



TỔNG HỢP CÔNG THỨC TOÁN 9

LUYỆN THI VÀO 10 KIẾN THỨC CƠ BẢN

1 CĂN BẬC HAI – CĂN BẬC BA

1. Căn bậc hai – Căn bậc ba

Căn bậc hai của một số không âm a là số x sao cho $x^2 = a$.

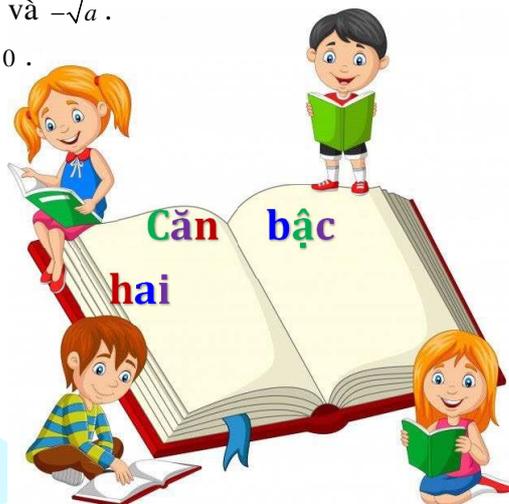
- ◆ Số dương có hai căn bậc hai là hai số đối nhau là \sqrt{a} và $-\sqrt{a}$.
- ◆ Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$.
- ◆ Với số dương a , số \sqrt{a} là **căn bậc hai số học** của a .
Số 0 cũng là căn bậc hai số học của 0.

Căn bậc ba: Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$.

Ví dụ: $\sqrt[3]{8} = 2$.

Mọi số a đều có duy nhất một căn bậc ba.

1. $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$
2. $\sqrt[3]{AB} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$
3. $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$
4. $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$



2. Điều kiện để biểu thức xác định (có nghĩa)

Nếu có căn thì căn ≥ 0 . Nếu có mẫu thì mẫu $\neq 0$.

- ◆ \sqrt{A} có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$.
- ◆ $\sqrt{\frac{1}{A}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A > 0$.
- ◆ $\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}$ xác định khi $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$
- ◆ $\frac{f(x)}{g(x)}$ có nghĩa khi $g(x) \neq 0$.
- ◆ $\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$ có nghĩa khi $\begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$.
- ◆ $\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$ có nghĩa khi $\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$.
- ◆ $\sqrt{f(x) \cdot g(x)}$ có nghĩa khi $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$

Chú ý:

- ◆ Nếu $|f(x)| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq a \\ f(x) \leq -a \end{cases}$ (với $a > 0$)
- ◆ Nếu $f^2(x) \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq \sqrt{a} \\ f(x) \leq -\sqrt{a} \end{cases}$
- ◆ Nếu $|f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a$ (với $a > 0$)
- ◆ Nếu $f^2(x) \leq a \Leftrightarrow -\sqrt{a} \leq f(x) \leq \sqrt{a}; a > 0$

3. Liên hệ phép khai phương – phép nhân – phép chia.



- ◆ Khai phương một tích: $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} (A \geq 0, B \geq 0)$
- ◆ Khai phương một thương: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} (A \geq 0, B \neq 0)$

4. Đưa thừa số vào trong - ra ngoài căn .

- ◆ Với $B \geq 0$ ta có: $\sqrt{A^2 B} = |A| \cdot \sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{khi } A < 0 \end{cases}$
- ◆ Với $B \geq 0$ ta có: $A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2 \cdot B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2 \cdot B} & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

5. Trục căn thức ở mẫu .

Trục căn thức ở mẫu là làm cho mẫu số không còn biểu thức chứa căn.

- ◆ **Cách 1:** Đặt thừa số chung ở tử số và mẫu số, rồi rút gọn: $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}} = \sqrt{2}$
- ◆ **Cách 2:** Nếu mẫu số chỉ chứa một thừa số có căn, ta nhân với chính thừa số đó:
 1. $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$
 2. $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$

◆ **Cách 3:** Nếu mẫu số là tổng các biểu thức, ta nhân với biểu thức liên hợp.

1. $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$
2. $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$
3. $\frac{C}{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}} = \frac{C \cdot (\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2})}{(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) \cdot (\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2})} = \frac{C \cdot (\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2})}{A - B}$
4. $\frac{C}{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}} = \frac{C \cdot (\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2})}{(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) \cdot (\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2})} = \frac{C \cdot (\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2})}{A + B}$



6. Giải phương trình .

Phương pháp chung:

- ◆ **Bước 1:** Điều kiện.
- ◆ **Bước 2:** Biến đổi tương đương (đưa về dạng tích, bình phương...) để tìm x .
- ◆ **Bước 3:** So sánh với điều kiện và kết luận.

Một số cách biến đổi hay gặp :

1. $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$
2. $\sqrt{A^2} = B \Leftrightarrow |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$
3. $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$
4. $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
5. $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases}$
6. $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \text{ hay } A = -B \end{cases}$



$$7. |A|=|B| \Leftrightarrow \begin{cases} A=B \\ A=-B \end{cases}$$

$$8. |A|+|B|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$$

$$9. |A|=A \Leftrightarrow A \geq 0$$

$$10. |A|=-A \Leftrightarrow A \leq 0$$

7. Các dạng toán hay gặp .

$$\diamond \text{ Dạng 1: } \sqrt{f(x)} = c \Leftrightarrow \begin{cases} c < 0 \Rightarrow \text{VN} \\ c = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \\ c > 0 \Rightarrow f(x) = c^2 \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Dạng 2: } \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Dạng 3: } \sqrt{f^2(x)} = g(x) \Leftrightarrow |f(x)| = g(x) \text{ (tra PP ở bảng PT giá trị tuyệt đối)}$$

$$\diamond \text{ Dạng 4: } \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Dạng 5: } \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = c \Leftrightarrow \begin{cases} c < 0 \Rightarrow \text{PTVN} \\ c = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) = 0 \\ c > 0 \Rightarrow \text{Bình phương hai vế} \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Dạng 6: } \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x)$$

- Điều kiện: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ rồi bình phương hai vế thành: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \end{cases}$

$$2\sqrt{f(x).g(x)} = h^2(x) - g(x) - f(x) \text{ rồi đưa về dạng 2}$$

$$\diamond \text{ Dạng 7: } \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$$

- Điều kiện: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ rồi bình phương hai vế thành: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \end{cases}$

$$2\sqrt{f(x).g(x)} = hx - g(x) - f(x) \text{ rồi đưa về dạng 2}$$

$$\diamond \text{ Dạng 8: } \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$$

- Ta chuyển vế đưa về $\sqrt{f(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{g(x)}$ rồi làm như dạng 6.

$$\diamond \text{ Dạng 9: } \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{k(x)}$$

- Điều kiện: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ k(x) \geq 0 \end{cases}$ rồi bình phương hai vế

$$\diamond \text{ Dạng 10: } \sqrt{a.f(x)+b} + \sqrt{c.f(x)+d} = 0$$

- Tìm điều kiện rồi đặt $\sqrt{f(x)} = t$, sau đó bình phương hai vế để giải.

$$\diamond \text{ Dạng 11: } a.f(x)+b = \sqrt{c.f(x)+d}$$

Các dạng phương trình





- Tìm điều kiện rồi đặt $\sqrt{c.f(x)+d} = t$.
- Bình phương rút $f(x)$ theo t để đưa về phương trình ẩn t .
- ◆ **Dạng 12:** $a\sqrt{bx+c} + d\sqrt{ex+g} + \sqrt{(bx+c)(ex+g)} + hx = 0$
 - Tìm điều kiện rồi đặt $a\sqrt{bx+c} + d\sqrt{ex+g} = t$.
 - Bình phương hai vế được $\sqrt{(bx+c)(ex+g)}$ theo t .

8. So sánh căn bậc hai.

A. Tính trực tiếp rồi so sánh

- ◆ So sánh $\sqrt{16+9}$ và $\sqrt{16} + \sqrt{9}$
Ta có $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ và $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4+3=7 > 5 \Rightarrow \sqrt{16} + \sqrt{9} > \sqrt{16+9}$

B. Đưa thừa số vào trong, ra ngoài căn rồi so sánh

- ◆ So sánh $2\sqrt{27}$ và $\sqrt{147}$: Ta có $2\sqrt{27} = \sqrt{108} < \sqrt{147}$

C. Lũy thừa hai vế rồi so sánh

- ◆ So sánh $\sqrt{2005} + \sqrt{2007}$ và $2\sqrt{2006}$.
 $(\sqrt{2005} + \sqrt{2007})^2 = 2005 + 2007 + 2\sqrt{2005 \cdot 2007} = 4012 + 2\sqrt{2005 \cdot 2007}$.
 $(2\sqrt{2006})^2 = 4 \cdot 2006 = 4012 + 2 \cdot 2006$.
 Vì $2005 \cdot 2007 = (2006-1)(2006+1) = 2006^2 - 1 < 2006^2$.
 Nên $\sqrt{2005 \cdot 2007} < 2006 \Rightarrow (\sqrt{2005} + \sqrt{2007})^2 < (2\sqrt{2006})^2 \Rightarrow \sqrt{2005} + \sqrt{2007} < 2\sqrt{2006}$.

D. Nhân liên hợp

- ◆ So sánh $\sqrt{2005} + \sqrt{2007}$ và $2\sqrt{2006}$.
 Xét $\sqrt{2007} - \sqrt{2006} = \frac{(\sqrt{2007} - \sqrt{2006})(\sqrt{2007} + \sqrt{2006})}{\sqrt{2007} + \sqrt{2006}} = \frac{1}{\sqrt{2007} + \sqrt{2006}}$
 Và $\sqrt{2006} - \sqrt{2005} = \frac{(\sqrt{2006} - \sqrt{2005})(\sqrt{2006} + \sqrt{2005})}{\sqrt{2006} + \sqrt{2005}} = \frac{1}{\sqrt{2006} + \sqrt{2005}}$
 Vì $\frac{1}{\sqrt{2007} + \sqrt{2006}} < \frac{1}{\sqrt{2006} + \sqrt{2005}} \Rightarrow \sqrt{2007} - \sqrt{2006} < \sqrt{2006} - \sqrt{2005}$
 Hay $\sqrt{2007} + \sqrt{2005} < 2\sqrt{2006}$



E. Dùng bất đẳng thức

- ◆ So sánh $\sqrt[7]{\frac{5}{6}} + \sqrt[7]{\frac{6}{7}} + \sqrt[7]{\frac{7}{5}}$ và 3
 Áp dụng bất đẳng thức Cossi: $\sqrt[7]{\frac{5}{6}} + \sqrt[7]{\frac{6}{7}} + \sqrt[7]{\frac{7}{5}} \geq 3\sqrt[7]{\sqrt[7]{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[7]{\frac{6}{7}} \cdot \sqrt[7]{\frac{7}{5}}} \geq 3$
 Vì $\sqrt[7]{\frac{5}{6}} \neq \sqrt[7]{\frac{6}{7}} \neq \sqrt[7]{\frac{7}{5}}$ Nên đẳng thức không xảy ra dấu bằng suy ra $\sqrt[7]{\frac{5}{6}} + \sqrt[7]{\frac{6}{7}} + \sqrt[7]{\frac{7}{5}} > 3$

F. Dùng thừa số chung gian

- ◆ So sánh $\sqrt{65} + 2$ và 10: Có $\sqrt{65} + 2 > \sqrt{64} + 2 = 10$

9. Tính giá trị của biểu thức.



- ◆ Tìm x (nếu bài chưa cho), rồi chọn giá trị x thỏa mãn đề bài.
- ◆ Nếu bài đã cho 1 giá trị $x = a$, các em cần chỉ ra $x = a$ thỏa mãn yêu cầu rồi mới thay số.
- ◆ **Ví dụ:** Tính giá trị của $A = \frac{\sqrt{x}-2}{x-1}, x \neq 1, x \geq 0$ tại $x = 16$.

Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào A ta được: $A = \frac{\sqrt{16}-2}{16-1} = \frac{2}{15}$.

Vậy $x = 16$ thì $A = \frac{2}{15}$.

10. So sánh biểu thức có chứa biến.

- ◆ Để so sánh biểu thức A với c ta xét hiệu $A - c$.
- ◆ Nếu $A > 0; B > 0; A > B \Rightarrow \sqrt{A} > \sqrt{B}$

🕒 Chú ý:

- ◆ So sánh A với \sqrt{A} có thể đưa về xét hiệu $A - \sqrt{A}$ hoặc so sánh A với 1 :
 - Nếu $A \geq 1 \Rightarrow A \geq \sqrt{A}$ và ngược lại, nếu $0 < A < 1 \Rightarrow A < \sqrt{A}$
- ◆ So sánh A với $|A|$ là so sánh A với 0 .
 - Nếu $A \geq 0 \Rightarrow A = |A|$; $A < 0 \Rightarrow A < |A|$
- ◆ So sánh A với $\frac{1}{A}$ có thể đưa về xét hiệu $A - \frac{1}{A}$ hoặc so sánh A với 1:
 - Nếu $A \geq 1 \Rightarrow A \geq \frac{1}{A}$ và ngược lại. Với $0 < A < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{A}$.



11. Tìm giá trị của x thỏa mãn đẳng thức (sau rút gọn)

🌸 Các em lựa chọn các phương pháp sau:

- ◆ Biến đổi tương đương.
- ◆ Đưa về tổng bình phương $A^2 + B^2 = 0 \Rightarrow A = B = 0$.
- ◆ Đánh giá hai vế: $\begin{cases} f(x) \geq a \\ g(x) \leq a \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$.

🕒 Chú ý: Phải so sánh với điều kiện xác định, rồi mới kết luận.

12. Tìm giá trị của x thỏa mãn bất phương trình (sau rút gọn)

🌸 Thông thường trong các bài toán này, các em chỉ cần biến đổi tương đương, nhưng phải nhớ hai chú ý sau:

- ◆ Dựa vào điều kiện để giảm bớt quá trình biến đổi, ví dụ: $\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2} < 0$, các em sẽ thấy $\sqrt{x}+2 > 0, \forall x > 0$ do đó bài toán sẽ đưa về $\sqrt{x}-4 < 0 \Leftrightarrow x < 16$.
- ◆ Kết hợp điều kiện sẽ được $0 \leq x < 16$.

🌸 Tuyệt đối không bỏ mẫu số khi chưa biết mẫu số âm hay dương.

◆ Ví dụ:

- **lời giải sai:** $\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} < 2 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} < 2(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow 3\sqrt{x} > 4 \Leftrightarrow x > \frac{16}{9}$



- **lời giải đúng:** $\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} < 2 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{4-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} < 0$. Lúc này các em chia trường hợp để giải tiếp.

Chú ý: Phải so sánh với điều kiện xác định, rồi mới kết luận.

13. Tìm x nguyên, tìm $x \in \mathbb{N}$, tìm số nguyên lớn nhất, số nguyên nhỏ nhất để giá trị của biểu thức A nguyên

Các bước giải:

- ◆ **Bước 1:** Tìm điều kiện xác định.
- ◆ **Bước 2:** Thực hiện phép chia đưa biểu thức về dạng $A = f(x) + \frac{a}{g(x)}$
 - **Th1.** Xét $x \in \mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow A$ là số vô tỷ (loại).
 - **Th2.** Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$. Để $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow a : g(x) \Rightarrow g(x) \in U(a)$ từ đó tìm x .
- ◆ **Bước 3:** So sánh điều kiện và kết luận.

Chú ý:

- ◆ Phải xét $A = 0 \Rightarrow x$ (nếu có). **Trường hợp này thường xảy ra khi bậc của tử số lớn hơn mẫu số**, và $A = 0$ có nghiệm (Ví dụ: $A = \frac{x-2}{\sqrt{x}+1}$)
- ◆ Nếu hệ số của biến x trên tử số, không chia hết hệ số của biến x dưới mẫu số, các em cần làm theo phương pháp lớp 6. (Ví dụ: $A = \frac{2\sqrt{x}-5}{3\sqrt{x}+2}$)
- ◆ **Với bài toán tìm** $x \in \mathbb{N}$, tìm giá trị nguyên nhỏ nhất, lớn nhất của x để biểu thức nhận giá trị nguyên hoặc tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P đạt giá trị nguyên lớn nhất, biểu thức P đạt giá trị nguyên nhỏ nhất các em làm tương tự. Sau khi lập bảng sẽ dựa vào bảng để kết luận.

14. Tìm giá trị của x , tìm $x \in \mathbb{Q}$; $x \in \mathbb{R}$ để giá trị biểu thức A nguyên

Các bước giải:

- ◆ **Bước 1:** Đặt điều kiện xác định của biểu thức.
- ◆ **Bước 2:** Tìm xem A có thể nằm trong khoảng, đoạn nào, mà $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \Rightarrow x$.
 - Để tìm A nằm trong khoảng, đoạn nào các em có thể dùng phương pháp miền giá trị hoặc phương pháp tìm $\min A$; $\max A$.
 - Từ đó suy ra $\min A \leq A \leq \max A$.

Chú ý: Với câu hỏi tìm x (tìm $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Q}$) để biểu thức A đạt giá trị nguyên nhỏ nhất, đạt giá trị nguyên lớn nhất thì cách làm tương tự. Sau khi lập bảng các em dựa vào bảng để kết luận.

15. Tìm giá trị của tham số m để $A(x) = m$ có nghiệm

Các bước giải:

- ◆ **Bước 1:** Tìm điều kiện xác định của $A(x)$
- ◆ **Bước 2:**
 - **Cách 1:** Nhận xét rồi rút $\sqrt{x} = f(m)$. Dựa vào điều kiện ở bước 1 để tìm điều kiện của m .
 - **Cách 2:** Phương trình có nghiệm khi $\min A(x) \leq m \leq \max A(x)$



16. Tìm giá trị của tham số m để $\begin{cases} P > f(m) \\ P < f(m) \end{cases}$ có nghiệm, vô nghiệm.

Các bước giải:

- ◆ **Bước 1:** Tìm điều kiện xác định của P
- ◆ **Bước 2:** Biến đổi chuyển bất phương trình về dạng $P > f(m)$ hoặc $P < f(m)$:
 - Bất phương trình $P > f(m)$ có nghiệm khi $f(m) < \max P$, có nghiệm với mọi x khi $f(m) < \min P$
 - Bất phương trình $P < f(m)$ có nghiệm khi $f(m) > \min P$, có nghiệm với mọi x khi $f(m) > \max P$
 - Ta sẽ chuyển bài toán về tìm $\min P$, $\max P$ trước khi tìm m .

17. Tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau rút gọn.

A. Tìm giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất biểu thức $A = \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}$

- ◆ **Phương pháp:** Tìm điều kiện rồi bình phương hai vế, sau đó sử dụng Cosi:
- ◆ **Ví dụ:** Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{10-x}$

Lời giải

- Điều kiện: $4 \leq x \leq 10$
- Ta có: $A^2 = (\sqrt{x-4} + \sqrt{10-x})^2 = x-4 + 2\sqrt{(x-4)(10-x)} + 10-x = 6 + 2\sqrt{(x-4)(10-x)}$
- Vì $\sqrt{(x-4)(10-x)} \geq 0$ nên $A^2 \geq 6$
- Suy ra $A \geq \sqrt{6}$
- Vậy $A_{\min} = \sqrt{6}$ khi $\sqrt{(x-4)(10-x)} = 0$ suy ra $\begin{cases} x=4 \\ x=10 \end{cases}$
- Vì $2\sqrt{(x-4)(10-x)} \leq x-4 + 10-x = 6$ (BĐT Cosi $2\sqrt{ab} \leq a+b$)
- Suy ra $A^2 = 6 + 2\sqrt{(x-4)(10-x)} \leq 12 \Rightarrow A \leq \sqrt{12}$
- Vậy $\max A = \sqrt{12}$ khi $x-4 = 10-x \Leftrightarrow x = 7$

B. Tìm giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất bằng cách sử dụng hằng đẳng thức số 1 và số 2:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

- ◆ **Ví dụ:** Tìm GTLN của $A = \sqrt{x} - x$.

Lời giải

- Ta có: $A = \frac{1}{4} - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2$
- Vì $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4} - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$.
- Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn).





- Vậy giá trị lớn nhất của A bằng $\frac{1}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$.



Chú ý:

◊ Với biểu thức:

$A = x + 2\sqrt{x} + 4$. Các em chỉ cần đánh giá:

$$x \geq 0 \Rightarrow x + 2\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x + 2\sqrt{x} + 4 \geq 4 \Rightarrow A \geq 4.$$

C. Tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất bằng phương pháp đánh giá

◊ Thường dùng khi tử số là hằng số.

◊ Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{10}{-3-2\sqrt{x}}$ (với $x \geq 0$).

Lời giải

- Ta có: $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow -3-2\sqrt{x} \leq -3 \Rightarrow \frac{10}{-3-2\sqrt{x}} \geq \frac{-10}{3} \Rightarrow A \geq -\frac{10}{3}$.
- Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn).
- Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $-\frac{10}{3}$ khi $x = 0$.

D. Tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất bằng cách thực hiện phép chia rồi đánh giá

◊ Thường dùng khi tử và mẫu số cùng bậc.

◊ Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6}$ (với $x \geq 0$).

Lời giải

- Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+6}$.
- Vì $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+6 \geq 6 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+6} \leq \frac{5}{6} \Rightarrow 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+6} \geq 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow A \geq \frac{1}{6}$.
- Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn).
- Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{1}{6}$ khi $x = 0$.

E. Phương pháp chia (tách) rồi sử dụng bất đẳng thức Cô – si

◊ Thường dùng khi bậc tử lớn hơn bậc mẫu.

◊ Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x+7}{\sqrt{x}+3}$ (với $x \geq 0$).

Lời giải

- Ta có: $A = \frac{x+7}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} = (\sqrt{x}+3) + \frac{16}{\sqrt{x}+3} - 6$.
- Do $x \geq 0$ nên $\sqrt{x}+3$ và $\frac{16}{\sqrt{x}+3}$ là các số dương.
- Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho 2 số dương ta được: $(\sqrt{x}+3) + \frac{16}{\sqrt{x}+3} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{16}{\sqrt{x}+3}} = 8 \Rightarrow (\sqrt{x}+3) + \frac{16}{\sqrt{x}+3} - 6 \geq 2 \Rightarrow A \geq 2$.
- Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}+3 = \frac{16}{\sqrt{x}+3} \Rightarrow (\sqrt{x}+3)^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{(\sqrt{x}+3)^2} = 4$
 $\Rightarrow |\sqrt{x}+3| = 4 \Rightarrow \sqrt{x}+3 = 4$ (Do $\sqrt{x}+3 > 0, \forall x \geq 0$) $\Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn).
- Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 2 khi $x = 1$.

F. Tìm $x \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất



◆ Ví dụ: Tìm $x \in \mathbb{N}$ để $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

- Điều kiện: $x \in \mathbb{N}, x \neq 4$.
- Nhận xét:
 - ✓ Nếu $0 \leq x < 4 \Rightarrow A < 0$.
 - ✓ Nếu $x > 4 \Rightarrow A > 0$.
 Như vậy A đạt giá trị nhỏ nhất khi $0 \leq x < 4$ và A đạt giá trị lớn nhất khi $x > 4$.

• **Tìm giá trị lớn nhất:**

Để $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$ đạt giá trị lớn nhất thì $\sqrt{x}-2$ là số dương nhỏ nhất

Mà $x \in \mathbb{N}$ và $x \neq 4$

$\Rightarrow x = 5$ (thỏa mãn)

Vậy $\text{Max } A = \frac{3}{\sqrt{5}-2} = 6 + 3\sqrt{5} \Leftrightarrow x = 5$.

• **Tìm giá trị nhỏ nhất:**

Để $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $\sqrt{x}-2$ là số âm lớn nhất

Mà $x \in \mathbb{N}$ và $x \neq 4$

$\Rightarrow x = 3$ (thỏa mãn)

Vậy $\text{Min } A = \frac{3}{\sqrt{3}-2} = -6 - 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3$.



2 HÀM SỐ BẬC NHẤT – BẬC HAI

1. Tìm điều kiện để hàm số là hàm số bậc nhất.

- ◆ Đồ thị $y = ax + b$ là bậc nhất nếu $a \neq 0$
- ◆ Đồ thị $y = ax^2 + bx + c$ là hàm số bậc nhất khi $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$
- ◆ Đồ thị $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là hàm số bậc nhất khi $\begin{cases} a = b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$.
- ◆ Đồ thị hàm số $y = ax + b$ là hàm hằng khi $a = 0$

🔔 **Chú ý:** Ngoài điều kiện trên, các em phải tìm điều kiện để biểu thức xác định.

2. Hàm số đồng biến – nghịch biến.

- ◆ Để chứng minh hàm số đồng biến, nghịch biến bằng định nghĩa:
 - Giả sử $x_1 < x_2$, tính $f(x_2) - f(x_1)$
 - Nếu $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, hàm số đồng biến.
 - Nếu $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, hàm số nghịch biến.
- ◆ **Với hàm số bậc nhất:** $y = ax + b$: Hàm số **đồng biến** khi $a > 0$ và **nghịch biến** khi $a < 0$.

3. Hệ số góc của đường thẳng.



- ◆ Nếu đường thẳng có dạng $y = ax + b$ thì hệ số góc là a .
- ◆ Hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ là $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
 - Góc tạo bởi đường thẳng với chiều dương trục Ox là α tính theo công thức: $a = \tan \alpha$
 - Nếu $a > 0$. Đường thẳng tạo với trục Ox một góc nhọn, $a < 0$ đường thẳng tạo với trục Ox một góc tù
 - Các đường thẳng có cùng hệ số góc thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau.
 - Góc tạo bởi đường thẳng $y = a_1x + b_1$ với đường thẳng $y = a_2x + b_2$ là góc α sao cho:

$$\tan \alpha = \left| \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2} \right|$$

4. Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất.

- ◆ Để vẽ đồ thị hàm số bậc nhất ta lấy hai điểm mà đồ thị đi qua, rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó (thường lấy giao của đồ thị với hai trục Ox, Oy)
 - Đồ thị $y = ax + b$ đi qua hai điểm có tọa độ $(0; b)$ và $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.
 - Đồ thị $y = ax$ đi qua hai điểm có tọa độ $(0; 0)$ và $(1; a)$.

⚡ Chú ý:

- ◆ Đường thẳng $x = a$ song song với Oy cắt Ox tại a .
- ◆ Đường thẳng $y = b$ song song với Ox cắt Oy tại b .

5. Tính diện tích các hình – độ dài các đoạn thẳng trên hệ trục.

- ◆ Điểm $A(a; b)$ là giao của hai đường thẳng $x = a$ và $y = b$. Để tính độ dài một cạnh ta đưa cạnh đó về một cạnh của tam giác vuông rồi sử dụng định lý Pitago. Để tính diện tích một hình:
 - **Cách 1:** Tính trực tiếp.
 - **Cách 2:** Tính gián tiếp thông qua các hình khác.

6. Tìm giao tuyến của hai đồ thị $y = f(x)$ và $g(x)$

- ◆ Xét hoành độ giao điểm của hai đồ thị thỏa mãn phương trình: $f(x) = g(x) \Rightarrow x$, thay x vào $y = f(x)$ hoặc $y = g(x)$ để tìm y và suy ra giao điểm.
 - **Tìm giao điểm của đồ thị với Ox :** cho $y = 0 \Rightarrow x$
 - **Tìm giao điểm của đồ thị với Oy :** cho $x = 0 \Rightarrow y$

7. Vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$

- ◆ **Cách 1:** Dùng quy tắc phá dấu giá trị tuyệt đối rồi vẽ.
- ◆ **Cách 2:**
 - Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$
 - Giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục Ox của $y = f(x)$ (P_1).
 - Lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục Ox của $y = f(x)$ lên phía trên Ox ta được (P_2).
 Đồ thị $y = |f(x)|$ là (P_1) và (P_2).

8. Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = f(m)$ dựa vào đồ thị



- ◆ **Bước 1:** Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = f(m)$
- ◆ **Bước 2:** Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $y = f(x)$ và $y = f(m)$. Từ đó dựa vào hình vẽ để biện luận.

9. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

- ◆ Nếu bài cho hàm số bậc nhất, các em phải tìm điều kiện cho $a \neq 0$.
- ◆ Nếu bài không cho hàm số bậc nhất, ta **không** phải tìm điều kiện $a \neq 0$.

A. Nếu hai đường thẳng biểu diễn dưới dạng $y = a_1x + b_1$ và $y = a_2x + b_2$

- ◆ Cắt nhau: $a_1 \neq a_2$
- ◆ Vuông góc: $a_1 \cdot a_2 = -1$
- ◆ Song song: $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$
- ◆ Trùng nhau: $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

B. Nếu hai đường thẳng biểu diễn dưới dạng $a_1x + b_1y = c_1$ và $a_2x + b_2y = c_2$

- ◆ Cắt nhau: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
- ◆ Song song: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
- ◆ Trùng nhau: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
- ◆ Vuông góc: $\begin{cases} \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \\ \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} = -1 \end{cases}$
- ◆ Đường thẳng $ax + by = c$ song song với Ox khi: $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$; Trùng với Ox khi: $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ c = 0 \end{cases}$
- ◆ Đường thẳng $ax + by = c$ song song với Oy khi: $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$; Trùng với Oy khi: $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$
- ◆ Đường thẳng $y = ax + b$ song song Ox khi $a = 0; b \neq 0$.
- ◆ Phân giác góc phần tư thứ nhất là: $y = x$. Phân giác góc phần tư thứ hai là: $y = -x$

10. Hai đường thẳng cắt nhau thỏa mãn điều kiện k

Phương pháp chung :

- ◆ **Bước 1:** Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau (1)
- ◆ **Bước 2:** Tìm giao điểm của hai đường thẳng là $\begin{cases} x = f(m) \\ y = g(m) \end{cases}$
- ◆ **Bước 3:** Thay x, y vào điều kiện K để tìm m , đối chiếu với điều kiện (1) và kết luận.

A. Hai đường thẳng cắt nhau thuộc góc phần tư thứ nhất, thứ hai : Sau khi tìm được $\begin{cases} x = f(m) \\ y = g(m) \end{cases}$ ở

bước 2. Các em sử dụng các điều kiện sau:

- ◆ Thuộc góc phần tư thứ I: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ và $a_1 \neq a_2$





- ◆ Thuộc góc phần tư thứ II: $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$ và $a_1 \neq a_2$
- ◆ Thuộc góc phần tư thứ III: $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$ và $a_1 \neq a_2$
- ◆ Tìm điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau : $a_1 \neq a_2$
- ◆ Tìm giao điểm của đường thẳng thứ nhất với $Ox: y = 0; x = -\frac{b_1}{a_1}$ suy ra $A\left(-\frac{b_1}{a_1}; 0\right)$
- ◆ Để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm thuộc Ox thì : $A = B$ nên : $\begin{cases} a_1 \neq a_2 \\ \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \end{cases}$

B. Hai đường thẳng $a_1x + b_1y = c_1$ và $a_2x + b_2y = c_2$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành Ox

- ◆ Tìm điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau: $a_1 \neq a_2$
- ◆ Tìm giao điểm của đường thẳng thứ nhất với $Oy: x = 0; y = b_1$ suy ra $A(0; b_1)$
- ◆ Tìm giao điểm của đường thẳng thứ nhất với $Oy: x = 0; y = b_2$ suy ra $B(0; b_2)$

⚡ Chú ý : Để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm thuộc Oy thì $A \equiv B \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$ hoặc sau khi tìm

điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau, các em xét phương trình hoành độ $f(x) = g(x)$ rồi thay $x = 0$ vào phương trình để tìm m .

C. Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm thuộc trục tung Oy

- ◆ Tìm điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau : $a_1 \neq a_1$
- ◆ Tìm giao điểm của đường thẳng thứ nhất với $Oy: x = 0; y = b_2$ suy ra $B(0; b_2)$
 $f(x) = g(x)$ rồi thay $x = 0$ vào phương trình để tìm m .

D. Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm có hoành độ m :

- ◆ **Bước 1 :** Tìm điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau : $a_1 \neq a_1$
- ◆ **Bước 2 :** Thay $x = m$ vào đường thẳng thứ nhất để tìm y .
- ◆ **Bước 3 :** Thay $x = m$ và y tìm được ở bước 2 vào đường thẳng thứ 2 để tìm m .
- ◆ **Bước 4 :** Kết hợp các điều kiện để kết luận.

E. Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm có tung độ $y = m$

- ◆ **Bước 1 :** Tìm điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau : $a_1 \neq a_1$
- ◆ **Bước 2 :** Thay $y = m$ vào đường thẳng thứ nhất để tìm x .
- ◆ **Bước 3 :** Thay $y = m$ và x tìm được ở bước 2 vào đường thẳng thứ 2 để tìm m .
- ◆ **Bước 4 :** Kết hợp các điều kiện để kết luận.

F. Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm có tọa độ nguyên

- ◆ **Bước 1 :** Tìm điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau.
- ◆ **Bước 2 :** Dùng phương pháp cộng hoặc thế để tìm x, y theo m
- ◆ **Bước 3 :** Dùng tính chất chia hết để tìm m , đối chiếu và kết luận.

➤ Ví dụ ở bước 2 các em tính được $\begin{cases} x = 3 + \frac{4}{m-1} \\ y = 2 + \frac{2}{m-1} \end{cases}$. Để $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2:(m-1) \Rightarrow \dots$

G. Tìm quỹ tích giao điểm của hai đường thẳng cắt nhau

- ◆ Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau.
- ◆ Dùng phương pháp cộng để tìm tọa độ giao điểm x, y theo m



◆ Khử m trong biểu thức tọa độ x, y để tìm phương trình quỹ tích

11. Lập phương trình đường thẳng

A. Lập phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

◆ Gọi phương trình đường thẳng là $y = a.x + b$ (1)

• Thay tọa độ của $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ vào (1) ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} y_1 = a.x_1 + b \\ y_2 = a.x_2 + b \end{cases}$$

• Từ hệ phương trình trên tìm được a, b thay vào (1) ta tìm được phương trình đường thẳng.

B. Lập phương trình đường thẳng qua $A(x_1; y_1)$ và song song $y = ax + b$.

◆ Gọi đường thẳng cần tìm là: $y = mx + n$ (d)

• Vì $(d) // y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} m = a \\ c \neq b \end{cases} \Rightarrow (d): y = ax + c$

• Thay tọa độ $A(x_1, y_1)$ vào (d) ta tìm được c .

• So sánh điều kiện $c \neq b$ rồi kết luận.

C. Lập phương trình đường thẳng đi qua $A(x_1; y_1)$ và vuông góc $y = ax + b$.

◆ Gọi đường thẳng cần tìm là $y = mx + c$ (d)

• Vì $(d) \perp y = ax + b \Rightarrow m = -\frac{1}{a} \Rightarrow (d): y = -\frac{1}{a}x + c$

• Thay tọa độ $A(x_1, y_1)$ vào đường thẳng (d) để tìm c rồi kết luận.

D. Lập phương trình đường thẳng đi qua $A(x_1; y_1)$ và có hệ số góc là k

◆ Gọi phương trình đường thẳng là $y = a.x + b$

• Vì hệ số góc là k nên $a = k$.

• Vì đường thẳng $A(x_1, y_1)$ nên thay vào A vào đường thẳng để tìm b

E. Lập phương trình đường thẳng $A(x_1; y_1)$ và tạo với trục Ox một góc α

◆ Gọi phương trình đường thẳng là $y = ax + b$ (d)

• Vì đường thẳng tạo với trục Ox góc α nên $a = \tan \alpha$

• Thay tọa độ $A(x_1, y_1)$ vào đường thẳng (d) để tìm hệ số b , rồi kết luận.

F. Lập phương trình đường thẳng $A(x_1; y_1)$ và tiếp xúc với parabol (P)

◆ Gọi phương trình đường thẳng là $y = ax + b$ (d).

• Thay tọa độ $A(x_1, y_1)$ vào đường thẳng (d), rồi biểu diễn b theo a rồi viết lại đường thẳng (d) theo tham số a .

• Sau đó dùng điều kiện tiếp xúc giữa (d) và (P) để tìm a .

◆ **Ví dụ:** Viết phương trình đường thẳng qua $A(2;1)$ và tiếp xúc với $y = x^2$

Lời giải

• Gọi phương trình đường thẳng là $y = ax + b$ (d)

• Thay tọa độ $A(2;1)$ vào đường thẳng (d), ta được $1 = 2a + b \Rightarrow b = 1 - 2a \Rightarrow (d) y = ax + 1 - 2a$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x^2 = ax + 1 - 2a \Leftrightarrow x^2 - ax - 1 + 2a = 0$ (1)

• Để hai đồ thị tiếp xúc nhau thì phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4(2a - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow b = 1 - 2(4 + 2\sqrt{3}) = -7 - 4\sqrt{3} \\ a = 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow b = 1 - 2(4 - 2\sqrt{3}) = -7 + 4\sqrt{3} \end{cases}$$





- Vậy phương trình cần tìm là: $\Leftrightarrow \begin{cases} y = (4 + 2\sqrt{3})x - 7 - 4\sqrt{3} \\ y = (4 - 2\sqrt{3})x - 7 + 4\sqrt{3} \end{cases}$

12. Tìm điểm cố định của $y = f(x; m)$; chứng minh đồ thị luôn đi qua điểm cố định (hoặc tìm điểm mà đồ thị luôn đi qua)

🌸 Các bước giải :

- ◆ **Bước 1 :** Chuyển $y = f(x, m)$ về dạng $f(x, m) - m = 0$
- ◆ **Bước 2 :** Nhóm các số chứa m lại với nhau $m.f(x) + g(x, y) = 0$
- ◆ **Bước 3 :** Gọi $I(x, y)$ là điểm cố định, suy ra $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases}$ suy ra điểm cố định I

13. Ba điểm thẳng hàng – không thẳng hàng (Ba điểm là ba đỉnh tam giác)

🌸 Các bước giải :

- ◆ **Bước 1 :** Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm, thay tọa độ điểm thứ 3 vào, nếu thỏa mãn thì 3 điểm thẳng hàng, nếu không thỏa mãn thì 3 điểm không thẳng hàng.
- ◆ **Bước 2 :** Với bài toán tìm điều kiện để ba điểm A, B, C thẳng hàng, các em viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B . Rồi thay tọa độ điểm C điểm và đường thẳng AB để tìm m .

14. Tìm điều kiện tham số để ba đường thẳng đồng quy

🌸 Các bước giải :

- ◆ **Bước 1 :** Tìm điều kiện để các đường thẳng cắt nhau, để đường thẳng là hàm số bậc nhất (nếu có).
- ◆ **Bước 2 :** Tìm giao điểm của hai đường thẳng (hai đường thẳng không chứa m) để 3 đường thẳng đồng quy thì giao điểm đó khi thay vào đường thẳng số 3 phải thỏa mãn, từ đó tìm được m .

15. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng

- 🌸 Để tính khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến một đường thẳng, ta tìm giao điểm của đường thẳng với hai trục Ox và Oy là A và B . Từ O kẻ $OH \perp AB$ rồi tính OH dựa vào tam giác vuông OAB :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

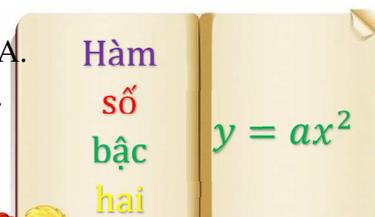
- 🌸 Với các bài toán tìm điều kiện để khoảng cách lớn nhất, nhỏ nhất:

◆ Cách 1:

- Xét $a = 0$. Tìm giao điểm của đồ thị với 2 trục tọa độ và tính khoảng cách.
- Xét $a \neq 0$. Tìm giao điểm của đồ thị với 2 trục tọa độ và tính khoảng cách. Sau khi tính được khoảng cách, ta đi tìm Min, Max của biểu thức khoảng cách.

◆ Cách 2: Dựa vào điểm cố định:

- **Bước 1:** Tìm điểm cố định mà đồ thị hàm số luôn đi qua là A .
- **Bước 2:** Tìm giao điểm của đồ thị với Ox và Oy là B và C .
- **Bước 3:** Để khoảng cách từ O đến đường thẳng là lớn nhất thì OA vuông góc BC . Từ đó tìm m .



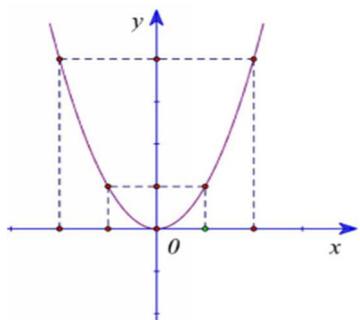


1. Tính chất.

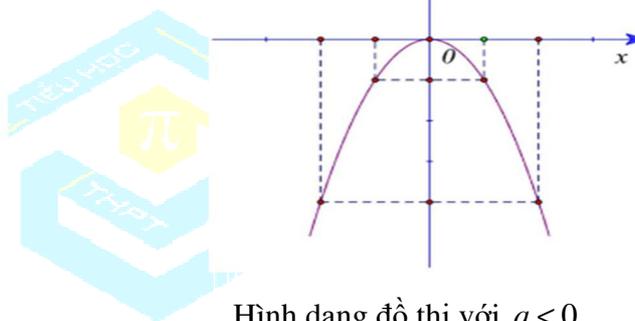
- ☸ Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 - ◆ Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.
 - ◆ Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.
- ☸ Hàm số đạt GTNN bằng 0 khi $a > 0$.
- ☸ Hàm số đạt GTLN bằng 0 khi $a < 0$.

2. Điểm thuộc đồ thị.

- ◆ Để tính $f(x_0)$ ta thay $x = x_0$ vào $y = f(x)$.
- ◆ Để kiểm tra điểm $M(a;b)$ có thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ có thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thay $x = a; y = b$ vào đồ thị, nếu thỏa mãn thì $M(a;b)$ thuộc đồ thị và ngược lại.



Hình dạng đồ thị với $a > 0$



Hình dạng đồ thị với $a < 0$

- ◆ **Bước 1:** Kẻ bảng giá trị (lấy ít nhất 5 điểm)
- ◆ **Bước 2:** Nhận xét đồ thị hàm số là parabol nhận trục Oy làm trục đối xứng, đi qua 5 điểm (ở bước 1) rồi vẽ.

4. Vị trí tương đối của đường thẳng $y = f(x) = mx + n$ và Parabol $y = g(x) = ax^2$

- ☸ Xét hoành độ giao điểm của 2 đồ thị thỏa mãn phương trình: $f(x) = g(x)$.

Đưa phương trình về dạng: $Ax^2 + Bx + C = 0(1)$.

☸ A. Để hai đồ thị tiếp xúc nhau:

- ◆ Để hai đồ thị tiếp xúc nhau thì phương trình (1) có nghiệm kép $\begin{cases} A \neq 0 \\ \Delta = B^2 - 4AC = 0 \end{cases}$
- ◆ Từ đó tìm được m .

☸ B. Để đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt:

- ◆ Để đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt: $\begin{cases} A \neq 0 \\ \Delta = B^2 - 4AC > 0 \end{cases}$
- ◆ Từ đó tìm được m .

☸ C. Để hai đồ thị không cắt nhau:



- ◆ Để hai đồ thị không cắt nhau thì phương trình (1) vô nghiệm:
 - Xét $A = 0 \Rightarrow m$. Thay vào phương trình kiểm tra và kết luận.
 - Xét $A \neq 0 \Rightarrow m$. Phương trình vô nghiệm khi: $\Delta = B^2 - 4AC < 0$. Từ đó tìm được m .

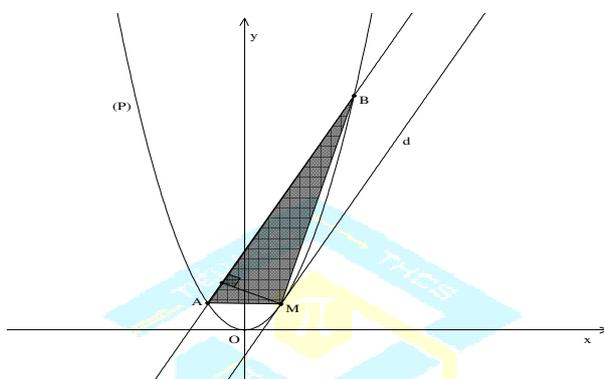
D. Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía trục tung thì phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu, cùng phía trục tung thì phương trình (1) có hai nghiệm cùng dấu.

E. Bài toán viết phương trình đường thẳng qua $M(x_0; y_0)$ và cắt parabol (P): $y = ax^2$ tại một điểm

◆ Các em phải xét hai trường hợp:

- **Th 1:** Xét đường thẳng qua $M(x_0; y_0)$ song song với Oy có dạng $x = x_0$
- **Th 2:** Xét đường thẳng không song song với Oy có dạng $y = bx + c$. Rồi tìm điều kiện để hai đường thẳng tiếp xúc nhau.

F. Tìm tọa độ M trên cung nhỏ AB để diện tích ΔAMB lớn nhất :



- ◆ **Bước 1 :** Nhận xét : Vì AB không đổi, nên $S_{\Delta AMB}$ lớn nhất khi khoảng cách từ M đến AB lớn nhất, do đó M nằm trên đường thẳng song song với AB và tiếp xúc với (P)
- ◆ **Bước 2 :** Viết Phương trình đường thẳng d song song với AB và tiếp xúc với (P)
- ◆ **Bước 3 :** Tọa độ M là giao điểm của (d) và (P)

4 Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

1. Phương pháp chung.

Các bước giải :

- ◆ **Bước 1 :** Lập phương trình – Hệ phương trình.
 - Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số.
 - Biểu diễn các đại lượng chưa biết khác theo ẩn và các đại lượng đã biết.
 - Lập phương trình, hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.
- ◆ **Bước 2 :** Giải phương trình – Hệ phương trình.
- ◆ **Bước 3 :** Kết luận.

Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, hệ phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không rồi kết luận.

2. Dạng toán cấu tạo số .

- ◆ Gọi số có hai chữ số cần tìm là \overline{xy} . Điều kiện : $x, y \in N, 0 < x \leq 9; 0 \leq y \leq 9$.
- ◆ Gọi số có ba chữ số cần tìm là \overline{xyz} . Điều kiện $x, y, z \in N, 0 < x \leq 9; 0 \leq y, z \leq 9$
Sau đó sử dụng các chú ý sau để lập phương trình.





- Số có hai chữ số có dạng $\overline{xy} = 10x + y$
- Số có ba chữ số có dạng $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$
- Nhiều hơn, thêm, đắt hơn, chậm hơn, ... : tương ứng với phép toán cộng.
- Ít hơn, bớt, rẻ hơn, nhanh hơn, ... : tương ứng với phép toán trừ.
- Gấp nhiều lần : tương ứng với phép toán nhân.
- Kém nhiều lần : tương ứng với phép toán chia.

3. Dạng toán làm chung – làm riêng – vòi nước .

Các em có thể sử dụng bảng sau để giải toán dễ hơn :

Lập bảng	Thời gian làm (chảy) một mình xong công việc	Phần công việc (thể tích) trong 1 giờ	Phần công việc (thể tích) trong thời gian bài cho
Cả hai đơn vị (hai vòi nước)	(bài cho số liệu này)	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	
Đơn vị 1 (vòi nước 1)	x	$\frac{1}{x}$	
Đơn vị 2 (vòi nước 2)	y	$\frac{1}{y}$	

- ◇ Gọi thời gian người thứ nhất làm xong công việc là x , thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là y thì :
- ◇ 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)
- ◇ 1 giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)
- ◇ 1 giờ cả hai người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (công việc)

4. Dạng toán chuyển động

Các em có thể sử dụng bảng sau để giải toán dễ hơn :

Bảng 1	Quãng đường	Vận tốc	Thời gian
Dự định			
Thực tế			

Bảng 2	Quãng đường	Vận tốc	Thời gian
Lúc đi			
Lúc về			

Bảng 3	Quãng đường	Vận tốc	Thời gian
Xe 1			
Xe 2			

Các công thức cần nhớ :



- ◆ Gọi s là quãng đường đi, v là vận tốc, t là thời gian đi, ta có $s = v.t$
- ◆ Vận tốc ca nô xuôi dòng = Vận tốc ca nô lúc nước yên lặng + Vận tốc dòng nước
- ◆ Vận tốc ca nô khi ngược dòng = Vận tốc ca nô lúc nước yên lặng - Vận tốc dòng nước.
- ◆ Vận tốc ca nô xuôi - Vận tốc ca nô ngược = 2 vận tốc dòng nước
- ◆ Vận tốc bè trôi chính là vận tốc dòng nước.

Hai vật chuyển động trên một đường tròn:

- ◆ Nếu chuyển động ngược chiều, khi gặp nhau thì $S_1 + S_2 = Chu vi = 2\pi R$
- ◆ Nếu chuyển động cùng chiều, khi gặp nhau thì $S_1 - S_2 = Chu vi = 2\pi R$

Hai vật chuyển động trên một đường thẳng AB:

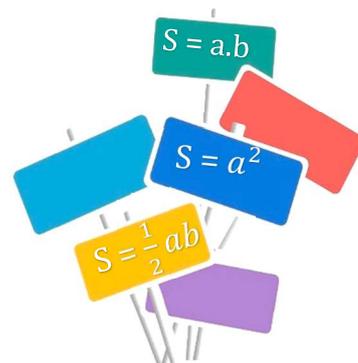
- ◆ Nếu chuyển cùng chiều, xuất phát cùng lúc khi gặp nhau thì quãng đường hai vật đi được là AB , tức là $t.v_1 + t.v_2 = AB$
- ◆ Nếu chuyển động ngược chiều, xuất phát không cùng lúc thì thời gian gặp nhau của hai vật là

$$t_2 = \frac{S}{v_1 + v_2}$$

5. Dạng toán có nội dung hình học .

Sau khi gọi ẩn số các em cần sử dụng các kiến thức cơ bản sau để thiết lập phương trình hoặc hệ phương trình:

- ◆ Diện tích hình chữ nhật có hai kích thước a, b là $S = a.b$
- ◆ Chu vi hình chữ nhật là $P = 2(a + b)$
- ◆ Diện tích tam giác là $S = \frac{1}{2}$ đáy. chiều cao.
- ◆ Diện tích tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là a, b là $S = \frac{1}{2} a. b$
- ◆ Thể tích hình lập phương a^3
- ◆ Thể tích hình hộp abc
- ◆ Diện tích hình thang $S = (\text{đáy bé} + \text{đáy lớn}) \cdot \text{Chiều cao} / 2$
- ◆ Diện tích hình vuông a^2
- ◆ Chu vi hình vuông $4a$



6. Dạng toán năng suất – phần trăm

Các em có thể sử dụng bảng sau để giải toán dễ hơn :

Lập bảng	Năng suất	Khối lượng công việc	Thời gian
Theo kế hoạch			
Thực tế			

Công thức sử dụng : khối lượng = năng suất lao động x thời gian

7. Dạng toán có nội dung lí hóa

Số mol = $\frac{m}{M}$; thể tích ở đktc $V = n.22,4$

5 HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Kiểm tra $(x_0; y_0)$ có phải là nghiệm của phương trình $ax + by = 0$ không?



◆ Thay $(x_0; y_0)$ vào $ax + by + c = 0$. Nếu thỏa mãn thì $(x_0; y_0)$ là nghiệm và ngược lại.

2. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $ax + by = 0$

◆ Từ $ax + by = c$ ta rút x theo y hoặc y theo x ta được nghiệm tổng quát là:

$$\begin{cases} x = \frac{c - by}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = \frac{c - ax}{b} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

◆ Nghiệm tổng quát của $ax + 0 \cdot y = c$ là: $\begin{cases} x = \frac{c}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

◆ Nghiệm tổng quát của $0 \cdot x + by = c$ là: $\begin{cases} y = \frac{c}{b} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$



3. Tìm nghiệm nguyên, nguyên dương, nguyên âm của $ax + by = 0$

◆ Ta rút x (hoặc y) đưa về dạng: $x = f(y) + \frac{y+h}{a}$ (1)

◆ Để x nguyên thì $y + h : a \Rightarrow y = at - h$. Thay $y = at - h$ vào (1) để tìm x

⚡ Chú ý:

◆ Với các bài toán không tách được như biểu thức (1). Các em làm như sau:

◆ Rút x (hoặc y): $x = \frac{-by + c}{a}$. Lúc này đặt $y = at + h$. Với $(c - bh) : a$

Với các bài toán tìm nghiệm nguyên dương, nguyên âm của phương trình, ta tìm nghiệm nguyên như trên rồi cho $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$ để tìm t , sau đó thay t trở lại để tìm x .

4. Dự đoán số nghiệm của hệ phương trình

◆ Để dự đoán số nghiệm của hệ $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ ta dựa vào vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ và } a_2x + b_2y = c_2$$

- Nếu $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ hai đường thẳng cắt nhau nên hệ có nghiệm duy nhất.
- Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ hai đường thẳng song song nên hệ vô nghiệm
- Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ hai đường thẳng trùng nhau nên hệ vô số nghiệm

5. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

◆ Biến đổi đưa hệ phương trình về dạng: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

◆ Rút x hoặc y từ một phương trình rồi thế vào phương trình còn lại.

◆ Ví dụ: $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2(5 - 2x) = 4 \\ y = 5 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ y = 5 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

6. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng



- ◆ Biến đổi đưa hệ phương trình về dạng: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.
- ◆ Nhân thêm vào hai phương trình các hệ số phụ (của cùng một ẩn) rồi cộng hoặc trừ hai phương trình cho nhau để khử ẩn.
- ◆ Ví dụ: $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

7. Giải hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ

- ◆ Đặt điều kiện của x, y (nếu có)
- ◆ Đặt ẩn phụ và đặt điều kiện ẩn phụ (nếu có)
- ◆ Đưa hệ phương trình về dạng: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ rồi dùng phương pháp cộng hoặc phương pháp thế để giải.

Chú ý: Các em thường mất điểm khi quên không đặt điều kiện của x và của ẩn phụ.

8. Hệ phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

- ◆ **Cách 1:** Đặt ẩn phụ:

Ví dụ: $\begin{cases} |x-1| + |y-2| = 4 \\ 3|x-1| - 2|y-2| = -3 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} |x-1| = a \geq 0 \\ |y-2| = b \geq 0 \end{cases}$

- ◆ **Cách 2:** Xét điều kiện phá dấu giá trị tuyệt đối:

Ví dụ: $\begin{cases} |x-1| + y - 2 = 4 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$

Xét $x \geq 1 \Rightarrow |x-1| = x-1$. Hệ có dạng $\begin{cases} x-1 + y - 2 = 4 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$ (HS tự giải)

Xét $x < 1 \Rightarrow |x-1| = 1-x$. Hệ có dạng $\begin{cases} 1-x + y - 2 = 4 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$ (HS tự giải)

(Chú ý giải được kết quả phải so sánh với điều kiện).



9. Tìm hệ số a, b biết hệ $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ có nghiệm là $x_0; y_0$

- ◆ Thay $x_0; y_0$ vào hệ ta được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn a, b . Giải hệ để tìm a và b .

Ví dụ. Tìm a, b để hệ $\begin{cases} ax + by = 5 \\ 3x + by = 9 \end{cases}$ có nghiệm $(x_0; y_0) = (-1; 3)$.

Thay $x = -1; y = 3$ vào hệ phương trình ta được $\begin{cases} -a + 3b = 5 \\ -3 - 3b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 4 \end{cases}$

10. Hệ phương trình tương đương

- ◆ Hai hệ phương trình tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.
- ◆ Tìm m để hệ hai phương trình tương đương
 - Nếu hệ phương trình thứ nhất có nghiệm duy nhất là $(x_0; y_0)$. Thay $x_0; y_0$ vào hệ phương trình thứ hai để tìm m . (Chú ý phải tìm điều kiện để hệ phương trình thứ hai có nghiệm duy nhất.)



- Nếu hệ phương trình thứ nhất vô nghiệm, để hệ hai phương trình tương đương thì hệ phương trình thứ hai cũng vô nghiệm. Từ đó tìm m .
- Nếu hệ phương trình thứ nhất vô số nghiệm, để hệ hai phương trình tương đương thì hệ phương trình thứ hai cũng vô số nghiệm. Từ đó tìm m .

11. Giải và biện luận hệ phương trình

- ◇ Có nhiều cách cho bài toán này, nhưng các em nên chọn cách làm sau để sử dụng giải các câu hỏi kéo theo bên dưới.
 - Để giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, ta dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng, đưa về phương trình bậc nhất $ax = b$ (1) hoặc $ay = b$ (1). Sau đó đi biện luận phương trình bậc nhất.
 - Xét $a = 0; b = 0$. Phương trình (1) có vô số nghiệm nên hệ có vô số nghiệm.
 - Xét $a = 0; b \neq 0$. Phương trình (1) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.
 - Xét $a \neq 0$. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất nên hệ có nghiệm duy nhất.

12. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện K .

- ◇ **Bước 1**: Dùng phương pháp thế (hoặc phương pháp cộng) đưa hệ phương trình về phương trình bậc nhất $ax = b$ hoặc $ay = b$.
- ◇ **Bước 2**: hệ có nghiệm duy nhất: $a \neq 0$ suy ra điều kiện m và tính x, y theo m .
 - Thay x, y vào điều kiện K để tìm m , đối chiếu với điều kiện và kết luận.

🌸 Các điều kiện K có thể gặp:

- ◇ x, y cùng dấu $\Leftrightarrow x, y > 0$
- ◇ x, y trái dấu $\Leftrightarrow x, y < 0$
- ◇ Điểm $M(x, y)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$, nằm trong góc phần tư thứ hai: $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$,
nằm trong góc phần tư thứ ba: $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$, nằm trong góc phần tư thứ tư: $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$.
- ◇ $x + y > a, x + y = \dots$
- ◇ Điểm $M(x, y)$ nằm trên đường tròn tâm $(O, R) \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2$
- ◇ Điểm $M(x, y)$ nằm trên đường thẳng $ax + by + c = 0$, thay x, y tìm được vào phương trình đường thẳng.
- ◇ x, y là hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền bằng $a \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$
- ◇ Biểu thức $f(x, y)$ đạt GTLN; GTNN: thay x, y ở bước 2 vào biểu thức $f(x, y)$ rồi đi tìm GTLN - GTNN.
- ◇ x, y là các số nguyên: Chuyển $\begin{cases} x = A + \frac{b}{f(x)} \\ y = B + \frac{c}{g(x)} \end{cases}$ Để nguyên thì $\begin{cases} b: f(x) \\ c: g(x) \end{cases} \Rightarrow m$

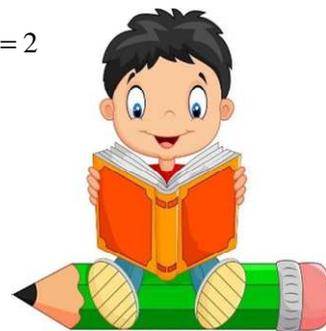


13. Tìm hệ thức độc lập giữa x, y không phụ thuộc vào m (tìm quỹ tích điểm $M(x; y)$ hoặc chứng minh $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng cố định)

- ◆ Tìm điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất và tính x, y theo m .
- ◆ Khi m từ biểu thức x, y ta được hệ thức giữa x, y không phụ thuộc vào m . Đây chính là đường thẳng cố định cần tìm.
- ◆ Chú ý khi xử lý m các bạn có thể dùng phương pháp thế, hoặc phương pháp cộng.

Ví dụ 1:
$$\begin{cases} x = m + 1 \\ y = 3m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x - 1 \\ y = 3(x - 1) - 2 \end{cases} \Rightarrow y = 3x - 5$$

Ví dụ 2:
$$\begin{cases} x = \frac{1-m}{m+2} \\ y = \frac{3m-1}{m+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{3}{m+2} \\ y = 3 - \frac{7}{m+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -7 + \frac{21}{m+2} \\ 3y = 9 - \frac{21}{m+2} \end{cases} \Rightarrow 7x + 3y = 2$$



6 HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI I

Hệ đối xứng

1. Định nghĩa:

Hệ đối xứng loại I là hệ phương trình có dạng
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$
 với $f(x, y) = f(y, x)$ và $g(x, y) = g(y, x)$

2. Nhận dạng: Khi ta hoán đổi vị trí của x và y thì $f(x, y)$ và $g(x, y)$ không thay đổi.

3. Phương pháp giải

- ◆ Đặt $S = x + y$ và $P = xy$.
- ◆ Thế các ẩn S, P vào hệ phương trình ban đầu ta được một hệ phương trình mới.
- ◆ Giải hệ phương trình mới đó ta tìm được các ẩn S, P .
- ◆ Tìm nghiệm $(x; y)$ bằng cách giải phương trình bậc hai $t^2 - St + P = 0$.

7 HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI II

1. Định nghĩa

◆ Hệ đối xứng loại II là hệ có dạng:
$$\begin{cases} F(x; y) = 0 \\ F(y; x) = 0 \end{cases}$$
 Trong đó $F(x; y)$ là biểu thức không đối xứng.

Hay nói cách khác hệ đối xứng loại II là hệ mà khi ta đổi vai trò của x, y cho nhau thì phương trình này của hệ chuyển thành phương trình kia.

2. Phương pháp giải

◆ Trừ vế theo vế hai phương trình trong hệ ta được một nhân tử chung là $(x - y)$:

$$F(x; y) - F(y; x) = 0 \Leftrightarrow (x - y) \cdot f(x; y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ f(x; y) = 0 \end{cases}$$

8 HỆ ĐẲNG CẤP BẬC HAI

1. Định nghĩa: Hệ đẳng cấp bậc 2 có dạng:
$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$$

2. Phương pháp giải



- ◆ **Cách 1 :** Khử số hạng tự do dẫn đến phương trình $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ sau đó chia cả 2 vế cho $y^2 (y \neq 0)$.
- ◆ **Cách 2 :** Khử số hạng tự do dẫn đến tới phương trình $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ (1)
Đặt $x = ty$ khi đó (1) $\Leftrightarrow y^2 (At^2 + Bt + C) = 0$
- ◆ **Cách 3 :** Từ hệ khử số hạng x^2 (hoặc y^2) dẫn đến phương trình khuyết x^2 . Rút x theo y rồi thế vào một trong hai phương trình của hệ ta được một phương trình trùng phương theo ẩn y

9 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI $ax^2 + bx + c = 0$

1. Giải phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

🔗 Sử dụng công thức nghiệm :

- ◆ Tính $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$)
 - Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
 - Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
 - Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

🔗 Nhắm nghiệm:

◆ Dùng Vi-Ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + n \\ x_1 \cdot x_2 = m \cdot n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = n \end{cases}$

◆ Nếu $a + b + c = 0$ thì $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

◆ Nếu $a - b + c = 0$ thì $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$



2. Tìm hai số biết tổng - tích: $\begin{cases} a + b = S \\ ab = P \end{cases}$ (với $S \geq 4P$).

- ◆ Khi đó a, b là nghiệm của phương trình: $x^2 + Sx + P = 0$. Giải phương trình trên để tìm a, b

3. Định lý Vi-Ét:

- ◆ Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$. Khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

4. Mối liên hệ giữa hai nghiệm $x_1; x_2$:

- ◆ $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- ◆ $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$
- ◆ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$
- ◆ $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$
- ◆ $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
- ◆ $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1x_2$
- ◆ $x_1 - x_2 = \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$
- ◆ $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$



$$\diamond x_1^4 - x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2)$$

$$\diamond x_1^6 + x_2^6 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^4 - x_1^2x_2^2 + x_2^4)$$

Nếu phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là $x_1; x_2$ và $S = x_1 + x_2; P = x_1 \cdot x_2$ thì:

$$\diamond x_1^2 = (x_1 + x_2) \cdot x_1 - x_1 \cdot x_2 = S \cdot x_1 - P$$

$$\diamond x_1^3 = (S^2 - P) \cdot x_1 - S \cdot P$$

$$\diamond x_1^4 = (S^3 - 2SP) \cdot x_1 - P \cdot (S^2 - P)$$

5. Giải và biện luận $ax^2 + bx + c = 0$

\diamond Xét $a = 0 \Rightarrow m$, với m tìm được thay vào phương trình để kiểm tra xem có nghiệm không.

\diamond Xét $a \neq 0$, tính $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc tính Δ')

- Nếu $\Delta < 0$, suy ra điều kiện của m , suy ra phương trình vô nghiệm

- Nếu $\Delta = 0$, suy ra m , suy ra phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$

- Nếu $\Delta > 0$, suy ra m , suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

6. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm – vô nghiệm

\diamond Xét $a = 0 \Rightarrow m$ rồi kiểm tra

\diamond Xét $a \neq 0$.

- Nếu $\Delta \geq 0$ với mọi m hoặc ra $a \cdot c < 0$ thì phương trình luôn có nghiệm.

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

7. Phương trình có hai nghiệm phân biệt – Phương trình có nghiệm kép

\diamond Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

\diamond Phương trình có nghiệm kép: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

8. Lập phương trình bậc hai khi biết nghiệm

\diamond Nếu phương trình có hai nghiệm là a, b :

Ta tính $\begin{cases} S = a + b \\ P = a \cdot b \end{cases} \Rightarrow$ Phương trình cần tìm: $x^2 + S \cdot x + P = 0$

\diamond Nếu hai nghiệm là $f(x_1); f(x_2) ::$

Ta tính $\begin{cases} S = f(x_1) + f(x_2) \\ P = f(x_1) \cdot f(x_2) \end{cases} \Rightarrow$ Phương trình cần tìm: $x^2 + S \cdot x + P = 0$

9. Tìm m để phương trình có nghiệm x_0

\diamond Ta thay $x = x_0$ vào phương trình để tìm m , sau đó thay m tìm được trở lại phương trình giải, kiểm tra và kết luận.

10. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt (nằm bên phải Oy)



$$\diamond \begin{cases} a \neq 0; \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Định lí Vi ét

11. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt (nằm bên trái trục tung)

$$\diamond \begin{cases} a \neq 0; \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

12. Phương trình có hai nghiệm trái dấu + cùng dấu (nằm về hai phía hoặc cùng phía với Oy)

$$\diamond \text{ Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi } \begin{cases} a \neq 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Hai nghiệm trái dấu mà nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P < 0 \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Hai nghiệm trái dấu mà nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P < 0 \end{cases}$$

13. Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm dương

Các em phải xét 5 trường hợp :

- ◆ **Th1:** Xét $a = 0 \Rightarrow m$ rồi kiểm tra.
- ◆ **Th2:** Phương trình có hai nghiệm trái dấu.
- ◆ **Th3:** Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
- ◆ **Th 4:** Phương trình có nghiệm kép dương
- ◆ **Th 5:** có một nghiệm dương, một nghiệm bằng 0

14. Phương trình có một nghiệm dương

- ◆ **Th 1:** $a = 0 \Rightarrow m$ rồi kiểm tra



- ◆ **Th 2:** Xét $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} < 0; \end{cases}$ phương trình có hai nghiệm trái dấu
- ◆ **Th 3:** Xét $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \\ \frac{-b}{2a} > 0; \end{cases}$ phương trình có một nghiệm kép dương
- ◆ **Th 4:** Phương trình có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương.



15. Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm âm..

🌸 Các em phải xét 5 trường hợp :

- ◆ **Th 1:** $a = 0 \Rightarrow m$ rồi kiểm tra
- ◆ **Th 2:** Phương trình có hai nghiệm trái dấu.
- ◆ **Th 3:** Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.
- ◆ **Th 4:** Phương trình có nghiệm kép dương.
- ◆ **Th 5:** Có 1 nghiệm âm, 1 nghiệm = 0

16. Phương trình có một nghiệm âm

- ◆ **Th 1:** $a = 0 \Rightarrow m$ rồi kiểm tra
- ◆ **Th 2:** Xét $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} < 0; \end{cases}$ phương trình có hai nghiệm trái dấu
- ◆ **Th 3:** Xét $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \\ \frac{-b}{2a} < 0; \end{cases}$ phương trình có một nghiệm kép âm
- ◆ **Th 4:** Phương trình có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm.



Tìm m

17. Tìm m để phương trình có một nghiệm

- ◆ **Th 1:** $a = 0 \Rightarrow m$ rồi kiểm tra
- ◆ **Th 2:** $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

18. Phương trình có hai nghiệm đối nhau

- ◆ Phương trình có hai nghiệm đối nhau khi: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S = 0; P < 0 \end{cases}$



19. Phương trình có hai nghiệm là nghịch đảo nhau

- ◆ Phương trình có hai nghiệm là nghịch đảo nhau khi:
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

20. Chứng minh có ít nhất một phương trình có nghiệm

- ◆ Tính Δ_1, Δ_2 .
- ◆ Chỉ ra $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$ hoặc $\Delta_1 \Delta_2 \leq 0$ nên có ít nhất một biệt số không âm (chú ý đến giả thiết).

21. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện

Phần 1 :

- ◆ Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ và điều kiện bị ẩn trong câu hỏi (điều kiện căn, mẫu số, cạnh tam giác...)

Phần 2:

- ◆ Ưu tiên hàng đầu cho dạng toán này là nhẩm nghiệm. Khi nhẩm nghiệm xong thì kiểm tra xem có phải chia trường hợp hay không? Nếu không nhẩm được nghiệm, ta biến đổi điều kiện rồi thay Vi-ét.

22. Hệ thức giữa $x_1; x_2$ không phụ thuộc m

- ◆ Điều kiện có nghiệm: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$.
- ◆ Dựa vào định lý Vi-ét: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ theo m rồi khử m ở định lý Vi-ét bằng cách: Rút m theo S và P hoặc nhân thêm hệ số rồi cộng trừ hai phương trình theo vế để khử m .

23. Tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của biểu thức chứa $x_1; x_2$

- ◆ **Bước 1 :** Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.
- ◆ **Bước 2 :** Dùng định lý Vi-ét để tính: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ rồi thay $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ vào biểu thức để tìm GTNN; GTLN.

👉 **Chú ý :** Dấu bằng xảy ra có thỏa mãn điều kiện hay không, nếu không thỏa mãn điều kiện các em cần lập luận dựa vào điều kiện của m ở bước 1.

24. Phương trình có hai nghiệm phân biệt nguyên

- ◆ **Cách 1 :**
 - Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt
 - Tính $\Delta \Rightarrow x_1$ và x_2 và tìm m để $x_1; x_2$ là các số nguyên.



- ◇ **Cách 2 :** Dùng Vi ét để tìm hệ thức giữa $x_1; x_2$ không phụ thuộc vào m rồi tìm biến đổi biểu thức đó.
- ◇ **Cách 3 :** Rút m theo x đưa về bài toán mới.

25. Tìm m để phương trình $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ và $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ có nghiệm chung

- ◇ **Cách 1 :**
 - Giả sử x_0 là nghiệm chung, lập hệ 2 phương trình (ẩn x và tham số)
 - Giải hệ phương trình tìm x_0 , tìm tham số.
 - Thử lại: Thay các giá trị của tham số vào từng phương trình, giải các phương trình, tìm nghiệm chung.
 - Rút kết luận.
- ◇ **Cách 2 :** (Dùng phương pháp cộng hoặc thế để khử m , rồi tìm x)
 - Rút tham số từ 1 số phương trình đã cho
 - Thế giá trị của tham số vào phương trình còn lại tìm x .
 - Thay giá trị của x tìm m .
 - Rút kết luận.

26. So sánh một số với nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

A. Phương trình có nghiệm $x_1 < x_0 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) < 0 \end{cases}$

B. Phương trình có nghiệm $x_0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 2x_0 \\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) > 0 \end{cases}$

C. Phương trình có nghiệm $x_1 < x_2 < x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 2x_0 \\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) > 0 \end{cases}$

D. Phương trình có nghiệm $x_1 < x_2 \leq x_0$

◇ **Trường hợp 1:** Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x_2 = x_0 \\ x_1 < x_0 \end{cases}$

- Thay $x_2 = x_0$ vào phương trình để tìm m , thay m trả lại phương trình để tìm nghiệm còn lại và kết luận.

◇ **Trường hợp 2:** Phương trình có nghiệm $x_1 < x_2 < x_0$ (giải như bảng bên cạnh)

◇ **Tương tự cho bài toán:** $x_0 \leq x_1 < x_2$

E. Phương trình có nghiệm

◇ $x_1 < c < b < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (x_1 - c)(x_2 - c) < 0 \\ (x_1 - b)(x_2 - b) < 0 \end{cases}$

◇ $x_1 < c < x_2 < b \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (x_1 - c)(x_2 - c) < 0 \\ (x_1 - b)(x_2 - b) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2b \end{cases}$





$$\diamond c < x_1 < b < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (x_1 - c)(x_2 - c) > 0 \\ (x_1 - b)(x_2 - b) < 0 \\ x_1 + x_2 > 2c \end{cases} \quad \diamond c < x_1 < x_2 < b \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (x_1 - c)(x_2 - c) > 0 \\ (x_1 - b)(x_2 - b) > 0 \\ 2c < x_1 + x_2 < 2b \end{cases}$$

10 PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt:

- ◆ Nhắm một nghiệm x_0 rồi đưa phương trình về dạng: $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$
- ◆ Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác } x_0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ f(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m$$

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt

- ◆ Đưa phương trình về dạng $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$. Để phương trình có hai nghiệm thì :

- **Th1:** $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ phải có nghiệm kép khác $x_0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \\ -\frac{b}{2a} \neq x_0 \end{cases} \Rightarrow m$

- **Th2:** $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ hai nghiệm phân biệt, một nghiệm bằng

$$x_0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0; \Delta > 0 \\ f(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow m$$

3. Phương trình có một nghiệm

- ◆ Nhắm một nghiệm x_0 rồi đưa phương trình về dạng: $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$
- ◆ Để phương trình có 1 nghiệm thì :

- **Th1:** $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm $\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow m$

- **Th2:** $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm kép bằng $x_0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0; \Delta = 0 \\ -\frac{b}{2a} = x_0 \end{cases} \Rightarrow m$

11 PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN $y = ax^4 + bx^2 + c$

1. Cách giải $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1)

- ◆ Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$. Suy ra $at^2 + bt + c = 0$ (2)
- ◆ Giải phương trình (2) suy ra t, sau đó kiểm tra điều kiện $t \geq 0$ rồi thay vào $x^2 = t$ để tìm x



Chú ý: $x^2 = t > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$

2. Phương trình có 4 nghiệm

- ◆ Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$. Suy ra $at^2 + bt + c = 0$ (2)
- ◆ Để phương trình (1) có 4 nghiệm thì phương trình (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a \neq 0; \Delta > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow m$$

3. Phương trình có 3 nghiệm

- ◆ Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$. Suy ra $at^2 + bt + c = 0$ (2)
- ◆ Để phương trình (1) có 3 nghiệm thì phương trình (2) có hai nghiệm trong đó có một nghiệm

$$\text{bằng 0, một nghiệm dương : } \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0; \Delta > 0 \\ S = \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow m \text{ rồi kiểm tra lại.} \\ P = \frac{c}{a} = 0 \end{cases}$$

4. Phương trình có hai nghiệm

- ◆ Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$. Suy ra $at^2 + bt + c = 0$ (2)
- ◆ Để phương trình (1) có 2 nghiệm thì phương trình (2) phải có :

- **Th1:** Xét $a = 0$ suy ra m , thay m trả lại kiểm tra.

$$\bullet \text{ Th2: Có nghiệm kép dương: } \begin{cases} a \neq 0; \Delta = 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow m \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Th3: Có hai nghiệm trái dấu: } \begin{cases} a \neq 0; \\ \Delta > 0 \Rightarrow m \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$$



5. Phương trình có 1 nghiệm



- ◆ Để phương trình (1) có 1 nghiệm thì phương trình (2) có một nghiệm kép bằng 0 hoặc 1 nghiệm

$$\text{bằng 0 và một nghiệm âm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ P = 0 \\ \Delta > 0 \Rightarrow m \\ S < 0 \\ P = 0 \end{cases}$$

6. Phương trình vô nghiệm

- ◆ Để phương trình (1) vô nghiệm thì phương trình (2) vô nghiệm hoặc có 2 nghiệm phân biệt âm

$$\text{Suy ra} \begin{cases} \Delta < 0 \\ \Delta \geq 0 \\ S < 0 \Rightarrow m \\ P > 0 \end{cases}$$

7. Phương trình $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$ với $a+b = c+d$

- ◆ Đặt $t = x^2 + (a+b)x$, đưa về phương trình bậc hai $(t+ab)(t+cd) = m$.
- ◆ Ví dụ: $(x-3)(x+2)(x+1)(x+6) = -84$
 $\Leftrightarrow (x-3)(x+6)(x+2)(x+1) = -84 \Leftrightarrow (x^2 + 3x - 18)(x^2 + 3x + 2) = -84$
- ◆ Đặt $x^2 + 3x = a$. Phương trình (1) có dạng: $(a-18)(a+2) = -84$

8. Phương trình hồi quy $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ mà $ad^2 = eb^2$

- ◆ Đặt $\frac{d}{b} = t$ đưa về phương trình mới
- ◆ Kiểm tra $x=0$ có phải là nghiệm phương trình không rồi chia cả hai vế cho x^2 ta được:

$$a\left(x^2 + \frac{t^2}{x^2}\right) + b\left(x \pm \frac{t}{x}\right) + c = 0. \text{ Sau đó đặt } x \pm \frac{t}{x} = a$$

9. Phương trình dạng $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$

- ◆ Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$, đưa về phương trình trùng phương theo t . Chú ý:
 $(x \pm y)^4 = x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$

10. Phương trình dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = rx^2$ với $ab = cd$.

- ◆ Đưa phương trình về dạng: $[x^2 + (a+b)x + ab][x^2 + (c+d)x + cd] = rx^2$
 Kiểm tra $x=0$ có phải là nghiệm của phương trình không rồi chia cả hai vế cho x^2
 $\left[x + \frac{ab}{x} + a + b\right] \left[x + \frac{cd}{x} + c + d\right] = r$ (chú ý tách $x^2 = x \cdot x$). Đặt $t = x + \frac{ab}{x}$
- ◆ Ví dụ: $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 9x + 18) = 168x^2$

Lời giải

- $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6) = 168x^2 \Leftrightarrow (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 5x + 6) = 168x^2$



- Nhận xét: $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế phương trình (1) cho x^2 ta được:
$$\left(x + 7 + \frac{6}{x}\right)\left(x + 5 + \frac{6}{x}\right) = 168. \text{ Đặt } x + \frac{6}{x} = t$$
- Phương trình có dạng: $(t+7)(t+5) = 168 \Rightarrow t^2 + 12t - 133 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 \\ t = -19 \end{cases}$

11. Phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 \mp bx + a = 0$

- ◇ Nhận xét $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Với $x \neq 0$, chia 2 vế của phương trình cho x^2 ta được: $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + c = 0$.

Đặt $t = x \pm \frac{1}{x}$, đưa về phương trình bậc hai theo t .

