi và bố 75 tuổi. □

 **Ví dụ 2.** Tổng số tuổi của hai anh em hiện nay là 24. Biết rằng cách đây 3 năm tuổi em bằng một nửa tuổi anh. Tính tuổi mỗi người hiện nay.

ĐS: Em 9 tuổi và anh 15 tuổi

Lời giải.

Gọi tuổi em hiện nay là x (tuổi), điều kiện $x \in \mathbb{N}, < x < 24$.

Suy ra tuổi anh hiện nay là $(24 - x)$ (tuổi).

Tuổi em 3 năm trước là $(x - 3)$ (tuổi).

Tuổi anh 3 năm trước là $(21 - x)$ (tuổi).

Vì 3 năm trước đây tuổi em bằng một nửa tuổi anh nên ta có phương trình

$$2(x - 3) = 21 - x \Leftrightarrow 2x - 6 = 21 - x \Leftrightarrow x = 9 \text{ (TMDK)}.$$

Vậy hiện nay em 9 tuổi và anh 15 tuổi. □

3

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Cho một phân số có tử nhỏ hơn mẫu là 10, nếu tăng tử lên 3 đơn vị và giảm mẫu đi 4 đơn vị thì được một phân số bằng $\frac{4}{5}$. Tìm phân số đó.

ĐS: $\frac{9}{19}$

 Lời giải.

Gọi x là tử của phân số cần tìm (điều kiện $x \in \mathbb{N}$).

Suy ra mẫu của phân số cần tìm là $x + 10$.

Nếu tăng tử lên 3 đơn vị và giảm mẫu đi 4 đơn vị thì ta được phân số mới là $\frac{x+3}{x+6}$.

Vì phân số mới bằng $\frac{4}{5}$ nên ta có phương trình:

$$\frac{x+3}{x+6} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5x+15 = 4x+24 \Leftrightarrow x=9 \text{ (TMDK)}.$$

Vậy phân số ban đầu cần tìm là $\frac{9}{19}$. □

 **Bài 2.** Trong tháng đầu hai tổ công nhân sản xuất được 420 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai, tổ I sản xuất vượt mức 15%, tổ II vượt mức 10%. Do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 473 chi tiết máy. Hỏi rằng trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

ĐS: Tổ I sản xuất được 220 sản phẩm và tổ II sản xuất được 200 sản phẩm

 Lời giải.

$$\text{Đổi } 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}; 15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}.$$

Gọi x (sản phẩm) là số sản phẩm tổ I sản xuất được trong tháng đầu, điều kiện $x \in \mathbb{N}, 0 < x < 420$.
Suy ra số sản phẩm tổ II sản xuất được trong tháng đầu là $420 - x$ (sản phẩm).

Sang tháng thứ hai, vì tổ I làm vượt mức 15% nên số sản phẩm của tổ I làm được là: $x + x \cdot \frac{3}{20}$ (sản phẩm).

Vì tổ II làm vượt mức 10% nên số sản phẩm của tổ II làm được là:

$$(420 - x) + (420 - x) \cdot \frac{1}{10} \text{ (sản phẩm)}$$

Do tháng thứ hai, cả hai tổ sản xuất được 473 sản phẩm nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} x + x \cdot \frac{3}{20} + (420 - x) + (420 - x) \cdot \frac{1}{10} &= 473 \\ \Leftrightarrow x \left(1 + \frac{3}{20} - 1 - \frac{1}{10} \right) &= 473 - 420 - 420 \cdot \frac{1}{10} \\ \Leftrightarrow x &= 220 \text{ (TMDK)}. \end{aligned}$$

Vậy trong tháng đầu, tổ I sản xuất được 220 sản phẩm và tổ II sản xuất được 200 sản phẩm. □

 **Bài 3.** Một đội thợ mỏ theo kế hoạch cần khai thác 30 tấn than mỗi ngày. Do cải tiến kĩ thuật nên trên thực tế đội đã khai thác được 42 tấn mỗi ngày, do đó đội không những hoàn thành trước 12 tiếng mà còn làm vượt chỉ tiêu thêm 3 tấn nữa. Hỏi kế hoạch đội cần khai thác bao nhiêu tấn than?

ĐS: 60 tấn

 Lời giải.

$$\text{Đổi } 12 \text{ tiếng} = \frac{1}{2} \text{ ngày}.$$

Gọi số tấn than đội thợ mỏ cần khai thác theo kế hoạch là x (tấn, $x > 0$).

	Năng suất(tấn/ngày)	Thời gian(ngày)	Sản phẩm (tấn)
Kế hoạch	30	$\frac{x}{30}$	x
Thực tế	42	$\frac{x+3}{42}$	$x+3$

Vì thực tế đội thợ mỏ hoàn thành trước $\frac{1}{2}$ ngày nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{x}{30} - \frac{x+3}{42} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{30} - \frac{x+3}{42} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{42} \right) &= \frac{4}{7} \\ \Leftrightarrow x &= 60 \text{ (TMĐK)}. \end{aligned}$$

Vậy theo kế hoạch, đội xe thợ mỏ phải chở 60 tấn than. □

Bài 4. Hai người công nhân cùng làm một công việc trong 12 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ rồi và người thứ hai làm trong 8 giờ thì được $\frac{1}{3}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình công việc đó trong mấy giờ thì xong?

ĐS: Tổ I mất 15 giờ, tổ II mất 60 giờ

Lời giải.

Gọi thời gian tổ I hoàn thành công việc là x (giờ, $x < 12$).

Trong một giờ một mình tổ I làm được $\frac{1}{x}$ (công việc), tổ II một mình làm được $\frac{1}{12} - \frac{1}{x}$ (công việc).

Theo đề bài ta có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} + 8 \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{x} \right) &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{-5}{x} &= \frac{1}{3} - \frac{8}{12} \\ \Leftrightarrow x &= 15 \text{ (TMĐK)}. \end{aligned}$$

Vậy tổ I mất 15 giờ, tổ II mất 60 giờ để một mình hoàn thành công việc. □

Bài 5. Tuổi mẹ hiện nay gấp 3 lần tuổi con. Biết sau 3 năm trước đây tuổi mẹ gấp $\frac{10}{3}$ lần tuổi con. Hỏi tuổi mẹ và tuổi con hiện nay là bao nhiêu?

ĐS: con 21 tuổi và mẹ 63 tuổi

Lời giải.

Gọi tuổi con hiện nay là x (tuổi), điều kiện $x \in \mathbb{N}, x > 3$.

Suy ra tuổi mẹ hiện nay là $3x$ (tuổi).

Tuổi con 3 năm trước là $x - 3$ (tuổi).

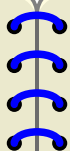
Tuổi mẹ 3 năm trước là $3x - 3$ (tuổi).

Vì 3 năm trước đây tuổi mẹ gấp $\frac{10}{3}$ lần tuổi con nên ta có phương trình

$$\begin{aligned} 3x - 3 &= \frac{10}{3}(x - 3) \\ \Leftrightarrow \left(3 - \frac{10}{3} \right) x &= 3 - \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow x &= 21 \text{ (TMDK)}. \end{aligned}$$

Vậy năm nay mẹ 63 tuổi và con 21 tuổi. □

Chương
4



Bất phương trình



Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng



Tóm tắt lý thuyết

1.1 Thứ tự trên tập hợp số

1. Trên tập số thực, khi so sánh hai số a và b , xảy ra một trong ba trường hợp sau:

Trường hợp	Ký hiệu
a bằng b	$a = b$
a lớn hơn b	$a > b$
a nhỏ hơn b	$a < b$

2. Ngoài ra ta còn kết hợp các trường hợp trên với nhau:

- ☑ Nếu số a không nhỏ hơn số b thì phải có hoặc $a > b$, hoặc $a = b$. Khi đó, ta nói gọn là a lớn hơn hoặc bằng b , ký hiệu $a \geq b$.
Ví dụ: $x^2 \geq 0$ với mọi x . Nếu c là số không âm ta viết $c \geq 0$.
- ☑ Nếu số a không lớn hơn số b thì phải có hoặc $a < b$, hoặc $a = b$. Khi đó, ta nói gọn là a nhỏ hơn hoặc bằng b , ký hiệu $a \leq b$.
Ví dụ: $-x^2 \leq 0$ với mọi x . Nếu c là số không lớn hơn 3 ta viết $c \leq 3$.

1.2 Bất đẳng thức

Định nghĩa 3. Hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b; a \geq b; a \leq b$) được gọi là *bất đẳng thức*; trong đó a và b lần lượt được gọi là vế trái và vế phải của bất đẳng thức.

Tính chất 1. Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho. Cụ thể, với ba số a, b và c ta có:

- ☑ Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$.
- ☑ Nếu $a < b$ thì $a + c < b + c$.
- ☑ Nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$.
- ☑ Nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$.

2

Bài tập và các dạng toán

Dạng 92. Sắp xếp thứ tự các số trên trục số. Biểu diễn mối quan hệ giữa các tập số

Dựa vào các kiến thức cơ bản đã học ở các lớp dưới để làm

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Sắp xếp các số sau từ bé đến lớn và biểu diễn trên trục số:

a) $0; -2; -1; 5;$

b) $5; 2; 4; -3.$

 Lời giải.

a) $-2; -1; 0; 5.$



b) $-3; 2; 4; 5.$



□

 **Ví dụ 2.** Sắp xếp các số sau từ lớn đến bé và biểu diễn trên trục số:

a) $-1; 2; 0; -2.$

b) $0; 3; -2; 4.$

 Lời giải.

a) $2; 0; -1; -2.$



b) $4; 3; 0; -2.$



□

 Dạng 93. Xét tính đúng sai của khẳng định cho trước.

Dựa vào các kiến thức cơ bản, các tính chất để kiểm tra tính đúng sai.

 BÀI TẬP MẪU  **Ví dụ 1.** Hãy xét xem các khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) $2 + (-3) > 4;$

b) $3 \cdot (-3) \leq -6;$

c) $3 + (-2) < 8 - 10;$

d) $(-2) \cdot (-3) \geq -2 + 8.$

 Lời giải.

a) Sai. Vì $2 + (-3) = -1 < 4.$

b) Đúng. Vì $3 \cdot (-3) = -9 \leq -6.$

c) Sai. Vì $3 + (-2) = 1 > -2 = 8 - 10.$

d) Đúng. Vì $(-2) \cdot (-3) = 6 = -2 + 8.$

□

 **Ví dụ 2.** Hãy xét xem các khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) $3 + 2 > 8;$

b) $3 \cdot \frac{1}{3} < 0;$

c) $(-1) + 3 \leq 5 - (-1);$

d) $(-1) \cdot (-5) \geq 5 - 4.$

 Lời giải.

a) Sai. Vì $3 + 2 = 5 < 8.$

b) Sai. Vì $3 \cdot \frac{1}{3} = 1 > 0.$

c) Đúng. Vì $(-1) + 3 = 2 \leq 6 = 5 - (-1).$

d) Đúng. Vì $(-1) \cdot (-5) = 5 \geq 1 = 5 - 4.$

□

Ví dụ 3. Chuyển các khẳng định sau về dạng bất đẳng thức và cho biết khẳng định đó đúng hay sai?

- a) Tổng của -4 và 6 nhỏ hơn hoặc bằng 3 ; b) Hiệu của 2 và -7 nhỏ hơn 0 ;
c) Tích của -2 và -1 lớn hơn hoặc bằng 2 ; d) Thương của -8 và 2 lớn hơn 5 .

Lời giải.

- a) $(-4) + 6 \leq 3$. Khẳng định này là đúng. b) $2 - (-7) < 0$. Khẳng định này là sai.
c) $(-2) \cdot (-1) \geq 2$. Khẳng định này là đúng. d) $\frac{-8}{2} > 5$. Khẳng định này là sai.

□

Ví dụ 4. Chuyển các khẳng định sau về dạng bất đẳng thức và cho biết khẳng định đó đúng hay sai?

- a) Tổng của -1 và 5 nhỏ hơn hoặc bằng 2 ; b) Hiệu của 8 và 2 nhỏ hơn 12 ;
c) Tích của 3 và -2 lớn hơn hoặc bằng 9 ; d) Thương của -6 và 4 lớn hơn 1 .

Lời giải.

- a) $-1 + 5 \leq 2$. Khẳng định này là sai. b) $8 - 2 < 12$. Khẳng định này là đúng.
c) $3 \cdot (-2) \geq 9$. Khẳng định này là sai. d) $\frac{-6}{4} > 1$. Khẳng định này là sai.

□

Dạng 94. So sánh

Sử dụng quy tắc cộng cả hai vế của bất đẳng thức cho cùng một số.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho $a > b$, hãy so sánh:

- a) $a + 2$ và $b + 2$; b) $a - 5$ và $b - 5$.

Lời giải.

1. Ta có $a > b$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với 2 , ta được $a + 2 > b + 2$.
2. Ta có $a > b$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với -5 , ta được $a - 5 > b - 5$.

□

Ví dụ 2. Cho $a < b$, hãy so sánh:

- a) $10 + a$ và $10 + b$; b) $a - 1$ và $b - 1$.

Lời giải.

1. Ta có $a < b$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với 10, ta được $a + 10 < b + 10$.
2. Ta có $a < b$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với -1 , ta được $a - 1 < b - 1$.

□

 **Ví dụ 3.** Cho số m tùy ý, so sánh:

a) $m + 2019$ và $m + 2018$;

b) $1 - m$ và $-2 - m$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $2019 > 2018$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với m , ta được $2019 + m > 2018 + m$.
2. Ta có $1 > -2$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với $-m$, ta được $1 - m > -2 - m$.

□

 **Ví dụ 4.** Cho số m tùy ý, so sánh:

a) $m - 1$ và $m + 2$;

b) $2018 - m$ và $2019 - m$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $-1 < -2$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với m , ta được $m - 1 < m + 2$.
2. Ta có $2018 < 2019$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với $-m$, ta được $2018 - m < 2019 - m$.

□

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Sắp xếp các số sau từ bé đến lớn và biểu diễn trên trục số:

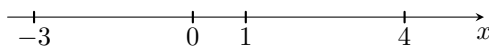
a) $1; -3; 0; 4$;

b) $2; -3; 0; -2$.

 **Lời giải.**

a) $-3; 0; 1; 4$.

b) $-3; -2; 0; 2$.



□

 **Bài 2.** Hãy xét xem các khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) $-6 > -4 + (-2)$;

b) $(-4) \cdot \frac{1}{4} < 0$;

c) $(-5) + 1 \leq 4 - (-2)$;

d) $2 + x^2 \geq 2$.

 **Lời giải.**

- a) Sai. Vì $-6 = -4 + (-2)$. b) Đúng. Vì $(-4) \cdot \frac{1}{4} = -1 < 0$.
 c) Đúng. Vì $(-5) + 1 = -4 \leq 6 = 4 - (-2)$. d) Đúng. Vì $x^2 \geq 0$ với mọi số thực x
 $\Rightarrow 2 + x^2 \geq 2$.

□

Bài 3. Chuyển các khẳng định sau về dạng bất đẳng thức và cho biết khẳng định đó đúng hay sai?

- a) Tổng của -6 và -2 nhỏ hơn hoặc bằng -5 ; b) Hiệu của -4 và -4 nhỏ hơn -1 ;
 c) Tích của 5 và -2 lớn hơn hoặc bằng -20 ; d) Thương của -8 và 8 lớn hơn 0 .

Lời giải.

- a) $-6 + (-2) \leq -5$. Khẳng định này là đúng. b) $-4 - (-4) < -1$. Khẳng định này là đúng.
 c) $5 \cdot (-2) \geq -20$. Khẳng định này là đúng. d) $\frac{-8}{8} > 0$. Khẳng định này là sai.

□

Bài 4. Cho $a > b$, hãy so sánh:

- a) $a + 12$ và $b + 12$; b) $a - 8$ và $b - 8$.

Lời giải.

- Ta có $a > b$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với 12 , ta được $a + 12 > b + 12$.
- Ta có $a > b$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với -8 , ta được $a - 8 > b - 8$.

□

Bài 5. Cho số m tùy ý, chứng minh:

- a) $m + 121 > m + 100$; b) $m - 4 < m$.

Lời giải.

- Ta có $121 > 100$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với m , ta được $m + 121 > m + 100$.
- Ta có $-4 < 0$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với m , ta được $m - 4 < m$.

□

§2 Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số dương

- Tính chất 2.** Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.
- Với ba số a, b, c trong đó $c > 0$, ta có: Nếu $a > b$ thì $ac > bc$.
Tương tự cho các bất đẳng thức với dấu $<$; $\geq$; $\leq$.

1.2 Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số âm

- Tính chất 3.** Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm, ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.
- Với ba số a, b, c trong đó $c < 0$, ta có: Nếu $a > b$ thì $ac < bc$.
Tương tự cho các bất đẳng thức với dấu $<$; $\geq$; $\leq$.

1.3 Tính chất bắc cầu

- Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$. Tương tự cho các bất đẳng thức với dấu $<$; $\geq$; $\leq$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 95. Xét tính đúng sai của khẳng định cho trước.

Dựa vào các kiến thức cơ bản, các tính chất để kiểm tra tính đúng sai.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Hãy xét xem các khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

- | | |
|--|--|
| a) $(-3) \cdot 5 < (-2) \cdot 5$; | b) $4 \cdot (-6) \leq 2 \cdot (-6)$; |
| c) $\frac{5}{2} \cdot (-5) > \frac{3}{2} \cdot (-5)$; | d) $2 \cdot (-1) + 1 \geq 3 \cdot 2$. |

Lời giải.

- a) Đúng. Vì $(-3) \cdot 5 = -15 < -10 = (-2) \cdot 5$. b) Đúng. Vì $4 \cdot (-6) = -24 \leq -12 = 2 \cdot (-6)$.

- c) Sai. Vì $\frac{5}{2} \cdot (-5) = \frac{-25}{2} < \frac{-15}{2} = \frac{3}{2} \cdot (-5)$. d) Sai. Vì $2 \cdot (-1) + 1 = -1 \leq 6 = 3 \cdot 2$.

□

Ví dụ 2. Hãy xét xem các khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

- a) $12 \cdot 1 < 12 \cdot 4$; b) $2 \cdot (-3) \geq 2 \cdot (-5)$;
c) $4 \cdot (-2) \leq 2 \cdot (-2)$; d) $(-1) \cdot 5 \leq (-5) \cdot (-1)$.

Lời giải.

- a) Đúng. Vì $12 \cdot 1 = 12 < 48 = 12 \cdot 4$. b) Đúng. Vì $2 \cdot (-3) = -6 \geq -10 = 2 \cdot (-5)$.
c) Đúng. Vì $4 \cdot (-2) = -8 \leq -4 = 2 \cdot (-2)$. d) Đúng. Vì $(-1) \cdot 5 = -5 \leq (-5) \cdot (-1)$.

□

Dạng 96. So sánh.

Sử dụng tính chất cộng, nhân và tính chất bắc cầu của bất đẳng thức để so sánh hai số, hai biểu thức.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho $a > b > 0$, hãy so sánh:

- a) $8a$ và $8b$; b) $-3a$ và $-3b$;
c) $2a + 4$ và $2b + 4$; d) $7 - 2a$ và $7 - 2b$.

Lời giải.

- Ta có $a > b$, Nhân cả hai vế với 8 ($8 > 0$), ta được $8a > 8b$.
- Ta có $a > b$, Nhân cả hai vế với -3 ($-3 < 0$), ta được $-3a < -3b$.
- Ta có $a > b$, Nhân cả hai vế với 2 ($2 > 0$), ta được $2a > 2b$. Tiếp theo ta cộng cả hai vế với 4, ta được $2a + 4 > 2b + 4$.
- Ta có $a > b$, Nhân cả hai vế với -2 ($-2 < 0$), ta được $-2a < -2b$. Tiếp theo ta cộng cả hai vế với 7, ta được $7 - 2a < 7 - 2b$.

□

Ví dụ 2. Cho $b > a > 0$, hãy so sánh:

- a) $2a$ và $2b$; b) $-4a$ và $-4b$;
c) $4a + 3$ và $4b + 3$; d) $1 - 6a$ và $1 - 6b$.

Lời giải.

- Ta có $a < b$, Nhân cả hai vế với 2 ($2 > 0$), ta được $2a < 2b$.
- Ta có $a < b$, Nhân cả hai vế với -4 ($-4 < 0$), ta được $-4a > -4b$.

3. Ta có $a < b$, Nhân cả hai vế với 4 ($4 > 0$), ta được $4a < 4b$. Tiếp theo ta cộng cả hai vế với 3, ta được $4a + 3 < 4b + 3$.
4. Ta có $a < b$, Nhân cả hai vế với -6 ($-6 < 0$), ta được $-6a > -6b$. Tiếp theo ta cộng cả hai vế với 1, ta được $1 - 6a > 1 - 6b$.

7

 Ví dụ 3. Số b là số âm, số 0, hay số dương nếu:

a) $3b > 2b$;

b) $-2b > 3b$.

 **Lời giải.**

a) Ta có $3 > 2 \Rightarrow b > 0$.

b) Ta có $-2 < 3 \Rightarrow b < 0$.

7

 **Ví dụ 4.** Số b là số âm, số 0, hay số dương nếu:

a) $5b > 3b$;

b) $-3b > 3b$.

 **Lời giải.**

a) Ta có $5 > 3 \Rightarrow b > 0$.

b) Ta có $-3 < 3 \Rightarrow b < 0$.

7

 **Ví dụ 5.** Cho $a > b > 0$. So sánh:

a) $5a + 3$ và $5b - 3$;

b) $3 - 2a$ và $4 - 2b$.

 Lời giải.

1. Ta có $a > b > 0 \Rightarrow 5a > 5b$. Cộng cả hai vế với 3 ta được $5a + 3 > 5b + 3$. Mặt khác ta có $5b + 3 > 5b - 3$. Do đó theo tính chất bắc cầu, ta được: $5a + 3 > 5b - 3$.
2. Ta có $a > b > 0 \Rightarrow -2a < -2b$. Cộng cả hai vế với 4 ta được $4 - 2a < 4 - 2b$. Mặt khác ta có $3 - 2a < 4 - 2a$. Do đó theo tính chất bắc cầu, ta được: $3 - 2a < 4 - 2b$.

☐

 Ví dụ 6. Cho $a > b > 0$. So sánh:

a) $2a + 5$ và $2b - 1$;

b) $4 - a$ và $5 - b$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $a > b > 0 \Rightarrow 2a > 2b$. Cộng cả hai vế với 5 ta được $2a + 5 > 2b + 5$. Mặt khác ta có $2b + 5 > 2b - 1$. Do đó theo tính chất bắc cầu, ta được: $2a + 5 > 2b - 1$.
2. Ta có $a > b > 0 \Rightarrow -a < -b$. Cộng cả hai vế với 5 ta được $5 - a < 5 - b$. Mặt khác ta có $5 - a > 4 - a$. Do đó theo tính chất bắc cầu, ta được: $4 - a < 5 - b$.

☐

§3 Bất phương trình một ẩn

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Bất phương trình một ẩn

Bất phương trình một ẩn x là bất phương trình có dạng:

$$A(x) < B(x) \text{ hoặc } A(x) > B(x) \\ \text{hoặc } A(x) \leq B(x) \text{ hoặc } A(x) \geq B(x),$$

trong đó $A(x)$ và $B(x)$ lần lượt là vế trái và vế phải của bất phương trình.

Ví dụ: $x + 4 \geq 5x - 1$ là một bất phương trình bậc nhất ẩn x .

1.2 Nghiệm của bất phương trình một ẩn

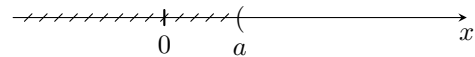
1. Giá trị $x = a$ được gọi là một *nghiệm* của bất phương trình nếu ta thay $x = a$ vào hai vế của bất phương trình ta thu được một bất đẳng thức đúng.
2. *Tập nghiệm* của bất phương trình là tập tất cả các giá trị của biến thỏa mãn bất phương trình.
3. *Giải bất phương trình* là tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

1.3 Biểu diễn tập nghiệm

Giả sử $a > 0$.

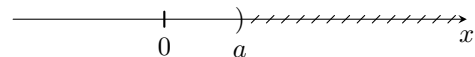
1.

$$\{x|x > a\}$$



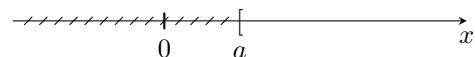
2.

$$\{x|x < a\}$$



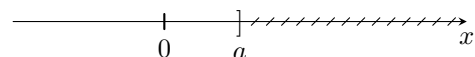
3.

$$\{x|x \geq a\}$$



4.

$$\{x|x \leq a\}$$



Trường hợp $a < 0$ tương tự.

1.4 Hai bất phương trình tương đương

Hai bất phương trình gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng tập nghiệm và dùng " $\Leftrightarrow$ " để chỉ sự tương đương đó.

Ví dụ: $2 > x \Leftrightarrow x < 2$.

 **15.** Chú ý

Hai bất phương trình cùng vô nghiệm tương đương nhau.



2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 97. Kiểm tra $x = a$ có là nghiệm của bất phương trình hay không?

Bằng cách thay $x = a$ vào hai vế của bất phương trình, xảy ra hai trường hợp:

- ☒ Nếu được một bất đẳng thức đúng thì $x = a$ là nghiệm của bất phương trình.
- ☒ Nếu được một bất đẳng thức sai thì $x = a$ không là nghiệm của bất phương trình.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Kiểm tra xem giá trị $x = 2$ có là nghiệm của mỗi bất phương trình sau hay không?

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| a) $x + 3 < x - 4$; | b) $2x - 1 > 3 - x$; |
| c) $4 - x \leq 12x + 20$; | d) $2x + 1 - x \geq 3x - 7$. |

Lời giải.

- Thay $x = 2$ vào bất phương trình, ta được $2 + 3 < 2 - 4$, hay $5 < -2$. Điều này sai. Vậy $x = 2$ không là nghiệm của bất phương trình $x + 3 < x - 4$.
- Thay $x = 2$ vào bất phương trình, ta được $2 \cdot 2 - 1 > 3 - 2$, hay $3 > 1$. Điều này đúng. Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình $2x - 1 > 3 - x$.
- Thay $x = 2$ vào bất phương trình, ta được $4 - 2 \leq 12 \cdot 2 + 20$, hay $2 \leq 44$. Điều này đúng. Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình $4 - x \leq 12x + 20$.
- Thay $x = 2$ vào bất phương trình, ta được $2 \cdot 2 + 1 - 2 \geq 3 \cdot 2 - 7$, hay $3 \geq -1$. Điều này đúng. Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình $2x + 1 - x \geq 3x - 7$.

□

 **Ví dụ 2.** Kiểm tra xem trong các giá trị sau, giá trị nào là nghiệm của bất phương trình $5x + 2 \geq 3x + 1$.

- | | |
|---------------|---------------|
| a) $x = 0$; | b) $x = 1$; |
| c) $x = -3$; | d) $x = -1$. |

Lời giải.

- Thay $x = 0$ vào bất phương trình, ta được $5 \cdot 0 + 2 \geq 3 \cdot 0 + 1$, hay $2 \geq 1$. Điều này đúng. Vậy $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình $5x + 2 \geq 3x + 1$.
- Thay $x = 1$ vào bất phương trình, ta được $5 \cdot 1 + 2 \geq 3 \cdot 1 + 1$, hay $7 \geq 4$. Điều này đúng. Vậy $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình $5x + 2 \geq 3x + 1$.
- Thay $x = -3$ vào bất phương trình, ta được $5 \cdot (-3) + 2 \geq 3 \cdot (-3) + 1$, hay $-13 \geq -8$. Điều này sai. Vậy $x = -3$ không là nghiệm của bất phương trình $5x + 2 \geq 3x + 1$.
- Thay $x = -1$ vào bất phương trình, ta được $5 \cdot (-1) + 2 \geq 3 \cdot (-1) + 1$, hay $-3 \geq -2$. Điều này sai. Vậy $x = -1$ không là nghiệm của bất phương trình $5x + 2 \geq 3x + 1$.

□

Dạng 98. Viết bằng kí hiệu tập hợp và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình trên trục số.

Để biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình trên trục số, ta thực hiện các bước sau:

- ✓ Vẽ trục số và điền các giá trị 0, giá trị nghiệm của bất phương trình trên trục số;
- ✓ Gạch bỏ phần không thuộc tập nghiệm, lưu ý cách dùng dấu (;); [;]; [;].

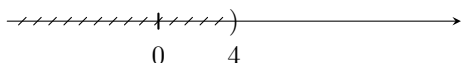
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Viết kí hiệu và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình sau trên trục số:

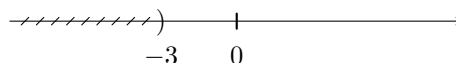
- a) $x < 4$; b) $x > -3$; c) $x \leq 0$; d) $x \geq 2$.

Lời giải.

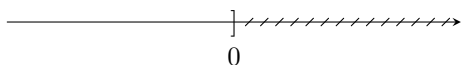
a) $\{x|x < 4\}$.



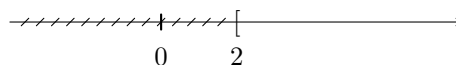
b) $\{x|x > -3\}$.



c) $\{x|x \leq 0\}$.



d) $\{x|x \geq 2\}$.



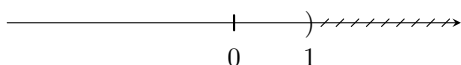
□

Ví dụ 2. Viết kí hiệu và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình sau trên trục số:

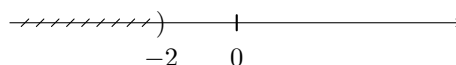
- a) $x < 1$; b) $x > -2$; c) $x \leq 3$; d) $x \geq 0$.

Lời giải.

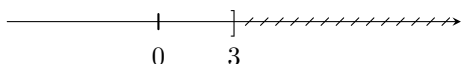
a) $\{x|x < 1\}$.



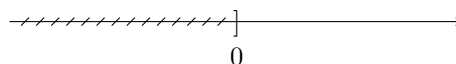
b) $\{x|x > -2\}$.



c) $\{x|x \leq 3\}$.



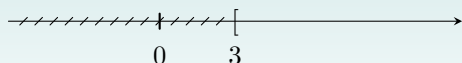
d) $\{x|x \geq 0\}$.



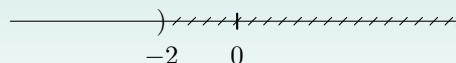
□

Ví dụ 3. Hình vẽ dưới đây là biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào?

a)



b)



Lời giải.

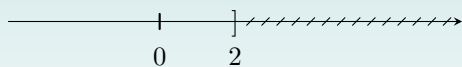
a) $\{x|x \geq 3\}$.

b) $\{x|x < -2\}$.

□

Ví dụ 4. Hình vẽ dưới đây là biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào?

a)



b)



Lời giải.

a) $\{x|x \leq 2\}$.

b) $\{x|x > 0\}$.

□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Kiểm tra xem giá trị $x = 1$ có là nghiệm của mỗi bất phương trình sau hay không?

a) $x - 6 \leq x + 1$;

b) $2x < 4 + x$;

c) $9 + x > 24 - x$;

d) $3x + 8 - 2x \geq 4x - 14$.

Lời giải.

- Thay $x = 1$ vào bất phương trình, ta được $1 - 6 \leq 1 + 1$, hay $-5 \leq 2$. Điều này đúng. Vậy $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình.
- Thay $x = 1$ vào bất phương trình, ta được $2 \cdot 1 < 4 + 1$, hay $2 < 5$. Điều này đúng. Vậy $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình.
- Thay $x = 1$ vào bất phương trình, ta được $9 + 1 > 24 - 1$, hay $10 > 23$. Điều này sai. Vậy $x = 1$ không là nghiệm của bất phương trình.
- Thay $x = 1$ vào bất phương trình, ta được $3 \cdot 1 + 8 - 2 \cdot 1 \geq 4 \cdot 1 - 14$, hay $9 \geq -10$. Điều này sai. Vậy $x = 1$ không là nghiệm của bất phương trình.

□

Bài 2. Viết kí hiệu và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình sau trên trục số:

a) $x < -1,5$;

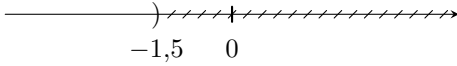
b) $x > 8$;

c) $x \leq 0,5$;

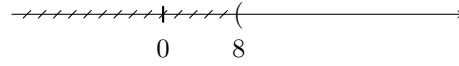
d) $x \geq -4$.

 Lời giải.

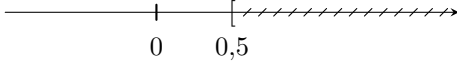
a) $\{x|x < -1,5\}$.



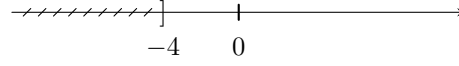
b) $\{x|x > 8\}$.



c) $\{x|x \leq 0,5\}$.



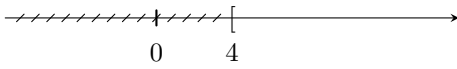
d) $\{x|x \geq -4\}$.



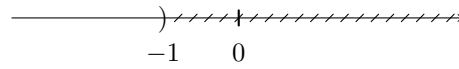
□

 Bài 3. Hình vẽ dưới đây là biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào?

a)



b)



 Lời giải.

a) $\{x|x \geq 4\}$.

b) $\{x|x < -1\}$.

5

§4 Bất phương trình bậc nhất một ẩn

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Bất phương trình bậc nhất một ẩn

Định nghĩa 4. Bất phương trình có dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$) trong đó a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

1.2 Hai quy tắc biến đổi phương trình

- ☑ **Quy tắc chuyển vế :** Khi chuyển một hạng tử từ một vế của bất phương trình sang vế còn lại, ta phải đổi dấu hạng tử đó.
Ví dụ: $2x + 3 < 0 \Leftrightarrow 2x < -3$.
- ☑ **Quy tắc nhân (hoặc chia) với một số khác 0:** Khi nhân (hoặc chia) hai vế của bất phương trình với một số khác 0 ta phải giữ nguyên chiều của bất phương trình (nếu số đó dương) hoặc đổi chiều bất phương trình (nếu số đó âm), ta được bất phương trình mới tương đương với bất phương trình đã cho.

2 Các dạng toán

Dạng 99. Nhận dạng bất phương trình bậc nhất một ẩn

Dựa vào định nghĩa bất phương trình bậc nhất một ẩn.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Hãy xét xem các bất phương trình sau có là bất phương trình bậc nhất một ẩn hay không? Vì sao?

- a) $5x + 3 \geq 0$; b) $0x - 1 < 0$; c) $\frac{-2x + 4}{3} \leq 0$; d) $x^2 + 1 > 0$.

Lời giải.

- a) Có với $a = 5, b = 3$. b) Không vì $a = 0$.
c) Có với $a = \frac{-2}{3}, b = \frac{4}{3}$. d) Không phải vì x^2 có bậc là 2.

□

Ví dụ 2. Trong các bất phương trình sau đâu là bất phương trình bậc nhất một ẩn? Chỉ rõ a, b .

- a) $2x - 4 > 0$; b) $\frac{2}{3}x + \frac{5}{4} \leq 0$; c) $9 - 0x \leq 0$; d) $x^3 - 12 \geq 0$.

 **Lời giải.**

Bất phương trình bậc nhất một ẩn là a, b.

- a) Với $a = 2, b = -4$. b) Với $a = \frac{2}{3}, b = \frac{5}{4}$.
c) Không vì $a = 0$; d) Không vì x^3 có bậc là 3.

□

Dạng 100. Giải bất phương trình

Sử dụng các quy tắc chuyển vế hoặc nhân (chia) với một số khác 0 để giải các bất phương trình đã cho.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình theo quy tắc chuyển vế:

- a) $x - 9 \leq 0$; **ĐS:** $x \leq 9$ b) $x + 9 < 2$; **ĐS:** $x < -7$
c) $4 - x > -2x + 5$; **ĐS:** $x > 1$ d) $x - 3x \geq 4 - 3x$. **ĐS:** $x \geq 4$

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 9.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 9$.

b) Ta có

$$x + 9 < 2 \Leftrightarrow x < -7.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -7$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} 4 - x &> -2x + 5 \\ \Leftrightarrow -x + 2x &> 5 - 4 \\ \Leftrightarrow x &> 1. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 1$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} x - 3x &\geq 4 - 3x \\ \Leftrightarrow x - 3x + 3x &\geq 4 \\ \Leftrightarrow x &\geq 4. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 4$.

□

Ví dụ 2. Giải các phương trình theo quy tắc chuyển vế:

- a) $x - 5 \geq 0$; **ĐS:** $x \geq 5$ b) $x + 4 > 11$; **ĐS:** $x > 7$
c) $1 + 2x \leq 3 + x$; **ĐS:** $x \leq 2$ d) $x + 1 - 2x < -2x - 8$. **ĐS:** $x < -9$

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 5$.

b) Ta có

$$x + 4 > 11 \Leftrightarrow x > 7.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 7$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} 1 + 2x &\leq 3 + x \\ \Leftrightarrow 2x - x &\leq 3 - 1 \\ \Leftrightarrow x &\leq 2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 2$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} x + 1 - 2x &< -2x - 8 \\ \Leftrightarrow x - 2x + 2x &< -8 - 1 \\ \Leftrightarrow x &< -9. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -9$.

□

 **Ví dụ 3.** Giải các phương trình theo quy tắc nhân:

a) $4x \leq 16;$

ĐS: $x \leq 4$

b) $\frac{5}{2}x > 2;$

ĐS: $x > \frac{4}{5}$

c) $\frac{-1}{2}x < 7;$

ĐS: $x > -14$

d) $-0,4x \geq -5.$

ĐS: $x \leq \frac{25}{2}$

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned} 4x &\leq 16 \\ \Leftrightarrow x &\leq 16 \cdot \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x &\leq 4. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 4$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}x &> 2 \\ \Leftrightarrow x &> 2 \cdot \frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow x &> \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{4}{5}$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2}x &< 7 \\ \Leftrightarrow x &> 7 \cdot (-2) \\ \Leftrightarrow x &> -14. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -14$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} -0,4x &\geq -5 \\ \Leftrightarrow x &\leq -5 : (-0,4) \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{25}{2}$.

□

 **Ví dụ 4.** Giải các bất phương trình theo quy tắc nhân:

a) $2x \geq 4;$

ĐS: $x \geq 2$

b) $\frac{3}{2}x > 6;$

ĐS: $x > 4$

c) $-3x \leq 12;$

ĐS: $x \geq -4$

d) $-0,5x < -8.$

ĐS: $x > 16$

 Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
 2x &\geq 4 \\
 \Leftrightarrow x &\geq 4 : 2 \\
 \Leftrightarrow x &\geq 2.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 2$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2}x &> 6 \\
 \Leftrightarrow x &> 6 : \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow x &> 4.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 4$.

c) Ta có

$$\begin{aligned}
 -3x &\leq 12 \\
 \Leftrightarrow x &\geq 12 : (-3) \\
 \Leftrightarrow x &\geq -4.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -4$.

d) Ta có

$$\begin{aligned}
 -0,5x &< -8 \\
 \Leftrightarrow x &> -8 : (-0,5) \\
 \Leftrightarrow x &> 16.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 16$.

□

 **Ví dụ 5.** Giải các bất phương trình sau:

- a) $3x + 1 \leq 16$; **ĐS:** $x \leq 5$ b) $-2x - 2 > 8$; **ĐS:** $x < -5$
 c) $5x + 6(x + 1) > x - (x + 5)$; **ĐS:** $x > -1$ d) $5x(x + 1) \geq x(5x - 1)$. **ĐS:** $x \geq 0$

 Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
 3x + 1 &\leq 16 \\
 \Leftrightarrow 3x &\leq 16 - 1 \\
 \Leftrightarrow 3x &\leq 15 \\
 \Leftrightarrow x &\leq 5.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 5$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 -2x - 2 &> 8 \\
 \Leftrightarrow -2x &> 8 + 2 \\
 \Leftrightarrow -2x &> 10 \\
 \Leftrightarrow x &< -5.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -5$.

c) Ta có

$$\begin{aligned}
 5x + 6(x + 1) &> x - (x + 5) \\
 \Leftrightarrow 5x + 6x + 6 &> x - x - 5 \\
 \Leftrightarrow 5x + 6x - x + x &> -5 - 6 \\
 \Leftrightarrow 11x &> -11 \\
 \Leftrightarrow x &> -1.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -1$.

d) Ta có

$$\begin{aligned}
 5x(x + 1) &\geq x(5x - 1) \\
 \Leftrightarrow 5x^2 + 5x &\geq 5x^2 - x \\
 \Leftrightarrow 5x^2 + 5x - 5x^2 + x &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow 6x &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow x &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 0$.

□

 **Ví dụ 6.** Giải các bất phương trình sau:

- a) $2x + 1 \geq 5$; **ĐS:** $x \geq 2$ b) $-2x - 8 > 8$; **ĐS:** $x < -8$
 c) $3x - (x - 4) \leq x - 8$; **ĐS:** $x \leq -12$ d) $x(x + 8) < x(x + 3) + 5$. **ĐS:** $x < 1$

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned} 2x + 1 &\geq 5 \\ \Leftrightarrow 2x &\geq 5 - 1 \\ \Leftrightarrow 2x &\geq 4 \\ \Leftrightarrow x &\geq 2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 2$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} -2x - 8 &> -8 \\ \Leftrightarrow -2x &> -8 + 8 \\ \Leftrightarrow -2x &> 0 \\ \Leftrightarrow x &< -8. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 0$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} 3x - (x - 4) &\leq x - 8 \\ \Leftrightarrow 3x - x + 4 &\leq x - 8 \\ \Leftrightarrow 3x - x - x &\leq -8 - 4 \\ \Leftrightarrow x &\leq -12. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq -12$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} x(x + 8) &< x(x + 3) + 5 \\ \Leftrightarrow x^2 + 8x &< x^2 + 3x + 5 \\ \Leftrightarrow x^2 + 8x - x^2 - 3x &< 5 \\ \Leftrightarrow 5x &< 5 \\ \Leftrightarrow x &< 1. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 1$.

Dạng 101. Biểu diễn tập nghiệm trên trục số

- ☒ **Bước 1.** Giải bất phương trình bằng quy tắc chuyển vế hoặc quy tắc nhân.
☒ **Bước 2.** Biểu diễn nghiệm của bất phương trình trên trục số.

BÀI TẬP MẪU

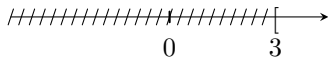
 **Ví dụ 1.** Giải bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số:

- a) $3x - 8 \geq 1$; **ĐS:** ≥ 3 b) $2x - 8 > x - 1$; **ĐS:** $x > 7$
 c) $4x + 2 - 5x \leq 0$; **ĐS:** $x \geq 2$ d) $-x + 3 > 9 + 2x$. **ĐS:** $x < -2$.

 **Lời giải.**

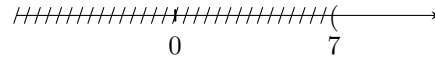
a) Ta có

$$\begin{aligned}
 3x - 8 &\geq 1 \\
 \Leftrightarrow 3x &\geq 1 + 8 \\
 \Leftrightarrow 3x &\geq 9 \\
 \Leftrightarrow x &\geq 3.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 3$.

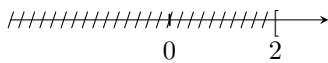
b) Ta có

$$\begin{aligned}
 2x - 8 &> x - 1 \\
 \Leftrightarrow 2x - x &> -1 + 8 \\
 \Leftrightarrow x &> 7.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 7$.

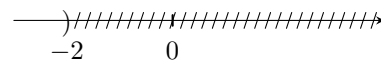
c) Ta có

$$\begin{aligned}
 4x + 2 - 5x &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow 4x - 5x &\leq 0 - 2 \\
 \Leftrightarrow -x &\leq -2 \\
 \Leftrightarrow x &\geq 2.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 2$.

d) Ta có

$$\begin{aligned}
 -x + 3 &> 9 + 2x \\
 \Leftrightarrow -x - 2x &> 9 - 3 \\
 \Leftrightarrow -3x &> 6 \\
 \Leftrightarrow x &< -2.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -2$.

□

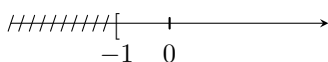
Ví dụ 2. Giải bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số:

- | | | | |
|---------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|
| a) $x + 5 \geq 4$; | ĐS: $x \geq -1$ | b) $3x - 8 > 2x$; | ĐS: $x > 8$ |
| c) $2x + 5 \leq 3x + 4$; | ĐS: $x \geq 1$ | d) $-x + 5 < 3x + 13$. | ĐS: $x \geq -2$ |

Lời giải.

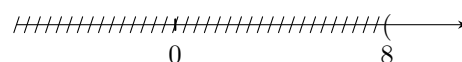
a)

$$\begin{aligned}
 x + 5 &\geq 4 \\
 \Leftrightarrow x &\geq 4 - 5 \\
 \Leftrightarrow x &\geq -1.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -1$.

b)

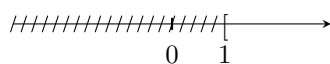
$$\begin{aligned}
 3x - 8 &> 2x \\
 \Leftrightarrow 3x - 2x &> 8 \\
 \Leftrightarrow x &> 8.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 8$.

c)

$$\begin{aligned} 2x + 5 &\leq 3x + 4 \\ \Leftrightarrow 2x - 3x &\leq 4 - 5 \\ \Leftrightarrow -x &\leq -1 \\ \Leftrightarrow x &\geq 1. \end{aligned}$$

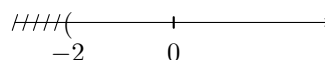
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 1$.



d)

$$\begin{aligned} -x + 5 &< 3x + 13 \\ \Leftrightarrow -x - 3x &< 13 - 5 \\ \Leftrightarrow -4x &< 8 \\ \Leftrightarrow x &> -2. \end{aligned}$$

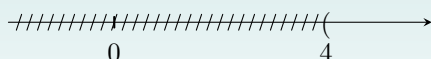
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -2$.



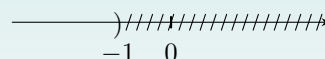
□

Ví dụ 3. Hình vẽ sau biểu diễn tập nghiệm của phương trình nào? Hãy kể tên ít nhất một bất phương trình có cùng tập nghiệm.

a)



b)



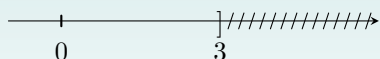
Lời giải.

- Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình: $x > 4$. Bất phương trình có cùng tập nghiệm: $2x > 8$.
- Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình: $x < -1$. Bất phương trình có cùng tập nghiệm: $-8x > 8$.

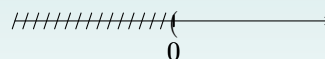
□

Ví dụ 4. Hình vẽ sau biểu diễn tập nghiệm của phương trình nào? Hãy kể tên ít nhất một bất phương trình có cùng tập nghiệm.

a)



b)



Lời giải.

- Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình: $x \leq 3$. Bất phương trình có cùng tập nghiệm: $x - 1 \leq 2$.
- Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình: $x > 0$. Bất phương trình có cùng tập nghiệm: $x + 9 > 9$.

□

Dạng 102. Bất phương trình tương đương

Để giải thích sự tương đương giữa hai bất phương trình, ta thường dùng hai cách sau.

- ☑ *Cách 1:* Giải cả hai bất phương trình rồi kiểm tra hai tập nghiệm có giống nhau hay không.
- ☑ *Cách 2:* Bằng hai quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân, ta biến đổi từ bất phương trình này tương đương với bất phương trình kia.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải thích sự tương đương:

a) $x + 8 \leq 3 \Leftrightarrow x - 2 \leq -7$;

b) $-2x > 6 \Leftrightarrow 3x < -9$;

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} x + 8 &\leq 3 \text{ (cộng } -10 \text{ cho hai vế)} \\ \Leftrightarrow x + 8 - 10 &\leq 3 - 10 \\ \Leftrightarrow x - 2 &\leq -7 \end{aligned}$$

Vậy $x + 8 \leq 3 \Leftrightarrow x - 2 \leq -7$;

2.

$$\begin{aligned} -2x &> 6 \\ \Leftrightarrow x &< 6 : (-2) \\ \Leftrightarrow x &< -3 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -3$ (1)

$$\begin{aligned} 3x &< -9 \\ \Leftrightarrow x &< -9 : 3 \\ \Leftrightarrow x &< -3 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $-2x > 6 \Leftrightarrow 3x < -9$. □

Ví dụ 2. Giải thích sự tương đương:

a) $x + 4 > 10 \Leftrightarrow x - 2 > 4$;

b) $-2x \leq 8 \Leftrightarrow 3x \geq -12$;

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} x + 4 &> 10 \\ \Leftrightarrow x + 4 - 6 &> 10 - 6 \\ \Leftrightarrow x - 2 &> 4 \end{aligned}$$

Vậy $x + 4 > 10 \Leftrightarrow x - 2 > 4$.

b)

$$\begin{aligned} -2x &\leq 8 \\ \Leftrightarrow -2x \cdot \frac{-3}{2} &\geq 8 \cdot \frac{-3}{2} \\ \Leftrightarrow 3x &\geq -12 \end{aligned}$$

Vậy $-2x \leq 8 \Leftrightarrow 3x \geq -12$.

Dạng 103. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Để giải bài toán cách lập phương trình ta cần thực hiện các bước sau:

- ✓ *Bước 1:* Đặt ẩn và tìm điều kiện cho ẩn;
- ✓ *Bước 2:* Biểu diễn những đại lượng chưa biết theo ẩn;
- ✓ *Bước 3:* Lập phương trình theo yêu cầu của đề bài;
- ✓ *Bước 4:* Giải bất phương trình và kết luận.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Quãng đường A đến B dài không quá 120 km. Một xe máy đi từ A đến B với vận tốc 60 km/h. Đi được nửa giờ thì gặp đường xấu nên xe máy chỉ đi với vận tốc 40 km/h. Hỏi thời gian xe máy đi trên đoạn đường xấu là bao nhiêu? **ĐS:** không quá 2,25 (h)

Lời giải.

Gọi x (h) là thời gian xe máy đi trên đoạn đường xấu. Điều kiện: $x > 0$.

Quãng đường xe máy đi được ở đoạn đường xấu là $40x$ (km).

Theo đề quãng đường A đến B dài 120 km nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} 60 \cdot 0,5 + 40x &\leq 120 \\ \Leftrightarrow 40x &\leq 120 - 30 \\ \Leftrightarrow x &\leq 90 : 40 \\ \Leftrightarrow x &\leq 2,25(\text{TMĐK}) \end{aligned}$$

Vậy thời gian xe máy đi trên đoạn đường xấu không quá 2,25 (h).

Ví dụ 2. Bạn Mai có không quá 80000 đồng gồm 30 tờ tiền với mệnh giá lần lượt là: 2000 đồng và 5000 đồng. Hỏi bạn Mai có bao nhiêu tờ loại 5000 đồng? **ĐS:** Không quá 6 tờ

Lời giải.

Gọi x (tờ) là số tờ tiền loại 5000 đồng. Điều kiện: $0 < x < 30, x \in \mathbb{Z}$.

Số tờ tiền loại 2000 đồng là $30 - x$ (tờ).

Tổng giá trị của tờ 5000 là $5000x$ (đồng).

Tổng giá trị của tờ 2000 là $(30 - x)2000$ (đồng).

Theo đề bạn Mai có 80000 đồng nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} 5000x + (30 - x)2000 &\leq 80000 \\ \Leftrightarrow 5000x + 60000 - 2000x &\leq 80000 \\ \Leftrightarrow 3000x &\leq 20000 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{20}{3} \quad (\text{TMĐK}) \end{aligned}$$

Vậy bạn Mai có không quá 6 tờ tiền loại 5000 đồng.

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Trong các bất phương trình sau, đâu là bất phương trình bậc nhất? Chỉ rõ a và b .

- a) $7 - 5x > 0$; **ĐS:** $a = -5, b = 7$ b) $\frac{x-5}{6} - 5 \geq 0$; **ĐS:** $a = \frac{1}{6}, b = \frac{-35}{6}$
 c) $\frac{2}{3} - 4x < 0$; **ĐS:** $a = -4, b = \frac{2}{3}$ d) $x(x-1) - x < 0$. **ĐS:** Không phải

Lời giải.

- Phải với $a = -5, b = 7$.
- Phải với $a = \frac{1}{6}, b = \frac{-35}{6}$.
- Phải với $a = -4, b = \frac{2}{3}$.
- Không phải vì $x(x-1) - x < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - x < 0$ đây là bất phương trình bậc 2.

□

Bài 2. Giải các bất phương trình sau theo quy tắc chuyển vế:

- a) $x + \frac{1}{2} \leq 0$; **ĐS:** $x \leq \frac{-1}{2}$ b) $x - 2 < 3$; **ĐS:** $x < 5$
 c) $3 + 2x > x + 6$; **ĐS:** $x > 3$ d) $3x + 5 - x \geq 3 + x$. **ĐS:** $x \geq -2$

Lời giải.

- a) b)
- $$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x &\leq 0 - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x - 2 &< 3 \\ \Leftrightarrow x &< 3 + 2 \\ \Leftrightarrow x &< 5. \end{aligned}$$
- Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{-1}{2}$.

- c) d)
- $$\begin{aligned} 3 + 2x &> x + 6 \\ \Leftrightarrow 2x - x &> 6 - 3 \\ \Leftrightarrow x &> 3. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 3x + 5 - x &\geq 3 + x \\ \Leftrightarrow 3x - x - x &\geq 3 - 5 \\ \Leftrightarrow x &\geq -2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 3$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -2$.

□

 **Bài 3.** Giải các bất phương trình sau theo quy tắc nhân:

a) $\frac{2}{3}x \leq 5;$

ĐS: $x \leq \frac{15}{2}$

b) $2x > -4;$

ĐS: $x > -2$

c) $-3x > 6;$

ĐS: $x < -2$

d) $-\frac{3}{8}x \geq -1.$

ĐS: $x \leq \frac{8}{3}$

 **Lời giải.**

a)

b)

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x &\leq 5 \\ \Leftrightarrow x &\leq 5 : \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &> -4 \\ \Leftrightarrow x &> -4 : 2 \\ \Leftrightarrow x &> -2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{15}{2}$.

c)

d)

$$\begin{aligned} -3x &> 6 \\ \Leftrightarrow x &< 6 : (-3) \\ \Leftrightarrow x &< -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{8}x &\geq -1 \\ \Leftrightarrow x &\leq -1 : \frac{-3}{8} \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{8}{3}$.

□

 **Bài 4.** Giải các bất phương trình sau:

a) $4x - 6 \leq 12;$

ĐS: $x \leq \frac{9}{2}$

b) $3x - 2 > x - 5;$

ĐS: $x > \frac{-3}{2}$

c) $\frac{x-5}{2} > x+3;$

ĐS: $x < -11$

d) $2x(x+1) \geq x(2x-6)+1.$

ĐS: $x \geq \frac{1}{8}$

 **Lời giải.**

a)

b)

$$\begin{aligned} 4x - 6 &\leq 12 \\ \Leftrightarrow 4x &\leq 12 + 6 \\ \Leftrightarrow 4x &\leq 18 \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2 &> x - 5 \\ \Leftrightarrow 3x - x &> -5 + 2 \\ \Leftrightarrow 2x &> -3 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{-3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{9}{2}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{-3}{2}$.

c)

$$\begin{aligned}\frac{x-5}{2} &> x+3 \\ \Leftrightarrow x-5 &> 2x+6 \\ \Leftrightarrow x-2x &> 6+5 \\ \Leftrightarrow x &< -11.\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -11$.

d)

$$\begin{aligned}2x(x+1) &\geq x(2x-6)+1 \\ \Leftrightarrow 2x^2+2x &\geq 2x^2-6x+1 \\ \Leftrightarrow 8x &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq \frac{1}{8}$.

□

Bài 5. Giải các bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số:

a) $4x+1 \geq 5$; **ĐS:** $x \geq 1$ b) $3+2x > x-10$; **ĐS:** $x > -13$

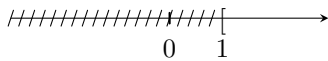
c) $3-2x \geq x+12$; **ĐS:** $x \leq -3$ d) $-x+8 < 9+2x$. **ĐS:** $x > \frac{-1}{3}$

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}4x+1 &\geq 5 \\ \Leftrightarrow 4x &\geq 4 \\ \Leftrightarrow x &\geq 1.\end{aligned}$$

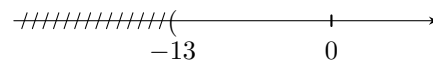
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 1$.



b)

$$\begin{aligned}3+2x &> x-10 \\ \Leftrightarrow 2x-x &> -10-3 \\ \Leftrightarrow x &> -13.\end{aligned}$$

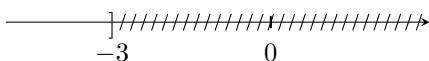
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -13$.



c)

$$\begin{aligned}3-2x &\geq x+12 \\ \Leftrightarrow -2x-x &\geq 12-3 \\ \Leftrightarrow -3x &\geq 9 \\ \Leftrightarrow x &\leq -3.\end{aligned}$$

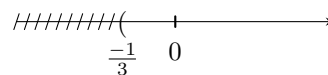
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq -3$.



d)

$$\begin{aligned}-x+8 &< 9+2x \\ \Leftrightarrow -x-2x &< 9-8 \\ \Leftrightarrow -3x &< 1 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{-1}{3}.\end{aligned}$$

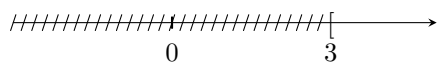
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{-1}{3}$.



□

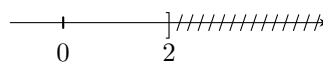
Bài 6. Hình vẽ sau biểu diễn tập nghiệm của phương trình nào? Hãy kể tên ba bất phương trình có cùng tập nghiệm.

a)



ĐS: $x > 3$

b)



ĐS: $x \leq 2$

Lời giải.

- Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình $x > 3$. Ba bất phương trình có cùng tập nghiệm là $2x > 6$, $x + 7 > 10$, $2(x + 1) > 8$.
- Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình $x \leq 2$. Ba bất phương trình có cùng tập nghiệm là $2x \leq 4$, $x + 7 \leq 9$, $-21x \geq -42$.

□

Bài 7. Giải thích sự tương đương:

a) $x - 6 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 8$;

b) $3x \leq -9 \Leftrightarrow x \leq -3$;

Lời giải.

- Ta có: $x - 6 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2 + 6 \Leftrightarrow x \leq 8$.
Vậy $x - 6 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 8$.
- Ta có: $3x \leq -9 \Leftrightarrow x \leq -9 : 3 \Leftrightarrow x \leq -3$.
Vậy $3x \leq -9 \Leftrightarrow x \leq -3$.

□

Bài 8. Bạn Mai có không quá 100000 đồng gồm 15 tờ tiền với mệnh giá lần lượt là: 10000 đồng và 5000 đồng. Hỏi bạn Mai có bao nhiêu tờ 10000 đồng.

Lời giải.

Gọi x (tờ) là số tờ tiền loại 10000 đồng. Điều kiện: $0 < x < 15$, $x \in \mathbb{Z}$.

Số tờ tiền loại 5000 đồng là $15 - x$ (tờ).

Tổng giá trị của tờ 10000 là $10000x$ (đồng).

Tổng giá trị của tờ 5000 là $(15 - x)5000$ (đồng).

Theo đề bạn Mai có 100000 đồng nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} 10000x + (15 - x)5000 &\leq 100000 \\ \Leftrightarrow 10000x + 75000 - 5000x &\leq 100000 \\ \Leftrightarrow 5000x &\leq 25000 \\ \Leftrightarrow x &\leq 5 \quad (\text{TMĐK}) \end{aligned}$$

Vậy bạn Mai có không quá 5 tờ tiền loại 10000 đồng.

□

§5 Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số

Định nghĩa 5. Giá trị tuyệt đối của số a , ký hiệu là $|a|$, được định nghĩa khoảng cách từ số a đến số 0 trên trục số.

Như vậy: $|a| = \begin{cases} a & \text{khi } a \geq 0 \\ -a & \text{khi } a < 0 \end{cases}$

1.2 Tính chất

Ta luôn có:

$$|a| \geq 0; \quad |-a| = |a|; \quad |a|^2 = a^2.$$

1.3 Cách giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối cơ bản

Giải phương trình dạng $|a| = b$.

Cách giải: Ta có thể làm theo hai cách sau:

☑ *Cách 1.* Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. Với $a \geq 0$, phương trình có dạng $a = b$;

Trường hợp 2. Với $a < 0$, phương trình có dạng $-a = b$.

☑ *Cách 2.* Ta có: $|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases} \end{cases}$

2 Các dạng toán

Dạng 104. Rút gọn biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Thực hiện theo các bước sau:

- ☑ *Bước 1.* Dựa vào định nghĩa và tính chất để bỏ dấu giá trị tuyệt đối;
- ☑ *Bước 2.* Sử dụng biến đổi đại số để thu gọn biểu thức.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 **Ví dụ 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $A = |x - 3| + 2x - 5$ khi $x \geq 3$; **ĐS:** $3x - 8$ b) $B = |-3x| + 8x - 4$ khi $x \leq 0$; **ĐS:** $5x - 4$
 c) $C = |x - 4| + 8x$ khi $x \geq 2$; **ĐS:** x^2 , d) $D = |2x - 4| + 3x + 2$. **ĐS:** $5x - 2, x + 6$
 $x^2 + 2x - 8$

 **Lời giải.**

- a) Khi $x \geq 3 \Rightarrow x - 3 \geq 0$.
 Do đó: $A = x - 3 + 2x - 5 = 3x - 8$.
 b) Khi $x \leq 0 \Rightarrow -3x \geq 0$.
 Do đó: $B = -3x + 8x - 4 = 5x - 4$.
 c) Khi $x \geq 2 \Rightarrow x - 4 \geq -2$.
 TH 1. Nếu $2 \leq x < 4$ thì $x - 4 < 0$.
 Do đó: $C = -(x - 4) + x^2 + x - 4 = x^2 + 2x - 2$.
 TH 2. $x \geq 4 \Rightarrow x - 4 \geq 0$.
 Do đó: $C = x - 4 + x^2 + x - 4 = x^2$.
 d) TH 1. Khi $2x - 4 \geq 0$.
 Suy ra: $D = 2x - 4 + 3x + 2 = 5x - 2$.
 TH 2. Khi $2x - 4 < 0$
 Suy ra: $D = -(2x - 4) + 3x + 2 = -2x + 4 + 3x + 2 = x + 6$.

□

 **Ví dụ 2.** Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $A = 6 - 4x + |x - 5|$ khi $x < 5$; **ĐS:** $-5x + 11$ b) $B = 3x - 4 + |-2x|$ khi $x > 0$; **ĐS:** $5x - 4$
 c) $C = |x - 2| + 2x^2 - x - 2$ khi $x \leq 1$; **ĐS:** $2x^2 - 2x$ d) $D = |2x - 6| + 4x - 3$. **ĐS:** $6x - 9, 2x + 3$

 **Lời giải.**

- a) Khi $x < 5 \Rightarrow x - 5 < 0$.
 Do đó: $A = 6 - 4x - x + 5 = -5x + 11$.
 b) Khi $x > 0 \Rightarrow -2x < 0$.
 Do đó: $B = 3x - 4 + 2x = 5x - 4$.
 c) Khi $x \leq 1 \Rightarrow x - 2 \leq -1$.
 Do đó: $C = -x + 2 + 2x^2 - x - 2 = 2x^2 - 2x$.
 d) TH 1. Khi $2x - 6 \geq 0$.
 Suy ra: $D = 2x - 6 + 4x - 3 = 6x - 9$.
 TH 2. Khi $2x - 6 < 0$.
 Suy ra: $D = -2x + 6 + 4x - 3 = 2x + 3$.

□

 Dạng 105. Giải các phương trình chứa giá trị tuyệt đối

Thực hiện theo các bước sau:

- ☒ **Bước 1.** Sử dụng các công thức linh hoạt theo từng cách viết để chuyển về phương trình bậc nhất;
- ☒ **Bước 2.** Đối chiếu điều kiện để đưa ra kết luận tập nghiệm.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 **Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau:

- a) $|2x| = x + 3$; **ĐS:** $S = \{3; -1\}$ b) $|-3x| = 4x - 5$; **ĐS:** $S = \{5\}$
 c) $|0,5x| = 3x - 10$; **ĐS:** $S = \{4\}$ d) $|-2,5x| + 8 = 1,5x$. **ĐS:** $S = \emptyset$

 **Lời giải.**

- a) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|2x| = 2x$ khi đó phương trình trở thành b) TH 1. Nếu $x \leq 0$ thì $|-3x| = -3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x &= x + 3 \\ \Leftrightarrow 2x - x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x &= 4x - 5 \\ \Leftrightarrow -7x &= -5 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{7} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|2x| = -2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -2x &= x + 3 \\ \Leftrightarrow -3x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 0$ thì $|-3x| = 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x &= 4x - 5 \\ \Leftrightarrow -x &= -5 \\ \Leftrightarrow x &= 5 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{3; -1\}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{5\}$.

- c) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|0,5x| = 0,5x$ khi đó phương trình trở thành d) TH 1. Nếu $x \leq 0$ thì $|-2,5x| = -2,5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 0,5x &= 3x - 10 \\ \Leftrightarrow -2,5x &= -10 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2,5x + 8 &= 1,5x \\ \Leftrightarrow -2,5x - 1,5x &= -8 \\ \Leftrightarrow -4x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|0,5x| = -0,5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -0,5x &= 3x - 10 \\ \Leftrightarrow -3,5x &= -10 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{20}{7} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 0$ thì $|-2,5x| = 2,5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2,5x + 8 &= 1,5x \\ \Leftrightarrow 2,5x - 1,5x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= -8 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.

□

 **Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau:

- a) $|3x| = x + 6$; **ĐS:** $S = \left\{3; \frac{-3}{2}\right\}$ b) $|-3x| = 3x + 6$; **ĐS:** $S = \{-1\}$
 c) $|0,5x| = 2x - 4$; **ĐS:** $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$ d) $|-3x| + 5 = 2x$. **ĐS:** $\emptyset$

 **Lời giải.**

a) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|3x| = 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x &= x + 6 \\ \Leftrightarrow 2x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \quad (\text{TMĐK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|3x| = -3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -3x &= x + 6 \\ \Leftrightarrow -4x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-3}{2} \quad (\text{TMĐK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{3; \frac{-3}{2}\right\}$.

b) TH 1. Nếu $x \leq 0$ thì $|-3x| = -3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -3x &= 3x + 6 \\ \Leftrightarrow -6x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \quad (\text{TMĐK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 0$ thì $|-3x| = 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x &= 3x + 6 \\ \Leftrightarrow 0x &= 6 \quad (\text{VN}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{-1\}$.

c) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|0,5x| = 0,5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 0,5x &= 2x - 4 \\ \Leftrightarrow -1,5x &= -4 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{8}{3} \quad (\text{TMĐK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|0,5x| = -0,5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -0,5x &= 2x - 4 \\ \Leftrightarrow -3,5x &= -4 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{8}{7} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$.

d) TH 1. Nếu $x \leq 0$ thì $|-3x| = -3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -3x + 8 &= 2x \\ \Leftrightarrow -5x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{8}{5} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 0$ thì $|-3x| = 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 2x \\ \Leftrightarrow x &= -5 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.

□

 **Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau:

a) $|8 + x| = 2x$; **ĐS:** $S = \{8\}$ b) $|x - 2| - 3x - 2 = 0$; **ĐS:** $S = \{0\}$

c) $|x + 4| = 2x + 2$; **ĐS:** $S = \{2\}$ d) $|7 - x| = 5x + 3$. **ĐS:** $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

 **Lời giải.**

a) TH 1. Nếu $x \geq -8$ thì $|8+x| = 8+x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 8+x &= 2x \\ \Leftrightarrow x-2x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= 8 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -8$ thì $|8+x| = -8-x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -8-x &= 2x \\ \Leftrightarrow 3x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-8}{3} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{8\}$.

b) TH 1. Nếu $x \geq 2$ thì $|x-2| = x-2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x-2-3x-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 2$ thì $|x-2| = 2-x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2-x-3x-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -4x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{0\}$.

c) TH 1. Nếu $x \geq -4$ thì $|x+4| = x+4$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x+4 &= 2x+2 \\ \Leftrightarrow 2x-x &= 4-2 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -4$ thì $|x+4| = -x-4$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -x-4 &= 2x+2 \\ \Leftrightarrow 3x &= -6 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

d) TH 1. Nếu $x \leq 7$ thì $|7-x|7-x =$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 7-x &= 5x+3 \\ \Leftrightarrow 6x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 7$ thì $|7-x| = x-7$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x-7 &= 5x+3 \\ \Leftrightarrow 4x &= -10 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-5}{2} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

□

 **Ví dụ 4.** Giải các phương trình sau:

a) $|x-6| = 2x+1$; **ĐS:** $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$ b) $|x+3| = 2x-3$; **ĐS:** $S = \{6\}$

c) $|x+3| = 2x-1$; **ĐS:** $S = \{4\}$ d) $|x-4| - 3x = 6$. **ĐS:** $S = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$

 **Lời giải.**

a) TH 1. Nếu $x \geq 6$ thì $|x - 6| = x - 6$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 6 &= 2x + 1 \\ \Leftrightarrow 2x - x &= -6 - 1 \\ \Leftrightarrow x &= -7 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 6$ thì $|x - 6| = 6 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 6 - x &= 2x + 1 \\ \Leftrightarrow 3x &= 5 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

b) TH 1. Nếu $x \geq -3$ thì $|x + 3| = x + 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x + 3 &= 2x - 3 \\ \Leftrightarrow 2x - x &= 3 + 3 \\ \Leftrightarrow x &= 6 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -3$ thì $|x + 3| = -x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -x - 3 &= 2x - 3 \\ \Leftrightarrow 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{6\}$.

c) TH 1. Nếu $x \geq -3$ thì $|x + 3| = x + 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x + 3 &= 2x - 1 \\ \Leftrightarrow 2x - x &= 3 + 1 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -3$ thì $|x + 3| = -x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -x - 3 &= 2x - 1 \\ \Leftrightarrow 3x &= -2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-2}{3} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.

d) TH 1. Nếu $x \geq 4$ thì $|x - 4| = x - 4$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 4 - 3x &= 6 \\ \Leftrightarrow -2x &= 10 \\ \Leftrightarrow x &= -5 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 4$ thì $|x - 4| = 4 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4 - x - 3x &= 6 \\ \Leftrightarrow -4x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1}{2} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$.

□

 **Ví dụ 5.** Giải các phương trình sau:

- a) $|5x| - x - 2 = 0$; **ĐS:** $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{-1}{3}\right\}$ b) $|7x - 3| - x + 6 = x$; **ĐS:** $S = \emptyset$
- c) $|3 - x| + x^2 - x(x + 4) = 0$; **ĐS:** $S = \left\{\frac{3}{5}\right\}$ d) $(x - 1)^2 + |x + 2| - x^2 - 13 = 0$. **ĐS:** $S = \left\{\frac{-14}{3}\right\}$

 **Lời giải.**

- a) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|5x| = 5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 5x - x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|5x| = -5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -5x - x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -6x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-1}{3} \right\}$.

- b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{3}{7}$ thì $|7x - 3| = 7x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 7x - 3 - x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1}{2} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{3}{7}$ thì $|7x - 3| = 3 - 7x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3 - 7x - x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow -8x &= -9 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{9}{8} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.

- c) TH 1. Nếu $x \leq 3$ thì $|3 - x| = 3 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3 - x + x^2 - x(x + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3 - x + x^2 - x^2 - 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow -5x &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{5} \quad (\text{TMDK}) \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 3$ thì $|3 - x| = x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 3 + x^2 - x(x + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 3 + x^2 - x^2 - 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{3}{5} \right\}$.

- d) TH 1. Nếu $x \geq -2$ thì $|x + 2| = x + 2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + x + 2 - x^2 - 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x + 2 - x^2 - 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow -x &= 10 \\ \Leftrightarrow x &= -10 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -2$ thì $|x + 2| = -x - 2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 - x - 2 - x^2 - 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - x - 2 - x^2 - 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x &= 14 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-14}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{-14}{3} \right\}$.

□

 **Ví dụ 6.** Giải các phương trình sau:

a) $|3x| - x - 4 = 0$; **ĐS:** $S = \{2; -1\}$ b) $|4x - 7| - 2x + 9 = x$; **ĐS:** $\emptyset$

c) $|2 - x| + 2x^2 - 2x(x + 1) = 0$; **ĐS:** $S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ d) $(x - 2)^2 + |x + 3| - x^2 - 10 = 0$. **ĐS:** $S = \{-1\}$

 **Lời giải.**

- a) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|3x| = 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x - x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|3x| = -3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -3x - x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow -4x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{2; -1\}$.

- b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{7}{4}$ thì $|4x - 7| = 4x - 7$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4x - 7 - 2x + 9 &= x \\ \Leftrightarrow x &= -9 + 7 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{7}{4}$ thì $|4x - 7| = 7 - 4x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 7 - 4x - 2x + 9 &= x \\ \Leftrightarrow -7x &= -9 - 7 \\ \Leftrightarrow -7x &= -16 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{16}{7} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.

- c) TH 1. Nếu $x \leq 2$ thì $|2 - x| = 2 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2 - x + 2x^2 - 2x(x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 - x + 2x^2 - 2x^2 - 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x &= -2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 2$ thì $|2 - x| = x - 2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 2 + 2x^2 - 2x(x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 2 + 2x^2 - 2x^2 - 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow -x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

- d) TH 1. Nếu $x \geq -3$ thì $|x + 3| = x + 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + x + 3 - x^2 - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + x + 3 - x^2 - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -3$ thì $|x + 3| = -x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 - x - 3 - x^2 - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x - 3 - x^2 - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow -5x &= 9 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-9}{5} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{-1\}$.

 **Ví dụ 7.** Giải các phương trình sau:

- a) $|2x - 3| = 2x - 3$; **ĐS:** $x \geq \frac{3}{2}$ b) $|3x - 1| = 1 - 3x$; **ĐS:** $x \leq \frac{1}{3}$
 c) $|2x - 5| + (x - 1)^2 = x^2 - 4$; **ĐS:** $x \geq \frac{5}{2}$ d) $|2 - x| + x^2 = (x - 1)(x + 2)$; **ĐS:** $x \geq 2$

 **Lời giải.**

a) TH 1. Nếu $x \geq \frac{3}{2}$ thì $|2x - 3| = 2x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 2x - 3 \\ \Leftrightarrow 2x - 2x &= 3 - 3 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{3}{2}$ thì $|2x - 3| = 3 - 2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3 - 2x &= 2x - 3 \\ \Leftrightarrow -4x &= -6 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \geq \frac{3}{2}$

b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{1}{3}$ thì $|3x - 1| = 3x - 1$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 1 - 3x \\ \Leftrightarrow 3x + 3x &= 1 + 1 \\ \Leftrightarrow 6x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{1}{3}$ thì $|3x - 1| = 1 - 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 1 - 3x &= 1 - 3x \\ \Leftrightarrow -3x + 3x &= 1 - 1 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \leq \frac{1}{3}$.

c) TH 1. Nếu $x \geq \frac{5}{2}$ thì $|2x - 5| = 2x - 5$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x - 5 + (x - 1)^2 &= x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow 2x - 5 + x^2 - 2x + 1 &= x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{5}{2}$ thì $|2x - 5| = 5 - 2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 5 - 2x + (x - 1)^2 &= x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow 5 - 2x + x^2 - 2x + 1 &= x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow -4x &= -10 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{2} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \geq \frac{5}{2}$

d) TH 1. Nếu $x \leq 2$ thì $|2 - x| = 2 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2 - x + x^2 &= (x - 1)(x + 2) \\ \Leftrightarrow 2 - x + x^2 &= x^2 + 2x - x - 2 \\ \Leftrightarrow -2x &= -4 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 2$ thì $|2 - x| = x - 2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 2 + x^2 &= (x - 1)(x + 2) \\ \Leftrightarrow x - 2 + x^2 &= x^2 + 2x - x - 2 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \geq 2$.

□

 **Ví dụ 8.** Giải phương trình sau:

- a) $|3x - 5| = 3x - 5$; **ĐS:** $x \geq \frac{5}{3}$ b) $|5x - 2| = 2 - 5x$; **ĐS:** $x \leq \frac{2}{5}$
 c) $|4x - 3| + (x - 2)^2 = x^2 - 7$; **ĐS:** $x < \frac{3}{4}$ d) $|6 - x| + x^2 = (x - 2)(x + 3)$; **ĐS:** $x \geq 6$

 Lời giải.

- a) TH 1. Nếu $x \geq \frac{5}{3}$ thì $|3x - 5| = 3x - 5$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 3x - 5 \\ \Leftrightarrow 3x - 3x &= 5 - 5 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{5}{3}$ thì $|3x - 5| = 5 - 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 5 - 3x &= 3x - 5 \\ \Leftrightarrow -6x &= -10 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{3} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \geq \frac{5}{3}$.

- b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{2}{5}$ thì $|5x - 2| = 5x - 2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 5x - 2 &= 2 - 5x \\ \Leftrightarrow 5x + 5x &= 2 + 2 \\ \Leftrightarrow 10x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{5} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{2}{5}$ thì $|5x - 2| = 2 - 5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2 - 5x &= 2 - 5x \\ \Leftrightarrow -5x + 5x &= 2 - 2 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \leq \frac{2}{5}$.

- c) TH 1. Nếu $x \geq \frac{3}{4}$ thì $|4x - 3| = 4x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4x - 3 + (x - 2)^2 &= x^2 - 7 \\ \Leftrightarrow 4x - 3 + x^2 - 4x + 4 &= x^2 - 7 \\ \Leftrightarrow 0x &= -6 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-3}{4} \quad (\text{VN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{3}{4}$ thì $|4x - 3| = 3 - 4x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3 - 4x + (x - 2)^2 &= x^2 - 7 \\ \Leftrightarrow 3 - 4x + x^2 - 4x + 4 &= x^2 - 7 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x < \frac{3}{4}$.

- d) TH 1. Nếu $x \leq 6$ thì $|6 - x| = 6 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 6 - x + x^2 &= (x - 2)(x + 3) \\ \Leftrightarrow 6 - x + x^2 &= x^2 + 3x - 2x - 6 \\ \Leftrightarrow -2x &= -12 \\ \Leftrightarrow x &= 6 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 6$ thì $|6 - x| = x - 6$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 6 + x^2 &= (x - 2)(x + 3) \\ \Leftrightarrow x - 6 + x^2 &= x^2 + 3x - 2x - 6 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \geq 6$.

 **Ví dụ 9.** Giải các phương trình sau:

- a) $|2x - 1| = x^2 - 3x - 1$; **ĐS:** $S = \{5; -1\}$ b) $|2x - 1| = 4x^2 - 4x - 1$; **ĐS:**
 $S = \left\{ \frac{3}{2}; \frac{-1}{2} \right\}$

 Lời giải.

- a) TH 1. Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $|2x - 1| = 2x - 1$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= x^2 - 3x - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{KTMDK}) \\ x = 5 & (\text{TMDK}). \end{cases} \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $|2x - 1| = 1 - 2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= x^2 - 3x - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (\text{TMDK}) \\ x = 2 & (\text{KTMDK}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $S = \{5; -1\}$

- b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $|2x - 1| = 2x - 1$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 4x^2 - 4x - 1 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 6x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x(2x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{KTMDK}) \\ x = \frac{3}{2} & (\text{TMDK}). \end{cases} \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $|2x - 1| = 1 - 2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= 4x^2 - 4x - 1 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(2x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{KTMDK}) \\ x = -\frac{1}{2} & (\text{TMDK}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $S = \left\{ \frac{-3}{2}; \frac{-1}{2} \right\}$

□

 **Ví dụ 10.** Giải các phương trình sau:

- a) $|x - 2| = x^2 - 4x - 2$; **ĐS:** $S = \{5; -1\}$ b) $|x - 3| = x^2 - 6x + 7$; **ĐS:** $S = \{5; 1\}$

 Lời giải.

- a) TH 1. Nếu $x \geq 2$ thì $|x - 2| = x - 2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 2 &= x^2 - 4x - 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{KTMDK}) \\ x = 5 & (\text{TMĐK}). \end{cases} \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 2$ thì $|x - 2| = 2 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2 - x &= x^2 - 4x - 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (\text{TMĐK}) \\ x = 4 & (\text{KTMDK}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $S = \{5; -1\}$

- b) TH 1. Nếu $x \geq 3$ thì $|x - 3| = x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 3 &= x^2 - 6x + 7 \\ \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & (\text{KTMDK}) \\ x = 5 & (\text{TMĐK}). \end{cases} \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 3$ thì $|x - 3| = 3 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3 - x &= x^2 - 6x + 7 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{TMĐK}) \\ x = 4 & (\text{KTMDK}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $S = \{5; 1\}$

□

3 Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

- $A = |x - 9| + x + 7$ khi $x \geq 9$; **ĐS:** $2x - 2$
- $B = |-3x| - 8x^2 + 8x(x - 1) - 2$ khi $x \geq 0$; **ĐS:** $-5x - 2$
- $C = |-3x + 5| - x^2 + 5 - 3x$ khi $x > 1$. **ĐS:** $-x^2, -x^2 - 6x + 10$

 **Lời giải.**

- Khi $x \geq 9 \Rightarrow x - 9 \geq 0$
Do đó: $A = x - 9 + x + 7 = 2x - 2$.
- Khi $x \geq 0 \Rightarrow -3x \leq 0$.
TH 1. Khi $x > 0$ thì $B = 3x - 8x^2 + 8x(x - 1) - 2 = -5x - 2$.
TH 2. Khi $x = 0$ thì $B = -2$.
- Khi $x > 1 \Rightarrow -3x + 5 < 2$.
TH 1. Khi $-3x + 5 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$ thì $C = 3x - 5 - x^2 + 5 - 3x = -x^2$.
TH 2. Khi $0 \leq -3x + 5 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \geq x \geq 1$ thì $C = -3x + 5 - x^2 + 5 - 3x = -x^2 - 6x + 10$.

□

 **Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a) $|3x + 2| = 8$; **ĐS:** $S = \left\{2; \frac{-10}{3}\right\}$ b) $3x + 2 - |x - 1| = 0$; **ĐS:** $S = \left\{\frac{-1}{4}\right\}$

c) $|x + 3| - 2x = 5 - |x + 3|$; **ĐS:** $S = \left\{-6; \frac{14}{9}\right\}$
 $S = \left\{\frac{-11}{4}\right\}$ d) $\frac{|4 - 5x| + 4x}{5} = 2$. **ĐS:** $S = \left\{-6; \frac{14}{9}\right\}$

 Lời giải.

a) TH 1. Nếu $x \geq \frac{-2}{3}$ thì $|3x + 2| = 3x + 2$, b) TH 1. Nếu $x \geq 1$ thì $|x - 1| = x - 1$, khi đó phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 8 \\ \Leftrightarrow 3x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2 - (x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-3}{2} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{-2}{3}$ thì $|3x + 2| = -3x - 2$, khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -3x - 2 &= 8 \\ \Leftrightarrow -3x &= 10 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-10}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 1$ thì $|x - 1| = 1 - x$, khi đó phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} 3x + 2 + x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x &= -1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1}{4} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{2; \frac{-10}{3}\right\}$. Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{-1}{4}\right\}$.

c) TH 1. Nếu $x \geq -3$ thì $|x + 3| = x + 3$, khi đó phương trình trở thành d) TH 1. Nếu $x \leq \frac{4}{5}$ thì $|4 - 5x| = 4 - 5x$, khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x + 3 - 2x &= 5 - (x + 3) \\ \Leftrightarrow 0x &= -1 \quad (\text{VN}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 - 5x + 4x &= 10 \\ \Leftrightarrow -x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= -6 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -3$ thì $|x + 3| = -x - 3$, khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -x - 3 - 2x &= 5 + x + 3 \\ \Leftrightarrow -4x &= 11 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-11}{4} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > \frac{4}{5}$ thì $|4 - 5x| = 5x - 4$, khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 5x - 4 + 4x &= 10 \\ \Leftrightarrow 9x &= 14 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{14}{9} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{-11}{4}\right\}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{-6; \frac{14}{9}\right\}$.

□

 Bài 3. Giải các phương trình sau:

- a) $|2x - 1| - 3x = 1 - 5x$; **ĐS:** $x \leq \frac{1}{2}$ b) $|x - 6| = -5x + 9$; **ĐS:** $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$
 c) $|5x - 4| - 10x - 2 = -6 - 5x$; **ĐS:** $x \geq \frac{4}{5}$ d) $|x - 6| - x(x + 1) = x - 6$. **ĐS:**
 $S = \{-4; 3\}$

 Lời giải.

- a) TH 1. Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $|2x - 1| = 2x - 1$, khi đó phương trình trở thành b) TH 1. Nếu $x \geq 6$ thì $|x - 6| = x - 6$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x - 1 - 3x &= 1 - 5x \\ \Leftrightarrow 4x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \quad (\text{TMDK}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 6 &= -5x + 9 \\ \Leftrightarrow 6x &= 15 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{2} \quad (\text{KTMDK}) \end{aligned}$$

- TH 2. Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $|2x - 1| = 1 - 2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 1 - 2x - 3x &= 1 - 5x \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VNS}) \end{aligned}$$

- TH 2. Nếu $x < 6$ thì $|x - 6| = 6 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 6 - x &= -5x + 9 \\ \Leftrightarrow 4x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{4} \quad (\text{KTMDK}) \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $x \leq \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

- c) TH 1. Nếu $x \geq \frac{4}{5}$ thì $|5x - 4| = 5x - 4$ khi đó phương trình trở thành d) TH 1. Nếu $x \geq 6$ thì $|x - 6| = x - 6$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 5x - 4 - 10x - 2 &= -6 - 5x \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 6 - x(x + 1) &= x - 6 \\ \Leftrightarrow x(x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{KTMDK}) \\ x = -1 & (\text{KTMDK}). \end{cases} \end{aligned}$$

- TH 2. Nếu $x < \frac{4}{5}$ thì $|5x - 4| = 4 - 5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4 - 5x - 10x - 2 &= -6 - 5x \\ \Leftrightarrow -10x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4}{5} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

- TH 2. Nếu $x < 6$ thì $|x - 6| = 6 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 6 - x - x(x + 1) &= x - 6 \\ \Leftrightarrow -x^2 - x + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 4)(x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 & (\text{TMDK}) \\ x = 3 & (\text{TMDK}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $x \geq \frac{4}{5}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-4; 3\}$.

□

 **Bài 4.** Giải hệ phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ:

$$4|x - 2| = x^2 - 4x + 8$$

ĐS: $S = \{0; 4\}$. **Lời giải.**

Ta có: $4|x - 2| = x^2 - 4x + 8 \Leftrightarrow 4|x - 2| = (x - 2)^2 + 4$.

Đặt $t = |x + 2| > 0$ phương trình trở thành : $t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. (nhận)

Với $t = 2 \Rightarrow |x + 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{4; 0\}$. □

§6 Ôn tập chương IV

1 Tóm tắt lý thuyết

Xem phần *Tóm tắt lý thuyết* từ Bài 1 đến Bài 5.

2 Bài tập

Bài 1. Cho $a \leq b$. Chứng minh:

a) $-2a - 5 \geq -2b - 5$;

b) $3(-a - 2) \geq 3(-b - 2)$.

Lời giải.

1. Ta có: $a \leq b \Rightarrow -2a \geq -2b \Rightarrow -2a - 5 \geq -2b - 5$.

2. Ta có: $a \leq b \Rightarrow -a \geq -b \Rightarrow -a - 2 \geq -b - 2 \Rightarrow 3(-a - 2) \geq 3(-b - 2)$.

□

Bài 2. Cho $a \leq b$. Chứng minh:

a) $-3a - 2 \geq -3b - 2$;

b) $7(2 - a) \geq 7(2 - b)$.

Lời giải.

1. Ta có: $a \leq b \Rightarrow -3a \geq -3b \Rightarrow -3a - 2 \geq -3b - 2$.

2. Ta có: $a \leq b \Rightarrow -a \geq -b \Rightarrow 2 - a \geq 2 - b \Rightarrow 7(2 - a) \geq 7(2 - b)$.

□

Bài 3. Tìm m để $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình:

$$2x + x^2 + 3 + 2m \geq \frac{3}{\sqrt{x^2 - 3}}.$$

ĐS: $m \geq -4$

Lời giải.

Thay $x = 2$ vào bất phương trình ta được:

$$4 + 2^2 + 3 + 2m \geq 3$$

$$\Leftrightarrow 2m \geq -8$$

$$\Leftrightarrow m \geq -4.$$

Vậy $m \geq -4$ thì $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình trên.

□

Bài 4. Tìm m để $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình:

$$2\sqrt{2x+10} - mx \leq 4(x-2).$$

$$\text{ĐS: } m \geq \frac{4}{3}$$

 **Lời giải.**

Thay $x = 3$ vào bất phương trình ta được:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{6+10} - 3m &\leq 4(3-2) \\ \Leftrightarrow -3m &\leq -4 \\ \Leftrightarrow m &\geq \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $m \geq \frac{4}{3}$ thì $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình trên. □

Bài 5. Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số:

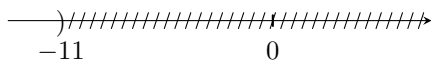
a) $\frac{1}{2}x - 5 > x + \frac{1}{2};$ **ĐS:** $x < -11$ b) $x(4x+2) - 5 \leq (2x-1)^2.$ **ĐS:** $x \leq 1$

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x - 5 &> x + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x - 10 &> 2x + 1 \\ \Leftrightarrow x - 2x &> 1 + 10 \\ \Leftrightarrow x &< -11. \end{aligned}$$

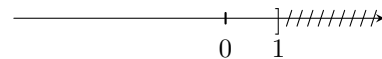
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -11$.



b)

$$\begin{aligned} x(4x+2) - 5 &\leq (2x-1)^2 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 5 &\leq 4x^2 - 4x + 1 \\ \Leftrightarrow 6x &\leq 6 \\ \Leftrightarrow x &\leq 1. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 1$.



□

Bài 6. Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số:

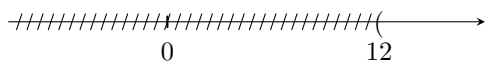
a) $\frac{3}{2}x - 3 > x + 3;$ **ĐS:** $x > 12$ b) $(x-2)(x-3) \geq 3 - x(2-x).$ **ĐS:** $x \leq 1$

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 3 &> x + 3 \\ \Leftrightarrow 3x - 6 &> 2x + 6 \\ \Leftrightarrow x &> 12. \end{aligned}$$

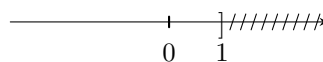
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 12$.



b)

$$\begin{aligned} (x-2)(x-3) &\geq 3 - x(2-x) \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 &\geq 3 - 2x + x^2 \\ \Leftrightarrow -3x &\geq -3 \\ \Leftrightarrow x &\leq 1. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 1$.



□

Bài 7. Giải các bất phương trình sau:

a) $2x + 2 \leq \frac{3x - 4}{5};$ **ĐS:** $x \leq -2$ b) $2 + \frac{1 + 2x}{3} > \frac{2x - 1}{6} - 3.$ **ĐS:** $x > \frac{-33}{2}$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} 2x + 2 &\leq \frac{3x - 4}{5} \\ \Leftrightarrow 10x + 10 &\leq 3x - 4 \\ \Leftrightarrow 7x &\leq -14 \\ \Leftrightarrow x &\leq -2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq -2$.

b)

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1 + 2x}{3} &> \frac{2x - 1}{6} - 3 \\ \Leftrightarrow 12 + 2 + 4x &> 2x - 1 - 18 \\ \Leftrightarrow 2x &> -33 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{-33}{2}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{-33}{2}$.

□

Bài 8. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{1}{3} + \frac{5x - 10}{7} \leq x;$ **ĐS:** $x \geq \frac{-23}{6}$ b) $1 + \frac{1 + x}{2} > \frac{2x - 4}{8} - 2.$ **ĐS:** $x > -16$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{5x - 10}{7} &\leq x \\ \Leftrightarrow 7 + 3(5x - 10) &\leq 21x \\ \Leftrightarrow -6x &\leq 23 \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{-23}{6}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq \frac{-23}{6}$.

b)

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1 + x}{2} &> \frac{2x - 4}{8} - 2 \\ \Leftrightarrow 8 + 4(1 + x) &> 2x - 4 - 16 \\ \Leftrightarrow 2x &> -32 \\ \Leftrightarrow x &> -16. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -16$.

□

Bài 9. Giải các phương trình sau:

- a) $|4x| = 5x - 3$; **ĐS:** $S = \{3\}$ b) $\frac{3}{2}x + 4 - \left|x - \frac{3}{2}\right| = 0$; **ĐS:** $S = \{-1\}$
 c) $|x + 18| + 2x - 20 = 3x - 2$; **ĐS:** $x \geq -18$ d) $2x^2 + 4 - |4 - 3x| = 2x(x - 3)$. **ĐS:** $S = \{0\}$

Lời giải.

- a) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|4x| = 4x$ khi đó phương trình trở thành b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{3}{2}$ thì $\left|x - \frac{3}{2}\right| = x - \frac{3}{2}$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4x &= 5x - 3 \\ \Leftrightarrow -x &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|4x| = -4x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -4x &= 5x - 3 \\ \Leftrightarrow -9x &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{9} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $S = \{3\}$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + 4 - x + \frac{3}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 0,5x &= -5,5 \\ \Leftrightarrow x &= -11 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{3}{2}$ thì $\left|x - \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2} - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + 4 + x - \frac{3}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2,5x &= -2,5 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $S = \{-1\}$.

- c) TH 1. Nếu $x \geq -18$ thì $|x + 18| = x + 18$ khi đó phương trình trở thành d) TH 1. Nếu $x \leq \frac{4}{3}$ thì $|4 - 3x| = 4 - 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x + 18 + 2x - 20 &= 3x - 2 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -18$ thì $|x + 18| = -x - 18$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -x - 18 + 2x - 20 &= 3x - 2 \\ \Leftrightarrow -2x &= 36 \\ \Leftrightarrow x &= -18 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x \geq -18$.

$$\begin{aligned} 4 - 3x &= 6x + 4 \\ \Leftrightarrow 9x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > \frac{4}{3}$ thì $|4 - 3x| = 3x - 4$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= 6x + 4 \\ \Leftrightarrow 3x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{8}{3} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0\}$.

□

Bài 10. Giải các phương trình sau:

- a) $|2x| = 3x - 7$; **ĐS:** $S = \{7\}$ b) $x + 4 - \left|x - \frac{1}{2}\right| = 0$; **ĐS:** $S = \left\{\frac{-7}{4}\right\}$

c) $|x - 9| + 9x - 6 = 8x + 3$; **ĐS:** $x \leq -9$ d) $x^2 + 4 - |5 - 3x| = x(x - 4)$. **ĐS:**
 $S = \left\{ \frac{1}{7} \right\}$

 **Lời giải.**

a) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|2x| = 2x$ khi đó phương trình trở thành b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $\left| x - \frac{1}{2} \right| = x - \frac{1}{2}$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x &= 3x - 7 \\ \Leftrightarrow x &= 7 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 2x + 8 \\ \Leftrightarrow 0x &= 7 \quad (\text{VN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|2x| = -2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -2x &= 3x - 7 \\ \Leftrightarrow -5x &= -7 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7}{5} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $\left| x - \frac{1}{2} \right| = -x + \frac{1}{2}$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= 2x + 8 \\ \Leftrightarrow -4x &= 7 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{7}{4} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{7\}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ -\frac{7}{4} \right\}$.

c) TH 1. Nếu $x \geq 9$ thì $|x - 9| = x - 9$ khi đó phương trình trở thành d) TH 1. Nếu $x \leq \frac{5}{3}$ thì $|5 - 3x| = 5 - 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 9 + 9x - 6 &= 8x + 3 \\ \Leftrightarrow 2x &= 18 \\ \Leftrightarrow x &= 9 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 - 3x &= 4x + 4 \\ \Leftrightarrow 7x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{7} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 9$ thì $|x - 9| = 9 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 9 - x + 9x - 6 &= 8x + 3 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $x \leq -9$.

TH 2. Nếu $x > \frac{5}{3}$ thì $|5 - 3x| = 3x - 5$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 4x + 4 \\ \Leftrightarrow x &= -9 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{7} \right\}$.

□

 **Bài 11.** Một người đi bộ một quãng đường dài 18 km trong khoảng thời gian không nhiều hơn là 4 giờ. Lúc đầu người đó đi với vận tốc 5 km/h, về sau đi với vận tốc 4 km/h. Xác định độ dài đoạn đường tối thiểu mà người đó đã đi với vận tốc 5 km/h? **ĐS:** 10 km

 **Lời giải.**

Gọi độ dài đoạn đường tối thiểu mà người đó đi được với vận tốc 5 km/h là x (km). Điều kiện: $0 < x < 18$.

Thời gian người đó đi với vận tốc 5 km/h là $\frac{x}{5}$ (h).

Quãng đường còn lại người đó đi với vận tốc 4 km/h là $18 - x$ (km).

Thời gian người đó đi với vận tốc 4 km/h là $\frac{18-x}{4}$ (h).

Do tổng thời gian đi bộ không quá 4 giờ nên ta có bất phương trình

$$\frac{x}{5} + \frac{18-x}{4} \leq 4. \text{ Giải ra ta được } x \geq 10.$$

Kết hợp điều kiện ta được $10 \leq x < 18$.

Vậy độ dài tối thiểu mà người đó đi được với vận tốc 5 km/h là 10 km. $\square$

Bài 12. Một người đi bộ một quãng đường dài 10 km trong khoảng thời gian không nhiều hơn 3 giờ. Lúc đầu người đó đi với vận tốc 4 km/h, về sau đi với vận tốc 3 km/h. Xác định độ dài đoạn đường tối thiểu mà người đó đã đi với vận tốc 4 km/h. **ĐS:** 4 km

 **Lời giải.**

Gọi độ dài đoạn đường tối thiểu mà người đó đi được với vận tốc 4 km/h là x (km). Điều kiện: $0 < x < 10$.

Quãng đường lúc sau là $10 - x$ (km).

Thời gian lúc đầu là $\frac{x}{4}$ (h)

Thời gian lúc sau $\frac{10-x}{3}$ (h)

Do tổng thời gian đi bộ không quá 3 giờ nên ta có bất phương trình

$$\frac{x}{4} + \frac{10-x}{3} \leq 3. \text{ Giải ra ta được } x \geq 4.$$

Kết hợp điều kiện ta được $4 \leq x < 10$.

Vậy độ dài tối thiểu mà người đó đi được với vận tốc 4 km/h là 4 km. $\square$

Bài tập về nhà

Bài 13. Cho $a > b$. Chứng minh:

$$\text{a) } -2(b-3) + 9 > -2(a-3) + 9; \quad \text{b) } \frac{a+7}{9} = \frac{b+7}{9}.$$

 **Lời giải.**

$$1. \text{ Ta có: } a > b \Rightarrow a - 3 > b - 3 \Rightarrow -2(b-3) > -2(a-3) \Rightarrow -2(b-3) + 9 > -2(a-3) + 9.$$

$$2. \text{ Ta có: } a > b \Rightarrow a + 7 > b + 7 \Rightarrow \frac{a+7}{9} = \frac{b+7}{9}.$$

$\square$

Bài 14. Cho bất phương trình $\sqrt{2x-1} + mx \leq 7m-5$. Tìm m để bất phương trình có nghiệm $x = 5$. **ĐS:** $m \geq 4$

 **Lời giải.**

Thay $x = 5$ vào bất phương trình ta được: $3 + 5m \leq 7m - 5 \Leftrightarrow -2m \leq -8 \Leftrightarrow m \geq 4$.

Vậy $m \neq 5$ thì $x = 5$ là nghiệm của bất phương trình trên. $\square$

Bài 15. Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số:

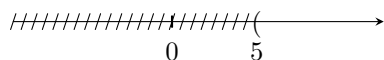
a) $3x - 3 < -8 + 4x$; **ĐS:** $x > 5$ b) $3(x + 2)(x - 2) \leq 3x^2 + x$. **ĐS:** $x \geq -12$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} 3x - 3 &< -8 + 4x \\ \Leftrightarrow -x &< -5 \\ \Leftrightarrow x &> 5. \end{aligned}$$

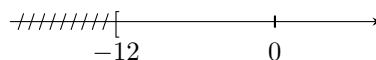
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 5$.



b)

$$\begin{aligned} 3(x + 2)(x - 2) &\leq 3x^2 + x \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 12 &\leq 3x^2 + x \\ \Leftrightarrow x &\geq -12. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -12$.



□

Bài 16. Giải các bất phương trình sau:

1. $\frac{6x + 8}{4} + \frac{7 - 4x}{3} \geq 2$; **ĐS:** $x \geq -14$

2. $\frac{5x^2 - 3x}{5} + \frac{3x + 1}{4} < \frac{x(2x + 1)}{2} - \frac{3}{2}$. **ĐS:** $x > 5$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} \frac{6x + 8}{4} + \frac{7 - 4x}{3} &\geq 2 \\ \Leftrightarrow 3(6x + 8) + 4(7 - 4x) &\geq 24 \\ \Leftrightarrow 2x &\geq -28 \\ \Leftrightarrow x &\geq -14. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -14$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 - 3x}{5} + \frac{3x + 1}{4} &< \frac{x(2x + 1)}{2} - \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 4(5x^2 - 3x) + 5(3x + 1) &< 10x(2x + 1) - 3 \\ \Leftrightarrow -7x &< -35 \\ \Leftrightarrow x &> 5. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 5$.

□

Bài 17. Giải bất phương trình sau:

$$\frac{x - 15}{2002} + \frac{x - 13}{2004} + \frac{x - 11}{2006} \leq 3.$$

ĐS: $x \leq 2017$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \frac{x - 15}{2002} + \frac{x - 13}{2004} + \frac{x - 11}{2006} &\leq 3 \\ \Leftrightarrow \frac{x - 15}{2002} - 1 + \frac{x - 13}{2004} - 1 + \frac{x - 11}{2006} - 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{x-2017}{2002} + \frac{x-2017}{2004} + \frac{x-2017}{2006} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow (x-2017) \left(\frac{1}{2002} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2006} \right) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow x \leq 2017.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 2017$. □

Bài 18. Gia đình bạn Phương hưởng ứng phong trào toàn dân tiết kiệm điện nên đã đặt ra mục tiêu hàng tháng tiền điện nộp không quá 300000 ngàn đồng. Biết rằng 50 kWh đầu tiên giá tiền thanh toán mỗi kWh là 1484 đồng, từ 50 kWh tiếp theo thì cứ thì cứ mỗi kWh giá tiền 1533 đồng. Từ 100 kWh tiếp theo giá mỗi kWh là 1786 đồng, và tiền thuế GTGT (giá trị gia tăng) là 10%. Hỏi nhà bạn Phương hàng tháng nên tiêu thụ nhiều nhất là bao nhiêu điện năng biết rằng số kWh điện năng tiêu thụ được làm tròn tới hàng đơn vị? **ĐS:** 168 kWh

 **Lời giải.**

Gọi x (kWh) là số điện năng tiêu thụ tối đa của nhà bạn Phương sử dụng hàng tháng.

Trường hợp 1: Mức tiêu thụ điện ở giá tiền thứ nhất. Điều kiện $0 < x \leq 50$.

Theo đề mục tiêu đặt ra hàng tháng tiền điện là 300000 ngàn đồng nên ta có phương trình

$$1484x \cdot 110\% \leq 300000 \Leftrightarrow x \leq 183 \text{ (KTMĐK)}.$$

Trường hợp 2: Mức tiêu thụ điện ở giá tiền thứ hai. Điều kiện: $50 < x \leq 100$

Tương tự ta có phương trình

$$[1484 \cdot 50 + (x - 50)1533] \leq 300000 \Leftrightarrow x \leq 130 \text{ (KTDK)}.$$

Trường hợp 3: Mức tiêu thụ điện ở giá tiền thứ ba. Điều kiện: $x > 100$

Tương tự ta có phương trình

$$[50 \cdot 1484 + 50 \cdot 1533(x - 100)1786] 1.1 \leq 300000 \Leftrightarrow x \leq 168 \text{ (TMDK)}.$$

Vậy nhà bạn Phương hàng tháng nên tiêu thụ nhiều nhất là 168 kWh. □

Phần



Hình học

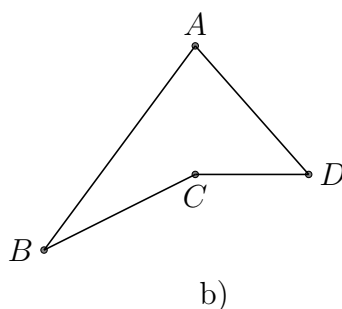
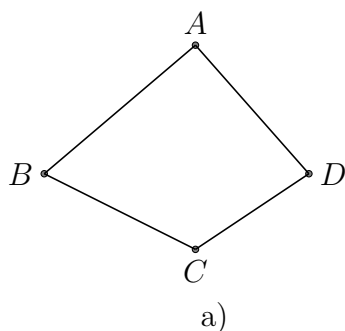
Chương 1

Tứ giác

§1 Tứ giác

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 6. Tứ giác $ABCD$ là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó, bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên cùng một đường thẳng.



- *Tứ giác lồi:* Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm về một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì một cạnh nào của tứ giác (hình b không phải tứ giác lồi).
- *Tổng các góc trong một tứ giác:* Tổng các góc trong một tứ giác bằng 360° .
- *Góc ngoài của tứ giác:* Góc kề bù với một góc của tứ giác gọi là góc ngoài của tứ giác.

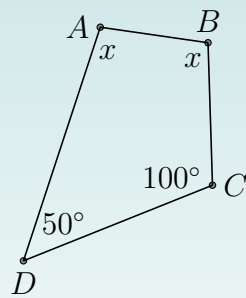
2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 1. Tính số đo góc

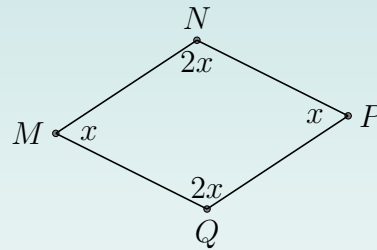
Dựa vào tính chất tổng các góc trong một tứ giác.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Tìm x trong hình vẽ.



a)



b)

ĐS: a) 100° ; b) 60°

Lời giải.

1. Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

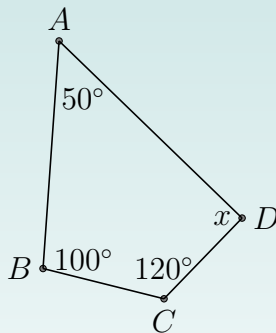
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow x + x + 50^\circ + 110^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 100^\circ.$$

2. Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

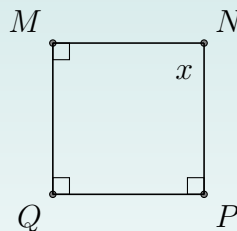
$$\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^\circ \Rightarrow x + 2x + x + 2x = 360^\circ \Rightarrow 6x = 360^\circ \Rightarrow x = 60^\circ.$$

□

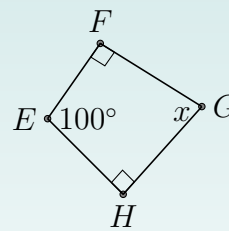
Ví dụ 2. Tìm x trong hình vẽ.



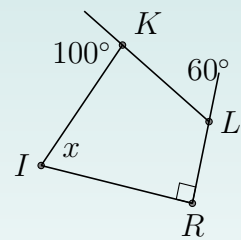
a)



b)



c)



d)

ĐS: a) 90° ; b) 90° ; c) 80° ; d) 70°

Lời giải.

1. Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow 50^\circ + 100^\circ + 120^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 90^\circ.$$

2. Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$$\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^\circ \Rightarrow 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow 6x = 360^\circ \Rightarrow x = 90^\circ.$$

3. Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$$\widehat{E} + \widehat{F} + \widehat{G} + \widehat{H} = 360^\circ \Rightarrow 100^\circ + 90^\circ + 90^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 80^\circ.$$

4. Vì góc ngoài tại K có số đo là 100° nên $\widehat{IKL} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Góc ngoài tại L có số đo là 60° nên $\widehat{KLR} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$$\widehat{IKL} + \widehat{KLR} + \widehat{R} + \widehat{I} = 360^\circ \Rightarrow 80^\circ + 120^\circ + 90^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 70^\circ.$$

□

Ví dụ 3. Tứ giác $MNPQ$ có $\widehat{M} = 65^\circ$, $\widehat{N} = 117^\circ$, $\widehat{P} = 71^\circ$. Tính số đo góc ngoài tại đỉnh Q .

 **Lời giải.**

Xét tứ giác $MNPQ$, ta có

$$\begin{aligned}\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} &= 360^\circ \\ 65^\circ + 117^\circ + 71^\circ + \widehat{Q} &= 360^\circ \\ 253^\circ + \widehat{Q} &= 360^\circ \\ \widehat{Q} &= 360^\circ - 253^\circ \\ \widehat{Q} &= 107^\circ.\end{aligned}$$

Khi đó, góc ngoài tại đỉnh Q có số đo $180^\circ - 107^\circ = 73^\circ$.

□

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ biết $\widehat{A} = 75^\circ$, $\widehat{B} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 120^\circ$. Tính số đo các góc ngoài của tứ giác $ABCD$.

 **Lời giải.**

Xét tứ giác $ABCD$, ta có

$$\begin{aligned}\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} &= 360^\circ \\ 75^\circ + 90^\circ + 120^\circ + \widehat{D} &= 360^\circ \\ 285^\circ + \widehat{D} &= 360^\circ \\ \widehat{D} &= 360^\circ - 285^\circ \\ \widehat{D} &= 75^\circ.\end{aligned}$$

Khi đó, ta có

- ☒ Góc ngoài tại A có số đo là $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.
- ☒ Góc ngoài tại B có số đo là $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
- ☒ Góc ngoài tại C có số đo là $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
- ☒ Góc ngoài tại D có số đo là $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

□

Dạng 2. Dạng toán chứng minh hình học

Vận dụng các kiến thức đã được học như bất đẳng thức tam giác, chu vi, đường trung trực của đoạn thẳng,...

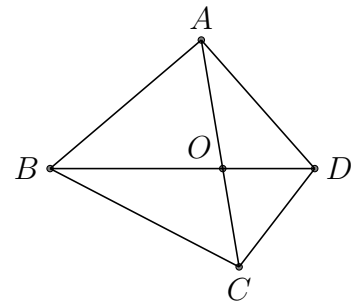
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Chứng minh:

1. $AC + BD > AB + CD$;
2. $AC + BD > AD + BC$.

Lời giải.

1. Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có
 $OA + OB > AB$ ($\triangle OAB$);
 $OC + OD > CD$ ($\triangle OCD$);
 $\Rightarrow AC + BD > AB + CD$.
2. Tương tự trên, áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có
 $OA + OD > AD$ ($\triangle OAD$);
 $OB + OC > BC$ ($\triangle OCB$);
 $\Rightarrow AC + BD > AD + BC$.



Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi chu vi của tứ giác $ABCD$ là P_{ABCD} . Chứng minh:

1. $AC + BD > \frac{P_{ABCD}}{2}$;
2. Nếu $AC < \frac{P_{ABCD}}{2}$ thì $AC + BD < P_{ABCD}$.

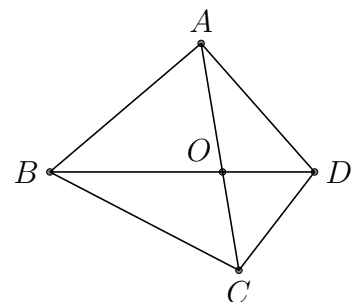
Lời giải.

1. Theo kết quả bài trên, ta có

$$AC + BD > AB + CD; AC + BD > AD + BC.$$

$$\text{Cộng vế với vế } AC + BD > \frac{P_{ABCD}}{2}.$$

2. Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào các tam giác ABC , ACD : $AC < AB + BC$; $AC < AD + CD \Rightarrow AC < \frac{P_{ABCD}}{2}$.
Tương tự $BD < \frac{P_{ABCD}}{2} \Rightarrow AC + BD < P_{ABCD}$.



3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC$; $CD = DA$.

1. Chứng minh BD là đường trung trực của AC ;

2. Cho $\widehat{B} = 100^\circ$, $\widehat{D} = 80^\circ$. Tính $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$.

ĐS: $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$

Lời giải.

1. Vì $AB = BC$ suy ra B thuộc đường trung trực của AC .

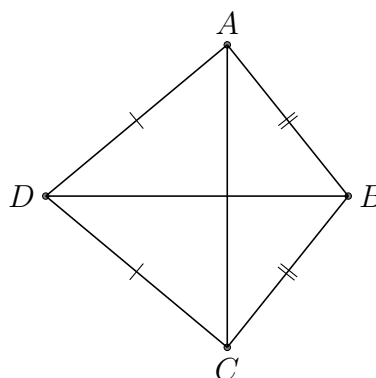
Vì $DA = DC \Rightarrow D$ thuộc đường trung trực của AC .

$\Rightarrow BD$ là đường trung trực của AC .

2. Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CBD$ có $\begin{cases} AB = BC \\ AD = DC \\ BD \text{ cạnh chung} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CBD$ (c.c.c), suy ra $\widehat{A} = \widehat{C}$.

Vậy $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$.



□

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$, biết rằng $\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{D}}{4}$. Tính các góc của tứ giác $ABCD$.

ĐS: $\widehat{A} = 36^\circ$, $\widehat{B} = 72^\circ$; $\widehat{C} = 108^\circ$, $\widehat{D} = 144^\circ$

Lời giải.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{D}}{4} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ.$$

Vậy $\widehat{A} = 36^\circ$, $\widehat{B} = 72^\circ$; $\widehat{C} = 108^\circ$, $\widehat{D} = 144^\circ$.

□

Bài 3. Cho tứ giác $MNPQ$ có $\widehat{N} = \widehat{M} + 10^\circ$, $\widehat{P} = \widehat{N} + 10^\circ$, $\widehat{Q} = \widehat{P} + 10^\circ$. Hãy tính các góc của tứ giác $MNPQ$.

ĐS: $\widehat{M} = 75^\circ$; $\widehat{N} = 85^\circ$; $\widehat{P} = 95^\circ$; $\widehat{Q} = 105^\circ$

Lời giải.

Ta có $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^\circ$.

Thay $\widehat{N} = \widehat{M} + 10^\circ$, $\widehat{P} = \widehat{N} + 10^\circ = \widehat{M} + 20^\circ$, $\widehat{Q} = \widehat{P} + 10^\circ = \widehat{M} + 30^\circ$ vào biểu thức trên, ta được

$$\begin{aligned} \widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} &= 360^\circ \\ \Leftrightarrow \widehat{M} + \widehat{M} + 10^\circ + \widehat{M} + 20^\circ + \widehat{M} + 30^\circ &= 360^\circ \\ \Leftrightarrow 4\widehat{M} + 60^\circ &= 360^\circ \\ \Leftrightarrow \widehat{M} &= 75^\circ. \end{aligned}$$

Vậy $\widehat{M} = 75^\circ$; $\widehat{N} = 85^\circ$; $\widehat{P} = 95^\circ$; $\widehat{Q} = 105^\circ$.

□

Bài 4. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} = 60^\circ$, $\widehat{D} = 80^\circ$, $\widehat{A} - \widehat{B} = 10^\circ$. Tính số đo của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$. **ĐS:** $\widehat{A} = 115^\circ$, $\widehat{B} = 105^\circ$

Lời giải.

Ta có $\widehat{A} + \widehat{B} = 360^\circ - (\widehat{C} + \widehat{D}) = 360^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 220^\circ$ mà $\widehat{A} - \widehat{B} = 10^\circ$.
 $\Rightarrow \widehat{A} = \frac{220^\circ + 10^\circ}{2} = 115^\circ$, $\widehat{B} = 220^\circ - 115^\circ = 105^\circ$. □

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O .

1. Chứng minh $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$;

2. Cho $AD = 5$ cm, $AB = 2$ cm, $BC = 10$ cm. Tính độ dài CD .

ĐS: $CD = 11$ cm

Lời giải.

1. Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông OAB , ta có $AB^2 = OA^2 + OB^2$.

Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông OBC , ta có $BC^2 = OB^2 + OC^2$.

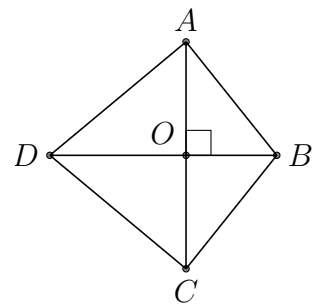
Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông OCD , ta có $CD^2 = OC^2 + OD^2$.

Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông OAD , ta được $AD^2 = OA^2 + OD^2$.

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 (= OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2)$

2. Theo câu trên, ta có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow 2^2 + CD^2 = 5^2 + 10^2 \Leftrightarrow CD^2 = 121 \Rightarrow CD = 11$. □

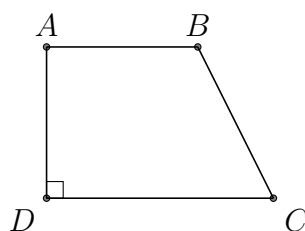
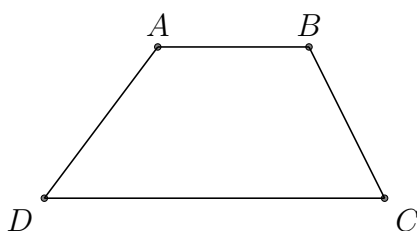


§2 Hình thang

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa

- Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song (gọi là hai đáy).
- Trong hình thang, hai góc kề một cạnh bên bù nhau.
- Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.



1.2 Tính chất

- Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.
- Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

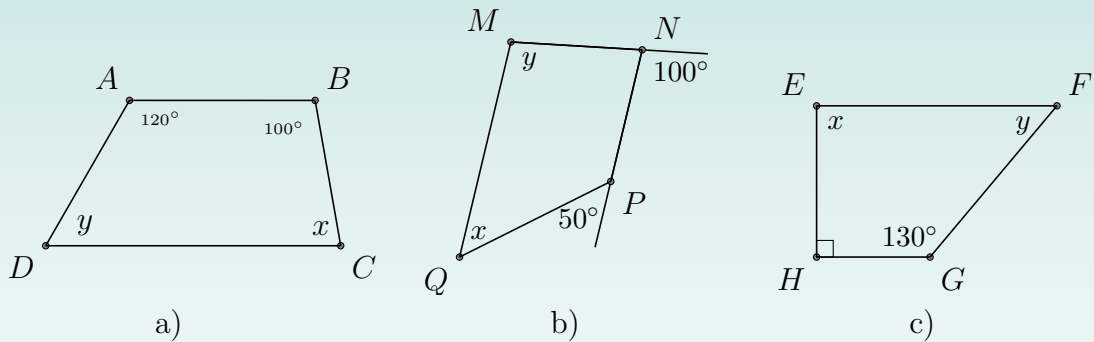
2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 3. Tính số đo góc của hình thang

Vận dụng tính chất hai góc kề một cạnh bên của hình thang thì bù nhau, hai góc so le trong, hai góc đồng vị, hai góc kề bù, tổng các góc trong một tứ giác...

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 **Ví dụ 1.** Tìm x và y ở hình vẽ dưới biết các hình thang $ABCD$; $MNPQ$ và $EFGH$ có đáy lần lượt là AB và CD ; NP và MQ ; EF và GH .



ĐS: a) $x = 80^\circ, y = 60^\circ$; b) $x = 50^\circ, y = 100^\circ$; c) $x = 90^\circ, y = 50^\circ$

Lời giải.

✓ Hình a). Vì $AB \parallel CD$ nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$ hay $\widehat{D} + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D} = y = 60^\circ$.
Tương tự, $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = x = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

✓ Hình b). Ta có $\widehat{MNP} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.
 $\widehat{QPN} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
Vì $MQ \parallel NP$ nên $\widehat{M} + \widehat{MNP} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{M} = y = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.
Tương tự, $\widehat{Q} + \widehat{QPN} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{Q} = x = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

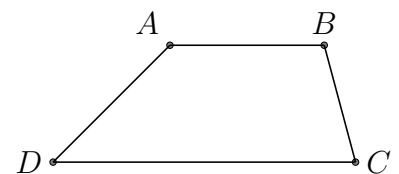
✓ Hình c). Vì $EF \parallel HG$ nên $\widehat{E} + \widehat{H} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{E} = x = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
Tương tự $\widehat{F} + \widehat{G} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{F} = y = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD . Biết $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$ và $\widehat{A} = 3\widehat{D}$.
Tính các góc của hình thang.

ĐS: $\widehat{A} = 135^\circ; \widehat{B} = 105^\circ; \widehat{C} = 75^\circ; \widehat{D} = 45^\circ$

Lời giải.

Vì $AB \parallel CD$ nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ mà theo đề bài $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$
nên $\widehat{B} = \frac{180^\circ + 30^\circ}{2} = 105^\circ$,
 $\widehat{C} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.
Vì $AB \parallel CD$ nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$ mà $\widehat{A} = 3\widehat{D}$ nên
 $\widehat{A} + \widehat{D} = 3\widehat{D} + \widehat{D} = 4\widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 45^\circ, \widehat{A} = 135^\circ$.



Dạng 4. Chứng minh tứ giác là hình thang

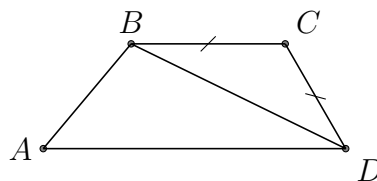
Dựa vào định nghĩa của hình thang, tính chất tam giác cân, phân giác của một góc, tam giác bằng nhau...

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tứ giác $ABCD$ có $BC = CD$ và DB là phân giác của góc D . Chứng minh $ABCD$ là hình thang.

 Lời giải.

Xét $\triangle BCD$ có $BC = CD$ nên $\triangle BCD$ cân tại C
suy ra $\widehat{DBC} = \widehat{BDC}$ mà DB là phân giác của $\widehat{D}$
nên $\widehat{CDB} = \widehat{BDA}$.
Suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$ ($= \widehat{CDB}$) nên $BC \parallel AD$ hay $ABCD$
là hình thang.



□

 **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có $AB < AC$, đường phân giác AD . Đường vuông góc với AD tại D cắt AB và AC lần lượt tại F và E . Trên cạnh DC lấy điểm I sao cho $DI = DB$. Chứng minh $AEIB$ là hình thang.

 Lời giải.

AD là phân giác và là đường cao của $\triangle AEF$.

$\Rightarrow \triangle AEF$ cân tại A .

$\Rightarrow AD$ là đường trung tuyến.

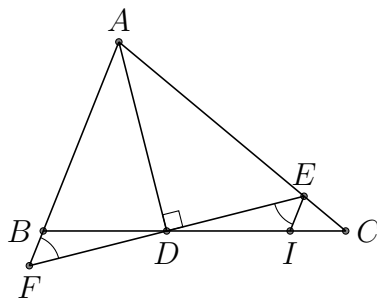
$\Rightarrow DE = DF$.

Xét $\triangle BDF$ và $\triangle IDE$ có $\begin{cases} DI = DB \text{ (giả thiết)} \\ \widehat{BDF} = \widehat{EDI} \text{ (đối đỉnh)} \\ DE = DF \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle BDF = \triangle IDE$.

$\Rightarrow \widehat{IED} = \widehat{DFB} \Rightarrow IE \parallel AB$.

$\Rightarrow AEIB$ là hình thang.



□

 Dạng 5. Chứng minh các tính chất hình học

Vận dụng linh hoạt các kiến thức đã được học như tính chất của hình thang, tia phân giác của một góc, tam giác cân, bất đẳng thức tam giác,...

 BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), biết Ax , Dy lần lượt là phân giác của $\widehat{A}$, $\widehat{D}$ của hình thang. Chứng minh $Ax \perp Dy$.

 Lời giải.

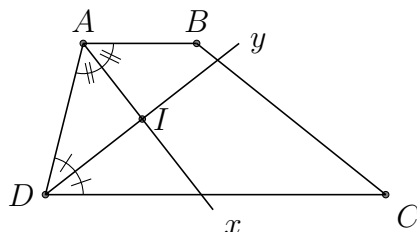
Gọi $I = Ax \cap Dy$.

Vì $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{IAD} + \widehat{IDA} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AID} = 90^\circ$

$Ax \perp Dy$.



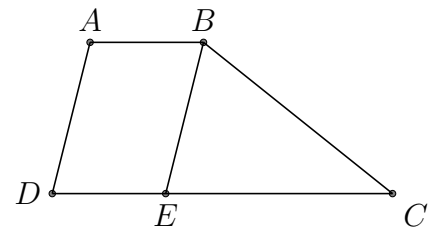
□

Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt CD tại E . Chứng minh

1. $AD = BE$, $AB = DE$;
2. $CD - AB = CE$;
3. $BC + AD > CD - AB$.

Lời giải.

1. Hình thang $ABCD$ có hai cạnh bên $AD \parallel BE$
 $\Rightarrow AD = BE$; $AB = DE$.
2. Ta có $CD - AB = CD - DE = CE$.
3. Áp dụng bất đẳng thức tam giác cho $\triangle BCD$
 $BC + BE > CE$.
 Mà $BE = AD$, $CE = CD - AB$ nên
 $BC + AD > CD - AB$.



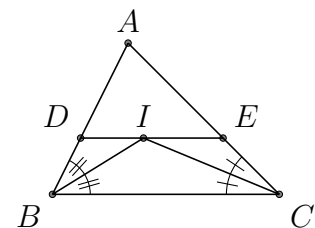
□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC . Các tia phân giác của B và C cắt nhau ở I . Qua I kẻ đường thẳng song song với BC , cắt các cạnh AB và AC ở D và E .

1. Tìm các hình thang trong hình vẽ.
2. Chứng minh $\triangle BDI$ và $\triangle IEC$ là các tam giác cân.
3. Chứng minh $DE = BD + CE$.

Lời giải.

1. Các hình thang trong hình vẽ là $BCED$, $BDIC$, $BIEC$.
2. $\widehat{DBI} = \widehat{DIB} (= \widehat{IBC})$ nên $\triangle BDI$ cân tại D .
 Tương tự $\triangle CEI$ cân tại E .
3. $DE = ID + IE = BD + CE$.



□

Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Hai tia phân giác của góc C và D cắt nhau tại K thuộc đáy AB . Chứng minh

1. $\triangle ADK$ cân ở A , $\triangle BKC$ cân ở B ;
2. $AB = AD + BC$.

Lời giải.

1. Vì $\widehat{AKD} = \widehat{KDC}$ (hai góc so le trong). (1)

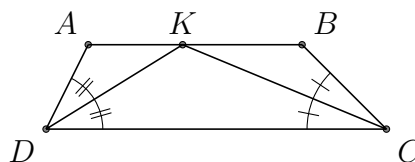
DK là tia phân giác của $\widehat{ADC}$ nên $\widehat{ADK} = \widehat{KDC}$.

(2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADK} = \widehat{AKD}$ hay $\triangle ADK$ cân tại A .

Tương tự $\widehat{BKC} = \widehat{KCD}$ (hai góc so le trong) mà $\widehat{KCB} = \widehat{KCD}$ nên $\widehat{BKC} = \widehat{KCB}$ hay $\triangle KBC$ cân tại B .

2. $\triangle AKD$ cân tại A nên $AK = AD$.
 $\triangle KBC$ cân tại B nên $BK = BC$.
 Vậy $AB = AK + KB = AD + BC$.



□

3 Bài tập về nhà

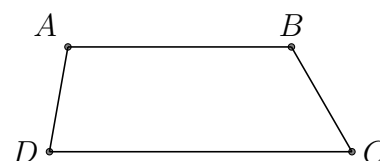
Bài 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{A} - \widehat{D} = 20^\circ$, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Tính các góc của hình thang.

ĐS: $\widehat{A} = 100^\circ$, $\widehat{B} = 120^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$, $\widehat{D} = 80^\circ$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình thang nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$ mà $\widehat{A} - \widehat{D} = 20^\circ$ nên ta tìm được $\widehat{A} = 100^\circ$, $\widehat{D} = 80^\circ$.

Tương tự, ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ và $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ nên tìm được $\widehat{B} = 120^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$.



□

Bài 2. Cho hình thang $ABCD$ ($BC \parallel AD$) có $\widehat{C} = 3\widehat{D}$. Tính số đo $\widehat{C}$ và $\widehat{D}$. **ĐS:** $\widehat{D} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 135^\circ$

Lời giải.

Ta có $BC \parallel AD$ nên $\widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ$ mà $\widehat{C} = 3\widehat{D}$ nên $3\widehat{D} + \widehat{D} = 4\widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 45^\circ$.
 Vậy $\widehat{D} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 135^\circ$.

□

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = AD = 2$ cm, $DC = 4$ cm. Tính các góc của hình thang.

ĐS: $\widehat{C} = 45^\circ$, $\widehat{B} = 135^\circ$

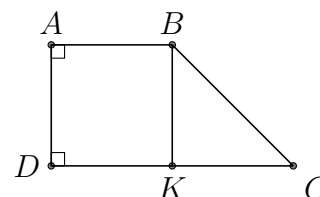
Lời giải.

Kẻ $BK \perp CD$ ($K \in CD$).

$ABKD$ là hình thang có hai cạnh bên $AD \parallel BK$ nên suy ra $AD = BK = 2$ cm.

$DK = AB = 2$ cm, suy ra $CK = 2$ cm.

Khi đó $\triangle BCK$ vuông cân tại $K \Rightarrow \widehat{C} = 45^\circ$, $\widehat{ABC} = 135^\circ$.

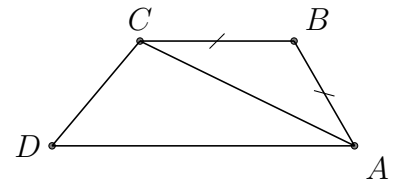


□

Bài 4. Tứ giác $ABCD$ có $AB = BC$ và AC là phân giác của $\widehat{A}$. Chứng minh $ABCD$ là hình thang.

 Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ có $AB = BC$ nên $\triangle ABC$ cân tại B suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{CAB}$ mà AC là phân giác của $\widehat{A}$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$. Suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{CAD}$ ($= \widehat{BAC}$) và hai góc này ở vị trí so le trong nên $BC \parallel AD$ hay $ABCD$ là hình thang.



□

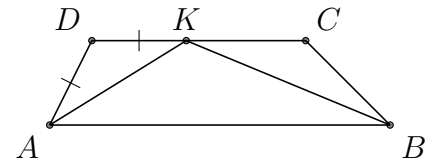
 **Bài 5.** Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $CD = AD + BC$. Gọi K là điểm thuộc đáy CD sao cho $KD = AD$. Chứng minh

1. AK là phân giác của $\widehat{A}$;
2. $KC = BC$;
3. BK là phân giác của $\widehat{B}$.

 Lời giải.

1.

Ta có $DK = DA$ nên $\triangle ADK$ cân tại D
 $\Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{DKA}$.
 Vì $CD \parallel AB$ nên $\widehat{DKA} = \widehat{KAB}$ (hai góc so le trong).
 Vậy $\widehat{DAK} = \widehat{KAB}$ ($= \widehat{DKA}$) hay AK là phân giác của $\widehat{A}$.



2. Vì $CD = AD + BC = KD + KC$ mà $AD = DK$ nên $KC = BC$.

3. Ta có $CK = CB$ nên $\triangle CKB$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{CKB} = \widehat{CBK}$.

Vì $CD \parallel AB$ nên $\widehat{CKB} = \widehat{KBA}$ (hai góc so le trong).

Vậy $\widehat{CBK} = \widehat{KBA}$ ($= \widehat{CKB}$) hay BK là phân giác của $\widehat{B}$.

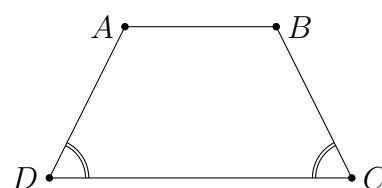
□

§3 Hình thang cân

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 7. Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.
Cạnh đáy có độ dài lớn hơn được gọi là đáy lớn.



1.2 Tính chất

Định lý 1. Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.

Định lý 2. Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.

Định lý 3. Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

1.3 Dấu hiệu nhận biết

☒ Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.

☒ Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

⚠ 16. Lưu ý: Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau không sử dụng làm dấu hiệu nhận biết hình thang cân.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 6. Tính số đo các góc, chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau, các góc bằng nhau.

Sử dụng các tính chất của hình thang cân về cạnh, góc và đường chéo để tính toán và chứng minh.

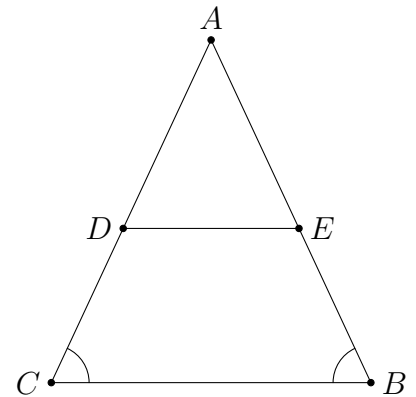
❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên các cạnh bên AB, AC lấy theo thứ tự các điểm D và E sao cho $AD = AE$.

1. Chứng minh $BDEC$ là hình thang cân;
2. Tính góc của hình thang cân đó, biết rằng $\widehat{A} = 50^\circ$.

Lời giải.

1. $\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{BCA} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ (1).
Do $AD = AE$ nên $\triangle ADE$ cân tại A
 $\Rightarrow \widehat{DEA} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{DEA} \Rightarrow BC \parallel ED$ (3).
Lại có $\widehat{B} = \widehat{C}$ (4).
Từ (3) và (4) suy ra $BCDE$ là hình thang cân.
2. $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$;
 $\widehat{E} = \widehat{D} = 180^\circ - \widehat{C} = 115^\circ$.

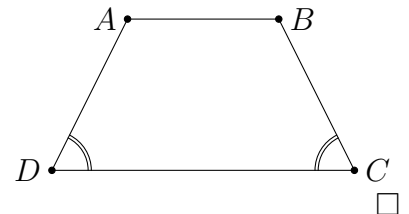


□

Ví dụ 2. Tính các góc của hình thang cân, biết một góc bằng 40° .

Lời giải.

Giả sử $ABCD$ là hình thang cân có $\widehat{C} = \widehat{D} = 40^\circ$,
suy ra $\widehat{A} = \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{C} = 140^\circ$.

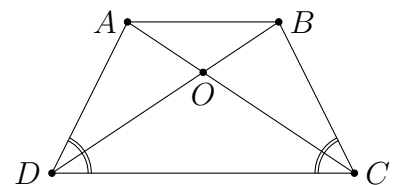


□

Ví dụ 3. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh $OA = OB, OC = OD$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình thang cân có $AB \parallel CD$
 $\Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ \widehat{ADC} = \widehat{BCD} \end{cases}$.
Xét hai tam giác $\triangle ADC$ và $\triangle BCD$ có
 $\begin{cases} AD = BC \\ \widehat{ADC} = \widehat{BCD} \\ CD \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle ADC = \triangle BCD \text{ (c.g.c)}$
 $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BDC}$ (cặp góc tương ứng).
Suy ra $\triangle OCD$ cân tại $O \Rightarrow OC = OD$.
Chứng minh tương tự với $OA = OB$.

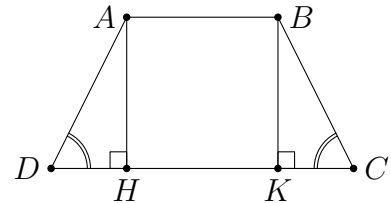


□

Ví dụ 4. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$ ($AB < CD$). Kẻ các đường cao AH , BK . Chứng minh $DH = CK$.

Lời giải.

Xét hai tam giác vuông HAD và KBC có
 $AD = BC$, $\widehat{HDA} = \widehat{KCB} \Rightarrow \triangle HAD = \triangle KBC \Rightarrow DH = CK$.

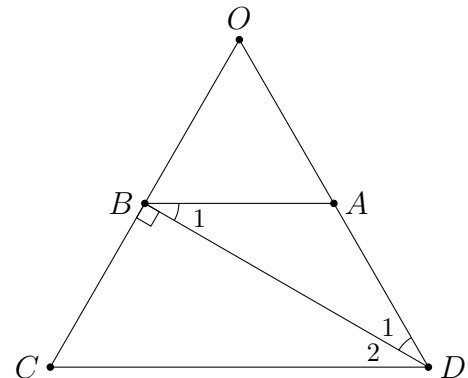


□

Ví dụ 5. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, đường chéo DB vuông góc với cạnh bên BC , DB là tia phân giác góc D . Tính chu vi của hình thang, biết $BC = 3$ cm.

Lời giải.

Trong hình thang cân $ABCD$ có $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{B}_1 + 90^\circ + \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 180^\circ$
 $\Leftrightarrow 3\widehat{B}_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B}_1 = 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 60^\circ$.
 Gọi $O = BC \cap AD \Rightarrow \triangle OCD$ đều nên $\widehat{AOB} = 60^\circ$.
 $\triangle OAB$ có $OA = OB$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle OAB$ đều $\Rightarrow BA = AD = BC$.
 Chu vi của hình thang $ABCD$ là $3 + 3 + 6 + 3 = 18$ cm.

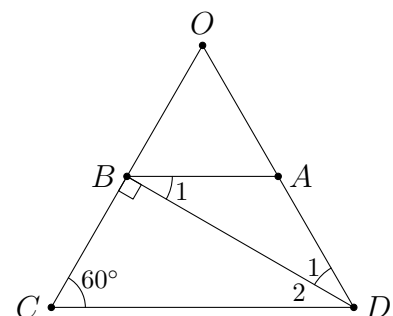


□

Ví dụ 6. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $C = 60^\circ$. DB là tia phân giác của góc D . Tính các cạnh của hình thang biết chu vi hình thang bằng 20 cm.

Lời giải.

Gọi $O = CB \cap DA \Rightarrow \triangle OCD$ đều.
 $\Rightarrow AB = OA = OB$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$.
 Có DB là tia phân giác của góc $D \Rightarrow \widehat{D}_1 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 = 30^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại $A \Rightarrow AB = AD = BC$; $CD = 2AB$.
 Chu vi hình thang là $CD + DA + AB + BC = 5AB = 20 \Rightarrow AB = 4$.
 Vậy $BC = AD = AB = 4$ cm, $CD = 8$ cm.



□

Dạng 7. Chứng minh hình thang cân

Sử dụng dấu hiệu nhận biết hình thang cân.

BÀI TẬP MẪU

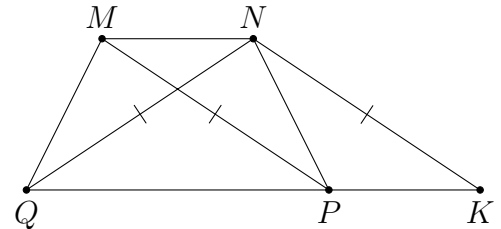
Ví dụ 1. Cho hình thang $MNPQ$, ($MN \parallel PQ$), có $MP = NQ$. Qua N kẻ đường thẳng song song với MP , cắt đường thẳng PQ tại K . Chứng minh

- $\triangle NKQ$ là tam giác cân;
- $\triangle MPQ = \triangle NQP$;
- $MNPQ$ là hình thang cân.

Lời giải.

- Từ N kẻ tia $Nx \parallel MP$, $Nx \cap QP = K$.
Do $MN \parallel PK \Rightarrow NK = MP \Rightarrow NK = NQ$
($= MP$) $\Rightarrow \triangle NKQ$ cân tại N .
- Do $\triangle NKQ$ cân tại N nên $\widehat{NQP} = \widehat{NKQ}$. Mà $\widehat{NKQ} = \widehat{MPQ}$ (hai góc đồng vị), nên $\widehat{NQP} = \widehat{MPQ}$.
Xét $\triangle MQP$ và $\triangle NPQ$ có

$$\begin{cases} MP = NQ \\ \widehat{MPQ} = \widehat{NQP} \\ QP \text{ cạnh chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle MQP = \triangle NPQ \text{ (c.g.c).}$$
- Do $\triangle MPQ = \triangle NQP$
 $\Rightarrow \widehat{MQP} = \widehat{NPQ} \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

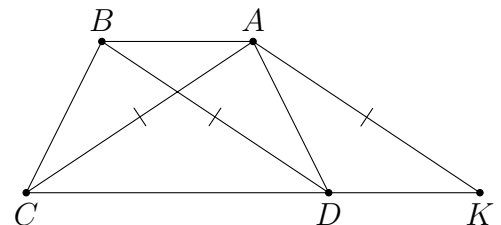


Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), có $AC = BD$. Chứng minh $ABCD$ là hình thang cân.

Lời giải.

Từ A kẻ tia $Ax \parallel BD$, $Ax \cap CD = K$.
Do $AB \parallel KD \Rightarrow AK = BD \Rightarrow \triangle ACK$ cân tại A
 $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{AKC}$.
Lại có $\widehat{AKC} = \widehat{BDC}$ (hai góc đồng vị)
 $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BDC}$.
Xét hai tam giác BCD và ADC có

$$\begin{cases} BD = AC \\ \widehat{BDC} = \widehat{ACD} \\ CD \text{ cạnh chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle BCD = \triangle ADC \text{ (c.g.c)}$$
 $\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{ADC}$
 $\Rightarrow ABCD$ là hình thang cân.



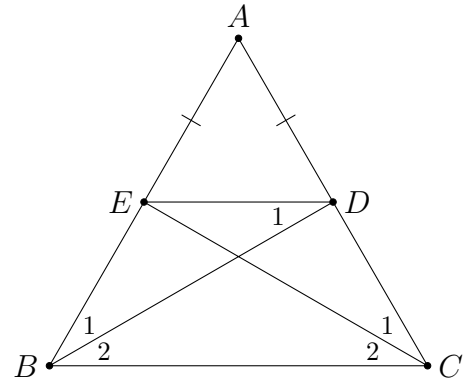
3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A , các đường phân giác BD, CE ($D \in AC, E \in AB$).

1. Chứng minh $BEDC$ là hình thang cân;
2. Tính các góc của hình thang cân $BEDC$, biết $\widehat{C} = 50^\circ$.

Lời giải.

1. Do $\triangle ABC$ cân tại A và BD, CE là các đường phân giác suy ra hai tam giác BCE và CDB có $\widehat{EBC} = \widehat{DCB}$, BC chung, $\widehat{BCE} = \widehat{DBC}$. Vậy $\triangle BCE = \triangle CBD$ (g.c.g)
 $\Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{C}_2, BD = EC, BE = DC \Rightarrow \triangle ADE$ cân
 $\Rightarrow BEDC$ là hình thang cân.
2. Do $BCDE$ là hình thang cân có $\widehat{C} = 50^\circ$
 $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} = \widehat{C} = 50^\circ \\ \widehat{E} = \widehat{D} = 180^\circ - \widehat{C} = 130^\circ. \end{cases}$



□

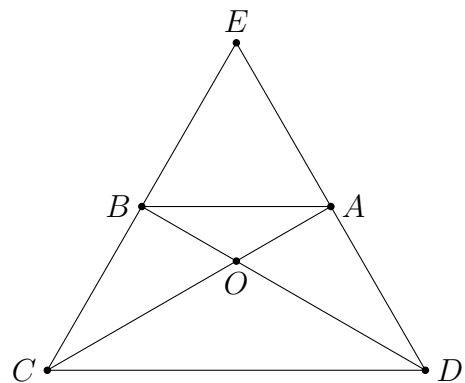
Bài 2. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, O là giao điểm của hai đường chéo, E là giao điểm của hai đường thẳng chứa cạnh bên AD và BC . Chứng minh

1. $OA = OB, OC = OD$;
2. EO là đường trung trực của hai đáy hình thang $ABCD$.

Lời giải.

1. Do $ABCD$ là hình thang cân $AB \parallel CD$
 $\Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ \widehat{BAD} = \widehat{ABC} \end{cases}$
 Xét $\triangle ABD$ và $\triangle BAC$ có
 $\begin{cases} AD = BC \\ \widehat{BAD} = \widehat{ABC} \\ AB \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABD = \triangle BAC$ (c.g.c)
 $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BAC}$ (cặp góc tương ứng).
 Suy ra $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow OA = OB$.
 Chứng minh tương tự với $OC = OD$.

2. $\triangle EBA, \triangle EDC$ cân tại $E \Rightarrow AE = BE, ED = EC \Rightarrow E$ thuộc trung trực AB, DC (1).
 Mà $OA = OB; OC = OD$ (cmt) $\Rightarrow O$ thuộc trung trực AB, DC (2).
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow OE$ là đường trung trực của AB, CD .



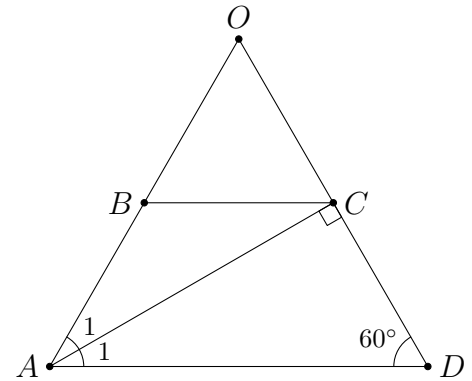
□

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) có đường chéo AC vuông góc với cạnh bên CD , AC là tia phân giác góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{D} = 60^\circ$.

1. Chứng minh $ABCD$ là hình thang cân;
2. Tính độ dài cạnh AD , biết chu vi hình thang bằng 20 cm.

Lời giải.

1. Gọi $O = BD \cap AC$. Tam giác OAD có AC vừa là phân giác vừa là đường cao nên $\triangle OAD$ cân tại A . Lại có $\widehat{D} = 60^\circ$ nên $\triangle OAD$ là tam giác đều. Suy ra $ABCD$ là hình thang cân.
2. Theo phần a) C là trung điểm OD , $BC \parallel AD \Rightarrow BC$ là đường trung bình trong $\triangle OAD \Rightarrow AD = 2BC$.
Lại có $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow AB = CD$.
Mà $AD = DO = 2CD \Rightarrow AB = CD = BC$.



Do chu vi hình thang $ABCD$ là $AD + DC + CB + BA = 20 \Leftrightarrow 5BC = 20 \Rightarrow BC = 4 \Rightarrow AD = 8$ cm.

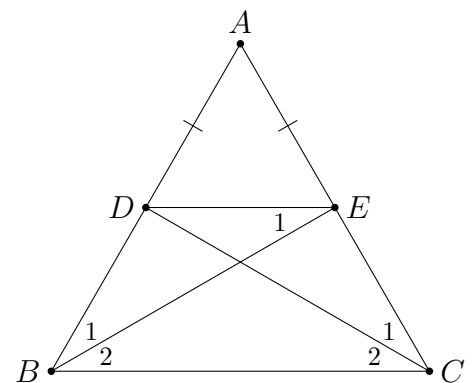
□

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A . Lấy điểm D trên cạnh AB , điểm E trên cạnh AC sao cho $AD = AE$.

1. Tứ giác $BDEC$ là hình gì? Vì sao?
2. Các điểm D, E ở vị trí nào thì $BD = DE = EC$?

Lời giải.

1. $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ (1).
 $\triangle ADE$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{E} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $BDEC$ là hình thang cân do $BC \parallel DE$ và $\widehat{B} = \widehat{C}$.
2. Giả sử $BD = DE = EC \Rightarrow BDE$ cân tại D
 $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = \widehat{B}_2$.
Tương tự $\triangle DEC$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$.
Vậy BE, DC là các đường phân giác của $\triangle ABC$ thì $BD = DE = EC$.



□

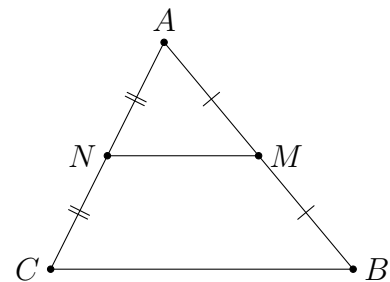
§4 Đường trung bình của tam giác, của hình thang

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Đường trung bình của tam giác

Định nghĩa 8. Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác

Định lý 4. Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.

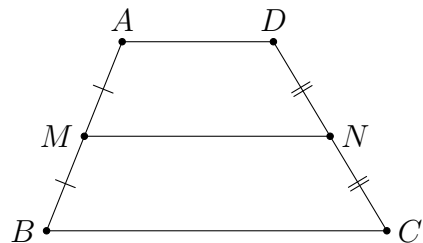


Định lý 5. Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

1.2 Đường trung bình của hình thang

Định nghĩa 9. Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.

Định lý 6. Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.



Định lý 7. Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 8. Sử dụng định nghĩa và các định lý về đường trung bình trong tam giác chứng để chứng minh một tính chất hình học.

Sử dụng *Định nghĩa* về đường trung bình của tam giác và các *Định lý 1*, *Định lý 2* để suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến BD, CE . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BE và CD . Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của MN với BD và CE . Chứng minh $MI = IK = KN$.

Lời giải.

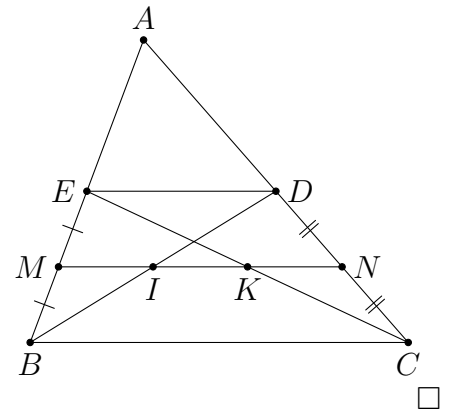
Xét $\triangle BED$ có $\begin{cases} MI \parallel ED \\ ME = BM \end{cases} \Rightarrow ID = IB$.

Xét $\triangle CED$ có $\begin{cases} NK \parallel ED \\ NC = ND \end{cases} \Rightarrow KE = KC$.

Suy ra $MI = \frac{1}{2}ED$; $NK = \frac{1}{2}ED$; $ED = \frac{1}{2}BC$.

$IK = MK - MI = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}DE = DE - \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}DE$.

Vậy $MI = IK = KN$.



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G . Gọi M, N lần lượt là trung điểm BG, CG . Chứng minh tứ giác $MNDE$ có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ có $\begin{cases} ED \parallel BC \\ ED = \frac{1}{2}BC \end{cases}$ (1).

Xét $\triangle GBC$ có $\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN = \frac{1}{2}BC \end{cases}$ (2).

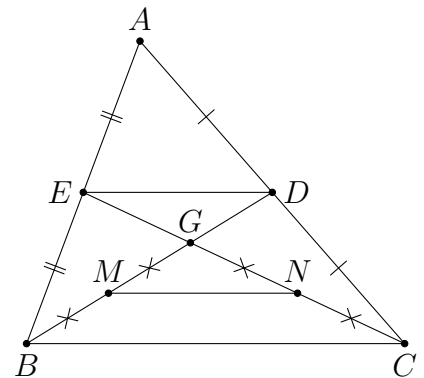
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} ED \parallel MN \\ ED = MN \end{cases}$.

Xét $\triangle BAG$ có $\begin{cases} EM \parallel AG \\ EM = \frac{1}{2}AG \end{cases}$ (3).

Xét $\triangle CAG$ có $\begin{cases} DN \parallel AG \\ DN = \frac{1}{2}AG \end{cases}$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \begin{cases} EM \parallel DN \\ EM = DN \end{cases}$.

Vậy tứ giác $MNDE$ có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.



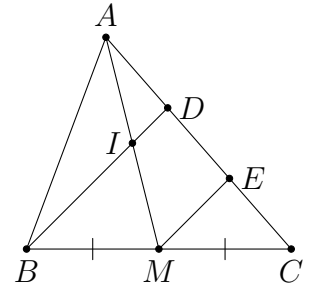
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC , điểm D, E thuộc AC sao cho $AD = DE = EC$. Gọi M là trung điểm của BC , I là giao điểm của BD và AM . Chứng minh

a) $ME \parallel BD$;

b) $AI = IM$.

✍ Lời giải.

1. Xét $\triangle CBD$ có $\begin{cases} EC = ED \\ MC = MB \end{cases} \Rightarrow ME \parallel BD$.
2. Xét $\triangle AEM$ có $\begin{cases} ID \parallel ME \\ AD = DE \end{cases} \Rightarrow IA = IM$.

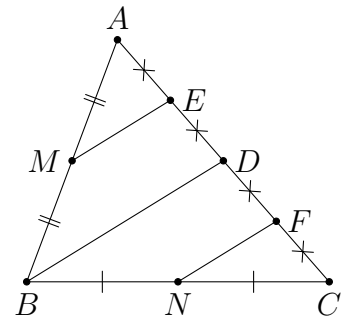


□

Ví dụ 4. Cho BD là đường trung tuyến của tam giác ABC , E là trung điểm của đoạn thẳng AD , F là trung điểm đoạn thẳng DC , M là trung điểm cạnh AB , N là trung điểm cạnh BC . Chứng minh $ME \parallel NF$ và $ME = NF$.

✍ Lời giải.

- Xét $\triangle ABD$ có $\begin{cases} MA = MB \\ EA = ED \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ME \parallel BD \\ ME = \frac{1}{2}BD \end{cases} \quad (1).$
- Xét $\triangle CBD$ có $\begin{cases} NB = NC \\ FC = FD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NF \parallel BD \\ NF = \frac{1}{2}BD \end{cases} \quad (2).$
- Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} ME \parallel NF \\ ME = NF. \end{cases}$



□

Dạng 9. Sử dụng định nghĩa và các định lý về đường trung bình trong hình thang để chứng minh một tính chất hình học

Sử dụng *Định nghĩa* về đường trung bình của tam giác và các *Định lý 3*, *Định lý 4* để suy ra điều cần chứng minh.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC . Đường thẳng EF cắt BD tại I , cắt AC tại K .

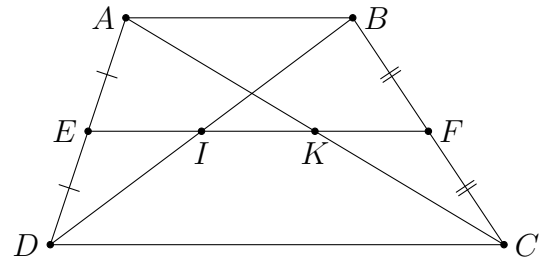
1. Chứng minh $AK = KC, BI = ID$;
2. Cho $AB = 6$ cm, $CD = 10$ cm. Tính EI, KF, IK .

✍ Lời giải.

$$1. \text{ Có } \begin{cases} AE = ED \\ BF = FC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} EF \parallel AB \parallel CD \\ EF = \frac{AB + CD}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel EI \\ AE = ED \end{cases} \Rightarrow BI = ID.$$

Chứng minh tương tự có $AK = KC$.



$$2. KF = EI = \frac{1}{2}AB = 3 \text{ (cm).}$$

$$EF = \frac{1}{2}(AB + CD) = 8 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow IK = EF - FK = 2 \text{ (cm).}$$

□

Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), M là trung điểm của AD , N là trung điểm của BC . Gọi I, K theo thứ tự là giao của MN với BD, AC . Biết $AB = 8 \text{ cm}$, $CD = 16 \text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn MI, IK, KN .

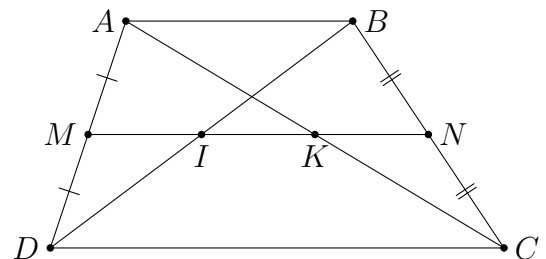
Lời giải.

$$\text{Có } \begin{cases} MA = MD \\ MI \parallel AB \end{cases} \Rightarrow MI = \frac{1}{2}AB = 4 \text{ (cm).}$$

$$\text{Có } \begin{cases} NB = NC \\ NK \parallel AB \end{cases} \Rightarrow NK = \frac{1}{2}AB = 4 \text{ (cm).}$$

$$\text{Có } \begin{cases} MA = MD \\ MK \parallel DC \end{cases} \Rightarrow MK = \frac{1}{2}DC.$$

$$\text{Suy ra } IK = MK - MI = \frac{1}{2}DC - \frac{1}{2}AB = 8 - 4 = 4 \text{ (cm).}$$



□

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, Q, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD, BC, BD, AC .

1. Chứng minh M, N, P, Q nằm trên một đường thẳng;
2. Tính MP, PQ biết $AB = a, CD = b$ ($a > b$).

Lời giải.

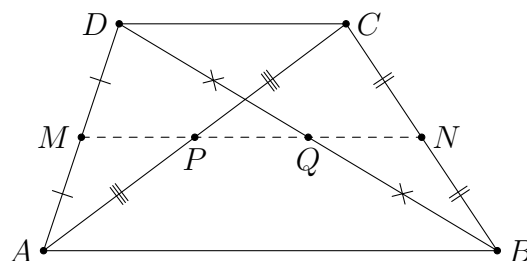
$$1. \begin{cases} MN \parallel CD \\ MP \parallel CD \\ NQ \parallel CD \end{cases}$$

$\Rightarrow M, P, Q, N$ thẳng hàng (theo tiên đề Ô-clít).

$$2. \text{ Có } \begin{cases} MA = MD \\ MP \parallel CD \end{cases} \Rightarrow MP = \frac{1}{2}CD = \frac{b}{2};$$

$$\text{ Có } \begin{cases} MA = MD \\ MQ \parallel AB \end{cases} \Rightarrow MQ = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2};$$

$$\text{ Suy ra } PQ = MQ - MP = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD = \frac{a - b}{2}.$$



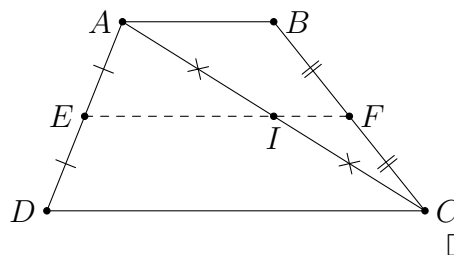
□

Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB, CD . Gọi E, F, I theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC . Chứng minh ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Lời giải.

Có EI là đường trung bình của $\triangle ACD \Rightarrow EI \parallel DC$ (1).
 Có EF là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow EF \parallel DC$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow E, I, F$ thẳng hàng (theo tiên đề Ô-clít).



□

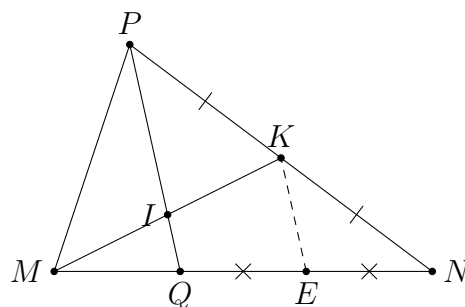
3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác MNP , K là trung điểm NP , Q là một điểm nằm trên cạnh MN sao cho $NQ = 2QM$. Gọi I là giao điểm của PQ và MK . Chứng minh I là trung điểm của MK .

Lời giải.

Gọi E là trung điểm $QN \Rightarrow KE \parallel PQ$ và Q là trung điểm ME .

$\Rightarrow IQ$ là đường trung bình của $\triangle MEK \Rightarrow I$ là trung điểm của MK .



□

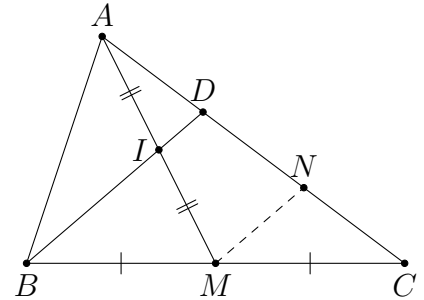
Bài 2. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM , D là giao điểm của BI và AC .

$$1. \text{ Chứng minh } AD = \frac{1}{2}DC;$$

2. So sánh độ dài BD và ID .

Lời giải.

- Kẻ $MN \parallel BD$, $N \in AC$.
 MN là đường trung bình trong $\triangle CBD$
 $\Rightarrow N$ là trung điểm của CD (1).
 IN là đường trung bình trong $\triangle AMN$
 $\Rightarrow D$ là trung điểm của AN (2).
 Từ (1) và (2) suy ra $AD = \frac{1}{2}DC$.



- Có $ID = \frac{1}{2}MN$; $MN = \frac{1}{2}BD$, nên $BD = ID$.

□

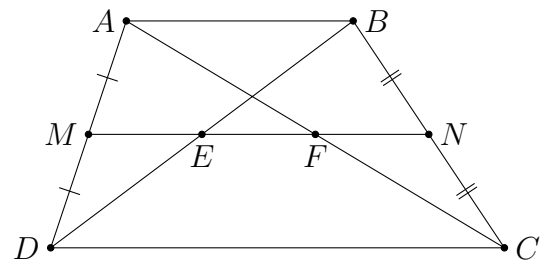
Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, CB . Gọi E, F là giao điểm của MN với BD và AC . Chứng minh $EF = \frac{1}{2}(CD - AB)$.

Lời giải.

Vì MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên E, F là trung điểm của BD và AC . Suy ra $ME = FN = \frac{1}{2}AB$.

Có

$$\begin{aligned} EF &= MN - (ME + FN) = MN - AB \\ &= \frac{CD + AB}{2} - AB = \frac{1}{2}(CD - AB). \end{aligned}$$



□

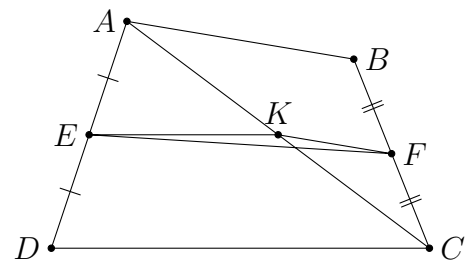
Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC .

- So sánh độ dài các đoạn thẳng EK và CD , FK và AB ;
- Chứng minh $EF \leq \frac{AB + CD}{2}$;
- Khi $EF = \frac{AB + CD}{2}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải.

- Có $\begin{cases} EA = ED \\ AK = KC \end{cases} \Rightarrow EK = \frac{1}{2}CD$.
 Có $\begin{cases} BF = FC \\ AK = KC \end{cases} \Rightarrow FK = \frac{1}{2}AB$.

- Ta có $EF \leq EK + KF$
 $\Rightarrow EF \leq \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD \Leftrightarrow EF \leq \frac{1}{2}(AB + CD)$.



□



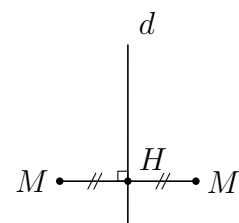
- c) Khi $EF = \frac{AB + CD}{2}$ thì $EF = EK + KF \Rightarrow E, K, F$ thẳng hàng. Khi đó $ABCD$ là hình thang.

§5 Đối xứng trục

1 Tóm tắt lý thuyết

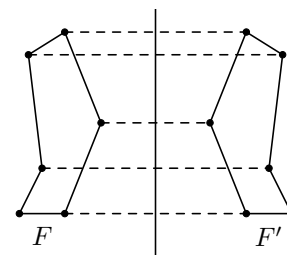
1.1 Hai điểm đối xứng nhau qua một đường thẳng

Hai điểm M và M' được gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là trung trực của MM' .



1.2 Hai hình đối xứng nhau qua một đường thẳng:

- ☒ Hai điểm F và F' đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu: Mỗi điểm thuộc hình F đều có điểm đối xứng với nó qua d thuộc hình F' và ngược lại.
- ☒ Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hai hình F và F' .



1.3 Hình có trục đối xứng

- ☒ Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình F nếu mỗi điểm thuộc hình F đều có điểm đối xứng với nó qua d cũng thuộc hình F .
- ☒ Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó.

1.4 Định lý

- ☒ Nếu hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ có các điểm A và A' , B và B' đối xứng với nhau qua đường thẳng d thì:
 - $AB = A'B'$.
 - $AB, A'B'$ đối xứng nhau qua d .
- ☒ Nếu các đỉnh của $\triangle ABC$ lần lượt đối xứng qua trục d với các đỉnh của tam giác $\triangle A'B'C'$ thì:
 - $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

- Hai tam giác đối xứng với nhau qua d .

☑ Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó.

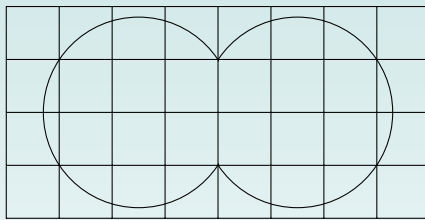
2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 10. Nhận biết và thực hành vẽ các hình có đối xứng trục

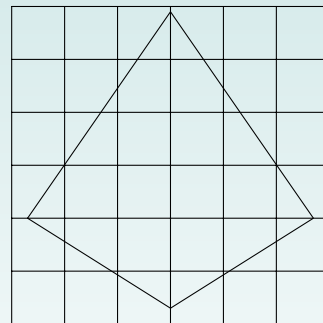
Sử dụng định nghĩa hình có trục đối xứng để xác định.

BAI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm trục đối xứng trong các hình sau. Vẽ đường thẳng d là trục đối xứng trong các hình.



Hình 1



Hình 2

Lời giải.

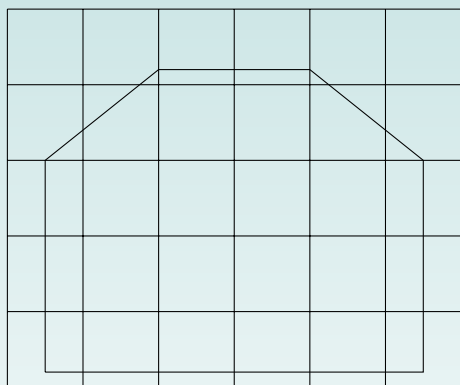
Hình 1 có 2 trục đối xứng.

Hình 2 có một trục đối xứng.

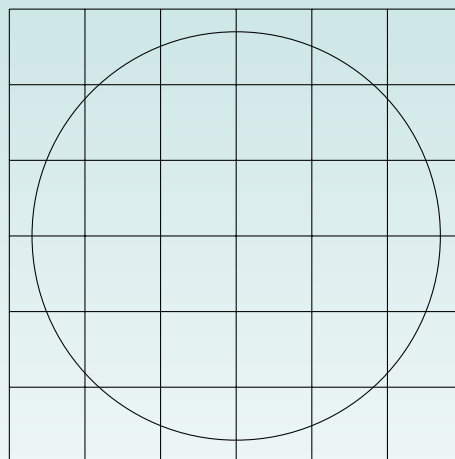
Học sinh tự vẽ trục đối xứng.

□

Ví dụ 2. Tìm trục đối xứng trong các hình sau. Vẽ đường thẳng d là trục đối xứng trong các hình.



Hình 1



Hình 2

Lời giải.

Hình 1 có 1 trục đối xứng.

Hình 2 có vô số trục đối xứng.

Học sinh tự vẽ trục đối xứng.

□

Dạng 11. Chứng minh hai điểm hoặc hai hình đối xứng nhau qua một đường thẳng

Sử dụng định nghĩa hai điểm hoặc hai hình đối xứng nhau qua một đường thẳng.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A đường cao AH . Trên cạnh AB lấy điểm D , trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$.

Chứng minh:

1. D đối xứng với E qua AH ;
2. Tam giác ADC đối xứng với tam giác AEB qua AH .

Lời giải.

$$1. \text{ Xét } \triangle ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \end{cases}$$

Xét tam giác ADE có $AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A .

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC}.$$

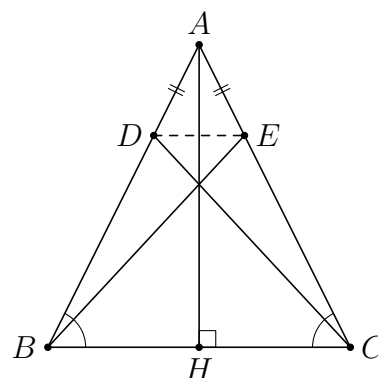
Vì hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow DE \perp AH$.

Gọi I là giao điểm của AH và DE .

Xét tam giác ADE cân tại A có AI là đường cao.

$\Rightarrow AI$ đồng thời là đường trung trực tam giác ADE .

$\Rightarrow D$ đối xứng với E qua AH .



- b) Vì AH là đường trung trực của BC nên B và C đối xứng với nhau qua AH .
 D và E đối xứng nhau qua AH và A đối xứng với chính nó qua AH .
 Vậy tam giác ADC đối xứng với tam giác AEB qua AH .

□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC cân tại A đường cao AH . Trên cạnh AB lấy điểm I , trên cạnh AC lấy điểm K sao cho $BI = CK$. Đoạn thẳng AH cắt IK tại M . Chứng minh:

1. I đối xứng với K qua AH ;
2. Tam giác ABM đối xứng với tam giác ACM qua AH .

 **Lời giải.**

1. Vì tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow$

$$\begin{cases} AB = AC \\ \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \end{cases}$$

Mà $BI = CK$ nên $AI = AK$.

Xét tam giác AIK có $AI = AK \Rightarrow \triangle AIK$ cân tại A .

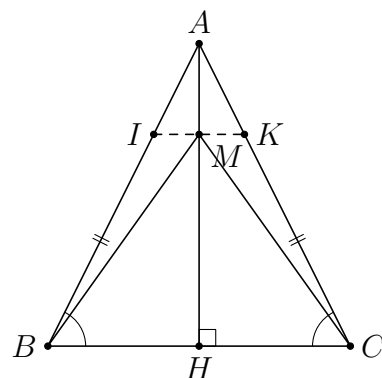
$$\Rightarrow \widehat{AIK} = \widehat{AKI} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \Rightarrow \widehat{AIK} = \widehat{ABC}.$$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow IK \parallel BC \Rightarrow IK \perp AH$.

Xét tam giác AIK cân tại A có AM là đường cao

$\Rightarrow AM$ đồng thời là đường trung trực tam giác AIK .

$\Rightarrow I$ đối xứng với K qua AH .



- b) Ta có B và C đối xứng với nhau qua AH . A và M đối xứng với chính nó qua AH .
 $\Rightarrow \triangle ABM$ đối xứng với $\triangle ACM$ qua AH .

□

Dạng 12. Sử dụng tính chất đối xứng trục để giải toán

Vận dụng các tính chất đối xứng trục: Hai đoạn thẳng, góc, tam giác đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì bằng nhau.

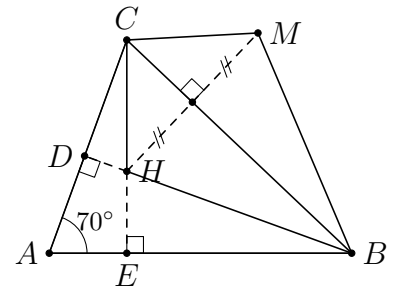
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 70^\circ$, trực tâm H . Gọi M là điểm đối xứng với H qua BC .

1. Chứng minh $\triangle BHC = \triangle BMC$;
2. Tính góc $\widehat{BMC}$.

 **Lời giải.**

- Vì M là điểm đối xứng với H qua BC .
 B và C là điểm đối xứng của chính nó qua BC .
 $\Rightarrow \triangle BHC = \triangle BMC$.
- Gọi D và E lần lượt là chân đường cao hạ từ B và C xuống AC và AB .
 Xét tứ giác $AEHD$ có $\widehat{A} + \widehat{E} + \widehat{H} + \widehat{D} = 360^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{DHE} = 110^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{DHE} = \widehat{BHC} = 110^\circ$ (đối đỉnh)
 $\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BMC} = 110^\circ$ (hai góc tương ứng).



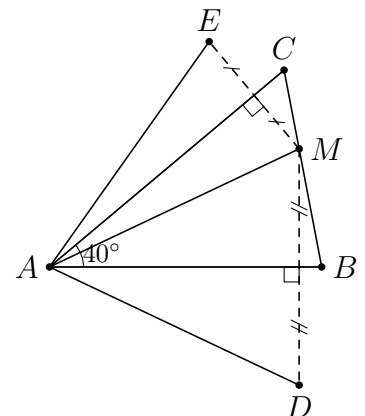
□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 40^\circ$, điểm M thuộc BC . Điểm D đối xứng với M qua AB , điểm E đối xứng với M qua AC .

- Chứng minh $AD = AE$;
- Tính góc $\widehat{DAE}$.

Lời giải.

- Vì D là điểm đối xứng với M qua AB .
 $\Rightarrow AB$ là đường trung trực của MD .
 $\Rightarrow AM = MD$.
 Tương tự $AM = AE$.
 $\Rightarrow AD = AE$.
- Ta có $\widehat{DAB}$ đối xứng với $\widehat{MAB}$ qua AB , $\widehat{MAC}$ đối xứng với $\widehat{EAC}$ qua $AC \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{MAB}$; $\widehat{MAC} = \widehat{EAC}$.
 Khi đó, ta có
 $\widehat{DAE} = \widehat{DAB} + \widehat{BAM} + \widehat{MAC} + \widehat{CAE} = 2(\widehat{BAM} + \widehat{MAC}) = 80^\circ$.

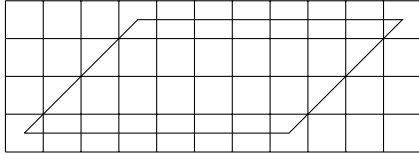


□

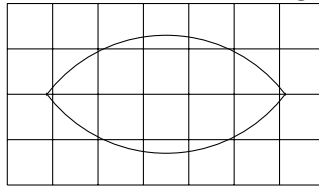
Bài tập về nhà

Bài 1. Tìm trục đối xứng trong các hình vẽ sau. Vẽ đường thẳng d là trục đối xứng trong các

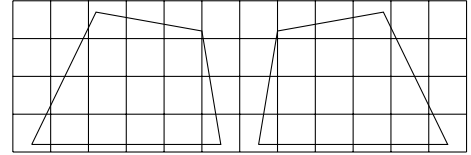
hình.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Lời giải.

Hình 1 không có trục đối xứng.

Hình 2 có 2 trục đối xứng.

Hình 3 có một trục đối xứng.

Học sinh tự vẽ trục đối xứng. □

Bài 2. Tứ giác $ABCD$ có $AB = BC$, $CD = DA$. Chứng minh điểm A đối xứng với điểm C qua đường thẳng BD .

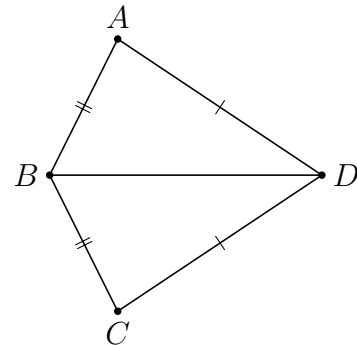
Lời giải.

Vì $AB = BC$ nên B thuộc đường trung trực của AC .

Vì $CD = DA$ nên D thuộc đường trung trực của AC .

$\Rightarrow BD$ là đường trung trực của AC .

$\Rightarrow A$ và C đối xứng với nhau qua BD .



□

Bài 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi H là điểm đối xứng với B qua AD . Điểm I là giao điểm của CH và AD . Chứng minh $\widehat{AIB} = \widehat{DIC}$.

Lời giải.

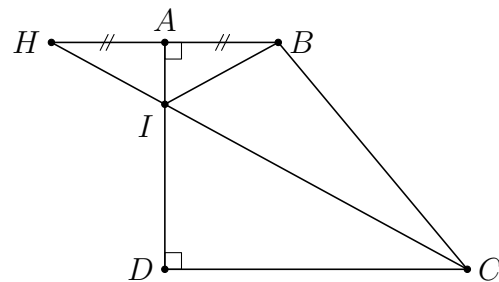
Vì H là điểm đối xứng với B qua AD nên AD là đường trung trực của HB .

Vì I thuộc AD nên $IH = IB \Rightarrow \triangle IHB$ cân tại I .

Xét tam giác IHB cân tại I có IA là đường trung tuyến.

$\Rightarrow IA$ đồng thời là đường phân giác

$\Rightarrow \widehat{AIH} = \widehat{AIB}$ mà $\widehat{AIH} = \widehat{DIC} \Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{DIC}$.



□

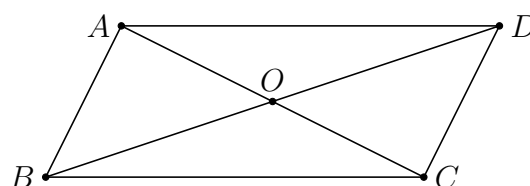
§6 Hình bình hành

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 10. Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$



1.2 Tính chất

Trong hình bình hành:

- ☒ Các cạnh đối bằng nhau.
- ☒ Các góc đối bằng nhau.
- ☒ Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

1.3 Dấu hiệu nhận biết

- ☒ Tứ giác có các cặp cạnh đối song song là hình bình hành.
- ☒ Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- ☒ Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
- ☒ Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.
- ☒ Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 13. Sử dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh tính chất hình học

Sử dụng định nghĩa hình bình hành và các tính chất về cạnh, góc và đường chéo của hình bình hành để chứng minh các tính chất hình học.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD , F là trung điểm của BC . Chứng minh:

- $BE = DF$ và $\widehat{ABE} = \widehat{CDF}$;
- $BE \parallel FD$.

Lời giải.

1. Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD; AB = CD \\ \widehat{ABC} = \widehat{ADC} \end{cases} \Rightarrow ED \parallel BF \quad (1).$$

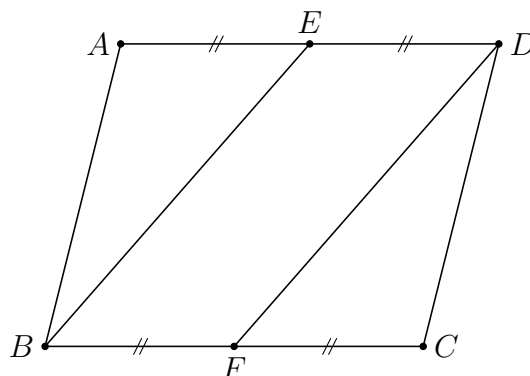
$$\text{Vì } E \text{ là trung điểm của } AD \Rightarrow AE = ED = \frac{AD}{2}.$$

$$\text{Vì } F \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow BF = FC = \frac{BC}{2}.$$

$$\text{Do đó } ED = BF \quad (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác $BEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow BE = DF$.

Vì $BEDF$ là hình bình hành nên $\widehat{EBF} = \widehat{EDF}$.
Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{CDF}$.



b) Vì tứ giác $BEDF$ là hình bình hành suy ra $BE \parallel DF$.

□

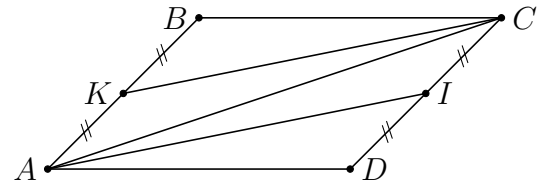
Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD . Chứng minh:

a) $AI = CK$ và $\widehat{IAC} = \widehat{KCA}$;

b) $AI \parallel CK$.

Lời giải.

- Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành
 $\Rightarrow AB \parallel CD; AB = CD \Rightarrow AK \parallel CI$ (1).
 Vì K là trung điểm của $AB \Rightarrow AK = KB = \frac{AB}{2}$.
 Vì I là trung điểm của $CD \Rightarrow CI = ID = \frac{CD}{2}$.
 $\Rightarrow AK = CI$ (2).
 Từ (1) và (2), suy ra tứ giác $AKCI$ là hình bình hành $\Rightarrow AI = CK$.
 Vì tứ giác $AKCI$ là hình bình hành suy ra $KC \parallel AI$
 $\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{KCA}$ (so le trong).
- Vì tứ giác $AKCI$ là hình bình hành suy ra $AK \parallel CI$.



Dạng 14. Chứng minh tứ giác là hình bình hành

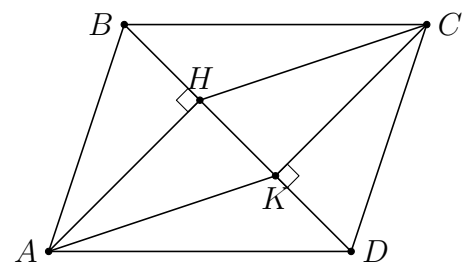
Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình bình hành.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$, đường chéo BD . Kẻ AH và CK vuông góc với BD tại H và K . Chứng minh tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD; AB = CD \\ BC \parallel AD; BC = AD. \end{cases}$
 Vì $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{CDK}$ (so le trong).
 Vì $\begin{cases} AH \perp BD \\ CK \perp DB \end{cases} \Rightarrow AH \parallel CK$ (1).
 Vì $\triangle HAB = \triangle KCD$ (cạnh huyền - góc nhọn).
 $\Rightarrow AH = CK$ (hai cạnh tương ứng) (2).
 Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B , vuông góc với AC tại C cắt nhau ở D . Chứng minh tứ giác $BDCH$ là hình bình hành.

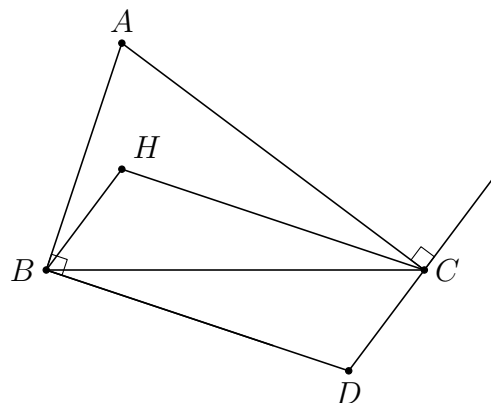
Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ có H là trực tâm, suy ra $CH \perp AB$; $BH \perp AC$.

$$\text{Vì } \begin{cases} BD \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH \parallel BD \quad (1).$$

$$\text{Vì } \begin{cases} BH \perp AC \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \parallel CD \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.



□

Dạng 15. Ba điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy

Vận dụng tính chất về đường chéo của hình bình hành. Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của OB , OD . Kẻ PM vuông góc với AB tại M , QN vuông góc với CD tại N . Chứng minh ba điểm M , O , N thẳng hàng và các đường thẳng AC , MN , PQ đồng quy.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$.

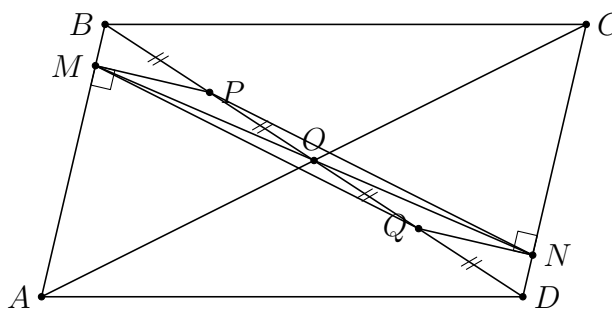
$$\text{Vì } \begin{cases} QN \perp CD \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow QN \perp AB.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} QN \perp AB \\ MP \perp AB \end{cases} \Rightarrow MP \parallel NQ \quad (1).$$

Ta có $\triangle MPB = \triangle NQD$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow MP = NQ \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành.



Xét hình bình hành $MPNQ$ có O là trung điểm của PQ . Suy ra O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $MPNQ$.

$\Rightarrow M, O, N$ thẳng hàng. Do đó AC, MN, PQ cùng đi qua O . Hay AC, MN, PQ đồng quy. □

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên AB lấy điểm K , trên CD lấy điểm I sao cho $AK = CI$. Chứng minh rằng ba điểm K, O, I thẳng hàng và các đường thẳng AC, BD, KI đồng quy.

Lời giải.

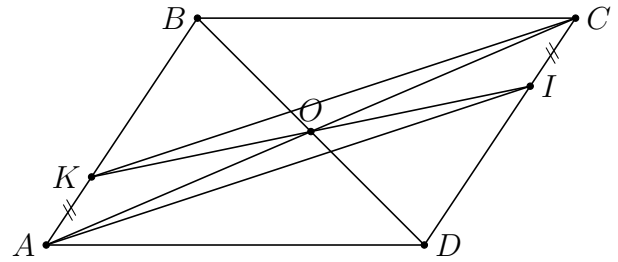
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD \Rightarrow AK \parallel CI$.

Xét tứ giác $AKCI$ có $\begin{cases} AK = CI \\ AK \parallel CI. \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AKCI$ là hình bình hành.

Xét hình bình hành $AKCI$ có O là trung điểm AC .

Suy ra O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $AKCI \Rightarrow K, O, I$ thẳng hàng. Hay AC, BD, KI đồng quy.



□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$ ($AB > BC$). Tia phân giác của góc D cắt AB ở E , tia phân giác của góc B cắt CD ở F .

a) Chứng minh $DE \parallel BF$;

b) Tứ giác $DEBF$ là hình gì?

Lời giải.

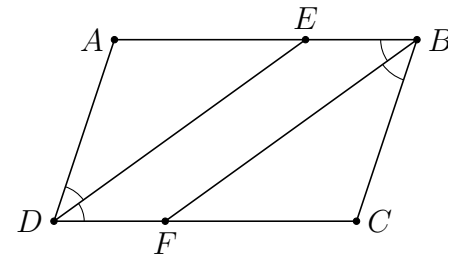
1. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\begin{cases} AB \parallel CD \\ \widehat{ABC} = \widehat{ADC}. \end{cases}$

Vì DE là phân giác góc D nên $\widehat{ADE} = \widehat{EDC} = \frac{\widehat{ADC}}{2}$.

Vì BF là phân giác góc B nên $\widehat{ABF} = \widehat{FBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$.

Mà $\widehat{EBF} = \widehat{BFC}$ (so le trong).

Do đó $\widehat{EDC} = \widehat{BFC} \Rightarrow DE \parallel BF$ (đồng vị).



1. Vì $AB \parallel CD$ nên $EB \parallel DF$. Xét tứ giác $DEBF$ có $\begin{cases} EB \parallel DF \\ DE \parallel BF. \end{cases}$

Vậy tứ giác $DEBF$ là hình bình hành.

□

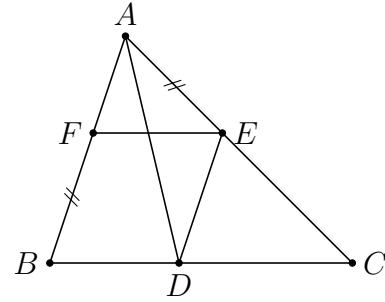
Bài 2. Cho tam giác ABC . Từ một điểm E trên cạnh AC vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB tại F và đường thẳng song song với AB cắt BC tại D . Giả sử $AE = BF$. Chứng minh:

a) Tam giác AED cân;

b) AD là phân giác của góc A .

Lời giải.

- Vì $EF \parallel BC \Rightarrow EF \parallel DB$. Vì $ED \parallel AB \Rightarrow ED \parallel BF$.
 $\Rightarrow$ Tứ giác $BFED$ là hình bình hành $\Rightarrow ED = FB$.
 Mà $AE = BF$ (gt) $\Rightarrow AE = ED \Rightarrow$ Tam giác EAD cân.
- Vì tam giác EAD cân tại E nên $\widehat{EAD} = \widehat{EDA}$.
 Vì $ED \parallel AB \Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{DAB}$ (so le trong).
 $\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DAC}$.
 $\Rightarrow AD$ là tia phân giác của góc A .



□

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải.

Xét tam giác DAC có PQ là đường trung bình

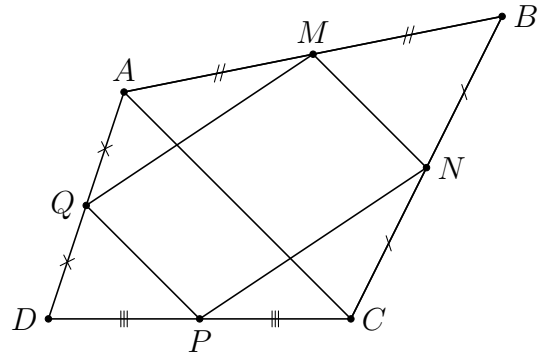
$$\Rightarrow \begin{cases} PQ \parallel AC \\ PQ = \frac{1}{2}AC. \end{cases} \quad (1)$$

Xét tam giác BAC có MN là đường trung bình

$$\Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AC \\ MN = \frac{1}{2}AC. \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ. \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.



□

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm hai đường thẳng AC và BD . Qua điểm O vẽ đường thẳng song song với AB cắt hai cạnh AD, BC lần lượt tại M, N . Trên AB, CD lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $AP = CQ$. Gọi I là giao điểm của AC và PQ . Chứng minh:

- Các tứ giác $AMNB, APCQ$ là hình bình hành;
- Ba điểm M, N, I thẳng hàng;
- Ba đường thẳng AC, MN, PQ đồng quy.

Lời giải.

- Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC; AB \parallel CD$.

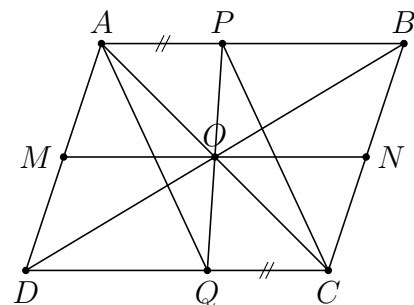
Vì $AD \parallel BC \Rightarrow AM \parallel BN$.

Xét tứ giác $AMNB$ có $\begin{cases} AM \parallel BN \\ AB \parallel MN. \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMNB$ là hình bình hành.

Xét tứ giác $APCQ$ có $\begin{cases} AP \parallel CQ \\ AP = CQ. \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $APCQ$ là hình bình hành.



- b) Vì $APCQ$ là hình bình hành. Mà I là giao điểm của AC và PQ suy ra O và I trùng nhau.
Do đó M, N, I thẳng hàng.
- c) Ta có I là giao điểm của AC và PQ . Mà M, N, I thẳng hàng.
Vậy ba đường thẳng AC, MN, PQ đồng quy.

□

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm hai đường thẳng AC và BD . Qua điểm O , vẽ đường thẳng a cắt hai đường thẳng AD, BC lần lượt tại E, F . Qua O vẽ đường thẳng b cắt hai cạnh AB, CD lần lượt tại K, H . Chứng minh tứ giác $EKFH$ là hình bình hành.

Lời giải.

Vì O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$ nên $OA = OC$.
Xét $\triangle OEA$ và $\triangle OFC$ có

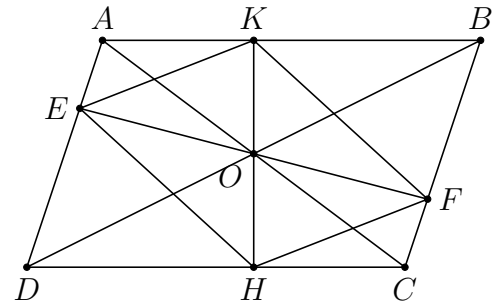
- ☑ $\widehat{EAO} = \widehat{FCO}$ (so le trong).
- ☑ $OA = OC$ (chứng minh trên).
- ☑ $\widehat{AOE} = \widehat{COF}$ (đối đỉnh).

$\Rightarrow \triangle OEA = \triangle OFC$ (g - c - g).
 $\Rightarrow OE = OF$ (hai cạnh tương ứng).
 $\Rightarrow O$ là trung điểm của EF .

Tương tự O là trung điểm của HK .

Xét tứ giác $EKFH$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Do đó tứ giác $EKFH$ là hình bình hành.

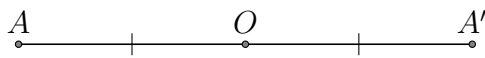


□

§7 Đối xứng tâm

1 Tóm tắt lý thuyết

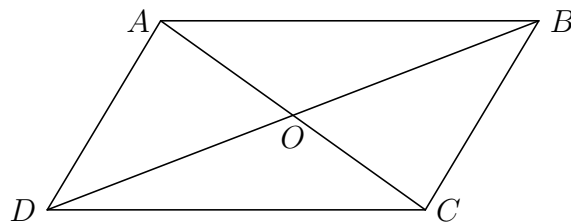
Định nghĩa 11. Hai điểm đối xứng qua một điểm: Hai điểm được gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm ấy.



A đối xứng với A' qua $O \Leftrightarrow O$ là trung điểm của AA' .

- ☑ Quy ước: Điểm đối xứng với điểm O qua điểm O chính là điểm O .
- ☑ Hai hình đối xứng qua một điểm: Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu một điểm bất kì thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua điểm O và ngược lại.
- ☑ Hình có tâm đối xứng: Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua điểm O cũng thuộc hình H .

Định lý 8. Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.



O là tâm đối xứng của hình bình hành $ABCD$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 16. Chứng minh hai điểm hoặc hai hình đối xứng với nhau qua một điểm

Sử dụng định nghĩa hai điểm đối xứng hoặc hai hình đối xứng với nhau qua một điểm.

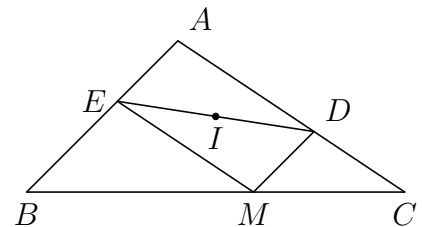
❖❖❖ **BÀI TẬP MẪU** ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC . Trên các cạnh AB, AC, BC lần lượt lấy các điểm E, D, M sao cho $MD \parallel AB$ và $ME \parallel AC$. Gọi I là trung điểm của ED .

1. Tứ giác $AEMD$ là hình gì?
2. Chứng minh rằng điểm A đối xứng với điểm M qua điểm I .

Lời giải.

- a) Ta có $MD \parallel AB$ và $ME \parallel AC$.
 $\Rightarrow MD \parallel AE$ và $ME \parallel AD$.
 $\Rightarrow AEMD$ là hình bình hành.
- b) Ta có tứ giác $AEMD$ là hình bình hành và I là trung điểm của ED .
 $\Rightarrow I$ là trung điểm của AM .
 $\Rightarrow$ Điểm A đối xứng với điểm M qua điểm I .



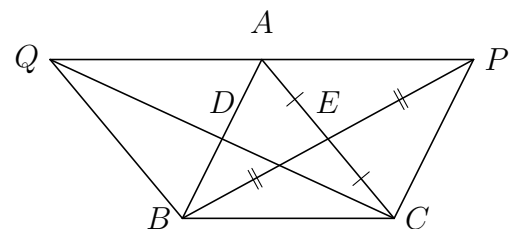
□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC . Gọi các điểm D, E theo thứ tự là trung điểm của AB và AC . Lấy P đối xứng với B qua điểm E và Q đối xứng với C qua điểm D .

1. Các tứ giác $BAPC, CAQB$ là hình gì?
2. Chứng minh rằng hai điểm P, Q đối xứng với nhau qua điểm A .

Lời giải.

- a) Ta có: E là trung điểm AC và E là trung điểm BP .
 $\Rightarrow$ Tứ giác $BAPC$ có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
 $\Rightarrow BAPC$ là hình bình hành.
 Chứng minh tương tự: $CAQB$ là hình bình hành.
- b) $BAPC$ là hình bình hành $\Rightarrow AP \parallel BC$ và $AP = BC$. (1)
 $CAQB$ là hình bình hành $\Rightarrow QA \parallel BC$ và $QA = BC$. (2)
 Từ (1) và (2) suy ra Q, A, P thẳng hàng và $AQ = AP$ nên hai điểm P, Q đối xứng với nhau qua điểm A .



□

Dạng 17. Sử dụng tính chất đối xứng để giải toán

Hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì bằng nhau.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC . Vẽ điểm D đối xứng với B qua A , vẽ điểm E đối xứng với C qua A . Gọi M là điểm nằm giữa B và C . Tia MA cắt DE tại N . Chứng minh:

- a) Tứ giác $BEDC$ là hình bình hành; b) $NE = MC$.

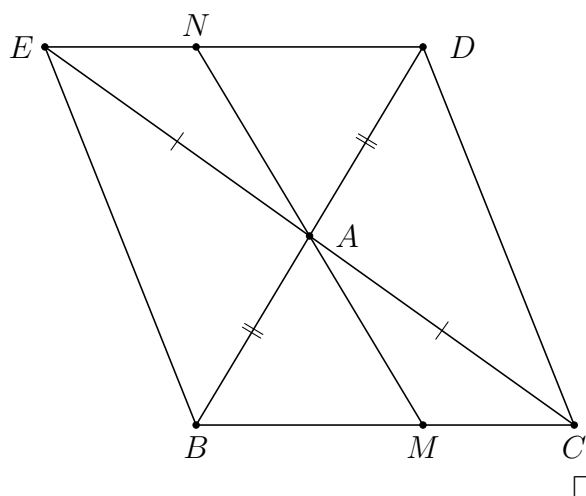
 Lời giải.

- a) Tứ giác $BEDC$ có 2 đường chéo EC và BD cắt nhau tại trung điểm A ($AD = AB$ và $AE = AC$);
 $\Rightarrow BEDC$ là hình bình hành.

- b) Ta có:

$$\begin{cases} EA = CA. \\ \widehat{EAN} = \widehat{CAM} (\text{đối đỉnh}). \\ \widehat{NEA} = \widehat{MCA} (\text{so le trong do } BC \parallel ED). \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle EAN = \triangle CAM$ (g-c-g).
 $\Rightarrow NE = MC$.



□

 **Ví dụ 2.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt các cạnh AD , BC ở E và F . Chứng minh:

- a) $OE = OF$; b) $AECF$ là hình bình hành.

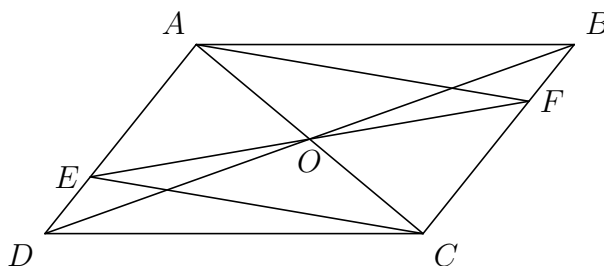
 Lời giải.

- a) Ta có:

$$\begin{cases} DO = OB (\text{do } ABCD \text{ là hình bình hành}). \\ \widehat{EOD} = \widehat{FOB} (\text{đối đỉnh}) \\ \widehat{EDO} = \widehat{FBO} (\text{so le trong do } AD \parallel BC) \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle DOE = \triangle BOF$ (g-c-g).
 $\Rightarrow OE = OF$.

- b) Tứ giác $AECF$ có 2 đường chéo AC và EF cắt nhau tại trung điểm O ($AO = OC$ và $OF = OE$).
 $\Rightarrow AECF$ là hình bình hành.



□

3

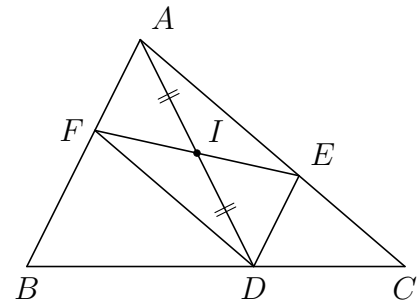
Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Cho tam giác ABC , điểm D thuộc cạnh BC . Từ D kẻ đường thẳng song song với cạnh AB , cắt cạnh AC tại E và đường thẳng qua D song song với AC cắt AB tại F . Chứng minh hai điểm E và F đối xứng với nhau qua trung điểm I của đoạn thẳng AD .

 Lời giải.

- ☑ Ta có $DE \parallel AB$ và $DF \parallel AC$.
 $\Rightarrow DE \parallel AF$ và $DF \parallel AE$.
 $\Rightarrow AEDF$ là hình bình hành.

- ☑ I là trung điểm của $AD \Rightarrow I$ cũng là trung điểm của EF (2 đường chéo).
 $\Rightarrow E$ và F đối xứng với nhau qua I .



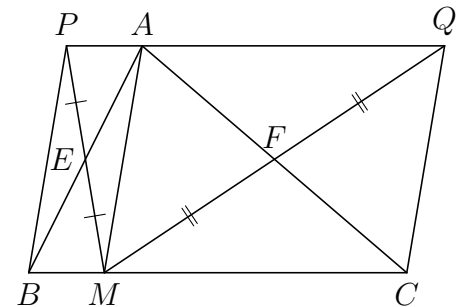
□

Bài 2. Cho tam giác ABC . Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB và AC . Một điểm M bất kì thuộc cạnh BC , gọi điểm đối xứng với M qua E là P và điểm đối xứng của M qua điểm F là Q . Chứng minh:

- a) A thuộc đường thẳng PQ ; b) $BCQP$ là hình bình hành.

Lời giải.

- a) Ta có $FA = FC$ và $FQ = FM$.
 $\Rightarrow$ Tứ giác $AQCM$ có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. $\Rightarrow AQCM$ là hình bình hành.
 $\Rightarrow AQ \parallel MC \Rightarrow AQ \parallel BC$. (1)
 Ta có $EA = EB$ và $EP = EM$.
 $\Rightarrow$ Tứ giác $APBM$ có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. $\Rightarrow APBM$ là hình bình hành.
 $\Rightarrow AP \parallel BM \Rightarrow AP \parallel BC$. (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow A, Q, P$ thẳng hàng $\Rightarrow A \in PQ$.



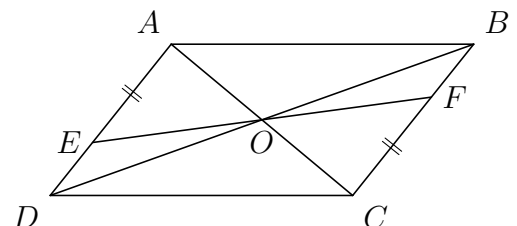
- b) Vì $PA \parallel BM$ ($PA = BM$) và $AQ \parallel MC$ ($AQ = MC$)
 Nên $BCQP$ là hình bình hành.

□

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm E và trên cạnh CB lấy điểm F sao cho $AE = CF$. Chứng minh rằng hai điểm E, F đối xứng với nhau qua giao điểm O của các đường chéo AC, BD .

Lời giải.

Ta có $AE = CF$ và $AE \parallel CF \Rightarrow AECF$ là hình bình hành.
 $\Rightarrow EF$ cắt AC tại trung điểm O của AC nên E, O, F thẳng hàng và O cũng là trung điểm của EF .
 Vậy hai điểm E, F đối xứng với nhau qua giao điểm O của các đường chéo AC, BD .



□

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt các cạnh AB và CD theo thứ tự ở M và N . Chứng minh điểm M đối xứng với điểm N qua O .

✎ Lời giải.

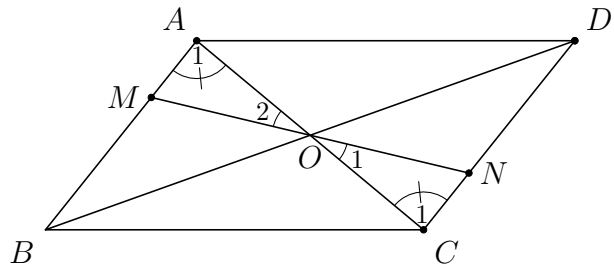
Xét $\triangle AOM$ và $\triangle CON$ có:

$$\begin{cases} \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \text{ (so le trong)} \\ OA = OC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle AOM = \triangle CON$$

$$\Rightarrow OM = ON.$$

Vậy M, N đối xứng qua O .



□

§8 Hình chữ nhật

1 Tóm tắt lý thuyết

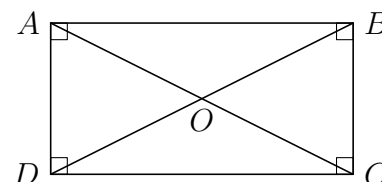
1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 12.

Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

$$\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$$



 17. Nhận xét: Hình chữ nhật cũng là một hình bình hành, cũng là một hình thang cân.

1.2 Tính chất

Tính chất 4. Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành.

Tính chất 5. Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình thang cân.

Tính chất 6. *Tính chất đặc trưng:* Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

1.3 Dấu hiệu nhận biết

- ☒ Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- ☒ Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- ☒ Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- ☒ Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

1.4 Áp dụng vào tam giác vuông

- ☒ Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.
- ☒ Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 18. Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật

Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật.

BÀI TẬP MẪU

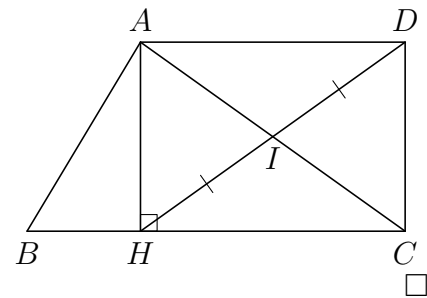
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC , đường cao AH . Gọi I là trung điểm của AC . Lấy D là điểm đối xứng với H qua I . Chứng minh tứ giác $AHCD$ là hình chữ nhật.

Lời giải.

✓ Ta có $IA = IC$ và $IH = ID$.
 $\Rightarrow AHCD$ là hình bình hành do có hai đường chéo AC và DH cắt nhau tại trung điểm I .

✓ Mà $\widehat{AHC} = 90^\circ$.

$\Rightarrow AHCD$ là hình chữ nhật.



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại C . Trên các cạnh AC , BC lấy lần lượt các điểm P , Q sao cho $AP = CQ$. Từ điểm P vẽ PM song song với BC ($M \in AB$). Chứng minh tứ giác $PCQM$ là hình chữ nhật.

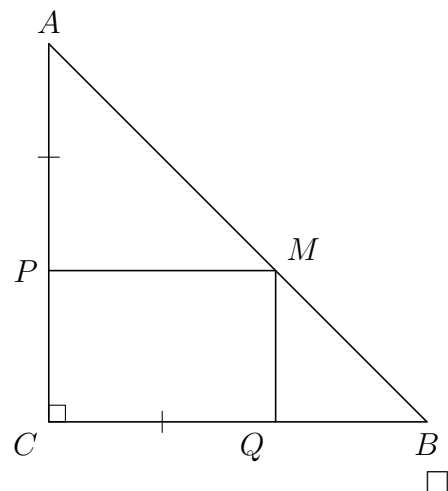
Lời giải.

Ta có: Tam giác ABC vuông cân tại C nên $\widehat{CAB} = 45^\circ$.
 $PM \parallel BC$, $AC \perp BC \Rightarrow PM \perp AC$ hay $PM \perp AP$.

Do đó tam giác APM vuông tại P và $\widehat{PAM} = 45^\circ$ nên APM là tam giác vuông cân tại $P \Rightarrow AP = PM$.

Mà $AP = CQ \Rightarrow PM = CQ$. Và $PM \parallel BC \Leftrightarrow PM \parallel CQ$.
 Do đó $PMQC$ là hình bình hành. Hình bình hành $PMQC$ có $\widehat{MPC} = 90^\circ$.

$\Rightarrow PMQC$ là hình chữ nhật.



Dạng 19. Sử dụng định lý thuận và đảo của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông

Sử dụng định lý về tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông để chứng minh các hình bằng nhau hoặc chứng minh vuông góc ...

BÀI TẬP MẪU

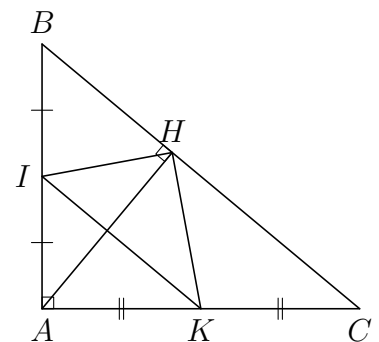
 **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC . Chứng minh:

- a) $\widehat{IHK} = 90^\circ$; b) Chu vi $\triangle IHK$ bằng nửa chu vi $\triangle ABC$.

 **Lời giải.**

- a)
 - Ta có $IH = IA$ (trung tuyến tam giác vuông).
 $\Rightarrow \triangle IAH$ cân tại I .
 $\Rightarrow \widehat{IAH} = \widehat{IHA}$.
 - Chứng minh tương tự: $\widehat{HAK} = \widehat{AHK}$.
 $\Rightarrow \widehat{IHK} = \widehat{IHA} + \widehat{AHK} = 90^\circ$.
- b)
 - IK là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow IK = \frac{1}{2}BC$. (1)
 - IH là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác BHA vuông tại H . $\Rightarrow HI = \frac{1}{2}AB$. (2)
 - HK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác AHC vuông tại H . $\Rightarrow HK = \frac{1}{2}AC$. (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow C_{\triangle IHK} = \frac{1}{2}C_{\triangle ABC}$.

☐

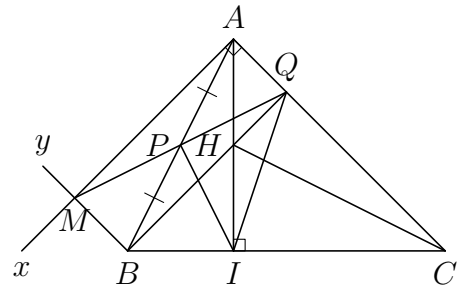
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có đường cao AI . Từ A kẻ tia Ax vuông góc với AC , từ B kẻ tia By song song với AC . Gọi M là giao điểm của tia Ax và tia By . Nối M với trung điểm P của AB , đường MP cắt AC tại Q và BQ cắt AI tại H .

- [illegible]

 Lời giải.

- a)
- Ta có: $Ax \perp AC$ và $By \parallel AC$
 $\Rightarrow Ax \perp By \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$.
 - Xét $\triangle MAQ$ và $\triangle QBM$ có:

$$\begin{cases} \widehat{MQA} = \widehat{BMQ} \\ MQ \text{ là cạnh chung} \\ \widehat{AMQ} = \widehat{BQM} (Ax \parallel QB) \end{cases}$$
 $\Rightarrow \triangle MAQ = \triangle QBM$ (g-c-g)
 $\Rightarrow \widehat{MBQ} = \widehat{MAQ} = 90^\circ$ (2 góc tương ứng)
 - Xét tứ giác $AMBQ$ có:
 $\widehat{QAM} = \widehat{AMB} = \widehat{MBQ} = 90^\circ$
 $\Rightarrow$ tứ giác $AMBQ$ là hình chữ nhật.
- b)
- Do tứ giác $AMBQ$ là hình chữ nhật. Mà P là trung điểm $AB \Rightarrow PQ = \frac{1}{2}AB$ (1)
 - Xét $\triangle AIB$ vuông tại I và có IP là đường trung tuyến.
 $\Rightarrow IP = \frac{1}{2}AB$ (2)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow QP = IP \Rightarrow \triangle PQI$ cân tại P .

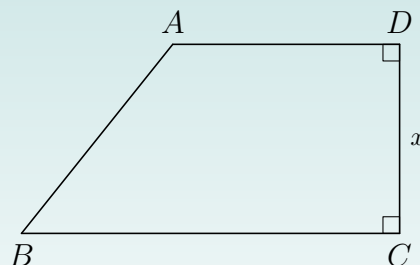


Dạng 20. Sử dụng tính chất hình chữ nhật để tính độ dài đoạn thẳng

Sử dụng tính chất vuông góc và định lý Pytago trong tam giác vuông để tính toán.

 BÀI TẬP MẪU 

 Ví dụ 1. Tìm x trong hình vẽ bên:



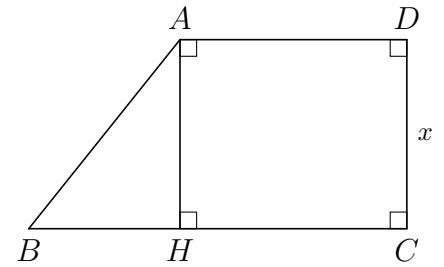
Biết $AB = 13$ cm, $BC = 15$ cm, $AD = 10$ cm.

 Lời giải.

☑ Kẻ $AH \perp BC$, ta có $ADCH$ là hình chữ nhật nên $AD = CH = 10$ cm, $DC = AH = x$.

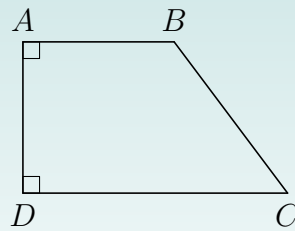
☑ Xét $\triangle AHB$ vuông tại H có $BH = BC - HC = 5$ cm.

$$\Rightarrow x = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 12 \text{ cm.}$$



□

Ví dụ 2. Tìm độ dài CD trong hình vẽ bên:



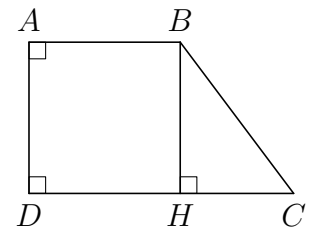
Biết $AB = 7$ cm, $AD = 8$ cm, $BC = 10$ cm.

Lời giải.

☑ Kẻ $BH \perp DC$ ta có $ABHD$ là hình chữ nhật nên $DH = AB = 7$ cm, $BH = AD = 8$ cm.

☑ Tam giác BHC vuông tại H có $HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = 6$ cm.

$$\Rightarrow DC = DH + HC = 13 \text{ cm.}$$



□

Dạng 21. Tìm điều kiện để tứ giác là hình chữ nhật

Vận dụng định nghĩa và dấu hiệu nhận biết của hình chữ nhật.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA .

1. Chứng minh $EFGH$ là hình bình hành;
2. Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật.

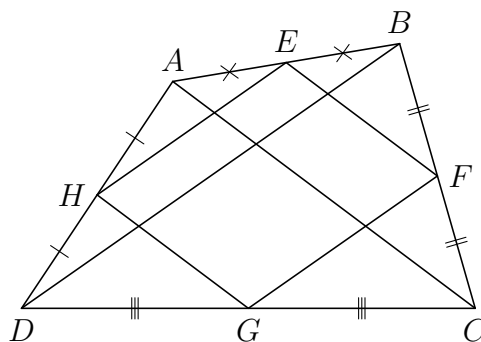
Lời giải.

- a) • Xét $\triangle ABC$ có EF là đường trung bình.
 $\Rightarrow EF \parallel AC$ và $EF = \frac{1}{2}AC$. (1)
- Xét $\triangle ADC$ có HG là đường trung bình.
 $\Rightarrow HG \parallel AC$ và $HG = \frac{1}{2}AC$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EFGH$ là hình bình hành.

- b) Để $EFGH$ là hình chữ nhật thì $\widehat{HEF} = 90^\circ \Leftrightarrow HE \perp EF$

Vì $EF \parallel AC$ và $HE \parallel BD$ nên $EF \perp HE$
 $\Leftrightarrow AC \perp BD$. $\Rightarrow$ Để $EFGH$ là hình chữ nhật thì $AC \perp BD$.



□

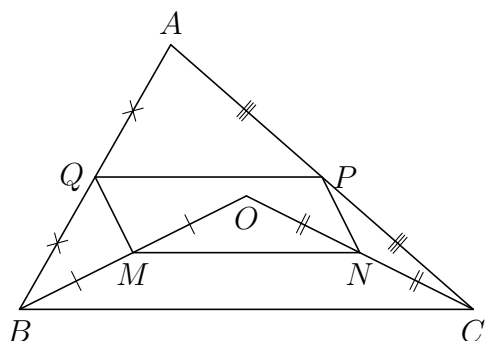
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC . Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB .

1. Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành;
2. Xác định vị trí của điểm O để tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lời giải.

- a) • Xét $\triangle OBC$ có MN là đường trung bình $\Rightarrow MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$. (1)
- Xét $\triangle ABC$ có PQ là đường trung bình $\Rightarrow PQ \parallel BC$ và $PQ = \frac{1}{2}BC$. (2)

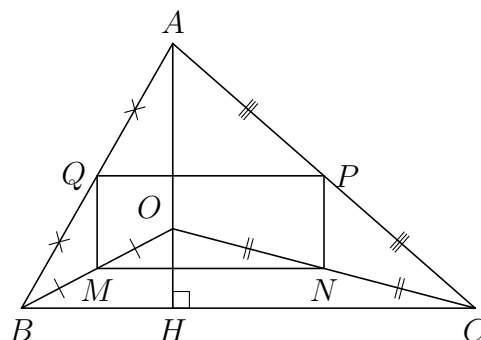
Từ (1) và (2) $\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.



- b) • Xét $\triangle CAO$ có PN là đường trung bình $\Rightarrow PN \parallel AO$. (3)
- Để $MNPQ$ là hình chữ nhật thì $PN \perp MN$. (4)

Từ (3) và (4) Để $MNPQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AO \perp MN \Rightarrow AO \perp BC$ ($MN \parallel BC$).

Nên O nằm trên đường cao kẻ từ đỉnh A .



□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh tứ giác $HEFG$ là hình chữ nhật.

Lời giải.

✓ Xét $\triangle ABD$ có EH là đường trung bình.

$$\Rightarrow EH \parallel BD \text{ và } EH = \frac{1}{2}BD. (1)$$

✓ Xét $\triangle CBD$ có FG là đường trung bình.

$$\Rightarrow FG \parallel BD \text{ và } FG = \frac{1}{2}BD. (2)$$

✓ Từ (1) và (2) $\Rightarrow EFGH$ là hình bình hành. (3)

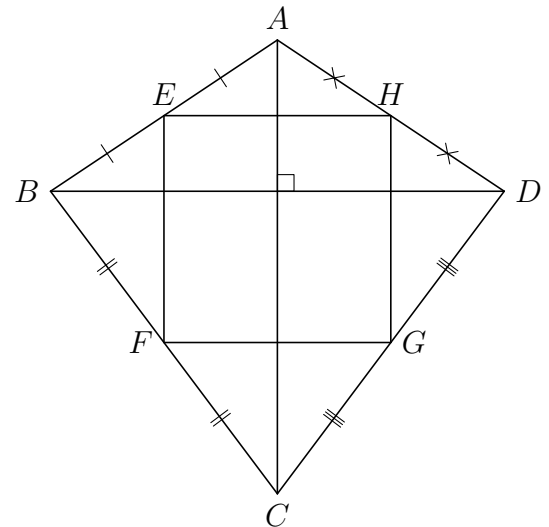
✓ Xét $\triangle BAC$ có EF là đường trung bình.

$$\Rightarrow EF \parallel AC.$$

✓ Mà $AC \perp BD$ và $BD \parallel FG$

$$\Rightarrow EF \perp FG. (4)$$

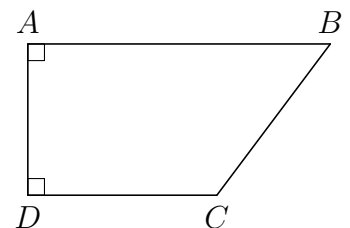
✓ Từ (3) và (4) $\Rightarrow EFGH$ là hình chữ nhật.



□

Bài 2.

Tìm độ dài CD trong hình vẽ bên, biết $AB = 9$ cm, $AD = 4$ cm, $BC = 5$ cm.

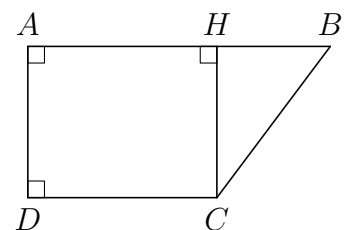


Lời giải.

✓ Kẻ $CH \perp AB$, ta có $ADCH$ là hình chữ nhật nên $AD = CH = 4$ cm, $CD = AH$.

✓ Xét $\triangle CHB$ vuông tại H có $HB = \sqrt{BC^2 - CH^2} = 3$ cm.

$$\Rightarrow CD = AH = AB - HB = 6 \text{ cm.}$$



□

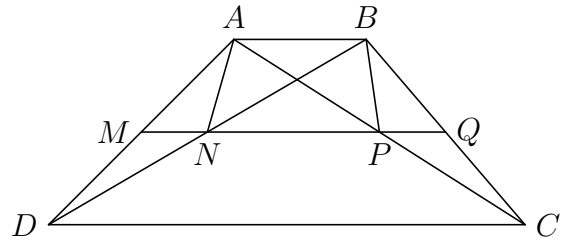
Bài 3. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD, BD, AC, BC .

1. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng;
2. Chứng minh tứ giác $ABPN$ là hình thang cân;
3. Tìm một hệ thức liên hệ giữa AB và CD để $ABPN$ là hình chữ nhật.

Lời giải.

a)

- Xét $\triangle DAB$ có MN là đường trung bình.
 $\Rightarrow MN \parallel AB$ và $MN = \frac{1}{2}AB$. (1)
- Xét $\triangle ADC$ có MP là đường trung bình.
 $\Rightarrow MP \parallel DC$ và $MP = \frac{1}{2}DC$. (2)
- Mà $AB \parallel DC$ do $ABCD$ là hình thang.
 $\Rightarrow MP \parallel AB$ (3).
- Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow M, N, P$ thẳng hàng. (I)
- Xét $\triangle CAB$ có PQ là đường trung bình.
 $\Rightarrow PQ \parallel AB$ và $PQ = \frac{1}{2}AB$. (4)
- Xét $\triangle BDC$ có QN là đường trung bình.
 $\Rightarrow NQ \parallel DC$ và $NQ = \frac{1}{2}DC$. (5)
- Mà $AB \parallel DC$ do $ABCD$ là hình thang.
 $\Rightarrow NQ \parallel AB$ (6).
- Từ (4), (5) và (6) $\Rightarrow N, P, Q$ thẳng hàng. (II)
- Từ (I) và (II) $\Rightarrow M, N, P, Q$ thẳng hàng.

b) • Ta có $MP \parallel AB \Rightarrow NP \parallel AB \Rightarrow ABPN$ là hình thang. (7)

- Xét $\triangle AMN$ và $\triangle BPQ$ có:

$$\begin{cases} MN = PQ (= \frac{1}{2}AB) \\ \widehat{AMN} = \widehat{BQP} \text{ (do } \widehat{AMN} = \widehat{ADC}, \widehat{BQP} = \widehat{BCD} \text{ mà } ABCD \text{ là hình thang cân)} \\ AM = BQ \left(= \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} \right) \end{cases}$$

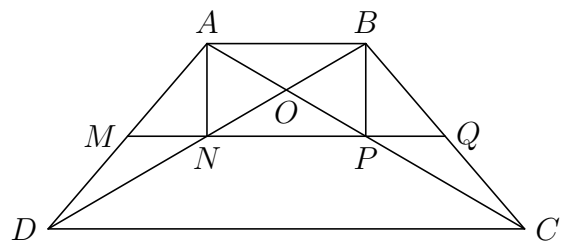
$$\Rightarrow \triangle AMN = \triangle BPQ \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow AN = BP \text{ (8)}$$

Từ (7) và (8) $\Rightarrow ABPN$ là hình thang cân.

c)

- Gọi O là giao điểm của AC và BD .
 Để $ABPN$ là hình chữ nhật ta cần $\widehat{ANP} = 90^\circ$ nên $\triangle ANP$ là tam giác vuông $AB = NP$.
 Mà ta có $MN = \frac{1}{2}AB$ và $PQ = \frac{1}{2}AB$.
 $\Rightarrow MQ = 2AB$.

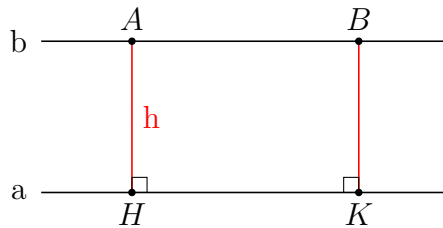


- Xét $ABCD$ có MQ là đường trung bình.
 $\Rightarrow MQ = \frac{AB + CD}{2}$.
 $\Rightarrow 2AB = \frac{AB + CD}{2} \Rightarrow AB = \frac{1}{3}CD$.



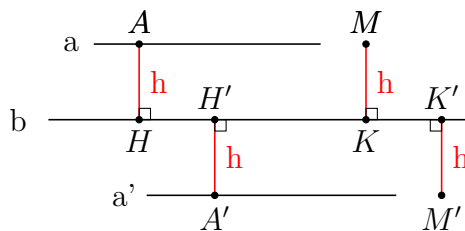
§9 Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước

Định nghĩa 13. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.



Khoảng cách giữa a và b là độ dài đoạn AH hoặc độ dài đoạn BK .

Tính chất 7. Các điểm cách đường thẳng b một khoảng bằng h nằm trên hai đường thẳng song song với b và cách b một khoảng bằng h .



18. Nhận xét: Tập hợp các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h .

1. Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.
2. Nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

1 Bài tập và các dạng toán

Dạng 22. Phát biểu cơ bản về tập hợp điểm

Vận dụng các tính chất để chỉ ra hình dạng của tập hợp các điểm cùng thỏa mãn một điều kiện nào đó.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. 1. Cho đường thẳng d cố định và điểm A thay đổi cách d một khoảng bằng 2 cm. Tìm tập hợp điểm A .

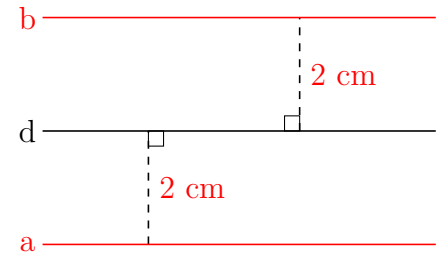
2. Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC cố định. Tìm tập hợp đỉnh A .

3. Tìm tập hợp các điểm nằm trong góc xOy và cách đều hai cạnh của góc.

Lời giải.

1.

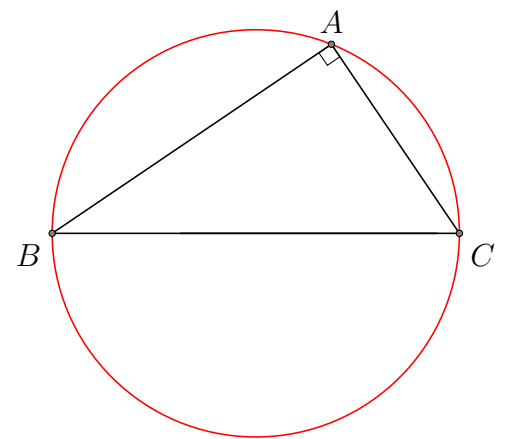
Tập hợp điểm A là hai đường thẳng song song với d và cách d một khoảng bằng 2 cm.



2.

Theo giả thiết: $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên là góc chắn nửa đường tròn đường kính BC .

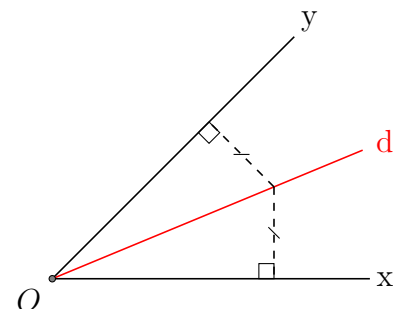
Vậy tập hợp điểm A là đường tròn đường kính BC .



3.

Theo định lý: Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

Vậy tập hợp điểm A cần tìm là tia phân giác của góc xOy .



□

Ví dụ 2. 1. Tìm tập hợp các điểm cách điểm A cố định một khoảng bằng 3 cm.

2. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng AB cố định.

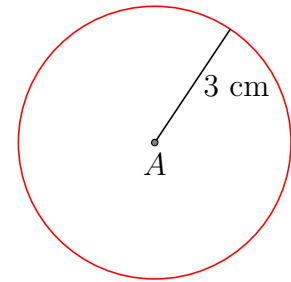
3. Tìm tập hợp O là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh BC cố định.

Lời giải.

1.

Theo định nghĩa: Đường tròn là hình gồm các điểm cách một điểm cố định, một khoảng không đổi.

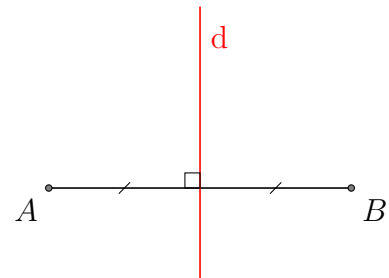
Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường tròn tâm A , bán kính bằng 3 cm.



2.

Theo định lí: Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

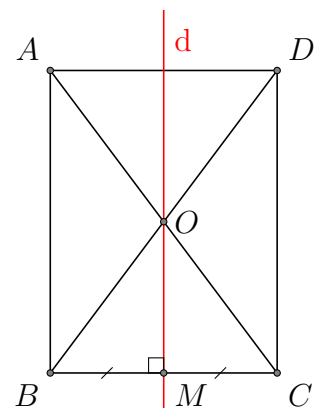
Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường trung trực của đoạn thẳng AB .



3.

Vì O là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật nên $OB = OC$.

Vậy tập hợp điểm O là đường trung trực của đoạn thẳng BC và không trùng với trung điểm của BC .



□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC . Lấy M là một điểm bất kì thuộc cạnh BC . Từ M kẻ các đường thẳng lần lượt song song với AB , AC cắt AB , AC theo thứ tự tại E , F . Gọi I là trung điểm của EF . Điểm I di chuyển trên đường nào nếu M di chuyển trên BC và M không trùng với B , C .

Lời giải.

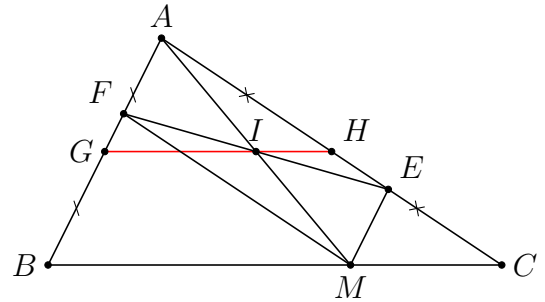
Tứ giác $AEMF$ có $AF \parallel EM$, $AE \parallel FM$ nên là hình bình hành.

Khi đó giao điểm I của hai đường chéo là trung điểm của AM .

Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AB, AC thì GH là đường trung bình của $\triangle ABC$.

Do đó I nằm trên đoạn thẳng GH .

Vậy khi M di chuyển trên cạnh BC thì I di chuyển trên đoạn GH và vì M không trùng với B, C nên I không trùng với G, H .



□

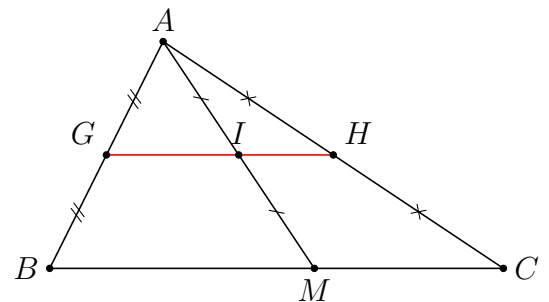
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trên cạnh BC . Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì trung điểm I của đoạn thẳng AM di chuyển trên đường nào?

Lời giải.

Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AB, AC thì GH là đường trung bình của $\triangle ABC$.

Do đó GH đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AM .

Vậy khi M di chuyển trên cạnh BC thì I di chuyển trên đoạn GH (nếu $M \equiv B$ thì $I \equiv G$, nếu $M \equiv C$ thì $I \equiv H$).



□

Dạng 23. Sử dụng tập hợp các điểm để chứng minh các quan hệ hình học

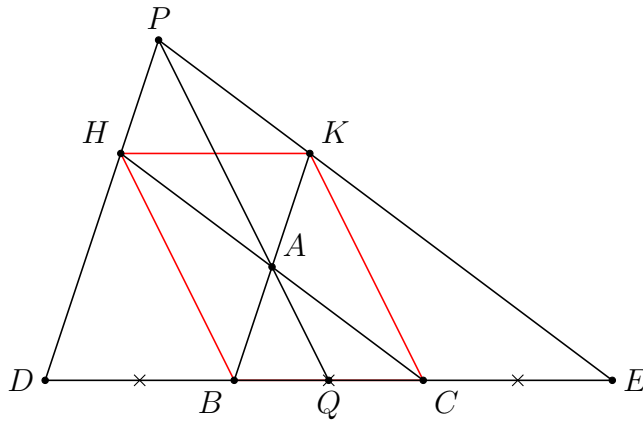
Vận dụng các nhận xét về tập hợp điểm để chứng minh các quan hệ bằng nhau, song song, vuông góc,...

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = BC = CE$. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC ở H , qua E kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB ở K , DH cắt EK ở P . Tia PA cắt BC ở Q . Chứng minh:

- a) Tứ giác $BHKC$ là hình bình hành; b) Q là trung điểm của BC .

Lời giải.



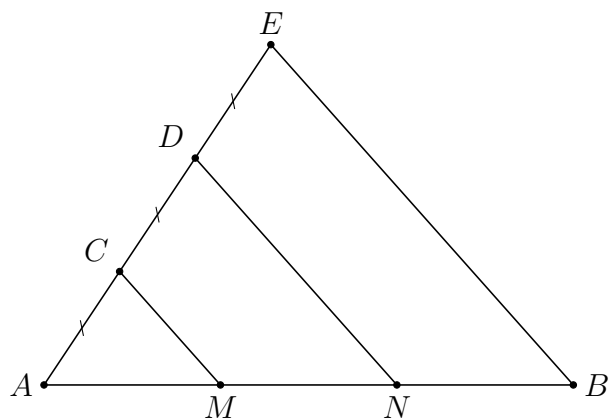
1. $\triangle CDH$ có $AB \parallel DH$ và B là trung điểm của CD nên A là trung điểm của CH .
 $\triangle BKE$ có $AC \parallel KE$ và C là trung điểm của BE nên A là trung điểm của BK .
 Tứ giác $BHCK$ có hai đường chéo CH và BK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.
2. Vì $AB \parallel PD$ nên $\frac{AQ}{AC} = \frac{QB}{BD}$ và $AC \parallel PE$ nên $\frac{AQ}{AC} = \frac{QC}{CE}$.
 Suy ra $\frac{QB}{BD} = \frac{QC}{CE}$ mà $BD = CE$ nên $QB = QC$, hay Q là trung điểm của BC .

□

Ví dụ 2. Cho đoạn thẳng AB . Kẻ tia Ax bất kì, lấy các điểm C, D, E sao cho $AC = CD = DE$. Qua C và D kẻ các đường thẳng song song với BE . Chứng minh đoạn thẳng AB bị chia thành ba phần bằng nhau.

Lời giải.

Vì $CM \parallel DN \parallel BE$ và $AC = CD = DE$.
 Nên CM, DN, BE song song và cách đều nhau.
 Do đó $AM = MN = NB$.
 Hay AB bị chia thành ba phần bằng nhau.



□

2

Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Hỏi điểm G di chuyển trên đường nào biết $AH = 3$ cm.

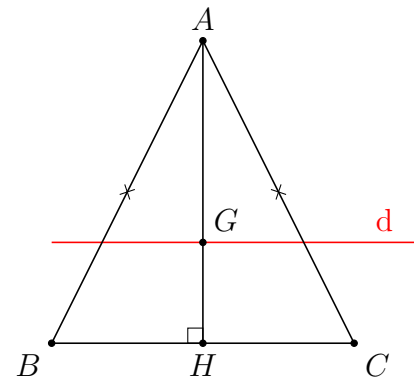
Giáo viên:

 Lời giải.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung tuyến.

Và G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên $GH = \frac{1}{3}AH = 1 \text{ cm}$.

Vậy G di chuyển trên đường thẳng song song với BC và cách BC một khoảng là 1 cm .



□

 **Bài 2.** Cho tam giác ABC cân tại A . Các điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên cạnh AB, AC sao cho $AD = AE$. Trung điểm I của đoạn thẳng DE di chuyển trên đường nào?

 Lời giải.

Vì $AD = AE$ nên $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, suy ra $DE \parallel BC$.

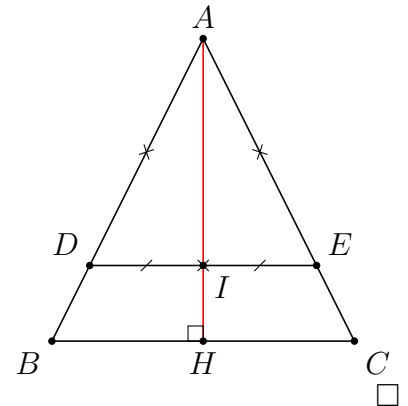
Dựng đường cao AH của $\triangle ABC$, khi đó $AH \perp DE$.

Mà $\triangle ADE$ cân tại A (do $AD = AE$).

Nên đường trung tuyến AI cũng là đường cao, nghĩa là $AI \perp DE$.

Do đó I nằm trên đoạn thẳng AH .

Vậy khi D, E lần lượt di chuyển trên cạnh AB, AC thì I di chuyển trên đoạn AH (nếu $D \equiv B$ và $E \equiv C$ thì $I \equiv H$, nếu $D \equiv E \equiv A$ thì $I \equiv A$).



□

 **Bài 3.** Cho đoạn thẳng AB , điểm M chuyển động trên đoạn thẳng AB . Vẽ về cùng một phía của nửa mặt phẳng bờ AB các tam giác đều AMC và BMD . Trung điểm I của đoạn CD di chuyển trên đường nào?

 Lời giải.

Gọi E là giao điểm của AC và BD .

Tứ giác $CMDE$ có $CE \parallel DM$ và $CM \parallel DE$.

Nên $CMDE$ là hình bình hành.

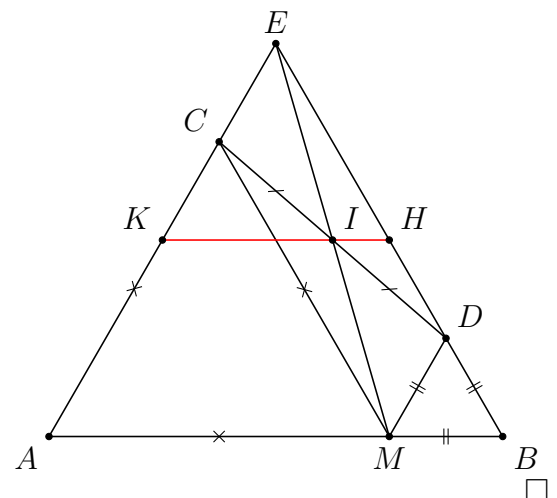
Khi đó trung điểm I của CD cũng là trung điểm của EM .

Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AE, BE .

Lúc này, KH là đường trung bình của $\triangle ABE$.

Nên I nằm trên KH .

Vậy khi M di chuyển trên đoạn AB thì I di chuyển trên đoạn KH (nếu $M \equiv A$ thì $I \equiv K$, nếu $M \equiv B$ thì $I \equiv H$).

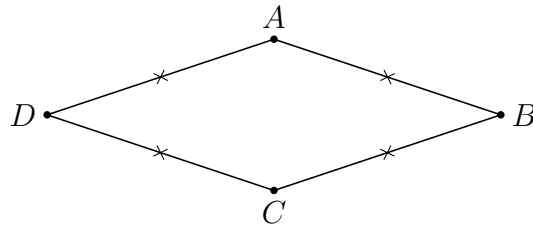


□

§10 Hình thoi

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 14. Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.



Tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow AB = BC = CD = DA$.

 **19.** Nhận xét: Hình thoi là một hình bình hành đặc biệt.

Tính chất 8.

1. Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.
2. *Tính chất đặc trưng:* Trong hình thoi:
 - ☒ Hai đường chéo vuông góc với nhau;
 - ☒ Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi.

Hệ quả 1.

1. Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi;
2. Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi;
3. Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi;
4. Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc ở đỉnh là hình thoi.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 24. Chứng minh tứ giác là hình thoi

Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình thoi.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$ có $AC = BD$, gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA, DA . Chứng minh rằng $EFGH$ là hình thoi.

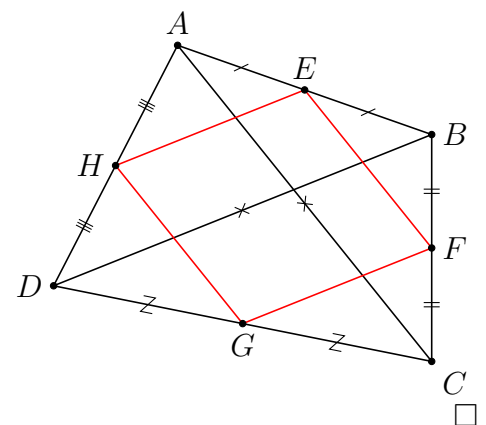
Lời giải.

$\triangle ABD$ có EH là đường trung bình nên $EH = \frac{BD}{2}$.

Hoàn toàn tương tự, xét các tam giác BCD, ACD, ABC , ta được

$$GF = \frac{BD}{2}; \quad EF = \frac{AC}{2}; \quad GH = \frac{AC}{2}.$$

Lại có $AC = BD$ nên $EH = EF = GF = GH$.
Do đó $EFGH$ là hình thoi.



Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có AC vuông góc với AD . Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD . Chứng minh tứ giác $AECF$ là hình thoi.

Lời giải.

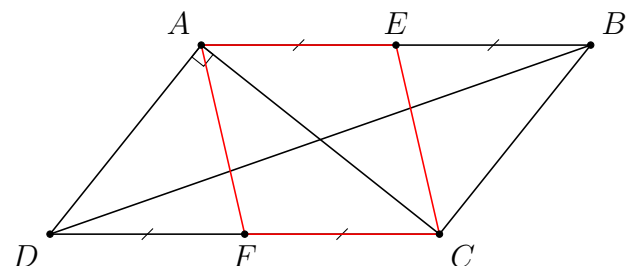
Hình bình hành $ABCD$ có $AD \parallel BC$ và $AD \perp AC$.

Suy ra $BC \perp AC$.

$\triangle ACD$ vuông tại A có AF là đường trung tuyến, nên $AF = CF = \frac{CD}{2}$.

$\triangle ABC$ vuông tại C có CE là đường trung tuyến, nên $CE = AE = \frac{AB}{2}$.

Lại có $AB = CD$ (do $ABCD$ là hình bình hành),
Vậy $AF = CF = CE = AE$, hay $AECF$ là hình thoi.



Dạng 25. Vận dụng tính chất của hình thoi để tính toán và chứng minh các tính chất hình học

Vận dụng định nghĩa và các tính chất về cạnh, góc và đường chéo của hình thoi.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O . Độ dài $AC = 8$ cm, $BD = 10$ cm. Tính độ dài cạnh hình thoi.
ĐS: $\sqrt{41}$ cm

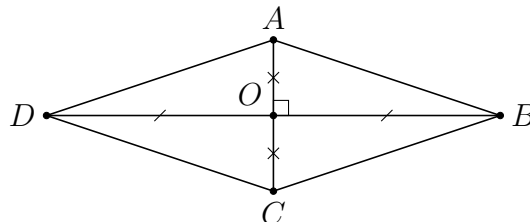
Lời giải.

Theo tính chất của hình thoi:

$$OA = \frac{AC}{2} = 4 \text{ cm và } OB = \frac{BD}{2} = 5 \text{ cm.}$$

Và $\triangle OAB$ vuông tại O nên áp dụng Định lý Pytago ta có

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{41} \text{ cm.}$$



□

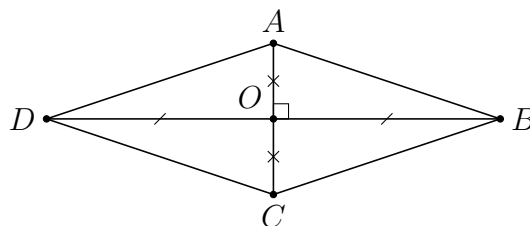
Ví dụ 2. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O . Độ dài $OA = 8$ cm, $OB = 6$ cm. Tính độ dài cạnh hình thoi.
ĐS: 10 cm

Lời giải.

$ABCD$ là hình thoi nên $\triangle OAB$ vuông tại O .

Áp dụng Định lý Pytago ta có

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 10 \text{ cm.}$$



□

Ví dụ 3. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{B} = 60^\circ$. Kẻ $AE \perp DC$, $AF \perp BC$. Chứng minh:

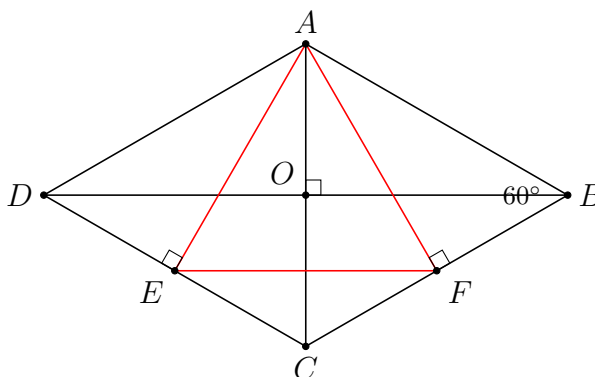
a) $AE = AF$;

b) Tam giác AEF đều.

Lời giải.

1. Vì AC là phân giác của $\widehat{BCD}$ (do $ABCD$ là hình thoi)
 nên A cách đều hai cạnh BC và CD .
 Hay $AE = AF$.

2. Hình thoi $ABCD$ có $AB = BC$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$ đều.
 Do đó đường cao AF cũng là đường phân giác, suy ra $\widehat{CAF} = 30^\circ$.
 Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được $\widehat{CAE} = 30^\circ$.
 Suy ra $\widehat{EAF} = 60^\circ$, vậy $\triangle AEF$ đều.

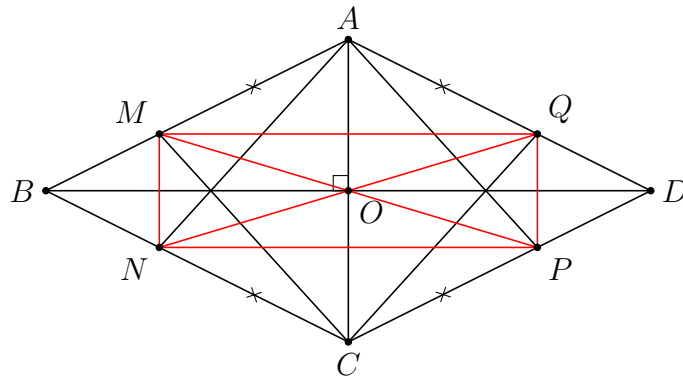


□

Ví dụ 4. Cho hình thoi $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên cạnh AB , BC , CD , DA lấy theo thứ tự các điểm M , N , P , Q sao cho $AM = CN = CP = AQ$. Chứng minh:

- a) M , O , P thẳng hàng và N , O , Q thẳng hàng; b) Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lời giải.



- Tứ giác $AMCP$ có $AM = CP$ và $AM \parallel CP$ (hình thoi $ABCD$) nên là hình bình hành. Mà O là trung điểm AC (hình thoi $ABCD$) nên O là trung điểm MP .
Tứ giác $ANCQ$ có $AQ = CN$ và $AQ \parallel CN$ (hình thoi $ABCD$) nên là hình bình hành. Mà O là trung điểm BD (vì hình thoi $ABCD$) nên O là trung điểm NQ .
Vậy M , O , P thẳng hàng và N , O , Q thẳng hàng.
- Tứ giác $MNPQ$ có MP cắt NQ tại trung điểm O của mỗi đường nên là hình bình hành. Hình thoi $ABCD$ có AC là phân giác của $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$, suy ra $OM = OQ$ và $ON = OP$. Do đó $OM + OP = ON + OQ$ hay $MP = NQ$, hay $MNPQ$ là hình chữ nhật.

□

Dạng 26. Tìm điều kiện để tứ giác là hình thoi

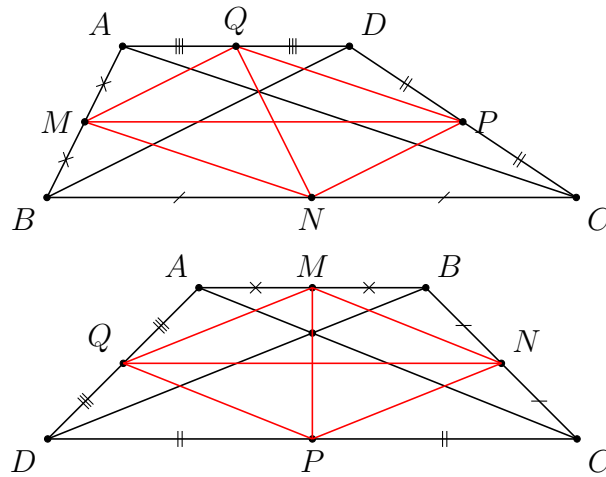
Vận dụng định nghĩa, các tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình thoi.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Chứng minh rằng, trong hình thang:

- Chứng minh: trong hình thang, trung điểm của hai đường chéo và hai cạnh đáy là bốn đỉnh của một hình bình hành;
- Hình thang phải có thêm điều kiện gì để trung điểm của hai đường chéo và hai cạnh đáy là bốn đỉnh của hình thoi.

Lời giải.



- Giả sử $ABCD$ là hình thang và M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .
 $\triangle ABD$ có MQ là đường trung bình nên $MQ \parallel BD$ và $MQ = \frac{BD}{2}$.
 $\triangle BCD$ có PN là đường trung bình nên $PN \parallel BD$ và $PN = \frac{BD}{2}$.
 Suy ra $MQ \parallel PN$ và $MQ = PN$, do đó $MNPQ$ là hình bình hành.
- $\triangle ACD$ có PQ là đường trung bình nên $PQ = \frac{AC}{2}$.
 Để hình bình hành $MNPQ$ là hình thoi thì $MQ = MN$, nghĩa là $BD = AC$.
 Khi đó hình thang $ABCD$ là hình thang cân.

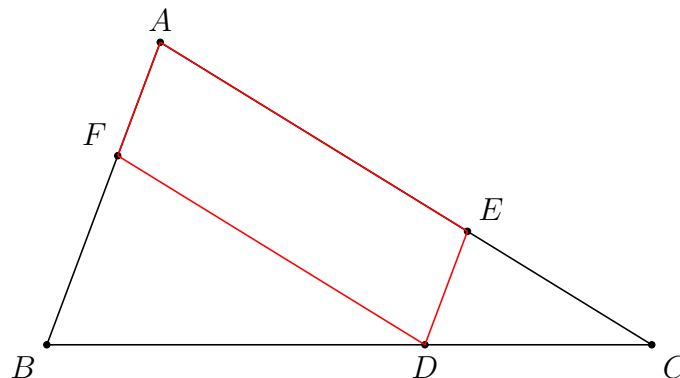
□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , qua điểm D thuộc cạnh BC , kẻ các đường thẳng song song với AB và AC , cắt AC và AB theo lần lượt ở E và F .

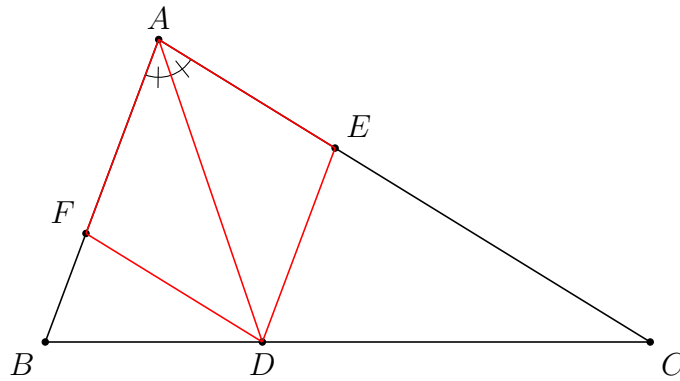
- Tứ giác $AEDF$ là hình gì?
- Điểm D ở vị trí nào trên BC thì $ADEF$ là hình thoi.

Lời giải.

- Tứ giác $AEDF$ có $AF \parallel DE$ và $AE \parallel DF$ nên là hình bình hành.



- Để hình bình hành $AEDF$ là hình thoi thì AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$.



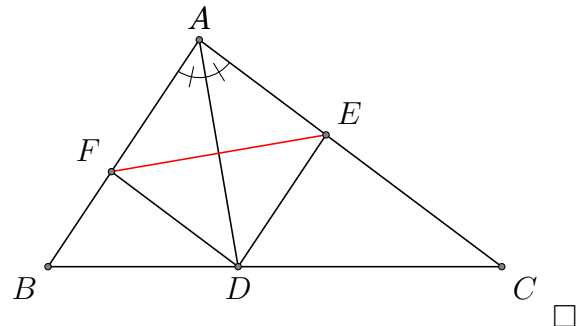
□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC , phân giác AD . Qua D kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại E , qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại F . Chứng minh EF là phân giác của $\widehat{AED}$.

Lời giải.

Tứ giác $AEDF$ có $AF \parallel DE$ và $AE \parallel DF$
nên là hình bình hành.
Mặt khác đường chéo AD là phân giác của $\widehat{BAC}$
nên $AEDF$ là hình thoi.
Do đó đường chéo EF là phân giác của $\widehat{AED}$.



□

Bài 2. 1. Cạnh của một hình thoi bằng 25, một đường chéo bằng 14. Tính độ dài đường chéo còn lại.

ĐS: 48 cm

2. Cho hình thoi $DEFG$ như hình vẽ bên. Tính x .

ĐS: $x = 55^\circ$

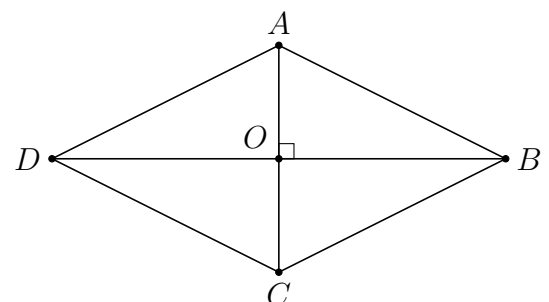
Lời giải.

1.

Hình thoi $ABCD$ có $AC = 14$ và $AB = 25$.
Áp dụng các tính chất của hình thoi, ta có

$$OA = \frac{AC}{2} = 7; \quad OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = 24.$$

Suy ra $BD = 2OB = 48$.

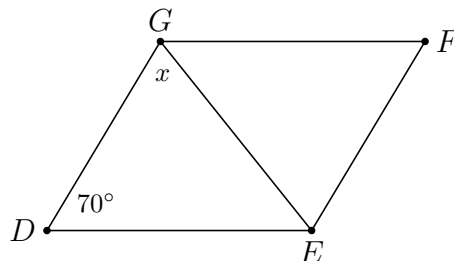


2.

Vì $DEFG$ là hình thoi và $\widehat{D} = 70^\circ$
nên $\widehat{DGF} = 180^\circ - \widehat{D} = 110^\circ$.

Hơn nữa, GE là phân giác của $\widehat{DEF}$ (hình thoi $DEFG$)

do đó $x = \widehat{DGE} = \frac{1}{2}\widehat{DEF} = 55^\circ$.



□

Bài 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh:

a) $EFGH$ là hình thoi.

b) AC, BD, EG, FH đồng quy.

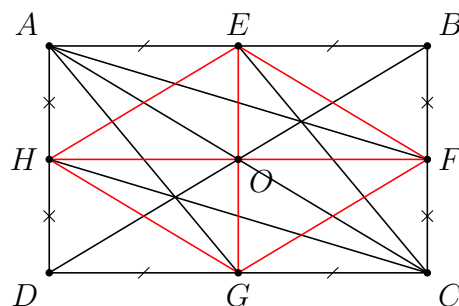
Lời giải.

1.

$\triangle ABC$ có EF là đường trung bình nên $EF \parallel AC$
và $EF = \frac{AC}{2}$.

$\triangle ACD$ có GH là đường trung bình nên $GH \parallel AC$
và $GH = \frac{AC}{2}$.

Suy ra $EF \parallel GH$ và $EF = GH$. Do đó $EFGH$ là hình bình hành.



Hơn nữa, $\triangle ABD$ có EH là đường trung bình nên $EH = \frac{BD}{2}$.

Mà $AC = BD$ (hình chữ nhật $ABCD$) nên $EF = EH$, suy ra $EFGH$ là hình thoi.

2. Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AE \parallel CG$ và $AE = CG$.

Do đó tứ giác $AECG$ là hình bình hành.

Mà O là trung điểm của đường chéo AC (trong hình chữ nhật $ABCD$).

Nên O cũng là trung điểm của đường chéo EG .

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được $AHCF$ là hình bình hành.

Và suy ra O cũng là trung điểm của đường chéo HF .

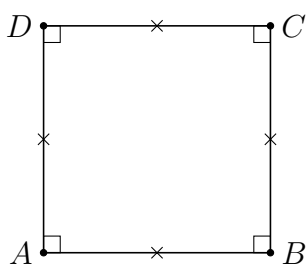
Vậy AC, BD, EG, FH đồng quy tại O .

□

§11 Hình vuông

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 15. Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.



Tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$

! 20. Nhận xét:

1. Hình vuông là một hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau.
2. Hình vuông là hình thoi có bốn góc bằng nhau.

Như vậy, hình vuông vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi.

Tính chất 9.

1. Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.
2. *Tính chất đặc trưng:* Trong hình vuông hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường.

Hệ quả 2.

1. Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
2. Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
3. Hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác của một góc là hình vuông.
4. Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
5. Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

! 21. Nhận xét: Một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 27. Chứng minh tứ giác là hình vuông

Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình vuông.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

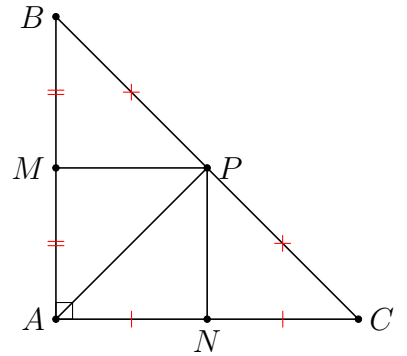
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi M, N là trung điểm AB, AC . Qua M kẻ đường thẳng song song AC và cắt BC tại P . Chứng minh rằng $AMPN$ là hình vuông.

Lời giải.

Ta có M là trung điểm của AB , $MP \parallel AC \Rightarrow MP$ là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow P$ là trung điểm của BC .

Mà N là trung điểm của $AC \Rightarrow NP$ là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow NP \parallel AB \Rightarrow AMPN$ là hình bình hành.

Mà $\widehat{MAN} = 90^\circ \Rightarrow AMPN$ là hình chữ nhật. Mà $AM = \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2} = AN \Rightarrow AMPN$ là hình vuông.

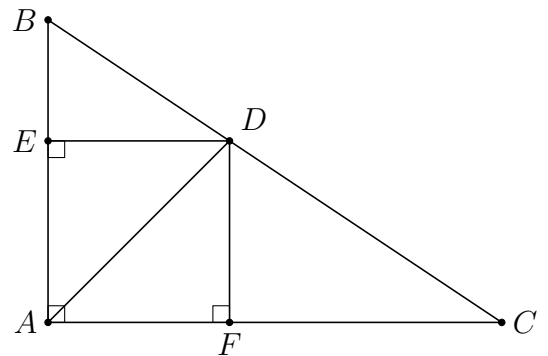


Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi AD là đường phân giác của góc A (D thuộc BC), từ D kẻ DE và DF lần lượt vuông góc với AB và AC . Chứng minh rằng $AEDF$ là hình vuông.

Lời giải.

Xét tứ giác $AEDF$ có $\widehat{EAF} = \widehat{AFD} = \widehat{AED} = 90^\circ$ nên tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật.

Mà AD là đường chéo đồng thời là đường phân giác nên tứ giác $AEDF$ là hình vuông.



Dạng 28. Vận dụng tính chất của hình vuông để chứng minh các tính chất hình học

Sử dụng định nghĩa và các tính chất về cạnh, góc và đường chéo của hình vuông.

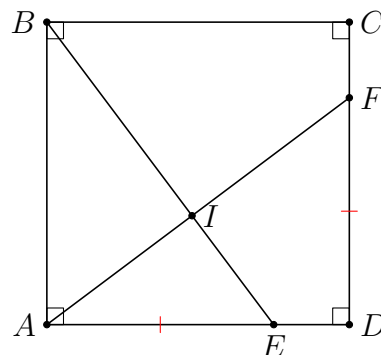
❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AD, DC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AE = DF$. Chứng minh:

- a) Các tam giác ADF và BAE bằng nhau. b) $BE \perp AF$.

Lời giải.

1. Có $\triangle ADF = \triangle BAE$ (c.g.c)
2. Gọi I là giao điểm của AF và BE . Ta có $\widehat{AEI} = \widehat{DFA}$.
 Có $\widehat{EAI} + \widehat{AEI} = \widehat{EAI} + \widehat{DFA} = 90^\circ \Rightarrow BE \perp AF$.



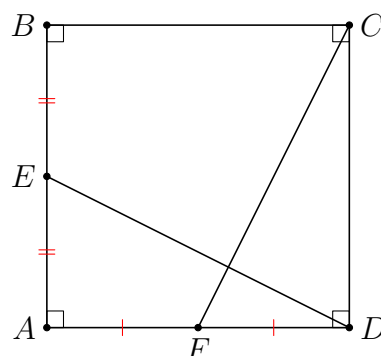
□

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AD . Chứng minh:

- a) $DE = CF$.
- b) $DE \perp CF$.

Lời giải.

1. Có $\triangle AED = \triangle CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow DE = DF$.
2. Do $\widehat{ADE} = \widehat{DCF}$ (góc tương ứng), ta có:
 $\widehat{ADE} + \widehat{EDC} = \widehat{CDF} = \widehat{EDC} + \widehat{DCF} = 90^\circ$
 $\Rightarrow DE \perp CF$.



□

Dạng 29. Tìm điều kiện để tứ giác là hình vuông

Sử dụng định nghĩa, các tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình vuông.

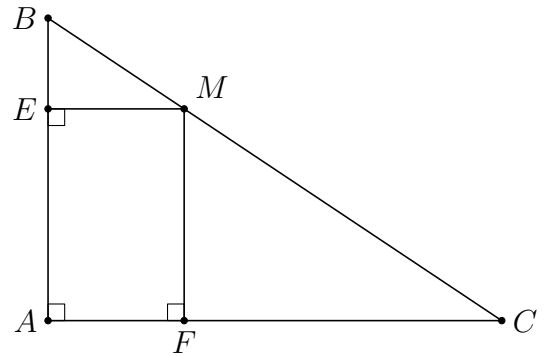
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , M là một điểm thuộc cạnh BC . Qua M vẽ các đường thẳng song song với AB và AC , chúng cắt các cạnh AC, AB theo thứ tự tại E và F .

1. Tứ giác $AFME$ là hình gì?
2. Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác $AFME$ là hình vuông.

Lời giải.

1. Tứ giác $AFME$ có $\widehat{EAF} = \widehat{AEM} = \widehat{MFA} = 90^\circ$ nên tứ giác $AFME$ là hình chữ nhật.
2. Để tứ giác $AFME$ là hình vuông thì đường chéo AM trở thành đường phân giác của góc $\widehat{BAC} \Rightarrow M$ là giao điểm của đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ với BC .



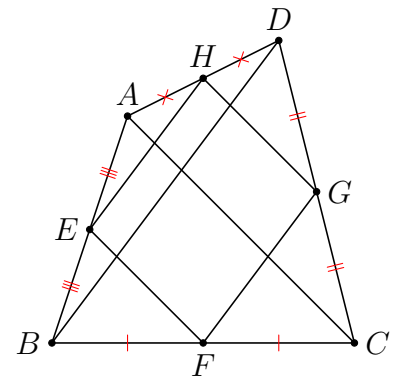
□

Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để tứ giác $EFGH$ là:

- a) Hình chữ nhật. b) Hình thoi. c) Hình vuông.

Lời giải.

1. Dễ dàng chứng minh được tứ giác $EFGH$ là hình bình hành vì có các cặp cạnh đối song song với nhau.
Để $EFGH$ là hình chữ nhật thì EF phải vuông góc với $FG \Rightarrow$ Hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau.
2. Để $EFGH$ là hình thoi thì $EF = FG \Rightarrow ABCD$ có $AC = BD$.
3. Để $EFGH$ là hình vuông thì phải có EF phải vuông góc với FG và $EF = FG \Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc và bằng nhau.



□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$, trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ$. Chứng minh $MNPQ$ là hình vuông.

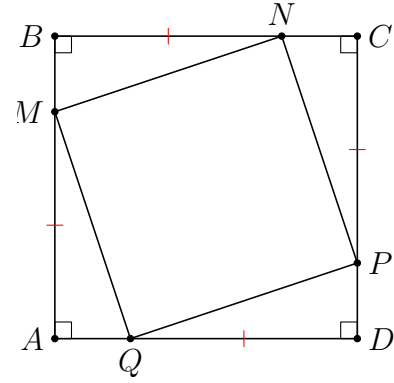
Lời giải.

Bốn tam giác AQM , BNM , CPN , DQP bằng nhau $\Rightarrow QM = MN = NP = PQ \Rightarrow$ Tứ giác $QMNP$ là hình thoi.

Có $\triangle MBN = \triangle NCP$ nên $\widehat{BMN} = \widehat{CNP}$.

Mặt khác, $\widehat{BNM} + \widehat{BMN} = 90^\circ = \widehat{BNM} + \widehat{CNP} \Rightarrow \widehat{MNP} = 90^\circ$.

Vậy hình thoi $QMNP$ có một góc vuông nên tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.



□

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm M bất kì trên cạnh DC . Tia phân giác $\widehat{MAD}$ cắt CD tại I . Kẻ IH vuông góc với AM tại H . Tia IH cắt BC tại K . Chứng minh:

a) $\triangle ABK = \triangle AHK$.

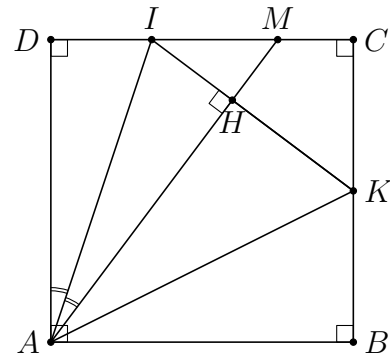
b) $\widehat{IAK} = 45^\circ$.

Lời giải.

1. Dễ dàng chứng minh $\triangle ADI = \triangle AHI \Rightarrow AD = AH$. Suy ra $\triangle ABK = \triangle AHK$.

2. Ta có $\widehat{IAH} = \frac{1}{2}\widehat{DAH}$; $\widehat{HAK} = \frac{1}{2}\widehat{HAB}$.

Mà $\widehat{DAH} + \widehat{HAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IAH} + \widehat{HAK} = \widehat{IAK} = 45^\circ$.



□

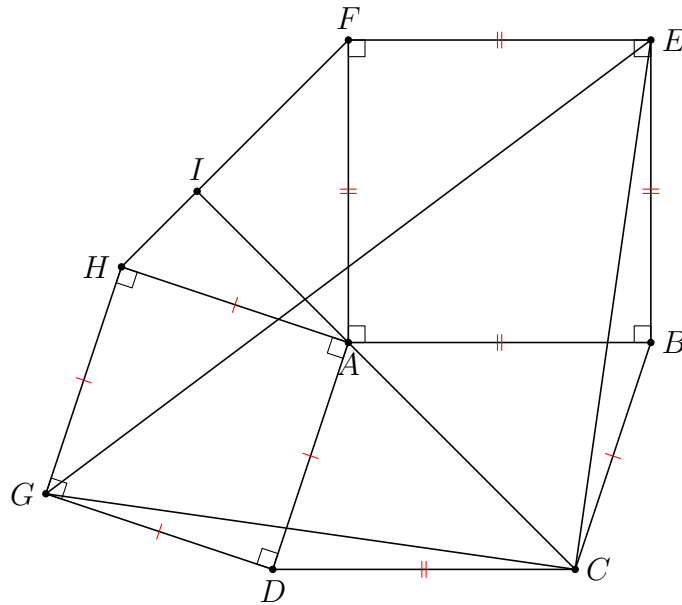
Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ về phía ngoài hình bình hành, hai hình vuông $ABEF$ và $ADGH$. Chứng minh:

a) $AC = FH$.

b) $AC \perp FH$.

c) CEG là tam giác vuông cân.

Lời giải.



1. Dễ dàng chứng minh $\triangle AFH = \triangle BAC$ (c.g.c) $\Rightarrow FH = AC$.
2. Gọi giao điểm của AC và FH là I .
Do $\widehat{AFH} = \widehat{BAC}$, ta có $\widehat{IAF} + \widehat{AFH} = \widehat{IAF} + \widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp FH$.
3. Chứng minh được $\triangle GCD = \triangle CEB$ (c.g.c) $\Rightarrow GC = CE$.
Ta có $180^\circ = \widehat{ECB} + \widehat{CBE} + \widehat{BEC} = \widehat{ECB} + \widehat{CBA} + 90^\circ + \widehat{BEC}$
 $\Rightarrow \widehat{ECB} + \widehat{CBA} + \widehat{BEC} = 90^\circ$, mà $\widehat{BEC} = \widehat{GCD} \Rightarrow \widehat{ECB} + \widehat{CBA} + \widehat{GCD} = 90^\circ$ (1).
 Mặt khác, do $ABCD$ là hình bình hành nên $\widehat{DCB} + \widehat{CBA} = 180^\circ$. Hay $\widehat{ECB} + \widehat{GCE} + \widehat{GCD} + \widehat{CBA} = 180^\circ$ (2).
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{GCE} = 90^\circ \Rightarrow \triangle CEG$ vuông cân.

□

§12 Ôn tập chương 1

1 Bài tập và các dạng toán

2 Tóm tắt lý thuyết

Xem phần *Tóm tắt lý thuyết* từ Bài 1 đến Bài 11.

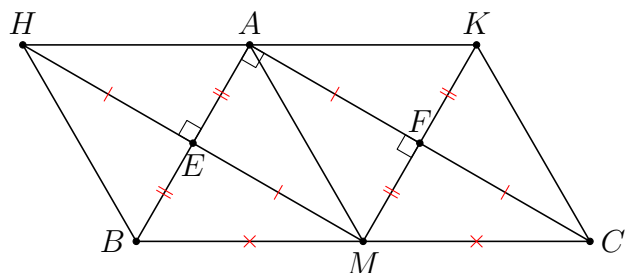
3 Bài tập luyện tập

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường trung tuyến AM . Gọi H là điểm đối xứng với M qua AB , E là giao điểm của MH và AB . Gọi K là điểm đối xứng với M qua AC , F là giao điểm của MK và AC .

1. Các tứ giác $AEMF$, $AMBH$, $AMCK$ là hình gì? Vì sao?
2. Chứng minh rằng H đối xứng với K qua A .
3. Tam giác vuông ABC cần thêm điều kiện gì thì tứ giác $AEMF$ là hình vuông?

Lời giải.

1. Tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật. Các tứ giác $AMBH$, $AMCK$ là hình thoi.
2. Theo a) suy ra $HA \parallel BC$, $AK \parallel MC \Rightarrow H, A, K$ thẳng hàng. Lại có $AH = AM = AK \Rightarrow H, K$ đối xứng với nhau qua A .
3. Để hình chữ nhật $AEMF$ là hình vuông thì cần thêm điều kiện $AE = EM \Rightarrow AB = AC$. Vậy tam giác ABC vuông cân tại A .



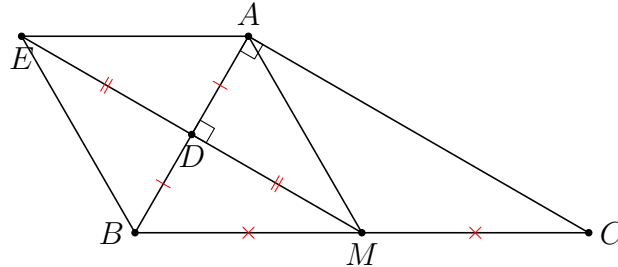
□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường trung tuyến AM . Gọi D là trung điểm của AB , E là điểm đối xứng của M qua D .

1. Chứng minh E đối xứng với M qua đường thẳng AB .
2. Các tứ giác $AEMC$, $AEBM$ là hình gì? Vì sao?

3. Tam giác vuông ABC cần thêm điều kiện gì thì tứ giác $AEBM$ là hình vuông?

 **Lời giải.**



- Vì $MD \parallel AC$ nên $MD \perp AB \Rightarrow E$ đối xứng với M qua đường thẳng AB .
- Có AB và EM cắt nhau tại trung điểm D của mỗi đường nên tứ giác $AEBM$ là hình bình hành. $\Rightarrow AE = BM = MC$. Vậy tứ giác $AEMC$ cũng là hình bình hành vì có $AE \parallel BM$ hay $AE \parallel MC$ và $AE = MC$.
- Hình bình hành $AEBM$ có hai đường chéo vuông góc với nhau nên là hình thoi. Để hình thoi $AEBM$ là hình vuông thì cần điều kiện $AB = EM$. Vì tứ giác $AEMC$ là hình bình hành nên $EM = AC$. Vậy nếu $AB = EM$ suy ra $AB = AC$. Lúc này tam giác ABC cân tại A . Vậy để tứ giác $AEBM$ là hình vuông thì tam giác vuông ABC cần thêm điều kiện $AB = AC$ hay tam giác ABC vuông cân tại A .

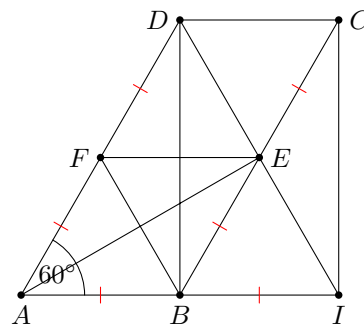
□

 **Bài 3.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $BC = 2AB$, $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AD . Vẽ I đối xứng với A qua B .

- Tứ giác $ABEF$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh tứ giác $AIEF$ là hình thang cân.
- Chứng minh $BICD$ là hình chữ nhật.
- Tính góc $\widehat{AED}$.

 **Lời giải.**

- Vì $AB = EF = BF = AF = \frac{BC}{2} \Rightarrow$ Tứ giác $ABEF$ là hình thoi.
- Dễ thấy $EF \parallel AI$, $IB = BE$; $\widehat{IBE} = \widehat{IAD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle BIE$ đều. Do đó, $IE = AF$ suy ra $AIEF$ là hình thang cân.
- $BEDF$ là hình thoi. Suy ra BD là đường phân giác trong của $\triangle ADI$.
Có $BI = AB = DC$ và $AB \parallel DC$ hay $BI \parallel DC$. Vậy tứ giác $BICD$ là hình bình hành vì có cặp cạnh đối song song và bằng nhau.
Thấy rằng BD vừa là đường trung tuyến, phân giác của $\triangle ADI$. Suy ra $BD \perp BI$ hay $\widehat{DBI} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $BICD$ là hình chữ nhật vì là hình bình hành có một góc vuông.
- Vì $BICD$ là hình chữ nhật nên E là trung điểm của DI . Ta có $\triangle DAI$ cân tại A , mà AE là đường trung tuyến nên đồng thời là đường cao. Suy ra $AE \perp DI$, vậy $\widehat{AED} = 90^\circ$.

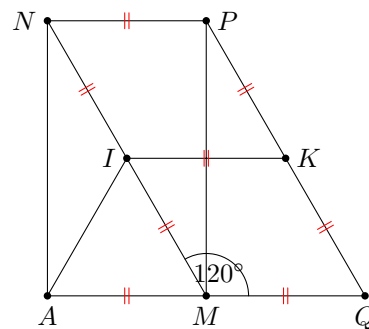


Bài 4. Cho hình bình hành $MNPQ$ có $MN = 2MQ$ và $\widehat{M} = 120^\circ$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MN, PQ và A là điểm đối xứng của Q qua M .

- Tứ giác $MIKQ$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh tam giác AMI đều.
- Chứng minh tứ giác $AMPN$ là hình chữ nhật.

Lời giải.

- Vì $MQ = IK = NP = \frac{MN}{2} = MI = IN = PK = KQ \Rightarrow$ Tứ giác $MIKQ$ là hình thoi.
- Tam giác AMI có $AM = MI$ nên cân tại A và $\widehat{IMA} = 60^\circ$ nên $\triangle AMI$ là tam giác đều.
- Dễ dàng nhận thấy tứ giác $AMPN$ là hình bình hành.
Vì tam giác AMI là tam giác đều nên $AI = IM = IN$. Vậy tam giác MAN có AI là đường trung tuyến và $AI = \frac{1}{2}MN$ nên tam giác MAN là tam giác vuông tại A (trong tam giác vuông trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền). Vậy hình bình hành $AMPN$ có một góc vuông nên tứ giác $AMPN$ là hình chữ nhật.

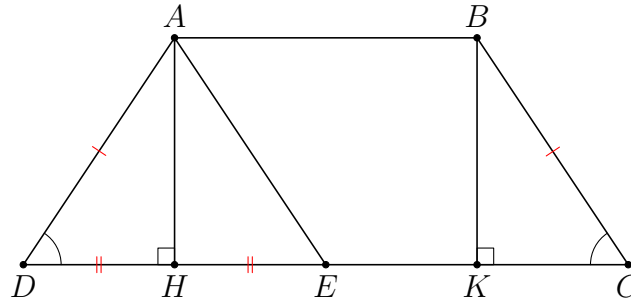


Bài 5. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$), các đường cao AH, BK .

- Tứ giác $ABKH$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh $DH = CK$.

- Gọi E là điểm đối xứng với D qua H . Các điểm D và E đối xứng với nhau qua đường nào?
- Tứ giác $ABCE$ là hình gì?

 **Lời giải.**



- Tứ giác $ABKH$ là hình chữ nhật.
- $\triangle ADH = \triangle BKC$ (ch - gn). Nên suy ra $DH = KC$.
- D và E đối xứng với nhau qua đường thẳng AH .
- Dễ thấy $HE + EK = EK + KC \Rightarrow AB = EC$. Do đó, $ABCE$ là hình bình hành.

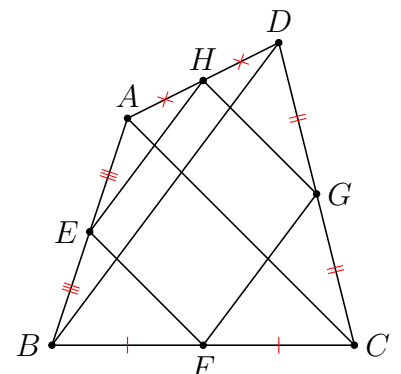
□

 **Bài 6.** Cho tứ giác $ABCD$, E là trung điểm của cạnh AB . Qua E kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC ở F . Qua F kẻ đường thẳng song song với BD cắt CD ở G . Qua G kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD ở H .

- Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình bình hành.
- Tứ giác $ABCD$ cần thêm điều kiện gì để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật.

 **Lời giải.**

- Có $EH \parallel BD \parallel FG$ và $EF \parallel AC \parallel HG$ nên tứ giác $EFGH$ là hình bình hành vì có các cặp đối song song với nhau.
- Để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật thì $EH \perp HG$ hay $BD \perp AC$ vì $EH \parallel BD$ và $HG \parallel AC$. Vậy điều kiện để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật thì tứ giác $ABCD$ phải có hai đường chéo vuông góc.



□

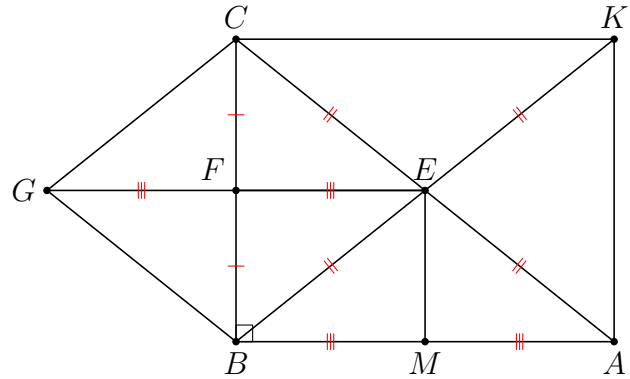
 **Bài 7.** Cho tam giác ABC vuông tại B . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC . Kẻ Ex song song với BC cắt AB tại M .

- Chứng minh tứ giác $BMEF$ là hình chữ nhật.
- Gọi K đối xứng với B qua E . Tứ giác $BACK$ là hình gì? Vì sao?

- Gọi G đối xứng với E qua F . Tứ giác $BGCE$ là hình gì? Vì sao?
- Tam giác ABC cần thêm điều kiện gì để tứ giác $BGCE$ là hình vuông?

 Lời giải.

- Tứ giác $BMEF$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông.
- EF là đường trung bình của tam giác ABC .
 $\Rightarrow EF \perp BC \Rightarrow BFE = 90^\circ \Rightarrow BMEF$ là hình chữ nhật. Tứ giác $BACK$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Lại có $\widehat{ABC} = 90^\circ$ nên $BAKC$ là hình chữ nhật.
- Tứ giác $BGCE$ là hình thoi vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và $BE = EC$.
- Tam giác ABC vuông cân.



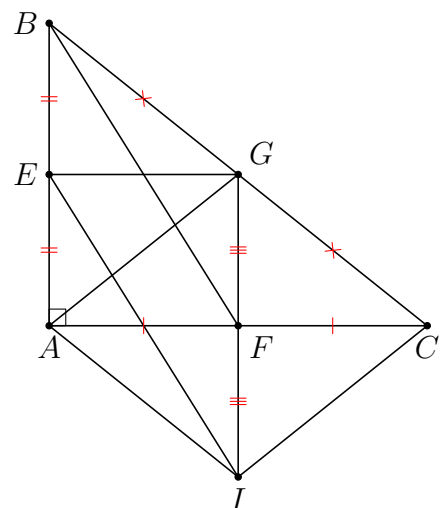
□

 **Bài 8.** Cho tam giác ABC vuông ở A . Gọi E, G, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, AC . Từ E kẻ đường thẳng song song với BF , đường thẳng này cắt GF tại I .

- Tứ giác $AEGF$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh tứ giác $BEIF$ là hình bình hành.
- Chứng minh tứ giác $AGCI$ là hình thoi.
- Tìm điều kiện của tam giác ABC để tứ giác $AGCI$ là hình vuông.

 Lời giải.

- Tứ giác $AEGF$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông.
- Có $GF \parallel AE$ hay $FI \parallel BE$. Vậy tứ giác $BEFI$ là hình bình hành vì có hai cặp cạnh đối song song.
- Tứ giác $AGCI$ là hình thoi vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và vuông góc với nhau ($\widehat{GFA} = 90^\circ$).
- Để tứ giác $AGCI$ là hình vuông thì $\widehat{AGC} = 90^\circ$. Vậy tam giác ABC sẽ thành tam giác vuông cân tại A .



□

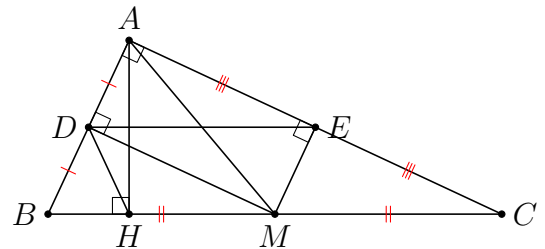
4 Bài tập về nhà

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , kẻ MD vuông góc với AB tại D , ME vuông góc với AC tại E .

1. Chứng minh $AM = DE$.
2. Chứng minh tứ giác $DMCE$ là hình bình hành.
3. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC ($H \in BC$). Chứng minh tứ giác $DHME$ là hình thang cân và A đối xứng với H qua DE .

Lời giải.

1. Dễ thấy $ADME$ là hình chữ nhật, suy ra đpcm.
2. Dễ thấy $MD \parallel EC$, $MD = EC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow$ đpcm.
3. $ME = DH = AD = \frac{1}{2}AB$; $HM \parallel DE$ nên $DHME$ là hình thang cân và A, H đối xứng với nhau qua DE .



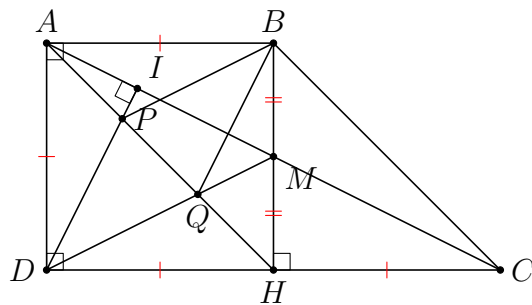
□

Bài 10. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và $AB = AD = \frac{1}{2}CD$, kẻ BH vuông góc với CD .

1. Chứng minh rằng tứ giác $ABHD$ là hình vuông.
2. Gọi M là trung điểm của BH . Chứng minh A đối xứng với C qua M .
3. Kẻ DI vuông góc với AC . AH cắt DI , DM tại P và Q . Chứng minh tứ giác $DPBQ$ là hình thoi.

Lời giải.

- $ABHD$ là hình vuông vì là hình chữ nhật và có hai cạnh kề bằng nhau.
- Có $AB \parallel HC$ và $AB = HC = DH = \frac{1}{2}DC$ nên tứ giác $ABCH$ là hình bình hành. $\Rightarrow M$ là trung điểm của AC . Vậy A đối xứng với C qua M .
- Có $\triangle APD = \triangle APB$ (c.g.c) nên $PD = PB$; $\triangle DHQ = \triangle BHQ$ (c.g.c) nên $DQ = QB$.
Lại có $\widehat{ADP} = \widehat{MCD}$ (cùng phụ với góc $\widehat{DAC}$)
 $\Rightarrow \widehat{ADP} = \widehat{QDH}$ (vì $\widehat{QDH} = \widehat{MCD}$).
Vậy $\triangle ADP = \triangle HDQ$ (g.c.g) $\Rightarrow DP = DQ$
 $\Rightarrow$ Tứ giác $DPBQ$ là hình thoi vì có bốn cạnh bằng nhau.



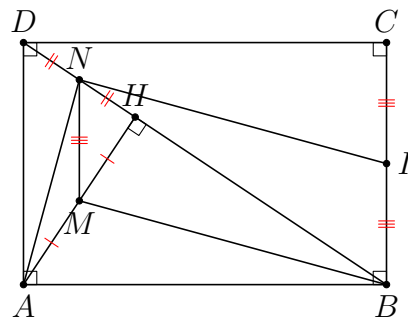
□

Bài 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BD . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn AH và DH .

- Chứng minh $MN \parallel AD$.
- Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh tứ giác $BMNI$ là hình bình hành.
- Chứng minh tam giác ANI vuông.

Lời giải.

- MN là đường trung bình của tam giác $AHD \Rightarrow MN \parallel AD$.
- $MN = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = BI$; Mà $MN \parallel AD \parallel BC \Rightarrow BMNI$ là hình bình hành.
- Dễ dàng chứng minh M là trực tâm của $\triangle ABN \Rightarrow BM \perp AN \Rightarrow IN \perp AN$. Vậy $\triangle ANI$ vuông tại N .



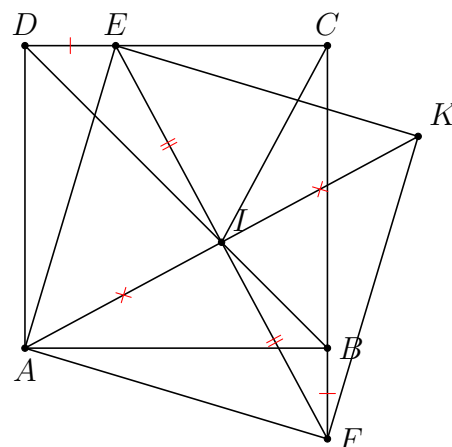
□

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$. E là điểm trên cạnh DC , F là điểm trên tia đối của tia BC sao cho $BF = DE$.

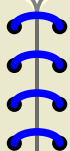
- Chứng minh tam giác AEF vuông cân.
- Gọi I là trung điểm của EF . Chứng minh I thuộc BD .
- Lấy điểm K đối xứng với A qua I . Chứng minh tứ giác $AEKF$ là hình vuông.

Lời giải.

1. $\triangle ADE = \triangle ABF \Rightarrow AE = AF; \widehat{FAB} = \widehat{DAE}$. Dễ thấy $\widehat{DAE} + \widehat{EAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FAB} + \widehat{EAB} = 90^\circ$. Do đó, $\triangle AEF$ là tam giác vuông cân tại A .
2. Chứng minh $AI = CI = \frac{1}{2}EF$. Do đó I nằm trên đường trung trực của AC . Mà BD là đường trung trực của AC (tính chất hình vuông $ABCD$) nên $I \in BD$.
3. Vì AEF là tam giác vuông cân nên $AI \perp EF$. Hơn nữa $AI = IK$ và $AI = \frac{1}{2}EF = IE = IF$ nên $\Rightarrow AI = IK = IE = IF$. Vậy tứ giác $AEKF$ là hình vuông.



□



§1 Đa giác. Đa giác đều

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Khái niệm về đa giác

Định nghĩa 16. Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

Định nghĩa 17. Đa giác có n đỉnh ($n \geq 3$) được gọi là *hình n -giác* hay *hình n cạnh*.

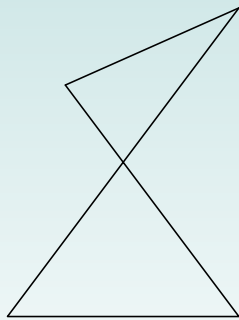
- ☑ Với $n = 3, 4, 5, 6, 8$ ta quen gọi là tam giác, tứ giác, ngũ giác, lục giác, bát giác.
- ☑ Với $n = 7, 8, 10, \dots$ ta gọi là hình 7 cạnh, hình 9 cạnh, hình 10 cạnh, $\dots$
- ☑ Tổng độ lớn của các góc trong đa giác là $(p - 2) \cdot 180^\circ$ (với p số đỉnh của đa giác).

1.2 Đa giác đều

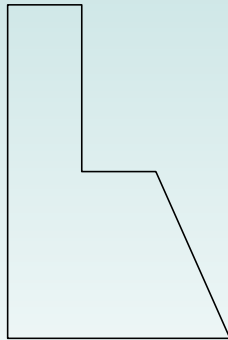
Định nghĩa 18. Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

2 Bài tập và các dạng toán

 **Ví dụ 1.** Trong các hình dưới đây, hình nào là đa giác lồi? Vì sao?



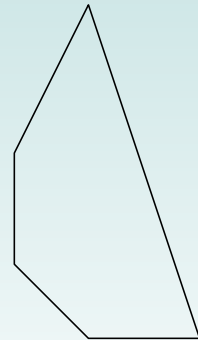
Hình a)



Hình b)



Hình c)



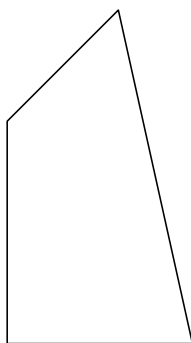
Hình d)

Lời giải.

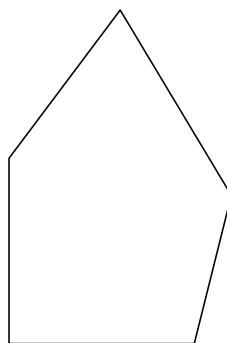
Theo định nghĩa thì hình c) và hình d) là các đa giác lồi. □

Ví dụ 2. Vẽ các hình tứ giác lồi, ngũ giác lồi, lục giác lồi.

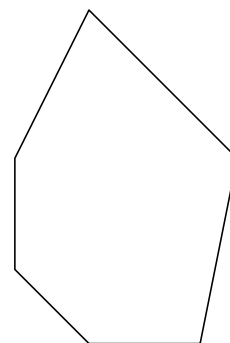
Lời giải.



Tứ giác lồi



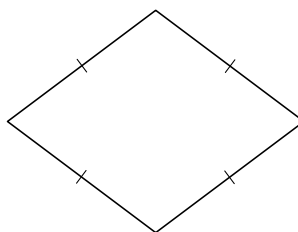
Ngũ giác lồi



Lục giác lồi

Ví dụ 3. Tìm một đa giác không đều có tất cả các cạnh bằng nhau. □

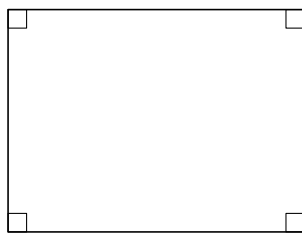
Lời giải.



Hình thoi

Ví dụ 4. Tìm một đa giác không đều có tất cả các góc bằng nhau. □

Lời giải.



Hình chữ nhật

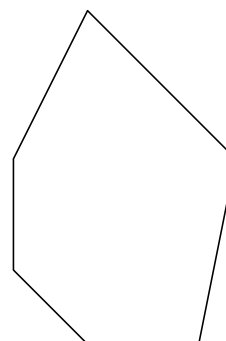
□

Ví dụ 5. Vẽ hình và tính tổng số đo các góc của hình lục giác.

ĐS: 720°

Lời giải.

Tổng độ lớn của các góc trong lục giác là $(6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$.



Lục giác lồi

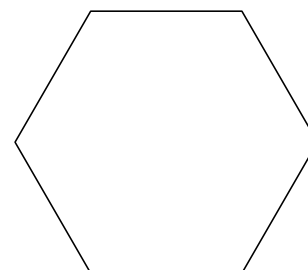
□

Ví dụ 6. Tính số đo mỗi góc của hình lục giác đều.

ĐS: 120°

Lời giải.

Đa giác đều có tất cả các góc bằng nhau, dùng kết quả bài trên ta tính được số đo mỗi góc của hình lục giác đều là $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$.



Lục giác đều

□

Ví dụ 7. Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh đa giác $EBFGDH$ là lục giác đều.

Lời giải.

Dùng tính chất đường trung bình ta có

$$EH = FG = \frac{BD}{2}.$$

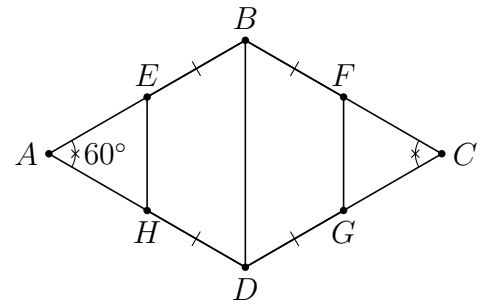
Ta có $\triangle ABD, \triangle CBD$ là các tam giác cân có một góc bằng 60° nên $\triangle ABD, \triangle CBD$ là hai tam giác đều, từ đó

$$EB = BF = FG = GD = DH = HE.$$

Lại có, $EH \parallel BD \parallel FG$ theo tính chất trung bình, ta có:
 $\widehat{HBE} = \widehat{EHD} = \widehat{BFG} = \widehat{DGF} = 120^\circ$ (góc ngoài tam giác) và $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$, từ đó tính được

$$\widehat{BEH} = \widehat{EHD} = \widehat{HDG} = \widehat{DGF} = \widehat{GFB} = \widehat{FBE} = 120^\circ.$$

Vậy $EBFGDH$ là lục giác đều.

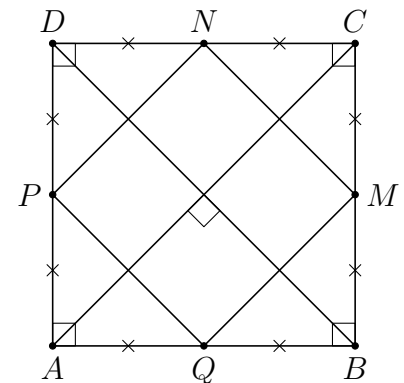


Ví dụ 8. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, DA, AB . Chứng minh $MNPQ$ là hình vuông (tứ giác đều).

Lời giải.

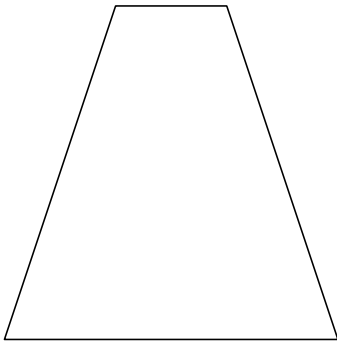
Do $AC = BD$ nên dùng tính chất đường trung bình của tam giác suy ra $MN = NP = PQ = QM$.

Lại có, $AC \perp BD, MQ \parallel AC, MN \parallel BD$ nên $\widehat{QMN} = 90^\circ$. Vậy $MNPQ$ là hình vuông.

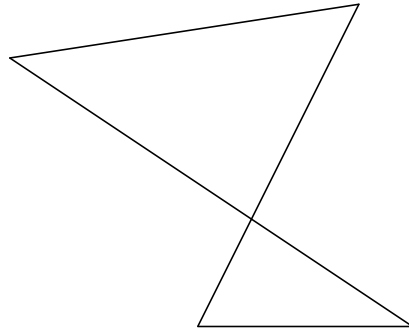


3 Bài tập về nhà

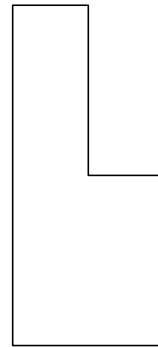
Bài 1. Tìm hình là đa giác lồi trong các hình dưới đây?



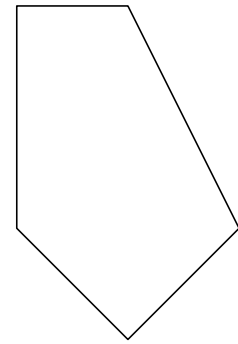
Hình a)



Hình b)



Hình c)



Hình d)

Lời giải.

Các hình là đa giác lồi là hình a) và hình d). □

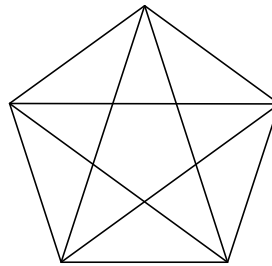
Bài 2. Vẽ hình và tính số đường chéo của ngũ giác, lục giác.

ĐS: 5; 9

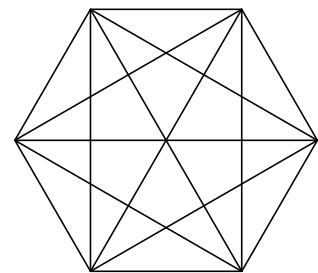
Lời giải.

Ngũ giác có $\frac{2 \cdot 5}{2} = 5$ đường chéo.

Lục giác có $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$ đường chéo.



Ngũ giác đều



Lục giác đều

□

Bài 3. Chứng minh hình n -giác có tất cả $\frac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.

(*)

Lời giải.

Từ mỗi đỉnh của hình n -giác vẽ được $n - 1$ đoạn thẳng nối đỉnh đó với $n - 1$ đỉnh còn lại, trong đó có hai đoạn thẳng trùng với hai cạnh của đa giác. Do đó qua mỗi đỉnh của hình n -giác vẽ được $n - 3$ đường chéo. Hình n -giác có n đỉnh nên vẽ được $n(n - 3)$ đường chéo, trong đó mỗi đường chéo được tính hai lần. Vậy, hình n -giác có tất cả $\frac{n(n-3)}{2}$ đường chéo. □

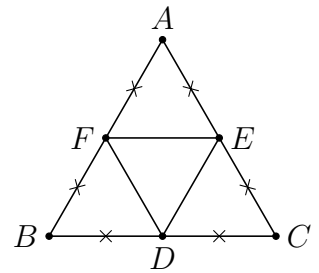
Bài 4. Cho tam giác đều ABC . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh DEF là tam giác đều.

Lời giải.

Trong tam giác ABC có EF là đường trung bình nên $EF = \frac{1}{2}BC$.
 Dùng tính chất đường trung bình chứng minh tương tự, ta được

$$DE = EF = FD.$$

nên $\triangle DEF$ đều.



□

§2 Diện tích hình chữ nhật

1 Tóm tắt lí thuyết

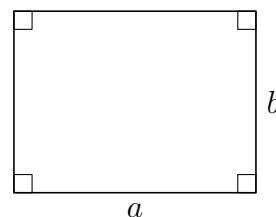
1.1 Khái niệm diện tích tam đa giác

- ☑ Số đo của phần mặt phẳng giới hạn bởi một đa giác được gọi là *diện tích đa giác* đó.
- ☑ Mỗi đa giác có một diện tích xác định. Diện tích đa giác là một *số dương*.
- ☑ Diện tích đa giác có các tính chất sau:
 - Hai tam giác bằng nhau có diện tích bằng nhau.
 - Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.
 - Nếu chọn hình vuông có cạnh bằng 1 cm, 1 dm, 1 m, ... làm đơn vị đo diện tích thì đơn vị diện tích tương ứng là 1 cm², 1 dm², 1 m², ...
- ☑ Diện tích đa giác $ABCDE$ thường được kí hiệu là S_{ABCDE} .

1.2 Công thức tính diện tích hình chữ nhật

- ☑ Diện tích hình chữ nhật bằng “*tích hai kích thước của nó*”.

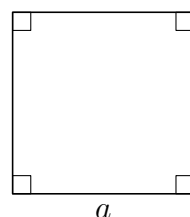
$$S = ab$$



1.3 Công thức tính diện tích hình vuông, tam giác vuông

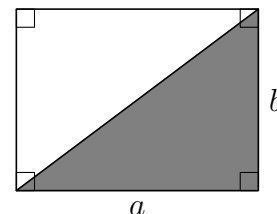
- ☑ Diện tích hình vuông bằng “*bình phương cạnh của nó*”.

$$S = a^2$$



- ☑ Diện tích tam giác vuông bằng “*nửa tích hai cạnh góc vuông*”.

$$S = \frac{1}{2}ab$$



2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 30. Tính diện tích hình chữ nhật

Sử dụng công thức tính diện tích hình chữ nhật.

BAI TAP MAU

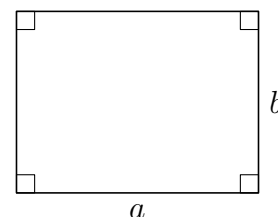
📖 **Ví dụ 1.** Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu:

- | | |
|---|-----------------------|
| 1. Chiều dài tăng ba lần, chiều rộng không đổi? | ĐS: tăng 3 lần |
| 2. Chiều dài và chiều rộng tăng hai lần? | ĐS: tăng 4 lần |
| 3. Chiều dài tăng ba lần, chiều rộng giảm ba lần? | ĐS: không đổi |

✍ Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là a, b thì diện tích của nó là $S = ab$.

- Nếu tăng chiều dài ba lần, chiều rộng không đổi thì chiều dài, chiều rộng mới là $3a$ và b nên diện tích hình chữ nhật mới là $S_m = 3ab = 3S$. Vậy diện tích hình chữ nhật tăng 3 lần.
- Diện tích tăng 4 lần.
- Diện tích không đổi.

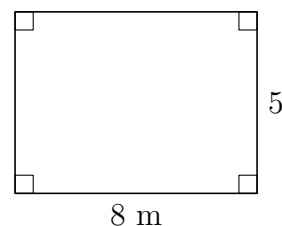


📖 **Ví dụ 2.** Một hình chữ nhật có chiều dài là 8 m và chiều rộng là 5 m.

- | | |
|---|-----------------------------------|
| 1. Tính diện tích hình chữ nhật đã cho. | ĐS: 40 m ² |
| 2. Nếu chiều dài tăng 2 m, chiều rộng không đổi thì diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào? | ĐS: tăng 10 m ² |
| 3. Nếu chiều dài tăng 2 m, chiều rộng giảm 2 m thì diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào? | ĐS: Giảm 10 m ² |

✍ Lời giải.

- $S = 8 \cdot 5 = 40 \text{ m}^2$.
- Tăng $(8 + 2) \cdot 5 - 8 \cdot 5 = 10 \text{ m}^2$.
- Giảm $8 \cdot 5 - (8 + 2) \cdot (5 - 2) = 10 \text{ m}^2$.



□

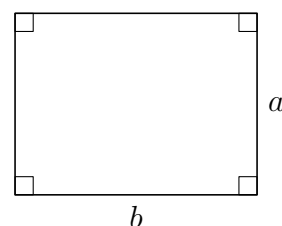
Ví dụ 3. Tính độ dài các cạnh của một hình chữ nhật biết tỉ số các cạnh là 4 : 9 và diện tích của nó là 144 cm^2 . **ĐS:** 8 và 18

Lời giải.

Gọi độ dài các cạnh của hình chữ nhật là a, b khi đó $\frac{a}{4} = \frac{b}{9}$ và $ab = 144$,

ta có:
 $a = \frac{4}{9}b \Rightarrow \frac{4}{9}b^2 = 144 \Leftrightarrow b^2 = 324 \Leftrightarrow b = 18 \Rightarrow a = 8$.

Vậy $a = 8 \text{ cm}, b = 18 \text{ cm}$.



□

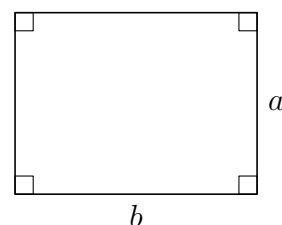
Ví dụ 4. Bình phương độ dài một cạnh và diện tích của một hình chữ nhật lần lượt là 9 cm và 12 cm^2 . Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật đó. **ĐS:** 3 và 4

Lời giải.

Gọi độ dài các cạnh của hình chữ nhật là a, b khi đó $a^2 = 9$ và $ab = 12$,

ta có:
 $a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow b = \frac{12}{3} = 4$.

Từ đó tìm được $a = 3 \text{ cm}$ và $b = 4 \text{ cm}$.



□

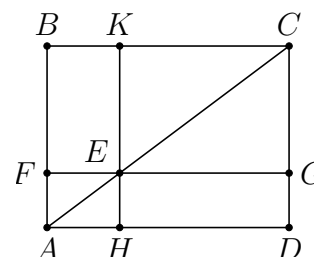
Ví dụ 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Qua E là một điểm bất kì thuộc đường chéo AC , kẻ hai đường thẳng $FG \parallel AD$ và $HK \parallel AB$ ($F \in AB, G \in DC, H \in AD, K \in BC$). Chứng minh hai hình chữ nhật $EFBK$ và $EGDH$ có cùng diện tích.

Lời giải.

Ta có $AHEF$ và $CGEK$ là các hình chữ nhật nên

$$S_{AFE} = S_{AHE}, S_{CKE} = S_{CGE}.$$

Lại có $S_{ABC} = S_{ADC}$ nên suy ra hai hình chữ nhật $EFBK$ và $EGDH$ có cùng diện tích.



□

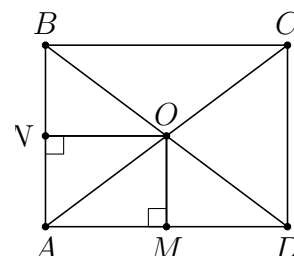
Ví dụ 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích là 100 cm^2 . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên AD, AB . Tính diện tích hình chữ nhật $AMON$. **ĐS:** 25 cm^2

Lời giải.

Ta có $OM = \frac{AB}{2}, ON = \frac{AD}{2}$ nên

$$S_{AMON} = OM \cdot ON = \frac{AB \cdot AD}{4} = \frac{S_{ABCD}}{4} = 25.$$

Vậy $S_{AMON} = 25 \text{ cm}^2$.



Dạng 31. Diện tích hình vuông, diện tích tam giác vuông

Sử dụng công thức diện tích hình vuông, diện tích tam giác vuông.

BÀI TẬP MẪU

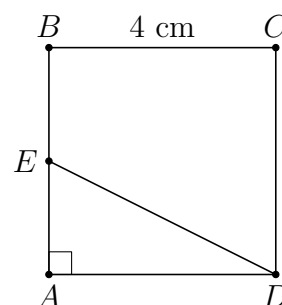
Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 4 cm , lấy điểm E thuộc cạnh AB . Biết diện tích $\triangle ADE$ bằng $\frac{1}{4}$ diện tích hình vuông $ABCD$. Tính độ dài AE . **ĐS:** 2

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = 16 \text{ cm}^2$ suy ra $S_{ADE} = 4 \text{ cm}^2$.

Mặt khác $S_{ADE} = \frac{1}{2}AD \cdot AE$, từ đó tính được

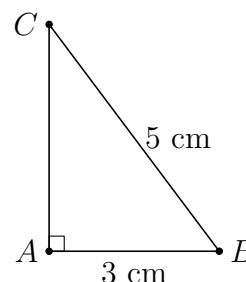
$$AE = \frac{2 \cdot S_{ADE}}{AD} = 2 \text{ cm}.$$



Ví dụ 2. Tính diện tích $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3 \text{ cm}, BC = 5 \text{ cm}$. **ĐS:** 6 cm^2

Lời giải.

Tính được $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4 \text{ cm}$, nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 6 \text{ cm}^2$.



3 Bài tập về nhà

Bài 1. Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu:

1. Chiều dài tăng 6 lần, chiều rộng giảm 3 lần?

ĐS: tăng 2 lần

2. Chiều dài giảm 25%, chiều rộng tăng 15%?

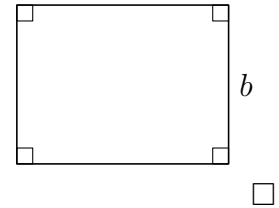
ĐS: Giảm 13,75%

Lời giải.

Gọi a, b lần lượt là hai kích thước của hình chữ nhật, ta có:

1. $S_m = 6a \cdot \frac{b}{3} = 2ab = 2S$. Diện tích tăng 2 lần.

2. Diện tích mới giảm $1 - 0,75 \cdot 1,15 = 0,1375 = 13,75\%$.



Bài 2. Tính diện tích của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10 cm, một cạnh góc vuông bằng 6 cm.

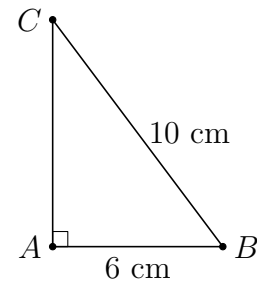
ĐS: 24 cm^2

Lời giải.

Xét tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6 \text{ cm}$ và $BC = 10 \text{ cm}$, ta có:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 8 \text{ cm}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2.$$



Bài 3. Tính các cạnh của hình chữ nhật biết:

1. Tỷ số các cạnh là $3 : 4$ và diện tích của nó là $1\,200 \text{ cm}^2$.

ĐS: 30; 40

2. Bình phương độ dài một cạnh là 9 cm^2 và diện tích của nó là 18 cm^2 .

ĐS: 3; 6

Lời giải.

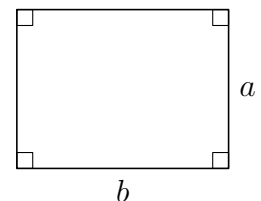
Gọi độ dài các cạnh của hình chữ nhật là a, b khi đó:

1. $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$ và $ab = 1\,200$, ta có:

$$a = \frac{3}{4}b \Rightarrow \frac{3}{4}b^2 = 1\,200 \Leftrightarrow b = 40 \Leftrightarrow b = 40.$$

Từ đó tìm được $a = 30 \text{ cm}$ và $b = 40 \text{ cm}$.

2. $a^2 = 9$ và $ab = 18$, từ đó tìm được $a = 3 \text{ cm}$ và $b = 6 \text{ cm}$.



Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 4 \text{ cm}$, $BD = 6 \text{ cm}$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

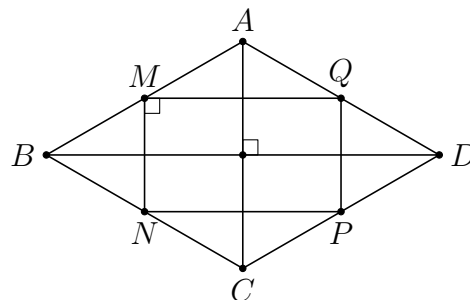
1. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì? Tại sao?

2. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.

ĐS: 6 cm^2

 **Lời giải.**

1. Ta có $MN \parallel AC \parallel PQ$ và $MN = PQ = \frac{AC}{2}$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.
Lại có $MQ \parallel BD$, $MN \parallel AC$, $AC \perp BD$ nên $MQ \perp MN$, từ đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.
2. Tính được $MN = \frac{AC}{2} = 2 \text{ cm}$, $MQ = \frac{BD}{2} = 3 \text{ cm}$.
Bởi vậy $S_{MNPQ} = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}^2$.



□

§3 Diện tích tam giác

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Công thức tính diện tích tam giác

Diện tích tam giác bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó

$$S = \frac{1}{2}ah$$

1.2 Hệ quả

- ☒ Hai tam giác có cạnh đáy bằng nhau và chiều cao bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
- ☒ Hai tam giác có một cạnh bằng nhau thì tỉ số diện tích của hai tam giác đó bằng tỉ số của hai chiều cao tương ứng.
- ☒ Hai tam giác có một đường cao bằng nhau thì tỉ số diện tích của hai tam giác đó bằng tỉ số của hai cạnh tương ứng.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 32. Tính toán, chứng minh hệ thức về diện tích tam giác

- ☒ Áp dụng công thức và các hệ quả thu được từ công thức tính diện tích.
- ☒ Sử dụng định nghĩa khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.
- ☒ Áp dụng tính chất cộng diện tích.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

 **Ví dụ 1.** Tam giác DEF có đáy $EF = 12$ cm, đường cao tương ứng 4 cm. Tính diện tích tam giác DEF . **ĐS:** 24 cm^2

 **Lời giải.**

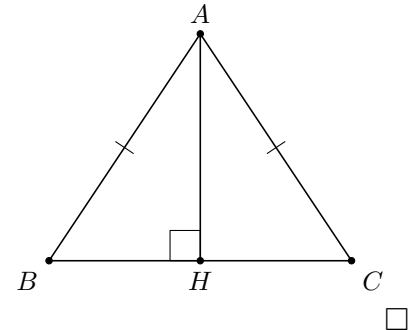
$$S_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2.$$

□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC cân tại A , kẻ đường cao AH . Tính diện tích tam giác ABC nếu biết $AH = 8$ cm, $AB = 10$ cm. **ĐS:** 48 cm^2

Lời giải.

Trong tam giác ABH vuông tại H ta có
 $AB^2 = AH^2 + BH^2$ (Định lý Py-ta-go) $\Leftrightarrow BH^2 = AB^2 - AH^2 = 10^2 - 8^2 \Leftrightarrow BH = 6$ cm. Suy ra $BC = 2BH = 12$ cm.
 Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48 \text{ cm}^2$.



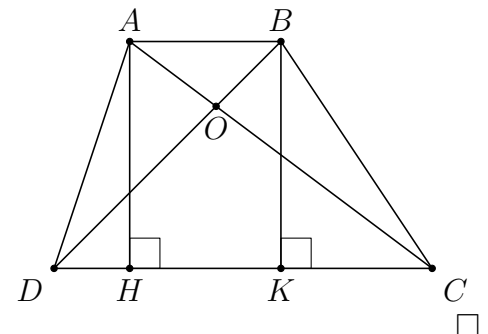
Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), AC cắt BD tại O . Chứng minh

a) $S_{DAC} = S_{DBC}$.

b) $S_{AOD} = S_{BOC}$.

Lời giải.

- Kẻ $AH \perp CD$, $BK \perp DC$, $H, K \in CD$. Vì $AB \parallel CD \Rightarrow AH = BK$ (1).
 Mặt khác $\triangle DAC$ và $\triangle DBC$ có chung đáy DC (2).
 Từ (1) và (2) suy ra $S_{DAC} = S_{DBC}$.
- $S_{DAC} = S_{AOD} + S_{DOC}$ và $S_{DBC} = S_{BOC} + S_{DOC}$, Do đó, $S_{AOD} = S_{BOC}$.



Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , kẻ đường trung tuyến AM .

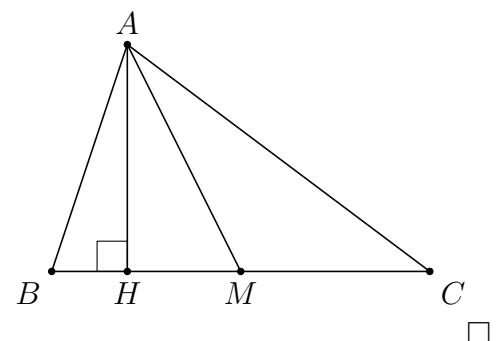
1. Chứng minh $S_{ABM} = S_{ACM}$.

2. Tính diện tích tam giác ABC biết $S_{ABM} = 15 \text{ cm}^2$.

ĐS: 30 cm^2

Lời giải.

- Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$).
 $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có chung đường cao AH , mà $MB = MC$ nên $S_{ABM} = S_{ACM}$.
- $S_{ABC} = 2 \cdot S_{ABM} = 30 \text{ cm}^2$.



Dạng 33. Sử dụng công thức tính diện tích để tính độ dài đoạn thẳng. Chứng minh hệ thức hình học

- ☑ Tính diện tích tam giác bằng hai cách.
- ☑ So sánh hai kết quả, từ đó thu được một hệ thức liên hệ giữa các yếu tố trong tam giác.
- ☑ Áp dụng các tính chất về diện tích, các hệ quả thu được từ công thức tính diện tích tam giác.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh $BC = 6$ cm, đường cao $AH = 4$ cm.

1. Tính diện tích tam giác ABC . **ĐS:** 12 cm^2
2. Tính độ dài đường cao tương ứng với cạnh AC . **ĐS:** $\frac{24}{5} \text{ cm}$

 **Lời giải.**

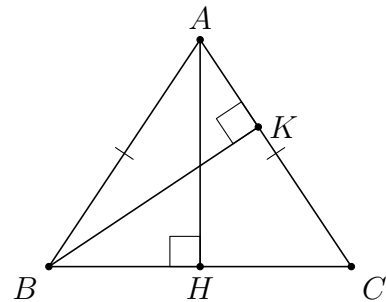
$$1. S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = 12 \text{ cm}^2.$$

$$2. \text{Kẻ } BK \perp AC, \text{ ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2}BK \cdot AC.$$

Trong tam giác ACH ta có

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow AC = 5 \text{ cm.}$$

$$\text{Suy ra } BK = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot 12}{5} = \frac{24}{5} \text{ cm.}$$



□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm.

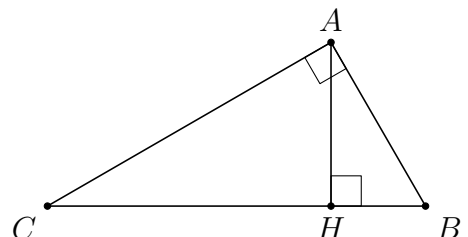
1. Tính diện tích tam giác ABC . **ĐS:** 24 cm^2
2. Kẻ đường cao AH . Tính độ dài AH . **ĐS:** $\frac{24}{5} \text{ cm}$

 **Lời giải.**

$$1. S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ cm}^2.$$

$$2. BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm.}$$

$$AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 24}{10} = \frac{24}{5} \text{ cm.}$$



□

Ví dụ 3. Cho tam giác MNP vuông tại M , kẻ đường cao MQ . Chứng minh

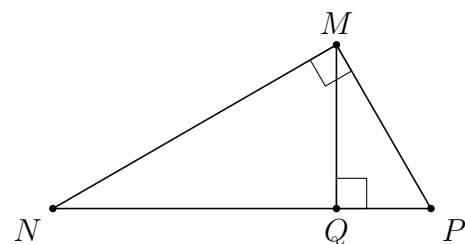
$$MQ \cdot NP = MN \cdot MP$$

Lời giải.

Ta có $S_{MNP} = \frac{1}{2}MN \cdot MP$ (1).

Mặt khác, $S_{MNP} = \frac{1}{2}MQ \cdot NP$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MQ \cdot NP = MN \cdot MP$.



□

Ví dụ 4. Cho tam giác nhọn ABC , kẻ các đường cao BD và CE . Chứng minh

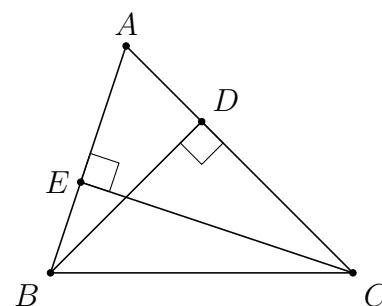
$$BD \cdot AC = CE \cdot AB$$

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}BD \cdot AC$ (1).

Mặt khác, $S_{ABC} = \frac{1}{2}CE \cdot AB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BD \cdot AC = CE \cdot AB$.



□

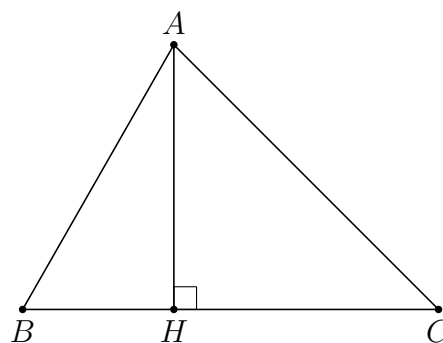
3

Bài tập về nhà

Bài 1. Cho $\triangle ABC$, đường cao AH . Biết $AB = 15$ cm, $AC = 41$ cm và $HB = 12$ cm. Tính diện tích tam giác ABC . **ĐS:** 234 cm^2

Lời giải.

Trong $\triangle ABH$ vuông tại $\widehat{AHB}$, ta có
 $AB^2 = AH^2 + HB^2$
 $\Rightarrow AH^2 = AB^2 - HB^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow AH = 9$
 cm.
 Trong $\triangle AHC$ vuông tại $\widehat{AHC}$, ta có
 $AC^2 = AH^2 + HC^2$
 $\Rightarrow HC^2 = AC^2 - AH^2 = 41^2 - 9^2 = 1600 \Rightarrow HC = 40$
 cm.
 Suy ra $BC = HB + HC = 40 + 12 = 52$ cm.
 Vậy $S = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = 234$ cm².



□

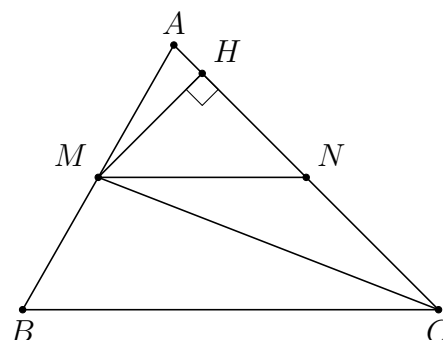
Bài 2. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Chứng minh

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} S_{AMC} = \frac{1}{4} S_{ABC}$$

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của M lên AC , ta có

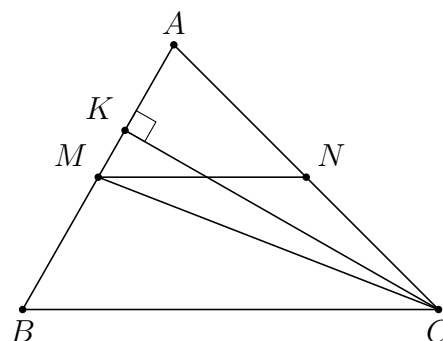
$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2} \cdot MH \cdot AN \\ &= \frac{1}{2} \cdot MH \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot MH \cdot AC = \frac{1}{2} S_{AMC}. \end{aligned}$$



Gọi K là hình chiếu của C lên AB , ta có

$$\begin{aligned} S_{AMC} &= \frac{1}{2} \cdot CK \cdot AM \\ &= \frac{1}{2} \cdot CK \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot CK \cdot AB = \frac{1}{2} S_{ABC}. \end{aligned}$$

Do đó $S_{AMN} = \frac{1}{4} S_{ABC}$.



□

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH . Biết $BC = 6$ cm và $AB = 5$ cm.

1. Tính diện tích tam giác ABC .

ĐS: 12 cm²

2. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh AB .

ĐS: $\frac{24}{5}$ cm

Lời giải.

1. Do tam giác ABC cân tại A nên

$$AB = AC = 5 \text{ cm}, BH = HC = \frac{1}{2}BC = 3 \text{ cm}.$$

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

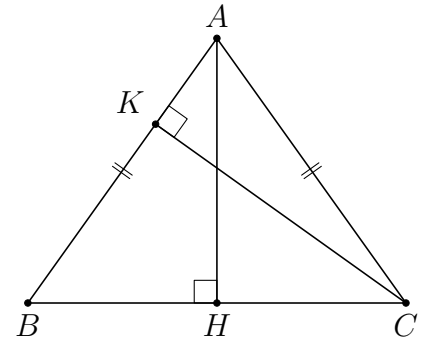
$$AH^2 = AB^2 - HB^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AH = 4 \text{ cm}.$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = 12 \text{ cm}^2.$$

2. Gọi K là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ C .

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CK \cdot AB \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot CK \cdot 5 = 12$$

$$\Rightarrow CK = \frac{24}{5} \text{ cm}.$$



Bài 4. Cho tam giác ABC đều, đường cao AH . Gọi O là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của O trên BC, CA, AB . Chứng minh

a) $2S_{ABC} = OD \cdot BC + OE \cdot CA + OF \cdot AB$. b) $AH = OD + OE + OF$.

Lời giải.

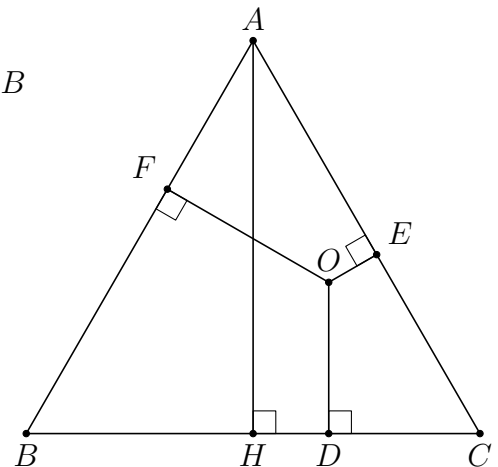
1. Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot OD \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot OE \cdot CA + \frac{1}{2} \cdot OF \cdot AB \\ &= \frac{1}{2}(OD \cdot BC + OE \cdot CA + OF \cdot AB) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2S_{ABC} = OD \cdot BC + OE \cdot CA + OF \cdot AB$$

2. Từ câu trên, ta có

$$\begin{aligned} 2S_{ABC} &= OD \cdot BC + OE \cdot CA + OF \cdot AB \\ \Leftrightarrow 2S_{ABC} &= BC \cdot (OD + OE + OF) \\ \Leftrightarrow AH \cdot BC &= BC \cdot (OD + OE + OF) \\ \Leftrightarrow AH &= OD + OE + OF \end{aligned}$$



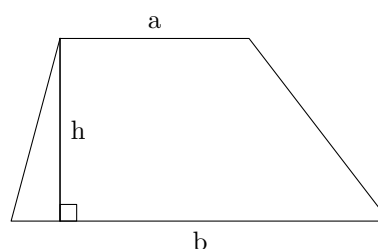
§4 Diện tích hình thang

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Công thức tính diện tích hình thang

Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao

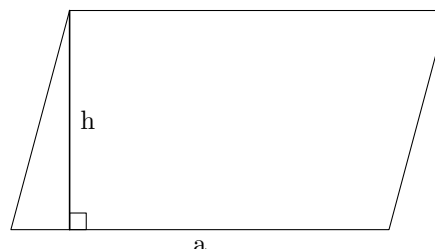
$$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$$



1.2 Công thức tính diện tích hình bình hành

Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó:

$$S = a \cdot h$$



2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 34. Tính diện tích hình thang

Áp dụng công thức tính diện tích hình thang, định lý Py-ta-go.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 **Ví dụ 1.** Tính diện tích hình thang $ABCD$ có đáy lớn $AB = 10$ cm, đáy nhỏ $CD = 6$ cm và đường cao $DE = 5$ cm.

 **Lời giải.**

Giáo viên:

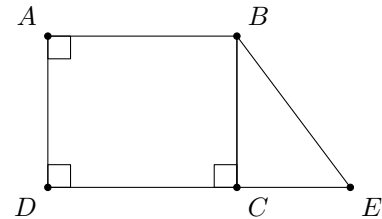
$$S_{ABCD} = \frac{(10 + 6) \cdot 5}{2} = 40 \text{ cm}^2.$$

□

Ví dụ 2. Cho hình thang vuông $ABED$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$). Kẻ $BC \perp DE$ ($C \in DE$). Biết $AB = 23 \text{ cm}$, $DE = 31 \text{ cm}$ và diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là 828 cm^2 . Tính diện tích hình thang $ABED$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = AD \cdot AB \Rightarrow AD = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{828}{23} = 36 \text{ cm}$.
 $\Rightarrow S_{ABED} = \frac{(AB + DE) \cdot AD}{2} = \frac{(23 + 31) \cdot 36}{2} = 972 \text{ cm}^2$.



□

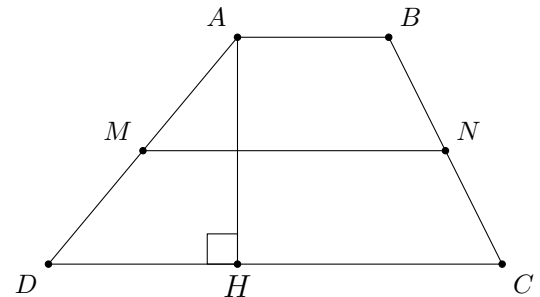
Ví dụ 3. Chứng minh diện tích hình thang bằng tích độ dài đường trung bình với chiều cao của nó.

Lời giải.

Ta có $MN = \frac{AB + CD}{2}$.

Mặt khác, $S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AH}{2} = MN \cdot AH$.

Vậy diện tích hình thang bằng tích độ dài đường trung bình với chiều cao của nó.



□

Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có diện tích bằng 30 cm^2 và đường cao $AH = 3 \text{ cm}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Tính độ dài MN . **ĐS:** 10 cm

Lời giải.

Áp dụng kết quả bài trên, ta có $S_{ABCD} = MN \cdot AH \Rightarrow MN = \frac{S_{ABCD}}{AH} = \frac{30}{3} = 10 \text{ cm}$.

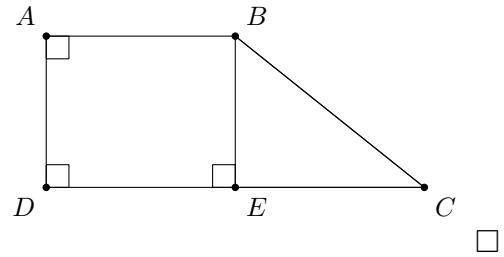
□

Ví dụ 5. Tính diện tích hình thang $ABCD$ biết $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$ và $CD = 6 \text{ cm}$. **ĐS:** 18 cm^2

Lời giải.

Kẻ $BE \perp DC \Rightarrow ABED$ là hình chữ nhật $\Rightarrow DE = AB = 3 \text{ cm} \Rightarrow EC = 3 \text{ cm}$.

Dùng định lý Py-ta-go tính được $AD = BE = 4 \text{ cm}$, từ đó $S_{ABCD} = \frac{(3+6) \cdot 4}{2} = 18 \text{ cm}^2$.



Ví dụ 6. Tính diện tích hình thang vuông $ABCD$ biết $\widehat{C} = 45^\circ$, $AB = 2 \text{ cm}$ và $CD = 4 \text{ cm}$.

Lời giải.

Tương tự bài trên, kẻ $BE \perp DC \Rightarrow DE = AB = 2 \text{ cm} \Rightarrow EC = 2 \text{ cm}$.

Mặt khác, $\triangle BEC$ vuông cân nên $AD = BE = EC = 2 \text{ cm} \Rightarrow S_{ABCD} = 6 \text{ cm}^2$.

Dạng 35. Tính diện tích hình bình hành

Sử dụng công thức tính diện tích hình bình hành, các tính chất về diện tích.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$ biết $CD = 8 \text{ cm}$, đường cao tương ứng là $AE = 4 \text{ cm}$. **ĐS:** 32 cm^2

Lời giải.

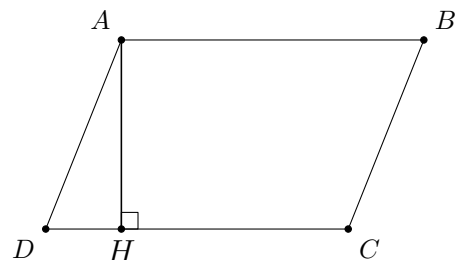
$$S_{ABCD} = 8 \cdot 4 = 32 \text{ cm}^2.$$

Ví dụ 2. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$ biết $AD = 6 \text{ cm}$, $AB = 10 \text{ cm}$ và $\widehat{D} = 30^\circ$.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp DC$. Vì $\widehat{D} = 30^\circ$ nên $\triangle ADH$ nửa đều.

Do đó, $AH = \frac{AD}{2} = 3 \text{ cm}$. Suy ra $S_{ABCD} = 3 \cdot 10 = 30 \text{ cm}^2$.



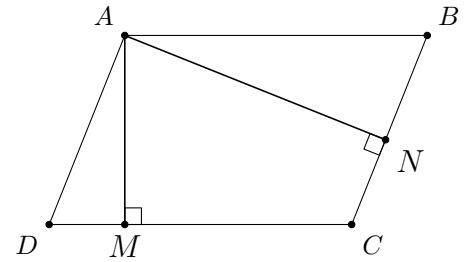
Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$, kẻ $AM \perp DC$ và $AN \perp BC$ với $M \in DC$, $N \in BC$. Chứng minh $AM \cdot DC = AN \cdot BC$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = AN \cdot BC$ (1).

Mặt khác, $S_{ABCD} = AM \cdot DC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AM \cdot DC = AN \cdot BC$.

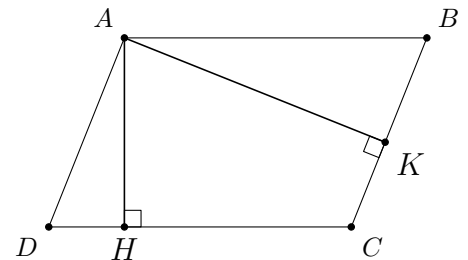


□

Ví dụ 4. Hình bình hành $ABCD$ có $AB = 16$ cm, $AD = 8$ cm. Gọi H, K là hình chiếu của A trên CD và CB , biết $AH = 3$ cm. Tính AK .
ĐS: 6 cm

Lời giải.

Dùng kết quả bài trên, ta có $AK = \frac{AH \cdot DC}{BC} = \frac{16 \cdot 3}{8} = 6$ cm.



□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Tính diện tích hình thang $MNPQ$ có đáy nhỏ $MN = 3$ cm, đáy lớn $PQ = 7$ cm và đường cao $MS = 4$ cm.
ĐS: 20 cm²

Lời giải.

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot MS \cdot (MN + PQ) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (3 + 7) = 20 \text{ cm}^2.$$

□

Bài 2. Tính diện tích hình bình hành $EFGH$ biết $EF = 12$ cm, đường cao tương ứng $GK = 3$ cm.
ĐS: 36 cm²

Lời giải.

$$S_{EFGH} = GK \cdot EF = 12 \cdot 3 = 36 \text{ cm}^2.$$

□

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . O là trung điểm MN . Một đường thẳng qua O cắt hai đáy AB, CD lần lượt tại P, Q . Chứng minh

1. O là trung điểm của PQ .
2. Hai hình thang $APDQ$ và $BPQC$ có diện tích bằng nhau.

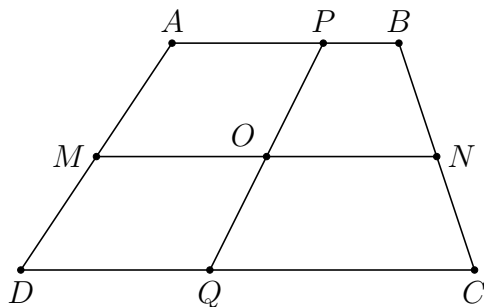
Lời giải.

- a) Ta có MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $MN \parallel CD$.

Vậy ta xét hình thán $APQD$, ta có

M là trung điểm AD , $MO \parallel DQ$.

Do đó MO là đường trung bình của hình thán $APQD$ nên O là trung điểm PQ .



- b) Ở câu trên ta đã có MO là đường trung bình của hình thán $APQD$ nên $MO = \frac{1}{2}(AP + QD)$.

Tương tự thì NO là đường trung bình của hình thán $PBCQ$ nên $NO = \frac{1}{2}(PB + CQ)$.

Gọi h là độ dài đường cao của hình thán $ABCD$, ta có $S_{APQD} = h \cdot OM = h \cdot ON = S_{PBCQ}$.

□

Bài 4. Tính diện tích hình thán cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có các đáy $AB = 10$ cm, $CD = 20$ cm và cạnh bên $AD = 13$ cm.

ĐS: 180 cm^2

Lời giải.

Kẻ AH , BK là các đường cao của hình thán cân $ABCD$. Ta dễ dàng chứng minh được $\triangle AHD = \triangle BKC$ nên ta có $HD = KC$.

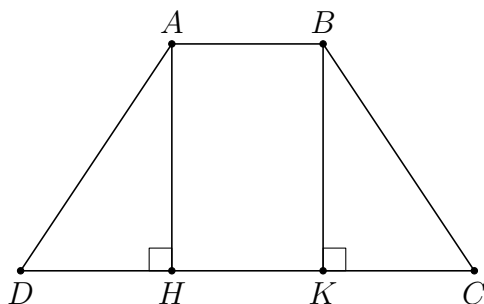
Ta có $ABHK$ là hình chữ nhật nên $AB = HK = 10$ cm.

Do đó $CD = 2DH + HK \Rightarrow DH = 5$ cm.

Xét $\triangle ADH$ vuông tại H , ta có

$$AH^2 = AD^2 - DH^2 = 144 \Rightarrow AH = 12 \text{ cm}.$$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = \frac{1}{2}AH(AB + CD) = 180 \text{ cm}^2.$$



□

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M , kẻ ME vuông góc với CD tại E .

$$1. \text{ Chứng minh } S_{MCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

$$2. N \text{ thuộc đoạn } ME. \text{ Chứng minh } S_{NAD} + S_{NBC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

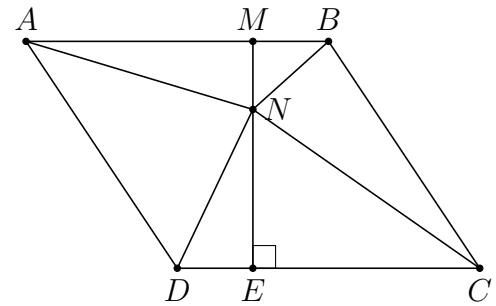
Lời giải.

- a) Ta có $S_{MCD} = \frac{1}{2} \cdot ME \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$
 (Vì ME chính là đường cao của hình bình hành $ABCD$).

- b) Ta có

$$\begin{aligned} S_{NAB} + S_{NDC} &= \frac{1}{2} \cdot MN \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot NE \cdot CD \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (MN + NE) \\ &= \frac{1}{2} \cdot ME \cdot DC = \frac{1}{2} S_{ABCD} \end{aligned}$$

Do đó $S_{NAD} + S_{NBC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.



□

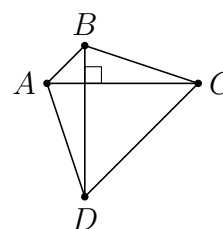
§5 Diện tích hình thoi

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Công thức tính diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc

Diện tích của tứ giác có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích hai đường chéo

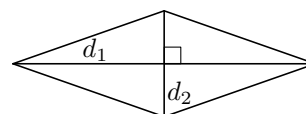
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$



1.2 Công thức tính diện tích hình thoi

Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2.$$



2 Bài tập và các dạng toán

Ví dụ 1. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh

1. Tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

2. $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Lời giải.

1.

Giáo viên:

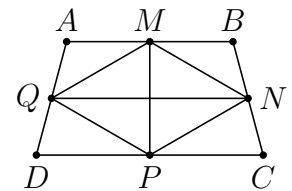
$\triangle ABC$ có M, N là trung điểm của AB, BC .

Suy ra MN là đường trung bình.

Suy ra $MN \parallel AC$ và $MN = \frac{1}{2}AC$.

Chứng minh tương tự và do $ABCD$ là hình thang cân nên ta có $MN = NP = PQ = QM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD$.

Vậy $MNPQ$ là hình thoi (tứ giác có 4 cạnh bằng nhau).



2. Hình thang cân $ABCD$ có Q, N là trung điểm AD, BC .

Suy ra QN là đường trung bình.

Suy ra $NQ \parallel AB \parallel CD$ và $NQ = \frac{AB + CD}{2}$.

Mà $MP \perp NQ$ nên MP là đường cao của hình thang cân $ABCD$.

Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MP \cdot NQ = \frac{1}{2}MP \cdot \frac{AB + CD}{2} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

□

Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh

1. Tứ giác $EFGH$ là hình thoi.

2. $S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Lời giải.

- 1.

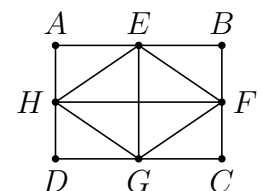
$\triangle ABC$ có E, F là trung điểm của AB, BC .

Suy ra EF là đường trung bình của $\triangle ABC$.

Suy ra $EF \parallel AC$ và $EF = \frac{1}{2}AC$.

Chứng minh tương tự và do $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có $EF = FG = GH = HE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD$.

Vậy $EFGH$ là hình thoi (tứ giác có 4 cạnh bằng nhau).



2. Hình chữ nhật $ABCD$ có H, F là trung điểm AD, BC .

Suy ra HF là đường trung bình.

Suy ra $HF \parallel AB \parallel CD$ và $HF = \frac{AB + CD}{2}$.

Mà $EG \perp HF$ nên EG là đường cao của hình chữ nhật $ABCD$.

Vậy $S_{EFGH} = \frac{1}{2}EG \cdot HF = \frac{1}{2}EG \cdot \frac{AB + CD}{2} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

□

Ví dụ 3. Tính diện tích hình thoi $ABCD$ biết $\hat{A} = 60^\circ$, $AB = 6$ cm. **ĐS:** $18\sqrt{3}$ cm²

Lời giải.

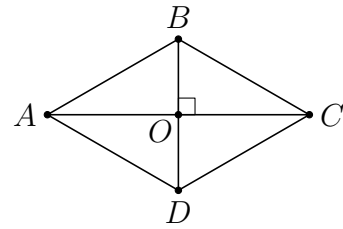
Ta có $AB = AD$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ đều. Suy ra $BD = 6$ cm.

Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$, suy ra $OB = \frac{BD}{2} = 3$ cm.

$\triangle AOB$ vuông tại O có $AB^2 = OA^2 + OB^2$ (định lý Py-ta-go).

Suy ra $OA = 3\sqrt{3}$ cm và $AC = 6\sqrt{3}$ cm.

Vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = 18\sqrt{3}$ cm².



□

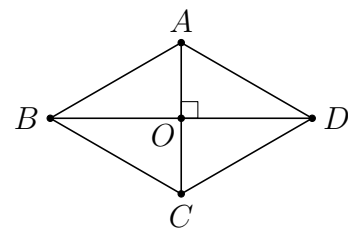
Ví dụ 4. Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Biết $AB = 5$ cm, $AO = 3$ cm. Tính diện tích hình thoi đã cho. **ĐS:** 24 cm²

Lời giải.

$\triangle AOB$ vuông tại O có $AB^2 = OA^2 + OB^2$ (định lý Py-ta-go). Suy ra $OB = 4$ cm.

Vì O là tâm hình thoi $ABCD$, suy ra $AC = 2OA = 6$ cm và $BD = 2OB = 8$ cm.

Vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = 24$ cm².



□

Ví dụ 5. Tính diện tích hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo AC , BD vuông góc và chiều cao bằng 6 cm. **ĐS:** 36 cm²

Lời giải.

Hình thang cân $ABCD$ có $AD = BC$, $AC = BD$.

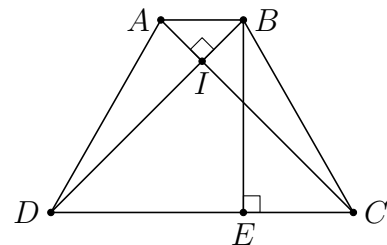
Suy ra $\triangle ACD = \triangle BDC$ (c-c-c) suy ra $\widehat{IDC} = \widehat{ICD}$.

Suy ra $\triangle IDC$ vuông cân tại I .

Suy ra $\widehat{IDC} = \widehat{ICD} = 45^\circ$.

$\triangle BED$ vuông cân tại E nên $BD^2 = 2BE^2 = 72$.

Ta có $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{BD^2}{2} = 36$ cm².



□

Ví dụ 6. Tính diện tích của hình vuông có độ dài đường chéo bằng 2 cm. **ĐS:** 2 cm²

Lời giải.

Vì hai đường chéo vuông góc nên diện tích hình vuông là $S = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$ cm².

□

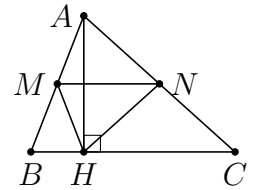
3

Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AH . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , AC , biết $BC = 4$ cm, $AH = 3$ cm. Tính diện tích tứ giác $AMHN$. **ĐS:** 3 cm²

Lời giải.

$\triangle ABC$ có M, N là trung điểm của AB, AC .
 Suy ra MN là đường trung bình của $\triangle ABC$.
 Suy ra $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC = 2$ cm.
 Suy ra $MN \perp AH$.
 $S_{AMHN} = \frac{1}{2}AH \cdot MN = 3$ cm².



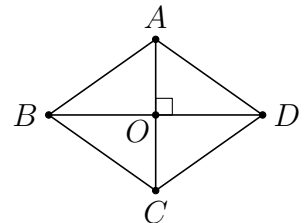
□

Bài 2. Tính diện tích hình thoi $ABCD$ biết $AB = 13$ cm, $AC = 10$ cm.

ĐS: 120 cm²

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$, suy ra $OA = \frac{1}{2}AC = 5$ cm.
 $\triangle AOB$ vuông tại O có $AB^2 = OA^2 + OB^2$ (định lý Py-ta-go).
 Suy ra $OB = 12$ cm.
 Vì O là tâm hình thoi $ABCD$, suy ra $BD = 2OB = 24$ cm.
 Vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = 120$ cm².



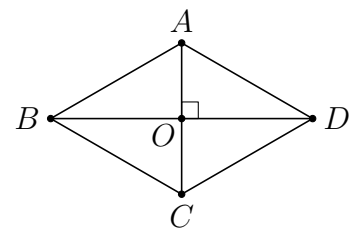
□

Bài 3. Tính diện tích hình thoi $ABCD$ có $AB = 4$ cm và $\widehat{A} = 120^\circ$.

ĐS: $8\sqrt{3}$ cm²

Lời giải.

Ta có AC là phân giác $\widehat{BAD}$, suy ra $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
 Suy ra $\triangle ABC$ đều.
 Suy ra $AC = 4$ cm và $OA = 2$ cm.
 $\triangle AOB$ vuông tại O có $AB^2 = OA^2 + OB^2$ (định lý Py-ta-go).
 Suy ra $OB = 2\sqrt{3}$ cm và $BD = 4\sqrt{3}$ cm.
 Vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = 8\sqrt{3}$ cm².



□

§6 Diện tích đa giác

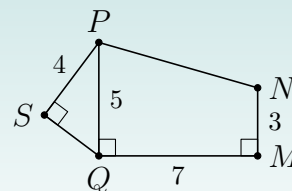
1 Tóm tắt lý thuyết

- ☑ Có thể chia đa giác thành các tam giác hoặc tạo ra một tam giác nào đó có chứa đa giác, do đó việc tính diện tích của một đa giác bất kì được quy về việc tính diện tích tam giác.
- ☑ Trong một số trường hợp, để việc tính toán thuận lợi ta có thể chia đa giác thành nhiều tam giác vuông và hình thang vuông.

2 Bài tập và các dạng toán

📖 Ví dụ 1.

Theo kích thước đã cho trên hình, tính diện tích đa giác $MNPSQ$ (đơn vị cm^2).
ĐS: 34 cm^2



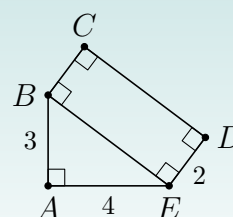
✍ Lời giải.

$\triangle PSQ$ vuông tại S có $PQ^2 = PS^2 + SQ^2$ (định lý Py-ta-go). Suy ra $SQ = 3 \text{ cm}$.

$$S_{MNPSQ} = S_{MNPQ} + S_{SPQ} = \frac{(3+5) \cdot 7}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} = 34 \text{ cm}^2. \quad \square$$

📖 Ví dụ 2.

Theo kích thước đã cho trên hình, tính diện tích đa giác $ABCDE$ (đơn vị cm^2).
ĐS: 16 cm^2



✍ Lời giải.

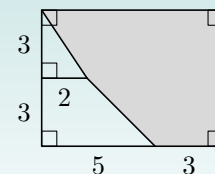
$\triangle ABE$ vuông tại A có $BE^2 = AB^2 + AE^2$ (định lý Py-ta-go). Suy ra $BE = 5 \text{ cm}$.

$$S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{BCDE} = \frac{4 \cdot 3}{2} + 5 \cdot 2 = 16 \text{ cm}^2. \quad \square$$

Ví dụ 3.

Theo kích thước đã cho như hình (đơn vị m). Tính diện tích phần tô đậm.

ĐS: 34,5 cm²



Lời giải.

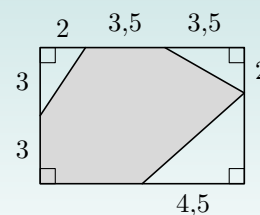
$$S_d = 8 \cdot 6 - \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{(2 + 5) \cdot 3}{2} = 34,5 \text{ cm}^2.$$

□

Ví dụ 4.

Theo kích thước đã cho như hình (đơn vị m). Tính diện tích phần tô đậm.

ĐS: 38,5 cm²



Lời giải.

$$S_d = 9 \cdot 6 - \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 3,5}{2} - \frac{4,5 \cdot 4}{2} = 38,5 \text{ cm}^2.$$

□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có diện tích 30 cm², các đường trung tuyến BM , CN cắt nhau tại G . Tính diện tích tứ giác $AMGN$.

ĐS: 10 cm²

Lời giải.

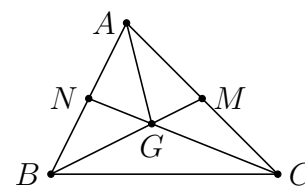
Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $NG = \frac{1}{3}NC$.

Vì N là trung điểm của AB nên $NA = \frac{1}{2}AB$.

Ta có $S_{GNA} = \frac{1}{3}S_{CNA} = \frac{1}{6}S_{ABC} = 5 \text{ cm}^2$.

Tương tự ta có $S_{GMA} = 5 \text{ cm}^2$.

Vậy $S_{AMGN} = S_{GNA} + S_{GMA} = 10 \text{ cm}^2$.



□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có diện tích 40 cm². Gọi D , E lần lượt là trung điểm của AB , AC . Tính diện tích tứ giác $BDEC$.

ĐS: 30 cm²

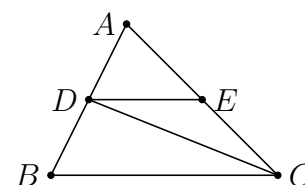
Lời giải.

Vì D là trung điểm của AB nên $DA = \frac{1}{2}AB$.

Vì E là trung điểm của AC nên $EA = \frac{1}{2}AC$.

Ta có $S_{ADE} = \frac{1}{2}S_{ADC} = \frac{1}{4}S_{ABC} = 10 \text{ cm}^2$.

Vậy $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} = 30 \text{ cm}^2$.



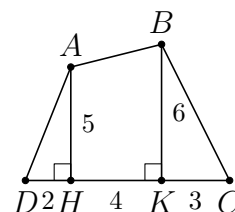
□

3

Bài tập về nhà

Bài 1.

Tính diện tích tứ giác $ABCD$ có các kích thước bằng cm như hình. **ĐS:** 36 cm^2



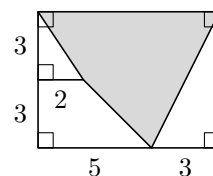
Lời giải.

$$S_{ABCD} = S_{AHD} + S_{AHKB} + S_{BKC} = \frac{5 \cdot 2}{2} + \frac{(5+6) \cdot 4}{2} + \frac{6 \cdot 3}{2} = 36 \text{ cm}^2.$$

□

Bài 2.

Tính diện tích phần tô đậm theo các kích thước bằng cm trên hình. **ĐS:** 25,5 cm^2



Lời giải.

$$S_d = 8 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{(2+5) \cdot 3}{2} - \frac{3 \cdot 6}{2} = 25,5 \text{ cm}^2.$$

□

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích 60 cm^2 . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BA , BC . CM cắt AN tại E .

1. Tính diện tích $\triangle AEC$.

ĐS: 10 cm^2

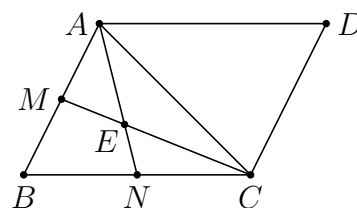
2. Tính diện tích tứ giác $AECD$.

ĐS: 40 cm^2

Lời giải.

1. Ta có E là trọng tâm $\triangle ABC$. Suy ra $AE = \frac{2}{3}AN$ và $NC = \frac{1}{2}BC$.

$$S_{AEC} = \frac{2}{3}S_{ANC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABCD} = 10 \text{ cm}^2.$$



2. $S_{AECD} = S_{ADC} + S_{AEC} = 40 \text{ cm}^2.$

□

§7 Ôn tập chương II

1 Tóm tắt lý thuyết

Xem phần *Tóm tắt lý thuyết* từ Bài 1 đến Bài 6.

2 Bài tập và các dạng toán

Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $AD = 6,8$ cm. Gọi H, I, E, K lần lượt là các trung điểm của BC, HC, DC, EC .

- | | |
|--|--------------------------------|
| 1. Tính diện tích hình chữ nhật $ABCD$. | ĐS: $81,6 \text{ cm}^2$ |
| 2. Tính diện tích tam giác DBE . | ĐS: $20,4 \text{ cm}^2$ |
| 3. Tính diện tích tứ giác $EHIK$. | ĐS: $7,65 \text{ cm}^2$ |

 **Lời giải.**

1. Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là
 $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 12 \cdot 6,8 = 81,6 \text{ cm}^2$.

2. Do E là trung điểm của DC nên $DE = EC = \frac{DC}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BC \perp DC$

hay $BC \perp DE$, do đó BC là đường cao của $\triangle BDE$.

Vậy diện tích tam giác DBE là $S_{\triangle DBE} = \frac{1}{2} DE \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 20,4 \text{ cm}^2$.

- c) Do H là trung điểm của BC nên $HC = HB = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 6,8 = 3,4$ cm.

I là trung điểm của HC nên $IC = \frac{1}{2} HC = \frac{1}{2} \cdot 3,4 = 1,7$ cm.

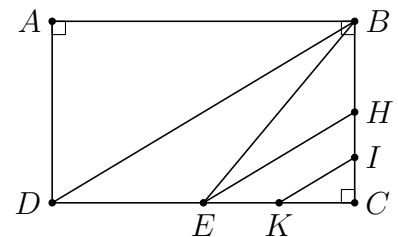
K là trung điểm của EC nên $KC = \frac{1}{2} EC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ cm.

Diện tích tam giác HEC vuông tại C là $S_{\triangle HEC} = \frac{1}{2} \cdot HC \cdot EC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3,4 = 10,2 \text{ cm}^2$.

Diện tích tam giác ICK vuông tại C là $S_{\triangle ICK} = \frac{1}{2} \cdot IC \cdot KC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,7 = 2,55 \text{ cm}^2$.

Vậy diện tích tứ giác $EHIK$ là $S_{EHIK} = S_{\triangle HEC} - S_{\triangle ICK} = 10,2 - 2,55 = 7,65 \text{ cm}^2$.

□



Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ có $AB = 6$ cm. Trên cạnh AB lấy E , trên cạnh DC lấy F sao cho $BE = DF = 2$ cm.

- | | |
|---|------------------------------|
| 1. Tính diện tích hình vuông $ABCD$. | ĐS: 36 cm^2 |
| 2. Tính diện tích tứ giác $ABFD$. | ĐS: 24 cm^2 |
| 3. Tính diện tích hình bình hành $BEDF$. | ĐS: 12 cm^2 |

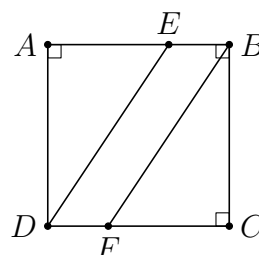
 **Lời giải.**

1. Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB^2 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$.

2. Do $ABFD$ là hình thang vuông tại A, D .

Do đó diện tích của tứ giác $ABFD$ là

$$S_{ABFD} = \frac{1}{2}(AB + DF) \cdot AD = \frac{1}{2}(2 + 6) \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2.$$



c) Ta có $BE = 2$ cm nên $AE = 4$ cm.

Diện tích tam giác ADE vuông tại A là $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12 \text{ cm}^2$.

Vậy diện tích tứ giác $BEDF$ là $S_{BEDF} = S_{ABFD} - S_{\triangle AED} = 24 - 12 = 12 \text{ cm}^2$.

□

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K, L là hai điểm thuộc cạnh BC sao cho $BK = KL = LC$. Tính tỉ số diện tích của

1. Các tam giác DAC và DCK .

ĐS: $\frac{S_{\triangle DAC}}{S_{\triangle DCK}} = \frac{3}{2}$

2. Tam giác DAC và tứ giác $ADLB$.

ĐS: $\frac{S_{\triangle DAC}}{S_{ADLB}} = \frac{3}{5}$

3. Các tứ giác $ABKD$ và $ABLD$.

ĐS: $\frac{S_{ABKD}}{S_{ABLD}} = \frac{4}{5}$

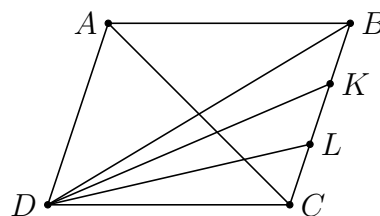
 **Lời giải.**

1. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel DC$

nên $S_{\triangle DAC} = S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Do $\triangle DCK$ và $\triangle DCB$ có chung đường cao kẻ từ D , $CK = \frac{2}{3}CB$

nên $S_{\triangle DCK} = \frac{2}{3}S_{\triangle DCB} = \frac{2}{3}S_{\triangle DAC} \Rightarrow \frac{S_{\triangle DAC}}{S_{\triangle DCK}} = \frac{3}{2}$.



b) $S_{\triangle DCL} = \frac{1}{3}S_{\triangle DCB} = \frac{1}{6}S_{ABCD} \Rightarrow S_{ADLB} = S_{ABCD} - S_{\triangle DCL} = \frac{5}{6}S_{ABCD}$. Do đó $\frac{S_{\triangle DAC}}{S_{ADLB}} = \frac{3}{5}$.

c) $S_{ABKD} = S_{ABCD} - S_{\triangle DCK} = \frac{2}{3}S_{ABCD} \Rightarrow \frac{S_{ABKD}}{S_{ABLD}} = \frac{4}{5}$.

Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = a$, $CD = 3a$. Gọi E , M , N lần lượt là trung điểm của CD , AD , BC . Tính tỉ số diện tích của

1. Các tam giác DAE và CBE .

ĐS: $\frac{S_{\triangle DAE}}{S_{\triangle CBE}} = 1$

2. Tam giác EAB và hình thang $ABCD$.

ĐS: $\frac{S_{\triangle EAB}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$

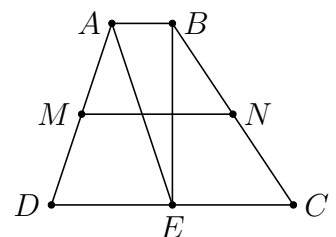
3. Các tứ giác $AMNB$ và $DMNC$.

ĐS: $\frac{S_{AMNB}}{S_{DMNC}} = \frac{3}{5}$

Lời giải.

1. $\triangle DAE$ và $\triangle CBE$ có hai đáy $ED = EC$, hai đường cao kẻ từ A và B bằng nhau.

Do đó $S_{\triangle DAE} = S_{\triangle CBE} \Rightarrow \frac{S_{\triangle DAE}}{S_{\triangle CBE}} = 1$.



b) Ta có $\frac{S_{\triangle EAB}}{S_{ABCD}} = \frac{AB}{AB + CD} = \frac{a}{a + 3a} = \frac{1}{4}$.

c) Do M , N lần lượt là trung điểm của AD , BC nên MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Nên ta có $MN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{a + 3a}{2} = 2a$.

Ta có $AMNB$ và $DMNC$ là hai hình thang có chiều cao bằng nhau

nên $\frac{S_{AMNB}}{S_{DMNC}} = \frac{AB + MN}{DC + MN} = \frac{a + 2a}{2a + 3a} = \frac{3}{5}$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến AD , BE , CF cắt nhau tại G . Chứng minh rằng $S_{\triangle GAB} = S_{\triangle GBC} = S_{\triangle GAC}$.

Lời giải.

Do G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $GA = \frac{2}{3}DA$.

Nên ta có $S_{\triangle GBA} = \frac{2}{3}S_{\triangle DAB} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$. (1)

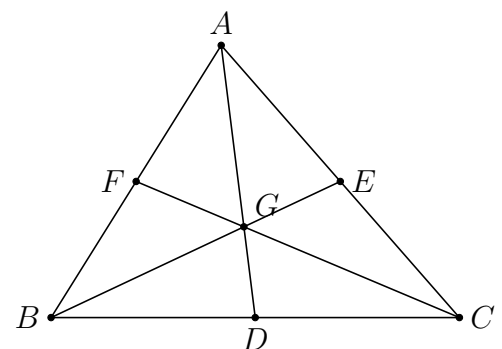
Do G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $GB = \frac{2}{3}EB$.

Nên ta có $S_{\triangle GBC} = \frac{2}{3}S_{\triangle BEC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$. (2)

Do G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $GC = \frac{2}{3}CF$.

Nên ta có $S_{\triangle GCA} = \frac{2}{3}S_{\triangle AFC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $S_{\triangle GAB} = S_{\triangle GAC} = S_{\triangle GBC}$.



Ví dụ 6. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Chứng minh rằng $S_{BMNC} = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$.

Lời giải.

Ta có N là trung điểm của AC nên $AN = \frac{1}{2}AC$,

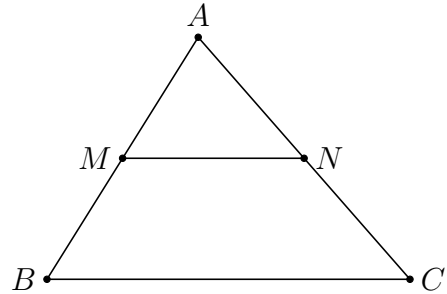
do đó $S_{\triangle MAN} = \frac{1}{2}S_{\triangle MAC}$.

Mặt khác M là trung điểm AB nên $AM = \frac{1}{2}AB$,

do đó $S_{\triangle CAM} = \frac{1}{2}S_{\triangle CAB}$.

Khi đó $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

Vậy $S_{BMNC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMN} = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$.



□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 12$ cm, $BD = 16$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CB, CD . Tính

1. Diện tích hình thoi $ABCD$. **ĐS:** 96 cm^2
2. Diện tích tứ giác $AMCN$. **ĐS:** 48 cm^2
3. Diện tích tam giác AMN . **ĐS:** 36 cm^2

Lời giải.

1. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96 \text{ cm}^2.$$

2. Do M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD nên $MN \parallel BD \Rightarrow MN \parallel AC$.

$$\text{Ta lại có } MN = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \text{ cm.}$$

$$\text{Do đó } S_{AMCN} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2.$$

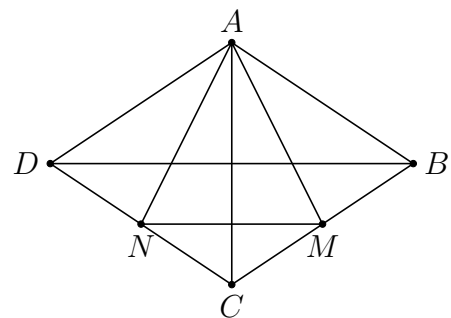
- c) Ta có N là trung điểm của DC nên $CN = \frac{1}{2}DC$, do đó $S_{\triangle MCN} = \frac{1}{2}S_{\triangle MDC}$.

$$\text{Mặt khác } M \text{ là trung điểm } CB \text{ nên } CM = \frac{1}{2}CB, \text{ do đó } S_{\triangle DCM} = \frac{1}{2}S_{\triangle DCB}.$$

$$\text{Khi đó } S_{\triangle CMN} = \frac{1}{4}S_{\triangle CBD} = \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{1}{8} \cdot 96 = 12 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Vậy diện tích tam giác } AMN \text{ là } S_{\triangle AMN} = S_{AMCN} - S_{\triangle CMN} = 48 - 12 = 36 \text{ cm}^2.$$

□



Bài 2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $3CD = 7AB$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC . Tính tỉ số diện tích của hai tứ giác $ABFE$ và $DCFE$.

ĐS: $\frac{S_{ABFE}}{S_{DCFE}} = \frac{2}{3}$

Lời giải.

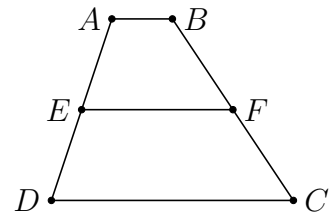
Ta có $3CD = 7AB \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{3}{7} = a \Rightarrow AB = 3a, CD = 7a$.

Do E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC nên EF là đường trung bình của hình thang $ABCD$.

Khi đó ta có $EF = \frac{AB + CD}{2} = \frac{3a + 7a}{2} = 5a$.

Vì $ABFE$ và $DCFE$ là hai hình thang có chiều cao bằng nhau

nên $\frac{S_{ABFE}}{S_{DCFE}} = \frac{AB + EF}{CD + EF} = \frac{3a + 5a}{7a + 5a} = \frac{2}{3}$.



□

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm O bất kỳ nằm trong hình bình hành. Chứng minh rằng $S_{\triangle OAB} + S_{\triangle COD} = S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBC}$.

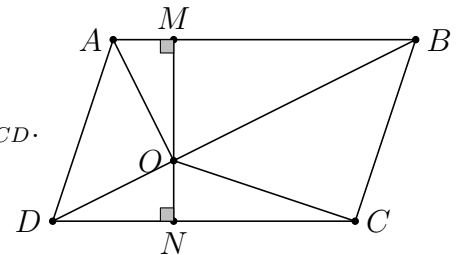
Lời giải.

Kẻ $OM \perp AB, ON \perp DC$. Do $AB \parallel CD$ nên O, M, N thẳng hàng, ta có

$$S_{\triangle OAB} + S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}OM \cdot AB + \frac{1}{2}ON \cdot CD = \frac{1}{2}AB \cdot MN = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Mặt khác $S_{\triangle OAD} + S_{\triangle CBO} = S_{ABCD} - (S_{\triangle OAB} + S_{\triangle COD}) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Do đó $S_{\triangle OAB} + S_{\triangle COD} = S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBC}$.



□

Chương 3

Tam giác đồng dạng

§1 Định lý Ta-lét

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Tỷ số của hai đoạn thẳng

Định nghĩa 19. Tỷ số của hai đoạn thẳng là tỷ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

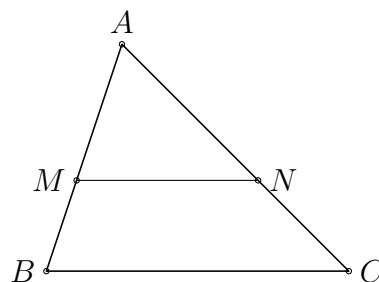
1.2 Đoạn thẳng tỉ lệ

Định nghĩa 20. Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$ nếu có tỉ lệ thức : $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ hay $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$.

1.3 Định lý Ta-lét

Định lý 9. Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

GT	$\triangle ABC, MN \parallel BC (M \in AB, N \in AC)$
KL	$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}; \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}; \frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}.$



⚠ 22. Chú ý : Định lý Ta-lét vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

2

Bài tập và các dạng toán

Dạng 36. Viết tỉ số các cặp đoạn thẳng hoặc tính tỉ số của hai đoạn thẳng

Sử dụng định nghĩa đoạn thẳng tỉ lệ.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Viết tỉ số của các cặp đoạn thẳng sau

a) $AB = 125 \text{ cm}, CD = 625 \text{ cm};$ **ĐS:** $\frac{1}{5}$ b) $MN = 45 \text{ cm}, PQ = 13,5 \text{ dm.}$ **ĐS:** $\frac{1}{3}$.

 **Lời giải.**

a) $\frac{AB}{CD} = \frac{125}{625} = \frac{1}{5}.$

b) $\frac{MN}{PQ} = \frac{45}{135} = \frac{1}{3}.$

□

 **Ví dụ 2.** Viết tỉ số của các cặp đoạn thẳng sau

a) $AB = 5 \text{ cm}, CD = 15 \text{ cm};$ **ĐS:** $\frac{1}{3}$ b) $EF = 48 \text{ cm}, GH = 16 \text{ dm.}$ **ĐS:** $\frac{3}{10}$

 **Lời giải.**

a) $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$

b) $\frac{EF}{GH} = \frac{48}{160} = \frac{3}{10}.$

□

 **Ví dụ 3.** Đoạn thẳng AB gấp 5 lần đoạn thẳng CD , đoạn thẳng $A'B'$ gấp 7 lần đoạn thẳng CD .

a) Tính tỉ số của hai đoạn thẳng AB và $A'B'$.

ĐS: $\frac{5}{7}$

b) Cho biết đoạn thẳng $MN = 55 \text{ cm}$ và $M'N' = 77 \text{ cm}$; hỏi hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ có tỉ lệ với đoạn thẳng MN và $M'N'$ không?

ĐS: Có tỉ lệ

 **Lời giải.**

a) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{5CD}{7CD} = \frac{5}{7}.$

b) $\frac{MN}{M'N'} = \frac{55}{77} = \frac{5}{7} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{MN}{M'N'}.$

Vậy hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ tỉ lệ với đoạn thẳng MN và $M'N'$.

□

Ví dụ 4. Cho biết độ dài của MN gấp 5 lần độ dài của PQ và độ dài đoạn thẳng $M'N'$ gấp 12 lần độ dài của PQ .

a) Tính tỉ số của hai đoạn thẳng MN và $M'N'$.

ĐS: $\frac{5}{12}$

b) Cho biết đoạn thẳng $DE = 9$ cm và $D'E' = 10,8$ dm, hỏi hai đoạn thẳng MN và $M'N'$ có tỉ lệ với đoạn thẳng DE và $D'E'$ không?

ĐS: Không tỉ lệ

Lời giải.

a) $\frac{MN}{M'N'} = \frac{5PQ}{12PQ} = \frac{5}{12}$.

b) $\frac{DE}{D'E'} = \frac{9}{108} = \frac{1}{12} \neq \frac{5}{12} = \frac{MN}{M'N'}$.

Vậy hai đoạn thẳng MN và $M'N'$ không tỉ lệ với đoạn thẳng DE và $D'E'$.

□

Dạng 37. Sử dụng định lý Ta-lét để tính độ dài đoạn thẳng hoặc chứng minh đoạn thẳng tỉ lệ

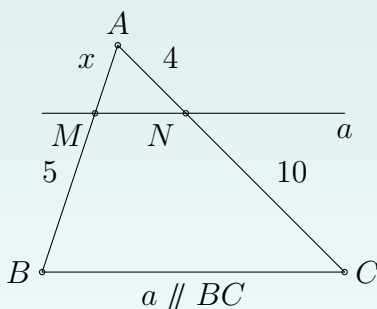
Bước 1. Xác định các cặp đoạn thẳng tỉ lệ có được nhờ định lý Ta-lét.

Bước 2. Sử dụng độ dài các đoạn thẳng đã có và vận dụng các tính chất của tỉ lệ thức để tìm độ dài đoạn thẳng cần tính.

BÀI TẬP MẪU

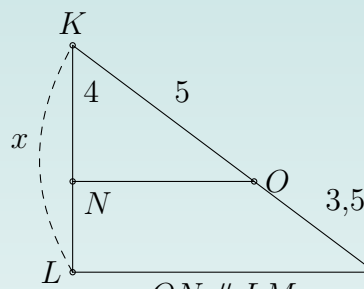
Ví dụ 1. Tính x trong các trường hợp sau.

a)



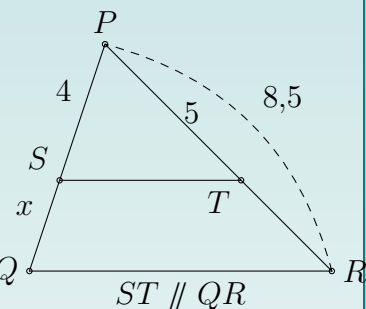
ĐS: $x = 2$

b)



ĐS: $x = 6,8$

c)



ĐS: $x = 2,8$

Lời giải.

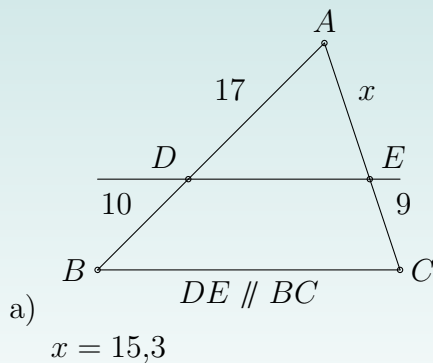
a) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow x = 2.$

b) $\frac{KN}{KL} = \frac{KO}{KM} \Leftrightarrow \frac{4}{x} = \frac{5}{5+3,5} \Leftrightarrow x = 6,8.$

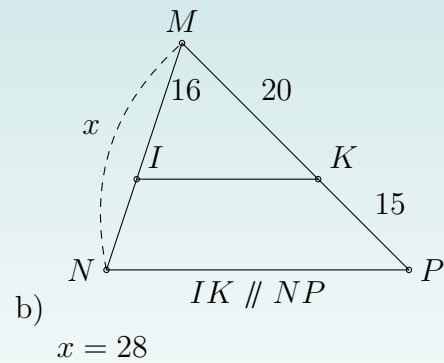
c) $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR} \Leftrightarrow \frac{4}{x} = \frac{5}{8,5-5} \Leftrightarrow x = 2,8.$

□

Ví dụ 2. Tính x trong các trường hợp sau.



ĐS:



ĐS:

Lời giải.

a) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{17}{10} = \frac{x}{9} \Leftrightarrow x = 15,3.$

b) $\frac{MI}{MN} = \frac{MK}{MP} \Leftrightarrow \frac{16}{x} = \frac{20}{20+15} \Leftrightarrow x = 28.$

□

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ có $(AB \parallel CD)$ và $AB < CD$. Đường thẳng song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại M, N . Chứng minh

a) $\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC};$ b) $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC};$ c) $\frac{MD}{DA} = \frac{NC}{CB}.$

Lời giải.

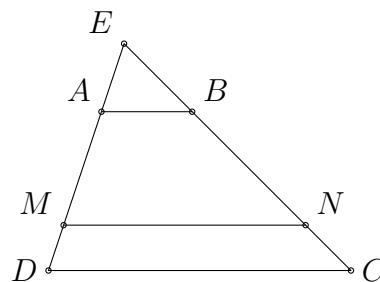
Gọi giao điểm của AD và BC là E .

a) Vì $AB \parallel CD$ nên $\frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC}$ và $AB \parallel MN$ nên $\frac{EA}{AM} = \frac{EB}{BN}$.

Từ 2 điều trên suy ra $\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC}$.

b) Theo ý a) ta có $\frac{MA}{NB} = \frac{AD}{BC} = \frac{EA}{EB} = \frac{AM}{BN}$ nên theo tính chất của tỉ lệ thức suy ra $\frac{MA}{NB} = \frac{AD - AM}{BC - BN} = \frac{MD}{NC}$. Vậy $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$.

c) Theo ý b) ta có $\frac{MD}{NC} = \frac{DA}{CB} = \frac{MA}{NB}$ nên theo tính chất của tỉ lệ thức suy ra $\frac{MD}{NC} = \frac{MD + MA}{NC + NB} = \frac{AD}{BC}$. Vậy $\frac{MD}{DA} = \frac{NC}{CB}$.



Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , đường thẳng d cắt AB , AC lần lượt tại B' , C' sao cho $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. Chứng minh

a) $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$;

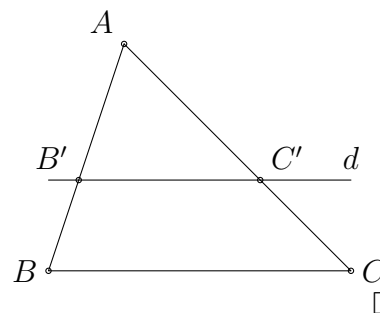
b) $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$.

Lời giải.

Từ $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$ suy ra $d \parallel BC$ (theo định lý Ta-lét đảo).

a) Vì $B'C' \parallel BC$ nên theo định lý Ta-lét ta có $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$;

b) Vì $B'C' \parallel BC$ nên theo định lý Ta-lét ta có $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$.



3 Bài tập về nhà

Bài 1. Viết tỉ số của các cặp đoạn thẳng có độ dài như sau

a) $MN = 25\text{cm}$ và $PQ = 10\text{dm}$; **ĐS:** $\frac{1}{4}$ b) $EF = 1,2\text{m}$ và $GH = 24\text{cm}$. **ĐS:** $\frac{5}{1}$

Lời giải.

a) $\frac{MN}{PQ} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

b) $\frac{EF}{GH} = \frac{120}{24} = \frac{5}{1}$.

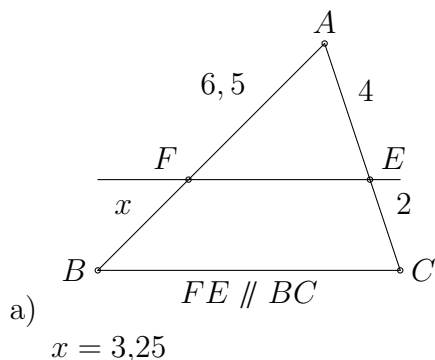
Bài 2. Cho biết $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$ và $CD = 12\text{cm}$. Tính độ dài AB .

ĐS: $AB = 9\text{ cm}$

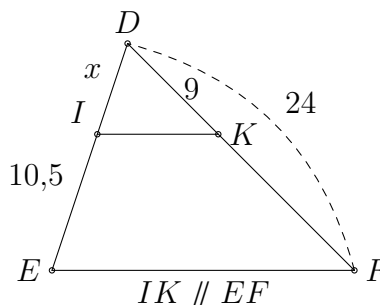
Lời giải.

Ta có $\frac{AB}{12} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AB = 12 \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow AB = 9\text{ cm}$. □

Bài 3. Tính x trong các trường hợp sau. Tính x trong các trường hợp sau.



ĐS:



ĐS: $x = 6,3$

Lời giải.

a) $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{6,5}{x} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = 3,25$.

b) $\frac{DI}{IE} = \frac{DK}{KF} \Leftrightarrow \frac{x}{10,5} = \frac{9}{24 - 9} \Leftrightarrow x = 6,3$. □

Bài 4. Cho góc xAy khác góc bẹt. Trên tia Ax lấy các điểm B, C . Qua B và C vẽ hai đường thẳng song song, cắt Ay lần lượt tại D và E . Qua E vẽ đường thẳng song song với CD cắt tia Ax tại F .

a) So sánh $\frac{AB}{AC}$ và $\frac{AD}{AE}$; $\frac{AC}{AF}$ và $\frac{AD}{AE}$.

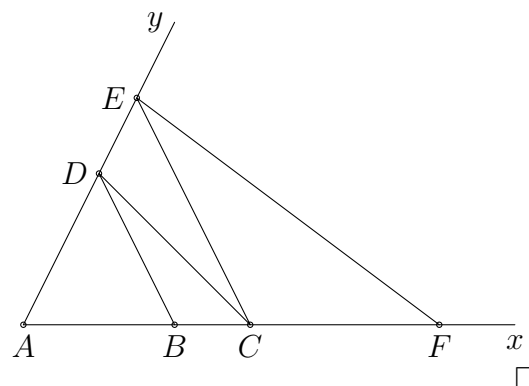
ĐS: $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$; $\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AE}$

b) Chứng minh $AC^2 = AB \cdot AF$.

Lời giải.

a) Theo định lí Ta-lét ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$; $\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AE}$.

b) Từ a) ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AF}$ suy ra $AC^2 = AB \cdot AF$.



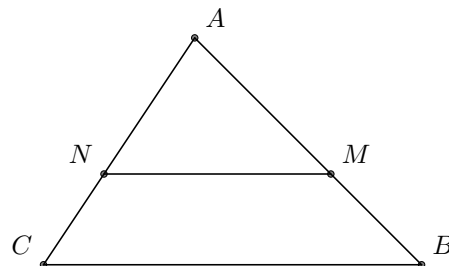
§2 Định lý đảo và hệ quả của định lý Ta-lét

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định lý Ta-lét đảo

Định lý 10. Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại.

GT	$\triangle ABC, M \in AB, N \in AC$ $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$
KL	$MN \parallel BC.$



1.2 Hệ quả của định lý Ta-lét

Định lý 11. Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỷ lệ với ba cạnh còn lại của tam giác đã cho.

GT	$\triangle ABC, MN \parallel BC (M \in AB, N \in AC)$
KL	$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$

⚠ 23. Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng d song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 38. Sử dụng hệ quả của định lý Ta-lét để tính độ dài đoạn thẳng

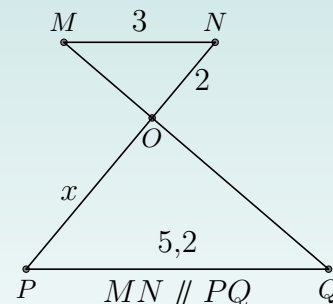
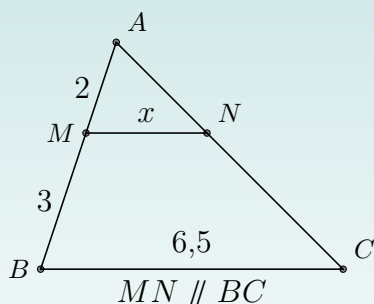
Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định các cặp đoạn thẳng tỷ lệ có được nhờ hệ quả của định lý Ta-lét.

Bước 2: Sử dụng độ dài các đoạn thẳng đã có và vận dụng các tính chất của tỷ lệ thức để tìm độ dài đoạn thẳng cần tính.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính x trong các trường hợp sau



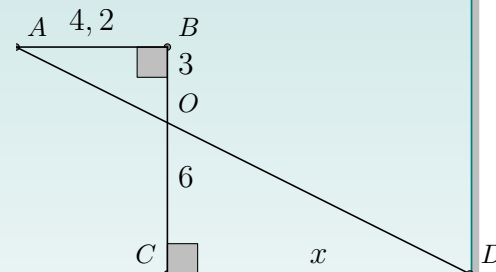
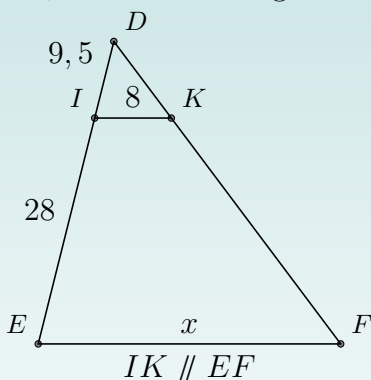
Lời giải.

$$\text{a) } \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3+2} \Rightarrow MN = \frac{2}{5} \cdot 6,5 = 2,6 (\text{đvdd}).$$

$$\text{b) } \frac{OP}{ON} = \frac{PQ}{MN} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{5,2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{52}{15} (\text{đvdd}).$$

□

Ví dụ 2. Tính x trong các trường hợp sau



Lời giải.

$$\text{a) } \frac{IK}{x} = \frac{DI}{DE} \Leftrightarrow x = \frac{IK \cdot DE}{DI} = \frac{8 \cdot (9,5 + 28)}{9,5} = \frac{600}{19} (\text{đvdd}).$$

b) $\frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD} \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{4,2}{x} \Leftrightarrow x = 8,4(\text{dvdd}).$

□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A , $MN \parallel BC$ ($M \in AB, N \in AC$), $AB = 24$ cm, $AM = 16$ cm, $AN = 12$ cm. Tính độ dài của các đoạn thẳng NC và NB .

Lời giải.

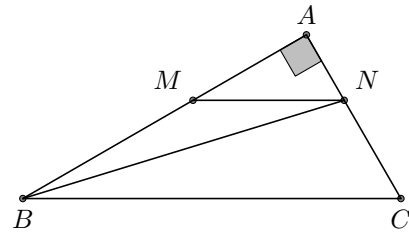
Theo định lý Ta-lét thì $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

$$\Rightarrow AC = \frac{AB \cdot AN}{AM} = \frac{24 \cdot 12}{16} = 18(\text{cm})$$

$$\Rightarrow NC = AC - AN = 6 \text{ cm}.$$

Lại có tam giác ANB vuông tại A .

$$\text{Tính được } NB = \sqrt{AN^2 + AB^2} = 12\sqrt{5}.$$



□

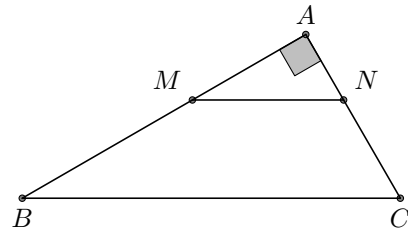
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , $MN \parallel BC$ ($M \in AB, N \in AC$), $AB = 25$ cm, $AM = 16$ cm, $BC = 45$ cm, $AN = 12$ cm. Tính độ dài của các đoạn thẳng MN và AC .

Lời giải.

Theo định lý Ta-lét thì $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. Suy ra

$$MN = \frac{AM \cdot BC}{AB} = \frac{16 \cdot 45}{25} = 28,8 \text{ cm}.$$

$$AC = \frac{AB \cdot AN}{AM} = \frac{25 \cdot 12}{16} = 18,75 \text{ cm}.$$



□

Dạng 39. Sử dụng định lý Ta-lét đảo để chứng minh các đường thẳng song song

Thực hiện theo các bước

Bước 1: Xác định cặp đoạn thẳng tỷ lệ trong tam giác.

Bước 2: Sử dụng định lý đảo của định lý Ta-lét để chứng minh các đoạn thẳng song song.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi trung điểm của các đường chéo AC và BD lần lượt là M, N . Chứng minh rằng MN, AB và CD song song với nhau.

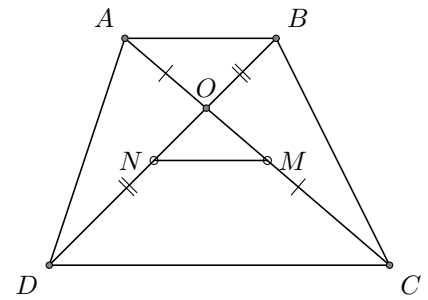
Lời giải.

Gọi giao điểm của hai đường chéo là O . Vì $AB \parallel CD$ nên $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow \frac{OC + OA}{OA} = \frac{OD + OB}{OB}$. Suy ra $\frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB}$.

Từ $AC = 2AM$ và $BD = 2BN$.
Suy ra $\frac{2AM}{OA} = \frac{2BN}{OB} \Rightarrow \frac{AM}{OA} = \frac{BN}{OB}$.

Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có $\frac{AM - OA}{OA} = \frac{BN - OB}{OB}$ hay $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$.

Áp dụng định lý Ta-lét đảo suy ra $MN \parallel AB$ mà $AB \parallel CD$ (do $ABCD$ là hình thang) nên $MN \parallel AB \parallel CD$.



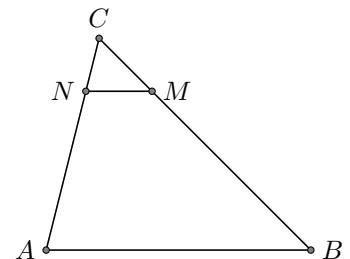
□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có điểm M trên cạnh BC sao cho $BC = 4CM$. Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $\frac{CN}{AN} = \frac{1}{3}$. Chứng minh MN song song với AB .

Lời giải.

Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có $\frac{CN}{AN} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CN}{AN + CN} = \frac{1}{3 + 1} \Rightarrow \frac{CN}{AC} = \frac{1}{4}$.

Mặt khác $\frac{CM}{BC} = \frac{1}{4}$. Suy ra $\frac{CM}{BC} = \frac{CN}{AC}$. Vậy $MN \parallel AB$.



□

Dạng 40. Sử dụng hệ quả định lý Ta-lét để chứng minh các hệ thức, các đoạn thẳng bằng nhau

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Xét đường thẳng song song với một cạnh của tam giác, sử dụng hệ quả để lập các đoạn thẳng tỷ lệ.

Bước 2: Sử dụng các tỉ số đã có, cùng với các tính chất của tỉ lệ thức, các tỉ số trung gian (nếu cần) để tính độ dài các đoạn thẳng hoặc chứng minh các hệ thức có được từ hệ quả, từ đó suy ra các đoạn thẳng bằng nhau.

BÀI TẬP MẪU

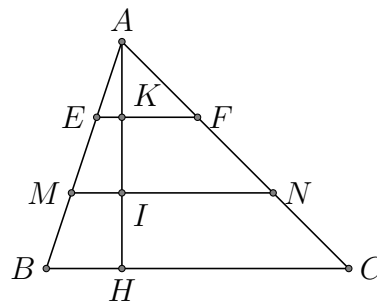
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $BC = 15\text{cm}$. Trên đường cao AH lấy các điểm I, K sao cho $AK = KI = IH$. Qua I, K vẽ các đường thẳng $EF \parallel BC, MN \parallel BC$.

1. Tính độ dài các đoạn thẳng EF và MN .
2. Tính diện tích tứ giác $MNEF$, biết rằng diện tích của tam giác ABC là 270 cm^2 .

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AK}{AH} = \frac{1}{3}$. Suy ra $EF = \frac{1}{3}BC = 5$ (cm).
Ta có $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AH} = \frac{2}{3}$. Suy ra $MN = \frac{2}{3}BC = 10$ (cm).

- b) Vì $S_{ABC} = 270$ nên $AH \cdot BC = 540$.
Suy ra $AH = 36$ nên $IK = 12$.
Suy ra $S_{ABCD} = \frac{IK(EF + MN)}{2} = 90$ (cm²).



□

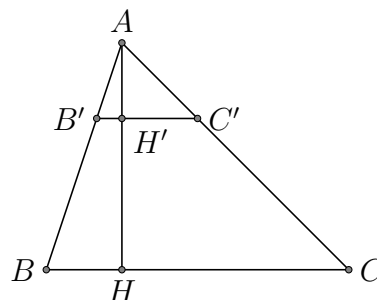
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , đường cao AH . Đường thẳng d song song với BC , cắt các cạnh AB, AC và đường cao AH theo thứ tự tại các điểm B', C', H' .

1. Chứng minh $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$.
2. Cho $AH' = \frac{1}{3}AH$ và diện tích tam giác ABC là $67,5$ cm². Tính diện tích tam giác $AB'C'$.

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{AH'}{AH} = \frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$.

- b) Vì $AH' = \frac{1}{3}AH$ nên $B'C' = \frac{1}{3}BC$.
Suy ra $S_{AB'C'} = \frac{1}{2} \cdot AH' \cdot B'C' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot AH \cdot \frac{1}{3} \cdot BC = \frac{1}{9}S_{ABC} = 7,5$ cm².



□

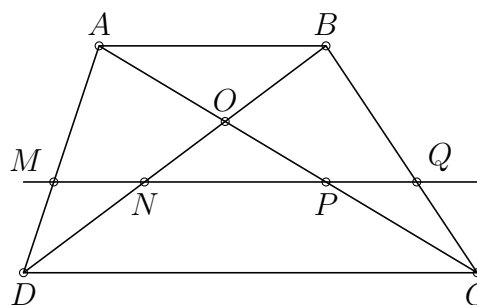
Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Đường thẳng song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC và các đường chéo BD, AC lần lượt tại M, N, P, Q . Chứng minh

1. $\frac{MD}{AD} = \frac{CQ}{BC}$.
2. $MN = PQ$.

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{MD}{AD} = \frac{DN}{DB} = \frac{CQ}{CB}$.

- b) Ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{MD}{AD} = \frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB}$.



□

Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O và đường thẳng qua O song song với đáy cắt các cạnh bên tại M và N . Chứng minh $OM = ON$.

Lời giải.

Xét $\triangle ADC$ có $MO \parallel DC$ nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{OM}{DC} = \frac{OA}{AC}. \quad (1)$$

Xét $\triangle BCD$ có $ON \parallel CD$ nên theo định lý Ta-lét ta có

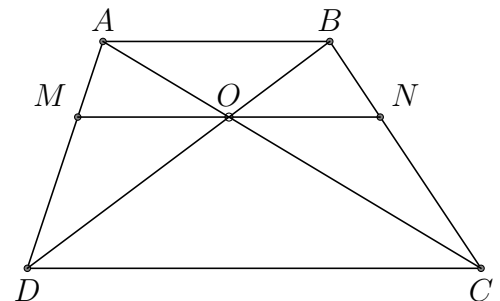
$$\frac{ON}{CD} = \frac{BO}{BC}. \quad (2)$$

Xét $\triangle CAB$ có $ON \parallel CD$ nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{BN}{BC} = \frac{AO}{AC}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{OM}{DC} = \frac{OA}{AC} = \frac{BN}{BC} = \frac{ON}{CD}$.

Suy ra $OM = ON$.



□

3

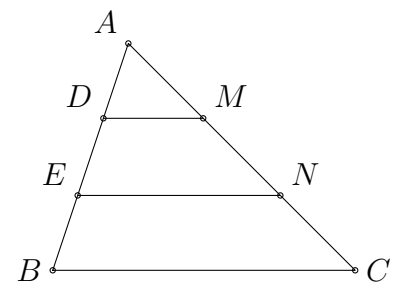
Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$. Trên cạnh AB lấy điểm D và E sao cho $AD = DE = EB$. Từ D, E kẻ các đường thẳng song song với BC cắt AC theo thứ tự tại M, N . Tính theo a độ dài các đoạn thẳng DM và EN .

Lời giải.

Áp dụng định lý Ta-lét ta có $\frac{AD}{AB} = \frac{DM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DM = \frac{a}{3}$.

Tương tự ta có $\frac{AD}{AE} = \frac{DM}{EN} = \frac{1}{2} \Rightarrow EN = 2DM = \frac{2}{3}a$.



□

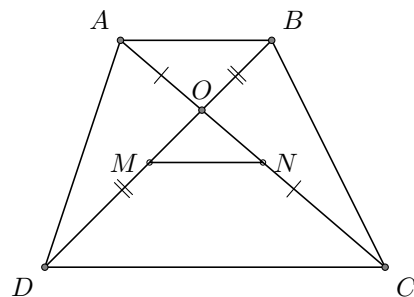
Bài 2. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD và AC . Biết rằng $MD = 2MO$, đáy lớn $CD = 5,6$ cm.

1. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

2. Chứng minh $MN = \frac{CD - AB}{2}$.

Lời giải.

- a) Vì $AB \parallel CD$ nên $\frac{OD}{DB} = \frac{OC}{AC} \Rightarrow \frac{OD}{2MD} = \frac{OC}{2NC} \Rightarrow \frac{OD}{MD} = \frac{OC}{NC}$.
 Suy ra $MN \parallel CD$ nên $\frac{MN}{CD} = \frac{OM}{OD} = \frac{1}{3}$. Vậy $MN = \frac{1}{3} \cdot CD = \frac{28}{15}$.



- b) Vì $OB = MB - OM = MD - OM = OM$
 nên $\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD} = \frac{MO}{3MO} = \frac{1}{3}$ suy ra $CD = 3AB$.
 Vậy $MN = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{2}CD - \frac{1}{6}CD = \frac{1}{2}CD - \frac{1}{6} \cdot 3AB = \frac{1}{2}(CD - AB)$.

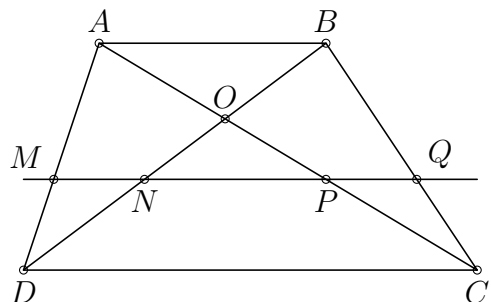
□

Bài 3. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Đường thẳng song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC và các đường chéo BD, AC lần lượt tại M, Q, N, P . Chứng minh

- $\frac{DN}{BD} = \frac{CP}{AC}$.
- $MN = PQ$.

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{DN}{BD} = \frac{DM}{DA} = \frac{CP}{AC}$.
 b) Ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{DN}{DB} = \frac{CP}{CA} = \frac{PQ}{AB}$ suy ra $MN = PQ$.



□

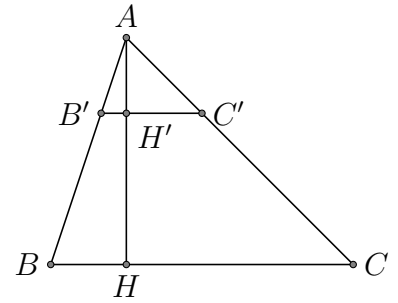
Bài 4. Tam giác ABC , đường cao AH . Đường thẳng d song song với BC , cắt các cạnh AB, AC và đường cao AH theo thứ tự tại các điểm B', C', H' . Chứng minh

- $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$;
- $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{B'C'}{BC}\right)^2$.

Lời giải.

a) $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'H'}{BH} = \frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}.$

b) $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AH' \cdot B'C'}{AH \cdot BC} = \left(\frac{B'C'}{BC}\right)^2.$



□

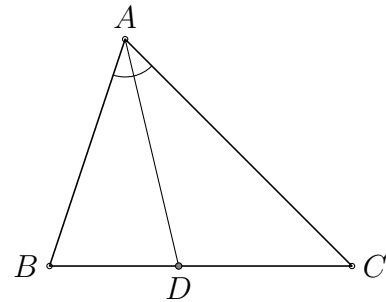
§3 Tính chất của đường phân giác của tam giác

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định lý

- ☑ Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn thẳng ấy.
- ☑ Ta có

GT	$\triangle ABC$, AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$, ($D \in BC$).
KL	$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.



⚠ 24. Định lý vẫn đúng đối với tia phân giác của góc ngoài của tam giác.

2 Bài tập và các dạng toán

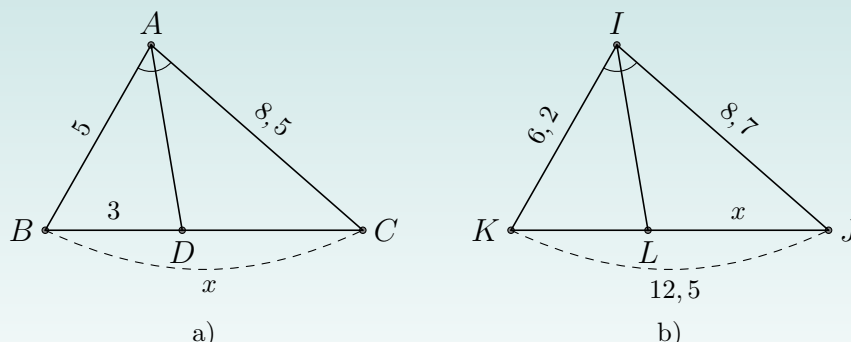
Dạng 41. Sử dụng tính chất đường phân giác của tam giác để tính độ dài đoạn thẳng

Thực hiện theo các bước

- ☑ Bước 1: Xác định đường phân giác và lập các đoạn thẳng tỉ lệ.
- ☑ Bước 2: Sử dụng các đoạn thẳng tỉ lệ đó để tính độ dài đoạn thẳng chưa biết.

🔗 🔗 🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗 🔗 🔗

📖 **Ví dụ 1.** Tính x trong hình và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.



Lời giải.

- ✓ Hình a: Do AD là đường phân giác trong của góc A nên ta có

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow DC = \frac{AC}{AB} \cdot DB.$$

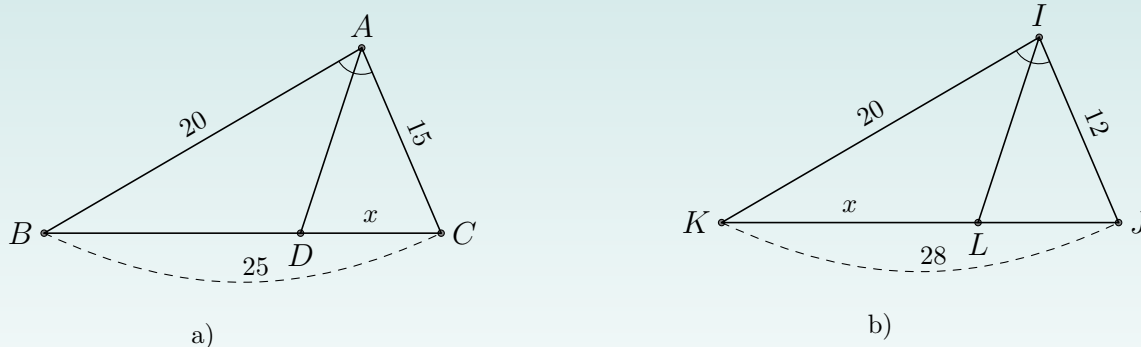
Thay số ta có $DC = \frac{8,5}{5} \cdot 3 = 5,1$. Khi đó $x = DB + DC = 3 + 5,1 = 8,1$.

- ✓ Hình b: Với $KL = 12,5 - x$ và do IL là đường phân giác trong của góc I nên theo tính chất đường phân giác ta có

$$\text{Theo tính chất đường phân giác ta có } \frac{KL}{LJ} = \frac{IK}{IJ} \Rightarrow \frac{12,5 - x}{x} = \frac{6,2}{8,7} \Leftrightarrow x = \frac{2175}{298} \approx 7,3.$$

□

Ví dụ 2. Tính x trong hình và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.



Lời giải.

- ✓ Hình a: Ta có $BD = 25 - x$.

$$\text{Theo tính chất đường phân giác trong ta có } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{25 - x}{x} = \frac{20}{15} \Leftrightarrow x = \frac{75}{7} \approx 10,7.$$

- ✓ Hình b: Ta có $LJ = 28 - x$.

$$\text{Theo tính chất phân giác trong ta có } \frac{LK}{LJ} = \frac{IK}{IJ} \Rightarrow \frac{x}{28 - x} = \frac{20}{12} \Leftrightarrow x = \frac{35}{2} = 17,5.$$

□

Dạng 42. Sử dụng tính chất đường phân giác của tam giác để tính tỉ số, chứng minh các hệ thức, các đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng song song

Thực hiện theo các bước sau:

- ☑ Bước 1: Xác định đường phân giác và lập các đoạn thẳng tỉ lệ.
- ☑ Bước 2: Sử dụng các tỉ số đã có, cùng với các tính chất của tỉ lệ thức, các tỉ số trung gian (nếu cần) và định lí đảo của định lí Ta-lét để tính tỉ số đoạn thẳng hoặc chứng minh các hệ thức. Từ đó suy ra các đoạn thẳng bằng nhau hay các đường thẳng song song.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác cân ABC , có $BA = BC = a$, $AC = b$. Đường phân giác của góc A cắt BC tại M , đường phân giác góc C cắt BA tại N .

1. Chứng minh $MN \parallel AC$.

2. Tính MN theo a, b .

ĐS: $MN = \frac{ab}{a+b}$.

Lời giải.

1. Theo tính chất đường phân giác trong của góc A và góc C ta có:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{b} \quad (1)$$

$$\frac{BN}{AN} = \frac{CB}{CA} = \frac{a}{b} \quad (2)$$

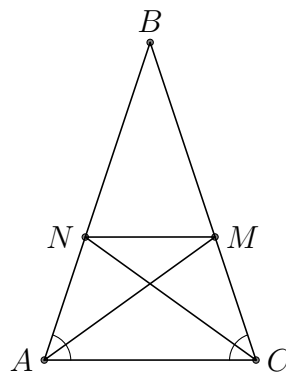
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BM}{CM} = \frac{BN}{AN}$. Theo định lý Thales đảo ta được $MN \parallel AC$.

2. Tính MN theo a, b .

$$\text{Theo (2) có } \frac{BN}{AN} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{a+b}{b} \Leftrightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow \frac{BN}{AB} = \frac{a}{a+b}.$$

$$\text{Do } MN \parallel AC \text{ nên } \frac{BN}{BA} = \frac{MN}{AC} \Leftrightarrow MN = \frac{BN}{BA} \cdot AC = \frac{a}{a+b} \cdot b = \frac{ab}{a+b}.$$

□



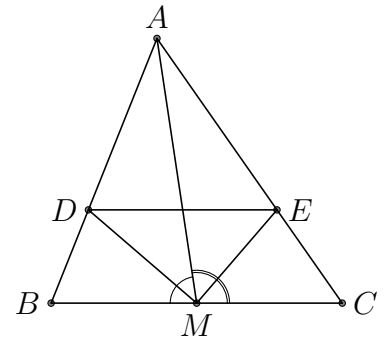
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Tia phân giác góc AMB cắt AB tại D , tia phân giác góc AMC cắt cạnh AC tại E . Chứng minh $DE \parallel BC$.

Lời giải.

Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} \text{ và } \frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC}.$$

Mặt khác $MB = MC$ nên $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$. Theo định lý Ta-lét đảo ta được $DE \parallel BC$.



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $AB = 12$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 28$ cm. Đường phân giác góc A cắt BC tại D . Qua D kẻ $DE \parallel AB$ ($E \in AC$).

- Tính độ dài các đoạn thẳng BD , DC và DE . **ĐS:** $DB = 10,5$; $DC = 17,5$; $DE = 7,5$.
- Cho biết diện tích tam giác ABC là S . Tính diện tích các tam giác ABD , ADE , DCE theo S . **ĐS:** $S_{\triangle ABD} = \frac{3}{8}S$, $S_{\triangle ADE} = \frac{15}{64}S$, $S_{\triangle DCE} = \frac{25}{64}S$.

Lời giải.

1.

Theo tính chất đường phân giác trong góc A ta có

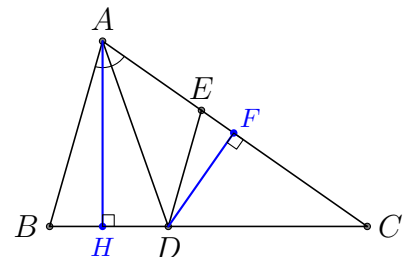
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow DB = \frac{3}{5}DC. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } DB + DC = BC = 28. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tính được $DB = 10,5$ cm và $DC = 17,5$ cm.

Vì $DE \parallel AB$ nên ta có

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow DE = \frac{DC}{BC} \cdot AB = \frac{17,5}{28} \cdot 12 = 7,5 \text{ cm.}$$



- Gọi AH là đường cao kẻ từ A của $\triangle ABC$. Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC$; $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BD$ và $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CD$. Suy ra $S_{\triangle ABD} = \frac{BD}{BC} \cdot S = \frac{3}{8}S$ và $S_{\triangle ADC} = \frac{CD}{BC} \cdot S = \frac{5}{8} \cdot S$.
 Chứng minh tương tự bằng cách trong $\triangle ADC$ ta kẻ đường cao DF ta được
 $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot AC$; $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot AE$ và $S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot EC$.
 Suy ra
 $S_{\triangle ADE} = \frac{AE}{AC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{BD}{BC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{15}{64} \cdot S$. và $S_{\triangle DCE} = \frac{EC}{AC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{DC}{BC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{25}{64} \cdot S$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 25$ cm. Đường phân giác góc A cắt BC tại D .

- Tính độ dài các đoạn thẳng BD , DC . **ĐS:** $DB \approx 10,7$ cm; $DC \approx 14,3$ cm.
- Tính tỉ số diện tích hai tam giác ABD và ACD . **ĐS:** $\frac{107}{143}$.

 Lời giải.

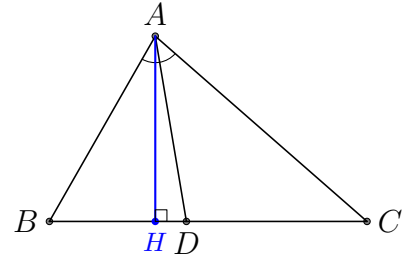
1.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong góc A .

Ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow DB = \frac{3}{4}DC$. (1)

Mặt khác $DB + DC = BC = 25$. (2)

Từ (1) và (2) ta có tính được $DB \approx 10,7$ cm và $DC \approx 14,3$ cm.



2. Gọi AH là đường cao kẻ từ A của $\triangle ABC$ và S là diện tích $\triangle ABC$. Ta có

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC; S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BD \text{ và } S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CD.$$

Suy ra $S_{\triangle ABD} = \frac{BD}{BC} \cdot S = \frac{107}{250} \cdot S$ và $S_{\triangle ADC} = \frac{CD}{BC} \cdot S = \frac{143}{250} \cdot S$. Do đó $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{107}{143}$.

□

3

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Kẻ phân giác trong AD của $\widehat{BAC}$ (với $D \in BC$), biết $DB = 15$ cm, $DC = 20$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AB , AC . **ĐS:** $AB \approx 3,5$ cm; $AC \approx 4,7$ cm.

 Lời giải.

Theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{3}{4}AC \quad (1)$$

Mặt khác, tam giác ABC vuông tại A nên theo định lý Py-ta-go ta có

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = (BD + DC)^2 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 1225 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ
$$\begin{cases} AB = \frac{3}{4}AC \\ AB^2 + AC^2 = 1225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \approx 3,5 \text{ cm} \\ AC \approx 4,7 \text{ cm}. \end{cases}$$

□

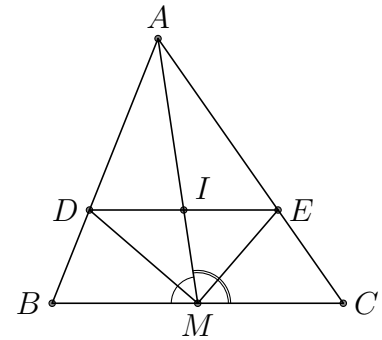
 **Bài 2.** Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Phân giác của $\widehat{AMB}$ cắt AB ở D , phân giác của $\widehat{AMC}$ cắt AC ở E .

1. Chứng minh DE song song với BC .

2. Gọi I là giao điểm của DE và AM . Chứng minh I là trung điểm của DE .

 Lời giải.

- Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB}$ và $\frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC}$.
Mặt khác $MB = MC$ nên $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$.
Theo định lý Ta-lét đảo ta được $DE \parallel BC$.
- Theo câu a) ta có $DE \parallel BC$ nên $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.
Xét định lý Ta-lét cho $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ ta có $\frac{AD}{AB} = \frac{DI}{BM}$ và $\frac{AE}{AC} = \frac{IE}{CM}$. Từ đó, suy ra $\frac{DI}{BM} = \frac{IE}{CM}$ mà $MB = CM$ nên $DI = IE$ hay I là trung điểm của DE .



Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm. Đường phân giác góc A cắt BC tại D .

- Tính BC , BD và CD . **ĐS:** $BC = 20$ cm; $BD \approx 8,6$ cm; $DC \approx 11,4$ cm
- Vẽ đường cao AH . Tính AH , HD và AD . **ĐS:** $AH \approx 9,6$ cm, $HD \approx 1,4$ cm, $AD \approx 9,7$ cm.

Lời giải.

- Áp dụng định lý Py-ta-go ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 20$ cm.

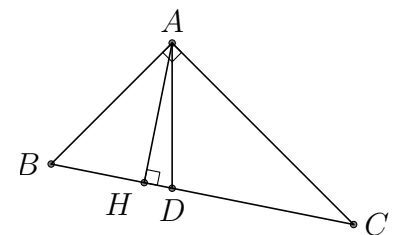
Theo tính chất đường phân giác trong của góc A ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow DB = \frac{3}{4}DC.$$

Mặt khác ta lại có

$$BD + DC = BC = 20 \Rightarrow \frac{3}{4}DC + DC = 20 \Leftrightarrow DC \approx 11,4 \text{ cm.}$$

$$\text{Do đó } BD = BC - DC = 20 - 11,4 = 8,6 \text{ cm.}$$



- Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = 96$ cm.

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{BC} \approx 9,6 \text{ cm.}$$

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông AHC ta có $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} \approx 12,8$ cm.

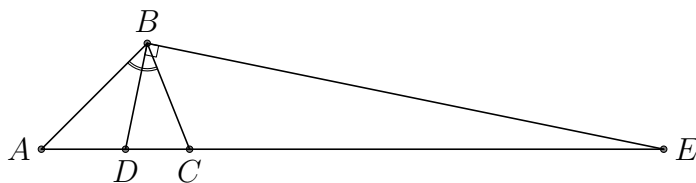
$$\text{Suy ra } HD = HC - DC = 12,8 - 11,4 \approx 1,4 \text{ cm.}$$

$$\text{Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông } AHD \text{ ta có } AD = \sqrt{AH^2 + HD^2} \approx 9,7 \text{ cm.}$$

Bài 4. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), đường phân giác góc B cắt AC tại D và cho biết $AB = 15$ cm, $BC = 10$ cm.

1. Tính AD , DC . **ĐS:** $AD = 9$ cm; $DC = 6$ cm.
2. Đường vuông góc với BD tại B cắt đường thẳng AC kéo dài tại E . Tính EC . **ĐS:** $EC = 30$ cm.

Lời giải.



1. Ta có $AD + DC = AC = AB = 15$ cm (1)
 và $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ (2)
 Từ (1) và (2) $\begin{cases} AD + DC = 15 \\ AD = \frac{3}{2} \cdot DC \end{cases}$. Từ đó suy ra $AD = 9$ cm, $DC = 6$ cm.
2. Vì $BD \perp BE$ nên BE là phân giác ngoài của góc B của tam giác ABC .
 Khi đó ta có $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$. Suy ra $EC = \frac{AE \cdot BC}{AB} = \frac{AE \cdot 10}{15} = \frac{AE \cdot 2}{3}$.
 Suy ra $3 \cdot CE = 2 \cdot (AC + CE)$ hay $CE = 2 \cdot AC$. Do đó $CE = 30$ cm.

□

§4 Khái niệm hai tam giác đồng dạng

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa

- ☑ Hai tam giác gọi là đồng dạng với nhau nếu chúng có ba cặp góc bằng nhau đôi một và ba cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.
- ☑ Ta có $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \end{cases}$
- ☑ Tỉ số các cạnh tương ứng $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$ gọi là tỉ số đồng dạng.

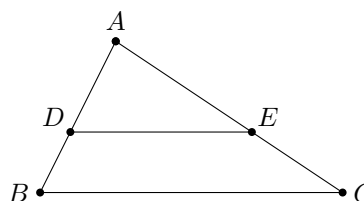
1.2 Tính chất

- ☑ Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó (hoặc nói hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau).
- ☑ Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ theo tỉ số k thì $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỉ số là $\frac{1}{k}$.
- ☑ Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ và $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ thì $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

1.3 Định lý

- ☑ Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.
- ☑ Ta có

	ABC
GT	$DE \parallel BC \ (D \in AB, E \in AC)$
KL	$\triangle ADE \sim \triangle ABC$



2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 43. Chứng minh hai tam giác đồng dạng

Dựa vào định nghĩa, tính chất hoặc định lí đã nêu ở phần tóm tắt lí thuyết.

✎✎✎ BÀI TẬP MẪU ✎✎✎

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC , điểm M thuộc cạnh BC . Kẻ $MN \parallel AB$ và $MP \parallel AC$ với $N \in AC, P \in AB$. Tìm các cặp tam giác đồng dạng. **ĐS:** $\triangle CMN \sim \triangle CBA$; $\triangle BMP \sim \triangle BCA$; $\triangle CMN \sim \triangle MBP$

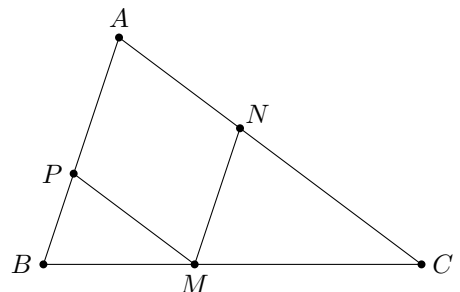
✎ Lời giải.

Vì $MN \parallel AB$ và $MP \parallel AC$ nên theo định lí ta có:

✓ $\triangle CMN \sim \triangle CBA$.

✓ $\triangle BMP \sim \triangle BCA$.

Từ đó $\triangle CMN \sim \triangle MBP$ (tính chất).

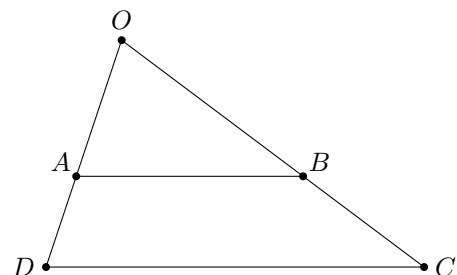


□

Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Gọi O là giao điểm của AD và BC . Chứng minh $\triangle OAB \sim \triangle ODC$.

✎ Lời giải.

Xét $\triangle OAB$, ta có $AB \parallel CD$ nên định lí Ta-let ta có $\triangle OAB \sim \triangle ODC$.



□

Dạng 44. Tìm tỉ số đồng dạng, tính độ dài cạnh, chứng minh đẳng thức cạnh thông qua tam giác đồng dạng

Sử dụng định nghĩa, các tính chất của hai tam giác đồng dạng.

✎✎✎ BÀI TẬP MẪU ✎✎✎

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ đồng dạng với nhau theo tỉ số k . Chứng minh tỉ số chu vi của hai tam giác ABC và MNP cũng bằng k .

 Lời giải.

Kí hiệu $P(ABC)$ là chu vi $\triangle ABC$. Ta có $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ theo tỉ số k nên

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = k.$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$k = \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = \frac{AB + AC + BC}{MN + MP + NP} = \frac{P(ABC)}{P(MNP)}.$$

□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ theo tỉ số k_1 và $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ theo tỉ số k_2 . Tìm tỉ số đồng dạng k_3 của $\triangle ABC$ và $\triangle A_2B_2C_2$. **ĐS:** $k_3 = k_1 \cdot k_2$.

 Lời giải.

Ta có $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ nên $k_1 = \frac{AB}{A_1B_1}$ và $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ nên $k_2 = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$.

Từ đó ta có $k_3 = \frac{AB}{A_2B_2} = k_1 \cdot k_2$.

□

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ theo tỉ số $\frac{3}{5}$. Tính chu vi của mỗi tam giác biết hiệu chu vi của hai tam giác là 20 cm. **ĐS:** $P(ABC) = 30$ cm; $P(DEF) = 50$ cm.

 Lời giải.

Kí hiệu $P(ABC)$ là chu vi $\triangle ABC$. Vì $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ theo tỉ số $k = \frac{3}{5}$ nên ta có

$$\frac{P(ABC)}{P(DEF)} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{P(DEF)}{5} = \frac{P(ABC)}{3} = \frac{P(DEF) - P(ABC)}{2} = 10.$$

Từ đó ta được $P(ABC) = 30$ cm và $P(DEF) = 50$ cm.

□

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Biết $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, $CA = 8$ cm và chu vi $\triangle DEF$ là 9 cm. Tính độ dài các cạnh của $\triangle DEF$. **ĐS:** $DE = 2$ cm; $EF = 3$ cm; $FD = 4$ cm.

 Lời giải.

Vì $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ nên ta có

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{P(ABC)}{P(DEF)} = \frac{18}{9} = 2.$$

Từ đó ta có được $DE = \frac{AB}{2} = 2$ cm, $EF = \frac{BC}{2} = 3$ cm, $FD = \frac{CA}{2} = 4$ cm.

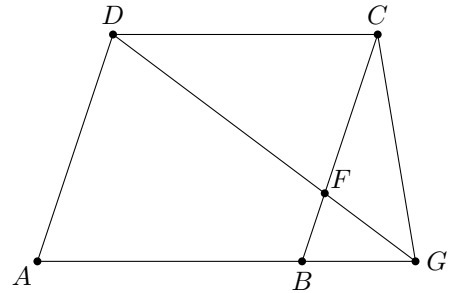
□

Ví dụ 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm F trên cạnh BC , tia DF cắt tia AB tại G .

1. Chứng minh $\triangle GBF \sim \triangle DCF$.
2. Biết $AB = 6$ cm, $AD = 5$ cm và $CF = 3$ cm. Tính độ dài AG . **ĐS:** $AG = 10$ cm.
3. Chứng minh $AG \cdot CF = CD \cdot AD$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $BG \parallel DC$ nên $\triangle GBF \sim \triangle DCF$.
2. Theo câu a) ta có $\triangle GBF \sim \triangle DCF$ suy ra $\frac{BG}{CD} = \frac{BF}{CF} \Leftrightarrow BG = \frac{BF}{CF} \cdot CD = \frac{AD - CF}{CF} \cdot AB = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$ cm. Từ đó ta có $AG = AB + BG = 6 + 4 = 10$ cm.
3. Ta có $BF \parallel AD$ nên $\triangle GBF \sim \triangle GAD$. Mặt khác ta lại có $\triangle GBF \sim \triangle DCF$ (câu a) nên ta được $\triangle GAD \sim \triangle DCF$. Suy ra $\frac{AG}{CD} = \frac{AD}{CF}$ hay $AG \cdot CF = CD \cdot AD$.



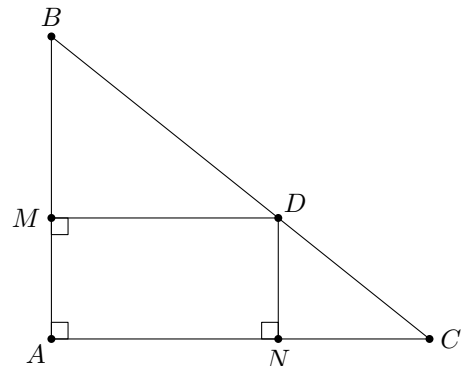
□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , điểm D thuộc cạnh BC . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC .

1. Chứng minh $\triangle BDM \sim \triangle BCA$ và $\triangle CDN \sim \triangle CBA$.
2. Cho $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm và $DB = 3$ cm. Tính độ dài BM . **ĐS:** $BM \approx 1,8$ cm.
3. Chứng minh $BM \cdot CN = DM \cdot DN$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $MD \parallel AC$ vì MD, AC cùng vuông góc với AB và $DN \parallel AB$ vì DN, AB cùng vuông với AC nên $\triangle BDM \sim \triangle BCA$ và $\triangle CDN \sim \triangle CBA$.
2. Theo định lý Py-ta-go ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 25$ nên $BC = 5$ cm. Theo câu a) ta có $\triangle BDM \sim \triangle BCA$. Suy ra $\frac{BM}{BA} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow BM = \frac{BD}{BC} \cdot BA = \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5} = 1,8$ cm.
3. Theo câu a) ta có $\triangle CDN \sim \triangle CBA$ và $\triangle BDM \sim \triangle BCA$. Suy ra $\triangle CDN \sim \triangle DBM$ (tính chất). Từ đó ta có $\frac{BM}{DN} = \frac{DM}{CN}$ hay $BM \cdot CN = DM \cdot DN$.



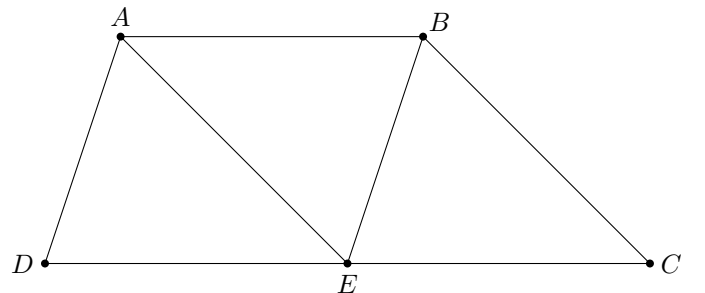
□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel DC$) có $CD = 2AB$. Gọi E là trung điểm của DC . Chứng minh ba tam giác EDA , ABE và CEB đồng dạng với nhau đôi một. Tìm tỉ số đồng dạng.
ĐS: $k = 1$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \parallel EC \\ AB = EC = \frac{CD}{2} \end{cases} \Rightarrow ABCE$ là hình bình hành. Tương tự ta có $ABED$ cũng là hình bình hành. Suy ra $\triangle EDA = \triangle ABE = \triangle CEB$ nên 3 tam giác EDA , ABE và CEB đồng dạng với nhau đôi một với cùng tỉ số $k = 1$.



□

Bài 2. Cho tam giác ABC có $BC = 13$ cm, $CA = 12$ cm, $AB = 5$ cm. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác MNP có cạnh nhỏ nhất là 2,5 cm. Tính các cạnh còn lại của tam giác MNP .
ĐS: $MP = 6$ cm; $NP = 6,5$ cm; $MN = 2,5$ cm.

Lời giải.

Ta có $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ nên $k = \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} \Rightarrow k = \frac{5}{MN} = \frac{12}{MP} = \frac{13}{NP}$ (*)
Vì cạnh nhỏ nhất của $\triangle ABC$ là $AB = 5$ cm nên cạnh nhỏ nhất tương ứng của $\triangle MNP$ là cạnh $MN = 2,5$ cm. Khi đó $k = \frac{5}{2,5} = 2$. Từ (*) suy ra $MP = \frac{12}{2} = 6$ cm, $NP = \frac{13}{2} = 6,5$ cm. □

Bài 3. Cho tam giác ABC , lấy D trên cạnh BC sao cho $DB = 2DC$. Kẻ $DE \parallel AB$ ($E \in AC$) và $DF \parallel AC$ ($F \in AB$).

- Tìm các cặp tam giác đồng dạng và tìm tỉ số đồng dạng. **ĐS:** $\triangle CDE \sim \triangle CBA, k = \frac{1}{3}$;
 $\triangle BDF \sim \triangle BCA, k = \frac{2}{3}$; $\triangle CDE \sim \triangle DBF, k = \frac{1}{2}$.

- Tính chu vi các tam giác CDE , BDF biết chu vi tam giác ABC bằng 12 cm. **ĐS:**
 $P(CDE) = 4$ cm; $P(BDF) = 8$ cm

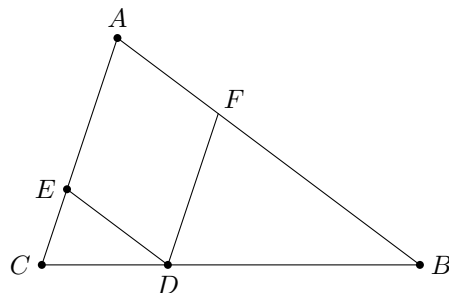
Lời giải.

1. Ta có

$$+ DE \parallel AB \text{ nên } \triangle CDE \sim \triangle CBA \text{ theo tỉ số } k = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{3}.$$

$$+ DF \parallel AC \text{ nên } \triangle BDF \sim \triangle BCA \text{ theo tỉ số } k = \frac{BD}{BC} = \frac{2}{3}.$$

$$+ \triangle CDE \sim \triangle DBF \text{ (tính chất) theo tỉ số } k = \frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}.$$



2. Kí hiệu $P(ABC)$ là chu vi $\triangle ABC$. Ta có

$$+ \triangle CDE \sim \triangle CBA \text{ theo tỉ số } k = \frac{1}{3} \text{ nên } \frac{P(CDE)}{P(CBA)} = \frac{1}{3}. \text{ Suy ra } P(CDE) = \frac{1}{3} \cdot P(ABC) = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \text{ cm.}$$

$$+ \triangle BDF \sim \triangle BCA \text{ theo tỉ số } k = \frac{2}{3} \text{ nên } \frac{P(BDF)}{P(BCA)} = \frac{2}{3}. \text{ Suy ra } P(BDF) = \frac{2}{3} \cdot P(ABC) = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \text{ cm.}$$

□

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$, điểm M thuộc cạnh BC . Tia DM cắt tia AB tại N . Chứng minh $\triangle ADN \sim \triangle CMD$, từ đó suy ra $AN \cdot CM = AB^2$.

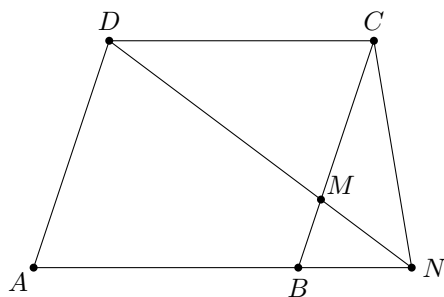
Lời giải.

Ta có

$$+ BM \parallel AD \text{ nên } \triangle NBM \sim \triangle NAD.$$

$$+ BN \parallel CD \text{ nên } \triangle NBM \sim \triangle DCM.$$

Suy ra $\triangle NAD \sim \triangle DCM$ (tính chất) theo tỉ số $\frac{AN}{CD} = \frac{AD}{CM}$ hay $AN \cdot CM = CD \cdot AD = AB^2$ vì $(AB = CD = AD)$ do $ABCD$ là hình thoi.



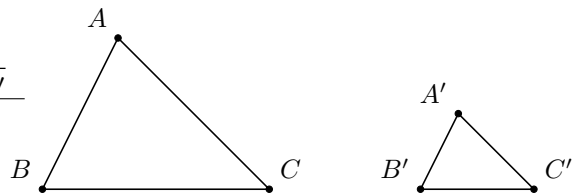
□

§5 Trường hợp đồng dạng thứ nhất

1 Tóm tắt lý thuyết

Định lý 12. Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

GT	$\triangle ABC, \triangle A'B'C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$
KL	$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 45. Chứng minh hai tam giác đồng dạng

Để chứng minh hai tam giác đồng dạng, ta lập tỉ số các cạnh tương ứng của hai tam giác và chứng minh chúng bằng nhau.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Hai tam giác mà các cạnh có độ dài như sau có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

- 6 cm, 9 cm, 12 cm và 24 cm, 18 cm, 12 cm;
- $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$ có $\frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = \frac{BC}{5}$ và $\frac{DE}{6} = \frac{DF}{8} = \frac{EF}{9}$.

Lời giải.

- Ta có $\frac{6}{12} = \frac{9}{18} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ nên hai tam giác đồng dạng.
- Đặt $\frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = \frac{BC}{5} = m$ và $\frac{DE}{6} = \frac{DF}{8} = \frac{EF}{9} = n$, ta có $AB = 3m, AC = 4m, BC = 5m$ và $DE = 6n, DF = 8n, EF = 9n$.
Lập tỉ số các cặp cạnh tương ứng, dẫn tới kết luận hai tam giác không đồng dạng.

□

Ví dụ 2. Hai tam giác mà các cạnh có độ dài như sau có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

1. 4 cm, 5 cm, 6 cm và 12 cm, 15 cm, 18 cm;
2. $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm và $\triangle MNP$ vuông tại M có $MN = 4$ cm, $MP = 3$ cm.

Lời giải.

1. Ta có $\frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ nên hai tam giác đồng dạng.
2. Dùng định lý Py-ta-go tính được $BC = 10$ cm, $NP = 5$ cm.
Lập tỉ số các cặp cạnh tương ứng, ta có $\triangle ABC \sim \triangle MPN$.

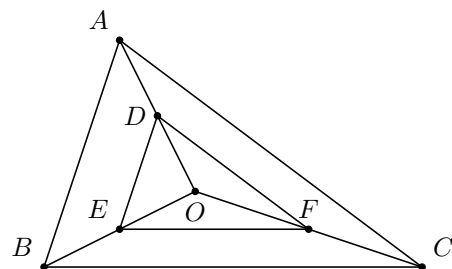
□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC , điểm O nằm trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của OA, OB, OC .

1. Chứng minh $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, tìm tỉ số đồng dạng.
2. Biết chu vi $\triangle ABC$ bằng 26 cm. Tìm chu vi $\triangle DEF$.

Lời giải.

1. Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác ta có $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$.
 $\Rightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC$, tỉ số đồng dạng bằng $\frac{1}{2}$.
2. Tỉ số chu vi của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng, từ đó tìm được chu vi $\triangle DEF$ là 13 cm.



□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh

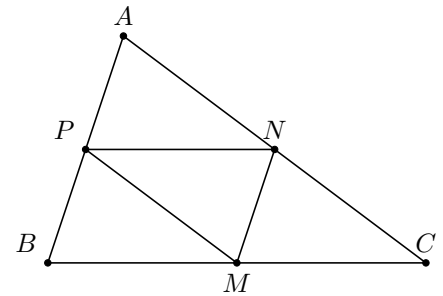
1. $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, tìm tỉ số đồng dạng.
2. Tỉ số chu vi của $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ bằng 2.

Lời giải.

- Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác ta có

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP, \text{ tỉ số đồng dạng bằng } \frac{1}{2}.$$



- Vì $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC} = \frac{1}{2}$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{MN + NP + MP}{AB + BC + AC} = \frac{1}{2}$$
 (tính chất dãy tỉ số bằng nhau).
 Từ đó ta có $\frac{P_{MNP}}{P_{ABC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{MNP}} = 2.$

Dạng 46. Sử dụng trường hợp đồng dạng thứ nhất để tính độ dài các cạnh hoặc chứng minh các góc bằng nhau

Vận dụng trường hợp đồng dạng thứ nhất (nếu cần) để chứng minh hai tam giác đồng dạng, từ đó suy ra các cặp góc tương ứng bằng nhau.

BÀI TẬP MẪU

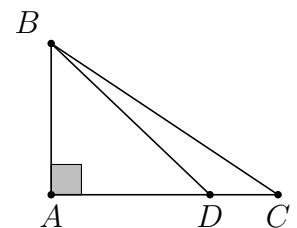
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Trên cạnh AC lấy D sao cho $AD = 4,5$ cm. Chứng minh

a) $\triangle ABC \sim \triangle ADB;$

b) $\widehat{ABC} = \widehat{ADB}.$

Lời giải.

- Áp dụng định lý Py-ta-go tính được $BC = 10$ cm, $BD = 7,5$ cm.
 Bởi vậy $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{3}$
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADB$ (c.c.c).



- Từ câu a) suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ADB}$ (góc tương ứng).

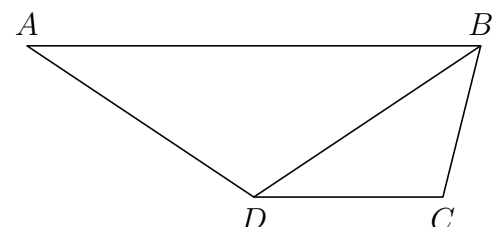
Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = 8$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 2$ cm, $AD = 6$ cm và $BD = 4$ cm. Chứng minh

a) $\triangle ABD \sim \triangle BDC;$

b) $ABCD$ là hình thang.

Lời giải.

- Tương tự **Ví dụ 5** ta có $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BC} = 2$
 $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC$ (c.c.c)
- Từ câu a) $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC} \Rightarrow AB \parallel DC$
 $\Rightarrow ABCD$ là hình thang.





3 Bài tập về nhà

Bài 1. Tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm và $BC = 7$ cm. Tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC có độ dài cạnh nhỏ nhất là 1 cm. Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác MNP .

Lời giải.

Tỉ số đồng dạng của hai tam giác là $\frac{1}{3}$, từ đó tính được $MN = 1$ cm, $NP = \frac{7}{3}$ cm, $MP = \frac{5}{3}$ cm.
□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 10$ cm, $AC = 20$ cm. Trên AC lấy M sao cho $AM = 5$ cm.

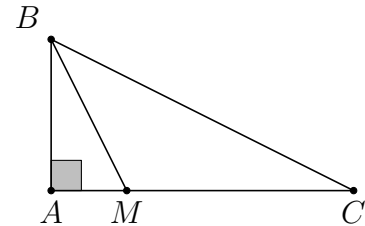
a) Tính độ dài BC , BM .

b) Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle AMB$.

Lời giải.

1. Áp dụng định lý Py-ta-go tính được $BC = 10\sqrt{5}$ cm, $BM = 5\sqrt{5}$ cm.

2. Ta có $\frac{BM}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AMB$ (c.c.c).



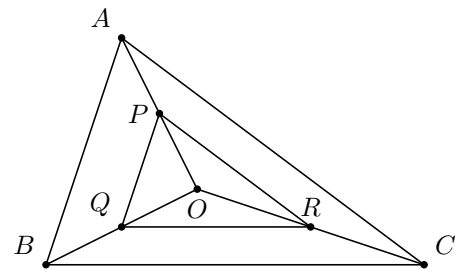
Bài 3. Tam giác ABC có ba đường trung tuyến cắt nhau tại O . Gọi P , Q , R theo thứ tự là trung điểm của OA , OB , OC . Chứng minh $\triangle PQR \sim \triangle ABC$.

Lời giải.

Theo tính chất đường trung bình của tam giác ABC , suy

$$\text{ra } \frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} = \frac{QR}{BC} = \frac{1}{2}.$$

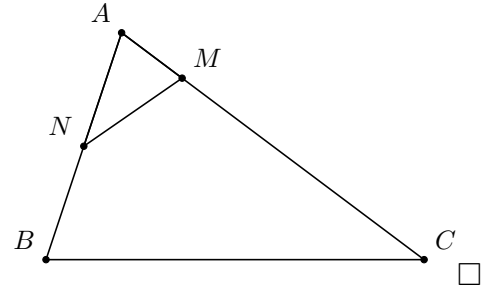
Vì vậy $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ (c.c.c).



Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm. Trên cạnh AC , AB lần lượt lấy các điểm M , N sao cho $AM = 2$ cm, $AN = 3$ cm. Chứng minh $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.

Lời giải.

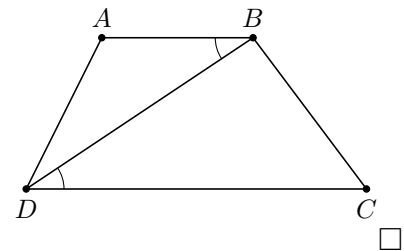
Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$. Xét $\triangle AMN$ và $\triangle ABC$ có
 $\widehat{A}$ chung, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
 $\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$ (c.g.c).



Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $AB = 9$ cm, $BD = 12$ cm và $DC = 16$ cm. Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle BDC$.

Lời giải.

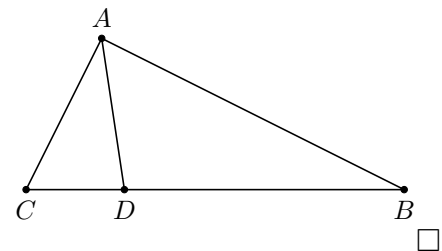
Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ và $\frac{BA}{BD} = \frac{DB}{DC} = \frac{3}{4}$.
 $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC$ (c.g.c).



Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 9$ cm. Trên cạnh BC lấy D sao cho $CD = 4$ cm. Chứng minh $\triangle CAD \sim \triangle CBA$.

Lời giải.

Xét $\triangle CAD$ và $\triangle CBA$ có
 $\begin{cases} \frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CB} = \frac{2}{3} \\ \widehat{DCA} = \widehat{ACB} \end{cases}$
 $\Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle CBA$ (c.g.c).



Dạng 48. Sử dụng trường hợp đồng dạng thứ hai để tính độ dài cạnh hoặc chứng minh các góc bằng nhau

Sử dụng trường hợp đồng dạng thứ hai (nếu cần) để chứng minh hai tam giác đồng dạng, từ đó suy ra các cặp góc tương ứng bằng nhau hoặc các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.

BÀI TẬP MẪU

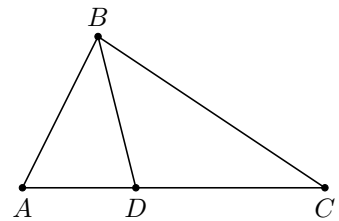
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $AC = 8$ cm. Trên cạnh AC lấy D sao cho $AD = 2$ cm. Chứng minh

a) $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$;

b) $BC = 2BD$.

Lời giải.

- Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACB$ có
 $\widehat{A}$ chung, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACB$ (c.g.c), suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.
- Từ câu a), ta có $\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AB} = 2 \Rightarrow \text{DPCM}$.



Ví dụ 2. Cho $\widehat{xOy}$ và Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy}$. Trên các tia Ox , Oz , Oy lần lượt lấy các điểm A , B , C sao cho $OA = 1$ cm, $OB = 2$ cm và $OC = 4$ cm.

a) Chứng minh $\widehat{OAB} = \widehat{OBC}$.

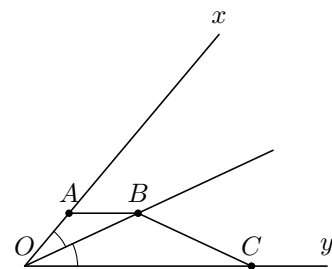
b) Biết $AB = 1,5$ cm, tính độ dài BC .

Lời giải.

- Vì Oz là phân giác của $\widehat{xOy}$ nên $\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$.
 Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OBC$ có

$$\begin{cases} \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{1}{2} \\ \widehat{AOB} = \widehat{BOC} \end{cases}$$

 $\Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OBC$ (c.g.c), suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{OBC}$.
- Từ câu a), ta có $\frac{BC}{AB} = \frac{OB}{OA} = 2 \Rightarrow BC = 3$ cm.



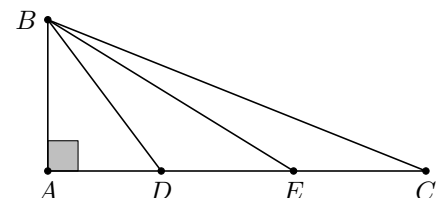
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 1$ cm, $AC = 3$ cm. Trên cạnh AC lấy D , E sao cho $AD = DE = EC$. Chứng minh

a) $\triangle DBE \sim \triangle DCB$;

b) $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = 45^\circ$.

Lời giải.

- Tính được $DB^2 = 2$, từ đó ta có
 $DB^2 = DE \cdot DC \Rightarrow \frac{DB}{DE} = \frac{DC}{DB}$
 $\Rightarrow \triangle DBE \sim \triangle DCB$ (c.g.c).
- Từ câu a), ta có $\widehat{AEB} = \widehat{DBC}$
 $\Rightarrow \widehat{AEB} + \widehat{ACB} = \widehat{DBC} + \widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 45^\circ$.



Ví dụ 4. Hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 10$ cm, $CD = 30$ cm và $AD = 35$ cm. Trên cạnh AD lấy M sao cho $AM = 15$ cm. Chứng minh

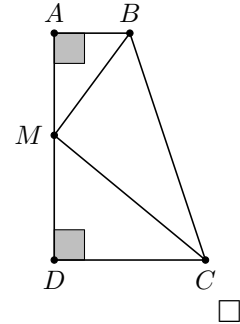
a) $\triangle ABM \sim \triangle DMC$;

b) $\widehat{BMC} = 90^\circ$.

✍ Lời giải.

1. Chứng minh $\frac{AB}{AM} = \frac{DM}{DC} \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle DMC$ (c.g.c).

2. Từ câu a), ta có $\widehat{AMB} = \widehat{DCM}$, do đó $\widehat{AMB} + \widehat{DCM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMC} = 90^\circ$.

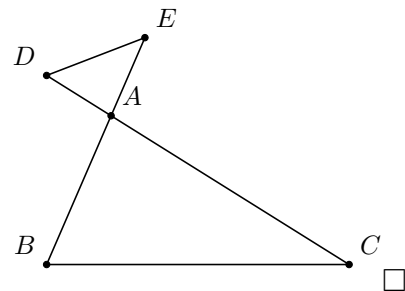


3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 3$ cm, $AC = 6$ cm. Trên tia đối của tia AC lấy D sao cho $AD = 1$ cm. Trên tia đối của tia AB lấy E sao cho $AE = 2$ cm. Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

✍ Lời giải.

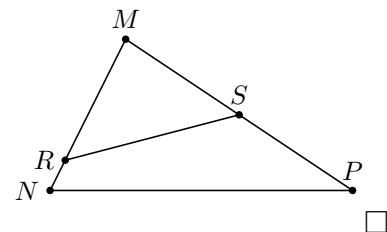
Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2}$. Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có
 $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$ (đối đỉnh), $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ (cmt)
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$ (c.g.c).



Bài 2. Cho tam giác MNP có $MN = 12$ cm, $MP = 15$ cm, $NP = 18$ cm. Trên các cạnh MN , MP lần lượt lấy R , S sao cho $MR = 10$ cm và $MS = 8$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng RS .

✍ Lời giải.

Ta có $\frac{MS}{MN} = \frac{MR}{MP} = \frac{2}{3}$. Xét $\triangle MRS$ và $\triangle MPN$ có
 $\widehat{M}$ chung, $\frac{MS}{MN} = \frac{MR}{MP}$ (cmt)
 $\Rightarrow \triangle MRS \sim \triangle MPN$ (c.g.c), suy ra $\frac{RS}{PN} = \frac{2}{3} \Rightarrow RS = 12$ cm.



Bài 3. Cho tam giác AHB vuông tại H có $HA = 4$ cm, $HB = 6$ cm. Trên tia đối của tia HA lấy điểm C sao cho $HC = 9$ cm. Chứng minh

a) $\triangle AHB \sim \triangle BHC$;

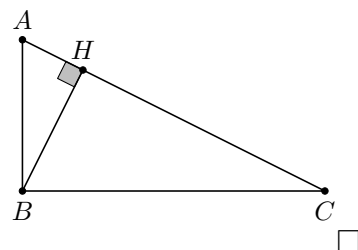
b) $\triangle ABC$ vuông.

✍ Lời giải.

1. Xét $\triangle AHB$ và $\triangle BHC$ có

$$\begin{cases} \widehat{AHB} = \widehat{BHC} = 90^\circ \\ \frac{HB}{HA} = \frac{HC}{HB} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle BHC \text{ (c.g.c).}$$

2. Từ câu a), suy ra $\widehat{ABH} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{ABH} + \widehat{CBH} = 90^\circ$
hay $\widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại B .



Bài 4. Cho tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm, $BC = 7$ cm. Trên tia đối của tia BA lấy D sao cho $BD = BC$.

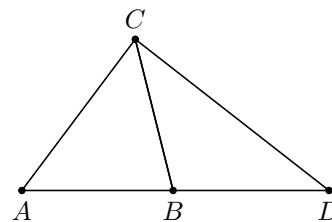
1. Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle ACD$.
2. Tính độ dài đoạn thẳng CD .
3. Chứng minh $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$.

Lời giải.

1. Tính được $AD = 16$ cm.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ACD$ có

$$\begin{cases} \widehat{A} \text{ (chung)} \\ \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ACD \text{ (c.g.c).}$$



2. Từ câu a), ta có $\frac{CD}{BC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow CD = \frac{7 \cdot 12}{9} = \frac{28}{3}$ cm.

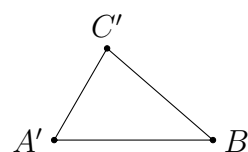
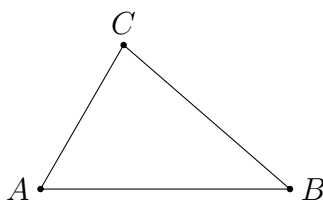
3. Chú ý $\triangle BCD$ cân tại B và kết quả câu a), ta có
 $\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ABC} = 2\widehat{ADC} = 2\widehat{ACB}$.

§7 Trường hợp đồng dạng thứ ba

1 Tóm tắt lý thuyết

Định lý 14. Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

GT	$\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}$
KL	$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 49. Chứng minh hai tam giác đồng dạng.

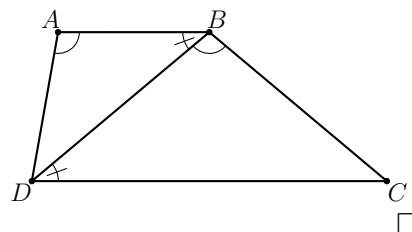
Chứng minh hai tam giác có hai cặp góc bằng nhau.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$. Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle BDC$.

Lời giải.

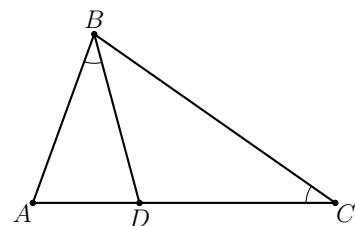
Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC$ (g.g).



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , D thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{C}$. Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle ADB$.

Lời giải.

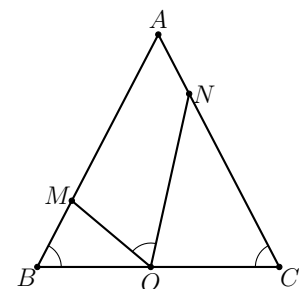
Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADB$ có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{ABD} = \widehat{C}$
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADB$ (g.g).



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$), O thuộc cạnh BC . Trên cạnh AB , AC lần lượt lấy hai điểm M , N sao cho $\widehat{MON} = \widehat{ABC}$. Chứng minh $\triangle BMO \sim \triangle CON$.

Lời giải.

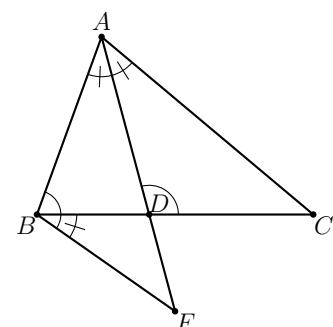
Ta có $\widehat{BMO} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{MOB}$.
 Mà $\widehat{MON} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{BMO} = 180^\circ - \widehat{MON} - \widehat{MOB} = \widehat{CON}$.
 Chú ý $\widehat{MBO} = \widehat{OCN} \Rightarrow \triangle BMO \sim \triangle CON$ (g.g).



Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , kẻ đường phân giác AD . Trên tia đối của DA lấy điểm F sao cho $\widehat{FBD} = \widehat{BAD}$. Chứng minh $\triangle ABF \sim \triangle ADC$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{BAF} = \widehat{DAC}$, sử dụng tính chất góc ngoài thu được
 $\widehat{ADC} = \widehat{ABD} + \widehat{BAD} = \widehat{ABD} + \widehat{FBD}$
 $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABF}$
 $\Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle ADC$ (g.g).



Dạng 50. Sử dụng trường hợp đồng dạng thứ ba để tính độ dài các cạnh, chứng minh hệ thức cạnh, hoặc chứng minh các góc bằng nhau.

Sử dụng trường hợp đồng dạng thứ ba (nếu cần) để chứng minh hai tam giác đồng dạng, từ đó suy ra các cặp góc tương ứng bằng nhau, các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC . Trên AB , AC lần lượt lấy các điểm D , E sao cho $\widehat{ACD} = \widehat{ABE}$ và CD cắt BE tại O . Chứng minh

a) $AD \cdot AB = AE \cdot AC$;

b) $OC \cdot OD = OB \cdot OE$.

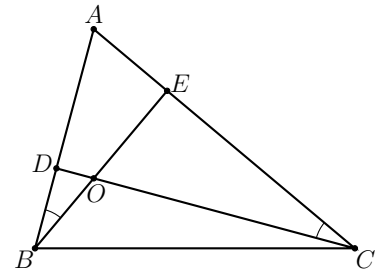
Lời giải.

1. Xét $\triangle ACD$ và $\triangle ABE$ có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{ACD} = \widehat{ABE}$
 $\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ABE$ (g.g).

Từ đó suy ra $AD \cdot AB = AE \cdot AC$.

2. Xét $\triangle OBD$ và $\triangle OCE$ có $\widehat{BOD} = \widehat{EOC}$ (đối đỉnh)
 và $\widehat{OBD} = \widehat{OCE} \Rightarrow \triangle OBD \sim \triangle OCE$ (g.g).

Từ đó suy ra $OC \cdot OD = OB \cdot OE$.



□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Chứng minh

a) $AB^2 = BH \cdot BC$;

b) $AH^2 = HB \cdot HC$.

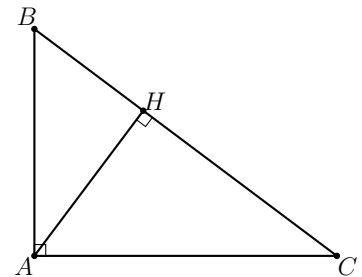
Lời giải.

1. Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CBA$ có $\widehat{B}$ chung và $\widehat{AHB} = \widehat{CAB} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle CBA$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{AB}{BH} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC.$$

2. Xét $\triangle AHB$ và $\triangle CHA$ có $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ và $\widehat{BAH} = \widehat{C}$
 (do a) $\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle CHA$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^2 = HB \cdot HC.$$



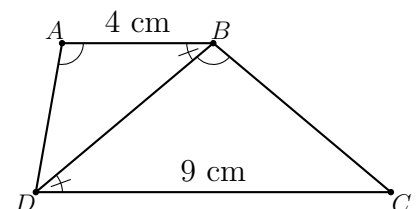
□

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$. Tính độ dài cạnh BD biết $AB = 4$ cm, $DC = 9$ cm. **ĐS:** $BD = 6$ cm

Lời giải.

Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow BD = \sqrt{AB \cdot DC} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6 \text{ cm}.$$



□

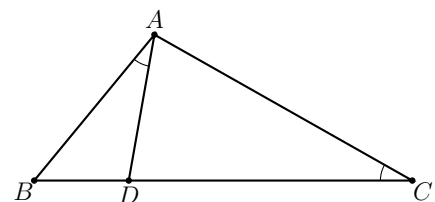
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > \widehat{C}$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{C}$. Biết $AB = 5$ cm, $BC = 10$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng DB , DC . **ĐS:** $DC = 7,5$ cm

Lời giải.

Ta có $\triangle BAD \sim \triangle BCA$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow BD = \frac{BA^2}{BC} = \frac{5^2}{10} = 2,5 \text{ cm.}$$

Từ đó $DC = BC - BD = 10 - 2,5 = 7,5 \text{ cm.}$



□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB , AC lần lượt lấy các điểm M , N sao cho $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$. Chứng minh

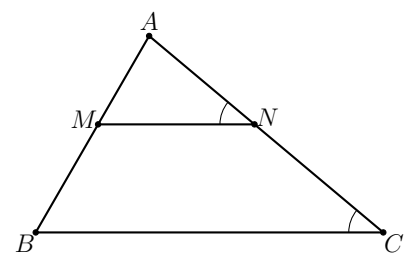
a) $\triangle AMN \sim \triangle ABC$;

b) $AM \cdot AC = AN \cdot AB$.

Lời giải.

1. Xét $\triangle AMN$ và $\triangle ABC$ có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$
 $\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$ (g.g).

2. Từ kết quả câu a), ta có $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AM \cdot AC = AN \cdot AB$.



□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt AH , AC lần lượt tại D , E .

1. Chứng minh $\triangle BAD \sim \triangle BCE$ và $\triangle BHD \sim \triangle BAE$.

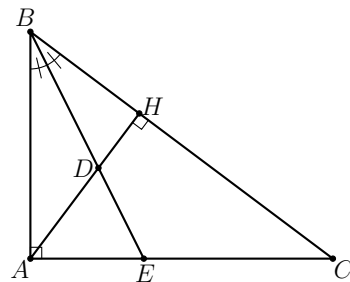
2. Chứng minh $\frac{DH}{DA} = \frac{EA}{EC}$.

3. Biết $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$. Tính độ dài HB , HC . **ĐS:** $HB = 1,8 \text{ cm}$, $HC = 3,2 \text{ cm}$

Lời giải.

1. Xét $\triangle BAD$ và $\triangle BCE$ có $\widehat{ABD} = \widehat{EBC}$ và $\widehat{BAD} = \widehat{ECB}$
(góc có cặp cạnh tương ứng vuông góc) $\Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle BCE$
(g.g).

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle BAE$ có $\widehat{BHD} = \widehat{BAE} = 90^\circ$
và $\widehat{HBD} = \widehat{ABE} \Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle BCE$ (g.g.).



2. Từ kết quả câu a), ta có $\frac{DH}{EA} = \frac{BD}{BE} = \frac{DA}{CE} \Rightarrow \frac{DH}{DA} = \frac{EA}{EC}$.

3. Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CBA$ có $\widehat{B}$ chung và $\widehat{AHB} = \widehat{BHC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow BH = \frac{BA^2}{BC} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5} = 1,8 \text{ cm.}$$

$$\Rightarrow HC = BC - BH = 5 - 1,8 = 3,2 \text{ cm.}$$

7

 **Bài 3.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 80^\circ$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Chứng minh

a) $\triangle ABC \sim \triangle ACD$;

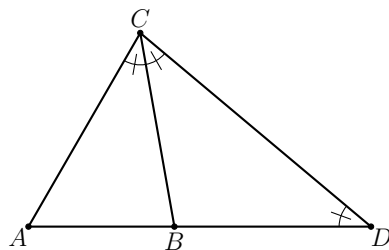
b) $AC^2 = AB^2 + AB \cdot BC$.

 **Lời giải.**

1. Tính được $\widehat{ACB} = 40^\circ$, lại có $\triangle BCD$ cân tại B nên
 $\widehat{BCD} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = 40^\circ \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ACD$ (g.g).

2. Từ kết quả câu a), ta có

$$AC^2 = AB \cdot AD = AB(AB + BC) = AB^2 + AB \cdot BC.$$



7

 **Bài 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I . Chứng minh $AI^2 = AD \cdot AE$.

 **Lời giải.**

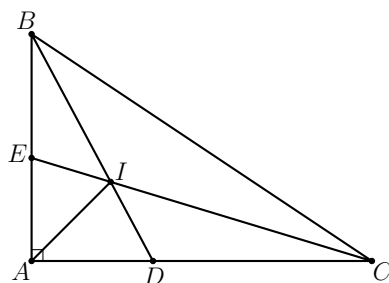
Ta có AI là tia phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{IAD} = \widehat{IAE} = 45^\circ$.

Theo tính chất góc ngoài

$$\widehat{AID} = \widehat{IAB} + \widehat{IBC} = 45^\circ + \frac{\widehat{ABC}}{2}.$$

$$\widehat{AEI} = \widehat{ABC} + \widehat{ICB} = 45^\circ + \frac{\widehat{ABC}}{2}.$$

Do đó $\triangle ADI \sim \triangle AIE \Rightarrow AI^2 = AD \cdot AE$.



7

§8 Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Áp dụng các trường hợp đồng dạng của tam giác vào tam giác vuông

Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu:

- ☒ Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia.
- ☒ Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.

1.2 Dấu hiệu đặc biệt nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng

- ☒ Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

1.3 Tỉ số hai đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

- ☒ Tỉ số đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.
- ☒ Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 51. Chứng minh hai tam giác vuông đồng dạng.

Có thể sử dụng một trong các cách sau:

- ☒ Áp dụng trường hợp đồng dạng của tam giác thường vào tam giác vuông.
- ☒ Sử dụng dấu hiệu đặc biệt nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

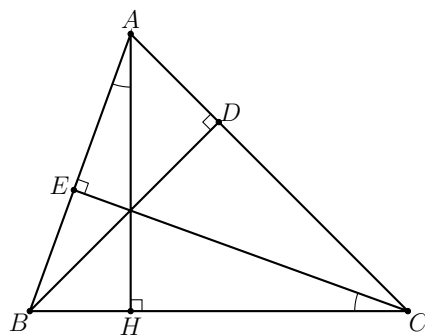
 **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Kẻ các đường cao BD , CE , cắt nhau tại H . Chứng minh

a) $\triangle ABD \sim \triangle ACE$;

b) $\triangle AEH \sim \triangle CEB$.

 **Lời giải.**

1. Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE$ (g.g.).
2. H là trực tâm $\triangle ABC \Rightarrow AH \perp BC$, từ đó $\widehat{EAH} = \widehat{BCE}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$) $\Rightarrow \triangle AEH \sim \triangle CEB$ (g.g.).



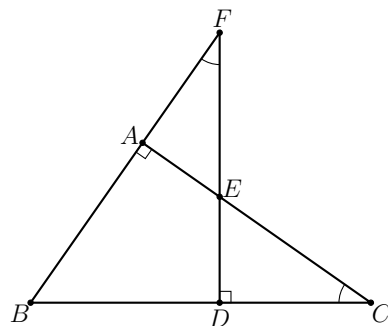
5

 **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A , điểm D thuộc cạnh BC . Đường thẳng qua D vuông góc với BC cắt đoạn AC tại E và cắt BA kéo dài tại F . Chứng minh

- a) $\triangle EAF \sim \triangle EDC$; b) $\triangle AEF \sim \triangle ABC$.

 Lời giải.

- Xét $\triangle EAF$ và $\triangle EDC$ có $\widehat{AEF} = \widehat{DEC}$ và $\widehat{EAF} = \widehat{EDC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle EAF \sim \triangle EDC$ (g.g).
- Từ kết quả câu a), suy ra $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (góc tương ứng)
 $\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC$.



7

Dạng 52. Sử dụng trường hợp đồng dạng của tam giác vuông tính độ dài cạnh, chứng minh hệ thức cạnh hoặc chứng minh các góc bằng nhau.

Sử dụng trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông (nếu cần) để chứng minh hai tam giác đồng dạng, từ đó suy ra các cặp góc tương ứng bằng nhau, các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.

BÀI TẬP MẪU

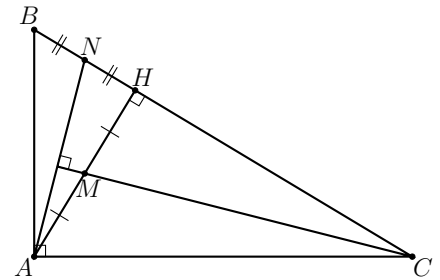
 Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH, BH . Chứng minh

- a) $HA^2 = HB \cdot HC$; b) $\triangle AHN \sim \triangle CHM$; c) $AN \perp CM$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $\triangle AHB \sim \triangle CHA$ (g.g) $\Rightarrow HA^2 = HB \cdot HC$.
2. Từ kết quả câu a) và $HB = 2HN$, $HA = 2HM$ suy ra

$$\frac{HB}{2HA} = \frac{HA}{2HC} \Rightarrow \frac{HN}{HA} = \frac{HM}{HC} \Rightarrow \triangle AHN \sim \triangle CHM$$
 (g.g).
3. Từ câu b) ta có $\widehat{HAN} = \widehat{MCN} \Rightarrow \widehat{MCN} + \widehat{ANC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow AN \perp CM$.

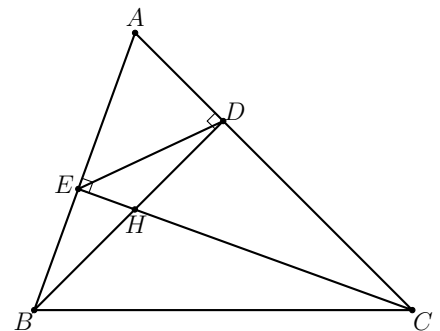


Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nhọn, ($AB < AC$), các đường cao BD , CE cắt nhau tại H . Chứng minh

- a) $HE \cdot HC = HD \cdot HB$; b) $\triangle HDE \sim \triangle HCB$; c) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Lời giải.

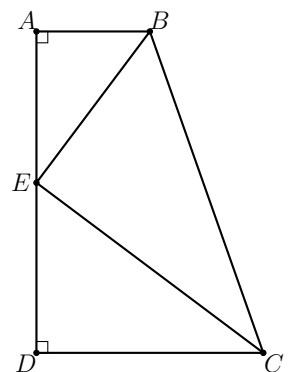
1. Ta có $\triangle HBE \sim \triangle HCD$ (g.g) $\Rightarrow HE \cdot HC = HD \cdot HB$.
2. Từ kết quả câu a), ta có $\frac{HE}{HB} = \frac{HD}{HC}$
 $\Rightarrow \triangle HDE \sim \triangle HCB$ (c.g.c).
3. Từ kết quả câu b), ta có $\widehat{HDE} = \widehat{HCB}$,
từ đó $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{HCB} = 90^\circ - \widehat{HDE} = \widehat{ADE}$.
Bởi vậy $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (g.g).



Ví dụ 3. Hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 6$ cm, $CD = 12$ cm và $AD = 17$ cm. Trên đoạn AD lấy E sao cho $AE = 8$ cm. Chứng minh $\widehat{BEC} = 90^\circ$.

Lời giải.

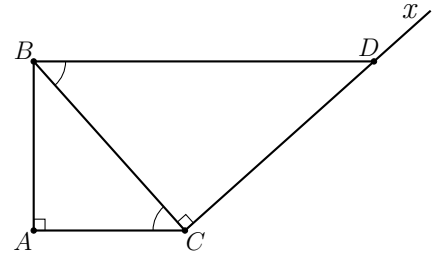
Xét $\triangle ABE$ và $\triangle EDC$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $\frac{AB}{ED} = \frac{AB}{AD - AE} = \frac{6}{17 - 8} = \frac{2}{3}$
và $\frac{AE}{DC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AB}{ED} = \frac{AE}{DC} \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle EDC$ (c.g.c).
 $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{DCE} \Rightarrow \widehat{AEB} + \widehat{DEC} = 90^\circ$.
Bởi vậy $\widehat{BEC} = 90^\circ$.



Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 2$ cm, $BC = 3$ cm. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A , kẻ tia Cx vuông góc với CB . Trên tia Cx lấy D sao cho $BD = 4,5$ cm. Chứng minh BD song song với AC .

 Lời giải.

Ta có $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA} = \frac{3}{2}$, từ đó $\triangle ABC \sim \triangle CDB$ (c.h-c.g.v)
 $\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{CBD} \Rightarrow BD \parallel AC$.



□

 Dạng 53. Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng.

Sử dụng định lý tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

 BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC .

1. Chứng minh $\triangle AMN \sim \triangle ACB$.

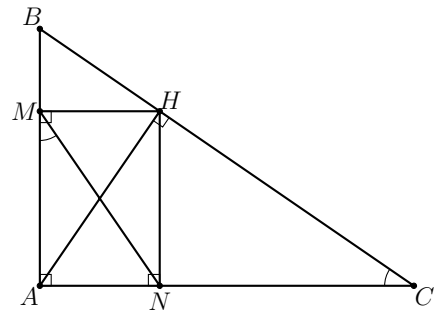
2. Biết $AH = 2$ cm, $BC = 5$ cm. Tính diện tích $\triangle AMN$.

ĐS: $S_{AMN} = \frac{4}{5} \text{ cm}^2$

 Lời giải.

1. Tứ giác $AMHN$ là hình chữ nhật, bởi vậy $\widehat{AMN} = \widehat{AHN}$. Ta có $\widehat{AHN} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ $\widehat{HAC}$)
 $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ACB} \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ACB$ (g.g).

2. Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5 \text{ cm}^2$, mặt khác từ kết quả câu a), ta có $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{MN^2}{BC^2} = \frac{AH^2}{BC^2} = \frac{4}{25} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{4}{5} \text{ cm}^2$.



□

 **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Lấy D thuộc cạnh AC , kẻ $DM \perp BC$ ($M \in BC$). Tia MD cắt BA tại N .

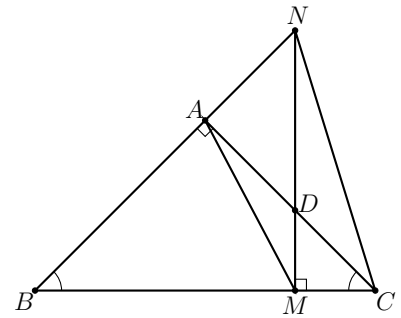
1. Chứng minh $\triangle BAM \sim \triangle BCN$.

2. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác BAM và BCN .

ĐS: $\frac{S_{BAM}}{S_{BCN}} = \frac{1}{2}$

 Lời giải.

- Xét $\triangle BAC$ và $\triangle BMN$ có $\widehat{B}$ chung và $\widehat{BAC} = \widehat{BMN} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle BMN$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{BA}{BM} = \frac{BC}{BN} \Rightarrow \triangle BAM \sim \triangle BCN$.
- $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $BC^2 = 2AB^2$,
do đó $\frac{S_{BAM}}{S_{BCN}} = \frac{BA^2}{BC^2} = \frac{1}{2}$.



□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BD .

- Chứng minh $\triangle AHB \sim \triangle BCD$.

- Tính độ dài đoạn thẳng AH .

ĐS: $AH = 7,2$ cm

- Tính diện tích tam giác AHB .

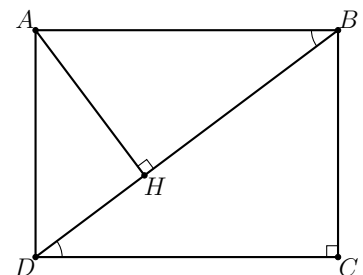
ĐS: $S_{AHB} = 34,56$ cm²

Lời giải.

- $\widehat{ABH} = \widehat{BDC}$ (so le trong) $\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle BCD$ (g.g).

- Từ kết quả câu a), ta có $\frac{AH}{BC} = \frac{AB}{BD}$
 $\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot BC}{BD} = \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{12 \cdot 9}{\sqrt{12^2 + 9^2}} = 7,2$ cm.

- $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{12^2 - 7,2^2} = 9,6$ cm
 $\Rightarrow S_{AHB} = \frac{1}{2} AH \cdot BH = \frac{7,2 \cdot 9,6}{2} = 34,56$ cm².



□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 9$ cm, $BC = 24$ cm. Đường trung trực của BC cắt đường thẳng AC tại D , cắt BC tại M .

- Chứng minh $\triangle CMD \sim \triangle CAB$.

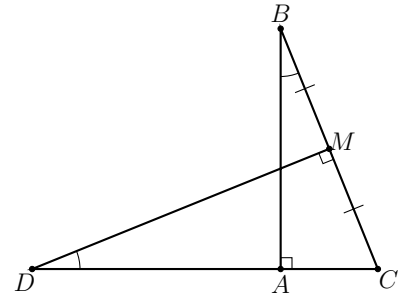
- Tính độ dài đoạn thẳng CD .

ĐS: $CD = 32$ cm

Lời giải.

1. Xét $\triangle CMD$ và $\triangle CAB$ có $\widehat{C}$ chung và $\widehat{ABC} = \widehat{CDM}$ (hai góc có cặp cạnh tương ứng vuông góc) $\Rightarrow \triangle CMD \sim \triangle CAB$ (g.g).

2. Từ kết quả câu a), ta có $\frac{CD}{CM} = \frac{CB}{CA}$
 $\Rightarrow CD = \frac{CB \cdot CM}{CA} = \frac{24 \cdot 12}{9} = 32 \text{ cm}.$



□

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Kẻ $AM \perp BC$, $AN \perp DC$ với M thuộc BC , N thuộc DC . Chứng minh

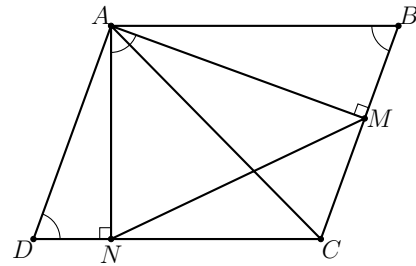
a) $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AD};$

b) $\triangle MAN \sim \triangle ABC.$

Lời giải.

1. Ta có $\widehat{B} = \widehat{D}$ suy ra $\triangle AMB \sim \triangle AND$ (g.g).
 $\Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AD}.$

2. Từ kết quả câu a), ta có $\frac{AM}{AN} = \frac{BA}{BC}$ (do $BC = AD$),
 $\widehat{B} = \widehat{MAN}$ (cùng phụ $\widehat{BAM}$) $\Rightarrow \triangle MAN \sim \triangle ABC$ (c.g.c).



□

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC .

1. Chứng minh $AH^2 = AD \cdot AB.$

2. Chứng minh $AE \cdot AC = AD \cdot AB$, rồi suy ra $\triangle ADE \sim \triangle ACB.$

3. Biết $AH = 5 \text{ cm}$, $DE = 4 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$. Tính diện tích tam giác ADE . **ĐS:**
 $S_{ADE} = 5 \text{ cm}^2$

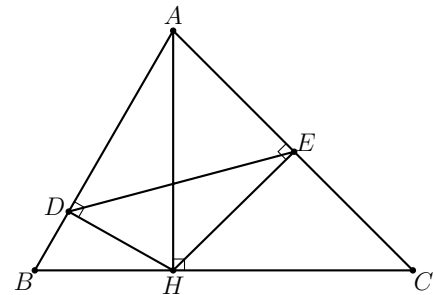
Lời giải.

1. Ta có $\triangle ADH \sim \triangle AHB$ (g.g) $\Rightarrow AH^2 = AD \cdot AB.$

2. Làm tương tự câu a), thu được $AH^2 = AE \cdot AC$
 $\Rightarrow AE \cdot AC = AD \cdot AB$
 $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACB$ (c.g.c).

3. Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ cm}^2,$

$$\text{mà } \frac{S_{ADE}}{S_{ACB}} = \frac{DE^2}{BC^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{ADE} = 5 \text{ cm}^2.$$



□

§9 Ôn tập chương III

1 Tóm tắt lý thuyết

Xem phần Tóm tắt lý thuyết từ Bài 1 đến Bài 8

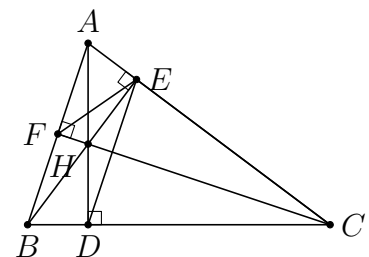
2 Bài tập và các dạng toán

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Chứng minh

- $\triangle HBF \sim \triangle HCE$.
- $HB \cdot HE = HF \cdot HC = HA \cdot HD$.
- EH là tia phân giác của góc DEF .

Lời giải.

- $\triangle HBF \sim \triangle HCE$ (g.g).
- Từ kết quả câu a) ta có $HB \cdot HE = HF \cdot HC$.
Làm tương tự ta thu được $HF \cdot HC = HA \cdot HD$. Suy ra $HB \cdot HE = HF \cdot HC = HA \cdot HD$.
- Từ câu b), chứng minh được $\triangle EHF \sim \triangle CHB$ (c.g.c) và $\triangle DHE \sim \triangle BHA$ (c.g.c), do đó $\widehat{HEF} = \widehat{HCB}$ và $\widehat{HED} = \widehat{HAB}$.
Ta có $\widehat{HAB} = \widehat{HCB}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$).
Do đó $\widehat{HED} = \widehat{HEF} \Rightarrow EH$ là tia phân giác của góc DEF .

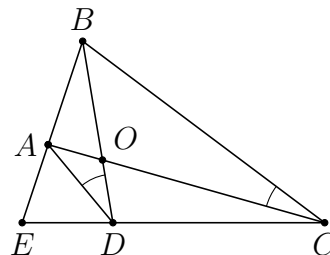


Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O .

- Chứng minh $\triangle AOD \sim \triangle BOC$.
- Chứng minh $\triangle AOB \sim \triangle DOC$.
- Gọi E là giao điểm của các đường thẳng AB và CD . Chứng minh $EA \cdot EB = ED \cdot EC$.

 Lời giải.

1. Ta có $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ (g.g).
2. Từ câu a) ta có $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle DOC$ (c.g.c).
3. Từ câu b), ta có $\widehat{ECA} = \widehat{EBD} \Rightarrow \triangle EAC \sim \triangle EDB$ (g.g). Suy ra $EA \cdot EB = ED \cdot EC$.



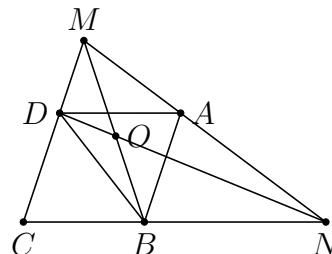
□

 **Ví dụ 3.** Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Một đường thẳng đi qua A cắt các tia CD , CB lần lượt tại M và N .

1. Chứng minh $\triangle ADM \sim \triangle NBA$.
2. Chứng minh $AD^2 = DM \cdot BN$, rồi suy ra $\triangle MDB \sim \triangle DBN$.
3. Gọi O là giao điểm của BM và DN . Tính $\widehat{MON}$.

 Lời giải.

1. Ta có $DA \parallel CN$ và $BA \parallel CM$ nên $\widehat{DMA} = \widehat{BAN}$, $\widehat{MAD} = \widehat{ANB} \Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle NBA$ (g.g).
2. Từ câu a), ta có $MD \cdot BN = AD \cdot AB = BD^2$ (do $\triangle ABD$ đều) $\Rightarrow \frac{DM}{BD} = \frac{BD}{BN}$ mà $\widehat{MDB} = \widehat{NBD} = 120^\circ$.
Vậy $\triangle MDB \sim \triangle DBN$.
3. Từ kết quả câu b), ta có $\widehat{BDN} = \widehat{DMB}$, từ đó ta nhận được $\widehat{MON} = \widehat{DMB} + \widehat{MDN} = \widehat{BDM} = 120^\circ$.



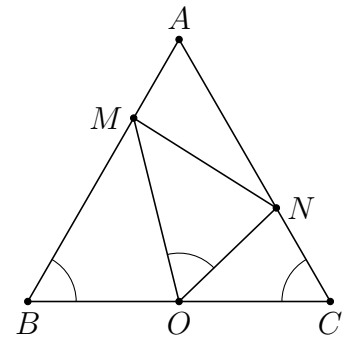
□

 **Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC đều, O là trung điểm của BC . Trên AB , AC lần lượt lấy M , N sao cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Chứng minh

1. $\widehat{BMO} = \widehat{CON}$, từ đó suy ra $\triangle BMO \sim \triangle CON$.
2. $\frac{OM}{ON} = \frac{BM}{CO}$.
3. MO là tia phân giác của $\angle BMO$.

 Lời giải.

1. Xét $\triangle BMO$, ta có $\widehat{BMO} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{MOB}$.
Ta cũng có $\widehat{CON} = 180^\circ - \widehat{MON} - \widehat{MOB} = 120^\circ - \widehat{MOB}$
 $\Rightarrow \widehat{BMO} = \widehat{CON} \Rightarrow \triangle BMO \sim \triangle CON$ (g.g).
2. Từ kết quả câu a), ta có $\frac{OM}{ON} = \frac{BM}{CO} = \frac{BM}{BO}$ vì $OB = OC$.
3. Từ kết quả câu b), $\widehat{B} = \widehat{MON} = 60^\circ$.
Do đó $\triangle BMO \sim \triangle OMN$ (c.g.c).
Vậy MO là tia phân giác của BMO .

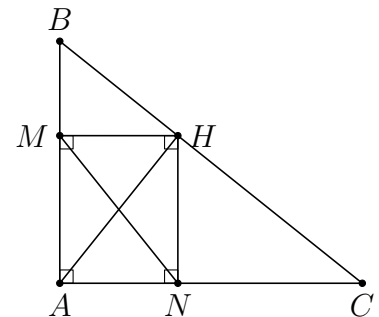


Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Kẻ đường cao AH .

1. Chứng minh $AH \cdot BC = AB \cdot AC$
2. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC . Chứng minh $\triangle AMN \sim \triangle ACB$.
3. Chứng minh $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ACB}} = \frac{AH^2}{BC^2}$.
4. Tính diện tích tứ giác $BMNC$. **ĐS:** 18,4704 cm²

Lời giải.

1. Ta có $\triangle ABH \sim \triangle CAB$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{AH}{CB} = \frac{AB}{CA} \Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC$
2. Ta giả thiết ta có $\widehat{ABC} = \widehat{HMA} = \widehat{HNA} = 90^\circ$
 $\Rightarrow AMHN$ là hình chữ nhật.
Do $ANHM$ là hình chữ nhật nên ta có $\widehat{ANM} = \widehat{AHM}$.
Mặt khác $\widehat{AHM} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ $\widehat{HAB}$)
 $\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ACB$ (g.g).
3. Ta có $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ACB}} = \frac{MN^2}{BC^2} = \frac{AH^2}{BC^2}$ (do $AH = MN$).
4. Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 4,8$ (cm²). Từ kết quả câu c), ta tính được $S_{AMN} = 5,5296$ cm² $\Rightarrow S_{BMNC} = 18,4704$ cm².



Ví dụ 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6$ cm, $AB = 8$ cm. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Qua D kẻ đường thẳng d vuông góc với BD , d cắt tia BC tại E . Chứng minh

1. $\triangle BDE \sim \triangle DCE$.
2. Kẻ $CH \perp DE$ tại H . Chứng minh $DC^2 = CH \cdot DB$.

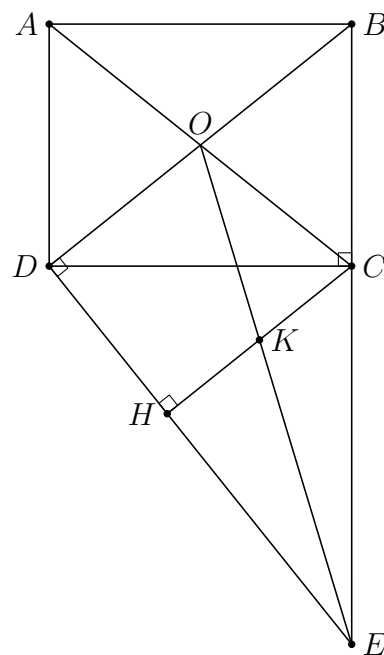
3. Gọi K là giao điểm của OC và HC . Chứng minh K là trung điểm của HC .

4. Tính tỉ số diện tích của tam giác EHC và tam giác EDB .

ĐS: 0,4096

Lời giải.

1. Ta có $\triangle BDE \sim \triangle DCE$ (g.g)
2. Ta có $CH \perp DE$ và $DB \perp DE \Rightarrow DB \parallel CH$.
Do đó $\triangle DHC \sim \triangle BCD$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{HC}{DC} \Rightarrow DC^2 = CH \cdot DB$.
3. Vì $CH \parallel BD$ nên theo định lý Ta-lét ta có
 $\frac{KH}{OD} = \frac{EK}{EO} = \frac{KC}{OB}$
mà $OD = OB$ nên $KH = KC$.
Do đó K là trung điểm của HC .
4. Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10$ cm. Từ câu b) suy ra
 $CH = 6,4$ cm. Do đó $\frac{S_{\triangle EHC}}{S_{\triangle EDB}} = \frac{HC^2}{BD^2} = 0,4096$.



□

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm. Gọi H là hình chiếu của A trên BD , tia AH cắt CD tại K .

1. Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle DAK$.

2. Tính độ dài DK .

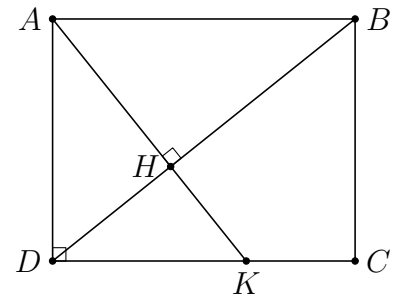
ĐS: $\frac{25}{12}$

3. Tính tỉ số diện tích của $\triangle DHK$ và $\triangle BHA$.

ĐS: $\frac{625}{20736}$

Lời giải.

1. Ta có $\widehat{DKA} = \widehat{ADB}$ (cùng phụ $\widehat{BDC}$)
 $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle DAK$ (g.g).
2. Từ câu a), ta có $\frac{DK}{AD} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow DK = \frac{25}{12}$ cm.
3. Ta có $\frac{S_{\triangle DHK}}{S_{\triangle BHA}} = \frac{DK^2}{AB^2} = \frac{625}{20736}$.



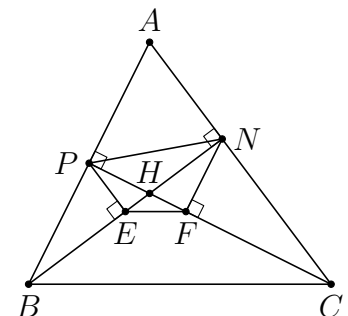
□

Bài 2. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Các đường cao BN , CP cắt nhau tại H .

1. Chứng minh $AN \cdot AC = AP \cdot AB$.
2. Chứng minh $\triangle ANP \sim \triangle ABC$.
3. Biết $BC = 2NP$ và diện tích tam giác ABC bằng 36 cm^2 . Tính diện tích tứ giác $BPNC$.
4. Gọi E , F lần lượt là hình chiếu của P , N trên BN , CP . Chứng minh $EF \parallel BC$.

Lời giải.

1. Ta có $\triangle ANB \sim \triangle APC$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{AN}{AP} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AN \cdot AC = AP \cdot AB$.
2. Từ kết quả câu a) ta có $\triangle ANP \sim \triangle ABC$ (c.g.c)
3. Ta có $\frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{NP^2}{BC^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle ANP} = 9 \text{ cm}^2$.
 Do đó $S_{BPNC} = 27 \text{ cm}^2$.
4. Ta có $EP \parallel NC$, $FN \parallel BP$ nên theo định lý Ta-lét
 ta có $\frac{HE}{HN} = \frac{HP}{HC}$, $\frac{HF}{HP} = \frac{HN}{HB} \Rightarrow \frac{HE}{HB} = \frac{HF}{HC}$. Do đó
 $EF \parallel BC$.



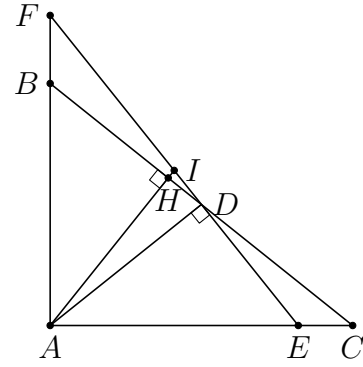
□

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) và trung tuyến AD . Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt AC và AB lần lượt tại E và F .

1. Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle AEF$.
2. Chứng minh $BC^2 = 4DE \cdot DF$.
3. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC , tia AH cắt EF của tam giác ABC , tia AH cắt EF tại I . Chứng minh $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD^2}{AI^2}$.

Lời giải.

1. Ta có $\triangle DAC$ cân tại D nên $\widehat{ACB} = \widehat{DAC} = 90^\circ - \widehat{DAF} = \widehat{AFE} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AEF$ (g.g).
2. Theo câu a) ta có $\widehat{AFE} \sim \widehat{ACB} \Rightarrow \triangle DEC \sim \triangle DBF$ (g.g)
 $\Rightarrow BC^2 = 4DE \cdot DF$.
3. Ta có $AI \perp CB$ và $AF \perp AC$. suy ra $\widehat{IAF} = \widehat{ACB}$ (góc có cặp cạnh tương ứng vuông góc).
Suy ra $\widehat{IAF} = \widehat{IFA} \Rightarrow \triangle IAF$ cân tại I . Suy ra $IA = IF$.
Tương tự cũng có $IA = IE \Rightarrow IE = IF$.
Do đó AI, AD lần lượt là hai đường trung tuyến tương ứng của $\triangle AEF$ và $\triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD^2}{AI^2}$.



□

4 Đề kiểm tra chương III

4.1 Đề 1

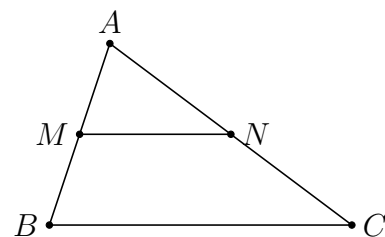
PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (2,5 ĐIỂM)

Câu 1. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB, AC sao cho $MN \parallel BC$. Biết $AM = 16$ cm, $AN = 20$ cm, $NC = 15$ cm. Khi đó độ dài AB bằng

- (A) 28 cm. (B) 26 cm. (C) 24 cm. (D) 22 cm.

Lời giải.

Theo định lý Ta-lét ta có $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$
 $\Rightarrow MB = \frac{AM \cdot NC}{AN} = 12$ cm
 $\Rightarrow AB = 16 + 12 = 28$ (cm).



Chọn đáp án (A)
A

□

Câu 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 5$ cm và tam giác DEF có $DE = 6$ cm, $DF = 8$ cm, $EF = 10$ cm. Cách viết nào sau đây đúng quy ước về đỉnh:

- (A) $\triangle ABC \sim \triangle FED$. (B) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
(C) $\triangle CAB \sim \triangle DEF$. (D) $\triangle BCA \sim \triangle EDF$.

Lời giải.

Ta có $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = 2 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$ (c.c.c).

Chọn đáp án (B)
B

□

Câu 3. Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác MNP theo tỉ số đồng dạng 3. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AC, MP . Tỉ số $\frac{BH}{NK}$ bằng

(A) $\frac{1}{3}$.

(B) $\frac{1}{9}$.

(C) 3.

(D) 9.

Lời giải.

Ta có $\frac{BH}{NK} = 3$.

Chọn đáp án (C)
C

□

Câu 4. Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác PQR có $\frac{AB}{PQ} = 4, S_{\triangle ABC} = 32 \text{ cm}^2$. Diện tích tam giác PQR bằng

(A) 128 cm^2 .

(B) 64 cm^2 .

(C) 16 cm^2 .

(D) 2 cm^2 .

Lời giải.

Ta có $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PQR}} = \frac{AB^2}{PQ^2} = 16 \Rightarrow S_{\triangle PQR} = \frac{32}{16} = 2 \text{ cm}^2$.

Chọn đáp án (D)
D

□

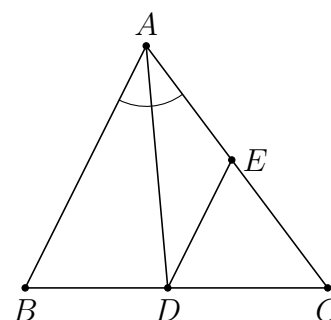
Bài 4.

Cho hình vẽ bên. Điền nội dung thích hợp vào chỗ chấm ($\dots$)

1. $\frac{DB}{DC} = \frac{\dots}{\dots}$

2. Nếu $\frac{DB}{DC} = \frac{\dots}{\dots}$ thì $DE \parallel AB$.

3. Nếu $DE \parallel AB$ thì $EA = \dots$.



Lời giải.

1. $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

2. Nếu $\frac{DB}{DC} = \frac{AE}{AC}$ thì $DE \parallel AB$.

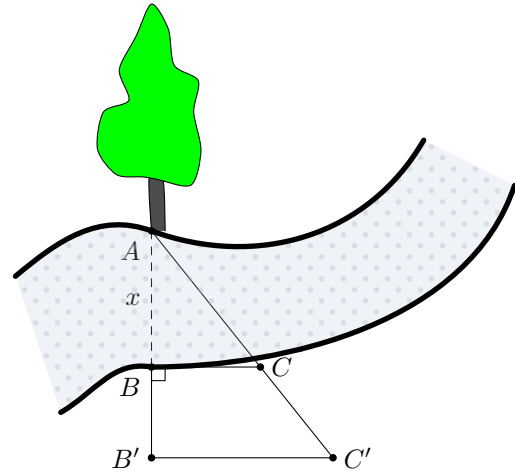
3. Nếu $DE \parallel AB$ thì $EA = ED$.

□

PHẦN II. TỰ LUẬN

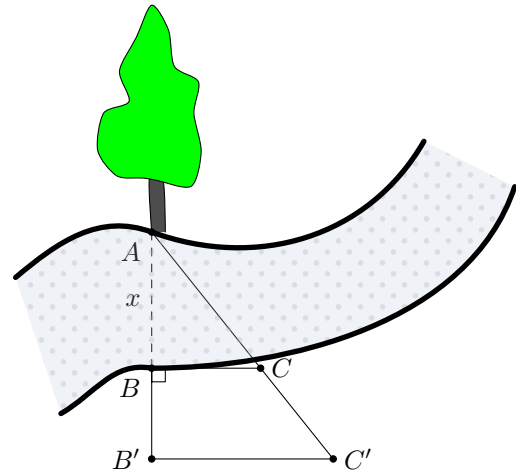
Bài 5.

Người ta tiến hành đo đạc các yếu tố cần thiết để tính chiều rộng của một khúc sông mà không cần phải sang bờ bên kia sông (hình vẽ bên). Biết $BB' = 20\text{m}$, $BC = 30\text{m}$ và $B'C' = 40\text{m}$. Tính độ rộng x của khúc sông. **ĐS:** 60 m



Lời giải.

Dùng hệ quả của định lý Ta-let, ta có

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{x}{x+20} = \frac{30}{40} \Rightarrow x = 60 \text{ m.}$$


□

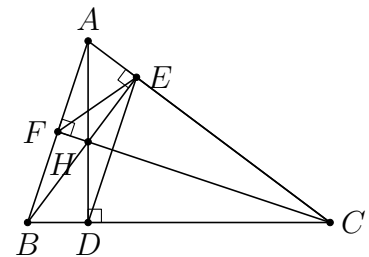
Bài 6. Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ và các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H .

1. Chứng minh $HE \cdot HB = HF \cdot HC$.
2. Chứng minh $\triangle EHF \sim \triangle CHB$.
3. Chứng minh EH là tia phân giác của góc DEC .
4. Biết $\frac{HA}{HC} = \frac{2}{3}$. Tính tỉ số diện tích của tam giác AEF và tam giác DEC .

ĐS: $\frac{4}{9}$

Lời giải.

1. Ta có $\triangle HBF \sim \triangle HCE$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{HF}{HB} = \frac{HE}{HC} \Rightarrow HE \cdot HB = HF \cdot HC$.
2. Từ kết quả câu a), suy ra $\triangle EHF \sim \triangle CHB$ (g.c.g).
3. Làm tương tự câu a) và b) ta chứng minh được
 $\triangle AHB \sim \triangle EHD$, do đó $\widehat{FEH} = \widehat{BCH} = \widehat{BAH} = \widehat{DEH}$ hay EH là tia phân giác của góc DEC .
4. Ta có $\widehat{AEF} = 90^\circ - \widehat{FEH} = 90^\circ - \widehat{DEH} = \widehat{DEC}$,
do đó $\triangle AEF \sim \triangle DEC$ (g.g) mà $\triangle HFA \sim \triangle HDC$ (g.g).
Do đó $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{FA^2}{DC^2} = \frac{HA^2}{HC^2} = \frac{4}{9}$.

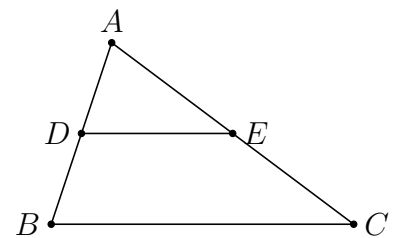


□

4.2 Đề 2

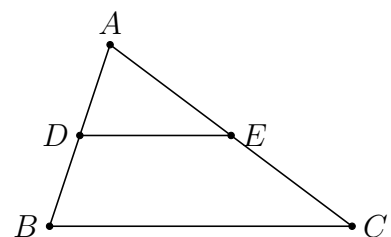
Bài 1.

Cho hình vẽ bên. Biết $DE \parallel BC$, $DE = 4$ cm, $BC = 10$ cm và $AB = 8$ cm. Tính độ dài cạnh BD . **ĐS:** 4,8 cm



Lời giải.

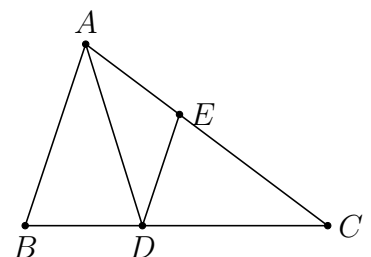
Theo định lý Ta-lét ta có $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$, từ đó $AD = 3,2$ cm.
Suy ra $BD = AB - AD = 4,8$ cm.



□

Bài 2.

Cho hình vẽ bên. Biết $AB = 6$ cm, $AC = 10$ cm và $BC = 9$ cm, phân giác AD và $DE \parallel AB$. Tính độ dài cạnh BD , DC , DE . **ĐS:** 3,375 cm, 5,625 cm, 3,75 cm



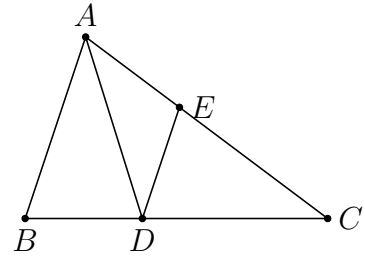
Lời giải.

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác, ta có

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB+DC}{AB+AC} = \frac{9}{16}.$$

Từ đó tính được $DB = 3,375$ cm và $DC = 5,625$ cm.

Theo định lý Ta-lét ta có $\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow DE = 3,75$ cm.



□

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn. Kẻ các đường cao BD và CE cắt nhau tại H .

1. Chứng minh $AD \cdot AC = AE \cdot AB$.

2. Chứng minh $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

3. Biết $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính tỉ số diện tích của tam giác ADE và tam giác ABC .

ĐS: $\frac{1}{2}$

4. Chứng minh $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$.

Lời giải.

1. Ta có $\triangle ADB \triangle AEC$ (g.g), từ đó

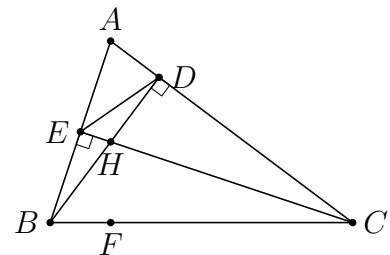
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AD \cdot AC = AE \cdot AB.$$

2. Từ kết quả câu a), ta có $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (c.g.c).

3. Vì $\widehat{BAC} = 45^\circ$ nên tam giác ADB vuông cân tại D , do đó $AB^2 = 2AD^2$. Suy ra $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{1}{2}$.

4. AH cắt BC tại F thì $AF \perp BC$. $\triangle BHF$ và $\triangle BCD$ là hai tam giác vuông có chung $\widehat{DBC}$ nên $\triangle BHF \sim \triangle BCD$ (g.g), tương tự ta cũng có $\triangle CHF \sim \triangle CBE$ (g.g), từ đó ta có $BH \cdot BD = BF \cdot BC$ và $CH \cdot CE = CF \cdot CB$. Vậy $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$.

□



Chương 4

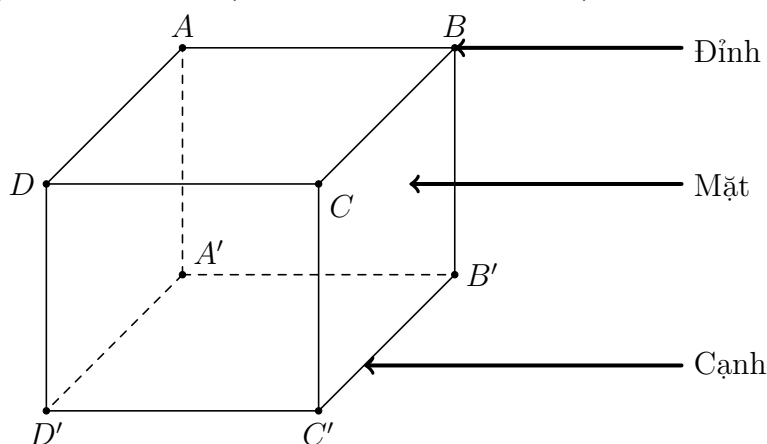
Hình lăng trụ đứng. Hình chóp đều

§1 Hình hộp chữ nhật

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Hình hộp chữ nhật

Hình hộp chữ nhật là hình có 6 mặt đều là các hình chữ nhật.



- ☑ Hình hộp chữ nhật có 8 đỉnh: $A; B; \dots; A'; B'; \dots$
- ☑ Hình hộp chữ nhật có 6 mặt: $ABCD; BCC'B'; \dots$
- ☑ Hình hộp chữ nhật có 12 cạnh: $AB; A'B'; BC; \dots$
- ☑ Hai mặt không có cạnh chung gọi là hai *mặt đối diện*. Nếu coi hai mặt đối diện là *mặt đáy* thì các mặt còn lại gọi là *mặt bên*.
- ☑ Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các mặt là hình vuông.

1.2 Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Ta nói:

- ☑ a và b *song song* nếu chúng cùng thuộc một mặt phẳng và không có điểm chung;
- ☑ a và b *cắt nhau* nếu chúng cùng thuộc một mặt phẳng và chỉ có một điểm chung;

- ☑ a và b trùng nhau nếu chúng có ít nhất hai điểm chung phân biệt;
- ☑ a và b chéo nhau nếu không tồn tại bất cứ một mặt phẳng nào chứa cả a và b .

1.3 Đường thẳng và mặt phẳng song song

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Ta nói a song song với (P) nếu a không có điểm chung với mặt phẳng (P) .

1.4 Hai mặt phẳng song song

- ☑ Hai mặt phẳng song song với nhau nếu trong mặt phẳng này có chứa hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng kia.
- ☑ Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng đi qua điểm chung đó. Ta nói hai mặt phẳng đã cho *cắt nhau*.

1.5 Các công thức tính diện tích

Hình hộp chữ nhật có chiều cao h , đáy có chiều dài là a và chiều rộng b .

1. Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bằng chu vi đáy nhân với chiều cao:

$$S_{xq} = 2 \times (a + b) \times h.$$

2. Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật bằng diện tích xung quanh cộng diện tích hai đáy:

$$S_{tp} = 2 \times (a + b) \times h + 2 \times a \times b.$$

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 54. Nhận biết các đỉnh, các cạnh và các mặt của hình hộp chữ nhật

Sử dụng các tính chất hình hộp chữ nhật để nhận biết.

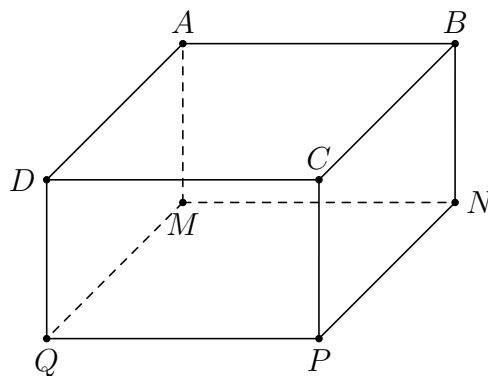
🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

 **Ví dụ 1.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$ như hình vẽ trên

1. Kể tên tất cả các mặt đối diện của hình hộp chữ nhật.
2. Nếu coi $ABCD$ và $MNPQ$ là hai mặt đáy, hãy kể tên tất cả các mặt bên của hình hộp chữ nhật.

 **Lời giải.**

1. Các mặt đối diện của hình hộp chữ nhật là $ABCD$ và $MNPQ$; $AMQD$ và $BNPC$; $ABNM$ và $DCPQ$.
2. Các mặt bên là $ABNM$, $BNPC$, $DCPQ$ và $AMQD$.



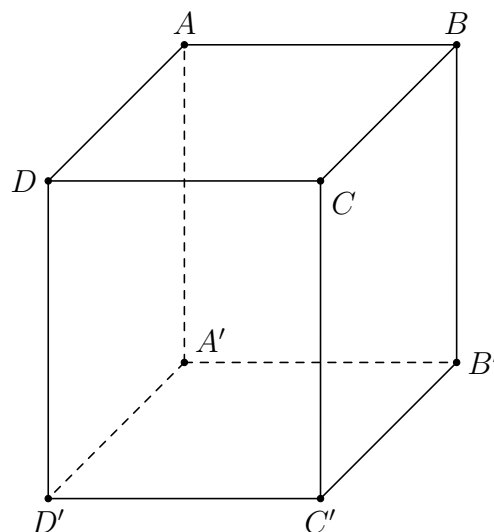
□

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ.

1. Kể tên 8 đỉnh và 6 mặt của hình hộp chữ nhật.
2. Kể tên tất cả các cạnh của hình hộp chữ nhật.

Lời giải.

1. Các đỉnh của hình hộp chữ nhật là: $A, B, C, D, A', B', C', D'$. Các mặt của hình hộp chữ nhật là: $ABCD, A'B'C'D', ABB'A', BCC'B', CDD'C'$ và $DAA'D'$.
2. Các cạnh của hình hộp chữ nhật là: $AB, BC, CD, DA, AA', BB', CC', DD', A'B', B'C', C'D', D'A'$.



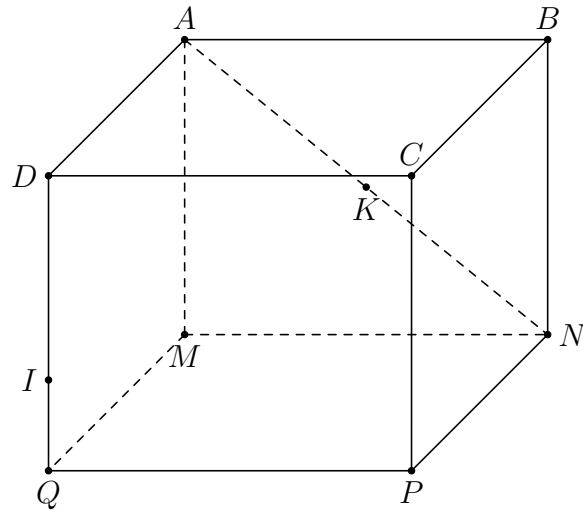
□

Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$ như hình vẽ. K là trung điểm AN , I là điểm bất kì thuộc DQ .

- a) Kể tên các mặt phẳng chứa cạnh CP .
- b) Điểm I có thuộc $(AMQD)$ không? Điểm K có thuộc $(ABNM)$ không?
- c) BN có cắt được AK không?
- d) BM có đi qua K không?

Lời giải.

1. Các mặt phẳng chứa cạnh CP là $(CPNB)$ và $(CPQD)$.
2. Ta có: $I \in DQ$ (gt) và $DQ \in (AMDQ)$. Do đó I thuộc $(AMQD)$.
Ngoài ra, K là trung điểm AN (gt) và $AN \in (ABNM)$. Vì vậy K thuộc $(ABNM)$.
3. Vì $K \in AN$ và BN cắt AN tại N nên AK cắt BN tại N .
4. Vì K là giao điểm của hai đường chéo AN , BM của hình chữ nhật $ABNM$ nên BM đi qua K .



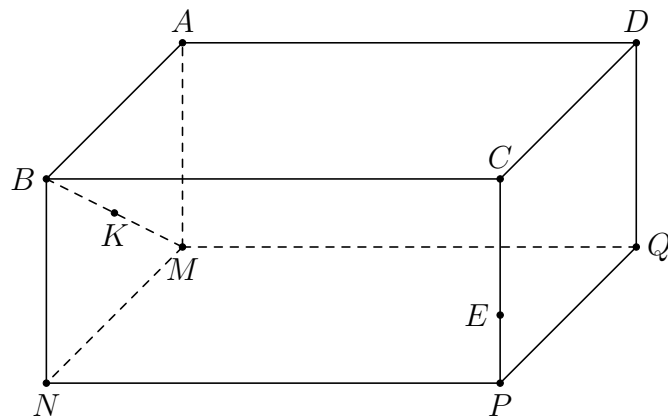
□

Ví dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$ như hình vẽ. K là trung điểm BM , E thuộc CP .

1. Kể tên các mặt phẳng chứa cạnh AB .
2. Kể tên các mặt phẳng chứa điểm E .
3. BM có cắt được DE không?
4. AN có đi qua K không?

Lời giải.

1. Các mặt phẳng chứa cạnh AB là $(ABCD)$ và $(ABNM)$.
2. Các mặt phẳng chứa điểm E là $(BNPC)$ và $(CPQD)$.
3. Vì $BM \in (ABNM)$, $DE \in (CDQP)$ và $(ABNM)$, $(CDQP)$ đối diện nhau nên BM chéo DE .
4. Vì K là giao điểm của hai đường chéo BM , AN của hình chữ nhật $ABMN$ nên AN đi qua K .



□

Dạng 55. Nhận biết vị trí tương đối của hai đường thẳng, của đường thẳng với mặt phẳng và của hai mặt phẳng của hình hộp chữ nhật

Dùng các kiến thức nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết để nhận biết.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

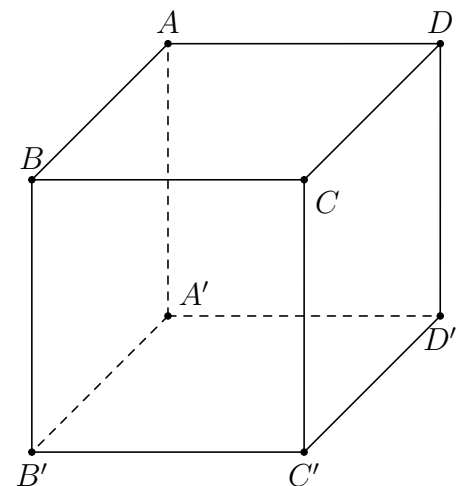
Giáo viên:

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ.

1. Nêu tên các cạnh song song với AB .
2. Cặp đường thẳng AA' và BC ; CD và $B'C'$ có cắt nhau không?
3. Nêu vị trí tương đối của AA' với mặt phẳng $(CDC'D')$.
4. Nêu vị trí tương đối của $(ABB'A')$ với $(CDC'D')$ và $(BDD'B')$.

Lời giải.

1. Các cạnh song song với AB là CD ; $C'D'$ và $A'B'$.
2. Ta có: AA' và BC chéo nhau, CD và $B'C'$ chéo nhau.
3. Vì $AA' \parallel DD'$ và $DD' \in (CDC'D')$ nên $AA' \parallel (CDC'D')$.
4. Ta có: $(ABB'A')$ và $(CDC'D')$ là hai mặt phẳng đối diện nên $(ABB'A') \parallel (CDC'D')$. Ngoài ra $(ABB'A')$ cắt $(BDD'B')$ theo đường thẳng BB' .



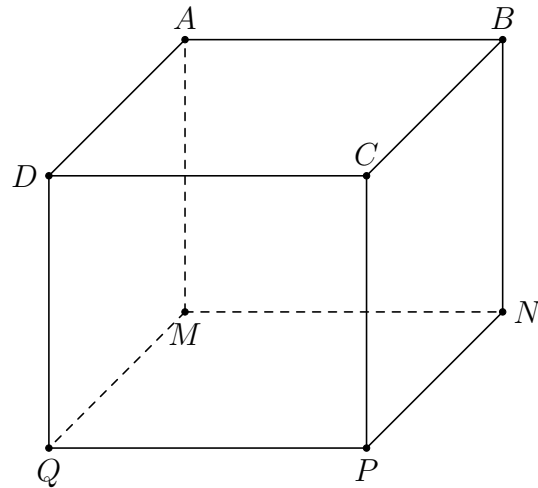
□

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$ như hình vẽ.

1. Nêu tên các cạnh song song với AM .
2. Cặp đường thẳng AD và BC ; AB và CP có cắt nhau không?
3. Chứng minh PQ có song song với $(ABNM)$ và $(ABCD)$.
4. Hai mặt phẳng $(ACPM)$ và $(CDQP)$ có cắt nhau không? Nếu cắt thì cắt theo đường thẳng chung nào?

Lời giải.

1. Các cạnh song song với AM là DQ ; CP và BN .
2. Vì AD , BC cùng thuộc hình chữ nhật $ABCD$ nên $AD \parallel BC$.
Ngoài ra, $AB \in (ABNM)$, $CP \in (DCPQ)$ và $(ABNM)$, $(DCPQ)$ đối nhau nên AB , CP chéo nhau.
3. Vì $PQ \parallel MN$ và $MN \in (ABMN)$ nên $PQ \parallel (ABMN)$.
Mặt khác, $PQ \parallel CD$ và $CD \in (ABCD)$ nên $PQ \parallel (ABCD)$.
4. Ta có: $(ACPM)$ cắt $(CDQP)$ theo đường thẳng CP hay $(ACPM) \cap (CDQP) = CP$.



Dạng 56. Tính toán các số liệu liên quan đến cạnh, mặt của hình hộp chữ nhật

Đưa các dữ liệu của cạnh, góc về trong cùng một mặt phẳng và sử dụng các công thức đã biết trong hình học phẳng để tính.

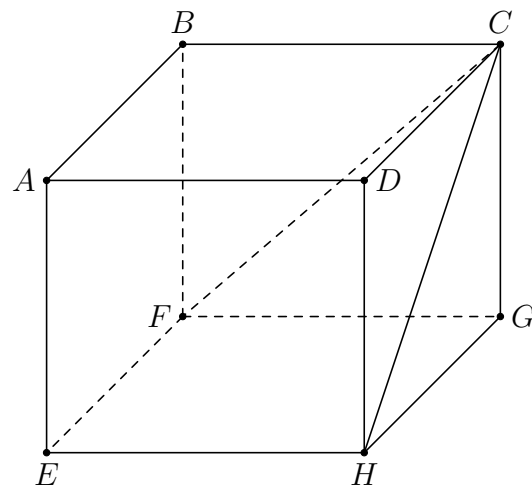
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ có $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm, $AE = 3$ cm.

1. Tính CF , CH . **ĐS:** 5 cm; $\sqrt{34}$ cm
2. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật. **ĐS:** 94 cm^2

Lời giải.

1. Xét hình chữ nhật $BCGF$:
Áp dụng định lý Py-ta-go cho $\triangle BFC$ vuông tại B , ta có:
 $CF^2 = BC^2 + BF^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow CF = 5$ cm.
Tương tự, xét hình chữ nhật $CDHG$:
Áp dụng định lý Py-ta-go cho $\triangle CGH$ vuông tại G , ta có:
 $CH^2 = CG^2 + GH^2 = 3^2 + 5^2 = 34$
 $\Rightarrow CH = \sqrt{34}$ cm.
2. Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật:
 $S_{xq} = 2 \cdot (AB + BC) \cdot AE = 2 \cdot (5 + 4) \cdot 3 = 54$ (cm^2).
Diện tích toàn phần:
 $S_{tp} = S_{xq} + 2 \cdot S_{ABCD} = 54 + 2 \cdot 5 \cdot 4 = 94$ (cm^2).



Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB = 6$ cm, $AD = 8$ cm, $AA_1 = 9$ cm.

1. Tính A_1C_1 , AB_1 . **ĐS:** 10 cm; $\sqrt{117}$ cm
2. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật. **ĐS:** 348 cm^2

Lời giải.

1. Xét hình chữ nhật $A_1B_1C_1D_1$:

Áp dụng định lý Py-ta-go cho $\Delta A_1C_1D_1$ vuông tại D_1 , ta có:

$$A_1C_1^2 = A_1D_1^2 + C_1D_1^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

$$\Rightarrow A_1C_1 = 10 \text{ cm.}$$

Tương tự, xét hình chữ nhật ABB_1A_1 :

Áp dụng định lý Py-ta-go cho ΔAA_1B_1 vuông tại A_1 , ta có:

$$AB_1^2 = AA_1^2 + A_1B_1^2 = 9^2 + 6^2 = 117$$

$$\Rightarrow CH = \sqrt{117} \text{ cm.}$$

2. Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật:

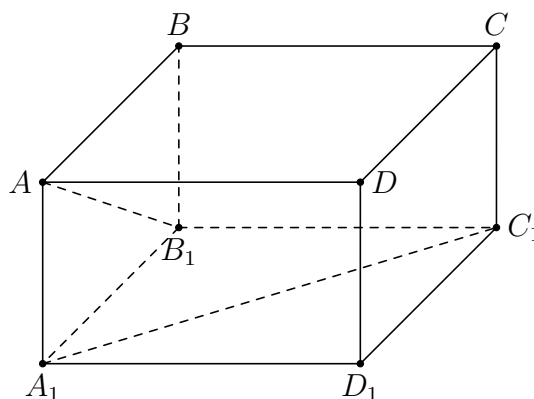
$$S_{xq} = 2 \cdot (AB + AD) \cdot AA_1 = 2 \cdot (6 + 8) \cdot 9$$

$$= 252 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2 \cdot S_{ABCD} = 252 + 2 \cdot 6 \cdot 8 = 348$$

$$\text{(cm}^2\text{)}.$$



Ví dụ 3. Cho một căn phòng có dạng hình hộp chữ nhật. Biết chiều dài, chiều rộng căn phòng lần lượt là 3 m và 2 m và mặt bên chứa cạnh 3 m có đường chéo dài 5 m.

1. Tính diện tích mặt sàn căn phòng. **ĐS:** 6 m^2
2. Để sơn xung quanh căn phòng cần trả bao nhiêu tiền công cho thợ sơn biết giá công sơn là 50.000 đồng cho mỗi m^2 . **ĐS:** 2.000.000 đồng

Lời giải.

1. Diện tích mặt sàn là $3 \cdot 2 = 6 \text{ m}^2$.

2. Chiều cao căn phòng là $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ m}$.

Diện tích xung quanh của căn phòng là $2(3 + 2) \cdot 4 = 40 \text{ m}^2$.

Giá tiền công trả cho thợ sơn là $40 \times 50.000 = 2.000.000$ (đồng).

Ví dụ 4. Cho một căn phòng có dạng hình hộp chữ nhật. Chiều dài và chiều rộng căn phòng lần lượt là m và 3 m. Mặt bên chứa cạnh 3 m có đường chéo dài 5 m.

1. Để lát gạch nền căn phòng cần ít nhất bao nhiêu viên gạch hoa hình vuông, biết một

viên gạch có số đo 20 cm.

ĐS: 300 viên gạch

2. Tính toàn phần của căn phòng.

ĐS: 80 m²

 Lời giải.

1. Diện tích sàn của căn phòng là $4 \cdot 3 = 12 \text{ m}^2 = 120.000 \text{ cm}^2$.
Diện tích một viên gạch hoa hình vuông là $20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$.
Số viên gạch cần ít nhất để lát sàn căn phòng là $120.000 \div 400 = 300$ (viên gạch).
2. Chiều cao căn phòng là $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ m}$.
Diện tích xung quanh của căn phòng là $2(3 + 4) \cdot 4 = 56 \text{ m}^2$.
Diện tích toàn phần của căn phòng là $56 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 80 \text{ m}^2$.

□

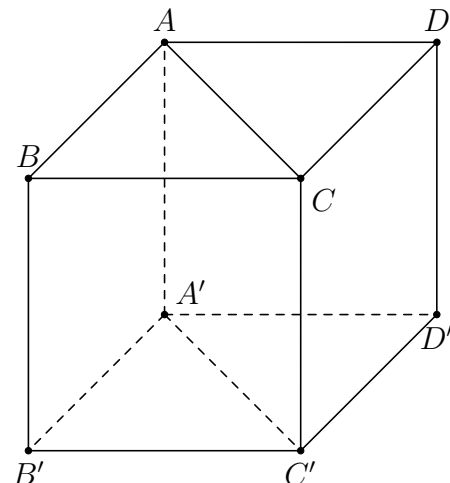
Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy cho biết:

1. Những cạnh nào song song với cạnh AA' ? Vì sao?
2. Những cạnh nào song song với cạnh BC ? Vì sao?
3. Cạnh đối diện với AA' là cạnh nào?
4. Đường thẳng AB song song với những mặt phẳng nào? Vì sao?

 Lời giải.

1. Vì $ABB'A'$ là hình chữ nhật nên $AA' \parallel BB'$.
Vì $ADD'A'$ là hình chữ nhật nên $AA' \parallel DD'$.
Ta thấy $DCC'D'$ là hình chữ nhật nên $DD' \parallel CC'$.
Mà $AA' \parallel DD' \Rightarrow AA' \parallel CC'$.
2. Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BC \parallel AD$.
Vì $BCC'B'$ là hình chữ nhật nên $BC \parallel B'C'$.
Ta có $ADD'A'$ là hình chữ nhật nên $AD \parallel A'D'$.
Mà $AD \parallel BC \Rightarrow BC \parallel A'D'$.
3. Ta thấy $AA' \in (AA'C'C)$, $CC' \in (AA'C'C)$ và $(AA'C'C)$ là hình chữ nhật. Do đó cạnh đối diện với AA' là cạnh CC' .
4. Vì $AB \parallel DC$, $DC \subset (DCC'D')$ và $AB \not\subset (DCC'D')$ nên $AB \parallel (DCC'D')$.
Tương tự, vì $AB \parallel A'B'$, $A'B' \subset (A'B'C'D')$ và $AB \not\subset (A'B'C'D')$ nên $AB \parallel (A'B'C'D')$.



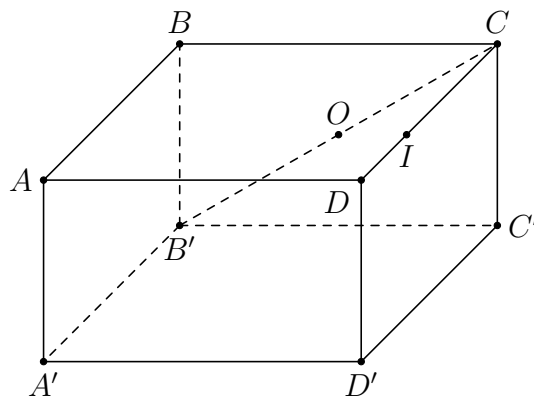
□

 **Bài 2.** $ABCD.A'B'C'D'$ là một hình hộp chữ nhật (hình vẽ).

1. Nếu O là trung điểm của đoạn CB' thì O có là điểm thuộc đoạn BC' không?
2. I là điểm thuộc cạnh CD . Hỏi I có thể là điểm thuộc cạnh BB' hay không?

 **Lời giải.**

1. Vì $BCC'B'$ là hình chữ nhật và O là trung điểm của BC nên O thuộc đoạn BC' .
2. Ta thấy $I \in CD$, $CD \subset (CDD'C')$ và $BB' \not\subset (CDD'C')$ nên $I \notin BB'$.



□

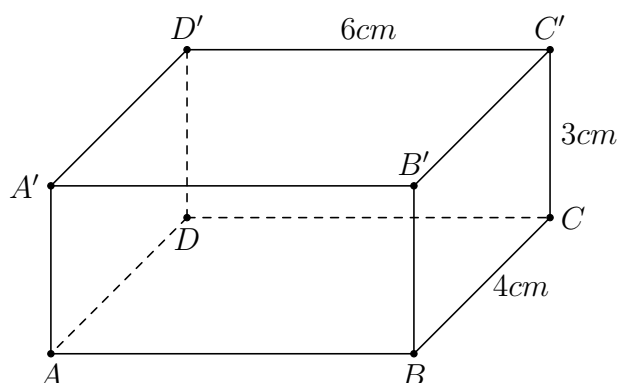
 **Bài 3.** Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật theo các kích thước cho ở hình vẽ.

ĐS: 108 m²

 **Lời giải.**

Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật là
 $S_{xq} = 2 \cdot (B'C' + D'C') \cdot CC' = 2 \cdot (4 + 6) \cdot 3$
 $= 60 \text{ cm}^2$.

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là
 $S_{tp} = S_{xq} + 2 \cdot S_{A'B'C'D'} = 60 + 2 \cdot 4 \cdot 6 = 108$
 cm^2 .



□

 **Bài 4.** Một phòng học hình hộp chữ nhật có chiều dài 10 m, chiều rộng 5 m và chiều cao 4 m. Người ta định sơn bốn bức tường căn phòng, biết giá công tiền sơn là 25.000 đồng cho mỗi m². Hỏi chi phí tiền công là bao nhiêu? Cho biết căn phòng có một cửa chính cao 1,8 m và chiều rộng 2 m và hai cửa sổ có cùng chiều dài 80 cm, chiều 60 cm.

ĐS: 2.886.000 đồng

 **Lời giải.**

Diện tích của bốn bức tường là $2(10 + 5) \cdot 4 = 120 \text{ m}^2$.

Diện tích của cửa chính là $1,8 \cdot 2 = 3,6 \text{ m}^2$.

Diện tích của hai cửa sổ là $2 \cdot 80 \cdot 60 = 9600 \text{ cm}^2 = 0,96 \text{ m}^2$.

Diện tích cần phải sơn là $120 - 3,6 - 0,96 = 115,44 \text{ m}^2$.

Chi phí tiền công là $115,44 \cdot 25.000 = 2.886.000$ (đồng).

□

§2 Thể tích của hình hộp chữ nhật

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) nếu a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng (P) .

Nếu $a \perp (P)$ thì a vuông góc với mọi đường thẳng b nằm trong (P) .

1.2 Hai mặt phẳng vuông góc

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu trong mặt phẳng này tồn tại một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

1.3 Thể tích của hình hộp chữ nhật

Thể tích của hình hộp chữ nhật có chiều dài, chiều rộng và chiều cao lần lượt là a, b, c bằng:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Thể tích hình lập phương cạnh a bằng : $V = a^3$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 57. Nhận biết quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong hình hộp chữ nhật

Sử dụng mối quan hệ vuông góc giữa đường thẳng với mặt phẳng và hai mặt phẳng với nhau để nhận biết.

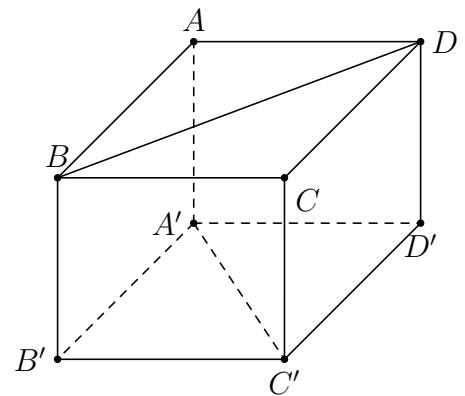
BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ.

1. Kể tên các đường thẳng trên hình vẽ vuông góc với CC' .
2. Mặt phẳng $(ADD'A')$ vuông góc với những mặt phẳng nào?
3. Chứng minh BD vuông góc với $A'C'$.

 **Lời giải.**

1. Các đường thẳng vuông góc với CC' là: $AB, BC, CD, DA, A'B', B'C', C'D', A'D', A'C'$.
2. Mặt phẳng $(ADD'A')$ vuông góc với $(ABCD), (A'B'C'D'), (ABB'A')$ và $(CC'D'D)$.
3. Vì $BD \perp (ACC'A')$ và $A'C' \in (ACC'A')$ nên $BD \perp A'C'$.

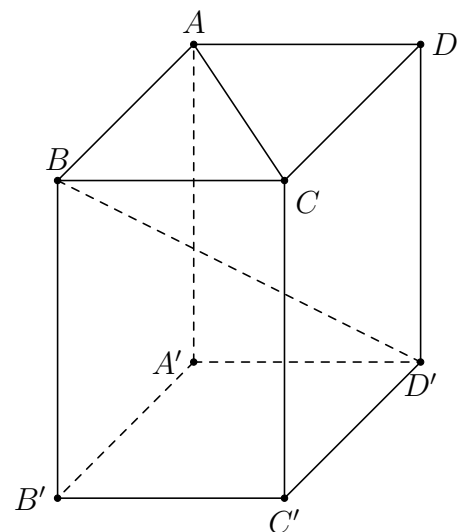


Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ.

1. Kể tên các đường thẳng trên hình vẽ vuông góc với AD .
2. Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với những mặt phẳng nào?
3. Chứng minh AC vuông góc với BD' .

Lời giải.

1. Các đường thẳng vuông góc với AD là: $AB, CD, AA', BB', CC', DD', A'B', C'D'$.
2. Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với $(AA'B'B), (ADD'A'), (CC'D'D), (BCC'B')$.
3. Vì $AC \perp (BDD'B')$ và $BD' \in (BDD'B')$ nên $AC \perp BD'$.



Dạng 58. Tính thể tích hình hộp chữ nhật và các bài toán liên quan đến cạnh và mặt của hình hộp chữ nhật

Chuyển các dữ liệu của cạnh, góc về trong cùng một mặt phẳng và sử dụng các công thức đã biết trong hình học phẳng để tính toán.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 8$ cm, $AC = 10$ cm, $AA' = 10$ cm.

1. Tính thể tích hình hộp. **ĐS:** 480 cm^3
2. Tính diện tích $ACC'A'$. **ĐS:** 100 cm^2

3. Tính $B'D$.**ĐS:** $10\sqrt{2}$ cm

4. Tính diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật.

ĐS: 280 cm^2 **Lời giải.**

1. Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ cm}$.

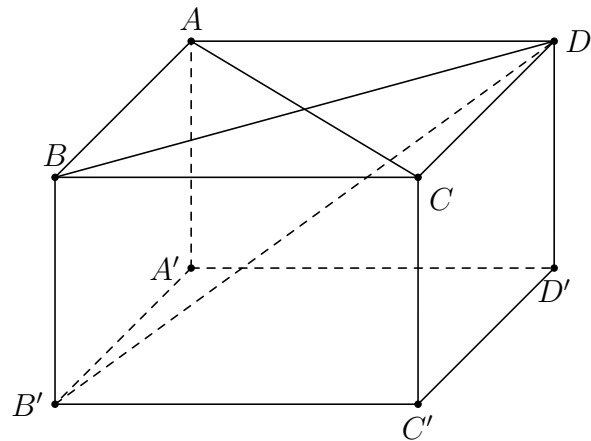
Thể tích hình hộp chữ nhật là

$$V = AB \cdot AD \cdot AA' = 8 \cdot 6 \cdot 10 = 480 \text{ cm}^3.$$

2. $S_{ACC'A'} = AC \cdot AA' = 10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$.

3. Áp dụng định lý Py-ta-go cho $\triangle BDB'$ vuông tại B , ta có: $B'D = \sqrt{BD^2 + BB'^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$.

4. $S_{xq} = 2 \cdot (AB + AC) \cdot AA' = 2 \cdot (8 + 10) \cdot 10 = 280 \text{ cm}^2$.



□

 **Ví dụ 2.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 20 \text{ cm}$, $AD = 15 \text{ cm}$, $AA' = 10 \text{ cm}$.

1. Tính thể tích hình hộp.

ĐS: 3000 cm^3 2. Tính diện tích $BDD'B'$.**ĐS:** 250 cm^2 3. Gọi O là trung điểm BD . Tính OB' .**ĐS:** $\frac{5\sqrt{41}}{2} \text{ cm}$

4. Tính diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật.

ĐS: 700 m^2 **Lời giải.**

- Đổi $100 \text{ lít} = 100 \text{ dm}^3 = 100.000 \text{ cm}^3$.
Chiều cao của khối nước là $h = \frac{100.000}{100 \times 30} = \frac{100}{3} \text{ cm}$.
- Thể tích của cả bể là $100 \cdot 30 \cdot 60 = 180.000 \text{ cm}^3$.
Thể tích phần bể không chứa nước là $180.000 - 100.000 = 80.000 \text{ cm}^3$.

□

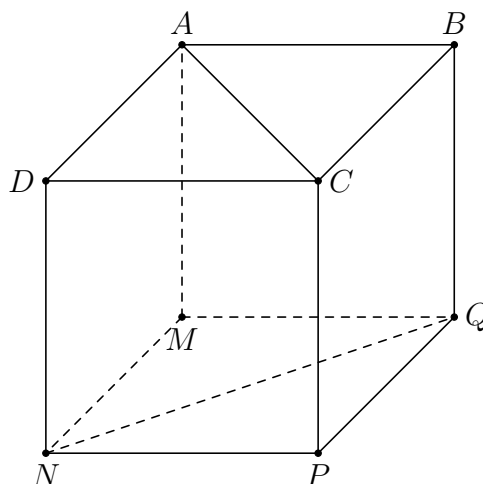
3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$ như hình vẽ.

- Kể tên các đường thẳng trên hình vẽ vuông góc với CP .
- Mặt phẳng $(MNPQ)$ vuông góc với những mặt phẳng nào?
- Chứng minh NQ vuông góc với AC .

 **Lời giải.**

- Các đường thẳng vuông góc với CP là: $AB, BC, CD, AD, AC, MN, MQ, PQ, NP, NQ$.
- Mặt phẳng $(MNPQ)$ vuông góc với $(ABNM), (ADQM), (CDQP), (CDQP)$.
- Vì $NQ \perp (ACPM)$ và $AC \in (ACPM)$ nên $NQ \perp AC$.



□

Bài 2. Một hình lập phương có cạnh bằng 1. Người ta tăng độ dài của mỗi cạnh của nó thêm 20%.

- Diện tích toàn phần của nó tăng bao nhiêu phần trăm? **ĐS:** 44%
- Thể tích của nó tăng bao nhiêu phần trăm? **ĐS:** 72,8%

 **Lời giải.**

- Độ dài của mỗi cạnh sau khi tăng thêm 20% là 1,2.
Diện tích toàn phần tăng thêm là $6 \cdot 1,2 \cdot 1,2 - 6 \cdot 1 \cdot 1 = 2,64$.
Phần trăm diện tích tăng thêm so với ban đầu là $2,64 \div 6 \times 100\% = 44\%$.
- Thể tích tăng thêm là $1,2^3 - 1^3 = 0,728$.
Phần trăm thể tích tăng thêm so với ban đầu là $0,728 \div 1 \times 100\% = 72,8\%$.

□

⇒ **Bài 3.** Một cái thùng có dạng hình hộp chữ nhật, cao 1 m, dài 50 cm và rộng 50 cm. Các bác thợ xây đổ một lượng nước bằng 50% thể tích của thùng rồi thả vào đó 50 viên gạch hình hộp chữ nhật, mỗi viên có các kích thước cao, dài, rộng lần lượt là 10 cm, 20 cm, 15 cm. Hỏi nước trong thùng có bị tràn ra ngoài không? Vì sao?

ĐS: Không bị tràn ra ngoài

✎ **Lời giải.**

Thể tích thùng là $V_1 = 100 \cdot 50 \cdot 50 = 250.000 \text{ cm}^3$.

Thể tích phần còn trống của thùng sau khi đổ nước là $V_2 = V_1 \cdot 50\% = 125.000 \text{ cm}^3$

Thể tích các viên gạch là $V_3 = 50 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 15 = 150.000 \text{ cm}^3$.

Vì $V_3 > V_2$ nên nước bị tràn ra ngoài.

□

§3 Hình lăng trụ đứng

1 Tóm tắt lý thuyết

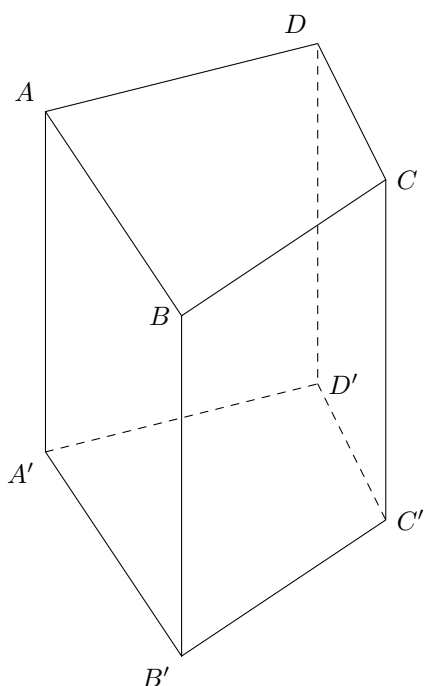
1.1 Hình lăng trụ đứng

Định nghĩa 21. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

1.2 Các khái niệm liên quan

Trong hình lăng trụ đứng ở hình dưới.

- ☑ Các đỉnh là $A, B, C, D, A', B', C', D'$.
- ☑ Các mặt đáy là $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.
- ☑ Các mặt bên là $(ADD'A')$, $(DCC'D')$, $(BCC'B')$, $(ABB'A')$.
- ☑ Các cạnh bên là AA', BB', CC', DD' . Các cạnh bên của hình lăng trụ đứng vuông góc với hai đáy và được gọi là *chiều cao* hình lăng trụ.
- ☑ Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác gọi là *lăng trụ tam giác*. Tương tự, nếu đáy là tứ giác gọi là *lăng trụ tứ giác*, nếu đáy là ngũ giác gọi là *lăng trụ ngũ giác*.
- ☑ Hình hộp chữ nhật và hình lập phương đều là các hình lăng trụ đứng.



2 Bài tập và các dạng toán

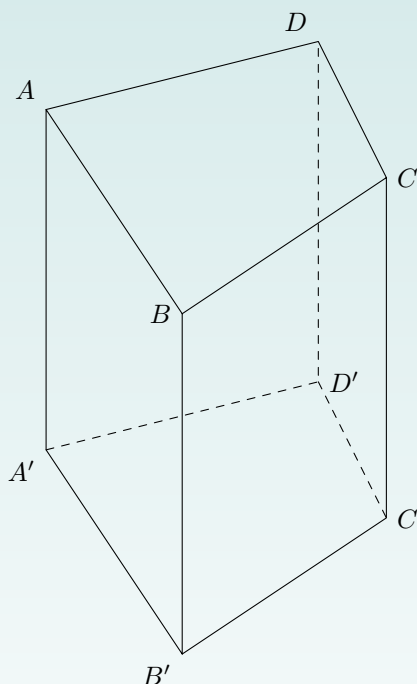
Dạng 59. Xác định các đỉnh, các cạnh, các mặt và mối quan hệ giữa các cạnh với nhau của hình lăng trụ đứng

- ☑ Sử dụng các khái niệm về đỉnh, cạnh và mặt của hình lăng trụ đứng.
- ☑ Vị trí tương đối của hai đường thẳng và vị trí tương đối của hai mặt phẳng trong không gian.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ đứng tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$.

1. Hãy kể tên các đỉnh, các cạnh, các mặt đáy và mặt bên của hình lăng trụ đứng.
2. Nêu vị trí tương đối của AB và DD' ; CD và $A'B'$.
3. Nêu vị trí tương đối của $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$; $(ABB'A')$ và $(BCC'B')$.

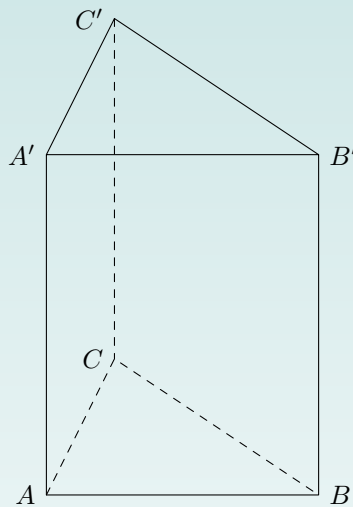


✍ Lời giải.

1. Các đỉnh $A, B, C, D, A', B', C', D'$.
 Các cạnh $AB, BC, CD, DA, A'B', B'C', C'D', D'A', AA', BB', CC', DD'$.
 Các mặt đáy $(ABCD), (A'B'C'D')$.
 Các mặt bên $(ABB'A'), (BCC'B'), (CDD'C'), (DAA'D')$.
2. $AB \perp DD'$, CD và $A'B'$ là hai đường thẳng nằm trên hai mặt phẳng song song.
3. $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ là hai mặt phẳng song song; $(ABB'A')$ và $(BCC'B')$ là hai mặt phẳng cắt nhau theo đường thẳng BB' .

□

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$.



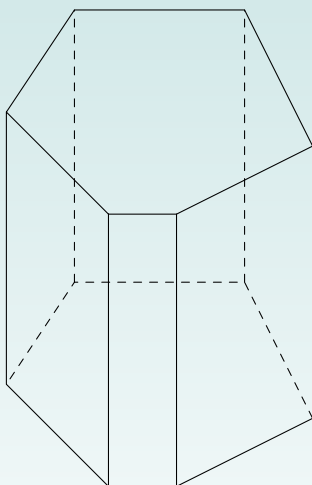
1. Hãy kể tên các đỉnh, các cạnh, các mặt đáy và mặt bên của hình lăng trụ đứng.
2. Nêu vị trí tương đối của AB và CC' ; AC và $A'C'$.
3. Nêu vị trí tương đối của $(ABB'A')$ và $(BCC'B')$.

Lời giải.

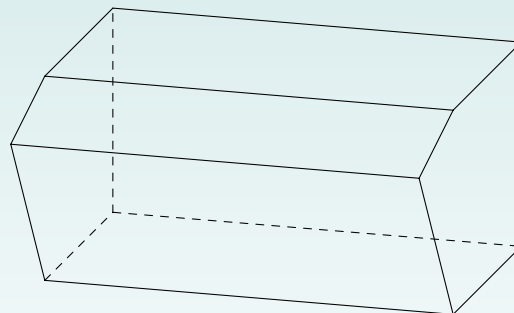
1. Các đỉnh A, B, C, A', B', C' .
 Các cạnh $AB, BC, CA, A'B', B'C', C'A', AA', BB', CC'$.
 Các mặt đáy $(ABC), (A'B'C')$.
 Các mặt bên $(ABB'A'), (BCC'B'), (CAA'C')$.
2. $AB \perp CC', AC \parallel A'C'$.
3. $(ABB'A')$ và $(BCC'B')$ là hai mặt phẳng cắt nhau theo đường thẳng BB' .

□

Ví dụ 3. Quan sát các hình lăng trụ đứng trong hình vẽ rồi điền vào các ô trống ở bảng dưới.



Hình 1



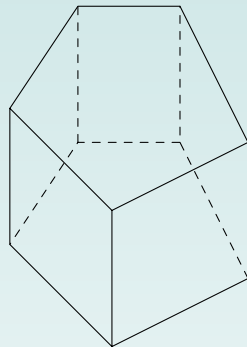
Hình 2

Hình	Hình 1	Hình 2
Số cạnh của một đáy		5
Số mặt bên		
Số đỉnh	12	
Số cạnh bên		

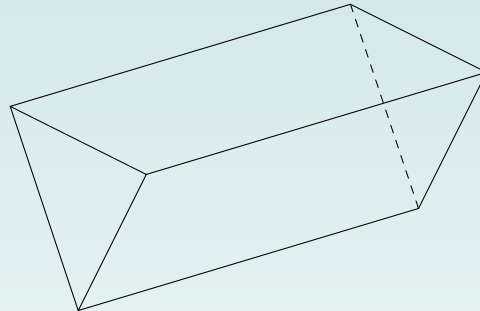
 **Lời giải.**

Hình	Hình 1	Hình 2
Số cạnh của một đáy	6	5
Số mặt bên	6	5
Số đỉnh	12	10
Số cạnh bên	6	5

 **Ví dụ 4.** Quan sát các hình lăng trụ đứng trong hình vẽ rồi điền vào các ô trống ở bảng dưới.



Hình 1



Hình 2

Hình	Hình 1	Hình 2
Số cạnh của một đáy	5	
Số mặt bên		3
Số đỉnh		
Số cạnh bên		

 **Lời giải.**

Hình	Hình 1	Hình 2
Số cạnh của một đáy	5	3
Số mặt bên	5	3
Số đỉnh	10	6
Số cạnh bên	5	3

 Dạng 60. Tính độ dài các cạnh và các đoạn thẳng khác trong hình lăng trụ đứng

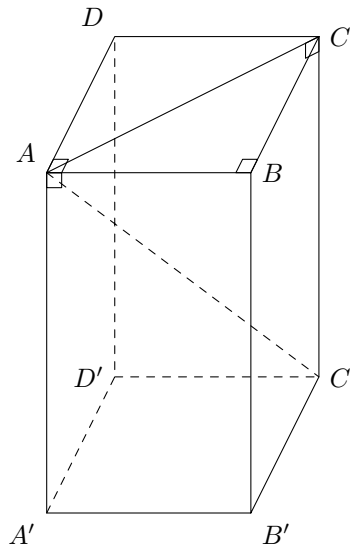
Chuyển các dữ liệu về cạnh và góc về cùng một mặt phẳng và sử dụng các kiến thức hình học phẳng để tính toán.

 BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ đứng tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 5$ cm, $AC = 8$ cm và đường cao bằng 6 cm. Hãy tính.

- Độ dài đoạn thẳng AC' . **ĐS:** $AC' = 10$ cm.
- Tổng diện tích hai mặt đáy của hình lăng trụ đứng. **ĐS:** $16\sqrt{39}$ (cm²).

 **Lời giải.**



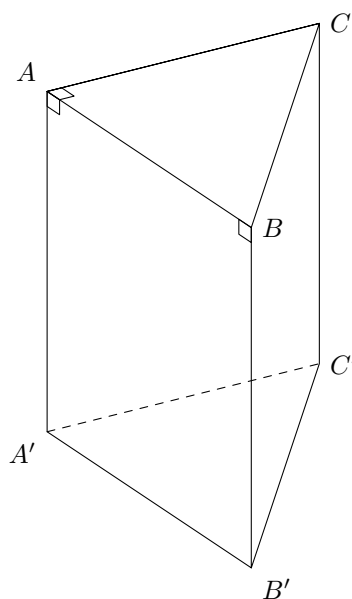
- a) Độ dài đoạn thẳng AC' .
 Tam giác ACC' vuông tại C nên theo định lý Py-ta-go
 $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 8^2 + 6^2 = 100$.
 Suy ra $AC' = 10$ (cm).
- b) Tổng diện tích hai mặt đáy của hình lăng trụ đứng.
 Tam giác ABC vuông tại B nên theo định lý Py-ta-go
 $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = AC^2 - AB^2 = 8^2 - 5^2 = 39$.
 Suy ra $BC = \sqrt{39}$ (cm).
 Suy ra tổng diện tích hai mặt đáy là
 $S = 2AB \cdot BC = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{39} = 10\sqrt{39}$ (cm²).

□

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác vuông cân tại A và A' , có $BC = 3\sqrt{2}$ cm và $AB' = 5$ cm. Hãy tính.

- Chiều cao của hình lăng trụ. **ĐS:** 4 cm.
- Diện tích của mặt bên $ABB'A'$ và tổng diện tích của hai mặt đáy. **ĐS:** 12 cm², 9 cm².

 **Lời giải.**



a) Chiều cao của hình lăng trụ.

Tam giác ABC vuông cân tại A nên theo định lý Py-ta-go

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2AB^2 \Rightarrow AB^2 = \frac{BC^2}{2} = \frac{(3\sqrt{2})^2}{2} = 9.$$

Suy ra $AB = 3$ (cm).

Tam giác ABB' vuông tại B nên theo định lý Py-ta-go

$$AB'^2 = AB^2 + BB'^2 \Rightarrow BB'^2 = AB'^2 - AB^2 = 5^2 - 3^2 = 16.$$

Suy ra $BB' = 4$ (cm). Chiều cao của hình lăng trụ là 4 cm.

b) Diện tích của mặt bên $ABB'A'$ là

$$S_{ABB'A'} = AB \cdot BB' = 3 \cdot 4 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Tổng diện tích hai mặt đáy của hình lăng trụ đứng là

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = 3^2 = 9 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

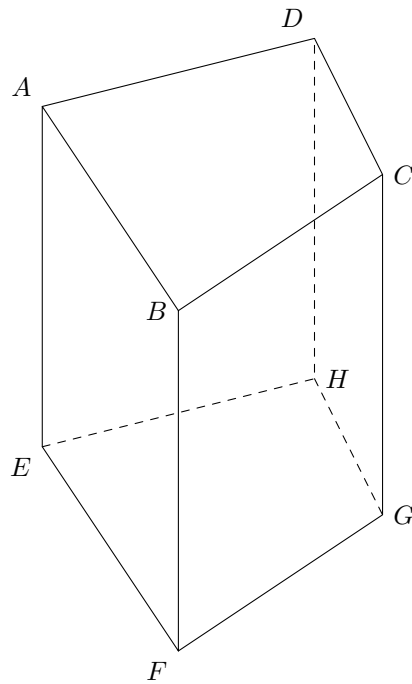
□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình lăng trụ đứng tứ giác $ABCD.EFGH$.

- Hãy kể tên các đỉnh, các cạnh, các mặt đáy và các mặt bên của hình lăng trụ đứng.
- Nêu vị trí tương đối của BC và DH , CD và EF .
- Nêu vị trí tương đối của $(ABCD)$ và $(EFGH)$, $(ADHE)$ và $(DCGH)$.

Lời giải.



- a) Hãy kể tên các đỉnh, các cạnh, các mặt đáy và các mặt bên của hình lăng trụ đứng.
 Các đỉnh: A, B, C, D, E, F, G, H .
 Các cạnh: $AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, BF, CG, DH$.
 Các mặt đáy: $(ABCD), (EFGH)$.
 Các mặt bên: $(ABFE), (BCGF), (CDHG), (DAEH)$.
- b) Vị trí tương đối của BC và DH : $BC \perp DH$.
 Vị trí tương đối của CD và EF : nằm trên hai mặt phẳng song song.
- c) Vị trí tương đối của $(ABCD)$ và $(EFGH)$: $(ABCD) \parallel (EFGH)$.
 Vị trí tương đối của $(ADHE)$ và $(DCGH)$: hai mặt phẳng cắt nhau theo đường thẳng DH .

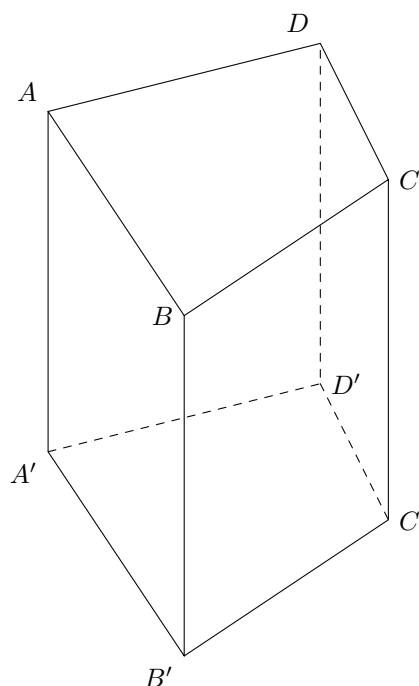
☐

 Bài 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$.

1. Hình lăng trụ đứng đã cho có bao nhiêu đỉnh? **ĐS:** 8.
2. Trong các cặp mặt phẳng $ADD'A'$ và $BCC'B'$; $ACC'A'$ và $BDD'B'$; $BCC'B'$ và $ABCD$ cặp mặt phẳng nào vuông góc với nhau? **ĐS:** $BCC'B'$ và $ABCD$.

 Lời giải.

Giáo viên:



- a) Hình lăng trụ đứng đã cho có 8 đỉnh.
b) Cặp mặt phẳng vuông góc với nhau là $(BCC'B')$ và $(ABCD)$.

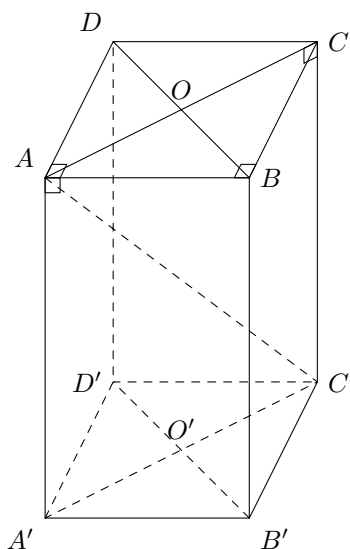
□

Bài 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là các hình vuông tâm O và tâm O' , $AB = 3$ cm, $AC' = \sqrt{34}$ cm.

- Hình lăng trụ đứng đã cho có phải hình lập phương không? Vì sao?
- Chứng minh đường thẳng OO' vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
- Tìm vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$.
- Tính chiều cao của hình lăng trụ đứng.

ĐS: 4 cm.

Lời giải.



- a) Tam giác ABC vuông tại B nên theo định lý Py-ta-go
 $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$.
Tam giác ACC' vuông tại C nên theo định lý Pytago
 $AC^2 + CC'^2 = AC'^2 \Rightarrow CC'^2 = AC'^2 - AC^2 = 34 - 18 = 16 \Rightarrow CC' = 4$.
Hình lăng trụ đã cho không phải là hình lập phương. Vì các mặt bên không phải là hình vuông.
- b) Ta có tứ giác $ACC'A'$ là hình chữ nhật. O và O' lần lượt là trung điểm của AC và $A'C'$ nên $OO' \parallel AA' \parallel CC'$. Mà các cạnh bên AA', CC' vuông góc với mặt phẳng $ABCD$. Do đó $OO' \perp (ABCD)$.
- c) Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến OO'
- d) Chiều cao của hình lăng trụ là đứng là $CC' = 4$ cm.

□

§4 Diện tích xung quanh và thể tích hình lăng trụ đứng

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2p \cdot h$

Trong đó p là nửa chu vi đáy và h là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

1.2 Diện tích toàn phần

Diện tích toàn phần bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

1.3 Thể tích của hình lăng trụ đứng $V = S \cdot h$

Trong đó S là diện tích đáy và h là chiều cao.

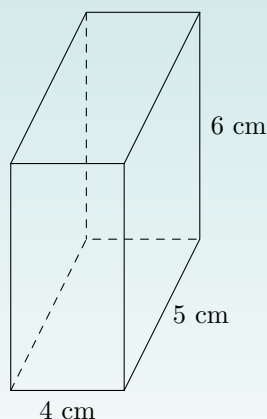
2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 61. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ đứng

Dùng các kiến thức nêu trong phần *Tóm tắt lý thuyết* để tính các yêu cầu bài toán.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích lăng trụ đứng trong hình vẽ sau đây:
ĐS: 108 cm^2 , 148 cm^2 , 120 cm^3 .



Lời giải.

✓ Nửa chu vi đáy là $p = 4 + 5 = 9 \text{ (cm)}$.

☑ Diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2p \cdot h = 2 \cdot 9 \cdot 6 = 108 \text{ (cm}^2\text{)}$.

☑ Diện tích đáy là $S_{\text{đáy}} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ (cm}^2\text{)}$.

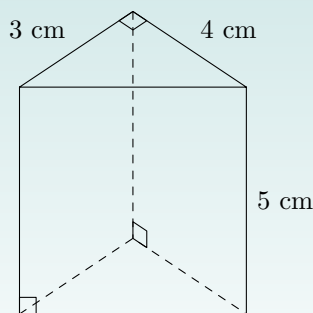
Suy ra diện tích toàn phần là $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 108 + 2 \cdot 20 = 148 \text{ (cm}^2\text{)}$.

☑ Thể tích lăng trụ đứng là $V = S_{\text{đáy}} \cdot h = 20 \cdot 6 = 120 \text{ (cm}^3\text{)}$.

□

Ví dụ 2. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích lăng trụ đứng trong hình vẽ sau đây:

ĐS: 60 cm^2 , 72 cm^2 , 60 cm^3 .



Lời giải.

☑ Chu vi đáy là $2p = 3 + 4 + \sqrt{3^2 + 4^2} = 12 \text{ (cm)}$.

☑ Diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2p \cdot h = 12 \cdot 5 = 60 \text{ (cm}^2\text{)}$.

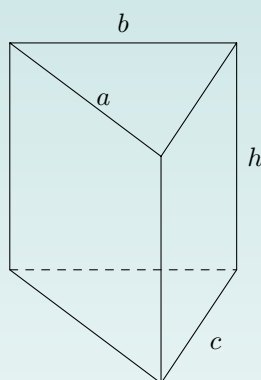
☑ Diện tích đáy là $S_{\text{đáy}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Suy ra diện tích toàn phần là $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 60 + 2 \cdot 6 = 72 \text{ (cm}^2\text{)}$.

☑ Thể tích lăng trụ đứng là $V = S_{\text{đáy}} \cdot h = 12 \cdot 5 = 60 \text{ (cm}^3\text{)}$.

□

Ví dụ 3. Quan sát lăng trụ đứng trong hình vẽ rồi điền số thích hợp vào bảng sau:



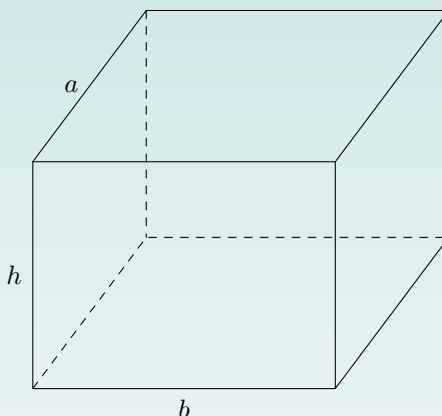
$a \text{ (cm)}$	4	6	12
$b \text{ (cm)}$		8	13
$c \text{ (cm)}$	7		7
$h \text{ (cm)}$	8	5	
Chu vi đáy (cm)	16	24	
$S_{xq} \text{ (cm}^2\text{)}$		120	480

Lời giải.

a (cm)	4	6	12
b (cm)	5	8	13
c (cm)	7	10	7
h (cm)	8	5	15
Chu vi đáy (cm)	16	24	32
S_{xq} (cm ²)	128	120	480

□

Ví dụ 4. Quan sát lăng trụ đứng tam giác trong hình vẽ rồi điền số thích hợp vào bảng sau:



a (cm)	8	7	14
b (cm)		9	20
h (cm)	8		12
Chu vi đáy (cm)	40		
S_{xq} (cm ²)		160	

Lời giải.

a (cm)	8	7	14
b (cm)	12	9	20
h (cm)	8	5	12
Chu vi đáy (cm)	40	32	68
S_{xq} (cm ²)	320	160	816

□

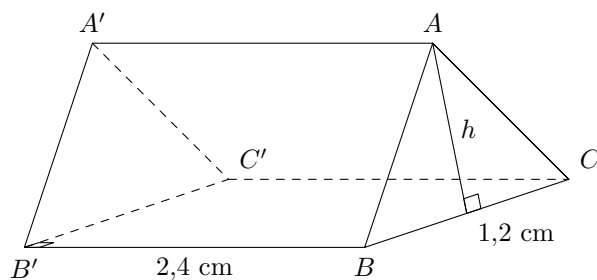
Dạng 62. Một số bài toán thực tế trong cuộc sống liên quan đến lăng trụ đứng

Phân tích dữ kiện đề bài chuyển các dữ kiện thực tế về hình lăng trụ và giải quyết yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Một lều trại có hình dạng lăng trụ đứng đáy tam giác, thể tích phần không gian bên trong là 2,16 m³. Biết chiều dài của lều là 2,4 m, chiều rộng của lều là 1,2 m. Tính chiều cao của lều.
ĐS: 1,5 (cm).

Lời giải.



Từ hình vẽ ta có diện tích tam giác ABC là

$$S_{\triangle ABC} = \frac{2,16}{2,4} = 0,9 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

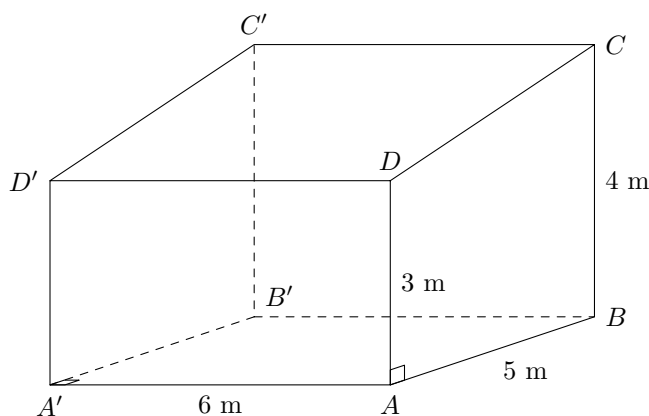
Chiều cao của lều là

$$h = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 0,9}{1,2} = 1,5 \text{ (cm.)}$$

□

Ví dụ 2. Một nhà kho có dạng hình lăng trụ đứng, đáy là hình thang vuông. Chiều cao của lăng trụ đứng (là chiều dài của nhà kho) bằng 6 m. Đường cao của đáy (là chiều rộng của nhà kho) bằng 5 m. Các cạnh đáy của hình thang vuông dài 3 m và 4 m. Tính thể tích của nhà kho.
ĐS: 105 (cm³).

Lời giải.



Từ hình vẽ ta có diện tích đáy hình lăng trụ là

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (3 + 4) \cdot 5 = 17,5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Thể tích nhà kho là $V_{\text{kho}} = S_{ABCD} \cdot AA' = 17,5 \cdot 6 = 105 \text{ (cm}^3\text{)}.$

□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác vuông tại B và B' , $AA' = 5 \text{ cm}$, $AB = 2 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$.

1. Tính diện tích xung quanh lăng trụ.

ĐS: $40 + 20\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

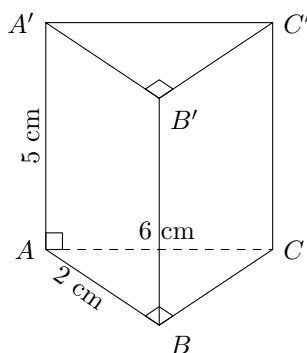
2. Tính diện tích toàn phần lăng trụ.

ĐS: $40 + 28\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

3. Tính thể tích lăng trụ.

ĐS: $20\sqrt{2} \text{ cm}^3$

 Lời giải.



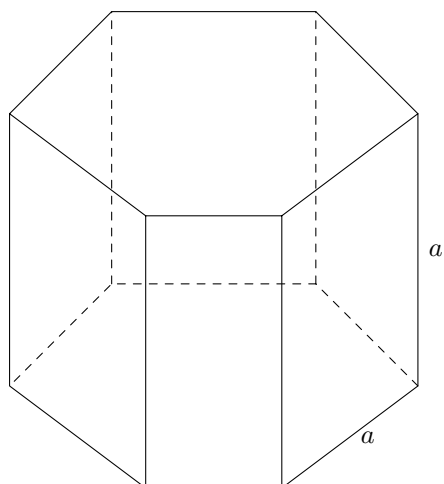
- a) Tam giác ABC vuông tại B nên theo định lý Pytago
 $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow BC^2 = AC^2 - AB^2 = 6^2 - 2^2 = 32$.
 Suy ra $BC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (cm).
 Chu vi đáy hình lăng trụ là $2p = AB + BC + CA = 8 + 4\sqrt{2}$ (cm).
 Diện tích xung quanh của hình lăng trụ là
 $S_{xq} = 2p \cdot h = (8 + 4\sqrt{2}) \cdot 5 = 40 + 20\sqrt{2}$ (cm²).
- b) Diện tích đáy hình lăng trụ là $S_{\text{đáy}} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = 4\sqrt{2}$ (cm²).
 Diện tích toàn phần hình lăng trụ là
 $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 40 + 20\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 40 + 28\sqrt{2}$ (cm²).
- c) Thể tích hình lăng trụ là
 $V = S_{\text{đáy}} \cdot h = 4\sqrt{2} \cdot 5 = 20\sqrt{2}$ (cm³).

□

 **Bài 2.** Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích hình lăng trụ lục giác đều có cạnh bằng a .

ĐS: $6a^2, (6 + 3\sqrt{3})a^2, \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

 Lời giải.



- ☑ Chia đáy hình lăng trụ là lục giác đều có cạnh bằng a thành 6 tam giác đều cạnh bằng a .
 Diện tích mỗi tam giác đều cạnh bằng a là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
 Suy ra diện tích đáy hình lăng trụ là $S_{\text{đáy}} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.
- ☑ Chu vi đáy là $2p = 6a$.

✓ Diện tích xung quanh của hình lăng trụ là $S_{xq} = 2p \cdot h = 6a \cdot a = 6a^2$

✓ Diện tích toàn phần của hình lăng trụ là $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 6a^2 + 3a^2\sqrt{3} = (6 + 3\sqrt{3})a^2$.

✓ Thể tích hình lăng trụ là

$$V = S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$$

□

Bài 3. Một hộp quà hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều cạnh 10 cm, chiều cao lăng trụ 12 cm.

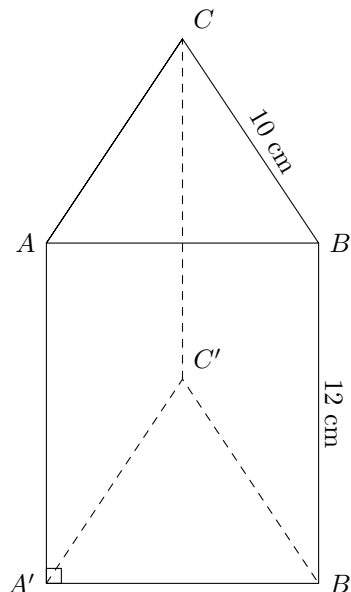
1. Diện tích giấy dùng ít nhất là bao nhiêu?

ĐS: 403,3 (cm²).

2. Thể tích hộp đựng quà là bao nhiêu?

ĐS: 519,6 (cm³).

Lời giải.



a) Chu vi đáy của hình lăng trụ là $2p = 3 \cdot 10 = 30$ (cm).

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ là $S_{xq} = 2p \cdot h = 30 \cdot 12 = 360$ (cm²).

Diện tích đáy của hình lăng trụ là $S_{\text{đáy}} = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$ (cm²).

Diện tích giấy dùng ít nhất là $S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 360 + 25\sqrt{3} \approx 403,3$ (cm²).

b) Thể tích hộp đựng quà là

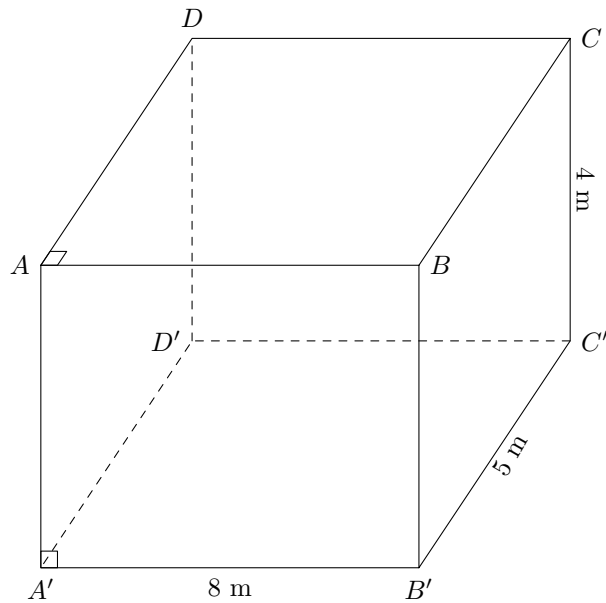
$V = S_{\text{đáy}} \cdot h = 25\sqrt{3} \cdot 12 = 300\sqrt{3} \approx 519,6$ (cm³).

□

Bài 4. Một phòng học hình hộp chữ nhật có chiều dài 8 m, chiều rộng 5 m, chiều cao 4 m. Người ta quét vôi bên trong lớp học, kể cả trần. Biết tổng diện tích các cửa ra vào và cửa sổ là 10 m². Tính diện tích phải quét vôi.

ĐS: 134 (m²).

Lời giải.



Từ hình vẽ có

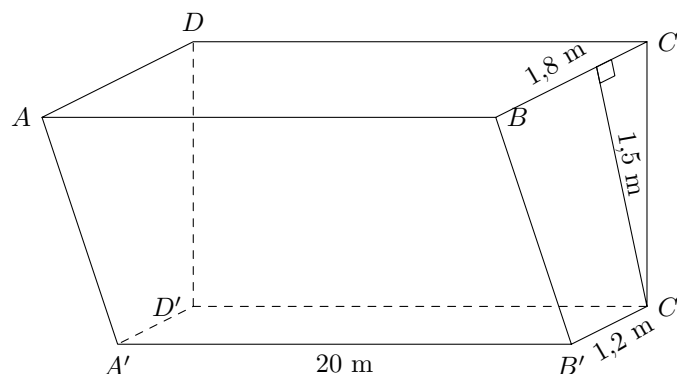
- ☑ Chu vi căn phòng là $2p = 2(8 + 5) = 26$ (m).
- ☑ Diện tích xung quanh căn phòng là $S_{xq} = 26 \cdot 4 = 104$ (m²).
- ☑ Diện tích trần căn phòng là $S_{\text{trần}} = 8 \cdot 5 = 40$ (m²).
- ☑ Diện tích phải quét vôi là $S = S_{xq} + S_{\text{trần}} - 10 = 134$ (m²).

□

Bài 5. Người ta đào một đoạn mương dài 20 m, sâu 1,5 m. Bề mặt của mương rộng 1,8 m và đáy mương rộng 1,2 m.

1. Tính thể tích khối đất phải đào. **ĐS:** 45 (m³).
2. Người ta chuyển khối đất trên để rải lên một mảnh đất hình chữ nhật có kích thước 30 m × 40 m. Tính bề dày của lớp đất rải lên trên mảnh đất đó. **ĐS:** 0,0375 (m).

Lời giải.



a) Từ hình vẽ ta có thể tích khối đất phải đào là

$$V = S \cdot h = \frac{(1,8 + 1,2) \cdot 1,5}{2} \cdot 20 = 45 \text{ (m}^3\text{)}.$$

b) Từ hình vẽ ta có bề dày lớp đất rải lên mảnh đất là $h = \frac{V}{S} = \frac{45}{40 \cdot 30} = 0,0375$ (m).

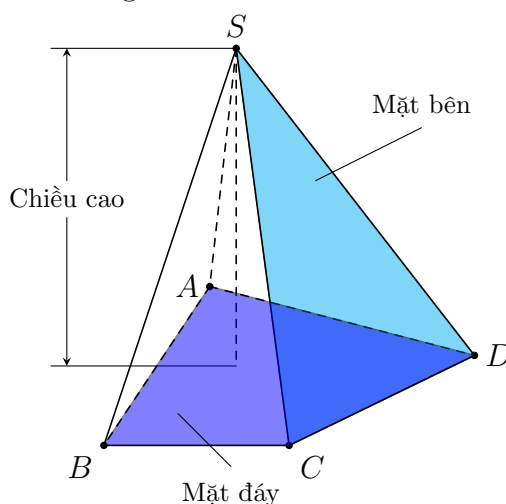


§5 Hình chóp đều và hình chóp cắt đều

1 Tóm tắt lí thuyết

1.1 Khái niệm hình chóp

Hình chóp là hình có mặt đáy là một đa giác, các mặt bên là những tam giác (cùng với những điểm nằm trong nó) có chung một đỉnh.



Trong đó:

- ☑ (SAB) , (SBC) , (SCD) , (SAD) được gọi là các *mặt bên*.
- ☑ $(ABCD)$ được gọi là *mặt đáy*.
- ☑ SA , SB , SC , SD được gọi là *cạnh bên*.
- ☑ Các cạnh bên cắt nhau tại S được gọi là *đỉnh* của hình chóp.
- ☑ *Đường cao* của hình chóp là đường thẳng kẻ từ đỉnh của hình chóp và vuông góc với mặt phẳng đáy.
- ☑ Hình chóp có đáy là tam giác gọi là *hình chóp tam giác*, đáy là tứ giác gọi là *hình chóp tứ giác*,...

1.2 Hình chóp đều

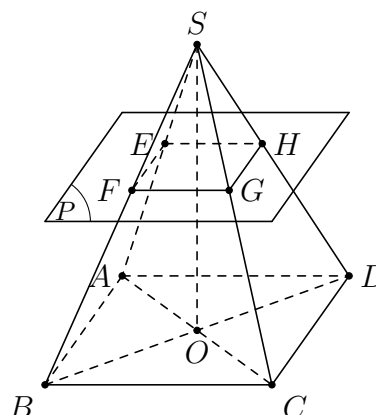
Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều, các mặt bên là các tam giác cân có chung đỉnh là đỉnh của hình chóp.

Tính chất 10. Chân đường cao của hình chóp đều trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Đường cao kẻ từ đỉnh S của mỗi mặt bên gọi là *trung đoạn* của hình chóp đều.

1.3 Hình chóp cắt đều

Cắt hình chóp đều $S.ABCD$ bằng một mặt phẳng (P) song song với mặt đáy, phần hình nằm giữa (P) và mặt phẳng đáy gọi là *hình chóp cắt đều*. Mỗi mặt bên của hình chóp cắt đều là một hình thang cân.



2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 63. Nhận biết các kiến thức cơ bản hình chóp đều

Sử dụng khái niệm và các tính chất để nhận biết các yếu tố của hình chóp đều.

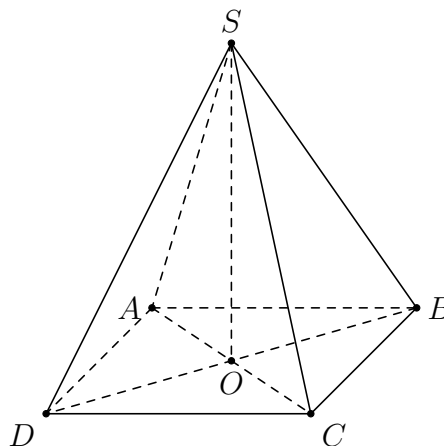
❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đường cao SO .

1. Xác định vị trí chân đường cao O của hình chóp.
2. Kể tên đỉnh của hình chóp.
3. Kể tên các cạnh bên.
4. Kể tên mặt đáy và các mặt bên của hình chóp.

✍ LỜI GIẢI.

1. Ta có OA, OB, OC, OD lần lượt là hình chiếu vuông góc của SA, SB, SC, SD lên $(ABCD)$.
Mà $SA = SB = SC = SD$ nên $OA = OB = OC = OD$
 $\Rightarrow O$ là tâm của hình vuông $ABCD$.
2. Đỉnh của hình chóp: S .
3. Các cạnh bên: SA, SB, SC, SD .
4. Mặt đáy: $(ABCD)$.
Mặt bên: $(SAB), (SBC), (SCD), (SAD)$.



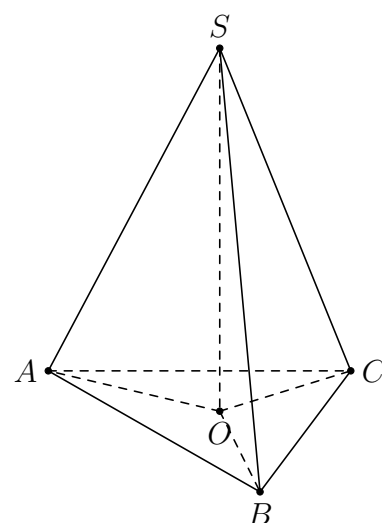
□

Ví dụ 2. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đường cao SO .

1. Xác định vị trí chân đường cao O của hình chóp.
2. Kể tên đỉnh của hình chóp.
3. Kể tên các cạnh bên.
4. Kể tên mặt đáy và các mặt bên của hình chóp.

Lời giải.

1. Ta có OA, OB, OC lần lượt là hình chiếu vuông góc của SA, SB, SC lên (ABC) .
Mà $SA = SB = SC$ nên $OA = OB = OC \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
2. Đỉnh của hình chóp: S .
3. Các cạnh bên: SA, SB, SC .
4. Mặt đáy: (ABC) .
Mặt bên: $(SAB), (SBC), (SAC)$.



Dạng 64. Tính độ dài các cạnh của hình chóp đều

Sử dụng các kiến thức đã học để tính các yếu tố của hình chóp đều.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài đường chéo của mặt đáy bằng 24 cm và cạnh bên bằng 13 cm.

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. Tính chiều cao của hình chóp đều. | ĐS: 5 cm |
| 2. Tính diện tích tam giác SAC . | ĐS: 60 cm^2 |
| 3. Tính diện tích một mặt bên. | ĐS: $6\sqrt{194} \text{ cm}^2$ |

Lời giải.

1. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên SO là đường cao (O là tâm $ABCD$).

$$\text{Ta có } OA = \frac{1}{2}AC = 12 \text{ cm.}$$

$$\triangle SOA \text{ vuông tại } O \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 5 \text{ cm.}$$

$$2. S_{\triangle SAC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^2.$$

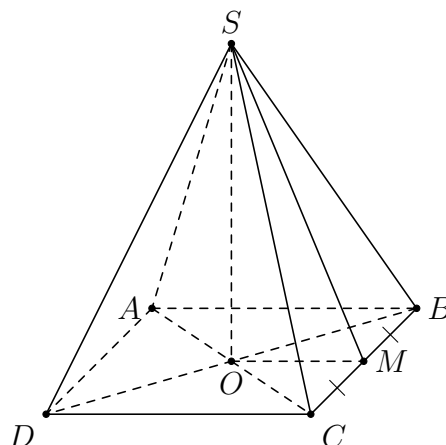
$$3. \text{Ta có } AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}.$$

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow SM \perp BC$ và

$$OM = \frac{1}{2}AB = 6\sqrt{2}.$$

$$\triangle SOM \text{ vuông tại } O \Rightarrow SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{97} \text{ cm.}$$

$$S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot SM = 6\sqrt{194} \text{ cm}^2.$$



Ví dụ 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 4 cm, cạnh bên bằng $\sqrt{33}$ cm. Cắt hình chóp bởi mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng đáy và cách đáy một khoảng 2 cm.

1. Tính chiều cao của hình chóp đều phần chứa điểm S sau khi cắt hình chóp đều $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (P) . **ĐS:** 3 cm

2. Tính diện tích một mặt bên của hình chóp cụt đều. **ĐS:** $\frac{32\sqrt{29}}{25} \text{ cm}^2$

Lời giải.

1. Gọi E, F, G, H lần lượt là giao điểm của (P) với SA, SB, SC, SD .

Gọi I là tâm $EFGH$. Ta có $OI = 2$ cm.

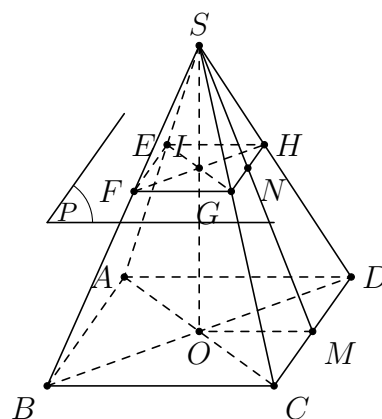
$$ABCD \text{ là hình vuông cạnh bằng 4 cm} \Rightarrow OB = 2\sqrt{2} \text{ cm.}$$

$$\triangle SOB \text{ vuông tại } O \Rightarrow SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = 5 \text{ cm.}$$

$$\text{Vậy } SI = SO - OI = 5 - 2 = 3 \text{ cm.}$$

2. Gọi M là trung điểm của CD , N là giao điểm của (P) với SM .

$$\triangle SMC \text{ vuông tại } M \Rightarrow SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = \sqrt{29} \text{ cm.}$$



$$\text{Áp dụng định lí Ta-lét vào } \triangle SMO \text{ có } NI \parallel MO \Rightarrow \frac{SN}{SM} = \frac{SI}{SO} \Rightarrow SN = \frac{3\sqrt{29}}{5} \text{ cm.}$$

$$\text{Áp dụng định lí Ta-lét vào } \triangle SCD \text{ có } GH \parallel CD \Rightarrow \frac{GH}{CD} = \frac{SN}{SM} \Rightarrow GH = 2,4 \text{ cm.}$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle SCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot SM = 2\sqrt{29} \text{ cm}^2.$$

$$S_{\triangle SGN} = \frac{1}{2} \cdot SN \cdot GH = \frac{18\sqrt{29}}{25} \text{ cm}^2.$$

$$\text{Vậy } S_{GHDC} = S_{\triangle SCD} - S_{\triangle SGN} = \frac{32\sqrt{29}}{25} \text{ cm}^2.$$

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Hoàn thành bảng sau:

Hình chóp đều	Hình chóp tam giác đều	Hình chóp tứ giác đều	Hình chóp ngũ giác đều
Đáy		Hình vuông	
Mặt bên	Tam giác cân		
Số cạnh đáy	3		
Số cạnh			10
Số mặt		5	6

Lời giải.

Hình chóp đều	Hình chóp tam giác đều	Hình chóp tứ giác đều	Hình chóp ngũ giác đều
Đáy	Tam giác đều	Hình vuông	Ngũ giác đều
Mặt bên	Tam giác cân	Tam giác cân	Tam giác cân
Số cạnh đáy	3	4	5
Số cạnh	6	8	10
Số mặt	4	5	6

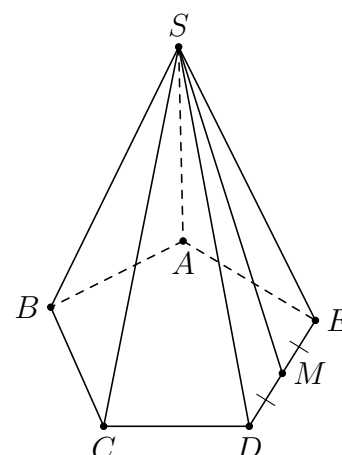
□

Bài 2. Cho hình chóp ngũ giác đều $S.ABCDE$.

- Hình chóp có bao nhiêu cạnh và bao nhiêu đỉnh? **ĐS:** 10 cạnh và 1 đỉnh
- Hình chóp có bao nhiêu mặt là tam giác cân? **ĐS:** 5 mặt
- Trong mặt phẳng (SDE) kẻ đường SM với M là trung điểm của DE . Chứng minh SM là trung đoạn của hình chóp.

Lời giải.

- Hình chóp có 10 cạnh và 1 đỉnh.
- Hình chóp có 5 mặt bên là tam giác cân.
- $\triangle SDE$ là tam giác cân nên đường trung tuyến SM đồng thời cũng là đường cao.
Vậy SM là trung đoạn của hình chóp.



□

Bài 3. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 10 cm, cạnh bên bằng 12 cm.

- Tính chiều cao của hình chóp đều.

ĐS: $\frac{2\sqrt{249}}{3}$ cm

2. Tính diện tích một mặt bên.

ĐS: $5\sqrt{119} \text{ cm}^2$

 **Lời giải.**

1. Gọi O là tâm $\triangle ABC \Rightarrow SO$ là đường cao của hình chóp.

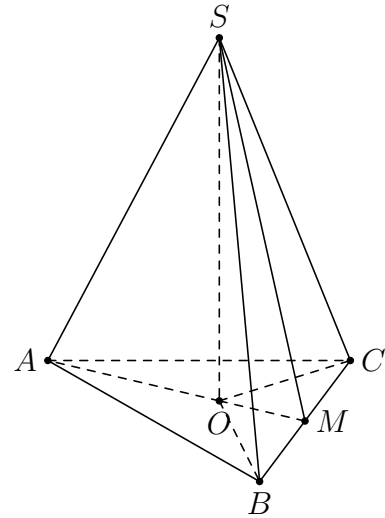
$$\triangle ABC \text{ là tam giác đều} \Rightarrow OA = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$

$$\triangle SAO \text{ vuông tại } O \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{2\sqrt{249}}{3} \text{ cm.}$$

2. Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$

$$\triangle SOM \text{ vuông tại } O \Rightarrow SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{119} \text{ cm.}$$

$$S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} SM \cdot BC = 5\sqrt{119} \text{ cm}^2.$$



□

§6 Diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp đều

1 Tóm tắt lí thuyết

1.1 Diện tích xung quanh của hình chóp đều

$$S_{xq} = p \cdot d.$$

Trong đó p là nửa chu vi đáy và d là độ dài trung đoạn của hình chóp đều.

1.2 Diện tích toàn phần của hình chóp đều

Diện tích toàn phần của hình chóp đều bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy.

1.3 Thể tích của hình chóp đều

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h.$$

Trong đó S và h lần lượt là diện tích mặt đáy và chiều cao của hình chóp đều.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 65. Các bài toán về diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp đều

Dùng các kiến thức nêu trong phần “Tóm tắt lí thuyết” và các kiến thức đã học để giải quyết các yêu cầu của bài toán.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 **Ví dụ 1.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng 5 dm, cạnh đáy bằng 6 dm.

1. Xác định vị trí chân đường cao H của hình chóp $S.ABCD$ và tính độ dài đoạn SH . ĐS: $\sqrt{5}$ dm
2. Tính diện tích xung quanh của hình chóp. ĐS: 48 dm²
3. Tính diện tích toàn phần của hình chóp. ĐS: 84 dm²
4. Tính thể tích của hình chóp. ĐS: $12\sqrt{5}$ dm³

 **Lời giải.**

1. Chân đường cao của hình chóp là tâm H của hình vuông $ABCD$.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow SM$ là trung đoạn của hình chóp.

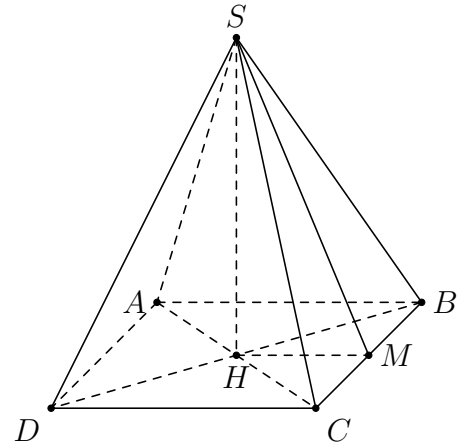
$\triangle SMC$ vuông tại $M \Rightarrow SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = 4$ dm.

$\triangle SHM$ vuông tại $H \Rightarrow SH = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{SM^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{5}$ dm.

2. $S_{xq} = (AB + BC) \cdot SM = 48 \text{ dm}^2$.

3. $S_{tp} = S_{xq} + AB \cdot AD = 84 \text{ dm}^2$.

d) $V = \frac{1}{3} SH \cdot AB \cdot AD = 12\sqrt{5} \text{ dm}^3$. □



Ví dụ 2. Cho hình chóp đều $S.ABC$, có tất cả các cạnh bằng nhau và đều bằng 4 dm.

1. Xác định vị trí chân đường cao H của hình chóp $S.ABC$ và tính độ dài đoạn SH .

ĐS: $\sqrt{\frac{32}{3}}$ dm

2. Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

ĐS: $12\sqrt{3} \text{ dm}^2$

3. Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

ĐS: $16\sqrt{3} \text{ dm}^2$

4. Tính thể tích của hình chóp.

ĐS: $\frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ dm}^3$

Lời giải.

1. Chân đường cao H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC .

Ta có $AH = \frac{2}{3} AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ dm.

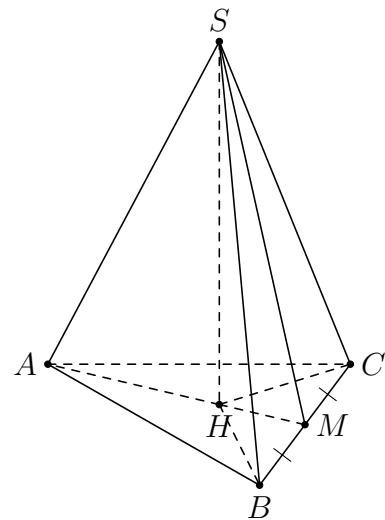
$\triangle SAH$ vuông tại $H \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{32}{3}}$ dm.

2. Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow SM = AM = 2\sqrt{3}$ dm.

$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot 3AB \cdot SM = 12\sqrt{3} \text{ dm}^2$.

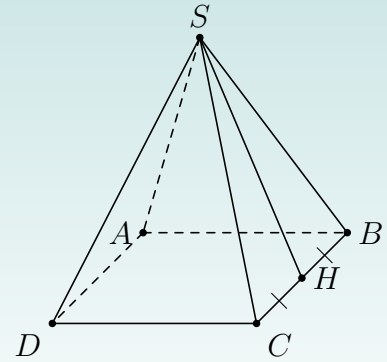
3. $S_{tp} = S_{xq} + \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ dm}^2$.

4. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} \cdot SH = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ dm}^3$. □



Ví dụ 3.

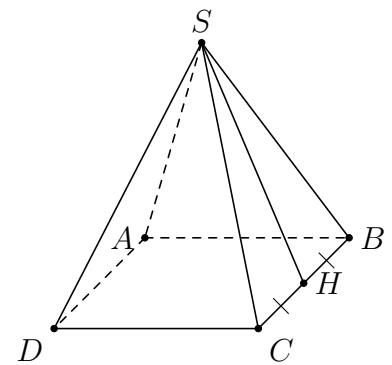
Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều cho bởi hình vẽ bên. Biết $SH = 20$ cm, $BC = 20$ cm. **ĐS:** $S_{xq} = 800$ cm² và $S_{tp} = 1200$ cm²



Lời giải.

$$S_{xq} = 2 \cdot BC \cdot SH = 800 \text{ cm}^2.$$

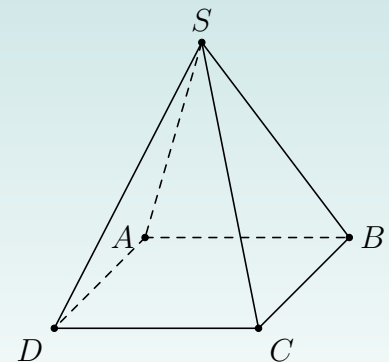
$$S_{tp} = S_{xq} + BC^2 = 800 + 400 = 1200 \text{ cm}^2.$$



□

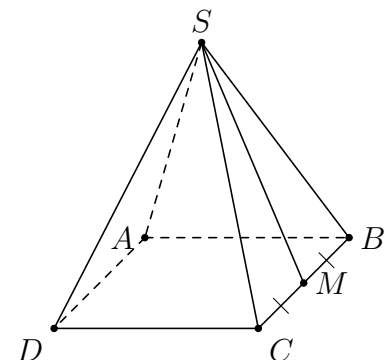
Ví dụ 4.

Một hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên bằng 5 cm, đáy là hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 8 cm. Tính diện tích toàn phần của hình chóp. **ĐS:** $S_{tp} = 112$ cm²



Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC .
 Khi đó SM là trung đoạn của hình chóp $S.ABCD$.
 $\triangle SMC$ vuông tại $M \Rightarrow SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = 3$ cm.
 $S_{tp} = S_{xq} + BC^2 = 2BC \cdot SM + BC^2 = 112$ cm².



□

Dạng 66. Các bài toán cơ bản về mối quan hệ giữa hình lập phương, hình hộp chữ nhật với hình chóp đều

Vẽ hình, nhận dạng hình chóp đều cùng các dữ kiện và tính các yêu cầu bài toán.

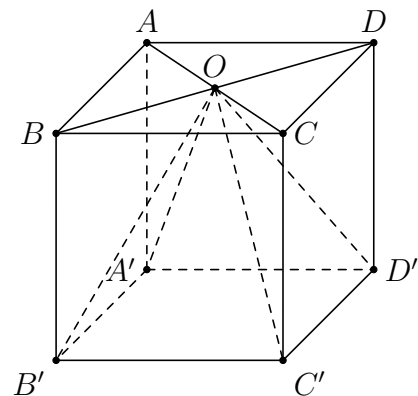
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi O là tâm của mặt đáy $ABCD$.

1. Chứng minh $O.A'B'C'D'$ là hình chóp tứ giác đều.
2. Gọi thể tích của hình lập phương là V , thể tích hình chóp đều $O.A'B'C'D'$ là V' . Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$. **ĐS:** $\frac{1}{3}$

Lời giải.

1. Bốn tam giác OAA' , OBB' , OCC' , ODD' là các tam giác vuông bằng nhau nên suy ra $OA' = OB' = OC' = OD'$. Hình chóp $O.A'B'C'D'$ là hình chóp đều vì có các mặt bên là tam giác cân và đáy là tứ giác đều.
2. Thể tích hình chóp $O.A'B'C'D'$ là $V' = \frac{1}{3}a^3$.
 Thể tích hình lập phương là $V = a^3$.
 Vậy $\frac{V'}{V} = \frac{1}{3}$.



□

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi S là tâm của $A'B'C'D'$. Gọi M , N , P , Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , BC , CD , DA .

1. Chứng minh $S.MNPQ$ là hình chóp đều.
2. Gọi thể tích của hình lập phương là V , thể tích hình chóp $S.MNPQ$ là V' . Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$. **ĐS:** $\frac{1}{6}$

Lời giải.

- Vì $ABCD$ là hình vuông nên $QM = MN = NP = PQ$.
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $SM = SN = SP = SQ$.

Hình chóp $S.MNPQ$ là hình chóp đều vì có các mặt bên là tam giác cân và đáy là tam giác đều.

- Thể tích của hình lập phương là $V = a^3$.

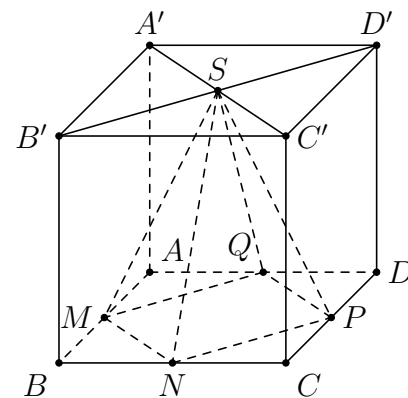
$$\text{Ta có } MN = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$S_{MNPQ} = MN^2 = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Thể tích của hình chóp } S.MNPQ \text{ là } V' = \frac{1}{3}CC'.$$

$$S_{MNPQ} = \frac{a^3}{6}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V'}{V} = \frac{1}{6}.$$



□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đường cao $SO = \sqrt{15}$ cm, đường cao trong tam giác ABC bằng 3 cm.

- Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

$$\text{ĐS: } S_{\text{tp}} = 15\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

- Tính thể tích của hình chóp.

$$\text{ĐS: } V = 12\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Lời giải.

- Gọi M là trung điểm của BC .

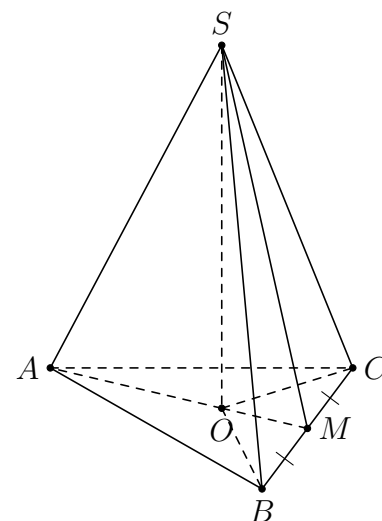
$$O \text{ là trọng tâm của } \triangle ABC \text{ nên } OM = \frac{1}{3}AM = 1 \text{ cm}$$

$$\text{và } AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\triangle SOM \text{ vuông tại } O \Rightarrow SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = 4 \text{ cm.}$$

$$S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}3AB \cdot SM + \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 15\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

- Thể tích hình chóp là $V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SO = 12\sqrt{3} \text{ cm}^3$.



□

Bài 2. Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có hình dạng là một hình chóp tứ giác đều. Chiều cao kim tự tháp là 137 m, cạnh đáy dài 231 m. Tính diện tích xung quanh và thể tích của kim tự tháp.

$$\text{ĐS: } S_{\text{xq}} = 231\sqrt{128437} \text{ m}^2 \text{ và } V = 2436819 \text{ m}^3$$

 Lời giải.

Coi kim tự tháp là hình chóp $S.ABCD$ có đường cao SO .

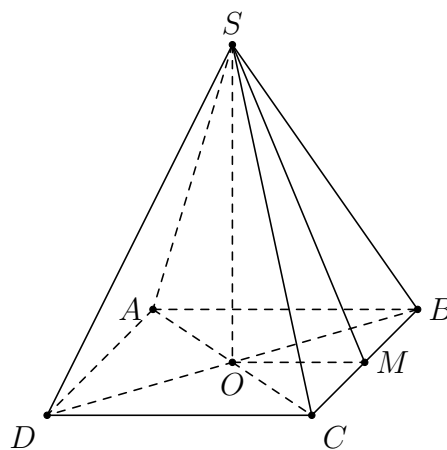
Ta có $OM = \frac{1}{2}AB = 115,5$ m.

$\triangle SOM$ vuông tại $O \Rightarrow SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{128437}}{2}$ m.

Diện tích xung quanh của kim tự tháp là

$S_{xq} = 2AB \cdot SM = 231\sqrt{128437}$ m².

Thể tích của kim tự tháp là $V = \frac{1}{3}SO \cdot AB^2 = 2436819$ m³.



□

 **Bài 3.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi O là tâm của mặt đáy $ABCD$. Gọi thể tích hình lập phương là V , thể tích hình chóp đều $O.A'B'C'D'$ là V' . Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$. **ĐS:**

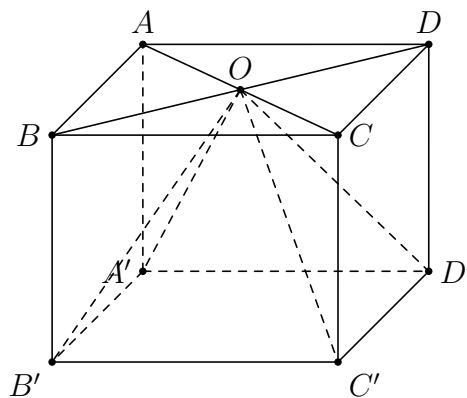
$\frac{1}{3}$

 Lời giải.

Thể tích hình hộp chữ nhật là $V = A'B'^2 \cdot AA' = a^2 \cdot AA'$.

Thể tích hình chóp $O.A'B'C'D'$ là $V' = \frac{1}{3}A'B'^2 \cdot AA' = \frac{a^2 \cdot AA'}{3}$.

Vậy $\frac{V'}{V} = \frac{1}{3}$.



□

§7 Ôn tập chương 4

1 Tóm tắt lí thuyết

Xem phần "Tóm tắt lí thuyết" từ Bài 1 đến Bài 6.

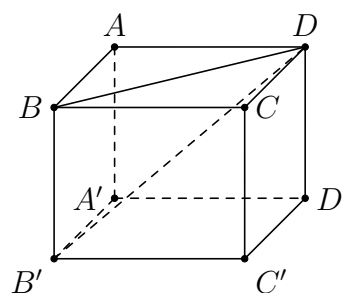
2 Bài tập và các dạng toán

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 8$ cm, $BD = 10$ cm, $B'D = 14$ cm. Hãy tính

1. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật. **ĐS:**
 $S_{xq} = 112\sqrt{6}$ cm² và $S_{tp} = 112\sqrt{6} + 96$ cm²
2. Thể tích của hình hộp chữ nhật. **ĐS:** $V = 192\sqrt{6}$ cm³

Lời giải.

1. $\triangle ABD$ vuông tại $A \Rightarrow AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = 6$ cm.
 $\triangle BB'D$ vuông tại $B \Rightarrow BB' = \sqrt{B'D^2 - BD^2} = 4\sqrt{6}$ cm.
 Ta có
 $S_{xq} = 2(AB + AD) \cdot BB' = 112\sqrt{6}$ cm².
 $S_{tp} = 2(AB \cdot AD + AD \cdot BB' + BB' \cdot AB) = 112\sqrt{6} + 96$ cm².
2. Thể tích hình hộp chữ nhật là $V = AB \cdot AD \cdot BB' = 192\sqrt{6}$ cm³.



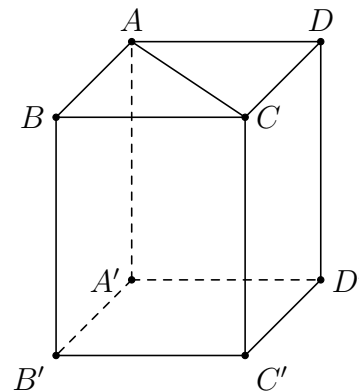
□

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $AC = AA' = 2\sqrt{2}$ cm. Hãy tính

1. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật. **ĐS:** $S_{xq} = 16\sqrt{2}$ cm² và $S_{tp} = 8 + 16\sqrt{2}$ cm²
2. Thể tích của hình hộp chữ nhật. **ĐS:** $V = 8\sqrt{2}$ cm³

Lời giải.

1. $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 2$ cm.
 $S_{xq} = 2 \cdot 2AB \cdot AA' = 16\sqrt{2}$ cm².
 $S_{tp} = S_{xq} + S_{ABCD} = 16\sqrt{2} + 2AB^2 = 8 + 16\sqrt{2}$ cm².
2. Thể tích của hình hộp chữ nhật là $V = AB^2 \cdot AA' = 8\sqrt{2}$ cm³.



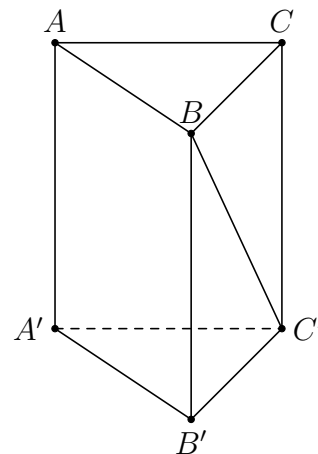
□

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $BC' = 13$ cm. Hãy tính

1. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình lăng trụ. **ĐS:** $S_{xq} = 144$ cm² và $S_{tp} = 156$ cm²
2. Thể tích của hình lăng trụ. **ĐS:** 72 cm³

Lời giải.

1. $\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4$ cm.
 $\triangle BCC'$ vuông tại $C \Rightarrow CC' = \sqrt{C'B^2 - BC^2} = 12$ cm.
 $S_{xq} = (AB + BC + CA) \cdot CC' = 144$ cm².
 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 6$ cm².
 $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\triangle ABC} = 144 + 2 \cdot 6 = 156$ cm².
2. Thể tích lăng trụ là $V = S_{\triangle ABC} \cdot CC' = 6 \cdot 12 = 72$ cm³.



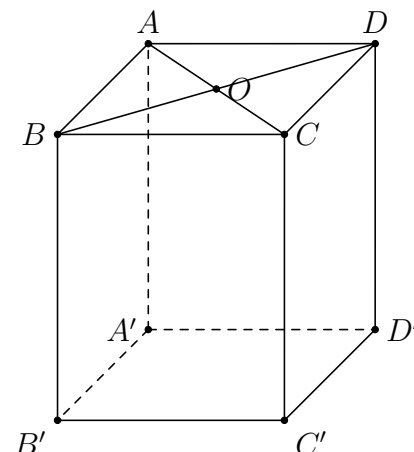
□

Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi với các đường chéo có độ dài bằng 10 cm và 24 cm, chiều cao lăng trụ bằng 15 cm. Hãy tính

1. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình lăng trụ. **ĐS:** $S_{xq} = 780$ cm² và $S_{tp} = 1020$ cm²
2. Thể tích của hình lăng trụ. **ĐS:** 1800 cm³

Lời giải.

- Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$.
 $\triangle AOB$ vuông tại $O \Rightarrow AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 13 \text{ cm}$.
 $S_{xq} = 4 \cdot AB \cdot BB' = 4 \cdot 13 \cdot 15 = 780 \text{ cm}^2$.
 $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{ABCD} = 780 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 1020 \text{ cm}^2$.
- Thể tích lăng trụ là $V = S_{ABCD} \cdot BB' = 1800 \text{ cm}^3$.



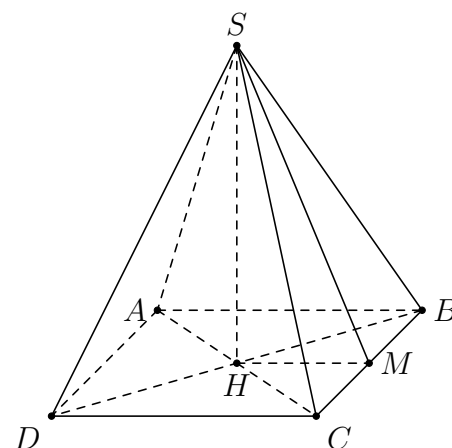
□

Ví dụ 5. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đường cao bằng 12 cm và trung đoạn bằng 13 cm. Hãy tính

- Độ dài cạnh đáy của hình chóp. **ĐS:** 10 cm
- Diện tích toàn phần của hình chóp. **ĐS:** 360 cm^2
- Thể tích của hình chóp. **ĐS:** 400 cm^3

Lời giải.

- Gọi H là tâm $ABCD$, M là trung điểm của BC .
 $\triangle SHM$ vuông tại $H \Rightarrow HM = \sqrt{SM^2 - SH^2} = 5 \text{ cm}$
 $\Rightarrow AB = 2HM = 10 \text{ cm}$.
- $S_{xq} = 2AB \cdot SM = 260 \text{ cm}^2$.
 $S_{tp} = S_{xq} + S_{ABCD} = 260 + AB^2 = 360 \text{ cm}^2$.
- Thể tích hình chóp là $V = \frac{1}{3}SH \cdot AB^2 = 400 \text{ cm}^3$.



□

Ví dụ 6. Cho hình chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$. Cho biết $AB = 4 \text{ cm}$, $A'B' = 8 \text{ cm}$ và $MN = 4 \text{ cm}$.

- Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình chóp cụt. **ĐS:** $S_{xq} = 96 \text{ cm}^2$, $S_{tp} = 176 \text{ cm}^2$
- Tính chiều cao của hình chóp cụt. **ĐS:** $2\sqrt{3} \text{ cm}$

Lời giải.

$$1. S_{BCC'B'} = \frac{1}{2}MN(B'C' + BC) = \frac{1}{2}MN(A'B' + AB) = 24 \text{ cm}^2.$$

$$S_{xq} = 4S_{BCC'B'} = 96 \text{ cm}^2.$$

$$S_{tp} = S_{xq} + A'B'^2 + AB^2 = 176 \text{ cm}^2.$$

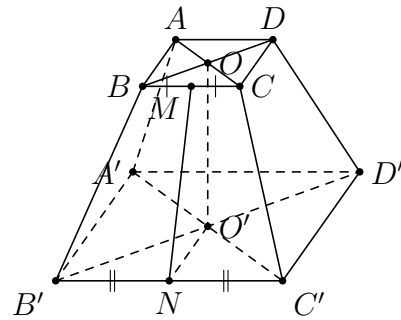
2. Gọi O, O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Vẽ $MH \perp O'N$ tại $H \Rightarrow OO' = MH$.

Ta có $ON = \frac{1}{2}A'B' = 4 \text{ cm}$. Khi đó $NH = \frac{1}{2}O'N = 2 \text{ cm}$.

$\triangle MNH$ vuông tại $H \Rightarrow MH = \sqrt{MN^2 - NH^2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.

Vậy $OO' = MH = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.



□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$ có $AB = 3 \text{ cm}$, $AQ = BD = 5 \text{ cm}$. Hãy tính

1. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật. **ĐS:** $S_{xq} = 42 \text{ cm}^2$, $S_{tp} = 66 \text{ cm}^2$

2. Thể tích của hình hộp chữ nhật. **ĐS:** $V = 36 \text{ cm}^3$

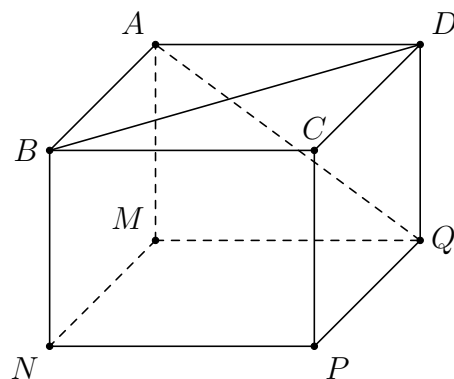
Lời giải.

1. $\triangle ABD$ vuông tại $A \Rightarrow AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = 4 \text{ cm}$.
 $\triangle ADQ$ vuông tại $D \Rightarrow DQ = \sqrt{AQ^2 - AD^2} = 3 \text{ cm}$.

$$S_{xq} = 2(AB + AD) \cdot DQ = 42 \text{ cm}^2.$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{ABCD} = 42 + 2 \cdot AB \cdot AD = 66 \text{ cm}^2.$$

2. Thể tích của hình hộp chữ nhật là $V = S_{ABCD} \cdot DQ = 36 \text{ cm}^3$.



□

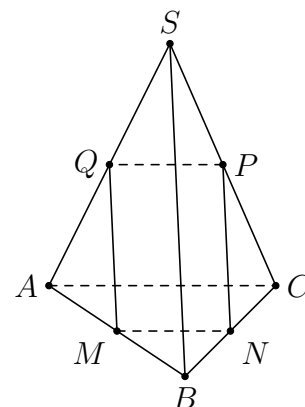
Bài 2. Cho tam giác ABC và điểm S không thuộc mặt phẳng (ABC) . Nối S với A, B, C . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, SC, SA . Chứng minh

1. $MQ \parallel (SBC)$ và $NP \parallel (SAB)$.

2. Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải.

- MQ là đường trung bình của $\triangle ABS \Rightarrow MQ \parallel SB \Rightarrow MQ \parallel (SBC)$.
 NP là đường trung bình của $\triangle CBS \Rightarrow NP \parallel SB \Rightarrow NP \parallel (SAB)$.
- MQ và NP cùng song song với SB và bằng một nửa của $SB \Rightarrow MQ = NP$.
 Vậy $MNPQ$ là hình bình hành.



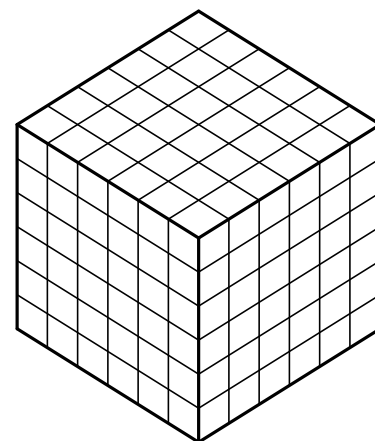
□

Bài 3. Một hình lập phương có cạnh bằng 6 cm được tạo bởi 216 hình lập phương nhỏ có cạnh bằng 1 cm. Người ta sơn tất cả 6 mặt của hình lập phương lớn. Tính số lượng các hình lập phương cạnh 1 cm mà

- Được sơn đúng 3 mặt. **ĐS:** 8 hình
- Được sơn đúng 2 mặt. **ĐS:** 48 hình
- Được sơn đúng 1 mặt. **ĐS:** 96 hình

Lời giải.

- Những hình lập phương được sơn đúng 3 mặt là 8 hình lập phương ở 8 đỉnh của hình lập phương.
- Những hình lập phương được sơn đúng 2 mặt là các hình lập phương dọc theo các cạnh của hình lập phương, ngoại trừ 8 hình lập phương ở 8 đỉnh.
 Do đó có $12 \cdot 4 = 48$ hình lập phương cạnh 1 cm được sơn đúng 2 mặt.
- Mỗi mặt của hình lập phương có 16 hình lập phương cạnh 1 cm được sơn đúng 1 mặt.
 Do đó có $16 \cdot 6 = 96$ hình lập phương cạnh 1 cm được sơn đúng 1 mặt.



□

Bài 4. Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều, M là trung điểm của BC , biết $AA' = AM = 2$ cm. Hãy tính

- Diện tích xung quanh của lăng trụ. **ĐS:** $S_{xq} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- Thể tích của lăng trụ. **ĐS:** $V = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$

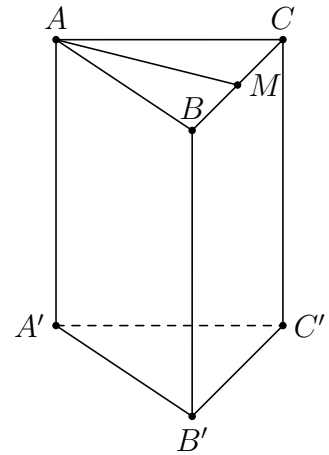
Lời giải.

$$1. \triangle ABC \text{ là tam giác đều} \Rightarrow AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$

$$S_{xq} = 3AB \cdot AA' = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$2. S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2.$$

$$\text{Thể tích của lăng trụ là } V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3.$$



□

§8 Đề kiểm tra chương 4

1 Đề số 1

1.1 Trắc nghiệm (3 điểm)

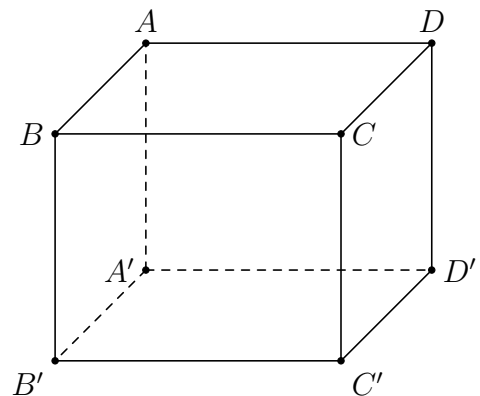
Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng.

Câu 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu cạnh của hình hộp đi qua đỉnh A ?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Các cạnh AB , AA' , AD của hình hộp đi qua đỉnh A .



□

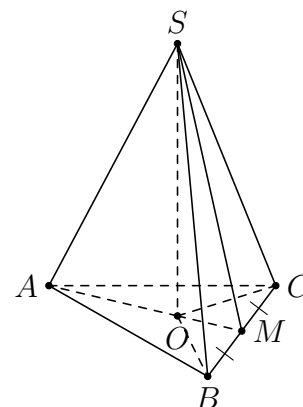
Chọn đáp án (C)

Câu 2. Cho hình chóp tam giác đều có tất cả các cạnh bằng 4 cm. Độ dài trung đoạn của hình chóp là

- (A) 2 cm. (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. (C) $2\sqrt{3}$ cm. (D) 12 cm.

Lời giải.

Xét hình chóp như hình vẽ. Ta có
 $\triangle SMB$ vuông tại $M \Rightarrow SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = 2\sqrt{3}$ cm.

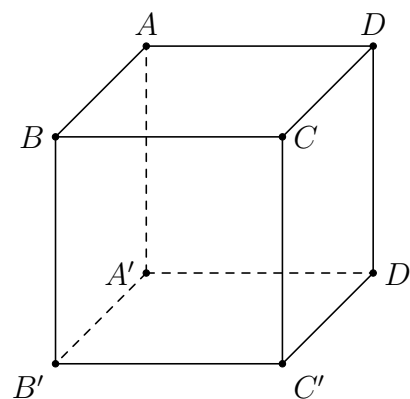


Chọn đáp án **(C)**

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng chứa cả cạnh AB và $C'D'$ là
(A) $(A'C'CA)$. **(B)** $(ABC'D')$. **(C)** $(CDD'C')$. **(D)** $(BCC'B')$.

Lời giải.

Mặt phẳng chứa cả cạnh AB và $C'D'$ là mặt $(ABC'D')$.



Chọn đáp án **(B)**

Câu 4. Công thức tính thể tích hình hộp chữ nhật có chiều dài bằng a , chiều rộng bằng b , chiều cao bằng c là

(A) $V = abc$.

(B) $V = \frac{1}{3}abc$.

(C) $V = 3abc$.

(D) $V = 2abc$.

Lời giải.

Thể tích hình hộp chữ nhật là $V = abc$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 5. Thể tích hình chóp đều bằng 132 cm^3 , chiều cao của nó là 12 cm. Diện tích đáy hình chóp là

(A) 33 cm^2 .

(B) 11 cm^2 .

(C) 22 cm^2 .

(D) 42 cm^2 .

Lời giải.

Ta có $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{đáy}} \cdot h \Rightarrow S_{\text{đáy}} = \frac{3V}{h} = 33 \text{ cm}^2$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 6. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 5 cm, 4 cm và 7 cm. Đường chéo hình hộp chữ nhật có số đo là

(A) $2\sqrt{10}$ cm.

(B) $3\sqrt{10}$ cm.

(C) 20 cm.

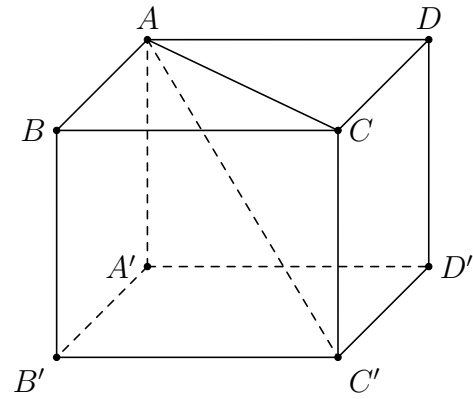
(D) 30 cm.

Lời giải.

Xét hình hộp chữ nhật như hình vẽ.

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } B \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{41} \text{ cm.}$$

$$\triangle ACC' \text{ vuông tại } C \Rightarrow AC' = \sqrt{AC^2 + C'C^2} = 3\sqrt{10} \text{ cm.}$$



Chọn đáp án **B**



1.2 Tự luận (7 điểm)

Bài 1. (4,0 điểm) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đường cao bằng 4 dm, trung đoạn bằng 5 dm. Hãy tính

- Độ dài đáy của hình chóp. **ĐS:** 6 dm
- Diện tích xung quanh của hình chóp. **ĐS:** 60 dm²
- Thể tích của hình chóp. **ĐS:** 48 dm³

Lời giải.

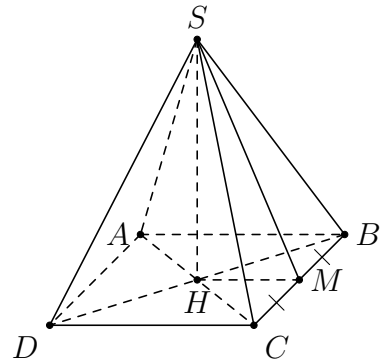
Gọi M là trung điểm của BC và H là tâm của đáy $ABCD$.

Ta có $HM = \sqrt{SM^2 - SH^2} = 3$ dm.

Khi đó $AD = 2HM = 6$ dm.

✓ $S_{xq} = 2AB \cdot SH = 60 \text{ dm}^2$.

✓ Thể tích của hình chóp: $V = \frac{1}{3} \cdot AB^2 \cdot SH = 48 \text{ dm}^3$.



Bài 2. (3,0 điểm) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A . Diện tích đáy bằng 16 cm². Diện tích xung quanh hình lăng trụ bằng $(96 + 48\sqrt{2})$ cm². Hãy tính

- Độ dài cạnh BC . **ĐS:** 8 cm
- Chiều cao của lăng trụ. **ĐS:** $6\sqrt{2}$ cm
- Thể tích của lăng trụ. **ĐS:** $96\sqrt{2}$ cm³

Lời giải.

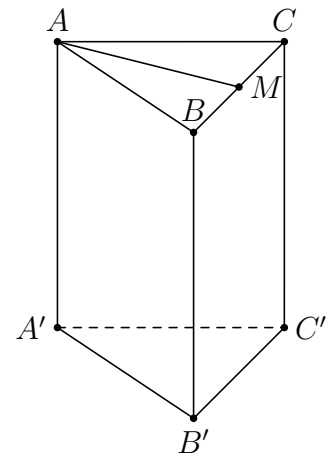
1. Gọi M là trung điểm của BC . Ta có

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{BC^2}{4} \Rightarrow BC = 8 \text{ cm.}$$

2. Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \Rightarrow AB = AC = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$

$$S_{xq} = (AB + BC + CA) \cdot BB' \Rightarrow BB' = \frac{96 + 48\sqrt{2}}{8\sqrt{2} + 8} = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

3. Thể tích lăng trụ: $V = S_{\triangle ABC} \cdot BB' = 96\sqrt{2} \text{ cm}^3$.



□

2 Đề số 2

2.1 Trắc nghiệm (3 điểm)

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng.

Câu 1. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Đỉnh S là điểm chung của bao nhiêu cạnh bên của hình chóp?

(A) 1.

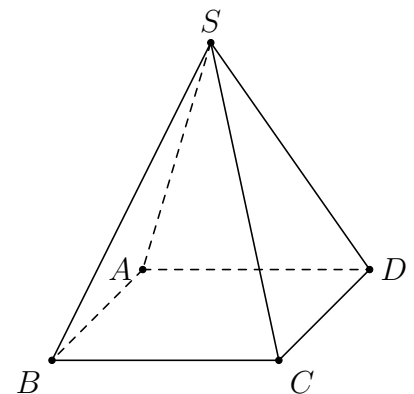
(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Đỉnh S là điểm chung của cạnh SA, SB, SC, SD của hình chóp.



Chọn đáp án (D)

□

Câu 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Số mặt của hình hộp chữ nhật song song với AC là

(A) 1.

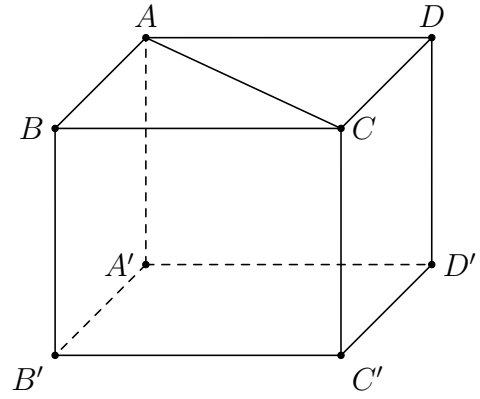
(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Mặt phẳng $(A'B'C'D')$ song song với cạnh AC .



□

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Số mặt, số đỉnh, số cạnh của hình lập phương lần lượt là

(A) 4, 8, 12.

(B) 6, 8, 12.

(C) 6, 12, 8.

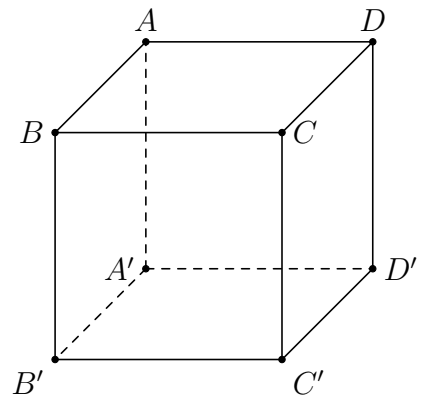
(D) 8, 6, 12.

Lời giải.

Số mặt: 6 mặt.

Số đỉnh: 8 đỉnh.

Số cạnh: 12 cạnh.



□

Câu 4. Hình lăng trụ đứng tam giác có các mặt bên là

(A) Hình bình hành.

(B) Hình chữ nhật.

(C) Tam giác đều.

(D) Hình vuông.

Lời giải.

Các mặt bên của hình lăng trụ đứng tam giác có hình chữ nhật.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 8$ cm, $AC = 10$ cm, $BC = 12$ cm và đường cao $AA' = 10$ cm. Diện tích xung quanh của lăng trụ là

(A) 120 cm^2 .

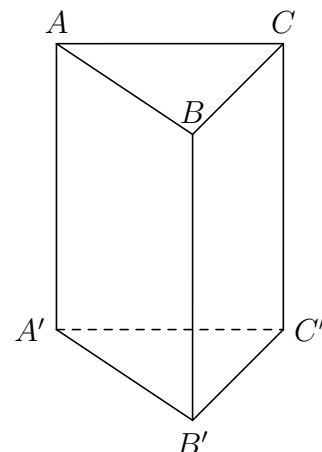
(B) 150 cm^2 .

(C) 280 cm^2 .

(D) 300 cm^2 .

Lời giải.

$$S_{xq} = (AB + BC + CA) \cdot AA' = 300 \text{ cm}^2.$$



Chọn đáp án **(D)**

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết diện tích một mặt là 25 cm^2 . Thể tích hình lập phương là

(A) 50 cm^3 .

(B) 125 cm^3 .

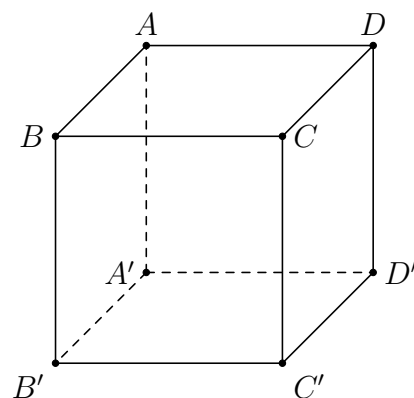
(C) 25 cm^3 .

(D) 250 cm^3 .

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$.

Vậy thể tích của hình lập phương là $V = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$.



Chọn đáp án **(B)**

2.2 Tự luận (7 điểm)

Bài 1. (4,0 điểm) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có diện tích đáy bằng 256 cm^2 , đường cao $SO = 6 \text{ cm}$. Hãy tính

1. Thể tích hình chóp.

ĐS: 512 cm^3

2. Diện tích xung quanh của hình chóp.

ĐS: 320 cm^2

Lời giải.

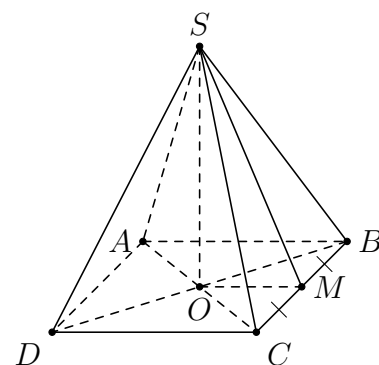
1. Thể tích của hình chóp là $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 256 = 512 \text{ cm}^3$.

2. Gọi M là trung điểm của BC . Khi đó SM là trung đoạn của hình chóp.

Ta có $AB = \sqrt{256} = 16 \text{ cm}$. Khi đó $OM = \frac{1}{2}AB = 8 \text{ cm}$.

$\triangle SOM$ vuông tại $O \Rightarrow SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = 10 \text{ cm}$.

Vậy $S_{xq} = 2AB \cdot SM = 320 \text{ cm}^2$.



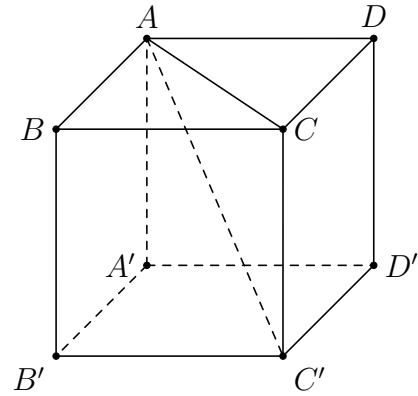
□

Bài 2. (3,0 điểm) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC = 3\sqrt{2}$ cm. Hãy tính

1. Độ dài cạnh hình lập phương. **ĐS:** 3 cm
2. Độ dài đường chéo hình lập phương. **ĐS:** $3\sqrt{3}$ cm
3. Thể tích khối lập phương. **ĐS:** 27 cm^3

 **Lời giải.**

1. Ta có $AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 3 \text{ cm}$.
2. $\triangle ACC'$ vuông tại $C \Rightarrow AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$.
3. Thể tích khối lập phương là $V = AB^3 = 27 \text{ cm}^3$.



□