# TUYỂN TẬP

# 15 CHUYÊN ĐỀ

# BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

# TOÁN 7

# Mục Lục

# CHUYÊN ĐỀ 1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ:

1) Một số tính chất của lũy thừa:

- Nhân, chia hai lũy thừa cùng cơ số

$$a^m.a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m, n \in \mathbb{N}; m \geq n)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0)$$

- Lũy thừa của một lũy thừa: $\left(a^m\right)^n = a^{m.n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$
- Lũy thừa của một tích: $(a.b)^n = a^n.b^n \quad (n \in \mathbb{N})$
- Lũy thừa tầng: $a^{m^n} = a^{\left(m^n\right)} \quad (m, n \in \mathbb{N})$

2) Một số công thức đặt thừa số chung

- $a.b + a.c + a.d + ... + a.k = a.(b + c + d + ... + k)$
- $\frac{a}{x_1} + \frac{a}{x_2} + ... + \frac{a}{x_n} = a\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right)$

**DẠNG 1: LŨY THỪA, PHỐI HỢP CÁC PHÉP TÍNH**

**Bài 1:** Thực hiện phép tính:

a, $A = \frac{3^{11}.11 + 3^{11}.21}{3^9.2^5}$. b, $B = \frac{75.5^4 + 175.5^4}{20.25.125 - 625.75}$ c, $C = \frac{\left(3.4.2^{16}\right)^2}{11.2^{13}.4^{11} - 16^9}$;

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $A = \frac{3^{11}.11 + 3^{11}.21}{3^9.2^5} = \frac{3^{11}(11+21)}{3^9.2^5} = \frac{3^{11}.32}{3^9.32} = \frac{3^2}{1} = 9$.

b, Ta có: $B = \frac{75.5^4 + 175.5^4}{20.25.125 - 625.75} = \frac{3.5^2.5^4 + 5^2.7.5^4}{2^2.5.5^2.5^3 - 5^4.3.5^2} = \frac{3.5^6 + 7.5^6}{2^2.5^6 - 3.5^6} = \frac{5^6.10}{5^6} = 10$

c, Ta có: $C = \frac{\left(3.4.2^{16}\right)^2}{11.2^{13}.4^{11} - 16^9} = \frac{3^2.2^{36}}{11.2^{35} - 2^{36}} = \frac{3^2.2^{36}}{2^{35}(11-2)} = \frac{3^2.2^{36}}{2^{35}.9} = 2$

**Bài 2:** Thực hiện phép tính:

a, $A=\dfrac{5.4^{15}.9^9-4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19}-7.2^{29}.27^6}$  b, $B=\dfrac{5^{10}.7^3-25^5.49^2}{(125.7)^3+5^9.14^3}$  c, $C=\dfrac{\left(3.4.2^{16}\right)^2}{11.2^{13}.4^{11}-4^9.2^{18}}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $\dfrac{5.4^{15}.9^9-4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19}-7.2^{29}.27^6}=\dfrac{5.2^{30}.3^{18}-2^2.3^{20}.2^{27}}{5.2^{28}.3^{19}-7.2^{29}.3^{18}}=\dfrac{2^{29}.3^{18}(10-9)}{2^{28}.3^{18}(15-14)}=\dfrac{2^{29}.3^{18}}{2^{28}.3^{18}}=2$

b, Ta có: $B=\dfrac{5^{10}.7^3-25^5.49^2}{(125.7)^3+5^9.14^3}=\dfrac{5^{10}.7^3-5^{10}.7^4}{5^9.7^3+5^9.7^3.2^3}=\dfrac{5^{10}.7^3(1-7)}{5^9.7^3\left(1+2^3\right)}=\dfrac{5.(-6)}{9}=\dfrac{-10}{3}$.

c, Ta có: $C=\dfrac{\left(3.4.2^{16}\right)^2}{11.2^{13}.4^{11}-4^9.2^{18}}=\dfrac{3^2.2^{36}}{2^{35}(11-2)}=2$

**Bài 3:** Thực hiện phép tính:

a, $A=\dfrac{5.7^{11}+7^{12}}{7^9.5^2-13.7^9}$  b, $B=\dfrac{2^{15}.7-2^{16}}{5.2^{15}}$  c, $C=\dfrac{5.4^{15}.9^9-4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19}-7.2^{29}27^6}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $A=\dfrac{5.7^{11}+7^{12}}{7^9.5^2-13.7^9}=\dfrac{7^{11}(5+7)}{7^9\left(5^2-13\right)}=\dfrac{7^{11}.12}{7^9.12}=7^2=49$

b, Ta có: $B=\dfrac{2^{15}.7-2^{16}}{5.2^{15}}=\dfrac{2^{15}(7-2)}{5.2^{15}}=\dfrac{5}{5}=1$

c, Ta có: $A=\dfrac{5.4^{15}.9^9-4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19}-7.2^{29}27^6}=\dfrac{5.2^{30}.3^{18}-2^2.3^{20}.2^{27}}{5.2^9.2^{19}.3^{19}-7.2^{29}.3^{18}}=\dfrac{2^{29}.3^{18}\left(5.2-3^2\right)}{2^{28}.3^{18}(5.3-7.2)}=\dfrac{2.1.1}{1.1.1}=2$

**Bài 4.** Tính: $1\dfrac{13}{15}\cdot(0,5)^2\cdot3+\left(\dfrac{8}{15}-1\dfrac{19}{60}\right):1\dfrac{23}{24}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $1\dfrac{13}{15}\cdot(0,5)^2\cdot3+\left(\dfrac{8}{15}-1\dfrac{19}{60}\right):1\dfrac{23}{24}=\dfrac{28}{15}.\dfrac{1}{4}.3+\left(\dfrac{8}{15}-\dfrac{79}{60}\right).\dfrac{24}{47}=\dfrac{7}{5}-\dfrac{2}{5}=1$

**Bài 5:** Tính biêu thức: $B=\left(\dfrac{151515}{161616}+\dfrac{17^9}{17^{10}}\right)-\left(\dfrac{1500}{1600}-\dfrac{176}{187}\right)$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$B=\left(\dfrac{151515}{161616}+\dfrac{17^9}{17^{10}}\right)-\left(\dfrac{1500}{1600}-\dfrac{176}{187}\right)=\dfrac{15}{16}+\dfrac{1}{17}-\dfrac{15}{16}+\dfrac{16}{17}=1.$$

**Bài 6:** Thực hiện phép tính: $A=2^4.5-\left[131-(13-4)^2\right]$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $A=2^4.5-\left[131-(13-4)^2\right]=16.5-\left(131-9^2\right)\ =80-(131-81)=80-50=30$.

**Bài 7:** Thực hiện phép tính:

a) $(-8)^2:\left\{25-18:\left[\left(5^2+2^2\right):11-2018^0\right]\right\}$ b) $\left(11.3^7.9^7-9^{15}\right):\left(2.3^{14}\right)^2$

**Hướng dẫn giải**

a) $(-8)^2:\left\{25-18:\left[\left(5^2+2^2\right):11-2018^0\right]\right\}$

$=64:\{25-18:[33:11-1]\}$

$=64:\{25-18:2\}$

$=64:16=4$.

b) $\left(11.3^7.9^{11}-9^{15}\right):\left(2.3^{14}\right)^2$

$=\left(11.3^7.3^{22}-3^{30}\right):\left(2^2.3^{28}\right)$

$=\left(11.3^{29}-3^{30}\right):\left(2^2.3^{28}\right)$

$=3^{29}.8:\left(2^2.3^{28}\right)$

$=3^{29}.2^3:\left(2^2.3^{28}\right)=3.2=6$.

**Bài 8:** Thực hiện phép tính: $2^4+8\left[(-2)^2:\dfrac{1}{2}\right]^0-2^{-2}.4+(-2)^2$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $2^4+8\left[(-2)^2:\dfrac{1}{2}\right]^0-2^{-2}.4+(-2)^2=16+8.1-\dfrac{1}{4}.4+4=27$

**Bài 9:** Rút gọn : $B=\dfrac{25^5+25^7+25^9}{5^{11}+5^{13}+5^{15}+5^{17}+5^{19}+5^{21}}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$B=\frac{25^5+25^7+25^9}{5^{11}+5^{13}+5^{15}+5^{17}+5^{19}+5^{21}}=\frac{5^{10}+5^{14}+5^{18}}{\left(5^{11}+5^{15}+5^{19}\right)+\left(5^{13}+5^{17}+5^{21}\right)}=\frac{5^{10}\left(1+5^4+5^8\right)}{\left(1+5^4+5^8\right)\left(5^{11}+5^{13}\right)}$$

$$=\frac{5^{10}}{5^{11}+5^{13}}=\frac{1}{5+125}=\frac{1}{130}$$

**Bài 10:** Thực hiện phép tính: $A=\left(\dfrac{0,4-\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{11}}{1,4-\dfrac{7}{9}+\dfrac{7}{11}}-\dfrac{\dfrac{1}{3}-0,25+\dfrac{1}{5}}{1\dfrac{1}{6}-0,875+0,7}\right)^3:\dfrac{2013}{2014}$

**Hướng dẫn giải**

$$A=\left(\frac{0,4-\frac{2}{9}+\frac{2}{11}}{1,4-\frac{7}{9}+\frac{7}{11}}-\frac{\frac{1}{3}-0,25+\frac{1}{5}}{1\frac{1}{6}-0,875+0,7}\right)^3:\frac{2013}{2014}$$

$$=\left(\frac{\frac{2}{5}-\frac{2}{9}+\frac{2}{11}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{9}+\frac{7}{11}}-\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{\frac{7}{6}-\frac{7}{8}+\frac{7}{10}}\right)^3:\frac{2013}{2014}$$

$$=\left[\frac{2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)}{7\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)}-\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)}\right]^3:\frac{2013}{2014}=\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{7}\right)^3:\frac{2013}{2014}=0$$

**DẠNG 2 : TÍNH ĐƠN GIẢN**

**Bài 1:** Rút gọn : $A=\dfrac{2-\frac{2}{19}+\frac{2}{43}-\frac{2}{1943}}{3-\frac{3}{19}+\frac{3}{43}-\frac{3}{1943}}:\dfrac{4-\frac{4}{19}+\frac{4}{41}-\frac{4}{2941}}{5-\frac{5}{19}+\frac{5}{41}-\frac{5}{2941}}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có :

$$A=\frac{2\left(1-\frac{1}{19}+\frac{1}{43}-\frac{1}{1943}\right)}{3\left(1-\frac{1}{19}+\frac{1}{43}-\frac{1}{1943}\right)}:\frac{4\left(1-\frac{1}{19}+\frac{1}{41}-\frac{1}{2941}\right)}{5\left(1-\frac{1}{19}+\frac{1}{41}-\frac{1}{2941}\right)}$$

$$=\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}.\frac{5}{4}=\frac{5}{6}.$$

**Bài 2:** Thực hiện phép tính: $M=\left(\dfrac{0,4-\frac{2}{9}+\frac{2}{11}}{1,4-\frac{7}{9}+\frac{7}{11}}-\dfrac{\frac{1}{3}-0,25+\frac{1}{5}}{1\frac{1}{6}-0,875+0,7}\right):\dfrac{2014}{2015}$

**Hướng dẫn giải**

$$M=\left(\frac{0,4-\frac{2}{9}+\frac{2}{11}}{1,4-\frac{7}{9}+\frac{7}{11}}-\frac{\frac{1}{3}-0,25+\frac{1}{5}}{1\frac{1}{6}-0,875+0,7}\right):\frac{2014}{2015}$$

$$=\left(\frac{\frac{2}{5}-\frac{2}{9}+\frac{2}{11}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{9}+\frac{7}{11}}-\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{\frac{7}{6}-\frac{7}{8}+\frac{7}{10}}\right):\frac{2014}{2015}=\left(\frac{2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)}{7\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)}-\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{\frac{7}{3}.\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)}\right):\frac{2014}{2015}$$

$$=\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{7}\right):\frac{2014}{2015}=0$$

**Bài 3:** Thực hiện phép tính: $M=\dfrac{-1,2:\left(1\frac{3}{5}.1,25\right)}{0,64-\frac{1}{25}}+\dfrac{\left(1,08-\frac{2}{25}\right):\frac{4}{7}}{\left(5\frac{5}{9}-\frac{9}{4}\right).\frac{36}{17}}+0,6.0,5:\dfrac{2}{5}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $M=\dfrac{-1,2:\left(1\frac{3}{5}.1,25\right)}{0,64-\frac{1}{25}}+\dfrac{\left(1,08-\frac{2}{25}\right):\frac{4}{7}}{\left(5\frac{5}{9}-\frac{9}{4}\right).\frac{36}{17}}+0,6.0,5:\dfrac{2}{5}$

$$=\frac{-1,2:2}{0,6}+\frac{\frac{7}{4}}{\frac{119}{36}.\frac{36}{17}}+0,75=-1+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=0$$

**Bài 4:** Thực hiện phép tính: $A=\left[\left(\frac{2}{193}-\frac{3}{386}\right).\frac{193}{17}+\frac{33}{34}\right]:\left[\left(\frac{7}{1931}+\frac{11}{3862}\right).\frac{1931}{25}+\frac{9}{2}\right]$

**Hướng dẫn giải**

Ta có :

$$a)\left[\left(\frac{2}{193}-\frac{3}{386}\right).\frac{193}{17}+\frac{33}{34}\right]=\frac{2}{193}.\frac{193}{17}-\frac{3}{386}.\frac{193}{17}+\frac{33}{34}=\frac{2}{17}-\frac{2}{34}+\frac{33}{34}=1$$

$$\left[\left(\frac{7}{1931}+\frac{11}{3862}\right).\frac{1931}{25}+\frac{9}{2}\right]=\frac{7}{1931}.\frac{1931}{25}+\frac{11}{3862}.\frac{1931}{25}+\frac{9}{2}=\frac{7}{25}+\frac{11}{50}+\frac{9}{2}=5=$$

$$\Rightarrow A=1:5=\frac{1}{5}$$

**Bài 5:** Thực hiện phép tính: $M=\left(\dfrac{0,4-\frac{2}{9}+\frac{2}{11}}{1,4-\frac{7}{9}+\frac{7}{11}}-\dfrac{\frac{1}{3}-0,25+\frac{1}{5}}{1\frac{1}{6}-0,875+0,7}\right):\dfrac{2014}{2015}$

**Hướng dẫn giải**

$$1)M=\left(\dfrac{0,4-\frac{2}{9}+\frac{2}{11}}{1,4-\frac{7}{9}+\frac{7}{11}}-\dfrac{\frac{1}{3}-0,25+\frac{1}{5}}{1\frac{1}{6}-0,875+0,7}\right):\dfrac{2014}{2015}$$

$$=\left(\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{2}{9}+\frac{2}{11}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{9}+\frac{7}{11}}-\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{\frac{7}{6}-\frac{7}{8}+\frac{7}{10}}\right):\dfrac{2014}{2015}=\left(\dfrac{2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)}{7\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)}-\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{\frac{7}{3}.\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)}\right):\dfrac{2014}{2015}$$

$$=\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{7}\right):\frac{2014}{2015}=0$$

**Bài 6:** Thực hiện phép tính: $\dfrac{0,375-0,3+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}}{-0,265+0,5-\frac{5}{11}-\frac{5}{12}}+\dfrac{1,5+1-0,75}{2,5+\frac{5}{3}-1,25}$

**Hướng dẫn giải**

$$a)A=\dfrac{\frac{3}{8}-\frac{3}{10}+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}}{-\frac{53}{100}+\frac{5}{10}-\frac{5}{11}-\frac{5}{12}}+\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{3}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{5}{2}+\frac{5}{3}-\frac{5}{4}}$$

$$=\dfrac{3\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\right)}{\frac{-53}{100}-5\left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\right)}+\dfrac{3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}{5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}=\dfrac{3.\left(\frac{165-132+120+110}{1320}\right)}{\frac{-53}{100}-5\left(\frac{-66+60+55}{660}\right)}+\frac{3}{5}$$

$$=\dfrac{3.\frac{263}{1320}}{\frac{-53}{100}-5.\frac{49}{660}}+\frac{3}{5}=\dfrac{3.\frac{263}{1320}}{\frac{-1749-1225}{3300}}+\frac{3}{5}=\frac{3945}{-5948}+\frac{3}{5}=\frac{-1881}{29740}$$

**Bài 7:** Tính biểu thức: $B=\dfrac{0,5-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\dfrac{0,5-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0,2}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-3,5}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$B=\frac{0,5-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{0,5-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0,2}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-3,5}=\frac{\frac{3}{6}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}}$$

$$=\frac{3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)}=\frac{3}{5}-\frac{1}{7}=\frac{16}{35}.$$

**Bài 8:** Thực hiện phép tính: $\dfrac{(1+2+3+...+100)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)(63.1,2-21.3,6)}{1-2+3-4+...+99-100}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $63.1,2-21.3,6=0\Rightarrow \dfrac{(1+2+3+...+100)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)(63.1,2-21.3,6)}{1-2+3-4+...+99-100}=0$

## DẠNG 3 : TÍNH TỔNG CÁC SỐ TỰ NHIÊN ĐƯỢC LẬP TỪ MỘT CHỮ SỐ

Tính tổng: $S=a+\overline{aa}+\overline{aaa}+...+\underbrace{\overline{aaa...a}}_{n}$

**Phương pháp:**

Ta có:

$S=a+\overline{aa}+\overline{aaa}+...+\underbrace{\overline{aaa...a}}_{n}=a\left(1+11+111+...+\underbrace{111...1}_{n}\right)$

$\Rightarrow 9S=a\left(9+99+999+...+\underbrace{999...9}_{n}\right)$

Đặt $A=9+99+999+...+\underbrace{999...9}_{n}$

Ta có: $A=(10-1)+\left(10^2-1\right)+\left(10^3-1\right)+...+\left(10^n-1\right)$

$=\left(10+10^2+10^3+...+10^n\right)-n=\underbrace{111...1}_{n}0-n$

$\Rightarrow S=\dfrac{a\left(\underbrace{111...1}_{n}0-n\right)}{9}.$

**Bài 1:** Tính tổng tự nhiên

a, $A=9+99+999+...+\underbrace{999...9}_{10}$ b, $B=1+11+111+...+\underbrace{111...1}_{10}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $A=(10-1)+\left(10^2-1\right)+\left(10^3-1\right)+...+\left(10^{10}-1\right)$

$=\left(10+10^2+10^3+...+10^{10}\right)-10=\underbrace{111..1}_{10}0-10=\underbrace{111...1}_{9}00.$

b, Ta có: $9B=9+99+999+....+9999...99$ ( 10 số 9).

$A=(10-1)+\left(10^2-1\right)+\left(10^3-1\right)+...+\left(10^{10}-1\right)$

$= \left(10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{10}\right) - 10 = \underbrace{111..1}_{10}0 - 10 = \underbrace{111...1}_{9}00.$

$\Rightarrow B = \dfrac{A}{9} = \dfrac{\underbrace{111...1}_{9}00}{9}.$

Bài 2: Tính tổng tự nhiên C= $C = 5 + 55 + 555 + ... + \underbrace{555...5}_{10}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $C = 5\left(1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111...1}_{10}\right)$ ( 10 số 1)

$9C = 5\left(9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{999...9}_{10}\right)$

Ta có: $A = (10 - 1) + \left(10^2 - 1\right) + \left(10^3 - 1\right) + ... + \left(10^{10} - 1\right)$

$= \left(10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{10}\right) - 10 = \underbrace{111...1}_{9}0 - 10 = \underbrace{111..1}_{8}00$

$\Rightarrow C = \dfrac{5.\underbrace{111...1}_{8}00}{9}. = \dfrac{\underbrace{555..5}_{8}00}{9}$

**DẠNG 4 : TÍNH TỔNG DÃY PHÂN SỐ CÓ QUY LUẬT**

**1)** Tính tổng: $S = \dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \dfrac{1}{a_3a_4} + ... + \dfrac{1}{a_{n-1}a_n}$

* Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{a-1} = 1$

**Phương pháp:**

Ta có:

$$\frac{1}{a_1a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2};$$

$$\frac{1}{a_2a_3} = \frac{a_3 - a_2}{a_2a_3} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3};$$

.................................................

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}.$$

Do đó:

$$S = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + ... + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}$$

**Bài 1:** Tính tổng : $S = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{2004.2005}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$\dfrac{1}{1.2} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{2.3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$;.......... $\dfrac{1}{2004.2005} = \dfrac{1}{2004} - \dfrac{1}{2005}$

Cộng vế với vế của các đẳng thức trên ta được.

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2004} - \frac{1}{2004}\right) - \frac{1}{2005} = 1 - \frac{1}{2005} = \frac{2004}{2005}$$

**Bài 2:** Tính tổng : $S = \frac{1}{9.10} + \frac{1}{10.11} + \ldots + \frac{1}{2004.2005}$

**Hướng dẫn giải**

Ta thấy tổng này giống hệt như tổng ở bài 1 ta dùng cách tách các số hạng như ở bài 1:

$$S = \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{1}{2005} = \frac{1996}{18045}$$

**Nhận xét :** Nếu số hạng tổng quát có dạng: $\frac{1}{n(n+1)}$

Thì ta tách như sau: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Từ đó ta có công thức tổng quát để tính tổng như sau:

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

**2)** Tính tổng: $S = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n}$

* Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{a-1} = k > 1$ thì:

**Phương pháp:**

Ta có:

$$\frac{k}{a_1a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2};$$

$$\frac{k}{a_2a_3} = \frac{a_3 - a_2}{a_2a_3} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3};$$

..................................................

$$\frac{k}{a_{n-1}a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}.$$

Do đó:

$$S = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right)$$

**Bài 1:** Tính tổng : $A = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \ldots + \frac{2}{99.101}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có :

$$\frac{2}{1.3}=\frac{3-1}{1.3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{3.5}=\frac{5-3}{3.5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$$
..............................
$$\frac{2}{99.101}=\frac{101-99}{99.101}=\frac{1}{99}-\frac{1}{101}$$

Do đó : $B=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+...+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$

**Bài 2:** Tính tổng : $S=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{2003.2005}$

**Hướng dẫn giải**

**Cách 1**

Học sinh phải nhận dạng được các số hạng đều có dạng

- Tử số của các số hạng đó là 1
- Mẫu là tích của hai số tự nhiên hơn kém nhau hai đơn vị.

Ta có thể tách như sau: $\frac{1}{1.3}=\frac{1}{2}.\frac{2}{1.3}=\frac{1}{2}.\left(\frac{3-1}{1.3}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$

Tương tự: $\frac{1}{3.5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

...........................

$$\frac{1}{2003.2005}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2003}-\frac{1}{2005}\right)$$

Cộng vế với vế của các đẳng thức trên ta được:

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{2003}-\frac{1}{2005}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2005}\right)=\frac{1002}{2005}$$

**Nhận xét kết quả:**

- Thừa số nhỏ nhất, lớn nhất của mẫu các số hạng là 1; 2005
- Kết quả bằng tích của hiệu các nghịch đảo thừa số nhỏ nhất và thừa số lớn nhất của mẫu với nghịch đảo đơn vị kém hơn.

**Cách 2:** Ta có: $S=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{2003.2005}$

Ta thấy: $\frac{a-b}{b.a}=\frac{a}{b.a}-\frac{b}{b.a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$ (a,b$\in$N, a > b )

Ta phải biến đổi sao cho tử số của tất cả các số hạng phải là khoảng cách hai thừa số dưới mẫu thì tất cả các hạng tử đều tách ra được:

$$\frac{2}{1.3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{3.5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$$
..................
$$\frac{2}{2003.2005}=\frac{1}{2003}-\frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+...+\frac{2}{2003.2005}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{2003}-\frac{1}{2005}\right)=1-\frac{1}{2005}=\frac{2004}{2005}$$

Mà $S=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{2003.2005}\Rightarrow 2S=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+...+\frac{2}{2003.2005}=\frac{2004}{2005}$

$\Rightarrow S=\frac{2004}{2005}:2=\frac{1002}{2005}$

**Chú ý:** Thông qua ví dụ trên cần phải khắc phục cho học sinh sai hay gặp:

$\frac{1}{3.5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$ là sai

Nhận xét tổng quát: $\frac{m}{b.a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$ với a – b = m.

**Bài toán tổng quát.**

$S_n=\frac{1}{a(a+m)}+\frac{1}{(a+m)(a+2m)}+...+\frac{1}{\{a+(n-1)m\}\{a+nm\}}$ với m = 1;2;3.. n = 1;2;3.

$S_n=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+nm}\right)$

**Bài 3:** Tính nhanh tổng sau:

a, A = $A=\frac{3^2}{2.5}+\frac{3^2}{5.8}+\frac{3^2}{8.11}+\frac{3^2}{11.14}+\frac{3^2}{14.17}$ b, B = $\frac{4}{11.16}+\frac{4}{16.21}+\frac{4}{21.26}+...+\frac{4}{61.66}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có : $A=\frac{3^2}{2.5}+\frac{3^2}{5.8}+\frac{3^2}{8.11}+\frac{3^2}{11.14}+\frac{3^2}{14.17}$

$=3.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{14}-\frac{1}{17}\right)=3.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{17}\right)=3.\frac{15}{34}=\frac{45}{34}$

Vậy $A=\frac{45}{34}$ .

b, Ta có:

$B=4\left(\frac{1}{11.16}+\frac{1}{16.21}+\frac{1}{21.26}+...+\frac{1}{61.66}\right)\Rightarrow 5B=4\left(\frac{5}{11.16}+\frac{5}{16.21}+\frac{5}{21.26}+...+\frac{5}{61.66}\right)$

$5B=4\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{21}+...+\frac{1}{61}-\frac{1}{66}\right)=4\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{66}\right)\Rightarrow 5B=4.\frac{55}{11.66}\Rightarrow B=\frac{4}{66}=\frac{2}{33}$

**Bài 4:** Tính giá trị của biểu thức:

$A=\left(\frac{3}{1.8}+\frac{3}{8.15}+\frac{3}{15.22}+...+\frac{3}{106.113}\right)-\left(\frac{25}{50.55}+\frac{25}{55.60}+...+\frac{25}{95.100}\right)$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $B=\frac{3}{1.8}+\frac{3}{8.15}+\frac{3}{15.22}+...+\frac{3}{106.113}\Rightarrow 7B=3\left(\frac{7}{1.8}+\frac{7}{8.15}+\frac{7}{15.22}+...+\frac{7}{106.113}\right)$

$\Rightarrow 7B=3\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{22}+...+\frac{1}{106}-\frac{1}{113}\right)=3\left(1-\frac{1}{113}\right)=3.\frac{112}{113}\Rightarrow B=\frac{3.112}{7.113}=\frac{48}{113}$

và $C=\frac{25}{50.55}+\frac{25}{55.60}+...+\frac{25}{95.100}\Rightarrow \frac{1}{5}C=\frac{5}{50.55}+\frac{5}{55.60}+...+\frac{5}{95.100}$

$\Rightarrow \frac{1}{5}C = \frac{1}{50} - \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \Rightarrow C = \frac{1}{20}$. Khi đó : $A = B - C = \frac{48}{113} - \frac{1}{20} = \frac{847}{2260}$

**Bài 5:** Tính nhanh: $\frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + ... + \frac{9}{1999.2009}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $\frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + ... + \frac{9}{1999.2009} = A \Rightarrow A = \frac{9}{9.19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + ... + \frac{9}{1999.2009}$

$$\Rightarrow 10A = 9\left(\frac{10}{9.19} + \frac{10}{19.29} + \frac{10}{29.39} + ... + \frac{10}{1999.2009}\right) = 9\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2009}\right)$$

$$10A = 9.\frac{2000}{9.2009} = \frac{2000}{2009} \Rightarrow A = \frac{200}{2009}$$

**Bài 6:** Thực hiện phép tính: $A = 3.\frac{1}{1.2} - 5.\frac{1}{2.3} + 7.\frac{1}{3.4} - ... + 15.\frac{1}{7.8} - 17.\frac{1}{8.9}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $A = 3.\frac{1}{1.2} - 5.\frac{1}{2.3} + 7.\frac{1}{3.4} - ... + 15.\frac{1}{7.8} - 17.\frac{1}{8.9} = \frac{3}{1.2} - \frac{5}{2.3} + \frac{7}{3.4} - ... + \frac{15}{7.8} - \frac{17}{8.9}$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - ... + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

**Bài 7:** Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết : $A = \frac{1}{1.300} + \frac{1}{2.301} + \frac{1}{3.302} + ... + \frac{1}{101.400}$ và

$B = \frac{1}{1.102} + \frac{1}{2.103} + \frac{1}{3.104} + ... + \frac{1}{299.400}$

**Hướng dẫn giải**

$$299A = \frac{299}{1.300} + \frac{299}{2.301} + ... + \frac{299}{101.400} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{300}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{301}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{302}\right) + ... + \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{400}\right)$$

$$\Rightarrow 299A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{101}\right) - \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + ... + \frac{1}{400}\right)$$

$$101B = \frac{101}{1.102} + \frac{101}{2.103} + \frac{101}{3.104} + ... + \frac{101}{299.400}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{102}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{103}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{104}\right) + ... + \left(\frac{1}{299} - \frac{1}{400}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{299}\right) - \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{103} + ... + \frac{1}{400}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{101}\right) - \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + ... + \frac{1}{400}\right)$$

Khi đó : $299A = 101B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{101}{299}$

**Bài 8:** Rút gọn $A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - ..... - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$

**Hướng dẫn giải**

$$1.1) A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - ..... - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$$

$$A = \frac{1}{100} - \left( \frac{1}{100.99} + \frac{1}{99.98} + \frac{1}{98.97} + ..... + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1} \right)$$

$$A = \frac{1}{100} - \left( \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ..... + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100} \right)$$

$$A = \frac{1}{100} - \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ..... + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right)$$

$$A = \frac{1}{100} - \left( 1 - \frac{1}{100} \right) = \frac{-49}{50}$$

**3) Mẫu là các số tự nhiên liên tiếp**

**a)** Tính tổng sau: $S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Nhận xét đề bài:

- Tử các số đều là 1
- Mẫu các số hạng đều là 3 tích số tự nhiên liên tiếp.
- Số hạng tổng quát có dạng $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Ta có:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}.\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

Do đó:

$$\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right)$$

$$\frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right)$$

..........................

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được.

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

**Nhận xét kết quả**: Nếu mẫu có 3 số tự nhiên liên tiếp thì tổng bằng tích nghịch đảo của ( 3 - 1) với hiệu nghịch đảo của tích 2 thừa số có giá trị nhỏ nhất và tích 2 thừa số có giá trị lớn nhất: $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

**Bài 1:** Tính tổng : $B=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{37.38.39}$.

**Hướng dẫn giải**

Ta xét : $\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}=\frac{2}{1.2.3}$ ; $\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}=\frac{2}{2.3.4}$ ; .... ; $\frac{1}{37.38}-\frac{1}{38.39}=\frac{2}{37.38.39.}$

Tổng quát : $\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n.(n+1)(n+2)}$.

Do đó : $2B=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+...+\frac{2}{37.38.39}$

$$=\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)+...+\left(\frac{1}{37.38}-\frac{1}{38.39}\right)$$

$$=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{38.39}=\frac{740}{38.39}=\frac{370}{741}.$$

Suy ra $B=\frac{185}{741}$.

**Bài 2:** Tính nhanh tổng sau: P = $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{10.11.12}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $2P=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+...+\frac{2}{10.11.12}=\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)+...+\left(\frac{1}{10.11}-\frac{1}{11.12}\right)$

$$2P=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{11.12}=\frac{65}{132}\Rightarrow P=\frac{65}{264}$$

Tổng quát: $A=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right):2.$

2) Tính tổng sau: $S_n=\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

**Nhận xét đề bài**

- Tử các số hạng là 1
- Mẫu các số hạng đều là 4 tích số tự nhiên liên tiếp.
- Số hạng tổng quát có dạng $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

Ta có

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}.\frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{(k+3)-k}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right]$$

Do đó:

$$\frac{1}{1.2.3.4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}\right)$$

$$\frac{1}{2.3.4.5}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}\right)$$

....................................

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được

$$S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

**Bài 1:** Tính tổng: $\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+...+\frac{1}{27.28.29.30}$.

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét: $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4}=\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}, \frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}=\frac{3}{2\cdot3\cdot4\cdot5},...,$

$$\frac{1}{27\cdot28\cdot29}-\frac{1}{28\cdot29\cdot30}=\frac{3}{27\cdot28\cdot29\cdot30}.$$

Gọi biểu thức phải tính bằng $A$, ta được:

$$3A=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{28\cdot29\cdot30}=\frac{4059}{28\cdot29\cdot30}.$$

Vậy $A=\frac{1353}{8120}$.

**c) Bài toán tổng quát**

$$S_n=\frac{1}{1.2.3...m}+\frac{1}{2.3.4...(m+1)}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)...(n+m-1)}$$

Ta có ngay $S_n=\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1.2.3...(m-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)...(n+m-1)}\right)$

với m = 2; 3; 4...     n = 1; 2; 3……

**Chú ý**: Ví dụ 1: Có thể khai thác cho học sinh thấy trong tổng

$$S_n=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Thì 3 – 1 = 4 - 2 =…..= n + 2 - n = 2

$$\Rightarrow 2S_n = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2S_n = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Như vậy:

$$* \frac{2m}{a(a+m)(a+2m)} = \frac{1}{a(a+m)} - \frac{1}{(a+m)(a+2m)}$$

$$* \frac{3m}{a(a+m)(a+2m)(a+3m)} = \frac{1}{a(a+m)(a+2m)} - \frac{1}{(a+m)(a+2m)(a+3m)}$$

## DẠNG 5: TÍNH TỔNG TỰ NHIÊN DẠNG TÍCH

**Bài 1:** a) Tính tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 98.99$

b) Sử dụng kết quả của câu a, hãy tính: $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 97^2 + 98^2$

c) Sử dụng kết quả của câu a, hãy tính: $C = 1.99 + 2.98 + 3.97 + \ldots + 98.2 + 99.1$

**Hướng dẫn giải**

a) Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của A với 3. Thừa số 3 này được viết dưới dạng $3-0$ ở số hạng thứ nhất, $4-1$ ở số hạng thứ hai, $5-2$ ở số hạng thứ ba, …., $100-97$ ở số hạng cuối cùng. Ta có:

$$3A = 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + 3.4(5-2) + \ldots + 97.98.(99-96) + 98.99(100-97)$$

$$= (1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + 97.98.99 + 98.99.100) - (0.1.2 + 1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + 96.97.98 + 97.98.99)$$

$$= 98.99.100$$

Suy ra $A = 323400$.

Tổng quát ta có: $1.2 + 2.3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n.(n+1)(n+2)}{3}$.

b) $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 97^2 + 98^2$

$$= 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \ldots + 97(98-1) + 98(99-1)$$

$$= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 97.98 + 98.99) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 97.98)$$

$$= A - \frac{98.99}{2} = 323400 - 4851 = 318549.$$

Tổng quát : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 97^2 + 98^2$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c) $C = 1.99 + 2.98 + 3.97 + ... + 98.2 + 99.1$

$$= 1.99 + 2.(99-1) + 3.(99-2) + ... + 98.(99-97) + 99.(99-98)$$

$$= (1.99 + 2.99 + 3.99 + ... + 98.99 + 99.99) - (1.2 + 2.3 + .. + 97.98 + 98.99)$$

$$= 99.(1 + 2 + 3 + ... + 99) - A$$

$$= 99.\frac{99.100}{2} - \frac{98.99.100}{3} = \frac{99.100.101}{6} = 166650.$$

Tổng quát : $1.n + 2(n-1) + 3.(n-2) + ... + (n-1)2 + n.1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$

**Bài 2:** Tính tổng: $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + .... + 17.18.19$

**Hướng dẫn giải**

$4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + .... + 17.18.19.(20-16)$

$4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + .... + 17.18.19.20 - 16.17.18.19$

$4B = 17.18.19.20$

$B = 17.18.19.5 = 29070.$

**Bài 3:** Tính nhanh các tổng sau

a, $D = 1.4 + 2.5 + 3.6 + ... + 100.103$

b, $E = 1.3 + 2.4 + 3.5 + ... + 97.99 + 98.100$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có:

$D = 1.(1+3) + 2.(2+3) + 3(3+3) + ... + 100.(100+3)$

$D = (1.1 + 1.3) + (2.2 + 2.3) + (3.3 + 3.3) + ... + (100.100 + 100.3)$

$D = (1.1 + 2.2 + 3.3 + ... + 100.100) + 3(1 + 2 + 3 + ... + 100)$

Đặt, $A = 1.1 + 2.2 + 3.3 + ... + 100.100$ và $B = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100$

Ta có : $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + .... + 100^2$

$\Rightarrow A = 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + ... + 100(101-1).$

$\Rightarrow A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 100.101) - (1 + 2 + 3 + ... + 100)$

$\Rightarrow D = (1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 100.101) + 2(1 + 2 + 3 + ... + 100)$

Đặt $C = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 100.101$, Tính tổng C ta được :

$3C = 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + 3.4(5-2) + ... + 100.101.(102-99)$

$3C = (1.2.3 - 0.1.2) + (2.3.4 - 1.2.3) + (3.4.5 - 2.3.4) + ... + (100.101.102 - 99.100.101)$

$3C = 100.101.102 - 0.1.2 = 100.101.102 \Rightarrow C = 100.101.34$

$B = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 = (100 + 1).\dfrac{100}{2} = 101.50 = 5050.$

Vậy $D = C + B = 100.101.34 + 5050 = 348450.$

b, Ta có:

$E = 1(1+2) + 2(2+2) + 3(3+2) + ... + 97(97+2) + 98(98+2)$

$E = (1.1+1.2) + (2.2+2.2) + (3.3+3.2) + ... + (97.97+97.2) + (98.98+98.2)$

$E = (1.1+2.2+3.3+...+97.97+98.98) + 2(1+2+3+4+...+97+98)$

Đặt $A = 1.1+2.2+3.3+...+98.98$ và $B = 1+2+3+4+...+97+98$

Tính rồi tương tự câu a rồi thay vào E.

**Bài 4:** Tính: $\dfrac{1.2+2.4+3.6+4.8+5.10}{3.4+6.8+9.12+12.16+15.20}$

**Hướng dẫn giải**

$3.4+6.8+9.12+12.16+15.20 = 6.1.2+6.2.4+6.3.6+6.4.8+6.5.10 = 6(1.2+2.4+3.6+4.8+5.10)$

$\dfrac{1.2+2.4+3.6+4.8+5.10}{3.4+6.8+9.12+12.16+15.20} = \dfrac{1.2+2.4+3.6+4.8+5.10}{6(1.2+2.4+3.6+4.8+5.10)} = \dfrac{1}{6}.$

**Bài 5:** Biết rằng : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ....... + 10^2 = 385.$ Tính tổng: $S = 2^2 + 4^2 + ..... + 20^2$

**Hướng dẫn giải**

Ta có :

$S = (2.1)^2 + (2.2)^2 + ..... + (2.10)^2$

$= 2^2.1^2 + 2^2.2^2 + ...... + 2^2.10^2 = 2^2.(1^2 + 2^2 + ...... + 10^2) = 2^2.385 = 1540$

**Bài 6:** Không sử dụng máy tính hãy so sánh:

$A = 2.1 + 2.3 + 2.5 + ... + 2.99$ và $B = 2.2 + 2.4 + 2.6 + ...... + 2.98 + 100$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$B = 2.2 + 2.4 + 2.6 + .... + 2.98 + 100$

$A = 2.1 + 2.3 + 2.5 + .... + 2.99$

$B - A = 2 + 2 + 2 + 2 + ...2 + 2(50 - 99) = 2.49 + 2.(-49) = 0$

$\Rightarrow A = B$

## DẠNG 6: TÍNH TỔNG CÔNG THỨC

**Bài 1:** Tính tổng: $A = 1 + \dfrac{1}{2}(1+2) + \dfrac{1}{3}(1+2+3) + ... + \dfrac{1}{16}(1+2+...+16)$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $A = 1 + \dfrac{1}{2}.\dfrac{2.3}{2} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{3.4}{2} + ... + \dfrac{1}{16}.\dfrac{16.17}{2} = \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{2} + \dfrac{5}{2} + ... + \dfrac{17}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(1+2+3+4+...+17-1) = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{17.18}{2} - 1\right) = 76.$

**Bài 2:** Tính tổng:

$$P=1+\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{3}(1+2+3)+\frac{1}{4}(1+2+3+4)+....+\frac{1}{2012}(1+2+3+....+2012)$$

**Hướng dẫn giải**

$$1)P=1+\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{3}(1+2+3)+\frac{1}{4}.(1+2+3+4)+......+\frac{1}{2012}.(1+2+3+.....+2012)$$

$$=1+\frac{1}{2}.\frac{2.3}{2}+\frac{1}{3}.\frac{3.4}{2}+\frac{1}{4}.\frac{4.5}{2}+.......+\frac{1}{2012}.\frac{2012.2013}{2}$$

$$=\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+.......+\frac{2013}{2}=\frac{1}{2}(2+3+4+.....+2013)$$

$$=\frac{1}{2}(1+2+3+....+2013-1)=\frac{1}{2}\left(\frac{2012.2013}{2}-1\right)=\frac{2025077}{2}$$

**Bài 3:** Tính: $\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+...+\frac{1}{1+2+...+59}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\frac{1}{\frac{(1+3).3}{2}}+\frac{1}{\frac{(1+4).4}{2}}+\frac{1}{\frac{(1+5).5}{2}}+...+\frac{1}{\frac{(1+59).59}{2}}$

$$=\frac{2}{3.4}+\frac{2}{4.5}+\frac{2}{5.6}+...+\frac{2}{59.60}=2\left(\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+...+\frac{1}{59.60}\right)=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{60}\right)=2\left(\frac{19}{60}\right)=\frac{19}{30}$$

**Bài 4:** Tính: $50+\frac{50}{3}+\frac{25}{3}+\frac{20}{4}+\frac{10}{3}+\frac{100}{6.7}+...+\frac{100}{98.99}+\frac{1}{99}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $A=\left(50+\frac{50}{3}+\frac{25}{3}+\frac{20}{4}+\frac{10}{3}\right)+\left(\frac{100}{6.7}+\frac{100}{7.8}+...+\frac{100}{98.99}+\frac{100}{99.100}\right)$

$$A=100\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}\right)+100\left(\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+...+\frac{1}{99.100}\right)$$

$$A=100\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}\right)=100.\left(1-\frac{1}{100}\right)=99$$

**Bài 5:** Tính: $C=-\frac{1}{3}(1+2+3)-\frac{1}{4}(1+2+3+4)-\cdots-\frac{1}{50}(1+2+3+\cdots+50)$

**Hướng dẫn giải**

$$C=-\frac{1}{3}(1+2+3)-\frac{1}{4}(1+2+3+4)-\cdots-\frac{1}{50}(1+2+3+\cdots+50)$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{(1+3).3}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+4).4}{2}-\frac{1}{50}\cdot\frac{(1+50).50}{2}$$

$$=-\frac{1+3+1+4+\cdots+1+50}{2}=-\frac{\left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{48\text{ chữ số }1}\right)+(3+4+\cdots+50)}{2}$$

$$=-\frac{48+\frac{(3+50).48}{2}}{2}=-24+53.12=612.$$

## DẠNG 7: TÍNH TÍCH

**Bài 1:** Tính tích

a, A= $\frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}.\frac{4^2}{3.5}...\frac{20^2}{19.21}$ b, B= $\frac{1^2}{1.2}.\frac{2^2}{2.3}.\frac{3^2}{3.4}...\frac{10^2}{10.11}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $A=\frac{2.2}{1.3}.\frac{3.3}{2.4}.\frac{4.4}{3.5}....\frac{20.20}{19.21}=\frac{(2.3.4...20)(2.3.4...20)}{(1.2.3....19)(3.4.5...21)}=\frac{20.2}{21}=\frac{40}{21}$

b, Ta có: $B=\frac{1.1}{1.2}.\frac{2.2}{2.3}.\frac{3.3}{3.4}....\frac{10.10}{10.11}=\frac{(1.2.3....10)(1.2.3...10)}{(1.2.3...10)(2.3.4...11)}=\frac{1}{11}$

**Bài 2:** Tính tổng C = $\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3+4}\right)...\left(1-\frac{1}{1+2+3+...+2016}\right)$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $C=\left(1-\frac{1}{\frac{(1+2).2}{2}}\right).\left(1-\frac{1}{\frac{(1+3).3}{2}}\right).\left(1-\frac{1}{\frac{(1+4).4}{2}}\right)....\left(1-\frac{1}{\frac{(1+2016).2016}{2}}\right)$

$=\frac{2}{3}.\frac{5}{6}.\frac{9}{10}.....\frac{2017.2016-2}{2016.2017}=\frac{4}{6}.\frac{10}{12}.\frac{18}{20}....\frac{2016.2017-2}{2016.2017}$

$C=\frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}....\frac{2015.2018}{2016.2017}=\frac{1004}{3009}$

**Bài 3:** Tính: A = $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)...\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{99}\right)$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $A=\frac{1}{2.3}.\frac{3}{2.5}.\frac{5}{2.7}....\frac{97}{2.99}=\frac{(1.3.5....97)}{2^{49}.(3.5.7...99)}=\frac{1}{2^{49}.99}$

**Bài 4:** Tính: $\frac{\left(1+\frac{1999}{1}\right)\left(1+\frac{1999}{2}\right)...\left(1+\frac{1999}{1000}\right)}{\left(1+\frac{1000}{1}\right)\left(1+\frac{1000}{2}\right)...\left(1+\frac{1000}{1999}\right)}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $A=\left(\frac{2000}{1}.\frac{2001}{2}.\frac{2002}{3}...\frac{2999}{1000}\right):\left(\frac{1001}{1}.\frac{1002}{2}.\frac{1003}{3}....\frac{2999}{1999}\right)$

$A=\left(\frac{2000.2001.2002...2999}{1.2.3.4...1000}\right).\left(\frac{1.2.3...1999}{1001.1002....2999}\right)=\frac{1001.1002....1999}{1001.1002...1999}=1$

**Bài 5:** Tính: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{400}\right)$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $=\dfrac{3}{4}.\dfrac{8}{9}.\dfrac{15}{16}....\dfrac{399}{400}=\dfrac{1.3}{2.2}.\dfrac{2.4}{3.3}.\dfrac{3.5}{4.4}...\dfrac{19.21}{20.20}=\dfrac{(1.2.3...19)(3.4.5...21)}{(2.3.4...20)(2.3.4.5...20)}=\dfrac{21}{20.2}=\dfrac{21}{40}$

**Bài 6:** Tính: $\left(1-\dfrac{1}{1+2}\right)\left(1-\dfrac{1}{1+2+3}\right)...\left(1-\dfrac{1}{1+2+3+...+n}\right)$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $A=\left(1-\dfrac{1}{\dfrac{(1+2).2}{2}}\right)\left(1-\dfrac{1}{\dfrac{(1+3).3}{2}}\right)...\left(1-\dfrac{1}{\dfrac{(1+n).n}{2}}\right)$

$=\left(1-\dfrac{2}{2.3}\right)\left(1-\dfrac{2}{3.4}\right)\left(1-\dfrac{2}{4.5}\right)....\left(1-\dfrac{2}{n(n+1)}\right)=\dfrac{4}{2.3}.\dfrac{10}{3.4}.\dfrac{18}{4.5}....\dfrac{n(n+1)-2}{n(n+1)}$

$=\dfrac{1.4}{2.3}.\dfrac{2.5}{3.4}.\dfrac{3.6}{4.5}...\dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}=\dfrac{(1.2.3...(n-1))(4.5....(n+2))}{(2.3...n)(3.4.5...(n+1))}=\dfrac{n+2}{n.3}=\dfrac{n+2}{3n}$

**Bài 7:** Tính:

a/ $C=\left(1+\dfrac{1}{1.3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2.4}\right)\left(1+\dfrac{1}{3.5}\right)...\left(1+\dfrac{1}{2018.2020}\right)$ b/ $B=\left(1-\dfrac{1}{5}\right)\left(1-\dfrac{1}{6}\right)...\left(1-\dfrac{1}{100}\right)$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có:

$$C=\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)...\left(1+\frac{1}{2018.2020}\right)=\frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}.\frac{4^2}{3.5}...\frac{2019^2}{2018.2019}$$

$$=\frac{(2.3.4...2019).(2.3.4...2019)}{(2.3.4...2019).(3.4.5...2018)}=2.2019=4038.$$

b, Ta có: $B=\left(1-\dfrac{1}{5}\right)\left(1-\dfrac{1}{6}\right)...\left(1-\dfrac{1}{100}\right)=\left(\dfrac{5-1}{5}\right)\left(\dfrac{6-1}{6}\right)...\left(\dfrac{99-1}{99}\right)\left(\dfrac{100-1}{100}\right)$

$$=\frac{4}{5}.\frac{5}{6}...\frac{98}{99}.\frac{99}{100}=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$$

Vậy $B=\dfrac{1}{25}$

**Bài 8:** Tính tích

a, D= $\dfrac{2^2}{3}.\dfrac{3^2}{8}.\dfrac{4^2}{15}.\dfrac{5^2}{24}.\dfrac{6^2}{35}.\dfrac{7^2}{48}.\dfrac{8^2}{63}.\dfrac{9^2}{80}$ b, E= $\dfrac{8}{9}.\dfrac{15}{16}.\dfrac{24}{25}...\dfrac{2499}{2500}$

**Hướng dẫn giải**

a, $D=\dfrac{2.2}{1.3}.\dfrac{3.3}{2.4}.\dfrac{4.4}{3.5}....\dfrac{8.8}{7.9}.\dfrac{9.9}{8.10}=\dfrac{(2.3.4...8.9)(2.3.4...8.9)}{(1.2.3...7.8)(3.4.5...9.10)}=\dfrac{9.2}{10}=\dfrac{9}{5}$

b, $E=\dfrac{2.4}{3.3}.\dfrac{3.5}{4.4}.\dfrac{4.6}{5.5}....\dfrac{49.51}{50.50}=\dfrac{(2.3.4...49)(4.5.6...51)}{(3.4.5...50)(3.4.5...50)}=\dfrac{2.51}{50.3}=\dfrac{17}{25}$

**Bài 9:** Tính tích:

a, $B=\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{9}-1\right)\left(\frac{1}{16}-1\right)...\left(\frac{1}{400}-1\right)$

b, $C=\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\left(1-\frac{3}{7}\right)...\left(1-\frac{10}{7}\right)$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $B=\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{9}-1\right)\left(\frac{1}{16}-1\right)...\left(\frac{1}{400}-1\right)$

$=\frac{-3}{4}.\frac{-8}{9}.\frac{-15}{16}...\frac{-399}{400}=-\frac{3.8.15....399}{2^2.3^2.4^2...20^2}=-\frac{1.3.2.4.3.5....19.21}{2.2.3.3.4.4....20.20}$

$=-\frac{1.2.3...19}{2.3.4...20}.\frac{3.4.5...21}{2.3.4...20}=-\frac{1}{20}.\frac{21}{2}=-\frac{21}{40}$

b, Ta có: $C=\frac{6}{7}.\frac{5}{7}.\frac{4}{7}.\frac{3}{7}.\frac{2}{7}.\frac{1}{7}.\frac{0}{7}.\frac{-1}{7}.\frac{-2}{7}.\frac{-3}{7}=0$

**Bài 10:** Tính $A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{2018}\right)\left(1-\frac{1}{2019}\right)$

**Hướng dẫn giải**

$A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{2018}\right)\left(1-\frac{1}{2019}\right)$

$\Rightarrow A=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.....\frac{2017}{2018}.\frac{2018}{2019}=\frac{1}{2019}$

Vậy $A=\frac{1}{2019}$

**Bài 11:** Tính tích

a, $A=\left(\frac{1}{4}-1\right).\left(\frac{1}{9}-1\right).\left(\frac{1}{16}-1\right)......\left(\frac{1}{100}-1\right).\left(\frac{1}{121}-1\right)$

b, $M=\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{4}+1\right)...\left(\frac{1}{999}+1\right)$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $A=\frac{-3}{4}.\frac{-8}{9}.\frac{-15}{16}....\frac{-99}{100}.\frac{-120}{121}=\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}.\frac{3.5}{4^2}.......\frac{9.11}{10^2}.\frac{10.12}{11^2}$

$=\frac{1.2.3.4...10.3.4.5.6....11.12}{2^2.3^2.......11^2}=\frac{1.2.11.12}{2^2.11^2}=\frac{12}{22}.$

b, Ta có: $M=\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}....\frac{1000}{999}=\frac{1000}{2}=500$

**Bài 12:** Tính tích

a, $F=\frac{3}{2^2}.\frac{8}{3^2}.\frac{15}{4^2}...\frac{99}{10^2}$

b, $N=\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)...\left(\frac{1}{1000}-1\right)$

**Hướng dẫn giải**

a, $F=\frac{1.3}{2.2}.\frac{2.4}{3.3}.\frac{3.5}{4.4}....\frac{9.11}{10.10}=\frac{(1.2.3...9)(3.4.5...11)}{(2.3.4...10)(2.3.4...10)}=\frac{1.11}{10.2}$

b, $N=\frac{-1}{2}.\frac{-2}{3}.\frac{-3}{4}....\frac{-999}{1000}=-\frac{1}{1000}$

**Bài 13:** Tính tích

a, C= $\frac{3}{4}.\frac{8}{9}.\frac{15}{16}...\frac{9999}{10000}$ b, $A=\left(\frac{1-2^2}{2^2}\right)\left(\frac{1-3^2}{3^2}\right)\left(\frac{1-4^2}{4^2}\right)...\left(\frac{1-2012^2}{2012^2}\right)$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $C=\frac{1.3}{2.2}.\frac{2.4}{3.3}.\frac{3.5}{4.4}....\frac{99.101}{100.100}=\frac{(1.2.3...99)(3.4.5...101)}{(2.3.4...100)(2.3.4...100)}=\frac{1.101}{100.2}$

b, Ta có: $A=\frac{-3}{2.2}.\frac{-8}{3.3}.\frac{-15}{4.4}....\frac{1-2012^2}{2012.2012}=\frac{-1.3}{2.2}.\frac{-2.4}{3.3}.\frac{-3.5}{4.4}....\frac{-2011.2013}{2012.2012}$

$=-\frac{(1.2.3...2011)(3.4.5...2013)}{(2.3.4....2012)(2.3.4...2012)}=-\frac{2013}{2012.2}$

**Bài 14:** Tính giá trị của biểu thức:

$a)A=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)......\left(1+\frac{1}{2015.2017}\right)$

**Hướng dẫn giải**

$a)A=\frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right).......\left(1+\frac{1}{2015.2017}\right)$

$=\frac{1}{2}.\left(\frac{2}{1}.\frac{2}{3}\right).\left(\frac{3}{2}.\frac{3}{4}\right).\left(\frac{4}{3}.\frac{4}{5}\right)......\left(\frac{2016}{2015}.\frac{2016}{2017}\right)$

$=\frac{1}{2}.\left(\frac{2}{1}.\frac{2}{3}\right).\left(\frac{3}{2}.\frac{3}{4}\right).\left(\frac{4}{3}.\frac{4}{5}\right)......\left(\frac{2016}{2015}.\frac{2016}{2017}\right)=\frac{2016}{2017}$

**Bài 15:** Cho $E=\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)...\left(1-\frac{1}{1+2+3+...+n}\right)$ và $F=\frac{n+2}{n}$, Tính $\frac{E}{F}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $E=\left(1-\frac{1}{\frac{(1+2).2}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\frac{(1+3).3}{2}}\right)...\left(1-\frac{1}{\frac{(1+n).n}{2}}\right)$

$=\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)\left(1-\frac{2}{4.5}\right)....\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{4}{2.3}.\frac{10}{3.4}.\frac{18}{4.5}....\frac{n(n+1)-2}{n(n+1)}$

$=\frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}...\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}=\frac{(1.2.3...(n-1))(4.5....(n+2))}{(2.3...n)(3.4.5...(n+1))}=\frac{n+2}{n.3}=\frac{n+2}{3n}$

Mà $\frac{n+2}{n}>\frac{n+2}{3n}=>F>E$

**Bài 16:** So sánh : $V=\frac{1}{2^{20}-1}$ và $U=\frac{1.3.5....39}{21.22.23...40}$

**Hướng dẫn giải**

$U=\frac{1.3.5...37.39}{(21.23.25....39)(22.24.26....40)}=\frac{1.3.5.7...37.39}{(21.23.25....39)2^{10}(11.12.13....20)}$

$$U=\frac{1.3.5...39}{2^{10}(21.23....39)(11.13...19)(12.14.16.18.20)}=\frac{1.3.5..39}{2^{10}.(11.13...39)2^{5}(6.7.8.9.10)}$$

$$U=\frac{1.3.5..39}{2^{15}(7.9.11....39).(6.8.10)}=\frac{1.3.5...39}{2^{15}.(7.9...39).2^{5}.3.5}=\frac{1.3.5..39}{2^{20}.3.5.7...39}=\frac{1}{2^{20}}$$

Mà $\frac{1}{2^{20}}<\frac{1}{2^{20}-1}\Rightarrow U<V$

**Bài 17:** Tính nhanh:

$$C=\left(1+\frac{1}{1.3}\right).\left(1+\frac{1}{2.4}\right).\left(1+\frac{1}{3.5}\right)...\left(1+\frac{1}{2016.2018}\right).\left(1+\frac{1}{2017.2019}\right)\left(1,08-\frac{2}{25}\right)$$

**Hướng dẫn giải**

Với mọi $n\in N^*$ ta có $1+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

Từ đó

$$C=\frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}.\frac{4^2}{3.5}.\frac{5^2}{4.6}\ldots\frac{.2018^2}{2017.2019}.\left(\frac{27}{25}-\frac{2}{25}\right)$$

$$=\frac{2^2.3^2.4^2.5^2\ldots2018^2}{1.2.3^2.4^2.5^2\ldots2017^2.2018.2019}$$

$$=\frac{2}{2019}.$$

**Bài 18:** Cho $M=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}.....\frac{631}{632}$. Chứng minh rằng: $M<0,04$.

**Hướng dẫn giải**

Đặt $N=\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{9}.....\frac{632}{633}$.

$$\Rightarrow M.N=\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}.....\frac{631}{632}\right).\left(\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{9}.....\frac{632}{633}\right)=\frac{1}{633}$$

Mà $\frac{1}{2}<\frac{2}{3};\ \frac{3}{4}<\frac{4}{5};\ \ldots;\ \frac{631}{632}<\frac{633}{632}$ nên $M^2<M.N\Rightarrow M<0,39$

Vậy $M<0,04$ (đpcm).

**Bài 19.** Thực hiện phép tính:

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8.15}+\frac{1}{15.22}+.....+\frac{1}{43.50}\right).\frac{4-3-5-7-.....-49}{217}$$

**Hướng dẫn giải**

$$\left(\frac{1}{1.8}+\frac{1}{8.15}+\frac{1}{15.22}+.....+\frac{1}{43.50}\right).\frac{4-3-5-7-....-49}{217}$$

$$=\frac{1}{7}.\left(1-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{22}+.....+\frac{1}{43}-\frac{1}{50}\right).\frac{5-(1+3+5+7+.....+49)}{217}$$

$$=\frac{1}{7}.\left(1-\frac{1}{50}\right).\frac{5-(12.50+25)}{217}=\frac{1}{7}.\frac{49}{50}.\frac{5-625}{7.31}=\frac{7.7.2.2.5.31}{7.2.5.5.7.31}=-\frac{2}{5}$$

## DẠNG 8 : TÍNH TỔNG CÙNG SỐ MŨ

**Bài 1:** Tổng cùng số mũ:

a, A= $1^2+2^2+3^2+...+98^2$

b, B= $-1^2+2^2-3^2+4^2-...-19^2+20^2$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có : $A=1.1+2.2+3.3+...+98.98$

$=> A=1(2-1)+2(3-1)+3(4-1)+...+98(99-1)$

$=> A=(1.2+2.3+3.4+...+98.99)-(1+2+3+...+98)$

Đặt $B=1.2+2.3+3.4+...+98.99$, Tính tổng B ta được :

$3B=1.2(3-0)+2.3(4-1)+3.4(5-2)+...+98.99(100-97)$

$3B=(1.2.3-0.1.2)+(2.3.4-1.2.3)+(3.4.5-2.3.4)+...+(98.99.100-97.98.99)$

$3B=98.99.100-0.1.2=98.99.100 \Rightarrow B=\dfrac{98.99.100}{3}$

Thay vào A ta được : $A=B+\dfrac{98.99}{2}=\dfrac{98.99.100}{3}+\dfrac{98.99}{2}$

b, Ta có : $B=-1^2+2^2-3^2+4^2-...-19^2+20^2 \Rightarrow B=-(1^2-2^2+3^2-4^2+...+19^2-20^2)$

$B=-\left[\left(1^2+2^2+3^2+...+19^2+20^2\right)-2\left(2^2+4^2+6^2+...+20^2\right)\right]$

$B=-\left[\left(\dfrac{20.21.22}{3}+\dfrac{20.21}{2}\right)-2.2^2\left(1^2+2^2+3^2+...+10^2\right)\right]$

$B=-20.22.7-20.7-8\left(\dfrac{10.11.12}{3}+\dfrac{10.11}{2}\right)=-20.7.23-8(10.11.4+5.11)$

**Bài 2 :** Tổng cùng số mũ :

a, D = $1^2+3^2+5^2+...+99^2$

b, E= $11^2+13^2+15^2+...+199^2$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có : $D=\left(1^2+2^2+3^2+4^2+...+99^2+100^2\right)-\left(2^2+4^2+6^2+...+100^2\right)$

$\Rightarrow D=\left(\dfrac{100.101.102}{3}+\dfrac{100.101}{2}\right)-2^2\left(1^2+2^2+3^2+...+50^2\right)$

Đặt $A=1^2+2^2+3^2+...+50^2 \Rightarrow A=\dfrac{50.51.52}{3}+\dfrac{50.51}{2}$, Thay vào D ta được :

$D=100.101.34+50.101-4(50.52.17+25.51)$

b, Ta có : $E=11^2+12^2+13^2+14^2+15^2+...+199^2+200^2-\left(12^2+14^2+...+200^2\right)$

Đặt $A=11^2+12^2+13^2+...+200^2, B=12^2+14^2+...+200^2$

Tính ta được :

$A = 11.11 + 12.12 + 13.13 + ... + 200.200 = 11.(12-1) + 12.(13-1) + ... + 200.(201-1)$

$\Rightarrow A = (11.12 - 11) + (12.13 - 12) + (13.14 - 13) + ... + (200.201 - 200)$

$A = (11.12 + 12.13 + 13.14 + ... + 200.201) - (11 + 12 + 13 + ... + 200)$

$A = \left(\dfrac{200.201.202}{3} - \dfrac{10.11.12}{2}\right) - \left(\dfrac{211.190}{2}\right)$

Và $B = 2^2(6^2 + 7^2 + 8^2 + ... + 100^2) = 4\left(\dfrac{100.101.102}{3} - \dfrac{5.6.7}{2}\right) - \left(\dfrac{106.95}{2}\right)$

Vậy $E = A - B$

**Bài 3 :** Tổng cùng số mũ :

a, C= $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 20^2$

b, F= $1^2 + 4^2 + 7^2 + ... + 100^2$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có : $C = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2)$

Đặt $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2 = 1.1 + 2.2 + 3.3 + ... + 10.10$

$A = 1.(2-1) + 2.(3-1) + 3.(4-1) + ... + 10.(11-1)$

$A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 10.11) - (1 + 2 + 3 + ... + 10) = \dfrac{10.11.12}{3} - \dfrac{10.11}{2}$

b, Ta có : $F = 1.1 + 4.4 + 7.7 + 10.10 + ... + 100.100$

$F = 1(4-3) + 4(7-3) + 7(10-3) + 10(13-3) + ... + 100(103-3)$

$F = (1.4 - 1.3) + (4.7 - 3.4) + (7.10 - 3.7) + (10.13 - 10.3) + ... + (100.103 - 100.3)$

$F = (1.4 + 4.7 + 7.10 + 10.13 + ... + 100.103) - 3(1 + 4 + 7 + 10 + ... + 100)$

Đặt $A = 1.4 + 4.7 + 7.10 + ... + 100.103, B = 1 + 4 + 7 + 10 + ... + 100$

Tính $9A = 1.4(9-0) + 4.7(10-1) + 7.10(13-4) + ... + 100.103(106-97)$

$9A = (1.4.9 - 0.1.4) + (4.7.10 - 1.4.7) + (7.10.13 - 4.7.10) + ... + (100.103.106 - 97.100.103)$

$9A = 1.4.9 + (100.103.106 - 1.4.7) => A = \dfrac{100.103.106 + 8}{9}$

Tính B rồi thay vào F ta được : $F = A - 3B$

**Bài 4 :** Cho biết : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 12^2 = 650$, Tính nhanh tổng sau : $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 24^2$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 24^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + ... + 12^2) = 4.650$

**Bài 5 :** Tổng cùng số mũ :

a, G = $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 99^2$

b, K= $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + ... + 99.100^2$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có :

$G = 1.1 + 3.3 + 5.5 + 7.7 + ... + 99.99$

$G = 1.(3-2) + 3.(5-2) + 5(7-2) + 7(9-2) + ... + 99(101-2)$

$G = (1.3 - 1.2) + (3.5 - 2.3) + (5.7 - 2.5) + (7.9 - 2.7) + ... + (99.101 - 2.99)$

$G = (1.3 + 3.5 + 5.7 + 7.9 + ... + 99.101) - 2(1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99)$

Đặt $A = 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 99.101, B = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99$

Tính $A \Rightarrow 6A = 1.3(6-0)+3.5(7-1)+5.7(9-3)+...+99.101(103-97)$

$6A = (1.3.6-0.1.3)+(3.5.7-1.3.5)+(5.7.9-3.5.7)+...+(99.101.103-97.99.101)$

$6A = 1.3.6+(99.101.103-1.3.5) = 99.101.103+3 => A = \dfrac{99.101.103+3}{6}$

Tính tổng B rồi thay vào G

b, Ta có :

$K = 1.2.2+2.3.3+3.4.4+...+99.100.100$

$K = 1.2(3-1)+2.3(4-1)+3.4(5-1)+...+99.100(101-1)$

$K = (1.2.3-1.2)+(2.3.4-2.3)+(3.4.5-3.4)+...+(99.100.101-99.100)$

$K = (1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+99.100.101)-(1.2+2.3+3.4+...+99.100)$

Đặt $A = 1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+99.100.101, B = 1.2+2.3+3.4+...+99.100$

Tính $A \Rightarrow 4A = 1.2.3(4-0)+2.3.4(5-1)+3.4.5(6-2)+...+99.100.101(102-98)$

$4A = (1.2.3.4-0.1.2.3)+(2.3.4.5-1.2.3.4)+(3.4.5.6-2.3.4.5)+...+(99.100.101.102-98.99.100.101)$

$4A = 99.100.101.102 => A = \dfrac{99.100.101.102}{4}$

Tính B tương tự rồi thay vào K

**Bài 6 :** Tổng cùng số mũ :

a, H = $2^2+4^2+6^2+...+100^2$ b, I = $1.3^2+3.5^2+5.7^2+...+97.99^2$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có :

$H = 2^2(1^2+2^2+3^2+...+50^2) = 4.A$

$A = 1.1+2.2+3.3+4.4+...+50.50$

$A = 1.(2-1)+2(3-1)+3(4-1)+4(5-1)+...+50(51-1)$

$A = (1.2-1)+(2.3-2)+(3.4-3)+...+(50.51-50)$

$A = (1.2+2.3+3.4+...+50.51)-(1+2+3+...+50)$

Tính tổng A ta được : $A = \dfrac{50.51.51}{3} - \dfrac{50.51}{2}$, Thay vào H ta được

b, Ta có :

I= $1.3^2+3.5^2+5.7^2+...+97.99^2$ $=> I = 1.3.3+3.5.5+5.7.7+...+97.99.99$

$I = 1.3(5-2)+3.5.(7-2)+5.7(9-2)+...+97.99(101-2)$

$I = (1.3.5-1.3.2)+(3.5.7-3.5.2)+(5.7.9-5.7.2)+...+(97.99.101-97.99.2)$

$I = (1.3.5+3.5.7+5.7.9+...+97.99.101)-2(1.3+3.5+5.7+...+97.99)$

Đặt $A = 1.3.5+3.5.7+5.7.9+...+97.99.101, B = 1.3+3.5+5.7+...+97.99$

Ta có :

$8A = 1.3.5.8+3.5.7(9-1)+5.7.9(11-3)+...+97.99.101(103-95)$

$8A = 1.3.5.8+(3.5.7.9-1.3.5.7)+(5.7.9.11-3.5.7.9)+...+(97.99.101.103-95.97.99.101)$

$8A = 1.3.5.8+97.99.101.103-1.3.5.7 = 97.99.101.103-15 => A = \dfrac{97.99.101.103-15}{8}$

Tương tự tính B rồi thay vào I

**Bài 7:** Biết : $1^3+2^3+...+10^3=3025$, Tính $A=2^3+4^3+...+20^3$

**Hướng dẫn giải**

$A=2^3\left(1^3+2^3+...+10^3\right)$

**Bài 8:** Cho biết: $1^2+2^2+3^2+...+12^2=650$, Tính nhanh tổng sau: $2^2+4^2+6^2+...+24^2$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $2^2+4^2+6^2+...+24^2=2^2\left(1^2+2^2+...+12^2\right)=4.650$

# DẠNG 9: TỔNG CÙNG CƠ SỐ

Để giải các bài toán thuộc dạng này chúng ta dùng phương pháp giải phương trình (làm trôi).

***Tính tổng dạng:*** $S = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n$ (1)

***Phương pháp:***

Bước 1: Nhân vào hai vế của đẳng thức với số **a** ta được.

$aS = a + a^2 + a^3 + a^4 + ... + a^{n+1}$. (2)

Bước 2: Lấy (2) trừ (1) vế theo vế được:

$$aS - S = a^{n+1} - 1 \Rightarrow S = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

**1) Tính tổng dãy có cơ số lớn hơn 1.**

**Bài 1:** Tổng cùng cơ số:

a, $A = 3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{100}$ b, $B = 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + ... + 2^{2009}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta thấy mỗi số hạng sau gấp số hạng liền trước nó "3" lần .

Ta có :

$$3S = 3^1 + 3^2 + ... + 3^{100} + 3^{101}$$

$$\Rightarrow 3A - A = 2A = (3-3) + (3^2 - 3^2) + ... + (3^{2000} - 3^{2000}) + (3^{2001} - 1)$$

$$\Rightarrow 2S = 3^{101} - 1$$

$$\Rightarrow S = \frac{3^{101} - 1}{2}$$

b, Ta có : $2^2 B = 2^3 + 2^5 + 2^7 + ... + 2^{2009} + 2^{2011}$

$$\Rightarrow 4B - B = 3B = (2^3 - 2^3) + (2^5 - 2^5) + ... + (2^{2009} - 2^{2009}) + (2^{2011} - 2)$$

$$\Rightarrow 3B = 2^{2011} - 2 \Rightarrow B = \frac{2^{2011} - 2}{3}$$

**Bài 2:** Tổng cùng cơ số:

a) $M = 5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \cdots + 5^{2018} + 5^{2019}$.

b) $C = 5 + 5^3 + 5^5 + 5^7 + ... + 5^{101}$

**Hướng dẫn giải**

a, $M = 5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \cdots + 5^{2018} + 5^{2019}$

$5M = 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \cdots + 5^{2019} + 5^{2020}$

$5M - M = (5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \cdots + 5^{2019} + 5^{2020})$

$-(5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \cdots + 5^{2018} + 5^{2019})$

$$4M = 5^{2020} - 1 \Rightarrow M = \frac{5^{2020} - 1}{4}$$

b, Ta có : $5^2 C = 5^3 + 5^5 + 5^7 + ... + 5^{101} + 5^{103}$

$=> 25C - C = 24C = (5^3 - 5^3) + (5^5 - 5^5) + ... + (5^{101} - 5^{101}) + (5^{103} - 5)$

$=> 24C = 5^{103} - 5 => C = \dfrac{5^{103} - 5}{24}$

**Bài 3:** Tổng cùng cơ số:

a, $B = 7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{2018} + 7^{2019}$ b, F = $1 + 5^2 + 5^4 + 5^6 + ... + 5^{2016}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có : Ta có $B = 7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{2018} + 7^{2019}$ và $7B = 7^2 + 7^3 + 7^4 + ... + 7^{2019} + 7^{2020}$

Khi đó $7B - B = 7^{2020} - 7$ suy ra $B = \dfrac{7^{2020} - 7}{6}$.

b, Ta có : $5^2 F = 5^2 + 5^4 + 5^6 + ... + 5^{2016} + 6^{2018}$

$25F - F = 24F = \left(5^2 - 5^2\right) + \left(5^4 - 5^4\right) + ... + \left(5^{2016} - 5^{2016}\right) + \left(5^{2018} - 1\right)$

$24F = 5^{2018} - 1 \Rightarrow F = \dfrac{5^{2018} - 1}{24}$

**Bài 3:** Thực hiện phép tính: $A = 2^{100} - 2^{99} - 2^{99} - ...... - 2^2 - 2 - 1$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có $A = 2^{100} - \left(2^{99} + 2^{98} + ...... + 2^2 + 2 + 1\right)$

$B = 2^{99} + 2^{98} + ...... + 2^2 + 2 + 1 \Rightarrow 2B = 2^{100} + 2^{99} + ...... + 2^3 + 2^2 + 2$

$\Rightarrow 2B - B = \left(2^{100} + 2^{99} + ...... + 2^3 + 2^2 + 2\right) - \left(2^{99} + 2^{98} + ...... + 2^2 + 2 + 1\right)$

$\Rightarrow B = 2^{100} - 1$

Vậy $A = 2^{100} - B = 2^{100} - \left(2^{100} - 1\right) = 2^{100} - 2^{100} + 1 = 1$

**Bài 4:** Tổng cùng cơ số: G = $1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + ... + 2^{2016}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có :

$2^2 G = 2^2 + 2^4 + 2^6 + ... + 2^{2016} + 2^{2018}$

$4G - G = 3G = \left(2^2 - 2^2\right) + \left(2^4 - 2^4\right) + ... + \left(2^{2016} - 2^{2016}\right) + \left(2^{2018} - 1\right) \Rightarrow 3G = 2^{2018} - 1 \Rightarrow G = \dfrac{2^{2018} - 1}{3}$

**Bài 5:** Tổng cùng cơ số:

a, $M = 2^{50} - 2^{49} - 2^{48} - ... - 2^2 - 2$ b, $N = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + ... + 3^2 - 3^1 + 1$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có :

$M = 2^{50} - \left(2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{48} + 2^{49}\right)$

Đặt $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{48} + 2^{49}$, Tính A ta được :

$A = 2^{50} - 2$, Thay vào M ta được :

$M = 2^{50} - A = 2^{50} - \left(2^{50} - 2\right) = 2$

b, Ta có :

$N = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + ... + 9^{98} - 9^{99} + 3^{100}$

$\Rightarrow 3N = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + ... + 3^{99} - 3^{100} + 3^{101}$

$\Rightarrow N + 3N = (3 - 3) + \left(3^2 - 3^2\right) + \left(3^3 - 3^3\right) + ... + \left(3^{100} - 3^{100}\right) + 3^{101} + 1$

$4N = 3^{101} + 1 => N = \frac{3^{101}+1}{4}$

**Bài 6:** Tổng cùng cơ số : I = $1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $2I = 2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{64}$

$\Rightarrow 2I - I = (2^3 - 2^3) + (2^4 - 2^4) + ... + (2^{63} - 2^{63}) + (2^{64} + 2 - 1) => I = 2^{64} + 1$

**Bài 7:** Tính giá trị của biểu thức: $B = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + ... + 2^{2008}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $B = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + ... + 2^{2008} \Rightarrow 2B = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + .... + 2^{2009}$

$\Rightarrow 2B + B = 3B = 1 + 2^{2009} \Rightarrow B = \frac{2^{2009}+1}{3}$

**Bài 8:** Tính $A = 2000(2001^9 + 2001^8 + ... + 2001^2 + 2001) + 1$

**Hướng dẫn giải**

Đặt : $B = 2001 + 2001^2 + 2001^3 + ... + 2001^9 \Rightarrow 2001B = 2001^2 + 2001^3 + ... + 2001^{10}$

$\Rightarrow 2001B - B = 2000B = 2001^{10} - 2001$, Khi đó :

$A = 2000B + 1 = 2001^{10} - 2001 + 1 = 2001^{10} - 2000$

**Bài 9:** Cho $H = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - ... - 2 - 1$, Tính $2010^H$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $H = 2^{2010} - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2008} + 2^{2009})$. Đặt : $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2009}$

Tính tổng A ta được : $A = 2^{2010} - 1$, Thay vào H ta được :

$H = 2^{2010} - (2^{2010} - 1) = 1 \Rightarrow 2010^H = 2010$

**Bài 10:** Tổng cùng cơ số : H= $1 + 2.6 + 3.6^2 + 4.6^3 + ... + 100.6^{99}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $6H = 6 + 2.6^2 + 3.6^3 + 4.6^4 + ... + 100.6^{100}$

$H - 6H = -5H = (2.6 - 6) + (3.6^2 - 2.6^2) + (4.6^3 - 3.6^3) + ... + (100.6^{99} - 99.6^{99}) + (1 - 100.6^{100})$

$-5H = 6 + 6^2 + 6^3 + ... + 6^{99} + (1 - 100.6^{100})$

Đặt $A = 6 + 6^2 + 6^3 + ... + 6^{99}$, Tính A ta được :

$A = \frac{6^{100}-6}{5}$, Thay vào H ta được :

$-5H = A + (1 - 100.6^{100}) = \frac{6^{100}-6}{5} + 1 - 100.6^{100} = \frac{6^{100} - 6 + 5 - 500.6^{100}}{5} = -\frac{499.6^{100}+1}{5}$

$\Rightarrow H = \frac{499.6^{100}+1}{25}$

**2) Tính tổng dãy có cơ số bé hơn 1.**

**Bài 1.** Tính tổng sau $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{2005}}$ (1)

**Hướng dẫn giải**

*Cách 1:* Ta thấy mỗi số hạng liền sau của tổng đều kém số hạng liền trước của nó "2" lần

$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{2004}}$ (2)

Trừ vế với vế của (2) cho (1) ta được: $S=1-\frac{1}{2^{2005}}=\frac{2^{2005}-1}{2^{2005}}$

*Cách 2:* Ta có: $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{2006}}$ (3)

Trừ vế với vế của (1) cho (3) ta được:

$$S-\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{2006}}=\frac{2^{2005}-1}{2^{2006}}\Rightarrow\frac{1}{2}S=\frac{2^{2005}-1}{2^{2006}}\Rightarrow S=\frac{2^{2005}-1}{2^{2005}}.$$

**Bài 2.** Tính nhanh: $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^8}.$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $3A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^7}$ (1)

$A=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^7}.$ (2)

Lấy (1) trừ (2) được: $2A=1-\frac{1}{3^8}=1-\frac{1}{6561}=\frac{6560}{6561}$ .

Do đó: $A=\frac{3280}{6561}.$

**Bài 3:** Tính tổng cơ số: A= $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+...+\frac{1}{7^{100}}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $\frac{1}{7}A=\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^4}+...+\frac{1}{7^{100}}+\frac{1}{7^{101}}$

$A-\frac{1}{7}A=\left(\frac{1}{7^2}-\frac{1}{7^2}\right)+\left(\frac{1}{7^3}-\frac{1}{7^3}\right)+...+\left(\frac{1}{7^{100}}-\frac{1}{7^{100}}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7^{101}}\right)$ =>

$\frac{6}{7}.A=\frac{7^{100}-1}{7^{101}}$ => $A=\frac{7^{100}-1}{6.7^{100}}$

**Bài 4:** Tính tổng cơ số: B = $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{20}}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\frac{1}{3}B=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{3^{21}}$

$B-\frac{1}{3}B=\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^3}\right)+...+\left(\frac{1}{3^{20}}-\frac{1}{3^{20}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{21}}\right)$ => $\frac{2}{3}.B=\frac{3^{20}-1}{3^{21}}$ => $B=\frac{3^{20}-1}{2.3^{20}}$

**Bài 5:** Tính tổng cơ số

a, D = $\left(-\frac{1}{7}\right)^0+\left(-\frac{1}{7}\right)^1+\left(-\frac{1}{7}\right)^2+...+\left(-\frac{1}{7}\right)^{2017}$

b, E= $-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}-...+\frac{1}{3^{50}}-\frac{1}{3^{51}}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $D=1-\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{7^3}+...+\frac{1}{7^{2016}}-\frac{1}{7^{2017}}$

$\frac{1}{7}D=\frac{1}{7}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}-\frac{1}{7^4}+...+\frac{1}{7^{2017}}-\frac{1}{7^{2018}}$

$D+\frac{1}{7}D=\left(\frac{-1}{7}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7^2}+\frac{-1}{7^2}\right)+...+\left(\frac{-1}{7^{2017}}+\frac{1}{7^{2017}}\right)+\left(1-\frac{1}{7^{2018}}\right)$

$\frac{8}{7}D=\frac{7^{2018}-1}{7^{2018}} \Rightarrow D=\frac{7^{2018}-1}{8.7^{2018}}$

b, Ta có: $\frac{1}{3}E=\frac{-1}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{3^{51}}-\frac{1}{3^{52}}$

$E+\frac{1}{3}E=\left(\frac{1}{3^2}+\frac{-1}{3^2}\right)+\left(\frac{-1}{3^3}+\frac{1}{3^3}\right)+...+\left(\frac{-1}{3^{51}}+\frac{1}{3^{51}}\right)+\left(\frac{-1}{3}+\frac{-1}{3^{52}}\right) \Rightarrow$

$\frac{4}{3}E=-\frac{3^{51}+1}{3^{52}} \Rightarrow E=-\frac{3^{51}+1}{4.3^{51}}$

**Bài 6:** Tính tổng cơ số $G=\frac{3}{5}+\frac{3}{5^4}+\frac{3}{5^7}+...+\frac{3}{5^{100}}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $G=\frac{3}{5}+\frac{3}{5^4}+\frac{3}{5^7}+...+\frac{3}{5^{100}}$ $G=3\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^7}+...+\frac{1}{5^{100}}\right)$

Đặt $A=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^7}+...+\frac{1}{5^{100}} \Rightarrow \frac{1}{5^3}A=\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{5^{10}}+...+\frac{1}{5^{103}}$

$A-\frac{1}{125}A=\left(\frac{1}{5^4}-\frac{1}{5^4}\right)+\left(\frac{1}{5^7}-\frac{1}{5^7}\right)+...+\left(\frac{1}{5^{100}}-\frac{1}{5^{100}}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5^{103}}\right)$

$\frac{124.A}{125}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5^{103}}=\frac{5^{102}-1}{5^{103}} \Rightarrow A=\frac{5^{102}-1}{5^{100}.124}$

**Bài 7:** Tính tổng cơ số

a, $K=\frac{200-\left(3+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+...+\frac{2}{100}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{99}{100}}=2$

b, $I=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+...+\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $TS=\left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(2-\frac{2}{4}\right)+\left(2-\frac{2}{5}\right)+...+\left(2-\frac{2}{100}\right)+1$

$TS=\frac{4}{3}+\frac{6}{4}+\frac{8}{5}+...+\frac{198}{100}+\frac{2}{2}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{99}{100}\right)=2.MS \Rightarrow K=\frac{TS}{MS}=\frac{2MS}{MS}=2$

b, Ta có : $I=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{100}} \Rightarrow \frac{1}{2}I=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{100}}+\frac{1}{2^{101}}$

$\Rightarrow I-\frac{1}{2}I=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^3}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{100}}-\frac{1}{2^{100}}\right)+\left(1-\frac{1}{2^{101}}\right)$

$\frac{1}{2}I=\frac{2^{101}-1}{2^{101}} \Rightarrow I=\frac{2^{101}-1}{2^{100}}$

**Bài 8:** Tính tổng cơ số: $C=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+...+\frac{1}{2^{99}}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có : $\frac{1}{2^2}C=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+...+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{101}}$

$C-\frac{1}{4}C=\frac{3}{4}C=\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^5}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{98}}-\frac{1}{2^{98}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{101}}\right)$

$=> \frac{3}{4}C=\frac{2^{100}-1}{2^{101}} => C-\frac{2^{100}-1}{3.2^{99}}$

**Bài 9:** Tính tổng cơ số: H= $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+...+\frac{2017}{3^{2017}}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $\frac{1}{3}H=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\frac{4}{3^5}+...+\frac{2016}{3^{2017}}+\frac{2017}{3^{2018}}$

$H-\frac{1}{3}H=\left(\frac{2}{3^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{3}{3^3}-\frac{2}{3^3}\right)+\left(\frac{4}{3^4}-\frac{3}{3^4}\right)+...+\left(\frac{2017}{3^{2017}}-\frac{2016}{3^{2017}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2017}{3^{2018}}\right)$

$\frac{2}{3}H=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{3^{2017}}+\frac{1}{3}-\frac{2017}{3^{2018}}$

Đặt $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{2017}}$, Tính A rồi thay vào H

**Bài 10:** Tính tổng cơ số: F = $1+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{5}{2^5}+...+\frac{100}{2^{100}}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\frac{1}{2}F=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^4}+\frac{4}{2^5}+\frac{5}{2^6}+...+\frac{99}{2^{100}}+\frac{100}{2^{101}}$

$F-\frac{1}{2}F=\left(\frac{4}{2^4}-\frac{3}{2^4}\right)+\left(\frac{5}{2^5}-\frac{4}{2^5}\right)+...+\left(\frac{100}{2^{100}}-\frac{99}{2^{100}}\right)+\left(1+\frac{3}{2^3}-\frac{1}{2}-\frac{100}{2^{101}}\right)$

$\frac{1}{2}F=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+...+\frac{1}{2^{100}}+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}-\frac{100}{2^{101}}\right)$

Đặt $A=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+...+\frac{1}{2^{100}}$. Tính A rồi thay vào F

## DẠNG 10: TÍNH ĐƠN GIẢN

**Bài 1:** Tính giá trị của các biểu thức:

a) $A=-37+54+(-70)+(-163)+246$.

b) $B=125.(-61).(-2)^3.(-1)^{2n}\quad (n\in\mathbb{N}^*)$.

c) $C=1+2-3-4+5+6-7-\ ...+2014-2015-2016+2017+2018$.

**Hướng dẫn giải**

a) $A=-37+54+(-70)+(-163)+246=(54+246)+\left[(-37)+(-163)\right]+(-70)$

$=300+(-200)+(-70)=30$.

Vậy $A=30$.

b) $B=125.(-61).(-2)^3.(-1)^{2n}\quad (n\in\mathbb{N}^*)$

$=125.(-8).(-61).1=61000$.

Vậy $B=61000$ .

c) $C=1+2-3-4+5+6-7-\ldots+2014-2015-2016+2017+2018$

$=1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+\ldots+(2014-2015-2016+2017)+2018$

$=1+2018=2019$.

Vậy $C=2019$.

**Bài 2:** Tính hợp lí: $B=\dfrac{51.125-51.42-17.150}{3+6+9+\ldots+99}$

**Hướng dẫn giải**

Đặt: $A=51.125-51.42-17.150$ ; $C=3+6+9+\ldots+99$.

$A=51.125-51.42-17.150=51.125-51.42-17.3.50$

$=51.125-51.42-51.50=51.(125-42-50)=51.33$.

$C=3+6+9+\ldots+99$

Số các hạng tử của C : $(99-3):3+1=33$.

Do đó: $C=3+6+9+\ldots+99=33.\left(\dfrac{99+3}{2}\right)=33.51$.

Vậy $B=\dfrac{51.125-51.42-17.150}{3+6+9+\ldots+99}=\dfrac{A}{C}=\dfrac{51.33}{33.51}=1$.

**Bài 3:** Tính bằng cách hợp lý nhất nếu có thể

a) $78.(-23)+37.(-78)+40.(-78)$

b) $-1\dfrac{5}{7}.15+\dfrac{2}{7}.(-15)+(-105).\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{7}\right)$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:

$78.(-23)+37.(-78)+40.(-78)=(-78).23+(-78).37+(-78).40=-78(23+37+40)$

$=(-78).100=-7800$

b) $-1\dfrac{5}{7}.15+\dfrac{2}{7}.(-15)+(-105).\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{7}\right)$

$=(-15).\dfrac{12}{7}+(-15).\dfrac{2}{7}+(-105).\dfrac{1}{105}=(-15)\left(\dfrac{12}{7}+\dfrac{2}{7}\right)+(-1)=(-15).2-1=-31$

**Bài 3:** Tính bằng cách hợp lý nhất nếu có thể

$$B=40.\left(\frac{171717}{303030}+\frac{1717171}{424242}+\frac{1717171}{565656}\right)$$

**Hướng dẫn giải**

$B=40.\left(\frac{171717}{303030}+\frac{1717171}{424242}+\frac{1717171}{565656}\right)$

$B=40.\left(\frac{17.10101}{30.10101}+\frac{17.10101}{42.10101}+\frac{17.10101}{56.10101}\right)$

$B=40.\left(\frac{17}{30}+\frac{17}{42}+\frac{17}{56}\right)$

$B=40.17\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}\right)$

$B=40.17\left(\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}\right)$

$B=40.17\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)$

$B=40.17.\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)$

$B=40.17.\frac{3}{40}$

$B=51$

**Bài 4:** Rút gọn $B=\dfrac{25^5+25^7+25^9}{5^{11}+5^{13}+5^{15}+5^{17}+5^{19}+5^{21}}$

**Hướng dẫn giải**

$$B=\frac{25^5+25^7+25^9}{5^{11}+5^{13}+5^{15}+5^{17}+5^{19}+5^{21}}=\frac{5^{10}+5^{14}+5^{18}}{\left(5^{11}+5^{15}+5^{19}\right)+\left(5^{13}+5^{17}+5^{21}\right)}=\frac{5^{10}\left(1+5^4+5^8\right)}{\left(1+5^4+5^8\right)\left(5^{11}+5^{13}\right)}$$

$$=\frac{5^{10}}{5^{11}+5^{13}}=\frac{1}{5+125}=\frac{1}{130}$$

**Bài 5:** Thực hiện phép tính: $A=\dfrac{2.3.5+4.9.25+6.9.35+10.21.40}{2.3.7+4.9.35+6.9.49+10.21.56}$

**Hướng dẫn giải**

$$A=\frac{2.3.5+4.9.25+6.9.35+10.21.40}{2.3.7+4.9.35+6.9.49+10.21.56}$$

$$=\frac{2.3.5+2.3.5.2.3.5+2.3.5.3.3.7+2.3.5.5.7.8}{2.3.7+2.3.7.2.3.5+2.3.7.3.3.7+2.3.7.5.7.8}$$

$$=\frac{2.3.5(1+2.3.5+3.3.7+5.7.8)}{2.3.7(1+2.3.5+3.3.7+5.7.8)}=\frac{5}{7}$$

**Bài 6:** Thực hiện phép tính:

a, $\dfrac{1.2.3+2.4.6+4.8.12+7.14.21}{1.3.5+2.6.10+4.12.20+7.21.35}$

b, $\dfrac{1.7.9+3.21.27+5.35.45+7.49.63}{1.3.5+3.9.15+5.15.25+7.21.35}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có : $\dfrac{1.2.3+2.4.6+4.8.12+7.14.21}{1.3.5+2.6.10+4.12.20+7.21.35}=\dfrac{1.2.3(1+2.2.2+4.4.4+7.7.7)}{1.3.5(1+2.2.2+4.4.4+7.7.7)}=\dfrac{1.2.3}{1.3.5}=\dfrac{2}{5}$

b, Ta có : $\dfrac{1.7.9+3.21.27+5.35.45+7.49.63}{1.3.5+3.9.15+5.15.25+7.21.35}=\dfrac{1.7.9(1+3.3.3+5.5.5+7.7.7)}{1.3.5(1+3.3.3+5.5.5+7.7.7)}=\dfrac{1.7.9}{1.3.5}=\dfrac{21}{5}$

**Bài 7:**Thực hiện phép tính: $\dfrac{1.2+2.4+3.6+4.8+5.10}{3.4+6.8+9.12+12.16+15.20}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $\dfrac{1.2+2.4+3.6+4.8+5.10}{3.4+6.8+9.12+12.16+15.20}=\dfrac{1.2(1+2.2+3.3+4.4+5.5)}{3.4(1+2.2+3.3+4.4+5.5)}=\dfrac{1.2}{3.4}=\dfrac{1}{6}$

$B=\dfrac{2.3+4.6+6.9+8.12}{3.4+6.8+9.12+12.16}$

**Bài 8:** Tính giá trị của biểu thức sau: $B=\dfrac{2a}{5b}+\dfrac{5b}{6c}+\dfrac{6c}{7d}+\dfrac{7d}{2a}$ biết $\dfrac{2a}{5b}=\dfrac{5b}{6c}=\dfrac{6c}{7d}=\dfrac{7d}{2a}$ và $a,b,c,d\neq 0$.

**Hướng dẫn giải**

Đặt $B=\dfrac{2a}{5b}=\dfrac{5b}{6c}=\dfrac{6c}{7d}=\dfrac{7d}{2a}=k\Rightarrow \dfrac{2a}{5b}.\dfrac{5b}{6c}.\dfrac{6c}{7d}.\dfrac{7d}{2a}=k^4=1\Rightarrow k=\pm 1\Rightarrow B=\pm 4.$ 1 => B = $\pm 4$

**Bài 9:** Tính gá trị của biểu thức: B=$\dfrac{a^2m-a^2n-b^2n+b^2m}{a^2+b^2}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $B=\dfrac{a^2(m-n)+b^2(m-n)}{a^2+b^2}=\dfrac{(a^2+b^2)(m-n)}{(a^2+b^2)}=m-n$

**Bài 10:** Thực hiện phép tính: $\dfrac{(ab+bc+cd+da)abcd}{(c+d)(a+b)+(b-c)(a-d)}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $MS=ca+cb+da+bd+ab-bd-ca+cd=(ab+bc+cd+da)$

Khi đó : $\dfrac{TS}{MS}=\dfrac{(ab+bc+cd+da)abcd}{(ab+bc+cd+da)}=abcd$

**Bài 8:** Tính giá trị của biểu thức: $A=\dfrac{(a+b)(-x-y)-(a-y)(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+bx)}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$A=\dfrac{(a+b)(-x-y)-(a-y)(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+by)}$$

$$=\dfrac{a(-x-y)+b(-x-y)-a(b-x)+y(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+by)}$$

$$=\dfrac{-ax-ay-bx-by-ab+ax+by-xy}{abxy(xy+ay+ab+by)}$$

$$=\dfrac{-ay-bx-ab-xy}{abxy(xy+ay+ab+by)}=\dfrac{-xy+ay+ab+by}{abxy(xy+ay+ab+by)}=\dfrac{-1}{abxy}$$

**Bài 9:** Tính tổng

a, A= $\dfrac{2^0+2^1+2^2+...+2^{2004}}{1+2^5+2^{10}+...+2^{2000}}$ b, B= $\dfrac{1+5+5^2+5^3+...+5^{100}}{1+4+4^2+4^3+...+4^{100}}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có:

$$A=\frac{\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)+\left(2^5+2^6+2^7+2^8+2^9\right)+...+\left(2^{2000}+2^{2001}+2^{2002}+2^{2003}+2^{2004}\right)}{1+2^5+2^{10}+2^{15}+...+2^{2000}}$$

$$A=\frac{\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)+2^5\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)+...+2^{2000}\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)}{1+2^5+2^{10}+2^{15}+...+2^{2000}}$$

$$A=\frac{\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)\left(1+2^5+2^{10}+...+2^{2000}\right)}{\left(1+2^5+2^{10}+...+2^{2000}\right)}=\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)$$

b, Ta có: $M=1+5+5^2+5^3+...+5^{100}$

$\Rightarrow 5M=5+5^2+5^3+...+5^{100}+5^{101} \Rightarrow 5M-M=4M=5^{101}-1 \Rightarrow M=\dfrac{5^{101}-1}{4}$

và $N=1+4+4^2+4^3+...+4^{100}$

$\Rightarrow 4N=4+4^2+4^3+4^4+...+4^{101} \Rightarrow 4N-N=3N=4^{101}-1 \Rightarrow N=\dfrac{4^{101}-1}{3}$

Khi đó: $B=\dfrac{M}{N}$

**Bài 11:** Tính tổng: A= $\dfrac{101+100+99+...+2+1}{101-100+99-98+...-2+1}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $TS=\dfrac{(1+101).101}{2}=101.51=5151$

$MS=(101-100)+(99-98)+...+(3-2)+1=1+1+...+1=51$.

Khi đó: $A=\dfrac{TS}{MS}=\dfrac{51.101}{51}=101$

**Bài 12:** Cho $x$ là tổng của tất cả các số nguyên có hai chữ số, $y$ là số nguyên âm lớn nhất. Hãy tính giá trị của biểu thức : $A=2020.x^{2018}-2019.y^{2017}$ .

**Hướng dẫn giải**

Vì $x$ là tổng của tất cả các số nguyên có hai chữ số nên :

$x=(-10)+(-11)+...+(-99)+10+11+...+99$

$=\left[(-10)+10\right]+\left[(-11)+11\right]+...+\left[(-99)+99\right]=0+0+...+0=0$

$y$ là số nguyên âm lớn nhất nên: $y=-1$ . Do đó:

$A=2020.x^{2018}-2019.y^{2017}=2020.0^{2018}-2019.(-1)^{2017}=0-2019.(-1)=2019$.

## DẠNG 11: TÍNH TỈ SỐ CỦA HAI TỔNG

**Bài 1:** Thực hiện phép tính: $C=\dfrac{\dfrac{2010}{1}+\dfrac{2009}{2}+\dfrac{2008}{3}+....+\dfrac{1}{2010}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2011}}$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có $\dfrac{2010}{1}+\dfrac{2009}{2}+\dfrac{2008}{3}+....+\dfrac{1}{2010}$

$=\left(\dfrac{2009}{2}+1\right)+\left(\dfrac{2008}{3}+1\right)+\left(\dfrac{2007}{4}+1\right)....+\left(\dfrac{1}{2010}+1\right)+1$

$=\dfrac{2011}{2}+\dfrac{2011}{3}+\dfrac{2011}{4}+...+\dfrac{2011}{2010}+\dfrac{2011}{2011}$

$=2011\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2010}+\dfrac{1}{2011}\right)$

Do đó $C=\dfrac{\dfrac{2010}{1}+\dfrac{2009}{2}+\dfrac{2008}{3}+....+\dfrac{1}{2010}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2011}}=\dfrac{2011\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2010}+\dfrac{1}{2011}\right)}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2011}}=2011$

**Bài 2:** Tính giá trị các biểu thức :

a) $A=\dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{97}+\dfrac{1}{99}}{\dfrac{1}{1.99}+\dfrac{1}{3.97}+\dfrac{1}{5.95}+...+\dfrac{1}{97.3}+\dfrac{1}{99.1}}$; b) $B=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{100}}{\dfrac{99}{1}+\dfrac{98}{2}+\dfrac{97}{3}+...+\dfrac{1}{99}}$.

**Hướng dẫn giải**

a) Ghép các phân số ở số bị chia thành từng cặp để MC giống mẫu của các phần số tương ứng ở số chia. Biến đối số bị chia : cộng từng cặp các phân số cách đều hai đầu ta được :

$$\left(1+\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{97}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{95}\right)+...+\left(\frac{1}{49}+\frac{1}{51}\right)=\frac{100}{1.99}+\frac{100}{3.97}+\frac{100}{5.95}+...+\frac{100}{49.51}.$$

Biểu thức này gấp 50 lần số chia. Vậy $A=50$.

b) Biến đổi số chia : viết các phần tử thành hiệu : $100-1,100-2,...,100-99$.

số chia bằng : $\dfrac{100-1}{1}+\dfrac{100-2}{2}+\dfrac{100-3}{3}+...+\dfrac{100-99}{99}$

$=\left(\dfrac{100}{1}+\dfrac{100}{2}+\dfrac{100}{3}+...+\dfrac{100}{99}\right)-\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{3}+...+\dfrac{99}{99}\right)$

$=100+100\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{99}\right)-99$

$$1+100\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{99}\right)=100\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right).$$

Biểu thức này bằng 100 lần số bị chia. Vậy $B=\frac{1}{100}$.

**Bài 3:** a) Tính $D=\dfrac{1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+98)}{1.98+2.97+3.96+...+98.1}$

b*) Chứng minh rằng biểu thức E có giá trị bằng $\frac{1}{2}$.

$$E=\frac{1.98+2.97+3.96+...+98.1}{1.2+2.3+3.4+...+98.99}$$

**Hướng dẫn giải**

a) Số bị chia gồm 98 tổng, số 1 có mặt ở 98 tổng, số 2 có mặt ở 97 tổng, số 3 có mặt ở 96 tổng…, số 97 có mặt ở 2 tổng, số 98 có mặt ở 1 tổng.

Như vậy số bị chia bằng $1.98+2.97+3.96+...+97.2+98.1$, bằng số chia. Vậy $D=1$.

b) Theo câu a, số bị chia bằng:

$1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3...+98)$. Theo công thức tính tổng các số tự nhiên liên tiếp, biểu thức này bằng: $\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2}+...+\frac{98.99}{2}$, bằng $\frac{1}{2}$ số chia.

Vậy $E=\frac{1}{2}$.

**Bài 4:** Cho $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+......+\frac{1}{37.38}$ và $B=\frac{1}{20.38}+\frac{1}{21.37}+.....+\frac{1}{38.20}$

Chứng minh rằng $\frac{A}{B}$ là một số nguyên.

**Hướng dẫn giải**

$$b)A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+.......+\frac{1}{37.38}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+......+\frac{1}{37}-\frac{1}{38}$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{37}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+.......+\frac{1}{38}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{38}\right)-2.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+.......+\frac{1}{38}\right)$$

$$=\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+.......+\frac{1}{38}$$

$$B=\frac{1}{20.38}+\frac{1}{21.37}+.....+\frac{1}{38.20}$$

$$\Rightarrow 58B=\frac{1}{20}+\frac{1}{38}+\frac{1}{21}+\frac{1}{37}+......+\frac{1}{38}+\frac{1}{20}=2\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+.....+\frac{1}{38}\right)=2A$$

$$B=\frac{2}{58}A\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{58}{2}=29\in\mathbb{Z}$$

**Bài 5:** Tính tỉ số $\frac{A}{B}$.

Biết $A=\frac{4}{7.31}+\frac{6}{7.11}+\frac{9}{10.41}+\frac{7}{10.57}$ và $B=\frac{7}{19.31}+\frac{5}{19.43}+\frac{3}{23.43}+\frac{11}{23.57}$.

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{A}{5}=\frac{4}{35.31}+\frac{6}{35.41}+\frac{9}{50.41}+\frac{7}{50.57}=\frac{1}{31}-\frac{1}{35}+\frac{1}{35}-\frac{1}{41}+\frac{1}{41}-\frac{1}{50}+\frac{1}{50}-\frac{1}{57}=\frac{1}{31}-\frac{1}{57}$$

$$\frac{B}{2}=\frac{7}{38.31}+\frac{5}{38.43}+\frac{3}{46.43}+\frac{11}{46.57}=\frac{1}{31}-\frac{1}{38}+\frac{1}{38}-\frac{1}{43}+\frac{1}{43}-\frac{1}{46}+\frac{1}{46}-\frac{1}{57}=\frac{1}{31}-\frac{1}{57}$$

$$\Rightarrow\frac{A}{5}=\frac{B}{2}\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{5}{2}$$

**Bài 6:** Tính giá trị của biểu thức sau một cách hợp lý:

$$\mathrm{A}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\cdots+\frac{1}{9120}+\frac{1}{9506}+\frac{1}{9900}}{50-\frac{50}{51}-\frac{51}{52}-\frac{52}{53}-.......-\frac{97}{98}-\frac{98}{99}-\frac{99}{100}}.$$

**Hướng dẫn giải**

Xét tử:

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\cdots+\frac{1}{9120}+\frac{1}{9506}+\frac{1}{9900}$$

$$\mathrm{T}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots+\frac{1}{95.96}+\frac{1}{97.98}+\frac{1}{99.100}$$

$$T=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{97}-\frac{1}{98}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$

$$T=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+......+\frac{1}{97}+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)-2.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{98}+\frac{1}{100}\right)$$

$$T=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+......+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{49}+\frac{1}{50}\right)$$

$$T=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+......+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\qquad(1)$$

Xét mẫu:

$$M = 50 - \frac{50}{51} - \frac{51}{52} - \frac{52}{53} - \ldots\ldots - \frac{97}{98} - \frac{98}{99} - \frac{99}{100}$$

$$M = \left(1 - \frac{50}{51}\right) + \left(1 - \frac{51}{52}\right) + \ldots\ldots + \left(1 - \frac{98}{99}\right) + \left(1 - \frac{99}{100}\right)$$

$$M = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: tử bằng mẫu. Do đó: $A = 1$

**Bài 7.** Tính $A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2019}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right)$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có $A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2019}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right)$

$$\Rightarrow 2.A = 2.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2019}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right)$$

$$2.A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2018}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right)$$

Xét hiệu:

$$2.A - A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2018}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2019}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right)$$

$$A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \ldots - \frac{1}{2^{2019}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right)$$

$$A = \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right) = 1$$

Vậy $A = 1$

**Bài 8:** Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{2012}{51} + \frac{2012}{52} + \frac{2012}{53} + \ldots + \frac{2012}{100}$ và $B = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots + \frac{1}{99.100}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $A = 2012\left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \ldots + \frac{1}{100}\right)$

$$B = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots. + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{100}\right)$$

$$B = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \ldots + \frac{1}{100}$$

Khi đó : $\frac{A}{B} = \frac{2012}{1} = 2012$

**Bài 9:** Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots + \frac{1}{199.200}$

và $B=\frac{1}{101.200}+\frac{1}{102.199}+...+\frac{1}{200.101}$

**Hướng dẫn giải**

$$A=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{199}-\frac{1}{200}\right)=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{200}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{200}\right)$$

$$A=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{200}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200}$$

$$A=\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{200}\right)+\left(\frac{1}{102}+\frac{1}{199}\right)+...+\left(\frac{1}{150}+\frac{1}{151}\right)=\frac{301}{101.200}+\frac{301}{102.199}+...+\frac{301}{150.151}$$

Và $B=\left(\frac{1}{101.200}+\frac{1}{200.101}\right)+\left(\frac{1}{102.199}+\frac{1}{199.102}\right)+...+\left(\frac{1}{150.151}+\frac{1}{151.150}\right)$

$$B=\frac{2}{101.200}+\frac{2}{102.199}+...+\frac{2}{150.151}$$

Khi đó : $\frac{A}{B}=\frac{301}{2}$

**Bài 10:** Tính giá trị $\frac{A}{B}$ biết: $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+...+\frac{1}{101.102}$ và

$B=\frac{1}{52.102}+\frac{1}{53.101}+\frac{1}{54.100}+...+\frac{1}{102.52}+\frac{2}{77.154}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $A=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\frac{1}{101}-\frac{1}{102}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)$

$$A=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{102}\right)$$

$$A=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{102}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{51}\right)=\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}$$

$$A=\left(\frac{1}{52}+\frac{1}{102}\right)+\left(\frac{1}{53}+\frac{1}{101}\right)+...+\left(\frac{1}{76}+\frac{1}{78}\right)+\frac{1}{77}=\frac{154}{52.102}+\frac{154}{53.101}+...+\frac{154}{76.78}+\frac{154}{77.154}$$

và $B=\left(\frac{1}{52.102}+\frac{1}{102.52}\right)+\left(\frac{1}{53.101}+\frac{1}{101.53}\right)+...+\left(\frac{1}{76.78}+\frac{1}{78.76}\right)+\frac{2}{77.154}$

$$B=\frac{2}{52.102}+\frac{2}{53.101}+...+\frac{2}{76.78}+\frac{2}{77.154}\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{154}{2}=77$$

**Bài 11:** Chứng minh rằng: $\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{99}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{100}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $VT=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{100}\right)$

$$VT=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{100}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{50}\right)=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{100}=VP$$

**Bài 12:** Cho $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+......+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}$ và

$P=\frac{1}{1008}+\frac{1}{1009}+\frac{1}{1010}+.....+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}$. Tính $\left(S-P\right)^{2016}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $P=\frac{1}{1008}+\frac{1}{1009}+\frac{1}{1010}+.....+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+....+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+....+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+.....+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2014}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+......+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}=S$$

Do đó $\left(S-P\right)^{2016}=0$

**Bài 13:** Chứng minh rằng: $100-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{99}{100}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $VT=(1-1)+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+...+\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{99}{100}=VP$ (đpcm)

**Bài 14:** Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết : $A=92-\frac{1}{9}-\frac{2}{10}-\frac{3}{11}-...-\frac{92}{100}$ và $B=\frac{1}{45}+\frac{1}{50}+\frac{1}{55}+...+\frac{1}{500}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có :

$$A=\left(1-\frac{1}{9}\right)+\left(1-\frac{2}{10}\right)+\left(1-\frac{3}{11}\right)+...+\left(1-\frac{92}{100}\right)=\frac{8}{9}+\frac{8}{10}+...+\frac{8}{100}=8\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{100}\right)$$

$B=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{100}\right)$. Khi đó : $\frac{A}{B}=\frac{8}{\frac{1}{5}}=40$

## DẠNG 12: TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

**Bài 1:** Cho $a,b,c$ là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $B=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)$

**Hướng dẫn giải**

+Nếu $a+b+c\neq 0$, theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}=\frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c}=1$$

Mà $\frac{a+b-c}{c}+1=\frac{b+c-a}{a}+1=\frac{c+a-b}{b}+1=2\Rightarrow\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=2$

Vậy $B=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)=\left(\frac{b+a}{a}\right)\left(\frac{c+a}{c}\right)\left(\frac{b+c}{b}\right)=8$

+Nếu $a+b+c=0$, theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}=\frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c}=0$$

Mà $\frac{a+b-c}{c}+1=\frac{b+c-a}{a}+1=\frac{c+a-b}{b}+1=1\Rightarrow\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=1$

Vậy $B=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)=\left(\frac{b+a}{a}\right).\left(\frac{c+a}{c}\right).\left(\frac{b+c}{b}\right)=1$

**Bài 2:** Cho biểu thức $A=\frac{3x^3-x^2-3x+2005}{3x^4-x^3+3x+2014}$. Tính giá trị của biểu thức với $x=\frac{1}{3}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có :

$$x=\frac{1}{3}\Rightarrow 3x=1\Rightarrow 3x-1=0$$

$$\Rightarrow A=\frac{x^2(3x-1)-(3x-1)+2014}{x^3(3x-1)+(3x-1)+2015}=\frac{2014}{2015}.$$

**Bài 2:** Cho $(a+3)(b-4)-(a-3)(b+4)=0$. Chứng minh: $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$(a+3)(b-4)-(a-3)(b+4)=0\Rightarrow ab-4a+3b-12-ab-4a+3b+12=0$$

Tính được $6a=8b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$

**Bài 3:** Cho x, y, z là số thực thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh rằng:

$$\mathrm{P}=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\frac{1}{1+y+yz}=\frac{x}{x+xy+xyz}=\frac{x}{1+x+xy}$ ;

Mặt khác: $\frac{1}{1+z+zx}=\frac{xy}{xy+xyz+x^2.yz}=\frac{xy}{1+x+xy}$

Do đó: $P=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$

$=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{1+x+xy}+\frac{xy}{1+x+xy}=\frac{1+x+xy}{1+x+xy}=1$ (đpcm)

**Bài 4:** Cho abc = 2, Tính $B=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{2c}{ac+2c+2}$

**Hướng dẫn giải**

$$B=\frac{a}{ab+a+abc}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{abc^2}{ac+abc^2+abc}=\frac{a}{a\left(b+1+bc\right)}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{abc^2}{ac\left(1+bc+b\right)}=1$$

**Bài 5:** Cho xyz=2010, Chứng minh rằng: $\frac{2010x}{xy+2010x+2010}+\frac{y}{yz+y+2010}+\frac{z}{xz+z+1}=1$

**Hướng dẫn giải**

$$VT=\frac{x^2yz}{xy+x^2yz+xyz}+\frac{y}{yz+y+xyz}+\frac{z}{xz+z+1}=1$$

**Bài 8:** Tính giá trị của biểu thức : $A=10a+16b+4a-2b$ với a + b = 50

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $A=\left(10a+4a\right)+\left(16b-2b\right)=14a+14b=14\left(a+b\right)=14.50=700$

**Bài 9:** Tính giá trị của biểu thức: $5x^2+6x-2$ khi $\left|x-1\right|=2$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : Khi $\left|x-1\right|=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=2 \\ x-2=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=0 \end{array}\right.$

Khi $x=3\Rightarrow A=5x^2+6x-2=5.9+6.3-2=61$. Khi $x=0\Rightarrow A=5x^2+6x-2=-2$

**Bài 10:** Tính giá trị của biểu thức: $P=x^{2020}+y^{2020}$ khi $\left|x-1\right|+\left(x+y-2\right)^{2020}=0$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $\left\{\begin{array}{l} \left|x-1\right|\ge 0 \\ \left(x+y-2\right)^{2020}\ge 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|x-1\right|+\left(x+y-2\right)^{2020}\ge 0$

Do đó để $\left|x-1\right|+\left(x+y-2\right)^{2020}=0$ thì $\left\{\begin{array}{l} \left|x-1\right|=0 \\ \left(x+y-2\right)^{2020}=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x+y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=1.$

Vậy : $P=x^{2020}+y^{2020}=1^{2020}+1^{2020}=2.$

**Bài 11:** Tính giá trị của biểu thức: $x^4-5y^3+4$, biết $\left(x-1\right)^{2020}+\left(y+2\right)^{2022}=0$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : Vì $\left\{\begin{array}{l} \left(x-1\right)^{2020}\ge 0 \\ \left(y+2\right)^{2022}\ge 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left(x-1\right)^{2020}+\left(y+2\right)^{2022}=0\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-1=0 \\ y+2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \end{array}\right.$, Thay vào ta được : $A=1^4-5.(-2)^3+4=1+40+4=45.$

**Bài 12:** Cho a, b,c khác 0 và đôi 1 khác nhau thỏa mãn : $a^2\left(b+c\right)=b^2\left(a+c\right)=2013$, Tính $A=c^2(a+b)$

**Hướng dẫn giải**

Ta có :

$a^2(b+c)=b^2(a+c)=2013$

$\Rightarrow a^2b+a^2c-b^2a-b^2c=0 \Leftrightarrow ab(a-b)+c(a-b)(a+v)=0$

$(a-b)(ab+bc+ca)=0 \Rightarrow ab+bc+ca=0$ vì $a\neq b$

Khi đó : $(ab+bc+ca)b=0 \Rightarrow b^2(a+c)=-abc \Rightarrow -abc=2013$

tương tự : $(ab+bc+ca)c=0 \Rightarrow c^2(a+b)=-abc=2013$

**Bài 13:** Cho $A=\dfrac{1{,}11+0{,}19-1{,}3.2}{2{,}06+0{,}54}-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right):2$ và $B=\left(5\dfrac{7}{8}-2\dfrac{1}{4}-0{,}5\right):2\dfrac{23}{26}$

a, Rút gọn A và B

b, Tìm x nguyên sao cho: $A<x<B$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có :

$A=\dfrac{-1}{2}-\left(\dfrac{5}{6}\right):2=\dfrac{-1}{2}-\dfrac{5}{12}=\dfrac{-11}{12}$, Và $B=\dfrac{25}{8}:\dfrac{75}{26}=\dfrac{13}{12}$

b, Ta có :

$A<x<B => \dfrac{-11}{12}<x<\dfrac{13}{12} => \dfrac{-11}{12}<\dfrac{12x}{12}<\dfrac{13}{12} => -11<12x<13 => \left[\begin{array}{l}12x=0\\12x=12\end{array}\right.$

**Bài 14:** Cho $P=|2a-1|-(a-5)$

a, Rút gọn P

b, Có giá trị nào của a để P = 4 không?

**Hướng dẫn giải**

Ta có :

a, $P=\left[\begin{array}{l}2a-1-a+5, vs\left(a\geq\dfrac{1}{2}\right)\\1-2a-a+5,\left(a<\dfrac{1}{2}\right)\end{array}\right.=\left[\begin{array}{l}a+4\left(a\geq\dfrac{1}{2}\right)\\6-3a\left(a<\dfrac{1}{2}\right)\end{array}\right.$ b , Để

$P=4 => \left[\begin{array}{l}a+4=4\left(a\geq\dfrac{1}{2}\right)\\6-3a=4\left(a<\dfrac{1}{2}\right)\end{array}\right. => \left[\begin{array}{l}a=0(l)\\a=\dfrac{2}{3}(l)\end{array}\right.$

Vậy không có giá trị nào của a đề P =4

**Bài 15:** Cho biểu thức: $C=\dfrac{2(x-1)^2+1}{(x-1)^2+2}$

a) Chứng tỏ rằng với mọi $x$, biểu thức C luôn có giá trị là một số dương.

b) Tìm tất cả các số nguyên $x$, để $C$ có giá trị là một số nguyên

c) Với giá trị nào của $x$ thì biểu thức $C$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Hướng dẫn giải**

a) Ta thấy: $2(x-1)^2+1>0$ và $(x-1)^2+2>0 \quad \forall x$,

Vậy biểu thức C luôn dương.

b) $C=\dfrac{2\left[(x-1)^2+2\right]-3}{(x-1)^2+2}=2-\dfrac{3}{(x-1)^2+2}$

Để C nguyên, ta phải có $(x-1)^2+2$ là ước dương của $3$

Vì $(x-1)^2+2\ge 2$, nên $(x-1)^2+2=3\Rightarrow (x-1)^2=1\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ x=0\end{array}\right.$

c) C nhỏ nhất khi $\dfrac{3}{(x-1)^2+2}$ lớn nhất

Vì $(x-1)^2+2\ge 2$ nên $\dfrac{3}{(x-1)^2+2}\le\dfrac{3}{2}\Rightarrow 2-\dfrac{3}{(x-1)^2+2}\ge 2-\dfrac{2}{3}$ hay $C\ge\dfrac{1}{3}$

Vậy $MinC=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=1$

**Bài 16:** Cho 2 biểu thức: $A=\dfrac{4x-7}{x-2};B=\dfrac{3x^2-9x+2}{x-3}$

a) Tìm giá trị nguyên của $x$ để mỗi biểu thức có giá trị nguyên

b) Tìm giá trị nguyên của $x$ để cả hai biểu thức cùng có giá trị nguyên

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $A=\dfrac{4x-7}{x-2}=\dfrac{4(x-2)+1}{x-2}=4+\dfrac{1}{x-2}$

Với $x\in\mathbb{Z}$ thì $x-2\in\mathbb{Z}$

Để $A$ nguyên thì $\dfrac{1}{x-2}$ nguyên $\Rightarrow x-2\in U(1)\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x-2=1\\ x-2=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=3\\ x=1\end{array}\right.$

$B=\dfrac{3x^2-9x+2}{x-3}=\dfrac{3x(x-3)+2}{x-3}=3x+\dfrac{2}{x-3}$

Với $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x-3\in\mathbb{Z}$

Để $B$ nguyên thì $\dfrac{2}{x-3}$ nguyên $\Rightarrow x-3\in U(2)=\{\pm1;\pm2\}$

Do đó $x=5,x=1,x=4,x=2$

Vậy để $B$ nguyên thì $x \in \{5;1;4;2\}$

b) Từ câu a suy ra để $A, B$ cùng nguyên thì $x = 1$.

**Bài 17:** Cho các số $a,b,c$ khác 0 thỏa mãn $\dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{bc}{b+c} = \dfrac{ca}{c+a}$

Tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a} \Leftrightarrow \frac{abc}{(a+b)c} = \frac{bca}{(b+c)a} = \frac{cab}{(c+a)b}$$

$$\frac{abc}{ac+bc} = \frac{abc}{ab+ac} \Leftrightarrow ac+bc = ab+ac \Leftrightarrow bc = ab \Leftrightarrow a = c$$

Tương tự, chứng minh được $a = b = c \Rightarrow M = 1$

# CHUYÊN ĐỀ 2: CÁC BÀI TOÁN VỀ LŨY THỪA SỐ TỰ NHIÊN

## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ:

* Luỹ thừa với số mũ tự nhiên: $a^n = a..a.a.a.a....a$ ($n$ thừa số $a$ với $a \in \mathbb{Q}$).

Qui ước: $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$ và $a^1 = a$.

* Các phép tính luỹ thừa:

- Nhân hai luỹ thưa cùng cơ số: $a^m.a^n = a^{m+n}$.

- Chia hai luỹ thừa cùng cơ số : $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0;\ m \geq n)$.

- Luỹ thừa của một tích: $(a.b)^n = a^n.b^n$.

- Luỹ thừa của một thương: $(a:b)^n = a^n : b^n (b \neq 0)$.

- Luỹ thừa của luỹ thừa: $(a^m)^n = a^{m.n}$.

- Luỹ thừa tầng: $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

Ví dụ: $3^{2^3} = 3^8$.

- Luỹ thừa với số mũ âm: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

Ví dụ: $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3}$.

**B/ CÁC PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH 2 LŨY THỪA**

**I/ Phương pháp 1:**

**Cơ sở phương pháp:** Để so sánh hai luỹ thừa ta thường đưa về so sánh hai luỹ thừa cùng cơ số hoặc cùng số mũ .

- Nếu 2 luỹ thừa cùng cơ số ( lớn hơn 1) thì luỹ thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn.

$a^m > a^n$ $(a > 1) \Leftrightarrow m > n$

- Nếu 2 luỹ thừa cùng số mũ (lớn hơn 0) thì lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn .

$a^n > b^n$ $(n > 0) \Leftrightarrow a > b$

**Ví dụ minh họa:**

★**Thí dụ 1.** So sánh các lũy thừa sau:

a) $128^7$ và $4^{24}$ b) $81^8$ và $27^{11}$

**Phân tích:** Nhận thấy, ở câu a) thì $128$ và $4$ là các cơ số liên quan tới lũy thừa cơ số $2$, ở câu b) thì $81$ và $27$ liên quan tới lũy thừa cơ số 3. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số, rồi dựa vào so sánh số mũ để so sánh chúng với nhau.

**Hướng dẫn giải**

a) Có : $\left.\begin{matrix} 128^7 = (2^7)^7 = 2^{49} \\ 4^{24} = (2^2)^{24} = 2^{48} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 128^7 > 4^{24}$

b) Có $\left.\begin{matrix} 81^8 = 3^{32} \\ 27^{11} = 3^{33} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 81^8 < 27^{11}$

★**Thí dụ 2.** So sánh các lũy thừa sau:

a) $5^{36}$ và $11^{24}$ b) $32^{60}$ và $81^{50}$ c) $3^{500}$ và $7^{300}$

**Phân tích:** Nhận thấy, ở câu a) thì các lũy thừa có thể đưa về cùng số mũ $12$, ở câu b) và c) các lũy thừa có thể đưa về cùng số mũ 100. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng số mũ, rồi dựa vào so sánh cơ số để so sánh chúng với nhau.

**Hướng dẫn giải**

a) Có $\left.\begin{matrix} 5^{36} = 125^{12} \\ 11^{24} = 121^{12} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5^{36} > 11^{24}$

b) Có $\left.\begin{matrix} 32^{60} = 2^{300} = 8^{100} \\ 81^{50} = 3^{200} = 9^{100} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 32^{60} < 81^{50}$

c) Có $\left.\begin{matrix} 3^{500} = 243^{100} \\ 7^{300} = 343^{100} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3^{500} < 7^{300}$

★**Thí dụ 3.** So sánh các lũy thừa:

a) $3^{2n}$ và $2^{3n}$ $(n \in N^*)$. b) $2^{100}$ và $3^{200}$. c) $5^{100}$ và $3^{500}$.

**Hướng dẫn giải**

a) $3^{2n} = \left(3^2\right)^n = 9^n; 2^{3n} = \left(2^3\right)^n = 8^n$

Vì $9 > 8 \Rightarrow 3^2 > 2^3 => (3^2)^n > (2^3)^n$

b) $2^{100} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ và $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$

Vì $8^{100} < 9^{100} \Rightarrow 2^{300} < 3^{200}$.

c) $5^{300} = \left(5^3\right)^{100} = 125^{100}$ và $3^{500} = \left(3^3\right)^{100} = 243^{100}$

Vì $125^{100} < 243^{100} \Rightarrow 5^{300} < 3^{500}$.

✍ **Lời bình:** Qua ba ví dụ trên ta thấy rằng, trước khi so sánh hai lũy thừa với nhau trước hết ta cần làm hai việc sau:

+ Kiểm tra cơ số xem các cơ số có biến đổi được về cùng cơ số không.

+ Kiểm tra số mũ của các lũy thừa xem có ước chung lớn nhất không.

Việc làm này sẽ giúp chúng ta lựa chọn đúng phương pháp so sánh.

**II/ Phương pháp 2:**

**Cơ sở phương pháp:** Dùng tính chất bắc cầu, tính chất đơn điệu của phép nhân

A > B và B > C thì A > C

A.C < B.C (với C > 0) ⇔ A < B

**C/ Các dạng toán thường gặp.**

**Dạng 1: So sánh hai số lũy thừa.**

★**Thí dụ 1.** Hãy so sánh:

a) $107^{50}$ và $73^{75}$.

b) $2^{91}$ và $5^{35}$.

**Phân tích:** Trong câu a) mặc dù số mũ của hai lũy thừa có ước chung là 25, tuy nhiên khi đó cơ số sẽ là $73^3$ và $107^2$, các cơ số này khi tính ra sẽ rất lớn, do đó việc đưa về so sánh hai lũy thừa cùng số mũ sẽ không khả quan. Còn trong câu b) cả số mũ và cơ số đều không có ước chung nên cũng không thể áp dụng các phương pháp trong các ví dụ trên. Như vậy chúng ta chỉ còn cách lựa chọn dùng tính chất bắc cầu (so sánh qua lũy thừa trung gian).

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $107^{50} < 108^{50} = \left(4.\ 27\right)^{50} = 2^{100}.\ 3^{150}$

$73^{75} > 72^{75} = \left(8.\ 9\right)^{75} = 2^{225}.\ 3^{150}$

Vì $2^{100} < 2^{225} \Rightarrow 2^{100}.3^{150} < 2^{225}.3^{150} \Rightarrow 107^{50} < 73^{75}$.

b) Ta có: $2^{91} > 2^{90} = \left(2^5\right)^{18} = 32^{18}$

$$5^{35} < 5^{36} = \left(5^2\right)^{18} = 25^{18}$$

Vì $32^{18} > 25^{18} \Rightarrow 2^{91} > 5^{35}$.

★**Thí dụ 2.** Hãy so sánh:

a) $107^{50}$ và $73^{75}$ b) $2^{91}$ và $5^{35}$

c) $54^4$ và $21^{12}$ d) $9^8$ và $8^9$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có : $107^{50} < 108^{50} = 2^{100}.3^{150}$ và $73^{75} > 72^{75} = 2^{225}.3^{150}$ nên $107^{50} < 73^{75}$

b) Ta có : $2^{91} = \left(2^{13}\right)^7 = 8192^7$ và $5^{35} = \left(5^5\right)^7 = 3125^7$ nên $2^{91} > 5^{35}$

c) Ta có : $54^4 = \left(2.27\right)^4 = 2^4.3^{12}$ và $21^{12} = 3^{12}.7^{12}$ nên $54^4 < 21^{12}$

d) Ta có : $9^8 < 10^8 = 100^4 = 100.100^3$

Và $8^9 = 512^3 > 500^3 = 5^3.100^3 = 125.100^3$ nên $9^8 < 8^9$

✍ **Lời bình:** Việc phân tích lũy thừa thành tích các lũy thừa sẽ giúp ta nhìn ra thừa số chung của các lũy thừa, từ đó việc so sánh hai lũy thừa chỉ còn dựa vào việc so sánh các thừa số riêng.

**Dạng 2: So sánh biểu thức lũy thừa với một số (so sánh hai biểu thức lũy thừa)**

* Thu gọn biểu thức lũy thừa bằng cách vận dụng các phép tính lũy thừa, cộng trừ các số theo quy luật ......

* Vận dụng phương pháp so sánh hai lũy thữa ở phần B.

** Nếu biểu thức lũy thừa là dạng phân thức: Đối với từng trường hợp bậc của luỹ thừa ở tử lớn hơn hay bé hơn bậc của luỹ thừa ở mẫu mà ta nhân với hệ số thích hợp nhằm tách phần nguyên rồi so sánh từng phần tương ứng.*

***Với a, n, m, K*** $\in \mathbb{N}^*$. *Ta có:*

*- Nếu* $m > n$ *thì* $K - \frac{a}{m} > K - \frac{a}{n}$ *và* $K + \frac{a}{m} < K + \frac{a}{n}$

*- Nếu* $m < n$ *thì* $K - \frac{a}{m} < K - \frac{a}{n}$ *và* $K + \frac{a}{m} > K + \frac{a}{n}$

*(còn gọi là phương pháp so sánh phần bù)*

* Với biểu thức là tổng các số $\frac{1}{a^2}$ (với a ∈ $N^*$) ta có vận dụng so sánh sau:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$$

★**Thí dụ 1.** Cho $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^9$. So sánh S với $5.2^8$.

**Phân tích:** Trước khi so sánh biểu thức S với $5.2^8$ ta cần dùng phương pháp tính tổng theo quy luật để tính S. Để làm việc này ta cần nhân 2 vào hai vế của biểu thức S, sau đó tính hiệu $2S - S$ thì sẽ triệt tiêu được các số hạng giống nhau và tính được S.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^9$

$$2.S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ........ + 2^9 + 2^{10}$$

$$\Rightarrow 2.S - S = S = 2^{10} - 1$$

Mà $2^{10} - 1 < 2^{10} = 2^8.2^2 = 4.2^8$

$$\Rightarrow S < 5.2^8.$$

✍ **Lời bình:** Để tính tổng S ta cần dùng phương pháp tính tổng của biểu thức tổng quát sau: $S = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n \ (a \in N^*)$.

★**Thí dụ 2.** So sánh 2 biểu thức A và B trong từng trường hợp:

a) $A = \dfrac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$ và $B = \dfrac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$.

b) $C = \dfrac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1}$ và $D = \dfrac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1}$.

**Phân tích:**

- Ở câu a, biểu thức A và B có chứa luỹ thừa cơ số $10$, nên ta so sánh $10A$ và $10B$.

- Ở câu b, biểu thức C và D có chứa luỹ thừa cơ số $2$ nên ta so sánh $\dfrac{1}{2}C$ và $\dfrac{1}{2}D$.

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:

$$A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$$

$$\Rightarrow 10A = 10.\left(\frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}\right) = \frac{10^{16} + 10}{10^{16} + 1} = \frac{10^{16} + 1 + 9}{10^{16} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{16} + 1}.$$

$$B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$$

$$\Rightarrow 10B = 10.\left(\frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}\right) = \frac{10^{17}+10}{10^{17}+1} = \frac{10^{17}+1+9}{10^{17}+1} = 1 + \frac{9}{10^{17}+1}.$$

Vì $10^{16}+1 < 10^{17}+1$ nên $\dfrac{9}{10^{16}+1} > \dfrac{9}{10^{17}+1}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{9}{10^{16}+1} > 1 + \frac{9}{10^{17}+1}$$

$\Rightarrow$ $10A > 10B$ hay $A > B.$

b) Ta có:

$$C = \frac{2^{2008}-3}{2^{2007}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\left(\frac{2^{2008}-3}{2^{2007}-1}\right) = \frac{2^{2008}-3}{2^{2008}-2} = \frac{2^{2008}-2-1}{2^{2008}-2} = 1 - \frac{1}{2^{2008}-2}.$$

$$D = \frac{2^{2007}-3}{2^{2006}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}\left(\frac{2^{2007}-3}{2^{2006}-1}\right) = \frac{2^{2007}-3}{2^{2007}-2} = \frac{2^{2007}-2-1}{2^{2007}-2} = 1 - \frac{1}{2^{2007}-2}.$$

Vì $2^{2008}-2 > 2^{2007}-2$ nên $\dfrac{1}{2^{2008}-2} < \dfrac{1}{2^{2007}-2}$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{2008}-2} > 1 - \frac{1}{2^{2007}-2}$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}C > \dfrac{1}{2}D$ hay $C > D.$

**Lời bình:** Đôi khi để so sánh hai biểu thức với nhau, ta cần biến đổi hai biểu thức về dạng tổng hai số hạng, trong đó có một số hạng chung và khi đó ta chỉ cần so sánh số hạng riêng.

**Dạng 3: Từ việc so sánh lũy thừa, tìm cơ số (số mũ) chưa biết.**

* Với các số tự nhiên $m, x, p$ và số dương $a$.

+ Nếu $a > 1$ thì:

$$a^m < a^x < a^p \Rightarrow m < x < p.$$

+ Nếu $a < 1$ thì:

$$a^m < a^x < a^p \Rightarrow m > x > p.$$

* Với các số dương $a, b$ và số tự nhiên $m$, ta có:

$$a^m < b^m \Rightarrow a < b.$$

★**Thí dụ 1.** Tìm các số nguyên n thoã mãn: $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$.

**Hướng dẫn giải**

Ta giải từng bất đẳng thức $3^{64} < n^{48}$ và $n^{48} < 5^{72}$.

Ta có: $n^{48} > 3^{64} \Rightarrow \left(n^3\right)^{16} > \left(3^4\right)^{16} \Rightarrow \left(n^3\right)^{16} > 81^{16} \Rightarrow n^3 > 81$

$\Rightarrow n > 4$ (với $n \in \mathbb{Z}$) (1).

Mặt khác $n^{48} < 5^{72} \Rightarrow \left(n^2\right)^{24} < \left(5^3\right)^{24} \Rightarrow \left(n^2\right)^{24} < 125^{24} \Rightarrow n^2 < 125$

$\Rightarrow -11 \le n \le 11$ (với $n \in \mathbb{Z}$) (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4 < n \le 11$.

Vậy n nhận các giá trị nguyên là: 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11.

**Lời bình:** Từ bài toán trên có thể thay đổi câu hỏi để được các bài toán sau:

**Bài số 1:** Tìm tổng các số nguyên n thoã mãn: $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$.

Giải tương tự trên ta có các số nguyên n thoã mãn là:

$$5+6+7+8+9+10+11 = 56.$$

**Bài số 2:** Tìm tất cả các số nguyên có một chữ số sao cho: $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$.

Giải tương tự trên ta có các số nguyên n thoã mãn là: 5; 6; 7; 8; 9.

**Bài số 3:** Tìm tất cả các số nguyên có 2 chữ số sao cho $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$

Giải tương tự trên ta có các số nguyên n thoã mãn là: 10; 11.

★**Thí dụ 2.** Tìm x thuộc N. Biết:

a) $16^x < 128^4$.

b) $5^x.5^{x+1}.5^{x+2} \le \underbrace{100.............0}_{18 \text{ chu so } 0} : 2^{18}$.

**Hướng dẫn giải**

a) $16^x < 128^4 \Rightarrow \left(2^4\right)^x < \left(2^7\right)^4 \Rightarrow 2^{4x} < 2^{28} \Rightarrow 4x < 28 \Rightarrow x < 7$

$\Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) $5^x.5^{x+1}.5^{x+2} \le \underbrace{100.............0}_{18 \text{ chu so } 0} : 2^{18}$

$\Rightarrow 5^{3x+3} \le 10^{18} : 2^{18} \Rightarrow 5^{3x+3} \le 5^{18} \Rightarrow 3x+3 \le 18 \Rightarrow x \le 5$

$\Rightarrow x \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

**Dạng 4: Một số bài toán khác.**

★**Thí dụ 1.** Hãy viết số lớn nhất bằng cách dùng ba chữ số 1 ; 2 ; 3 với điều kiện mỗi chữ số dùng một lần và chỉ một lần ?

**Hướng dẫn giải**

Bài toán xảy ra các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** Không dùng luỹ thừa thì số lớn nhất viết được là 321.

**Trường hợp 2:** Dùng luỹ thừa để viết: (Bỏ qua trường hợp cơ số hoặc số mũ bằng 1 và các luỹ thừa tầng vì các giá trị này quá nhỏ so với 321)

* Xét các luỹ thưa có số mũ là một chữ số cho ta số tự nhiên có 4 chữ số là: $13^2, 31^2, 12^3, 21^3$, trong các số này số lớn nhất là $21^3$.

* Xét các luỹ thưa mà số mũ có hai chữ số cho ta số tự nhiên có 4 chữ số là: $2^{13}, 2^{31}, 3^{12}, 3^{21}$, nhận xét các số này như sau:

$$3^{21} = 3.3^{20} = 3.(3^2)^{10} = 3.9^{10},$$

$$2^{31} = 2.2^{30} = 2(2^3)^{10} = 2.8^{10},$$

do đó trong các số này thì số lớn nhất là $3^{21}$.

So sánh $3^{21}$ và $21^3$:

$$3^{21} > 3^9 = (3^3)^3 = 27^3 > 21^3$$

Vậy số lớn nhất viết được là số $3^{21}$ .

★**Thí dụ 2.**

a) Số $5^8$ có bao nhiêu chữ số ?

b) Hai số $2^{2003}$ và $5^{2003}$ viết liền nhau được số có bao nhiêu chữ số?

**Phân tích:** So sánh lũy thừa với một số luỹ thừa của 10, từ đó lập luận tìm số chữ số của số đó.

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:

$$5^8 = (5^4)^2 = 625^2 > 600^2 = 360000$$

$$5^8 = \frac{10^8}{2^8} = \frac{100000000}{256} < \frac{100000000}{250} = 400000$$

$$\Rightarrow 360000 < 5^8 < 400000.$$

Do đó $5^8$ có 6 chữ số.

b) Giả sử $2^{2003}$ có a chữ số và $5^{2003}$ có b chữ số thì khi viết 2 số này liền nhau ta được $(a+b)$ chữ số.

Vì $10^{a-1} < 2^{2003} < 10^a$ và $10^{b-1} < 5^{2003} < 10^b$

$$\Rightarrow 10^{a-1}.10^{b-1} < 2^{2003}.5^{2003} < 10^a.10^b$$

$$\Rightarrow 10^{a+b-2} < 10^{2003} < 10^{a+b}.$$

Do đó: $2003 = a+b-1 \Rightarrow a+b = 2004$.

Vậy số đó có 2004 chữ số.

★**Thí dụ 2.** Tìm số 5các chữ số của các số n và m trong các trường hợp sau:

a) $n = 8^3.\ 15^5$.

b) $m = 4^{16}.\ 5^{25}$.

**Phân tích:** Nhóm các luỹ thừa thích hợp nhằm làm xuất hiện luỹ thừa của 10, từ đó lập luận tìm số chữ số của số đó.

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:

$$n = 8^3.\ 15^5 = \left(2^3\right)^3.\left(3.5\right)^5 = 2^9.\ 3^5.\ 5^5$$
$$= 2^4.\ 3^5.\left(2.5\right)^5 = 16.243\ .10^5 = 3888.\ 10^5.$$

Số $3888.10^5$ gồm 3888 theo sau là 5 chữ số 0 nên số này có 9 chữ số.

Vậy số n có 9 chữ số.

b) Ta có:

$$m = 4^{16}.\ 5^{25} = \left(2^2\right)^{16}.\ 5^{25}$$
$$= 2^{32}.5^{25} = 2^7.\left(2^{25}.5^{25}\right) = 128.10^{25}.$$

Số $128.10^{25}$ gồm 128 theo sau là 25 chữ số 0 nên số này có tất cả 28 chữ số.

Vậy số m có 28 chữ số.

## C/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

**Bài 1.** So sánh:

a) $243^5$ và $3.27^5$.  c) $625^5$ và $125^7$.

**Bài 2**: So sánh:

e) $99^{20}$ và $9999^{10}$.  b) $3^{500}$ và $7^{300}$.

d) $202^{303}$ và $303^{202}$.  e) $11^{1979}$ và $37^{1320}$.

**Bài 3:** So sánh:

c) $8^5$ và $3.4^7$.  f) $10^{10}$ và $48.50^5$.

i) $2^{30}+3^{30}+4^{30}$ và $3.24^{10}$.  g) $1990^{10}+1990^9$ và $1991^{10}$.

**Bài 4:** So sánh các số sau: $199^{20}$ và $2003^{15}$.

**Bài 5:** So sánh:

a) $78^{12}-78^{11}$ và $78^{11}-78^{10}$.

b) $A=72^{45}-72^{44}$ và $B=72^{44}-72^{43}$.

**Bài 6:** So sánh các số sau: $3^{39}$ và $11^{21}$.

**Bài 7.** Chứng tỏ rằng: $5^{27}<2^{63}<5^{28}$.

**Bài 8**: Chứng minh rằng: $2^{1995}<5^{863}$.

**Bài 9**: Chứng minh rằng: $2^{1999}<7^{714}$.

**Bài 10**. So sánh: $3^{200}$ và $2^{300}$.

**Bài 11:** So sánh: $71^{50}$ và $37^{75}$.

**Bài 12:** So sánh các số:

a) $50^{20}$ và $2550^{10}$.

b) $999^{10}$ và $999999^5$.

**Bài 13:** Viết theo từ nhỏ đến lớn: $2^{100};3^{75}$ và $5^{50}$.

**Bài 14:** So sánh 2 số: $1234^{56789}$ và $56789^{1234}$.

**Bài 15:** Gọi m là số các số có 9 chữ số mà trong cách ghi của nó không có chữ số $0$. Hãy so sánh m với $10.9^8$.

**Bài 16:** Cho $A=1+2012+2012^2+2012^3+2012^4+\dots+2012^{71}+2012^{72}$ và $B=2012^{73}-1$. So sánh A và B.

**Bài 17:** So sánh hai biểu thức: $B=\dfrac{3^{10}.11+3^{10}.5}{3^9.2^4}$ và $C=\dfrac{2^{10}.13+2^{10}.65}{2^8.104}$.

**Bài 18:** So sánh: $M=\dfrac{3}{8^3}+\dfrac{7}{8^4}$ và $N=\dfrac{7}{8^3}+\dfrac{3}{8^4}$.

**Bài 19:** So sánh M và N biết: $M=\dfrac{19^{30}+5}{19^{31}+5}$ và $N=\dfrac{19^{31}+5}{19^{32}+5}$.

**Bài 20:** So sánh $\dfrac{1}{101^2}+\dfrac{1}{102^2}+\dfrac{1}{103^2}+\dfrac{1}{104^2}+\dfrac{1}{105^2}$ và $\dfrac{1}{2^2.3.5^2.7}$.

**Bài 21**: So sánh $A=\left(\dfrac{1}{2^2}-1\right).\left(\dfrac{1}{3^2}-1\right).\left(\dfrac{1}{4^2}-1\right)......\left(\dfrac{1}{100^2}-1\right)$ và $-\dfrac{1}{2}$.

**Bài 22**: Tìm các số tự nhiên n sao cho:

a) $3<3^n\le 234$.

b) $8.16\ge 2^n\ge 4$.

**Bài 23**: Tìm số tự nhiên n biết rằng: $4^{15}.\,9^{15}<2^n.\,3^n<18^{16}.\,2^{16}$.

**Bài 24:** Cho $A=3+3^2+3^3+....+3^{100}$. Tìm số tự nhiên $n$, biết $2A+3=3^n$.

**Bài 25:** Tìm các số nguyên dương $m$ và $n$ sao cho: $2^m-2^n=256$.

**Bài 26:** Tìm số nguyên dương $n$ biết:

a) $64<2^n<256$.

b) $243>3^n\ge 9$.

**Bài 27:** Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho: $n^{200}<6^{300}$.

**Bài 28:** Tìm $n\in N$ biết:

a) $32<2^n<512$.

b*) $3^{18}<n^{12}\le 20^8$.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.**

**Định hướng tư duy:** Nhận thấy, ở câu a) thì $243$ và $27$ là các cơ số liên quan tới lũy thừ cơ số $3$, ở câu b) thì $625$ và $125$ liên quan tới lũy thừa cơ số $5$. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số, rồi dựa vào so sánh số mũ để so sánh chúng với nhau.

**Lời giải:**

a) Ta có: $243^5 = \left(3^5\right)^5 = 3^{25}$; $3.27^5 = 3.\left(3^3\right)^5 = 3.3^{15} = 3^{16}$

Vì $3^{16} < 3^{25} \Rightarrow 3.27^5 < 243^5$.

b) $625^5 = (5^4)^5 = 5^{20}; 125 = (5^3)^7 = 5^{21}$

Vì $5^{21} > 5^{20} \Rightarrow 125^7 > 625^5$.

**Bài 2**:

**Phân tích:** Nhận thấy, ở câu a) thì các lũy thừa có chung số mũ $10$, ở câu b) thì các lũy thừa có chung số mũ $100$, ở câu c) thì các lũy thừa có chung số mũ $101$, ở câu d) các lũy thừa có chung số mũ 660. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng số mũ, rồi dựa vào so sánh cơ số để so sánh chúng với nhau.

**Lời giải:**

a) Ta thấy: $99^{20} = \left(99^2\right)^{10} = \left(99.99\right)^{10}; 9999^{10} = \left(99.101\right)^{10}$

Vì $\left(99.99\right)^{10} < \left(99.101\right)^{10} \Rightarrow 99^{20} < 9999^{10}$.

b) Ta có : $3^{500} = \left(3^5\right)^{100} = 243^{100}$, $7^{300} = \left(7^3\right)^{100} = 343^{100}$.

Vì $243^{100} < 343^{100}$ nên $3^{500} < 7^{300}$.

c) Ta có:

$$202^{303} = \left(2.101\right)^{3.101} = \left(2^3.101^3\right)^{101} = \left(8.101.101^2\right)^{101} = \left(808.101\right)^{101}$$

$$303^{202} = \left(3.101\right)^{2.101} = \left(3^2.101^2\right)^{101} = \left(9.101^2\right)^{101}$$

Vì $808.101^2 > 9.101^2$ nên $202^{303} > 303^{202}$.

d) Ta có:

$$11^{1979} < 11^{1980} = \left(11^3\right)^{660} = 1331^{660} \qquad (1)$$

$$37^{1320} = \left(37^2\right)^{660} = 1369^{660} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $11^{1979} < 37^{1320}$.

**Bài 3:**

a) Ta có: $8^5 = 2^{15} = 2.2^{14}$, $3.4^7 = 3.2^{14}$

Vì $2 < 3 \Rightarrow 2.2^{14} < 3.2^{14} \Rightarrow 8^5 < 3.4^7$.

b) Ta có :

$10^{10}=2^{10}.\ 5^{10}=2.\ 2^{9}.\ 5^{10}$, $48.\ 50^{5}=\left(3.\ 2^{4}\right).\ \left(2^{5}.\ 5^{10}\right)=3.\ 2^{9}.\ 5^{10}$

Vì $2<3\Rightarrow 2.\ 2^{9}.\ 5^{10}<3.\ 2^{9}.\ 5^{10}\Rightarrow 10^{10}<48.\ 50^{5}$.

c) Ta có: $4^{30}=(2^{2})^{30}=(2.2)^{30}=2^{30}.2^{30}=(2^{3})^{10}.(2^{2})^{15}=8^{10}.4^{15}$,

$24^{10}.3=(8.3)^{10}.3=8^{10}.3^{10}.3=8^{10}.3^{11}$

Vì $3^{11}<4^{15}\Rightarrow 8^{10}.3^{11}<8^{10}.4^{15}\Rightarrow 4^{30}>3.24^{10}$

$\Rightarrow 2^{30}+3^{30}+4^{30}>3.24^{10}$.

d) Ta có :

$1990^{10}+1990^{9}=1990^{9}.\left(1990+1\right)=1991.\ 1990^{9}$

$1991^{10}=1991.\ 1991^{9}$

Vì $1990^{9}<1991^{9}$ nên $1990^{10}+1990^{9}<1991^{10}$.

**Bài 4:**

*Biến đổi $a^{n}$ về dạng: $c.\mathrm{d}^{k}$, biến đổi $b^{m}$ về dạng: $e.d^{k}$ rồi so sánh hai số $c$ và $e$. Từ đó so sánh được hai số $a^{n}$ và $b^{m}$.*

$199^{20}<200^{20}=(8.25)^{20}=(2^{3}.5^{2})20=(2^{3}.5^{2})^{20}=2^{60}.5^{40}$

$2003^{15}>2000^{15}=(16.125)^{15}=(2^{4}.5^{3})^{15}=(2^{4}.5^{3})^{15}=2^{60}.5^{45}$

Vì $5^{45}>5^{40}\Rightarrow 2^{60}.5^{45}>2^{60}.5^{40}\Rightarrow 2003^{15}>199^{20}$.

**Bài 5:**

*Biến đổi $a^{n}$ về dạng: $c.\mathrm{d}^{k}$, biến đổi $b^{m}$ về dạng: $e.d^{k}$ rồi so sánh hai số $c$ và $e$. Từ đó so sánh được hai số $a^{n}$ và $b^{m}$.*

a) Ta có: $78^{12}-78^{11}=78^{11}.\left(78-1\right)=78^{11}.77$

$78^{11}-78^{10}=78^{10}.\left(78-1\right)=78^{10}.77$

Vì $78^{11}>78^{10}\Rightarrow 78^{11}.77>78^{10}.77\Rightarrow 78^{12}-78^{11}>78^{11}-78^{10}$.

b) Ta có

$\mathrm{A}=72^{44}(72-1)=72^{44}.71$ và $\mathrm{B}=72^{43}(72-1)=72^{43}.71$

$72^{44}>72^{43}\Rightarrow 72^{44}.71>72^{43}.71\Rightarrow \mathrm{A}>\mathrm{B}$.

**Bài 6:**

*Dùng tính chất bắc cầu: So sánh hai số với số lũy thừa* 10.

Ta có: $3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$

$11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10} < 11^{21}$

Vì $81^{10} < 121^{10} \Rightarrow 3^{39} < 11^{21}$.

**Bài 7.**

*Với bài này , học sinh lớp 6 sẽ không định hướng được cách làm , giáo viên có thể gợi ý học sinh so sánh:* $2^{63} > 5^{27}$ *và* $2^{63} < 5^{28}$.

Ta có : $2^{63} = \left(2^7\right)^9 = 128^9$, $5^{27} = \left(5^3\right)^9 = 125^9 \Rightarrow 2^{63} > 5^{27}$ (1)

Lại có: $2^{63} = \left(2^9\right)^7 = 512^7$, $5^{28} = \left(5^4\right)^7 = 625^7 \Rightarrow 2^{63} < 5^{28}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^2$.

**Bài 8**:

*Xét:* $a^n$ *biến đổi được về dạng:* $c^q.\mathrm{d}^k$

$b^m$ *biến đổi được về dạng:* $e^p.\mathrm{g}^h$

*Nếu* $c^q < e^p$ *và* $d^k < g^h$ *thì* $c^q.\mathrm{d}^k < e^p.\mathrm{g}^h$.

Ta có: $2^{1995} = 2^{1990}.2^5$; $5^{863} = 5^{860}.5^3$

Nhận xét: $2^5 = 32 < 5^3 = 125$ nên cần so sánh $2^{1990}$ và $5^{860}$.

Có: $2^{10} = 1024$, $5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10}.\ 3 < 5^5 \Rightarrow 2^{1720}.\ 3^{172} < 5^{860}$.

Có: $2^{1990} = 2^{1720}.2^{270}$, cần so sánh $2^{1720}.2^{270}$ với số $2^{1720}.3^{172}$ như sau:

$3^7 = 2187$; $2^{11} = 2048 \Rightarrow 3^7 > 2^{11}$.

$3^{172} = \left(3^7\right)^{24}.\ 3^4 > \left(2^{11}\right)2^4 > \left(2^{11}\right).\ 2^6 = 2^{270}$.

Do đó: $2^{1720}.2^{270} < 2^{1720}.\ 3^{172} < 5^{860} \Rightarrow 2^{1990} < 5^{860}$

Mà $2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$.

**Bài 9**:

Ta có: $2^{10} = 1025$ ; $7^3 = 343$

$\Rightarrow 2^{10} < 3.7^3 \Rightarrow \left(2^{10}\right)^{238} < 3^{238}.\left(7^3\right)^{238}$

$\Rightarrow 2^{2380} < 3^{238}.7^{714}$ (1)

Xét: $3^{238}=3^3.3^{235}=3^3.\left(3^5\right)^{47}<3^3\left(2^8\right)^{47}<2^5.2^{376}=2^{381}$ (vì $3^5<2^8$)

$\Rightarrow 3^{238}<2^{381}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $2^{2380}<2^{381}.7^{714}$

$\Rightarrow 2^{1999}<7^{714}$

**Bài 10**.

*Đưa về so sánh hai lũy thừa cùng số mũ.*

Ta có: $3^{200}=\left(3^2\right)^{100}=9^{100}$; $2^{300}=\left(2^3\right)^{100}=8^{100}$ mà $8^{100}<9^{100}$

$\Rightarrow 2^{300}<3^{200}$.

**Bài 11:**

*Biến đổi $a^n$ về dạng: $c.d^k$, biến đổi $b^m$ về dạng: $e.d^k$ rồi so sánh hai số $c$ và $e$. Từ đó so sánh được hai số $a^n$ và $b^m$.*

Ta có: $71^{50}<72^{50}=\left(8.9\right)^{50}=2^{150}.3^{100}$ (1)

$37^{75}>36^{75}=\left(4.9\right)^{75}=2^{150}.\ 3^{150}$ (2)

Mà $2^{150}.\ 3^{150}>2^{150}.3^{100}$ (3)

Từ (1), (2), và (3) suy ra: $37^{75}>71^{50}$.

**Bài 12:**

a) Ta có: $50^{20}=\left[\left(50\right)^2\right]^{10}=2500^{10}<2550^{10}\Rightarrow 5^{20}<2550^{10}$.

b) Ta có: $999^{10}=\left[\left(999\right)^2\right]^5<998001^5<999999^5\Rightarrow 999^{10}<999999^5$.

**Bài 13:**

$2^{100}=(2^2)^{50}=4^{50}<5^{50}$ (1).

$3^{75}=(3^3)=27^{25}=3^{75}>5^{50}$ (2).

$5^{50}=(5^5)^{25}=25^{25}$ (3).

Từ(1),(2) và (3) $\Rightarrow 2^{100}<5^{50}<3^{75}$.

**Bài 14:**

Ta có: $A=1234^{56789}>1000^{50000}=\left(10^3\right)^{50000}=10^{150000}$

$$B = 56789^{1234} < 100000^{2000} = \left(10^5\right)^{2000} = 10^{10000}$$

Vì $10^{10000} < 10^{150000} \Rightarrow 56789^{1234} < 1234^{56789}$.

**Bài 15:**

Số có 9 chữ số là $\overline{a_1a_2....a_8a_9}$ trong đó các chữ số $a_i \neq 0$ $(i = \overline{1;\,9})$ và có thể giống nhau. Từ tập hợp số $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ mỗi chữ số $a_i$ có 9 cách chọn . Do đó ta có số các số có 9 chữ số thỏa mãn bài toán là $m = 9^9$ số.

Từ đó: $m = 9^9 = 9.9^8 < 10.9^8$.

**Bài 16:**

Ta có: $\text{A} = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \ldots\ + 2012^{71} + 2012^{72}$

$2012.\text{A} = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \ldots\ + 2012^{71} + 2012^{73}$

$\Rightarrow 2012.\text{A} - \text{A} = 2011\text{A} = 2012^{73} - 1$

$\Rightarrow \text{A} = \left(2012^{73} - 1\right) : 2011 < 2012^{73} - 1$.

Vậy $\text{A} < \text{B}$.

**Bài 17:**

$$\text{B} = \frac{3^{10}.11 + 3^{10}.5}{3^9.2^4} = \frac{3^{10}(11+5)}{3^9.16} = 3.$$

$$\text{C} = \frac{2^{10}.13 + 2^{10}.65}{2^8.104} = \frac{2^{10}(13+65)}{2^8.104} = \frac{2^2.78}{104} = 3.$$

Vậy B = C.

**Bài 18:**

Ta có: $\dfrac{3}{8^3} + \dfrac{7}{8^4} = \dfrac{3}{8^3} + \dfrac{3}{8^4} + \dfrac{4}{8^4} = \left(\dfrac{3}{8^3} + \dfrac{3}{8^4}\right) + \dfrac{4}{8^4}$.

$\dfrac{7}{8^3} + \dfrac{3}{8^4} = \dfrac{3}{8^3} + \dfrac{4}{8^3} + \dfrac{3}{8^4} = \left(\dfrac{3}{8^3} + \dfrac{3}{8^4}\right) + \dfrac{4}{8^3}$.

Vì $\dfrac{4}{8^4} < \dfrac{4}{8^3} \Rightarrow \left(\dfrac{3}{8^3} + \dfrac{3}{8^4}\right) + \dfrac{4}{8^4} < \left(\dfrac{3}{8^3} + \dfrac{3}{8^4}\right) + \dfrac{4}{8^3}$

$\Rightarrow \text{M} < \text{N}$.

**Bài 19:**

$\text{M} = \dfrac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5}$ nên $19\text{M} = \dfrac{19.(19^{30} + 5)}{19^{31} + 5} = \dfrac{19^{31} + 95}{19^{31} + 5} = 1 + \dfrac{90}{19^{31} + 5}$.

$N = \dfrac{19^{31}+5}{19^{32}+5}$ nên $19N = \dfrac{19.(19^{31}+5)}{19^{32}+5} = \dfrac{19^{32}+95}{19^{32}+5} = 1 + \dfrac{90}{19^{32}+5}$.

Vì $\dfrac{90}{19^{31}+5} > \dfrac{90}{19^{32}+5}$

$1 + \dfrac{90}{19^{31}+5} > 1 + \dfrac{90}{19^{32}+5}$ hay $19M > 19N \Rightarrow M > N$.

**Bài 20:**

Nếu n là số tự nhiên lớn hơn 1 thì ta có:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{(n-1).n} = \frac{n-n+1}{(n-1).n} = \frac{1}{(n-1)n} > \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Áp dụng vào bài toán ta được:

$$\frac{1}{101^2} < \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$$
$$\frac{1}{102^2} < \frac{1}{101} - \frac{1}{102}$$
..........................
$$\frac{1}{105^2} < \frac{1}{104} - \frac{1}{103}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + ... + \frac{1}{105^2} < \frac{1}{100} - \frac{1}{105}$$

$$= \frac{105-100}{100.105} = \frac{5}{2^2.5^2.5.3.7} = \frac{1}{2^2.5^2.3.7}.$$

Vậy $\dfrac{1}{102^2} + ...... + \dfrac{1}{105^2} < \dfrac{1}{2^2.5^2.3.7}$.

**Bài 21**:

A là tích của 99 số âm. Do đó:

$$-A = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)........\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$$

$$= \frac{3}{2^2}.\frac{8}{3^2}.\frac{15}{4^2}.......\frac{9999}{100^2}$$

$$= \frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}.\frac{3.5}{4^2}........\frac{99.101}{100^2}.$$

Để dễ rút gọn ta viết tử dưới dạng tích các số tự nhiên liên tiếp như sau:

$-A=\dfrac{1.2.3.4.5.6..........98.99}{2.3.4.5.........99.100}.\dfrac{3.4.5..........100.101}{2.3.4..........99.100}=\dfrac{1}{100}.\dfrac{101}{2}=\dfrac{101}{200}>\dfrac{1}{2}$

Vậy $A<-\dfrac{1}{2}$.

**Bài 22**:

Đưa các số về các lũy thừa có cùng cơ số .

a) $3<3^n\le 234\Rightarrow 3^1<3^n\le 3^5\Rightarrow 1<n\le 5$

$\Rightarrow n$ nhận các giá trị là: $2,\ 3,\ 4,\ 5$.

b) $8.16\ge 2^n\ge 4\Rightarrow 2^3.2^4\ge 2^n\ge 2^2\Rightarrow 2^7\ge 2^n\ge 2^2\Rightarrow 7\ge n\ge 2$

$\Rightarrow n$ nhận các giá trị là: $2,3,4,5,6,7$.

**Bài 23**:

$4^{15}.\ 9^{15}<2^n.\ 3^n<18^{16}.\ 2^{16}\Rightarrow (4.9)^{15}<(2.3)^n<(18.2)^{16}$

$\Rightarrow 36^{15}<6^n<36^{16}$

$\Rightarrow \left(6^2\right)^{15}<6^n<\left(6^2\right)^{16}$

$\Rightarrow 6^{30}<6^n<6^{32}$

$\Rightarrow 30<n<32$

$\Rightarrow n=31$.

**Bài 24:**

Có $A=3+3^2+3^3+....+3^{100}$

$\Rightarrow 3A=3^2+3^3+3^4+...+3^{101}$

$\Rightarrow 3A-A=2A=3^{101}-3$

$\Rightarrow 2A+3=3^{101}$

Mà theo đề bài ta có $2A+3=3^n$

$\Rightarrow 3^{101}=3^n\Rightarrow n=101$.

**Bài 25:**

Ta có: $2^m-2^n=256=2^8 => 2^n(2^{m-n}-1)=2^8$ (1).

Dễ thấy $m\ne n$, ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m-n=1$ thì từ (1) ta có:

$2^n.(2-1)=2^8\Rightarrow 2^n=2^8\Rightarrow n=8$ và $m=9$.

Trường hợp 2: Nếu $m-n\ge 2$

$\Rightarrow 2^{m-n}-1$ là một số lẻ lớn hơn 1 nên vế trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tách ra thừa số nguyên tố, còn vế phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2, do đó hai vế của (1) mâu thuẫn nhau.

Vậy $n=8$ và $m=9$ là đáp số duy nhất.

**Bài 26:**

a) Ta có: $64<2^n<256\Rightarrow 2^6<2^n<2^8\Rightarrow 6<n<8$, mà $n$ nguyên dương, nên $n=7$.

b) Ta có: $243>3^n\ge 9\Rightarrow 3^5>3^n\ge 3^2\Rightarrow 5>n\ge 2$, mà $n$ nguyên dương nên $n$ nhận các giá trị là: 4; 3; 2.

**Bài 27:**

Ta có: $n^{200}=\left(n^2\right)^{100}$; $6^{300}=\left(6^3\right)^{100}=216^{100}$

$n^{200}<6^{300}\Rightarrow\left(n^2\right)^{100}<216^{100}\Rightarrow n^2<216$ (*)

$\Rightarrow$ Số nguyên lớn nhất thoả mãn (*) là $n=14$.

**Bài 28:**

a) Với $n\in N$, ta xét:

$$32<2^n\Leftrightarrow 2^5<2^n\Rightarrow 5<n$$

$$2^n<512\Leftrightarrow 2^n<2^9\Rightarrow n<9$$

Do đó: $5<n<9\Rightarrow n\in\{6;7;8\}$.

b) Với $n\in N$, ta xét:

$$3^{18}<n^{12}\Leftrightarrow\left(3^3\right)^6<\left(n^2\right)^6\Leftrightarrow 3^3<n^2\Leftrightarrow 27<n^2$$

Nhận thấy: $5^2<27<6^2$, nên $6^2\le n^2\Rightarrow 6\le n$.

$$n^{12}\le 20^8\Leftrightarrow\left(n^3\right)^4<\left(20^2\right)^4\Leftrightarrow n^3<20^2\Leftrightarrow n^3<400$$

Nhận thấy: $7^3<400<8^3$, nên $n^3\le 7^3\Rightarrow n\le 7$

Do đó: $6\le n\le 7\Rightarrow n\in\{6;7\}$.

# CHUYÊN ĐỀ 3: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

*Toán tìm x là một trong các chủ đề thường gặp trong các kì thi HSG. Để giải toán tìm x học sinh phải có kĩ năng cộng, trừ, nhân, chia các phân số, lũy thừa để giúp cho việc biến đổi đưa đẳng thức chứa x về dạng A.x = B từ đó suy ra được x = B : A*

*Bài toán tìm x đôi khi còn kết hợp phép tính tổng các số , tổng các phân số, tổng các tích,tổng các lũy thừa theo quy luật nên HS cần nắm vững và luyện thật chắc các bài toán tính tổng theo quy luật.*

## Dạng 1. Tìm x thông thường

**Bài 1:** Tìm x biết:

a) $720:\left[41-\left(2x-5\right)\right]=2^3.5$

b) $6\left(x+11\right)-7\left(2-x\right)=26$

c) $\left(x-\dfrac{2}{3}\right):1\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

d) $\left|2x-\dfrac{1}{6}\right|+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $720:\left[41-\left(2x-5\right)\right]=2^3.5$

$$720:\left[46-2x\right]=40$$
$$\Rightarrow 46-2x=18$$
$$\Rightarrow 2x=46:18=\frac{23}{9}$$
$$\Rightarrow x=\frac{23}{18}$$

b) Ta có:

$$6x+66-14+7x=26$$
$$\Rightarrow 13x=-26\Rightarrow x=-2$$

c) Ta có

$$\left(x-\frac{2}{3}\right):1\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow (x-\frac{2}{3}):1\frac{1}{3}=1$$
$$\Rightarrow x-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow x=2$$

Vậy $x=2$

d) Ta có:

$$\left|2x-\frac{1}{6}\right|+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\Rightarrow\left|2x-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}$$

TH1: $2x-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow x=\dfrac{1}{6}$.

TH2: $2x-\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{6}\Rightarrow x=0$

Vậy $x\in\left\{0;\dfrac{1}{6}\right\}$.

**Bài 2:** Tìm $x$ biết: $7-5.(x-2)=3+2.(4-x)$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $7-5.(x-2)=3+2.(4-x)$

$$7-5.2-5.(-2)=3+2.4+2.(-x)$$
$$7-5x+10=3+8-2x$$

$$-5x+2x=3+8-7-10$$
$$-3x=-6$$
$$x=2$$

Vậy $x=2$.

**Bài 3:** Tìm x biết:

a, $\frac{2x-3}{3}+\frac{-3}{2}=\frac{5-3x}{6}-\frac{1}{3}$ b, $\frac{2}{3x}-\frac{3}{12}=\frac{4}{5}-\left(\frac{7}{x}-2\right)$

**Hướng dẫn giải**

a, $\frac{2x-3}{3}+\frac{-3}{2}=\frac{5-3x}{6}-\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{4x-6+(-9)}{6}=\frac{5-3x-2}{6}$

$\Rightarrow 4x-15=3-3x\Rightarrow 7x=18\Rightarrow x=\frac{18}{7}$

b, $\frac{2}{3x}-\frac{3}{12}=\frac{4}{5}-\left(\frac{7}{x}-2\right)\Rightarrow\frac{2}{3x}-\frac{1}{4}=\frac{4}{5}-\frac{7}{x}+2\Rightarrow\frac{2}{3x}+\frac{7}{x}=\frac{4}{5}+\frac{1}{4}+2\Rightarrow\frac{23}{3x}=\frac{61}{20}$

$\Rightarrow 3x=\frac{460}{61}\Rightarrow x=\frac{460}{183}$

**Bài 4:** Tìm x biết:

a, $\frac{1}{x-1}+\frac{-2}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{6}{5}\right)=\frac{5}{2-2x}$ b, $\frac{9}{17}x+15\frac{13}{17}x-20\frac{5}{17}x=16$

**Hướng dẫn giải**

a, $\frac{1}{x-1}+\frac{3}{10}=\frac{5}{2-2x}\Rightarrow\frac{1}{x-1}+\frac{5}{2(x-1)}=\frac{-3}{10}\Rightarrow\frac{7}{2(x-1)}=\frac{-3}{10}$

$\Rightarrow 2(x-1)=-\frac{70}{3}\Rightarrow x-1=\frac{-35}{3}\Rightarrow x=\frac{-32}{3}$

b, $\frac{9}{17}x+15\frac{13}{17}x-20\frac{5}{17}x=16\Rightarrow\left(\frac{9}{17}+15\frac{13}{17}-20\frac{5}{17}\right)x=16\Rightarrow -4.x=16\Rightarrow x=-4$

**Bài 5:** Tìm số tự nhiên $x$ biết : $\left(19x+22.3^2\right):14=\left(11-6\right)^2$

**Hướng dẫn giải**

$\left(19x+22.3^2\right):14=\left(11-6\right)^2$

$19x+198=350$

$19x=152$

$x=8$

**Bài 6:** Tìm $x$ biết:

a) $121-\left(115+x\right)=3x-\left(25-9-5x\right)-8$

b) $\left(x^2-4\right)\left(3x+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)\left(\frac{2016}{2017}-\frac{2017}{2018}+\frac{2018}{2019}\right)$

**Hướng dẫn giải**

a) $121-(115+x)=3x-(25-9-5x)-8$

$\Rightarrow 121-115-x=3x-(16-5x)-8$

$\Rightarrow 6-x=3x-16+5x-8$

$\Rightarrow 6-x=8x-24$

$\Rightarrow 9x=30$

$\Rightarrow x=\dfrac{10}{3}$.

Vậy $x=\dfrac{10}{3}$.

b) $\left(x^2-4\right)\left(3x+\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}\right)\left(\dfrac{2016}{2017}-\dfrac{2017}{2018}+\dfrac{2018}{2019}\right)$

$\Rightarrow \left(x^2-4\right)\left(3x+\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{4}{12}-\dfrac{3}{12}-\dfrac{1}{12}\right)\left(\dfrac{2016}{2017}-\dfrac{2017}{2018}+\dfrac{2018}{2019}\right)$

$\Rightarrow \left(x^2-4\right)\left(3x+\dfrac{1}{2}\right)=0.\left(\dfrac{2016}{2017}-\dfrac{2017}{2018}+\dfrac{2018}{2019}\right)$

$\Rightarrow \left(x^2-4\right)\left(3x+\dfrac{1}{2}\right)=0$

$\Rightarrow x^2-4=0$ hoặc $3x+\dfrac{1}{2}=0$

Với $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x^2=2^2=(-2)^2 \Rightarrow x=2$ hoặc $x=-2$

Với $3x+\dfrac{1}{2}=0 \Rightarrow 3x=\dfrac{-1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{-1}{6}$.

Vậy $x\in\left\{2;-2;\dfrac{-1}{6}\right\}$.

**Bài 7:** Tìm x biết : $\dfrac{2}{3}.x-70\dfrac{10}{11}:\left(\dfrac{131313}{151515}+\dfrac{131313}{353535}+\dfrac{131313}{636363}+\dfrac{131313}{999999}\right)=-5$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\dfrac{2}{3}.x-70\dfrac{10}{11}:\left(\dfrac{131313}{151515}+\dfrac{131313}{353535}+\dfrac{131313}{636363}+\dfrac{131313}{999999}\right)=-5$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}x-\dfrac{780}{11}:\left(\dfrac{13}{15}+\dfrac{13}{35}+\dfrac{13}{63}+\dfrac{13}{99}\right)=-5$.

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}x-\dfrac{780}{11}:\left[\dfrac{13}{2}\left(\dfrac{2}{3.5}+\dfrac{2}{5.7}+\dfrac{2}{7.9}+\dfrac{2}{9.11}\right)\right]=-5$.

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{780}{11} : \left[\frac{13}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11}\right)\right] = -5$.

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{780}{11} : \left(\frac{13}{2} . \frac{8}{33}\right) = -5$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - 45 = -5$.

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 40$.

$\Leftrightarrow x = 60$.

Vậy $x = 60$.

**Bài 8:** Tìm x biết:

a) $\frac{1}{2016} : 2015x = \frac{-1}{2015}$ b) $\frac{x-1}{-15} = \frac{-60}{x-1}$

**Hướng dẫn giải**

$a)\ \frac{1}{2016.2015}x = \frac{-1}{2015} \Rightarrow x = \frac{-1}{2015} : \frac{1}{2016.2015} = -2016$

b) Từ gt bài toán ta có: $(x-1)^2 = 900 \Rightarrow x - 1 = \pm 30 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 31 \\ x = 29 \end{array}\right.$

**Câu 9.** Tìm $x$ biết: $\frac{x-2}{4} = \frac{5+x}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

$\frac{x-2}{4} = \frac{5+x}{3} \Leftrightarrow 3(x-2) = 4(5+x) \Leftrightarrow 3x - 6 = 20 + 4x \Leftrightarrow x = -26$

Vậy $x = -26$.

**Bài 10**. Tìm $x$ biết

a) $(7x-11)^3 = 2^5.5^2 + 200$

b) $\frac{x-1}{12} + \frac{x-1}{20} + \frac{x-1}{30} + \frac{x-1}{42} + \frac{x-1}{56} + \frac{x-1}{72} = \frac{16}{9}$

**Hướng dẫn giải**

a) $(7x-11)^3 = 2^5.5^2 + 200 \Rightarrow (7x-11)^3 = 32.25 + 200 = 1000 = 10^3$

$\Rightarrow 7x - 11 = 10 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3$

b)Ta chú ý : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{(n+1)n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\ \ (n \in N)$

Ta đi xét tổng sau

$\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + .\frac{1}{56} + \frac{1}{72} = \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9}$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

Phuong trình đã cho $\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}\right)=\frac{16}{9} \Leftrightarrow (x-1).\frac{2}{9}=\frac{16}{9}$

$\Leftrightarrow x-1=8 \Leftrightarrow x=9$

**Bài 11**. Tìm $x$ biết:

a) $\left(19|x-1|+2.5^2\right):14=(13-8)^2-4^2$ b) $\frac{x-2019}{4}=\frac{1}{x-2019}$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:

$\left(19|x-1|+2.5^2\right):14=(13-8)^2-4^2$

$\left(19|x-1|+2.25\right):14=25-16$

$19|x-1|+50=9.14$

$19|x-1|=76$

$|x-1|=76:19=4$.

Vậy $x-1=4$ hoặc $x-1=-4$.

Do đó $x=5$ hoặc $x=-3$.

b) Ta có:

$\frac{x-2019}{4}=\frac{1}{x-2019}$

$(x-2019)^2=4$

$(x-2019)^2=2^2$

$x-2019=2$

$x=2+2019$

$x=2021$.

**Bài 12**. Tìm $x$ biết: $1\frac{3}{5}+\left(\dfrac{\frac{2}{7}+\frac{2}{17}+\frac{2}{37}}{\frac{5}{7}+\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}\right)x=\frac{16}{5}$

**Hướng dẫn giải**

$$1\frac{3}{5}+\left(\dfrac{\frac{2}{7}+\frac{2}{17}+\frac{2}{37}}{\frac{5}{7}+\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}\right)x=\frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{5}+\frac{2}{5}\left(\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{17}+\frac{1}{37}}{\frac{1}{7}+\frac{1}{17}+\frac{1}{37}}\right)x=\frac{16}{5}$$

$\Rightarrow \frac{2}{5}x=\frac{8}{5}$

$\Rightarrow x=4$

Vậy $x=4$

**Bài 13**. a) Tìm $x$ biết: $x^2-2(x+3)=x-6$ b) Tìm $x$ biết: $\left|\frac{39}{2}-3x^2\right|=\frac{15}{2}$

**Hướng dẫn giải**

$a)x^2-2(x+3)=x-6 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

$b)\dfrac{39}{2}-3x^2=\dfrac{15}{2} \Leftrightarrow 3x^2=12 \Rightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

$\dfrac{39}{2}-3x^2=-\dfrac{15}{2} \Leftrightarrow 3x^2=27 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

**Bài 14**. Tìm $x$ biết: a) $(2x-1)^4=16$ b) $(2x+1)^4=(2x+1)^6$ c) $\left||x+3|-8\right|=20$

**Hướng dẫn giải**

$a)(2x-1)^4=16 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$b)(2x+1)^4=(2x+1)^6 \Rightarrow x=-0,5; x=0; x=-1,5$

$c)\left||x+3|-8\right|=20 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |x+3|=20+8 \\ |x+3|=-20+8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |x+3|=28 \\ |x+3|=-12(VN) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=28 \\ x+3=-28 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=25 \\ x=-31 \end{array}\right.$

**Bài 15**. Tìm $x$ biết: $5.\left|\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{3}x\right|-3,25=-2\left[(1,25)^2-2,5.0,25+(-0,25)^2\right]$

**Hướng dẫn giải**

Tính được $\left|\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{3}x\right|=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{4} \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

**Bài 16.** Tìm $x$, biết:

$a)\dfrac{3(x-1)}{2}=\dfrac{8}{27.(x-1)}$ $\quad b)x-3\sqrt{x}=0\,(x\geq 0)$ $\quad c)|2x-7|=|5x+2|$

**Hướng dẫn giải**

$$a)81(x-1)^2=16 \Leftrightarrow (x-1)^2=\left(\frac{4}{9}\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\frac{4}{9} \\ x-1=-\frac{4}{9} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{13}{9} \\ x=\frac{5}{9} \end{array}\right.$$

$$b)\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=9 \end{array}\right.$$

$$c)|2x-7|=|5x+2| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-7=5x+2 \\ 2x-7=-5x-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\frac{5}{7} \end{array}\right.$$

**Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0**

**Bài 1:** Tìm x biết: $\frac{x+1}{2008}+\frac{x+2}{2007}+\frac{x+3}{2006}=\frac{x+4}{2005}+\frac{x+5}{2004}+\frac{x+6}{2003}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$\frac{x+1}{2008}+\frac{x+2}{2007}+\frac{x+3}{2006}=\frac{x+4}{2005}+\frac{x+5}{2004}+\frac{x+6}{2003}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2008}+1\right)+\left(\frac{x+2}{2007}+1\right)+\left(\frac{x+3}{2006}+1\right)=\left(\frac{x+4}{2005}+1\right)+\left(\frac{x+5}{2004}+1\right)+\left(\frac{x+6}{2003}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008}+\frac{x+2009}{2007}+\frac{x+2009}{2006}-\frac{x+2009}{2005}-\frac{x+2009}{2004}-\frac{x+2009}{2003}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2009)\left(\frac{1}{2008}+\frac{1}{2007}+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2005}-\frac{1}{2004}-\frac{1}{2003}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2009$$

**Bài 2:** Tìm x, biết:

a, $\frac{29-x}{21}+\frac{27-x}{23}+\frac{25-x}{25}+\frac{23-x}{27}+\frac{21-x}{29}=-5$  b, $\frac{x-10}{30}+\frac{x-14}{43}+\frac{x-5}{95}+\frac{x-148}{8}=0$

**Hướng dẫn giải**

a, $\frac{29-x}{21}+\frac{27-x}{23}+\frac{25-x}{25}+\frac{23-x}{27}+\frac{21-x}{29}=-5$

$$\Rightarrow \left(\frac{29-x}{21}+1\right)+\left(\frac{27-x}{23}+1\right)+\left(\frac{25-x}{25}+1\right)+\left(\frac{23-x}{27}+1\right)+\left(\frac{21-x}{29}+1\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{50-x}{21}+\frac{50-x}{23}+\frac{50-x}{25}+\frac{50-x}{27}+\frac{50-x}{29}=0$$

$$\Rightarrow (50-x)\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\frac{1}{29}\right)=0$$

$$\Rightarrow x=50$$

b, $\frac{x-10}{30}+\frac{x-14}{43}+\frac{x-5}{95}+\frac{x-148}{8}=0$

$$\Rightarrow\left(\frac{x-10}{30}-3\right)+\left(\frac{x-14}{43}-2\right)+\left(\frac{x-5}{95}-1\right)+\left(\frac{x-148}{8}+6\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{x-100}{30}+\frac{x-100}{43}+\frac{x-100}{95}+\frac{x-100}{8}=0$$

$$\Rightarrow(x-100)\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{43}+\frac{1}{95}+\frac{1}{8}\right)=0\Rightarrow x=100.$$

**Bài 3**. Tìm x, biết:

a, $\frac{x-5}{100}+\frac{x-4}{101}+\frac{x-3}{102}=\frac{x-100}{5}+\frac{x-101}{4}+\frac{x-102}{3}$ b, $\frac{x-2}{7}+\frac{x-1}{8}=\frac{x-4}{5}+\frac{x-3}{6}$

**Hướng dẫn giải**

a, $$\frac{x-5}{100}+\frac{x-4}{101}+\frac{x-3}{102}=\frac{x-100}{5}+\frac{x-101}{4}+\frac{x-102}{3}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x-5}{100}-1\right)+\left(\frac{x-4}{101}-1\right)+\left(\frac{x-3}{102}-1\right)=\left(\frac{x-100}{5}-1\right)+\left(\frac{x-101}{4}-1\right)+\left(\frac{x-102}{3}-1\right)$$

$$\Rightarrow\frac{x-105}{100}+\frac{x-105}{101}+\frac{x-105}{102}=\frac{x-105}{5}+\frac{x-105}{4}+\frac{x-105}{3}$$

$$\Rightarrow x-105=0\Rightarrow x=105$$

b, $$\frac{x-2}{7}+\frac{x-1}{8}=\frac{x-4}{5}+\frac{x-3}{6}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x-2}{7}-1\right)+\left(\frac{x-1}{8}-1\right)=\left(\frac{x-4}{5}-1\right)+\left(\frac{x-3}{6}-1\right)$$

$$\Rightarrow\frac{x-9}{7}+\frac{x-9}{8}=\frac{x-9}{5}+\frac{x-9}{6}$$

$$\Rightarrow x-9=0\Rightarrow x=9$$

**Bài 4**. Tìm x, biết:

a, $\frac{x+1}{94}+\frac{x+2}{93}+\frac{x+3}{92}=\frac{x+4}{91}+\frac{x+5}{90}+\frac{x+6}{89}$ b, $\frac{2x+19}{21}-\frac{2x+17}{23}=\frac{2x+7}{33}-\frac{2x+5}{35}$

**Hướng dẫn giải**

a, $$\frac{x+1}{94}+\frac{x+2}{93}+\frac{x+3}{92}=\frac{x+4}{91}+\frac{x+5}{90}+\frac{x+6}{89}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x+1}{94}+1\right)+\left(\frac{x+2}{93}+1\right)+\left(\frac{x+3}{94}+1\right)=\left(\frac{x+4}{91}+1\right)+\left(\frac{x+5}{90}+1\right)+\left(\frac{x+6}{89}+1\right)$$

$$\Rightarrow\frac{x+95}{94}+\frac{x+95}{93}+\frac{x+95}{92}=\frac{x+95}{91}+\frac{x+95}{90}+\frac{x+95}{89}$$

$$\Rightarrow x+95=0\Rightarrow x=-95$$

b, $$\frac{2x+19}{21}-\frac{2x+17}{23}=\frac{2x+7}{33}-\frac{2x+5}{35}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{2x+19}{21}+1\right)-\left(\frac{2x+17}{23}+1\right)=\left(\frac{2x+7}{33}+1\right)-\left(\frac{2x+5}{35}+1\right)$$

$$\Rightarrow\frac{2x+40}{21}+\frac{2x+40}{35}=\frac{2x+40}{33}+\frac{2x+40}{23}$$

$$\Rightarrow 2x+40=0\Rightarrow x=-20$$

**Bài 5.** Tìm x, biết:

a, $\frac{x-1}{59}+\frac{x-2}{58}+\frac{x-3}{57}=\frac{x-4}{56}+\frac{x-5}{55}+\frac{x-6}{54}$ b, $\frac{x+1}{15}+\frac{x+2}{14}=\frac{x+3}{13}+\frac{x+4}{12}$

**Hướng dẫn giải**

a, $\frac{x-1}{59}+\frac{x-2}{58}+\frac{x-3}{57}=\frac{x-4}{56}+\frac{x-5}{55}+\frac{x-6}{54}$

$\Rightarrow\left(\frac{x-1}{59}-1\right)+\left(\frac{x-2}{58}-1\right)+\left(\frac{x-3}{57}-1\right)=\left(\frac{x-4}{56}-1\right)+\left(\frac{x-5}{55}-1\right)+\left(\frac{x-6}{54}-1\right)$

$\Rightarrow\frac{x-60}{59}+\frac{x-60}{58}+\frac{x-60}{57}=\frac{x-60}{56}+\frac{x-60}{55}+\frac{x-60}{54}$

$\Rightarrow x-60=0\Rightarrow x=60$

b, $\frac{x+1}{15}+\frac{x+2}{14}=\frac{x+3}{13}+\frac{x+4}{12}$

$\Rightarrow\left(\frac{x+1}{15}+1\right)+\left(\frac{x+2}{14}+1\right)=\left(\frac{x+3}{13}+1\right)+\left(\frac{x+4}{12}+1\right)$

$\Rightarrow\frac{x+16}{15}+\frac{x+16}{14}=\frac{x+16}{13}+\frac{x+16}{12}$

$\Rightarrow x+16=0\Rightarrow x=-16$

**Bài 6**. Tìm x, biết:

a, $\frac{x-5}{1990}+\frac{x-15}{1980}=\frac{x-1990}{5}+\frac{x-1980}{15}$ b, $\frac{x-1}{2015}+\frac{x-3}{2013}=\frac{x-5}{2011}+\frac{x-7}{2009}$

**Hướng dẫn giải**

a, $\frac{x-5}{1990}+\frac{x-15}{1980}=\frac{x-1990}{5}+\frac{x-1980}{15}$

$\Rightarrow\left(\frac{x-5}{1990}-1\right)+\left(\frac{x-15}{1980}-1\right)=\left(\frac{x-1990}{5}-1\right)+\left(\frac{x-1980}{15}-1\right)$

$\Rightarrow\frac{x-1995}{1990}+\frac{x-1995}{1980}=\frac{x-1995}{5}+\frac{x-1995}{15}$

$\Rightarrow x-1995=0$

$\Rightarrow x=1995$

b, $\frac{x-1}{2015}+\frac{x-3}{2013}=\frac{x-5}{2011}+\frac{x-7}{2009}$

$\Rightarrow\left(\frac{x-1}{2015}-1\right)+\left(\frac{x-3}{2013}-1\right)=\left(\frac{x-5}{2011}-1\right)+\left(\frac{x-7}{2009}-1\right)$

$\Rightarrow\frac{x-2016}{2015}+\frac{x-2016}{2013}=\frac{x-2016}{2011}+\frac{x-2016}{2009}$

$\Rightarrow x-2016=0$

$\Rightarrow x=2016$

**Bài 7**. Tìm x, biết:

a, $\frac{x+1}{10}+\frac{x+1}{11}+\frac{x+1}{12}=\frac{x+1}{13}+\frac{x+1}{14}$ b, $\frac{315-x}{101}+\frac{313-x}{103}+\frac{311-x}{105}+\frac{309-x}{107}=-4$

**Hướng dẫn giải**

a, $\frac{x+1}{10}+\frac{x+1}{11}+\frac{x+1}{12}=\frac{x+1}{13}+\frac{x+1}{14}$

$$\Rightarrow (x+1)\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}-\frac{1}{14}\right)=0$$

$\Rightarrow x+1=0$

$\Rightarrow x=-1$

b, $\frac{315-x}{101}+\frac{313-x}{103}+\frac{311-x}{105}+\frac{309-x}{107}=-4$

$$\Rightarrow \left(\frac{315-x}{101}+1\right)+\left(\frac{313-x}{103}+1\right)+\left(\frac{311-x}{105}+1\right)+\left(\frac{309-x}{107}+1\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{416-x}{101}+\frac{416-x}{103}+\frac{416-x}{105}+\frac{416-x}{107}=0$$

$\Rightarrow 416-x=0$

$\Rightarrow x=416$

**Bài 8**. Tìm x, biết:

a, $\frac{x-1}{2009}+\frac{x-2}{2008}=\frac{x-3}{2007}+\frac{x-4}{2006}$ b, $\frac{59-x}{41}+\frac{57-x}{43}+\frac{55-x}{45}+\frac{53-x}{47}+\frac{51-x}{49}=-5$

**Hướng dẫn giải**

a, $\frac{x-1}{2009}+\frac{x-2}{2008}=\frac{x-3}{2007}+\frac{x-4}{2006}$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{2009}-1\right)+\left(\frac{x-2}{2008}-1\right)=\left(\frac{x-3}{2007}-1\right)+\left(\frac{x-4}{2006}-1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x-2010}{2009}+\frac{x-2010}{2008}=\frac{x-2010}{2007}+\frac{x-2010}{2006}$$

$\Rightarrow x-2010=0$

$\Rightarrow x=2010$

b, $\frac{59-x}{41}+\frac{57-x}{43}+\frac{55-x}{45}+\frac{53-x}{47}+\frac{51-x}{49}=-5$

$$\Rightarrow \left(\frac{59-x}{41}+1\right)+\left(\frac{57-x}{43}+1\right)+\left(\frac{55-x}{45}+1\right)+\left(\frac{53-x}{47}+1\right)+\left(\frac{51-x}{49}+1\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{100-x}{41}+\frac{100-x}{43}+\frac{100-x}{45}+\frac{100-x}{47}+\frac{100-x}{49}=0$$

$\Rightarrow 100-x=0$

$\Rightarrow x=100$

**Bài 9:** Tìm x, biết: $\frac{148-x}{25}+\frac{169-x}{23}+\frac{186-x}{21}+\frac{199-x}{19}=10$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$\frac{148-x}{25}+\frac{169-x}{23}+\frac{186-x}{21}+\frac{199-x}{19}=10$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{148-x}{25}-1\right)+\left(\frac{169-x}{23}-2\right)+\left(\frac{186-x}{21}-3\right)+\left(\frac{199-x}{19}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(123-x)\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{23}+\frac{1}{21}+\frac{1}{19}\right)=0\Leftrightarrow 123-x=0\Leftrightarrow x=123$$

$S=\{123\}$

**Bài 10.** Tìm x, biết: $\dfrac{x-1}{2013}+\dfrac{x-2}{2012}-\dfrac{x-3}{2011}=\dfrac{x-4}{2010}$

**Hướng dẫn giải**

$$\Leftrightarrow\frac{x-1}{2013}-1+\frac{x-2}{2012}-1=\frac{x-4}{2010}-1+\frac{x-3}{2011}-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-2014}{2013}+\frac{x-2014}{2012}=\frac{x-2014}{2010}+\frac{x-2014}{2011}$$

$$\Leftrightarrow(x-2014)\left(\frac{1}{2013}+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=2014$$

**Bài 11.** Tìm x, biết: $\dfrac{1}{(x+4)(x+5)}+\dfrac{1}{(x+5)(x+6)}+\dfrac{1}{(x+6)(x+7)}=\dfrac{1}{18}$

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: $x\neq-4;x\neq-5;x\neq-6;x\neq-7$

Ta có:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7)-18(x+4)=(x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow(x+13)(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-13\\x=2\end{array}\right.$$

**Bài 12**. Tìm x, biết: $\dfrac{2}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{4}{(x+4)(x+8)}+\dfrac{6}{(x+8)(x+14)}=\dfrac{x}{(x+2)(x+14)}$

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\frac{4}{(x+4)(x+8)}+\frac{6}{(x+8)(x+14)}=\frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+8}\right)+\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+14}\right)=\frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+14}=\frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$\Rightarrow\frac{12}{(x+2)(x+14)}=\frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$\Rightarrow x=12$$

**Bài 13:** Giải phương trình: $\frac{x-241}{17}+\frac{x-220}{19}+\frac{x-195}{21}+\frac{x-166}{23}=10$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$\frac{x-241}{17}+\frac{x-220}{19}+\frac{x-195}{21}+\frac{x-166}{23}=10$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-241}{17}-1+\frac{x-220}{19}-2+\frac{x-195}{21}-3+\frac{x-166}{23}-4=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-258}{17}+\frac{x-258}{19}+\frac{x-258}{21}+\frac{x-258}{23}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-258)\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=258$$

**Bài 14:** Tìm x biết: $\frac{x-1}{2012}+\frac{x-2}{2011}+\frac{x-3}{2010}+.....+\frac{x-2012}{1}=2012$

**Hướng dẫn giải**

Phương trình đã cho tương đương với :

$$\frac{x-1}{2012}-1+\frac{x-2012}{2011}-1+\frac{x-3}{2010}-1+.....+\frac{x-2012}{1}-1+2012=2012$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-2013}{2012}+\frac{x-2013}{2011}+\frac{x-2013}{2010}+.......+\frac{x-2013}{1}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2013)\left(\frac{1}{2012}+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2010}+.....+\frac{1}{1}\right)=0\Leftrightarrow x=2013$$

**Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa**

**Bài 1:** Tìm x biết:

a, $(3x-1)^{10}=(3x-1)^{20}$ b, $x(6-x)^{2003}=(6-x)^{2003}$ c, $5^x+5^{x+2}=650$

**Hướng dẫn giải**

a, $(3x-1)^{10}=(3x-1)^{20}\Rightarrow(3x-1)^{20}-(3x-1)^{10}=0$

$$\Rightarrow(3x-1)^{10}\left[(3x-1)^{10}-1\right]=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3x-1=0\\(3x-1)^{10}=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\3x-1=\pm1\end{array}\right.$$

b, $x(6-x)^{2003}=(6-x)^{2003} \Rightarrow x(6-x)^{2003}-(6-x)^{2003}=0$

$\Rightarrow (6-x)^{2003}(x-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}6-x=0\\x-1=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=6\\x=1\end{array}\right.$

c, $5^x+5^x.5^2=650 \Rightarrow 5^x(1+25)=650 \Rightarrow 5^x=25 \Rightarrow 5^x=5^2 \Rightarrow x=2$

**Bài 2:** Tìm $x$ biết: $3^{3x+3}-2.3^{3x+1}=567$

**Hướng dẫn giải**

$3^{3x+3}-2.3^{3x+1}=567 \Rightarrow 3^{3x}.27-2.3^{3x}.3=567 \Rightarrow 3^{3x}.(27-6)=567$

$\Rightarrow 3^{3x}.21=567 \Rightarrow 3^{3x}=567:21 \Rightarrow 3^{3x}=3^3$

Vậy $3x=3 \Rightarrow x=1$.

**Bài 3:** Tìm $x$, biết: $5^{2x-3}-2.5^2=5^2.3$.

**Hướng dẫn giải**

$5^{2x-3}-2.5^2=5^2.3 \Rightarrow 5^{2x-3}=5^2.3+2.5^2 \Rightarrow 5^{2x-3}=5^2.(3+2) \Rightarrow 5^{2x-3}=5^3 \Rightarrow 2x-3=3$

$\Rightarrow 2x=3+3 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$

Vậy x = 3.

**Bài 4:** Tìm $x$, biết: $2^x.2^{x+1}.2^{x+2}.5^{18}=1000\ldots0$ (18 chữ số 0)

**Hướng dẫn giải**

$2^x.2^{x+1}.2^{x+2}.5^{18}=1000\ldots0$

$\Rightarrow 2^{3x+3}.5^{18}=10^{18} \Rightarrow 2^{3x+3}.5^{18}=2^{18}.5^{18} \Rightarrow 2^{3x+3}=2^{18} \Rightarrow 3x+3=18 \Rightarrow x=5$

Vậy $x=5$.

**Bài 5:** Tìm x biết: $2^{x-1}+5.2^{x-2}=\dfrac{7}{32}$

**Hướng dẫn giải**

$2^{x-1}+5.2^{x-2}=\dfrac{7}{32} \Rightarrow 2^{x-1}\left(1+\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{7}{32} \Rightarrow 2^{x-1}.\dfrac{7}{2}=\dfrac{7}{32} \Rightarrow 2^{x-1}=\dfrac{1}{16}=2^{-4} \Rightarrow x=-3$

**Bài 9:** Tìm x biết:

a, $(x-7)^{x+1}-(x-7)^{x+11}=0$ b, $2^{x+2}.3^{x+1}.5^x=10800$ c, $(2x-15)^5=(2x-15)^3$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có:

$(x-7)^{x+1}-(x-7)^{x+11}=0 \Rightarrow (x-7)^{x+1}\left[1-(x-7)^{10}\right]=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x-7=0\\(x-7)^{10}=1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=7\\x-7=\pm1\end{array}\right.$

b, $2^{x+2}.3^{x+1}.5^{x}=10800\Rightarrow 2^{x}.4.3^{x}.3.5^{x}=10800\Rightarrow 2^{x}.3^{x}.5^{x}=\dfrac{10800}{12}=900$

$\Rightarrow (2.3.5)^{x}=900\Rightarrow 30^{x}=900=30^{2}\Rightarrow x=2$

c, $(2x-15)^{5}=(2x-15)^{3}\Rightarrow (2x-15)^{5}-(2x-15)^{3}=0$

$\Rightarrow (2x-15)^{3}\left[(2x-15)^{2}-1\right]=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x-15=0\\ 2x-15=\pm 1\end{array}\right.$

**Bài 10:** Tìm x biết:

a, $(x-5)^{2}=(1-3x)^{2}$ b, $x^{2}+x=0$ c, $3^{4}.3^{n}=3^{7}$

**Hướng dẫn giải**

a, $(x-5)^{2}=(1-3x)^{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x-5=1-3x\\ x-5=3x-1\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}4x=6\\ 2x=-4\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=-2\end{array}\right.$

b, $x^{2}+x=0\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x+1=0\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.$

c, $3^{4}.3^{n}=3^{7}\Rightarrow 3^{n}=3^{7}:3^{4}=3^{3}\Rightarrow n=3$

**Bài 11:** Tìm x biết:

a, $(4x-3)^{4}=(4x-3)^{2}$ b, $(x-1)^{3}=125$ c, $2^{x+2}-2^{x}=96$

**Hướng dẫn giải**

a, $(4x-3)^{4}=(4x-3)^{2}\Rightarrow (4x-3)^{4}-(4x-3)^{2}=0$

$\Rightarrow (4x-3)^{2}\left[(4x-3)^{2}-1\right]=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}4x-3=0\\ 4x-3=\pm 1\end{array}\right.$

b, $(x-1)^{3}=125\Rightarrow (x-1)^{3}=5^{3}\Rightarrow x-1=5\Rightarrow x=6$

c, $2^{x+2}-2^{x}=96\Rightarrow 2^{x+2}-2^{x}=96\Rightarrow 2^{x}(4-1)=96\Rightarrow 2^{x}=32=2^{5}\Rightarrow x=5$

**Bài 12:** Tìm số nguyên x biết: $\left(3|x|-2^{4}\right).7^{2018}=2.7^{2019}.\dfrac{1}{2019^{0}}$

**Hướng dẫn giải**

$\left(3|x|-2^{4}\right).7^{2018}=2.7^{2019}.\dfrac{1}{2019^{0}}\Rightarrow \left(3|x|-2^{4}\right).7^{2018}=2.7^{2019}\Rightarrow 3|x|-2^{4}=2.7^{2019}:7^{2018}$

$\Rightarrow 3|x|-16=14\Rightarrow 3|x|=14+16\Rightarrow 3|x|=30\Rightarrow |x|=10\Rightarrow x=\pm 10$ ( thỏa mãn)

**Bài 13:** Tìm x biết:

a, $(9x^{2}-1)^{2}+\left|x-\dfrac{1}{3}\right|=0$ b, $\dfrac{1}{9}.3^{4}.3^{n}=3^{7}$ c, $\dfrac{1}{9}.27^{n}=3^{n}$

**Hướng dẫn giải**

a, Vì $(9x^{2}-1)\geq 0,\left|x-\dfrac{1}{3}\right|\geq 0$, để $(9x^{2}-1)^{2}+\left|x-\dfrac{1}{3}\right|=0\Rightarrow \begin{cases}9x^{2}-1=0\\ \left|x-\dfrac{1}{3}\right|=0\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

b, $\frac{1}{9}.3^4.3^n = 3^7 \Rightarrow 3^n.\frac{1}{9} = 3^7 : 3^4 = 3^3 \Rightarrow 3^n = 3^3.3^2 = 3^5$

c, $\frac{1}{9}.27^n = 3^n \Rightarrow \frac{3^n}{27^n} = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^2} \Rightarrow n = 2$

**Bài 14:** Tìm $x$, biết : $2.3^x = 10.3^{12} + 8.27^4$

**Hướng dẫn giải**

$2.3^x = 10.3^{12} + 8.27^4$

$3^x = 5.3^{12} + 4.27^4$

$3^x = 5.3^{12} + 4.\left(3^3\right)^4$

$3^x = 5.3^{12} + 4.3^{12}$

$3^x = 3^{12}\left(5+4\right)$

$3^x = 3^{12}.3^2 = 3^{14}$

$x = 4$

**Bài 15:** Tìm x biết:

a, $3^{x-1} + 5.3^{x-1} = 486$ b, $x^{200} = x$ c, $\left(2^2 : 4\right).2^n = 4$

**Hướng dẫn giải**

a, $3^{x-1} + 5.3^{x-1} = 486 \Rightarrow 3^{x-1}\left(1+5\right) = 486 \Rightarrow 3^{x-1} = 81 = 3^4 \Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$

b, $x^{200} = x \Rightarrow x\left(x^{199} - 1\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

c, $\left(2^2 : 4\right).2^n = 4 \Rightarrow 2^n = 4 = 2^2 \Rightarrow n = 2$

**Bài 16:** Tìm x biết:

a, $\left(x-1\right)^{x+2} = \left(x-1\right)^{x+4}$ b, $5^n + 5^{n+2} = 650$ c, $2008^n = 1$

**Hướng dẫn giải**

a, $\left(x-1\right)^{x+2} = \left(x-1\right)^{x+4} \Rightarrow \left(x-1\right)^{x+2}\left[\left(x-1\right)^{x+2} - 1\right] = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x-1\right)^{x+2} = 0 \\ \left(x-1\right)^{x+2} = 1 \end{array}\right.$

b, $5^n + 5^{n+2} = 650 \Rightarrow 5^n\left(1+5^2\right) = 650 \Rightarrow 5^n = 25 = 5^2 \Rightarrow n = 2$

c, $2008^n = 1 \Rightarrow 2008^n = 1 = 2008^0 \Rightarrow n = 0$

**Bài 17:** Tìm x biết:

a, $\frac{1}{2}.2^n + 4.2^n = 9.5^n$ b, $\left(\frac{y}{3} - 5\right)^{2000} = \left(\frac{y}{x} - 5\right)^{2008}$

**Hướng dẫn giải**

a, $\frac{1}{2}.2^n+4.2^n=9.5^n \Rightarrow 2^n\left(\frac{1}{2}+4\right)=9.5^n \Rightarrow 2^n.\frac{9}{2}=9.5^n \Rightarrow 2^{n-1}.9=9.5^n \Rightarrow 2^{n-1}=5^n$ Vô lý

b, $\left(\frac{y}{3}-5\right)^{2000}=\left(\frac{y}{x}-5\right)^{2008} \Rightarrow \left(\frac{y}{3}-5\right)^{2000}\left[\left(\frac{y}{3}-5\right)^{8}-1\right]=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{y}{3}-5=0\\ \frac{y}{3}-5=\pm 1\end{array}\right.$

**Bài 18:** Tìm x biết:

a, $32^{-n}.16^n=1024$ b, $3^{-1}.3^n+5.3^{n-1}=162$ c, $2^{n+3}.2^n=128$

**Hướng dẫn giải**

a, $32^{-n}.16^n=1024 \Rightarrow 2^{-5n}.2^{4n}=1024 \Rightarrow 2^{-n}=2^{10} \Rightarrow n=-10$

b, $3^{-1}.3^n+5.3^{n-1}=162 \Rightarrow 3^{n-1}+5.3^{n-1}=162$

$\Rightarrow 3^{n-1}.6=162 \Rightarrow 3^{n-1}=27=3^3 \Rightarrow n-1=3 \Rightarrow n=4$

c, $2^{n+3}.2^n=128 \Rightarrow 2^{2x+3}=128=2^7 \Rightarrow 2n+3=7 \Rightarrow n=2$

**Bài 19:** Tìm x biết: $3^x+3^{x+2}=810$

**Hướng dẫn giải**

$3^x+3^{x+2}=810$

$10.3^x=810$

$3^x=81$

$3^x=3^4$

$\Rightarrow x=4$

Vậy $x=4$

**Bài 20:** Tìm x biết:

a, $\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}=3^5$ b, $2^{x+\frac{1}{2}}=8$

**Hướng dẫn giải**

a, $\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}=3^5 \Rightarrow 3^{1-2n}=3^5 \Rightarrow 1-2n=5 \Rightarrow n=-2$

b, $2^{x+\frac{1}{2}}=8 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{2}}=2^3 \Rightarrow x+\frac{1}{2}=3 \Rightarrow x=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

**Bài 21:** Tìm x biết:

a, $4^{x-2}+4^{x+1}=1040$ b, $(2x-1)^3=-8$ c, $(x-1)^{x+2}=(x-1)^{x+4}$

**Hướng dẫn giải**

a, $4^{x-2}+4^{x+1}=1040 \Rightarrow 4^{x-2}+4^{x-2}.4^3=1040$

$\Rightarrow 4^{x-2}.65=1040 \Rightarrow 4^{x-2}=16=4^2 \Rightarrow x-2=2 \Rightarrow x=4$

b, $(2x-1)^3=-8 \Rightarrow (2x-1)^3=(-2)^3 \Rightarrow 2x-1=-2 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}.$

c, $(x-1)^{x+2}=(x-1)^{x+4}\Rightarrow (x-1)^{x+2}\left[(x-1)^2-1\right]=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^{x+2}=0\\(x-1)^{x+2}=\pm 1\end{array}\right.$

**Bài 22:** Tìm n biết:

a, $2^{-1}.2^n+4.2^n=9.2^5$ b, $3^{n-1}+5.3^{n-1}=162$

**Hướng dẫn giải**

a, $2^{-1}.2^n+4.2^n=9.2^5\Rightarrow 2^n\left(\frac{1}{2}+4\right)=9.2^5\Rightarrow 2^n.\frac{9}{2}=9.2^5\Rightarrow 2^{n-1}=2^5\Rightarrow n=6$

b, $3^{n-1}+5.3^{n-1}=162\Rightarrow 3^{n-1}.6=162\Rightarrow 3^{n-1}=27=3^3\Rightarrow n=4$

**Bài 23:** Tìm x biết:

a, $\left(n^{54}\right)^2=n$ b, $8^{x+3}+2^{3x}-2^9=2^{18}$.

**Hướng dẫn giải**

a, $\left(n^{54}\right)^2=n\Rightarrow n^{108}=n\Rightarrow n\left(n^{107}-1\right)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}n=0\\n=1\end{array}\right.$

b, $8^{x+3}+2^{3x}-2^9=2^{18}\Rightarrow 8^x.8^3+8^x-8^3-8^6=0$

$\Rightarrow 8^x\left(8^3+1\right)-8^3\left(8^3+1\right)=0\Rightarrow \left(8^3+1\right)\left(8^x-8^3\right)=0$

$\Rightarrow 8^x-8^3=0$ (vì $8^3+1>0$) $\Rightarrow 8^x=8^3$

$\Rightarrow x=3$

Vậy $x=3$.

**Bài 24:** Tìm x biết:

a, $2^{x+2}-2^x=96$ b, $(2x-1)^{50}=2x-1$

**Hướng dẫn giải**

a, $2^{x+2}-2^x=96\Rightarrow 2^x.4-2^x=96\Rightarrow 3.2^x=96\Rightarrow 2^x=32=2^5\Rightarrow x=5$

b, $(2x-1)^{50}=2x-1\Rightarrow (2x-1)\left[(2x-1)^{49}-1\right]=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=0\\2x-1=1\end{array}\right.$

**Bài 25:** Tìm x biết:

a, $(x-5)^2=(1-3x)^2$ b, $32^{-n}.16^n=1024$

**Hướng dẫn giải**

a, $(x-5)^2=(1-3x)^2\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x-5=1-3x\\x-5=3x-1\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}4x=6\\2x=-4\end{array}\right.$

b, $32^{-n}.16^n=1024\Rightarrow 2^{-5n}.2^{4n}=2^{10}\Rightarrow 2^{-n}=2^{10}\Rightarrow n=-10$

**Bài 26:** Tìm x biết:

a, $10^x:5^y=20^y$ b, $|x-5|+x-8=6$ ( với x > 5) c, $2^{x+1}.3^y=12^x$

**Hướng dẫn giải**

a, $10^x:5^y=20^y\Rightarrow 10^x=20^y.5^y=100^y=10^{2y}\Rightarrow x=2y$

b, Vì $x>5\Rightarrow |x-5|=x-5$, Khi đó ta có: $x-5+x-8=6\Rightarrow 2x=19\Rightarrow x=\frac{19}{2}$

c, $2^{x+1}.3^{y}=2^{2x}.3^{x}\Rightarrow 2^{2x}:2^{x+1}=3^{y}:3^{x}\Rightarrow 2^{x-1}=3^{y-x}\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\\y-x=0\end{cases}\Rightarrow x=y=1$

**Bài 27:** Tìm x biết:

a, $(x-2)^{6}=(x-2)^{8}$ b, $\frac{7}{3}x+\left(\frac{-11}{12}\right)^{2}=\left(\frac{29}{12}\right)^{2}-x=y^{2}$

**Hướng dẫn giải**

a, $(x-2)^{6}=(x-2)^{8}\Rightarrow(x-2)^{6}\left[(x-2)^{2}-1\right]=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\\x-2=\pm1\end{array}\right.$

b, $\frac{7}{3}x+\left(\frac{-11}{12}\right)^{2}=\left(\frac{29}{12}\right)^{2}-x=y^{2}\quad\Rightarrow\frac{7}{3}x+x=\left(\frac{29}{12}\right)^{2}-\left(\frac{11}{12}\right)^{2}\Rightarrow\frac{10}{3}x=5\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

Thay vào ta được: $y^{2}=\frac{7}{3}.\frac{3}{2}+\frac{121}{144}=\frac{7}{2}+\frac{121}{144}=\frac{625}{144}\Rightarrow y=\pm\frac{25}{12}$.

**Bài 28:** Tìm x,y,z biết: $\frac{x^{2}}{2}+\frac{y^{2}}{3}+\frac{z^{2}}{4}=\frac{x^{2}+y^{2}+z^{2}}{5}$

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{x^{2}}{2}+\frac{y^{2}}{3}+\frac{z^{2}}{4}=\frac{x^{2}+y^{2}+z^{2}}{5}\Rightarrow\left(\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{2}}{5}\right)+\left(\frac{y^{2}}{3}-\frac{y^{2}}{5}\right)+\left(\frac{z^{2}}{4}-\frac{z^{2}}{5}\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{3}{10}x^{2}+\frac{2}{15}y^{2}+\frac{1}{20}z^{2}=0\Rightarrow x=y=z=0.$$

**Bài 29:** Tìm x biết: $\frac{7^{x+2}+7^{x+1}+7^{x}}{57}=\frac{5^{2x}+5^{2x+1}+5^{2x+3}}{131}$

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{7^{x+2}+7^{x+1}+7^{x}}{57}=\frac{5^{2x}+5^{2x+1}+5^{2x+3}}{131}\Rightarrow\frac{7^{x}(49+7+1)}{57}=\frac{5^{2x}(1+5+125)}{131}\Rightarrow 7^{x}=25^{x}\Rightarrow x=0$$

**Bài 30:** Tìm $x$ thỏa mãn: $\frac{4^{5}+4^{5}+4^{5}+4^{5}}{3^{5}+3^{5}+3^{5}}.\frac{6^{5}+6^{5}+6^{5}+6^{5}+6^{5}+6^{5}}{2^{5}+2^{5}}=2^{x}$

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{4^{5}+4^{5}+4^{5}+4^{5}}{3^{5}+3^{5}+3^{5}}.\frac{6^{5}+6^{5}+6^{5}+6^{5}+6^{5}+6^{5}}{2^{5}+2^{5}}$$

$$=\frac{4.4^{5}}{3.3^{5}}.\frac{6.6^{5}}{2.2^{5}}=\frac{4^{6}}{3^{6}}.\frac{6^{6}}{2^{6}}=\left(\frac{6}{3}\right)^{6}.\left(\frac{4}{2}\right)^{6}=2^{12}\Rightarrow 2^{2}=2^{12}\Rightarrow x=12.$$

**Bài 31:** Tìm x biết: $\left(2^{3}\right)^{1^{2005}}.x+2005^{0}.x=994-15:3+1^{2005}$

**Hướng dẫn giải**

$$\left(2^{3}\right)^{1^{2005}}.x+2005^{0}.x=994-15:3+1^{2005}\Rightarrow 8.x+x=990\Rightarrow 9x=990\Rightarrow x=110$$

**Bài 32:** Tìm số nguyên $x$ biết: $2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}+\cdots+2^{x+2015}=2^{2019}-8.$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}+\cdots+2^{x+2015}=2^{2019}-8$

$\Leftrightarrow 2^{x}\left(1+2+2^{2}+\cdots+2^{2015}\right)=2^{2019}-2^{3}$

$$\Leftrightarrow 2^x.\left(2^{2016}-1\right)=2^3\left(2^{2016}-1\right)\Leftrightarrow 2^x=2^3\Leftrightarrow x=3.$$

**Bài 33:** Tìm x sao cho $\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}=17$

**Hướng dẫn giải**

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}=17\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x.\left(\frac{1}{2}\right)^4=17\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x.\left(\frac{1}{16}+1\right)=17$$

$$\Leftrightarrow\frac{17}{16}.\left(\frac{1}{2}\right)^x=17\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x=16\Leftrightarrow 2^{-x}=2^4\Leftrightarrow x=-4$$

**Bài 34:** Tìm m,n thỏa mãn : $\left(-7x^4y^m\right).\left(-5x^ny^4\right)=35x^9y^{15}$

**Hướng dẫn giải**

$$=> 35.x^{n+4}.y^{m+4}=35.x^9.y^{15} => \begin{cases} n+4=9\\ m+4=15\end{cases}$$

**Bài 35:** Tìm x, y nguyên biết : $2012^{|x-1|+y^2-1}.3^{2012}=9^{1006}$

**Hướng dẫn giải**

$$2012^{|x-1|+y^2-1}.3^{2012}=9^{1006}\Rightarrow 2012^{|x-1|+y^2-1}.3^{2012}=3^{2012}\Rightarrow 2012^{|x-1|+y^2-1}=1\Rightarrow |x-1|+y^2-1=0$$

$$=> \Rightarrow |x-1|+y^2=1\Rightarrow\begin{cases}|x-1|=0\\ y^2=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}|x-1|=1\\ y^2=0\end{cases}$$

**Bài 36:** Tìm x biết: $\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}.\frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5}=8^x$

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}.\frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5}=8^x\Rightarrow\frac{4.4^5}{3.3^5}.\frac{6^5.6}{2.2^5}=2^{3n}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{24}{6}\right)^5.\frac{24}{6}=2^{3n}\Rightarrow 4^5.4=2^{3n}\Rightarrow 4^6=2^{3n}\Rightarrow 3n=6\Rightarrow n=2$$

**Bài 37:** Tìm $x$, biết: $(x-5)^{x+1}-(x-5)^{x+13}=0$

**Hướng dẫn giải**

$$(x-5)^{x+1}-(x-5)^{x+13}=0\Leftrightarrow(x-5)^{x+1}\left[1-(x-5)^{12}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-5)^{x+1}=0\\ 1-(x-5)^{12}=0\end{array}\right.$$

$$(x-5)^{x+1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-5=0\\ x+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=5$$

$$1-(x-5)^{12}=0\Leftrightarrow(x-5)^{12}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-5=1\\ x-5=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\ x=4\end{array}\right..$$

Vậy $x=4,x=5,x=6$

**Bài 38:** Tìm $x$ biết: $\left|3x-2^4\right|.7^{2018}=2.7^{2019}\cdot\frac{1}{2019^o}$.

**Hướng dẫn giải**

$$\left|3x-2^4\right|.7^{2018}=2.7^{2019}\cdot\frac{1}{2019^{\circ}}$$

$$\left|3x-2^4\right|.7^{2018}=2.7^{2019}\cdot\frac{1}{2019^{\circ}}\Leftrightarrow\left|3x-2^4\right|.7^{2018}=2.7^{2019}\Leftrightarrow\left|3x-16\right|=14$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-16=14\\3x-16=-14\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=30\\3x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\\x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Vậy $x\in\left\{10;\,\dfrac{2}{3}\right\}$.

**Bài 39:** Tìm số tự nhiên x biết: $2^x.2^{x+1}.2^{x+2}=\underbrace{100...00}_{15\text{ chữ số }0}:5^{15}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có $2^x.2^{x+1}.2^{x+2}=\underbrace{100...00}_{15\text{ chữ số }0}:5^{15}$

$2^x.2^x.2.2^x.2^2=10^{15}:5^{15}$

$2^{3x}.2^3=2^{15}.5^{15}:5^{15}$

$2^{3x}=2^{15}:2^3$

$2^{3x}=2^{12}$

$\Rightarrow 3x=12$

$\Rightarrow x=12:3$

$\Rightarrow x=4$

**Bài 40:** Tìm $x$ biết $2^{x+2}.3^{x+1}.5^x=10800$

**Hướng dẫn giải**

$2^{x+2}.3^{x+1}.5^x=10800\Rightarrow 2^x.4.3^x.3.5^x=10800\Rightarrow 30^x=10800:12=900\Rightarrow 30^x=30^2\Rightarrow x=2$

**Bài 41:** Trong ba số a, b, c có 1 số dương, 1 số âm, và 1 số bằng 0, Tìm 3 số đó biết: $|a|=b^2(b-c)$

**Hướng dẫn giải**

Xét $a=0\Rightarrow b^2(b-c)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b=c\end{array}\right.(VL)$

Xét $a\neq 0\Rightarrow|a|=b^2(b-c)>0\Rightarrow\begin{cases}b>c\\b>0\end{cases}\Rightarrow c=0,b>0,a<0$

**Bài 42:** Tìm số tự nhiên $x, y$ sao cho $10^x=y^2-143$.

**Hướng dẫn giải**

$10^x=y^2-143\Rightarrow 10^x+143=y^2$

Nếu $x=0\Rightarrow y=12$ thỏa mãn.

Nếu $x>0\Rightarrow 10^x$ có chữ số tận cùng là $0\Rightarrow 10^x+143$ có chữ số tận cùng là 3. Mà $y^2$ là số chính phương nên không thể có tận cùng bằng 3. Do đó không tồn tại $x,y\in\mathbb{N}$ thỏa mãn.

Vậy $x=0;\ y=12.$

**Bài 43:** Tìm x,y biết: $x(x-y)=\dfrac{3}{10}$ và $y(x-y)=\dfrac{-3}{50}$

**Hướng dẫn giải**

Trừ theo vế ta được : $(x-y)(x-y)=\dfrac{9}{25}\Rightarrow (x-y)^2=\left(\pm\dfrac{3}{5}\right)^2\Rightarrow x-y=\pm\dfrac{3}{5}$

$x=\dfrac{3}{10}:\left(\pm\dfrac{3}{5}\right)=\pm\dfrac{1}{2};\quad y=\dfrac{-3}{50}:\left(\pm\dfrac{3}{5}\right)=\mp\dfrac{1}{10}.$

**Bài 44:** Tìm các số nguyên dương a, b, c biết rằng: $a^3-b^3-c^3=3abc$ và $a^2=2(b+c)$

**Hướng dẫn giải**

Vì $a^2=2(b+c)$ nên $a^2$ là 1 số chẵn suy ra a chẵn, mà a, b, c nguyên dương nên từ $a^3-b^3-c^3=3abc\Rightarrow a>b$ và $a>c$ $\Rightarrow 2a>b+c\Rightarrow 4a>2(b+c)\Rightarrow 4a>a^2\Rightarrow a<4$

Suy ra a = 2 và b = c = 1

**Bài 45:**

a) Trong ba số $a,b,c$ có một số dương, một số âm và một số bằng 0, ngoài ra còn biết: $|a|=b^2(b-c)$. Hỏi số nào dương, số nào âm, số nào bằng 0

b) Tìm hai số $x$ và $y$ sao cho $x+y=xy=x:y\quad (y\neq 0)$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $|a|\geq 0, b^2\geq 0$ nên từ $|a|=b^2(b-c)\Rightarrow b-c\geq 0\Rightarrow c\leq b$

+Nếu $b=0\Rightarrow |a|=0\Rightarrow a=0\Rightarrow$ có hai số $a$ và $b$ bằng 0, vô lý

+Nếu $b<0\Rightarrow c\leq b<0\Rightarrow$ có hai số âm b và c, vô lý

+Nếu $b>0$, ta xét $a=0\Rightarrow b-c=0\Rightarrow b=c>0\Rightarrow$ có hai số dương $b$ và c, vô lý

$\Rightarrow a<0$

Vậy $a<0, b>0, c=0$

b) Từ $x+y=xy\Rightarrow x=xy-y=y(x-1)\Rightarrow x:y=x-1$

Ta lại có: $x:y=x+y\Rightarrow x+y=x-1\Rightarrow y=-1$

$\Rightarrow x=xy-y=-x+1\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}.$

Vậy hai số cần tìm là $x=\dfrac{1}{2}; y=-1$

**Bài 46:** Tìm các số tự nhiên $a,b$ sao cho: $(2008a+3b+1)(2008^a+2008a+b)=225$

**Hướng dẫn giải**

Theo đề bài $\Rightarrow 2008a+3b+1$ và $2008^a+2008a+b$ là hai số lẻ

Nếu $a\neq 0\Rightarrow 2008^a+2008a$ là số chẵn

Để $2008^a+2008a+b$ lẻ $\Rightarrow b$ lẻ , nếu b lẻ $\Rightarrow 3b+1$ chẵn, do đó $2008a+3b+1$ chẵn (không thỏa mãn), vậy $a=0$

Với $a=0\Rightarrow (3b+1)(b+1)=225$

Vì $b\in\mathbb{N}\Rightarrow (3b+1)(b+1)=3.75=5.45=9.25$

$3b+1$ không chia hết cho 3 và $3b+1>b+1\Rightarrow \begin{cases}3b+1=25\\ b+1=9\end{cases}\Rightarrow b=8$

Vậy $a=0,b=8$

**Bài 47:** Tìm $x\in\mathbb{N}$ biết: $3.(5^x-1)-2=70$;

**Hướng dẫn giải**

$3.(5^x-1)-2=70\Rightarrow 3.(5^x-1)=72\Rightarrow 5^x-1=24\Rightarrow 5^x=25\Rightarrow x=5.$

Vậy $x=5.$

**Bài 49:** Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+x=3^{2020y}+1$

**Hướng dẫn giải**

Xét trường hợp $y=0$ Khi đó : $x^2+x=2\Rightarrow x(x+1)=2\Rightarrow x=1;x=-2$ vậy cặp $(x;y)$ thỏa là

$(1;0);(-2;0)$

Xét trường hợp $y>0$ khi đó

$3^{2020y}+1$ chia $3$ dư $1$ còn $x(x+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho $3$ hoặc chia $3$ dư $2$ nên không xảy ra

Vậy cặp $(x;y)$ thỏa là : $(1;0);(-2;0)$

**Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức**

**Bài 1:** Tìm tất cả các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{617}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{617}\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{617}\Leftrightarrow xy-617(x+y)=0\Leftrightarrow xy-617x-617y+617^2=617^2$

$\Leftrightarrow (x-617)(y-617)=617^2$

Vì x, y nguyên dương nên x – 617 và y – 617 là ước lớn hơn –617 của $617^2$.

Do 617 là số nguyên tố nên xảy ra 3 trường hợp:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-617=617\\y-617=617\end{cases}\\\begin{cases}x-617=1\\y-617=617^2\end{cases}\\\begin{cases}x-617=617^2\\y-617=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1234\\x=618;y=381306\\x=381306;y=618\end{array}\right.$$

Vậy tất cả các cặp (x;y) nguyên dương cần tìm là

(1234;1234) , (618; 381306), (381306; 618)

**Bài 2:** Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{6xy}=\frac{1}{6}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $(1)\Leftrightarrow 6y+6x+1=xy\Leftrightarrow x(y-6)-6(y-6)=37\Leftrightarrow(x-6)(y-6)=37$

Do vai trò của x, y bình đẳng giả sử: $x\ge y\ge 1\Rightarrow x-6\ge y-6\ge -5$

Chỉ có một trường hợp là $\begin{cases}x-6=37\\y-6=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=43\\y=7\end{cases}$

**Bài 3:** Tìm cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn: $\frac{x}{4}-\frac{5}{y}=\frac{3}{2}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\frac{x}{4}-\frac{5}{y}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{xy-20}{4y}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2xy-40=12y\Rightarrow xy-6y=20\Rightarrow y.(x-6)=20$

TH1: $y=1\Rightarrow x-6=20\Rightarrow x=26$

Vậy: $y=1,\ x=26$ (thỏa mãn).

TH2: $y=20\Rightarrow x-6=1\Rightarrow x=7$

Vậy: $y=20,\ x=7$ (thỏa mãn).

TH3: $y=2\Rightarrow x-6=10\Rightarrow x=16$

Vậy: $y=2,\ x=16$ (thỏa mãn).

Th4: $y=10\Rightarrow x-6=2\Rightarrow x=8$

Vậy: $y=10,\ x=8$ (thỏa mãn).

TH5: $y=4\Rightarrow x-6=5\Rightarrow x=11$

Vậy: $y=4,\ x=11$ (thỏa mãn).

TH6: $y = 5 \Rightarrow x - 6 = 4 \;\Rightarrow x = 10$

Vậy: $y = 5,\; x = 10$ (thỏa mãn).

**Bài 4:** Tìm các số nguyên $x, y$ thỏa mãn: $\frac{2x}{3} - \frac{2}{y} = \frac{1}{3}$

**Hướng dẫn giải**

$\frac{2x}{3} - \frac{2}{y} = \frac{1}{3}$

$\frac{2x-1}{3} = \frac{2}{y}$

$\Rightarrow (2x-1)y = 6$

Ta có: $2x-1; y$ là các số nguyên mà $2x-1$ là số nguyên lẻ.

Mà Ư(6)= $\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$

Nê ta có bảng:

| $2x-1$ | 1 | 3 | -1 | -3 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 6 | 2 | -6 | -2 |
| $x$ | 1 | 2 | 0 | -1 |

Vậy $(x;y) = \{(1;6),(0;-6),(-1,-2)\}$

**Dạng 5: Phương pháp chặn**

**Bài 1:** Tìm số tự nhiên x,y biết: $7(x-2004)^2 = 23 - y^2$

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết ta thấy $7(x-2004)^2 \geq 0$ nên $23 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 23 \Rightarrow y \in \{0;1;2;3;4\}$

Mà 7 là số nguyên tố nên $23 - y^2 \,\vdots\, 7 \Rightarrow y \in \{3;4\}$. Thay y vào ta tìm được x

**Bài 2:** Tìm các số nguyên $x, y$ biết $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$

**Hướng dẫn giải**

Viết được $(x+1)^2 = 42 + 8y^2$

Suy ra $(x+1)^2$ là số chẵn , để có $(x+1)^2$ chia hết cho 4 nên $42 + 8y^2$ không chia hết cho 4

Vậy không có số nguyên $x, y$ thỏa mãn đề bài

**Bài 3:** Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $36 - y^2 = 8(x-2010)^2$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $36-y^2=8(x-2010)^2 \Rightarrow y^2+8(x-2010)=36$

Vì $y^2 \geq 0 \Rightarrow 8(x-2010)^2 \leq 36 \Rightarrow (x-2010)^2 \leq \dfrac{36}{8}$

Vì $0 \leq (x-2010)^2$ và $x \in \mathbb{N}, (x-2010)^2$ là số chính phương nên

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x-2010)^2=4\\(x-2010)^2=1\\(x-2010)^2=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}|x-2010|=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2012\\x=2008\end{array}\right. \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=2\\y=-2(ktm)\end{array}\right.\\ x-2010=\pm 1 \Rightarrow y^2=28(ktm)\\ x-2010=0 \Rightarrow x=2010 \Rightarrow y^2=36 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=6\\y=-6(ktm)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Vậy $(x;y)=(2012;2);(2008;2);(2016;6)$

**Bài 4:** Tìm 3 số nguyên dương x, y, z: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$

**Hướng dẫn giải**

Do x, y, z có vai trò như nhau nên ta giả sử: $x \leq y \leq z$

Khi đó: $1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \leq \dfrac{3}{x} \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow x \in \{1;2;3\}$ $\left(\text{do } x \in Z^+\right)$

Với $x = 1$ phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $x = 2$ ta có: $1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \leq \dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{y} \Rightarrow y \leq 4$ . Mặt khác $y \geq x = 2 \Rightarrow y \in \{2,3,4\}$

+) y = 2 thì phương trình vô nghiệm.

+) y = 3 thì z = 6

+) y = 4 thì z = 4

Với $x = 3$ ta có: $1=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \leq \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{y} \Rightarrow y \leq 3$. Mặt khác $y \geq x = 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow z = 3$

Vậy phương trình có nghiệm là (x, y, z) = (2, 3, 6); (2, 4, 4); (3, 3, 3).

**Bài 5:** Tìm nghiệm nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $2xyz = x+y+z$

**Hướng dẫn giải**

Giả sử $x \leq y \leq z$ . Ta có: $2xyz = x+y+z \leq 3z$

Chia 2 vế cho z dương ta được $2xy \leq 3 \Rightarrow xy \leq 1 \Rightarrow xy = 1$

Do đó x = y = 1. Thay vào phương trình ban đầu ta được: 2z = z + 2 hay z = 2.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là (x, y, z) = (1, 1, 2); (1, 2, 1); (2, 1, 1).

**Bài 6:** Tìm các số nguyên a, b, c ≠ 0, biết: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}=a+b+c=3$

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=a+b+c=3\Rightarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+3=9$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+1\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+1\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+1\right)=9$$

$$\Rightarrow\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{a}=9\Rightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9$$

$\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$, do a, b, c $\in Z$ nên $\frac{1}{a}\le 1,\frac{1}{b}\le 1,\frac{1}{c}\le 1\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3\Rightarrow a=b=c=1$

**Bài 7:** Tìm số nguyên x, y biết: $42-3|y-3|=4(2012-x)^4$

**Hướng dẫn giải**

$\Rightarrow 42=3|y-3|+4(2012-x)^4$, Do $3|y-3|\ge 0,\forall y\in Z$ nên $4(2012-x)^4\le 42$

$\Rightarrow(2012-x)^4\le 11<2^4\Rightarrow 2012-x=0$ hoặc $2012-x=\pm1$, Vì 2012 - x là số nguyên nên

+ Nếu $2012-x=\pm1$ suy ra x = 2011 hoặc x = 2013 thì $38=3|y-3|\Rightarrow|y-3|=\frac{38}{3}$ (loại)

+ Nếu: 2012 - x = 0 suy ra x = 2012 và $42=3|y-3| => |y-3|=14$ nên y = 17 hoặc y = - 11

**Bài 8:** Chứng minh rằng không tìm được hai số x, y nguyên dương sao khác nhau sao cho $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{x-y}$

**Hướng dẫn giải**

Quy đồng chéo ta được : $(y-x)(x-y)=xy$, Vì x - y và y - x là hai số đối nhau nên VT < 0,

Và nếu x, y nguyên dương thì VP > 0 suy ra mẫu thuẫn

Vậy không tồn tại hai số x, y nguyên dương

**Bài 9:** Tìm bộ ba số tự nhiên khác 0 sao cho: $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+c}=1$

**Hướng dẫn giải**

Vì $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{3}{a}\Rightarrow a<3\Rightarrow a\in\{1;2\}$

TH1 : Với $a=1\Rightarrow\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b+c+1}+1=1\Rightarrow\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b+c+1}=0$ ( loại)

TH2 : Với $a=2\Rightarrow\frac{1}{b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{2}=1\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{b+2}+\frac{1}{b+c+2}<\frac{1}{b+2}+\frac{1}{b+2}=\frac{2}{b+2}$

$\Rightarrow b+2<4\Rightarrow b<2\Rightarrow b=1$

Với b =1 thì $\frac{1}{3}+\frac{1}{c+3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{c+3}=\frac{1}{6}\Rightarrow c=3$

Vậy (a, b, c) = (2, 1, 3).

**Bài 10:** Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=z$.

**Hướng dẫn giải**

Biến đổi thành: $xyz=x+y$.

Do đối xứng của x và y nên có thể giả thiết rằng $x \le y$ . Ta có
$xyz = x + y \le y + y = 2y \Rightarrow xz \le 2.$

Ta lựa chọn nghiệm trong các trường hợp sau: x = 1, z = 1; x = 2, z = 1; x =1, z = 2

Ta suy ra nghiệm (x, y, z) là (1, 1, 2) và (2, 2, 1).

***Nhận xét:*** *Ở bài toán này do vai trò của x, y, z là không bình đẳng nên ta không có thể giải sử* $x \le y \le z$ *ta chỉ có thể giả sử* $x \le y$

**Bài 11:** Tìm số tự nhiên $x$ thỏa mãn $3^x + 4^x = 5^x$

**Hướng dẫn giải**

Với $x = 0, x = 1$ thay vào không thỏa mãn

+) $x = 2$ thay vào ta được $3^2 + 4^2 = 5^2$ (luôn đúng), vậy $x = 2$ thỏa mãn

+) $x > 2$, ta có: $3^x + 4^x = 5^x \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1(*)$

Với $x > 2$ ta có:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 ; \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow x > 2 ...ktm$$

Vậy $x = 2$

**Bài 12:** Tìm các số $a, b, c$ nguyên dương thỏa mãn $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a + 3 = 5^c$

**Hướng dẫn giải**

Do $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 5^b = a^3 + 3a^2 + 5 > a + 3 = 5^c$

$\Rightarrow 5^b > 5^c \Rightarrow b > c \Rightarrow 5^b \vdots 5^c$

$\Rightarrow \left(a^3 + 3a^2 + 5\right) \vdots (a + 3) \Rightarrow a^2(a + 3) + 5 \vdots (a + 3)$

Mà $a^2(a + 3) \vdots (a + 3) \Rightarrow 5 \vdots (a + 3) \Rightarrow a + 3 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$ (1)

Do $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a + 3 \ge 4 \ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow 2^3 + 3.2^2 + 5 = 5^5; 25 = 5^b \Rightarrow b = 2$

$\Rightarrow 2 + 3 = 5^c \Rightarrow c = 1$

Vậy $a = 2; b = 2; c = 1$

**Bài 13:** Tìm tất cả các số tự nhiên $a, b$ sao cho: $2^a + 37 = |b - 45| + b - 45$

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét : với $x \ge 0$ thì $|x| + x = 2x$

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $b \in \mathbb{Z}$

Suy ra $2^a+37$ là số chẵn $\Leftrightarrow 2^a$ lẻ $\Leftrightarrow a=0$

Khi đó $|b-45|+b-45=38$

Nếu $b<45$, ta có: $-(b-45)+b-45=38 \Leftrightarrow 0=38(ktm)$

Nếu $b\ge 45$, ta có: $2(b-45)=38 \Leftrightarrow b=64(tm)$

Vậy $(a,b)=(0;64)$

**Bài 14.** Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $x+y+z=xyz$

**Hướng dẫn giải**

Vì $x,y,z$ nguyên dương nên ta giả sử $1\le x\le y\le z$

Theo bài ra $1=\frac{1}{yz}+\frac{1}{yx}+\frac{1}{zx}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{3}{x^2}\Rightarrow x^2\le 3\Rightarrow x=1$

Thay vào đầu bài ta có: $1+y+z=yz\Rightarrow y-yz+1+z=0$

$\Rightarrow y(1-z)-(1-z)+2=0$

$\Leftrightarrow (y-1)(z-1)=2$

$Th1: y-1=1\Rightarrow y=2$ và $z-1=2\Rightarrow z=3$

$Th2: y-1=2\Rightarrow y=3$ và $z-1=1\Rightarrow z=2$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1,2,3);(1,3,2)$

**Bài 15:** Tìm tất cả các số tự nhiên $a,b$ sao cho : $2^a+7=|b-5|+b-5$

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét: với $x\ge 0$ thì $|x|+x=2x$

Với $x<0$ thì $|x|+x=0$. Do đó $|x|+x$ luôn là số chẵn với mọi $x\in\mathbb{Z}$

Áp dụng nhận xét trên thì $|b-5|+b-5$ là số chẵn với $b-5\in\mathbb{Z}$

Suy ra $2^a+7$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ $\Leftrightarrow a=0$

Khi đó $|b-5|+b-5=8$

Nếu $b<5\Rightarrow -(b-5)+b-5=8\Leftrightarrow 0=8(ktm)$

Nếu $b\ge 5\Rightarrow 2(b-5)=8\Leftrightarrow b=9(tm)$

Vậy $(a,b)=(0,9)$

**Bài 16:** Cho $A=\frac{5}{17}+\frac{-4}{9}-\frac{20}{31}+\frac{12}{17}-\frac{11}{31}$ và $B=\frac{-3}{7}+\frac{7}{15}+\frac{-4}{7}+\frac{8}{15}-\frac{-2}{3}$. Tìm số nguyên x sao cho $A<\frac{x}{9}\le B$

**Hướng dẫn giải**

Tính A ta có : $A=\frac{-4}{9}$ và $B=\frac{2}{3}$

Theo bài ra ta có :

$$\frac{-4}{9}<\frac{x}{9}\le\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{-4}{9}<\frac{x}{9}\le\frac{6}{9}\Rightarrow -4<x\le 6\Rightarrow x\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6\}$$

**Bài 17:** Tìm số nguyên x sao cho : $(x^2-1)(x^2-4)(x^2-7)(x^2-10)<0$

**Hướng dẫn giải**

Vì tích của 4 số : $(x^2-1),(x^2-4),(x^2-7),(x^2-10)$ là 1 số âm, nên phải có 1 số âm hoặc 3 số âm

Ta có : $x^2-10<x^2-7<x^2-4<x^2-1$ , ta xét 2 trường hợp sau :

Trường hợp 1: Có 1 số âm suy ra:

$x^2-10<x^2-7\Rightarrow x^2-10<0<x^2-7\Rightarrow 7<x^2<10\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm 3$

Trường hợp 2 : Có 3 số âm và 1 số dương :

$\Rightarrow x^2-4<0<x^2-1\Rightarrow 1<x^2<4$ , Do x là số nguyên nên không tồn tại x

Vậy $x=\pm 3$ là số cần tìm

**Bài 18:** Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn: $6x^2+5y^2=74$

**Hướng dẫn giải**

Từ $6x^2+5y^2=74\Rightarrow 6x^2\le 74\Rightarrow x^2\le\frac{74}{6}$ mà $x\in Z\Rightarrow x^2\in\{0;1;4;9\}$

Mặt khác ta lại có: $x^2+1=75-5x^2-5y^2\,\vdots\,5\Rightarrow x^2=4$ hoặc $x^2=9$

Với $x^2=4\Rightarrow y^2=10$ ( loại) vì y không là số nguyên

Với $x^2=9\Rightarrow y^2=4\Rightarrow (x;y)\in\{(3;2);(3;-2);(-3;2);(-3;-2)\}$

**Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng**

**Bài 1:** Tìm số tự nhiên $x$, biết: $1+3+5+7+9+....+(2x-1)=225$

**Hướng dẫn giải**

$1+3+5+7+9+....+(2x-1)=225$

$\frac{[(2x-1)-1]:2+1}{2}[(2x-1)+1]=225$

$\frac{(2x-2):2+1}{2}.2x=225$

$\frac{x}{2}.2x=225$

$x^2=225$

$x=15$

**Bài 2:** Tìm $x$ biết: $1+5+9+13+17+...+x=501501$

**Hướng dẫn giải**

Ta có $5=2+3;\ 9=4+5;\ 13=6+7;\ 17=8+9\ ...$

Do vậy $x=a+(a+1)\quad (a\in\mathbb{N})$

Nên $1+5+9+13+17+...+x=1+2+3+4+5+6+7+...+a+(a+1)=501501$

Hay $(a+1)(a+1+1):2=501501$

$(a+1)(a+2)=1003002=1001.1002 \Rightarrow a=1000$

Do đó $x=1000+(1000+1)=2001$.

**Bài 3:** Tìm x, biết: $x+2x+3x+...+2011x=2012.2013$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $x(1+2+3+...+2011)=2012.2013 \Rightarrow x.\dfrac{(1+2011).2011}{2}=2012.2013$

$x.2012.2011=2.2012.2013 \Rightarrow x=\dfrac{4026}{2011}$.

**Bài 4.** Tìm $x$, biết: $x+(x+1)+(x+2)+...+(x+30)=1240$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $x+(x+1)+(x+2)+...+(x+30)=1240$

$$x+30.x+\frac{(30+1).30}{2}=1240$$

$$31.x+465=1240$$

$$31.x=775$$

$$x=25$$

Vậy $x=25$

**Bài 5.** Tìm x biết: $(x+1)+(x+2)+(x+3)+...+(x+100)=5070$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $(x+x+x+...+x)+(1+2+3+...+100)=5070$

$\Rightarrow 100x+5050=5070 \Rightarrow 100x=20 \Rightarrow x=\dfrac{1}{5}$

**Bài 6.** Tìm x biết: $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{10}\right)x=\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{8}+\dfrac{3}{7}+...+\dfrac{9}{1}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: Tách $\dfrac{9}{1}$ thành 9 số 1= suy ra :

$\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{8}+\dfrac{3}{7}+...+\dfrac{9}{1}=\left(\dfrac{1}{9}+1\right)+\left(\dfrac{2}{8}+1\right)+\left(\dfrac{3}{7}+1\right)+...+\left(\dfrac{8}{2}+1\right)+1$

$=\dfrac{10}{9}+\dfrac{10}{8}+\dfrac{10}{7}+...+\dfrac{10}{2}+\dfrac{10}{10}=10\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{10}\right)$

Khi đó $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{10}\right)x=10\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{10}\right) \Rightarrow x=10$

**Bài 7:** Tìm x biết: $1^3+2^3+3^3+...+10^3=(x+1)^2$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $1^3+2^3=1+8=9=(1+2)^2$

$1^3+2^3+3^3=9+27=36=(1+2+3)^2$

....

$1^3+2^3+3^3+...+10^3=(1+2+3+...+10)^2=(x+1)^2=45^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=45\\x+1=-45\end{array}\right.$

**Bài 8:** Tìm x biết: $1+3+5+7+...+99=(x+1)^2$

**Hướng dẫn giải**

$$\left[\frac{99-1}{2}+1\right]\left[\frac{1+99}{2}\right]=50^2=(x+1)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=50\\x+1=-50\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=49\\x=-51\end{array}\right.$$

**Bài 9:** Tìm x biết: $x-3x+5x-7x+...+2013x-2015x=3024$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$x-3x+5x-7x+...+2013x-2015x=3024$

$\Rightarrow(x-3x)+(5x-7x)+...+(2013x-2015x)=3024$

$\Rightarrow(-2x)+(-2x)+...+(-2x)=3024\Rightarrow(-2x).504=3024\Rightarrow-2\mathrm{x}=6\Rightarrow\mathrm{x}=-3$

**Bài 10:** Tìm x biết: $\frac{2}{1^2}.\frac{6}{2^2}.\frac{12}{3^2}.\frac{20}{4^2}...\frac{110}{10^2}.x=-20$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\frac{1.2}{1.1}.\frac{2.3}{2.2}.\frac{3.4}{3.3}.\frac{4.5}{4.4}...\frac{10.11}{10.10}.x=-20\Rightarrow\frac{(1.2.3...10)(2.3....11)}{(1.2....10)(1.2....10)}.x=-20$

$\Rightarrow 11x=-20\Rightarrow x=\frac{-20}{11}$

**Bài 11:** Tìm x biết: $\frac{3}{35}+\frac{3}{63}+\frac{3}{99}+...+\frac{3}{x(x+2)}=\frac{24}{35}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\frac{3}{35}+\frac{3}{63}+\frac{3}{99}+...+\frac{3}{x(x+2)}=\frac{24}{35}$

$\Rightarrow\frac{3}{5.7}+\frac{3}{7.9}+\frac{3}{9.11}+...+\frac{3}{x(x+2)}=\frac{24}{35}$

$\Rightarrow\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5.7}+\frac{2}{7.9}+\frac{2}{9.11}+...+\frac{2}{x(x+2)}\right)=\frac{24}{35}$

$\Rightarrow\frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{24}{35}\Rightarrow\frac{1}{5}-\frac{1}{x+2}=\frac{24}{35}.\frac{2}{3}=\frac{16}{35}$

$\Rightarrow\frac{1}{5}-\frac{16}{35}=\frac{1}{x+2}=\frac{-9}{35}\Rightarrow x+2=\frac{-35}{9}\Rightarrow x=\frac{-35}{9}-2=\frac{-53}{9}$

**Bài 12:** Tìm $x$ biết:

$$a)\frac{1}{4}.\frac{2}{6}.\frac{3}{8}.\frac{4}{10}.\frac{5}{12}......\frac{30}{62}.\frac{31}{64}=2^x$$

$$b)\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}.\frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5}=2^x$$

**Hướng dẫn giải**

$$a)\frac{1}{2.2}.\frac{2}{2.3}.\frac{3}{2.4}.\frac{4}{2.5}.\frac{5}{2.6}.......\frac{30}{2.31}.\frac{31}{2^6}=2^x$$

$$\frac{1.2.3.4.5....30.31}{1.2.3.4....30.31.2^{30}.2^6}=2^x\Rightarrow\frac{1}{2^{36}}=2^x\Rightarrow x=-36$$

$$b)\frac{4.4^5}{3.3^5}.\frac{6.6^5}{2.2^5}=2^x\Rightarrow\frac{4^6}{3^6}.\frac{6^6}{2^6}=2^x$$

$$\Rightarrow\left(\frac{6}{3}\right)^6.\left(\frac{4}{2}\right)^6=2^x\Rightarrow 2^{12}=2^x\Rightarrow x=12$$

**Bài 13:** Tìm $x\in\mathbb{N}$ biết: $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+......+\frac{1}{x(x+3)}=\frac{101}{618}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+......+\frac{1}{x(x+3)}=\frac{101}{618}$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}.\left(\frac{3}{2.5}+\frac{3}{5.8}+\frac{3}{8.11}+......+\frac{3}{x(x+3)}\right)=\frac{101}{618}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+....+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{101}{618}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{101}{618}:\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{101}{618}:\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{x+3}=\frac{101}{206}\Rightarrow\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2}-\frac{101}{206}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x+3}=\frac{103-101}{206}\Rightarrow\frac{1}{x+3}=\frac{1}{103}\Rightarrow x+3=103\Rightarrow x=100$$

Vậy $x=100$.

**Bài 14:** Tìm x biết: $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+...+\frac{2}{x(x+1)}=1\frac{1989}{1991}$

**Hướng dẫn giải**

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+...+\frac{2}{x(x+1)}=1\frac{1989}{1991}$$

$$\Rightarrow 2+\frac{2}{6}+\frac{2}{12}+\frac{2}{20}+....+\frac{2}{x(x+1)}=1\frac{1989}{1991}$$

$$\Rightarrow 2+2\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{x(x+1)}\right)=1\frac{1989}{1991}$$

$$\Rightarrow 2+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)=1\frac{1989}{1991}\Rightarrow 2\left(\frac{x-1}{2(x+1)}\right)=\frac{-2}{1991}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{1991}\Rightarrow 1991(x-1)=-2(x+1)\Rightarrow 1991x-1991=-2x-2$$

$$\Rightarrow 1991x+2x=-2+1991\Rightarrow 1993x=1989\Rightarrow x=\frac{1989}{1993}$$

**Bài 15:** Tìm x biết: $1-3+3^2-3^3+...+(-3)^x=\frac{9^{1006}+1}{4}$

**Hướng dẫn giải**

Đặt $A=1-3+3^2-3^3+...(-3)^x$. Khi đó: $3A=3-3^2+3^3-3^4+...+(-3)^{x+1}$

$$\Rightarrow 3A+A=4A=1+(-3)^{x+1}\Rightarrow A=\frac{(-3)^{x+1}+1}{4}$$

Theo giả thiết ta có: $\frac{(-3)^{x+1}+1}{4}=\frac{3^{2012}+1}{4}$

$$\Rightarrow x+1=2012\Rightarrow x=2011$$

**Bài 16:** Tìm x biết: $3+|x-3|^{12}=2^{17}-2^{16}-2^{15}-...-2^2$

**Hướng dẫn giải**

Đặt: $A=2^2+2^3+2^4+...+2^{16}$. Tính A ta có: $2A=2^3+2^4+2^5+...+2^{17}$

$$\Rightarrow 2A-A=2^{17}-2^2=A$$

Theo giả thiết ta có: $3+|x-3|^{12}=2^{17}-A=2^{17}-(2^{17}-2^2)=4\Rightarrow |x-3|^{12}=1^{12}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x-3=1\\x-3=-1\end{array}\right.$

**Bài 17.** Tìm x biết: $(x-20)\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{200}}{\frac{1}{199}+\frac{2}{198}+...+\frac{199}{1}}=\dfrac{1}{2000}$

**Hướng dẫn giải**

Đặt $A=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{200}}{\frac{1}{199}+\frac{2}{198}+...+\frac{199}{1}}$. Ta có mẫu của

$$A=\left(\frac{1}{199}+1\right)+\left(\frac{2}{198}+1\right)+...+\left(\frac{198}{2}+1\right)+1=\frac{200}{199}+\frac{200}{198}+...+\frac{200}{2}+\frac{200}{200}$$

Khi đó $A=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{200}}{200\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{200}\right)}=\dfrac{1}{200}$

Như vậy ta có: $(x-20).\frac{1}{200}=\frac{1}{2000}\Rightarrow x-20=\frac{1}{10}\Rightarrow x=\frac{1}{10}-20=\frac{-199}{10}$

**Bài 18:** Tìm x biết: $\frac{4}{3.5}+\frac{8}{5.9}+\frac{12}{9.15}+...+\frac{32}{n(n+16)}=\frac{16}{25}$

**Hướng dẫn giải**

$\frac{4}{3.5}+\frac{8}{5.9}+\frac{12}{9.15}+...+\frac{32}{n(n+16)}=\frac{16}{25}$

$\Rightarrow 2\left(\frac{2}{3.4}+\frac{4}{5.9}+\frac{6}{9.15}+...+\frac{16}{n(n+16)}\right)=\frac{16}{25}$

$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+16}\right)=\frac{16}{25}\Rightarrow \frac{1}{3}-\frac{1}{n+16}=\frac{8}{25}\Rightarrow \frac{1}{n+16}=\frac{1}{3}-\frac{8}{25}=\frac{1}{75}\Rightarrow n+16=75$

**Bài 19:** Tìm x biết: $x:\frac{1}{2}+x:\frac{1}{4}+x:\frac{1}{8}+...+x:\frac{1}{512}=511$

**Hướng dẫn giải**

$x:\frac{1}{2}+x:\frac{1}{4}+x:\frac{1}{8}+...+x:\frac{1}{512}=511$

$\Rightarrow 2x+4x+8x+...+512x=511\Rightarrow x(2+4+8+16+...+512)=511$

Đặt $A=2+4+8+16+...+512$

$\Rightarrow 2A=4+8+16+...+1024\Rightarrow 2A-A=1024-2=1022$

Khi đó ta có: $xA=511\Rightarrow x.1022=511\Rightarrow x=\frac{511}{1022}=\frac{1}{2}$

**Bài 20:** Tìm x biết: $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}+...+2^{x-49}=2^{49}-1$

**Hướng dẫn giải**

Đặt: $A=2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}+...+2^{x-49}$

$\Rightarrow 2A=2^x+2^{x-1}+2^{x-2}+...+2^{x-48}\Rightarrow 2A-A=A=2^x-2^{x-49}$

Theo bài ra ta có: $2^x-2^{x-49}=2^{49}-1\Rightarrow 2^x\left(1-\frac{1}{2^{49}}\right)=2^{49}-1\Rightarrow 2^x.\frac{2^{49}-1}{2^{49}}-\left(2^{49}-1\right)=0$

$\Rightarrow \frac{2^x}{2^{49}}-1=0\Rightarrow 2^{x-49}=1=2^0\Rightarrow x-49=0\Rightarrow x=49$

**Bài 21:** Tìm x biết: $x+x-1+x-2+x-3+...+x-50=255$

**Hướng dẫn giải**

$x+x-1+x-2+x-3+...+x-50=255$

$\Rightarrow (x+x+x+...+x)-(1+2+3+...+50)=255$

$\Rightarrow 51x-1275=255\Rightarrow 51x=1530\Rightarrow x=30$

**Bài 22.** Tìm $x$, biết: $x+(x+1)+(x+2)+...+(x+30)=1240$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $x+(x+1)+(x+2)+...+(x+30)=1240$

$$x+30.x+\frac{(30+1).30}{2}=1240$$

$$31.x+465=1240$$

$$31.x=775$$

$$x=25$$

Vậy $x = 25$

**Bài 23:** Tìm x biết: $2+4+6+...+2x=210$

**Hướng dẫn giải**

$x+(x+1)+(x+2)+...+(x+30)=1240$

$\Rightarrow 2\left(1+2+3+4+...+x\right)=210 \Rightarrow 2.\dfrac{\left(x+1\right).x}{2}=210 \Rightarrow x\left(x+1\right)=210=14.15$

**Bài 24:** Tìm x biết: (x+1) + (2x+3) + (3x+5) + … + (100x+199) = 30200

**Hướng dẫn giải**

(x+1) + (2x+3) + (3x+5) + … + (100x+199) = 30200

$\Rightarrow \left(x+2x+3x+...+100x\right)+\left(1+3+5+...+199\right)=30200$

$\Rightarrow x.5050+10000=30200 \Rightarrow 5050x=20200 \Rightarrow x=4$

**Bài 25:** Tìm x biết: $\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{65}+...+\dfrac{2}{x^2+3x}=\dfrac{1}{9}$

**Hướng dẫn giải**

$\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{65}+...+\dfrac{2}{x^2+3x}=\dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{28}+\dfrac{2}{70}+\dfrac{2}{130}+...+\dfrac{2}{x\left(x+3\right)}=\dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{4.7}+\dfrac{2}{7.10}+\dfrac{2}{10.13}+...+\dfrac{2}{x\left(x+3\right)}=\dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{4.7}+\dfrac{3}{7.10}+...+\dfrac{3}{x\left(x+3\right)}\right)=\dfrac{1}{9}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x+3}\right)=\dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{x+3} \Rightarrow \dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{x+3} x=9$

**Bài 26:** Tìm x biết: $\dfrac{3}{35}+\dfrac{3}{63}+\dfrac{3}{99}+...+\dfrac{3}{x(x+2)}=\dfrac{24}{35}$

**Hướng dẫn giải**

$\dfrac{3}{5.7}+\dfrac{3}{7.9}+\dfrac{3}{9.11}+...+\dfrac{3}{x\left(x+2\right)}=\dfrac{24}{35}$

$=> \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{5.7}+\dfrac{2}{7.9}+\dfrac{2}{9.11}+...+\dfrac{2}{x\left(x+2\right)}\right)=\dfrac{24}{35}$

$=> \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{x+2}\right)=\dfrac{24}{35} => \dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{24}{35}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{35}$

$=> \dfrac{1}{5}-\dfrac{16}{35}=\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{-9}{35} => x+2=\dfrac{-35}{9} => x=\dfrac{-35}{9}-2=\dfrac{-53}{9}$

**Bài 27:** Tìm x biết: $1+3+5+7+...+99=(x-2)^2$

**Hướng dẫn giải**

$1+3+5+7+...+99=(x-2)^2 \Rightarrow \dfrac{\left(1+99\right)50}{2}=50^2=\left(x-2\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=50 \\ x-2=-50 \end{array}\right.$

**Bài 28:** Tìm x biết: $\dfrac{(1.2+2.3+3.4+...+98.99).x}{26950}=12\dfrac{6}{7}:\dfrac{3}{2}$

**Hướng dẫn giải**

Đặt : $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 98.99$

Tính A ta được : $3A = 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + 3.4(5-2) + ... + 98.99(100-97)$

$3A = (1.2.3 - 0.1.2) + (2.3.4 - 1.2.3) + ... + (98.99.100 - 97.98.99) = 98.99.100$

$A = \dfrac{98.99.100}{3}$

Thay vào ta có : $\dfrac{98.99.100.x}{3.26950} = 12\dfrac{6}{7} : \dfrac{3}{2} \Rightarrow 12x = \dfrac{60}{7} => x = \dfrac{5}{7}$

**Bài 29:** Tìm x biết: $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{10}\right)x = \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{8} + \dfrac{3}{7} + ... + \dfrac{9}{1}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $\dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{8} + \dfrac{3}{7} + ... + \dfrac{9}{1} = \left(\dfrac{1}{9} + 1\right) + \left(\dfrac{2}{8} + 1\right) + \left(\dfrac{3}{7} + 1\right) + ... + \left(\dfrac{8}{2} + 1\right) + 1$

$\Rightarrow \dfrac{10}{9} + \dfrac{10}{8} + \dfrac{10}{7} + ... + \dfrac{10}{2} + \dfrac{10}{10} = 10\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{10}\right)$

Khi đó : $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{10}\right).x = 10\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{10}\right) \Rightarrow x = 10$

**Bài 30:** Tìm x biết: $2x + \dfrac{7}{6} + \dfrac{13}{12} + \dfrac{21}{20} + \dfrac{31}{31} + \dfrac{43}{42} + \dfrac{57}{56} + \dfrac{73}{72} + \dfrac{91}{90} = 10$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $2x + \left(1 + \dfrac{1}{6}\right) + \left(1 + \dfrac{1}{12}\right) + \left(1 + \dfrac{1}{20}\right) + ... + \left(1 + \dfrac{1}{90}\right) = 10$

$\Rightarrow 2x + 8 + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \dfrac{1}{4.5} + ... + \dfrac{1}{9.10} = 10$

$\Rightarrow 2x + 8 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{10} = 10 \Rightarrow 2x = \dfrac{8}{5} \Rightarrow x = \dfrac{4}{5}$

**Bài 31:** Tìm $x$ thỏa mãn: $\left(\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + ... + \dfrac{1}{8.9.10}\right).x = \dfrac{22}{45}$

**Hướng dẫn giải**

$\left(\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + ... + \dfrac{1}{8.9.10}\right).x = \dfrac{22}{45}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1.2} - \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{2.3} - \dfrac{1}{3.4} + \dfrac{1}{4.5} - \dfrac{1}{5.6} + ... + \dfrac{1}{8.9} - \dfrac{1}{9.10}\right)x = \dfrac{22}{45}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1.2} - \dfrac{1}{9.10}\right)x = \dfrac{22}{45}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.\dfrac{22}{45}.x = \dfrac{22}{45}$

$\Leftrightarrow x = 2$

Vậy x = 2.

**Bài 32:** Tìm x biết: $\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}\right)x=\frac{2012}{51}+\frac{2012}{52}+...+\frac{2012}{100}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{100}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{50}\right)=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{100}$

Khi đó : $\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{100}\right).x=2012\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{100}\right)\Rightarrow x=2012$

**Bài 33:** Tìm x biết: $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2013}\right)x+2013=\frac{2014}{1}+\frac{2015}{2}+...+\frac{4025}{2012}+\frac{4026}{2013}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $\frac{2014}{1}+\frac{2015}{2}+...+\frac{4025}{2012}+\frac{4026}{2013}-2013$

$=\left(\frac{2014}{1}-1\right)+\left(\frac{2015}{2}-1\right)+...+\left(\frac{4025}{2012}-1\right)+\left(\frac{4026}{2013}-1\right)$

$=\frac{2013}{1}+\frac{2013}{2}+\frac{2013}{3}+...+\frac{2013}{2012}+\frac{2013}{2013}=2013\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2013}\right)$

Khi đó : $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2013}\right).x=2013\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+.\frac{1}{2013}\right)\Rightarrow x=2013$

**Bài 34:** Tìm x biết: Cho $x_1+x_2+x_3+...+x_{50}+x_{51}=1$ và $x_1+x_2=x_3+x_4=...=x_{49}+x_{50}=1$, Tính $x_{51}$=?

**Hướng dẫn giải**

Thay vào ta có : $(x_1+x_2)+(x_3+x_4)+...+(x_{49}+x_{50})+x_{51}=1$

$\Rightarrow 1+1+1+...+1+x_{51}=1\Rightarrow 25+x_{51}=1\Rightarrow x_{51}=-24$

**Bài 35:** Cho biểu thức $C=2+2^2+2^3+...+2^{100}$ .Tìm x để $2^{2x-1}-2=C$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$C = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{100}$

$\Rightarrow 2C = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{101}$

$\Rightarrow C = 2C - C = 2^{101} - 2$

$Mà\ 2^{2x-1}-2=C$

$\Rightarrow 2^{2x-1}-2=2^{101}-2$

$\Rightarrow 2x-1=101$

$\Rightarrow x=5$

**Bài 36:** Tìm $x$ biết: $\frac{\left(2019^{100}+2019^{96}+\cdots+2019^{4}+1\right)}{|x-2019|}=\frac{2019^{104}-1}{2019^{4}-1}$

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{\left(2019^{100}+2019^{96}+\ldots+2019^{4}+1\right)}{|x\text{ - }2019|}=\frac{2019^{104}\text{ - }1}{2019^{4}\text{ - }1}\qquad (*)$$

ĐK: $x \neq 2019$

Đặt $A=2019^{100}+2019^{96}+\ldots+2019^{4}+1$

$\Rightarrow 2019^{4}.A=2019^{104}+2019^{100}+\ldots+2019^{8}+2019^{4}$

$\Rightarrow (2019^{4}-1).A=2019^{104}-1$

$\Rightarrow A=\dfrac{2019^{104}-1}{2019^{4}-1}$

$(*)\Rightarrow \dfrac{1}{|x\text{ - }2019|}.\dfrac{2019^{104}-1}{2019^{4}-1}=\dfrac{2019^{104}-1}{2019^{4}-1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|x\text{ - }2019|}=1$

$\Rightarrow |x\text{ - }2019|=1$

$\Rightarrow x\text{ - }2019=1$ hoặc $x\text{ - }2019=-1$

$\Rightarrow x=2020$ (thỏa đk) hoặc $x=2018$ (thỏa đk).

Vậy $x=2020$ hoặc $x=2018$.

**Bài 37:** Tìm $x$ biết $(x+2)+(x+7)+(x+12)+\ldots+(x+42)+(x+47)=655$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có $(x+2)+(x+7)+(x+12)+\ldots+(x+42)+(x+47)=655$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{47-2}{5}+1\right)x+(47+2)\left(\dfrac{47-2}{5}+1\right):2=655$

$\Leftrightarrow 10x+245=655 \Leftrightarrow x=41$

Vậy $x=41$

**Bài 38:** Cho $x=2^{2012}-2^{2011}-2^{2010}-\ldots-2-1$, Tính $2010^{x}$

**Hướng dẫn giải**

Đặt : $A=1+2+2^{2}+\ldots+2^{2010}+2^{2011}$

Tính A ta có : $2A=2+2^{2}+2^{3}+\ldots+2^{2012}$ => $2A-A=2^{2012}-1=A$

Khi đo ta có : $x=2^{2012}-A=2^{2012}-\left(2^{2012}-1\right)=1$

Vậy $2010^{x}=2010^{1}=2010$

**Bài 40:** Tìm x biết: $\dfrac{2}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{4}{(x+4)(x+8)}+\dfrac{6}{(x+8)(x+14)}=\dfrac{x}{(x+2)(x+14)}$

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\frac{4}{(x+4)(x+8)}+\frac{6}{(x+8)(x+14)}=\frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+8}\right)+\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+14}\right)=\frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+14}=\frac{x}{(x+2)(x+14)}\Rightarrow\frac{12}{(x+2)(x+14)}=\frac{x}{(x+2)(x+14)}\Rightarrow 12=x$$

**Bài 41:** Tìm $x$, biết : $\left(1+\frac{8}{10}\right).\left(1+\frac{8}{22}\right).\left(1+\frac{8}{36}\right)...\left(1+\frac{8}{8352}\right).x=1-\frac{8}{10}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$\left(1+\frac{8}{10}\right).\left(1+\frac{8}{22}\right).\left(1+\frac{8}{36}\right)...\left(1+\frac{8}{8352}\right)=\frac{18.30.44...8360}{10.22.36...8352}=\frac{2.9.3.10.4.11...88.95}{1.10.2.11.3.12...87.96}$$

$=\frac{(2.3.4...88).(9.10.11...95)}{(1.2.3...87).(10.11.12...96)}=\frac{88.9}{96}=\frac{33}{4}$ . Do đó:

$$\left(1+\frac{8}{10}\right).\left(1+\frac{8}{22}\right).\left(1+\frac{8}{36}\right)...\left(1+\frac{8}{8352}\right).x=1-\frac{8}{10}\Rightarrow\frac{33}{4}.x=\frac{1}{5}\Rightarrow x=\frac{1}{5}:\frac{33}{4}\Rightarrow x=\frac{4}{165}$$

Vậy $x=\frac{4}{165}$ .

**Bài 42:** Tìm số tự nhiên $n$ thỏa mãn điều kiện:

$$2.2^2+3.2^3+4.2^4+.....+(n-1)2^{n-1}+n.2^n=2^{n+34}$$

**Hướng dẫn giải**

$2.2^2+3.2^3+4.2^4+.....+(n-1)2^{n-1}+n.2^n=2^{n+34}$ (1)

Đặt

$B=2.2^2+3.2^3+4.2^4+.......+(n-1).2^{n-1}+n.2^n$

$\Rightarrow 2B=2.\left(2.2^2+3.2^3+4.2^4+.......+(n-1).2^{n-1}+n.2^n\right)$

$2B=2.2^3+3.2^4+4.2^5+.....+(n-1)2^n+n.2^{n+1}$

$2B-B=\left(2.2^3+3.2^4+4.2^5+.....+(n-1)2^n+n.2^{n+1}\right)$

$-\left(2.2^2+3.2^3+4.2^4+.......+(n-1).2^{n-1}+n.2^n\right)$

$B=-2^3-2^4-2^5-........-2^n+n.2^{n+1}-2.2^2$

$=-\left(2^3+2^4+2^5+.......+2^n\right)+n.2^{n+1}-2^3$

Đặt

$C = 2^3 + 2^4 + 2^5 + ...... + 2^n$

$\Rightarrow 2C = 2.\left(2^3 + 2^4 + 2^5 + ...... + 2^n\right) = 2^4 + 2^5 + 2^6 + .... + 2^{n+1}$

$2C - C = \left(2^4 + 2^5 + 2^6 + .... + 2^{n+1}\right) - \left(2^3 + 2^4 + 2^5 + ...... + 2^n\right)$

$C = 2^{n+1} - 2^3$

Khi đó $B = -\left(2^{n+1} - 2^3\right) + n.2^{n+1} - 2^3$

$= -2^{n+1} + 2^3 + n.2^{n+1} - 2^3 = -2^{n+1} + n.2^{n+1} = (n-1).2^{n+1}$

Vậy từ (1) ta có: $(n-1)2^{n+1} = 2^{n+34}$

$2^{n+34} - (n-1).2^{n+1} = 0$

$2^{n+1}.\left[2^{33} - (n-1)\right] = 0 \Rightarrow 2^{33} - n + 1 = 0 \Rightarrow n = 2^{33} + 1$

Vậy $n = 2^{33} + 1$

**Bài 43:** Tìm số tự nhiên $n$ thỏa mãn điều kiện: $2.2^2 + 3.2^3 + 3.2^4 + ..... + n.2^n = 2^{n+11}$

**Hướng dẫn giải**

Đặt $S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + ...... + n.2^n$

$S = 2S - S = \left(2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + .... + n.2^{n+1}\right) - \left(2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + .... + n.2^n\right)$

$S = n.2^{n+1} - 2^3 - \left(2^3 + 2^4 + ..... + 2^{n-1} + 2^n\right)$

Đặt $T = 2^3 + 2^4 + ..... + 2^{n-1} + 2^n$. Tính được: $T = 2T - T = 2^{n-1} - 2^3$

$\Rightarrow S = n.2^{n+1} - 2^3 - 2^{n-1} + 2^3 = (n-1)2^{n+1}$

$\Rightarrow (n-1).2^{n+1} = 2^{n+11} \Rightarrow n - 1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025$

**Dạng 7 : Tổng các biểu thức không âm bằng 0**

**Bài 1:** Tìm tất cả các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $(2x-y+7)^{2012} + |x-3|^{2013} \le 0$

**Hướng dẫn giải**

Ta có 2012 là số tự nhiên chẵn $\Rightarrow (2x-y+7)^{2012} \ge 0$

Và $|x-3| \ge 0 \Rightarrow |x-3|^{2013} \ge 0$

Do đó, từ $(2x-y+7)^{2012} + |x-3|^{2013} \le 0$ suy ra: $(2x-y+7)^{2012} = 0$ & $|x-3|^{2013} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 13 \end{cases}$$

**Bài 2:** Tìm x, y, z biết: $\sqrt{\left(x-3\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(y+3\sqrt{5}\right)^2} + |x+y+z| = 0$

**Hướng dẫn giải**

Vì $\sqrt{\left(x-3\sqrt{5}\right)^2}\ge 0,\sqrt{\left(y+3\sqrt{5}\right)^2}\ge 0,|x+y+z|\ge 0$ nên để

$\sqrt{\left(x-3\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(y+3\sqrt{5}\right)^2}+|x+y+z|=0$ thì: $\begin{cases}x-3\sqrt{5}=0\\y+3\sqrt{5}=0\\x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\sqrt{5}\\y=-3\sqrt{5}\\z=0\end{cases}$

**Bài 3:** Tìm a, b, c biết: $(x-13+y)^2+(x-6-y)^2=0$

**Hướng dẫn giải**

Vì $(x-13+y)^2\ge 0,(x-6-y)^2\ge 0$ Nên để: $(x-13+y)^2+(x-6-y)^2=0$ Thì:

$\begin{cases}x-13+y=0\\x-6-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=13\\x-y=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{19}{2}\\y=\dfrac{7}{2}\end{cases}$

**Bài 4.** Tìm $x,y$ biết $|3+y|+|2x+y|=0$

**Hướng dẫn giải**

Vì $|3+y|\ge 0,|2x+y|\ge 0\Rightarrow|3+y|+|2x+y|\ge 0$

$\Rightarrow\begin{cases}|3+y|=0\\|2x+y|=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=-3\end{cases}$

**Bài 5:** Tìm $x,y$ biết rằng: $(2x-5)^{2012}+(3y+4)^{2014}\le 0$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\begin{cases}(2x-5)^{2012}\ge 0\\(3y+4)^{2014}\ge 0\end{cases}\Rightarrow(2x-5)^{2012}+(3y+4)^{2014}\ge 0$

$(2x-5)^{2012}+(3y+4)^{2014}\le 0\Rightarrow(2x-5)^{2012}+(3y+4)^{2014}=0$

Mà $\Rightarrow\begin{cases}(2x-5)^{2012}=0\\(3y+4)^{2014}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\dfrac{1}{2}\\y=-1\dfrac{1}{3}\end{cases}$

**Bài 6:** Tìm x, y biết: $42-3|y-3|=4(2012-x)^4$

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết ta có: $42=3|y-3|+4(2012-x)^4$,

Do $3|y-3|\ge 0\Rightarrow 4(2012-x)^4\le 42\Rightarrow(2012-x)^4\le 11<2^4\Rightarrow 2012-x=0$ hoặc $2012-x=\pm 1$

**Bài 7:** Tìm $x, y, z$ biết: $\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|y+\frac{2}{3}\right|+\left|x^2+xz\right|=0$

**Hướng dẫn giải**

$\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|y+\frac{2}{3}\right|+\left|x^2+xz\right|=0$, áp dụng tính chất $|A|\geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases}\left|x-\frac{1}{2}\right|=0\\ \left|y+\frac{2}{3}\right|=0\\ \left|x^2+xz\right|=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-\frac{1}{2}=0\\ y+\frac{2}{3}=0\\ x(x+z)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=-\frac{2}{3}\\ z=-x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

**Bài 8:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $\left(9x^2-1\right)^2+\left|x-\frac{1}{3}\right|=0$

**Hướng dẫn giải**

Vì $\left(9x^2-1\right)^2\geq 0, \left|x-\frac{1}{3}\right|\geq 0$ nên để:

$$\left(9x^2-1\right)^2+\left|x-\frac{1}{3}\right|=0 \Rightarrow \begin{cases}9x^2-1=0\\ x=\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

**Bài 9:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(7b-3)^4+(21a-6)^4+(18c+5)^6\leq 0$

**Hướng dẫn giải**

$$\text{Vì}: \begin{cases}(7b-3)^4\geq 0\\ (21a-6)^4\geq 0\\ (18c+5)^6\geq 0\end{cases} \text{Nên để}: (7b-3)^4+(21a-6)^4+(18c+5)^6\leq 0 \Rightarrow \begin{cases}7b-3=0\\ 21a-6=0\\ 18c+5=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=\frac{6}{21}, b=\frac{3}{7}, c=-\frac{5}{18}.$$

**Bài 10:** Giải phương trình: $y^2-2y+3=\frac{6}{x^2+2x+4}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$y^2-2y+3=\frac{6}{x^2+2x+4} \Leftrightarrow \left(y^2-2y+3\right)\left(x^2+2x+4\right)=6$$

$$\Leftrightarrow \left[(y-1)^2+2\right].\left[(x+1)^2+3\right]=6$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2.(y-1)^2+3(y-1)^2+2(x+1)^2+6=6$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2.(y-1)^2+3(y-1)^2+2(x+1)^2=0$$

Vì $(x+1)^2 \geq 0; (y-1)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

**Bài 11:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(x+2)^2 + 2(y-3)^2 < 4$

**Hướng dẫn giải**

Vì $\begin{cases} (x+2)^2 \geq 0 \\ (y-3)^2 \geq 0 \end{cases}$ nên ta có các TH sau :

TH1 : $\begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ (y-3)^2 = 0 \end{cases}$ TH2 : $\begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ (y-3)^2 = 1 \end{cases}$

TH3 : $\begin{cases} (x+2)^2 = 1 \\ (y-3)^2 = 0 \end{cases}$ TH4 : $\begin{cases} (x+2)^2 = 1 \\ (y-3)^2 = 1 \end{cases}$

**Bài 12:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(2x-1)^{2008} + \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y-z| = 0$

**Hướng dẫn giải**

Vì: $(2x-1)^{2008} \geq 0$, và $\left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} \geq 0$ và $|x+y-z| \geq 0$

nên để : $(2x-1)^{2008} + \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y-z| = 0$ thì $\begin{cases} (2x-1)=0 \\ y-\frac{2}{5}=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

**Bài 13:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(4x-7)^2 - 5|7-4x| = 0$

**Hướng dẫn giải**

Đặt: $|4x-7| = t \Rightarrow t^2 - 5t = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |4x-7|=0 \\ |4x-7|=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}, x=3, x=\frac{1}{2}.$

**Bài 14:** Tìm x, y thỏa mãn: $2.x^{2k} + \left(y-\frac{2}{3}\right)^{4k} = 0 \,(k \in N)$

**Hướng dẫn giải**

Vì: $2^{2k} \geq 0$ và $\left(y-\frac{2}{3}\right)^{4k} \geq 0$ nên để : $2.x^{2k} + \left(y-\frac{2}{3}\right)^{4k} = 0$ thì:

$$\begin{cases} x^{2k} = 0 \\ y-\frac{2}{3}=0 \end{cases} \Rightarrow x=0, y=\frac{2}{3}.$$

**Bài 15:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(x-13+y)^2 + (x-6-y)^2 = 0$

**Hướng dẫn giải**

Vì: $\begin{cases}(x-13+y)^2 \geq 0 \\ (x-6-y)^2 \geq 0\end{cases}$ Nên để: $(x-13+y)^2+(x-6-y)^2=0$ thì $\begin{cases}x+y-13=0 \\ x-y-6=0\end{cases}$

**Bài 16:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(2x+3)^2+(3x-2)^4=0$

**Hướng dẫn giải**

Vì: $\begin{cases}(2x+3)^2 \geq 0 \\ (3x-2)^4 \geq 0\end{cases}$ Nên để: $(2x+3)^2+(3x-2)^4=0$ thì $\begin{cases}2x+3=0 \\ 3x-2=0\end{cases}$

**Bài 17:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $|x+5|+(3y-4)^{2010}=0$

**Hướng dẫn giải**

Vì $|x+5| \geq 0$ và $(3y-4)^{2010} \geq 0$ Nên để: $|x+5|+(3y-4)^{2010}=0$ Thì $\begin{cases}x+5=0 \\ 3y-4=0\end{cases}$

**Bài 18:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $42-3|y-3|=4(2012-x)^4$

**Hướng dẫn giải**

$42-3|y-3|=4(2012-x)^4$

$\Rightarrow 42=3|y-3|+4(2012-x)^4$.Do $3|y-3| \geq 0 => 4(2012-x)^4 \leq 42$

$\Rightarrow (2012-x)^4 \leq 11 \leq 2^4 \Rightarrow 2012-x=0$ hoặc $2012-x=\pm 1$

**Bài 19:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(3x-5)^{2006}+(y^2-1)^{2008}+(x-z)^{2010}=0$

**Hướng dẫn giải**

Vì $\begin{cases}(3x-5)^{2006} \geq 0 \\ (y^2-1)^{2008} \geq 0 \\ (x-z)^{2010} \geq 0\end{cases}$ Nên để: $(3x-5)^{2006}+(y^2-1)^{2008}+(x-z)^{2010}=0$ thì $\begin{cases}3x-5=0 \\ y^2-1=0 \\ x-z=0\end{cases}$

**Bài 20:** Tìm các số $x, y, z$ biết: $(x-1)^{2016}+(2y-1)^{2016}+|x+2y-z|^{2017}=0$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $(x-1)^{2016} \geq 0 \forall x$; $(2y-1)^{2016} \geq 0 \forall y$; $|x+2y-z|^{2017} \geq 0 \forall x, y, z$

$\Rightarrow (x-1)^{2016}+(2y-1)^{2016}+|x+2y-z|^{2017}=0$. Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^{2016}=0 \\ (2y-1)^{2016}=0 \\ |x+2y-z|^{2017}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ 1+2.\dfrac{1}{2}-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=2\end{cases}$$

**Bài 21:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(2x-1)^2+|2y-x|-8=12-5.2^2$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $(2x-1)^2+|2y-x|=0$, Vì $\begin{cases}(2x-1)^2\ge 0\\ |2y-x|\ge 0\end{cases}$,

Nên để: $(2x-1)^2+|2y-x|=0$ thì $\begin{cases}2x-1=0\\ 2y-x=0\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{1}{4}$.

**Bài 22:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $\left(|x+2|-2\right)\left(x^2-4\right)=0$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $\left(|x+2|-2\right)\left(x^2-4\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|x+2|-2=0\\ \left(x^2-4\right)=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|x+2|=2\\ x^2=4\end{array}\right.$

**Bài 23:** Tìm $x$ và $y$ thỏa mãn $|2x-2011|+(3y+2012)^{2012}=0$

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét $\begin{cases}|2x-2011|\ge 0\forall x\\ (3y+2012)^{2012}\ge 0\forall y\end{cases}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}2x-2011=0\\ 3y+2012=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2011}{2}\\ y=-\dfrac{2012}{3}\end{cases}$

**Bài 24:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(x+1)^{2016}+(y-1)^2\le 0$

**Hướng dẫn giải**

Vì : $\begin{cases}(x+1)^{2016}\ge 0\\ (y-1)^2\ge 0\end{cases}$, Nên để : $(x+1)^{2016}+(y-1)^2\le 0$ thì : $\begin{cases}x+1=0\\ y-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$

**Bài 25:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(x-2y)^2+(y-2001)^{2016}\le 0$

**Hướng dẫn giải**

Vì : $\begin{cases}(x-2y)^2\ge 0\\ (y-2001)^{2016}\ge 0\end{cases}$, Nên để : $(x-2y)^2+(y-2001)^{2016}\le 0$ thì : $\begin{cases}x-2y=0\\ y-2001=0\end{cases}$

**Bài 26:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(x-2)^{10}+|y-x|+3\le 3$

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết ta có : $(x-2)^{10}+|y-x|=0$ ,

Vì $\begin{cases}(x-2)^{10}\ge 0\\ |y-x|\ge 0\end{cases}$, Nên để : $(x-2)^{10}+|y-x|=0$ Thì : $\begin{cases}x-2=0\\ y-x=0\end{cases}\Rightarrow x=y=2$

**Bài 27**: Tìm x biết: $\left|x+\dfrac{1}{1.2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{2.3}\right|+...+\left|x+\dfrac{1}{99.100}\right|=100x$

**Hướng dẫn giải**

Vì vế trái không âm nên vế phải không âm, do đó 100x ≥ 0 => x ≥ 0

Khi đó: $x+\dfrac{1}{1.2}+x+\dfrac{1}{2.3}+...+x+\dfrac{1}{99.100}=100x$

**Bài 28:** Tính giá trị của biểu thức $C = 2x^5 - 5y^3 + 2015$ tại $x, y$ thỏa mãn:

$$|x-1| + (y+2)^{20} = 0$$

**Hướng dẫn giải**

Do $|x-1| \geq 0; (y+2)^{20} \geq 0 \Rightarrow |x-1| + (y+2)^{20} \geq 0$ với mọi $x, y$

Kết hợp $|x-1| + (y+2)^{20} = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = 0 \\ (y+2)^{20} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Giá trị của biểu thức $C = 2x^5 - 5y^3 + 2015$ tại $x = 1, y = -2$ là:

$C = 2.1^5 - 5.(-2)^3 + 2015 = 2057$

Vậy $C = 2057$

**Bài 29:** Tìm x,y,z biết: $|x+1| + \sqrt{(y-2)^2} + (z+3)^2 = 0$

**Hướng dẫn giải**

Vì : $\begin{cases} |x+1| \geq 0 \\ \sqrt{(y-2)^2} \geq 0 \\ (z+3)^2 \geq 0 \end{cases}$ nên để : $|x+1| + \sqrt{(y-2)^2} + (z+3)^2 = 0$

Thì $\begin{cases} |x+1| = 0 \\ \sqrt{(y-2)^2} = 0 \\ (z+3)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 2, z = -3.$

**Bài 30:** Tìm x biết: $\left|x + \frac{11}{17}\right| + \left|x + \frac{2}{17}\right| + \left|x + \frac{4}{17}\right| = 4x$

**Hướng dẫn giải**

Vì : $\left|x + \frac{11}{17}\right| \geq 0, \left|x + \frac{2}{17}\right| \geq 0, \left|x + \frac{4}{17}\right| \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Khi $x \geq 0 \Rightarrow \left(x + \frac{11}{17}\right) + \left(x + \frac{2}{17}\right) + \left(x + \frac{4}{17}\right) = 4x \Rightarrow x = 1$

**Bài 31:** Tìm x biết: $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + ..... + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 11x$

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn $\geq 0$ nên vế phải $\geq 0 \Rightarrow 11x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với $x \geq 0$ ta có:

$$\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{6}\right|+\left|x+\frac{1}{12}\right|+\left|x+\frac{1}{20}\right|+.....+\left|x+\frac{1}{110}\right|=11x$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}+x+\frac{1}{6}+x+\frac{1}{12}+x+\frac{1}{20}+.....+x+\frac{1}{110}=11x$$

$$\Rightarrow x=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}(tm)$$

Vậy $x=\frac{10}{11}$

**Bài 32:** Tìm x,y,z biết: $\sqrt{\left(x-3\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(y+3\sqrt{5}\right)^2}+|x+y+z|=0$

**Hướng dẫn giải**

Vì : $\sqrt{\left(x-3\sqrt{5}\right)^2}\ge 0$, và $\sqrt{\left(y+3\sqrt{5}\right)^2}\ge 0$ và $|x+y+z|\ge 0$, Nên để :

$\sqrt{\left(x-3\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(y+3\sqrt{5}\right)^2}+|x+y+z|=0$ Thì : $\begin{cases} x-3\sqrt{5}=0 \\ y+3\sqrt{5}=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

**Bài 33:** Tìm $x, y$ biết: $\left(2x-\frac{1}{6}\right)^2+|3y+12|\le 0$

**Hướng dẫn giải**

ì $\left(2x-\frac{1}{6}\right)^2\ge 0\forall x; |3y+12|\ge 0\forall y$, do đó: $\left(2x-\frac{1}{6}\right)^2+|3y+12|\ge 0\ \forall x,y$

Theo đề bài thì $\left(2x-\frac{1}{6}\right)^2+|3y+12|\le 0\Rightarrow\left(2x-\frac{1}{6}\right)^2+|3y+12|=0$

Khi đó ta có: $2x-\frac{1}{6}=0$ và $3y+12=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{12}; y=-4$

**Bài 34:** Tìm các số $x, y, z$ biết: $(3x-5)^{2006}+\left(y^2-1\right)^{2008}+(x-z)^{2100}=0$

**Hướng dẫn giải**

$$(3x-5)^{2006}+\left(y^2-1\right)^{2008}+(x-z)^{2100}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} (3x-5)^{2006}=0 \\ \left(y^2-1\right)^{2008}=0 \\ (x-z)^{2100}=0 \end{cases}\Rightarrow x=z=\frac{5}{3};\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$$

## Dạng 8: Tìm ẩn dạng lũy thừa

**Bài 1:** Tìm số tự nhiên n, m biết : $2^m + 2^n = 2^{m+n}$

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết ta có :

$2^m.2^n - 2^m - 2^n = 0 \Rightarrow 2^m\left(2^n - 1\right) - 2^n + 1 = 1 \Rightarrow 2^m\left(2^n - 1\right) - \left(2^n - 1\right) = 1$

$\Rightarrow \left(2^m - 1\right)\left(2^n - 1\right) = 1 = 1.1 \quad \left(do\ m, n \in N\right) \Rightarrow \begin{cases} 2^m - 1 = 1 \\ 2^n - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^m = 2 = 2^1 \\ 2^n = 2 = 2^1 \end{cases} \Rightarrow m = n = 1$

**Bài 2:** Tìm m, n nguyên dương biết : $2^m - 2^n = 256$

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết ta có m > n : $2^m - 2^n = 256 \Rightarrow 2^{m+n-n} - 2^n = 256 \Rightarrow 2^n\left(2^{m-n} - 1\right) = 2^8$

Vì m, n là số tự nhiên và m > n nên $m - n \geq 1 \Rightarrow 2^{m-n} - 1$ là 1 số lẻ lớn hơn hoặc bằng 1, Vế phải chỉ chứa thừa số nguyên tố 2 nên $\begin{cases} 2^{m-n} - 1 = 1 \\ 2^n = 2^8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \\ m = 9 \end{cases}$

**Bài 3:** Tìm a, b, c nguyên dương biết : $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a + 3 = 5^c$

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết suy ra $a^2\left(a + 3\right) + 5 = 5^b \Rightarrow a^2.5^c = 5^b - 5 = 5\left(5^{b-1} - 1\right) \Rightarrow a^2 = \dfrac{5^{b-1} - 1}{5^{c-1}}$

Vì a,b,c là các số nguyên nên $5^{c-1} = 1 = 5^0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow a = 2, b = 2$

**Bài 4:** Tìm hai số tự nhiên x, y biết : $2^{x+1}.3^y = 12^x$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $2^{x+1}.3^y = 12^x \Rightarrow 2^{x+1}.3^y = 2^{2x}.3^x \Rightarrow \dfrac{2^{2x}}{2^{x+1}} = \dfrac{3^y}{3^x} \Rightarrow 2^{x-1} = 3^{y-x}$

Vì (2 ;3) =1 nên x = 1 và y - x = 0 => y = 1

**Bài 5:** Tìm x, y biết: $10^x : 5^y = 20^y$

**Hướng dẫn giải**

Ta có :

$10^x : 5^y = 20^y \Rightarrow 10^x = 5^y.20^y \Rightarrow 10^x = 5^y.\left(2.10\right)^y = 5^y.2^y.10^y = \left(2.5\right)^y.10^y = 10^y.10^y$

$\Rightarrow 10^x = 10^{2y} \Rightarrow x = 2y.$

**Bài 6:** Tìm a, b biết: $2^a + 124 = 5^b$

**Hướng dẫn giải**

Xét $a = 0 \Rightarrow VT = 2^0 + 124 = 125 = 5^3 \Rightarrow b = 3$

Xét $a \geq 1$ thì vế trái là 1 số chẵn, vế phải là 1 số lẻ suy ra vô lý.

Vậy a = 0, b = 3

**Bài 7:** Tìm số tự nhiên a,b biết: $10^a + 168 = b^2$

**Hướng dẫn giải**

Xét $a = 0 \Rightarrow b = 13$

Xét $a \geq 1 \Rightarrow 10^a + 168$ có chữ số tận cùng là 8 suy ra $b^2$ cũng có tận cùng là 8 (vô lý)

Vậy a = 0, b =13

**Bài 8:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z tự nhiên biết: $35^x + 9 = 2.5^y$

**Hướng dẫn giải**

Xét $x=0\Rightarrow 10=2.5^y\Rightarrow y=1$

Với $x>0\Rightarrow VT$ có tận cùng là 4, còn vế phải có chữ số tận cùng là 2 hoặc 0 mẫu thuẫn nên x = 0 và y = 1

**Bài 9:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z tự nhiên biết: $2^a+342=7^b$

**Hướng dẫn giải**

Xét $a=0\Rightarrow VT=343=7^3=7^b\Rightarrow b=3$

Với $a>0$ thì VT là 1 số chẵn, còn vế phải là 1 số lẻ (mâu thuẫn)

**Bài 10:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z tự nhiên biết: $3^a+9b=183$

**Hướng dẫn giải**

Vì $183\vdots 3$ nhưng $183\not\vdots 9$ Nên $3^a+9b\vdots 3$ và $3^a+9b\not\vdots 9$, Mà $9b\vdots 9\Rightarrow 3^a\not\vdots 9\Rightarrow a=1$

Khi a =1 suy ra b = 20

**Bài 11:** Tìm a, b, c hoặc x, y, z tự nhiên biết: $5^a+323=b^2$

**Hướng dẫn giải**

Xét $a=0\Rightarrow VT=1+323=324=8^2=b^2\Rightarrow b=8$

Với $a>0\Rightarrow$ VT có chữ số tận cùng là 8,

Vế phải là 1 số chính phương nên không có tận cùng là 8 (mâu thuẫn).

**Bài 12:** Tìm a, b tự nhiên biết: $2^a+80=3^b$

**Hướng dẫn giải**

Xét : $a=0\Rightarrow VT=1+80=81=3^4=3^b\Rightarrow b=4$

Nếu $a>0$ => VT là 1 cố chẵn, còn VP là 1 số lẻ ( mâu thuẫn)

**Bài 13:** Tìm x, y tự nhiên biết : $2x^2+3y^2=77$

**Hướng dẫn giải**

Do : $0\le 3y^2\le 77\Rightarrow 0\le y^2\le 25$, mà $2x^2$ là 1 số chẵn nên $3y^2$ là số lẻ suy ra $y^2$ lẻ

Suy ra $y^2\in\{1;9;25\}\Rightarrow (x,y)=(1;5),(5;3)$.

**Bài 14:** Tìm các số nguyên tố x, y biết : $x^2-2y^2=1$

**Hướng dẫn giải**

Vì $x^2-1=2y^2$, Nếu $x\vdots 3$ vì x là nguyên tố nên x = 3, y = 2

Nếu $x\not\vdots 3\Rightarrow x^2-1\vdots 3\Rightarrow 2y^2\vdots 3\Rightarrow y=3\Rightarrow x^2=19$ (loại)

**Bài 15:** Tìm các số nguyên tố x, y sao cho : $51x+26y=2000$

**Hướng dẫn giải**

Vì $17.3x=2(1000-13y)$, Do 17, 3 là số nguyên tố nên $x\vdots 2$, mà x là số nguyên tố nên x = 2

Lại có $1000-13y\vdots 51\Rightarrow 1000-13y>0$ và y nguyên tố suy ra tìm y

**Bài 16:** Tìm số tự nhiên p, q biết : $5^{2p}+2013=(5^{2p})^2+q^2$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $2013-q^2=25^{p^2}-25^p=25^p\left(25^p-1\right)$

Do p là số nguyên tố suy ra $2013-q^2\vdots 25^2$ và $2013-q^2>0$ từ đó tìm được q

**Bài 17:** Tìm số tự nhiên a, b biết : $(2008a+3b+1)\left(2008^a+2008a+b\right)=225$

**Hướng dẫn giải**

Do a,b là số tự nhiên :

Nếu $a\ge 1\Rightarrow 2008^a+2008a+b>225$ (loại)

$\Rightarrow a=0\Rightarrow(3b+1)(b+1)=225=3.75=5.45=9.25$

Vì $3b+1\not\vdots\,3\Rightarrow 3b+1>b+1\Rightarrow\begin{cases}3b+1=25\\ b+1=9\end{cases}\Rightarrow b=8$

**Bài 18:** Tìm x,y nguyên biết: $2^x+624=5^y$

**Hướng dẫn giải**

Nếu x = 0 thì y = 4.

Nếu $x\neq 0$ thì vế trái là số chẵn, còn vế phải là số lẻ với mọi y (vô lý).

**Bài 19:** Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $2x^2+3y^2=77$

**Hướng dẫn giải**

Từ $2x^2+3y^3=77\Rightarrow 0\le 3y^2\le 77\Rightarrow 0\le y^2\le 25$ kết hợp với $2x^2$ là số chẵn suy ra $3y^2$ là số lẻ suy ra $y^2$ là số lẻ nên $y^2\in\{1;9;25\}$

Với $y^2=1\Rightarrow 2x^2=77-3=74\Rightarrow x^2=37\quad (loai)$

Với $y^2=9\Rightarrow 2x^2=77-27=50\Rightarrow x^2=25\Rightarrow x=\pm5$

Với $y^2=25\Rightarrow 2x^2=77-75=2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$

**Bài 20:** Tìm x, y nguyên dương biết: $2^x-2^y=1024$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $2^x>2^y\Rightarrow x>y\Rightarrow 2^y\left(2^{x-y}-1\right)=2^{10}$, mà $2^{x-y}-1$ là số lẻ, $2^{x-y}-1>0$, và là ước của $2^{10}$

Nên $2^{x-y}-1=1\Rightarrow 2^y=2^{10}\Rightarrow y=10$ suy ra x = 11

**Bài 21:** Tìm mọi số nguyên tố x, y thỏa mãn: $x^2-2y^2=1$

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết suy ra $x^2-1=2y^2$, Nếu x chia hết cho 3 , vì x nguyên tố nên x = 3 lúc đó y = 2, (thỏa mãn)

Nếu x không chia hết cho 3 thì $x^2-1$chia hết cho 3, do đó $2y^2$ chia hết cho 3 mà (2;3) =1

Nên y chia hết cho 3, do đó: $x^2=19$ $(l)$ Vậy cặp số (x; y) duy nhất tìm được là (2; 3)

**Bài 22:** Tìm tất cả các số tự nhiên m,n sao cho $2^m+2015=|n-2016|+n-2016$

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét,

Với $x\ge 0 \Rightarrow |x|+x=2x$

Với $x<0\Rightarrow |x|+x=0$, Do đó $|x|+x$ luôn là 1 số chẵn với mọi x

Áp dụng nhận xét trên ta thấy $|n-2016|+n-2016$ là số chẵn suy ra $2^m+2015$ là số chẵn suy ra m = 0.

Khi đó $|n-2016|+n-2016=2016$

Nếu $n<2016\Rightarrow-(n-2016)+n-2016=2016\Rightarrow 0=2016$ (loại)

Nếu $n\ge 2016\Rightarrow 2(n-2016)=2016\Rightarrow n=3024$ (thỏa mãn)

Vậy (m, n) =(0 ;3024)

**Bài 23:** Tìm các số nguyên dương x,y thỏa mãn : $2^x+2^y=72$

**Hướng dẫn giải**

Giả sử x > y thế thì ta có :

$2^x + 2^y = 2^y\left(1 + 2^{x-y}\right) = 9.2^3$

Do $1 + 2^{x-y}$ là số lẻ nên $1 + 2^{x-y} = 1;3;9$

Ta có bảng giá trị sau :

| | |
|---|---|
| $1 + 2^{x-y} = 1$ | $2^y = 9.2^3$ (Loại) |
| $1 + 2^{x-y} = 3$ | $2^y = 3.2^3$ (Loại) |
| $1 + 2^{x-y} = 9$ | $2^y = 2^3$ |

Ta thấy $2^y = 2^3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 6$

**Bài 24:** Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho: $2^n - 1 \vdots 7$

**Hướng dẫn giải**

Với $n < 3 \Rightarrow 2^n - 1 \not\vdots\, 7$

Với $n \geq 3 \Rightarrow n = 3k$ hoặc $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$

Xét $n = 3k \Rightarrow 2^{3k} - 1 = 8^k - 1 = (7 + 1)^k - 1 = 7A + 1 - 1 \vdots 7$

Xét $n = 3k + 1 \Rightarrow 2^{3k+1} - 1 = 2.8^k - 1 = 2(7A + 1) - 1 = 7A + 1 \not\vdots\, 7$

Xét $n = 3k + 2 \Rightarrow 2^{3k+2} - 1 = 4(7A + 1) = 27A + 4 \not\vdots\, 7$

Vậy n = 3k với $k \in N$

**Dạng 9: Tìm ẩn dựa trên tính chất về dấu.**

**Bài 1:** Tìm x biết:

a, $(x-1)(x-2) > 0$ b, $2x - 3 < 0$ c, $(2x-4)(9-3x) > 0$

**Hướng dẫn giải**

a, Để $(x-1)(x-2) > 0$ thì ta có hai trường hợp :

TH1 : $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$

TH2 : $\begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x < 1$

Vậy x > 2 hoặc x < 1

b, Để : $2x - 3 < 0 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$

c, Để : $(2x-4)(9-3x) > 0$ thì ta có các trường hợp sau :

TH1: $\begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 9 - 3x > 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < x < 3$ hoặc TH2: $\begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ 9 - 3x < 0 \end{cases}$ (vô lý)

Vậy $2 < x < 3$

**Bài 2:** Tìm x biết:

a, $\frac{2x}{3} - \frac{3}{4} > 0$ b, $\left(\frac{2}{3x} - 4\right)\frac{5}{3} > \frac{15}{6}$

**Hướng dẫn giải**

a, $\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}>0 \Rightarrow \frac{2x}{3}>\frac{3}{4} \Rightarrow x>\frac{3}{4}.\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$

b, $\left(\frac{2}{3x}-4\right)\frac{5}{3}>\frac{15}{6} \Rightarrow \left(\frac{2}{3x}-4\right)>\frac{15}{6}.\frac{3}{5}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3x}>\frac{11}{2} \Rightarrow 3x.11<4 \Rightarrow x<\frac{4}{33}$

**Bài 3:** Tìm x biết:

a, $(x-6)(x+5)\le 0$ b, $(x-6)(x+5)\ge 0$ c, $2x-3<0$

**Hướng dẫn giải**

a, Để $(x-6)(x+5)\le 0$ thì :

TH1 : $\begin{cases} x-6\ge 0 \\ x+5\le 0 \end{cases}$ (vô lý) hoặc TH2 : $\begin{cases} x-6\le 0 \\ x+5\ge 0 \end{cases} \Rightarrow -5\le x\le 6$

b, Để: $(x-6)(x+5)\ge 0$ Thì:

TH1: $\begin{cases} x-6\ge 0 \\ x+5\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x\ge 6$ Hoặc TH2: $\begin{cases} x-6\le 0 \\ x+5\le 0 \end{cases} \Rightarrow x\le -5$

c, $2x-3<0 \Rightarrow 2x<3 \Rightarrow x<\frac{3}{2}$

**Bài 4:** Tìm x biết:

a, $(2x-4)(9-3x)>0$ b, $(x^2-5)(x^2-25)<0$ c, $(x+5)(9+x^2)<0$

**Hướng dẫn giải**

a, Để: $(2x-4)(9-3x)>0$ thì :

TH1: $\begin{cases} 2x-4>0 \\ 9-3x>0 \end{cases} \Rightarrow 2<x<3$ hoặc $\begin{cases} 2x-4<0 \\ 9-3x<0 \end{cases}$ (vô lý)

b, Để: $(x^2-5)(x^2-25)<0$ thì:

TH1: $\begin{cases} x^2-5>0 \\ x^2-25<0 \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} x^2-5<0 \\ x^2-25>0 \end{cases}$

c, Để: $(x+5)(9+x^2)<0$ , Vì $x^2+9>0 \Rightarrow x+5<0 \Rightarrow x<-5$

**Bài 5:** Tìm x biết:

a, $(x+3)(x-4)>0$ b, $(x^2+7)(x^2-49)<0$ c, $(x^2+2)(x+3)>0$

**Hướng dẫn giải**

a, Để: $(x+3)(x-4)>0$ thì:

TH1: $\begin{cases} x+3>0 \\ x-4>0 \end{cases} \Rightarrow x>4$ Hoặc: $\begin{cases} x+3<0 \\ x-4<0 \end{cases} \Rightarrow x<-3$

b, Để $(x^2+7)(x^2-49)<0 \Rightarrow (x^2+7)(x+7)(x-7)<0$

Vì $x^2+7>0 \Rightarrow (x+7)(x-7)<0$

TH1: $\begin{cases} x+7>0 \\ x-7<0 \end{cases} \Rightarrow -7<x<7$ TH2: $\begin{cases} x+7<0 \\ x-7>0 \end{cases}$ (vô lý)

c, Để: $(x^2+2)(x+3)>0$ thì $x+3>0 => x>-3$

**Bài 8:** Tìm x biết: $4x+5-|x+3|=11,\ x>-3$

**Hướng dẫn giải**

Với $x > -3 \Rightarrow 4x + 5 - (x+3) = 11 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$

**Bài 9:** Tìm $n \in N$ biết:

a, $3 < 3^n \le 234$ b, $8.16 \ge 2^n \ge 4$ c, $4^{15}.9^{15} < 2^n.3^n < 18^{16}.2^{16}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $3 < 3^n \le 234 < 243 = 3^5 \Rightarrow n \in \{2;3;4\}$

b, Ta có: $8.16 \ge 2^n \ge 4 \Rightarrow 2^7 \ge 2^n \ge 2^2 \Rightarrow n \in \{2;3;4;5;6;7\}$

c, $4^{15}.9^{15} < 2^n.3^n < 18^{16}.2^{16} \Rightarrow 36^{15} < 6^n < 36^{16} \Rightarrow 6^{30} < 6^n < 6^{32} \Rightarrow n = 31$

**Bài 10:** Giải bất phương trình: $\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{1}{x^2-9x+20}+\dfrac{1}{x^2-11x+30} \ge 0$

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x^2-9x+20}+\frac{1}{x^2-11x+30} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}+\frac{1}{(x-4)(x-5)}+\frac{1}{(x-5)(x-6)} \ge 0 \left(x \ne 1;2;3;4;5;6\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-6} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-6} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x-2)(x-6)} \ge 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2>0 \\ x-6<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2<0 \\ x-6>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<6 \\ x \in \varnothing \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $2 < x < 6$ và $x \ne 3;4;5$

**Bài 11:** Tìm $n \in N$ biết:

a, $32 < 2^n < 128$ b, $2.16 \ge 2^n > 4$

**Hướng dẫn giải**

a, $2^5 < 2^n < 2048 = 2^{11} \Rightarrow n \in \{6;7;8;9;10\}$

b, $2.16 \ge 2^n > 4 \Rightarrow 2^5 \ge 2^n > 2^2 \Rightarrow n \in \{5;4;3\}$

**Dạng 10 : Tìm các ẩn với điều kiện nguyên.**

**Bài1:** Tìm tất cả các số nguyên $n$ để phân số $\dfrac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

**Hướng dẫn giải**

Xét phân số $\dfrac{n+1}{n-2}=\dfrac{n-2+3}{n-2}=1+\dfrac{3}{n-2}$

Để $\dfrac{n+1}{n-2}$ là một số nguyên $\Leftrightarrow 3 \vdots n-2 \Leftrightarrow n-2 \in Ư(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

Từ đó ta có:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n-2$ | $-3$ | $-1$ | 1 | 3 |
| $n$ | $-1$ | 1 | 3 | 5 |

Vậy $n \in Ư(3) = \{-1;1;3;5\}$ thì $\dfrac{n+1}{n-2}$ là một số nguyên

**Bài 2:** Cho $A = \dfrac{2n+3}{n-2}$ $(n \neq 2)$ .

Tìm số nguyên $n$ để $A$ là một số nguyên.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $A = \dfrac{2n+3}{n-2} = \dfrac{2(n-2)+7}{n-2} = 2 + \dfrac{7}{n-2}$

Để $A$ là một số nguyên thì $\dfrac{7}{n-2}$ phải là số nguyên.

Do đó $(n-2) \in Ư(7)$ mà $Ư(7) = \{\pm 1;\ \pm 7\}$, nên ta có bảng sau:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n-2$ | -7 | -1 | 1 | 7 |
| $n$ | -5 | 1 | 3 | 9 |
| | TM $n \in \mathbb{Z}$ | TM $n \in \mathbb{Z}$ | TM $n \in \mathbb{Z}$ | TM $n \in \mathbb{Z}$ |

Vậy $n \in \{-5;\ 1;\ 3;\ 9\}$ thì $A$ là một số nguyên.

**Bài 3:** Tìm các giá trị nguyên của $x$ để $\dfrac{x+3}{x-2}$ nhận giá trị nguyên.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-2+5}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-2 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$\Rightarrow x = 1;3;-3;7$

**Bài 4:** Tìm số nguyên $n$ để $4n+5$ chia hết cho $2n+1$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $4n+5 = 2.(2n+1)+3$

Vì $2(2n+1) \vdots 2n+1$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$

Nên để $4n+5 \vdots 2n+1$ thì $3 \vdots 2n+1$

$\Rightarrow 2n+1 \in Ư(3) = \{-3;-1;1;3\}$

Ta có bảng giá trị sau:

| $2n+1$ | -3 | -1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | -2 | -1 | 0 | 1 |

Vậy $n\in\{-2;-1;0;1\}$ thì $4n+5\,\vdots\,2n+1$

**Bài 5:** Tìm số tự nhiên $n$ sao cho $2n+7\,\vdots\,n+1$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $2n+7\,\vdots\,n+1$

$\Leftrightarrow 2(n+1)+5\,\vdots\,(n+1)$

$\Leftrightarrow 5\,\vdots\,n+1$

$\Leftrightarrow n+1\in U(5)=\{1;5\},vi\ \ n\in N$

$\Leftrightarrow n\in\{0;4\}$

**Bài 6:** Tìm số nguyên $n$ để phân số $\dfrac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là số nguyên.

**Hướng dẫn giải**

Để $\dfrac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là số nguyên thì $2n+1\,\vdots\,n+2$ (1)

Vì $n+2\,\vdots\,n+2$ nên $2(n+2)\,\vdots\,n+2$ (2)

Từ (1) và (2) $\left[2(n+2)-(2n+1)\right]\vdots\,n+2$

$\Rightarrow 3\,\vdots\,n+2$

Vì $n+2$ nguyên nên $n+2\in\{-1;-3;1;3\}$ $\Rightarrow n\in\{-3;-5;-1;1\}$

Vậy với $\Rightarrow n\in\{-3;-5;-1;1\}$ thì phân số $\dfrac{2n+1}{n+2}$ là số nguyên.

**Bài 7:** Tìm số tự nhiên n để biểu thức sau là số tự nhiên: $B=\dfrac{2n+2}{n+2}+\dfrac{5n+17}{n+2}-\dfrac{3n}{n+2}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$B=\frac{2n+2}{n+2}+\frac{5n+17}{n+2}-\frac{3n}{n+2}=\frac{2n+2+5n+17-3n}{n+2}=\frac{4n+19}{n+2}$$

$$=\frac{4(n+2)+11}{n+2}=4+\frac{11}{n+2}$$

Để B là số tự nhiên thì $\dfrac{11}{n+2}$ là số tự nhiên

$\Rightarrow 11\,\vdots\,(n+2)\Rightarrow n+2\in Ư(11)=\{\pm1;\pm11\}$

Do $n+2>1$ nên $n+2=11\Rightarrow n=9$

Vậy $n=9$ thì $B\in N$

**Bài 8:** Tìm n để $n^3-n^2+n+7\,\vdots\,n^2+1$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $n^3 - n^2 + n + 7 \vdots n^2 + 1 \Rightarrow n^3 + n - (n^2 + 1) + 8 \vdots n^2 + 1$

$\Rightarrow n(n^2 + 1) - (n^2 + 1) + 8 \vdots n^2 + 1 \Rightarrow n^2 + 1 \in U(8)$

$\Rightarrow x(x+2) + (x+2) - 3 \vdots x + 2 \Rightarrow x + 2 \in U(3)$

**Bài 9:** Tìm các cặp số nguyên (x; y) để biểu thức sau có giá trị nguyên:

$$K = \frac{3x(x+y) - 6(x+y) + 1}{x-2}$$

**Hướng dẫn giải**

Để : $K = \frac{3x(x+y) - 6(x+y) + 1}{x-2}$ có giá trị nguyên thì : $\frac{(3x-6)(x+y)+1}{x-2} = \frac{3(x-2)(x+y)+1}{x-2}$

Phải có giá trị nguyên hay $1 \vdots x - 2 \Rightarrow x - 2 \in U(1) \Rightarrow x - 2 \in \{-1;1\} \Rightarrow x = 3, x = 1$

**Bài 10:** Tìm số nguyên $n$ để $B = \frac{2n+3}{3n+2}$ có giá trị nguyên.

**Hướng dẫn giải**

Để $B = \frac{2n+3}{3n+2}$ có giá trị nguyên

$\Leftrightarrow 2n + 3 \vdots 3n + 2$

$\Rightarrow 3(2n+3) \vdots 3n + 2$ **và** $2(3n+2) \vdots 3n + 2$

$\Rightarrow 3(2n+3) - 2(3n+2) \vdots (3n+2)$

$\Rightarrow 5 \vdots 3n + 2$

$\Rightarrow 3n + 2 \in U(5) \in \{1; -1; 5; -5\}$

$\Rightarrow n \in \{-1;1\}$ *, vì* $n \in Z$

**Bài 11:** Tìm tất cả các số nguyên *n* để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

**Hướng dẫn giải**

$\frac{n+1}{n-2}$ là số nguyên khi $(n+1) \vdots (n-2)$

Ta có $n + 1 = [(n-2) + 3]$

Vậy $(n+1) \vdots (n-2)$ khi $3 \vdots (n-2)$

$(n-2) \in Ư(3) = \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$.

**Bài 12:** Cho $A = \frac{n-2}{n+3}$

a) Tìm điều kiện của $n$ để: $A$ là một phân số.

b) Tìm giá trị nguyên của $n$ để $A$ là một số nguyên.

**Hướng dẫn giải**

a) Để $A$ là một phân số thì $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -3 \end{cases}$.

b) Ta có: $A = \dfrac{n-2}{n+3} = 1 - \dfrac{5}{n+3}$

Để $A$ là một số nguyên thì $(n+3) \in Ư(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Ta có bảng:

| $n+3$ | $-5$ | $-1$ | $1$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | $-8$ | $-4$ | $-2$ | $2$ |

Vậy để $A$ là một số nguyên thì $n \in \{-8; -4; -2; 2\}$.

**Bài 13:** Cho $Q = \dfrac{27-2x}{12-x}$. Tìm các số nguyên $x$ để $Q$ có giá trị nguyên ?

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: $x \in \mathbb{Z}, x \neq 12$

Biến đổi: $Q = \dfrac{27-2x}{12-x} = \dfrac{2.(12-x)+3}{12-x} = 2 + \dfrac{3}{12-x}$

Ta có: $2 \in \mathbb{Z}; x \in \mathbb{Z}; x \neq 12$ nên $Q$ có giá trị nguyên khi và chỉ khi $\dfrac{3}{12-x} \in \mathbb{Z}$

Mà $\dfrac{3}{12-x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 12 - x \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow x \in \{15; 13; 11; 9\}$

Vậy Q nguyên khi và chỉ khi $x \in \{15; 13; 11; 9\}$

**Bài 14:** Tìm $x, y$ nguyên biết: $xy + 3x - y = 6$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $xy + 3x - y = 6 \Leftrightarrow x(y+3) - (y+3) = 6 - 3$

$\Leftrightarrow (x-1)(y+3) = 3 = 1.3 = 3.1 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$. Ta có bảng sau:

| $x-1$ | $1$ | $3$ | $-1$ | $-3$ |
|---|---|---|---|---|
| $y+3$ | $3$ | $1$ | $-3$ | $-1$ |
| $x$ | $2$ | $4$ | $0$ | $-2$ |
| $y$ | $0$ | $-2$ | $-6$ | $-4$ |

Vậy $(x; y) = \{(2;0); (4;-2); (0;6); (-2;-4)\}$

**Bài 15:** Tìm các số nguyên $x, y$ biết $x - 2xy + y - 3 = 0$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $x - 2xy + y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x-4xy+2y-6=0 \Leftrightarrow 2x-4xy+2y-1=5$

$\Leftrightarrow 2x(1-2y)-(1-2y)=5 \Leftrightarrow (2x-1)(1-2y)=5$

Lập bảng:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $2x-1$ | 1 | 5 | -1 | -5 |
| $1-2y$ | 5 | 1 | -5 | -1 |
| $x$ | 1 | 3 | 0 | -2 |
| $y$ | -2 | 0 | 3 | 1 |
| | Thỏa mãn | Thỏa mãn | Thỏa mãn | Thỏa mãn |

**Bài 16.** Cho 2 biểu thức: $A=\dfrac{4x-7}{x-2}; B=\dfrac{3x^2-9x+2}{x-3}$

a) Tìm giá trị nguyên của $x$ để mỗi biểu thức có giá trị nguyên

b) Tìm giá trị nguyên của $x$ để cả hai biểu thức cùng có giá trị nguyên

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $A=\dfrac{4x-7}{x-2}=\dfrac{4(x-2)+1}{x-2}=4+\dfrac{1}{x-2}$

Với $x\in\mathbb{Z}$ thì $x-2\in\mathbb{Z}$

Để $A$ nguyên thì $\dfrac{1}{x-2}$ nguyên $\Rightarrow x-2\in U(1)\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x-2=1\\x-2=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$

$B=\dfrac{3x^2-9x+2}{x-3}=\dfrac{3x(x-3)+2}{x-3}=3x+\dfrac{2}{x-3}$

Với $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x-3\in\mathbb{Z}$

Để $B$ nguyên thì $\dfrac{2}{x-3}$ nguyên $\Rightarrow x-3\in U(2)=\{\pm1;\pm2\}$

Do đó $x=5, x=1, x=4, x=2$

Vậy để $B$ nguyên thì $x\in\{5;1;4;2\}$

b) Từ câu a suy ra để $A,B$ cùng nguyên thì $x=1$.

**Bài 17:** Tìm các số nguyên $x$ và $y$ biết: $2xy-6y+x=9$.

**Hướng dẫn giải**

$2xy-6y+x=9$

$2y(x-3)+(x-3)=6$

$(x-3)(2y+1)=6$

Vì $x, y$ là các số nguyên nên $(x-3)$ và $(2y+1)$ là các ước của 6 và $(2y+1)$ là số lẻ nên:

- $\begin{cases} x-3=6 \\ 2y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-3=-6 \\ 2y+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-3=2 \\ 2y+1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-3=-2 \\ 2y+1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

**Bài 18:** Tìm tất cả các cặp số nguyên $x, y$ sao cho $x-xy+y=0$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:

$x-xy+y=0$

$\Rightarrow x(1-y)+y=0$

$\Rightarrow (1-y)-x(1-y)=1$

$\Leftrightarrow (1-x)(1-y)=1=1.1=-1.-1$

| | | |
|---|---|---|
| 1- x | 1 | -1 |
| 1- y | 1 | -1 |
| x | 0 | 2 |
| y | 0 | 2 |

Vậy $(x;y)=\{(0;0);(2;2)\}$

**Bài 19:** Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn : $\frac{x}{5}+1=\frac{1}{y-1}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $\frac{x}{5}+1=\frac{1}{y-1}$ => $\frac{x+5}{5}=\frac{1}{y-1}$

=>(x + 5)(y - 1) = 5

Do $x; y \in Z$ nên $x+5$ và $y-1$ là ước của 5 mà Ư(5)=$\{\pm1;\pm5\}$

Ta có bảng giá trị tương ứng sau:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x+5 | -5 | -1 | 1 | 5 |
| y-1 | -1 | -5 | 5 | 1 |
| x | -10 | -6 | -4 | 0 |
| y | 0 | -4 | 6 | 2 |

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là :

$(x,y)=\{(-4;6),(0;2),(-6;4),(-10,0)\}$

**Bài 20:** Tìm số nguyên $n$ để phân số $M=\dfrac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên.

**Hướng dẫn giải**

Ta có $M=\dfrac{2n-7}{n-5}=\dfrac{2n-10+3}{n-5}=\dfrac{2(n-5)+3}{n-5}=2+\dfrac{3}{n-5}$

Vì $2\in\mathbb{Z}$ nên để $M\in\mathbb{Z}$ thì $\dfrac{3}{n-5}\in\mathbb{Z}\Rightarrow n-5$ là ước của 3.

Lập bảng:

| $n-5$ | 1 | $-1$ | 5 | $-5$ |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | 6 (tm) | 4 (tm) | 10 (tm) | 0 (tm) |

Vậy với $n\in\{0;4;6;10\}$ thì $M$ có giá trị là số nguyên.

**Bài 21:** Tìm các số tự nhiên x, y biết: $2xy-5x+2y=148$

**Hướng dẫn giải**

Tìm các số tự nhiên x, y biết

$2xy-5x+2y=148\Rightarrow(2xy+2y)-5x-5=148-5\Rightarrow 2y(x+1)-5(x+1)=143$

$\Rightarrow(x+1)(2y-5)=143$

Do x, y là các số tự nhiên nên $x+1$ và $2y-5$ là ước của 143

Do 143= 1.143=11.13 nên ta có bảng sau

| x+1 | 1 | 143 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|
| 2y-5 | 143 | 1 | 13 | 11 |
| x | 0 | 142 | 10 | 12 |
| y | 74 | 3 | 9 | 8 |

**Bài 22:** Tìm các cặp số nguyên dương $(x;y)$ biết : $3xy+x+y=13.$

**Hướng dẫn giải**

Từ $3xy+x+y=13.$

$\Rightarrow x(3y+1)+\dfrac{1}{3}.(3y+1)-\dfrac{1}{3}=13.$

$\Rightarrow(3y+1).(x+\dfrac{1}{3})=13+\dfrac{1}{3}.$

$\Rightarrow(3y+1).(3x+1)=40.(*)$

| $x$ | 0 (loại) | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 13 | 3 |

Vì $x;y$ nguyên dương do đó $3y+1$ và $3x+1$ cũng là hai số nguyên dương nên từ (*)suy ra $3y+1;3x+1$ là ước của 40. Mặt khác $3x+1$ là số chia 3 dư 1 nên ta có bảng sau:

| $3x+1$ | 1 | 4 |
|---|---|---|
| $3y+1$ | 40 | 10 |

Vậy cặp số nguyên dương $(x;y)$ thõa mãn bài toán là $(x;y)=(1;3)$

**Bài 23:** Cho $A = 2xy - 10x + 3y$ . Tìm các số nguyên $x, y$ để $A = 28$

**Hướng dẫn giải**

$$A = 2xy - 10x + 3y$$
$$\Rightarrow 2xy - 10x + 3y = 28$$
$$\Rightarrow 2x\left(y-5\right) + 3y - 15 = 13$$
$$\Rightarrow 2x\left(y-5\right) + 3\left(y-5\right) = 13$$
$$\Rightarrow \left(2x+3\right)\left(y-5\right) = 13 = 1.13 = 13.1 = -1.-13 = -13.-1$$

Từ đó ta có các cặp $\left(x;y\right)$ là $\left(1;18\right);\left(5;6\right);\left(-2;-8\right);\left(-8;4\right)$

**Bài 24:** Tìm số nguyên $x$ và $y$ biết : $xy - x + 2y = 3$ .

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $xy - x + 2y = 3 \Rightarrow xy - x + 2y - 2 = 5 \Rightarrow \left(xy - x\right) + \left(2y - 2\right) = 5$

$$\Rightarrow x\left(y-1\right) + 2\left(y-1\right) = 5 \Rightarrow \left(y-1\right)\left(x+2\right) = 5$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $y - 1 \in Ư(5) = \{-5;-1;1;5\}$

| y -1 | -5 | -1 | 1 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| y | -4 | 0 | 2 | 6 |
| x + 2 | -1 | -5 | 5 | 1 |
| x | -3 | -7 | 3 | -1 |

Vậy các cặp số nguyên $x$, $y$ thỏa mãn là: $(x;y) \in \{(-3;-4),(-7;0),(3;2),(-1;6)\}$ .

**Bài 25:** Tìm $x$, $y$ nguyên biết: $3x + xy + 2y = 17$.

**Hướng dẫn giải**

$$3x+xy+2y=17$$
$$\Leftrightarrow x(3+y)+2(3+y)=23$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(3+y)=23$$

Ta có bảng:

| $x+2$ | $-1$ | $1$ | $-23$ | $23$ |
|---|---|---|---|---|
| $3+y$ | $-23$ | $23$ | $-1$ | $1$ |
| $x$ | $-3$ | $-1$ | $-25$ | $21$ |
| $y$ | $-26$ | $20$ | $-4$ | $-2$ |

Vậy $(x;\, y)\in\{(-3;-26);(-1;20);(-25;-4);(21;-2)\}$.

**Bài 26:** Tìm $x,\ y$ nguyên biết: $x+y+xy=40$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có $x+y+xy=40 \Rightarrow x+y+xy+1=41$

$\Rightarrow x(y+1)+(y+1)=41 \Rightarrow (x+1)(y+1)=41$

Mà $41$ chỉ có các cách phân tích thành tích của các cặp số nguyên như sau

$$41=(-1).(-41)=1.41 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=1;\, y+1=41 \\ x+1=41;\, y+1=1 \\ x+1=-1;\, y+1=-41 \\ x+1=-41;\, y+1=-1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0;\, y=40 \\ x=40;\, y=0 \\ x=-2;\, y=-42 \\ x=-42;\, y=-2 \end{array}\right.$$

Vậy $(x,\ y)\in\{(40;0);(0;40);(-2;-42);(-42;-2)\}$

**Bài 27:** Tìm số nguyên $x, y$ biết: $xy+4x=25+5y.$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $xy+4x=25+5y \Leftrightarrow x(y+4)=25+5y \quad (1)$

+) Nếu $y=-4$ thì pt $(1)$ vô nghiệm

+) Nếu $y\neq -4$ thì pt $(1)$ trở thành:

$$x=\frac{5y+25}{y+4}=\frac{5(y+4)+5}{y+4}=5+\frac{5}{y+4}$$

Để $x, y$ nguyên thì $y+4\in\{\pm1;\ \pm5\}$

Lập bảng

| $y+4$ | $-5$ | $-1$ | $1$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|

| $y$ | $-9$ | $-5$ | $-3$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $4$ | $0$ | $10$ | $6$ |

Vậy $(x, y) = (4; -9), (0; -5), (10; -3), (6; 1)$.

**Bài 28:** Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn: $a + b = c + d$ và $a.b + 1 = c.d$. Chứng minh rằng c = d

**Hướng dẫn giải**

Từ $a + b = c + d \Rightarrow a = c + d - b$ , thay vào $a.b + 1 = c.d$ ta được:

$(c + d - b).b + 1 = c.d \Rightarrow cb + db - cd + 1 - b^2 = 0 \Rightarrow b(c - b) - d(c - b) + 1 = 0$

$\Rightarrow (b - d)(c - b) = -1$

Vì a, b, c, d là các số nguyên nên $(b - d), (c - d)$ là các số nguyên, ta có các TH sau:

TH1: $\begin{cases} b - d = -1 \\ c - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = b + 1 \\ c = b + 1 \end{cases} \Rightarrow c = d$ TH2: $\begin{cases} b - d = 1 \\ c - b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = b - 1 \\ c = b - 1 \end{cases} \Rightarrow c = d$

**Bài 29:** Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x, y)$ thỏa mãn: $x^2 + x = 3^{2019y} + 1$.

**Hướng dẫn giải**

+) TH1: Với $y < 0$ , ta có:

$VP = 3^{2019y} + 1$ không là số nguyên

$VT = x^2 + x$ là số nguyên

$\Rightarrow$ Trường hợp này loại.

+) Với $y = 0$, ta có $x^2 + x = 3^{2019.0} + 1 \Rightarrow x^2 + x = 2$

$\Rightarrow x(x + 1) = 1.2 = (-2).(-1)$

$\Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$.

+) Với $y \geq 1$, ta có: $VP = 3^{2019y} + 1$ chia cho 3 dư 1

Vì $x$ nguyên nên $x$ có dạng $3k; 3k + 1; 3k + 2$

Với $x = 3k$ và $x = 3k + 2$ thì $VT = x(x + 1) \vdots 3$

Với $x = 3k + 1$ thì $VT = x(x + 1)$ chia cho 3 dư 2.

Do đó trường hợp này loại.

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(1; 0)$, $(-2; 0)$.

**Bài 30.** Tìm tập hợp các số nguyên $x$, biết rằng:

$$4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 < x < \left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5.1\frac{31}{45}\right) : \left(-21\frac{1}{2}\right)$$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $4\frac{5}{9}:2\frac{5}{18}-7=\frac{41}{9}.\frac{18}{41}-7=2-7=-5$. Lại có:

$$\left(3\frac{1}{5}:3,2+4,5.1\frac{31}{45}\right):\left(-21\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{16}{5}.\frac{5}{16}+\frac{9}{2}.\frac{76}{45}\right):\left(\frac{43}{2}\right)=\left(1+\frac{38}{5}\right).\frac{-2}{43}=\frac{43}{5}.\frac{-2}{43}=\frac{-2}{5}$$

Do đó $-5<x<\frac{-2}{5}$ mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-4;-3;-2;-1\}$

# CHỦ ĐỀ 4: CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHIA HẾT

## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ:

**Định nghĩa:** Cho hai số tự nhiên $a$ và $b$, trong đó $b \neq 0$. Ta nói $a$ chia hết cho $b$ nếu tồn tại số tự nhiên $q$ sao cho $a = bq$. Khi đó ta còn nói: $a$ là bội của $b$, hoặc $b$ là ước của $a$.

**Các tính chất chung:**

1) Bất cứ số nào khác 0 cũng chia hết cho chính nó

2) Tính chất bắc cầu: nếu $a$ chia hết cho $b$ và $b$ chia hết cho $c$ thì $a$ chia hết cho $c$.

3) Số 0 chia hết cho mọi số $b$ khác 0

4) Bất cứ số nào cũng chia hết cho 1

**Tính chất chia hết của một tổng và hiệu**

5) Nếu $a$ và $b$ cùng chia hết cho $m$ thì $a+b$ chia hết cho $m$, $a-b$ chia hết cho $m$.

***Hệ quả:*** Nếu tổng của hai số chia hết cho $m$ và một trong hai số ấy chia hết cho $m$ thì số còn lại cũng chia hết cho $m$.

6) Nếu một trong hai số $a$ và $b$ chia hết cho $m$, số kia không chia hết cho $m$ thì $a + b$ không chia hết cho $m$, $a - b$ không chia hết cho $m$

**Tính chất chia hết của một tích**

7) Nếu một thừa số của tích chia hết cho $m$ thì tích chia hết cho $m$

8) Nếu $a$ chia hết cho $m$ và $b$ chia hết cho $n$ thì $ab$ chia hết cho $m.n$

**Hệ quả:** Nếu $a$ chia hết cho $b$ thì $a^n$ chia hết cho $b^n$

**Một số dấu hiệu chia hết**

Đặt $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0}$, với $a_n; a_{n-1}; ...; a_2; a_1; a_0$ là các chữ số. Khi đó ta có các dấu hiệu chia hết như sau:

- $A \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;2;4;6;8\}$

- $A \vdots 3 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + .... + a_{n-1} + a_n) \vdots 3.$

- $A \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4$

- $A \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;5\}.$

- $A \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0} \vdots 8$
- $A \vdots 9 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + .... + a_{n-1} + a_n) \vdots 9.$
- $A \vdots 11 \Leftrightarrow [(a_0 + a_2 + ....) - (a_1 + a_3 + ...)] \vdots 11.$
- $A \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{a_1a_0} \vdots 25$
- $A \vdots 125 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0} \vdots 125$

**Dạng 1: Chứng minh chia hết**

**Bài 1:** Chứng minh rằng:

a, $\overline{ab} + \overline{ba} \vdots 11$ b, $\overline{ab} - \overline{ba} \vdots 9$ (a > b) c, $\overline{abcabc} \vdots 7,11,13$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có : $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + 1 = 11b + 11b \vdots 11$

b, Ta có : $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b \vdots 9$

c, Ta có : $\overline{abcabc} = \overline{abc}.1001 = \overline{abc}.7.11.13 \vdots 7,11,13$

**Bài 2:** Chứng minh rằng:

a, $(n+10)(n+15) \vdots 2$ b, $n(n+1)(n+2) \vdots 2,3$ c, $n^2 + n + 1$ không $\vdots 4,2,5$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: Nếu n là số lẻ thì $n+15 \vdots 2$

Nếu n là số chẵn thì $n+10 \vdots 2$, Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì : $(n+10)(n+15) \vdots 2$

b, Ta có: Vì $n(n+1)(n+2)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên sẽ có 1 số chia hết cho 2,1 số chia hết cho 3

c, Ta có : $n(n+1)+1$ là 1 số lẻ nên không chia hết cho 4,2 và có chữ số tận cùng khác 0 và 5

**Bài 3:** Chứng minh rằng:

a, $(n+3)(n+6) \vdots 2$ b, $n^2 + n + 6$ không $\vdots$ 5 c, $\overline{aaabbb} \vdots 37$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: Nếu n là số chẵn thì $n+6 \vdots 2$

Nếu n lẻ thì $n+3 \vdots 2$, Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì $(n+3)(n+6) \vdots 2$

b, Ta có : $n^2 + n + 6 = n(n+1) + 6$, Vì $n(n+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên chỉ có chữ số tận cùng là : 0, 2, 6, do đó : $n(n+1)+6$ sẽ có tận cùng là 6, 8, 2 nên không $\vdots$ 5

c, Ta có : $\overline{aaabbb} = \overline{aaa000} + \overline{bbb} = a.11100 + b.111 = a.300.37 + b.3.37$ chia hết cho 37

**Bài 4:** Chứng minh rằng:

a, $\overline{aaa} \vdots a, 37$ b, $ab(a+b) \vdots 2$ c, $\overline{abc} - \overline{cba} \vdots 99$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có : $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$ chia hết cho a và chia hết cho 37

b, Ta có: Vì a, b là hai số tự nhiên nên a,b có các TH sau:

TH1: a, b cùng tính chẵn lẻ thì (a + b) là 1 số chẵn nhưu vậy a + b chia hết cho 2

TH2: a, b khác tính chẵn lẻ thì 1 trong 2 số phải có 1 số chẵn khi đó số đó chia hết cho 2

c, Ta có: $\overline{abc}-\overline{cba}=100a+10b+c-(100c+10b+a)=99a-99c=99(a-c)\vdots 99$

**Bài 5:** Chứng minh rằng : $\overline{ab}+8.\overline{ba}\vdots 9$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\overline{ab}+8.\overline{ba}=10a+b+8(10b+a)=18a+18b=18(a+b)\vdots 9$

**Bài 6:** Cho $a,b\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng: $(4a+b)\vdots 5\Leftrightarrow(a+4b)\vdots 5$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $(4a+b)\vdots 5\Rightarrow 4(4a+b)\vdots 5\Rightarrow(16a+4b)\vdots 5\Rightarrow 15a+(a+4b)\vdots 5\Rightarrow(a+4b)\vdots 5\ \ (dpcm)$

**Bài 7:** Chứng minh rằng số có dạng : $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11

**Hướng dẫn giải**

Ta có :

$\overline{abcabc}=a.10^5+b.10^4+c.10^3+b.10+c=a.10^2(10^3+1)+b.10(10^3+1)+c(10^3+1)$

$=(10^3+1)(a.10^2+b.10+c)=1001(a.10^2+b.10+c)=11.91.\overline{abc}\vdots 11$

**Bài 8:** Tìm n là số tự nhiên để: $A=(n+5)(n+6)\vdots 6n$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $A=12n+n(n-1)+30$ , Để $A\vdots 6n\Rightarrow n(n-1)+30\vdots 6n$

Ta có: $n(n-1)\vdots n\Rightarrow 30\vdots n\Rightarrow n\in U(30)=\{1;2;3;5;6;10;15;30\}$

Và $n(n-1)\vdots 6\Rightarrow n(n-1)\vdots 3\Rightarrow n\in\{1;3;6;10;15;30\}$

Thử vào ta thấy $n\in\{1;3;10;30\}$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài

**Bài 9:** Chứng minh rằng: $3a+2b\vdots 17$ khi và chỉ khi $10a+b\vdots 17$ $(a,b\in\mathbb{Z})$ và ngược lại có đúng không?

**Hướng dẫn giải**

* $3a+2b\vdots 17\Rightarrow 10a+b\vdots 17$

Ta có: $3a+2b\vdots 17\Rightarrow 9.(3a+2b)\vdots 17\Rightarrow 27a+18b\vdots 17\Rightarrow(17a+17b)+(10a+b)\vdots 17\Rightarrow 10a+b\vdots 17$

*$10a+b\vdots 17\Rightarrow 3a+2b\vdots 17$

Ta có: $10a+b\vdots 17\Rightarrow 2(10a+b)\vdots 17\Rightarrow 20a+2b\vdots 17\Rightarrow 17a+3a+2b\vdots 17\Rightarrow 3a+2b\vdots 17$

**Bài 10:** Chứng minh rằng:

a, Nếu $\overline{ab}+\overline{cd}\vdots 11$ thì $\overline{abcd}\vdots 11$

b, Cho $\overline{abc}-\overline{\deg}\vdots 7$ cmr $\overline{abc\deg}\vdots 7$

**Hướng dẫn giải**

a, Thật vậy $\overline{abcd}=100.\overline{ab}+\overline{cd}=99.\overline{ab}+(\overline{ab}+\overline{cd})$, chia hết cho 11.

b, Ta có $\overline{abc\deg}=1000\overline{abc}+\overline{\deg}=1001\overline{abc}-(\overline{abc}-\overline{\deg})$

mà $\overline{abc}-\overline{\deg}\vdots 7$ và $1001\vdots 7$ nên $\overline{abc\deg}\vdots 7$

**Bài 11:** Chứng minh rằng:

a, Chứng minh nếu $\overline{ab}=2\overline{cd}$ với a, b, c, d là các chữ số khác 0 thì $\overline{abcd}$ chia hết cho 67.

b, Cho số $\overline{abc}$ chia hết cho 27. Chứng minh rằng $\overline{bca}$ chia hết cho 27

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có $\overline{ab} = 2\overline{cd}$

và $\overline{abcd} = \overline{ab}.100 + \overline{cd} = 2\overline{cd}.100 + \overline{cd} = \overline{cd}.201 = \overline{cd}.67.3$

Vậy $\overline{abcd}$ chia hết cho 67

b, Ta có :

$$\overline{abc} \vdots 27 \Rightarrow \overline{abc0} \vdots 27 \Rightarrow 1000a + \overline{bc0} \vdots 27 \Rightarrow 999a + a + \overline{bc0} \vdots 27 \Rightarrow 27.37a + \overline{bca} \vdots 27$$

Do $27.37a \vdots 27$ nên $\overline{bca} \vdots 27$.

**Bài 12:** Chứng minh rằng:

a, $\overline{abc\deg} \vdots 23, 29$ nếu $\overline{abc} = 2.\overline{\deg}$

b, Cmr nếu $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) \vdots 11$ thì $\overline{abc\deg} \vdots 11$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có : $\overline{abc\deg} = 1000\overline{abc} + \overline{\deg} = 1000.2\overline{\deg} + \overline{\deg} = 2001\overline{\deg} = \overline{\deg}.23.29.3$

b, Ta có : $\overline{abc\deg} = 10000.\overline{ab} + 100\overline{cd} + \overline{eg} = 9999\overline{ab} + 99\overline{cd} + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) \vdots 11$

**Bài 13:** Chứng minh rằng:

a, Cho $\overline{abc} + \overline{\deg} \vdots 37$ cmr $\overline{abc\deg} \vdots 37$

b, Nếu $\overline{abcd} \vdots 99$ thì $\overline{ab} + \overline{cd} \vdots 99$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có : $\overline{abc\deg} = 1000\overline{abc} + \overline{\deg} = 999\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{\deg}) \vdots 37$

b, Ta có : $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 99.\overline{ab} + \left(\overline{ab} + \overline{cd}\right) \vdots 99 \Rightarrow \overline{ab} + \overline{cd} \vdots 9$

**Bài 14:** Chứng minh rằng: Nếu $\overline{abcd} \vdots 101$ thì $\overline{ab} - \overline{cd} \vdots 101$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $\overline{abcd} \vdots 101 \Rightarrow 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 101.\overline{ab} - \overline{ab} + \overline{cd} = 101.\overline{ab} - \left(\overline{ab} - \overline{cd}\right) \vdots 101$ =>

$\overline{ab} - \overline{cd} \vdots 101$

**Bài 15:** Chứng minh rằng: $a - 11b + 3c \vdots 17$ thì $2a - 5b + 6c \vdots 17$ (a,b,c $\in$ Z)

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $a - 11b + 3c \vdots 17 \Rightarrow 2a - 22b + 6c \vdots 17 \Rightarrow \left(2a - 5b + 6c\right) - 17b \vdots 17 \Rightarrow 2a - 5b + 6c \vdots 17$

**Bài 16:** Chứng minh rằng:

a, $\overline{abcd} \vdots 29$ thì $a + 3b + 9c + 27d \vdots 29$

b, $\overline{abc} \vdots 21$ thì $a - 2b + 4c \vdots 21$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có : $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d \vdots 29 \Rightarrow 2000a + 200b + 20c + 2d \vdots 29$

$\Rightarrow 2001a - a + 203b - 3b + 29c - 9c + 29d - 27d \vdots 29$

$\Rightarrow \left(2001a + 203b + 29c + 29d\right) - \left(a + 3b + 9c + 27d\right) \vdots 29$

$\Rightarrow a + 3b + 9c + 27d \vdots 29$

b, Ta có: $\overline{abc} \vdots 21 \Rightarrow 100a + 10b + c \vdots 21 \Rightarrow 4\left(100a + 10b + c\right) \vdots 21$

$\Rightarrow \left(a - 2b + 4c\right) + \left(399a + 42b\right) \vdots 21$

$\Rightarrow \left(a - 2b + 4c\right) + 21\left(19a + 2b\right) \vdots 21$

$\Rightarrow \left(a - 2b + 4c\right) \vdots 21$

**Bài 17:** Chứng minh rằng nếu $\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}$ chia hết cho 11 thì $\overline{abc\deg}$ chia hết cho 11.

**Hướng dẫn giải**

$\overline{abc\deg} = 10000.\overline{ab} + 100 \times \overline{cd} + \overline{eg} = 9999 \times \overline{ab} + 99 \times \overline{cd} + \left(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}\right)$ chia hết cho 11.

**Bài 18:** Với $a, b$ là các số nguyên, chứng tỏ rằng: $a + 4b \vdots 13$ khi và chỉ khi $10a + b \vdots 13$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $a + 4b \vdots 13 \Rightarrow 10.\left(a + 4b\right) \vdots 13$ (1)

Lại có: $10\left(a + 4b\right) = 10a + 40b = 10a + b + 39a$

Mà $39a \vdots 13$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 10a + b \vdots 13$.

**Bài 19:** a) Cho $\overline{abc} + \overline{deg}$ chia hết cho 37. Chứng minh rằng $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 37

b) Cho $\overline{abc} - \overline{deg}$ chia hết cho 7. Chứng minh rằng chia hết cho 7

**Hướng dẫn giải**

a) $\overline{abcdeg} = 1000 \times \overline{abc} + \overline{\deg} = 999 \times \overline{abc} + \left(\overline{abc} + \overline{deg}\right) \vdots 37$

b) $abcdeg = 1000 \times \overline{abc} + \overline{deg} = 1001 \times \overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{deg})$ chia hết cho 7.

**Bài 20:** Tìm chữ số $a$ biết rằng $\overline{20a20a20a}$ chia hết cho 7

**Hướng dẫn giải**

$n = \overline{20a20a20a} = \overline{20a20a}.1000 + \overline{20a} = (\overline{20a}.1000 + \overline{20a}).1000 + \overline{20a}$
$= 1001.\overline{20a}.1000 + \overline{20a}$.

Theo đề bài $n$ chia hết cho 7, mà 1001 chia hết cho 7 nên $\overline{20a}$ chia hết cho 7.

Ta có $\overline{20a} = 196 + (4 + a)$, chia hết cho 7 nên $4 + a$ chia hết cho 7. Vậy $a = 3$.

**Bài 21:** Cho ba chữ số khác nhau và khác 0. Lập tất cả các số tự nhiên có ba chữ số gồm cả ba chữ số ấy. Chứng minh rằng tổng của chúng chia hết cho 6 và 37

**Hướng dẫn giải**

Gọi ba chữ số là $a$, $b$, $c$.

Các số tự nhiên có 3 chữ số gồm 3 số ấy là: $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bca}, \overline{bac}, \overline{cba}, \overline{cab}$

Tổng các số theo đề bài bằng: $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bca} + \overline{bac} + \overline{cba} + \overline{cab} = 222\left(a + b + c\right)$

chia hết cho 6 và 37.

**Bài 22:** Có hai số tự nhiên $x$ và $y$ nào mà $\left(x + y\right)\left(x - y\right) = 1002$ hay không?

**Hướng dẫn giải**

Giả sử tồn tại các số tự nhiên $x$ và $y$ mà

$$(x+y)(x-y)=1002 \qquad (1).$$

Không thể xảy ra trường hợp trong $x$ và $y$ có một số chẵn, một số lẻ vì nếu xảy ra thì $x+y$ và $x-y$ đều lẻ nên tích $(x+y)(x-y)$ là số lẻ, trái với $(1)$.

Vậy $x$ và $y$ phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Khi đó $x+y$ và $x-y$ đều chẵn nên tích $(x+y)(x-y)$ chia hết cho 4, trong khi đó 1002 không chia hết cho 4, vô lí.

Vậy không tồn tại các số tự nhiên $x$ và $y$ mà $(x+y)(x-y)=1002$.

**Bài 23:** Tìm số tự nhiên có hai chữ số, sao cho nếu viết nó tiếp sau số 1999 thì ta được một số chia hết cho 37

**Hướng dẫn giải**

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$.

Ta có: $\overline{1999ab} \vdots 37 \Rightarrow 199900+\overline{ab} \vdots 37 \Rightarrow 5402.37+26+\overline{ab} \vdots 37 \Rightarrow 26+\overline{ab} \vdots 37$

Vậy $\overline{ab} \in \{11;48;85\}$.

**Bài 24:** Cho $n$ là số tự nhiên. Chứng minh rằng:

a) $(n+10)(n+15)$ chia hết cho 2

b) $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 2 và cho 3

c) $n(2n+7)(7n+1)$ chia hết cho 6

**Hướng dẫn giải**

a) Nếu n là số lẻ thì n + 15 chia hết cho 2 nên $(n+10)(n+15)$ chia hết cho 2.

b) Nếu n là số chẵn thì n + 10 chia hết cho 2 nên $(n+10)(n+15)$ chia hết cho 2.

c) Trong 2 số n và (7n + 1) phải có một số chẵn nên $n(2n+1)(7n+1) \vdots 2$

Mà (3, 2) = 1 nên ta chỉ cần chứng minh $n(2n+1)(7n+1) \vdots 3$

Xét 3 trường hợp:

- Trường hợp 1: $n=3k$ thì $n(2n+1)(7n+1)=3k(6k+1)(21k+1) \vdots 3$

- Trường hợp 2: $n=3k+1$ thì $2n+7=(6k+9) \vdots 3 \Rightarrow n(2n+7)(7n+1) \vdots 3$

- Trường hợp 3: $n = 3k + 2$ thì $7n+1=(21k+15)\vdots 3 \Rightarrow n(2n+7)(7n+1)\vdots 3$

Từ 3 trường hợp trên suy ra n(2n + 7)(7n + 1) chia hết cho 6.

**Bài 25:** Tìm tất cả các chữ số $x$, $y$ sao cho $\overline{2019xy}$ chia hết cho cả 2, 3 và 5.

**Hướng dẫn giải**

Tìm tất cả các chữ số $x$, $y$ sao cho $\overline{2019xy}$ chia hết cho cả 2, 3 và 5.

Ta có $\overline{2019xy}$ chia hết cho cả 2 và 5 $\Rightarrow y = 0$.

Lại có $\overline{2019xy}\vdots 3$ nên $(2+0+1+9+x+0)\vdots 3 \Rightarrow (12 + x)\vdots 3$.

$\Rightarrow x \in \{0;\ 3;\ 6;\ 9\}$

Vậy $(x;y) \in \{(0;0);\ (3;0);\ (6;0);\ (9;0)\}$.

**Bài 26:** Cho hai số nguyên a và b không chia hết cho 3, nhưng khi chia cho 3 thì có cùng số dư:

Chứng minh rằng: $(ab-1)\vdots 3$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $a = 3p + r, b = 3q + r\ (p,q,r \in Z, r = 1,2)$ khi đó

$ab-1=(3p+r)(3q+r)-1=3p(3q+r)+r(3p+r)-1=9pq+3pr+3qr+r^2-1$

Nếu r = 1 thì $r^2-1=1-1=0\vdots 3$

Nếu r = 2 thì $r^2-1=4-1=3\vdots 3$

Vậy $(ab-1)$ luôn chia hết cho 3.

**Bài 27:** Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, chia hết cho 5 và cho 27 biết rằng hai chữ số giữa của số đó là 97

**Hướng dẫn giải**

Gọi $n$ là số phải tìm, $n$ phải tận cùng bằng 0 hoặc 5 và $n$ phải chia hết cho 9. Xét $n=\overline{*975}$ chia hết cho 9 nên * = 6. Thử lại: 6975 không chia hết cho 27

Xét $n=\overline{*970}$ chia hết cho 9 nên $* = 2$. Thử lại: 2970 chia hết cho 27.

Số phải tìm là 2970

**Bài 28:** Hai số tự nhiên $a$ và $2a$ đều có tổng các chữ số bằng $k$. Chứng minh rằng $a$ chia hết cho 9

**Hướng dẫn giải**

Ta biết rằng một số và tổng các chữ số của nó có cùng số dư trong phép chia cho 9, do đó hiệu của chúng chia hết cho 9.

Như vậy: $2a-k\vdots 9$

Và $a-k\vdots 9$

Suy ra: $(2a-k)-(a-k)\,\vdots\,9$

Do đó $a\,\vdots\,9$

**Bài 29:** Cho số tự nhiên $\overline{ab}$ bằng 3 lần tích các chữ số của nó

a) Chứng minh rằng $b$ chia hết cho $a$

b) Giả sử $b = ka\ (k \in N)$, chứng minh rằng k là ước của 10

c) Tìm các số $\overline{ab}$ nói trên

**Hướng dẫn giải**

a) Theo đề bài: $\overline{ab} = 3ab$

$$\Rightarrow 10a + b = 3ab \qquad (1)$$
$$\Rightarrow 10a + ba\,\vdots\,a$$
$$\Rightarrow b\,\vdots\,a$$

b) Do $b = ka$ nên $k < 10$. Thay $b = ka$ vào (1):

$$10a + ka = 3a.ka$$
$$\Rightarrow 10 + k = 3ak \qquad (2)$$
$$\Rightarrow 10\,\vdots\,k$$

c) Do $k < 10$ nên k $\in \{1 ; 2 ; 5\}$

Với $k = 1$, thay vào (2) : $11 = 3a$, loại

Với $k = 2$, thay vào (2) : $12 = 6a \Rightarrow a = 2;$

$b = ka = 2.2 = 4$. Ta có $\overline{ab} = 24 = 3.2.4$

Với $k = 5$, thay vào (2) : $15 = 5a \Rightarrow a = 1;$

$b = ka = 5.1 = 5$. Ta có $\overline{ab} = 15 = 3.1.5.$

Đáp số: 24 và 15

Chú ý. Cách giải câu c không thông qua câu a và b

$$\overline{ab} = 3ab \Rightarrow 10a + b = 3ab \Rightarrow 10a = 3ab - b \Rightarrow 10a = b(3a - 1)$$

Ta thấy 10a chia hết cho $3a-1$, mà $a$ và $3a-1$ nguyên tố cùng nhau (thật vậy, nếu $a$ và $3a-1$ cùng chia hết cho d thì $3a-(3a-1)$ chia hết cho $d$, tức là $1\,\vdots\,d$, vậy $d = 1$)

nên $10\,\vdots\,3a - 1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $3a-1$ | 1 | 2 | 5 | 10 |
| $3a$ | 2 | 3 | 6 | 11 |
| $a$ | Loại | 1 | 2 | Loại |
| $b$ | | 5 | 4 | |

Đáp số: 15 và 24

**Bài 30:** Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số đó chia hết cho tích các chữ số của nó

**Hướng dẫn giải**

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$, ta có $10a+b \vdots ab$ (1)

Suy ra $b \vdots a$. Đặt $b=ka$ (2) thì $k < 10$ $(k\in N)$

Thay $b=ka$ vào (1) ta có $10a+ka \vdots akb$

$\Rightarrow 10a \vdots ka \Rightarrow 10 \vdots k \Rightarrow k\in\{1,\ 2,\ 5\}$

Nếu $k=1$ thì $b=a$ . Thay vào (1) ta được $11a \vdots a^2 \Rightarrow 11 \vdots a \Rightarrow a=1$

Vậy $\overline{ab}=11$

Nếu $k=2$ thì $b=2a$ . Xét các số 12, 24, 36, 48 ta có các số 12, 24, 36 thỏa mãn đề bài

Nếu $k=5$ thì $b=5a \Rightarrow \overline{ab}=15$ thỏa mãn đề bài

Kết luận: Có 5 số thỏa mãn đề bài là 11, 12, 15, 24, 36

**Bài 31:** Tìm số tự nhiên $n$ sao cho $18n+3$ chia hết cho 7

**Hướng dẫn giải**

*Cách 1.*

$$\begin{aligned}
&18n+3 \ \vdots 7\\
\Leftrightarrow\ &14n+4n+3 \ \vdots 7\\
\Leftrightarrow\ &4n+3 \ \vdots 7\\
\Leftrightarrow\ &4n+3-7 \ \vdots 7\\
\Leftrightarrow\ &4n-4 \ \vdots 7\\
\Leftrightarrow\ &4(n-1) \ \vdots 7
\end{aligned}$$

Ta lại có $(4,7)=1$ nên $n-1 \vdots 7$

Vậy $n=7k+1$ $(k\in\mathbb{N})$.

*Cách 2.*

$$\begin{aligned}
&18n+3 \ \vdots 7\\
\Leftrightarrow\ &18n+3-21 \ \vdots 7\\
\Leftrightarrow\ &18n-18 \ \vdots 7\\
\Leftrightarrow\ &(18n-1) \ \vdots 7
\end{aligned}$$

Ta lại có $(18,7)=1$ nên $n-1 \vdots 7$

Vậy $n=7k+1$ $(k\in\mathbb{N})$

*Nhận xét:* Việc thêm bớt các bội của 7 trong hai cách giải trên nhằm đi đến một biểu thức chia hết cho 7 mà ở đó hệ số của $n$ bằng 1.

**Bài 32:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia 9 dư 5, chia 7 dư 4, chia 5 dư 3.

**Hướng dẫn giải**

Gọi số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là a

Vì a chia 9 dư 5 nên $a+4\vdots 9 \Rightarrow a+4+153\vdots 9 \Rightarrow a+157\vdots 9$

Vì a chia 7 dư 4 nên $a+3\vdots 7 \Rightarrow a+3+154\vdots 7 \Rightarrow a+157\vdots 7$

Vì a chia 5 dư 3 nên $a+2\vdots 5 \Rightarrow a+2+155\vdots 5 \Rightarrow a+157\vdots 5$

Suy ra $a+157 \in BC\left(9,5,7\right)$

$BCNN\left(9,5,7\right)=315$

$\Rightarrow a+157=315k$ ví a nhỏ nhất nên $k=1 \Rightarrow a=158$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là : 158.

**Bài 33:** Một số chia cho 7 dư 3, chia cho 17 dư 12, chia cho 23 dư 7. Hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu?

**Hướng dẫn giải**

Gọi số đã cho là $A$. Theo bài ra ta có: $A=7a+3=17b+12=23c+7$

Mặt khác: $A+39=7a+3+39=17b+12+39=23c+7+39$

$=7\left(a+6\right)=17\left(b+3\right)=23\left(c+2\right)$

Như vậy $A+39$ đồng thời chia hết cho 7,17 và 23.

Nhưng ƯCLN$\left(7,17,23\right)=1 \Rightarrow \left(A+39\right)\vdots 7,17,23 \Rightarrow A+39\vdots 2737 \Rightarrow A=2698.$

Do $2698<2737$ nên $A:2737$ có số dư là $2698$.

**Bài 34:** Cho số $\overline{abc}\vdots 37$ .chứng minh rằng $\overline{cab}\vdots 37$

**Hướng dẫn giải**

Vì $\overline{abc}\vdots 37$ nên $100.\overline{abc}\vdots 37 \Rightarrow 10000a+1000b+100c\vdots 37$

$\Rightarrow 100c+10a+b+9990a+999b\vdots 37 \Rightarrow \overline{cab}+37.\left(270a+27b\right)\vdots 37$

$\Rightarrow \overline{cab}\vdots 37$

**Bài 35:** Chứng tỏ rằng trong $27$ số tự nhiên tùy ý luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho $50$.

**Hướng dẫn giải**

TH1: Nếu $27$ số tự nhiên trên có $2$ số có cùng số dư khi chia cho $50$ thì hiệu của chúng chia hết cho $50$.

TH2: Nếu $27$ số tự nhiên trên không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho $50$

Số dư khi chia cho $50$ gồm: $0; 1; 2; ...; 49$ chia làm $26$ nhóm:

$$(0),(1;\ 49),(2;\ 48),...(24;\ 26),(25)$$

Chia $27$ số dư khác nhau vào $26$ nhóm trên, tồn tại ít nhất $2$ số cùng một nhóm.

Suy ra tổng của chúng chia hết cho $50$.

Vậy trong $27$ số tự nhiên tùy ý luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho $50$.

**Bài 36:** Cho $n=\overline{7a5}+\overline{8b4}$. Biết $a-b=6$. và $n\vdots 9$. Tìm $a,b$.

**Hướng dẫn giải**

Do $n\vdots 9\Rightarrow \overline{7a5}+\overline{8b4}\vdots 9\Rightarrow 700+10a+5+800+10b+4\vdots 9\Rightarrow 1509+10a+10b\vdots 9$

$\Rightarrow 1503+9a+9b+6+a+b\vdots 9\Rightarrow 6+a+b\vdots 9\Rightarrow a+b\in\{3;12\}$

+ Với $a+b=3$ thì $a;b$ khác tính chẵn lẻ và $a-b=6$ thì $a;b$ cùng tính chẵn lẻ. Do đó không tồn tại $a;b$.

+ Với $a+b=12$ và $a-b=6$ suy ra $a=9;b=3$.

Vậy $a=9;b=3$.

**Bài 37:** Tìm các chữ số $a,\ b$ sao cho:

a) $a-b=4$ và $\overline{7a5b1}$ chia hết cho 3

b) $a-b=6$ và $\overline{4a7}+\overline{1b5}$ chia hết cho 9

**Hướng dẫn giải**

a) Số $\overline{7a5b1}\vdots 3\Rightarrow 7+a+5+b+1\vdots 3\Rightarrow 13+a+b\vdots 3\Rightarrow a+3$ chia cho 3 dư $2\ (1)$ .

Ta có $a-\mathrm{b}=4$ nên:

$$4\le a\le 9$$
$$0\le b\le 5$$

Suy ra $4\le a+b\le 14\ \ (2)$.

Mặt khác $a-b$ là số chẵn nên $a+b$ là số chẵn $(3)$.

Từ $(1)$, $(2)$, $(3)$ suy ra: $a+\mathrm{b}\in\{8;14\}$.

Với $a+b=8$ ; $a-b=4$ ta được $a=6$; $b=2$.

Với $a+b=14$ ; $a-b=4$ ta được $a=9$; $b=5$.

b) $\overline{4a7}+\overline{1b5}\vdots 9\Rightarrow 512+10(a+b)\vdots 9$

$\Rightarrow 504+8+9(a+b)+a+b\vdots 9\ \Rightarrow a+b$ chia cho $9$ dư 1

Do $a+b\ge a-b=6$ nên $a+b=10$ . Từ đó tìm được: $a=8$; $b=2$ .

**Bài 38:** Chứng minh rằng:

a) $2n + \underbrace{11...111}_{n}$ chia hết cho 3

b) $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27

c) $10^n + 72n - 1$ chia hết cho 81

**Hướng dẫn giải**

Chú ý rằng số $n$ và số có tổng các chữ số bằng $n$ có cùng số dư trong phép chia cho 9, do đó $\underbrace{111....1}_{n \text{ chữ số}} - n$ chia hết cho 9.

a) $2n + \underbrace{111....1}_{n \text{ chữ số}} = 3n + \left(\underbrace{111....1}_{n \text{ chữ số}} - n\right)$ chia hết cho $3$.

b) $10^n + 18n - 1 = 10^n - 1 - 9n + 27n = \underbrace{99....9}_{n \text{ chữ số}} - 9n + 27n = 9.\left(\underbrace{111....1}_{n \text{ chữ số}} - n\right) + 27n$ chia hết cho $27$.

c) $10^n + 72n - 1 = 10^n - 1 - 9n + 81n = \underbrace{99....9}_{n \text{ chữ số}} - 9n + 81n = 9.\left(\underbrace{111....1}_{n \text{ chữ số}} - n\right) + 81n$ chia hết cho $81$.

**Bài 39:** Cho số tự nhiên $\overline{ab}$ bằng ba lần tích các chữ số của nó, chứng minh rằng $b \vdots a$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\overline{ab} = 3ab \Rightarrow 10a + b = 3ab \Rightarrow 10a + b \vdots a \Rightarrow b \vdots a$

**Bài 40:** Cho $A = 11^9 + 11^8 + 11^7 + ... + 11 + 1$. Chứng minh rằng $A$ chia hết cho 5

**Hướng dẫn giải**

$A$ tận cùng bằng 0 nên chia hết cho 5.

**Bài 41:** Tìm a,b biết: a - b = 3 và $(\overline{14a3} + \overline{35b2}) \vdots 9$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: Để : $\overline{14a3} + \overline{35b2} \vdots 9 \Rightarrow 1 + 4 + a + 3 + 3 + 5 + b + 2 = a + b + 18 \vdots 9 \Rightarrow a + b \vdots 9$

mà a và b là số có 1 chữ số nên $a + b = 0, a + b = 9, a + b = 18$

kết hợp với a - b = 3 để tìm a và b

**Bài 42:** Tìm số tự nhiên có ba chữ số như nhau, biết rằng số đó có thể viết được dưới dạng tổng các số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ 1.

**Hướng dẫn giải**

Gọi số phải tìm là $\overline{aaa}$, số đó viết được dưới dạng $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Ta có: $\dfrac{n.(n+1)}{2} = 111a$, do đó: $n(n+1) = 2.3.37.a$

Vì $n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37 nên tồn tại một trong hai thừa số $n$, $n+1$ chia hết cho 37. Chú ý rằng $n$ và $n+1$ đều nhỏ hơn 74 (vì $\frac{n.(n+1)}{2}$ là số có ba chữ số) nên ta xét hai trường hợp:

a) $n=37$ thì $\frac{n.(n+1)}{2}=\frac{37.38}{2}=703$, loại.

b) $n+1=37$ thì $\frac{36.37}{2}=666$, thỏa mãn bài toán. Vậy số phải tìm là 666, viết được dưới dạng $1+2+3+\ldots+36$.

**Bài 43:** Cho biết $a+4b$ chia hết cho 13, $(a,\, b\in\mathbb{N})$. Chứng minh rằng $10a+b$ chia hết cho 13.

**Hướng dẫn giải**

Đặt $a+4b=x;\ 10a+b=y$ . Ta biết $x\vdots 13$ , ta cần chứng minh $y\vdots 13$.

*Cách 1:* Xét biểu thức:

$10x-y=10(a+4b)-(10a+b)=10a+40-10a-b=39b$

Như vậy, $10x-y\vdots 13$.

Do $x\vdots 13$ nên $10x\vdots 13$ . Suy ra $y\vdots 13$.

*Cách 2:* Xét biểu thức:

$4y-x=4(10a+b)-(a+4b)=40a+4b-a-4b=39a.$

Như vậy $4y-x\ \vdots 13$.

Do $x\vdots 13$ nên $4y\vdots 13$ . Ta lại có $(4,13)=1$ nên $y\vdots 13$ .

*Cách 3:* Xét biểu thức:

$3x+y=3(a+4b)+(10a+b)=3a+12b+10a+b=13a+13b.$

Như vậy $3x+y\vdots 13$.

Do $x\vdots 13$ nên $3x\vdots 13$. Suy ra $y\vdots 13$.

*Cách 4:* Xét biểu thức:

$x+9y=a+4b+9(10a+b)=a+4b+90a+9b=91a+18b.$

Như vậy $x+9y\vdots 13$

Do $x\vdots 13$ nên $9y\vdots 13$ . Ta lại có $(9,\, 13)=1$ nên $y\vdots 13$.

***Nhận xét:*** Trong các cách giải trên, ta đã đưa ra các biểu thức mà sau khi rút gọn có một số hạng là bội của 13, khi đó số hạng thứ hai (nếu có) cũng là bội của 13.

Hệ số của $a$ ở $x$ là 1, hệ số của $a$ ở $y$ là 10 nên xét biểu thức $10x-y$ nhằm khử $a$ (tức là làm cho hệ số của $a$ bằng 0), xét biểu thức $3x+y$ nhằm tạo ra hệ số của $a$ bằng 13.

Hệ số của $b$ ở $x$ là 4, hệ số của $b$ ở $y$ là 1 nên xét biểu thức $4y-x$ nhằm khử $b$, xét biểu thức $x+9y$ nhằm tạo ra hệ số của $b$ bằng 13.

**Bài 44:** Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết rằng khi chia số đó cho các số $25;28;35$ thì được các số dư lần lượt là $4;7;14$

**Hướng dẫn giải**

Ta gọi $x=\overline{abc}$ ( $0<a\le 9;0\le b;c\le 9;a;b;c\in N$) là số tự nhiên có 3 chữ số cần tìm

Theo giả thiết $x$ khi chia cho $25;28;35$ ta được các số dư lần lượt là $4;7;14$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=25m+4 \\ x=28n+7 \quad (m;n;p\in N) \\ x=35p+14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+21)\,\vdots\,25 \\ (x+21)\,\vdots\,28 \\ (x+21)\,\vdots\,35 \end{cases}$$

Như thế $x+21$ là bội chung $(25;28;35)$ mà $BCNN[25;28;35]=700 \Rightarrow (x+21)\,\vdots\,700$

Do $100\le x\le 999 \Rightarrow 121\le (x+21)\le 1020 \Rightarrow x+21=700 \Rightarrow x=679$

**Bài 45:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 5 thì dư 1, chia cho 7 thì dư 5.

**Hướng dẫn giải**

Gọi $n$ là số chia cho 5 dư 1, chia cho 7 dư 5.

*Cách 1*. Vì $n$ không chia hết cho 35 nên $n$ có dạng $35k+r$ $(k,r\in \mathbb{N}, r<35)$, trong đó $r$ chia 5 dư 1, chia 7 dư 5.

Số nhỏ hơn 35 chia cho 7 dư 5 là 5, 12, 19, 26, 33, trong đó chỉ có 26 chia cho 5 dư 1. Vậy $r=26$ .

Số nhỏ nhất có dạng $35k+26$ là 26.

*Cách 2*. Ta có $n-1\,\vdots\,5 \Rightarrow n-1+10\,\vdots\,5 \Rightarrow n+9\,\vdots\,5$ (1)

Ta có $n-5\,\vdots\,7 \Rightarrow n-5+14\,\vdots\,7 \Rightarrow n+9\,\vdots\,7$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $n+9\,\vdots\,35$.

Số $n$ nhỏ nhất có tính chất trên là $n=26$.

*Cách 3:* $n=5x+1=7y+5 \Rightarrow 5x=5y+2y+4 \Rightarrow 2(y+2)\,\vdots\,5 \Rightarrow y+2\,\vdots\,5$

Giá trị nhỏ nhất của $y$ bằng 3, giá trị nhỏ nhất của $n$ bằng $7.3+5=26$.

**Bài 46:** Tìm số tự nhiên $n$ có bốn chữ số sao cho chia $n$ cho 131 thì dư 112, chia $n$ cho 132 thì dư 98.

**Hướng dẫn giải**

*Cách 1:* Ta có $131x+112=132y+98 \Rightarrow$

$\Rightarrow 131x = 131y + y - 14 \Rightarrow y - 14 \vdots 131 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 131k + 14 \ \left(k \in \mathbb{N}\right)$

$\Rightarrow n = 132.\left(131k + 14\right) + 98 = 132.131k + 1946$

Do $n$ có bốn chữ số nên $k = 0, n = 1946$.

*Cách 2:* Từ $131x = 131y + y - 14$ suy ra

$131\left(x - y\right) = y - 14$. Nếu $x > y$ thì $y - 14 \geq 131 \Rightarrow y \geq 145 \Rightarrow n$ có nhiều hơn bốn chữ số.

Vậy $x = y$, do đó $y = 14, n = 1946$

*Cách 3:* Ta có $n = 131x + 112$ nên

$$132n = 131 + 132x + 14784 \qquad (1)$$

Mặt khác $n = 132y + 98$ nên

$$131n = 131.132y + 12838 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $132n - 131n = 131.132\left(x - y\right) + 1946$

$\Rightarrow n = 131.132\left(x - y\right) + 1946$

Vì $n$ có bốn chữ số nên $n = 1946$

**Bài 47:** Chứng minh rằng nếu $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $\left(p-1\right)\left(p+1\right)$ chia hết cho 24.

**Hướng dẫn giải**

Ta có $\left(p-1\right)p\left(p+1\right)\vdots 3$ mà $\left(p,3\right) = 1$ nên

$\left(p-1\right)\left(p+1\right)\vdots 3$ (1)

$p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ là số lẻ, $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp. Trong hai số chẵn liên tiếp, có một số là bội của 4 nên tích của chúng chia hết cho 8 (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\left(p-1\right)\left(p+1\right)$ chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau 3 và 8.

Vậy $\left(p-1\right)p\left(p+1\right)\vdots 24$

**Bài 48:** Chứng minh nếu $\overline{ab} = 2\overline{cd}$ với a, b, c, d là các chữ số khác 0 thì $\overline{abcd}$ chia hết cho 67.

**Hướng dẫn giải**

Ta có $\overline{ab} = 2\overline{cd}$

và $\overline{abcd} = \overline{ab}.100 + \overline{cd} = 2\overline{cd}.100 + \overline{cd} = \overline{cd}.201 = \overline{cd}.67.3$

Vậy $\overline{abcd}$ chia hết cho 67

**Bài 49:** Chứng minh rằng: A = $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 2 và 5, với n là số tự nhiên.

**Hướng dẫn giải**

Vì n.(n + 1) là tích hai số tự nhiên liên tiếp, trong 2 số liên tiếp luôn luôn có 1 số chẵn nên n.(n+1) là số chẵn, cộng thêm 1 sẽ là số lẻ => n.(n+1) + 1 là số lẻ, không chia hết cho 2.

Để chứng minh n.(n + 1) + 1 không chia hết cho 5 ta thấy hai số n và n + 1 có thể có các chữ số tận cùng sau:

n tận cùng là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; tương ứng số tận cùng của n + 1 như sau:

n+ 1 tận cùng là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

nên tích của n.(n + 1) tận cùng là:

0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0

Hay là n.(n + 1) tận cùng là 0, 2, 6

Nên n.(n+1) + 1 tận cùng là: 1, 3, 7 không chia hết cho 5

**Bài 50:** Chứng minh rằng nếu x,y là các số nguyên sao cho $(7x+3y) \vdots 13$ thì $(5x+4y)$ cũng chia hết cho 13 và ngược lại

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $5x+4y \vdots 13 \Rightarrow 4(5x+4y) \vdots 13 \Rightarrow 20x+16y \vdots 13 \Rightarrow 7x+3y \vdots 13$. Từ đó ta đi ngược lại là ra.

**Bài 51:** Cho a,b là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng : $(a-1)(b-1) \vdots 192$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: Vì a, b là số lẻ nên $(a-1)(b-1) \vdots 4$

Đặt $a = (2k-1)^2, b = (2k+1)^2 \Rightarrow (a-1) = 4k(k-1), (b-1) = 4k(k+1)$

Khi đó : $(a-1)(b-1) = 16k^2(k-1)(k+1)$, Mà $k(k+1)(k+2) \vdots 3$

Và $k(k-1), k(k+1)$ đều chia hết cho 2

Nên $k^2(k-1)(k+1) \vdots 12 \Rightarrow (a-1)(b-1) = 16k^2(k-1)(k+1) \vdots 192$,

Khi a, b là số chính phương lẻ liên tiếp

**Bài 52:** Cho 4 số nguyên phân biệt a, b, c, d. Chứng minh rằng:

$A = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \vdots 12$

**Hướng dẫn giải**

Theo nguyên lý **Dirichlet** trong 3 số nguyên tùy ý luôn tồn tại hai số nguyên tùy ý có cùng số dư khi chia hết cho 3 suy ra $A \vdots 3$

Trường hợp 1: cả 4 số đều là số chẵn nên tồn tại 6 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A \vdots 4$

Trường hợp 2: cả 4 số đều là số lẻ nên tồn tại 6 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A \vdots 4$

Trường hợp 3: 2 số chẵn và hai số lẻ nên tồn tại 4 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A\vdots 4$

Trường hợp 4: 3 số chẵn và một số lẻ , từ 3 số chẵn đó cho ta 3 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A\vdots 4$

Trường hợp 5: 3 số lẻ và một số lẻ, từ 3 số lẻ đó cho ta 3 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A\vdots 4$

Do đó A cũng chia hết cho 4 mà (3, 4) = 1 nên A chia hết cho 12.

**Bài 53:** Tìm các số nguyên dương x và y lớn hơn 1 sao cho x + 3 chia hết cho y và y + 3 chia hết cho x.

**Hướng dẫn giải**

Giải sử 2 ≤ x ≤ y.

a) Xét y = 2 thì x = 2, không thỏa mãn x + 3 chia hết cho y.

b) Xét y ≥ 3. Đặt x + 3 = ky $(k \in N)$ (1) thì ky = x + 3 ≤ y + 3 ≤ y + y = 2y nên k ≤ 2.

Với k = 1, từ (1) có x + 3 = y. Thay vào: $y+3\vdots x$ được $x+6\vdots x$ nên lại có x > 1 nên $x \in \{2;3;6\}$.

| x | 2 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|
| y | 5 | 6 | 9 |

Với k = 2, từ (1) có x + 3 = 2y. Thay vào: $y+3\vdots x$ được $2y+6\vdots x \Rightarrow x+9\vdots x \Rightarrow 9\vdots x$

do x > 1 nên $x \in \{3;9\}$.

Khi x = 3 thì y = 3, thử lại đúng.

Khi x = 9 thì y = 6, loại vì trái với x ≤ y.

Các cặp số (x, y) phải tìm là (2; 5), (5; 2), (3; 6), (6; 3), (6; 9), (9; 6), (3; 3).

**Bài 54:** Cho 10 số tự nhiên bất kì $a_1; a_2; a_3; .....; a_{10}$ .Chứng minh rằng tồn tại một số hoặc tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy chia hết cho 10

**Hướng dẫn giải**

Xét 10 tổng sau : $S_1 = a_1$ ; $S_2 = a_1 + a_2$ ; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ;.....:

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + ..... + a_{10}$

Nếu trong 10 tổng trên tồn tại 1 tổng nào đó chia hết cho 10 thì bài toán được chứng minh

Ta di xét trường hợp : cả 10 tổng $S_1; S_2; ..; S_{10}$ đều không chia hết cho 10

Do vậy số dư trong phép chia $S_1; S_2; S_3; .....; S_{10}$ cho 10 chỉ có thể thuộc tập hợp $A = (1;2;3;4;5;6;7;89)$ gồm 9 phần tử do vậy theo nguyên lý Đi rich lê luôn tồn tại ít nhất 2 tổng $S_i; S_j$ $(i < j; 1 \le i < j \le 10)$ có cùng số dư khi chia cho 10

$\Rightarrow (S_j - S_i)\vdots 10 \Rightarrow (a_{i+1} + a_{i+2} + ..... + a_j)\vdots 10$ ta có điều cần chứng minh.

**Bài 55:** Chứng minh rằng với $n$ là số tự nhiên thì $n(n+1)+2019$ không chia hết cho $2020$ .

**Hướng dẫn giải**

Vì $n$ là số tự nhiên nên $n(n+1)\vdots 2 \Rightarrow n(n+1)$ là số chẵn $\Rightarrow n(n+1)+2019$ là số lẻ

Do đó $n(n+1)+2019$ không chia hết cho $2020$.

**Bài 56:**

a) Cho $A=1999+1999^2+1999^3+\cdots+1999^{1998}$. Chứng minh rằng $A \vdots 2000$.

b) Tìm số tự nhiên *n* lớn nhất có 3 chữ số thỏa mãn điều kiện: *n* chia cho 8 dư 7, chia cho 31 dư 28.

**Hướng dẫn giải**

a) Có: $A=\left(1999+1999^2\right)+\left(1999^3+1999^4\right)+\cdots+\left(1999^{1997}+\cdots+1999^{1998}\right)$

$=1999.(1+1999)+1999^3(1+1999)+\cdots+1999^{1997}(1+1999)$

$=1999.2000+1999^3.2000+\cdots+1999^{1997}.2000$

$=2000.\left(1999+1999^3+\cdots+1999^{1997}\right)$

$\Rightarrow A \vdots 2000$ (đpcm)

b) Ta có: $\Rightarrow \begin{cases} n=8x+7 \\ n=31y+28 \end{cases} (x,y\in\mathbb{N}^*) \Rightarrow \begin{cases} n-7 \vdots 8 \\ n-28 \vdots 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-7+72 \vdots 8 \\ n-28+93 \vdots 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+65 \vdots 8 \\ n+65 \vdots 31 \end{cases}$

$\Rightarrow n+65 \in BCNN(8,31)=\{248;496;744;992\}$

$\Rightarrow n \in \{183;431;679;927\} \Rightarrow n=927$ (vì n lớn nhất có 3 chữ số)

Vậy số cần tìm là: 927.

**Bài 57:** Tìm $x, y$ biết $\overline{124xy}\vdots 45$.

**Hướng dẫn giải**

Đặt $A=\overline{124xy}$

Để $A\vdots 45$ thì $A\vdots 5$ và $A\vdots 9$.

Để $A\vdots 5$ thì $y=0$ hoặc $y=5$.

Với $y=0$, để $A\vdots 9$ thì $(1+2+4+x+0)\vdots 9 \Rightarrow x=2$.

Với $y=5$, để $A\vdots 9$ thì $(1+2+4+x+5)\vdots 9 \Rightarrow x=6$.

Vậy $y=0$, $x=2$ hoặc $y=5$, $x=6$.

**Bài 58:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn $10$, biết rằng số đó chia cho $5;6;7$ có số dư lần lượt là $3;2;1$.

**Hướng dẫn giải**

Gọi số phải tìm là $a$ $(a\in\mathbb{N}, a>10)$.

Theo đề bài, ta có:

$a$ chia cho 5 dư $3 \Rightarrow (a-3) \vdots 5 \Rightarrow (a-3)-5 \vdots 5$ hay $a-8 \vdots 5$

$a$ chia cho 6 dư $2 \Rightarrow a-2 \vdots 6 \Rightarrow (a-2)-6 \vdots 6$ hay $a-8 \vdots 6$.

$a$ chia cho 7 dư $1 \Rightarrow a-1 \vdots 7 \Rightarrow (a-1)-7 \vdots 7$ hay $a-8 \vdots 7$.

Do đó $a-8 \in BC(5,6,7)$.

Để $a$ nhỏ nhất lớn hơn 10 thì $a-8 = BCNN(5,6,7) = 210$

$\Rightarrow a-8 = 210 \Rightarrow a = 218$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là $218$.

**Bài 59:** Cho $S = 5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6+\ldots+5^{2019}$. Chứng tỏ $S$ chia hết cho $21$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$S = 5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6+\ldots+5^{2019} = \left(5+5^2+5^3\right)+\left(5^4+5^5+5^6\right)+\ldots+\left(5^{2017}+5^{2018}+5^{2019}\right)$

$= 5\left(1+5+5^2\right)+5^4\left(1+5+5^2\right)+\ldots+5^{2017}\left(1+5+5^2\right)$

$= \left(1+5+5^2\right)\left(5+5^4+\ldots+5^{2017}\right)$

$= 31\left(5+5^4+\ldots+5^{2017}\right) \vdots 31$.

**Bài 60:** Tìm số có ba chữ số chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 7.

**Hướng dẫn giải**

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc}$ $(a,b,c \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 9, 0 \le b,c \le 9)$

Ta có $\overline{abc} = 100a+10b+c = 98a+7b+2a+3b+c = 98a+7b+(a+b+c)+(a+2b)$

Vì $\begin{cases} \overline{abc} \vdots 7 \\ 98a+7b \vdots 7 \Rightarrow a+2b \vdots 7 \\ a+b+c \vdots 7 \end{cases}$

Mà $a,b \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 9, 0 \le b \le 9 \Rightarrow 1 \le a+2b \le 27$

Suy ra $a+2b \in \{7;14;21\}$

<u>Trường hợp 1 :</u> $a+2b=7$

Ta có $2b$ là số chẵn suy ra $a$ lẻ và $a<7 \Rightarrow a=\{1;3;5\}$ và khi đó tương ứng $b=\{3;2;1\}$

với $\begin{cases} a=1, b=3 \\ a+b+c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow c=3$ (thỏa mãn) $\Rightarrow \overline{abc}=133$

với $\begin{cases} a=3, b=2 \\ a+b+c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow c=2$ hoặc $c=9$ (thỏa mãn) $\Rightarrow \overline{abc}=322$ hoặc $\overline{abc}=329$

với $\begin{cases} a=5, b=1 \\ a+b+c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow c=1$ hoặc $c=8$ (thỏa mãn) $\Rightarrow \overline{abc}=511$ hoặc $\overline{abc}=518$

<u>Trường hợp 2 :</u> $a+2b=14$

Ta có $2b$ là số chẵn suy ra $a$ chẵn và $a<8 \Rightarrow a=\{2;4;6;8\}$ và khi đó tương ứng $b=\{6;5;4;3\}$

với $\begin{cases} a=2, b=6 \\ a+b+c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow c=6$ (thỏa mãn) $\Rightarrow \overline{abc}=266$

với $\begin{cases} a=4, b=5 \\ a+b+c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow c=5$ (thỏa mãn) $\Rightarrow \overline{abc}=455$

với $\begin{cases} a=6, b=4 \\ a+b+c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow c=4$ (thỏa mãn) $\Rightarrow \overline{abc}=644$

với $\begin{cases} a=8, b=3 \\ a+b+c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow c=3$ (thỏa mãn) $\Rightarrow \overline{abc}=833$

<u>Trường hợp 3 :</u> $a+2b=21$

Ta có $2b$ là số chẵn suy ra $a$ lẻ và $a \le 9 \Rightarrow a=\{3;5;7;9\}$ và khi đó tương ứng $b=\{9;8;7;6\}$

với $\begin{cases} a=3, b=9 \\ a+b+c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow c=2$ hoặc $c=9$ (thỏa mãn) $\Rightarrow \overline{abc}=392$ hoặc $\overline{abc}=399$

với $\begin{cases} a=5, b=8 \\ a+b+c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow c=1$ hoặc $c=8$ (thỏa mãn) $\Rightarrow \overline{abc}=581$ hoặc $\overline{abc}=588$

với $\begin{cases} a=7, b=7 \\ a+b+c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow c=0$ hoặc $c=7$ (thỏa mãn) $\Rightarrow \overline{abc}=770$ hoặc $\overline{abc}=777$

với $\begin{cases} a=9, b=6 \\ a+b+c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow c=6$ (thỏa mãn) $\Rightarrow \overline{abc}=966$

Vậy các số tự nhiên cần tìm là:
$133; 266; 322; 329; 392; 399; 455; 511; 518; 581; 588; 644; 770; 777; 833; 966$

**Bài 61:** Tìm các chữ số x; y để A = $A=\overline{x183y}$ chia cho 2; 5 và 9 đều dư 1.

**Hướng dẫn giải**

Do $A=\overline{x183y}$ chia cho 2 và 5 đều dư 1 nên $y=1$ .

Ta có $A=\overline{x183y}$

Vì $A=\overline{x183y}$ chia cho 9 dư 1 $\Rightarrow \overline{x183y}-1 \vdots 9$

$\Rightarrow \overline{x1830}$ 9

$\Leftrightarrow x+1+8+3+0 \vdots 9$

$\Leftrightarrow x+3 \vdots 9$ , mà x là chữ số nên $x=6$

Vậy $x=6;\ y=1$

**Bài 62:** Cho a, b $\in N^*$ , thỏa mãn số $M=(9a+11b)(5b+11a)$ chia hết cho 19, Hãy giải thích vì sao M chia hết cho 361

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $M=(9a+11b)(5b+11a)\vdots 19$ mà 19 là số nguyên tố nên $9a+11b\vdots 19$ hoặc $5b+11a\vdots 19$

Xét $M=3(9a+11b)+(5b+11a)=27a+33b+5b+11a=38a+38b=19(2a+2b)\vdots 19$

+ Nếu $9a+11b\vdots 19\Rightarrow 3(9a+11b)\vdots 19$ mà $N\vdots 19 \Rightarrow 5b+11a\vdots 19$ (1)

+ Nếu $5b+11a\vdots 19$ , mà $N\vdots 19\Rightarrow 3(9a+11b)\vdots 19\Rightarrow 9a+11b\vdots 19$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $(9a+11b)\vdots 19$ và $(5b+11a)\vdots 19 \Rightarrow M\vdots 19^2=361$

**Bài 63:** Cho hai số tự nhiên a và b thỏa mãn : $m=(16a+17b)(17a+16b)$ là 1 bội số của 11. Chứng minh rằng : Số m cũng là một bội số của 121

**Hướng dẫn giải**

Vì 11 là số nguyên tố: mà $m=(16a+17b)(17a+16b)\vdots 11\Rightarrow$ $16a+17b\vdots 11$ hoặc $17a+16b\vdots 11$

Không mất tính tổng quát: giả sử: $16a+17b\vdots 11$ , ta cần chứng minh $(17a+16b)\vdots 11$

Thật vậy: $16a+17b\vdots 11\Rightarrow 2(16a+17b)\vdots 11\Rightarrow 33(a+b)+b-a\vdots 11\Rightarrow b-a\vdots 11\Rightarrow a-b\vdots 11$

Lại có: $2(17a+16b)=33(a+b)-a+b\vdots 11\Rightarrow(17a+16b)\vdots 11$

Vậy $(16a+17b)(17a+16b)\vdots 11.11=121$

**Bài 64:** Chứng minh rằng : $A=75.(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+5)+25$ chia hết cho $4^{2019}$.

**Hướng dẫn giải**

Đặt $M=4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+5=4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4+1$

$4M=4.(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4+1)=4^{2019}+4^{2018}+...+4^3+4^2+4$

$4M-M=(4^{2019}+4^{2018}+...+4^3+4^2+4)-(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4+1)$

$3M=4^{2019}-1\Rightarrow M=(4^{2019}-1):3$

$A=75.\ (4^{2019}-1):3\ +25=25.(4^{2019}-1)+25$

$=25.\ 4^{2019}-25+25=25.4^{2019}$

chia hết cho $4^{2019}$ .

**Bài 65:** Cho $N=\overline{155*710*4*16}$ là số tự nhiên có 12 chữ số. Chứng tỏ rằng nếu thay các dấu * bởi các chữ số khác nhau trong ba chữ số 1; 2; 3 một cách tùy ý thì $N$ luôn chia hết cho 396.

**Hướng dẫn giải**

Ta có 396 = 4.9.11

+ $N$ có hai chữ số tận cùng là 16 chia hết cho 4 suy ra $N$ chia hết cho 4

+ Tổng các chữ số của $N$ bằng

$1+5+5+*+7+1+0+*+4+*+1+6=30+*+*+*=30+6=36$ chia hết cho 9 suy ra $N$ chia hết cho 9.

+ Tổng các chữ số hàng chẵn của N – Tổng các chữ số hàng lẽ của N = 18 – 18 = 0 chia hết cho 11 suy ra $N$ chia hết cho 11.

Vậy $N$ chia hết cho 4, 9, 11 suy ra $N$ chia hết cho 396.

**Bài 66:** Chứng minh rằng từ 52 số nguyên bất kì luôn tồn tại 2 số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

**Hướng dẫn giải**

Chia 52 số nguyên tùy ý cho 100,ta có thể có các số dư từ 0,1,2,3,…,99.Ta phân các số dư thành các nhóm sau: $\{0\};\{1,99\};...;\{49,51\},\{50\}$. Ta có tất cả 51 nhóm và khi chia 52 số cho 100 ta có 52 số dư. Theo nguyên lí Dirichlet sẽ có 2 số dư cùng thuộc một nhóm. Ta có 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Hai số dư giống nhau, suy ra hiệu hai số có 2 số dư tương ứng đó sẽ chia hết cho 100.

Trường hợp 2: Hai số dư khác nhau,suy ra tổng của hai số dư có hai số dư tương ứng đó sẽ chia hết cho 100

Ta suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 67.** Chứng minh rằng: $10^{28}+8\,\vdots\,72$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có 72=8.9

$10^{28}+8=100.....008$ (27 chữ số 0)

+) $10^{28}+8=100.....008$ có ba chữ số tận cùng là 008 chia hết cho 8 nên $10^{28}+8\,\vdots\,8$ (1)

+) Tổng các chữ số của $100...008$ (27 chữ số 0) là: $1+27.0+8=9\,\vdots\,9\ \Rightarrow 10^{28}+8\,\vdots\,9$ (2)

Mà ƯCLN$(8;9)=1$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $10^{28}+8\,\vdots\,72$ (đpcm).

## Dạng 2: Chữ số tận cùng của một số

### I/ PHƯƠNG PHÁP.

*** Tính chất 1:**

*a) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.*

*b) Các số có chữ số tận cùng là 4, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.*

*c) Các số có chữ số tận cùng là 3, 7, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 1.*

*d) Các số có chữ số tận cùng là 2, 4, 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 6.*

**Chú ý: Muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a.**

- Nếu chữ số tận cùng của **a** là 0, 1, 5, 6 thì x cũng có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6.

- Nếu chữ số tận cùng của **a** là 3, 7, 9:

Phân tích: $a^m = a^{4n+r} = a^{4n}.a^r$ với r = 0, 1, 2, 3

Từ **tính chất 1c** => chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của $a^r$.

- Nếu chữ số tận cùng của **a** là 2, 4, 8, cũng như trường hợp trên

Từ **tính chất 1d** => chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của $6.a^r$.

*** Tính chất 2:**

*Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 1 (n thuộc N) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.*

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

*** Tính chất 3:**

*a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 7 ; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 3.*

*b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 8 ; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 2.*

*c) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.*

*** Phương pháp dùng cấu tạo số để tìm chữ số tận cùng của số A =** $n^k$ với $n, k \in N$ .

- Nếu $A = 10a + b = \overline{ab} \Rightarrow$ b là chữ số cuối cùng của A.

Ta viết: $A = n^k = (10q + r)^k = 10^t + r^k$ với $r \in N; 0 \le r \le 9$

Chữ số cuối cùng của A chính là chữ số cuối cùng của số $r^k$

- Nếu $A = 100a + \overline{bc} = \overline{abc}$ thì $\overline{bc}$ là hai chữ số cuối cùng của A.

- Nếu $A = 1000a + \overline{bcd} = \overline{abcd}$ thì $\overline{bcd}$ là ba chữ số cuối cùng của A.

- Nếu A=$10^m.a_m$ + $\overline{a_{m-1...}a_0}$ = $\overline{a_m...a_1a_0}$ thì $\overline{a_{m-1...}a_0}$ là m chữ số cuối cùng của A.

**Bài 1:** Tìm chữ số tận cùng của các số:

a) $7^{99}$

b) $14^{1414}$

c) $4^{567}$

**Hướng dẫn**

a) Xét 99 = 4k + 3 (với k = 24) => $7^{99} = 7^{4k+3} = 7^{4k}.7^3$

Theo **tính chất 1c** => $7^{4k}$ có chữ số tận cùng là 1

=> $7^{99}$ có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của $7^3$ .

Mà $7^3$ = 343 có chữ số tận cùng là 3

=> $7^{99}$ có chữ số tận cùng là 3.

b) Dễ thấy 1414 = 4k + 2 ( với k = 353) => $14^{1414} = 14^{4k+2} = 14^{4k} . 14^2$

**Theo tính chất 1d** => $14^{4k}$ có chữ số tận cùng là 6.

=> $14^{1414}$ có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của $6.14^2$

Mà $6.14^2$ = 1176 có chữ số tận cùng là 6

=> $14^{1414}$ có chữ số tận cùng là 6.

c) Ta có 567 = 4k + 3 (với k = 141) => $4^{567} = 4^{4k+3} = 4^{4k}.4^3$

**Theo tính chất 1d** => $4^{4k}$ có chữ số tận cùng là 6.

=> $4^{567}$ có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của $6.4^3$

Mà $6.4^3$ = 384 có chữ số tận cùng là 4

=> $4^{567}$ có chữ số tận cùng là 4.

**Bài 2:** Tìm chữ số tận cùng của tổng $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}$.

**Hướng dẫn**

**Nhận thấy**: lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(k-2)+1}$, k thuộc {2, 3, …, 2004}).

**Theo tính chất 2** => Mọi lũy thừa trong S đều có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của cơ số tương ứng:

=> Chữ số tận cùng của tổng S là chữ số tận cùng của tổng:

(2 + 3 + … + 9) + 199.(0 + 1 + 2 + … + 9) + 1 + 2 + 3 + 4

= 200(1 + 2 + … + 9) + 9 = 9009.

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 9.

**Bài 3:** Tìm chữ số tận cùng của tổng $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2004^{8011}$.

**Hướng dẫn**

*Nhận thấy* Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+3}$, n thuộc {2, 3, …, 2004}).

Theo tính chất 3 thì $2^3$ có chữ số tận cùng là 8 ; $3^7$ có chữ số tận cùng là 7 ; $4^{11}$ có chữ số tận cùng là 4 ; …

Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng:

(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 1 + 8 + 7 + 4

= 200(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 8 + 7 + 4 = 9019.

Vậy chữ số tận cùng của tổng T là 9.

**Bài 4:** Tìm chữ số tận cùng của $187^{324}$

**Hướng dẫn**

Ta thấy các số có tận cùng bằng 7 nâng lên luỹ thừa bậc 4 thì được số có tận cùng bằng 1.Các số có tận cùng bằng 1 nâng lên luỹ thừa nào (khác 0 ) cũng tận cùng bằng 1.

Do đó $187^{324} = (187^4)^{81} = (\dots.1)^{81} = (\dots1)$

Vậy chữ số tận cùng của $187^{324}$ là 1

**Bài 5.** Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots. + 2^{20}$. Tìm chữ số tận cùng của A.

**Hướng dẫn**

Cách 1 : Chứng minh rằng $A \vdots 5$ bằng cách nhóm A thành từng nhóm 4 số.

Ta lại có A $\vdots$ 2 nên A $\vdots$10 vậy A tận cùng bằng 0.

Cách 2 : Hãy chứng minh rằng A = $2^{21}$-2

$$A = 2^{21} - 2 = \left(2^4\right)^5.2 - 2 = 16^5.2 - 2 = \overline{\dots6}.2 - 2\text{, tận cùng bằng 0.}$$

**Bài 6:** Tìm chữ số cuối cùng của số: A = $9^{9^9}$

**Hướng dẫn**

Xem số M = $9^k$; k $\in$ N

- Nếu k chẵn $\Leftrightarrow k = 2m$ ta có:

M =$9^{2m} = 81^m = (80+1)^m = (10q +1)^m = 10t + 1$ ( với m, q, t $\in$N)

Vậy: M có chữ số cuối cùng là 1 nếu k chẵn.

- Nếu k lẽ $\Leftrightarrow$ k = 2m + 1 ta có:

M = $9^{2m+1} = 9^{2m}.9 = (10t + 1).9 = 10q + 9$ ( với m, t, q $\in$N)

Vậy: M có chữ số cuối cùng là 9 nếu k lẻ, ta có $9^9$ là một số lẻ.

Do đó: A = $9^{9^9}$ có chữ số cuối cùng là 9.

**Bài 7:** Tìm chữ số cuối cùng của số: B = $2^{3^4}$

**Hướng dẫn**

B = $2^{3^4} = 2^{81} = (2^5)^{16}.2 = 32^{16}.2 = (30+2)^{16}.2 = 10q + 2^{17}$

$= 10q + (2^5)^3.2^2 = 10q + (10q + 2)^3.\ 2^2$

$= 10t + 2^5 = 10t + 2$

Vậy B có chữ số cuối cùng là 2.

**Bài 8:** Tìm chữ số cuối cùng của số A = $9^{9^9}$

**Hướng dẫn**

Ta có: $9^{2m}$ tận cùng là 1

$9^{2m+1}$ tận cùng là 9

Suy ra: $9^9$ tận cùng là 9, (9 là số lẻ.)

Vậy A= $9^{9^9}$ tận cùng là 9.

**Bài 9:** Tìm chữ số tận cùng của: C = $6^{2002}$, D = $2^{2001}$.

**Hướng dẫn**

Ta có: $6^1$ tận cùng là 6

$6^2$ tận cùng là 6

$6^3$ tận cùng là 6

Vậy $6^n$ tận cùng là 6 suy ra $6^{2002}$ tận cùng là 6

Ta có: $2^4 = 16$ tận cùng là 6

Suy ra $2^{2002} = (2^4)^{500}.2^2 = (\overline{a6}).4 = \overline{k4}$ với a, k $\in$ N

$\Rightarrow 2^{2002}$ tận cùng là 4

**Bài 10:** Tìm chữ số cuối cùng của số: M = $7^{1999}$, G = $18^{177}$

**Hướng dẫn**

*Ta có $7^4 = 2401$ tận cùng là 1

M = $7^{1999} = (7^4) = (\overline{n1}).343 = \overline{c3} \Rightarrow$ tận cùng là 3

Vậy M = $7^{1999}$ tận cùng là 3

*Ta có $18^4 = \overline{n6}$ tận cùng là 6

Suy ra: G = $18^{177} = (18^4)^{44}.18^1 = \overline{t6}.18 = \overline{k8}$

Vậy G = $18^{177}$ tận cùng là 8.

**Bài 11:** Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a/ $7^{9^9}$

b/ $14^{14^{14}}$

c/ $3^{5^{6^7}}$

**Hướng dẫn**

a/ Có: $9^9 = (8+1)^9 = 4k + 1$

=> $7^{9^9} = 7^{4k+1} = 7.7^{4k} = 7.\ 49^{2k}$ có chữ số tận cùng là 7.1 = 7

b/ Ta có $14^{14} = 196^7 = (49.4)^7 = 4k$

=> $14^{14^{14}} = 2^{4k}.7^{4k} = 16^k.2401^k$ nên tận cùng của nó là 6

c/ Có $5^{6^7} = (4+1)^{6^7} = 4k+1$

=> $3^{5^{6^7}} = 3^{4k+1} = 3.3^{4k} = 3.81^k$ có tận cùng là 3.1 = 3.

**Bài 12:** Tìm chữ số tận cùng của tổng: T = $2^3 + 3^7 + 4^{11} + .......+ 2004^{8011}$

**Hướng dẫn**

Nhận xét rằng các số mũ của các số hạng trong tổng trên đều có dạng $4(n - 2) + 3$ với $n \geq 2$

Vậy nên ta đi tìm quy luật của chữ số tận cùng của số $a^{4k+3}$ với a = {0,……9}

Ta có : các số có tận cùng là : 0; 1; 5; 6. thì $a^k$ cũng có tận cùng là 0; 1; 5; 6

xét $2^{4k+3} = 8.2^{4k} = 8.16^k$ có tận cùng là 8

$3^{4k+3} = 27.81^k$ có tận cùng là 7

$4^{4k+3} = 64.2^{8k} = 64.16^{2k}$ có tận cùng là 4

$7^{4k+3} = 343.2401^k$ có tận cùng là 3

$8^{4k+3} = 512.16^{2k}$ có tận cùng là 2.

Vậy chữ số tận cùng của T cũng là chữ số tận cùng của

$T' = (8+7+4+5+6+3+2+9)+199(1+8+7+4+5+6+3+2+9) +1+8+7+4 = 9019$

Vậy chữ số tận cùng của T là 9.

**Bài 13:** Cho $M = 2^1 + 3^5 + 4^9 + ... + 2018^{8065} + 2019^{8069}$. Tìm chữ số tận cùng của $M$

**Hướng dẫn giải**

Tất cả số hạng tổng trên đều có dạng $a^{4n+1} = a.a^{4n}$

Nếu a tận cùng là 0, 1, 5, 6 thì $a^{4n+1}$ tận cùng giống tận cùng của a

Nếu a tận cùng là 7, 9 suy ra $a^2$ có tận cùng là 1 suy ra $a^{4n}$ tận cùng là 1 suy ra $a^{4n}.a$ có tận cùng giống a .

Nếu a tận cùng là 3 suy ra $a^2$ tận cùng là 9 suy ra 1 suy ra $a^{4n}$ tận cùng là 1suy ra $a^{4n}.a$ có tận cùng giống a

Nếu a tận cùng là 2 suy ra $a^{4n}$ tận cùng là 6 suy ra $a^{4n}.a$ tận cùng giống 6.2 => tận cùng là 2 => giống a

Chứng minh tương tự ta có các số tận cùng là 4, 8 thì $a^{4n}.a$ có tận cùng giống a

Vậy $a^{4n+1}$ có chữ số tận cùng giống a với mọi a

⇨ Chữ số tận cùng của M giống chữ số tận cùng của N với N là tổng

$$N = 2+3+4+...+2019 = \frac{2019.2020}{2} - 1 = 2019.1010 - 1$$

Do 2019.1010 có tận cùng là 0 => N tận cùng là 9 => M tận cùng là 9.

**III/ BÀI TẬP THAM KHẢO THÊM.**

**Bài tập 13:** Tìm chữ số tận cùng của X, Y:

$X = 2^2 + 3^6 + 4^{10} + … + 2004^{8010}$

$Y = 2^8 + 3^{12} + 4^{16} + … + 2004^{8016}$

**Bài tập 14:** Chứng minh rằng chữ số tận cùng của hai tổng sau giống nhau:

$U = 2^1 + 3^5 + 4^9 + … + 2005^{8013}$

$V = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + … + 2005^{8015}$

**Bài tập 15:** Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn:

$19^x + 5^y + 1980z = 1975^{430} + 2004.$

## B/ TÌM HAI CHỮ SỐ TẬN CÙNG.

*Nếu $x \in N$ và $x = 100k + y$, trong đó $k ; y \in N$ thì hai chữ số tận cùng của x cũng chính là hai chữ số tận cùng của y.*

⇨ *Phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau:*

***Trường hợp 1:*** *Nếu a chẵn thì $x = a^m \vdots 2^m$. Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} \vdots 25$.*

*Viết $m = p^n + q$ ($p ; q \in N$), trong đó q là số nhỏ nhất để $a^q \vdots 4$ ta có:*

*$x = a^m = a^q(a^{pn} - 1) + a^q$.*

*Vì $a^{n-1} \vdots 25 \Rightarrow a^{pn} - 1 \vdots 25$. Mặt khác, do $(4, 25) = 1$ nên $a^q(a^{pn} - 1) \vdots 100$.*

*Vậy hai chữ số tận cùng của $a^m$ cũng chính là hai chữ số tận cùng của $a^q$.*

*Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của $a^q$.*

***Trường hợp 2:*** *Nếu a lẻ , gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} \vdots 100$.*

*Viết $m = u^n + v$ ($u ; v \in N$, $0 \le v < n$) ta có:*

*$x = a^m = a^v(a^{un} - 1) + a^v$.*

*Vì $a^n - 1 \vdots 100 \Rightarrow a^{un} - 1 \vdots 100$.*

*Vậy hai chữ số tận cùng của $a^m$ cũng chính là hai chữ số tận cùng của $a^v$.*

*Tìm hai chữ số tận cùng của $a^v$.*

***Trong hai trường hợp để giải được bài toán*** *chúng ta phải tìm được số tự nhiên n. Nếu n càng nhỏ thì q và v càng nhỏ nên sẽ dễ dàng tìm hai chữ số tận cùng của $a^q$ và $a^v$.*

**MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP CỤ THỂ VỀ 2 CHỮ SỐ TẬN CÙNG**

*- Các số có tận cùng bằng 01 ,25 ,76 nâng lên luỹ thừa nào (khác 0)cũng tận cùng bằng 01 ,25 ,76*

*- Các số $3^{20}$ ( hoặc $81^5$) ,$7^4$ ,$51^2$ ,$99^2$ có tận cùng bằng 01*

*- Các số $2^{20}$ , $6^5$ ,$18^4$ ,$24^2$ ,$68^4$ ,$74^2$ có tận cùng bằng 76*

*- Số $26^n$ ($n > 1$) có tận cùng bằng 76*

**Bài tập 16**: Tìm hai chữ số tận cùng của $7^{1991}$

**Hướng dẫn**

Ta thấy : $7^4 = 2401$ , số có tận cùng bằng 01 nâng lên luỹ thừa nào cũng tận cùng bằng 01.

Do đó :

$7^{1991} = 7^{1988}.7^3 = (7^4)^{497}.343 = (\ldots01)^{497}.343 = (\ldots.01).343 = \ldots.43$

Vậy $7^{1991}$ có hai chữ số tân cùng bằng 43

**Bài tập 17:** Tìm hai chữ số tận cùng của $2^{100}$

**Hướng dẫn**

Chú ý rằng : $2^{10} = 1024$ ,bình phương của số có tận cùng bằng 24 thì tận cùng bằng 76,số có tận cùng bằng 76 nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 76.

Do đó $(2)^{100} = (2^{10})^{10} = (1024)^{10} = (1024^2)^5 = (\ldots.76)^5 = \ldots.76$

Vậy hai chữ số tận cùng của $2^{100}$ là 76

**Bài tập 18.** Tìm hai chữ số tận cùng của:

a) $51^{51}$;

b) $99^{99^{99}}$;

c) $6^{666}$;

d) $14^{101}.16^{101}$.

**Hướng dẫn**

a) $15^{51}$= $\left(51^2\right)^{25}.51=\left(\overline{...01}\right)^{25}.51=\left(\overline{...01}\right).51=\overline{...51}$.

b) $99^{99^{99}}=99^{2k+1}=\left(99^2\right)^k.99=\left(\overline{...01}\right)^k.99=\left(\overline{...01}\right).99=\overline{...99}$.

c) $6^{666}=\left(6^5\right)^{133}.6=\left(...76\right)^{133}.6=\left(\overline{...76}\right).6=...56$.

d) $14^{101}.16^{101}=\left(14.16\right)^{101}=224^{101}=\left(224^2\right)^{50}.224=\left(\overline{...76}\right)^{50}.224=\left(\overline{...76}\right).224=\overline{...24}$

**Bài toán 19:** Tìm hai chữ số tận cùng của các số:

a) $a^{2003}$

b) $7^{99}$

**Hướng dẫn**

a) Do $2^{2003}$ là số chẵn, theo trường hợp 1, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $2^n - 1 \vdots 25$.

Ta có $2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} + 1 = 1025 \vdots 25 \Rightarrow 2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1) \vdots 25$

$\Rightarrow 2^3(2^{20} - 1) \vdots 100$.

Mặt khác: $2^{2003} = 2^3(2^{2000} - 1) + 2^3 = 2^3((2^{20})^{100} - 1) + 2^3 = 100k + 8$ ($k \in N$).

Vậy hai chữ số tận cùng của $2^{2003}$ là 08.

b) Do $7^{99}$ là số lẻ, theo trường hợp 2, ta tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho $7^n - 1 \vdots 100$.

Ta có $7^4 = 2401 \Rightarrow 7^4 - 1 \vdots 100$.

Mặt khác: $99 - 1 \vdots 4 \Rightarrow 99 = 4k + 1$ ($k \in N$)

Vậy $7^{99} = 7^{4k+1} = 7(7^{4k} - 1) + 7 = 100q + 7$ ($q \in N$) tận cùng bởi hai chữ số 07.

**Bài tập 20:** Tìm hai chữ số tận cùng của số: $C=2^{999}$, $D=3^{999}$

**Hướng dẫn**

*Ta có: $2^{20}$ có 2 chữ số tận cùng là 76.

Suy ra: $C=2^{999} = (2^{20})^{49}.2^{19} = (\overline{y76}).\overline{n88}$ (với y, n, q $\in$ N)

Vậy $C=2^{999}$ có 2 chữ số tận cùng là 88

*Ta có: $3D = 3^{1000} = (3^{20})^{50} = (\overline{k01})^{50} = \overline{z01}$

Nên 3D tận cùng là 01, mà $3.3^{999} \vdots 3 \Rightarrow$ chữ số hàng trăm của $3^{1000}$ là 2

$\Rightarrow 3^{1000}$ tận cùng là 201

Vậy $3^{999}$ có hai chữ số tận cùng là 67

**Bài tập 21**: Tìm hai chữ số tận cùng của số

a) $M = 7^{8966}$

b) $N = 24^{7561}$

c) $Q = 81^{6251}$

**Hướng dẫn**

a)Ta có $7^4$ có hai chữ số tận cùng là 01

Suy ra $M = 7^{8966} = (7^4)^{2241}.7^2 = (\overline{a01})^{2241}.49 = \overline{c01}.49 = \overline{n49}$ (với a,c,n $\in$N)

Suy ra $M = 7^{8966}$ có hai chữ số tận cùng là 49

b)Ta có $24^2$ tận cùng là 76

Suy ra $N = 24^{7561} = (24^2)^{3765}.24 = (\overline{m76})^{3765}.24 = \overline{k76}.24 = \overline{n24}$ (với m, k, n $\in$ N)

Vậy $N = 24^{7561}$ có hai chữ số tận cùng là 24

c) Ta có $81^5$ có hai chữ số tận cùng là 01

Nên $Q = 81^{6251} = (81^5)^{1250}.81 = (\overline{k01})^{1250}.81 = \overline{m81}$ (Với k, t, m $\in$ N)

Vậy $Q = 81^{6251}$ có hai chữ số tận cùng là 81.

**Bài tập 22**: Tìm hai chữ số tận cùng của số.

a) $Z = 26^{854}$

b) $C = 68^{194}$

**Hướng dẫn**

a)Ta có $26^4$ có hai chữ số tận cùng là 76

$\Rightarrow Z = 26^{854} = (26^4)^{213}.26^2 = (\overline{n76})^{213}.\ 676 = \overline{k76}.676 = \overline{c76}$ (Với n, k, t $\in$ N)

Vậy $Z = 26^{854}$ có hai chữ số tận cùng là 76

b) Ta có $68^4$ có hai chữ số tận cùng là 76

Suy ra $C = 68^{194} = (68^4)^{48}.68^2 = (\overline{n76})^{48}.4624 = \overline{k76}.4624 = \overline{t24}$ (với n, k, t $\in$ N)

Vậy $C=68^{194}$ có hai chữ số tận cùng là 24.

**Bài tập 23:** Tìm hai chữ số cuối cùng của số: $C = 2^{999}$

**Hướng dẫn**

Ta có: $2^{10} + 1 = 1024 + 1 = 1025 : 25$ suy ra $2^{10} - 1 \,\vdots\, 25$

Ta lại có $2^{1000} - 1 = (2^{20})^{50} - 1 \,\vdots\, 2^{20} - 1$ suy ra $2^{1000} - 1 \,\vdots\, 25$

Do đó $2^{1000}$ chữ số tận cùng là 26 ; 51 ; 76 nhưng $2^{1000} \,\vdots\, 4$

Suy ra $2^{1000}$ tận cùng là 76 $\Rightarrow$ $2^{999}$ tận cùng là 38 hoặc 88 vì $2^{999} \,\vdots\, 4$

$\Rightarrow$ $2^{999}$ tận cùng là 88

Vậy $C=2^{999}$ có hai chữ số tận cùng là 88.

**Bài tập 24**: Tìm hai chữ số tận cùng của số: $D = 3^{999}$

**Hướng dẫn**

Ta có: $9^{2m}$ tận cùng là 1 ; $9^{2m+1}$ tận cùng là 9

Ta hãy tìm số dư của phép chia $9^5 + 1$ cho 100

Ta có: $9^5 + 1 = 10(9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1)$

Số: $9^4 + 9^2 + 1$ tận cùng là 3

$9^3 + 9$ tận cùng là 8

Suy ra $(9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1)$ tận cùng là 5

$\Rightarrow 9^4 - 9^3 - 9^2 - 9 + 1 = 10q + 5$

$\Rightarrow 9^5 + 1 = 100q + 50$

$\Rightarrow 9^{10} - 1 = (9^5 + 1)(9^5 - 1) = 100^t$

Ta lại có: $3^{1000} - 1 = 9^{500} - 1 = (9^{10})^{50} - 1$ suy ra $3^{1000} - 1 \vdots 100$

$\Rightarrow 3^{1000}$ tận cùng là 01 . Mặt khác $3^{1000} \vdots 3$

Suy ra chữ số hàng trăm của $3^{1000}$ phải là 2 (để 201 chia hết cho 3)

$\Rightarrow 3^{1000}$ chữ số tận cùng là 201

Do đó $3^{999}$ tận cùng là 67.

**Bài tập 25**: Tìm hai chữ số tận cùng của số A=$9^{9^9}$

**Hướng dẫn**

A = $9^{9^9} = (10 - 1)^{9^9}$ có dạng: $(10 - 1)^n$ với $n=9^9$ ta lại có

A = $C_n^0 . 10^n - C_n^1 . 10^{n-1} + ......+ C_n^{n-1} . 10 - C_n^n$

Suy ra A có hai chữ số cuối cùng

Với a = $C_n^{n-1}.10 - C_n^n = 10n - 1$ Số $n = 9^9$ tận cùng là 9

Suy ra 10n tận cùng là 90 $\Rightarrow$ a =10n -1 tận cùng là 89

Vậy số A = $9^{9^9}$ có hai chữ số cuối cùng là 89

**Bài tập 26:** Tìm hai chữ số tận cùng của các tổng:

a) $S_1 = 1^{2002} + 2^{2002} + 3^{2002} + ... + 2004^{2002}$

b) $S_2 = 1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + ... + 2004^{2003}$

**Hướng dẫn**

a) Dễ thấy, nếu a chẵn thì $a^2$ chia hết cho 4 ; nếu a lẻ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 4 ; nếu a chia hết cho 5 thì $a^2$ chia hết cho 25.

Mặt khác, từ tính chất 4 ta suy ra với mọi $a \in N$ và $(a, 5) = 1$ ta có $a^{100} - 1 \vdots 25$.

Vậy với mọi $a \in N$ ta có $a^2(a^{100} - 1) \vdots 100$.

Do đó $S_1 = 1^{2002} + 2^2(2^{2000} - 1) + ... + 2004^2(2004^{2000} - 1) + 2^2 + 3^2 + ... + 2004^2$.

=> Hai chữ số tận cùng của tổng $S_1$ cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2004^2$.

Ta có: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$

=>$1^2 + 2^2 + ... + 2004^2 = 2005 \times 4009 \times 334 = 2684707030$, tận cùng là 30.

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng $S_1$ là 30.

b) Hoàn toàn tương tự như câu a,

$S_2 = 1^{2003} + 2^3(2^{2000} - 1) + ... + 2004^3(2004^{2000} - 1) + 2^3 + 3^3 + 2004^3$.

=> Hai chữ số tận cùng của tổng $S_2$ cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 2004^3$.

Áp dụng công thức: $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

=> $1^3 + 2^3 + ... + 2004^3 = (2005 \times 1002)^2 = 4036121180100$, tận cùng là 00.

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng $S_2$ là 00.

**C/ TÌM BA CHỮ SỐ TẬN CÙNG TRỞ LÊN.**

**I/ PHƯƠNG PHÁP.**

**Việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 1000.**

Nếu $x = 1000k + y$, trong đó $k ; y \in N$ thì ba chữ số tận cùng của x cũng chính là ba chữ số tận cùng của y ($y \le x$).

Do $1000 = 8 . 125$ mà $(8, 125) = 1$ nên ta đề xuất phương pháp tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau:

***Trường hợp 1:*** Nếu a chẵn thì $x = a^m$ chia hết cho $2^m$. Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1$ chia hết cho 125.

Viết $m = p^n + q$ ($p ; q \in N$), trong đó q là số nhỏ nhất để $a^q$ chia hết cho 8 ta có:

$x = a^m = a^q(a^{pn} - 1) + a^q$.

Vì $a^n - 1$ chia hết cho 125 => $a^{pn} - 1$ chia hết cho 125.

Mặt khác, do $(8, 125) = 1$ nên $a^q(a^{pn} - 1)$ chia hết cho 1000.

Vậy ba chữ số tận cùng của $a^m$ cũng chính là ba chữ số tận cùng của $a^q$.

⇨ Tìm ba chữ số tận cùng của $a^q$.

***Trường hợp 2:*** Nếu a lẻ , gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1$ chia hết cho 1000.

Viết $m = u^n + v$ ($u ; v \in N$, $0 \le v < n$) ta có:

$x = a^m = a^v(a^{un} - 1) + a^v$.

Vì $a^n - 1$ chia hết cho 1000 => $a^{un} - 1$ chia hết cho 1000.

Vậy ba chữ số tận cùng của $a^m$ cũng chính là ba chữ số tận cùng của $a^v$.

⇨ Tìm ba chữ số tận cùng của $a^v$.

**Tính chất 4 => Tính chất 6:** Nếu $a \in N$ và $(a, 5) = 1$ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 125.

**Chứng minh:**

Do $a^{20} - 1$ chia hết cho 25 nên $a^{20}$, $a^{40}$, $a^{60}$, $a^{80}$ khi chia cho 25 có cùng số dư là 1

=> $a^{20} + a^{40} + a^{60} + a^{80} + 1$ chia hết cho 5. Vậy $a^{100} - 1 = (a^{20} - 1)(a^{80} + a^{60} + a^{40} + a^{20} + 1)$ chia hết cho 125.

**MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP CỤ THỂ VỀ 3 CHỮ SỐ TẬN CÙNG**

*- Các số có tận cùng bằng 001 ,376 ,625 nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 001 ,376 ,625*

*- Các số có tận cùng bằng 0625 nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 0625.*

**Bài tập 27:** Tìm bốn chữ số tận cùng của $5^{1992}$

**Hướng dẫn**

$5^{1992} = (5^4)^{498} = 625^{498} = 0625^{498} = (\ldots 0625)$

Vậy bốn chữ số tận cùng của $5^{1992}$ là 0625

**Bài tập 28:** Tìm ba chữ số tận cùng của số $T = 5^{946}$

**Hướng dẫn**

Ta có $5^3$ có ba chữ số tận cùng là 125

Suy ra $T = 5^{946} = (5^3)^{315}.5 = (\overline{n125})^{315}.5 = \overline{m125}.5 = \overline{t625}$

(Với n, m, t $\in$ N)

Vậy $T = 5^{946}$ có ba chữ số tận cùng là 125.

**Bài tập 29:** Tìm 4 chữ số tận cùng của số: $P = 5^{1994}$

**Hướng dẫn**

Ta có: $5^4 = 0625$ tận cùng là 0625

$5^5$ tận cùng là 3125

$5^6$ tận cùng là 5625

$5^7$ tận cùng là 8125

$5^8$ tận cùng là 0625

$5^9$ tận cùng là 3125

$5^{10}$ tận cùng là 5625

$5^{11}$ tận cùng là 8125

$5^{12}$ tận cùng là 0625

Chu kỳ lặp là 4

Suy ra: $5^{4m}$ tận cùng là 0625

$5^{4m+1}$ tận cùng là 3125

$5^{4m+2}$ tận cùng là 5625

$5^{4m+3}$ tận cùng là 8125

Mà 1994 có dạng 4m+2.

Do đó $M=5^{1994}$ có 4 chữ số tận cùng là 5625.

**Bài tập 30:** Tìm ba chữ số tận cùng của $123^{101}$.

**Hướng dẫn**

Theo *tính chất 6*, do (123, 5) = 1 => $123^{100} - 1$ chia hết cho 125 (1).

Mặt khác: $123^{100} - 1 = (123^{25} - 1)(123^{25} + 1)(123^{50} + 1)$ => $123^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì (8, 125) = 1, từ (1) và (2) suy ra: $123^{100} - 1$ chi hết cho 1000

=> $123^{101} = 123(123^{100} - 1) + 123 = 1000k + 123$ ($k \cap N$).

Vậy $123^{101}$ có ba chữ số tận cùng là 123.

**Bài tập 31:** Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{399\ldots98}$.

**Hướng dẫn**

Theo *tính chất 6*, do (9, 5) = 1 => $9^{100} - 1$ chi hết cho 125 (1).

Tương tự bài 11, ta có $9^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì (8, 125) = 1, từ (1) và (2) suy ra: $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000

=> $3^{399...98} = 9^{199...9} = 9^{100p+99} = 9^{99}(9^{100p} - 1) + 9^{99} = 1000q + 9^{99}$ (p, q ∈ N).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$ cũng chính là ba chữ số tận cùng của $9^{99}$.

Lại vì $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000 => ba chữ số tận cùng của $9^{100}$ là 001 mà $9^{99} = 9^{100}: 9$

=> ba chữ số tận cùng của $9^{99}$ là 889 (dễ kiểm tra chữ số tận cùng của $9^{99}$ là 9, sau đó dựa vào phép nhân ??9x9 = ...001 để xác định ??9 = 889).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$ là 889.

**Trường hợp 3:** Nếu số đã cho chia hết cho 8 thì ta cũng có thể tìm ba chữ số tận cùng một cách gián tiếp theo các bước:

B1: Tìm dư của phép chia số đó cho 125

B2: Suy ra các khả năng của ba chữ số tận cùng

B3: Kiểm tra điều kiện chia hết cho 8 để chọn giá trị đúng.

**Bài tập 32:** Tìm ba chữ số tận cùng của $2004^{200}$.

**Hướng dẫn**

Do (2004, 5) = 1 (*tính chất 6*)

=> $2004^{100}$ chia cho 125 dư 1

=> $2004^{200} = (2004^{100})^2$ chia cho 125 dư 1

=> $2004^{200}$ chỉ có thể tận cùng là 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876.

Do $2004^{200}$ chia hết cho 8 nên chỉ có thể tận cùng là 376.

**Bài tập 33:** Tìm bốn chữ số tận cùng của $5^{1992}$

**Hướng dẫn**

$5^{1992} = (5^4)^{498} = 625^{498} = 0625^{498} = (...0625)$

Vậy bốn chữ số tận cùng của $5^{1992}$ là 0625

**II/ BÀI TẬP THAM KHẢO THÊM**

**Bài tập 34:** Chứng minh $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 4.

**Bài tập 35:** Chứng minh $9^{20002003}$, $7^{20002003}$ có chữ số tận cùng giống nhau.

**Bài tập 36:** Tìm hai chữ số tận cùng của:

a) $3^{999}$

b) $11^{1213}$

**Bài tập 37:** Tìm hai chữ số tận cùng của: $S = 2^3 + 2^{23} + ... + 2^{40023}$

**Bài tập 38:** Tìm ba chữ số tận cùng của: $S = 1^{2004} + 2^{2004} + ... + 2003^{2004}$

**Bài tập 39:** Cho (a, 10) = 1. Chứng minh rằng ba chữ số tận cùng của $a^{101}$ cũng bằng ba chữ số tận cùng của a.

**Bài tập 40:** Cho A là một số chẵn không chia hết cho 10. Hãy tìm ba chữ số tận cùng của $A^{200}$.

**Bài tập 41:** Tìm ba chữ số tận cùng của số: $1993^{19941995...2000}$

**Bài tập 42:** Tìm sáu chữ số tận cùng của $5^{21}$.

**D/ VẬN DỤNG TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG ĐỀ CHỨNG MINH CHIA HẾT CHO MỘT SỐ.**

**Bài tập 43:** Chứng minh rằng $8^{102} - 2^{102}$ chia hêt cho 10

**Hướng dẫn**

Ta thấy các số có tận cùng bằng 2 hoặc 8 nâng lên luỹ thừa 4 thì được số có tân cùng là 6.Một số có tận cùng bằng 6 nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 6 .

Do đó ta biến đổi như sau:

$8^{102} =(8^4)^{25}.8^2 = (....6)^{25}.64=(....6).64 = ...4$

$2^{102} =( 2^4)^{25}.2^2 =16^{25}.4 =(...6).4 = ...4$

Vậy $8^{102} -2^{102}$ tận cùng bằng 0 nên chia hết cho 10

**Bài tập 44:** Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho $1995^{2000}$.

**Hướng dẫn**

**Theo tính chất 1a** => $1995^{2000}$ tận cùng bởi chữ số 5 nên chia hết cho 5.

Vì vậy, ta đặt vấn đề là liệu $n^2 + n + 1$ có chia hết cho 5 không ?

Ta có $n^2 + n = n(n + 1)$, là tích của hai số tự nhiên liên tiếp

=> Chữ số tận cùng của $n^2 + n$ chỉ có thể là 0 ; 2 ; 6

=> $n^2 + n + 1$ chỉ có thể tận cùng là 1 ; 3 ; 7

=> $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 5.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho $1995^{2000}$.

**Bài tập 45**: Chứng minh rằng $26^{1570}$ chia hết cho 8

**Hướng dẫn**

Ta thấy :$26^5$= 11881376 ,số có tận cùng bằng 376 nâng lên luỹ thừa nào(khác 0) cũng có tận cùng bằng 376.Do đó:

$26^{1570} = (26^5)^{314} = (...376)^{314} = (...376)$

Mà 376 chia hết cho 8

Một số có ba chữ số tận cùng chia hết cho 8 thì chia hết cho 8

Vậy $26^{1570}$ chia hết cho 8

**Bài tập 46:** Chứng tỏ rằng $17^5 + 24^4 - 13^{21}$ chia hết cho 10.

**Hướng dẫn**

Tìm chữ số tận cùng của $17^5$ ; $24^4 - 13^{21}$ => Chữ số tận cùng của $17^5 + 24^4 - 13^{21}$ là 0.

=> $17^5 + 24^4 - 13^{21} \vdots 10$

**Bài tập 47:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n.

a) $7^{4n} - 1$ chia hết cho 5;

b) $3^{4n+1} + 2$ chia hết cho 5;

c) $2^{4n+1} + 3$ chia hết cho 5;

d) $2^{4n+2} + 1$ chia hết cho 5;

e) $9^{2n+1}+1$ chia hết cho 10.

**Hướng dẫn**

a) $7^{4n}-1=(7^4)^n-1=2401^n-1=...=\overline{...1}-1$, tận cùng bằng 0.

Vậy $7^{4n}-1 \vdots 5$.

b) $3^{4n+1}+2=(3^n)^n.3+2=81^n.3+2=\overline{...1}.3+2$, tận cùng bằng 5.

Vậy $3^{4n+1}+2 \vdots 5$.

c) $2^{4n+1}+3=(2^4)^n.2+3=16^n.2+3=\overline{...6}.2+3$, tận cùng bằng 5.

Vậy $2^{4n+1}+3 \vdots 5$.

d) $2^{4n+2}+1$ tận cùng bằng 5 nên chia hết cho 5.

e) $9^{2n+1}+1=(9^2)^n.9+1=81^n.9+1=\overline{...1}.9+1$, tận cùng bằng 0.

Vậy $9^{2n+1}+1$ chia hết cho 10.

**Bài tập 48.** Chứng minh răng $26^{1570}$ chia hết cho 8

**Hướng dẫn**

Ta thấy :$26^5$ = 11881376, số có tận cùng bằng 376 nâng lên lũy thừa

Nào (khác 0) cũng có tận cùng bằng 376. Do đó:

$26^{1570} = (26^5)^{314} = (\ldots 376)^{314} = (\ldots 376)$

Mà 376 chia hết cho 8

Một số có ba chữ số tận cùng chia hết cho 8 thì chia hết cho 8

Vậy $26^{1570}$ chia hết cho 8

**Bài tập 49:** Chứng minh rằng $1991^{1997}-1997^{1996} \vdots 10$

**Hướng dẫn**

Là chứng minh 2 số có cùng chữ số tận cùng:

Ta có $1991^{1997}$ và $1997^{1996}$ có cùng chữ số tận cùng là 1

Suy ra $1991^{1997}-1997^{1996} \vdots 10$

**Bài tập 50:** Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho số $n^2 + n + 1$ chia hết cho $2005^{2005}$

**Hướng dẫn**

Số $2005^{2005}$ có tận cùng là 5. nên nó chia hết cho 5

Ta có $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$ chỉ có thể có các chữ số tận cùng là 1, 3, 7. nên nó không chia hết cho 5

Vậy không tồn tại n.

**Bài tập 51:** Cho P là số nguyên tố lớn hơn 5. chứng minh rằng ( $P^{8n} + 3p^{4n} - 4$ )$\vdots$5.

**Hướng dẫn**

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 5 nên tận cùng của p chỉ có thể là các chữ số: 1; 3; 7; 9

Nếu P có tận cùng là 1 thì $P^{8n} + 3p^{4n} – 4$ có tận cùng là 0 nên nó chia hết cho 5

Nếu P có tận cùng là 3 thì $p^{4n} = 10k + 3^{4n} = 10k + 81^n$ có tận cùng là 1. $p^{8n}$ có tận cùng là 1. nên: $P^{8n} + 3p^{4n} – 4$ có tận cùng là 0. nên nó chia hết cho 5

Nếu p có tận cùng là 7 thì tương tự. tận cùng của $p^{4n}$ và $p^{8n}$ cũng có tận cùng là 1. nên tổng chia hết cho 5

Nếu p có tận cùng là 9 thì:$p^{4n} = 10k + 9^{4n} = 10k + 81^{2n}$ có tận cùng là 1và $p^{8n} = (p^{4n})^2$ có tận cùng là 1

Nên tổng trên cũng chia hết cho 5.

Tóm lại với p nguyên tố lớn hơn 5 thì tổng luôn chia hết cho 5

Nhận xét chung về phương pháp:

1. Tách $a^n$ dưới dạng $(10k + a_1)^n$ với $a_1 = \{0, 1, .....9\}$
2. Viết n dưới dạng $n = 4q + r$ ( $r = 0, 1, 2, 3$)
3. Sử dụng nhận xét 1, 2, 3 đã chứng minh ở trên.

**Bài tập 52:** Chứng minh rằng $n^5$ và n có chữ số tận cung giống nhau

**Hướng dẫn**

Để chứng minh $n^5$ và n có cùng chữ số tận cùng là đi chứng minh $n^5 - n \vdots 10$

Ta có: $A = n^5 - n = n(n^4 - 1).(n^2 + 1) = (n - 1).n(n + 1).(n^2 + 1)$

Ta có $10 = 2.5$ và $(2.5) = 1$

$(n - 1), n, n + 1$ là các số tự nhiên liên tiếp

Suy ra $A \vdots 2$

Chứng minh $A \vdots 5$ nếu $n \vdots 5$ thì $A \vdots 5$

Nếu $n \vdots 5$ dư 1 suy ra $n-1 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$

$n: 5$ dư 2 suy ra $n^2+1 = (5k+2)^2+1 = (5k)^2+20k+4+1 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$

$n: 5$ dư 3 suy ra $n^2 +1 =(5k+3)^2+1 = (5k)^2+30k+9+1 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$

$n: 5$ dư 4 suy ra $n+1 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$

Vậy $A \vdots 2$ và $A \vdots 5 \Leftrightarrow A \vdots 10$

Vậy $n^5$ và n có cùng chữ số tận cùng.

**Bài tập 53:** Tìm số dư của phép chia $3^{517}$ cho 25.

**Hướng dẫn**

Trước hết ta tìm hai chữ số tận cùng của $3^{517}$. Do số này lẻ => Ta phải tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $3^n - 1 \vdots 100$.

Ta có $3^{10} = 9^5 = 59049 \Rightarrow 3^{10} + 1 \vdots 50 \Rightarrow 3^{20} - 1 = (3^{10} + 1)(3^{10} - 1) \vdots 100$.

Mặt khác: $5^{16} - 1 \vdots 4 \Rightarrow 5(5^{16} - 1) \vdots 20$

$\Rightarrow 5^{17} = 5(5^{16} - 1) + 5 = 20k + 5$

$\Rightarrow 3^{517} = 3^{20k + 5} = 3^5(3^{20k} - 1) + 3^5 = 3^5(3^{20k} - 1) + 243$, có hai chữ số tận cùng là 43.

Vậy số dư của phép chia $3^{517}$ cho 25 là 18.

*** Chú ý: Trong trường hợp số đã cho chia hết cho 4 thì ta có thể tìm theo cách gián tiếp**:

B1: Tìm số dư của phép chia số đó cho 25, từ đó suy ra các khả năng của hai chữ số tận cùng.

B2: Dựa vào giả thiết chia hết cho 4 để chọn giá trị đúng.

**Bài 54 :** Cho $Q=\frac{1}{2}\left(7^{2020^{2018}}-3^{2008^{2007}}\right)$. Chứng minh $Q$ là số tự nhiên chia hết cho 5.

**Hướng dẫn giải**

Vì 2020; 2008 đều là bội của 4 nên $2020^{2018}$ và $2008^{2007}$ cũng là bội của 4.

Đặt $2020^{2018}=4m\ (m\in\mathbb{N}^*)$ ; $2008^{2007}=4n\ (n\in\mathbb{N}^*)$.

Khi đó $7^{2020^{2018}}-3^{2008^{2007}}=7^{4m}-3^{4n}=\left(7^4\right)^m-\left(3^4\right)^n=2401^m-81^n$.

Ta thấy $2401^m$ và $81^n$ có tận cùng là 1 nên $2401^m-81^n$ có tận cùng là 0.

Suy ra $Q=\frac{1}{2}\left(7^{2020^{2018}}-3^{2008^{2007}}\right)$ có tận cùng là 0 hoặc 5.

Vậy $Q$ là số tự nhiên chia hết cho 5.

**Dạng 3: Nhóm hợp lý**

**Bài 1:** Chứng minh rằng với mọi $n$ nguyên dương thì $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$ chia hết cho 10

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n=\left(3^{n+2}+3^n\right)-\left(2^{n+2}+2^n\right)$

$=3^n\left(3^2+1\right)-2^n\left(2^2+1\right)$

$=3^n.10-2^n.5=10.\left(3^n-2^{n-1}\right)$

Vì $10.\left(3^n-2^{n-1}\right)$ chia hết cho 10 với mọi n nguyên dương nên ta có điều phải chứng minh.

**Bài 2:** Chứng minh rằng:

a, $8.2^n+2^{n+1}\,\vdots\,10$

b, $3^{n+3}+2^{n+3}+3^{n+1}+2^{n+2}\,\vdots\,6$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $8.2^n+2^{n+1}=8.2^n+2^n.2=2^n\left(8+2\right)=10.2^n\,\vdots\,10$

b, Ta có: $VT=3^n.27+3^n.3+2^n.8+2^n.4=3^n.30+2^n.12\,\vdots\,6$

**Bài 3:** Chứng minh rằng: $3^{2n+1}+2^{2n+2}\,\vdots\,7$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $A=3.3^{2n}+4.2^{2n}=3\left(7+2\right)^n+4.2^n=7.M+7.2^n\,\vdots\,7$

**Bài 4:** Chứng minh rằng:

a, $10^n+18n-1\,\vdots\,27$

b, D = $10^n+72n-1\,\vdots\,81$

### Hướng dẫn giải

a, Ta có: $VT = \left(10^n - 1\right) + 18n = 999...9 + 18n$ ( có n chữ số 9)

$VT = 9.1111...1 + 9.2n = 9\left(111....1 + 2n\right) \vdots 9$

mặt khác: $111....1 + 2n$ ( có n chữ số 1) = $\left(1111....1 - n\right) + 3n$

Xét: $111...1 - n$ có tổng các chữ số là 1 + 1 + 1 +...+ 1- n = 0 nên chia hết cho 3
vậy 111...1+2n chia hết cho 3 suy ra VT chia hết cho 27
b, Ta có:
$D = 10^n - 1 + 72n = 9.111...1 - 9\text{n} + 81\text{n} = 9(111....1 - \text{n}) + 81\text{n}$
Xét 111....1 - n chia hết cho 9 => D chia hết cho 81

**Bài 5:** Chứng minh rằng : $3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3}$ chia hết cho 13 với mọi n

### Hướng dẫn giải

Ta có: $3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3} = 3^n.3 + 3^n.9 + 3^n.27 = 3^n.3\left(1 + 3 + 9\right) = 3^{n+1}.13 \vdots 13$

**Bài 6:** Chứng minh rằng:
a, $5^5 - 5^4 + 5^3 \vdots 7$
b, $7^6 + 7^5 - 7^4 \vdots 11$
c, $10^9 + 10^8 + 10^7 \vdots 222$ và $\vdots 555$
d, $10^6 - 5^7 \vdots 59$

### Hướng dẫn giải

a, Ta có: $= 5^3\left(5^2 - 5 + 1\right) = 5^2.21 \vdots 7$

b, Ta có: $= 7^4\left(7^2 + 7 - 1\right) = 7^4.55 \vdots 11$

c, Ta có : $= 10^7\left(10^2 + 10 + 1\right) = 10^7.111 \vdots 222$ và $\vdots 555$

d, Ta có : $= (2.5)^6.5^7 = 5^6\left(2^6 - 1\right) = 5^6.59 \vdots 59$

**Bài 7 :** Chứng minh rằng : $81^7 - 27^9 - 9^{13} \vdots 45$

### Hướng dẫn giải

Ta có : $= \left(3^4\right)^7 - \left(3^3\right)^9 - \left(3^2\right)^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} = 3^{26}\left(3^2 - 3 - 1\right) = 3^{26}.5 \vdots 9.5 = 45$

**Bài 8 :** Chứng minh rằng: $Q = n^5 - n$ chia hết cho 10 với mọi $n$ là số tự nhiên.

### Hướng dẫn giải

Ta có $Q = n^5 - n = n\left(n^4 - 1\right) = \left(n - 1\right)n\left(n + 1\right)\left(n^2 + 1\right)$

Trong 2 số (n – 1) và n luôn có 1 số chẵn nên Q chia hết cho (1).

Do n là số tự nhiên nên n có 1 trong các dạng sau: $n = 5k \pm 1, n = 5k \pm 2, n = 5k$

Nếu n = 5k thì Q chia hết cho 5.

Nếu n = 5k +1 thì n – 1 = 5k chia hết cho 5.

Nếu n = 5k -1 thì n + 1 = 5k chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 = 5q + 4$ nên $n^2 + 1$ chia hết cho 5.

Do đó ta luôn có Q chia hết cho 5 (2)

Từ (1) và (2) suy ra Q luôn chia hết cho 10.

**Bài 9 :** Chứng minh: $M = 2^{a+3} + 2^{a+5} + 2^{a+7}$ $\left(a \in \mathbb{N}\right)$ chia hết cho $42$.

**Hướng dẫn giải**

$$M = 2^{a+3} + 2^{a+5} + 2^{a+7} = 2^{a+2}.\left(2 + 2^3 + 2^5\right) = 2^{a+2}.\left(2 + 8 + 32\right) = 2^{a+2}.42.$$

Ta có: $2^{a+2}.42 \vdots 42$ nên $M \vdots 42$ (đpcm).

**Bài 10:** Cho $10^k - 1 \vdots 19 \left(k > 1\right)$. Chứng minh rằng: $10^{2k} - 1 \vdots 19$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $10^{2k} - 1 = 10^{2k} - 10^k + 10^k - 1 = 10^k\left(10^k - 1\right) + \left(10^k - 1\right)$

Nhận thấy: $10^k - 1 \vdots 19$

**Bài 11:** Chứng minh rằng: $n^2 + n + 1 \not\vdots 4$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $n^2 + n + 1 = n\left(n+1\right) + 1$ , mà $n\left(n+1\right)$ là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp nên chẵn

Mà VP + 1 nên là số lẻ vậy không chia hết cho 4

**Bài 12:** Chứng minh rằng: $\forall n \in N, n^2 + n + 6 \not\vdots 5$

**Hướng dẫn giải**

Vì $n^2 + n + 6 = n\left(n+1\right) + 6$ ,

Vì $n\left(n+1\right)$ là tích 2 số tự nhiên liên tiếp nên có chữ số tận cùng là 0; 2; 6

Khi đó: $n\left(n+1\right) + 6$ sẽ có tận cùng là 6;8;2 nên không chia hết cho 5

**Bài 13:** Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + ...... + 3^{x+100}$ chia hết cho $120\left(x \in \mathbb{N}\right)$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$\begin{aligned}
&3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + ..... + 3^{x+100} \\
&= \left(3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}\right) + \left(3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}\right) + ... \\
&\quad + \left(3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}\right) \\
&= 3^x\left(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4\right) + 3^{x+4}.\left(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4\right) + ....3^{x+96}.\left(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4\right) \\
&= 3^x.120 + 3^{x+4}.120 + .... + 3^{x+96}.120 \\
&= 120.\left(3^x + 3^{x+4} + .... + 3^{x+96}\right) \vdots 120
\end{aligned}$$

**Bài 14:** Chứng minh rằng: $n^2 + n + 1 \not\vdots 2$ với mọi số tự nhiên n

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $n^2 + n + 1 = n\left(n+1\right) + 1$ là số lẻ nên không chia hết cho 2

**Bài 15:** Chứng minh rằng:

a, $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{11} \vdots 4$ b, $5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^8 \vdots 30$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $A=1+3+3^2+3^3+...+3^{10}+3^{11}=(1+3)+3^2(1+3)+...+3^{10}(3+1)$

$A=4+3^2.4+3^4.4+....+3^{10}.4 \vdots 4$

b, Ta có: $B=5+5^2+5^3+5^4+...+5^8=(5+5^2)+(5^3+5^4)+...+(5^7+5^8)$

$B=30+5^2.30+...+5^6.30$

**Bài 16:** Chứng minh rằng:

a, $2+2^2+2^3+...+2^{60} \vdots 15$ b, $1+3+3^2+3^3+...+3^{119} \vdots 13$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $C=2+2^2+2^3+...+2^{60}=(2+2^2+2^3+2^4)+(2^5+...+2^8)+...+(2^{57}+...+2^{60})$

$C=2(1+2+4+8)+2^5(1+2+4+8)+...+2^{57}(1+2+4+8) \Rightarrow C=15.(2+2^5+...+2^{57})$

b, Ta có: $D=(1+3+3^2)+(3^3+3^4+3^5)+...+(3^{17}+3^{18}+3^{19})$

$D=13+3^3.13+...+3^{17}.13=13(1+3^3+....+3^{17}) \vdots 13$

**Bài 17:** Chứng minh rằng:

a, $2+2^2+2^3+...+2^{60} \vdots 3,7,15$ b, $1+3+3^2+3^3+...+3^{1991} \vdots 13,41$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $A=(2+2^2)+(2^3+2^4)+...+(2^{59}+2^{60})$

$A=2(1+2)+2^3(1+2)+...+2^{59}(1+2) \Rightarrow A \vdots 3$

lại có: $A=(2+2^2+2^3)+(2^4+2^5+2^6)+...+(2^{58}+2^{59}+2^{60})$

$A=2.(1+2+2^2)+2^4(1+2+2^2)+...+2^{58}(1+2+2^2) \vdots 7$

Lại có: $A=(2+2^2+2^3+2^4)+(2^5+2^6+2^7+2^8)+...+(2^{57}+2^{58}+2^{59}+2^{60})$

$A=2.15+2^5.15+...+2^{57}.15 \vdots 15$

b, Ta có: $B=(1+3+3^2)+(3^3+3^4+3^5)+...+(3^{1989}+3^{1990}+3^{1991})$

$B=13+3^3.13+...+3^{1989}.13 \vdots 13$

Lại có: $B=(1+3^2+3^4+3^6)+(3+3^3+3^5+3^7)+...+(3^{1984}+3^{1986}+3^{1988}+3^{1990})$

$+(3^{1985}+3^{1987}+3^{1989}+3^{1991}) \;=820(1+3+...+3^{1984}+3^{1095}) \vdots 41$

**Bài 18:** Chứng minh rằng:

a, $2+2^2+2^3+...+2^{100} \vdots 31$ b, $3+3^2+3^3+...+3^{1998} \vdots 12,39$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có:

$A=(2+2^2+2^3+2^4+2^5)+(2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10})+...+(2^{96}+2^{97}+2^{98}+2^{99}+2^{100})$

$A=2.31+2^6.31+...+2^{96}.31 \vdots 31$

b, Ta có: $S=(3+3^2)+(3^3+3^4)+...+(3^{1997}+3^{1998})$

$S=12+3^2.12+...+3^{1996}.12 \vdots 12$

mặt khác: $S=(3+3^2+3^3)+(3^4+3^5+3^6)+...+(3^{1996}+3^{1997}+3^{1998})$

$S=39+3^3.39+...+3^{1995}.39 \vdots 39$

**Bài 19:** Chứng minh rằng:

a, $3+3^2+3^3+...+3^{1000} \vdots 120$ b, $11+11^2+11^3+...+11^8 \vdots 12$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta thấy ngay tổng B chia hết cho 3, ta cần chứng minh tổng B chia hết cho 40

$B=\left(3+3^2+3^3+3^4\right)+...+\left(3^{997}+3^{998}+3^{999}+3^{1000}\right)$

$=3\left(1+3+3^2+3^3\right)+...+3^{1997}\left(1+3+3^2+3^3\right)\vdots 40$

Như vậy A $\vdots$ 120

b, Ta có: $C=\left(11+11^2\right)+\left(11^3+11^4\right)+...+\left(11^7+11^8\right)$

$C=11(1+11)+11^3(1+11)+...+11^7(11+11)$

$C=11.12+11^3.12+...+11^7.12\vdots 12$

**Bài 20:** Chứng minh rằng:

a, $4+4^2+4^3+...+4^{210}\vdots 210$ b, $1+5+5^2+5^3+...+5^{404}\vdots 31$

**Hướng dẫn giải**

a, Tổng A hiển nhiên chia hết cho 2 (1)

Nên ta cần chứng minh tổng A chia hết cho 105=5.21

$A=\left(4+4^2\right)+\left(4^3+4^4\right)+...+\left(4^{209}+4^{210}\right)$

$A=4(1+4)+4^3(1+4)+...+4^{209}(1+4)=4.5+4^3.5+4^{209}.5\vdots 5$ (2)

$A=\left(4+4^2+4^3\right)+\left(4^4+4^5+4^6\right)+...+\left(4^{208}+4^{209}+4^{210}\right)$

$A=4(1+4+16)+4^4(1+4+16)+...+4^{208}(1+4+16)\vdots 21$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta thấy: A$\vdots$210

b, Ta có : $B=\left(1+5+5^2\right)+\left(5^3+5^4+5^5\right)+...+\left(5^{402}+5^{403}+5^{404}\right)$

$B=31+5^3\left(1+5+5^2\right)+...+5^{402}\left(1+5+5^2\right)\vdots 31$

**Bài 21:** Chứng minh rằng:

a, $2+2^2+2^3+2^4+...+2^{100}\vdots 3$ b, $3^{21}+3^{22}+3^{23}+...+3^{29}\vdots 13$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có : $A=\left(2+2^2\right)+\left(2^3+2^4\right)+...+\left(2^{99}+2^{100}\right)$

$A=2(1+2)+2^3(1+2)+...+2^{99}(1+2)=2.3+2^3.3+...+2^{99}.3\vdots 3$

b, Ta có : $B=\left(3^{21}+3^{22}+3^{23}\right)+\left(3^{24}+3^{25}+3^{26}\right)+\left(3^{27}+3^{28}+3^{29}\right)$

$B=3^{21}\left(1+3+3^2\right)+3^{24}\left(1+3+3^2\right)+3^{27}\left(1+3+3^2\right)$

$B=3^{21}.13+3^{24}.13+3^{27}.13\vdots 13$

**Bài 22:** Chứng minh rằng $A=75.(4^{2004}+4^{2003}+...+4^2+4+1)+25\vdots 100$

**Hướng dẫn giải**

Đặt $B=4^{2004}+4^{2003}+...+4^2+4+1$, Tính B rồi thay vào A ta được :

$A=75.\left(4^{2005}-1\right):3+25=25\left(4^{2005}-1\right)+25=25\left(4^{2005}-1+1\right)=25.4^{2005}\vdots 100$

**Bài 23:** Chứng minh rằng: $M=2012+2012^2+2012^3+...+2012^{2010}\vdots 2013$

**Hướng dẫn giải**

$M=\left(2012+2012^2\right)+\left(2012^3+2012^4\right)+...+\left(2012^{2009}+2012^{1010}\right)$

$M=2012(1+2012)+2012^3(1+2012)+...+2012^{2009}(1+2012)$

$M=2012.2013+2012^3.2013+...+2012^{2009}.2013\vdots 2013$

**Bài 24:** Cho $A=1+2+2^2+...+2^{2008}$, Tìm dư của A khi chia cho 7

**Hướng dẫn giải**

$A=1+2+\left(2^2+2^3+2^4\right)+\left(2^5+2^6+2^7\right)+...+\left(2^{2006}+2^{2007}+2^{2008}\right)$

$A=3+2^2\left(1+2+2^2\right)+2^5\left(1+2+2^2\right)+...+2^{2006}\left(1+2+2^2\right)$

$A=3+2^2.7+2^5.7+2^{2006}.7$, Nhận thấy ngay A chia 7 dư 3

**Bài 25:** Chứng minh rằng : $A=2^0+2^1+2^2+...+2^{5n-3}+2^{5n-2}+2^{5n-1}$ chia hết cho 31 nếu n là số nguyên dương bất kỳ

**Hướng dẫn giải**

$A=\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)+\left(2^5+2^6+2^7+2^8+2^9\right)+...+\left(2^{5n-5}+2^{5n-4}+2^{5n-3}+2^{5n-2}+2^{5n-1}\right)$

$A=31+2^5.\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)+...+2^{5n-5}\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)$

$A=31+2^5.31+...+2^{5n-5}.31\vdots 31$

**Bài 26:** Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng : $3^n+1$, là bội của 10 thì $3^{n+4}+1$ cũng là bội của 10

**Hướng dẫn giải**

Nếu $3^n+1$, Là bội của 10 thì $3^n+1$ có tận cùng là số 0=> $3^n$ có tận cùng là 9

Mà $3^{n+4}+1=3^n.3^4+1=\overline{.....9}.81+1=\overline{....9}+1=\overline{...0}\vdots 10$ (đpcm)

**Bài 27:** Chứng minh rằng : $N=5+5^2+5^3+...+5^{2012}$ là bội của 30

**Hướng dẫn giải**

$N=\left(5+5^2\right)+\left(5^3+5^4\right)+...+\left(5^{2011}+5^{2012}\right)$

$N=30+5^2\left(5+5^2\right)+...+5^{2010}\left(5+5^2\right)=30+5^2.30+...+5^{2010}.30\vdots 30$

**Bài 28:** Cho $S=4+4^2+4^3+...+4^{2004}$, Chứng minh rằng S chia hết cho 10 và 3S+4 chia hết cho $4^{2004}$

**Hướng dẫn giải**

$S=\left(4+4^2\right)+\left(4^3+4^4\right)+...+\left(4^{2003}+4^{2004}\right)$

$S=4.(1+4)+4^3(1+4)+...+4^{2003}(1+4)=4.5+4^3.5+...+4^{2003}.5\ \Rightarrow S\vdots 5, S\vdots 2\Rightarrow S\vdots 10$

Mặt khác: $4S=4^2+4^3+4^4+...+4^{2005}$

$\Rightarrow 4S-S=3S=4^{2005}-4\Rightarrow 3S+4=4^{2005}\vdots 4^{2004}$

**Bài 29:** Cho $N=0,7\left(2007^{2009}-2013^{1999}\right)$. Chứng minh rằng: N là 1 số nguyên

**Hướng dẫn giải**

$N=\frac{7}{10}.\left(2007^{2009}-2013^{1999}\right)$,

Để chứng minh N là 1 số nguyên thì N chia hết cho 10 hay:

$2007^{2009}-2013^{1999}=2007^{2008}.2007-2013^{1996}.2013^3=\overline{...1}.2007-\overline{....1}.\overline{....7}$

$=\overline{....7}-\overline{....7}=\overline{....0}\vdots 10$

Vậy N chia hết cho 10.

Do đó N là 1 số nguyên

**Bài 30:** Cho $A=1.2.3...2018.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}\right)$, chứng tỏ rằng $A$ là số tự nhiên chia hết cho 2019.

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}=\left(1+\frac{1}{2018}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2017}\right)+...\left(\frac{1}{1009}+\frac{1}{1010}\right)$

$$= 2019\left(\frac{1}{1.2018}+\frac{1}{2.2017}+...+\frac{1}{1009.1010}\right)$$

$$= 2019.\frac{2.3...2016.2017+1.3.4...2016.2018+...+1.2...1008.1011...2017.2018}{1.2.3...2017.2018}$$

Do đó : $A=1.2.3...2018.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}\right)=$

$$=1.2.3...2018.2019.\frac{2.3...2016.2017+1.3.4...2016.2018+...+1.2...1008.1011...2017.2018}{1.2.3...2017.2018}$$

$$=2019.(2.3...2016.2017+1.3.4...2016.2018+...+1.2...1008.1011...2017.2018)\,\vdots\,2019$$

Vậy $A$ là số tự nhiên chia hết cho 2019.

**Bài 31:** Chứng minh rằng : $B=5^{2008}+5^{2007}+5^{2006}\,\vdots\,31$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $B=5^{2006}\left(5^2+5+1\right)=31.5^{2006}\,\vdots\,31$

**Bài 32:** Chứng minh rằng : $8^8+2^{20}\,\vdots\,17$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $C=\left(2^3\right)^8+2^{20}=2^{24}+2^{20}=2^{20}\left(2^4+1\right)=2^{20}.17\,\vdots\,17$

**Bài 33:** Chứng minh rằng: $D=313^5.299-313^6.36\,\vdots\,7$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $D=313^5\left(299-313.36\right)=313^5.(-1567)\,\vdots\,7$

**Bài 34:** Chứng minh rằng: $A=7+7^2+7^3+...+7^{4n-1}+7^{4n}\,\vdots\,400$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $400=1+7+7^2+7^3$ , vậy nhóm 4 số hàng của tổng A

**Bài 35:** Chứng minh rằng: $2+2^2+2^3+2^4+2^5+......+2^{99}+2^{100}$ chia hết cho $31$

**Hướng dẫn giải**

Đặt $D=2+2^2+2^3+2^4+2^5+.....+2^{99}+2^{100}$ (có $100$ số hạng)

$=\left(2+2^2+2^3+2^4+2^5\right)+\left(2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}\right)+.......$

$+\left(2^{96}+2^{97}+2^{98}+2^{99}+2^{100}\right)$ (có 20 nhóm)

$D=2.\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)+2^6.\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)+.....+2^{96}.\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)$

$D=2.31+2^6.31+.....+2^{96}.31$

$D=31.\left(2+2^6+.....+2^{96}\right)$ chia hết cho 31

Vậy $D=2+2^2+2^3+2^4+2^5+.....+2^{99}+2^{100}$ chia hết cho $31$

**Bài 36:** Cho $S=17+17^2+17^3+.....+17^8$.Chứng tỏ rằng S chia hết cho 307

**Hướng dẫn giải**

$S=17+17^2+17^3+.....+17^8.$

$=17\left(1+17+17^2\right)+17^4\left(1+17+17^2\right)+...+17^{16}\left(1+17+17^2\right)$

$=17.307+17^4.307+...+17^{16}.307$

$=307.\left(17+17^4+...+17^{16}\right)\vdots 307$

Vậy $S\vdots 307$

**Bài 37:** Chứng minh rằng : Số $A=11^{n+2}+12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n\in\mathbb{N}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$A=11^{n+2}+12^{2n+1}=11^2.11^n+12.\left(12^2\right)^n=121.11^n+12.144^n$

$=\left(133-12\right).11^n+12.144^n=133.11^n-12.11^n+12.144^n$

$=133.11^n+12.\left(144^n-11^n\right)$

Ta thấy :

$133.11^n\vdots 133$

$\left(144^n-11^n\right)\vdots\left(144-11\right)=133\Rightarrow 12.\left(144^n-11^n\right)\vdots 133$

Do đó suy ra $133.11^n+12.\left(144^n-11^n\right)$ chia hết cho 133

Vậy: số $A=11^{n+2}+12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n\in\mathbb{N}$

**Bài 38:** Chứng minh rằng với mọi $n$ nguyên dương ta luôn có:

$4^{n+3}+4^{n+2}-4^{n+1}-4^n$ chia hết cho 300

**Hướng dẫn giải**

Với mọi $n$ nguyên dương, ta có:

$4^{n+3}+4^{n+2}-4^{n+1}-4^n=4^n.\left(4^3+4^2-4-1\right)$

$=4^n.75=4^{n-1}.4.75=300.4^{n-1}$

Mà $300.4^{n-1}$ chia hết cho 300 (với mọi n nguyên dương)

Nên $4^{n+3}+4^{n+2}-4^{n+1}-4^n$ chia hết cho 300.

**Bài 39:** Cho biểu thức $E=2018!+\frac{2018!}{2}+\frac{2018!}{3}+.......+\frac{2018!}{2017}+\frac{2018!}{2018}$

Chứng minh rằng: $E\vdots 2019$

**Hướng dẫn giải**

Vì $2019=3.673$

mà 3 và 673 là hai số nguyên tố

Để Chứng minh $E\vdots 2019$ ta chứng minh $E\vdots 3$ và $E\vdots 673$

Ta xét từng số hạng của E

$2018!=1.2.3...2018$ có chứa thừa số 3 và 673. Do đó $2018!\vdots 3.673$

$\frac{2018!}{2}$ có chứa thừa số 3 và 673. Do đó $\frac{2018!}{2}\vdots 3.673$

$\frac{2018!}{3}$ có chứa thừa số 6 và 673. Do đó $\frac{2018!}{2}\vdots 3.673$

Lần lượt như vậy ta thấy tất cả các số hạng còn lại (trừ $\frac{2018!}{673}$ ) đều chứa thừa số 3 và 673 nên các số hạng đều chia hết cho 3 và 673

Số $\frac{2018!}{673}$ có chứa thừa số 3 và thừa số 1346 chia hết cho 673. Nên $\frac{2018!}{673}\vdots 3.673$

Vậy tất cả các số hạng của E đều chia hết cho 3.673. Do đó: $E\vdots 2019$

**Bài 40:** Cho *a, b* là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng : $A=ab-a-b+1$ chia hết cho $48$ .

**Hướng dẫn giải**

Vì *a,b* là bình phương hai số nguyên lẻ liên tiếp nên : $a=(2n-1)^2$ ; $b=(2n+1)^2$ $(n\in\mathbb{Z})$

Ta có : $ab-a-b+1=(ab-a)-(b-1)=a(b-1)-(b-1)=(a-1)(b-1)$. Do đó:

$$A=(a-1)(b-1)=\left[(2n-1)^2-1\right]\left[(2n+1)^2-1\right]=4n(n-1).4n(n+1)=16n^2(n-1)(n+1)$$

mà $n(n-1)(n+1)\vdots 3$ ( tích 3 số nguyên liên tiếp) $\Rightarrow A\vdots(16.3)\Rightarrow A\vdots 48$ $(dpcm)$

**Bài 41:** Chứng minh rằng: $3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}+....+3^{x+100}$ chia hết cho 120 với mọi x là số tự nhiên

**Hướng dẫn giải**

$3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}+....+3^{x+100}$

$=\left(3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}+3^{x+4}\right)+\left(3^{x+5}+3^{x+6}+3^{x+7}+3^{x+8}\right)+...+\left(3^{x+97}+3^{x+98}+3^{x+99}+3^{x+100}\right)$

$=3^x\left(3+3^2+3^3+3^4\right)+3^{x+4}\left(3+3^2+3^3+3^4\right)+...+3^{x+96}\left(3+3^2+3^3+3^4\right)$

$=3^x.120+3^{x+4}.120+...+3^{x+96}.120$

$=120\left(3^x+3^{x+4}+...+3^{x+96}\right)\vdots 120$

# CHUYÊN ĐỀ 5: SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

**I. MỘT SỐ VẤN ĐỀ LỊCH SỬ VỀ SỐ NGUYÊN TỐ.**

Số nguyên tố được nghiên cứu từ nhiều thế kỉ trước công nguyên nhưng cho đến nay nhiều bài toán về số nguyên tố vẫn chưa được giải quyết trọn vẹn.

**1) SÀNG ƠRATOSTEN (EURATOSTHENE).**

Làm thế nào để tìm được tất cả các số nguyên tố trong một giới hạn nào đó, chẳng hạn từ 1 đến 100 ?

Ta làm như sau: Trước hết xóa số 1.

Giữ lại số 2 rồi xóa tất cả các bội của 2 mà lớn hơn 2.

Giữ lại số 3 rồi xóa tất cả các bội của 3 mà lớn hơn 3.

Giữ lại số 5 (số 4 đã bị xóa) rồi xóa tất cả các bội của 5 mà lớn hơn 5.

Giữ lại số 7 (số 6 đã bị xóa ) rồi xóa tất cả các bội của 7 mà lớn hơn 7.

Các số 8, 9, 10 đã bị xóa. Không cần xóa tiếp các bội của các số lớn hơn 10 cũng kết luận được rằng không còn hợp số nào nữa.

Thật vậy, giả sử n là một hợp số chia hết cho 1 số a lớn hơn 10 thì do n<100, a >10 nên n phải chia hết cho 1 số b nhỏ hơn 10, do đó n đã bị xóa.

Nhà toán học cổ Hi Lạp Ơratoxten (thế kỉ III trước công nguyên) là người đầu tiên đưa ra cách này. Ông viết các số trên giấy cỏ sậy căng trên một cái khung rồi dùi thủng các hợp số được một vật tương tự như cái sàng: các hợp số được sàng qua, các số nguyên tố dược giữ lại. Bảng số nguyên tố này được gọi là sàng Ơratoxten.

**<u>Ví dụ:</u>**

Dùng bảng các số nguyên tố nhỏ hơn 100, hãy nêu ra cách kiểm tra một số nhỏ hơn 10000 có là số nguyên tố không ? Xét bài toán trên với các số 259, 353.

Giải.

Cho số n < 10000 (n>1). Nếu n chia hết cho một số k nào đó (1 <k <n) thì n là hợp số. Nếu n không chia hết cho mọi số nguyên tố p ( $p^2 \le n$ ). thì n là số nguyên tố.

Số 259 chia hết cho 7 nên là hợp số.

Số 353 không chia hết cho tất cả các số nguyên tố p mà $p^2 \le 353$ (đó là các số nguyên tố 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17) nên 353 là số nguyên tố.

**2) SỰ PHÂN BỐ SỐ NGUYÊN TỐ**

Từ 1 đến 100 có 25 số nguyên tố, trong trăm thứ hai có 21 số nguyên tố, trong trăm thứ 3 có 16 số nguuyeen tố, ... Trong nghìn đầu tiên có 168 số nguyên tố, trong nghìn thứ hai có 145 số nguyên tố, trong nghìn thứ ba có 127 số nguyên tố, ... Như vậy càng đi xa theo dãy số tự nhiên, các số nguyên tố càng thưa dần.

**<u>Ví dụ:</u>**

Có tồn tại một nghìn số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số ?

**Giải.**

Có. Gọi A = 2. 3. 4. ...1001. Các số A + 2, A +3, ...., A + 1001 là 1000 số tự nhiên liên tiếp và rõ ràng đều là hợp số (đpcm).

Một vấn đề được đặt ra: có những khoảng rất lớn các số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số. vậy có thể đến một lúc nào đó không còn số nguyên tố nữa không ? Có số nguyên tố cuối cùng không ? Từ thế kỉ III trước công nguyên, nhà toán học cổ Hi lạp Ơclit đã chứng minh rằng: Tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.

**<u>Ví dụ.</u>**

Chứng minh rằng không thể có hữu hạn số nguyên tố.

**Giải.**

Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố là $p_1, p_2, ..., p_n$ trong đó $p_n$ là số lớn nhất trong các số nguyên tố.

Xét số $A = p_1 p_2 ... p_n + 1$ thì A chia hết cho mỗi số nguyên tố $p_i$, $(1 \le i \le n)$ đều dư 1 (1).

Mặt khác A là hợp số (vì nó lớn hơn số nguyên tố lớn nhất là $p_n$) do đó A phải chia hết cho một số nguyên tố nào đó, tức là A chia hết cho một trong các số $p_i$ $(1 \le i \le n)$ (2), mâu thuẫn với (1).

Vậy không thể có hữu hạn số nguyên tố (đpcm).

Qua sự phân bố các số nguyên tố, nhà toán học Pháp Bectơrăng đưa ra dự đoán: nếu n > 1 thì giữa n và 2n có ít nhất một số nguyên tố. Năm 1852, nhà toán học Nga Trêbưsép đã chứng minh được mệnh đề này.Ông còn chứng minh được:

Nếu n > 3 thì giữa n và 2n - 2 có ít nhất một số nguyên tố. Ta cũng có mệnh đề sau: Nếu n >5 thì giữa n và 2n có ít nhất 2 số nguyên tố.

**<u>Ví dụ.</u>**

Cho số tự nhiên n > 2. Chứng minh rằng số n! - 1 có ít nhất một ước nguyên tố lớn hơn n.

**Giải.**

Gọi a = n! - 1. Do n > 2 nên a > 1. Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều có ít nhất một ước nguên tố. Gọi p là ước nguyên tố của a. ta sẽ chứng minh rằng p > n.

Thật vậy giả sử $p \le n$ thì tích 1. 2. 3...n chia hết cho p, ta có n! chia hết cho p, mà a chia hết cho p nên 1 chia hết cho p, vô lí.

### 3) CÔNG THỨC CHO MỘT SỐ NGUYÊN TỐ

**<u>Ví dụ:</u>**

a) Chứng minh rằng mọi số nguyên tố m lớn hơn 3 đều viết được dưới dạng 6n + 1 hoặc 6n - 1 ($n \in N$).

b) Có phải mọi số có dạng $6n \pm 1$ ($n \in N$) đều là số nguyên tố hay không?

**Giải:**

a) Mỗi số tự nhiên khi chia cho 6 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3, , 5. Do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới một trong các dạng $6n-2, 6n-1, 6n, 6n+1, 6n+2, 6n+3$. Vì m là số nguyên tố lớn hơn 3 nên m không chia hết cho 2, không chia hết cho 3, do đó m không có dạng $6n-2, 6n, 6n+2, 6n+3$. vậy m viết được dưới dạng 6n +1 hoặc 6n - 1 (ví dụ: 17 = 6. 3 - 1, 19 = 6. 3 + 1).

b) Không phải mọi số có dạng $6n \pm 1 (n \in N)$ đều là số nguyên tố. Chẳng hạn

6. 4 + 1= 25 không là số nguyên tố (đpcm).

Liệu có công thức nào mà với mọi giá trị tự nhiên của chữ đều cho ta các số nguyên tố không ? Cho đến nay, người ta chưa tìm thấy một công thức như vậy. Tuy nhiên có một số biểu thức mà với khá nhiều giá trị của chữ, biểu thức đó cho ta các số nguyên tố.

Biểu thức $2n^2+29$ cho ta các giá trị nguyên tố với n = 0, 1, 2, ... ,28.

Biểu thức $n^2+n+41$ do Ơ_le (Euler 1707 - 1783) đưa ra cho các giá trị nguyên tố với n = 0, 1, 2, ..., 39 (còn n = 40 thì $40^2+40+41=40(40+1)+41$ chia hết cho 41).

Biểu thức $n^2-79n+1601$ cũng cho các giá trị nguyên tố với n = 0, 1, 2, ...., 79 (còn với n = 80 thì biểu thức bằng $41^2$).

Số Phec-ma. Nhà toán học kiêm luật gia Pháp Phec- ma (Pierre de Fermat 1601 - 1665) xét biểu thức $2^m +1$ trong đó m = $2^n$ với n = 0, 1, 2, 3, 4 cho các số nguyên tố 2 + 1 = 3, $2^2$ + 1 = 5, $2^4$ + 1 = 17, $2^8$ + 1 =257, $2^{16}$ + 1 = 65537. Với n = 5, được số $2^{32}$ + 1 = 4294967297, Phec- ma cho rằng đó cũng là số nguyên tố và ông đưa ra giả thuyết: Biểu thức $2^m$ + 1 với m là lũy thừa của 2 cho ta các số nguyên tố.

Ý kiến này đứng vững rất lâu. Mãi đến năm 1732, Ơ- le mới bác bỏ giả thuyết trên bằng cách chỉ ra số $2^{32}+1$ chia hết cho 641. Đây là một trong các ví dụ điển hình nhất chứng tỏ rằng phép quy nạp không hoàn toàn có thể dẫn đến sai lầm.

Các số có dạng $2^m$ + 1 với m là một lũy thừa của 2 được gọi là số Phec- ma.

**4). BIỂU DIỄN MỘT SỐ DƯỚI DẠNG TỔNG CÁC SỐ NGUYÊN TỐ.**

Năm 1742 nhà toán học Đức Gôn_bách viết thư báo cho Ơ_le biết rằng ông mạo hiểm đưa ra bài toán: mọi số tự nhiên lớn hơn 5 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của 3 số nguyên tố. Ơ_ le trả lời rằng theo ông, mọi số chẵn lớn hơn 2 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của 2 số nguyên tố.

Nếu chứng minh được một trong hai mệnh đề trên thì chứng minh được mệnh đề còn lại. Trong 200 năm, các nhà toán học thế giới không giải được bài toán Gôn bách- Ơ le. Đến năm 1937, nhà toán học Liên Xô Vinôgrađốp đã giải quyết gần trọn vẹn bài toán đó bằng cách chứng minh rằng: Mọi số lẻ đủ lớn đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của 3 số nguyên tố.

Cho đến nay bài toán Gônbách- Ơ le vẫn chưa được chứng minh hoàn toàn.

Ví dụ.

Công nhận mệnh đề nói trên của Ơ le, hãy chứng minh bài toán Gôn bách.

Giải.

Cho số tự nhiên n > 5, ta sẽ chứng minh rằng n viết được dưới dạng tổng của 3 số nguyên tố. Xét hai trường hợp:

a) Nếu n chẵn thì n = 2 + m với m chẵn, m > 3.

b) Nếu n lẻ thì n = 3 + m với m chẵn, m > 2.

Theo mệnh đề Ơ le, m chẵn, m > 2 nên m viết được dưới dạng tổng của 3 số nguyên tố.

**II. SỐ NGUYÊN TỐ-HỢP SỐ**

**A.TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

1.Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 có 2 ước dương là 1 và chính nó.

Số nguyên tố nhỏ nhất là 2, đó là số nguyên tố chẵn duy nhất.Tất cả số nguyên tố còn lại đều là số lẻ.

2.Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 có nhiều hơn 2 ước dương.

Ước nguyên tố nhỏ nhất của một hợp số a là một số không vượt quá $\sqrt{a}$ .

Phân tích một số ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng tích của nhiều thừa số, mỗi thừa số là một số nguyên tố hoặc là lũy thừa của một số nguyên tố.

Dù phân tích một thừa số ra thừa số nguyên tố bằng cách nào thì cuối cùng ta cũng được một kết quả duy nhất.

Hai hay nhiều số được gọi là nguyên tố cùng nhau khi UCLN của chúng bằng 1. Hai số tự nhiên liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

<u>Hệ quả.</u>

Số a>1 không có ước nguyên tố nào từ 2 đến $\sqrt{a}$ thì a là một số nguyên tố.

Tập hợp số nguyên tố là vô hạn.

**B.CÁC DẠNG TOÁN.**

Dạng 1. sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên.

i)Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n.

ii) Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng $4n\pm 1$.

iii) Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $6n\pm 1$.

**<u>Bài 1</u>** Cho p là số nguyên tố và một trong 2 số 8p + 1 và 8p - 1 là 2 số nguyên tố, hỏi số nguyên tố thứ 3 là số nguyên tố hay hợp số?

**Giải.**

Với p = 3 ta có 8p + 1 =25 là hợp số, còn 8p-1 là số nguyên tố.

Với $p\neq 3$ ta có 8p-1,8p,8p+1 là 3 số nguyên tố liên tiếp nên có một số chia hết cho 3.Do p là nguyên tố khác 3 nên 8p không chia hết cho 3,do đó 8p-1 hoặc 8p+1 có một số chia hết cho 3. Vậy số thứ 3 là hợp số.

**Bài 2.** Hai số $2^n-1$ và $2^n+1(n>2)$ có thể đồng thời là số nguyên tố được không? Tại sao?

**Giải.**

Trong 3 số nguyên liên tiếp $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ có một số chia hết cho 3, nhưng $2^n$ không chia hết cho 3, do đó $2^n - 1$ hoặc $2^n + 1$ có một số chia hết cho 3 và lớn hơn 3. Vậy $2^n - 1, 2^n + 1$ không đồng thời là số nguyên tố.

**Bài 3.** Chứng minh rằng nếu p và p+2 là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.

**Giải.**

Ta có: p + (p + 2) = 2(p + 1).

. p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số nguyên tố lẻ suy ra: $p+1 \vdots 2 \Rightarrow 2(p+1) \vdots 4$ *

. p, p+1, p+2 là 3 số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3, mà p và p+2 không chia hết cho 3 nên: $p+1 \vdots 3 \Rightarrow 2(p+1) \vdots 3$ **

Từ * và** suy ra: $2(p+1) \vdots 12$. (đpcm)

**Bài 4.** Tìm số nguyên tố p sao cho p+10 và p+14 là các số nguyên tố.

**Giải.**

Với p = 3 thì p+3=13 và p+14=17 là các số nguyên tố.

Với p > 3 thì $p = 3k \pm 1$.

Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 14 = 3k + 15 \vdots 3$;

Nếu $p = 3k - 1$ thì $p + 10 = 3k + 9 \vdots 3$ ;

Vậy với $p = 3$ thì $p + 10$ và $p + 14$ là số nguyên tố.

**Bài 5.**

a) Tìm 3 số lẻ liên tiếp đều là các số nguyên tố.

b) Tìm số nguyên tố p sao cho p vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố.

**Giải.**

a) Trong 3 số lẻ liên tiếp có một số chia hết cho 3. Vậy trong 3 số nguyên tố đã cho phải có một số chia hết cho 3 và 3 số nguyên tố lẻ liên tiếp là 3, 5, 7.

b) giả sử $p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ với $p_1, p_2, p_3, p_4$ là các số nguyên tố. Vì $p_1, p_2$ là số nguyên tố nên $p > 2$, suy ra p lẻ. Trong hai số $p_1, p_2$ phải có một số chẵn, trong hai số $p_3, p_4$ cũng phải có một số chẵn. Chẳng hạn $p_2 = p_4 = 2$. Khi đó: $p = p_1 + 2 = p_3 - 2 \Rightarrow p_4 + 1 = p_3$. Ta có $p_1, p_1 + 2, p_1 + 4$ là các số nguyên tố lẻ liên tiếp nên theo câu a) $p_1 = 3$ từ đó $p = 5$. Thử lại: $5 = 3 + 2 = 7 - 2$.

**Bài 6.**

Tìm các số tự nhiên k để dãy: $k+1, k+2, k+3, ..., k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Giải.

Với k=0 ta có dãy $1, 2, 3, ..., 10$ chứa 4 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7.

Với k =1 ta có dãy 2, 3, 4, ..., 11 chứa 5 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7, 11.

Với k=2 ta có dãy 3, 4, 5, ..., 12 chứa 4 số nguyên tố là 3, 5, 7, 11.

Với $k \geq 3$ dãy $k+1, k+2, k+3, ..., k+10$ chứa 5 số lẻ liên tiếp, các số lẻ này lớn hơn 3 nên chia có một số chia hết cho 3, mà 5 số chẵn trong dãy hiển nhiên không là số nguyên tố. Vậy trong dãy ít hơn 5 số nguyên tố.

Tóm lại k=1 thì dãy $k+1, k+2, ..., k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

**Bài 7.**

Ta gọi p,q là hai số tự nhiên liên tiếp, nếu giữa p và q không có số nguyên tố nào khác. Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp p, q, r sao cho $p^2+q^2+r^2$ cũng là số nguyên tố.

**Giải.**

Nếu 3 số nguyên tố p, q, r đều khác 3 thì p, q, r đều có dạng $3k \pm 1$ suy ra $p^2, q^2, r^2$ chia cho 3 đều dư 1. Khi đó $p^2+q^2+r^2 \vdots 3$ và $p^2+q^2+r^2 > 3$ nên $p^2+q^2+r^2$ là hợp số.

Vậy p=3, q=5, r=7, khi đó $p^2+q^2+r^2 = 3^2+5^2+7^2 = 83$ là số nguyên tố.

**Bài 8.** Tìm 3 số nguyên tố sao cho $p^q + q^p = r$.

**Giải.**

Giả sử có 3 số nguyên tố p, q, r sao cho $p^q + q^p = r$. Khi đó $r > 3$ nên r là số lẻ, suy ra p, q không cùng tính chẵn lẻ. Giả sử p=2 và q là số lẻ. Khi đó ta có $2^q + q^2 = r$. Nếu q không chia hết cho 3 thì $q^2 \equiv 1 \pmod 3$. Mặt khác vì q lẻ nên $2^q \equiv -1 \pmod 3$, từ đó suy ra $2^q + q^2 \vdots 3 \Rightarrow r \vdots 3$, vô lí. Vậy q=3, lúc đó $r = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

Vậy $p = 2, q = 3, r = 17$ hoặc $p = 3, q = 2, r = 17$.

**Bài 9.**

a) Chứng minh rằng số dư trong phép chia của một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố. Khi chia cho 30 thì kết quả ra sao?

b) Chứng minh rằng nếu tổng của n lũy thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì (n,30)=1.

Giải.

a) Giả sử p là số nguyên tố và $p = 30k + r$ với $0 < r < 30$. Nếu r là hợp số thì r có ước nguyên tố $q \leq \sqrt{30} \Rightarrow q = 2; 3; 5$. Nhưng với q =2; 3; 5 thì q lần lượt chia hết cho 2; 3; 5, vô lí.Vậy r = 1 hoặc r là số nguyên tố.

Khi chia cho 60 thì kết quả không còn đúng nữa, chẳng hạn p= 109= 60.1+ 49, 49 là hợp số.

b) Số nguyên tố p khi chia cho 30 chỉ có thể dư là 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Với r=1, 11, 19, 29 thì $p^2 \equiv 1 \pmod{30}$.

Với r =7, 13, 17, 23 thì $p^2 \equiv 19 \pmod{30}$.

Suy ra $p^4 \equiv 1 \pmod{30}$.

Giả sử $p_{1,} p_2, ... p_n$ là các số nguyên tố lớn hơn 5.

Khi đó $q = p_1{}^4 + p_2{}^4 + ... + p_n{}^4 \equiv n \pmod{30} \Rightarrow q = 30k + n$ là số nguyên tố nên (n,30)=1.

**Bài 10.**

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c sao cho $abc < ab + bc + ca$.

**Giải.**

Vì a, b, c có vai trò như nhau nên giả sử $a \le b \le c$.

Khi đó $ab+bc+ca \le 3bc \Rightarrow abc < 3bc \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a = 2$ (vì a là số nguyên tố). Với a =2 ta có $2bc < 2b + 2c + bc \Rightarrow bc < 2(b+c) \le 4c \Rightarrow b < 4 \Rightarrow b = 2$ hoặc b=3.

Nếu b=2 thì $4c < 2 + 4c$ thõa với c là số nguyên tố bất kì.

Nếu b=3 thì $6c < 6 + 5c \Rightarrow c < 6 \Rightarrow c = 3$ hoặc $c = 5$.

Vậy các cặp số (a, b, c) cần tìm là (2, 2, p), (2, 3, 3), (2, 3, 5) và các hoán vị của chúng, với p là số nguyên tố.

**Bài 11.**

Cho dãy số nguyên dương $a_1, a_2, ...., a_n$ được xác định như sau:

$a_1 = 2$, $a_n$ là ước nguyên tố lớn nhất của $a_1a_2a_3...a_{n-1} + 1$ với $n \ge 2$.

Chứng minh rằng $a_k \ne 5$ với mọi k.

**Giải.**

Ta có $a_1 = 2, a_2 = 3$, giả sử với $n \ge 3$ nào đó mà có số 5 là ước nguyên tố lớn nhất của số $A = 2.3.a_3....a_{n-1} + 1$ thì A không thể chia hết cho 2, cho 3. Vậy chỉ có thể xảy ra $A = 5^m$ với $m \ge 2$, suy ra $A - 1 = 5^m - 1 \vdots 4$.

Mà $A - 1 = 2.3.a_3....a_{n-1}$ không chia hết cho 4 do $a_{3,...}a_{n-1}$ là các số lẻ, vô lí. Vậy A không có ước nguyên tố của 5, tức là $a_k \ne 5$, $\forall k \in N^*$.

**Bài 12.**

Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố.

**Giải.**

Với p=2 ta có $2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 4$ không là số nguyên tố.

Với p=3 ta có $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

Với p>3 ta có $p^2 + 2^p = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$. Vì p lẻ và p không chia hết cho 3 nên $p^2 - 1 \vdots 3$ và $2^p + 1 \vdots 3$, do đó $2^p + p^2$ là hợp số.

Vậy, với p=3 thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

**Dạng 2. áp dụng định lí fermat.**

p là số nguyên tố và (a,p)=1 thì $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).

-

**Bài 1.**

Nhà toán học Pháp Fermat đã đưa ra công thức $2^{2^n} + 1$ để tìm các số nguyên tố với mọi n tự nhiên.

1. Hãy tính giá trị của công thức này khi n=4.
2. Với giá trị này hãy chứng tỏ ba tính chất sau:
   a) Tổng hai chữ số đầu và cuối bằng tổng các chữ số còn lại.
   b) Tổng bình phương các chữ số là số chính phương.

c) Hiệu giữa tổng các bình phương của hai chữ số đầu và cuối với tổng các bình phương của các chữ số còn lại bằng tổng các chữ số của số đó.

**Giải.**

1. Ta thay n= 4 vào công thức Fermat và được:

$2^{2^4}+1=65537$ là số nguyên tố.

2.Số nguyên tố 65537 có ba tính chất sau:

a) Tổng hai chữ số đầu và cuối 6+7=13 đúng bằng tỏng ba chữ số còn lại 5+5+3=13.

b) Tổng bình phương các chữ số $6^2+5^2+5^2+3^2+7^2=36+25+25+9+49=144$ là số chính phương vì $144=12^2$.

c) Tổng bình phương của hai chữ số đầu và cuối là $6^2+7^2=36+49=85$. Tổng các bình phương của ba chữ số còn lại là $5^2+5^2+3^2=25+25+9=59$. Tổng các chữ số đó là $6+5+5+3+7=26$.

Ta nhận thấy rằng $85-59=26$. Hiệu này đúng bằng tổng các chữ số của số nguyên tố 65537.

**<u>Bài 2</u>**

Cho $n\in N^*$, chứng minh rằng: $2^{2^{10n+1}}+19$ và $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5$ là những hợp số.

**Giải.**

Ta chứng minh $2^{2^{10n+1}}+19 \vdots 23$ với mọi $n\geq 1$.

Ta có: $2^{10}\equiv 1(\text{mod}\,1)\Rightarrow 2^{10n+1}\equiv 2(\text{mod}\,22)\Rightarrow 2^{10n+1}=22k+2,(k\in N)$.

Theo định lý Fermat:

$2^{22}\equiv 1(\text{mod}\,23)\Rightarrow 2^{2^{10n+1}}=2^{22k+2}\equiv 4(\text{mod}\,23)\Rightarrow 2^{2^{10n+1}}+19 \vdots 23$.

Mặt khác: $2^{2^{10n+1}}+19>23$ nên $2^{2^{10n+1}}+19$ là hợp số với mọi $n\in N*$.

Ta chứng minh: $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5 \vdots 11$ với mọi $n\geq 1$.

**<u>Bài 3</u>.**

Tìm số nguyên tố p sao cho $2^p+1$ chia hết cho p.

**Giải.**

Giả sử p là số nguyên tố thỏa: $2^p+1 \vdots p$.

Theo định lý Fermat:

$2^p\equiv 2(\text{mod}\,p)\Rightarrow 2^p-2 \vdots p\Rightarrow 3=(2^p+1)-(2^p-2) \vdots p\Rightarrow p=3$.

Với p=3 ta có $2^p+1=9 \vdots 3$.

**<u>Bài 4.</u>**

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 2. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n thỏa $n.2^n-1$ chia hết cho p.

**Giải.**

Ta có $2^{p-1}\equiv 1(\text{mod}\,p)$, ta tìm $n=(p-1)$sao cho $n.2^n\equiv 1(\text{mod}\,p)$.

Ta có: $n.2^n=m(p-1).2^{m(p-1)}(\text{mod}\,p)\Rightarrow n.2^n\equiv -m\equiv 1(\text{mod}\,p)\Rightarrow m=kp-1,(k\in N*)$.

Vậy, với $n=(kp-1)(p-1),(k\in N^*)$ thì $n.2^n-1\vdots p$.

**Bài 5.**

Cho p là số nguyên tố, chứng minh rằng số $2^p-1$ chỉ có ước nguyên tố có dạng $2pk+1$.

**Giải.**

Gọi q là ước nguyên tố của $2^p-1$ thì q lẻ, nên theo định lí Fermat:

$2^{q-1}-1\vdots q\Rightarrow(2^p-1,2^{q-1}-1)=2^{(p,q-1)}-1\vdots q\Rightarrow q-1\vdots p$, vì nếu $(q-1,p)=1$ thì $1\vdots q$, vô lí.

Mặt khác: q-1 chẵn suy ra $q-1\vdots 2p\Rightarrow q=2pk+1$.

**Bài 6.**

Giả sử p là số nguyên tố lẻ và $m=\dfrac{9^p-1}{8}$. Chứng minh rằng m là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $3^{m-1}\equiv 1$ (mod m).

**Giải.**

Ta có: $m=\dfrac{3^p-1}{2}.\dfrac{3^p+1}{4}=a.b$, với $a=\dfrac{3^p-1}{2},b=\dfrac{3^p+1}{4}$.

a, b đều là các số nguyên lớn hơn 1 nên m là hợp số.

Mà $m=9^{p-1}+9^{p-2}+...+9+1$ và p lẻ nên m lẻ và $m\equiv 1$ (mod 3).Theo định lí Fermat, ta có: $9^p-9\vdots p$.

$(p,8)=1$ nên $9^p-9\vdots 8p\Rightarrow m-1\vdots\dfrac{9^p-9}{8}\vdots p$.

Vì $m-1\vdots 2$ nên $m-1\vdots 2p$, khi đó: $3^{m-1}-1\vdots 3^{2p}-1\vdots\dfrac{9^p-1}{8}=m$. (đpcm).

**Bài 7.**

Chứng minh rằng dãy số $2003+23k$ với $k=1,2,3....$ chứa vô hạn số là lũy thừa của cùng một số nguyên tố.

**Giải.**

Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho:

$2003+23k=p^n$ (1).

Trong đó k,n là các số nguyên dương nào đó.

Từ (1) dễ thấy p không chia hết cho số nguyên tố 23 nên (p,23)=1.

Theo định lí nhỏ Fermat thì $p^{22}-1$ chia hết cho 23, suy ra $p^{22t}$ có dạng $p^{22t}=1+23s$ với mọi số nguyên dương t.

Từ đó $p^{22t+n}=(1+23s)p^n=p^n+23s.p^n=2003+23k+23s.p^n$ hay $p^{22t+n}=2003+23(k+sp^n)$ với mọi $t=1,2,3,...$.

Bài toán được giải đầy đủ khi ta chỉ ra sự tồn tại số nguyên tố p thõa mãn (1). Chẳng hạn:

Với p=2 có $2003+23.91=2^{12}$

Với p=3 có $2003+23.8=3^7$

Với p=4 có $2003+23.6=2141$

Với p=2003 thì tồn tại k theo định lí Fermat thỏa mãn $2003+23k=2003^{23}$.

**Bài 8.**

Tìm bảy số nguyên tố sao cho tích của chúng bằng tổng các lũy thừa bậc sáu của bảy số đó.

**Giải:**

Gọi bảy số nguyên tố là $p_{1,}p_{2,}p_{13,}.....,p_7$.

Ta có:

$$p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7 = p_1^6+p_2^6+p_3^6+p_4^6+p_5^6+p_6^6+p_7^6 \quad (*)$$

Ta cần dùng định lí Fecma nhỏ:

Nếu số nguyên a không chia hết cho 7 thì $a^6 \equiv 1(\bmod 7)$.(Có thể chứng minh trực tiếp điều này thông qua việc biến đổi $a^3=(7k+r)^3=7t\pm 1$ với mọi r thỏa mãn $0\le r\le 6$, còn t là số nguyên)

Giả sử trong bảy số nguyên tố trên có k số khác 7 với $0\le k\le 7$.

. Nếu k = 0, nghĩa là cả bảy số trên đều bằng 7 thì ta có

7. 7. 7. 7. 7. 7. 7 = $7^6+7^6+7^6+7^6+7^6+7^6+7^6$ thỏa mãn (*).

. Nếu k = 7, nghĩa là cả bảy số trên đều là số nguyên tố khác 7 thì vế trái của (*) không chia hết cho 7, còn vế phải của (*) chia hết cho 7 theo định lí Fec ma, điều này không xảy ra.

Vậy chỉ xảy ra bảy số nguyên tố trong đề bài đều là 7.

**Dạng 3: Phương pháp phân tích.**

**Bài 1.**

Tìm $n\in N^*$ để:

a) $n^4+4$ là số nguyên tố.

b) $n^{2003}+n^{2002}+1$ là số nguyên tố.

**Giải.**

a) Ta có:

$$n^4+4=(n^4+4n^2+4)-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2+2n)(n^2+2-2n).$$

Nếu $n^4+4$ là số nguyên tố thì $n^2-2n+2=1\Leftrightarrow n=1$.

Thử lại: Với $n=1$ thì $n^4+4=5$ là số nguyên tố.

Vậy, với n=1 thì $n^4+4$ là số nguyên tố.

b) Ta có: $n^{2003}+n^{2002}+1=n^2(n^{2001}-1)+n(n^{2001}-1)+n^2+n+1$.

Với $n>1$ ta có:

$n^{2001}-1 \vdots n^3-1 \vdots n^2+n+1$ do đó: $n^{2003}+n^{2002}+1 \vdots n^3+n+1$ và $n^2+n+1>1$ nên $n^{2003}+n^{2002}+1$ là hợp số.

Với n=1 thì $n^{2003}+n^{2002}+1=3$ là số nguyên tố.

**Bài 2.**

a) Tìm các số nguyên số p để 2p+1 là lập phương của một số tự nhiên.

b) Tìm các số nguyên tố p để 13p+1 là lập phương của một số tự nhên.

**Giải.**

a) Giả sử $2p+1=n^3$ (với $n\in N$); n là số lẻ nên $n=2m+1$ ($m\in N$), khi đó

$$2p+1=(2m+1)^3 \Rightarrow p=m(4m^2+6m+3).$$

Vì p là số nguyên tố nên $m=1$, suy ra $p=13$.

Thử lại: $2p+1=2.13+1=27=3^3$. Vậy $p=13$.

b) Giả sử $13p+1=n^3 (n\in N)$; $p\ge 2$ suy ra $n\ge 3$.

$$13p+1=n^3 \Rightarrow 13p=(n-1)(n^2+n+1).$$

13 và p là các số nguyên tố, mà $n-1>1$ và $n^2+n+1>1$ nên $n-1=13$ hoặc $n-1=p$.

i) Với $n-1=13$ thì $n=14$, khi đó $13p=n^3-1=2743 \Rightarrow p=211$ là số nguyên tố.

ii) Với $n-1=p$ thì $n^2+n+1=13 \Rightarrow n=3$, khi đó $p=2$ là số nguyên tố.

Vậy với p=2, p=211 thì 13p+1 là lập phương của một số tự nhiên.

**Bài 3.**

Tìm tất cả các số nguyên $x, y$ thỏa $x^2-2y^2=1$.

**Giải.**

Giả sử $x, y$ là các số nguyên tố thỏa: $x^2-2y^2=1$. Khi đó $x^2=2y^2+1$, suy ra $x$ là số lẻ, đặt $x=2n+1 (n\in N^*)$. Ta có:

$(2n+1)^2=2y^2+1 \Rightarrow 4n^2+4n+1=2y^2+1 \Rightarrow y^2=2(n^2+n)\vdots 2 \Rightarrow y\vdots 2$, mà y là số nguyên tố nên suy ra y=2.

Với y=2, ta có $x=3$.

Thử lại với $x=3, y=2$ thì $x^2-2y^2=1$.

**Bài 4.**

Tìm các số nguyên tố $x, y, z$ thỏa $x^y+1=z$.

**Giải.**

Vì $x, y$ là các số nguyên tố nên $x\ge 2, y\ge 2$ suy ra $z\ge 5$.

z là số nguyên tố lẻ nên $x^y$ là số chẵn suy ra x=2, khi đó $z=2^y+1$.

Nếu y lẻ thì $2^y+1\vdots 3$, suy ra $z\vdots 3$, vô lí. Vậy y chẵn, suy ra y=2, $z=2^2+1=5$.

Vậy các số nguyên tố cần tìm là $x=y=2; z=5$.

**Bài 5.**

Chứng minh rằng nếu $1+2^n+4^n (n\in N^*)$ là số nguyên tố thì $n=3^k$ với $k\in N$.

**Giải.**

Đặt $n=3^k.m$ với (m, 3)=1. Giả sử m>1, xét hai trường hợp:

i) $m=3l+1 (l\in N^*)$. Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+1)}+4^{3^k(3l+1)}=1+a^{(3l+1)}+a^{(6l+2)}$, (với $a=2^{3^k}$), suy ra

$1+2^n+4^n=a(a^{3l}-1)+a^2(a^{6l}-1)+a^2+a+1\vdots a^2+a+1\Rightarrow 1+2^n+4^n$ là hợp số.

ii) $m=3l+2,(l\in N^*)$. Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+2)}+4^{3^k(3l+2)}=1+a^{3l+2}+a^{6l+4}=a(a^{6l+3}-1)+a^2(a^{3l}-1)+a^2+a+1\vdots a^2+a+1$

(với $a=2^{3^k}$).

Suy ra $1+2^n+4^n$ là hợp số.

Vậy m=1 tức là n=$3^k$.

**Bài 6.**

Cho $a,b,c,d\in N^*$ thỏa mãn $ab=cd$. Chứng minh rằng: $A=a^n+b^n+c^n+d^n$ là hợp số với mọi $n\in N$.

Giải.

Giả sử (a, b)=t, khi đó: $a=ta_1, c=tc_1$ với ( $(a_1,c_1)=1$.

Từ ab=cd suy ra $a_1b=c_1d\Rightarrow b\vdots c_1$.

Đặt: $b=kc_1\Rightarrow c_1d=a_1.kc_1\Rightarrow d=ka_1$.

Khi đó: $A=a^n+b^n+c^n+d^n=t^na_1^n+k^nc_1^n+t^nc_1^n+k^na_1^n=(k^n+t^n)(a_1^n+c_1^n)$.

Vì $k,t,a_1,c_1\in N^*$ nên A là hợp số.

**Bài 7.**

Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $\frac{n(n+1)}{2}-1\quad(n\ge 1)$.

Giải.

Ta có:

$p=\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{n^2+n-2}{2}=\frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

Với n=2 ta có p=2.

Với n=3 ta có p=5.

Với n > 3 thì $\frac{n-1}{2}>1$ và n+2 >1 nên p là hợp số.

Vậy với n=2, n=3 thì p là số nguyên tố có dạng $\frac{n(n+1)}{2}-1$.

**Bài 8.**

Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\frac{ab}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

**Giải.**

Vì a,b có vai trò như nhau nên có thể giả sử a > b.

Giả sử $\frac{ab}{|a-b|}=p$ với p là số nguyên tố.*

Suy ra $ab\vdots p\Rightarrow a\vdots p$ hoặc $b\vdots p\Rightarrow p\in\{2,3,5,7\}$.

Từ * ta có ab=ap-bp $(a+p)(p-b)=p^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a+p=p^2 \\ p-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=p^2-p \\ b=p-1 \end{cases}$

Với p=2 ta có $\overline{ab}=21$ hoặc $\overline{ab}=12$.

Với p=3 ta có $\overline{ab}=62$ hoặc $\overline{ab}=26$.

Với p=5 và p=7 ta có a có 2 chữ số (loại).

Vậy các số $\overline{ab}$ cần tìm là 12, 21, 26, 62.

**Bài 9.**

Cho các số $p=b^c+a, q=a^b+c, r=c^a+b$ là các số nguyên tố $(a,b,c \in N^*)$. Chứng minh rằng ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

**Giải.**

Ba số a, b, c có ít nhất hai số có cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử a,b cùng chẵn hoặc cùng lẻ, khi đó $p=b^c+a$ là số nguyên tố chẵn, vậy p=2.

Từ đó suy ra a =b =1; q =c +1 và r= c+ 1 nên q=r.

**Bài 10.**

a) Cho $2^k+1$ là số nguyên tố ( gọi là nguyên tố Fermat). Chứng minh rằng $k=0$ hoặc $k = 2^n$.

b) Cho $2^k - 1$ là số nguyên tố (gọi là số nguyên tố Mersenne).

Chứng minh rằng k là số nguyên tố.

Giải.

a) Giả sử phản chứng rằng k > 0 và $k \neq 2^n$ với mọi n.

Khi đó $k = 2^n . t$, với t lẻ > 1. Vô lí với $2^k + 1$ là số nguyên tố.

Vậy k = 0 hoặc $k = 2^n$.

b) Giả sử k = m . t với 1 < t <k, khi đó $2^k - 1 = \left(2^t\right)^m - 1 \vdots 2^t - 1 \Rightarrow 2^k - 1$ là hợp số vì $2^t-1 >1$.

Vậy k là số nguyên tố.

**Dạng 4. Giải phương trình nghiệm nguyên nhờ sử dụng tính chất số nguyên tố.**

Trong nhiều trường hợp khi giải phương trình nghiệm nguyên dẫn đến việc xét các số nguyên tố của số dạng $n=a^{2^t}+b^{2^t}$.

Xin nêu ra một số tính chất của ước số nguyên tố của số n để sử dụng vào giải phương trình.

Mệnh đề 1. Nếu số nguyên tố $p=2^t k+1$ với các số nguyên dương t, k và k lẻ, là ước của số $n=a^{2^t}+b^{2^t}$ thì p là ước số chung của a và b.

Chứng minh: Giả sử p không là ước số của số a thì p cũng không là ước số của số b $\Rightarrow (a,p)=(b,p)=1$. Theo định lí nhỏ Fermat thì $a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p)$ hay $a^{2^t k} \equiv 1$ (mod p).

Tương tự $b^{2^t k} \equiv 1$ (mod p) suy ra $a^{2^t k}+b^{2^t k} \equiv 2$ (mod p) *

Mặt khác sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ ta có $(a^{2^t})^k + (b^{2^t})^k = (a^{2^t} + b^{2^t}).M = n.M$ trong đó k lẻ và M là số nguyên.

Theo giả thiết $n \vdots p \Rightarrow (a^{2^t} + b^{2^t}) \vdots p$, mâu thuẫn với *. Tương tự p không là ước của số p thì p không là ước của số a cũng dẫn đến mâu thuẫn. Vậy số nguyên tố p phải là ước số chung của số a và số b.

<u>Mệnh đề 2</u>: Giả sử a và b nguyên tố cùng nhau thì mọi ước số nguyên tố lẻ của $a^2 + b^2$ chỉ có dạng 4m + 1 (mà không có dạng 4m + 3) trong đó m là số nguyên dương.

Chứng minh: Xét ước số nguyên tố p = 4m + 3 = 2(2m + 1) +1. Theo mệnh đề 1 nếu p là ước số nguyên tố của $n = a^2 + b^2$ thì p là ước số chung của a và b $\Rightarrow p = 1$, mâu thuẫn. Vì p lẻ nên p chỉ có dạng p = 4m + 1.

Ta thử vận dụng các tính chất trên vào giải một số phương trình nghiệm nguyên dưới đây.

**<u>Bài 1</u>.** Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 - y^3 = 7 \qquad (1)$$

**Giải:**

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 + 1 = y^3 + 2^3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = (y+2)(y^2 - 2y + 4)$ (2)

Nếu y chẵn thì vế phải của (2) chia hết cho 4 $\Rightarrow x$ lẻ, $x = 2t + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 4t^2 + 4t + 2$ không chia hết cho 4, mâu thuẫn.

Vậy y là số lẻ, $y = 2k + 1 \Rightarrow y^2 - 2y + 4 = 4k^2 + 3$ nên nó phải có ước số nguyên tố lẻ dạng 4m + 3 (vì tích các số dạng 4m + 1 lại có dạng 4k + 1). Suy ra $x^2 + 1$ có ước số nguyên tố dạng p = 4m + 3, trái với mệnh đề 2.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

**<u>Bài 2</u>.**

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x, y)$ sao cho $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$ là số nguyên dương và là ước số của 1995.

**Giải.**

Giả sử $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y} = k$ nguyên dương và k là ước số của 1995 = 5.3.7.19 = 5n với n= 3.7.19. Các số nguyên tố 3, 7, 19 đều có dạng 2(2m + 1) + 1 = 4m +3

Gọi ước chung lớn nhất của $x, y$ là $d = (x, y)$ thì $x = du, y = dv$ với $(u, v) = 1$.

Theo giả thiết $x^2 + y^2 = k(x - y) \Leftrightarrow d(u^2 + v^2) = k(u - v)$ (1).

Xét hai trường hợp:

1) k là ước số của n $\Rightarrow k$ có ước số nguyên tố dạng 4m + 3.

Áp dụng mệnh đề 2 vào (1) thì $u^2 + v^2$ không chứa các ước số nguyên tố của k nên k là ước số của d $\Rightarrow d = k.t$. Từ (1) có $t(u^2 + v^2) = u - v$, do đó $u^2 < u^2 + v^2 \le u - v < u \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

2) k=5m với m là ước số của m. Lúc đó (1) trở thành $d(u^2+v^2)=5m(u-v)$. Lập luận như trên thì m là ước số của d. Suy ra d= m.t. Từ đó ta có

$$t(u^2+v^2)=5(u-v) \qquad (2)$$

Từ (2) có $u^2+v^2 \le 5(u-v)$

$$A=u^2+v^2-5(u-v)\le 0 \qquad (3)$$

Mặt khác

$4A=4u^2-20u+25+4v^2+20v+25-50=(2u-5)^2+(2v+5)^2-50\ge 1^2+7^2-50\ge 0 \Rightarrow A\ge 0$ Kết hợp với (3) phải có A= 0. Điều này xảy ra chỉ khi $2u-5=\pm 1$ và v=1, nghĩa là $\begin{cases} u=3 \\ v=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$

Từ A = 0 và (2) suy ra $t=1 \Rightarrow d=m$. Các số $x, y$ phải tìm là $\begin{cases} x=3m \\ y=m \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2m \\ y=m \end{cases}$ trong đó m là ước của n = 3.7.19, nghĩa là m lấy 8 giá trị sau: 1, 3, 7, 19, 21, 57, 133, 399.

**Bài 3.**

Tìm số nhỏ nhất trong tập hợp các số chính phương dạng 15a + 16b và 16a -15b với a, b là các số nguyên dương nào đó.

**Giải.**

Giả sử 15a + 16b =$m^2$ và 16a -15b = $n^2$ (1) với m, n là các số nguyên dương.

Khi đó:

$$m^4+n^4=(15a+16b)^2+(16a-15b)^2=(15^2+16^2)(a^2+b^2)=481(a^2+b^2)$$

hay $m^4+n^4=13.37(a^2+b^2)$ (2)

Các số nguyên tố 13 và 37 đều có dạng $p=2^2k+1$ với k lẻ.

Giả sử $(m,n)=d \Rightarrow m=du, n=dv$ với (u,v) =1 thì (2) trở thành $d^4(u^4+v^4)=481(a^2+b^2)$ (3)

Vì (u,v) = 1 nên $u^4+v^4$ không chứa các ước số nguyên tố 13 và 37 do đó 481 là ước của d $\Rightarrow d=481.t$. Để cho m, n nhỏ nhất, ta lấy t = 1. Lúc đó (3) trở thành $481^3(u^4+v^4)=a^2+b^2$ (4)

Từ (1) có $m^2-n^2=31b-a$ hay $481^3(u^2-v^2)=31a-b$ (5).

Có thể chọn $u=v=1$ để m, n nhỏ nhất, lúc đó a = 31b và $a^2+b^2=481^3.2$. Từ đó có b = 481 và a = 31.481 suy ra m = n = 481.

**Bài 4.**

Tìm số có 3 chữ số mà có đúng 5 ước.

**Giải.**

Giả sử p và q là hai số nguyên tố khác nhau, khi đó pq có 4 ước đó là 1, p, q, pq và số $p^2q$ có 6 ước đó là 1, p, $p^2$, q, pq, $p^2p$. Do đó số phải tìm có dạng $p^n$.

Vì số $p^n$ có n + 1 ước nên muốn có đúng 5 ước thì rõ ràng n = 4.

Số $p^4$ là số có 3 chữ số khi p = 5.

Vậy số phải tìm là $5^4 = 625$.

**Bài 5.**

Tìm 3 số nguyên tố biết rằng một trong ba số đó bằng hiệu các lập phương của hai số kia.

**Giải.**

Gọi ba số nguyên tố đó là a, b, c. Ta có $c = a^3 - b^3$ chẳng hạn. Thế thì $c = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Muốn c là số nguyên tố thì a - b = 1, điều này chỉ xảy ra khi các số nguyên tố là a = 3, b = 2. Suy ra: c = 27 - 8 = 19.

Vậy ba số nguyên phải tìm là 2; 3; 19.

**Bài 6.**

Xét dãy số nguyên tố từ nhỏ đến lớn: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17;... ta lập hai dãy số 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 12 = 5 + 7; 18 = 7 + 11; 24 = 11 + 13; ... và 6 = 2.3; 15 = 3.5; 35 = 5.7; 77 = 7.11; 143 = 11.13; ... Có hay không một số hạng nào đó của dãy thứ nhất bằng một số hạng nào đó của dãy thứ hai.

**Giải.**

Trước hết ta nhận xét rằng:

. Ở dãy thứ nhất các số hạng theo thứ tự là tổng của hai số nguyên tố liền nhau và tất cả số hạng của dãy (trừ số hạng đầu là 5) đều là chẵn.

. Ở dãy thứ hai các số hạng theo thứ tự là tích của hai số nguyên tố liền nhau và tất cả số hạng của dãy (trừ số hạng đầu là 6) đều là lẻ.

Do đó ta có thể kết luận rằng: không có một số hạng nào của dãy thứ nhất bằng một số hạng của dãy thứ hai.

**Bài 7.**

Tìm số nguyên tố p biết rằng p + 2 và p +4 cũng là số nguyên tố.

**Giải.**

Do $p \neq 1$ vì 1 không phải là số nguyên tố, nên p có thể có dạng p = 3k.

Nếu p = 3k + 1 thì p + 2 = 3k + 3 là hợp số.

Nếu p = 3k + 2 thì p + 4 = 3k + 6 cũng là hợp số.

Do đó p chỉ có thể bằng 3 và p + 2 = 3 + 2 =5 là số nguyên tố,

p + 4 =3 +4 =7 là số nguyên tố.

**Bài 8.**

Có bao nhiêu số có ba chữ số mà mỗi chữ số của nó là ước nguyên tố của chúng?

**Giải.**

Các ước nguyên tố có 1 chữ số là: 2; 3; 5 và 7. Nếu số phải tìm bắt đầu bằng chữ số 2 thì nó phải chia hết cho 2 và tận cùng bằng 2.Chữ số thứ hai phải là 2, vì số 232 không chia hết cho 3, số 252 không chia hết cho 5 và số 272 không chia hết cho 7. Vậy số phải tìm là 222.

Tương tự số phải tìm mà bắt đầu bằng chữ số 5 thì đó là số 555.

Bây giờ nếu bắt đầu bằng 3 thì hai chữ số cuối phải tạo thành một số chia hết cho 3, do đó chúng chỉ có thể là 3 và 3 hoặc 5 và 7.

Thử lại thấy rằng chỉ có số 333 là thích hợp.

Cuối cùng nếu bắt đầu bằng 7 thì hai chữ số cuối phải tạo thành một số chia hết cho 7. Thử lại thấy rằng chỉ có hai số 777 và 735 là thích hợp.

Tóm lại có 5 số thỏa mãn bài ra là: 222; 333; 555; 735; 777.

**Bài 9.**

Một xí nghiệp điện tử trong một ngày đã giao cho một cửa hàng một số máy tivi. Số máy này là một số có ba chữ số mà nếu tăng chữ số đầu lên n lần, giảm các chữ số thứ hai và thứ ba đi n lần thì sẽ được một số mới lớn gấp n lần số máy đã giao. Tìm n và số máy tivi đã giao.

**Giải.**

Giả sử số máy tivi đã giao là $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Ta có:

$100(a+n)+10(b-n)+(c-n) = n(100a+10b+c)$ hay

$100a+100n+10b-10n+c-n = 100an+10bn+cn$.

Từ đó ta được:

$$100a+10b+c = \frac{89n}{n-1}.$$

Nhưng 89 là số nguyên tố nên hoặc n - 1 phải bằng 1 hoặc n phải chia hết cho n-1.

Trong cả hai trường hợp ta đều tìm được n =2 và $\overline{abc} = 178$.

Vậy số máy tivi đã giao là 178.

**Bài 10.**

Những số nguyên tố nào có thể là ước của số có dạng 111...11?

**Giải.**

Trước hết ta nhận xét rằng số có dạng 111...11 không chia hết cho 2 số nguyên tố 2 và 5.

Giả sử p là số nguyên tố khác 2 và 5. Ta hãy xét p + 1 số sau:

1, 11, 111, 1111, ....,111...11.

ít nhất hai trong các số trên khi chia cho p có số dư giống nhau, thế thì hiệu của chúng 11...1100..0 chia hết cho p.

vậy số có dạng 111...11 có ước là tất cả số nguyên tố trừ hai số nguyên tố 2 và 5.

**Dạng 5. Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau.**

Hai số nguyên tố cùng nhau là hai số có ước chung lớn nhất bằng 1. Nói cách khác chúng chỉ có ước chung duy nhất bằng 1.

**Bài 1.**

Chứng minh rằng:

a)Hai số tự nhiên liên tiếp (khác 0) là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) 2n + 1 và 3n + 1 ( $n \in N$ ) là hai số nhuyên tố cùng nhau.

**Giải.**

a)Gọi $d \in uc(n, n+1) \Rightarrow (n+1) - n \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$. Vậy n và n + 1 là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Gọi $d \in uc(2n+1, 2n+3) \Rightarrow (2n+3) - (2n+1) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in \{1, 2\}$. Nhưng $d \neq 2$ vì d là ước của số lẻ. Vậy d=1.

c) Gọi $d \in ƯC(2n+1, 3n+1) \Rightarrow 3(2n+1) - 2(3n+1) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$.

**Bài 2.**

Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau.

a) a và a+b.

b) $a^2$ và a+b.

c) ab và a+b.

**Giải.**

a) Gọi $d \in ƯC(a, a+b) \Rightarrow (a+b) - a \vdots d \Rightarrow b \vdots d$. Ta lại có $a \vdots d$ nên $d \in ƯC(a, b)$, do đó d = 1(vì a, b là hai số nguyên tố cùng nhau).

Vậy (a, a + b) = 1.

b) Giả sử $a^2$ và a + b cùng chia hết cho số nguyên tố d thì a chia hết cho d, do đó b cũng chia hết cho d. Như vậy a và b cùng chia hết cho số nguyên tố d, trái với giả thiết (a, b) = 1.

Vậy $a^2$ và a + b là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) Giả sử ab và a + b cùng chia hết cho số nguyên tố d. Tồn tại một trong hai thừa số a và b, chẳng hạn là a, chia hết cho d, do đó b cũng chia hết cho d, trái với (a, b) = 1.

Vậy (ab, a + b) = 1.

**Bài 3.**

Tìm số tự nhiên n để các số 9n + 24 và 3n + 4 là các số nguyên tố cùng nhau.

**Giải.**

Giả sử 9n + 24 và 3n + 4 cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$$9n + 24 - 3(3n+4) \vdots d \Rightarrow 12 \vdots d \Rightarrow d \in \{2; 3\}.$$

Điều kiện để (9n + 24, 3n + 4) = 1 là $d \neq 2$ và $d \neq 3$. Hiển nhiên $d \neq 3$ vì 3n + 4 không chia hết cho 3. Muốn $d \neq 2$ phải có ít nhất một trong hai số 9n + 4 và 3n + 4 không chia hết cho 2. Ta thấy:

9n + 4 là số lẻ $\Leftrightarrow$ 9n lẻ $\Leftrightarrow$ n lẻ,

3n + 4 là số lẻ $\Leftrightarrow$ 3n lẻ $\Leftrightarrow$ n lẻ.

Vậy điều kiện để (9n + 4, 3n + 4) = 1 là n là số lẻ.

**Phần bài tập tự luyện.**

**Dạng 1:**

1. Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a) p + 2 và p + 10.

b) p + 10 và p + 20.

c) p +2, p + 6, p +8, p + 12, p + 14.

2. Chứng minh rằng nếu n và $n^2$ + 2 là các số nguyên tố thì $n^3+2$ cũng là số nguyên tố.

3. Chứng minh rằng nếu a, a + k, a + 2k ( $a,k \in N*$ ) là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì k chia hết cho 6.

4. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì (p - 1)(p + 1) chia hết cho 24.

5. Một số nguyên tố p chia cho 42 có dư là một hợp số r. Tìm r.

6. Một số nguyên tố p chia cho 30 có số dư là r. Tìm r biết rằng r không là số nguyên tố.

7. Chứng minh rằng số $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}$ là hợp số với $n \geq 1$.

8. Tìm n số sao cho 10101...0101 (n chữ số 0 và n + 1 chữ số 1 xen kẽ nhau) là số nguyên tố.

9. Các số sau là số nguyên tố hay hợp số.

a) A = 11...1(2001 chữ số 1);

b) B = 11...1 (2000 chữ số 1);

c) C = 1010101;

d) D = 1112111;

e) E = 1! + 2! + 3! +...+100!;

g) G = 3. 5. 7. 9 - 28;

h) H= 311141111.

**Dạng 2.**

10. Cho $n \in N*$,chứng minh rằng các số sau là hợp số:

a) A = $2^{2^{2n+1}}+3$;

b) B = $2^{2^{4n+1}}+7$;

c) C = $2^{2^{6n+2}}+13$.

11. p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng $p^4 \equiv 1$ (mod 240).

12. Chứng minh rằng dãy $a_n=10^n+3$ có vô số hợp số.

13. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p có vô số dạng $2^n-n$ chia hết cho p.

**Dạng 3.**

14. Tìm $n \in N^*$ để $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

15. Tìm các số $x, y \in N^*$ sao cho $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố.

16. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1 \quad (n \geq 1)$.

17. Cho $n \in N^*$, chứng minh $A = n^4 + 4^n$ là hợp số với n>1.

**Dạng 4.**

18. Giải phương trình nghiệm nguyên $4(a-x)(x-b)+b-a = y^2$ (1)

trong đó a, b là các số nguyên cho trước và a > b.

19. Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $x^2 + y^2 = 585$

b) $x^2 + y^2 = 1210$.

**Dạng 5.**

19. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, các số sau là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) 7n + 10 và 5n + 7 ;

b) 2n + 3 và 4n + 8.

20. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) b và a - b (a > b) ;

b) $a^2 + b^2$ và ab.

21. Chứng minh rằng nếu số c nguyên tố cùng với a và với b thì c nguyên tố cùng nhau với tích ab.

22. Tìm số tự nhiên n, sao cho:

a) 4n - 5 chia hết cho 13 ;

b) 5n + 1 chia hết cho 7 ;

c) 25n + 3 chia hết cho 53.

23. Tìm các số tự nhiên n để các số sau nguyên tố cùng nhau:

a) 4n + 3 và 2n + 3 ;

b) 7n + 13 và 2n + 4 ;

c) 9n + 24 và 3n + 4 ;

d) 18n + 3 và 21n + 7

24. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n để n + 15 và n + 72 là hai số nguyên tố cùng nhau.

25.

a) Viết các số 7, 8, 9, 10 thành tổng hai số nguyên tố cùng nhau lớn hơn 1.

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 6 đều biểu diễn được dưới dạng tổng hai số nguyên tố cùng nhau lớn hơn 1.

**Bài tập trong các đề thi học sinh giỏi**

26. Tìm tất cả các số nguyên tố $p,\ q$ sao cho $7p+q$ và $pq+11$ đều là số nguyên tố.

27. Biết $\overline{abcd}$ là nguyên tố có bốn chữ số thỏa mãn $\overline{ab};\ \overline{cd}$ cũng là các số nguyên tố và $b^2=\overline{cd}+b-c$. Hãy tìm $\overline{abcd}$

28. Giả sử $p$ và $p^2+2$ là các số nguyên tố. Chứng tỏ $p^3+p^2+1$ cũng là số nguyên tố.

29. Tìm hai số nguyên tố $x,\ y$ thỏa mãn $x^2-y^2=45$.

30. Chứng minh rằng hai số $2n+1$ và $10n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên $n$.

31. Cho 4 số tự nhiên $a,b,c,d\in N^*$ thỏa mãn đẳng thức $a^2+b^2=c^2+d^2$ Chứng minh rằng số $a+b+c+d$ là hợp số.

32. Cho số nguyên tố $p>3$. Hỏi $p^2+2018$ là số nguyên tố hay hợp số.

33. Tìm số nguyên tố $p$ sao cho các số sau cũng là số nguyên tố: $p+14;\ p+40$

34. Cho $p$ và $p+4$ là các số nguyên tố $(p>3)$. Chứng minh rằng $p+14$ là hợp số.

35. Tìm các số nguyên tố $x$ và $y$ để $P=xy+5x-2y-10$ cũng là số nguyên tố.

36. Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên $n$ thì $3n+2$ và $5n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

37. Tìm số nguyên tố $p$ sao cho $2p-1;\ p^2+2$ là các số nguyên tố.

38.Tìm số nguyên tố $x,y$ biết $19x^4+57=y^2$.

## HƯỚNG DẪN GIẢI.

**Dạng 1.**

1. a) b) Đáp số: p = 3. Xét p dưới các dạng: p = 3k, p = 3k + 1, p = 3k + 2 $(k\in N)$.

c) Đáp số: p = 5. Xét p dưới các dạng : p = 5k, p = 5k + 1, p = 5k + 2, p = 5k + 3, p = 5k + 4 $(k\in N)$.

2. n = 3.

3. Số nguyên tố lớn hơn 3 có dạng 6n +1, 6n + 5. Do đó 3 số a, a + k, a + 2k phải có ít nhất 2 số có cùng một dạng, hiệu là k hoặc 2k chia hết cho 6, suy ra k chia hết cho 3.

4. Ta có $(p-1)p(p+1)\vdots 3$ mà (p,3) = 1 nên

$$(p-1)(p+1)\vdots 3 \qquad (1).$$

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, p - 1 và p + 1 là hai số chẵn liên tiếp. Trong hai số chẵn liên tiếp, có một số là bội của 4 nên tích chúng chia hết cho 8 (2).

Từ (1) và (2) suy ra (p -1)(p + 1) chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau 3 và 8.

Vậy $(p-1)(p+1)\vdots 24$.

5. Ta có p = 42k + r = 2. 3. 7k + r (k, r $\in$N, 0 < r < 42). Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2, 3, 7.

Các hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39.

Loại đi các số chia hết cho 3, cho 7, chỉ còn 25. Vậy r = 25.

6. Ta có p = 30k + r = 2. 3. 5k + r (k,r $\in$N,0 < r < 30). Vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 2, 3, 5.

Các hợp số nhỏ hơn 30 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27.

Loại đi các số chia hết cho 3, 5 thì không còn số nào nữa. Vậy r không phải là hợp số.

r không phải là hợp số cũng không phải là số nguyên tố, suy ra r =1.

7. $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}=\underbrace{11...1}_{n+1}\underbrace{0...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n+1}=\underbrace{11...1}_{n+1}(10^{n}+1)$ .

suy ra đpcm.

8. $p=1010...101=\dfrac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+1)}{9.11}$ .

n =1: p = 101 là số nguyên tố.

n > 1: p là hợp số.

9.Tất cả đều là hợp số.

a) $A=\underbrace{11...1}_{2001}=\underbrace{1+1+...+1}_{2001}\vdots 3$.

b) $B=\underbrace{11...1}_{2000}\vdots 11$.

c) $C=1010101\vdots 101$.

d) $D=1112111=1111000+1111\vdots 1111$.

e) $E\vdots 3$ vì $1!+2!=3\vdots 3$, còn $3!+4!+...+100!$ cũng chia hết cho 3.

g) G = 3. 5. 7. 9 - 28 chia hết cho 7.

h) H = 311141111 = 311110000 + 31111 chia hết cho 31111.

**Dạng 2.**

10. Chứng minh $A\vdots 7; B\vdots 11; C\vdots 29$.

11. 240 = $2^4$. 3. 5.

12. n = 6k + 4, k$\in$N.

13. p = 2 lấy n chẵn; p > 2 lấy n = (pk - 1)(p -1), k$\in$N*.

**Dạng 3.**

14. $n^3-n^2+n-1=(n-1)(n^2+1)$, n =2.

15. $x^4+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+y^2)$

$x=y=1$ thì $x^4+4y^4=5$ là số nguyên tố.

16. $p=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}+1=\dfrac{(n+3)(n^2+2)}{6}$.

Với $n\geq 4$ thì n +3 >6 và $n^2$ + 2 > 17.

n + 3 và n² +2 hoặc một số chẵn, một số chia hết cho 3; hoặc một trong hai số chia hết cho 6, khi đó p là hợp số với n = 1, 2, 3 thì p = 2, 5, 11 là các số nguyên tố.

17. n chẵn thì A chia hết cho 2.

n lẻ, đặt n = 2k +1 ($k \in N^*$), ta có:

$$n^4+4^n=n^4+4^{2k+1}=(n^2+2^{2k+1})^2-2.n^2.2^{2k+1}$$
$$=(n^2+2^{2k+1}-n.2^{k+1})(n^2+2^{2k+1}+n.2^{k+1})$$
$$=\left[(n-2^k)^2+2^{2k}\right]\left[(n+2^k)^2+2^{2k}\right]$$

**Dạng 4.**

18.

Giả sử phương trình (1) có nghiệm x,y nguyên. Xét nghiệm y nguyên dương . Vì a > b nên từ (1) có $x \neq a, x \neq b$ và $4(a-x)(x-b)>0$, suy ra b < x <a. Đặt $a-x=m, x-b=n$ thì m, n dương. Lúc đó (1) trở thành $4mn-m-n=y^2$ (2) với m, n, y nguyên dương. Biến đổi (2) $\Leftrightarrow (4m-1)(4n-1)=4y^2+1$ (3)

Vì tích các số dạng 4k + 1 lại có dạng đó nên số 4m - 1 phảI có ước nguyên tố dạng p = 4k + 3. Từ (3) có $(4y^2+1) \vdots p$ hay $4y^2 \equiv -1$ (mod p) (4). Suy ra (y, p) = 1. Theo định lí nhỏ Fermat $(2y)^{p-1} \equiv 1 (\bmod p) \Rightarrow \left[(2y)^2\right]^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\bmod p)$.

Từ đó và (4) có $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\bmod p) \Rightarrow (-1)^{2k+1} \equiv 1 (\bmod p) \Rightarrow$ mâu thuẫn.

Vậy phương trình (3) không có nghiệm nguyên.

Dạng 5.

20. a) Gọi $d \in ƯC(7n+10, 5n+7)$ thì

$5(7n+10)-7(5n+7) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d=1.$

b) Gọi d là ƯCLN (2n + 3, 4n + 8).

(4n + 8) - 2(2n + 3) $\vdots$ d $\Rightarrow 2 \vdots d$.

Do d là ước của số lẻ 2n + 3 nên d = 1.

21.

a) Gọi d $\in ƯC(b, a-b)$ thì $a-b \vdots d, b \vdots d$, do đó $a \vdots d$. Ta có $(a,b)=1$

nên d = 1.

b) Giả sử $a^2+b^2$ và ab cùng chia hết cho cho số nguyên tố d thì vô lí.

21.

Giả sử ab và c cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

22.a)

$4n-5⋮13$

$\Rightarrow 4n-5+13⋮13$

$\Rightarrow 4n+8⋮13$

$\Rightarrow 4(n+2)⋮13$

Do (4, 13) = 1 nên n + 2 ⋮ 13.

Đáp số: n = 13k - 2 (k$\in N^*$).

b) Đáp số: n = 7k - 3 (k$\in$N).

c) $25n+3⋮53 \Rightarrow 25n+3-53⋮53$.

Đáp số: n = 53k + 2 (k $\in$ N).

23.

a) n không chia hết cho 3.

b) n là số chẵn.

c) n là số lẻ.

d) Giả sử 18n + 3 và 21n + 7 cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$6(21n+7)-7(18n+3)⋮d \Rightarrow 21⋮d$.

Vậy $d\in\{3;7\}$.

Hiển nhiên $d\neq 3$ vì 21n + 7 không chia hết cho 3. Như vậy (18n +3, 21n + 7)$\neq 1 \Leftrightarrow 18n+3⋮7$ (còn 21n + 7 luôn chia hết cho 7)$\Leftrightarrow 18n+3-21⋮7 \Leftrightarrow 18(n-1)⋮7 \Leftrightarrow n-1⋮7$.

Vậy nếu n $\neq 7k+1 (k\in N)$ thì $(18n+3, 21n+7)=1$.

24.

Bài toán không yêu cầu tính mọi giá trị của n mà chỉ cần chỉ ra vô số giá trị của n để $(n+15, n+72)=1$. Do đó ngoài cách giải trên có thể giải như sau:

Gọi d$\in$ƯC$(n+15, n+72)$ thì $57⋮d$. Do $n+15⋮d, 57⋮d$ nên nếu tồn tại n sao cho n + 15 = 57k + 1 thì d = 1. Nếu ta chọn n = 57k - 14 (k = 1, 2, 3, ….) thì (n + 15, n + 72) = 1, rõ ràng có vô số giá trị n.

**Bài tập trong đề thi học sinh giỏi**

26. Ta có: $p,\ q$ là số nguyên tố nên $pq+11$ là số nguyên tố lớn hơn 11

$\Rightarrow pq+11$ là số lẻ suy ra $pq$ là số chẵn.

Do $7p+q$ là số nguyên tố lớn hơn 7 nên $p$ và $q$ không thể cùng tính chẵn lẻ.

*) TH1: $p=2$ thì $7p+q=14+q$. Ta thấy 14 chia 3 dư 2

+) Nếu $q$ chia hết cho 3, do $q$ là số nguyên tố nên $q=3$.

$7p+q=17$; $pq+11=17$ (T/m)

+) Nếu $q$ chia cho 3 dư 1 thì $14+q$ chia hết cho 3 $\Rightarrow 7p+q$ là hợp số

+) Nếu $q$ chia cho 3 dư 2 thì $2q$ chia cho 3 dư 1 nên $pq+11=2q+11$ chia hết cho 3 $\Rightarrow pq+11$ là hợp số.

*) TH2: $q=2$ thì $7p+q=7p+2$

+) Nếu $7p$ chia hết cho 3 thì p chia hết cho 3 nên $p = 3 \Rightarrow 7p+q=23; pq+11=17$ (Thỏa mãn)

+) Nếu $7p$ chia cho 3 dư 1 chia hết cho 3 $\Rightarrow 7p+2$ là hợp số

+) Nếu $7p$ chia cho 3 dư 2 thì p chia cho 3 dư 2 nên 2p chia cho 3 dư 1 $\Rightarrow pq+11=2p+11$ chia hết cho 3 nên $pq+11$ là hợp số.

Vậy: $p=2,\ q=3$ hoặc $p=3,\ q=2$.

27. Vì $\overline{ab}; \overline{cd}$ là các số nguyên tố nên $b,d$ lẻ và khác 5

Ta lại có $b^2=\overline{cd}+b-c \Leftrightarrow b^2-b=9c+d \Leftrightarrow b(b-1)=9c+d$

Nếu $b=1$ (không thỏa mãn)

Nếu $b=3$ nên $9c+d=6 \Rightarrow c=0, d=6$ (không thỏa mãn)

Nếu $b=7 \Rightarrow 9c+d=42 \Rightarrow d=42-9c \Rightarrow c=4; \mathrm{d}=6$ (loại)

Nếu $b=9 \Rightarrow 9c+d=72 \Leftrightarrow d=72-9c \Rightarrow c=7; d=9$ (thỏa mãn)

$\Rightarrow a \in \{1;2;7\}$

Vậy $\overline{abcd} \in \{1979; 2979; 7979\}$

28. +) Với $p=2$ thì $p^2+2=8$ không là số nguyên tố.

+) Với $p=3$ thì $p^2+2=11$ và $p^3+p^2+1=37$ đều là số nguyên tố.

+) Với $p>3 \Rightarrow p=3k\pm1\ (k\in\mathbb{N}, k\geq 2)$

$\Rightarrow p^2+2=(3k\pm1)^2+2=9k^2\pm6k+3=3(3k^2\pm2k+1)\ \vdots\ 3$ nên $p^2+2$ là hợp số.

Vậy chỉ có $p=3$ thì $p^2+2$ và $p^3+p^2+1$ đều là số nguyên tố.

29. Ta có: $x^2=45+y^2$.

Ta thấy $x^2>45$ và $x$ là số nguyên tố nên $x$ phải là số nguyên tố lẻ. Suy ra $x^2$ là số lẻ.

Từ đó suy ra $y^2$ là số chẵn, mà $y$ là số nguyên tố. Suy ra $y=2$; $x=7$

Vậy $x=7$ và $y=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

30. Đặt $d=UCLN\left(2n+1,10n+7\right)$

Suy ra $2n+1\,\vdots\, d$. Vì vậy $5\left(2n+1\right)\vdots\, d$.

Mà $10n+7\,\vdots\, d$ nên $10n+7-5\left(2n+1\right)\vdots\, d$

$\Rightarrow 2\,\vdots\, d$

Do đó $d=2$ hoặc $d=1$.

Nếu $d=2$ thì $2n+1\,\vdots\, 2$ (vô lý).

$\Rightarrow d=1$.

$1=UCLN\left(2n+1,10n+7\right)$

Vậy $2n+1$ và $10n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

31. Ta có

$a^2+c^2=b^2+d^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=2(b^2+d^2)$ là số chẵn

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2\,\vdots\, 2$

+ Xét

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2-(a+b+c+d)$

$=\mathrm{a}(\mathrm{a}-1)+\mathrm{b}(\mathrm{b}-1)+\mathrm{c}(\mathrm{c}-1)+\mathrm{d}(\mathrm{d}-1)$

-Vì $a$ là số nguyên dương nên $a, a-1$ là 2 số tự nhiên liên tiếp => $a(a-1)\,\vdots\, 2$

Tương tự $b(b-1); c(c-1); d(d-1)$ đều chia hết cho 2

$\Rightarrow \mathrm{a}(\mathrm{a}-1)+\mathrm{b}(\mathrm{b}-1)+\mathrm{c}(\mathrm{c}-1)+\mathrm{d}(\mathrm{d}-1)\,\vdots\, 2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2-(a+b+c+d)\,\vdots\, 2$

Mà $a^2+b^2+c^2+d^2\,\vdots\, 2\Rightarrow (a+b+c+d)\,\vdots\, 2$

=>$a+b+c+d$ là số chẵn mà $a+b+c+d<2(do\,a,b,c,d\in N^*)$

=> $a+b+c+d$ là hợp số

32. Vì $p$ là số nguyên tố lớn hơn $3$ nên $p^2$ chia cho $3$ dư $1$.

$\Rightarrow p^2=3k+1$.

Ta có: $p^2+2018=3k+1+2018=3k+2019$

Vì $3k\,\vdots\, 3$ và $2019\,\vdots\, 3\Rightarrow (3k+2019)\vdots\, 3\Rightarrow \left(p^2+2018\right)\vdots\, 3$

Vậy $p^2+2018$ là hợp số.

33. + Nếu $p=2$ thì $p+14=16$ và $p+40=42$ đều không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $p=3$ thì $p+14=17$ và $p+40=43$ đều là các số nguyên tố suy ra $p=3$ là giá trị cần tìm

+ Nếu $p\neq 3$ suy ra $p$ có dạng $3k+1$ hoặc dạng $3k-1$

Với $p=3k+1$ thì $p+14=3k+1+14=3k+15=3\left(k+5\right)\vdots\, 5$

Với $p=3k-1$ thì $p+40=3k-1+40=3k+39=3\left(k+13\right)\vdots\, 3$

Vậy nếu $p \neq 3$ thì hoặc $p+14$ hoặc $p+40$ là hợp số suy ra không thỏa mãn bài ra

Do đó: giá trị duy nhất cần tìm là $p=3$

34. Vì $p$ là số nguyên tố và $p>3$ nên $p$ có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$

Mà $p+4$ là số nguyên tố nên $p$ không thể có dạng $3k+2$

Suy ra $p$ có dạng $3k+1$

$\Rightarrow p+14=3k+15=3(k+5)\vdots 3 \Rightarrow p+14$ là hợp số.

35. **Ta có** $P=xy+5x-2y-10=x(y+5)-2(y+5)=(x-2)(y+5)$.

Bởi vậy để P là số nguyên tố thì một trong hai giá trị $x-2$ và $y+5$ phải bằng 1 mà $y+5\geq 7$ nên $x-2=1 \Leftrightarrow x=3$ từ đó $P=y+5$. Nếu $y$ lẻ thì $P$ sẽ chẵn, điều này vô lí $\Rightarrow y$ phải chẵn mà $y$ là số nguyên tố $\Rightarrow y=2$

Vậy $x=3; y=2$.

36. Đặt: ƯCLN$(3n+2, 5n+3)=d$

$\Rightarrow (3n+2)\vdots d; (5n+3)\vdots d$

$\Rightarrow [5(3n+2)-3(5n+3)]\vdots d$

$1\vdots d \Rightarrow d=1$

Vậy với mọi số tự nhiên $n$ thì $3n+2$ và $5n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

37. Xét $p=2, 2p-1=2.2-1=3$ (là số nguyên tố) và $p^2+2=2^2+2=6$ (là hợp số)

Vậy $p=2$ không thỏa mãn

Xét $p=3$, khi đó khi đó $2p-1=2.3-1=5$ (là số nguyên tố) và $p^2+2=3^2+2=11$ (là số nguyên tố)

Vậy $p=3$ là giá trị cần tìm.

Xét $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow p$ có hai dạng là $p=3k+1; p=3k+2 \ (k\in\mathbb{N}, k\geq 1)$

Nếu $p=3k+1$ thì $p^2+2=(3k+1)^2+2=(3k+1)(3k+1)+2=9k^2+3k+3k+1+2$

$=(9k^2+6k+3)\vdots 3$

Do $p>3 \Rightarrow p^2+2>3$ mà $p^2+2\vdots 3 \Rightarrow p^2+2$ là hợp số (loại)

Nếu $p=3k+2$ thì $2p-1=2.(3k+2)-1=6k+4-1=6k+3\vdots 3$

Do $p>3 \Rightarrow 2p-1>3$ mà $2p-1\vdots 3 \Rightarrow 2p-1$ là hợp số (loại)

Vậy $p=3$ là giá trị cần tìm.

38. TH1: $x$ là số nguyên tố chẵn $\Rightarrow x=2$.

Thay $x = 2.$ vào (1)

ta có: $19.2^4 + 572 = y^2$

$\Rightarrow y^2 = 361 = 19^2$

$\Rightarrow y = 19$ (thỏa mãn là số nguyên tố).

TH2: $x$ là số nguyên tố lẻ => $19x^4$ lẻ $\Rightarrow$ $19x^4 + 57$ chẵn

$\Rightarrow$ $y^2$ là số chẵn $\Rightarrow$ $y$ chẵn $\Rightarrow$ mà $y$ là số nguyên tố $\Rightarrow$ $y = 2$ (vô lí vì $19x^4 + 57 > 2$ ).

Vậy $x = 2;\ y = 19$ là giá trị cần tìm.

# CHUYÊN ĐỀ 6: CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

## A. Kiến thức cần nhớ

**1. Định nghĩa số chính phương.**

Số chính phương là số bằng bình phương của một số nguyên.

(tức là nếu n là số chính phương thì: $n = k^2 \ (k \in Z)$)

**2. Một số tính chất cần nhớ**

1- Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

2- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

3- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 4n hoặc 4n + 1. Không có số chính phương nào có dạng 4n + 2 hoặc 4n + 3 (n $\in$ N).

4- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 3n hoặc 3n + 1. Không có số chính phương nào có dạng 3n + 2 ( n $\in$ N ).

5- Số chính phương tận cùng bằng 1, 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2.

Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

6- Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.

Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9

Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25

Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

7. Mọi số chính phương khi chia cho 5, cho 8 chỉ dư 1, 0, 4.

8. Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào.

9. Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số đó là số 0.

10. Số các ước của một số chính phương là số lẻ. Ngược lại, một số có số các ước là số lẻ thì số đó là số chính phương.

11. Nếu $n^2 < k < (n + 1)^2$ ( n $\in$ Z) thì k không là số chính phương.

12. Nếu hai số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số a, b cũng là các số chính phương.

13. Nếu $a$ là một số chính phương, $a$ chia hết cho số nguyên tố $p$ thì $a$ chia hết cho $p^2$.

14. Nếu tích hai số $a$ và $b$ là một số chính phương thì các số $a$ và $b$ có dạng $a = mp^2; b = mq^2$

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

🗁 **Dạng 1: Chứng minh một số là số chính phương, hoặc là tổng nhiều số chính phương.**

*** Cơ sở phương pháp:**

Để chứng minh một số n là số là số chính phương ta thường dựa vào định nghĩa, tức là chứng minh : $n = k^2 \ (k \in Z)$

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Cho $n$ là một số tự nhiên. Chứng minh rằng: $A = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ là số chính phương.

### *Hướng dẫn giải*

Ta có: $A = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n^2+3n+1 \in \mathbb{N}$. Vậy $A$ là số chính phương.

**Bài toán 2.** Cho: $B = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2)$ với k là số tự nhiên. Chứng minh rằng 4B + 1 là số chính phương.

### *Hướng dẫn giải*

Ta thấy biểu thức B là tổng của một biểu thức chúng ta nghĩ đến việc phải thu gọn biểu thức B trước.

Ta có:

$$n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)[(n+3)-(n-1)] = \frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)]$$

Áp dụng:

$$1.2.3 = \frac{1}{4}(1.2.3.4 - 0.1.2.3)$$

$$2.3.4 = \frac{1}{4}(2.3.4.5 - 1.2.3.4)$$

$$3.4.5 = \frac{1}{4}(3.4.5.6 - 2.3.4.5)$$

..........................................

$$k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}[k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)]$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$B = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$\Rightarrow 4B+1 = k(k+1)(k+2)(k+3)+1$$

Theo ví dụ 1 ta có: $4B+1 = (k^2+3k+1)^2$

Vì $k \in \mathbb{N}$ nên $k^2+3k+1 \in \mathbb{N}$. Vậy $4B+1$ là số chính phương.

**Bài toán 3.** Chứng minh rằng: $C = \underbrace{11...1}_{2n} + \underbrace{44...4}_{n} + 1$ với n là số tự nhiên. Chứng minh rằng C là số chính phương.

### *Hướng dẫn giải*

Ta có: $C=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{00...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n}+\underbrace{44...4}_{n}+1$

Đặt $a=\underbrace{11...1}_{n}$ thì $9a=\underbrace{99...9}_{n}$. Do đó $\underbrace{99...9}_{n}+1=10^n=9a+1$

$$C=a.10^n+a+4a+1=a(9a+1)+5a+1$$

$$\Rightarrow C=9a^2+6a+1=(3a+1)^2$$

$$\Rightarrow C=\underbrace{33...3}_{n-1}4^2.$$

Vậy $C$ là một số chính phương.

***Nhận xét:***

*Khi biến đổi một số trong đó có nhiều chữ số giống nhau thành một số chính phương ta nên đặt* $\underbrace{11...1}_{n}=a$ *và như vậy* $\underbrace{99...9}_{n}+1=10^n=9a+1$.

**Bài toán 4.** Cho $a=\underbrace{11...1}_{2016}$, $b=1\underbrace{0...0}_{2015}5$. Chứng minh $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

### *Hướng dẫn giải*

*Cách 1:*

Ta có: $b=1\underbrace{0...0}_{2015}5=1\underbrace{0...0}_{2016}-1+6=\underbrace{9...9}_{2016}+6=9a+6$.

$\Rightarrow ab+1=a(9a+6)+1=9a^2+6a+1=(3a+1)^2$

$\Rightarrow \sqrt{ab+1}=\sqrt{(3a+1)^2}=3a+1\in N$.

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

*Cách 2:*

Ta có: $a=\underbrace{11...1}_{2016}=\dfrac{10^{2016}-1}{9}$, $b=10^{2016}+5$.

$$\Rightarrow ab+1=\frac{10^{2016}-1}{9}.\left(10^{2016}+5\right)+1=\frac{\left(10^{2016}\right)^2+4.10^{2016}-5+9}{9}=\left(\frac{10^{2016}+2}{3}\right)^2.$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab+1}=\frac{\left(10^{2016}+2\right)}{3}.$$

Mà $\left(10^{2016}+2\right)\vdots 3$. Do đó, $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

**Bài toán 5.** Cho số tự nhiên $a$ gồm 60 chữ số 1, số tự nhiên $b$ gồm 30 chữ số 2. Chứng minh $a$ - $b$ là một số chính phương.

### *Hướng dẫn giải*

*Cách 1:*

Ta có: $a = \underbrace{11...1}_{60} = \dfrac{10^{60}-1}{9}$ , $b = \underbrace{22...2}_{30} = 2.\dfrac{10^{30}-1}{9}$ .

$$\Rightarrow a-b = \frac{10^{60}-1}{9} - \frac{2(10^{30}-1)}{9} = \frac{10^{60}-2.10^{30}+1}{9} = \left[\frac{10^{30}-1}{3}\right]^2 = \left(\underbrace{33...3}_{30}\right)^2.$$

*Cách 2:*

$b = \underbrace{22...2}_{30} = 2.\underbrace{11...1}_{30}$ , $a = \underbrace{11...1}_{60} = \underbrace{11...1}_{30}.\underbrace{00...0}_{30} + \underbrace{11...1}_{30} = \underbrace{11...1}_{30}.10^{30} + \underbrace{11...1}_{30}$.

Đặt $c = \underbrace{11...1}_{30}$. $\Rightarrow 9c+1 = \underbrace{99...9}_{30}+1 = 10^{30}$.

Khi đó: $a = c.(9c+1)+c = 9c^2+2c$ . $b = 2c$ .

$$\Rightarrow a-b = 9c^2+2c-2c = (3c)^2 = \left(\underbrace{33...3}_{30}\right)^2.$$

**Bài toán tổng quát:** Cho k số tự nhiên khác 0, số tự nhiên $a$ gồm $2k$ chữ số 1 và số tự nhiên $b$ gồm $k$ chữ số 2. Chứng minh rằng $a-b$ là một số chính phương.

**Bài toán 6.** Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\dfrac{n^2-1}{3}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng $n$ là tổng của hai số chính phương liên tiếp.

### *Hướng dẫn giải*

Giả sử ta có: $\dfrac{n^2-1}{3} = a(a+1)$ .

Từ đó có $n^2 = 3a^2+3a+1 \Rightarrow 4n^2-1 = 12a^2+12a+3$

$\Rightarrow (2n-1)(2n+1) = 3(2a+1)^2$ .

Vì $2n+1; 2n-1$ là hai số lẻ liên tiếp nên ta có các trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} 2n-1 = 3p^2 \\ 2n+1 = q^2 \end{cases}$ .

Khi đó $q^2 = 3p^2+2$ ( Vô lí ). Vậy trường hợp này không xảy ra.

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2n-1 = p^2 \\ 2n+1 = 3q^2 \end{cases}$ .

Từ đó $p$ là số lẻ nên $p = 2k+1$ .

Từ đó $2n = (2k+1)^2+1 \Rightarrow n = k^2+(k+1)^2$ (đpcm).

**Bài toán 7.** Cho $k$ là một số nguyên dương và $a = 3k^2+3k+1$

a) Chứng minh rằng $2a$ và $a^2$ là tổng của ba số chính phương.

b) Chứng minh rằng nếu $a$ là một ước của một số nguyên duong $b$ và $b$ là một tổng gồm ba số chính phương thì $b^n$ là một tổng của bà số chính phương.

## *Hướng dẫn giải*

a) Ta có $2a = 6k^2 + 6k + 2 = (2k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2$

và $a^2 = 9k^4 + 18k^3 + 15k^2 + 6k + 1 = (k^2 + k)^2 + (2k^2 + 3k + 1)^2 + (2k^2 + k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

b) Vì $b \vdots a$ nên đặt $b = ca$.

Vì $b$ là tổng của ba số chính phương nên đặt $b = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$.

Khi đó $b^2 = c^2.a^2 = c^2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$

Để kết thúc việc chứng minh, ta tiến hành như sau: cho $n = 2p+1$ ta được:

$b^{2p+1} = \left(b^p\right)^2\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)$ và cho $n = 2p+2$ ta được $b^n = \left(b^p\right)^2 b^2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$

🗁 **Dạng 2: Chứng minh một số không là số chính phương.**

*** Cơ sở phương pháp:**

Để chứng minh n không là số chính phương, tùy vào từng bài toán ta có thể sử dụng các cách sau:

1) Chứng minh n không thể viết được dưới dạng một bình phương một số nguyên.
2) Chứng minh $k^2 < n < (k+1)^2$ với k là số nguyên.
3) Chứng minh n có tận cùng là 2; 3; 7; 8
4) Chứng minh n có dạng 4k + 2; 4k + 3
5) Chứng minh n có dạng 3k + 2
6) Chứng minh n chia hết cho số nguyên tố p mà không chia hết cho $p^2$.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 thì có thể là số chính phương được không ? tại sao?

## *Hướng dẫn giải*

Gọi số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 là n

Ta có : 2018 = 3m + 2 nên số tự nhiên n chia 3 dư 2, do đó số n có dạng 3k + 2 với k là số tự nhiên. Mặt khác một số chính phương trình không có dạng 3k + 2 suy ra số tự nhiên n không là số chính phương.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng số $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ trong đó n $\in$ N và n > 1 không phải là số chính phương.

## *Hướng dẫn giải*

Ta có:

$$A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = \left(n^4 + 2n^3 + n^2\right) + \left(n^2 + 2n + 1\right)$$
$$= \left(n^2 + n\right)^2 + \left(n+1\right)^2 > \left(n^2 + n\right)^2 \ \forall n > 1$$
$$\Rightarrow A > \left(n^2 + n\right)^2 \ \forall n > 1$$

Mặt khác:

$$\left(n^2 + n + 1\right)^2 = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n + 1$$
$$= \left(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1\right) + n^2 = A + n^2 > A \quad \forall n > 1$$

$\Rightarrow A < \left(n^2 + n + 1\right)^2$

Do đó $\left(n^2 + n\right)^2 < A < \left(n^2 + n + 1\right)^2$

Ta có $(n^2 + n)$ và $(n^2 + n + 1)$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên A không thể là số chính phương.

**Bài toán 3.** Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

***Hướng dẫn giải***

Ta có $A = 1 + 2 + \left(2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5\right) + ... + \left(2^{30} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{33}\right)$

$$= 3 + 2^2.\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3\right) + ... + 2^{30}.\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3\right)$$
$$= 3 + 2.30 + ... + 2^{29}.30 = 3 + \left(2 + ... + 2^{29}\right).3.10.$$

Ta thấy A có chữ số tận cùng bằng 3.

Mà số chính phương không có chữ số tận cùng là 3. Do đó, A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

**Bài toán 4.** Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

*(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh 2015 - 2016)*

***Hướng dẫn giải***

Ta có:

$2012^{4n} \vdots 4; 2014^{4n} \vdots 4$, $\forall n \in N^*$.

$2013^{4n} = 2013^{4n} - 1 + 1 = \left(2013^{4n} - 1\right) + 1$ chia cho 4 dư 1.

$2015^{4n} = 2015^{4n} - \left(-1\right)^{4n} + 1$ chia cho 4 dư 1.

Do đó, $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2.

Ta có: $A \vdots 2$, nhưng A không chia hết cho $2^2$, mà 2 là số nguyên tố. Suy ra A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

**Bài toán 5.** Cho $2 \le n \in \mathbb{N}$, Chứng minh rằng $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không thể là số chính phương

***Hướng dẫn giải***

Ta có $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2\left(n^4 - n^2 + 2n + 2\right)$

$$= n^2\left[n^2\left(n^2 - 1\right) + 2\left(n+1\right)\right]$$

$$= n^2\left[n^2\left(n-1\right)\left(n+1\right) + 2\left(n+1\right)\right]$$

$$= n^2\left(n+1\right)^2\left(n^2 - 2n + 2\right)$$

Với $2 \le n \in \mathbb{N}$, ta có $n^2 - 2n + 2 > n^2 - 2n + 1 = \left(n+1\right)^2$

Và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2\left(n-1\right) < n^2$. Do đó $\left(n-1\right)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$

Như vậy $n^2 - 2n + 2$ không phải là số chính phương nên $A$ không phải là số chính phương.

**Bài toán 6.** Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kì không phải là một số chính phương.

***Hướng dẫn giải***

Giả sử: $a = 2m + 1,\ b = 2n + 1$, với $m, n \in \mathbb{N}$

Ta có: $a^2 + b^2 = \left(2m+1\right)^2 + \left(2n+1\right)^2 = 4\left(m^2 + m + n^2 + n\right) + 2 = 4k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$.

Không có số chính phương nào có dạng $4k + 2$ vì vậy $a^2 + b^2$ không phải số chính phương.

🗁 **Dạng 3: Điều kiện để một số là số chính phương.**

*** Cơ sở phương pháp:** Chúng ta thường sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa.
- Phương pháp 2: Sử dụng tính chẵn, lẻ.
- Phương pháp 3: Sử dụng tính chất chia hết và chia có dư.
- Phương pháp 4: Sử dụng các tính chất.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Tìm số nguyên $n$ sao cho $n\left(n+3\right)$ là số chính phương.

***Hướng dẫn giải***

Để $A = n\left(n+3\right)$ là số chính phương thì $n\left(n+3\right) = k^2$ với k là số tự nhiên, do đó:

$$n^2 + 3n = k^2$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 12n = 4k^2$$

$$\Leftrightarrow 4n^2+12n+9=4k^2+9$$
$$\Leftrightarrow (2n+3)^2-(2k)^2=9$$
$$\Leftrightarrow (2n+2k+3)(2n-2k+3)=9$$

Ta có $(2n+2k+3)\ge(2n-2k+3)$

Và $9=9.1=3.3=(-1).(-9)=(-3).(-3)$

Trường hợp 1 : $\begin{cases}2n+2k+3=9\\2n-2k+3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+k=3\\n-k=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=1\\k=2\end{cases}\Rightarrow A=4$

Trường hợp 2 : $\begin{cases}2n+2k+3=3\\2n-2k+3=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+k=0\\n-k=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=0\\k=0\end{cases}\Rightarrow A=0$

Trường hợp 3 : $\begin{cases}2n+2k+3=-1\\2n-2k+3=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+k=-2\\n-k=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=-4\\k=2\end{cases}\Rightarrow A=4$

Trường hợp 4 : $\begin{cases}2n+2k+3=-3\\2n-2k+3=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+k=-3\\n-k=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=-3\\k=0\end{cases}\Rightarrow A=0$

Vậy khi $n=-4;-3;0;1$ thì ta có A là số chính phương.

**Bài toán 2.** Tìm số nguyên $n$ sao cho $n+1955$ và $n+2014$ là một số chính phương.

## *Hướng dẫn giải*

Giả sử $n+1955=a^2$; $n+2014=b^2$ với $a,\ b\in\mathbb{N}$ và $a<b$.

Khi đó $b^2-a^2=59\Leftrightarrow(b-a)(b+a)=59\Leftrightarrow\begin{cases}b-a=1\\b+a=59\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=29\\b=30\end{cases}$.

Dễ dàng suy ra $n=-1114$.

**Bài toán 3.** Tìm số nguyên dương n để các biểu thức sau là số chính phương:

a) $A=n^2-n+2$ b) $B=n^5-n+2$

## *Hướng dẫn giải*

a) Với n = 1 thì A = $n^2$ – n + 2 = 2 không là số chính phương

Với n = 2 thì A = $n^2$ – n + 2 = 4 là số chính phương

Với n > 2 thì A = $n^2$ – n + 2 không là số chính phương vì

$(n-1)^2=n^2-(2n-1)<n^2-(n-2)<n^2$

Vậy n = 2 thì A là số chính phương.

b) Ta có: $n^5-n=(n^2-1)n(n^2+1)$

Với n = 5k thì n chia hết cho 5.

Với $n=5k\pm1$ thì $n^2-1$ chia hết cho 5

Với $n=5k\pm2$ thì $n^2+1$ chia hết cho 5

Do đó $n^5 - n$ luôn chia hết cho 5

Nên $n^5 - n + 2$ chia cho 5 thì dư 2 nên $n^5 - n + 2$ có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7 nên $B = n^5 - n + 2$ không là số chính phương

Vậy không có giá trị nào của n thỏa để B là số chính phương.

**Bài toán 4.** Tìm số nguyên dương $n$ nhỏ nhất sao cho các số $n+1$, $2n+1$, $5n+1$ đều là các số chính phương.

### *Hướng dẫn giải*

Nếu $n = 3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$ thì $n+1 = 3k+2$, không là số chính phương.

Nếu $n = 3k+2$ thì $2n+1 = 6k+5$, cho cho 3 dư 2 nên không là số chính phương. Vậy $n \vdots 3$.

$2n+1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1. Suy ra $2n \vdots 8 \Rightarrow n \vdots 4 \Rightarrow n+1$ lẻ. Do $n+1$ là số chính phương lẻ nên $n+1$ chia cho 8 dư 1, suy ra $n \vdots 8$.

$n$ chia hết cho các số nguyên tố cùng nhau 3 và 8 nên $n \vdots 24$. Với $n = 24$ thì $n+1 = 25 = 5^2$, $2n+1 = 49 = 7^2$, $5n+1 = 121 = 11^2$.

Giá trị nhỏ nhất của $n$ phải tìm là $24$.

**Bài toán 5.** Tìm số tự nhiên n $\geq$ 1 sao cho tổng 1! + 2! + 3! + … + n! là một số chính phương.

*(Đề thi HSG lớp 6 - Phòng giáo dục đào tạo Phúc Yên - Vĩnh Phúc)*

### *Hướng dẫn giải*

Với n = 1 thì 1! = 1 = $1^2$ là số chính phương

Với n = 2 thì 1! + 2! = 3 không là số chính phương

Với n = 3 thì 1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = $3^2$ là số chính phương

Với n $\geq$ 4 ta có 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33 còn 5!; 6!; …; n! đều tận cùng bởi 0 do đó 1! + 2! + 3! + … n! có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương.

Vậy có 2 số tự nhiên n thoả mãn đề bài là n = 1; n = 3.

**Bài toán 6.** Tìm số nguyên dương n sao cho $A = (n+3)(4n^2 + 14n + 7)$ là số một chính phương.

*(Đề thi chọn HSG Toán 9 tỉnh Thái Bình)*

### *Hướng dẫn giải*

Ta có: $4n^2 + 14n + 7 = (n+3)(4n+2) + 1$ và n là số nguyên dương nên $n+3$ và $4n^2 + 14n + 7$ là nguyên tố cùng nhau. Vì vậy, để A là số chính phương thì $4n^2 + 14n + 7$ và n + 3 phải là số chính phương.

Do $n \in Z^+$ nên ta có $(2n+3)^2 \leq 4n^2 + 14n + 7 < (2n+4)^2$.

$\Rightarrow 4n^2 + 14n + 7 = (2n+3)^2 \Rightarrow n = 1$. Khi đó n + 3 = 4 là số chính phương.

Thử lại, với $n = 1$, ta có $A = 10^2$.

Vậy số nguyên dương cần tìm là $n=1$.

**Bài toán 7.** Tìm $3\le a\in\mathbb{N}$ sao cho $\overline{a(a-1)}.\overline{a(a-1)}=\overline{(a-2)aa(a-1)}$.

### *Hướng dẫn giải*

Ta có $\overline{a(a-1)}.\overline{a(a-1)}=\overline{(a-2)aa(a-1)}\Leftrightarrow\overline{a(a-1)}^2=\overline{(a-2)aa(a-1)}$. (*)

Vì VT(*) là số chính phương nên VP(*) cũng là số chính phương.

Vì số chính phương chỉ có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{0;1;4;5;6;9\}$

nên $a$ có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{1;2;5;6;7;0\}$.

Do $a$ là chữ số nên $a\le 9$. Kết hợp với $3\le a\in\mathbb{N}$ nên $a\in\{5;6;7\}$.

Thử lần lượt từng giá trị ta thu được $a=7$ thỏa mãn $76^2=5776$.

**Bài toán 8.** Tìm số tự nhiên $n$ sao cho $2^n+9$ là số chính phương.

### *Hướng dẫn giải*

Giả sử $2^n+9=m^2$, $m\in\mathbb{N}\Leftrightarrow(m-3)(m+3)=2^n$.

Vì $m-3<m+3$ nên $\begin{cases}m-3=2^a\\ m+3=2^b\end{cases}$, với $a,\ b\in\mathbb{N}$ và $a<b$.

Ta có $2^b-2^a=6\Leftrightarrow 2^a\left(2^{b-a}-1\right)=6$.

Vì $2^a\left(2^{b-a}-1\right)\vdots 2$ mà $2^a\left(2^{b-a}-1\right)\not\vdots 4$ nên $a=1$. Điều này dẫn đến $m=5$ và $n=4$.

🗁 **Dạng 4: Tìm số chính phương.**

*** Cơ sở phương pháp:** Dựa vào định nghĩa về số chính phương $A=k^2$, với k là số nguyên và các yêu cầu của bài toán để tìm ra số chính phương thỏa bài toán.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Tìm số chính phương $\overline{abcd}$ biết $\overline{ab}-\overline{cd}=1$.

### *Hướng dẫn giải*

Giả sử $n^2=\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}=100\left(1+\overline{cd}\right)+\overline{cd}=101\overline{cd}+100$, $n\in Z$.

$\Rightarrow 101.\overline{cd}=n^2-100=(n-10)(n+10)$.

Vì $n<100$ và 101 là số nguyên tố nên $n+10=101$.

$\Rightarrow n=91$.

Thử lại: $\overline{abcd}=91^2=8281$ có $82-81=1$.

Vậy $\overline{abcd}=8281$.

**Bài toán 2.** Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B. Hãy tìm các số A và B.

### *Hướng dẫn giải*

Gọi $A = \overline{abcd} = k^2$.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} A = \overline{abcd} = k^2 \\ B = \overline{abcd} + 1111 = m^2 \end{cases}$.

(với $k, m \in N^*$ và $31 < k < m < 100$, $a, b, c, d = \overline{1,9}$).

$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111 \Leftrightarrow$ (m - k)(m + k) = 1111 (*)

Nhận xét thấy tích (m – k)(m + k) > 0 nên m – k và m + k là 2 số nguyên dương.

Và m – k < m + k < 200 nên (*) có thể viết (m – k) (m + k) = 11.101

Do đó: $\begin{cases} m - k = 11 \\ m + k = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 56 \\ k = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2025 \\ B = 3136 \end{cases}$

Vậy A = 2025, B = 3136.

**Bài toán 3.** Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

### *Hướng dẫn giải*

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ với a; b; c; d là các số tự nhiên

và 1 ≤ a ≤ 9; 0 ≤ b, c, d ≤ 9.

Ta có $\overline{abcd}$ chính phương $\Rightarrow$ d $\in \{0,1,4,5,6,9\}$.

Vì d là số nguyên tố $\Rightarrow$ d = 5.

Đặt $\overline{abcd} = k^2 < 10000 \Rightarrow 32 \le k < 100$, $k \in N$.

Do k là một số có hai chữ số mà $k^2$ có tận cùng bằng 5 $\Rightarrow$ k tận cùng bằng 5

Tổng các chữ số của k là một số chính phương $\Rightarrow$ k = 45 (vì k tận cùng bằng 5 và có 2 chữ số)

$\Rightarrow \overline{abcd} = 2025$

Vậy số phải tìm là: 2025.

## C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

**Câu 1:** Tìm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho $p = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ là số chính phương.

**Câu 2:** Tìm số nguyên tố $\overline{ab}(a > b > 0)$, biết $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

**Câu 3:** Tìm các chữ số $a$ và số tự nhiên $x$ sao cho $(12 + 3x)^2 = \overline{1a96}$.

**Câu 4:** Tìm số nguyên tố có hai chữ số khác nhau có dạng $\overline{xy}$ $(x > y > 0)$ sao cho hiệu của số đó với số viết theo thứ tự ngược lại của số đó là số chính phương.

**Câu 5:** Cho $A=5+5^2+5^3+...+5^{2019}$. Chứng tỏ rằng $4A+5$ là số chính phương.

**Câu 6:** Tìm các số có ba chữ số, sao cho hiệu của số ấy và số gồm ba chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại là một số chính phương.

**Câu 7:** Cho $x$, $y$ là 2 số nguyên thỏa mãn: $x+2019x^2=2020y^2+y$. Chứng minh rằng: $x-y$ là số chính phương.

**Câu 8:** Cho $n$ lẻ. Chứng minh rằng $n^{2004}+1$ không là số chính phương.

**Câu 9:** Một số chính phương có dạng $\overline{abcd}$. Biết $\overline{ab}-\overline{cd}=1$. Hãy tìm số $\overline{abcd}$.

**Câu 10.** Cho tích a.b là số chính phương và (a,b) = 1. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương.

**Câu 11.** Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2=(a+b)^3$

**Câu 12.** Cho $n$ là số tự nhiên có hai chữ số. Tìm $n$ biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

**Câu 13.** Cho $A=10^{2012}+10^{2011}+10^{2010}+10^{2009}+8$

Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

**Câu 14.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên khác 0, có số lượng các ước tự nhiên là một số lẻ thì số tự nhiên đó là một số chính phương.

**Câu 15.** M có là một số chính phương không nếu :

$M = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$ ( Với $n \in N$, $n \neq 0$ )

**Câu 16.** Tìm các số tự nhiên n có hai chữ số, biết rằng hai số 2n + 1 và 3n + 1 đồng thời là hai số chính phương.

**Bài 17:** Tìm số chính phương có 4 chữ số mà hai chử số đầu giống nhau và hai chữ số cuối giống nhau

**Bài 18:** Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng hiệu các bình phương của số đó và viết số bở hai chữ số của số đó nhưng theo thứ tự ngược lại là một số chính phương

**Bài 19:** Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương

**Bài 20:** Có hay không số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

**Bài 21:** Chứng minh số: $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương.

**Bài 22:** Chứng minh số 1234567890 không phải là số chính phương.

**Bài 23:** Chứng minh rằng nếu một số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó không phải là số chính phương.

**Bài 24:** Chứng minh rằng tổng sau: $P = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{61} + 3^{62}$ không là số chính phương.

**Bài 25:** Cho A= $1+2+2^2+2^3+...+2^{2010}+2^{2011}$. Hỏi số $A+8$ có phải là số chính phương không?

**Bài 26:** Giả sử N = 1.3.5.7 . . . 2007. 2011. Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp 2N - 1, 2N và 2N + 1 không có số nào là số chính phương.

 **Bài 27:** Chứng minh rằng nếu p là tích của n (với n > 1) số nguyên tố đầu tiên thì p - 1 và p + 1 không thể là các số chính phương.

**Bài 28:** Chứng minh rằng tổng bình phương của 2 số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

**Bài 29:** Chứng minh rằng: Nếu m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $3m^2 + m = 4n^2 + n$ thì m - n và 4m + 4n + 1 đều là số chính phương.

**Bài 30:** Cho $a = \underbrace{111\ ...1}_{2017 \text{ số } 1}$ và $b = 1\underbrace{000...0}_{2016 \text{ số } 0}5$. Chứng minh rằng số $M = ab + 1$ là số chính phương.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1.** Ta có : $p = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b$

$$= 111(a+b+c) = 3.37.(a+b+c)$$

Để $p$ là số chính phương thì $a+b+c \vdots 37.3$ mà $0 < a+b+c \le 27 \Rightarrow a+b+c \not\vdots 37.3$

Nên không có số tự nhiên nào có ba chữ số $\overline{abc}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Câu 2.** Ta có $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a$

$=> \overline{ab} - \overline{ba} = 9(a-b)$

$=> \overline{ab} - \overline{ba} = 3^2(a-b)$

Để $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương khi $a - b$ là số chính phương

Do $a, b$ là các chữ số và $0 < a, b \le 9 => 1 \le a - b \le 8$

=>$(a - b)$ là số chính phương khi $(a-b) \in \{1, 4\}$

+Nếu $a - b = 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố và là số lẻ $=> \overline{ab} = 43$

+Nếu $a - b = 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51, 62, 73, 84, 95\}$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố và là số lẻ $=> \overline{ab} = 73$

Vậy $\overline{ab} \in \{43; 73\}$

**Câu 3.** Ta có: $(12+3x)^2 = \overline{1a96} \Leftrightarrow 9.(4+x)^2 = 1096 + 100a \Leftrightarrow 9.(4+x)^2 = 1089 + 7 + 100a$.

Vì $1089 \vdots 9$ nên $(7+100a) \vdots 9 \Rightarrow (7+a) \vdots 9 \Rightarrow a = 2$.

Với $a = 2$, $9.(4+x)^2 = 1296 \Leftrightarrow (4+x)^2 = 144 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4+x=12 \\ 4+x=-12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-16 \end{array}\right.$.

Vì $x$ là số tự nhiên nên chọn $x = 8$.

Vậy $a = 2$, $x = 8$.

**Câu 4.** Theo đề ta có: $\overline{xy} - \overline{yx}$ là số chính phương.

Khi đó: $10x + y - (10y + x) = 10.(x-y) - (x-y) = 9(x-y)$ là số chính phương.

Suy ra: $x - y$ là số chính phương.

Vì $x > y > 0$ nên $x;\ y \in \{1;\ 2;\ ...;\ 9\}$, ta xét các trường hợp sau:

+ TH1: $x - y = 1$ và $\overline{xy}$ là số nguyên tố nên $\overline{xy} = 43$.

+ TH2: $x - y = 4$ và $\overline{xy}$ là số nguyên tố nên $\overline{xy} = 73$.

+ TH3: $x - y = 9$ và $\overline{xy}$ là số nguyên tố nên không có số nào thoả mãn.

Vậy $\overline{xy} \in \{43;\ 73\}$.

**Câu 5.** Ta có:

$$5A = 5^2 + 5^3 + 5^4 ... + 5^{2020}$$

$$5A - A = 5^{2020} - 5$$

$$4A + 5 = 5^{2020} = \left(5^{1010}\right)^2$$

Vậy $4A + 5$ là số chính phương.

**Câu 6.** Gọi $\overline{abc}$ là số tự nhiên có ba chữ số cần tìm

Theo đề ta có: $\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$

$$= 99a - 99c = 9.11(a - c) = 3^2.11(a - c)$$

Để $\overline{abc} - \overline{cba}$ là số chính phương thì $a - c = 11$ (không tồn tại) hoặc $a - c = 0 \Rightarrow a = b$

Vậy số cần tìm có dạng $\overline{abc}$ với $a = c \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ và $b \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

**Câu 7.** Ta có: $x + 2019x^2 = 2020y^2 + y \Rightarrow 2020x^2 - 2020y^2 + x - y = x^2$

$$2020(x^2 - y^2) + (x - y) = x^2$$

$$2020(x - y)(x + y) + (x - y) = x^2$$

$$(x - y)(2020x + 2020y + 1) = x^2 \qquad (1)$$

Gọi $d$ là ước chung lớn nhất của $x - y$ và $2020x + 2020y + 1$

thì $(2020x + 2020y + 1) + 2020(x - y)$ chia hết cho d $\Rightarrow 4040x + 1$ chia hết cho $d$

Mặt khác, từ (1) ta có: $x^2$ chia hết cho $d^2$ suy ra $x$ chia hết cho d.

Từ $4040x + 1$ chia hết cho $d$ mà $x$ chia hết cho $d$ ta có 1 chia hết cho $d$

$\Rightarrow d = 1$ hay $UCLN(x - y, 2020x + 2020y + 1) = 1$

Từ đó suy ra $x - y$ và $2020x + 2020y + 1$ là các số nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn (1) nên chúng đều là các số chính phương.

Vậy $x - y$ là số chính phương (đpcm).

**Câu 8.** Giả sử $n^{2004} + 1$ là số chính phương với $n$ là số lẻ ta có:

$n^{2004}+1=a^2\ (a\in\mathbb{N}^*)$

$\Leftrightarrow a^2-\left(n^{1002}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow\left(a-n^{1002}\right)\left(a+n^{1002}\right)=1$

$\Rightarrow 1\vdots\left(a+n^{1002}\right)\Rightarrow\left(a+n^{1002}\right)=1$ điều này vô lý vì $\left(a+n^{1002}\right)>2$ với n là số lẻ

Vậy $n^{2004}+1$ không là số chính phương với $n$ là số lẻ.

**Câu 9.** Ta có a, b, c, d là các số nguyên từ 0 đến 9; a, c khác 0

Là số chính phương nên $\overline{abcd}=n^2$ và $\overline{ab}-\overline{cd}=1$

Hay $n^2=\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}=100(\overline{cd}+1)+\overline{cd}=101\overline{cd}+100$

Suy ra $n^2-100=(n-10)(n+10)=101\overline{cd}$, $n^2$ là số có 4 chữ số vậy n<100 do đó n + 10 = 101

suy ra n = 91 và $n^2=\overline{abcd}=91^2=8281$

**Câu 10.**

Đặt $a.b=c^2$ (1)

Gọi (a,c) = d nên $a\ \vdots\ d$, $c\ \vdots\ d$

Hay a = m.d và c = n.d với (m,n) = 1

Thay vào (1) ta được $m.d.b=n^2.d^2$

=> $m.b=n^2.d$ => $b\ \vdots\ n^2$ vì (a,b) = 1= (b,d)

Và $n^2\ \vdots\ b$ => $b=n^2$

Thay vào (1) ta có $a=d^2$ => đpcm

**Câu 11.** Ta có: $(a+b)^3=\overline{ab}^2$ là số chính phương nên a + b là số chính phương.

Đặt $a+b=x^2$ ($x\in N^*$)

Suy ra: $\overline{ab}^2=(a+b)^3=x^6$

=> $x^3=\overline{ab}<100$ và $\overline{ab}>8$ => $8<x^3<100$ => $2<x<5$ => x = 3; 4 vì $x\in N^*$

- Nếu x = 3 => $\overline{ab}^2=(a+b)^3=3^6=729=27^2=(2+7)^3$ => x = 3 (nhận)

- Nếu x = 4 => $\overline{ab}^2=(a+b)^3=4^6=4096=64^2\neq(6+4)^3=1000$

=> x = 4 (không thỏa mãn)

Vậy số cần tìm là: $\overline{ab}=27$

**Câu 12.**

+ Vì $n$ là số có hai chữ số nên $9<n<100\Rightarrow 18<2n<200$

+ Mặt khác $2n$ là số chính phương chẵn nên $2n$ có thể nhận các giá trị: 36; 64; 100; 144; 196.

+ Với $2n=36\Rightarrow n=18\Rightarrow n+4=22$ không là số chính phương

$2n=64\Rightarrow n=32\Rightarrow n+4=36$ là số chính phương

$2n=100\Rightarrow n=50\Rightarrow n+4=54$ không là số chính phương

$2n=144 \Rightarrow n=72 \Rightarrow n+4=76$ không là số chính phương

$2n=196 \Rightarrow n=98 \Rightarrow n+4=102$ không là số chính phương

+ Vậy số cần tìm là $n=32$ .

**Câu 13.** Ta có các số : $10^{2012}$ ; $10^{2011}$ ; $10^{2010}$ ; $10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0

Nên $A=10^{2012}+10^{2011}+10^{2010}+10^{2009}+8$ có chữ số tận cùng là 8

Vậy A không phải là số chỉnh phương vì số chính phương là những số có chữ số tận cùng là 1 ; 4; 5 ; 6 ; 9

**Câu 14.** Gọi số tự nhiên đó là P (P $\neq$ 0)

Nếu P = 1 ta có $1 = 1^2$ $\Rightarrow$ P là số chính phương

Nếu P > 1. Phân tích P ra thừa số nguyên tố ta có P = $a^x.b^y.....c^z$

(với a, b, ... , c là các số nguyên tố)

Khi đó số lượng các ước của P là (x + 1).(y + 1).....(z + 1)

Theo bài ra (x + 1).(y + 1).....(z + 1) là số lẻ

$\Rightarrow$ x + 1 , y + 1 , ... , z + 1 đều là các số lẻ

$\Rightarrow$ x, y , ... , z đều là các số chẵn

Do đó x = 2.m ; y = 2.n ; ... ; z = 2.t

Nên P = $a^{2.m}.b^{2.n}.....c^{2.t} = \left(a^m.b^n.....c^t\right)^2$

$\Rightarrow$ P là số chính phương

Vậy chứng tỏ với mọi số tự nhiên khác 0, có số lượng các ước là một số lẻ thì số tự nhiên đó là một số chính phương.

**Câu 15.** M = 1 + 3 + 5 +…+ (2n-1) ( Với n $\in$ N , n $\neq$ 0 )

Tính số số hạng = ( 2n - 1-1): 2 + 1 = n

Tính tổng = ( 2n – 1 + 1 ) n : 2 = $2n^2$ : 2 = $n^2$

KL: M là số chính phương

**Câu 16.** Ta có $10 \le n < 100$ nên $21 \le 2n+1 < 201$

Mặt khác 2n +1 là số chính phương lẻ, do vậy 2n + 1 chỉ có thể là 25; 49; 81; 121; 169. Từ đó n chỉ có thể nhận các giá trị tương ứng 12; 24; 40; 60; 84

3n + 1 chỉ có thể nhận các giá trị 37; 73; 121; 181; 253.

Trong các số này chỉ có 121 = $11^2$ là số chính phương.

Từ đó 3n + 1= 121 Suy ra n = 40

**Bài 17:** Giả sử $\overline{xxyy}$ là một số chính phương ta có:

$\overline{xxyy}=1000x+100x+10y+y \; =1100x+11y=11(100x+y) \vdots 11$

Do $\overline{xxyy}$ là số chính phương nên $\overline{xxyy} \vdots 121 \Rightarrow 100x+y \vdots 11 \Rightarrow x+y \vdots 11$ $(vì\ 99x \vdots 11)$

Do $0 < x+y \le 11$ nên x + y = 11; $\overline{xxyy}=11(100x+y)=11(99x+11)=11^2(9x+1)$

Suy ra $9x + 1$ là số chính phương suy ra $x = 7$, $y = 4$

**Bài 18:** Gọi số tự nhiên có hai chữ sốphải tìm là $\overline{ab}$ $(a, b \in N, 1 \le a, b \le 9)$

Số viết theo thứ tự ngược lại $\overline{ba}$

Ta có $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = (10a + b)^2 – (10b + a)^2 = 99 (a^2 – b^2) \vdots 11 \Rightarrow a^2 – b^2 \vdots 11$

Hay $(a - b) (a + b) \vdots 11$

Vì $0 < a – b \le 8$, $2 \le a + b \le 18$ nên $a + b \vdots 11 \Rightarrow a + b = 11$

Khi đó: $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = 3^2 . 11^2 . (a – b)$

Để $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$ là số chính phương thì $a – b$ phải là số chính phương do đó $a – b = 1$ hoặc $a – b = 4$

Nếu $a – b = 1$ kết hợp với $a + b = 11 \Rightarrow a = 6, b = 5$, $\overline{ab} = 65$

Khi đó $65^2 – 56^2 = 1089 = 33^2$

Nếu $a – b = 4$ kết hợp với $a + b = 11 \Rightarrow a = 7,5$ loại

Vậy số phải tìm là 65

**Bài 19:** Giả sử $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$ $(a \in N)$ thì

$2^n = a^2 – 48^2 = (a + 48) (a – 48)$

$2^p. 2^q = (a + 48) (a – 48)$ với $p, q \in N$ ; $p + q = n$ và $p > q$

$\Rightarrow a + 48 = 2^p$ và $a – 48 = 2^q$

$\Rightarrow 2^p - 2^q = 96 \Leftrightarrow 2^q (2^{p-q} – 1) = 2^5.3$

$\Rightarrow q = 5$ và $p – q = 2 \Rightarrow p = 7$

$\Rightarrow n = 5 + 7 = 12$

Thử lại ta có: $2^8 + 2^{11} + 2^n = 80^2$

**Bài 20:** Giả sử $2010 + n^2$ là số chính phương thì $2010 + n^2 = m^2$ $(m \in N)$

Từ đó suy ra $m^2 - n^2 = 2010 \Leftrightarrow (m + n) (m – n) = 2010$

Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác $m + n + m – n = 2m \Rightarrow$ 2 số $m + n$ và $m – n$ cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m + n$ và $m – n$ là 2 số chẵn.

$\Rightarrow (m + n) (m – n) \vdots 4$ nhưng 2006 không chia hết cho 4

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2006 + n^2$ là số chính phương.

**Bài 21:**Vì chữ số tận cùng của các số $2004^2$ ; $2003^2$ ; $2002^2$ ; $2001^2$ lần lượt là 6 ; 9 ; 4 ; 1.

Do đó số n có chữ số tận cùng là 8 nên n không phải là số chính phương.

**Bài 22.** Thấy ngay số 1234567890 chia hết cho 5 (vì chữ số tận cùng là 0) nhưng không chia hết cho 25 (vì hai chữ số tận cùng là 90). Do đó số 1234567890 không phải là số chính phương.

**Chú ý:** Có thể lý luận 1234567890 chia hết cho 2 (vì chữ số tận cùng là 0), nhưng không chia hết cho 4 (vì hai chữ số tận cùng là 90) nên 1234567890 không là số chính phương.

**Bài 23:** Ta thấy tổng các chữ số của số 2004 là 6 nên 2004 chia hết cho 3 mà không chia hết 9 nên số có tổng các chữ số là 2004 cũng chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9, do đó số này không phải là số chính phương.

**Bài 24:** $P = (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + \dots + (3^{56} + 3^{57} + 3^{58} + 3^{59}) + 3^{60} + 3^{61} + 3^{62}$

$= (40 + 3^4.\ 40 + \dots + 3^{56}.\ 40) + 3^{60} + 3^{61} + 3^{62}$.

- Các số hạng trong ngoặc đều có tận cùng là 0.
- Số $3^{60} = (3^2)^{30} = 9^{30}$ => chữ số tận cùng là 1.
- Số $3^{61} = 3.3^{60}$ => có chữ số tận cùng là 3.
- Số $3^{62} = 9.3^{60}$ => có chữ số tận cùng là 9.

Vậy tổng P có chữ số tận cùng là 3 => P không là số chính phương.

**Bài 25:** Tính được $A+8 = 2^{2012} - 1 + 8 = 2^{4.503} + 7 = \dots.6 + 7 = \dots.3$

Vì SCP không có tận cùng bằng 3, nên A+8 không phải là SCP.

**Bài 26:**

a) Ta có 2N - 1 = 2.1.3.5.7 . . . 2011 - 1

Có 2N $\vdots$ 3 => 2N – 3 $\vdots$ 3 => 2N – 3 = 3k => 2N - 1 = 3k + 2 ($k \in N$)

=> 2N – 1 chia cho 3 dư 2

=> 2N - 1 không là số chính phương.

b) 2N = 2.1.3.5.7 . . . 2011 => 2N chẵn.

Ta có N lẻ (vì N là tích các số tự nhiên lẻ) => N không chia hết cho 2

=> Mặc dù 2N $\vdots$ 2 nhưng 2N không chia hết cho 4.

=> 2N không là số chính phương.

c) 2N + 1 = 2.1.3.5.7 . . . 2011 + 1

2N + 1 lẻ nên 2N + 1 không chia hết cho 4

2N không chia hết cho 4 nên 2N + 1 không chia cho 4 dư 1.

=> 2N + 1 không là số chính phương.

**Bài 27:** Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên (trong đó có 2 là số nguyên tố chẵn, còn lại tất cả là các số nguyên tố lẻ) => p$\vdots$2 và p không thể chia hết cho 4 (1)

a) Giả sử p + 1 là số chính phương. Đặt $p + 1 = m^2$ ($m \in N$).

Vì p chẵn nên p + 1 lẻ => $m^2$ lẻ => m lẻ.

Đặt m = 2k + 1 ($k \in N$). Ta có $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$ => $p + 1 = 4k^2 + 4k + 1$

=> $p = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1) \vdots 4$ mâu thuẫn với (1).

=> p + 1 không phải là số chính phương.

b) p = 2.3.5... là số chia hết cho 3 => p – 3 $\vdots$ 3 => p – 3 = 3k => p - 1 = 3k + 2.

=> p – 1 chia cho 3 dư 2 => p - 1 không là số chính phương.

Vậy nếu p là tích n (n >1) số nguyên tố đầu tiên thì p - 1 và p + 1 không là số chính phương.

**Bài 28:**

a và b lẻ nên $a = 2k + 1$, $b= 2m + 1$ (Với k, m $\in$ N).

=> $a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + ( 2m + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1$

$= 4 (k^2 + k + m^2 + m) + 2$

=> $a^2 + b^2$ chia cho 4 dư 2

=> $a^2 + b^2$ không thể là số chính phương.

**Bài 29:** Ta có: $3m^2 + m = 4n^2 + n \Leftrightarrow 4(m^2 - n^2) + (m - n) = m^2$

$\Leftrightarrow (m - n)(4m + 4n + 1) = m^2$ là số chính phương (*)

Gọi d là ước chung lớn nhất của m - n và 4m + 4n + 1 thì (4m + 4n + 1) + 4(m - n) chia hết cho d => 8m + 1 chia hết cho d.

Mặt khác, từ (*) ta có: $m^2$ chia hết cho $d^2$ => m chia hết cho d.

Từ 8m + 1 chia hết cho d và m chia hết cho d ta có 1 chia hết cho d => d = 1.

Vậy m - n và 4m + 4n + 1 là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn (*) nên chúng đều là các số chính phương.

**Bài 30:** Chú ý đến biến đổi $\underbrace{111...1}_{n\ so\ 1} = \frac{10^n - 1}{9}$ ta đi phân tích các số a và b về các lũy thừa của 10. Ta có $a = \underbrace{111...1}_{2017\ so\ 1} = \frac{10^{2017} - 1}{9}$ và $b = 1\underbrace{000...0}_{2016\ so\ 0}5 = 1\underbrace{000...0}_{2017\ so\ 0} + 5 = 10^n + 5$.

Khi đó ta được $M = ab + 1 = \frac{10^{2017} - 1}{9}.\left(10^n + 5\right) + 1 = \frac{\left(10^{2017}\right)^2 + 4.10^{2017} - 5}{9} + 1 = \left(\frac{10^{2017} + 2}{3}\right)^2$.

Đến đây ta chỉ cần chỉ ra được $\frac{10^{2017} + 2}{3} \in N$ ta ta có điều phải chứng minh.

Tuy nhiên $\frac{10^{2017} + 2}{3} \in N$ hiển nhiên đúng do $10^{2017} + 2 \vdots 3$. Vậy $M = ab + 1$ là số chính phương.

• **Chú ý.** Với dạng toán chứng minh số chính phương như trên ta chú ý đến phép biến đổi:

$$9 = 10^1 - 1; 99 = 10^2 - 1; 999 = 10^3 - 1; \underbrace{999...9}_{n\ so\ 9} = 10^n - 1$$

# CHUYÊN ĐỀ 7: CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÂN SỐ

## DẠNG 1: TÌM PHÂN SỐ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

**Một số điều kiện cho trước thường gặp:**

*① Biết tử số (hoặc mẫu số), phân số cần tìm lớn hơn phân số này và nhỏ hơn phân số kia.*

*② Viết phân số dưới dạng tổng các phân số đã biết cùng số tử (hoặc cùng số mẫu).*

*③ Liên hệ về phép chia giữa phân số cần tìm với phân số đã cho.*

*④ Biết phân số bằng phân số nào đó và biết quan hệ ƯCLN(Tử , Mẫu) hoặc tổng (hiệu) của tử và mẫu.*

*⑤ Cộng một số vào tử hoặc mẫu được một phân số mới ....*

**Bài tập 1.** Tìm phân số có tử là 5, biết rằng phân số đó lớn hơn $-\dfrac{11}{12}$ và nhỏ hơn $-\dfrac{11}{15}$.

**Hướng dẫn**

Gọi mẫu phân số cần tìm là x

Ta có: $\dfrac{-11}{12}<\dfrac{5}{x}<\dfrac{-11}{15}\Rightarrow\dfrac{55}{-60}<\dfrac{55}{11x}<\dfrac{55}{-75}\Rightarrow -75\ <\ 11\text{x}\ <\ -60\Rightarrow x=-6$.

Vậy phân số cần tìm là $-\dfrac{5}{6}$

**Bài tập 2.** Hãy viết phân số $\dfrac{11}{15}$ dưới dạng tổng của 3 phân số có tử số đều bằng 1 và có mẫu số khác nhau.

**Hướng dẫn**

$\dfrac{11}{15}=\dfrac{44}{60}\ \Rightarrow U(60)=\{1;2;3;4;5;6;10;1215;20;30;60\}$ ;

$30+10+4=44\Rightarrow\dfrac{44}{60}=\dfrac{10}{60}+\dfrac{30}{60}+\dfrac{4}{60}\ \Rightarrow\dfrac{11}{15}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{15}$

**Bài tập 3.** Tìm phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$ nhỏ nhất (với $\dfrac{a}{b}>0$) biết khi chia $\dfrac{a}{b}$ cho $\dfrac{7}{15}$ và $\dfrac{12}{25}$ được thương là các số nguyên.

**Hướng dẫn**

Ta có $\dfrac{a}{b}:\dfrac{7}{15}=\dfrac{a.15}{b.7};\dfrac{a}{b}:\dfrac{12}{25}=\dfrac{a.25}{b.12}$.

Vì $\dfrac{a}{b}$ tối giản nên ƯCLN(a;b) = 1 và $\dfrac{a.15}{b.7};\dfrac{a.25}{b.12}$ là các số nguyên nên a chia hết cho 7 và 12 còn 15 và 25 chia hết cho b

Do đó a $\in$BC(7;12) và b$\in$ƯC(15;25).

Vì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nhỏ nhất lớn hơn 0 nên a = BCNN(7;12) và b = ƯCLN(15;25) nên a = 84 ; b= 5 => Phân số cần tìm là $\frac{84}{5}$

**Bài tập 4.** Cho các phân số $\frac{35}{396}$ và $\frac{28}{297}$. Tìm phân số nhỏ nhất mà khi chia cho mỗi phân số đó ta được một số nguyên ?

**Hướng dẫn**

Gọi phân số phải tìm là $\frac{x}{y}$ (x, y $\in \mathbb{N}$ và (x, y) = 1)

Ta có: $\frac{x}{y}:\frac{35}{396}=\frac{396x}{35y}$; $\frac{x}{y}:\frac{28}{297}=\frac{297x}{28y}$

Vì kết quả là một số nguyên nên 396x ⋮ 35y và 297x ⋮28y

Mà (396; 35) = 1 ; (297; 28) = 1 và (x; y) = 1

$\Rightarrow$ 396 ⋮y và 297 ⋮ y; x ⋮ 35 và x ⋮ 28

Để $\frac{x}{y}$ nhỏ nhất khi x nhỏ nhất và y lớn nhất. Do đó:

x = BCNN(35; 28) = 140 ; y = ƯCLN(396; 297) = 99.

Vậy phân số phải tìm là $\frac{140}{99}$.

**Bài tập 5.** Tìm phân số bằng phân số $\frac{20}{39}$, biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là 36.

**Hướng dẫn**

Ta thấy ƯCLN(20,39) = 1 => phân số $\frac{20}{39}$ là phân số tối giản.

Mà ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số cần tìm là 36.

=> phân số cần tìm đã được rút gọn thành $\frac{20}{39}$ bằng cách chia cả tử và mẫu cho 36.

Vậy phân số cần tìm là: $\frac{20.36}{39.36}=\frac{720}{1404}$

**Bài tập 6.** Tìm phân số bằng phân số $\frac{200}{520}$ biết tổng của tử và mẫu là 306.

**Hướng dẫn**

Ta có $\frac{200}{520}=\frac{5}{13}$ là phân số tối giản nên phân số bằng $\frac{200}{520}$ có dạng tổng quát $\frac{5m}{13m}$ ( $m \in Z$ , $m \neq 0$)

=> 5m + 13m = 306 = > m = 17=> phân số cần tìm là $\frac{85}{221}$

**Bài tập 7.** Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số của phân số ấy thì được một phân số mới, lớn gấp 2 lần phân số ban đầu ?

**Hướng dẫn**

Gọi phân số tối giản lúc đầu là $\frac{a}{b}$. Nếu chỉ cộng mẫu số vào mẫu số ta được phân số $\frac{a}{b+b}=\frac{a}{2b}$; phân số này nhỏ hơn phân số $\frac{a}{b}$ 2 lần

Để $\frac{a+b}{2b}$ gấp 2 lần phân số lúc đầu thì a + b phải bằng 4 lần a

$\Rightarrow$ Mẫu số b phải gấp 3 lần tử số a .

Phân số tối giản thoả mãn điều kiện trên là $\frac{1}{3}$

**Bài tập 8.** Tìm phân số $\frac{a}{b}$ thoả mãn điều kiện: $\frac{4}{7}<\frac{a}{b}<\frac{2}{3}$ và $7a+4b=1994$.

**Hướng dẫn**

Ta có:

$$7a+4b=1994 \Rightarrow a=\frac{1994-4b}{7} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1994-4b}{7b} \Rightarrow \frac{4}{7}<\frac{1994-4b}{7b}<\frac{2}{3} \Rightarrow 4<\frac{1994-4b}{b}<\frac{14}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1994}{b}-4>4 \Rightarrow \frac{1994}{b}>8 \Rightarrow b<\frac{1994}{8} \Rightarrow b<249\frac{1}{4} \\ \frac{1994}{b}-4<\frac{14}{3} \Rightarrow \frac{1994}{b}<\frac{26}{3} \Rightarrow b>230\frac{1}{13} \end{cases} \Rightarrow 231<b<249$$

$$7a+4b=1994 \Rightarrow 4b=7k+6\ (k\in N) \Rightarrow b=\frac{7k+6}{4}; b\in N \Rightarrow k=4l+2\ (l\in N) \Rightarrow b=7l+5$$

$$\Rightarrow 231<7l+5<249 \Rightarrow \frac{226}{7}<l<\frac{244}{7} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l=33 \Rightarrow b=236 \Rightarrow a=150 \\ l=34 \Rightarrow b=243 \Rightarrow a=146 \end{array}\right.$$

**Bài tập 9.** Tìm phân số $\frac{a}{b}$ thoả mãn các điều kiện: $\frac{4}{9}<\frac{a}{b}<\frac{10}{21}$ và 5a – 2b = 3

**Hướng dẫn**

Từ 5a - 2b =3 $\Rightarrow$ a=( 3+ 2b )/5

Có a, b $\in$ N $\Rightarrow$ 2b : 5 dư 2 $\Rightarrow$ 2b = 5k +2 $\Rightarrow$ k $\vdots$ 2

$\Rightarrow$ k=2n => b = 5n +1 nên a= 2n + 1 ta có $\frac{4}{9}<\frac{2n+1}{5n+1}<\frac{10}{21}$.

Với $\frac{4}{9}<\frac{2n+1}{5n+1} \Rightarrow$ 20n + 4 <18n + 9 $\Rightarrow$2n < 5 $\Rightarrow$ n$\in$ { 0;1;2}

Với $\frac{2n+1}{5n+1}<\frac{10}{21} \Rightarrow$42n+12 < 50n+10 $\Rightarrow$ 9n >11$\Rightarrow$ n = 2 .

Vậy n = 2 $\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{5}{11}$

**Bài tập 10.** Cho phân số: $A = \dfrac{1+2+3+4+......+19}{11+12+13+14+....+29}$. Hãy xoá một số hạng ở tử và xoá một số hạng ở mẫu để được một phân số mới có giá trị bằng phân số đã cho.

**Hướng dẫn**

Ta có tử của A là a thì mẫu là 2a. Gọi số hạng xoá ở tử là m và số hạng xoá ở mẫu là n, khi đó ta có

$\dfrac{a}{2a} = \dfrac{a-m}{2a-m} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2a - n = 2a - 2m \Rightarrow n = 2m$

Vậy để được một phân số mới có giá trị bằng phân số đã cho ta có thể xoá các cặp số như: 6 ở tử và 12 ở mẫu; 7 ở tử và 14 ở mẫu; 14 ở tử và 28 ở mẫu

**Bài tập 11:** Tích của hai phân số là $\dfrac{8}{15}$. Thêm 4 đơn vị vào phân số thứ nhất thì tích mới là $\dfrac{56}{15}$. Tìm hai phân số đó.

**Hướng dẫn**

Tích của hai phân số là $\dfrac{8}{15}$. Thêm 4 đơn vị vào phân số thứ nhất thì tích mới là $\dfrac{56}{15}$ suy ra tích mới hơn tích cũ là $\dfrac{56}{15}$ - $\dfrac{8}{15}$ = $\dfrac{48}{15}$ đây chính là 4 lần phân số thứ hai.

Suy ra phân số thứ hai là $\dfrac{48}{15} : 4 = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$ .

Từ đó suy ra phân số thứ nhất là: $\dfrac{8}{15} : \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{3}$

**DẠNG 2: CHỨNG MINH PHÂN SỐ ĐÃ CHO LÀ TỐI GIẢN.**

*- Gọi số **d** là ước chung của Tử Số và Mẫu Số*

*- Cần chứng minh d = 1*

**Bài tập 1.** Cho a, b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng $\dfrac{8a+3b}{5a+2b}$ là phân số tối giản.

**Hướng dẫn**

Gọi d là ước chung lớn nhất của 8a + 3b và 5a + 2b

Ta có: $\begin{cases} 8a+3b \vdots d \\ 5a+2b \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(8a+3b) \vdots d \\ 8(5a+2b) \vdots d \end{cases} \Rightarrow 8(5a+2b) - 5(8a+3b) \vdots d$

$\Rightarrow 40a + 16b - 40a - 15b \vdots d \Rightarrow b \vdots d$ (1)

Ta lại có: $\begin{cases} 8a+3b \vdots d \\ 5a+2b \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(8a+3b) \vdots d \\ 3(5a+2b) \vdots d \end{cases} \Rightarrow 2(8a+3b) - 3(5a+2b) \vdots d$

$\Rightarrow 16a + 6b - 15a - 6b \vdots d \Rightarrow a \vdots d$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d \in$ ƯC(a,b).

Mà a, b là hai số nguyên tố cùng nhau, nên (a,b) = 1

$\Rightarrow$ d = 1 $\Rightarrow \frac{8a+3b}{5a+2b}$ là phân số tối giản.

**Bài tập 2.** Chứng minh : $\frac{12n+1}{30n+2}$ (n$\in$Z) tối giản.

**Hướng dẫn**

Gọi d là ước chung của 12n + 1và 30n + 2

=> 5(12n + 1) - 2(30n+2) = 1 chia hết cho d

=> d = 1 nên 12n + 1 và 30n + 2 nguyên tố cùng nhau

Do đó $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

**Bài tập 3:** Chứng tỏ rằng $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản.

**Hướng dẫn**

Gọi d = ƯC (21n + 4; 14n +3)

=> 2(21n + 4) - 3(14n + 3) = 1 $\vdots$ d

=> d = 1

Vậy (21n + 4 : 14n + 3) = 1 nên $\frac{21+4}{14+3}$ là phân số tối giản.

**Bài tập 4:** Chứng minh phân số $\frac{n+1}{2n+3}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n.

**Bài tập 5:** Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n phân số sau tối giản: $\frac{16n+3}{12n+2}$

**Bài tập 6:** Chứng minh rằng với mọi n thì phân số $\frac{7n+10}{5n+7}$ là phân số tối giản

**DẠNG 3. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHÂN SỐ LÀ PHÂN SỐ TỐI GIẢN**

*** LOẠI 1: Phân số có dạng A =** $\frac{a}{b.n+c}$ **với a, b, c là các số nguyên đã biết.**

- Bước 1: Tìm Ư(a) ≠ {1, a} là **p**
- Bước 2: Để phân số A là tối giản thì **a** và **b**.n + c phải có ƯCLN bằng 1

=> **b**.n + c ≠ **p.k (k ∈ N)**

**=> n ≠** các giá trị tương ứng với số **k ∈ N**

*** LOẠI 2: Phân số có dạng A =** $\frac{e.n+d}{b.n+c}$ **với e, b, c, d là các số nguyên đã biết.**

- Tách $\frac{e.n+d}{b.n+c} = f + \frac{a}{b.n+c}$ (với a, f là các số nguyên)
- Phân số A tối giản khi $\frac{a}{b.n+c}$ tối giản (Bài toán LOẠI 1)
- Chú ý: Nếu 0 < e < b hoặc 0 < - e < b hoặc 0 < - e < - b thì phân số A tối giản khi phân số $\frac{1}{A}$ tối giản, rồi mới thực hiện tách.

**Bài tập 1.** Cho phân số A $=\dfrac{n+1}{n-3}$ $(n \in z;\ \ n \neq 3)$. Tìm $n$ để A là phân số tối giản.

**Hướng dẫn**

Ta có: A = $\dfrac{n+1}{n-3}=1+\dfrac{4}{n-3}$

=> A là phân số tối giản thì ƯCLN(n – 3 ; 4) = 1 (*)

Nhận thấy 4 là số chẵn nên để thỏa mãn (*) thì n – 3 phải là số lẻ

=> n phải là số chẵn

**Bài tập 2.** Cho $A=\dfrac{8n+193}{4n+3}$. Tìm số tự nhiên n để A là phân số tối giản

**Hướng dẫn**

a) Ta có: $A=\dfrac{8n+193}{4n+3}=\dfrac{2(4n+3)+187}{4n+3}=2+\dfrac{187}{4n+3}$

=> A là phân số tối giản khi 187 và 4n + 3 có UCLN bằng 1

Nhận thấy 187 có hai ước khác 1 là 11 và 17

=> 4n + 3 ≠ 11k (k ∈ N) Hoặc 4n + 3 ≠ 17m (m ∈ N)

=> 4n + 3 – 11 ≠ 11k (k ∈ N) Hoặc 4n + 3 – 51 ≠ 17m (m ∈ N)

=> 4n - 8 ≠ 11k (k ∈ N) Hoặc 4n - 48 ≠ 17m (m ∈ N)

=> 4(n – 2) ≠ 11k (k ∈ N) Hoặc 4(n – 12) ≠ 17m (m ∈ N)

=> n – 2 ≠ 11k (k ∈ N) Hoặc n – 12 ≠ 17m (m ∈ N)

=> n ≠ 11k + 2 (k ∈ N) Hoặc n ≠ 17m + 12 (m ∈ N)

**Bài tập 3.** Tìm các giá trị của số tự nhiên n để phân số sau tối giản: $\dfrac{n+8}{2n-5}$, n ∈N, n >3

**Hướng dẫn**

A = $\dfrac{n+8}{2n-5}$ là phân số tối giản khi $\dfrac{1}{A}=\dfrac{2n-5}{n+8}=\dfrac{2(n+8)-21}{n+8}=2-\dfrac{21}{n+8}$ cũng là phân số tối giản khi 21 và n + 8 phải có ƯCLN bằng 1

Nhận thấy 21 có hai ước tự nhiên khác 1 là 3 và 7.

=> n + 8 ≠ 3k (k ∈ N) Hoặc n + 8 ≠ 7m (m ∈ N)

=> n ≠ 3k – 8 (k ∈ N) Hoặc n ≠ 7m – 8 (m ∈ N)

**Bài 3.** (4 điểm) Tìm tất cả các số nguyên $n$ để:

Phân số $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

**Hướng dẫn**

Gọi $d$ là ƯC của $12n+1$ và $30n+2$ $(d \in \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow 12n+1 \,\vdots\, d;\ 30n+2 \,\vdots\, d \Rightarrow \left[5(12n+1)-2(30n+2)\right] \,\vdots\, d \Rightarrow 1 \,\vdots\, d$ mà $d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d=1$.

Vậy phân số đã cho tối giản với mọi n nguyên.

**Bài tập 5:** Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau đều tối giản.

$\frac{7}{n+9};\frac{8}{n+10};\frac{9}{n+11};...;\frac{100}{n+102}$

**Hướng dẫn**

Các phân số đã cho đều có dạng: $\frac{a}{a+(n+2)}$, vì các phân số này đều tối giản nên n + 2 và a phải là hai số nguyên tố cùng nhau

Như vậy n + 2 phải nguyên tố cùng nhau với lần lượt các số 7; 8; 9; ...; 100 và n + 2 phải là số nhỏ nhất

=> n + 2 là số nguyên tố nhỏ nhất lớn hơn 100

=> n + 2 = 101 $\Rightarrow$ n = 99

**DẠNG 4: TÌM SỐ TỰ NHIÊN n ĐỂ PHÂN SỐ RÚT GỌN ĐƯỢC.**

* Một phân số rút gọn được khi ƯC(Tử số ; mẫu số) ≠ 1

*** LOẠI 1: Phân số có dạng A =** $\frac{a}{b.n+c}$ **với a, b, c là các số nguyên đã biết.**

- Bước 1: Tìm Ư(a) ≠ {1, a} là **p**
- Bước 2: Để phân số A rút gọn được thì

=> **b.**n + c = **p.k (k ∈ N)**

**=>** Tập hợp các số **n theo** các giá trị tương ứng với số **k ∈ N**

*** LOẠI 2: Phân số có dạng A =** $\frac{e.n+d}{b.n+c}$ **với e, b, c, d là các số nguyên đã biết.**

- Tách $\frac{e.n+d}{b.n+c}=f+\frac{a}{b.n+c}$ (với a, f là các số nguyên)
- Phân số A rút gọn được khi $\frac{a}{b.n+c}$ rút gọn được (Bài toán LOẠI 1)

**Bài tập 1.** Cho $A=\frac{8n+193}{4n+3}$**.** Với giá trị nào của n trong khoảng từ 150 đến 170 thì phân số A rút gọn được.

**Hướng dẫn**

Ta có: $A=\frac{8n+193}{4n+3}=\frac{2(4n+3)+187}{4n+3}=2+\frac{187}{4n+3}$

=> A là phân số tối giản khi 187 và 4n + 3 có UCLN bằng 1

Nhận thấy 187 có hai ước khác 1 là 11 và 17

Phân số A rút gọn được khi 187 và 4n + 3 có ƯỚC CHUNG khác 1

=> 4n + 3 = 11k (k ∈ N)   Hoặc 4n + 3 ≠ 17m (m ∈ N)

=> 4n + 3 – 11 = 11k′ (k′ ∈ N)   Hoặc 4n + 3 – 51 ≠ 17m′ (m′ ∈ N)

=> 4(n – 2) = 11k′ (k′ ∈ N)   Hoặc 4(n – 12) = 17m′ (m′ ∈ N)

=> n = 11k′′ + 2 (k′′ ∈ N)   Hoặc n = 17m′′ + 12 (m′′ ∈ N)

Mà 150 < n < 170 => Tìm được k′′ = 14 và m′′ = 9

=> n = 156 hoặc n = 165

**Bài tập 2.** Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\dfrac{18n+3}{21n+7}$ có thể rút gọn được.

**Hướng dẫn**

Giả sử $18n + 3$ và $21n + 7$ cùng chia hết cho số nguyên tố d

=> $18n + 3 \vdots d$, $21n + 7 \vdots d$ => $6(21n + 7) - 7(18n + 3) \vdots d$

=> $21 \vdots d$ => $d \in Ư(21) = \{3; 7\}$

Mà $21n + 7$ Không chia hết cho 3 => $d \neq 3$

Ta lại có $21n + 7 \vdots 7$ => $18n + 3 \vdots 7$ => $18n + 3 - 21 \vdots 7$

=> $18(n - 1) \vdots 7$ mà $(18; 7) = 1$ => $n - 1 \vdots 7$ => $n = 7k + 1 (k \in N)$

Vậy để phân số $\dfrac{18n+3}{21n+7}$ có thể rút gọn được thì $n = 7k + 1 (k \in N)$

**Bài tập 3.** Tìm số nguyên n để phân số $\dfrac{2n-1}{3n+2}$ rút gọn được.

**Hướng dẫn**

Gọi d là ước chung của 2n-1 và 3n+2. Ta có: $3(2n-1) - 2(3n+2) \vdots d$ nên $-7 \vdots d$

Để phân số $\dfrac{2n-1}{3n+2}$ rút gọn được, ta phải có $2n - 1 \vdots 7$

$\Leftrightarrow 2n-1+7 \vdots 7 \Leftrightarrow 2(n+3) \vdots 7 \Leftrightarrow n+3 \vdots 7$

Vậy với $n = 7k - 3$ ( $k \in Z$ ) thì phân số $\dfrac{2n-1}{3n+2}$ rút gọn được

**DẠNG 5: MỘT SỐ BÀI TOÁN LỜI VĂN.**

**Bài tập 1:** Tại một buổi học ở lớp 6A số học sinh vắng mặt bằng $\dfrac{1}{7}$ số học sinh có mặt. Người ta nhận thấy rằng nếu lớp có thêm 1 học sinh nghỉ học nữa thì số học sinh vắng mặt bằng $\dfrac{1}{6}$ số học sinh có mặt. Tính số học sinh của lớp 6A

**Hướng dẫn**

Lúc đầu số HS vắng mặt bằng 1/8 số HS cả lớp. Nếu có thêm 1 HS nữa vắng mặt thì số HS vắng mặt bằng 1/7 số HS cả lớp.

Như vậy 1 HS bằng $\dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{56}$ ( HS cả lớp) .

Vậy số HS cả lớp là $1 : \dfrac{1}{56} = 56$ ( học sinh)

**Bài tập 2:** Một lớp học có chưa đến 50 học sinh, cuối năm học có 30% số học sinh xếp loại giỏi, $\dfrac{3}{8}$ số học sinh xếp loại khá còn lại là học sinh xếp loại trung bình. Tính số học sinh xếp loại trung bình của lớp.

**Hướng dẫn**

Đổi 30% = $\frac{3}{10}$

Số hs của lớp phải là bội chung của 8 và 10 Và số hs của lớp nhỏ hơn 50

Nên số hs của lớp đó là 40

Số hs trung bình chiếm là 1- $\frac{3}{10}$ - $\frac{3}{8}$ = $\frac{13}{40}$

Vậy số hs xếp loại trung bình là 13

**Bài tập 3:** Một cửa hàng bán một tấm vải trong bốn ngày. Ngày thứ nhất bán $\frac{1}{6}$ tấm vải và 5m, ngày thứ hai bán 20% số vải còn lại và 10m. Ngày thứ ba bán 25% số vải còn lại và 9m, ngày thứ tư bán $\frac{1}{3}$ số vải còn lại. Cuối cùng còn 13m. Tính chiều dài của tấm vải.

**Hướng dẫn**

Số mét vải còn lại sau ngày thứ ba là

$$13:\frac{2}{3}=\frac{39}{2} \text{ ( mét )}$$

Số mét vải còn lại sau ngày thứ hai là

$$(\frac{39}{2}+9):\frac{3}{4}=38 \text{ ( mét )}$$

Số mét vải còn lại sau ngày thứ nhất là

$$(38+10):\frac{4}{5}=60 \text{ ( mét )}$$

Chiều dài tấm vải là : $(60+5):\frac{5}{6}=78$ ( mét )

**Bài tập 4:** Có hai vòi nước cùng chảy vào bể không chứa nước, nếu cả 2 vòi cùng chảy thì sau 48 phút sẽ đầy bể, nếu chỉ mở một mình vòi thứ nhất chảy thì sau 2 giờ sẽ đầy bể. Trong một giờ vòi thứ nhất chảy ít hơn vòi thứ hai 50 lít nước. Tính thể tích khi bể chứa đầy nước?

**Hướng dẫn**

Trong 1 phút:

Hai vòi chảy được: $\frac{1}{48}$ bể

Vòi thứ nhất chảy được: $\frac{1}{120}$ bể

Vòi thứ hai chảy được: $\frac{1}{48}-\frac{1}{120}=\frac{1}{80}$ bể

Vòi thứ hai chảy hơn vòi thứ nhất: $\frac{1}{80}-\frac{1}{120}=\frac{1}{240}$ bể

Thể tích bể: 50:$\frac{1}{240}$ = 12000 lít

**Bài tập 5:** Ở lớp 6A, số học sinh giỏi học kỳ I bằng $\frac{3}{7}$ số còn lại. Cuối năm có thêm 4 học sinh đạt loại giỏi nên số học sinh giỏi bằng $\frac{2}{3}$ số còn lại. Tính số học sinh của lớp 6A.

**Hướng dẫn**

Số học sinh giỏi kỳ I bằng $\frac{3}{10}$ số học sinh cả lớp

Số học sinh giỏi cuối bằng $\frac{2}{5}$ số học sinh cả lớp

4 học sinh là $\frac{2}{5}$ - $\frac{3}{10}$ số học sinh cả lớp

$\frac{1}{10}$ số học sinh cả lớp là 4 nên số học sinh cả lớp là 4 : $\frac{1}{10}$ = 40

**DẠNG 6: CÁC PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH .**

**I/ Phương pháp 1: Quy đồng mẫu dương rồi so sánh các tử: tử nào lớn hơn thì phân số đó lớn hơn**

**Ví dụ:** So sánh $\frac{-11}{12}$ *và* $\frac{17}{-18}$ ?

Ta viết : $\frac{-11}{12} = \frac{-33}{36}$ *và* $\frac{17}{-18} = \frac{-17}{18} = \frac{-34}{36}$

$Vì\ \frac{-33}{36} > \frac{-34}{36} \Rightarrow \frac{-11}{12} > \frac{17}{-18}$

**Chú ý :** ***Phải viết phân số dưới dạng phân số có mẫu dương.***

**II/ Phương pháp 2: Quy đồng tử dương rồi so sánh các mẫu có cùng dấu "+" hay cùng dấu "-": mẫu nào nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn**

**Ví dụ 1:** $\frac{2}{-5} > \frac{2}{-4}$ vì $-5 < -4$; $\frac{3}{7} < \frac{3}{5}$ vì $7 > 5$

**Ví dụ 2:** So sánh $\frac{2}{5}$ và $\frac{5}{7}$?

Ta có : $\frac{2}{5} = \frac{10}{25}; \frac{5}{7} = \frac{10}{14}$ . $Vì\ \frac{10}{25} < \frac{10}{14} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{5}{7}$

**Ví dụ 3:** So sánh $\frac{-3}{4}$ và $\frac{-6}{7}$ ?

Ta có : $\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = \frac{6}{-8}$ và $\frac{-6}{7} = \frac{6}{-7}$

$Vì\ \frac{6}{-8} > \frac{6}{-7} \Rightarrow \frac{-3}{4} > \frac{-6}{7}$

**Chú ý :** ***Khi quy đồng tử các phân số thì phải viết các phân số dưới dạng phân số có tử dương.***

**III/ Phương pháp 3: (Tích chéo với các mẫu b và d đều là dương )**

+ *Nếu* $a.d > b.c$ *thì* $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

+ *Nếu a.d < b.c thì* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

+ *Nếu a.d = b.c thì* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

**Ví dụ 1:** $\frac{5}{6} < \frac{7}{8}$ vì $5.8 < 6.7$ $(40 < 42)$

**Ví dụ 2:** $\frac{-4}{5} < \frac{-4}{8}$ vì $(-4).8 < (-4).5$

**Ví dụ 3:** So sánh $\frac{3}{-4}$ *và* $\frac{4}{-5}$. Ta viết $\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$ *và* $\frac{4}{-5} = \frac{-4}{5}$

Vì $(-3).5 > (-4).4$ nên $\frac{3}{-4} > \frac{4}{-5}$

**Chú ý :** ***Phải viết các mẫu của các phân số là các mẫu dương.***

(vì chẳng hạn $\frac{3}{-4} < \frac{-4}{5}$ do $3.5 < (-4).(-4)$ là sai)

**IV/ Phương pháp 4: Dùng số hoặc phân số làm trung gian**

**1/ Dùng số 1 làm trung gian:**

a) Nếu $\frac{a}{b} > 1$ và $1 > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

b) Nếu $\frac{a}{b} - M = 1$; $\frac{c}{d} - N = 1$ mà M > N thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

* M, N là phần thừa so với 1 của 2 phân số đã cho .
* Phân số nào có phần thừa lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.

c) Nếu $\frac{a}{b} + M = 1$; $\frac{c}{d} + N = 1$ mà M > N thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

* M, N là phần thiếu hay phần bù đến đơn vị của 2 phân số đó.
* Phân số nào có phần bù lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn.

**Ví dụ 1:** So sánh $\frac{19}{18}$ *và* $\frac{2005}{2004}$?

Ta có : $\frac{19}{18} - \frac{1}{18} = 1; \frac{2005}{2004} - \frac{1}{2004} = 1$

*Vì* $\frac{1}{18} > \frac{1}{2004} \Rightarrow \frac{19}{18} > \frac{2005}{2004}$

**Ví dụ 2:** So sánh $\frac{72}{73}$ *và* $\frac{98}{99}$ ?

Ta có : $\frac{72}{73} + \frac{1}{73} = 1; \frac{98}{99} + \frac{1}{99} = 1.$ *Vì* $\frac{1}{73} > \frac{1}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} < \frac{98}{99}$

**Ví dụ 3**: So sánh $\frac{7}{9}$ *và* $\frac{19}{17}$?

Ta có $\frac{7}{9} < 1 < \frac{19}{17} \Rightarrow \frac{7}{9} < \frac{19}{17}$

**2/ Dùng một phân số làm trung gian**

** Phân số này có tử là tử của phân số thứ nhất , có mẫu là mẫu của phân số thứ hai*

***Ví dụ**: Để so sánh* $\frac{18}{31}$ *và* $\frac{15}{37}$ *ta xét phân số trung gian* $\frac{18}{37}$.

$$Vì\ \frac{18}{31} > \frac{18}{37} \& \frac{18}{37} > \frac{15}{37} \Rightarrow \frac{18}{31} > \frac{15}{37}$$

* *Nhận xét:* ***Trong hai phân số , phân số nào vừa có tử lớn hơn , vừa có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn (điều kiện các tử và mẫu đều dương ).***

* *Tính bắc cầu :* $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \& \frac{c}{d} > \frac{m}{n}\ thì\ \frac{a}{b} > \frac{m}{n}$

**Ví dụ 1:** So sánh $\frac{72}{73}\ và\ \frac{58}{99}$ ?

– Xét phân số trung gian là $\frac{72}{99}$, ta thấy $\frac{72}{73} > \frac{72}{99}\ và\ \frac{72}{99} > \frac{58}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} > \frac{58}{99}$

– Hoặc xét số trung gian là $\frac{58}{73}$, ta thấy $\frac{72}{73} > \frac{58}{73}\ và\ \frac{58}{73} > \frac{58}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} > \frac{58}{99}$

**Ví dụ 2**: So sánh $\frac{n}{n+3}$ và $\frac{n+1}{n+2} (n \in N^*)$

Dùng phân số trung gian là $\frac{n}{n+2}$

Ta có : $\frac{n}{n+3} < \frac{n}{n+2}$ và $\frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \frac{n}{n+3} < \frac{n+1}{n+2} (n \in N^*)$

**Ví dụ 3:** So sánh các phân số sau:

a) $\frac{12}{49}$ và $\frac{13}{47}$?

b) $\frac{64}{85}$ và $\frac{73}{81}$?

c) $\frac{19}{31}$ và $\frac{17}{35}$?

d) $\frac{67}{77}$ và $\frac{73}{83}$?

e) $\frac{456}{461}$ và $\frac{123}{128}$?

f) $\frac{2003.2004-1}{2003.2004}$ và $\frac{2004.2005-1}{2004.2005}$?

g) $\frac{149}{157}$ và $\frac{449}{457}$?

h) $\frac{1999.2000}{1999.2000+1}$ và $\frac{2000.2001}{2000.2001+1}$?

*(Gợi ý: Từ câu a $\rightarrow$ c: Xét phân số trung gian.*

*Từ câu d $\rightarrow$ h: Xét phần bù đến đơn vị)*

**3/ Dùng một phân số xấp xỉ là trung gian.**

**Ví dụ 1:** So sánh $\frac{12}{47}$ và $\frac{19}{77}$?

Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là $\frac{1}{4}$.

Ta có : $\frac{12}{47} > \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$ và $\frac{19}{77} < \frac{19}{76} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{12}{47} > \frac{19}{77}$

**Bài tập áp dụng :**

Dùng phân số xấp xỉ làm phân số trung gian để so sánh :

$a) \frac{11}{32}$ và $\frac{16}{49}; b) \frac{58}{89}$ và $\frac{36}{53}; c) \frac{12}{37}$ và $\frac{19}{54}; d) \frac{18}{53}$ và $\frac{26}{78}$

$e) \frac{13}{79}$ và $\frac{34}{204}; f) \frac{25}{103}$ và $\frac{74}{295}; h) \frac{58}{63}$ và $\frac{36}{55}$.

**IV/ Phương pháp 5: Dùng tính chất sau với m $\neq$ 0 :**

$*0 < \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ ; $\frac{a}{b} > \frac{a-m}{b-m}$

$*\dfrac{a}{b}=1\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{a+m}{b+m}$.

$*\dfrac{a}{b}>1\Rightarrow\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+m}{b+m}$; $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-m}{b-m}$

$*\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}$.

**Ví dụ 1:** So sánh $A=\dfrac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$ và $B=\dfrac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$?

Ta có : $A=\dfrac{10^{11}-1}{10^{12}-1}<1$ (vì tử < mẫu)

$$\Rightarrow\ A=\frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}<\frac{(10^{11}-1)+11}{(10^{12}-1)+11}=\frac{10^{11}+10}{10^{12}+10}=\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}=B$$

Vậy A < B .

**Ví dụ 2:** So sánh $M=\dfrac{2004}{2005}+\dfrac{2005}{2006}$ và $N=\dfrac{2004+2005}{2005+2006}$?

Ta có : $\left.\begin{array}{l}\dfrac{2004}{2005}>\dfrac{2004}{2005+2006}\\ \dfrac{2005}{2006}>\dfrac{2005}{2005+2006}\end{array}\right\}$ Cộng vế theo vế ta có kết quả M > N.

**Ví dụ 3:** So sánh $\dfrac{37}{39}$ và $\dfrac{3737}{3939}$?

Giải: $\dfrac{37}{39}=\dfrac{3700}{3900}=\dfrac{3700+37}{3900+39}=\dfrac{3737}{3939}$ (áp dụng $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}$)

**VI/ Phương pháp 6: Đổi phân số lớn hơn đơn vị ra hỗn số để so sánh :**

*+ Hỗn số nào có phần nguyên lớn hơn thì hỗn số đó lớn hơn.*

*+ Nếu phần nguyên bằng nhau thì xét so sánh các phân số kèm theo*

**Ví dụ 1**: So sánh $\dfrac{5}{8}$ *và* $\dfrac{12}{15}$?

Ta có $\dfrac{5}{8}=0{,}625$; $\dfrac{12}{15}=0{,}8$.

Vì $0{,}625<0{,}8$ nên $\dfrac{5}{8}<\dfrac{12}{15}$

**Ví dụ 2**: So sánh $\dfrac{3}{-4}$ *và* $\dfrac{4}{-5}$?

Ta có $\dfrac{3}{-4}=-0{,}75$ ; $\dfrac{4}{-5}=-0{,}8$

Vì $-0{,}75>-0{,}8$ nên $\dfrac{3}{-4}>\dfrac{4}{-5}$

# BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1:** So sánh qua phân số trung gian:

b, $\dfrac{18}{31}$ và $\dfrac{15}{37}$ b $\dfrac{72}{73}$ và $\dfrac{58}{99}$

**Bài 2:** So sánh:

a, $A=\dfrac{2008^{2008}+1}{2008^{2009}+1}$ và $B=\dfrac{2008^{2007}+1}{2008^{2008}+1}$ b, $A=\dfrac{100^{100}+1}{100^{99}+1}$ và $B=\dfrac{100^{101}+1}{100^{100}+1}$

**Bài 3:** So sánh:

a, $A=\dfrac{13^{15}+1}{13^{16}+1}$ và $B=\dfrac{13^{16}+1}{13^{17}+1}$

b, $A=\dfrac{1999^{1999}+1}{1999^{1998}+1}$ và $B=\dfrac{1999^{2000}+1}{1999^{1999}+1}$

**Bài 4:** So sánh:

a, $A=\dfrac{100^{100}+1}{100^{99}+1}$ và $B=\dfrac{100^{98}+1}{100^{97}+1}$

b, $A=\dfrac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$ và $B=\dfrac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$

**Bài 5:** So sánh:

a, $A=\dfrac{10^{7}+5}{10^{7}-8}$ và $B=\dfrac{10^{8}+6}{10^{8}-7}$

b, $A=\dfrac{10^{8}+2}{10^{8}-1}$ và $B=\dfrac{10^{8}}{10^{8}-3}$

**Bài 6:** So sánh:

a, $A=\dfrac{19^{20}+5}{19^{20}-8}$ và $B=\dfrac{19^{21}+6}{19^{21}-7}$

b, $A=\dfrac{100^{2009}+1}{100^{2008}+1}$ và $B=\dfrac{100^{2010}+1}{100^{2009}+1}$

**Bài 7:** So sánh:

a, $A=\dfrac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ và $B=\dfrac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$

b, $A=\dfrac{10^{2004}+1}{10^{2005}+1}$ và $B=\dfrac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1}$

**Bài 8:** So sánh:

a, $A=\dfrac{10^{1992}+1}{10^{1991}+1}$ và $B=\dfrac{10^{1993}+3}{10^{1992}+3}$

b, $A=\dfrac{10^{10}+1}{10^{10}-1}$ và $B=\dfrac{10^{10}-1}{10^{10}-3}$

**Bài 9:** So sánh:

a, $A=\dfrac{10^{20}+6}{10^{21}+6}$ và $B=\dfrac{10^{21}+6}{10^{22}+6}$

b, $A=\dfrac{15^{2016}+5}{15^{2017}+5}$ và $B=\dfrac{15^{2017}+1}{15^{2018}+1}$

**Bài 10:** So sánh:

a, $A=\dfrac{10^{20}+3}{10^{21}+3}$ và $B=\dfrac{10^{21}+4}{10^{22}+4}$

b, $A=\dfrac{20^{21}+3}{20^{22}+4}$ và $B=\dfrac{20^{22}+8}{20^{23}+28}$

**Bài 11:** So sánh: $A=\dfrac{100^{100}+1}{100^{99}+1}$ Và $B=\dfrac{100^{69}+1}{100^{68}+1}$

**Bài 12:** So sánh:

a, $A=\dfrac{2^{18}-3}{2^{20}-3}$ và $B=\dfrac{2^{20}-3}{2^{22}-3}$

b, $A=\dfrac{15^{23}-3}{15^{22}-138}$ và $B=\dfrac{15^{22}+4}{15^{21}-5}$

**Bài 13:** So sánh:

a, $A=\dfrac{2004}{2005}+\dfrac{2005}{2006}$ và $B=\dfrac{2004+2005}{2005+2006}$

b, $A=\dfrac{2000}{2001}+\dfrac{2001}{2002}$ và $B=\dfrac{2000+2001}{2002+2002}$

**Bài 14:** So sánh:

a, $A=\dfrac{1985.1987-1}{1980+1985.1986}$ và 1

b, $A=\dfrac{5(11.13-22.26)}{22.26-44.54}$ và $B=\dfrac{138^{2}-690}{137^{2}-548}$

**Bài 15:** So sánh:

a, $A=\dfrac{33.10^{3}}{2^{3}.5.10^{3}+7000}$ và $B=\dfrac{3774}{5217}$

b, $A=\dfrac{244.395-151}{244+395.243}$ và

$B=\dfrac{423134.846267-423133}{423133.846267+423134}$

**Bài 16:** So sánh $M=\dfrac{5(11.13-22.26)}{22.26-44.52}$ và $N=\dfrac{138^{2}-690}{137^{2}-548}$

**Bài 17:** So sánh: $A=\dfrac{244.395-151}{244+395.243}$ và $B=\dfrac{423134.846267-423133}{423133.846267+423134}$

**Bài 18:** So sánh:

a, $A=\dfrac{1919.171717}{191919.1717}$ và $B=\dfrac{18}{19}$ b, $A=\dfrac{4}{7}+5+\dfrac{3}{7^2}+\dfrac{5}{7^3}+\dfrac{6}{7^4}$ và $B=\dfrac{5}{7^4}+5+\dfrac{6}{7^2}+\dfrac{4}{7}+\dfrac{5}{7^3}$

**Bài 19:** So sánh:

a, $A=\dfrac{10}{2^7}+\dfrac{10}{2^6}$ và $B=\dfrac{11}{2^7}+\dfrac{9}{2^6}$ b, $A=\dfrac{10}{2^7}+\dfrac{9}{2^6}+\dfrac{1}{2^6}$ và $B=\dfrac{10}{2^7}+\dfrac{9}{2^6}+\dfrac{1}{2^7}$

**Bài 20:** So sánh:

a, $M=\dfrac{7.9+14.27+21.36}{21.27+42.81+63.108}$ và $B=\dfrac{37}{333}$ b, $A=\dfrac{19}{41}+\dfrac{23}{53}+\dfrac{29}{61}$ và $B=\dfrac{21}{41}+\dfrac{23}{45}+\dfrac{33}{65}$

**Bài 21:** So sánh:

a, $A=\dfrac{12}{14^{11}}+\dfrac{23}{14^{12}}$ và $B=\dfrac{12}{14^{12}}+\dfrac{23}{14^{11}}$ b, $A=\dfrac{5^0+5^1+...+5^9}{5^0+5^1+...+5^8}$ và $B=\dfrac{3^0+3^1+...+3^9}{3^0+3^1+...+3^8}$

**Bài 22:** So sánh:

a, $A=\dfrac{n}{n+1}$ và $B=\dfrac{n+2}{n+3}$ (n>0) b, $A=\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ và $B=\dfrac{n^2+3}{n^2+4}$ (n>1)

**Bài 23:** So sánh:

a, $A=\dfrac{10}{50^{10}}+\dfrac{10}{50^8}$ và $B=\dfrac{11}{50^{10}}+\dfrac{9}{50^8}$ b, $A=\dfrac{2016}{100^{20}}+\dfrac{2016}{100^{30}}$ và $B=\dfrac{2017}{100^{20}}+\dfrac{2015}{100^{30}}$

**Bài 24:** So sánh:

a, $A=\dfrac{n}{n+3}$ và $B=\dfrac{n-1}{n+4}$ b, $A=\dfrac{n}{2n+1}$ và $B=\dfrac{3n+1}{6n+3}$

**Bài 25:** So sánh:

a, $A=\dfrac{3}{8^3}+\dfrac{7}{8^4}$ và $B=\dfrac{7}{8^3}+\dfrac{3}{8^4}$ b, $A=\dfrac{2003.2004-1}{2003.2004}$ và $B=\dfrac{2004.2005-1}{2004.2005}$

**Bài 26:** So sánh :

a, $A=\dfrac{2^{2010}+1}{2^{2007}+1}$ và $B=\dfrac{2^{2012}+1}{2^{2009}+1}$ b, $A=\dfrac{3^{123}+1}{3^{125}+1}$ và $B=\dfrac{3^{122}}{3^{124}+1}$

**Bài 27:** So sánh : $A=\dfrac{2}{60.63}+\dfrac{2}{63.66}+...+\dfrac{2}{117.120}+\dfrac{2}{2011}$ và $B=\dfrac{5}{40.44}+\dfrac{5}{44.48}+\dfrac{5}{48.52}+...+\dfrac{5}{76.80}+\dfrac{5}{2011}$

**Bài 28:** So sánh tổng $S=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{41}+\dfrac{1}{42}$ với $\dfrac{1}{2}$

**Bài 29:** So sánh không qua quy đồng : $A=\dfrac{-7}{10^{2005}}+\dfrac{-15}{10^{2006}}$ và $B=\dfrac{-15}{10^{2005}}+\dfrac{-7}{10^{2006}}$

**Bài 30:** So sánh: $A=\dfrac{-9}{10^{2012}}+\dfrac{-19}{10^{2011}}$ và $B=\dfrac{-9}{10^{2011}}+\dfrac{-19}{10^{2012}}$

**Bài 31:** So sánh : $A=\dfrac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}$ và $B=\dfrac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}$

**Bài 32:** So sánh phân số : $\frac{a-1}{a}$ và $\frac{b+1}{b}$ với a, b là số nguyên cùng dấu và a # b

**Bài 33:** So sánh $A=\frac{2006}{2007}+\frac{2007}{2008}+\frac{2008}{2009}+\frac{2009}{2006}$ với B = 4

**Câu 34:** So sánh : $C=\frac{1+5+5^2+...+5^9}{1+5+5^2+...+5^8}$ và $D=\frac{1+3+3^2+...+3^9}{1+3+3^2+...+3^8}$

**Câu 35:** Cho $C=\frac{2019^{2018}+1}{2019^{2019}+1}$ và $D=\frac{2019^{2019}+1}{2019^{2020}+1}$. So sánh $C$ và $D$.

**Câu 36:** So sánh: $C=\frac{74^{2018}+1}{74^{2019}+1}$ và $D=\frac{74^{2019}-2021}{74^{2020}-2021}$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:**

a, Xét phân số trung gian là: $\frac{18}{37}$ , Khi đó ta có: $\frac{18}{31}>\frac{18}{37}>\frac{15}{37}$

b, Xét phân số trung gian là $\frac{72}{99}$ , Khi đó ta có: $\frac{72}{73}>\frac{72}{99}>\frac{58}{99}$

**Bài 2:**

a, $A=\frac{2008^{2008}+1}{2008^{2009}+1}<1 \Rightarrow A<\frac{2008^{2008}+1+2007}{2008^{2009}+1+2007}=\frac{2008^{2008}+2008}{2008^{2009}+2008}=\frac{2008\left(2008^{2007}+1\right)}{2008\left(2008^{2008}+1\right)}=B$

b, Ta có : $B=\frac{100^{101}+1}{100^{100}+1}>1 \Rightarrow B>\frac{100^{101}+1+99}{100^{100}+1+99}=\frac{100^{101}+100}{100^{100}+100}=\frac{100\left(100^{100}+1\right)}{100\left(100^{99}+1\right)}=A$

**Bài 3:**

a, $B=\frac{13^{16}+1}{13^{17}+1}<1 \Rightarrow B<\frac{13^{16}+1+12}{13^{17}+1+12}=\frac{13^{16}+13}{13^{17}+13}=\frac{13\left(13^{15}+1\right)}{13\left(13^{16}+1\right)}=A$ Vậy A>B

b, $B=\frac{1999^{2000}+1}{1999^{1999}+1}>1 \Rightarrow B>\frac{1999^{2000}+1+1998}{1999^{1999}+1+1998}=\frac{1999^{2000}+1999}{1999^{1999}+1999}=\frac{1999\left(1999^{1999}+1\right)}{1999\left(1999^{1998}+1\right)}$=A

**Bài 4:**

a, $A=\frac{100^{100}+1}{100^{99}+1}>1 \Rightarrow A>\frac{100^{100}+1+9999}{100^{99}+1+9999}=\frac{100^{100}+10^2}{100^{99}+10^2}=\frac{100^2\left(100^{98}+1\right)}{100^2\left(100^{97}+1\right)}=B$ Vậy A>B

b, $A=\frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}<1 \Rightarrow A<\frac{10^{11}-1+11}{10^{12}-1+11}=\frac{10^{11}+10}{10^{12}+10}=\frac{10\left(10^{10}+1\right)}{10\left(10^{11}+1\right)}=B$

**Bài 5:**

a, $A=\frac{10^7+5}{10^7-8}=\frac{10^7-8+13}{10^7-8}=1+\frac{13}{10^7-8}$

$B=\frac{10^8+6}{10^8-7}=\frac{10^8-7+13}{10^8-7}=1+\frac{13}{10^8-7}$ mà: $\frac{13}{10^7-8}>\frac{13}{10^8-7} \Rightarrow A>B$

b, $A=\frac{10^8+2}{10^8-1}=\frac{10^8-1+3}{10^8-1}=1+\frac{3}{10^8-1}$

$B=\frac{10^8}{10^8-3}=\frac{10^8-3+3}{10^8-3}=1+\frac{3}{10^8-3}$ Mà: $\frac{3}{10^8-1}<\frac{3}{10^8-3}=>A<B$

**Bài 6:**

a, $A=\frac{19^{20}+5}{19^{20}-8}=\frac{19^{20}-8+13}{19^{20}-8}=1+\frac{13}{19^{20}-8}$

$B=\frac{19^{21}+6}{19^{21}-7}=\frac{19^{21}-7+13}{19^{21}-7}=1+\frac{13}{19^{21}-7}$, Mà: $\frac{13}{19^{20}-8}>\frac{13}{19^{21}-7}=>A>B$

b, $B=\frac{100^{2010}+1}{100^{2009}+1}>1=>B>\frac{100^{2010}+1+99}{100^{2009}+1+99}=\frac{100\left(100^{2009}+1\right)}{100\left(100^{2008}+1\right)}=A$, vậy A<B

**Bài 7:**

a, $B=\frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}<1=>B<\frac{10^{16}+1+9}{10^{17}+1+9}=\frac{10\left(10^{15}+1\right)}{10\left(10^{16}+1\right)}=A$ Vậy: A>B

b, $B=\frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1}<1=>B<\frac{10^{2005}+1+9}{10^{2006}+1+9}=\frac{10\left(10^{2004}+1\right)}{10\left(10^{2005}+1\right)}=A$ Vậy A>B

**Bài 8:**

a, $B=\frac{10^{1993}+3}{10^{1992}+3}>1=>B>\frac{10^{1993}+3+7}{10^{1992}+3+7}=\frac{10\left(10^{1992}+1\right)}{10\left(10^{1991}+1\right)}=A$ vậy B>A

b, $A=\frac{10^{10}+1}{10^{10}-1}=\frac{10^{10}-1+2}{10^{10}-1}=1+\frac{2}{10^{10}-1}$

$B=\frac{10^{10}-1}{10^{10}-3}=\frac{10^{10}-3+2}{10^{10}-3}=1+\frac{2}{10^{10}-3}$, mà: $\frac{2}{10^{10}-1}<\frac{2}{10^{10}-3}=>A<B$

**Bài 9:**

a, $B=\frac{10^{21}+6}{10^{22}+6}<1=>B<\frac{10^{21}+6+54}{10^{22}+6+54}=\frac{10^{21}+60}{10^{22}+60}=\frac{10\left(10^{21}+6\right)}{10\left(10^{21}+6\right)}=A$, Vậy A>B

b, $B=\frac{15^{2017}+1}{15^{2018}+1}<1=>B<\frac{15^{2017}+1+74}{15^{2018}+1+74}=\frac{15^{2017}+75}{15^{2018}+75}=\frac{15\left(15^{2016}+5\right)}{15\left(15^{2017}+5\right)}=A$ vậy A>B

**Bài 10:**

a, $B=\frac{10^{21}+4}{10^{22}+4}<1=>B<\frac{10^{21}+4+26}{10^{22}+4+26}=\frac{10^{21}+30}{10^{22}+30}=\frac{10\left(10^{20}+3\right)}{10\left(10^{21}+3\right)}=A$, vậy A>B

b, $B=\frac{20^{22}+8}{20^{23}+28}<1=>B<\frac{20^{22}+8+52}{20^{23}+28+52}=\frac{20^{22}+60}{20^{23}+80}=\frac{20\left(20^{21}+3\right)}{20\left(20^{22}+4\right)}=A$ Vậy A>B

**Bài 11:**

Quy đồng mẫu ta có:

$A=\left(100^{100}+1\right)\left(100^{68}+1\right)$, và $B=\left(100^{69}+1\right)\left(100^{99}+1\right)$

Xét hiệu $A-B=(100+1)\left(100^{68}+1\right)-\left(100^{89}+1\right)\left(100^{99}+1\right)$ $=100^{100}-100^{99}-100^{69}+100^{68}$

$=100.100^{99}-100^{99}-100.100^{68}+100^{68}=99.100^{99}-99.100^{68}=99\left(100^{99}-100^{68}\right)>0=>A>B$

**Bài 12:**

a, Chú ý trong trường hợp ta trừ cả tử và mẫu với cùng 1 số thì ta đảo chiều của bất đẳng thức $B=\frac{2^{20}-3}{2^{22}-3}<1 => B>\frac{2^{20}-3-9}{2^{22}-3-9}=\frac{2^{20}-12}{2^{22}-12}=\frac{2^2\left(2^{18}-3\right)}{2^2\left(2^{20}-3\right)}=A$ Vậy B>A

b, $A=\frac{15^{23}-3}{15^{22}-138}>1 => A>\frac{15^{23}-3+63}{15^{22}-138+63}=\frac{15^{23}+60}{15^{22}-75}=\frac{15\left(15^{22}+4\right)}{15\left(15^{21}-5\right)}=B$, Vậy A>B

**Bài 13:**

a, $B=\frac{2004+2005}{4011}=\frac{2004}{4011}+\frac{2005}{4011}<\frac{2004}{2005}+\frac{2005}{2006}=A$

b, $B=\frac{2000+2001}{4004}=\frac{2000}{4004}+\frac{2001}{4004}<\frac{2000}{2001}+\frac{2001}{2002}=A$

**Bài 14:**

a, $A=\frac{1985.(1986+1)-1}{1980+1985.1986}=\frac{1985.1986+1985-1}{1980+1985.1986}=\frac{1985.1986+1984}{1985.1986+1980}>1$

b, $A=\frac{5(11.13-22.26)}{4.(11.13-22.26)}=\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4}$ và $B=\frac{138}{137}=1+\frac{1}{137}$ mà: $\frac{1}{4}>\frac{1}{137} => A>B$

**Bài 15:**

a, $7000=7.10^3 => A=\frac{33}{47}$ và $B=\frac{34}{47}$ => A<B

b, $A=\frac{(243+1).395-151}{244+395.243}=\frac{243.395+395-151}{244+395.243}=\frac{243.395+244}{244+395.243}=1$,

Tương tự ta có: Tử số của $B$ là

$(423133+1).846267-423133=423133.846267+846267-423133$

$=423133.846267+423134$ bằng với mẫu số của B nên B=1. Vậy A=B

**Bài 16:**

Ta có: $M=\frac{5(11.13-22.26)}{4(11.13-22.26)}=\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4}$ và $N=\frac{138}{137}=1+\frac{1}{137}$

**Bài 17:**

Ta có: A có $TS=(243+1)395-151=243.395+395-151=243.395+244=MS => A=1$

Và $TS=(423133+1)846267-423133=423133.846267+846256-423133$

$=423133.846267+423134=MS => B=1$

**Bài 18:**

a, Ta có : $A=\frac{19.101.17.10101}{19.10101.17.101}=1>\frac{18}{19}=B$

b, Ta có :

$A=\left(5+\frac{4}{7}+\frac{5}{7^3}\right)+\left(\frac{3}{7^2}+\frac{6}{7^4}\right)=\left(5+\frac{4}{7}+\frac{5}{7^3}\right)+\left(\frac{3}{7^2}+\frac{5}{7^4}+\frac{1}{7^4}\right)$

$B=\left(5+\frac{4}{7}+\frac{5}{7^3}\right)+\left(\frac{6}{7^2}+\frac{5}{7^4}\right)=\left(5+\frac{4}{7}+\frac{5}{7^3}\right)+\left(\frac{3}{7^2}+\frac{3}{7^2}+\frac{5}{7^4}\right)$

Mà: $\frac{1}{7^4}=\frac{1}{2401}<\frac{3}{7^2}=\frac{3}{49}$

**Bài 19:**

a, Ta có : $A=\frac{10}{2^7}+\frac{10}{2^6}=\frac{10}{2^7}+\frac{9}{2^6}+\frac{1}{2^6}$

$B=\frac{11}{2^7}+\frac{9}{2^6}=\frac{10}{2^7}+\frac{1}{2^7}+\frac{9}{2^6}$, mà: $\frac{1}{2^6}>\frac{1}{2^7}=>A>B$

b, Ta có : $\frac{1}{2^6}>\frac{1}{2^7}=>A>B$

**Bài 20:**

a, Rút gọn M ta có: $A=\frac{7.9(1+2.3+3.4)}{21.29(1+2.3+3.4)}=\frac{1}{9}$ $\qquad B=\frac{37:37}{333:37}=\frac{1}{9}$

b, $A=\frac{19}{41}+\frac{23}{53}+\frac{29}{61}<\frac{19}{38}+\frac{23}{46}+\frac{29}{58}=\frac{3}{2}$ và $B=\frac{21}{41}+\frac{23}{45}+\frac{33}{65}>\frac{21}{42}+\frac{23}{46}+\frac{33}{66}=\frac{3}{2}$

Vậy A<B

**Bài 21:**

a, Ta có : $A=\frac{12}{14^{11}}+\frac{23}{14^{12}}=\frac{12}{14^{11}}+\frac{12}{14^{12}}+\frac{11}{14^{12}}$

$B=\frac{12}{14^{12}}+\frac{23}{14^{11}}=\frac{12}{14^{11}}+\frac{11}{14^{11}}+\frac{12}{14^{12}}$, mà: $\frac{11}{14^{12}}<\frac{11}{14^{11}}=>A<B$

b, Ta có : $A=\frac{1+5\left(5^0+5^1+5^2+...+5^8\right)}{5^0+5^1+5^2+...+5^8}=\frac{1}{1+5+5^2+...+5^8}+5$>2+3

$B=\frac{1+3\left(3^0+3^1+3^2+...+3^8\right)}{3^0+3^1+3^2+...+3^8}=\frac{1}{3^0+3^1+3^2+...+3^8}+3$

Nhận thấy $\frac{1}{3^0+3^1+3^2+...+3^8}<2=>A>B$

**Bài 22:**

a, Ta có : $A=\frac{n}{n+1}<1=>A<\frac{n+2}{n+1+2}=\frac{n+2}{n+3}=B$

b, Ta có : $A=\frac{n^2-1}{n^2+1}=\frac{n^2+1-2}{n^2+1}=1+\frac{-2}{n^2+1}$

Và $B=\frac{n^2+3}{n^2+4}=\frac{n^2+4-1}{n^2+4}=1+\frac{-1}{n^2+4}=1+\frac{-2}{2n^2+8}$, Mà: $\frac{-2}{n^2+1}<\frac{-2}{2n^2+8}=>A<B$

**Bài 23:**

a, $A=\frac{10}{50^{10}}+\frac{9}{50^8}+\frac{1}{50^8}$ và $B=\frac{10}{50^{10}}+\frac{1}{50^{10}}+\frac{9}{50^8}$, Mà: $\frac{1}{50^8}>\frac{1}{50^{10}}=>A>B$

b, $A=\frac{2016}{100^{20}}+\frac{2015}{100^{30}}+\frac{1}{100^{30}}$ và $B=\frac{2016}{100^{20}}+\frac{1}{100^{20}}+\frac{2015}{100^{30}}$, mà: $\frac{1}{100^{30}}<\frac{1}{100^{20}}=>A<B$

**Bài 24:**

a, $A=\frac{n}{n+3}>\frac{n-1}{n+3}>\frac{n-1}{n+4}=B$

b, $A=\frac{n}{2n+1}=\frac{3n}{6n+3}<\frac{3n+1}{6n+3}=B$

**Bài 25:**

a, $A=\frac{3}{8^3}+\frac{7}{8^4}=\frac{3}{8^3}+\frac{3}{8^4}+\frac{4}{8^4}$, và $B=\frac{7}{8^3}+\frac{3}{8^4}=\frac{3}{8^3}+\frac{4}{8^3}+\frac{3}{8^4}$, Mà: $\frac{4}{8^4}<\frac{4}{8^3}$ => $A<B$

b, $A=1+\frac{-1}{2003.2004}$, $B=1+\frac{-1}{2004.2005}$, Mà: $\frac{-1}{2003.2004}<\frac{-1}{2004.2005}$ => $A<B$

**Bài 26:**

a, $A=\frac{2^{2010}+2^3-7}{2^{2007}+1}=2^3-\frac{7}{2^{2002}+1}$ $\quad B=\frac{2^{2012}+2^3-7}{2^{2009}+1}=2^3-\frac{7}{2^{2009}+1}$

b, $A=\frac{3^{123}+\frac{1}{3^2}+\frac{8}{9}}{3^{125}+1}=\frac{\frac{1}{3^2}\left(3^{125}+1\right)+\frac{8}{9}}{3^{125}+1}=\frac{1}{3^2}+\frac{\frac{8}{9}}{3^{125}+1}$, Tương tự : $B=\frac{1}{3^2}+\frac{\frac{8}{9}}{3^{124}+1}$

**Bài 27:**

$$3A=2\left(\frac{3}{60.63}+\frac{3}{63.66}+...+\frac{3}{117.120}+\frac{3}{2011}\right)=2\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{120}+\frac{3}{2011}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{120}+\frac{3}{2011}\right)=\frac{1}{60}+\frac{6}{2011}$$

$$A=\frac{1}{180}+\frac{2}{2011}$$

$$4B=5\left(\frac{4}{40.44}+\frac{4}{44.48}+...+\frac{4}{76.80}+\frac{4}{2011}\right)=5\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{80}+\frac{4}{2011}\right)$$

$$=5\left(\frac{1}{80}+\frac{4}{2011}\right)=\frac{1}{16}+\frac{20}{2011}$$

$$B=\frac{1}{64}+\frac{5}{2011}>\frac{1}{180}+\frac{2}{2011}=A$$

**Bài 28:**

$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}<\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{41}+\frac{1}{42}<\frac{1}{40}+\frac{1}{40}=\frac{1}{20}$ nên $S<\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}$

**Bài 29:**

$A=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-8}{10^{2006}}+\frac{-7}{10^{2006}}$, $B=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-8}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}$

**Bài 30:**

$A=\frac{-9}{10^{2012}}+\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-10}{10^{2011}}$

$B=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-9}{10^{2012}}+\frac{-10}{10^{2012}}$, Mà: $\frac{-10}{10^{2011}}<\frac{-10}{10^{2012}}$ => $A<B$

**Bài 31:**

$B<1 => B<\frac{2009^{2010}-2+2011}{2009^{2011}-2+2011}=A$

**Bài 32:**

Ta có : $\frac{a-1}{a}=1-\frac{1}{a}$ & $\frac{b+1}{b}=1+\frac{1}{b}$

*Nếu a>0 và b>0 thì $\frac{1}{a}>0$ và $\frac{1}{b}>0$ *Nếu $a<0$ và $b<0$ thì $\frac{1}{a}<0$ & $\frac{1}{b}<0$

**Bài 33:**

$$A=\frac{2007-1}{2007}+\frac{2008-1}{2008}+\frac{2009-1}{2009}+\frac{2006+3}{2006}=4+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2007}+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2008}+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2009}>4$$

**Câu 34:** Ta có:

$$C=\frac{1+5+5^2+...+5^9}{1+5+5^2+...+5^8}=1+\frac{5^9}{1+5+5^2+...+5^8}=1+1:\frac{1+5+5^2+...+5^8}{5^9}$$

$$C=1+1:\left(\frac{1}{5^9}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{5^7}+...+\frac{1}{5}\right)$$

$$D=\frac{1+3+3^2+...+3^9}{1+3+3^2+...+3^8}=1+\frac{3^9}{1+3+3^2+...+3^8}=1+1:\frac{1+3+3^2+...+3^8}{3^9}$$

$$D=1+1:\left(\frac{1}{3^9}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{3^7}+...+\frac{1}{3}\right)$$

Do $\frac{1}{5^9}<\frac{1}{3^9}$ ; $\frac{1}{5^8}<\frac{1}{3^8}$ ; $\frac{1}{5^7}<\frac{1}{3^7}$ ; ...; $\frac{1}{5}<\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow\frac{1}{5^9}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{5^7}+....+\frac{1}{5}<\frac{1}{3^9}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{3^7}+....+\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1:\left(\frac{1}{5^9}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{5^7}+....+\frac{1}{5}\right)>1:\left(\frac{1}{3^9}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{3^7}+....+\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 1+1:\left(\frac{1}{5^9}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{5^7}+....+\frac{1}{5}\right)>1+1:\left(\frac{1}{3^9}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{3^7}+....+\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow C>D$$

**Câu 35:**

$$C=\frac{2019^{2018}+1}{2019^{2019}+1}\Rightarrow 2019C=\frac{2019.\left(2019^{2018}+1\right)}{2019^{2019}+1}=\frac{2019^{2019}+1+2018}{2019^{2019}+1}=1+\frac{2018}{2019^{2019}+1}$$

$$D=\frac{2019^{2019}+1}{2019^{2020}+1}\Rightarrow 2019D=\frac{2019.\left(2019^{2019}+1\right)}{2019^{2020}+1}=\frac{2019^{2020}+1+2018}{2019^{2020}+1}=1+\frac{2018}{2019^{2020}+1}$$

Vì $\frac{2018}{2019^{2019}+1}>\frac{2018}{2019^{2020}+1}$ nên $2019C>2019D\Rightarrow C>D$

**Câu 36:** Ta có:

$$C=\frac{74^{2018}+1}{74^{2019}+1}$$

$$74.C=\frac{74^{2019}+74}{74^{2019}+1}=\frac{74^{2019}+1+73}{74^{2019}+1}$$

$$74.C=1+\frac{73}{74^{2019}+1}(1)$$

$$D=\frac{74^{2019}-2021}{74^{2020}-2021}$$

$$74.D=\frac{74^{2020}-2021.74}{74^{2020}-2021}=\frac{74^{2020}-2021.(1+73)}{74^{2020}-2021}$$

$$74.D=\frac{74^{2020}-2021-2021.73}{74^{2020}-2021}$$

$$74.D=1-\frac{2021.73}{74^{2020}-2021}(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $74C>74D \Rightarrow C>D$

# CHUYÊN ĐỀ 11: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GTLN, GTNN

## I. TÌM GTLN,GTNN

**Dạng 1: Với $A=\dfrac{a}{b.n+c}$ với a, b, c là các số nguyên đã biết.**

+ Nếu a ∈ $Z^+$ thì:

A có GTLN khi $b.n+c$ là số dương nhỏ nhất ứng với n nguyên

A có GTNN khi $b.n+c$ là số nguyên âm lớn nhất ứng với n nguyên

+ Nếu a ∈ $Z^-$ thì:

A có GTLN khi $b.n+c$ là số âm lớn nhất ứng với n nguyên.

A có GTNN khi $b.n+c$ là số dương nhỏ nhất ứng với n nguyên

**Bài 1.** Cho phân số $P=\dfrac{2019}{x-2020}$. Tìm số nguyên $x$ để $P$ có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: $x\neq 2020$

*Nếu $x<2020$ thì $x-2020<0\Rightarrow P<0$

*Nếu $x>2020$ thì $x-2020>0\Rightarrow P>0$

Vì $x$ là số nguyên nên $x-2020\geq 1$

Do đó $P=\dfrac{2019}{x-2020}\leq 2019$

Xảy ra $P=2019$ khi $x-2020=1\Rightarrow x=2021$

Vậy với $x=2021$ thì giá trị lớn nhất của $P=2019$.

**Bài 2.** Tìm số tự nhiên n để A = $\dfrac{15}{n-9}$ có giá trị lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $15>0$ và không đổi.

Nên A = $\dfrac{15}{n-9}$ có giá trị lớn nhất khi $n-9>0$ và có giá trị nhỏ nhất (1)

Ta lại có: $n\in N\Rightarrow n-9\in Z$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n-9$ có giá trị nhỏ nhất bằng $1$ khi đó n = 10.

Vậy với n = 10 thì thỏa mãn đầu bài.

**Bài 3.** Tìm x để phân số $\dfrac{1}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**

Vì $\frac{1}{x^2+1}$ là một phân số => $x^2 + 1 \in N^*$ => Phân số $\frac{1}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất khi $x^2 + 1$ phải là số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 => $x^2 + 1 = 1$ => $x = 0$.

**Dạng 2: Với A =** $\frac{a.n+d}{b.n+c}$ **với a, b, c, d là các số nguyên đã biết.**

+ Tách A = $\frac{a.n+d}{b.n+c} = e + \frac{f}{b.n+c}$ (f ∈ Z)

+ Việc tìm n nguyên để A có GTLN – GTNN trở thành bài toán tìm n nguyên để $\frac{f}{b.n+c}$ có GTLN hoặc có GTNN (Bài toán dạng 1)

**Bài 1.** Cho phân số: $P = \frac{6n+5}{3n+2}\ (n \in \mathbb{N})$. Với giá trị nào của $n$ thì phân số $P$ có giá trị lớn nhất?

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $P = \frac{6n+5}{3n+2} = \frac{2(3n+2)+1}{3n+2} = 2 + \frac{1}{3n+2}$

Với $n \in \mathbb{N}$ thì $3n+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{3n+2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{3n+2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow P \leq \frac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow n = 0$

Vậy $n = 0$ thì phân số $P$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{5}{2}$.

**Bài 2.** Cho phân số A=$\frac{n+1}{n-3}$ $(n \in Z)$. Tìm n để A có giá trị lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: A=$\frac{n+1}{n-3} = \frac{n-3+4}{n-3} = 1 + \frac{4}{n-3}$

Với $n > 3$ thì $\frac{4}{n-3} > 0$

Với $n < 3$ thì $\frac{4}{n-3} < 0$

Để A có giá trị lớn nhất thì n – 3 nguyên dương và có giá trị nhỏ nhất.

Hay $n - 3 = 1 \Rightarrow n = 4$

**Bài 3.** Với giá trị nào của số tự nhiên a thì $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{5a-17}{4a-23} = \frac{4.(5a-17)}{4.(4a-23)} = \frac{20a-68}{4(4a-23)} = \frac{5.4a-5.23+47}{4(4a-23)} = \frac{5(4a-23)+47}{4(4a-23)} = \frac{5}{4} + \frac{47}{4(4a-23)}$$

Cách giải tương tự **Bài tập 2:**

Như vậy bài toán đưa về tìm số tự nhiên a để 4a – 23 là số dương nhỏ nhất ứng với số tự nhiên a = 6.

Vậy $a = 6 \Rightarrow \dfrac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất bằng 13.

**Bài 4.** Tìm số tự nhiên n để phân số B = $\dfrac{10n-3}{4n-10}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$B = \frac{10n-3}{4n-10} = \frac{5(2n-5)+22}{2\left(2n-5\right)} = \frac{5}{2} + \frac{22}{2(2n-5)} = \frac{5}{2} + \frac{11}{2n-5}$$

Ta có: B đạt giá trị lớn nhất khi $\dfrac{11}{\mathbf{2n-5}}$ đạt giá trị lớn nhất.

Vì 11 > 0 và không đổi nên $\dfrac{11}{\mathbf{2n-5}}$ đạt giá trị lớn nhất khi: 2n – 5 > 0 và đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ 2n - 5 = 1 $\Leftrightarrow$ n = 3

Vậy B đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{5}{2} + 11 = \dfrac{27}{2}$ khi n = 3

**Bài 5.** Cho $M = \dfrac{42-x}{x-15}$. Tìm số nguyên x để M đạt giá trị nhỏ nhất

**Hướng dẫn giải**

Ta thấy $M = \dfrac{42-x}{x-15} = -1 + \dfrac{27}{x-15}$ đạt GTNN $\Leftrightarrow \dfrac{27}{x-15}$ nhỏ nhất

Xét $x-15>0$ thì $\dfrac{27}{x-15}>0$

Xét $x-15<0$ thì $\dfrac{27}{x-15}<0$. Vậy $\dfrac{27}{x-15}$ nhỏ nhất khi $x-15<0$

Phân số $\dfrac{27}{x-15}$ có tử dương mẫu âm

Khi đó $\dfrac{27}{x-15}$ nhỏ nhất khi $x-15$ là số nguyên âm lớn nhất hay

$x-15=-1 \Leftrightarrow x=14$

Vậy $x=14$ thì M nhỏ nhất và M = $-28$

**Bài 6.** Cho $A = \dfrac{2n+3}{n-2}$ $(n \neq 2)$ . Tìm số nguyên $n$ để $A$ có giá trị lớn nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Hướng dẫn giải**

* Tìm $A$ có giá trị lớn nhất.

Ta có: $A = 2 + \dfrac{7}{n-2}$

Để $A$ đạt GTLN thì $\frac{7}{n-2}$ có GTLN, do đó $n-2$ là số nguyên dương nhỏ nhất.

Với $n-2=1$ suy ra $n=3$.

Khi đó $A=2+\frac{7}{1}=9$

Vậy $A$ có giá trị lớn nhất bằng 9 khi $n=3$.

* Tìm $A$ có giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $A=2+\frac{7}{n-2}$

Để $A$ đạt GTNN thì $\frac{7}{n-2}$ có GTNN, do đó $n-2$ là số nguyên âm lớn nhất.

Với $n-2=-1$ suy ra $n=1$.

Khi đó $A=2-7=-5$.

Vậy $A$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-5$ khi $n=1$.

**Bài 7.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B=\frac{x^2+y^2+3}{x^2+y^2+2}$

**Hướng dẫn giải**

$b)B=\frac{x^2+y^2+3}{x^2+y^2+2}=\frac{x^2+y^2+2+1}{x^2+y^2+2}=1+\frac{1}{x^2+y^2+2}$

$B$ lớn nhất khi $x^2+y^2+2$ lớn nhất

Ta có: $\begin{cases} x^2\ge 0 \\ y^2\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+2\ge 2 \Rightarrow x^2+y^2+2$ nhỏ nhất bằng 2, khi $x=y=0$

Khi đó $B$ lớn nhất bằng $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

**Bài 7.** Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của biểu thức sau: $B=\frac{x^2+15}{x^2+3}$

**Hướng dẫn giải**

$B=\frac{x^2+15}{x^2+3}=1+\frac{12}{x^2+3}$

Ta có $x^2\ge 0$. Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=0 \Rightarrow x^2+3\ge 3$

$\Rightarrow \frac{12}{x^2+3}\le \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2+3}\le 4 \Rightarrow 1+\frac{12}{x^2+3}\le 5$

Vậy $MaxB=5 \Leftrightarrow x=0$

**LOẠI 3: Với A = | f(x) | + b hoặc A = - | f(x) | + b**

+ Vì | f(x) | ≥ 0 => A = | f(x) | + b ≥ b => A nhỏ nhất = b khi f(x) = 0

+ Vì - | f(x) | ≤ 0 => A = - | f(x) | + b ≤ b => A lớn nhất = b khi f(x) = 0

**Bài 1.** Tìm giá trị nhỏ nhất các biểu thức sau:

$a)\ \left|x+\frac{1}{2}\right|$ $\qquad$ $b)\ \left|x-\frac{1}{3}\right|+2.$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $\left|x+\frac{1}{2}\right| \geq 0$

Do đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|x+\frac{1}{2}\right|$ là 0

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|x+\frac{1}{2}\right|$ là 0 đạt được khi $x+\frac{1}{2}=0$ hay $x=-\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|x+\frac{1}{2}\right|$ là 0 khi $x=-\frac{1}{2}$.

b) Ta có: $\left|x-\frac{1}{3}\right| \geq 0$

Suy ra: $\left|x-\frac{1}{3}\right| + 2 \geq 2$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|x-\frac{1}{3}\right|+2$ là $2$ đạt được khi $x-\frac{1}{3}=0$ hay $x=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|x-\frac{1}{3}\right|+2$ là 0 khi $x=\frac{1}{3}$

**Bài 2.** Tìm giá trị lớn nhất các biểu thức sau:

$a)\ -|3x+1|$ $\qquad$ $b)\ 6-|x+2|.$

c) $\frac{1}{|x+6|+2}$ $\qquad$ $d)\ \frac{3+2|x+1|}{1+|x+1|}$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $-|3x+1| \leq 0$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $-|3x+1|$ là $0$ đạt được khi $3x+1=0$ hay $x=-\frac{1}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của $-|3x+1|$ là 0 khi $x=-\frac{1}{3}$

b) Ta có: $-|x+2| \leq 0$

Suy ra: $6-|x+2| \leq 6$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $6-|x+2|$ là $6$ đạt được khi $x+2=0$ hay $x=-2$

Vậy giá trị lớn nhất của $6-|x+2|$ là 6 khi $x=-2$

c) Ta có: $\left|x+6\right|+2\geq 2$

Suy ra: $\dfrac{1}{\left|x+6\right|+2}\leq\dfrac{1}{2}$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $\dfrac{1}{\left|x+6\right|+2}$ là $\dfrac{1}{2}$ đạt được khi $x+6=0$ hay $x=-6$

Vậy giá trị lớn nhất của $\dfrac{1}{\left|x+6\right|+2}$ là $\dfrac{1}{2}$ khi $x=-6$

d) Ta có: $\dfrac{3+2\left|x+1\right|}{1+\left|x+1\right|}=\dfrac{1+2\left(1+\left|x+1\right|\right)}{1+\left|x+1\right|}=\dfrac{1}{1+\left|x+1\right|}+2$

Do: $1+\left|x+1\right|\geq 1$. Suy ra: $\dfrac{1}{1+\left|x+1\right|}+2\leq 3$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $\dfrac{3+2\left|x+1\right|}{1+\left|x+1\right|}$ là $3$ đạt được khi $x+1=0$ hay $x=-1$

Vậy giá trị lớn nhất của $\dfrac{3+2\left|x+1\right|}{1+\left|x+1\right|}$ là 3 khi $x=-1$

**Bài 3.** Với giá trị nào của x, y thì biểu thức : A = | x - y | + | x + 1 | + 2016 đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Hướng dẫn giải**

Vì |x - y | ≥ 0 với mọi x, y ; |x + 1 | ≥ 0 với mọi x

⇒ A ≥ 2016 với mọi x,y .

⇒ A đạt giá trị nhỏ nhất khi $\begin{cases}|x-y|=0\\|x+1|=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x=-1\end{cases}$

Vậy với x = y = - 1 thì A đạt giá trị nhỏ nhất là 2016.

**Bài 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=\dfrac{\left|x-2017\right|+2018}{\left|x-2017\right|+2019}$

**Hướng dẫn giải**

$$a)C=\frac{\left|x-2017\right|+2018}{\left|x-2017\right|+2019}=\frac{\left(\left|x-2017\right|+2019\right)-1}{\left|x-2017\right|+2019}=1-\frac{1}{\left|x-2017\right|+2019}$$

Biểu thức $C$ đạt giá tri nhỏ nhất khi $\left|x-2017\right|+2019$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $\left|x-2017\right|\geq 0$ nên $\left|x-2017\right|+2019\geq 2019$

Dấu $"="$ xảy ra khi $x=2017\Rightarrow C=\dfrac{2018}{2019}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\dfrac{2018}{2019}$ khi $x=2017$

**Bài 5.** Tìm giá trị nhỏ nhất của A, biết :

A = |7x – 5y| + |2z – 3x| +|xy + yz + zx - 2000|

**Hướng dẫn giải**

Ta có |7x – 5y| ≥ 0; |2z – 3x| ≥ 0 và | xy + yz + zx - 2000| ≥ 0

Nên A = |7x – 5y| + |2z – 3x| +|xy + yz + zx - 2000| ≥ 0

Mà A = 0 khi và chỉ khi

|7x – 5y| = |2z – 3x| = |xy + yz + zx - 2000| = 0

Có: |7x – 5y| = 0 ⇔ 7x = 5y ⇔ $\frac{x}{5}=\frac{y}{7}$

|2z – 3x| = 0 ⇔ $\frac{x}{2}=\frac{z}{3}$

|xy + yz + zx - 2000| = 0 ⇔ xy + yz + zx = 2000

Từ đó tìm được $\left[\begin{array}{l} x=20; y=28; z=30 \\ x=-20; y=-28; z=-30 \end{array}\right.$

A ≥ 0, mà A = 0 ⇔ (x,y,z) = (20;28;30) hoặc (x,y,z)= (-20;-28;-30)

Vậy MinA = 0 ⇔ (x,y,z) = (20;28;30) hoặc (x,y,z)= (-20;-28;-30)

## II. BẤT ĐẲNG THỨC

**Dạng 1: Tổng phân số tự nhiên**

**Phương pháp:**

Với tổng phân số tự nhiên, với chương trình lớp 6 -7 ta nên cho học sinh làm theo cách nhóm đầu cuối và so sánh giữa các nhóm với nhau, để tạo ra các ngoặc có cùng tử, rồi so sánh bình thường

**Bài 1.** Cho $A=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+...+\frac{1}{200}$.

Chứng minh răng: a) $A>\frac{7}{12}$ b) $A>\frac{5}{8}$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta chọn biểu thức $B$ làm trung gian sao cho $A>B$, còn $B\ge\frac{7}{12}$. Tách $A$ thành hai nhóm, mỗi nhóm có 50 phân số, rồi thay mỗi phân số trong từng nhóm bằng phân số nhỏ nhất trong nhóm ấy, ta được:

$$A=\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+...+\frac{1}{150}\right)+\left(\frac{1}{151}+\frac{1}{152}+\frac{1}{153}+...+\frac{1}{200}\right)>$$

$$>\frac{1}{150}.50+\frac{1}{200}.50=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

b) Tách $A$ thành bốn nhóm rồi cũng làm như trên, ta được:

$$A > \frac{25}{125} + \frac{25}{150} + \frac{25}{175} + \frac{25}{200} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{8} = \frac{107}{210} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

**Bài 2.** Chứng minh rằng: $\frac{5}{8} < \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \ldots + \frac{1}{200} < \frac{3}{4}$.

**Hướng dẫn giải**

Gọi $A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \ldots + \frac{1}{200}$.

Ghép các phân số ở hai đầu và các phân số cách đều hai đầu thành 50 cặp.

$$A = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{199}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{151}\right) =$$

$$= \frac{301}{101.200} + \frac{301}{102.199} + \ldots + \frac{301}{150.151}$$

$$= 301\left(\frac{1}{101.200} + \frac{1}{102.199} + \ldots + \frac{1}{150.151}\right)$$

Xét mẫu của 50 phân số trong dấu ngoặc, theo câu a thì $101.200$ có giá trị nhỏ nhất, $150.151$ có giá trị lớn nhất, suy ra trong 50 phân số trong dấu ngoặc thì $\frac{1}{101.200}$ lớn nhất, $\frac{1}{150.151}$ nhỏ nhất.

Do đó: $A < 301.\frac{1}{101.200}.50 = \frac{301}{404} < \frac{303}{404} = \frac{3}{4}$

$$A > 301.\frac{1}{150.151}.50 = \frac{301}{453} > \frac{300}{453} > \frac{300}{480} = \frac{5}{8}.$$

Vậy: $\frac{5}{8} < A < \frac{3}{4}$

**Bài 3.** Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{100} - 1}$ .

Chứng minh rằng: a) $A < 100$; b) $A > 50$

**Giải.** a) Để chứng tỏ rằng $A < 100$, ta chia $A$ thành 100 nhóm:

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{15}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \ldots + \frac{1}{2^{100} - 1}\right).$$

Thay các phân số trong mỗi dấu dấu ngoặc bằng phân số lớn nhất trong dấu ngoặc đó, ta được:

$$A<1+\frac{1}{2}.2+\frac{1}{4}.4+\frac{1}{8}.8+...+\frac{1}{2^{99}}.2^{99}=100.$$

b) Để chứng tỏ rằng $A>50,$ ta thêm và bớt $\frac{1}{2^{100}}$ rồi viết $A$ dưới dạng sau:

$$A=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{9}+...+\frac{1}{2^4}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{99}+1}+...+\frac{1}{2^{100}}\right)-\frac{1}{2^{100}}.$$

Thay các phân số trong mỗi dấu ngoặc bằng phân số nhỏ nhất trong dấu ngoặc đó, ta được:

$$A>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}.2+\frac{1}{2^3}.2^2+...+\frac{1}{2^{100}}.2^{99}-\frac{1}{2^{100}}=1+\frac{1}{2}.100-\frac{1}{2^{100}}>50.$$

**Bài 4:** Cho $A=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+.......+\frac{1}{200}$

Chứng minh rằng: $A>\frac{7}{12}$

**Hướng dẫn giải**

$$A=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+.......+\frac{1}{200}$$

$$>\left(\frac{1}{150}+\frac{1}{150}+\frac{1}{150}+.......+\frac{1}{150}\right)+\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{200}+\frac{1}{200}+.......+\frac{1}{200}\right)$$

(có 50 số hạng $\frac{1}{150}$ và $\frac{1}{200}$)

$$=\frac{50}{150}+\frac{50}{200}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

Vậy $A>\frac{7}{12}$

**Bài 5:** Chứng minh rằng $S=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+....+\frac{1}{130}>\frac{1}{4}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$S=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+....+\frac{1}{130}=\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{110}\right)+\left(\frac{1}{111}+\frac{1}{112}+...+\frac{1}{120}\right)+\left(\frac{1}{121}+\frac{1}{122}+...+\frac{1}{130}\right)$$

Ta có $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{110}>\frac{1}{110}+\frac{1}{110}+...+\frac{1}{110}=\frac{10}{110}=\frac{1}{11}$

$$\frac{1}{111}+\frac{1}{112}+...+\frac{1}{120}>\frac{1}{120}+\frac{1}{120}+...+\frac{1}{120}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{121}+\frac{1}{122}+...+\frac{1}{130}>\frac{1}{130}+\frac{1}{130}+...+\frac{1}{130}=\frac{10}{130}=\frac{1}{13}$$

$$S>\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}=\frac{431}{1716}>\frac{429}{1716}=\frac{1}{4}$$

**Bài 6:** Chứng minh: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{32}>3$

**Hướng dẫn giải**

Theo bài ta có

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{32}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+...+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+...+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+...+\frac{1}{32}\right)$$

Vì $\frac{1}{3}$ lớn hơn $\frac{1}{4}$.

$\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7}$ lớn hơn $\frac{1}{8}$.

$\frac{1}{9},...\frac{1}{15}$ lớn hơn $\frac{1}{16}$

$\frac{1}{17},...\frac{1}{31}$ lớn hơn $\frac{1}{32}$. Do đó

$$S>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+...+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{32}+...+\frac{1}{32}\right)$$

$$\Rightarrow S>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow S>3$$

Vậy $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{32}>3$ (đpcm)

**Bài 7:** Chứng minh rằng: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}<\frac{1}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có $2A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}$

$$\Rightarrow 2A+A=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\right)$$

$$\Rightarrow 3A=1-\frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow 3A=\frac{63}{64}<1\ \Rightarrow A<\frac{1}{3}$$ (đpcm).

**Bài 8:** Cho biểu thức: $B=\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+\frac{1}{1+3+5+7}+...+\frac{1}{1+3+5+7+...+101}$.

Chứng minh $B<\frac{3}{4}$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có $B=\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+\frac{1}{1+3+5+7}+...+\frac{1}{1+3+5+7+...+101}$

Nhận xét: Vì :

$1+3=4=2^2$

$1+3+5=9=3^2>3.2$

$1+3+5+7=16=4^2>4.3$

…

$1+3+5+7+\ldots+101=51^2>51.50$

Suy ra:

$$B=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{51^2}$$

$$B<\frac{1}{4}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{50.51}$$

$$B<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{50}-\frac{1}{51}$$

$$B<\frac{3}{4}-\frac{1}{51}$$

$$B<\frac{3}{4}$$

**Dạng 2: Tổng lũy thừa**

**Phương pháp:**

So sánh các số hạng trong tổng với các số hạng trong tổng liên tiếp để tìm mối quan hệ. Nếu muốn chứng minh lớn hơn 1 giá trị k nào đó, ta cần so sánh với số hạng có mẫu lớn hơn, và ngược lại

**Bài 1:** Chứng minh rằng: $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}<1$

**Hướng dẫn giải**

Ta thấy bài toán có dạng tổng các lũy thừa bậc hai, nên ta sẽ phân tích tổng A như sau:

$$A=\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{4.4}+...+\frac{1}{99.99}+\frac{1}{100.100}$$

Đến đây ta sẽ so sánh với phân số có mẫu nhỏ hơn, vì yêu cầu bài toán là chứng minh nhỏ hơn.

$$A<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{98.99}+\frac{1}{99.100}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

$$A<\frac{1}{1}-\frac{1}{100}<1$$

**Bài 1:** Cho $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}$

Chứng minh rằng $A<\frac{3}{4}$.

**Hướng dẫn giải**

Giữ nguyên phân số $\frac{1}{2^2}$, còn các phân số khác thay bằng các phân số lớn hơn, ta có: $A<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}=\frac{1}{4}+B$

Dễ dàng tính được: $B=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{2}-\frac{1}{100}$

Do đó: $A<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{100}<\frac{3}{4}$.

**Bài 2:** Cho $A=\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+....+\frac{1}{n^2}+...+\frac{1}{2004^2}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{65}<A<\frac{1}{4}$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $A=\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+....+\frac{1}{n^2}+...+\frac{1}{2004^2}<\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+...+\frac{1}{2003.2004}$

$\Rightarrow A<\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-...+\frac{1}{2003}-\frac{1}{2004}$

$\Rightarrow A<\frac{1}{4}-\frac{1}{2004}=\frac{501-1}{2004}=\frac{500}{2004}<\frac{500}{2000}=\frac{1}{4}$ (1)

Mặt khác , $A>\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+.....+\frac{1}{2004.2005}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-.....+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}$

$\Rightarrow A>\frac{1}{5}-\frac{1}{2005}=\frac{400}{2005}=\frac{80}{401}>\frac{7}{401}>\frac{7}{455}=\frac{1}{65}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{65}<A<\frac{1}{4}$;

**Bài 3:** Chứng tỏ $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2019^2}<1$.

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2019^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{2018.2019}$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}=1-\frac{1}{2019}=\frac{2018}{2019}<1.$$

**Bài 4:** Chứng minh rằng $A<\frac{1}{16}$ với $A=\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+...+\frac{99}{5^{100}}$.

**Hướng dẫn giải**

$$A=\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+...+\frac{99}{5^{100}}$$

$$\Rightarrow 5A=\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+...+\frac{99}{5^{99}}$$

$$\Rightarrow 4A=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^{99}}-\frac{99}{5^{100}}$$

$$\Rightarrow 20A=1+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{5^{98}}-\frac{1}{5^{99}}$$

$$\Rightarrow 20A-4A=\left(1+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{5^{98}}-\frac{1}{5^{99}}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^{99}}-\frac{99}{5^{100}}\right)$$

$$\Rightarrow 16A=1-\frac{2}{5^{99}}+\frac{99}{5^{100}}<1$$

$$\Rightarrow A<\frac{1}{16}$$

**Bài 5:** Cho $A=\frac{7}{3}+\frac{11}{3^2}+\frac{15}{3^3}+...+\frac{2019}{3^{504}}$. Chứng minh rằng $A<\frac{9}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

$$A=\frac{7}{3}+\frac{11}{3^2}+\frac{15}{3^3}+...+\frac{2019}{3^{504}}$$

Ta có: $3A=7+\frac{11}{3}+\frac{15}{3^2}+...+\frac{2019}{3^{503}}$

Suy ra $3A-A=\left(7+\frac{11}{3}+\frac{15}{3^2}+...+\frac{2019}{3^{503}}\right)-\left(\frac{7}{3}+\frac{11}{3^2}+\frac{15}{3^3}+...+\frac{2019}{3^{504}}\right)$

$$2A=7+\frac{11}{3}-\frac{7}{3}+\frac{15}{3^2}-\frac{11}{3^2}+...+\frac{2019}{3^{503}}-\frac{2015}{3^{503}}-\frac{2019}{3^{504}}$$

$$2A=7+\frac{4}{3}+\frac{4}{3^2}+...+\frac{4}{3^{503}}-\frac{2019}{3^{504}}$$

$$2A=7+4\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{503}}\right)-\frac{2019}{3^{504}}$$

Đặt $B=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{503}}$

$$3B=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{502}}$$

$$3B-B=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{502}}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{503}}\right)$$

$$2B=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{502}}-\frac{1}{3^{502}}-\frac{1}{3^{503}}$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{503}}$$

$$B = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{503}}\right)$$

Do đó $2A = 7 + 4\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{503}}\right)\right] - \frac{2019}{3^{504}} = 7 + 2 - \frac{2}{3^{503}} - \frac{2019}{3^{504}} = 9 - \frac{2}{3^{503}} - \frac{2019}{3^{504}}$

$A = \frac{9}{2} - \frac{1}{3^{503}} - \frac{2019}{2.3^{504}} < \frac{9}{2}$. Do đó $A < \frac{9}{2}$.

**Bài 6:** Chứng minh rằng $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + ... + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$.

**Hướng dẫn giải**

$$A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + ... + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow 3A = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + ... + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 4A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 4A < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \qquad (1)$$

Đặt $B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$

$$\Rightarrow 3B = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$\Rightarrow 4B = B + 3B = 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3 \Rightarrow B < \frac{3}{4} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4A < B < \frac{3}{4} \Rightarrow A < \frac{3}{16}$.

**Bài 7:** Cho $n \in \mathbb{Z}$, $n > 2$. Chứng tỏ rằng $P = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + ... + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ không là số nguyên.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $P = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + ... + \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{4-1}{4} + \frac{9-1}{9} + \frac{16-1}{16} + ... + \frac{n^2 - 1}{n^2}$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + ... + 1 - \frac{1}{n^2} = n - 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right) < n - 1 \quad (1)$$

Lại có: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(n-1).n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$=1-\frac{1}{n}$.

Suy ra: $P>n-1-\left(1-\frac{1}{n}\right)=n-2+\frac{1}{n}>n-2 \qquad (2)$

Vậy $n-2<P<n-1$ nên $P$ không phải số nguyên.

**Bài 8:** Chứng minh rằng: $A=\frac{3}{1^2.2^2}+\frac{5}{2^2.3^2}+\frac{7}{3^2.4^2}+.....+\frac{19}{9^2.10^2}<1$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$A=\frac{3}{1^2.2^2}+\frac{5}{2^2.3^2}+\frac{7}{3^2.4^2}+........+\frac{19}{9^2.10^2}$$
$$=\frac{2^2-1^2}{1^2.2^2}+\frac{3^2-2^2}{2^2.3^2}+\frac{4^2-3^2}{3^2.4^2}+.......+\frac{10^2-9^2}{9^2.10^2}$$
$$=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+......+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2}$$
$$=1-\frac{1}{10^2}<1$$

**Bài 9:** Chứng minh rằng: $S=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^8}+...+\frac{1}{2^{2002}}-\frac{1}{2^{2004}}<\frac{1}{5}$

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{1}{2^2}S=\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}-\frac{1}{2^{10}}+...+\frac{1}{2^{2004}}-\frac{1}{2^{2006}}\Rightarrow S+\frac{S}{4}=\frac{5S}{4}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{2006}}<\frac{1}{4}\Rightarrow S<\frac{1}{5}$$

**Bài 10:** Chứng minh rằng: $B=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{2005}}<\frac{1}{2}$

**Hướng dẫn giải**

$$\frac{1}{3}B=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{3^{2006}}\Rightarrow B-\frac{1}{3}B=\frac{2B}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{2006}}<\frac{1}{3}\ \Rightarrow B<\frac{1}{2}$$

**Bài 11:** Cho $P=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2019^2}$.Chứng minh rằng $P$ không phải là một số tự nhiên.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$\frac{1}{1^2}=1$

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1}.\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2}.\frac{1}{3}$$

.......

$$\frac{1}{2019^2} < \frac{1}{2018}.\frac{1}{2019}$$

$$\Rightarrow P < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{2018.2019}$$

$$\Rightarrow P < 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}$$

$$\Rightarrow P < 2 - \frac{1}{2019}$$

Vậy $P$ không phải là một số tự nhiên.

**Bài 12:** Chứng minh rằng: $1 < \frac{2012}{2011^2+1} + \frac{2012}{2011^2+2} + \frac{2012}{2011^2+3} + ... + \frac{2012}{2011^2+2011} < 2$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\frac{2012}{2011^2+1} < \frac{2012}{2011^2}$ , $\frac{2012}{2011^2+2} < \frac{2012}{2011^2}$ , tương tự như vậy :

$$A < \frac{2012}{2011^2} + \frac{2012}{2011^2} + ... + \frac{2012}{2011^2} = \frac{2012.2011}{2011^2} = \frac{2012}{2011} < 2 \Rightarrow A < 2$$

Mặt khác: $\frac{2012}{2011^2+1} > \frac{2012}{2011^2+2011}$ , $\frac{2012}{2011^2+2} = \frac{2012}{2011^2+2011}$ , Tương tự như vậy:

$$A > \frac{2012}{2011^2+2011} + \frac{2012}{2011^2+2011} + ... + \frac{2012}{2011^2+2011} = \frac{2012.2011}{2011^2+2011} = \frac{2012.2011}{2011(2011+1)} = 1$$

**Bài 13:** Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + .... + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; ....; \frac{1}{\sqrt{99}} > \frac{1}{\sqrt{100}}$

Suy ra : $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ..... + \frac{1}{\sqrt{100}} > 100.\frac{1}{\sqrt{100}} = 10$

Vậy $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ..... + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$

**Bài 14:** Chứng minh rằng: $N = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2}$ không là số tự nhiên.

**Hướng dẫn giải**

Có $N = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2} > 0$.

Mặt khác $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

… ……..

$\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99.100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$

Nên $N < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} < 1$.

**Dạng 3: Tích của một dãy**
**Phương pháp:**

Với dạng tích ta sử dụng tính chất: $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ với m > 0 và $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$ với m > 0.

**Bài 1.** Cho $A = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{199}{200}$ (1)

Chứng minh rằng $A^2 < \frac{1}{201}$

**Giải.** Biểu thức $A$ có tích của 100 phân số nhỏ hơn 1, trong đó các tử đều lẻ, các mẫu đều chẵn. Ta đưa ra biểu thức trung gian là một tích các phân số mà các tử đều chẵn, các mẫu đều lẻ. Thêm 1 vào tử và mâu của mỗi phân số của $A$, giá trị mỗi phân số tăng thêm, do đó

$$A < \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}...\frac{200}{201} \qquad (2)$$

Nhân (1) với (2) theo từng vế ta được:

$$A^2 < \left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{199}{200}\right).\left(\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}...\frac{200}{201}\right)$$

Vế phải của bất đẳng thức trên bằng:

$$\frac{1.(3.5...199)}{2.4.6...200}\times\frac{2.4.6...200}{(3.5...199).201}=\frac{1}{201}$$

Vậy $A^2<\frac{1}{201}$.

**Bài 2:** Cho $M=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}.....\frac{631}{632}$. Chứng minh rằng: $M<0,04$.

**Hướng dẫn giải**

Đặt $N=\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{9}.....\frac{632}{633}$.

$\Rightarrow M.N=\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}.....\frac{631}{632}\right).\left(\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{9}.....\frac{632}{633}\right)=\frac{1}{633}$

Mà $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$; ...; $\frac{631}{632}<\frac{633}{632}$ nên $M^2<M.N\Rightarrow M<0,39$

Vậy $M<0,04$ (đpcm).

**Bài 3:** Cho $A=\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)...\left(1+\frac{1}{2017.2019}\right)$

Chứng minh rằng $A<2$?

**Hướng dẫn giải**

Ta có $A=\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)...\left(1+\frac{1}{2017.2019}\right)$

$=\frac{4}{1.3}.\frac{9}{2.4}.\frac{16}{3.5}...\frac{4072324}{2017.2019}\quad=\frac{2.2}{1.3}.\frac{3.3}{2.4}.\frac{4.4}{3.5}...\frac{2018.2018}{2017.2019}$

$=\frac{2.3.4...2018}{1.2.3...2017}.\frac{2.3.4...2018}{3.4.5...2019}$

$=2018.\frac{2}{2019}<2019.\frac{2}{2019}=2$.

Vậy $A<2$.

**Bài 4:** Cho $A=\left(\frac{1}{2^2}-1\right)\left(\frac{1}{3^2}-1\right)\left(\frac{1}{4^2}-1\right)...\left(\frac{1}{100^2}-1\right)$ So sánh A với $-\frac{1}{2}$

**Hướng dẫn giải**

Ta thấy tích A gồm 99 số âm :

$A=\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{9}-1\right)......\left(\frac{1}{10000}-1\right)=-\left(\frac{1.3}{2.2}.\frac{2.4}{3.3}......\frac{99.101}{100.100}\right)=\frac{-101}{200}$, Mà :

$\frac{101}{200}>\frac{1}{2}=>\frac{-101}{200}<\frac{-1}{2}$

Vậy $A < \frac{-1}{2}$

**Dạng 5. Bất đẳng thức dạng chữ**

**Phương pháp:**

+ Với các số thực dương a, b bất kì, ta luôn có $a \geq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

+ Với các số thực dương a, b, c, d bất kì, ta có:

- Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$
- Nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$
- Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

**Lưu ý:** Trước khi áp dụng các bất đẳng thức về tỉ số ta phải chứng minh.

**Bài 1.** Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

**Hướng dẫn giải**

1) Vì a, b, c > 0 nên $a+b+c > a+b > 0$. $\Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b}$.

Tương tự $\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c}$ và $\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a}$.

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

2) Trước hết ta chứng minh với x, y, k là các số dương và $\frac{x}{y} < 1$ thì $\frac{x}{y} < \frac{x+k}{y+k}$.

Thật vậy xét hiệu $\frac{x}{y} - \frac{x+k}{y+k} = \frac{k(x-y)}{y(y+k)} < 0$ do $y(y+k) > 0$ và $x - y < 0$ (do giả thiết $x < y$).

Do $a < b + c$; $b < c + a$; $c < a + b$ nên ta có :

$$\frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{b+c+a}; \quad \frac{b}{c+a} < \frac{b+b}{c+a+b}; \quad \frac{c}{a+b} < \frac{c+c}{a+b+c}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Do đó: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

**Bài 2.** Cho a, b, c, d là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

**Hướng dẫn giải**

1) Vì a, b, c > 0 nên $a+b+c+d > a+b+c > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{a+b+c+d} < \dfrac{a}{a+b+c}$ .

Tương tự $\dfrac{b}{a+b+c+d} < \dfrac{b}{b+c+d}$ ; $\dfrac{c}{a+b+c+d} < \dfrac{c}{c+d+a}$;$\dfrac{d}{a+b+c+d} < \dfrac{d}{d+a+b}$..

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} > \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

2) Trước hết ta chứng minh với x, y, k là các số dương và $\dfrac{x}{y} < 1$ thì $\dfrac{x}{y} < \dfrac{x+k}{y+k}$ .

Thật vậy xét hiệu $\dfrac{x}{y} - \dfrac{x+k}{y+k} = \dfrac{k(x-y)}{y(y+k)} < 0$ do $y(y+k) > 0$ và $x - y < 0$ (do giả thiết $x < y$).

Do $a < a+b+c$ ; $b < b+c+d$ ; $c < c+d+a$ ; $d < d+a+b$ nên ta có :

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d};\frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{b+c+d+a};\frac{c}{c+d+a} < \frac{c+b}{c+d+a+b};\frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{d+a+b+c}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được :

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2$$

Do đó: $1 < \dfrac{a}{a+b+c} + \dfrac{b}{b+c+d} + \dfrac{c}{c+d+a} + \dfrac{d}{d+a+b} < 2$

**Bài 3:** Cho $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng: $M = \dfrac{x}{x+y+z} + \dfrac{y}{x+y+t} + \dfrac{z}{y+z+t} + \dfrac{t}{x+z+t}$ có giá trị không phải là số tự nhiên.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$\frac{x}{x+y+z+t} < \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y};\frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t};\frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{x+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x+y+z+t} < M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t}\right)$$

$\Rightarrow 1 < M < 2$

Vậy A có giá trị không nguyên

**Bài 4 :** Cho $a,b,c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác

Chứng minh rằng: $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$

**Hướng dẫn giải**

$$0 \le (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-2ab+b^2 \Rightarrow a^2+b^2 \ge 2ab$$

Tương tự: $b^2+c^2 \ge 2bc; c^2+a^2 \ge 2ca;$

$\Rightarrow a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2 \ge 2ab+2bc+2ca$

$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2) \ge 2(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca \qquad (1)$

+)Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $a<b+c,$ nhân cả 2 vế với $a$ dương ta được:

$a^2<ab+ac$. Tương tự: $b^2<ba+bc; c^2<ca+cb$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2<ab+ac+ba+bc+ca+cb=2(ab+bc+ca) \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 5:** Cho ba số dương $0 \le a \le b \le c \le 1.$ Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{bc+1}+\dfrac{b}{ac+1}+\dfrac{c}{ab+1} \le 2$

**Hướng dẫn giải**

Vì $0 \le a \le b \le c \le 1$ nên:

$$(a-1)(b-1) \ge 0 \Leftrightarrow ab+1 \ge a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \le \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \le \frac{c}{a+b} \qquad (1)$$

Tương tự: $\dfrac{a}{bc+1} \le \dfrac{a}{b+c} \qquad (2); \dfrac{b}{ac+1} \le \dfrac{b}{a+c} \qquad (3)$

Do đó: $\dfrac{a}{bc+1}+\dfrac{b}{ac+1}+\dfrac{c}{ab+1} \le \dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b} \qquad (4)$

Mà : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b} \le \dfrac{2a}{a+b+c}+\dfrac{2b}{a+b+c}+\dfrac{2c}{a+b+c} = \dfrac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2(5)$

Từ (4) và (5) suy ra : $\dfrac{a}{bc+1}+\dfrac{b}{ac+1}+\dfrac{c}{ab+1} \le 2 \qquad (dfcm)$

**Bài 6:** Cho ba số $a,b,c$ thỏa mãn $0 \le a \le b+1 \le c+2$ và $a+b+c=1.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $c.$

**Hướng dẫn giải**

Vì $0 \le a \le b+1 \le c+2$ nên $0 \le a+b+1+c+2 \le c+2+c+2+c+2$

$\Rightarrow 0 \le 4 \le 3c+6$ (vì $a+b+c=1$)

Hay $3c \geq -2 \Rightarrow c \geq -\frac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $c$ là $-\frac{2}{3}$ khi đó $a+b=\frac{5}{3}$

**Bài 7:** Cho $a>2, b>2$. Chứng minh $ab>a+b$

**Hướng dẫn giải**

Từ $a>2 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{2}$; $\quad b>2 \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab}<1$

Vậy $ab>a+b$

**Bài 8:** Cho các số $0<a_1<a_2<a_3<......<a_{15}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+.....+a_{15}}{a_5+a_{10}+a_{15}}<5$$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5<5a_5$$
$$a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}<5a_{10}$$
$$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}<5a_{15}$$

Suy ra $a_1+a_2+........+a_{15}<5\left(a_5+a_{10}+a_{15}\right)$

Vậy $\frac{a_1+a_2+a_3+.....+a_{15}}{a_5+a_{10}+a_{15}}<5$

**Bài 9:** Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0<x<1$. Chứng minh $x^n<x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

**Hướng dẫn giải**

Xét $x^n-x=x\left(x^{n-1}-1\right)$

$0<x<1 \Rightarrow x^{n-1}-1<0; x>0 \Rightarrow x^n-x<0$

Suy ra điều phải chứng minh

**Bài 10:** Cho các số $a,b,c$ không âm thỏa mãn : $a+3c=2016; a+2b=2017$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+b+c$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $a+3c=2016(1)$ và $a+2b=2017(2)$

Từ (1) $\Rightarrow a=2016-3c$

Lấy (2) $-(1)$ ta được $2b-3c=1 \Leftrightarrow b=\dfrac{1+3c}{2}$. Khi đó:

$$P=a+b+c=(2016-3c)+\frac{1+3c}{2}+c=\left(2016+\frac{1}{2}\right)+\frac{-6c+3c+2c}{2}=2016\frac{1}{2}-\frac{c}{2}$$

Vì $a,b,c$ không âm nên $P=2016\dfrac{1}{2}-\dfrac{c}{2}\le 2016\dfrac{1}{2}$, $MaxP=2016\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow c=0$

**Bài 11:** Cho 20 số nguyên khác 0: $a_1,a_2,a_3,.....,a_{20}$ có các tính chất sau:

* $a_1$ là số dương

*Tổng của ba số viết liền nhau bất kỳ là một số dương.

*Tổng của 20 số đó là số âm

Chứng minh rằng: $a_1.a_{14}+a_{14}.a_{12}<a_1.a_{12}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$a_1+(a_2+a_3+a_4)+......+(a_{11}+a_{12}+a_{13})+a_{14}+(a_{15}+a_{16}+a_{17})+(a_{18}+a_{19}+a_{20})<0$$

$$a_1>0, a_2+a_3+a_4>0;.....;a_{11}+a_{12}+a_{13}>0;a_{15}+a_{16}+a_{17}>0;a_{18}+a_{19}+a_{20}>0\Rightarrow a_{14}<0$$

Cũng như vậy:

$$(a_1+a_2+a_3)+......+(a_{10}+a_{11}+a_{12})+a_{13}+a_{14}+(a_{15}+a_{16}+a_{17})+(a_{18}+a_{19}+a_{20})<0$$

$$\Rightarrow a_{13}+a_{14}<0$$

Mặt khác, $a_{12}+a_{13}+a_{14}>0\Rightarrow a_{12}>0$

Từ các điều kiện $a_1>0;a_{12}>0;a_{14}<0\Rightarrow a_1.a_{14}+a_{14}.a_{12}<a_1a_{12}(dfcm)$

**Bài 12:** Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+\sqrt{x}+1$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $x\ge 0;\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow x+\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow P=x+\sqrt{x}+1\ge 1$

Dấu "=" xảy ra khi $x=0(tmdk)$. Vậy $P_{\min}=0\Leftrightarrow x=0$

**Bài 13:** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>1$$

**Hướng dẫn giải**

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có

$$0<\frac{a}{b+c}<1\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{b+c}}>\frac{a}{b+c}$$

Vì a là số dương nên theo tính chất của tỉ số ta được $\dfrac{a}{b+c}>\dfrac{a}{a+b+c}$

Do đó ta có $$\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$

Vậy bài toán được chứng minh.

# CHUYÊN ĐỀ 9:
# TỈ LỆ THỨC VÀ TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỶ SỐ BẰNG NHAU

## A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Định nghĩa, tính chất cảu tỉ lệ thức**

a) **Định nghĩa:**

**Tỉ lệ thức** là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Tỷ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ còn được viết: a : b = c : d

Trong đó: - a, b, c, d là các số hạng của tỷ lệ thức;

- a và d là các số hạng ngoài hay *ngoại tỉ*;
- b và d là các số hạng trong hay *trung tỉ*;

b) **Tính chất**

- Tính chất 1 (tính chất cơ bản)

Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ thì ad = bc

- Tính chất 2 (tính chất hoán vị)

Nếu ad = bc và a, b, c, d khác 0 thì ta có các tỉ lệ thức:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\frac{d}{b}=\frac{c}{a};\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

**2) Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:**

+ Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ta suy ra $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}\left(b\neq \pm d\right)$

+ Mở rộng: từ dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$

ta suy ra $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a-c+e}{b-d+f}=....$

(giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

**3.Chú ý:**

+ Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}$ ta nói các số a, b, c tỉ lệ với các số 2; 3; 5 ta cũng viết a:b:c = 2:3:5.

+ Vì tỉ lệ thức là một đẳng thức nên nó có tính chất của đẳng thức, từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ suy ra: $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{c}{d}\right)^2=\frac{a}{b}.\frac{c}{d};k.\frac{a}{b}=k.\frac{c}{d}(k\neq 0);\frac{k_1a}{k_1b}=\frac{k_2c}{k_2d}(k_1,k_2\neq 0)$

từ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ suy ra $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{c}{d}\right)^3=\left(\frac{e}{f}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f};\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$

## B/ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

## PHẦN 1: TÌM SỐ HẠNG CHƯA BIẾT

### 1.*Tìm một số hạng chưa biết*

a) *Phương pháp:* áp dụng tính chất cơ bản tỉ lệ thức

Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a.d=b.c\Rightarrow a=\frac{b.c}{d};b=\frac{a.d}{c};c=\frac{a.d}{b}$

Muốn tìm ngoại tỉ chưa biết ta lấy tích của 2 trung tỉ chia cho ngoại tỉ đã biết, muốn tìm trung tỉ chưa biết ta lấy tích của hai ngoại tỉ chia cho trung tỉ đã biết.

b) *Ví dụ minh họa:*

★**Thí dụ 1.** Tìm x biết:

*a)* $-0,52:x=-9,36:16,38$ *b)* $\frac{x-3}{5-x}=\frac{5}{7}$ *c)* $\frac{x-2}{x-1}=\frac{x+4}{x+7}$.

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:

-0,52 : x = -9,36 : 16,38 $\Rightarrow x.(9,36)=0,52.16,38\Rightarrow x=\frac{-0,52.16,38}{-9,36}=0,91$

b)

***Cách 1:*** Ta có:

$$\frac{x-3}{5-x}=\frac{5}{7}$$
$$\Rightarrow(x-3).7=(5-x).5$$
$$\Rightarrow 7x-21=25-5x$$
$$\Rightarrow 12x=46$$
$$\Rightarrow x=3\frac{5}{6}$$

***Cách 2:*** Từ $\frac{x-3}{5-x}=\frac{5}{7}\Rightarrow\frac{x-3}{5}=\frac{5-x}{7}$

Áp dụng tính chất cơ bản của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{x-3}{5}=\frac{5-x}{7}=\frac{x-3+5-x}{5+7}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Do đó: $\frac{x-3}{5}=\frac{1}{6}\Rightarrow 6(x-3)=5\Rightarrow x-3=\frac{5}{6}\Rightarrow x=3\frac{5}{6}$

c)

*Cách 1:* Ta có:

$\frac{x-2}{x-1}=\frac{x+4}{x+7}$

$\Rightarrow (x-2)(x+7)=(x-1)(x+4)$

$\Rightarrow x^2+7x-2x-14=x^2-x+4x-4$

$\Rightarrow 5x-14=3x-4$

$\Rightarrow 5x-3x=-4+14$

$\Rightarrow 2x=10$

$\Rightarrow x=5$

*Cách 2:* Từ $\frac{x-2}{x-1}=\frac{x+4}{x+7}\Rightarrow \frac{2-x}{1-x}=\frac{x+4}{x+7}$

Áp dụng tính chất cơ bản của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{2-x}{1-x}=\frac{x+4}{x+7}=\frac{(2-x)+(x+4)}{(1-x)+(x+7)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

Do đó:

$\frac{2-x}{1-x}=\frac{3}{4}\Rightarrow 4(2-x)=3(1-x)\Rightarrow 8-4x=3-3x$

$\Rightarrow 4x-3x=8-3\Rightarrow x=5$

**2.*Tìm nhiều số hạng chưa biết***

**Dạng 1 :** Tìm các số x, y, z thoả mãn : $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ (1)

và x + y + z = d (2)

(trong đó a, b, c, a + b + c ≠ 0 và a, b, c, d là các số cho trước)

**Cách giải:**

- *Cách 1*: Đặt $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k\Rightarrow x=ka, y=k.b, z=kc$

Thay x = ka, y = kb, z = kc vào (2) ta có: k.a + k.b + k.c = d $\Rightarrow k(a+b+c)=d\Rightarrow k=\frac{d}{a+b+c}$

Từ đó tìm được $x=\frac{a.d}{a+b+c}; y=\frac{bd}{a+b+c}; z=\frac{cd}{a+b+c}$

- *Cách 2:* áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{d}{a+b+c}\Rightarrow x=\frac{ad}{a+b+c}; y=\frac{bd}{a+b+c}; z=\frac{cd}{a+b+c}$$

***c)Ví dụ minh họa:***

★**Thí dụ 1.** Tìm x , y biết rằng:

a) $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}$ và 2x – y = 3

b) $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}$ và xy = 10.

**Hướng dẫn giải**

a) Từ tỉ số $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}\Rightarrow\frac{2x}{4}=\frac{-y}{-5}=\frac{2x-y}{4-5}=\frac{3}{-1}=-3$

Do đó: x = (-3).2 = -6 và y = 5.(-3) = -15.

b) Đặt $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=k\Rightarrow x=2k,y=5k$. Khi đó: xy = (2k).(5k) = $10k^2$ = 10 $\Rightarrow x=\pm1$

Với k = 1 ta có: x = 2, y = 5.

Với k = -1 ta có x = -2, y = -5.

★**Thí dụ 2.** Tìm x , y, z biết rằng:

a) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ và x +y + z = 27

b) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{-z}{4}$ và x + y - z = 9

**Hướng dẫn giải**

**a)** ***Cách 1.***

Đặt $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k\Rightarrow x=2k,y=3k,z=4k$

Từ x + y + z = 27 ta suy ra $2k+3k+4k=27\Rightarrow9k=27\Rightarrow k=3$

Khi đó x = 2.3 = 6; y = 3.3 = 9; z = 4.3 = 12

Vậy x = 6; y = 9; z = 12.

**- *Cách 2.*** Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{27}{9}=3\Rightarrow x=2.3=6;y=3.3=9;z=4.3=12$.

b) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{-z}{4}=\frac{x+y-z}{2+3+4}=\frac{9}{9}=1\Rightarrow x=2.1=2;y=3.1=3;z=(-4).1=(-4)$

**Dạng 2 :** Cho x, y, z thoả mãn : $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ (1)

và x + y + z = d (2)

Bằng cách biến đổi các điều kiện (1) và (2) ta được các bài toán phức tạp hơn.

Các cách điến đổi thường gặp:

+ Giữ nguyên điều kiện (1) thay đổi đk (2) như sau:

* $k_1x+k_2y+k_3z=e$

* $k_1x^2+k_2y^2+k_3z^2=f$

* x.y.z = g

+ Giữ nguyên điều kiện (2) thay đổi đk (1) như sau:

- $\frac{x}{a_1}=\frac{y}{a_2};\frac{y}{a_3}=\frac{z}{a_4}$

- $a_2x=a_1y;a_4y=a_3z$

- $b_1x=b_2y=b_3z$

- $\frac{b_1x-b_3z}{a}=\frac{b_2y-b_1x}{b}=\frac{b_3z-b_2y}{c}$

- $\frac{x-b_1}{a_1}=\frac{y_2-b_2}{a_2}=\frac{z_3-b_3}{a_3}$

+Thay đổi cả hai điều kiện.

★**Thí dụ 1.** Tìm x , y, z biết rằng:

a) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ và 2x + 3y – 5z = -21

b) 6x = 4y = 3z và 2x + 3y – 5z = 14

**Hướng dẫn giải**

**a) *Cách 1:*** Đặt $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$= k suy ra: x = 2k, y = 3k, z = 4k.

Do đó: 2x + 3y – 5z = 2.(2k) + 3.(3k) – 5.(4k) = -21

$\Rightarrow 4k+9k-20k=-21\Rightarrow -7k=-21\Rightarrow k=3$

Vì thế: x = 2.3 = 6; y = 3.3 = 9; z = 4.3 = 14

***Cách 2:*** Từ $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ suy ra $\frac{2x}{4}=\frac{3y}{9}=\frac{5z}{20}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2x}{4}=\frac{3y}{9}=\frac{5z}{20}=\frac{2x+3y-5z}{4+9-20}=\frac{-21}{-7}=3 \Rightarrow x=6; y=9; z=12$$

b) Từ 6x = 4y = 3z $\Rightarrow \frac{6x}{12}=\frac{4y}{12}=\frac{3z}{12} \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2x}{4}=\frac{3y}{9}=\frac{5z}{20}=\frac{2x+3y-5z}{4+9-20}=\frac{14}{-7}=-2 \Rightarrow x=-4; y=-6; z=-8$$

★**Thí dụ 2.** Tìm x , y, z biết rằng:

a) $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$ và $a^2-b^2+2c^2=108$

b) $x:y:z=3:4:5$ và $2x^2+2y^2-3z^2=-100$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{4}=\frac{b^2}{9}=\frac{c^2}{16}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a^2}{4}=\frac{b^2}{9}=\frac{c^2}{16}=\frac{a^2-b^2+2c^2}{4-9+32}=\frac{108}{27}=4$$

Do đó:

$$\frac{a^2}{4}=4 \Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=\pm 4$$

$$\frac{b^2}{9}=4 \Rightarrow b^2=36 \Rightarrow b=\pm 6$$

$$\frac{c^2}{16}=4 \Rightarrow c^2=64 \Rightarrow c=\pm 8$$

Vậy a = 4, b = 6, c = 8 hoặc a = -4, b = -6, c = -8.

b) Ta có: x : y : z = 3: 4: 5 nên $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5} => \frac{x^2}{9}=\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{25}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x^2}{9}=\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{25}=\frac{2x^2+2y^2-3z^2}{18+32-75}=\frac{-100}{-25}=4$$

Do đó:

$\frac{x^2}{9} = 4 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$

$\frac{y^2}{16} = 4 \Rightarrow y^2 = 64 \Rightarrow y = \pm 8$

$\frac{z^2}{25} = 4 \Rightarrow z^2 = 100 \Rightarrow z = \pm 10$

Vậy x = 6, x = 8, z = 10 hoặc x = -6, y = -8, z = -10.

★**Thí dụ 3.** Tìm x , y, z biết rằng:

a) $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và x.y.z = 648 b) $\frac{40}{x-30} = \frac{20}{y-15} = \frac{28}{z-21}$ và x.y.z = 22400

**Hướng dẫn giải**

a) ***Cách 1:*** Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$= k suy ra: suy ra: x = 2k, y = 3k, z = 4k.

Do đó: xyz= (2k).(3k).(4k) = 648

$\Rightarrow 24k^3 = 648 \Rightarrow k^3 = \frac{648}{24} = 27 \Rightarrow k = 3$

Vì thế: x = 2.3 = 6; y = 3.3 = 9; z = 4.3 = 14

***Cách 2:*** Từ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{3} \cdot \frac{z}{4} = \frac{xyz}{24} = \frac{648}{24} = 27$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{8} = 27 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6$$

Từ đó tìm được y = 9; z = 12.

b, Từ giả thiết suy ra : $\frac{x-30}{40} = \frac{y-15}{20} = \frac{z-21}{28} \Rightarrow \frac{x}{40} - \frac{3}{4} = \frac{y}{20} - \frac{3}{4} = \frac{z}{28} - \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x}{40} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$

Đặt : $\frac{x}{40} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 40k \\ y = 20k \\ z = 28k \end{cases}$

Mà: $x.y.z = 22400 \Rightarrow (40k).(20k).(28k) = 22400 \Rightarrow 22400k = 22400 \Rightarrow k = 1$

Do đó: $\begin{cases} x = 40k = 40 \\ y = 20k = 20 \Rightarrow x = 40, y = 20, z = 28 \\ z = 28k = 28 \end{cases}$

★**Thí dụ 4.** Tìm x , y, z biết rằng:

a) $\frac{x}{6}=\frac{y}{9};x=\frac{z}{2}$ và x +y + z = 27    b) 3x = 2y; 4x = 2z và x + y + z = 27

**Hướng dẫn giải**

**a)** Do $\frac{x}{6}=\frac{y}{9}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{3};x=\frac{z}{2}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{z}{4}$. Suy ra $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{27}{9}=3\Rightarrow x=2.3=6;y=3.3=9;z=4.3=12$.

**b)** Từ $3x=2y\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$; $4x=2z\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{z}{4}$. Suy ra $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{27}{9}=3\Rightarrow x=2.3=6;y=3.3=9;z=4.3=12$.

★**Thí dụ 5.** Tìm x , y, z biết rằng:

a) $\frac{3x+25}{144}=\frac{2y-169}{25}=\frac{z+144}{169}$ và $3x+2y+z=169$

b) $\frac{6x-3z}{5}=\frac{4y-6x}{7}=\frac{3z-4y}{9}$ và 2x + 3y - 5z = 14

**Hướng dẫn giải**

**a)** Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{3x+25}{144}=\frac{2y-169}{25}=\frac{z+144}{169}=\frac{(3x+2y+z)+(25-169+144)}{338}=\frac{169}{338}=\frac{1}{2}$$

Do đó:

$\frac{3x+25}{144}=\frac{1}{2}\Rightarrow 3x+25=72\Rightarrow 3x=47\Rightarrow x=\frac{47}{3}$.

$\frac{2y-169}{25}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2y-169=\frac{25}{2}\Rightarrow y=\frac{363}{4}$

$\frac{z+144}{169}=\frac{1}{2}\Rightarrow z+144=\frac{169}{2}\Rightarrow z=-\frac{119}{2}$

**b)** Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{6x-3z}{5}=\frac{4y-3z}{7}=\frac{3z-6x}{9}=\frac{6x-3z+4y-3z+3z-6x}{5+7-9}=0$$

$\Rightarrow 6x=3z; 4y=3z; 3z=6x$

Từ 6x = 4y = 3z $\Rightarrow \frac{6x}{12}=\frac{4y}{12}=\frac{3z}{12}\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2x}{4}=\frac{3y}{9}=\frac{5z}{20}=\frac{2x+3y-5z}{4+9-20}=\frac{14}{-7}=-2\Rightarrow x=-4; y=-6; z=-8$$

***Nhận xét:*** *Các dạng toán vận dụng tỷ lệ thức và tính chất của dãy tỷ số bằng nhau luôn rất phong phú và đa dạng, ở trên mình chỉ trình bày một số dạng thông thường được giao, ở nhiều bì toán chúng ta cần vận dụng kiến thức một cách linh hoạt để giải tốt các bài toán. Sau đâu sẽ là một số bài toán hay và khó:*

## PHẦN 2: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

**Bài toán: Cho tỷ lệ thức** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$**. Cần chứng minh tỷ lệ thức** $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$**, ta thường làm các phương pháp sau:**

**Phương pháp 1.** Chứng tỏ rằng : ad = bc .

**Phương pháp 2:** Đặt k là giá trị chung của các tỷ số $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ . Tính các tỷ số $\frac{x}{y},\frac{m}{n}$ theo k.

**Phương pháp 3:** Dùng biến đổi đại số và tính chất của dãy tỷ số bằng nhau để từ tỷ lệ thức đã cho biến đổi dần thành tỷ lệ thức phải chứng minh.

**Phương pháp 1.** Chứng tỏ rằng : ad = bc .

★**Thí dụ 1.** Cho a, b, c, d khác 0 từ tỷ lệ thức: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ hãy suy ra tỷ lệ thức: $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$.

**Hướng dẫn giải**

Xét tích: $(a-b)c=ac-bc \quad (1);\qquad a(c-d)=ac-ad \quad (2)$

Từ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc(3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra (a - b)c = a(c - d) suy ra $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$

★**Thí dụ 2.** Cho a, b, c thỏa mãn $a^2 = bc$:

a) Chứng minh: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+a}{c-a}\ (a\neq b, a\neq c)$ b) Chứng minh: $\frac{a^2+c^2}{b^2+a^2}=\frac{c}{b}\ (b\neq 0)$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:

$(a+b)(c-a)=ac+bc-(a^2+ab);\quad (c+a)(a-b)=ac+a^2-(ab+bc)$

Do đó:

$(a+b)(c-a)-(c+a)(a-b)=ac+bc-(a^2+ab)-ac-a^2+(ab+bc)=2(bc-a^2)$

Mặt khác theo giả thiết: $a^2 = bc$ suy ra:

$(a+b)(c-a)=(c+a)(a-b)\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+a}{c-a}$ (dpcm)

b) Ta có: $b(a^2+c^2)-c(b^2+a^2)=b(a^2-bc)+c(bc-a^2)=(a^2-bc)(b-c)=0$

Ta có: $b(a^2+c^2)=c(b^2+a^2)\Rightarrow \frac{a^2+c^2}{b^2+a^2}=\frac{c}{b}\ (b\neq 0)$

**Phương pháp 2.** Đặt k là giá trị chung của các tỷ số $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ . Tính các tỷ số $\frac{x}{y},\frac{m}{n}$ theo k.

★**Thí dụ 1.** Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}(c\neq 0).CMR:$

a, $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2=\frac{ab}{cd}\quad (d,c\neq 0, c\neq d)$ b, $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3=\frac{a^3-b^3}{c^3-d^3}$

**Hướng dẫn giải**

a) Đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk,\ c=dk$

Ta có: $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2=\left(\frac{bk-b}{dk-d}\right)^2=\frac{b^2(k-1)^2}{d^2(k-1)^2}=\left(\frac{b}{d}\right)^2\quad (1)$

$\frac{ab}{cd}=\frac{(bk).b}{(dk).d}=\frac{k.b^2}{k.d^2}=\left(\frac{b}{d}\right)^2\quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2=\frac{ab}{cd}\quad (d,c\neq 0, c\neq d)$

b) Đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk,\ c=dk$

Ta có: $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3=\left(\frac{bk+b}{dk+d}\right)^3=\frac{b^3(k+1)^3}{d^3(k+1)^3}=\left(\frac{b}{d}\right)^3$ (1)

$\frac{a^3-b^3}{c^3-d^3}=\frac{(bk)^3-b^3}{(dk)^3-d^3}=\frac{b^3(k^3-1)}{d^3(k^3-1)}=\frac{b^3}{d^3}=\left(\frac{b}{d}\right)^3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3=\frac{a^3-b^3}{c^3-d^3}$

★**Thí dụ 2.** Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, Chứng minh rằng: $\frac{2a+5b}{3a-4b}=\frac{2c+5d}{3c-4d}$

**Hướng dẫn giải**

Đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk,\ c=dk$

Ta có: $\frac{2a+5b}{3a-4b}=\frac{2bk+5b}{3bk-4b}=\frac{b(2k+5)}{b(3k-4)}=\frac{2k+5}{3k-4}$ (1)

$\frac{2c+5d}{3c-4d}=\frac{2dk+5d}{3dk-4d}=\frac{d(2k+5)}{d(3k-4)}=\frac{2k+5}{3k-4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{2a+5b}{3a-4b}=\frac{2c+5d}{3c-4d}$

**Phương pháp 3.** Dùng biến đổi đại số và tính chất của dãy tỷ số bằng nhau để từ tỷ lệ thức đã cho biến đổi dần thành tỷ lệ thức phải chứng minh.

★**Thí dụ 1.** Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. với $a,b,c,d\neq 0$. Chứng minh: $\frac{ac}{bd}=\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$

**Phân tích ngược tìm hướng giải:**

$\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{ac}{bd}\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{ac}{bd}\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{c}{d}\right)^2=\frac{ac}{bd}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ **(giả thiết bài toán)**

**Hướng dẫn giải**

Từ: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{c}{d}\right)^2\Rightarrow\frac{ac}{bd}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$ *(1)*

Mà theo tính chất của dãy tỷ số bằng nhau: $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{c^2}{d^2}=\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$ *(2)*

Từ *(1)* và *(2)* $\Rightarrow \dfrac{ac}{bd}=\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$ *(đpcm)*

★**Thí dụ 2.** Cho tỉ lệ thức $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ . với $a,b,c,d\neq 0$ và $c\neq d$ .

Chứng minh: $\dfrac{(a-b)^2}{(c-d)^2}=\dfrac{ab}{cd}$

**Phân tích ngược tìm hướng giải:**

$$\frac{(a-b)^2}{(c-d)^2}=\frac{ab}{cd}\Rightarrow\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2=\frac{a}{c}.\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

**Hướng dẫn giải**

Từ: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}=\dfrac{a-b}{c-d}\Rightarrow\dfrac{a}{c}.\dfrac{b}{d}=\left(\dfrac{a-c}{b-d}\right)^2\Rightarrow\dfrac{ab}{cd}=\dfrac{(a-c)^2}{(b-d)^2}$

Hay $\dfrac{(a-b)^2}{(c-d)^2}=\dfrac{ab}{cd}$ *(đpcm)*

★**Thí dụ 3.** Biết $\dfrac{bz-cy}{a}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{ay-bx}{c}$. Chứng minh rằng $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có $\dfrac{bz-cy}{a}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{ay-bx}{c}=\dfrac{abz-acy}{a^2}=\dfrac{bcx-baz}{b^2}=\dfrac{cay-cbx}{c^2}$

$$=\frac{abz-acy+bcx-bay+cay-cbx}{a^2+b^2+c^2}=0$$

$\Rightarrow\dfrac{abz-acy}{a^2}=0\Rightarrow abz=acy\Rightarrow bz=cy\Rightarrow\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}(1)$

$\dfrac{bcx-baz}{b^2}=0\Rightarrow bcx=baz\Rightarrow cx=az\Rightarrow\dfrac{z}{c}=\dfrac{x}{a}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$

★**Thí dụ 4.** Cho $\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{2a+b-c}=\frac{z}{4a-4b+c}$.Chứng minh rằng

$\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{2x+y+z}=\frac{c}{4x-4y+z}$(với $abc\neq 0$ và các mẫu đều khác 0)

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{2a+b-c}=\frac{z}{4a-4b+c}=\frac{2y}{4a+2b-2c}=\frac{x+2y+z}{a+2b+c+4a-4b+c+4a+2b-2c}=\frac{x+2y+z}{9a}(1)$$

$$\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{2a+b-c}=\frac{z}{4a-4b+c}=\frac{2x}{2a+4b+c}=\frac{2x+y-b}{2a+4b-c+2a+b-c-(4a-4b+c)}=\frac{2x+y-z}{9b}(2)$$

$$\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{2a+b-c}=\frac{z}{4a-4b+c}=\frac{4x}{4a+8b+4c}=\frac{4y}{8a+4b-4c}$$

$$=\frac{4x+4y+z}{4a+8b+4c-(8a+4b-4c)+4a-4b+c}=\frac{4x-4y+z}{9c}(3)$$

Từ (1),(2),(3) suy ra $\frac{x+2y+z}{9a}=\frac{2x+y-z}{9b}=\frac{4x-4y+b}{9c}$

Suy ra $\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{2x+y+z}=\frac{c}{4x-4y+z}$

★**Thí dụ 5.** Cho 4 số khác 0 là $a_1,a_2,a_3,a_4$ thoả mãn $a_2^2=a_1a_3;a_3^3=a_2a_4$

Chứng tỏa: $\frac{a_1^3+a_2^3+a_3^3}{a_2^3+a_3^3+a_4^3}=\frac{a_1}{a_4}$

**Hướng dẫn giải**

Từ

$$a_2^2=a_1a_3\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}(1)$$

$$a_3^3=a_2a_4\Rightarrow\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}\Rightarrow\frac{a_1^3}{a_2^3}=\frac{a_2^3}{a_3^3}=\frac{a_3^3}{a_4^3}=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_4}=\frac{a_1}{a_4}(3)$

áp dụng t/c của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a^3{}_1}{a^3{}_2}=\frac{a^3{}_2}{a^3{}_3}=\frac{a^3{}_3}{a^3{}_4}=\frac{a^3{}_1+a^3{}_2+a^3{}_3}{a^3{}_2+a^3{}_3+a^3{}_4}(4)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $\dfrac{a_1^3+a_2^3+a_3^3}{a_2^3+a_3^3+a_4^3}=\dfrac{a_1}{a_4}$

**PHẦN 3: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC**

★**Thí dụ 1.** Cho các số $a, b, c$ thỏa mãn: $\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{a+c-b}{b}=\dfrac{b+c-a}{a}$

Tính $A=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$

**Hướng dẫn giải**

Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a+c-b}{b}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{(a+b-c)+(a+c-b)+(b+c-a)}{a+b+c}=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b-c=c\\a+c-b=b\\b+c-a=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=2c\\a+c=2b\\b+c=2a\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{2c.2a.2b}{abc}=8$$

★**Thí dụ 2.** Cho $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}$ và $\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$. Tính $M=\dfrac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}\Rightarrow\frac{x}{15}=\frac{y}{20};\frac{y}{5}=\frac{z}{6}\Rightarrow\frac{y}{20}=\frac{z}{24}\Rightarrow\frac{x}{15}=\frac{y}{20}=\frac{z}{24}\qquad(1)$$

$$(1)\Rightarrow\frac{2x}{30}=\frac{3y}{60}=\frac{4z}{96}=\frac{2x+3y+4z}{30+60+96}$$

$$(1)\Rightarrow\frac{3x}{45}=\frac{4y}{80}=\frac{5z}{120}=\frac{3x+4y+5z}{45+80+120}$$

$$\Rightarrow\frac{2x+3y+4z}{30+60+96}:\frac{3x+4y+5z}{45+80+120}=\frac{2x}{30}:\frac{3x}{45}$$

$$\Rightarrow\frac{2x+3y+4z}{186}.\frac{245}{3x+4y+5z}=1\Rightarrow M=\frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}=\frac{186}{245}$$

★**Thí dụ 3.** Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thoả mãn điều kiện: $\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $B=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)$

**Hướng dẫn giải**

+Nếu $a+b+c\neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}=\frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c}=1$$

mà $\frac{a+b-c}{c}+1=\frac{b+c-a}{a}+1=\frac{c+a-b}{b}+1=2$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=2$$

$$B=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)=\left(\frac{b+a}{a}\right)\left(\frac{c+a}{c}\right)\left(\frac{b+c}{b}\right)=8$$

Nếu : $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c, b+c=-a, a+c=-b$

$$B=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)=\left(\frac{a+b}{a}\right)\left(\frac{a+c}{c}\right)\left(\frac{b+c}{b}\right)=\frac{-c}{a}.\frac{-b}{c}.\frac{-a}{b}=-1$$

★**Thí dụ 4.** Cho $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}$. Tính giá trị biểu thức: $C=\frac{5x^2+3y^2}{10x^2-3y^2}$

**Hướng dẫn giải**

Đặt $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=k \Leftrightarrow \begin{cases} x=3k \\ y=5k \end{cases}$. Khi đó:

$$C=\frac{5x^2+3y^2}{10x^2-3y^2}=\frac{5(3k)^2+3(5k)^2}{10(3k)^2-3(5k)^2}=\frac{45k^2+75k^2}{90k^2-75k^2}=\frac{120k^2}{15k^2}=8$$

## PHẦN 4: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

★**Thí dụ 1.** a) Nếu $b>0, d>0$ thì từ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ suy ra được: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

b) Nếu $b>0, d>0$ thì từ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ suy ra được: $\frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $\left.\begin{matrix}\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}\\ b>0;d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ad<bc\ (1)$

Thêm vào hai vế của (1) với ab ta có: ad + ab < bc +ab

$\Rightarrow a(b+d)<b(c+a)\Rightarrow \dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}\quad (2)$

Thêm vào hai vế của (1) với dc ta có: ad + dc < bc + dc

$\Rightarrow d(a+c)<c(b+d)\Rightarrow \dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}\quad (3)$

Từ (1) và (2) suy ra từ $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}\ \Rightarrow \dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$

b) Ta có :

$\left.\begin{matrix}\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}\\ b>0;d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \dfrac{a.b}{b.b}<\dfrac{c.d}{d.d}\Rightarrow \dfrac{ab}{b^2}<\dfrac{cd}{d^2}$

Theo câu a) ta có: $\dfrac{a}{b}<\dfrac{ab+cd}{b^2+d^2}<\dfrac{c}{d}(dpcm)$

★**Thí dụ 2.** Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh rằng:

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$

**Hướng dẫn giải**

+) Do a, b, c, d > 0 nên : $a(a+b+c)+ad>a(a+b+c)\Rightarrow \dfrac{a}{a+b+c}>\dfrac{a}{a+b+c+d};$

Tương tự ta có: $\dfrac{b}{b+c+d}>\dfrac{b}{a+b+c+d};\dfrac{c}{a+d+a}>\dfrac{c}{a+b+c+d};\dfrac{d}{d+a+b}>\dfrac{d}{a+b+c+d}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được :

$$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{a+d+a}+\frac{d}{d+a+b}>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}=1\quad (1)$$

+) Mặt khác cũng do a, b, c, d > 0 nên :

$$ad < ad + d(b+c)$$
$$\Rightarrow ad + a(a+b+c) < [ad + d(b+c)] + a(a+b+c)$$
$$\Rightarrow a(a+b+c+d) < (a+b+c)(a+d)$$
$$\Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

Tương tự:

$$\frac{b}{b+c+d} < \frac{a+b}{a+b+c+d}; \frac{c}{c+d+a} < \frac{b+c}{c+b+c}; \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ra được:

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < \frac{a+d}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c+d} + \frac{c+b}{a+b+c+d} + \frac{d+c}{a+b+c+d} = 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$

## PHẦN 5: BÀI TOÁN VỀ TỶ LỆ THỨC VÀ CHIA TỶ LỆ

*Phương pháp giải*

**Bước 1:**Dùng các chữ cái để biểu diễn các đại lượng chưa biết

**Bước 2:**Thành lập dãy tỉ số bằng nhau và các điều kiện

**Bước 3:**Tìm các số hạng chưa biết

**Bước 4:**Kết luận.

### *Ví dụ minh họa:*

★**Thí dụ 1.** Cho tam giác ABC có các góc A, B, C tỉ lệ với 7: 5: 3. Các góc ngoài tương ứng tỉ lệ với các số nào.

***Phân tích đề bài:***

Nếu gọi ba góc của tam giác ABC lần lượt là: $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ .

Vì ba góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ tỉ lệ với 7: 5: 3 nên ta có $\frac{\widehat{A}}{7} = \frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{3}$

Tổng ba góc của một tam giác bằng $180^0$ nên ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$

Từ đó ta tìm được số đo các góc của tam giác,

Mà tổng của góc ngoài và góc trong tại một đỉnh của tam giác bù nhau.

**Hướng dẫn giải**

Gọi ba góc trong và góc ngoài của tam giác ABC lần lượt là: $\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}$ và

$\widehat{A_1};\widehat{B_1};\widehat{C_1}$ $\left(0^0<\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}<180^0\right)$

Theo bài ra ta có: $\frac{\widehat{A}}{7}=\frac{\widehat{B}}{5}=\frac{\widehat{C}}{3}$ và $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\widehat{A}}{7}=\frac{\widehat{B}}{5}=\frac{\widehat{C}}{3}=\frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}{7+5+3}=\frac{180^0}{15}=12^0$$

$\Rightarrow \widehat{A}=7.12^0=84^0 \quad \Rightarrow \widehat{A_1}=180^0-84^0=96^0$

$\widehat{B}=5.12^0=60^0 \quad \Rightarrow \widehat{B_1}=180^0-60^0=120^0$

$\widehat{C}=3.12^0=36^0 \quad \Rightarrow \widehat{C_1}=180^0-36^0=144^0$

$\Rightarrow \widehat{A_1}:\widehat{B_1}:\widehat{C_1}=96^0:120^0:144^0=4:5:6$

Vậy các góc ngoài tương ứng tỉ lệ với: $4:5:6$.

★**Thí dụ 2.** Ba đội công nhân I, II, III phải vận chuyển tổng cộng 1530 kg hàng từ kho theo thứ tự đến ba địa điểm cách kho 1500m, 2000m, 3000m. Hãy phân chia số hàng cho mỗi đội sao cho khối lượng hàng tỉ lệ nghịch với khoảng cách cần chuyển.

***Phân tích đề bài:***

Vì phân chia số hàng cho mỗi đội sao cho khối lượng hàng tỉ lệ nghịch với khoảng cách cần chuyển nên ta có: $1500a=2000b=3000c$

Tổng số hàng cần chuyển đến ba kho là 1530 nên ta có: $a+b+c=1530$.

**Hướng dẫn giải**

Gọi số lượng hàng chuyển tới ba kho lần lượt là a, b, c $(a,b,c>0)$.

Theo bài ra ta có: $1500a=2000b=3000c$ và $a+b+c=1530$

Từ: $1500a=2000b=3000c \Rightarrow \frac{a}{4}=\frac{b}{3}=\frac{c}{2}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{4}=\frac{b}{3}=\frac{c}{2}=\frac{a+b+c}{4+3+2}=\frac{1530}{9}=170$$

$\Rightarrow a=4.170=680$;

$b=3.170=510$;

$c=2.170=340$

Vậy số hàng cần chuyển tới ba kho A, B, C lần lượt là: 680 tạ, 510 tạ, 340 tạ.

★**Thí dụ 3.** Chu vi của hình chữ nhật bằng 28 dm. Tính độ dài mỗi cạnh, biết rằng chúng tỉ lệ với 3; 4.

***Phân tích đề bài:***

Trong hình chữ nhật có hai kích thước là chiều dài và chiều rộng (còn được gọi là hai cạnh của hình chữ nhật) chiều rộng thì ngắn hơn chiều dài. Hai cạnh của chúng tỉ lệ với 3; 4 vậy cạnh ngắn tỉ lệ với 3 còn cạnh dài tỉ lệ với 4.

Nếu gọi hai cạnh của hình chữ nhật là a và b $\left(0<a<b\right)$ . Vì hai cạnh hình chữ nhật ti lệ với 3 và 4 nên ta có: $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$.

Chu vi hình chữ nhật là $2\left(a+b\right)$ nên ta có: $2\left(a+b\right)=28\Rightarrow a+b=14$

Như vậy ta đã đưa bài toán về dạng bài áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

**Hướng dẫn giải**

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật là a và b $\left(0<a<b\right)$

Theo bài ra ta có: $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$ và $2\left(a+b\right)=28$

Từ $2\left(a+b\right)=28\Rightarrow a+b=24$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{a+b}{3+4}=\frac{14}{7}=2$

$\Rightarrow a=3.2=6$; $\Rightarrow b=4.2=8$

Vậy độ dài hai cạnh hình chữ nhật là 6cm và 8cm.

★**Thí dụ 4.** Có 16 tờ giấy bạc loại 2000 đồng, 5000 đồng và 10000 đồng, trị giá mỗi loại tiền trên đều bằng nhau. Hỏi mỗi loại có mấy tờ.

***Phân tích đề bài:***

Gọi số tờ tiền loại 2000 đồng, 5000 đồng và 10000 đồng lần lượt là a, b, c

Vì giá trị mỗi loại tiền đều bằng nhau nên ta có: $2000a=5000b=10000c$

Có 16 tờ giấy bạc các loại nên: $a+b+c=16$

**Hướng dẫn giải**

Gọi số tờ tiền của loại 2000 đồng, 5000 đồng và 10000 đồng lần lượt là a, b, c

Theo bài ra ta có: $2000a = 5000b = 10000c$ và $a+b+c=16$

Từ: $2000a = 5000b = 10000c \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{2} = \frac{c}{1}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{2} = \frac{c}{1} = \frac{a+b+c}{5+2+1} = \frac{16}{8} = 2$$

$\Rightarrow a = 5.2 = 10$; $b = 2.2 = 4$ $c = 1.2 = 2$

Vậy số tiền loại 2000 đồng, 5000 đồng, 10000 đồng lần lượt là 10 tờ, 4 tờ và 2 tờ.

★**Thí dụ 5.** Cho tam giác ABC có số đo các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1; 2; 3. tính số đo các góc của tam giác ABC.

***Phân tích đề bài:***

Ở bài này cho các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1; 2; 3.

Vậy ta lấy luôn $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ là số đo ba góc cần tìm.

Vì số đo các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1; 2; 3 nên ta có: $\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3}$

Áp dụng định lí tổng ba góc của một tam ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$

**Hướng dẫn giải**

Gọi ba góc trong và góc ngoài của tam giác ABC lần lượt là: $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$

$\left(0^0 < \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} < 180^0\right)$

Theo bài ra ta có: $\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3}$ và $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{1+2+3} = \frac{180^0}{6} = 30^0$$

$\Rightarrow \widehat{A} = 1.30^0 = 30^0$; $\widehat{B} = 2.30^0 = 60^0$; $\widehat{C} = 3.30^0 = 90^0$

Vậy số đo ba góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ của tam giác ABC lần lượt là: $30^0; 60^0; 90^0$

## PHẦN 6: MỘT SỐ SAI LẦM THƯỜNG GẶP TRONG GIẢI TOÁN VỀ TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỶ SỐ BẰNG NHAU.

***Sai lầm thường gặp 1:***

Áp dụng: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{xy}{ab}$ hay $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{xyz}{abc}$

★**Thí dụ 1.** Tìm 2 số x,y biết rằng $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}$ và x.y =10

***Sai lầm thường gặp:***

Ta có:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{x.y}{2.5}=\frac{10}{10}=1 \text{ suy ra x = 2,y = 5}$$

***Lời giải đúng:***

Từ $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}\Rightarrow\frac{x.x}{2}=\frac{x.y}{5}\Rightarrow\frac{x^2}{2}=\frac{10}{5}\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2$ từ đó suy ra $y=\pm5$

vậy x = 2,y = 5 hoặc x =-2, y = -5

★**Thí dụ 2.** Tìm các số x,y,z biết rằng : $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ và x.y.z = 648

***Sai lầm thường gặp:***

Ta có: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x.y.z}{2.3.4}=\frac{648}{24}=27$

Suy ra a = 54, b = 81, c = 108

***Lời giải đúng:***

Ta có:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\Rightarrow\left(\frac{x}{2}\right)^3=\left(\frac{y}{3}\right)^3=\left(\frac{z}{4}\right)^3=\frac{xyz}{2.3.4}=\frac{648}{24}=27\Rightarrow x=6, y=9, z=12$$

***Sai lầm thường gặp 2:*** *Sai lầm khi bỏ qua điều kiện khác 0*

★**Thí dụ 1.** Cho 3 tỉ số bằng nhau là $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$.

Tìm giá trị của mỗi tỷ số đó

***Sai lầm thường gặp:***

Ta có $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}$$

***Lời giải đúng:***

Ta có $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$

+ Nếu $a+b+c\neq 0$. Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}$$

+ Nếu $a+b+c=0$ thì $b+c=-a$; $c+a=-b$; $a+b=-c$

nên mỗi tỉ số $\frac{a}{b+c};\frac{b}{c+a};\frac{c}{a+b}$ đều bằng -1

★**Thí dụ 2.** Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thoả mãn điều kiện: $\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $B=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)$

***Sai lầm thường gặp:***

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}=\frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c}=1$$

mà $\frac{a+b-c}{c}+1=\frac{b+c-a}{a}+1=\frac{c+a-b}{b}+1=2$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=2$$

$$B=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)=\left(\frac{b+a}{a}\right)\left(\frac{c+a}{c}\right)\left(\frac{b+c}{b}\right)=8$$

***Lời giải đúng:***

+Nếu $a+b+c\neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}=\frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c}=1$$

mà $\frac{a+b-c}{c}+1=\frac{b+c-a}{a}+1=\frac{c+a-b}{b}+1=2$

$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$

$$B = \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right)\left(\frac{c+a}{c}\right)\left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

Nếu : $a+b+c=0 => a+b=-c, b+c=-a, a+c=-b$

$$B = \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) = \left(\frac{a+b}{a}\right)\left(\frac{a+c}{c}\right)\left(\frac{b+c}{b}\right) = \frac{-c}{a}.\frac{-b}{c}.\frac{-a}{b} = -1$$

★**Thí dụ 3.** Tìm x.y biết: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$

***Sai lầm thường gặp:***

Ta có: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$ (1)

Từ hai tỷ số đầu ta có: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{12}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{2x+3y-1}{6x} = \frac{2x+3y-1}{12}$ (3)

$\rightarrow$ 6x = 12 $\rightarrow$ x = 2

Thay x = 2 vào 2 tỷ số đầu ta được y = 3

Thử lại thấy thoả mãn . Vậy x = 2 và y = 3 là các giá trị cần tìm

***Lời giải đúng:***

Ta có: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$ (1)

Từ hai tỷ số đầu ta có: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{12}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{2x+3y-1}{6x} = \frac{2x+3y-1}{12}$ (3)

TH 1 : 2x + 3y - 1 $\neq 0$ .Khi đó ta mới suy ra 6x = 12 nên x = 2.

Thay x = 2 vào 2 tỷ số đầu ta được y = 3

Thử lại thấy thoả mãn . Vậy x = 2 và y = 3 là các giá trị cần tìm

TH2: 2x + 3y -1= 0 .Suy ra 2x =1- 3y,thay vào hai tỉ số đầu, ta có

$\frac{1-3y+1}{5} = \frac{1-3y+1+3y-2}{5+7} = 0$

Suy ra 2 - 3y = 3y-2 =0$\rightarrow y=\frac{2}{3}$. Từ đó tìm tiếp $x=-\frac{1}{2}$

***Sai lầm thường gặp 3:*** *Sai lầm khi xét lũy thừa bậc chẵn.*

★**Thí dụ 1.** Tìm x biết $\frac{x-1}{-15}=\frac{-60}{x-1}$

***Sai lầm thường gặp:***

$\frac{x-1}{-15}=\frac{-60}{x-1}\Rightarrow (x-1)^2=(-15).(-60)\Rightarrow (x-1)^2=900$ nên x – 1 = 30 do đó x = 31.

***Lời giải đúng:***

$\Rightarrow (x-1)^2=(-15).(-60)\Rightarrow (x-1)^2=900$ nên x – 1 = 30

hoặc x – 1 = - 31, do đó x = 31 hoặc x = 29.

★**Thí dụ 2.** Tìm các số x,y,z biết rằng $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ biết rằng $2x^2+3y^2-5z^2=-405$

***Sai lầm thường gặp:***

Đặt $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ = k suy ra x = 2k, y = k, z = 4k

Từ $2x^2+3y^2-5z^2=-405$ suy ra $2.(2k)^2+3(3k)^2-5(4k)^2=-405$

$$8k^2+27k^2-80k^2=-405$$
$$-45k^2=-405$$
$$k^2=9$$

Học sinh thường mắc sai lầm suy ra k = 3, mà phải suy ra $k=\pm 3$

## C/ BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

**Câu 1.** Cho $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=...=\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_1}$. Và $a_1+a_2+...+a_n\neq 0; a_1=-\sqrt{5}$

Tính $a_2;a_3;...a_n=?$

**Câu 2.** Cho $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ $(a;b;c\neq 0; b\neq c)$

Chứng minh: $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{c-b}$

**Câu 3.** Cho 4 số dương $a;b;c;d$ . Biết rằng Và $b=\dfrac{a+c}{2};c=\dfrac{2bd}{b+d}$

Chứng minh rằng 4 số này lập thành 1 tỉ lệ thức.

**Câu 4.** Tìm các số x; y; z biết rằng: $\dfrac{y+z+1}{x}=\dfrac{x+z+2}{y}=\dfrac{y+x-3}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$

**Câu 5.** Tìm các số x, y, z biết rằng: 3x = 4y, 5y = 6z và xyz = 30.

**Câu 6.** Cho $\dfrac{a}{c}=\dfrac{c}{b}$ chứng minh rằng:

**a)** $\dfrac{a^2+c^2}{b^2+c^2}=\dfrac{a}{b}$ **b)** $\dfrac{b^2-a^2}{a^2+c^2}=\dfrac{b-a}{a}$

**Câu 7.** Cho tỉ lệ thức $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ . Chứng minh rằng ta có các tỉ lệ thức sau ( giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa).

a, $\dfrac{4a-3b}{a}=\dfrac{4c-3d}{c}$ b, $\dfrac{(a-b)^2}{(c-d)^2}=\dfrac{3a^2+2b^2}{3c^2+2d^2}$

**Câu 8.** a) Tìm ba số x, y, z thỏa mãn: $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}$ và $2x^2+2y^2-3z^2=-100$

b) Cho $\dfrac{a}{2b}=\dfrac{b}{2c}=\dfrac{c}{2d}=\dfrac{d}{2a}$ (a, b, c, d > 0)

Tính $A=\dfrac{2011a-2010b}{c+d}+\dfrac{2011b-2010c}{a+d}+\dfrac{2011c-2010d}{a+b}+\dfrac{2011d-2010a}{b+c}$

**Câu 9.** Cho dãy tỷ số bằng nhau:

$$\frac{2012a+b+c+d}{a}=\frac{a+2012b+c+d}{b}=\frac{a+b+2012c+d}{c}=\frac{a+b+c+2012d}{d}$$

Tính $M=\dfrac{a+b}{c+d}+\dfrac{b+c}{d+a}+\dfrac{c+d}{a+b}+\dfrac{d+a}{b+c}$

**Câu 10.** Tìm x , y, z biết : $\dfrac{3x-2y}{5}=\dfrac{2z-5x}{3}=\dfrac{5y-3z}{2}$ và x + y + z = 50

**Câu 11.** Ba bạn An, Bình và Cường có tổng số viên bi là 74. Biết rằng số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6; số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5. Tính số viên bi của mỗi bạn.

**Câu 12.** Tìm các số a, b, c thỏa mãn $\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3};\dfrac{b}{5}=\dfrac{c}{4}$ và *a - b +c = -49*.

**Câu 13.** Cho a, b, c là các số thực khác 0. Tìm các số thực x, y, z khác 0 thoả mãn:

$$\frac{xy}{ay+bx}=\frac{yz}{bz+cy}=\frac{zx}{cx+az}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

**Câu 14.**

a. Tìm $x; y; z$ biết $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$; $5x=7z$ và $x-2y+z=32$.

b. Cho $\frac{7x+5y}{3x-7y}=\frac{7z+5t}{3z-7t}$. Chứng minh: $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$.

**Câu 15.**

1) Biết $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$ (với $a, b, c \neq 0$).

Chứng minh rằng: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ .

2) Số M được chia thành ba phần tỉ lệ nghịch với 3; 5; 6. Biết rằng tổng các lập phương của ba phần đó là 10728. Hãy tìm số M.

**Câu 16.** Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ với $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0, a\neq \pm b, c\neq \pm d$ .

Chứng minh: $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013}=\frac{a^{2013}+b^{2013}}{c^{2013}+d^{2013}}$

**Câu 17.** Cho $\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}=\frac{z}{t+x+y}=\frac{t}{x+y+z}$

Chứng minh rằng: Biểu thức sau có giá trị nguyên

$$A=\frac{x+y}{z+t}+\frac{y+z}{t+x}+\frac{z+t}{x+y}+\frac{t+x}{y+z}$$

**Câu 18.** Số A được chia thành ba phần số tỉ lệ theo $\frac{2}{5}:\frac{3}{4}:\frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

**Câu 19.** Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích của hình thứ nhất và diện tích của hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích hình thư hai và diện tích hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8, hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27 cm, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là 24 cm. Tính diện tích của mỗi hình chữ nhật đó.

**Câu 20.** Cho 4 số a, b, c, d trong đó b là trung bình cộng của a và c đồng thời $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)$. Chứng minh bốn số đó lập thành tỉ lệ thức.

**Câu 21.** Cho $\frac{x+16}{9}=\frac{y-25}{-16}=\frac{z+49}{25}$ và $4x^3-3=29$ . Tính: x – 2y + 3z

**Câu 22.** Tìm x, y, z biết:

a, $\frac{15}{x-9}=\frac{20}{y-12}=\frac{40}{z-24}$ và x.y=1200

**Câu 23.** Tìm x, y, z biết:

a, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{6}$ và $5z-3x-4y=50$

b, $\frac{4}{3x-2y}=\frac{3}{2z-4x}=\frac{2}{4y-3z}$ và $x+y-z=-10$

**Câu 24.** Tìm các số x, y, z biết:

a, $\frac{x^3}{8}=\frac{y^3}{64}=\frac{z^3}{216}$ và $x^2+y^2+z^2=14$

b, $\frac{x^3}{8}=\frac{y^3}{27}=\frac{z^3}{64}$ và $x^2+2y^2-3z^2=-650$

**Câu 25.** Tìm x, y biết: $\frac{x^3+y^3}{6}=\frac{x^3-2y^3}{4}$ và $x^6.y^6=64$

**Câu 26.** Tìm x, y, z biết:

a, $2x=3y=5z$ và $|x+y-z|=95$

b, $\frac{6}{11}x=\frac{9}{2}y=\frac{18}{5}z$ và $-x+z=-196$

**Câu 27.** Tìm x, biết: $\frac{1+2y}{18}=\frac{1+4y}{24}=\frac{1+6y}{6x}$

**Câu 28.** Tìm x biết $\frac{5x-1}{3}=\frac{7y-6}{5}=\frac{5x-7y-7}{4x}$

**Câu 29.** Tìm x, y biết: $\frac{x-y}{3}=\frac{x+y}{13}=\frac{xy}{200}$

**Câu 30.** Tìm ba số a,b,c biết: $\frac{3a-2b}{5}=\frac{2c-5a}{3}=\frac{5b-3c}{2}$ và a + b + c = -50

**Câu 31.** Tìm các cặp số a, b thỏa mãn: $\frac{3b}{a^2-4}=\frac{1-125a-3b}{6a+13}=1-125a$

**Câu 32.** Tìm x,y,z biết : $xy=z$ ; $yz=9x$ ; $xz=16y$

**Câu 33.** Tìm các số: $a_1;a_2;...a_{100}$, biết: $\frac{a_1-1}{100}=\frac{a_2-2}{99}=..=\frac{a_{100}-100}{1}$ và $a_1+a_2+a_3+...+a_{100}=10100$

**Câu 34.** Tìm số tự nhiên M nhỏ nhất có 4 chữ số thỏa mãn điều kiện:

$M=a+b=c+d=e+f$ biết: a, b, c, d, e, f thuộc $N^*$ và $\frac{a}{b}=\frac{14}{22};\frac{c}{d}=\frac{11}{13};\frac{e}{f}=\frac{13}{17}$

**Câu 35.** Tìm 3 phân số có tổng của chúng bằng $1\frac{1}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3:4:5 và các mẫu số tương ứng của chúng tỉ lệ với 5:1:2

**Câu 36.** Cho dãy tỉ số :

$$\frac{2012a+b+c+d}{a}=\frac{a+2012b+c+d}{b}=\frac{a+b+2012c+d}{c}=\frac{a+b+c+2012d}{d}$$

Tính giá trị biểu thức: $M=\frac{a+b}{c+d}+\frac{b+c}{d+a}+\frac{c+d}{a+b}+\frac{d+a}{b+c}$

**Câu 37.** Cho a, b, c khác nhau và khác 0, t/m: $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$. Tính giá trị của biểu thức: $A=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$

**Câu 39.** Cho 3 số x,y,z,t thỏa mãn:

$$\frac{y+z+t-nx}{x}=\frac{z+t+x-ny}{y}=\frac{t+x+y-nz}{z}=\frac{x+y+z-nt}{t}$$

Và x+ y+ z+ t = 2012. Tính giá trị P= x+2y – 3z +t

**Câu 40.** Cho $x,y,z\neq 0\,\&\,x-y-z=0$, Tính giá trị của biểu thức: $B=\left(1-\frac{z}{x}\right)\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)$

**Câu 41.** Cho a,b,c khác 0, thỏa mãn : $\frac{ab}{a+b}=\frac{bc}{b+c}=\frac{ca}{c+a}$, Tính $P=\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{a^3+b^3+c^3}$

**Câu 42.** Cho x,y,z là 3 số dương phân biết, Tìm tỉ số $\frac{x}{y}$, biết: $\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}$

**Câu 43.** Cho a-b=13, Tính giá trị của biểu thức: $B=\frac{3a-b}{2a+13}-\frac{3b-a}{2b-13}$

**Câu 44.** Cho x: y: z = 5: 4: 3, Tính $P=\frac{x+2y-3z}{x-2y+3z}$

**Câu 45.** Cho $2a-b=\frac{2}{3}(a+b)$, Tính $M=\frac{a^4+5^4}{b^4+4^4}$

**Câu 46.** Tính $A=\frac{abc}{a+b+c}$, biết a,b, c có quan hệ: $(a+b):(8-c):(b+c):(10+c)=2:5:3:4$

**Câu 47.** Cho x = by +cz, y = ax +cz, z = ax +by và x +y +z $\neq$ 0. Tính giá trị :

$$Q=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$$

**Câu 48.** Cho a + b + c = 2015 và $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{1}{5}$, Tính $Q=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

**Câu 50.** Cho 3 số a, b, c thỏa mãn: $\frac{a}{2009}=\frac{b}{2010}=\frac{c}{2011}$

Tính giá trị của biểu thức: $M=4(a-b)(b-c)-(c-a)^2$

**Câu 52.** Tính giá trị của: $B=(x+y)(y+z)(z+x)$, biết: $xyz=2\,\&\,x+y+z=0$

**Câu 53.** Tính biểu thức: $C=\frac{\left(1^3+2^3+3^3+...+10^3\right).\left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right)\left(x^4+y^4\right)}{1^2+2^2+3^2+...+10^2}$ Với $x=-0,(3);y=\frac{1}{3}$

**Câu 54.** Cho a, b, c $\in$ R, và a, b, c $\neq 0$, thỏa mãn: $b^2=a.c$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{c}=\frac{(a+2012b)^2}{(b+2012c)^2}$

**Câu 55.** Cho $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}=....=\frac{a_{2018}}{a_{2019}},CMR:\frac{a}{a_{2019}}=\left(\frac{a_1+a_2+...+a_{2018}}{a_2+a_3+...+a_{2019}}\right)^{2018}$

**Câu 56.** Cho a,b,c $\neq 0$, t/m $b^2=a.c$ khi đó $\left(\frac{a+2014b}{b+2014c}\right)^n=\frac{a}{c}$, Khi đó n = ?

**Câu 57.** Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, CMR : $\frac{a^{1994}+c^{1994}}{b^{1994}+d^{1994}}=\frac{(a+c)^{1994}}{(b+d)^{1994}}$

**Câu 58.** Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,CMR: $\frac{2a^2-3ab+5b^2}{2b^2+3ab}=\frac{2c^2-3cd+5d^2}{2d^2+3cd}$,Với điều kiện mẫu thức xác định.

**Câu 59.** Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, CMR : $\frac{ac}{bd}=\frac{2009a^2+2010c^2}{2009b^2+2010d^2}$

**Câu 60.** Cho $\frac{2a+13b}{3a-7b}=\frac{2c+13d}{3c-7d},CMR:\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

**Câu 61.** Cho tỉ lệ thức: $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}=\frac{b}{c}(c\neq 0)$, CMR : $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$

**Câu 62.** Chứng minh rằng: $2(x+y)=5(y+z)=3(z+x)$, Thì $\frac{x-y}{4}=\frac{y-z}{5}$

**Câu 63.** Cho $a+d=b+c$, và $a^2+d^2=b^2+c^2\left(b,d\neq 0,\right)$ CMR 4 số a, b, c, d có thể lập thành 1 tỉ lệ thức:

**Câu 64.** Cho $M=\frac{ax+by}{cx+dy}=k\left(c,d\neq 0\right)$ , Chứng minh rằng, Giá trị của M không phụ thuộc vào x,y thì 4 số a,b,c,d lập thành 1 tỉ lệ thức :

**Câu 65.** Cho dãy $\frac{a}{2009}=\frac{b}{2011}=\frac{c}{2013}$, Chứng minh rằng: $\frac{(a-c)^2}{4}=(a-b)(b-c)$

**Câu 66.** Cho 3 số x,y,z thỏa mãn: $\frac{x}{1998}=\frac{y}{1999}=\frac{z}{2000}$, CMR : $(x-z)^3=8(x-y)^2(y-z)$

**Câu 67.** Cho 3 số x,y,z thỏa mãn: by+cz=a, ax+cz=b, ax+by=c , với a,b,c là các số dương cho trước thì $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}$ không phụ thuộc vào a,b,c

**Câu 68.** Cho $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}$, Chứng minh: $\frac{a^2-bc}{x}=\frac{b^2-ca}{y}=\frac{c^2-ab}{z}$

**Câu 69.** Cho a, b dương thỏa mãn: $a^{2006}+b^{2006}=a^{2004}+b^{2004}$, Chứng minh $\frac{a^2+b^2}{32}\le 2^{-4}$

**Câu 70.** Cho a,b,c$\neq 0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, chứng minh rằng: $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\le 0$

**Câu 71.** Cho $x^2+y^2=1$ và $b.x^2=a.y^2$ Chứng minh rằng: $\frac{x^{2000}}{a^{1000}}+\frac{y^{2000}}{b^{1000}}=\frac{2}{(a+b)^{1000}}$

**Câu 72.** Chứng minh rằng nếu: $x=\frac{a-b}{a+b},y=\frac{b-c}{b+c},z=\frac{c-a}{c+a}$ Thì

$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$

**Câu 73.** Biết $a^2+ab+\frac{b^2}{3}=15$ và $c^2+\frac{b^2}{3}=6$ và $a^2+ac+c^2=9$ và $a,c\neq 0;a\neq -c$, CMR :

$\frac{2c}{a}=\frac{b+c}{a+c}$

**Câu 74.** Cho $3^x=9^{y-1}$ và $8^y-2^{x+8}=0$ Chứng minh rằng: $\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$

**Câu 75.** Cho các số hữu tỉ: $x=\frac{a}{b};y=\frac{c}{d};z=\frac{a+c}{b+d}$ với a,b,c,d số nguyên và b, d > 0.

CMR: nếu x < y thì x < z < y

**Câu 76.** Cho 3 số a, b,c đôi 1 khác nhau, CMR:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$$

**Câu 77.** Cho $\frac{a}{a'}+\frac{b'}{b}=1,\frac{b}{b'}+\frac{c'}{c}=1$, CMR: $abc+a'b'c'=0$

**Câu 78.** Chứng minh rằng nếu: $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ , và a, b, c khác nhau và khác 0, thì: $\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$

**Câu 79.** Cho $P=\frac{ax^2+bc+c}{a_1x^2+b_1x+c_1},CMR:$ Nếu $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$, thì P không phụ thuộc vào x

**Câu 80.** Cho A, B, C tỉ lệ với a, b, c, CMR : $Q=\frac{Ax+By+C}{ax+by+c}$ không phụ thuộc vào x, y

**Câu 81.** Cho các số thực a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa mãn $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2+y^2+c^2}{(ax+by+cz)^2}=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$ *(Các mẫu đều khác 0)*

**Câu 82.** Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=1. \\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c} \end{cases}$

Chứng minh rằng xy + yz + zx = 0

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1.** Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=...=\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n}{a_2+a_3+...+a_n+a_1}=1$$

$$=> \frac{a_1}{a_2}=1 => a_2=-\sqrt{5}$$

Tương tự $a_3=...=a_n-\sqrt{5}$

**Câu 2.**

Ta có: $\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

$$=> \frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$=> \left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)-\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=0$$

$$=> \frac{a-c}{ca}-\frac{c-b}{bc}=0$$

$$=> \frac{1}{c}\left(\frac{a-c}{a}-\frac{c-b}{b}\right)=0 \text{ Mà } c\neq 0$$

$$=> \frac{a-c}{a}-\frac{c-b}{b}=0$$

$$=> \frac{a}{b}=\frac{a-c}{c-b} \text{(đpcm)}$$

**Câu 3.** Ta có: $c=\dfrac{2bd}{b+d} => 2bd=c(b+d)$

$$=> 2.\frac{a+c}{2}.d=c(b+d)$$

$$=> (a+c)d=c(b+d)$$

$$=> ad+cd=cb+cd$$

$$=> ad = cb$$

Vậy 4 số dương $a;b;c;d$ lập được 1 tỉ lệ thức.

**Câu 4.**

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{y+z+1}{x}=\frac{x+z+2}{y}=\frac{y+x-3}{z}=\frac{1}{x+y+z}$$

$$=\frac{y+z+1+x+z+2+y+x-3}{x+y+z}=\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2$$

( Vì x + y + z $\neq$ 0). Do đó x+y+z = 0,5. Thay kết quả này vào đề bài ta có:

$$\frac{0,5-x+1}{x}=\frac{0,5-y+2}{y}=\frac{0,5-z-3}{z}=2 \text{ tức là } \frac{1,5-x}{x}=\frac{2,5-y}{y}=\frac{-2,5-z}{z}=2$$

Vậy $x=\frac{1}{2};\ y=\frac{5}{6};\ z=\frac{-5}{6}$

**Câu 5.**

Ta có: $\frac{x}{4}=\frac{y}{3};\frac{y}{6}=\frac{z}{5}\Rightarrow\frac{x}{8}=\frac{y}{6}=\frac{z}{5}=k$

$\Rightarrow$ x = 8k, y = 6k, z = 5k

xyz = 30 $\Rightarrow$ 8k.6k.5k = 30 $\Rightarrow$ 240k$^3$ = 30 $\Rightarrow$ k = $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ x = 4, y = 3, z = $\frac{5}{2}$

**Câu 6.**

**a)** Từ $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$ suy ra $c^2=a.b$, khi đó $\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2+a.b}{b^2+a.b}=\frac{a(a+b)}{b(a+b)}=\frac{a}{b}$

**b)** Theo câu a) ta có: $\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}=\frac{b}{a}$

từ $\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}-1=\frac{b}{a}-1$

hay $\frac{b^2+c^2-a^2-c^2}{a^2+c^2}=\frac{b-a}{a}$. Vậy $\frac{b^2-a^2}{a^2+c^2}=\frac{b-a}{a}$

**Câu 7**

**a,** Ta có:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{4a}{4c}=\frac{3b}{3d}=\frac{4a-3b}{4c-3d}$$

$$\leftrightarrow\frac{4a-3b}{a}=\frac{4c-3d}{c}$$

**b,** Ta có:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a-b}{c-d}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{(a-b)^2}{(c-d)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{3a^2}{3c^2}=\frac{2b^2}{2d^2}=\frac{3a^2+2b^2}{3c^2+2d^2}$$

**Câu 8.**

***a)*** Ta có:

Từ $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$ ta có: $\frac{x^2}{9}=\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{25}=\frac{2x^2}{18}=\frac{2y^2}{32}=\frac{3z^2}{75}=\frac{2x^2+2y^2-3z^2}{-25}=\frac{-100}{-25}=4$

$$\begin{cases}x^2=36\\y^2=64\\z^2=100\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=6\\y=8\\x=10\end{cases}\\\begin{cases}x=-6\\y=-8\\z=-10\end{cases}\end{array}\right.$$ ( Vì x, y, z cùng dấu)

***b)*** Ta có:

Ta có $\frac{a}{2b}=\frac{b}{2c}=\frac{c}{2d}=\frac{d}{2a}=\frac{a+b+c+d}{2b+2c+2d+2a}=\frac{1}{2}$

(do a,b,c,d > 0 => a + b + c + d > 0)

suy ra a = b = c = d

Thay vào tính được P = 2

**Câu 9.**

$$\frac{2012a+b+c+d}{a}=\frac{a+2012b+c+d}{b}=\frac{a+b+2012c+d}{c}=\frac{a+b+c+2012d}{d}$$

$$\Rightarrow\frac{2012a+b+c+d}{a}-2011=\frac{a+2012b+c+d}{b}-2011=\frac{a+b+2012c+d}{c}-2011=\frac{a+b+c+2012d}{d}-2011$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b+c+d}{a}=\frac{a+b+c+d}{b}=\frac{a+b+c+d}{c}=\frac{a+b+c+d}{d}\quad(*)$$

+ Nếu a + b + c + d khác 0 Từ (*) suy ra a = b = c = d

Vậy M = 1 + 1 +1 +1 = 4

+ Nếu a + b + c + d = 0 $\Rightarrow$ a + b = - ( c + d) ; a + c = - ( b + d) ;

a + d = - ( b +c) . Vậy M = - 1 - 1 – 1 – 1 = - 4

**Câu 10.**

Từ $\frac{3x-2y}{5}=\frac{2z-5x}{3}=\frac{5y-3z}{2}\Rightarrow\frac{15x-10y}{25}=\frac{6z-15x}{9}=\frac{10y-6z}{4}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{15x-10y}{25}=\frac{6z-15x}{9}=\frac{10y-6z}{4}=\frac{15x-10y+6z-15x+10y-6z}{38}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}15x-10y=0\\6z-15x=0\\10y-6z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=2y\\2z=5x\\5y=3z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\\\frac{x}{2}=\frac{z}{5}\\\frac{z}{5}=\frac{y}{3}\end{cases}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{2+3+5}=\frac{50}{10}=5$$

$\Rightarrow x=10, y=15, z=25$

**Câu 11.**

+ Gọi số viên bi của An, Bình, Cường lần lượt là $a,b,c$. Vì tổng số viên bi của ba bạn là 74 nên $a+b+c=74$

+ Vì số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6 nên $\frac{a}{5}=\frac{b}{6}\Rightarrow\frac{a}{10}=\frac{b}{12}$

+ Vì số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{b}{4}=\frac{c}{5}\Rightarrow\frac{b}{12}=\frac{c}{15}$

+ Từ đó ta có $\frac{a}{10}=\frac{b}{12}=\frac{c}{15}=\frac{a+b+c}{10+12+15}=\frac{74}{37}=2$

+ Suy ra $a=20; b=24; c=30$

**Câu 12.**

Vì $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}\Rightarrow\frac{a}{10}=\frac{b}{15}$; $\frac{b}{5}=\frac{c}{4}\Rightarrow\frac{b}{15}=\frac{c}{12}$ nên $\frac{a}{10}=\frac{b}{15}=\frac{c}{12}$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{10}=\frac{b}{15}=\frac{c}{12}=\frac{a-b+c}{10-15+12}=\frac{-49}{7}=-7$$

Suy ra: $a$ =10.(-7)=-70; $b$ = 15.(-7) =-105; $c$ = 12.(-7) =-84

**Câu 13.**

Do x, y, z khác 0 nên $\frac{xy}{ay+bx}=\frac{yz}{bz+cy}=\frac{zx}{cx+az}\Rightarrow\frac{zxy}{ayz+bxz}=\frac{xyz}{bzx+cyx}=\frac{yzx}{cxy+azy}$

Suy ra $ayz+bxz=bzx+cyx=cxy+azy\Rightarrow az=cx, bx=ay$

Do đó $\frac{x}{a}=\frac{z}{c},\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\Rightarrow\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=t\Rightarrow x=at, y=bt, z=ct, t\neq 0$

Ta có $\frac{xy}{ay+bx}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}\Rightarrow\frac{at.bt}{abt+bat}=\frac{a^2t^2+b^2t^2+c^2t^2}{a^2+b^2+c^2}$

Suy ra $\frac{t}{2}=t^2\Rightarrow t=\frac{1}{2}$ *(do $t\neq 0$)*

Vậy $x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=\frac{c}{2}$

**Câu 14.**

**a)** Ta có $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{3}=\frac{y}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{21}=\frac{y}{14}(1);\ 5x=7z\Leftrightarrow\frac{x}{7}=\frac{z}{5}\Leftrightarrow\frac{x}{21}=\frac{z}{15}(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{x}{21}=\frac{y}{14}=\frac{z}{15}=\frac{x-2y+z}{21-28+15}=\frac{32}{8}=4$

Tìm được: $x=84;\ y=56; z=60$

**b)** Đặt: $\frac{7x+5y}{3x-7y}=\frac{7z+5t}{3z-7t}=k\Rightarrow 7x+5y=k(3x-7y)\Rightarrow(3k-7)x=(7k+5)y\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{7k+5}{3k-7}(1)$

Tương tự: $7z+5t=k(3z-7t)\Rightarrow(3k-7)z=(7k+5)t\Rightarrow\frac{z}{t}=\frac{7k+5}{3k-7}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

**Câu 15.**

1) Với $a, b, c\neq 0$, ta có

$$\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}=\frac{bza-cya}{a^2}=\frac{bcx-baz}{b^2}=\frac{acy-bcx}{c^2}$$

$$=\frac{bza-cya+bcx-baz+acy-bcx}{a^2+b^2+c^2}=\frac{0}{a^2+b^2+c^2}=0$$

Suy ra $\frac{bz-cy}{a}=0$, do đó $bz=cy\Rightarrow\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ (1)

$\frac{cx-az}{b}=0$, do đó $cx=az\Rightarrow\frac{x}{a}=\frac{z}{c}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{c}{z}$

2) Gọi ba phần được chia của số M là x, y, z. , ta được $x+y+z=M$

Theo đề bài ta có $x:y:z=\frac{1}{3}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}$ và $x^3+y^3+z^3=10728$ (1)

Hay $\frac{x}{10}=\frac{y}{6}=\frac{z}{5}=k$ và $x^3+y^3+z^3=10728$

Suy ra $x^3=10^3.k^3;\ y^3=6^3.k^3;\ z=5^3.k^3$

Thay vào (1), được $1341k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

suy ra 20; y = 12; z =10 Vậy M = 42.

**Câu 16.**

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \left(\frac{a-c}{b-d}\right)^{2013}$ (1)

Mà: $\left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013}}{b^{2013}} = \frac{c^{2013}}{d^{2013}} = \frac{a^{2013}+c^{2013}}{b^{2013}+d^{2013}}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013}+b^{2013}}{c^{2013}+d^{2013}}$ (đpcm)

**Câu 17.**

Ta có: $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} = \frac{x+y+z+t}{3(x+y+z+t)} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 3x = y+z+t;\ 3y = z+t+x;\ 3z = t+x+y;\ 3t = x+y+z$

$\Rightarrow x+y = z+t;\ y+z = t+x;\ z+t = x+y;\ t+x = y+z$

$\Rightarrow A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z} = 1+1+1+1 = 4 \in Z$

Vậy biểu thức A có giá trị nguyên. (đpcm)

**Câu 18.**

Số A được chia thành ba phần số tỉ lệ theo $\frac{2}{5}:\frac{3}{4}:\frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

Gọi ba phần được chia lần lượt là: a, b, c

Theo bài ra ta có: $a:b:c = \frac{2}{5}:\frac{3}{4}:\frac{1}{6}$ và $a^2+b^2+c^2 = 24309$

Ta có: $a:b:c = \frac{2}{5}:\frac{3}{4}:\frac{1}{6} = 24:45+10 \Rightarrow \frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow \frac{a^2}{576} = \frac{b^2}{2025} = \frac{c^2}{100} = \frac{a^2+b^2+c^2}{576+2025+100} = \frac{24309}{2701} = 9$

$\Rightarrow a^2 = 576.9 = 5184 \Rightarrow a = \pm 72$

**Câu 19.** Gọi diện tích ba hình chữ nhật lần lượt là $S_1, S_2, S_3$, chiều dài, chiều rộng tương ứng là $d_1, r_1; d_2, r_2; d_3, r_3$ theo đề bài ta có

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4}{5};\frac{S_2}{S_3}=\frac{7}{8}$ và $d_1=d_2;r_1+r_2=27;r_2=r_3,d_3=24$

Vì hình thứ nhất và hình thứ hai cùng chiều dài

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4}{5}=\frac{r_1}{r_2}\Rightarrow\frac{r_1}{4}=\frac{r_2}{5}=\frac{r_1+r_2}{9}=\frac{27}{9}=3$$

Suy ra chiều rộng $r_1=12cm,r_2=15cm$

Vì hình thứ hai và hình thứ ba cùng chiều rộng

$\frac{S_2}{S_3}=\frac{7}{8}=\frac{d_2}{d_3}\Rightarrow d_2=\frac{7d_3}{8}=\frac{7.24}{8}=21cm$

Vậy diện tích hình thứ hai $S_2=d_2r_2=21.15=315\,cm^2$

Diện tích hình thứ nhất $S_1=\frac{4}{5}S_2=\frac{4}{5}.315=252\,cm^2$

Diện tích hình thứ ba $S_3=\frac{8}{7}S_2=\frac{8}{7}.315=360\,cm^2$

**Câu 20.**

Vì $b=\frac{a+c}{2}$ nên 2b = a + c

Mặt khác : $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)=\frac{b+d}{2bd}$ hay 2bd = bc + cd

hay ad + cd = bc + cd do đó ad = bc hay bốn số lập thành tỉ lệ thức

**Câu 21.**

Ta có : $4x^3-3=29\Rightarrow 4x^3=32\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2$.

Thay vào tỷ lệ thức ta được : $\frac{2+16}{9}=\frac{y-25}{-16}=\frac{z+49}{25}\Rightarrow\frac{y-25}{-16}=\frac{z+49}{25}=2$

$\Rightarrow y=-7,\ z=1$.

Vậy x – 2y + 3z = 2 – 2.(-7) + 3.1 = 19

**Câu 22.**

Từ giả thiết => $\frac{x-9}{15}=\frac{y-12}{20}=\frac{z-24}{40}=\frac{x}{15}-\frac{3}{5}=\frac{y}{20}-\frac{3}{5}=\frac{z}{40}-\frac{3}{5}$

=> $\frac{x}{15}=\frac{y}{20}=\frac{z}{40}=k$ => $\begin{cases}x=15k\\y=20k\end{cases}$, Mà $x.y=1200$ => $k=\pm 2$

**Câu 23.**

a, Từ : $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{6}=\frac{5(z-5)-3(x-1)-4(y+3)}{30-6-16}=\frac{(5z-3x-4y)-34}{8}$

b, Từ : $\frac{4}{3x-2y}=\frac{3}{2z-4x}=\frac{2}{4y-3z}$ => $\frac{3x-2y}{4}=\frac{2z-4x}{3}=\frac{4y-3z}{2}$

$$=\frac{4(3x-2y)}{16}=\frac{3(2z-4x)}{9}=\frac{2(4y-3z)}{2}=\frac{(12x-8y)+(6z-12x)+(8y-6z)}{27}=0$$

$$=>\begin{cases}3x=2y\\2z=4x\\4y=3z\end{cases} => \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+y-z}{2+3-4}=-10$$

**Câu 24.**

a, Từ GT ta có : $\left(\frac{x}{2}\right)^3=\left(\frac{y}{4}\right)^3=\left(\frac{z}{6}\right)^3$ => $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}$ => $\frac{x^2}{4}=\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{36}$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2}{4+16+36}=\frac{14}{56}=\frac{1}{4}$$

b, => $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ => $\frac{x^2}{4}=\frac{y^2}{9}=\frac{z^2}{16}=\frac{x^2+2y^2-3z^2}{-26}=\frac{-650}{-26}=25$

**Câu 25.**

Ta có : $GT=\frac{(x^3+y^3)-(x^3-2y^3)}{6-4}=\frac{2(x^3+y^3)+(x^3-2y^3)}{12+4}=\frac{3y^3}{2}=\frac{3x^3}{16}$

$$=> y^3=\frac{x^3}{8} <=> \frac{x^6}{64}=y^6 => \begin{cases}x^6=64k\\y^6=k\end{cases} => k=\pm 1$$

**Câu 26.**

a, Từ : $|x+y-z=95|$ => $\left[\begin{array}{l}x+y-z=95\\x+y-z=-95\end{array}\right.$

Nên $2x=3y=5z$ => $\frac{x}{15}=\frac{y}{10}=\frac{z}{6}=\frac{x+y-z}{15+10-6}=\frac{\pm 95}{19}$

b, Từ : $\frac{6}{11}x=\frac{9}{2}y=\frac{18}{5}z$ => $\frac{x}{33}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=\frac{-x+z}{-33+5}=\frac{-196}{-28}$

**Câu 27.**

Ta có : $GT=\frac{2(1+2y)-1(1+4y)}{36-24}=\frac{(1+2y)+(1+4y)-(1+6y)}{18+24-6x}$ => $\frac{1}{12}=\frac{1}{42-6x}$ => $x=5$,

Thay vào tìm được y

**Câu 28.**

$$\frac{5x-1}{3}=\frac{7y-6}{5}=\frac{5x-7y-7}{8}=\frac{5x-7y-7}{4x} =>$$

Nếu 5x-7y-7 ≠ 0 thì $x=2$, Thay vào ta được y = 3. Nếu 5x-7y-7=0=> 5x-1=0=> $x=\frac{1}{5}; y=\frac{6}{7}$

**Câu 29.**

$$GT = \frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{(x-y)+(x+y)}{16} = \frac{x}{8} => \frac{x}{8} = \frac{xy}{200}$$

$$=> 8xy - 200x = 0 <=> x(8y-200) = 0 => \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 25 \end{array}\right.$$

TH1: $x = 0 => y = 0$

TH2: $y = 25 => x = 40$

**Câu 30.**

Ta có : $GT = \frac{5(3a-2b)}{25} = \frac{3(2c-5a)}{9} = \frac{6c-10b}{34} = \frac{-5b+3c}{17} = \frac{5b-3c}{2} = 0$

$$=> \begin{cases} 3a = 2b \\ 2c = 5a \\ 5b = 3c \end{cases} => \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{10} = -5$$

**Câu 31.**

ĐKXĐ: $a \neq \pm 2, a \neq \frac{-13}{6}$

$$\frac{3b}{a^2-4} = \frac{1-125a-3b}{6a+13} = \frac{1-125a}{1} = \frac{1-125a}{a^2+6a+9}$$

Suy ra: $a^2 + 6a + 8 = 0, \left(a \neq \frac{1}{125}\right)$

$a = -2(l), a = -4$ , Với $a = -4 => b = 2004$

**Câu 32.**

Ta có: $GT => \frac{x}{y} = \frac{z}{9}$ và $\frac{x}{y} = \frac{16}{z} => \frac{z}{9} = \frac{16}{z} => z^2 = 9.16 = 144 => z = \pm 2$

TH1: $z = 12 => \frac{x}{y} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} => \begin{cases} x = 4k \\ y = 3k \end{cases} => 4k.3k = 12 => k = \pm 1$

TH2: $z = -12$ làm tương tự

**Câu 33.**

Áp dụng dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{(a_1 + a_2 + ... + a_{100}) - (1 + 2 + ... + 100)}{100 + 99 + ... + 1} = \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_{100})}{100 + 99 + ... + 1} - 1 = \frac{10100}{5050} - 1 = 1$$

**Câu 34.**

Từ gt $=> \frac{a}{b} = \frac{7}{11}; \frac{c}{d} = \frac{11}{13}; \frac{e}{f} = \frac{13}{17} => \frac{a}{7} = \frac{b}{11} = \frac{a+b}{7+11} = \frac{M}{18}$

Tương tự ta có: $\frac{c}{11}=\frac{d}{13}=\frac{c+d}{24}=\frac{M}{24}$ và $\frac{e}{13}=\frac{f}{17}=\frac{e+f}{13+17}=\frac{M}{30}$ khi đó $M\in BC(18;24;30)$, và M là số tự nhiên nhỏ nhất có 4 chữ số nên M=1080

**Câu 35.**

Gọi 3 phân số cần tìm là $\frac{a}{x};\frac{b}{y};\frac{c}{z}$ thì ta có: $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1\frac{1}{70},\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$ và $\frac{x}{5}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$

$$=>\frac{a}{3}:\frac{x}{5}=\frac{b}{4}:\frac{y}{1}=\frac{c}{5}:\frac{z}{2}=>\frac{\frac{a}{x}}{\frac{3}{5}}=\frac{\frac{b}{y}}{\frac{4}{1}}=\frac{\frac{c}{z}}{\frac{5}{2}}=\frac{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}}{\frac{3}{5}+\frac{4}{1}+\frac{5}{2}}=\frac{1\frac{1}{70}}{\frac{71}{10}}=\frac{1}{7}$$

$=>\frac{a}{x}=\frac{3}{35};\frac{b}{y}=\frac{4}{7};\frac{c}{z}=\frac{5}{14}$ đó là ba phân số cần tìm

**Câu 36.**

Trừ 2011 vào mỗi vế của tỉ số trong tỉ lệ thức ta được:

$$\frac{a+b+c+d}{a}=\frac{a+b+c+d}{b}=\frac{a+b+c+d}{c}=\frac{a+b+c+d}{d}$$

TH1: $a+b+c+d\neq 0=>a=b=c=d=>M=8$

Th2: $a+b+c+d=0=>a+b=-(c+d)=>M=-4$

**Câu 37.**

Từ GT ta nghịch đảo $=>\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}$

Cộng 1 vào các tỉ số ta được : $\frac{a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{c}$

TH1 : $a+b+c\neq 0=>a=b=c=>A=6$

TH2 : $a+b+c=0=>b+c=-a,a+c=-b,a+b=-c=>A=-3$

**Câu 39.**

Từ GT ta có: Cộng (n+1) vào mỗi tỉ số trong dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$=>\frac{x+y+z+t}{x}=\frac{x+y+z+t}{y}=\frac{x+y+z+t}{z}=\frac{x+y+z+t}{t}$$

$$=>\frac{2012}{x}=\frac{2012}{y}=\frac{2012}{z}=\frac{2012}{t}=>x=y=z=t=\frac{2012}{4}=503$$

Thay vào ta tính được $P=x+2x-3x+x=x=503$

**Câu 40.**

Ta có : $B=\left(\frac{x-z}{x}\right)\left(\frac{y-x}{y}\right)\left(\frac{y+z}{z}\right)=\frac{y.(-z).x}{x.y.z}=-1$

**Câu 41.**

Với a, b, c khác 0 , nghịch đảo giả thiết ta được :

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{b+c}{bc}=\frac{c+a}{ca}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=>\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=>a=b=c$$

khi đó : $P=\dfrac{a^3+a^3+a^3}{3a^3}=1$

**Câu 42.**

Từ GT ta có : $\dfrac{y}{x-z}=\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{y+x+y+x}{x-z+z+y}=2=>\dfrac{x}{y}=2$

**Câu 43.**

Từ GT ta có : $a=b+13$ thay vào B ta được :

$$B=\frac{(3b+39)-b}{(2b+26)+13}-\frac{3b-b-13}{2b-13}=\frac{2b+39}{2b+39}-\frac{2b-13}{2b-13}=0$$

**Câu 44.**

Từ GT ta có :

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\frac{x+2y-3z}{5+8-9}=\frac{(x+2y-3z)}{4}=\frac{x-2y+3z}{5-8+9}=\frac{(x-2y+3z)}{6}$$

Khi đó : $\dfrac{x+2y-3z}{x-2y+3z}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}=P$

**Câu 45.**

Từ $2a-b=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{2}{3}b=>\dfrac{4a}{3}=\dfrac{5b}{3}=>\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{4}=>\dfrac{a^4}{b^4}=\dfrac{5^4}{4^4}=>M=\dfrac{625}{256}$

**Câu 46.**

Từ GT ta có: $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{8-c}{5}=\dfrac{b+c}{3}=\dfrac{10+c}{4}=t\quad=>\begin{cases}a+b=2t\\8-c=5t\\b+c=3t\\10+c=4t\end{cases}=>t=2=>\begin{cases}a=-4\\b=8\\c=-2\end{cases}$

**Câu 47.**

Cộng theo vế của GT ta được : $x+y+z=2(ax+by+cz)$, Thay x, y , z trở lại ta có :

$$=>x+y+z=2(z+cz)=2z(1+c)=>\frac{1}{c+1}=\frac{2z}{x+y+z}$$

Tương tự ta có : $\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{2x}{x+y+z},\dfrac{1}{b+1}=\dfrac{2y}{x+y+z}$, Khi đó ta có : $Q=2$

**Câu 48.** Ta có : $Q=\left(\dfrac{a}{b+c}+1\right)+\left(\dfrac{b}{c+a}+1\right)+\left(\dfrac{c}{a+b}+1\right)-3$

$$Q=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3=2015.\frac{1}{5}-3$$

**Câu 50.**

Từ GT ta có: $GT=\frac{a-b}{-1}=\frac{b-c}{-1}=\frac{c-a}{2}=k \Rightarrow \begin{cases}a-b=-k\\ b-c=-k\\ c-a=2k\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow M=4.(-k).(-k)-(2k)^2=4k^2-4k^2=0$

**Câu 52.**

Từ GT ta có : $\begin{cases}x+y=-z\\ y+z=-x\\ z+x=-y\end{cases} \Rightarrow B=-x.y.z=-2$

**Câu 53.**

Từ GT ta có : $x^3=\frac{-1}{27}, y^3=\frac{1}{27} \Rightarrow x^3+y^3=0 \Rightarrow C=0$

**Câu 54.**

$$b^2=a.c \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{a+2012b}{b+2012c} \Rightarrow \frac{a}{b}.\frac{b}{c}=\frac{(a+2012b)^2}{(b+2012c)^2}=\frac{a}{c}$$

**Câu 55.**

Từ GT ta có : $\frac{a_1}{a_2}.\frac{a_2}{a_3}.....\frac{a_{2018}}{a_{2019}}=\left(\frac{a_1}{a_{2018}}\right)^{2018}=\left(\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{2018}}{a_2+a_3+a_4+...+a_{2019}}\right)^{2018}$

**Câu 56.**

Từ: $b^2=ac \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{a+2014b}{b+2014c} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{b}{c}\right)^n=\frac{a}{c}$

Mà $\frac{a}{c}=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}=\left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow n=2$

**Câu 57.**

Đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{a^{1994}+c^{1994}}{b^{1994}+d^{1994}}=\frac{(k.b)^{1994}+(k.d)^{1994}}{b^{1994}+d^{1994}}=k^{1994}$

và $\frac{(a+c)^{1994}}{(b+d)^{1994}}=\frac{(kb+kd)^{1994}}{(b+d)^{1994}}=k^{1994}$

**Câu 58.**

Đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \begin{cases}a=k.b\\ c=kd\end{cases}$, Thay vào biểu thức ta có:

$\frac{2a^2-3ab+5b^2}{2b^2+3ab}=\frac{k^2-3k+5}{2+3k}$ và $\frac{2c^2-3cd+5d^2}{2d^2+3cd}=\frac{k^2-3k+5}{2+3k}$

**Câu 59.**

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=>\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{c}{d}\right)^2=>\frac{a.c}{b.d}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=>\frac{a.c}{b.d}=\frac{2010c^2}{2010d^2}=\frac{2009a^2}{2009b^2}$$

**Câu 60.**

GT=> $\dfrac{2a+13b}{2c+13d}=\dfrac{3a-7b}{3c-7d}=\dfrac{3(2a+13b)-2(3a-7b)}{3(2c+13d)-2(3c-7d)}=\dfrac{b}{d}=\dfrac{a}{c}=>\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

**Câu 61.**

$$GT=\frac{a.10+b}{b.10+c}=\frac{b}{c}=\frac{10a}{10b}=\frac{a}{b}=>\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=>\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{a.b}{b.c}=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$$

**Câu 62.**

Ta có: $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{z+x}{2}=\dfrac{x+y-z-x}{3-2}=y-z$ và $\dfrac{y+z}{3}=\dfrac{z+x}{5}=\dfrac{-y-z+z+x}{-3+5}=\dfrac{x-y}{5}$

và $\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{z+x}{5}=>x-y=\dfrac{2(z+x)}{5}=>\dfrac{x-y}{4}=\dfrac{z+x}{10}$ (1) và $\dfrac{z+x}{2}=y-z=>\dfrac{y-z}{5}=\dfrac{z+x}{10}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{x-y}{4}=\dfrac{y-z}{5}$

**Câu 63.**

Vì $a+d=b+c=>(a+d)^2=(b+c)^2=>2ad=2bc=>\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

**Câu 64.**

Đặt $\dfrac{ax+by}{cx+dy}=k,$ Chọn $x=0,y=1=>\dfrac{b}{d}=k$

Chọn $x=1,y=0=>\dfrac{a}{c}=k=>\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

**Câu 65.**

Ta có: $\dfrac{a}{2009}=\dfrac{b}{2011}=\dfrac{c}{2013}=\dfrac{a-c}{-4}=\dfrac{a-b}{-2}=\dfrac{b-c}{-2}=k$

$$=>\begin{cases}a-c=-4k\\a-b=-2k\\b-c=-2k\end{cases}=>\frac{(a-c)^2}{4}=\frac{(-4k)^2}{4}=4k^2 \text{ và } (a-b)(b-c)=4k^2=>\text{VT= VP}$$

**Câu 66.**

Từ gt => $\dfrac{x-z}{-2}=\dfrac{x-y}{-1}=\dfrac{y-z}{-1}=>\left(\dfrac{x-z}{-2}\right)^3=\left(\dfrac{x-y}{-1}\right)^2.\left(\dfrac{y-z}{-1}\right)=>\dfrac{(x-z)^3}{8}=(x-y)^2(y-z)$

**Câu 67.**

Cộng theo vế các GT ta được: $a+b+c=2\left(ax+by+cz\right)=2\left(ax+a\right)=2a\left(x+1\right)$

$=> \dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta có: $\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{2b}{a+b+c},\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{2c}{a+b+c}$

Khi đó: $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{2\left(a+b+c\right)}{a+b+c}=2$

**Câu 68.**

Đặt: $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}=k \Rightarrow a=\dfrac{x^2-yz}{k},b=\dfrac{y^2-zx}{k},c=\dfrac{z^2-xy}{k}$

$=> a^2-bc=\dfrac{\left(x^4-2x^2yz+y^2z^2\right)}{k^2}-\dfrac{y^2z^2-xy^3-xz^3+x^2yz}{k^2} \Rightarrow \dfrac{a^2-bc}{x}=x^3+y^3+z^3-3xyz$

Chứng minh tương tự: $\dfrac{b^2-ca}{y}=x^3+y^3+z^3-3xyz$ và $\dfrac{c^2-ab}{z}=x^3+y^3+z^3-3xyz$=> đpcm

**Câu 69.**

Giả sử: a=1=>b=1=>$\dfrac{a^2+b^2}{32}=2^{-4}$ . Nếu: $a,b\neq 1$, Giả sử:

$a\geq b \Rightarrow a^{2004}\left(a^2-1\right)=b^{2004}\left(1-b^2\right)$

$=> \dfrac{a^{2004}}{b^{2004}}=\dfrac{1-b^2}{1-a^2}$, Vì $a\geq b \Rightarrow 1-b^2\geq a^2-1 \Rightarrow a^2+b^2\leq 2$

$=> \dfrac{a^2+b^2}{32}\leq \dfrac{2}{32}=2^{-4}$

**Câu 70.**

Từ GT=> $\dfrac{1}{a}=-\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\leq 0$

=>$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}\leq 0$, Tương tự: $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ab}\leq 0,\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}\leq 0$

Cộng theo vế ta được: =>$2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)\leq 0$

**Câu 71.**

Từ $bx^2+ay^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a}=\dfrac{y^2}{b}=\dfrac{x^2+y^2}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}$

$\dfrac{x^{2000}}{a^{1000}}=\dfrac{y^{2000}}{b^{1000}}=\dfrac{1}{\left(a+b\right)^{1000}} \Rightarrow \dfrac{x^{2000}}{a^{1000}}+\dfrac{y^{2000}}{b^{2000}}=\dfrac{2}{\left(a+b\right)^{1000}}$

**Câu 72.**

Xét $x+1=\dfrac{a-b}{a+b}+1=\dfrac{2a}{a+b}$, Tương tự: $y+1=\dfrac{2b}{b+c}, z+1=\dfrac{2c}{c+a}$

Khi đó $VT=\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Tương tự: $1-x=1-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{2b}{a+b}$, $1-y=\dfrac{2c}{b+c}, 1-z=\dfrac{2a}{c+a}$

Khi đó: $VP=\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=VT$

**Câu 73.**

Ta có: $a^2+ab+\dfrac{b^2}{3}=15=6+9=\left(a^2+ac+c^2\right)+\left(c^2+\dfrac{b^2}{3}\right)$

$=> 2c^2=ab-ac => 2c^2=ab+ac-2ac => 2c^2+2ac=ab+ac$

$=> 2c(c+a)=a(b+c) => \dfrac{2c}{a}=\dfrac{b+c}{a+c}$

**Câu 74.**

Từ $8^y=2^{x+8} <=> 2^{3y}=2^{x+8} => 3y=x+8 \quad (1)$

Và $3^x=9^{y-1}=3^{2(y-1)} => x=2y-2$ thay vào (1) ta được:

$3y=2y-2+8 <=> y=6 => x=10$

**Câu 75.**

Vì $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d} => a.d<b.c$ Xét tích $\begin{cases} a(b+d)=ab+ad \\ b(a+c)=ab+bc \end{cases} => a(b+d)<b(a+c) => \dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}$

Cmtt ta có: $\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$

**Câu 76.**

Ta có : $\dfrac{2}{a-b}=\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{-1}{b-a}$

Tính tương tự ta có : $\dfrac{2}{b-c}=\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{-1}{c-b}$, và $\dfrac{2}{c-a}=\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{-1}{a-c}$

Cộng theo vế :

$\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}=\left(\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a-c}\right)+\left(\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{-1}{b-a}\right)+\left(\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{-1}{c-b}\right)=VT$

**Câu 77.**

Từ GT ta có: $ab+a'b'=a'b => abc+a'b'c=a'bc$

Và $bc+b'c'=b'c => a'bc+a'b'c'=a'b'c$

Nên $\left(abc+a'b'c'\right)+\left(a'b'c'+a'bc\right)=\left(a'bc+a'b'c\right)$ => đpcm

**Câu 78.**

Vì a, b, c ≠ 0, chia giả thiết cho

$$abc \Rightarrow \frac{y+z}{bc}=\frac{z+x}{ac}=\frac{x+y}{ab}=\frac{(x+y)-(z+x)}{ab-ac}=\frac{(y+z)-(x+y)}{bc-ab}=\frac{(z+x)-(y+z)}{ac-bc} \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

**Câu 79.**

Đặt $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k$ rút ra rồi thay vào P

**Câu 80.**

Ta có : $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=k \Rightarrow A=ka, B=kb, C=kc \Rightarrow Q=\frac{k(ax+by+c)}{ax+by+c}=k$

**Câu 81.**

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x^2}{ax}=\frac{y^2}{by}=\frac{z^2}{cz}=\frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz}\right)^2$$

Mặt khác cũng theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Do đó:

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz}\right)^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2} \text{ (đpcm)}$$

**Câu 82.**

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=x+y+z$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=(x+y+z)^2$$

Mặt khác cũng theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=x^2+y^2+z^2$$

Do đó:

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx=0$$

# Chuyên đề 10: GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

**I. Lý thuyết**

***Định nghĩa**: Khoảng cách từ điểm a đến điểm 0 trên trục số là giá trị tuyệt đối của một số a( a là số thực)

* Giá trị tuyệt đối của số không âm là chính nó, giá trị tuyệt đối của số âm là số đối của nó.

TQ: Nếu $a \ge 0 \Rightarrow |a| = a$

Nếu $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

Nếu $x - a \ge 0 \Rightarrow |x-a| = x - a$

Nếu $x - a \le 0 \Rightarrow |x-a| = a - x$

***Tính chất**

Giá trị tuyệt đối của mọi số đều không âm

TQ: $|a| \ge 0$ với mọi $a \in R$

Cụ thể:

$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$|a| \ne 0 \Leftrightarrow a \ne 0$

* Hai số bằng nhau hoặc đối nhau thì có giá trị tuyệt đối bằng nhau, và ngược lại hai số có giá trị tuyệt đối bằng nhau thì chúng là hai số bằng nhau hoặc đối nhau.

TQ: $|a| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$

* Mọi số đều lớn hơn hoặc bằng đối của giá trị tuyệt đối của nó và đồng thời nhỏ hơn hoặc bằng giá trị tuyệt đối của nó.

TQ: $-|a| \le a \le |a|$ và $-|a| = a \Leftrightarrow a \le 0; a = |a| \Leftrightarrow a \ge 0$

* Trong hai số âm số nào nhỏ hơn thì có giá trị tuyệt đối lớn hơn

TQ: Nếu $a < b < 0 \Rightarrow |a| > |b|$

* Trong hai số dương số nào nhỏ hơn thì có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn

TQ: Nếu $0 < a < b \Rightarrow |a| < |b|$

* Giá trị tuyệt đối của một tích bằng tích các giá trị tuyệt đối.

TQ: $|a.b| = |a|.|b|$

* Giá trị tuyệt đối của một thương bằng thương hai giá trị tuyệt đối.

TQ: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

* Bình phương của giá trị tuyệt đối của một số bằng bình phương số đó.

TQ: $|a|^2 = a^2$

* Tổng hai giá trị tuyệt đối của hai số luôn lớn hơn hoặc bằng giá trị tuyệt đối của hai số, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai số cùng dấu.

TQ: $|a|+|b| \ge |a+b|$ và $|a|+|b| = |a+b| \Leftrightarrow a.b \ge 0$

**II. Các dạng toán :**

I. Tìm giá trị của x thoả mãn đẳng thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối:

**1. Dạng 1:** $|A(x)| = k$ **( Trong đó A(x) là biểu thức chứa x, k là một số cho trước )**

* ***Cách giải***:

- Nếu k < 0 thì không có giá trị nào của x thoả mãn đẳng thức( Vì giá trị tuyệt đối của mọi số đều không âm )

- Nếu k = 0 thì ta có $|A(x)| = 0 \Rightarrow A(x) = 0$

- Nếu k > 0 thì ta có: $|A(x)| = k \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) = k \\ A(x) = -k \end{array}\right.$

**Bài 1.1**: Tìm x, biết: $2|3x-1|+1=5$

**Lời giải**

$$2|3x-1|+1=5 \Rightarrow 2|3x-1| = 4 \Rightarrow |3x-1| = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-1=2 \\ 3x-1=-2 \end{array}\right.$$

**Bài 1.2**: Tìm x, biết: $\left|3x-\frac{2}{5}\right| = \frac{1}{35}+2\frac{4}{7}$

**Lời giải**

$$\left|3x-\frac{2}{5}\right| = \frac{1}{35}+2\frac{4}{7} \Rightarrow \left|3x-\frac{2}{5}\right| = \frac{13}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\frac{2}{5}=\frac{13}{5} \\ 3x-\frac{2}{5}=\frac{-13}{5} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là x = 8 và x = – 4 .

**Bài 1.3**: Tìm $x$ biết: $\left|\frac{39}{2}-3x^2\right| = \frac{15}{2}$

**Hướng dẫn giải**

$$\left|\frac{39}{2}-3x^2\right| = \frac{15}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{39}{2}-3x^2 = \frac{15}{2} \\ \frac{39}{2}-3x^2 = -\frac{15}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 = 12 \\ 3x^2 = 27 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 2, x = \pm 3$$

**Bài 1.4**: Tìm x, biết: $\left|x^2-4x-1\right|=31$

**Lời giải**

Ta có:

$$\left|x^2-4x-1\right|=31 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x-1=31 \\ x^2-4x-1=-31 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x-32=0 \\ x^2-4x+30=0 \end{array}\right.$$

Phương trình $x^2-4x-32=0 \Leftrightarrow (x-8)(x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Phương trình $x^2-4x+30=0$ vô nghiệm

vì $x^2-4x+30=(x-2)^2+26>0,\ \forall x$.

**2. Dạng 2**: $|A(x)|=|B(x)|$ **( Trong đó A(x) và B(x) là hai biểu thức chứa x )**

* ***Cách giải***: Vận dụng tính chất: $|a|=|b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right.$ ta có: $|A(x)|=|B(x)| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(x)=B(x) \\ A(x)=-B(x) \end{array}\right.$

**Bài 2.1**: Tìm x biết: $|5x-4|=|x+2|$

**Hướng dẫn giải**

$$|5x-4|=|x+2| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5x-4=x+2 \\ 5x-4=-x-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

*Cách khác:*

$|5x-4|=|x+2|$ (1)

Xét với $x<-2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4-5x+2+x=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}(ktm)$

Xét với $-2<x<\dfrac{4}{5} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4-5x-x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}(tm)$

Xét với $x \geq \dfrac{4}{5}$ ta có $(1) \Leftrightarrow 5x-4-x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}(tm)$

Vậy $x=\dfrac{1}{3}; x=\dfrac{3}{2}$

**Bài 2.2**: Tìm x biết: $2|x-3|-|4x-1|=0$

**Hướng dẫn giải**

$$2|x-3|-|4x-1|=0 \Rightarrow 2|x-3|=|4x-1| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2(x-3)=4x-1 \\ 2(x-3)=1-4x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{5}{2} \\ x=\dfrac{7}{6} \end{array}\right.$$

**Bài 2.3**: Tìm x biết: $|3x-5|=|x+2|$

**Hướng dẫn giải**

Ta có : $|3x-5|=|x+2| \Rightarrow \left[\begin{array}{l}3x-5=x+2\\3x-5=-x-2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7}{2}\\x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$

**3. Dạng 3**: $|\mathbf{A(x)}|=\mathbf{B(x)}$ **( Trong đó A(x) và B(x) là hai biểu thức chứa x )**

* ***Cách 1***: Ta thấy nếu B(x) < 0 thì không có giá trị nào của x thoả mãn vì giá trị tuyệt đối của mọi số đều không âm. Do vậy ta giải như sau:

$|A(x)|=B(x)$ (1)

Điều kiện: B(x) $\geq 0$ (*)

(1) Trở thành $|A(x)|=|B(x)| \Rightarrow \left[\begin{array}{l}A(x)=B(x)\\A(x)=-B(x)\end{array}\right.$ ( Đối chiếu giá tri x tìm được với điều kiện ( * )

* ***Cách 2***: Chia khoảng xét điều kiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối:

Nếu $a\geq 0 \Rightarrow |a|=a$

Nếu $a<0 \Rightarrow |a|=-a$

Ta giải như sau: $|A(x)|=B(x)$ (1)

- Nếu A(x) $\geq 0$ thì (1) trở thành: A(x) = B(x) ( Đối chiếu giá trị x tìm được với điều kiện )
- Nếu A (x ) < 0 thì (1) trở thành: - A(x) = B(x) ( Đối chiếu giá trị x tìm được với điều kiện )

**Bài 3.1**: Tìm x, biết: $|2x+3|=x+2$

**Lời giải**

Trường hợp 1 : $x\geq \dfrac{-3}{2} \Rightarrow 2x+3=x+2 \Rightarrow x=-1$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2 : $x<\dfrac{-3}{2} \Rightarrow -2x-3=x+2 \Rightarrow x=\dfrac{-5}{3}$ (thỏa mãn)

**Bài 3.2**: Tìm x, biết:

a, $|2x-3|=x-3$ b, $|5x-3|-x=7$ c, $|3x-2|=x+7$

**Lời giải**

a, $TH1: x\geq \dfrac{3}{2} \Rightarrow 2x-3=x-3 \Rightarrow x=0(l)$

$TH2: x<\dfrac{3}{2} \Rightarrow 3-2x=x-3 \Rightarrow x=2(l)$

b, $TH1: x\geq \dfrac{3}{5} \Rightarrow 5x-3-x=7 \Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$ (thỏa mãn)

$TH2: x < \frac{3}{5} \Rightarrow 3 - 5x - x = 7 \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$ (thỏa mãn)

c, $TH1: x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 3x - 2 = x + 7 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$ (thỏa mãn)

$TH2: x < \frac{2}{3} \Rightarrow 2 - 3x = x + 7 \Rightarrow x = \frac{-5}{4}$ (thỏa mãn)

**4. Dạng 4: Đẳng thức chứa nhiều dấu giá trị tuyệt đối:**

* ***Cách giải:*** Lập bảng xét điều kiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối:

$|A(x)| + |B(x)| + |C(x)| = m$

Căn cứ bảng trên xét từng khoảng giải bài toán ( Đối chiếu điều kiện tương ứng)

**Bài 4.1**: Tìm x, biết: $|x - 3| + |3x - 6| - |5 - 2x| = 8$

**Lời giải**

Lập bảng xét giá trị tuyệt đối (hay bảng phá dấu GTTĐ):

| x | | 2 | | 2,5 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x-3\rvert$ | 3 – x | \| | 3 – x | \| | 3 – x | 0 | x – 3 |
| $\lvert 3x-6\rvert$ | 6 – 3x | 0 | 3x – 6 | \| | 3x – 6 | \| | 3x – 6 |
| $\lvert 5-2x\rvert$ | 2x – 5 | \| | 2x – 5 | 0 | 5 – 2x | \| | 5 – 2x |
| Vế trái | 14 – 6x | \| | 0x + 2 | \| | 4x – 8 | \| | 6x – 14 |

Vậy : + Với $x < 2$ thì $14 - 6x = 8$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$ (thỏa mãn)

+ Với $2 \leq x \leq 2,5$ thì $0x + 2 = 8$ Vô nghiệm

+ Với $2 < x \leq 3$ thì $4x - 8 = 8$ $\Leftrightarrow$ $x = 4$ ( loại )

+ Với $x > 3$ thì $6x - 14 = 8$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{11}{3}$ (thỏa mãn)

Nghiệm của phương trình : $x = 1$ và $x = 3\frac{2}{3}$

**Bài 4.2**: Tìm x, biết: Tìm x, biết: $|x^2 - 9| + |x^2 - 25| = 26$

**Lời giải**

Lập bảng xét GTTĐ :

| $x^2$ | | 9 | | 25 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x^2-9\rvert$ | $9 - x^2$ | 0 | $x^2 - 9$ | \| | $x^2 - 9$ |
| $\lvert x^2-25\rvert$ | $25 - x^2$ | \| | $25 - x^2$ | 0 | $x^2 - 25$ |
| Vế trái | $34 - 2x^2$ | \| | $0x^2 - 16$ | \| | $2x^2 - 34$ |

Với $x^2 \leq 9$ ; $34 - 2x^2 = 26$ $\Leftrightarrow$ $x^2 = 4$ $\Leftrightarrow$ $x = \pm 2$ .

Với $9 < x^2 < 25$ ; $0x^2 - 16 = 26$ Vô nghiệm

Với $x^2 \geq 25$ ; $2x^2 - 34 = 26 \Leftrightarrow x^2 = 30 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{30}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm 2$ và $x = \pm\sqrt{30}$.

**Bài 4.3**: Tìm x, biết: $\dfrac{|5-3x|-|x-1|}{x-3+|3+2x|} = 4$

**Lời giải**

Điều kiện $x - 3 + |3+2x| \neq 0$.

Bạn đọc tự lập bảng xét dấu.

Phương trình tương đương

$|3x-5| - |x-1| - 4|2x+3| - 4x + 12 = 0$ (*)

Xét $x < -\dfrac{3}{2}$ Thì (*) $\Leftrightarrow -3x + 5 + (x - 1) + 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = -28$

$\Leftrightarrow x = -14$ (Thỏa mãn đk)

Xét $-\dfrac{3}{2} \leq x < 1$ Thì (*)

$\Leftrightarrow -3x + 5 + x - 1 - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{7}$ (Thỏa mãn đk)

Xét $1 \leq x < \dfrac{5}{3}$ Thì (*)

$\Leftrightarrow -3x + 5 - (x - 1) - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{8}$ (loại)

Xét $x \geq \dfrac{5}{3}$ Thì (*) $\Leftrightarrow 3x - 5 - (x - 1) - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{5}$ (Loại)

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \left\{-14; \dfrac{2}{7}\right\}$

**Bài 4.4**: Tìm x, biết: $|x + 1|^{2016} + |x + 2|^{2017} = 1$

**Lời giải**

Dễ thấy $x = -2$ và $x = -1$ là nghiệm của phương trình.

* Xét $x < -2$:

Ta có: $x + 1 < -1$ và $x + 2 < 0$. Suy ra: $|x+1| > 1; |x + 2| > 0$

Do đó: $|x+1|^{2016} > 1; |x+2|^{2017} > 0$

Vì thế: $|x+1|^{2016} + |x+2|^{2017} > 1$

Vậy với x < - 2 phương trình vô nghiệm.

* Xét -2 < x < -1:

Ta có: $-1 < x+1 < 0$ và $0 < x+2 < 1$ . Suy ra: $0 < |x+1| < 1$ ; $0 < |x+2| < 1$

Và $|x+1| = -x-1$; $|x+2| = x+2$

Vì thế: $|x+1|^{2016} < |x+1|$ ; $|x+2|^{2017} < |x+2|$

Vậy: $|x+1|^{2016} + |x+2|^{2017} < |x+1| + |x+2| = -x-1+x+2 = 1$

Do đó với -2 < x < -1 phương trình vô nghiệm.

* Xét: x > -1:

Ta có: $x+1 > 0$ và $x+2 > 1$.Suy ra: $|x+1| > 0$ và $|x+2| > 1$.

Vậy: $|x+1|^{2016} + |x+2|^{2017} > 1$

Do đó với x > -1 phương trình vô nghiệm.

**Kết luận:** Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-2; -1\}$

**5. Dạng 5: Xét điều kiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối hàng loạt**:

$|\mathbf{A(x)}| + |\mathbf{B(x)}| + |\mathbf{C(x)}| = \mathbf{D(x)}$   (1)

Điều kiện: $D(x) \geq 0$ kéo theo $A(x) \geq 0; B(x) \geq 0; C(x) \geq 0$

Do vậy (1) trở thành: A(x) + B(x) + C(x) = D(x)

**Bài 5.1**: Tìm $x$, biết: $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$

**Hướng dẫn giải**

$|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$   (1)

Vì $VT \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$, do đó:

$|x+1| = x+1; |x+2| = x+2; |x+3| = x+3$

$(1) \Rightarrow x+1+x+2+x+3 = 4x \Rightarrow x = 6$

**Bài 5.2**: Tìm $x$, biết: $\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x+\frac{1}{6}\right| + \left|x+\frac{1}{12}\right| + \left|x+\frac{1}{20}\right| + ..... + \left|x+\frac{1}{110}\right| = 11x$

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn $\geq 0$ nên vế phải $\geq 0 \Rightarrow 11x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với $x \geq 0$ ta có:

$$\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{6}\right|+\left|x+\frac{1}{12}\right|+\left|x+\frac{1}{20}\right|+.....+\left|x+\frac{1}{110}\right|=11x$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}+x+\frac{1}{6}+x+\frac{1}{12}+x+\frac{1}{20}+.....+x+\frac{1}{110}=11x$$

$$\Rightarrow x=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}(tm)$$

Vậy $x=\frac{10}{11}$

**Bài 5.3**: Tìm $x$, biết: $|x+1|+|2x+5|+|3x+2|=10x$

**Hướng dẫn giải**

Phương trình $|x+1|+|2x+5|+|3x+2|=10x$ có vế trái không âm nên

$10x\ge 0\Rightarrow x\ge 0$ do đó $x + 1 + 2x + 5 + 3x + 2 = 10x \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm x = 2.

**6. Dạng 6**: **Dạng hỗn hợp:**

**Bài 6.1**: Tìm x, biết: $\left||x+3|-8\right|=20$

**Lời giải**

$$\left||x+3|-8\right|=20\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|x+3|=20+8\\|x+3|=-20+8\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|x+3|=28\\|x+3|=-12(VN)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+3=28\\x+3=-28\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=25\\x=-31\end{array}\right.$$

**Bài 6.2**: Tìm x biết $\left|x^2+|x-1|\right|=x^2+2$

**Lời giải**

Vì $x^2+|x-1|>0$ nên $(1)\Rightarrow x^2+|x-1|=x^2+2\Rightarrow|x-1|=2$

+Nếu $x\ge 1$ thì $(*)\Rightarrow x-1=2\Rightarrow x=3$

+Nếu $x<1\Rightarrow x-1=-2\Rightarrow x=-1$

**Bài 6.3:** Tìm $x$, biết $\left|x^2+|x-1|\right|=x^2+2$

**Hướng dẫn giải**

Vì $x^2+|x-1|>0$ nên $(1)\Rightarrow x^2+|x-1|=x^2+2\Rightarrow|x-1|=2$

+Nếu $x\ge 1$ thì $(*)\Rightarrow x-1=2\Rightarrow x=3$

+Nếu $x<1\Rightarrow x-1=-2\Rightarrow x=-1$

**Bài 6.4**: Tìm x, biết: $\left||3x-4|-5\right|-|x+2|=1$

**Hướng dẫn giải**

(1) $\Leftrightarrow$ $\left||3x-4|-5\right|=1+|x+2|$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}|3x-4|-5=1+|x+2| \\ |3x-4|-5=-1-|x+2|\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}|3x-4|-|x+2|=6 \\ |3x-4|+|x+2|=4\end{array}\right.$

a) Với $|3x-4|-|x+2|=6$ ta lập bảng xét giá trị tuyệt đối :

| x | | $-2$ | | $\frac{4}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $|3x-4|$ | $4-3x$ | \| | $4-3x$ | 0 | $3x-4$ |
| $|x+2|$ | $-2-x$ | 0 | $x+2$ | \| | $x+2$ |
| Vế trái | $6-2x$ | \| | $-4x+2$ | \| | $2x-6$ |

Với $x \le -2$ ; $6-2x=6$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$ (thỏa mãn).

Với $-2<x<\frac{4}{3}$ ; $-4x+2=6$ $\Leftrightarrow$ $x=-1$ (thỏa mãn)

Với $x \ge \frac{4}{3}$ ; $2x-6=6$ $\Leftrightarrow$ $x=6$ (thỏa mãn)

b) Với $|3x-4|+|x+2|=4$ lập bảng xét giá trị tuyệt đối :

| x | | $-2$ | | $\frac{4}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $|3x-4|$ | $4-3x$ | \| | $4-3x$ | 0 | $3x-4$ |
| $|x+2|$ | $-2-x$ | 0 | $x+2$ | \| | $x+2$ |
| Vế trái | $2-4x$ | \| | $-2x+6$ | \| | $4x-2$ |

Với $x \le -2$ ; $2-4x=6$ $\Leftrightarrow$ $x = -1$ ( không thỏa mãn).

Với $-2<x<\frac{4}{3}$ ; $-2x+6=4$ $\Leftrightarrow$ $x=1$ (thỏa mãn)

Với $x \ge \frac{4}{3}$ ; $4x-2=4$ $\Leftrightarrow$ $x=\frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1; 0; 1; \frac{3}{2}; 6\right\}$

**<u>7. Dạng 7</u>:** $|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|=\mathbf{0}$

Vận dụng tính chất không âm của giá trị tuyệt đối dẫn đến phương pháp bất đẳng thức.

* Nhận xét: Tổng của các số không âm là một số không âm và tổng đó bằng 0 khi và chỉ khi các số hạng của tổng đồng thời bằng 0.

* Cách giải chung: $|A|+|B|=0$

B1: đánh giá: $\left.\begin{array}{l}|A| \ge 0 \\ |B| \ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow |A|+|B| \ge 0$

B2: Khẳng định: $|A|+|B|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

**Bài 7.1**: Tìm x, y thoả mãn:

$$|3+y|+|2x+y|=0$$

**Hướng dẫn giải**

Vì $|3+y|\ge 0, |2x+y|\ge 0 \Rightarrow |3+y|+|2x+y|\ge 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3+y|=0 \\ |2x+y|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=-3 \end{cases}$$

**Bài 7.2**: Tìm x, y thoả mãn:

a) $\left|5-\dfrac{3}{4}x\right|+\left|\dfrac{2}{7}y-3\right|=0$ b) $|x-2007|+|y-2008|=0$

**Hướng dẫn giải**

a) $\left|5-\dfrac{3}{4}x\right|\ge 0, \left|\dfrac{2}{7}y-3\right|\ge 0$

Do đó:

$$\left|5-\frac{3}{4}x\right|+\left|\frac{2}{7}y-3\right|=0 \Rightarrow \begin{cases} 5-\dfrac{3}{4}x=0 \\ \dfrac{2}{7}y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{20}{3} \\ y=\dfrac{21}{2} \end{cases}$$

a) $|x-2007|\ge 0, |y-2008|\ge 0$

Do đó:

$$|x-2007|+|y-2008|=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2007=0 \\ y-2008=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2007 \\ y=2008 \end{cases}$$

**Bài 7.3**: Tìm $x, y, z$ biết: $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|y+\dfrac{2}{3}\right|+\left|x^2+xz\right|=0$

**Hướng dẫn giải**

a) $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|y+\dfrac{2}{3}\right|+\left|x^2+xz\right|=0$, áp dụng tính chất $|A|\ge 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|x-\dfrac{1}{2}\right|=0 \\ \left|y+\dfrac{2}{3}\right|=0 \\ \left|x^2+xz\right|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-\dfrac{1}{2}=0 \\ y+\dfrac{2}{3}=0 \\ x(x+z)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{2}{3} \\ z=-x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

* **<u>Chú ý1</u>**: Bài toán có thể cho dưới dạng $|A|+|B|\le 0$ nhưng kết quả không thay đổi

* Cách giải: $|A|+|B|\le 0$ (1)

$$\left.\begin{matrix} |A|\ge 0 \\ |B|\ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |A|+|B|\ge 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow |A|+|B|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

$\boxed{\textbf{Bài 7.3}}$: Tìm x, y thoả mãn:

a) $|5x+1|+|6y-8|\le 0$ b) $|x+2y|+|4y-3|\le 0$ c) $|x-y+2|+|2y+1|\le 0$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $|5x+1|+|6y-8|\le 0$ (1)

$$\left.\begin{matrix} |5x+1|\ge 0 \\ |6y-8|\ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |5x+1|+|6y-8|\ge 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow |5x+1|+|6y-8|\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+1=0 \\ 6y-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

b) Ta có: $|x+2y|+|4y-3|\le 0$ (1)

$$\left.\begin{matrix} |x+2y|\ge 0 \\ |4y-3|\ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x+2y|+|4y-3|\ge 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow |x+2y|+|4y-3|\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ 4y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{8}{3} \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

c) Ta có: $|x-y+2|+|2y+1|\le 0$ (1)

$$\left.\begin{matrix} |x-y+2|\ge 0 \\ |2y+1|\ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x-y+2|+|2y+1|\ge 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow |x-y+2|+|2y+1|\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2=0 \\ 2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

**Bài 7.4**: Tìm x, y thoả mãn:

a) $|12x+8|+|11y-5|\le 0$ b) $|3x+2y|+|4y-1|\le 0$ c) $|x+y-7|+|xy-10|\le 0$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $|12x+8|+|11y-5|\le 0$ (1)

$\left.\begin{array}{l} |12x+8|\ge 0 \\ |11y-5|\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |12x+8|+|11y-5|\ge 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow |12x+8|+|11y-5|\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x+8=0 \\ 11y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{5}{11} \end{cases}$

b) Ta có: $|3x+2y|+|4y-1|\le 0$ (1)

$\left.\begin{array}{l} |3x+2y|\ge 0 \\ |4y-1|\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |3x+2y|+|4y-1|\ge 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow |3x+2y|+|4y-1|\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=0 \\ 4y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{6} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

c) Ta có: $|x+y-7|+|xy-10|\le 0$ (1)

$\left.\begin{array}{l} |x+y-7|\ge 0 \\ |xy-10|\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |x+y-7|+|xy-10|\ge 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow |x+y-7|+|xy-10|\le 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-7=0 \\ xy-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7-y \\ y(7-y)-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7-y \\ y^2-7y+10=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(2;5);(5;2).$

* **Chú ý 2**: Do tính chất không âm của giá trị tuyệt đối tương tự như tính chất không âm của luỹ thừa bậc chẵn nên có thể kết hợp hai kiến thức ta cũng có các bài tương tự.

**Bài 7.5**: Tìm $x$ và $y$ thỏa mãn $|2x-2011|+(3y+2012)^{2012}=0$

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét $\begin{cases} |2x-2011|\ge 0 \forall x \\ (3y+2012)^{2012}\ge 0 \forall y \end{cases}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 2x-2011=0 \\ 3y+2012=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2011}{2} \\ y=-\dfrac{2012}{3} \end{cases}$

**Bài 7.6**: Tìm tất cả các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $(2x-y+7)^{2012}+|x-3|^{2013}\le 0$

**Hướng dẫn giải**

Ta có $2012$ là số tự nhiên chẵn $\Rightarrow (2x-y+7)^{2012}\ge 0$

Và $|x-3|\ge 0 \Rightarrow |x-3|^{2013}\ge 0$

Do đó, từ $(2x-y+7)^{2012}+|x-3|^{2013}\le 0$ suy ra: $(2x-y+7)^{2012}=0$ & $|x-3|^{2013}=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x-y+7=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=13 \end{cases}$

**Bài 7.7**: Tìm x, y thoả mãn :

$(x-1)^{2016}+(2y-1)^{2016}+|x+2y-z|^{2017}=0$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $(x-1)^{2016}\ge 0\forall x$; $(2y-1)^{2016}\ge 0\forall y$; $|x+2y-z|^{2017}\ge 0\forall x,y,z$

$\Rightarrow (x-1)^{2016}+(2y-1)^{2016}+|x+2y-z|^{2017}=0$. Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^{2016}=0 \\ (2y-1)^{2016}=0 \\ |x+2y-z|^{2017}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ 1+2.\dfrac{1}{2}-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=2 \end{cases}$$

**Bài 7.8**: Tìm x, y thoả mãn : $(x-1)^2+(y+3)^2=0$

**Hướng dẫn giải**

Vì $(x-1)^2\ge 0,(y+3)^2\ge 0$ nên $(x-1)^2+(y+3)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2=0 \\ (y+3)^2=0 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=-3.$

**8. Dạng 8:** $|A|+|B|=|A+B|$

* **Cách giải**: Sử dụng tính chất: $|a|+|b|\ge |a+b|$

Từ đó ta có: $|a|+|b|=|a+b| \Leftrightarrow a.b\ge 0$

**Bài 8.1**: Tìm x, biết:

a) $|x+5|+|3-x|=8$ b) $|x-2|+|x-5|=3$ c) $|3x-5|+|3x+1|=6$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $|x+5|+|3-x|\ge|x+5+3-x|=8$

Do đó: $|x+5|+|3-x|=8\Rightarrow(x+5)(3-x)\ge0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+5\ge0\\3-x\ge0\end{cases}\\\begin{cases}x+5\le0\\3-x\le0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow-5\le x\le3$

b) Ta có: $|x-2|+|x-5|=|x-2|+|5-x|\ge|x-2+5-x|=3$

Do đó: $|x-2|+|x-5|=3\Rightarrow(x-2)(5-x)\ge0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2\ge0\\5-x\ge0\end{cases}\\\begin{cases}x-2\le0\\5-x\le0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow2\le x\le5$

c) Ta có: $|3x-5|+|3x+1|=|3x-5|+|-3x-1|\ge|3x-5-3x-1|=6$

Do đó: $|3x-5|+|3x+1|=3\Rightarrow(3x-5)(-3x-1)\ge0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-5\ge0\\-3x-1\ge0\end{cases}\\\begin{cases}3x-5\le0\\-3x-1\le0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le x\le\frac{5}{3}$

**Bài 8.2**: Tìm x, biết:

a) $|5x+1|+|3-2x|=|4+3x|$ b) $|x+2|+|3x-1|+|x-1|=3$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $|5x+1|+|3-2x|\ge|5x+1+3-2x|=|4+3x|$

Do đó:

$$|5x+1|+|3-2x|=|4+3x|\Rightarrow(5x+1)(3-2x)\ge0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x+1\ge0\\3-2x\ge0\end{cases}\\\begin{cases}5x+1\le0\\3-2x\le0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow-\frac{1}{5}\le x\le\frac{3}{2}$$

a) Ta có: $|x+2|+|3x-1|+|x-1|=3\Rightarrow3=\left(|x+2|+|1-x|\right)+|3x-1|\ge|x+2+1-x|+0=3$

Do đó: $|x+2|+|3x-1|+|x-1|=3 \Rightarrow \begin{cases}(x+2)(1-x)\ge 0\\ 3x-1\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2\ge 0\\ 1-x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+2\le 0\\ 1-x\le 0\end{cases}\end{array}\right.\\ x\ge \dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\le x\le 1$

**<u>II Tìm cặp giá trị ( x; y ) nguyên thoả mãn đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối:</u>**

**<u>1. Dạng 1</u>**: $|A|+|B|=m$ với $m\ge 0$

* **<u>Cách giải</u>**:

* Nếu m = 0 thì ta có $|A|+|B|=0 \Leftrightarrow \begin{cases}A=0\\ B=0\end{cases}$

* Nếu m > 0 ta giải như sau:

$|A|+|B|=m$ (1)

Do $|A|\ge 0$ nên từ (1) ta có: $0\le |B|\le m$ từ đó tìm giá trị của $|B|$ và $|A|$ tương ứng .

$\boxed{\textbf{Bài 1.1}}$: Tìm cặp số nguyên ( x, y) thoả mãn:

a) $|x-2007|+|x-2008|=0$ b) $|x-y-2|+|y+3|=0$ c) $(x+y)^2+2|y-1|=0$

**Hướng dẫn giải**

a, Vì $\begin{cases}|x-2007|\ge 0\\ |x-2008|\ge 0\end{cases} \Rightarrow |x-2007|+|x-2008|=0 \Rightarrow \begin{cases}x-2007=0\\ x-2008=0\end{cases}$

Do đó không tồn tại x thỏa mãn bài toán.

b, Vì $\begin{cases}|x-y-2|=0\\ |y+3|=0\end{cases} \Rightarrow |x-y-2|+|y+3|\ge 0 \Rightarrow \begin{cases}x-y-2=0\\ y+3=0\end{cases} \Rightarrow x=1, y=-3.$

c, Vì $\begin{cases}(x+y)^2\ge 0\\ |y-1|\ge 0\end{cases} \Rightarrow (x+y)^2+|y-1|=0 \Rightarrow \begin{cases}x+y=0\\ y-1=0\end{cases} \Rightarrow x=-1, y=1.$

$\boxed{\textbf{Bài 1.2}}$: Tìm cặp số nguyên ( x, y) thoả mãn:

a) $|x-3y|^5+|y+4|=0$ b) $|x-y-5|+(y-3)^4=0$ c) $|x+3y-1|+3|y+2|=0$

**Hướng dẫn giải**

a, Vì $\begin{cases}|x-3y|^5\ge 0\\ |y+4|\ge 0\end{cases} \Rightarrow |x-3y|^5+|y+4|=0 \Rightarrow \begin{cases}x-3y=0\\ x+4=0\end{cases} \Rightarrow x=-4, y=-\dfrac{4}{3}.$

b, Vì $\begin{cases}|x-y-5|\ge 0\\ (y-3)^4\ge 0\end{cases} \Rightarrow |x-y-5|+(y-3)^4\ge 0 \Rightarrow \begin{cases}x-y-5=0\\ y-3=0\end{cases} \Rightarrow x=8, y=3.$

c, Vì $\begin{cases}|x+3y-1|\ge 0\\ |y+2|\ge 0\end{cases} \Rightarrow |x+3y-1|+3|y+2|\ge 0 \Rightarrow \begin{cases}|x+3y-1|=0\\ y+2=0\end{cases} \Rightarrow x=7, y=-2.$

**Bài 1.3**: Tìm cặp số nguyên (x, y ) thoả mãn:

a) $|x+4|+|y-2|=3$ b) $|2x+1|+|y-1|=4$

**Hướng dẫn giải**

a, Vì $|x+4|\ge 0 \Rightarrow |y-2|\le 3 \Rightarrow -3\le y-2\le 3 \Rightarrow -1\le y\le 5 \Rightarrow y\in\{-1;0;1;2;3;4;5\}$

Thay y vào phương trình ta tìm được x.

b, Vì $|2x+1|\ge 0 \Rightarrow |y-1|\le 4 \Rightarrow -4\le y-1\le 4 \Rightarrow -3\le y\le 5$

**Bài 1.4**: Tìm các cặp số nguyên ( x, y ) thoả mãn:

a) $y^2=3-|2x-3|$ b) $y^2=5-|x-1|$

**Hướng dẫn giải**

a, Vì $y^2\ge 0 \Rightarrow 3-|2x-3|\ge 0 \Rightarrow -3\le 2x-3\le 3 \Rightarrow 0\le x\le 3 \Rightarrow x\in\{0;1;2;3\}$

Thay x vào phương trình ta tìm được y với điều kiện y nguyên.

a, Vì $y^2\ge 0 \Rightarrow 5-|x-1|\ge 0 \Rightarrow -5\le x-1\le 5 \Rightarrow -4\le x\le 6$

Thay x vào phương trình ta tìm được y với điều kiện y nguyên.

**2. Dạng 2**: $|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|<\mathbf{m}$ với m > 0.

* **Cách giải**: Đánh giá

$|A|+|B|<m$ (1)

$\left.\begin{matrix}|A|\ge 0\\ |B|\ge 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow |A|+|B|\ge 0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0\le |A|+|B|<m$ từ đó giải bài toán $|A|+|B|=k$ như dạng 1 với $0\le k<m$

**Bài 2.1**: Tìm các cặp số nguyên ( x, y ) thoả mãn:

a) $|x|+|y|\le 3$ b) $|x+5|+|y-2|\le 4$ c) $|2x+1|+|y-4|\le 3$ d) $|3x|+|y+5|\le 4$

**Hướng dẫn giải**

a, Vì $\begin{cases}|x|+|y|\le 3\\ |x|\ge 0\\ |y|\ge 0\end{cases} \Rightarrow |x|+|y|=0 \Rightarrow 0\le |x|+|y|\le 3$

TH1 : $|x|+|y|=0$

TH2 : $|x|+|y|=1 \Rightarrow \begin{cases}|x|\ge 0\\ 0\le |y|\le 1\end{cases} \Rightarrow (x,y)=(0;1),(0;-1),(1;0),(-1;0)$

TH3 : $|x|+|y|=2 \Rightarrow \begin{cases}|x|\ge 0\\ 0\le |y|\le 2\end{cases} \Rightarrow (x,y)=(0;2),(0;-2),(2;0),(-2;0),(1;1),(-1;-1)$

**Bài 2.2**: Tìm các cặp số nguyên ( x, y ) thoả mãn:

a) $5|x+1|+|y-2|\le 7$ b) $4|2x+5|+|y+3|\le 5$ c) $3|x+5|+2|y-1|\le 3$ d) $3|2x+1|+4|2y-1|\le 7$

**<u>3. Dạng 3</u>: Sử dụng bất đẳng thức: $|a|+|b|\ge |a+b|$ xét khoảng giá trị của ẩn số.**

**<u>Bài 3.1</u>**: Tìm các số nguyên x thoả mãn:

a) $|x-1|+|4-x|=3$ b) $|x+2|+|x-3|=5$ c) $|2x+5|+|2x-3|=8$

**Hướng dẫn giải**

a) $|x-1|+|4-x|\ge |x-1+4-x|=3$

Do đó $|x-1|+|4-x|=3\Rightarrow (x-1)(4-x)\ge 0\Rightarrow 1\le x\le 4$

b) $|x+2|+|x-3|=|x+2|+|3-x|\ge |x+2+3-x|=5$

Do đó $|x+2|+|x-3|=5\Rightarrow (x+2)(3-x)\ge 0\Rightarrow -2\le x\le 3$

c) $|2x+5|+|2x-3|=|2x+5|+|3-2x|\ge |2x+5+3-2x|=8$

Do đó $|2x+5|+|2x-3|=5\Rightarrow (2x+5)(3-2x)\ge 0\Rightarrow -\dfrac{5}{3}\le x\le \dfrac{3}{2}$

**<u>Bài 3.2</u>**: Tìm các cặp số nguyên ( x, y) thoả mãn đồng thời các điều kiện sau.

a) x + y = 4 và $|x+2|+|y|=6$ b) x + y = 4 và $|2x+1|+|y-x|=5$

c) x – y = 3 và $|x|+|y|=3$ d) x – 2y = 5 và $|x|+|2y-1|=6$

**Hướng dẫn giải**

a) $|x+2|+|y|\ge |x+2+y|=6$

Do đó $|x+2|+|y|=3\Rightarrow \begin{cases}(x+2)y\ge 0\\ x+y=4\end{cases}$

b) $|2x+1|+|y-x|\ge |2x+1+y-x|=5$

Do đó $|2x+1|+|y-1|=5\Rightarrow \begin{cases}(2x+1)(y-1)\ge 0\\ x+y=4\end{cases}$

c) $|x|+|y|=|x|+|-y|\ge |x-y|=3$

Do đó $|x|+|y|=3\Rightarrow \begin{cases}-xy\ge 0\\ x-y=3\end{cases}$

d) $|x|+|2y-1|=|x|+|1-2y|\ge |x+1-2y|=6$

Do đó $|x|+|2y-1|=6\Rightarrow \begin{cases}x(1-2y)\ge 0\\ x-2y=5\end{cases}$

**<u>4. Dạng 4</u>: Kết hợp tính chất không âm của giá trị tuyệt đối và dấu của một tích**:

* **<u>Cách giải</u>** : $A(x).B(x)=|A(y)|$

Đánh giá: $|A(y)|\ge 0\Rightarrow A(x).B(x)\ge 0\Rightarrow n\le x\le m$ tìm được giá trị của x.

**Bài 4.1:** Tìm các số nguyên x thoả mãn:

a) $(x+2)(x-3)<0$ b) $(2x-1)(2x-5)<0$

**Hướng dẫn giải**

$$a)\ (x+2)(x-3)<0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2>0 \\ x-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2<0 \\ x-3>0 \end{cases} (VL) \end{array}\right. \Rightarrow -2<x<3$$

$$b)\ (2x-1)(2x-5)<0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1>0 \\ 2x-5<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1<0 \\ 2x-5>0 \end{cases} (VL) \end{array}\right. \Rightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$$

**Bài 4.2:** Giải bất phương trình (2x – 9)(1945 + x) > 0.

* *Tìm cách giải* : Với tích A.B > 0 xảy ra khi A và B cùng dấu . Do đó A > 0 và B > 0 hoặc A < 0 và B < 0. Ta có cách giải :

**Hướng dẫn giải**

Cách 1: Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-9>0 \\ 1945+x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-9<0 \\ 1945+x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x>9 \\ x>-1945 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x<9 \\ x<-1945 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>4,5 \\ x>-1945 \end{cases} \\ \begin{cases} x<4,5 \\ x<-1945 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4,5 \\ x<-1945 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là x > 4,5 ; x < – 1945.

* *Chú ý* : Bằng việc lập bảng xét dấu của từng thừa số của tích là nhị thức bậc nhất ta có cách 2 : Lập bảng xét dấu :

| x | | – 1945 | | 4,5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2x – 9 | – | 0 | – | \| | + |
| 1945 + x | – | \| | + | 0 | + |
| (2x – 9) (1945 + x) | + | 0 | – | 0 | + |

Vậy nghiệm của bất phương trình : x > 4,5 hoặc x < – 1945.

**Bài 4.2**: Tìm các cặp số nguyên ( x, y ) thoả mãn:

a) $(2-x)(x+1)=|y+1|$ b) $(x+3)(1-x)=|y|$ c) $(x-2)(5-x)=|2y+1|+2$

**Hướng dẫn giải**

a) $(2-x)(x+1)=|y+1| \Rightarrow (2-x)(x+1)\ge 0 \Rightarrow -1\le x\le 2 \Rightarrow x\in\{-1;0;1;2\}$

Thay vào ta tìm được y.

b) $(x+3)(1-x)=|y| \Rightarrow (x+3)(1-x)\geq 0 \Rightarrow -3\leq x\leq 1 \Rightarrow x\in\{-3;-2;-1;0;1\}$

Thay vào ta tìm được y.

c) $(x-2)(5-x)=|2y+1|+2 \Rightarrow (x-2)(5-x)\geq 0 \Rightarrow 2\leq x\leq 5 \Rightarrow x\in\{2;3;4;5\}$

Thay vào ta tìm được y.

**<u>5. Dạng 5</u>: Sử dụng phương pháp đối lập hai vế của đẳng thức:**

* **<u>Cách giải</u>**: Tìm x, y thoả mãn đẳng thức: A = B

Đánh giá: $A\geq m$ (1)

Đánh giá: $B\leq m$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $A=B \Leftrightarrow \begin{cases} A=m \\ B=m \end{cases}$

**<u>Bài 5.1</u>**: Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn:

a, $|x+2|+|x-1|=3-(y+2)^2$ b, $|x-5|+|1-x|=\dfrac{12}{|y+1|+3}$ c, $|y+3|+5=\dfrac{10}{(2x-6)^2+2}$

**Hướng dẫn giải**

a, Vì $|x+2|+|1-x|\geq |x+2+1-x|=3$

Mặt khác: $3-(y+2)^2\leq 3$ , Để $|x+2|+|x-1|=3-(y+2)^2 \Rightarrow \begin{cases} |x+2|+|x-1|=3 \\ 3-(y+2)^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\leq x\leq 1 \\ y=-2 \end{cases}$

$(x;y)=(-2;-2),(-1;-2),(0;-2),(1;-2).$

b, Vì $|x-5|+|1-x|\geq |x-5+1-x|=4$

Mặt khác: $\dfrac{12}{|y+1|+3}\leq \dfrac{12}{3}=4$ , Để $|x-5|+|1-x|=\dfrac{12}{|y+1|+3} \Rightarrow \begin{cases} |x-5|+|1-x|=4 \\ \dfrac{12}{|y+1|+3}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\leq x\leq 5 \\ y=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow (x,y)=(1;-1),(2;-1),(3;-1),(4;-1),(5;-1).$

c, Vì $|y+3|+5\geq 5$

Mặt khác: $\dfrac{10}{(2x-6)^2+2}\leq \dfrac{10}{2}=5$ ,

Để $|y+3|+5=\dfrac{10}{(2x-6)^2+2} \Rightarrow \begin{cases} |y+3|+5=5 \\ \dfrac{10}{(2x-6)^2+2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=3, y=-3.$

**<u>Bài 5.2</u>**: Tìm các cặp số nguyên ( x, y ) thoả mãn:

a) $|x+3|+|x-1|=\dfrac{16}{|y-2|+|y+2|}$ b) $|x-2y-1|+5=\dfrac{10}{|y-4|+2}$

**Hướng dẫn giải**

a, Vì $|x+3|+|x-1|=|x+3|+|1-x|\geq |x+3+1-x|=4$

Mặt khác: $|y-2|+|y+2|=|2-y|+|y+2|\ge|2-y+y+2|=4\Rightarrow\dfrac{16}{|y-2|+|y+2|}\le 4$ ,

Để $|x+3|+|x-1|=\dfrac{16}{|y-2|+|y+2|}\Rightarrow\begin{cases}|x+3|+|x-1|=4\\ \dfrac{16}{|y-2|+|y+2|}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\le x\le 1\\ -2\le y\le 2\end{cases}, x,y\in Z$

b, Vì $|x-2y-1|+5\ge 5$

Mặt khác: $\dfrac{10}{|y-4|+2}\le\dfrac{10}{2}=5$ ,

Để $|x-2y-1|+5=\dfrac{16}{|y-4|+2}\Rightarrow\begin{cases}|x-2y-1|+5=5\\ \dfrac{10}{|y-4|+2}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9\\ y=4\end{cases}$

**Bài 5.3**: Tìm các cặp số nguyên ( x, y ) thoả mãn:

a) $(x+y-2)^2+7=\dfrac{14}{|y-1|+|y-3|}$     b) $(x+2)^2+4=\dfrac{20}{3|y+2|+5}$

**Hướng dẫn giải**

a, Vì $(x+y-2)^2+7\ge 7$

Mặt khác: $|y-1|+|y-3|=|y-1|+|3-y|\ge|y-1+3-y|=2\Rightarrow\dfrac{14}{|y-1|+|y-3|}\le 7$ ,

Để $(x+y-2)^2+7=\dfrac{14}{|y-1|+|y-3|}\Rightarrow\begin{cases}(x+y-2)^2+7=7\\ \dfrac{14}{|y-1|+|y-3|}=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=2\\ 1\le y\le 3\end{cases}$

$\Rightarrow(x,y)=(1;1),(0;2),(-1;3).$

b, Vì $(x+2)^2+4\ge 4$

Mặt khác: $3|y+2|+5\ge 5\Rightarrow\dfrac{20}{3|y+2|+5}\le 4$ ,

Để $(x+2)^2+4=\dfrac{20}{3|y+2|+5}\Rightarrow\begin{cases}(x+2)^2+4=4\\ \dfrac{20}{3|y+2|+5}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-2\end{cases}$

**Bài 5.4**: Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên $x,y,z$ thỏa mãn :

$$|x-y|+|y-z|+|z-x|=2017$$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $|x-y|+|y-z|+|z-x|=|x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$

Với mọi số nguyên $x$ ta lại có $|x|+x=\begin{cases}2x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

Suy ra $|x|+x$ luôn là số chẵn với mọi số nguyên $x$

Từ đó ta có: $\begin{cases}|x-y|+(x-y)\\ |y-z|+(y-z)\\ |z-x|+(z-x)\end{cases}$ là các số chẵn với mọi số nguyên $x,y,z$

Suy ra $|x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$ là một số chẵn với mọi số nguyên $x,y,z$

Hay $|x-y|+|y-z|+|z-x|$ là một số chẵn với mọi số nguyên $x,y,z$

Do đó, không thể tìm được số nguyên $x,y,z$ thỏa mãn:

$$|x-y|+|y-z|+|z-x|=2017$$

**III – Rút gọn biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối:**

- Cách giải chung: Xét điều kiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối rồi thu gọn:

**Bài 1**: Rút gọn biểu thức sau với $3{,}5\le x\le 4{,}1$

a) $A=|x-3{,}5|+|4{,}1-x|$ b) $B=|-x+3{,}5|+|x-4{,}1|$

**Hướng dẫn giải**

a) $A=|x-3{,}5|+|4{,}1-x|=x-3{,}5+4{,}1-x=0{,}6$

b) $B=|-x+3{,}5|+|x-4{,}1|=-(-x+3{,}5)+[-(x-4{,}1)]=x-3{,}5-x+4{,}1=0{,}6$

**Bài 2**: Rút gọn biểu thức sau khi x < - 1,3:

a) $A=|x+1{,}3|-|x-2{,}5|$ b) $B=|-x-1{,}3|+|x-2{,}5|$

**Hướng dẫn giải**

a) $A=|x+1{,}3|-|x-2{,}5|=-(x+1{,}3)+(x-2{,}5)=-3{,}8$

b) $B=|-x-1{,}3|+|x-2{,}5|=-x-1{,}3-x+2{,}5=-2x+1{,}2$

**Bài 3**: Rút gọn biểu thức:

a, $|2x-4|+|x-3|$ b, $|x-5|+|x+6|$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có bảng sau :

| x | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2x - 4 | - | 0 | + | \| | + |
| x - 3 | - | \| | - | 0 | + |

Khi đó ta có :

Nếu $x<2\Rightarrow |2x-4|+|x-3|=(4-2x)+(3-x)=-3x+7$

Nếu $2 \le x < 3 \Rightarrow |2x-4|+|x-3| = 2x-4+3-x = x-1$

Nếu $x \ge 3 \Rightarrow |2x-4|+|x-3| = 2x-4+x-3 = 3x-7$

b,

Ta có bảng sau :

| x | | -6 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| x - 5 | - | \| | - | 0 | + |
| x + 6 | - | 0 | + | \| | + |

Khi đó ta có :

Nếu $x < -6 \Rightarrow |x-5|+|x+6| = 5-x-x-6 = -2x-1$

Nếu $-6 \le x < 5 \Rightarrow |x-5|+|x+6| = 5-x+x+6 = 11$

Nếu $x \ge 5 \Rightarrow |x-5|+|x+6| = x-5+x+6 = 2x+1$

**Bài 4**: Rút gọn biểu thức khi $\frac{-3}{5} < x < \frac{1}{7}$

a) $A = \left|x - \frac{1}{7}\right| - \left|x + \frac{3}{5}\right| + \frac{4}{5}$ b) $B = \left|-x + \frac{1}{7}\right| + \left|-x - \frac{3}{5}\right| - \frac{2}{6}$

**Hướng dẫn giải**

a) $A = \left|x - \frac{1}{7}\right| - \left|x + \frac{3}{5}\right| + \frac{4}{5} = -\left(x - \frac{1}{7}\right) - \left(x + \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5} = -2x + \frac{1}{7}$

b) $B = \left|-x + \frac{1}{7}\right| + \left|-x - \frac{3}{5}\right| - \frac{2}{6} = \left(-x + \frac{1}{7}\right) - \left(-x - \frac{3}{5}\right) - \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{3}{5} - \frac{1}{3}$

**<u>IV.Tính giá trị biểu thức</u>**:

**Bài 1**: a) Tính giá trị của biểu thức $B = 2x^2 - 3x + 1$ với $|x| = \frac{1}{2}$

b) Tính giá trị của biểu thức: $6x^2 + 5x - 2$ tại $x$ thỏa mãn $|x-2| = 1$

**Hướng dẫn giải**

a) Vì $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

Với $x = \frac{1}{2}$ thì $A = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3.\frac{1}{2} + 1 = 0$

Với $x = -\frac{1}{2}$ thì $A = 2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3.\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 3$

Vậy $A = 0$ với $x = \frac{1}{2}$ và $A = 3$ với $x = -\frac{1}{2}$

b) Ta có:

$$\left|x-2\right|=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=1\\x-2=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$$

Thay tại $x=1\Rightarrow$ biểu thức là $6.1^2+5.1-2=9$

Thay tại $x=3$ giá trị biểu thức là $6.3^2+5.3-2=67$

**Bài 2**: Tính giá trị của biểu thức: $P=\left|a-\frac{1}{2014}\right|+\left|a-\frac{1}{2016}\right|$, với $a=\frac{1}{2015}$

**Hướng dẫn giải**

Thay $a=\frac{1}{2015}$ vào biểu thức s $P=\left|\frac{1}{2015}-\frac{1}{2014}\right|+\left|\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right|$

Ta có:

$$P=\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}$$

$$P=\frac{1}{2014}-\frac{1}{2016}=\frac{2016-2014}{2014.2016}$$

$$P=\frac{2}{2014.2016}=\frac{1}{1007.2016}=\frac{1}{2030112}$$

**Bài 3:** Tính giá trị của biểu thức sau: $A=\frac{2x^2+3x-1}{3x-2}$ với $\left|x-1\right|=\frac{2}{3}$

**Hướng dẫn giải**

$$\left|x-1\right|=\frac{2}{3}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=\frac{2}{3}\Rightarrow x=\frac{5}{3}\Rightarrow A=\frac{14}{27}\\x-1=-\frac{2}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{3}\Rightarrow A=-\frac{2}{9}\end{array}\right.$$

**Bài 4:** Cho biểu thức : $P=\left|3x-3\right|+2x+1$

a) Rút gọn P
b) Tìm giá trị của $x$ để $P=6$

**Hướng dẫn giải**

a) Với $x\ge 1\Rightarrow P=5x-2$
Với $x<1\Rightarrow P=-x+4$

b) Với $x\ge 1\Rightarrow P=5x-2=6\Leftrightarrow x=\frac{8}{5}(tm)$

Với $x<1\Rightarrow P=-x+4=6\Rightarrow x=-2(tm)$

Vậy $P=6$ khi $x=\frac{8}{5}\vee x=-2$

**Bài 5:** Tính giá trị của biểu thức $C = 2x^5 - 5y^3 + 2015$ tại $x, y$ thỏa mãn:

$$|x-1| + (y+2)^{20} = 0$$

**Hướng dẫn giải**

Do $|x-1| \geq 0; (y+2)^{20} \geq 0 \Rightarrow |x-1| + (y+2)^{20} \geq 0$ với mọi $x, y$

Kết hợp $|x-1| + (y+2)^{20} = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = 0 \\ (y+2)^{20} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Giá trị của biểu thức $C = 2x^5 - 5y^3 + 2015$ tại $x = 1, y = -2$ là:

$C = 2.1^5 - 5.(-2)^3 + 2015 = 2057$

Vậy $C = 2057$

**V.Tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của một biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối:**

**1. Dạng 1: Sử dụng tính chất không âm của giá trị tuyệt đối:**

* Cách giải chủ yếu là từ tính chất không âm của giá trị tuyệt đối vận dụng tính chất của bất đẳng thức để đánh giá giá trị của biểu thức:

**Bài 1.1**: Tìm giá trị nhỏ nhất các biểu thức sau:

$a)\ \left|x + \frac{1}{2}\right|$ $\qquad\qquad$ $b)\ \left|x - \frac{1}{3}\right| + 2.$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $\left|x + \frac{1}{2}\right| \geq 0$

Do đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|x + \frac{1}{2}\right|$ là 0

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|x + \frac{1}{2}\right|$ là 0 đạt được khi $x + \frac{1}{2} = 0$ hay $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|x + \frac{1}{2}\right|$ là 0 khi $x = -\frac{1}{2}$.

b) Ta có: $\left|x - \frac{1}{3}\right| \geq 0$

Suy ra: $\left|x - \frac{1}{3}\right| + 2 \geq 2$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|x - \frac{1}{3}\right| + 2$ là 2 đạt được khi $x - \frac{1}{3} = 0$ hay $x = \frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|x - \frac{1}{3}\right| + 2$ là 0 khi $x = \frac{1}{3}$

**Bài 1.2**: Tìm giá trị lớn nhất các biểu thức sau:

a) $-|3x+1|$ b) $6-|x+2|$.

c) $\dfrac{1}{|x+6|+2}$ d) $\dfrac{3+2|x+1|}{1+|x+1|}$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $-|3x+1| \le 0$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $-|3x+1|$ là $0$ đạt được khi $3x+1=0$ hay $x=-\dfrac{1}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của $-|3x+1|$ là 0 khi $x=-\dfrac{1}{3}$

b) Ta có: $-|x+2| \le 0$

Suy ra: $6-|x+2| \le 6$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $6-|x+2|$ là $6$ đạt được khi $x+2=0$ hay $x=-2$

Vậy giá trị lớn nhất của $6-|x+2|$ là 6 khi $x=-2$

c) Ta có: $|x+6|+2 \ge 2$

Suy ra: $\dfrac{1}{|x+6|+2} \le \dfrac{1}{2}$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $\dfrac{1}{|x+6|+2}$ là $\dfrac{1}{2}$ đạt được khi $x+6=0$ hay $x=-6$

Vậy giá trị lớn nhất của $\dfrac{1}{|x+6|+2}$ là $\dfrac{1}{2}$ khi $x=-6$

d) Ta có: $\dfrac{3+2|x+1|}{1+|x+1|} = \dfrac{1+2(1+|x+1|)}{1+|x+1|} = \dfrac{1}{1+|x+1|}+2$

Do: $1+|x+1| \ge 1$. Suy ra: $\dfrac{1}{1+|x+1|}+2 \le 3$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $\dfrac{3+2|x+1|}{1+|x+1|}$ là $3$ đạt được khi $x+1=0$ hay $x=-1$

Vậy giá trị lớn nhất của $\dfrac{3+2|x+1|}{1+|x+1|}$ là 3 khi $x=-1$

**Bài 1.3**: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{1945-|2x-9|}{2015}$

**Hướng dẫn giải**

Ta luôn có: $\forall x, |2x-9| \ge 0$ do đó $1945-|2x-9| \le 1945$ và

$A=\dfrac{1945-|2x-9|}{2015} \le \dfrac{1945}{2015}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x-9=0 \Leftrightarrow x=4{,}5$

Do đó $\max A = \dfrac{1945}{2015}=\dfrac{389}{403} \Leftrightarrow x=4{,}5$

**Bài 1.4**: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $P = 8 - \frac{|6+2y|}{5}$ ; b) $Q = \frac{2014}{|7y-5|+60} - \frac{1954}{60}$;

**Hướng dẫn giải**

a) $\max P = 8 \Leftrightarrow y = -3$

b) $\forall y$ ta có $|7y-5| \ge 0 \Leftrightarrow |7y-5| + 60 \ge 60 \Leftrightarrow \frac{1}{|7y-5|+60} \le \frac{1}{60}$

$$\Leftrightarrow \frac{2014}{|7y-5|+60} \le \frac{2014}{60} \Leftrightarrow \frac{2014}{|7y-5|+60} - \frac{1954}{60} \le \frac{2014}{60} - \frac{1954}{60} = 1$$

Vậy $\max Q = 1 \Leftrightarrow y = \frac{5}{7}$.

**Bài 1.5**: Tìm GTLN của:

a, $C = \frac{4}{5} + \frac{20}{|3x+5|+|4y+5|+8}$ b, $D = -6 + \frac{24}{2|x-2y|+3|2x+1|+6}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có: $|3x+5|+|4y+5|+8 \ge 8 \Rightarrow \frac{20}{|3x+5|+|4y+5|+8} \le \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \Rightarrow C \le \frac{4}{5} + \frac{5}{2} = \frac{33}{10}$

Hay $MaxC = \frac{33}{10}$, Dấu bằng khi $\begin{cases} 3x+5=0 \\ 4y+5=0 \end{cases}$

b, Ta có:

$$2|x-2y|+3|2x+1|+6 \ge 6 \Rightarrow \frac{24}{2|x-2y|+3|2x+1|+6} \le \frac{24}{6} = 4 \Rightarrow D \le -6+4 = -2$$

Hay $MaxD = -2$, Dấu bằng khi $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+1=0 \end{cases}$

**Bài 1.6**: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$C = \frac{|x-2017|+2018}{|x-2017|+2019}$$

**Hướng dẫn giải**

$$C = \frac{|x-2017|+2018}{|x-2017|+2019} = \frac{(|x-2017|+2019)-1}{|x-2017|+2019} = 1 - \frac{1}{|x-2017|+2019}$$

Biểu thức $C$ đạt giá tri nhỏ nhất khi $|x-2017|+2019$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $|x-2017| \ge 0$ nên $|x-2017|+2019 \ge 2019$

Dấu $"="$ xảy ra khi $x = 2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi $x=2017$

**Bài 1.7**: Tìm giá trị lớn nhất của:

a, $E=\frac{2}{3}+\frac{21}{(x+3y)^2+5|x+5|+14}$ b, $F=\frac{1}{|x-1|+3}$

**Hướng dẫn giải**

a, Ta có:

$$(x+3y)^2+5|x+5|+14\ge 14\Rightarrow \frac{21}{(x+3y)^2+5|x+5|+14}\le\frac{21}{14}=\frac{3}{2}\Rightarrow E\le\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}$$

Hay $MaxE=\frac{13}{6}$, Dấu bằng khi $\begin{cases}x+3y=0\\x+5=0\end{cases}$

b, Ta có: $|x-1|+3\ge 3\Rightarrow\frac{1}{|x-1|+3}\le\frac{1}{3}\Rightarrow F\le\frac{1}{3}$

Hay $MaxF=\frac{1}{3}$, Dâu bằng khi $x-1=0$

**2. Dạng 2: Xét điều kiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối xác định khoảng giá trị của biểu thức:**

**Bài 2.1**: Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a, $E=|4x+3|+4x-5$ b, $F=|5x-6|+3+5x$ c, $G=|2x+7|+5-2x$

**Hướng dẫn giải**

a, Với $4x+3\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{-3}{4}\Rightarrow E=4x+3+4x-5=8x-2$

Mà $x\ge\frac{-3}{4}\Rightarrow 8x-2\ge 8.\frac{-3}{4}-2=-8\Rightarrow E\ge -8$ (1)

Với $x<\frac{-3}{4}\Rightarrow E=-4x-3+4x-5=-8$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $E\ge -8\Rightarrow MinE=-8$, Dấu bằng khi $x\le\frac{-3}{4}$

b, Với $5x-6\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{6}{5}\Rightarrow F=5x-6+3+5x=10x-3$

Mà $x\ge\frac{6}{5}\Rightarrow 10x-3\ge 10.\frac{6}{5}-3=9\Rightarrow F\ge 9$ (1)

Với $x<\frac{6}{5}\Rightarrow E=6-5x+3+5x=9$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $F\ge 9\Rightarrow MinF=9$, Dâu bằng khi $x\le\frac{6}{5}$

c, Với $2x+7\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{-7}{2}\Rightarrow G=2x+7+5-2x=12$ (1)

Với $x<\frac{-7}{2}\Rightarrow G=-2x-7+5-2x=-4x-2$

Mà $x<\frac{-7}{2}\Rightarrow -4x-2>-4.\frac{-7}{2}-2=12\Rightarrow G>12$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $G \ge 12 \Rightarrow MinG = 12$, Dấu bằng khi $x \ge \frac{-7}{2}$

**Bài 2.2**: Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a, $H = 2|x-3| + 2x + 5$ b, $I = 3|x-1| + 4 - 3x$ c, $J = 4|x+5| + 4x - 1$

**Hướng dẫn giải**

a, Với $x - 3 \ge 0 \Rightarrow x \ge 3 \Rightarrow H = 2(x-3) + 2x + 5 = 4x - 1$

Mà $x \ge 3 \Rightarrow 4.x - 1 \ge 11 \Rightarrow H \ge 11$ (1)

Với $x < 3 \Rightarrow H = 2(3-x) + 2x + 5 = 11$ (2)

Từ(1) và (2) ta có : $H \ge 11 \Rightarrow MinH = 11$, Dấu bằng khi $x \le 3$

b, Với $x - 1 \ge 0 \Rightarrow x \ge 1 \Rightarrow I = 3(x-1) + 4 - 3x = 1$ (1)

Với $x < 1 \Rightarrow I = 3(1-x) + 4 - 3x = -6x + 7$

Mà $x < 1 \Rightarrow -6x + 7 > -6.1 + 7 = 1 \Rightarrow I > 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $I \ge 1 \Rightarrow MinI = 1$, Dấu bằng khi $x \ge 1$

c, Với $x + 5 \ge 0 \Rightarrow x \ge -5 \Rightarrow J = 4(x+5) + 4x - 1 = 8x + 19$

Mà $x \ge -5 \Rightarrow 8x + 19 \ge 8.(-5) + 19 = -21 \Rightarrow J \ge -21$ (1)

Với $x < -5 \Rightarrow J = 4(-x-5) + 4x - 1 = -21$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $J \ge -21 \Rightarrow MinJ = -21$, Dấu bằng khi $x \le -5$

**Bài 2.3**: Tìm GTLN của:

a, $D = -2|x-5| + 2x + 6$ b, $E = -3|x-4| + 8 - 3x$ c, $F = -5|5-x| + 5x + 7$

**Hướng dẫn giải**

a, Với $x - 5 \ge 0 \Rightarrow x \ge 5 \Rightarrow D = -2(x-5) + 2x + 6 = 16$ (1)

Với $x < 5 \Rightarrow D = -2(5-x) + 2x + 6 = 4x - 4$

Mà $x < 5 \Rightarrow D = 4x - 4 < 16$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $D \le 16 \Rightarrow MaxD = 16$, Dấu bằng khi $x \ge 5$

b, Với $x - 4 \ge 0 \Rightarrow x \ge 4 \Rightarrow E = -3(x-4) + 8 - 3x = -6x + 20$

Mà $x \ge 4 \Rightarrow E = -6x + 20 \le -6.4 + 20 = -4$ (1)

Với $x < 4 \Rightarrow E = -3(4-x) + 8 - 3x = -4$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $E \le -4 \Rightarrow MaxE = -4$, Dấu bằng khi $x \le 4$

c, Với $5 - x \ge 0 \Rightarrow x \le 5 \Rightarrow F = -5(5-x) + 5x + 7 = 10x - 18$

Mà $x \le 5 \Rightarrow F = 10x - 18 \le 10.5 - 18 = 32$ (1)

Với $x > 5 \Rightarrow F = -5(x-5) + 5x + 7 = 32$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $F \le 32 \Rightarrow MaxF = 32$, Dấu bằng khi $x \ge 5$

**3. Dạng 3: Sử dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \ge |a+b|$**

**Bài 3.1**: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B = $|2x-5| + |2x-11|$ ;

**Hướng dẫn giải**

*Cách 1* : Sử dụng $|a| + |b| \ge |a+b|$ . Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $ab \ge 0$ .

Ta có B = $|2x-5| + |2x-11| = |2x-5| + |11-2x| \ge |(2x-5) + (11-2x)| = 6$

Vậy $B \ge 6$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $(2x-5)(11-2x) \ge 0$ Lập bảng xét dấu :

| x | | 2,5 | | 5,5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2x – 5 | – | 0 | + | \| | + |
| 11 – 2x | + | \| | + | 0 | – |
| Vế trái | – | 0 | + | 0 | – |

$$(2x-5)(11-2x) \ge 0 \Leftrightarrow 2,5 \le x \le 5,5.$$

Do đó min B = 6 $\Leftrightarrow$ $2,5 \le x \le 5,5$.

*Cách 2* : Lập bảng xét giá trị tuyệt đối :

| x | | 2,5 | | 5,5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert 2x-5\rvert$ | 5 – 2x | 0 | 2x – 5 | \| | 2x – 5 |
| $\lvert 2x-11\rvert$ | 11 – 2x | \| | 11 – 2x | 0 | 2x – 11 |

* Với $x < 2,5$ ta có $B = 16 - 4x > 6$. (1)

* Với $2,5 \le x \le 5,5$ thì $B = 6$. (2)

* Với $x > 5,5$ ta có $B = 4x - 16 > 6$. (3)

Từ (1); (2); (3) ta có min B = 6 $\Leftrightarrow$ $2,5 \le x \le 5,5$.

**Bài 3.2**: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = |2012 - x| + |2013 - x|$

**Hướng dẫn giải**

Sử dụng $|A| + |B| \ge |A + B|$. Dấu "=" xảy ra khi $A, B$ cùng dấu (*)

Ta có:

$$M = |2012 - x| + |2013 - x| = |2012 - x| + |x - 2013| \ge |2012 - x + x - 2013| = |-1| = 1$$

Vậy $MinM = 1 \Leftrightarrow 2012 \le x \le 2013$

**Bài 3.3**: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x+2| + |2x - 2013|$ với $x$ là số nguyên.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$A = |2x+2| + |2x-2013| = |2x+2| + |2013-2x|$$
$$\ge |2x + 2 + 2013 - 2x| = 2015$$

Dấu "=" xảy ra khi $(2x+2)(2013-2x) \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le \dfrac{2013}{2}$

Vậy $MaxA = 2015$ khi $x = -1$

**Bài 3.4**: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|x-2|+|2x-3|+|3x-4|$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $|x-2|+|3x-4|=|2-x|+|3x-4|\ge|2-x+3x-4|=|2x-2|$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow(2-x)(3x-4)\ge0\Leftrightarrow\frac{4}{3}\le x\le2$

$|2x-3|+|2x-2|=|3-2x|+|2x-2|\ge|3-2x+2x-2|=|1|=1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow(2x-3)(2x-2)\ge0\Leftrightarrow1\le x\le\frac{3}{2}$

Do đó $\Rightarrow A=|x-2|+|2x-3|+|3x-4|\ge1.$ Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{3}\le x\le2\\1\le x\le\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{4}{3}\le x\le\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A$ là $\min A=1\Leftrightarrow\frac{4}{3}\le x\le\frac{3}{2}$

**Bài 3.5**: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $L=|5x-2010|+|5x-2020|$;

b) $M=|x-2015|+|x-2016|+|x-2017|+|x-2018|$;

**Hướng dẫn giải**

a) Sử dụng bất đẳng thức $|a|+|b|\ge|a+b|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab\ge0$.

$L=|5x-2010|+|5x-2020|=|5x-2010|+|2020-5x|\ge|5x-2010+2020-5x|=10$

Vậy $L\ge10$. Dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow(2020-5x)(5x-2010)\ge0$

$\Leftrightarrow402\le x\le404$. Do đó $\min L=10\Leftrightarrow402\le x\le404$.

(có thể lập bảng xét giá trị tuyệt đối để giải)

b) Xét $M_1=|x-2015|+|x-2018|$ ; $M_2=|x-2016|+|x-2017|$

Giải tương tự a) ta có $\min M_1=3\ \ge\ \Leftrightarrow\ 2015\le x\le2018$

$\min M_2=1\ \ge\ \Leftrightarrow\ 2016\le x\le2017$

Vậy $\min M=4\ \Leftrightarrow\ 2016\le x\le2017$.

**Bài 3.6**: Cho $x+y=5$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=|x+1|+|y-2|$

**Lời giải**

Từ $x+y=5\Rightarrow y=5-x\Rightarrow A=|x+1|+|5-x-2|=|x+1|+|3-x|\ge|x+1+3-x|=4$

Dấu bằng khi : $\begin{cases}(x+1)(3-x)\ge 0\\ x+y=5\end{cases}$ => $\begin{cases}-1\le x\le 3\\ x+y=5\end{cases}$

**Bài 3.7**: Cho x – y = 3, tìm giá trị của biểu thức: $B=|x-6|+|y+1|$

**Lời giải**

Từ $x-y=3\Rightarrow x=y+3\Rightarrow B=|y+3-6|+|y+1|=|3-y|+|y+1|\ge|3-y+y+1|=4$

Dấu bằng khi : $\begin{cases}(3-y)(y+1)\ge 0\\ x-y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le y\le 3\\ x-y=3\end{cases}$

**Bài 3.8**: Cho x – y = 2 tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$C=|2x+1|+|2y+1|$

**Lời giải**

Ta có : $C=|2x+1|+|-2y-1|\ge|2x+1-2y-1|=|2(x-y)|=4$

Dấu bằng khi : $\begin{cases}(2x+1)(-2y-1)\ge 0\\ x-y=2\end{cases}$

**Bài 3.9**: Cho 2x + y = 3 tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $D=|2x+3|+|y+2|+2$

**Lời giải**

Ta có : $D=|2x+3|+|y+2|+2\ge|2x+3+y+2|+2=|3+5|+2=10$

Dấu bằng khi : $\begin{cases}(2x+3)(y+2)\ge 0\\ 2x+y=3\end{cases}$

**Bài 3.10**: Cho $a,b,c,d$ là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$A=|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$

**Lời giải**

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\le b\le c\le d$. Áp dụng BĐT $|a|+|b|\ge|a+b|$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab\ge 0$ ta có:

$|x-a|+|x-d|\ge|x-a|+|d-x|\ge|x-a+d-x|=d-a$ (1)

$|x-b|+|x-c|\ge|x-b|+|c-x|\ge|x-b+c-x|=c-b$ (2)

Suy ra $A\ge c+d-a-b$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" ở (1) và (2) xảy ra $\Leftrightarrow(x-a)(d-x)\ge 0$ và $(x-b)(c-x)\ge 0\Leftrightarrow a\le x\le d$ và $b\le x\le c$. Do đó

$MinA=c+d-a-b\Leftrightarrow b\le x\le c$

**Bài 3.11**: Tìm giá trị nhỏ nhất của A, biết :

A = |7x – 5y| + |2z – 3x| + |xy + yz + zx - 2000|

**Lời giải**

Ta có |7x – 5y| ≥ 0; |2z – 3x| ≥ 0 và | xy + yz + zx - 2000| ≥ 0

Nên A = |7x – 5y| + |2z – 3x| +|xy + yz + zx - 2000| ≥ 0

Mà A = 0 khi và chỉ khi

|7x – 5y| = |2z – 3x| = |xy + yz + zx - 2000| = 0

Có: |7x – 5y| = 0 ⇔ 7x = 5y ⇔ $\frac{x}{5}=\frac{y}{7}$

|2z – 3x| = 0 ⇔ $\frac{x}{2}=\frac{z}{3}$

|xy + yz + zx - 2000| = 0 ⇔ xy + yz + zx = 2000

Từ đó tìm được $\left[\begin{array}{l} x=20; y=28; z=30 \\ x=-20; y=-28; z=-30 \end{array}\right.$

A ≥ 0, mà A = 0 ⇔ (x,y,z) = (20;28;30) hoặc (x,y,z)= (-20;-28;-30)

Vậy MinA = 0 ⇔ (x,y,z) = (20;28;30) hoặc (x,y,z)= (-20;-28;-30)

*Lưu ý: HS làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa*

**Bài 3.12**: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=(2x-5y)^2-(15y-6x)^2-|xy-90|$

**Lời giải**

Ta có: $P=(2x-5y)^2-(15y-6x)^2-|xy-90|$

$=(2x-5y)^2-(6x-15y)^2-|xy-90|$

$=(2x-5y)^2-9.(2x-5y)^2-|xy-90|$

$=-\left[8.(2x-5y)^2+|xy-90|\right]$

Ta thấy $(2x-5y)^2 \geq 0$ với mọi $x, y$ nên $8.(2x-5y)^2 \geq 0$ với mọi $x, y$

$|xy-90| \geq 0$ với mọi $x, y$

Khi đó $8.(2x-5y)^2+|xy-90| \geq 0$ với mọi $x, y$

Suy ra $-\left[8.(2x-5y)^2+|xy-90|\right] \leq 0$ với mọi $x, y$

Hay $P \leq 0$ với mọi $x, y$

Dấu "=" xảy ra khi $\left\{\begin{array}{l} (2x-5y)^2=0 \\ |xy-90|=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{5}=\frac{y}{2} \\ xy=90 \end{array}\right.$

Đặt $\frac{x}{5}=\frac{y}{2}=k$ ta được $x=5k, y=2k$

Mà $xy=90$ nên $5k.2k=90 \Rightarrow k^2=9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=3 \\ k=-3 \end{array}\right.$

Nếu $k=3 \Rightarrow x=15, y=6$

Nếu $k=-3 \Rightarrow x=-15, y=-6$

Vậy $MaxP=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=15; y=6 \\ x=-15; y=-6 \end{array}\right.$

**Bài 3.13**: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+|y+5|-\frac{2}{5}$

**Lời giải**

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)\geq 0, |y+5|\geq 0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+|y+5|-\frac{2}{5}\geq -\frac{2}{5}$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $-\frac{2}{5} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}, y=-5$

**Bài 3.14**: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$H=(3x-2y)^2-(4y-6x)^2-|xy-24|$$

**Lời giải**

Ta có:

$H=(3x-2y)^2-(4y-6x)^2-|xy-24|$

$=(3x-2y)^2-4.(2y-3x)^2-|xy-24|=(3x-2y)^2-4.(3x-2y)^2-|xy-24|$

$=-3.(3x-2y)^2=-\left[3.(3x-2y)^2+|xy-24|\right]$

Ta có: $3.(3x-2y)^2\geq 0 \forall x, y; |xy-24|\geq 0 \forall x, y$

Do đó: $3.(3x-2y)^2+|xy-24|\geq 0 \qquad \forall x, y$

Nên $-\left[3.(3x-2y)^2+|xy-24|\right]\leq 0 \quad \forall x, y$

Hay $H\leq 0$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi : $3x-2y=0$ và $xy-24=0 (1)$

Với $3x-2y=0 \Rightarrow 3x=2y \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{3}$

Đặt $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=k \Rightarrow x=2k; y=3k$

Thay $x=2k, y=3k$ vào (1) ta được: $2k.3k-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=2 \\ k=-2 \end{array}\right.$

Với $k=2 \Rightarrow \begin{cases} x=2.2=4 \\ x=3.2=6 \end{cases}$ ; với $k=-2 \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-6 \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của $H$ là $0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x=4; y=6 \\ x=-4; y=-6 \end{array} \right.$

# CHUYÊN ĐỀ 11: CÁC BÀI TOÁN VỀ XÁC ĐỊNH ĐA THỨC

Trong các đề thi học sinh giỏi, đề thi vào các iớp chuyên toán,có bài toán xác định đa thức hoặc tính các giá trị của đa thức.Việc tìm tòi lời giải bài toán xác định đa thức tường gây lung túng cho sinh.Nguyên nhân chính là học sinh được trang bị đầy đủ các kiến cần thiết nhưng rời rạc ở các khối lớp và thường thiếu bài tập áp dụng. Qua đây nhằm củng cố kiến thức về đa thức tong chương trình toán từ lớp 7 đến lớp 9 rèn kỹ năng giải một số dạng toán trên từ đơn giản đến phức tạp mà kiến thức của nó không vượt quá trình độ THCS.

## A/ MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN ĐỂ GIẢI LOẠI TOÁN NÀY

**1 . Định lý Bơdu**:

Phần dư của phép chia đa thức f(x) cho nhị thức x - a bằng giá trị của đa thức tại x = a

Tức là: f(x) = (x - a).g(x) + f(a)

**Chứng minh** : Gọi g(x) là đa thức thương và R là số dư thì:

f(x) =(x - a).g(x) + R

f(a) = (a - a).g(a) + R = R (đpcm)

**2. phương pháp hệ số bất định:**

Giả sử: $f\left(x\right)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x^1+a_0$

$g\left(x\right)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x^1+b_0$

Nếu f(x) = g(x) với ít nhất 4 giá trị phân biệt của x thì: $a_3=b_3;a_2=b_2$

$a_1=b_1;a_0=b_0$

**Chứng minh:**

Giả sử 4 giá trị phân biệt $x_1;x_2;x_3;x_4$ có: $f\left(x_1\right)=g\left(x_1\right)$ $(1)$

$f\left(x_2\right)=g\left(x_2\right)$ $(2)$

$f\left(x_3\right)=g\left(x_3\right)$ $(3)$

$f\left(x_4\right)=g\left(x_4\right)$ $(4)$

Đặt $c_3=a_3-b_3;c_2=a_2-b_2;c_1=a_1-b_1;c_0=a_0-b_0$

Trừ từng vế của (1) và (2) được:

$$c_3\left(x_1^3-x_2^3\right)+c_2\left(x_1^2-x_2^2\right)+c_1\left(x_1-x_2\right)=0$$

Vì $x_1-x_2\neq 0$ nên

$$c_3\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)+c_2\left(x_1-x_2\right)+c_1=0 \qquad (5)$$

Tương tự từ (1) và (3) có :

$$c_3\left(x_1^2+x_1x_3+x_3^2\right)+c_2\left(x_1-x_3\right)+c_1=0 \qquad (6)$$

Trừ theo từng vế của (5) và (6) rồi chia cho $x_2-x_3\neq 0$ được:

$$c_2+c_3\left(x_1+x_2+x_3\right)=0 \qquad (7)$$

Tương tự từ (1), (2), (4) có:

$$c_2+c_3\left(x_1+x_2+x_4\right)=0 \qquad (8)$$

Trừ theo từng vế của (7) và (8) được:

$$c_3\left(x_3-x_4\right)=0\Rightarrow c_0=0 \text{ vì } x_3\neq x_4\, x_3-x_4\neq 0$$

Thay $c_3 = 0$ vào (8) được $c_2 = 0$. Từ đó và (6) được $c_1 = 0$.

Thay vào (1) được $a_0 = b_0$ suy ra đpcm.

**II- MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP**

***Dạng 1:*** Xác định đa thức bậc n (n = 2,3,...) khi biết ( n + 1) có giá trị của đa thức:

**Ví dụ 1.** Cho đa thức: $f\left(x\right)=a.x^2+bx+c$, Xác định các hệ số a,b,c biết:

$$f\left(0\right)=2;\ f\left(1\right)=7;\ f\left(-2\right)=-14$$

***Lời giải***

Theo bài ra ta có:

$f(0) = 2 \Rightarrow 0+c=2\Rightarrow c=2$

$f(1) = 0 \Rightarrow a+b+2=7\Rightarrow a+b=5$ (1)

$f(-2) = -14 \Rightarrow 4a-2b+2=-14\Rightarrow 2a-b=-8$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: a = -1 và b = 6.

Vậy đa thức cần tìm là: $f(x) = -x^2 + 6x + 2$.

**Ví dụ 2.** Xác định đa thức bậc 3 biết: f(0) = 1; f(1) = 0; f(2) = 5; f(3) = 22

***Lời giải***

Gọi đa thức cần tìm là: $f(x) = ax^3 + bx^3 + cx + d$

Theo bài ra ta có:

$f(0) = 1 \Rightarrow d = 1$

$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = -1$ (1)

$f(2) = 5 \Rightarrow 4a + 2b + c = 2$ (2)

$f(3) = 22 \Rightarrow 9a + 3b + c = 7$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=2 \\ 9a+3b+c=7 \end{cases}$$

Giải ra ta được: a = 1; b = 0; c = -2

Vậy đa thức cần tìm là: f(x) = $x^3$ - 2x + 1.

**Ví dụ 3.** Cho hàm số: $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ cho biết f(0)=2010, f(1)=2011, f(-1)=2012,

Tính f(-2)

***Lời giải***

Theo giả thiết ta có: $f(0)=2010 \Rightarrow c=2010$,

$$f(1)=2011 \Rightarrow a+b+c=2011 \Rightarrow a+b=1$$

và $f(-1)=2012 \Rightarrow a-b+c=2012 \Rightarrow a-b=2 \Rightarrow a=\frac{3}{2}, b=\frac{-1}{2}$

khi đó hàm số có dạng $y=f\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2010$ => f(2) = 2017

*** Chú ý:** Để xác định được đa thức bậc n thì cần biết n + 1 giá trị của đa thức, còn nếu chỉ biết n giá trị thì đa thức tìm được có hệ số phụ thuộc một tham số.

*** Bài tập áp dụng:**

**Câu 1.** Tìm đa thức bậc 2 biết: f(0) = 4; f(1) = 0; f(-1) = 6

**Câu 2.** Tìm đa thức bậc 4 biết: f(0) = - 1; f(1) = 2; f(2) = 31; f(2) = 47

**Câu 3:** Cho đa thức: $f\left(x\right)=a.x^2+bx+c$ , Xác định a, b, c biết: $f\left(-2\right)=0, f\left(2\right)=0$ và a là số lớn hơn c ba đơn vị.

**Câu 4:** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn: $f\left(-1\right)=2, f\left(0\right)=1, f\left(\frac{1}{2}\right)=3, f\left(1\right)=7$

Xác định giá trị a, b, c và d

**Câu 5:** Xác định đa thức: $P\left(x\right)=a.x^3+bx^2+cx+d$ , biết:

$$P\left(0\right)=2017, P\left(1\right)=2, P\left(-1\right)=6, P\left(2\right)=-6033$$

***Dạng 2:*** Xác định đa thức dư khi biết một số phép tính khác

**Ví dụ 3.** Đa thức f(x) nếu chia cho x –1 được số dư bằng 4, nếu chia cho x-3 được số dư bằng 14.

Tìm đa thức dư của phép chia f(x) cho (x – 1)(x –3)

***Lời giải***

*Cách 1:* Gọi thương của phép chia f(x) cho x – 1 và cho x – 3 theo theo thứ tự là A(x) và B(x)

Ta có:

f(x) = (x – 1).A(x) + 4 với mọi x (1)

f(x) = (x – 3).B(x) + 14 vỡi mọi x (2)

Gọi thương của phép chia f(x) cho (x – 1)(x – 3) là C(x) và dư là R(x).Vì bậc của R(x) nhỏ hơn bậc của số chia nên bậc của nó nhỏ hơn bậc 2 nên R(x) có dạng ax + b

Ta có: f(x) = (x – 1)(x – 3).C(x) +ax + b với mọi x (3)

Thay x =1 vào (1) và (3) ta được : f(1) = 4; f(1) = a + b

Thay x =3 vào (2) và (3) ta được : f(3) =14; f(3) = 3a + b

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ 3a+b=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-1 \end{cases}$$

Vậy đa thức dư của phép chia f(x) cho (x – 1)(x – 3) là 5x – 1

***Cách 2:***

f(x) = (x – 1).A(x) + 4

nên (x – 3).f(x) = (x – 3)(x – 1).A(x) + 4(x – 3) (1)

f(x) = (x – 3).B(x) + 14

nên (x – 1).f(x) = (x – 3)(x – 1).B(x) + 14(x – 1) (2)

Lấy (2) – (1) ta được:

[(x – 1) – (x – 3) ].f(x) =(x – 1)(x – 3) [A(x) – B(x)] + 14(x – 1) – (x – 3)

nên 2f(x) = (x – 1)(x – 3)[A(x) – B(x)] + 10x – 2

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x-3).\frac{A(x)-B(x)}{2} + 5x - 1$$

Ta thấy 5x – 1 có bậc bé hơn bậc số chia vậy số dư cần tìm là 5x – 1.

**Ví dụ 4.** Đa thức f(x) khi chia cho x + 1 dư 4 khi chia $x^2 + 1$ dư 2x + 3. Tìm đa thức dư khi chia f(x) cho $(x + 1).(x^2 + 1)$

***Lời giải***

Theo định lý Bơ du ta có f(-1) = 4 (1)

Do bậc của đa thức chia$(x + 1)(x^2 +1)$ là 3

Nên đa thức dư có dạng $ax^2 + bx + c$

$$\Rightarrow f(x) = (x + 1)(x^2 + 1).\ q(x) + ax^2 + bx + c$$

$= [(x +1).\ q(x) + a](x^2 +1) + bx + c – a$ (2)

mà f(x) chia cho $x^2 + 1$ dư 2x + 3 (3)

Từ (1), (2), (3) ta có b = 2 (4) ; c – a = 3 (5)

Mà f(-1) = 4 nên a – b + c = 4 hay a – 2 + c = 4 (6)

Từ (5) và (6) suy ra: $a = \frac{3}{2},\ c = \frac{9}{2}$

Ta được đa thức cần tìm: $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$

**Ví dụ 5.** Tìm đa thức dư của phép chia: $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ cho $x^2 - 1$

***Lời giải***

***Cách1:***

Tách đa thức bị chia thành những đa thức chia hết cho đa thức chia.

Ta thấy $x^n - 1$ chia hết cho $x - 1$ với mọi số tự nhiên n nên $x^{2n} - 1$ chia hết cho $x^2 - 1$; $x^6 - 1$, ... chia hết cho $x^2 - 1$.

Ta có: $x^7 + x^5 + x^3 + 1 = x^7 - x + x^5 - x + x^3 - x + 3x + 1$

$= x(x^6 - 1) + x(x^4 - 1) + x(x^2 - 1) + 3x + 1$

$\Rightarrow$ Dư của phép chia: $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ chia cho $x^2 - 1$ là $3x + 1$

***Cách 2:*** Xét giá trị riêng

Gọi thương của phép chia là Q(x) dư là ax + b

Ta có: $x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x + 1)(x - 1).Q(x) + ax + b$ với mọi x

Đẳng thức đúng với $\forall x$ nên với x = 1 ta được: 4 = a + b (1)

Với x = - 1 ta được –2 = - a + b (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ a = 3; b = 1

Vậy dư của phép chia là: 3x + 1.

*** Bài tập áp dụng:**

**Câu 1.** Tìm đa thức P(x) biết rằng P(x) chia cho (x + 3) dư 1, chia cho (x – 3) dư 8. Chia cho (x + 3)(x – 3) thì được thương 3x và còn dư.

**Câu 2.** Tìm đa thức dư của phép chia: $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho $x^2 + 1$

***Dạng 3:*** Xác định đa thức khi biết điều kiện của các hệ số

**Ví dụ 6.** Tìm các đa thức f(x) có tất cả các hệ số là số nguyênkhông âm nhỏ hơn 8 và thoả mãn: f(8) = 2003.

***Lời giải***

Xét đa thức

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ với $a_0, a_1 ... a_{n-1}, a_n$ đều là các số nguyên không âm và nhỏ hơn 8.

Do f(8) = 2003 nên $a_n.8^n + a_{n-1}.8^{n-1} + ... + a_1.8 + a_0 = 2003$

Ở đây $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ là các chữ số của 2003 được viết trong hệ ghi số cơ số 8. Thực hiện việc chia 2003 cho 8 được dư $a_0 = 3$ lại lấy thương chia cho 8, liên tiếp như vậy ta được đa thức cần tìm là: $f(x) = 3x^3 + 7x^2 + 2x + 3$

*** Bài tập áp dụng:**

**Câu 1.** Tìm đa thức f(x) các hệ số đều là số nguyên không âm nhỏ hơn 5 và f(5) = 352

*Dạng 4:* Xác định đa thức f(x) thoả mãn 1 hệ thức đối với f(x)

**Ví dụ 7.** Tìm đa thức P(x) bậc 4 thỏa mãi các điều kiện sau:

P(-1) = 0 và $P(x)-P(x-1)=x(x+1)(2x+1), \forall x \in R.$

***Lời giải***

Với x = 0 thì $P(0)=P(-1)=0$

Với x = - 1 thì $P(-1)=P(-2)=0$

Do đó P(x) nhận -1, 0, -2 là nghiệm.

Đặt $P(x)=x(x+1)(x+2)(ax+b)$ vớ $a \neq 0$.

Với x = 1 thì P(1) = P(0) + 6 = 6. Suy ra: a + b = 6 (1)

Với x = 2 thì P(2) = P(1) + 30 = 36. Suy ra: $2a+b=\frac{3}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a=b=\frac{1}{2}$

Vậy $P=\frac{1}{2}x(x+1)^2(x+2)$

*** Bài tập áp dụng:**

Tìm tất cả các đa thức P(x) bậc nhỏ hơn 4 và thoả mãn hệ thức sau ít nhất 4 giá trị phân biệt của x: x.P(x – 1) = (x – 2).P(x)

**III. PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐA THỨC PHỤ ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN TÌM ĐA THỨC HOẶC TÍNH GIÁ TRỊ CỦA ĐA THỨC.**

**Giới thiệu phương pháp:** Các nhiều phương pháp để giải bài toán xác định đa thức chủ yếu là dùng đa thức thuần nhất; hai đa thức đồng nhất; định lý Bơ du; hệ số bất định khi xác định đa thức bậc n mà đã biết n + 1 giá trị của nó. Song có nhiều bài toán không thể tìm được đa thức bằng cách trực tiếp mà phải dùng phương pháp dùng đa thức phụ để xác định đa thức hoặc tính giá trị riêng của đa thức.

**Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 8.** Cho đa thức f(x) bậc 4 với hệ số bậc cao nhất là 1 và thoả mãn f(1) = 10, f(2) = 20, f(3) = 30. Tính: $\frac{f(12)+f(-8)}{10}+15$

***Phân tích bài toán:***

- Đa thức bậc 4 mà mới biết ba giá trị của đa thức nên phải dùng đa thức phụ g(x) = f(x) + h(x).

- Bậc của f(x) là 4 nên bậc của g(x) là 4 và bậc của h(x) nhỏ hơn số giá trị của f(x).

***Thuật toán tìm đa thức phụ.***

***Bước 1:***

Đặt g(x) = f(x) + h(x) ở đó h(x) là một đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của f(x) đồng thời bậc của h(x) nhỏ hơn số giá trị đã biết của f(x)

Trong đề bài bậc của h(x) nhỏ hơn 3 nghĩa là:

$$g(x) = f(x) + ax^2 + bx + c$$

***Bước 2:***

Tìm a, b, c để g(1) = g(2) = g(3) = 0.

Tức là: $\begin{cases} 0 = 1 + a + b + c \\ 0 = 20 + 4a + 2b + c \\ 0 = 30 + 9a + 3b + c \end{cases}$

Giải hệ phương trình được : a = 0; b = -10; c = 0

Theo phương pháp hệ số bất định:

Suy ra: h(x) = - 10x

Hay: g(x) = f(x) – 10x

***Lời giải***

Đặt đa thức phụ: g(x) = f(x) – 10x $\Rightarrow$ g(1) = g(2) = g(3) = 0

Do bậc f(x) là bậc 4 nên bậc của g(x) là 4 và g(x) chia hết cho x – 1; x – 2; x – 3 suy ra:

$g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-x_0)$

$\Rightarrow f(x) = g(x) + 10x = (x-1)(x-2)(x-3)(x-x_0) + 10x$

Ta có $f(12) = (12-1)(12-2)(12-3)(12-x_0) + 10.12$

$= 11.10.9.(12-x_0) + 10.12 = 10.[99.(12-x_0) + 12]$

$f(-8) = (-8-1)(-8-2)(-8-3)(-8-x_0) + 10.(-8)$

$= (-11).(-10).(-9).(-8-x_0) + 10.(-8) = -10.[99.(-8-x_0) + 8]$

Suy ra: $f(12) + f(-8) = 10.[99.(12-x_0) + 12] + (-10).[99.(-8-x_0) + 8]$

$= 10(1200 - 99x_0 + 784 + 99x_0)$

$= 10.1984$

Ta tính được: $\dfrac{f(12)+f(-8)}{10} + 15 = 1984 + 15 = 1999$

**Ví dụ 9.** Cho đa thức f(x) bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1 và thoả mãn: f(1) = 3; f(3) = 11; f(5) = 27. Tính giá trị của f(-2) + 7.f(6)

***Phân tích bài toán:***

- Đa thức bậc 4 mà mới biết ba giá trị của đa thức nên phải dùng đa thức phụ g(x) = f(x) + h(x).

- Bậc của f(x) là 4 nên bậc của g(x) là 4 và bậc của h(x) nhỏ hơn số giá trị của f(x).

***Lời giải***

+ Tìm đa thức phụ:

Đặt g(x) = f(x) + $ax^2$ + bx + c. Tìm a, b, c để g(1) = g(3) = g(5) = 0

$\Leftrightarrow$ a, b, c là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 0 = 3 + a + b + c \\ 0 = 11 + 9a + 3b + c \\ 0 = 27 + 25a + 5b + c \end{cases}$$

Giải hệ ta được: a = - 1; b = 0; c = -2 nên đặt g(x) = f(x) – $x^2$ – 2

+ Tính giá trị f(x):

Bậc f(x) là bậc 4 nên g(x) là bậc 4 và g(x) chia hết cho (x – 1); (x – 3); (x – 5) nên g(x) = (x – 1)(x – 3)(x – 5)(x – $x_0$)

$$\Rightarrow f(x) = g(x) - (-x^2 - 2) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-x_0) + x^2 + 2$$

Tính được: f(-2) + 7f(6) =1112

**Ví dụ 10.** Cho đa thức f(x) bậc 3 với hệ số của $x^3$ là một số nguyên, thoả mãn f(1999) = 2000 và f(2000) = 2001.

Chứng minh rằng f(2001) – f(1998) là hợp số.

***Phân tích bài toán:***

- Đa thức bậc 3 mà mới biết hai giá trị của đa thức nên phải dùng đa thức phụ g(x) = f(x) + h(x).

- Bậc của f(x) là 3 nên bậc của g(x) là 3 và bậc của h(x) nhỏ hơn số giá trị của f(x).

***Lời giải***

+ Tìm đa thức phụ.

Đặt g(x) = f(x) + ax + b. Tìm a, b để g(1999) = g(2000) = 0 tương đương với a, b là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 0 = 2000 + 1999.a + b \\ 0 = 2001 + 2000.a + b \end{cases}$

Giải hệ ta được : a = b = - 1

Nên đặt g(x) = f(x) – x – 1

+ Tính giá trị của f(x):

Giả sử $k \in Z$ là hệ số của $x^3$ của đa thức f(x). Do bậc của f(x) bằng 3 nên bậc g(x) bằng 3 và g(x) chia hết cho (x – 1999); (x – 2000) nên:

g(x) = k(x – 1999)(x – 2000)(x – $x_0$);  f(x) = g(x) – (–x – 1)

$\Rightarrow$ f(x) = k(x – 1999)(x – 2000)(x – $x_0$) + x + 1

Ta có f(2001) = k . 2 . 1 . 2001 + 2002 = 2k . 2001 + 2002

f(1998) = k. (-1) . (-2) . 1998 + 1999 = 2k . 1998 + 1999

$\Rightarrow$ f(2001) – f(1998) = 2k . 2001 + 2002 – 2k . 1998 + 1999

Tính được f(2001) – f(1998) = 3(2k + 1)

Vì 3(2k + 1) là hợp số. Vậy f(2001) – f(1998) là hợp số.

**Ví dụ 11.** Tìm đa thức bậc 3 biết rằng khi cho f(x) chia cho x – 1, x – 2, x – 3 đều dư 6 và f(-1) = -18.

***Phân tích bài toán:***

- Đa thức cho f(x) chia cho x – 1, x – 2, x –3 đều dư 6, theo định lý Bơ du ta có f(1) = f(2) = f(3) = 6. Tìm đa thức phụ g(x) = f(x) + h(x) với h(x) có bậc là 2.

- Bậc của f(x) là 3, có ba giá trị của đa thức nên hệ số của f(x) phụ thuộc vào tham số.

***Lời giải***

+ Tìm đa thức phụ:

Theo định lý Bơdu ta có f(1) = f(2) = f(3) = 6

Đặt g(x) = f(x) + ax$^2$ + bx + c. Tìm a, b, c để g(1) = g(2) = g(3) = 0

$\Leftrightarrow a,b,c$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 0 = 6 + a + b + c \\ 0 = 6 + 4a + 2b + c \\ 0 + 6 + 9a + 3b + c \end{cases}$

Giải ra ta được: a = b = 0; c = -6 nên đặt g(x) = f(x) – 6

Với g(1) = g(2) = g(3) = 0

+ Xác định f(x):

Do bậc f(x) là 3 nên bậc g(x) là 3 và g(x) chia hết cho (x – 1); (x – 2); (x – 3)

$\Rightarrow g(x) = n(x-1)(x-2)(x-3)$ (n là hệ số của x$^3$ trong đa thức f(x)).

$\Rightarrow f(x) = n(x-1)(x-2)(x-3) + 6$

Mặt khác f(-1)= -18 $\Rightarrow$ n = 1 $\Rightarrow$ f(x) = x$^3$ – 6x$^2$ + 11x.

**Ví dụ 12.** Tìm đa thức bậc 3 biết f(0) =10; f(1) = 12; f(2) = 4; f(3) =1

***Lời giải***

**Cách 1:** Đã giải ở dạng 1

**Cách 2:** +Tìm đa thức phụ: Đặt g(x) =f(x) +ax$^2$ +bx + c

Tìm a, b, c để g(0) = g(1) = g(2) = 0 $\Leftrightarrow$ a, b, c là nghiệm của hệ $\begin{cases} 0 = 10 + c \\ 0 = 12 + a + b + c \\ 0 = 4 + 4a + +2b + 2 \end{cases}$

Hệ ta được: a = 5, b = -7, c = -10

Nên đặt g(x) = f(x) + $5x^2 - 7x - 10$

Với g(x) = g(1) = g(2) = 0

+ Xác định f(x)

Do bậc f(x) là 3 và bậc của g(x) là 3 và g(x) chia hết cho x; x – 1; x – 2

Gọi m là hệ số của $x^3$ của đa thức f(x) thì g(x) = mx(x – 1)(x – 2)

$\Rightarrow f(x) - mx(x-1)(x-2) - 5x^2 + 7x + 10 = 0$

Mặt khác; f(3) = 1 $\Rightarrow$ m = $\frac{5}{2}$

Vậy đa thức cần tìm là: f(x) = $\frac{5}{2}x^3 - \frac{25}{2}x^2 + 12x + 10$

*** Bài tập áp dụng:**

**Câu 1:** Đa thức f(x) khi chia cho x + 1 dư 4 khi chia cho $x^2 + 1$ dư 2x + 3. Tìm số dư khi chia f(x) cho $(x + 1)(x^2 + 1)$.

**Câu 2:** Xác định a, b để đa thức: $ax^3 + 12x^2 + bx + 1$ là lũy thừa bậc 3 của một đa thức khác.

**Câu 3:** Tìm các số a, b, c để $x^3 - ax^2 + bx - c = (x - a)(x - b)(x - c)$

**Câu 4:** Tìm đa thức dư của phép chia $x^{30} + x^4 + x^{2015} + 1$cho $x^{21}$

**Câu 5:** Tìm giá trị của a để đa thức f(x) = $x^4 + 5x^3 - 2x^2 + ax + 40$ chia hết cho đa thức $x^2 - 3x + 2$ khi đó giá trị nhỏ nhất của thương là bao nhiêu?

**Câu 6:** Tìm đa thức(x) bậc 2 biết f(0) = 19, f(1) = 5; f(2) =1995

**Câu 7:** Tìm đa thức(x) bậc 3 bi ết f(0) =2; f(1)=9; f(2) =19; f(3) =95

**III- CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐA THỨC TRONG CÁC ĐỀ THI**

**Câu 1.** Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + ..... - 101x + 101$. Tính $f(100)$

**Câu 2.** Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi $x$ thỏa mãn:

$$x.f(x+2) = (x^2 - 9)f(x)$$

1) Tính $f(5)$
2) Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm

**Câu 3.**

a) Tìm nghiệm của đa thức $7x^2 - 35x + 42 = 0$
b) Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có $a, b, c$ là các số nguyên, và $a \neq 0$. Biết với mọi giá trị nguyên của $x$ thì $f(x)$ chia hết cho 7. Chứng minh $a, b, c$ cũng chia hết cho 7

**Câu 4.**

a) Xác định đa thức $P(x)$ có bậc 2 với hệ số cao nhất bằng 1 và nhận hai số $0;-3$ làm nghiệm

b) Cho đa thức $f\left(x\right)$, biết với mọi $x$ ta có : $x.f\left(x+1\right)=\left(x+2\right)f\left(x\right)$. Chứng minh rằng đa thức $f\left(x\right)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

**Câu 5.** Cho đa thức $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

Biết rằng $f\left(1\right)=f\left(-1\right); f\left(2\right)=f\left(-2\right)$.

Chứng minh $f\left(x\right)=f\left(-x\right)$ với mọi $x$

**Câu 6.** Tìm đa thức $M$ biết rằng: $M+\left(5x^2-2xy\right)=6x^2+9x-y^2$

**Câu 7.** Cho 2 đa thức:

$P(x)=x^2+2mx+m^2$

$Q(x)=x^2+\left(2m+1\right)x+m^2$

Tìm $m$ biết $P\left(1\right)=Q\left(-1\right)$

**Câu 8.**

1) Tìm đa thức $A$ biết: $A-\left(3xy-4y^2\right)=x^2-7xy+8y^2$

2) Cho hàm số $y=f(x)=ax+2$ có đồ thị đi qua điểm $A\left(a-1;a^2+a\right)$

a) Tìm $a$

b) Với $a$ vừa tìm được, tìm giá trị của $x$ thỏa mãn $f\left(2x-1\right)=f\left(1-2x\right)$

**Câu 9.** Tìm đa thức bậc hai biết $f\left(x\right)-f\left(x-1\right)=x$ . Từ đó áp dụng tính tổng $S=1+2+3+....+n$

**Câu 10.** Cho đa thức $f\left(x\right)=x^{10}-101x^9+101x^8-101x^7+.....-101x+101$.

Tính $f\left(100\right)$

**Câu 11.** Cho đa thức: f(x) = ax² + bx + c

Biết 13a + b + 2c = 0. Chứng minh f(-2). f(3) ≤ 0

**Câu 12.** Cho đa thức p(x) = ax³ + bx² + cx + d, với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Biết rằng, p(x) ⋮5 với mọi x nguyên. Chứng minh rằng a, b, c, d đều chia hết cho 5.

**Câu 13.** Tính giá trị của đa thức P = $x^3+x^2y-2x^2-xy-y^2+3y+x+2017$ với $x+y=2$

**Câu 14.**

Tính giá trị của đa thức $f(x)=x^5-2018x^4+2016x^3+2018x^2-2016x-2017$ tại x = 2017

**Câu 15**. Tìm đa thức M biết rằng : $M+\left(5x^2-2xy\right)=6x^2+9xy-y^2$.

Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn $\left(2x-5\right)^{2012}+\left(3y+4\right)^{2014}\le 0$.

**Câu 16**. Cho hai đa thức: $f(x)=(x-1)(x+3)$ và $g(x)=x^3-ax^2+bx-3$

Xác định hệ số $a;b$ của đa thức $g(x)$ biết nghiệm của đa thức $f(x)$ cũng là nghiệm của đa thức $g(x)$.

**Câu 17.**

1. Tìm các số nguyên $x$, $y$ biết: $x - 2xy + y - 3 = 0$.
2. Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \ldots - 101x + 101$.

Tính f(100).

**Câu 18:**

1. Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} + x^{100}$.

a) Chứng minh rằng x= -1 là nghiệm của A(x) b) Tính giá trị biểu thức A(x) khi $x = \frac{1}{2}$

**Câu 19.**

a) Tìm giá trị của m để đa thức $g(x)=x^4+m^2x^3+mx^2+mx-1$ có nghiệm là -1.

b) Tìm tổng các hệ số của đa thức sau khi phá ngoặc và sắp xếp, biết: $f(x)=\left(3x^2-12x+8\right)^{2013}\cdot\left(x^3-2x^2+3x-3\right)^{2014}$.

**Câu 20.** Cho đa thức Q(x) $= ax^3+bx^2+cx+d$ với a, b, c ,d $\in Z$. Biết Q(x) chia hết cho 3 với mọi x $\in Z$. Chứng tỏ các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 3.

**Câu 21**.

a. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ với } x \ge -1 \\ -x-1 \text{ với } x < -1 \end{cases}$

- Viết f(x) dưới dạng 1 biểu thức.
- Tìm x khi f(x) = 2.

b. Cho hai đa thức $P(x) = x^2 + 2mx + m^2$ và $Q(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2$

Tìm m biết P(1) = Q(-1)

**Câu 22**. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu f(x) nhận 1 và -1 là nghiệm thì a và c là 2 số đối nhau.

**Câu 24.** Cho đa thức $P(x)=ax^2+bx+c$ $\left(a\in \mathbb{N}^*\right)$ thỏa mãn $P\left(9\right)-P\left(6\right)=2019$.

Chứng minh $P\left(10\right)-P\left(7\right)$ là một số lẻ.

*(Trích đề chuyên Phan Bộ Châu năm 2019-2020)*

**Câu 23.** Cho đa thức : $P(x)=a.x^2+bx+c$ Cho biết 9a - b = -3c, Chứng minh rằng: Trong ba số P(-1) ; P(2) ; P(2) có ít nhất 1 số âm, ít nhất 1 số không dương

**Câu 25.** Xác định các hệ số *a* và *b* để đa thức $P\left(x\right)=x^4-2x^3+3x^2+ax+b$ là bình phương của một đa thức.

*(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Quảng Bình năm 2018-2019)*

**Câu 26.** Cho các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ thoả mãn $P(x)=\frac{1}{2}(Q(x)+Q(1-x))$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng các hệ số của $P(x)$ là các số nguyên không âm và $P(0)=0$. Tính $P(3P(3)-P(2))$.

*(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Nam Định năm 2018-2019)*

**Câu 27.** Cho các đa thức $P(x)=x^3+ax^2+bx+c; Q(x)=x^2+2016x+2017$ thỏa mãn các điều kiện $P(x)=0$ có ba nghiệm thực phân biệt và $P(Q(x))=0$ vô nghiệm.

Chứng minh rằng $P(2017)>1008^6$. (đề 22)

*(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Bắc Ninh năm 2018-2019)*

**Câu 28.** Cho đa thức $P(x)=ax^2+bx+c$. Biết $P(x)$ chia cho x + 1 dư 3, $P(x)$ chia cho x dư 1 và $P(x)$ chia cho x – 1 dư 5. Tìm các hệ số a, b, c.

*(Trích đề vào 10 Chuyên Nam Định năm 2015-2016)*

**Câu 29.** Tìm các số thực a, b, sao cho đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$.

*(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP Hà Nội, năm học 2012 – 2013)*

**Câu 30.** Tìm đa thức f(x) biết: f(x) chia cho x+3 dư 1; f(x) chia cho x – 4 dư 8;
f(x) chia cho (x + 3)(x – 4) thì được 3x và còn dư.

**Câu 32.** Tìm một đa thức bậc ba, biết P(x) chia cho (x - 1), (x - 2), (x - 3) đều được dư 6 và P(- 1) = - 18.

**Câu 33.** Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x-3)^{200} + (x-2)^{100} - 1$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 - 5x + 6$

**Câu 35.** Cho đa thức $P(x)=ax^2+bx+c$ . Biết $P(x)$ chia cho x + 1 dưa 3, $P(x)$ chia cho x dư 1 và $P(x)$ chia cho x – 1 dư 5. Tìm các hệ số a, b, c.

**Câu 36.** Cho đa thức $f(x)=x^2-(a+3)x+a$ . Xác định *a* để *f(x)* chia hết cho (x – 2).

**Câu 37**. Cho đa thức $f(x)=x^2-2(a+1)x+b-1$. Xác định a, b để *f(x)* chia hết cho

(x – 1) và và đa thức (x + 2).

**Câu 38.** Cho đa thức bậc 3 dạng: $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ chia hết cho (x – 2) và khi chia cho

($x^2$ – 1) dư 2x.

**Câu 39.** Cho đa thức *f(x)* có bậc 2002 thỏa mãn điều kiện: $f(n)=\frac{1}{n}$ với x = 1; 2; 3;....;2001.

Tính giá trị của *f(2002)*

**Câu 40.** Cho đa thức: $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $P(1)=3, P(3)=11, P(5)=27$.

Tính giá trị của: $S=P(-2)+7.P(6)$.

**Câu 41.** Thì các đa thức g(x) và h(x) với hệ số nguyên sao cho: $\frac{h\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)}{g\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)}=\sqrt{2}$ .

**Câu 42.** Cho $f(x)=\frac{x^3}{1-3x+3x^2}$. Hãy tính giá trị của biểu thức sau:

$$A=f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2}{2012}\right)+\ldots+f\left(\frac{2010}{2012}\right)+f\left(\frac{2011}{2012}\right)$$

**Bài 43.** Cho đa thức P(x) thỏa mãn:

$$P(1)=1; P\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}P(x), \forall x\neq 0; P(x_1+x_2)=P(x_1)+P(x_2), \forall x_1, x_2\in R.$$

Tính $P\left(\frac{5}{7}\right)$

**Bài 44.** Cho đa thức $P(x)=x^3-x$ và $Q(x)=x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x+1$.

a) Tìm số dư trong phép chia Q(x) cho P(x)

b) Tìm x để $Q(x)\vdots P(x)$

**Câu 43.** Cho đa thức $P(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn điều kiện với số nguyên x bất kì thì P(x) là số chính phương. Chứng minh rằng a, b, c là số nguyên và b là số chẵn.

**Câu 44.** Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi x thuộc R, biết rằng với mọi x ta đều có:

$f(x)+3f\left(\frac{1}{3}\right)=x^2$ , Tính $f(2)$

**Câu 45.** CMR đa thức P(x) có ít nhất hai nghiệm, biết : $(x-6)P(x)=(x+1)P(x-4)$

**Câu 46.** Cho $f(x)=a.x^3+4x\left(x^2-1\right)+8$ và $g(x)=x^3+4x(bx+1)+c-3$, Trong đó a, b, c là các hằng số, Xác định a, b, c để $f(x)=g(x)$

**Câu 47.** Cho $P(x)=a.x^2+bx+c$, CMR nếu: $5a+b+2c=0$ thì $P(2).P(-1)\leq 0$

**Câu 48.** Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{100^x}{100^x+10}$, CMR : nếu a,b là hai số thỏa mãn : a + b = 1 thì $f\left(a\right)+f\left(b\right)=1$

**Câu 49.** Cho $f\left(x\right)=a.x^2+bx+c$ có tính chất f(1),f(4),f(9) là các số hữu tỉ, CMR khi đó a,b,c là các số hữu tỉ

**Câu 50.** Tính tổng các hệ số của đa thức sau khi bỏ dấu ngoặc :
$P\left(x\right)=\left(8x^2+3x-10\right)^{2008}\left(8x^2+x-10\right)^{2009}$

**Câu 51.** Giải phương trình: $\dfrac{3\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}+\dfrac{4\left(x-1\right)\left(x-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}+\dfrac{5\left(x-1\right)\left(x-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=3x-2.$

## HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC BÀI TẬP TRONG ĐỀ THI

**Câu 1.** Ta có:

$$f\left(x\right)=x^{10}-101x^9+101x^8-101x^7+....-101x+101$$
$$=x^{10}-100x^9-x^9+100x^8+x^8-100x^7-x^7+.....-101x+101$$
$$=x^9\left(x-100\right)-x^8\left(x-100\right)+x^7\left(x-100\right)-x^6\left(x-100\right)+.....+x\left(x-100\right)-\left(x-101\right)$$
$$\Rightarrow f\left(100\right)=1$$

**Câu 2.** 1) Ta có: $x=3\Rightarrow f\left(5\right)=0$

2) $x=0\Rightarrow f\left(0\right)=0\Rightarrow x=0$ là một nghiệm

$x=3\Rightarrow f\left(5\right)=0\Rightarrow x=5$ là một nghiệm

$x=-3\Rightarrow f\left(-1\right)=0\Rightarrow x=-1$ là một nghiệm

Vậy $f\left(x\right)$ có ít nhất là 3 nghiệm

**Câu 3.**

a) Viết được $7x^2-35x+42=7\left(x-3\right)\left(x-2\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.$

b) Từ giả thiết $\Rightarrow f\left(0\right)=c$ chia hết cho 7

$f\left(1\right)$ và $f\left(-1\right)$ chia hết cho 7, tức là $a+b+c$ và $a-b+c$ chia hết cho 7

Suy ra $2a+2c$ chia hết cho 7 để có $a\vdots7\Rightarrow b\vdots7$

**Câu 4.**

a) $P(x)=x^2+ax+b$

Vì $0$ là một nghiệm của đa thức, nên $f\left(0\right)=b=0$

$-3$ là một nghiệm của đa thức, nên: $9-3a+0=0\Rightarrow a=3$

Đa thức $P(x)=x^2+3x$ là đa thức cần tìm

b) Với $x=0$, ta có: $0.f(1)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow 0$ là một nghiệm của $f(x)$

Với $x=-2$, ta có: $-2f(-1)=0f(-2)\Rightarrow f(-1)=0\Rightarrow -1$ cũng là một nghiệm của $f(x)$

Vậy đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

**Câu 5.**

$f(1)=a_4+a_3+a_2+a_1+a_0;\qquad f(-1)=a_4-a_3+a_2-a_1+a_0$

Do $f(1)=f(-1)$ nên $a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=a_4-a_3+a_2-a_1+a_0$

$\Rightarrow a_3+a_1=-a_3-a_1$

$\Rightarrow a_3+a_1=0 \qquad (1)$

Tương tự $f(2)=16a_4+8a_3+4a_2+2a_1+a_0$

$f(-2)=16a_4-8a_3+4a_2-2a_1+a_0$

Vì $f(2)=f(-2)$ nên $4a_3+a_1=0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a_1=a_3=0$

Vậy $f(x)=a_4x^4+a_2x^2+a_0$

$f(-x)=a_4(-x)^4+a_2(x)^2+a_0=a_4x^4+a_2x^2+a_0$ với mọi $x$

Vậy $f(x)=f(-x)$ với mọi $x$

**Câu 6.**

$M+(5x^2-2xy)=6x^2+9xy-y^2\Rightarrow M=6x^2+9xy-y^2-(5x^2-2xy)=x^2+11xy-y^2.$

**Câu 7.**

$P(1)=1^2+2m.1+m^2=m^2+2m+1$

$Q(-1)=1-2m-1+m^2=m^2-2m$

Để $P(1)=Q(-1)\Rightarrow m^2+2m+1=m^2-2m\Leftrightarrow 4m=-1\Rightarrow m=-\dfrac{1}{4}$

**Câu 8.**

1) Ta có:

$A-(3xy-4y^2)=x^2-7xy+8y^2$

$A=x^2-7xy+8y^2+(3xy-4y^2)$

$A=x^2-4xy+4y^2$

2) a) Vì đồ thị hàm số $y=f(x)=ax+2$ đi qua điểm $A(a-1;a^2+a)$ nên:

$a^2+a=a(a-1)+2 \Leftrightarrow a^2+a=a^2-a+2 \Leftrightarrow 2a=2 \Leftrightarrow a=1$

b) Với $a=1 \Rightarrow y=f(x)=x+2$

ta có: $f(2x-1)=f(1-2x) \Leftrightarrow (2x-1)+2=(1-2x)+2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

**Câu 9.** Đa thức bậc hai cần tìm có dạng: $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

Ta có: $f(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$$f(x)-f(x-1)=2ax-a+b=x \Rightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ b-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+c$ ($c$ là hằng số tùy ý)

Áp dụng:

Với $x=1$, ta có: $1=f(1)-f(0)$

Với $x=2$ ta có: $1=f(2)-f(1)$

.................................................................

Với $x=n$ ta có: $n=f(n)-f(n-1)$

$$\Rightarrow S=1+2+3+....+n=f(n)-f(0)=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+c-c=\frac{n(n+1)}{2}$$

**Câu 10.** Ta có:

$f(x)=x^{10}-101x^9+101x^8-101x^7+....-101x+101$

$=x^{10}-100x^9-x^9+100x^8+x^8-100x^7-x^7+.....-101x+101$

$=x^9(x-100)-x^8(x-100)+x^7(x-100)-x^6(x-100)+.....+x(x-100)-(x-101)$

$\Rightarrow f(100)=1$

**Câu 11.**

Ta có f(3) = 9a + 3b + c ; f(-2) = 4a - 2b + c

f(3) + f(-2) =13a + b + 2c = 0 => f(3) = -f(-2)

⇨ f(3).f(-2) = $-f(3)^2 \leq 0$

**Câu 12.**

Vì p(x) $\vdots$ 5 với mọi x nguyên nên p (0) = d $\vdots$ 5.

p (1) = a + b + c + d $\vdots$ 5 (1)

p (- 1) = - a + b - c + d $\vdots$ 5 (2)

Từ (1) và (2) suy ra : 2(b + d)$\vdots$5 và 2(a + c)$\vdots$5 .

Vì 2(b + d)$\vdots$5, mà (2, 5) = 1 nên b+ d $\vdots$5 suy ra b$\vdots$5.

p (2) = 8a + 4b + 2c + d $\vdots$5 mà d $\vdots$ 5; b$\vdots$5. nên 8a + 2c $\vdots$5,

kết hợp với 2(a + c)$\vdots$5 suy ra 6a $\vdots$5 suy ra a $\vdots$5 vì (6,5) = 1. từ đó c $\vdots$5.

Vậy a, b, c, d đều chia hết cho 5.

**Câu 13.**

P = $x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2017$

= $x^2 (x + y) - 2x^2 - y(x + y) + 3y + x + 2017$

= $2x^2 - 2x^2 - 2y + 3y + x + 2017 = x + y + 2017 = 2019$

Vậy với x + y = 2 thì P = 2019

Hoặc nhóm để xuất hiện x + y - 2

**Câu 14.** Tính giá trị của đa thức

$f(x) = x^5 - 2018x^4 + 2016x^3 + 2018x^2 - 2016x - 2017$ tại x = 2017

Ta có $x = 2017 \Rightarrow \begin{cases} 2018 = x+1 \\ 2016 = x-1 \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} f(2017) &= x^5 - (x+1)x^4 + (x-1)x^3 + (x+1)x^2 - (x-1)x - x \\ &= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 + x - x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy f(2017) = 0

**Câu 15.** Ta có:

$M + \left(5x^2 - 2xy\right) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - \left(5x^2 - 2xy\right)$

$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$

Ta có $(2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \le 0$

Ta có : $\begin{cases} (2x-5)^{2012} \ge 0 \\ (3y+4)^{2014} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \ge 0$

Mà $(2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \le 0 \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2012} = 0 \\ (3y+4)^{2014} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases}$. Vậy $\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases}$

Vậy M = $\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \times \frac{5}{2} \times \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$

**Câu 16.**

Ta tìm nghiệm của $f(x)=(x-1)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=1;\ x=-3$

Nghiệm của $f(x)$ cũng là nghiệm của $g(x)=x^3-ax^2+bx-3$ nên:

Thay $x=1$ vào $g(x)$ ta có: $1-a+b-3=0$

Thay $x=-3$ vào $g(x)$ ta có: $-27-9a-3b-3=0$

Từ đó ta biến đổi và tính được: $a=-3;\ b=-1$

**Câu 17.** Ta có:

$f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$

$= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - 100x^7 - x^7 + \dots - 101x + 101$

$= x^9(x-100) - x^8(x-100) + x^7(x-100) - x^6(x-100) + \dots + x(x-100) - (x - 101)$

Suy ra f(100) = 1.

**Câu 18.**

a) $A(-1) = (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} + (-1)^{100}$

$= -1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots (-1) + 1 = 0$

(vì có 50 số -1 và 50 số 1)

Suy ra x = -1 là nghiệm của đa thức A(x)

b) + Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức $A = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{100}}$

$\Rightarrow 2.A = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{100}}\right) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{99}}$

$\Rightarrow 2A = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{100}}\right) + 1 - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow 2A = A + 1 - \frac{1}{2^{100}}$

$\Rightarrow A = 1 - \frac{1}{2^{100}}$

**Câu 19.**

a) Để đa thức g(x) có nghiệm -1 thì $g(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^4 + m^2(-1)^3 + m(-1)^2 + m(-1) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - m^2 + m - m - 1 = 0 \Leftrightarrow -m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

b) Tổng các hệ số của đa thức sau khi phá ngoặc và sắp xếp là f(1)

Mà $f(1) = \left(3.1^2 - 12.1 + 8\right)^{2013} \cdot \left(1^3 - 2.1^2 + 3.1 - 3\right)^{2014} = (-1)^{2013} \cdot (-1)^{2014} = -1$.

Vậy: Tổng các hệ số của đa thức sau khi phá ngoặc và sắp xếp là -1

**Câu 20.** Cho đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Vì $Q(x) \vdots 3$ với mọi $x \in Z$, nên

Với $x = 0$, ta có $Q(0) = d \vdots 3$

Với $x = 1$, ta có $Q(1) = a + b + c + d \vdots 3$

mà d $\vdots$ 3 => a + b +c $\vdots$ 3 (1)

Với x = -1, ta có $Q(-1) = -a + b - c + d \vdots 3$

mà d $\vdots$ 3 => $-a + b - c \vdots 3$ (2)

$Q(1) + Q(-1) = 2b \vdots 3$ mà (2 ; 3) =1 nên b $\vdots$ 3

$Q(1) - Q(-1) = 2(a+c) \vdots 3$ mà (2 ; 3) =1 nên a+c $\vdots$ 3 (3)

Với x = 2 , ta có $Q(2) =$ 8a+ 4b+ 2c +d $\vdots$ 3

hay 7a + (a + c) + 2b + d $\vdots$ 3

Mà d $\vdots$ 3, a + c $\vdots$ 3, b $\vdots$ 3 nên 7a $\vdots$ 3 mà (7; 3) = 1 => a $\vdots$ 3

Từ (3) suy ra c $\vdots$ 3=> đpcm

**Câu 21**

a. Biểu thức xác định f(x) = $|x+1|$

Khi f(x) = 2 $\Rightarrow |x+1| = 2$ từ đó tìm được x = 1; x= -3.

b) Thay giá trị tương ứng của x vào 2 đa thức , ta tìm được biểu thức P(1) và Q(-1) theo m giải phương ẩn m mới tìm được => m = $-\frac{1}{4}$

**Câu 22**. Ta có:

1 là nghiệm của f(x) => f(1) = 0 hay a + b + c = 0 (1)

-1 là nghiệm của f(x) => f(-1) = 0 hay a - b + c = 0 (2)

Từ (1) và (2) suy ra 2a + 2c = 0 => a + c = 0 => a = -c

Vậy a và c là hai số đối nhau.

**Câu 23.** Ta có : P(-1) + P(-2) + P(2) = 9a – b + 3c = 0 do đó trong ít nhất ba số trên có 1 số không âm, ít nhất 1 số không dương

**Câu 24.** Ta có:

$P(9) - P(6) = 2019$

$\Leftrightarrow (8ba + 9b + c) - (36a + 6b + c) = 2019$

$\Leftrightarrow 45a + 3b = 2019(1)$

Lại có: $P(10) - P(7) = (100a + 10b + c) - (29a + 7b + c) = 51a + 3b$

Đặt $P(10) - P(7) = t \Rightarrow 51a + 3b = t(2)$

Trừ vế theo vế (2) cho (1) ta có: $6a = t - 2019$, mà $6a$ chẵn, 2019 lẻ nên $t$ lẻ, ta có điều phải chứng minh

**Câu 25.** Ta có $P(x)$ là bình phương của một đa thức thì:

$P(x) = (x^2 + cx + d)^2 = x^4 + 2cx^3 + (c^2 + 2d)x^2 + 2cdx + d^2, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Mà: $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$

Do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}2c=-2\\ c^2+2d=3\\ 2cd=a\\ d^2=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-1\\ d=1\\ a=-2\\ b=1\end{cases}$$

Vậy: $a=-2, b=1$.

**Câu 26.** Từ giả thiết ta có $P(0)=\frac{1}{2}(Q(0)+Q(1))=0$ (1) và $P(1)=\frac{1}{2}(Q(1)+Q(0))$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $P(1)=0$.

Giả sử $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, trong đó $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ là các số nguyên không âm.

Ta có $P(1)=a_0+a_1+a_2+...+a_n=0$ vì $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ là các số nguyên không âm suy ra $a_0=a_1=a_2=...=a_n=0$ do đó $P(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vì $P(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow P(2)=0, P(3)=0$ do đó $3P(3)-P(2)=0\Rightarrow P(3P(3)-P(2))=0.$

**Câu 27.** Gọi $x_1;x_2;x_3$ là ba nghiệm của $P(x)$ ta có $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Suy ra, $P(Q(x))=(Q(x)-x_1)(Q(x)-x_2)(Q(x)-x_3)$

Do $P(Q(x))=0$ vô nghiệm nên các phương trình $Q(x)-x_i=0\,(i=1,2,3)$ vô nghiệm.

Hay các phương trình $x^2+2016x+2017-x_i=0\,(i=1,2,3)$ vô nghiệm

Do đó, các biệt thức tương ứng $\Delta_i'=1008^2-(2017-x_i)<0\Leftrightarrow 2017-x_i>1008^2$

Suy ra $P(2017)=(2017-x_1)(2017-x_2)(2017-x_3)>1008^6$.

**Câu 28.** Vì P(x) chia cho x + 1 dư 3 nên P(x) – 3 chia hết cho x + 1.

⇒ P(x) – 3 = f(x).(x + 1)

Thay x = –1 vào đẳng thức trên ta có:

P(–1) – 3 = f(–1).( –1 + 1) = 0.

⇒ P(–1) = 3 (1)

Tương tự, P(x) chia cho x dư 1 nên P(0) = 1 (2)

P(x) chia cho x – 1 dư 5 nên P(1) = 5 (3)

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a.(-1)^2 + b.(-1) + c = 3 \\ a.0^2 + b.0 + c = 1 \\ a.1^2 + b.1 + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 3 \\ c = 1 \\ a + b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ P(x) = $3x^2 + x + 1$. Thử lại ta thấy P(x) thỏa mãn đề bài.

Vậy P(x) = $3x^2 + x + 1$.

**Câu 29.** Ta có $x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4$

$= (x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = (x - 3)(x + 1)$

Đặt thương là q(x) ta có:

$$4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6 = (x-3)(x+1)q(x)$$

Chọn x = 3 ta có: $4.3^4 - 11.3^3 - 2a.3^2 + 5.b.3 - 6 = 0$

$\Rightarrow 15b - 18a = -21 \Rightarrow 5b - 6a = -7$ (1)

Chọn x = -1, ta có: $4(-1)^4 - 11(-1)^3 - 2a(-1)^2 + 5b(-1) - 6 = 0$

$\Rightarrow$ 5b+2a = 9 (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $8a = 16 \Rightarrow a = 2$

Thay vào (2) $\Rightarrow 5.b + 4 = 9 \Rightarrow b = 1$.

**Câu 30.** Theo định lý Bézout ta có $f(3) = 1; f(4) = 8$

Đặt dư f(x) chia cho $(x+3)(x-4)$ là $ax + b$

Suy ra $f(x) = (x+3)(x-4)3x + ax + b$.

- Với x =- 3 ta có: $1 = (-3+3)(-3-4)3(-3) + a(-3) + b \Rightarrow b - 3a = 1$ (1)
- Với x = 4 ta có: $8 = (4+3)(4-4)(3.4) + a.4 + b \Rightarrow b + 4a = 8$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 7a = 7 $\Rightarrow a = 1$ thay vào (2) ta được b = 4.

Từ đó ta được: $f(x) = (x+3)(x-4)3x + x + 4$.

Hay $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 35x + 4$.

**Câu 31.** Theo định lý Bézout ta có : P(1) = P(2) P(3) = 6.

Do đó ta đặt $P(x) = d + c(x-1) + b(x-1)(x-2) + a(x-1)(x-2)(x-3)$

Cho x = 1 ta được P(1) = d, suy ra d = 6

$P(x) = 6 + c(x-1) + b(x-1)(x-2) + a(x-1)(x-2)(x-3)$.

Cho x = 2 ta được P(2) = 6 + c, suy ra c = 0

$P(x) = 6 + 0(x-1) + b(x-1)(x-2) + a(x-1)(x-2)(x-3)$.

Cho x = 3 ta được P(3) = 6 + 2b, suy ra b = 0.

$P(x) = 6 + 0(x-1) + 0(x-1)(x-2) + a(x-1)(x-2)(x-3)$.

Do đó $P(x) = 6 + a(x-1)(x-2)(x-3)$ .

Cho x = - 1 ta được P(-1) = 6 – 24a, do đó – 18 = 6 – 24a suy ra a = 1.

Vậy P(x) = 6 + $1.(x-1)(x-2)(x-3)$. Rút gọn ta được : $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$.

**Câu 32.** Ta có $f(2) = (2-3)^{200} + (2-2)^{100} - 1 = 0$ nên $f(x) \vdots (x-2)$

$f(3) = (3-3)^{200} + (3-1)^{100} - 1 = 0$ nên $f(x) \vdots (x-3)$

Nên f(x) chia hết cho (x – 2)(x – 3) = $x^2 - 5x + 6$

**Câu 33.** Vì P(x) chia cho x + 1 dư 3 nên P(x) – 3 chia hết cho x + 1.

⇒ P(x) – 3 = f(x).(x + 1)

Thay x = –1 vào đẳng thức trên ta có:

P(–1) – 3 = f(–1).( –1 + 1) = 0 ⇒ P(–1) = 3 (1)

Tương tự, P(x) chia cho x dư 1 nên P(0) = 1 (2)

P(x) chia cho x – 1 dư 5 nên P(1) = 5 (3)

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a.(-1)^2 + b.(-1) + c = 3 \\ a.0^2 + b.0 + c = 1 \\ a.1^2 + b.1 + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 3 \\ c = 1 \\ a + b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

⇒ P(x) = $3x^2 + x + 1$. Thử lại ta thấy P(x) thỏa mãn đề bài.

Vậy P(x) = $3x^2 + x + 1$.

**Câu 34.** Vì $f(x) \vdots (x-2)$ nên x = 2 là nghiệm của đa thức *f(x)* hay *f(2) = 0*

Do đó: $2^2 - (a+3).2 + a = 0 \Leftrightarrow a = -2$

**Câu 35**. Ta có: $f(x) \vdots (x-1)$; $f(x) \vdots (x+2)$ nên x = 1 và x = -2 là nghiệm của đa thức *f(x)* hay *f(1) = 0 và f(-2) = 0*. Do đó:

$$\begin{cases} 1^2-2(a+1).1+b-1=0 \\ (-2)^2-2(a+1).(-2)+b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=-2 \\ 4a+b=-7 \end{cases} \Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}; b=-1$$

**Câu 36.** Ta có *f(x)* chia hết cho (x – 2) nên x = 2 là nghiệm của đa thức *f(x)* hay *f(2) = 0*. Do đó: $2^3+a.2^2+b.2+c=0 \Leftrightarrow 4a+2b+c=-8 \quad (1)$

Mặt khác: *f(x)* chia cho ($x^2$ – 1) dư 2x nên *g(x) = f(x) – 2x* nhận ($x^2$ – 1) là nghiệm hay x = 1 và x = -1 là nghiệm của *g(x)*. Do đó:

$$\begin{cases} g(1)=0 \\ g(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a+b+c-2=0 & (2) \\ -1+a-b+c+2=0 & (3) \end{cases}$$

Từ (1), (2), (3) ta có: $a=-\frac{10}{3}; b=1; c=\frac{10}{3}$ .

**Câu 37.** Ta có: $f(n)=\frac{1}{n}$ nên $f(n)-\frac{1}{n}=0$ với x = 1; 2; 3;....;2001. Suy ra: x = 1; 2; 3;....;2001 là nghiệm của phương trình: $f(x)-\frac{1}{x}=0$ hay $\frac{x.f(x)-1}{x}=0$

Xét phương trình: $G(x)=x.f(x)-1$ có nghiệm là x = 1; 2; 3;....;2001 và G(0) = -1.

Do đó G(x) có dạng: $G(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2001)$

Suy ra: G(0) = a.(-1)(-2)(-3)....(-2001) = -1 Vì thế: $a=\frac{1}{1.2.3....2001}$.

Do đó:

$$G(x)=\frac{1}{1.2.3....2001}(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2001)$$
$$\Leftrightarrow xf(x)-1=\frac{1}{1.2.3.....2001}(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2001)$$
$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2001)+1.2.3...2001}{1.2.3.....2001.x}$$
$$\Leftrightarrow f(2002)=\frac{(2002-1).(2002-2)...(2002-1)+1.2.3...2001}{1.2.3.4...2001.2002}=\frac{2.1.2.3.....2001}{1.2.3...2001.2002}=\frac{1}{1001}.$$

**Câu 38.** Xét đa thức: $f(x)=ax^2+bx^2+c$ thỏa mãn: $f(1)=3, f(3)=11, f(5)=27.$

Khi đó ta có: $\begin{cases} a.1^2 + b.1^2 + c = 3 \\ a.3^2 + b.3 + c = 11 \\ a.5^2 + b.5 + c = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$ Nên $f(x) = x^2 + 2$

Suy ra đa thức $Q(x) = P(x) - f(x)$ là đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất là 1 và nhận 1,3, 5 là nghiệm,

Do đó: $Q(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-m)$. Từ đó ta tính được:

$$\begin{cases} P(-2) = Q(-2) + f(-2) = 216 + 105m \\ 7.P(6) = 7.Q(6) + f(6) = 896 - 105m \end{cases}$$

Vậy: $S = P(-2) + 7.P(6) = 216 + 105m + 896 - 105m = 1112.$

**Câu 39.**

Đặt $u = \sqrt{2} + \sqrt{7}$ ta cần xác định các đa thức h(x) và g(x) sao cho $\frac{h(u)}{g(u)} = \sqrt{2}$ hay $h(u) - g(u).\sqrt{2} = 0$

Xét tích: $\left(u - \left(\sqrt{2} + \sqrt{7}\right)\right)\left(u - \left(\sqrt{2} - \sqrt{7}\right)\right) = u^2 - 2\sqrt{7}u + 5.$

Do u là nghiệm của phương trình $u^2 - 2\sqrt{7}u + 5 = 0$ nên $\frac{u^2 + 5}{2u} = \sqrt{7}$

Mặt khác: $\sqrt{2} = u - \sqrt{7} = u - \frac{u^2 + 5}{2u} = \frac{u^2 - 5}{2u}$

Vậy $h(x) = u^2 - 5; g(x) = 2x$

Thử lại thấy h(x) và g(x) thỏa mãi điều kiện bài toán.

**Câu 40.**

Nhận xét. Nếu $x + y = 1$ thì $f(x) + f(y) = 1$.

Thật vậy, ta có $f(x) = \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3} \Rightarrow f(y) = f(1-x) = \frac{(1-x)^3}{x^3 + (1-x)^3}$

suy ra $f(x)+f(y)=f(x)+f(1-x)=\dfrac{x^3}{x^3+(1-x)^3}+\dfrac{(1-x)^3}{x^3+(1-x)^3}=1$.

Vậy, nhận xét được chứng minh. Ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Theo nhận xét trên ta có:

$$A=\left(f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2011}{2012}\right)\right)+\left(f\left(\frac{2}{2012}\right)+f\left(\frac{2010}{2012}\right)\right)+\ldots+$$
$$\left(f\left(\frac{1005}{2012}\right)+f\left(\frac{1007}{2012}\right)\right)+f\left(\frac{1006}{2012}\right)=1005+f\left(\frac{1}{2}\right)=1005,5$$

**Câu 41.**

Ta có: P(2) = P(1 + 1) = P(1) + P(1) = 1 + 1 = 2.

Tương tự: P(3) = 3; P(5) = 5; P(7) = 7.

Từ đó: $P\left(\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{1}{7^2}P(7)=\dfrac{1}{7};P\left(\dfrac{2}{7}\right)=P\left(\dfrac{1}{7}\right)+P\left(\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{2}{7}$

Tương tự: $P\left(\dfrac{3}{7}\right)=\dfrac{3}{7};P\left(\dfrac{5}{7}\right)=\dfrac{5}{7}$

**Câu 42.**

a) Ta có: $P(x)=x(x^2-1)$; $Q(x)=x(x^{80}-1)+x(x^{48}-1)+x(x^{24}-1)+x(x^8-1)+5x+1$

Vì các đa thức $x^{80}-1;x^{48}-1;x^8-1$ đều chia hết cho $x^2-1$ nên phép chia Q(x) cho P(x) dư 5x + 1.

b) Để $Q(x)\vdots P(x)$ thì $5x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$

**Câu 43.** Do $P(0)=c$ là số chính phương nên $c=m^2$ với m là số nguyên (hiên nhiên c là số nguyên).

Vì P(1) = a + b + c ; P(-1) = a – b + c là các số nguyên nên (a + b) và (a – b) là các số nguyên hay 2a và 2b là các số nguyên.

Đặt $2a=n;2b=p;P(4)=k^2$; $n,p,k\in Z$. Suy ra: $k^2-m^2=16a+4b$

hay $(k-m)(k+m)=2(4n+p)$.

Nếu k, m khác tính chẵn lẻ thì (k – m)(k + m) là số lẻ vô lý.

Do đó: $(k+m)(k-m) \vdots 4$ . Do đó $(4n+p) \vdots 2$ hay $p \vdots 2$

Mà $(a+b) \in Z \Rightarrow a \in Z$ .

Đặt $P(2)=t^2\ (t \in Z)$ . Ta có: $t^2-m^2=2(2a+b)$.

Lập luận tương tự suy ra b là số chẵn.

**Câu 44.**

Ta có: $x=2 \Rightarrow f(2)+3.f\left(\frac{1}{2}\right)=4$

Và $x=\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)+3f(2)=\frac{1}{4} \Rightarrow f(2)=\frac{47}{32}$

**Câu 45.**

Vì $(x-6)P(x)=(x+1)P(x-4)$ với mọi x nên

Khi x = 6 thì $(6-6)P(6)=(6+1)P(6-4) \Rightarrow 0=7P(2) \Rightarrow P(2)=0 \Rightarrow$ 2 là nghiệm của P(x)

Khi x = -1 thì $(-1-6)P(x)=(-1+1)P(-1-4) \Rightarrow -7P(-1)=0 \Rightarrow P(-1)=0$

=> -1 là nghiệm của P(x)

**Câu 46.**

Ta có : $f(x)=a.x^3+4x(x^2-1)+8=a.x^3+4x^3-4x+8=(a+4)x^3-4x+8$

Và $g(x)=x^3-4x(bx+1)+c-3=x^3-4bx^2-4x+c-3$

Do $f(x)=g(x)$ nên ta có : $\begin{cases} a+4=1 \\ -4b=0 \\ c-3=8 \end{cases} \Rightarrow \{a=-3; b=0; c=11$

**Câu 47.**

Ta có : $P(2)+P(-1)=5a+b+2c=0 \Rightarrow P(2)=-P(-1)$ vậy $P(2).P(-1) \le 0$

**Câu 48.**

Ta có : $f(a)+f(b)=\frac{100^a}{100^a+10}+\frac{100^b}{100^b+10}=\frac{100^a(100^b+10)+100^b(100^a+10)}{(100^a+10)(100^b+10)}$

$=\frac{2.100^{a+b}+10(100^a+100^b)}{100^{a+b}+10(100^a+100^b)+100}=\frac{200+10(100^a+100^b)}{200+10(100^a+100^b)}=1$

**Câu 49.** Ta có:

$f(1)=a+b+c \in Q$ , $f(4)=16a+4b+c \in Q$ và $f(9)=81a+9b+c \in Q$

Từ (1) và (2) => $(16a+4b+c)-(a+b+c)=15a+3b=3(5a+b)\in Q$ do đó $5a+b\in Q$

Từ (2) và (3) => $(81a+9b+c)-(16a+4b+c)=65a+5b=5(13a+b)\in Q => 13a+b\in Q$

Nên $(13a+5b)-(5a+b)\in Q => 8a\in Q => a\in Q$

Khi $a\in Q$ thì $b\in Q$ và $c\in Q$

**Câu 50.**

Sau khi bỏ ngoặc ta được : $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0$ với $n=2.2008+2.2009$

Thay x=1, thì giá trị của $P(1)$ bằng tổng các hệ số của P(x)

Ta có $P(1)=\left(8.1^2+3.1-10\right)^{2008}\left(8.1^2+1-10\right)^{2009}=-1$

**Câu 51.**

Đặt $f(x)=\dfrac{3\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}+\dfrac{4(x-1)\left(x-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}+\dfrac{5(x-1)\left(x-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}$

f(x) là đa thức bậc 2 nên có dạng: $ax^2+bx+c=0\ \forall x$

Ta có : $\begin{cases} f(1)=a+b+c=2 \\ f\left(\sqrt{3}\right)=3a+\sqrt{3}b+c=4 \\ f\left(\sqrt{5}\right)=5a+\sqrt{5}b+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=0 \\ c=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

Do đó phương trình tương đương :

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}=3x-2 \Leftrightarrow (x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=3$$

Vậy phương trình có nghiệm x = 3.

# CHUYÊN ĐỀ 12: ĐỒNG DƯ THỨC

## A. Kiến thức cần nhớ

### 1. Định nghĩa

Cho $a,b$ là các số nguyên và $n$ là số nguyên dương. Ta định nghĩa $a$ đồng dư với $b$ theo môđun $n$ và kí hiệu là: $a \equiv b \pmod{n}$, nếu $a$ và $b$ có cùng số dư khi chia cho $n$.

*Chú ý* : a) $a \equiv b(\text{mod } m)$ là một đồng dư thức với a là vế trái, b là vế phải.

b) $a \equiv b(\text{mod } m) \Leftrightarrow a - b \vdots m \Leftrightarrow \exists t \in z$ sao cho $a = b + mt$.

c) Nếu a và b không đồng dư với nhau theo môđun m ta ký hiệu :

$a \not\equiv b$ (mod m).

d) Nếu $a$ chia cho $b$ dư $r$ thì $a \equiv r \pmod{b}$

### 2. Tính chất

1. Tính chất phản xạ : $a \equiv a$ (mod m).

2. Tính chất đối xứng : $a \equiv b$ (mod m) $\Rightarrow$ $b \equiv a$ (mod m).

3. Tính chất bắc cầu :

$a \equiv b$ (mod m); $b \equiv c$ (mod m) $\Rightarrow$ $a \equiv c$ (mod m).

4. Cộng hay trừ từng vế của đồng dư thức có cùng môđun :

$a \equiv b$ (mod m) ; $c \equiv d$ (mod m) $\Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d$ (mod m)

Tổng quát : $a_i \equiv b_i$ (mod m), i = 1; 2; ...; k $\Rightarrow$

$a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_k \equiv b_1 \pm b_2 \pm ... \pm b_k$ (mod m).

5. a) Nhân hai vế của đồng dư thức với một số nguyên :

$a \equiv b$ (mod m) $\Rightarrow$ $ka \equiv kb$ (mod m) với $k \in Z$

b) Nhân hai vế và môđun của đồng dư thức với một số nguyên dương:

$a \equiv b$ (mod m) $\Rightarrow$ $ka \equiv kb$ (mod km) với $k \in N^*$

6. Nhân từng vế của nhiều đồng dư thức có cùng môđun :

$a \equiv b$ (mod m) ; $c \equiv d$ (mod m) $\Rightarrow ac \equiv bd$ (mod m)

Tổng quát $a_i \equiv b_i$ (mod m), i = 1; 2; ...; k $\Rightarrow a_1 a_2...a_k \equiv b_1b_2...b_k$ (mod m).

7. Nâng hai vế của một đồng dư thức lên cùng một lũy thừa :

$a \equiv b$ (mod m) $\Rightarrow a^k \equiv b^k$ (mod m) $(k \in N^*)$

8. Nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo môđun là BCNN của các môđun ấy :

$a \equiv b$ (mod $m_i$), i = 1; 2; ...; k $\Rightarrow$ $a \equiv b$ (mod $[m_1; m_2;...;m_k]$). Đặc biệt nếu $(m_i, m_j)$ = 1 (i, j = 1; 2;...; k) thì a ≡ b (mod $m_i$) ⇒ a ≡ b (mod $m_1$. $m_2$.....$m_k$).

9. Nếu a ≡ b (mod m) thì tập hợp các ước chung của a và m bằng tập hợp các ước chung của b và m.

Đặc biệt : a ≡ b (mod m) ⇒ (a, m) = (b, m)

10. Chia hai vế và môđun của một đồng dư cho một ước dương chung của chúng :

$$a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ m),\ k \in UC(a,b,m),\ k > 0 \Rightarrow \frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k}\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{k}\right)$$

Đặc biệt : $ac \equiv bc \ (\mathrm{mod}\ m) \Rightarrow a \equiv b\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{(c,m)}\right)$

**B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP**

🗁 **Dạng 1: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán chứng minh chia hết**

*** Cơ sở phương pháp:** Khi số dư trong phép chia a cho m bằng 0 thì a ⋮ m. Như vậy để chứng tỏ a ⋮ m ta chứng minh a ≡ 0 (mod m)

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng: $\left(2222^{5555} + 5555^{2222}\right) \vdots 7$

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $2222 \equiv 3(\mathrm{mod}\,7)$ hay $2222 \equiv -4(\mathrm{mod}\,7) \Rightarrow 2222^{5555} \equiv (-4)^{5555}(\mathrm{mod}\,7)$ (*)

Mặt khác $5555 \equiv 4(\mathrm{mod}\,7) \Rightarrow 5555^{2222} \equiv 4^{2222}(\mathrm{mod}\,7)$ (**)

Từ (*) và (**)

$$\Rightarrow \left(2222^{5555} + 5555^{222}\right) \equiv \left[(-4)^{5555} + 4^{2222}\right](\mathrm{mod}\,7)$$

$$\Rightarrow \left(2222^{5555} + 5555^{222}\right) \equiv -4^{2222}\left(4^{3333} - 1\right)(\mathrm{mod}\,7)$$

Ta lại có: $4^{3333} = \left(4^3\right)^{1111} = 64^{1111}$ mà $64 \equiv 1(\mathrm{mod}\,7) \Rightarrow 4^{3333} \equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$

$$\Rightarrow 4^{3333} - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,7) \Rightarrow -4^{2222}\left(4^{3333} - 1\right) \equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$$

Do vậy $\left(2222^{5555} + 5555^{2222}\right) \equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$ hay $\left(2222^{5555} + 5555^{2222}\right) \vdots 7$

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng: $A = \left(7.5^{2n} + 12.6^n\right) \vdots 19$

***Hướng dẫn giải***

Ta có:

$$5^{2n} = \left(5^2\right)^n = 25^n \Rightarrow A = 7.25^n + 12.6^n$$

$$25 \equiv 6(\mathrm{mod}\,19) \Rightarrow 25^n \equiv 6^n(\mathrm{mod}\,19) \Rightarrow A \equiv 7.6^n + 12.6^n(\mathrm{mod}\,19) \Leftrightarrow A \equiv 19.6^n(\mathrm{mod}\,19)$$

$$\Rightarrow A \equiv 0(\mathrm{mod}\,19) \Rightarrow A \vdots 19$$

**Bài toán 3.** Chứng minh rằng $12^{2n+1} + 11^{n+2} \vdots 133$ $(n \in N)$

*Hướng dẫn giải*

*Cách 1*:Ta có $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133}$ ; $11^2 = 121 \equiv -12 \pmod{133}$

Do đó $12^{2n+1} = 12.\left(12^2\right)^n \equiv 12.\ 11^n \pmod{133}$

$11^{n+2} = 11^2.\ 11^n \equiv -12.\ 11^n \pmod{133}$

Do đó $12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 12.\ 11^n - 12.\ 11^n \equiv 0 \pmod{133}$.

Vậy với $n \in N$ thì $12^{2n+1} + 11^{n+2} \vdots 133$.

*Cách 2:* Ta có $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133} \Rightarrow 12^{2n} \equiv 11^n \pmod{133}$ (1)

Mà $12 \equiv -11^2 \pmod{133}$ (2) Nhân vế với vế của (1) và (2) ta có :

$12^{2n}.\ 12 \equiv 11^n.\ (-11^2) \pmod{133} \Rightarrow 12^{2n+1} \equiv -11^{n+2} \pmod{133}$

$12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 0 \pmod{133}$ hay $12^{2n+1} + 11^{n+2} \vdots 133$.

**Bài toán 4.** Chứng minh rằng: $A = \left(2^{2^{2n}} + 5\right) \vdots 7 \left(\forall n \in N\right)$

*Hướng dẫn giải*

Ta có $2^3 = 8 \equiv 1 \left(\bmod 7\right)$

Ta đi tìm số dư của $2^{2n}$ khi chia cho 3 (đây chính là điểm mấu chốt của bài toán).

Vì $4 \equiv 1\left(\bmod 3\right) \Rightarrow 4^n \equiv 1\left(\bmod 3\right) \Rightarrow 2^{2n} \equiv 1\left(\bmod 3\right)$ hay $n$ chia cho 3 dư 1.

Giả sử: $2^{2n} = 3k + 1\left(k \in N\right)$

Khi đó ta có: $A = 2^{3k+1} + 5 = 2.8^k + 5$

Vì $8^k \equiv 1\left(\bmod 7\right) \Rightarrow 2.8^k \equiv 2\left(\bmod 7\right) \Rightarrow 2.8^k + 5 \equiv 2 + 5\left(\bmod 7\right)$

$\Rightarrow A \equiv 0\left(\bmod 7\right)$

Vậy $A \vdots 7$

🗁 **Dạng 2: Sử dụng đồng dư thức tìm số dư**

*** Cơ sở phương pháp:** Với hai số nguyên a và m, m > 0 luôn có duy nhất cặp số nguyên q, r sao cho a = mq + r, $0 \le r < m$. Để tìm số dư r trong phép chia a cho m ta cần tìm r sao cho $\begin{cases} a \equiv r \pmod m \\ 0 \le r < m \end{cases}$.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Tìm số dư khi chia $3^{2000}$ cho 7.

*Hướng dẫn giải*

Ta có

$3^2 \equiv 2\left(\bmod 7\right) \Rightarrow 3^6 \equiv \left(3^2\right)^3 \equiv 1\left(\bmod 7\right)$

$\Rightarrow \left(3^6\right)^{333} \equiv 1\left(\bmod 7\right) \Leftrightarrow 3^{1998} \equiv 1\left(\bmod 7\right)$

Mặt khác $3^2 \equiv 2\left(\bmod 7\right) \Rightarrow 3^{2000} \equiv 3^{1998}.3^2 \equiv 1.2\left(\bmod 7\right) \Rightarrow 3^{2000} : 7$ dư 2.

**Nhận xét:**

Để tìm số dư khi chia $a^n$ cho $b > 0$, ta lấy lũy thừa với số mũ tăng dần của a chia cho b để tìm số dư. Ta sẽ dừng lại để xem xét khi tìm được số dư có giá trị tuyệt đối nhỏ hoặc là một giá trị đặc biệt có liên quan đến bài toán.

**Bài toán 2.** Tìm số dư trong phép chia $5^{70} + 7^{50}$ cho 12.

*Hướng dẫn giải*

Ta có

$5^2 \equiv 1\left(\bmod 12\right) \Rightarrow \left(5^2\right)^{35} \equiv 1\left(\bmod 12\right) \Leftrightarrow 5^{70} \equiv 1\left(\bmod 12\right)(*)$

$7^2 \equiv 1\left(\bmod 12\right) \Rightarrow \left(7^2\right)^{25} \equiv 1\left(\bmod 12\right) \Leftrightarrow 7^{50} \equiv 1\left(\bmod 12\right)(**)$

Từ $(*);(**) \Rightarrow 5^{70} + 7^{50}$ cho 12 dư 2.

**Bài toán 3.** Tìm số dư của số $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11

*Hướng dẫn giải*

Ta có $3^5 = 243 \equiv 1\left(\bmod 11\right) \Rightarrow \left(3^5\right)^{401} \equiv 1\left(\bmod 11\right) \Rightarrow 3^{2005} \equiv 1\left(\bmod 11\right)(1)$

Mặt khác $4^5 = 1024 \equiv 1\left(\bmod 11\right) \Rightarrow \left(4^5\right)^{401} \equiv 1\left(\bmod 11\right) \Rightarrow 4^{2005} \equiv 1\left(\bmod 11\right)(2)$

Từ $(1);(2) \Rightarrow$ số dư của số $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11 là 2.

**Bài toán 4.** a) Tìm số dư trong phép chia $1532^5 - 1$ cho 9.

b) Tìm số dư trong phép chia $2016^{2018} + 2$ cho 5

*Hướng dẫn giải*

a) Ta có $1532 = 9.170 + 2 \equiv 2 \pmod 9$ do đó $1532^5 \equiv 2^5 \pmod 9 \Rightarrow 1532^5 - 1 \equiv 2^5 - 1 \pmod 9$. Vì $2^5 - 1 = 31 \equiv 4 \pmod 9$. Do đó

$1532^5 - 1 \equiv 4 \pmod 9$. Vậy số dư cần tìm là 4.

b) Ta có $2016 \equiv 1 \pmod 5$ do đó $2016^{2018} \equiv 1^{2018} \pmod 5$

suy ra $2016^{2018} + 2 \equiv 1^{2018} + 2 \pmod 5$. Vì $1 + 2 = 3 \equiv 3 \pmod 5$.

Do đó $2016^{2018} + 2 \equiv 3 \pmod 5$.

Vậy số dư cần tìm là 3.

### 🗁 Dạng 3: Tìm điều kiện của biến để chia hết

*** Cơ sở phương pháp:** Dựa vào tính chất của đồng dư thức về số dư để tìm ra điều kiện của ẩn để biểu thức chia hết.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Tìm số tự nhiên $n$ sao cho: a. $\left(2^{3n+4}+3^{2n+1}\right)\vdots 19$ b. $\left(n.2^{n}+1\right)\vdots 3$

*Hướng dẫn giải*

a. Ta có $2^{3n+4}+3^{2n+1}=16.8^{n}+3.9^{n}$

Vì $16\equiv -3\left(\text{mod}19\right)\Rightarrow 16.8^{n}\equiv -3.8^{n}\left(\text{mod}19\right)$

$\Rightarrow \left(16.8^{n}+3.9^{n}\right)\vdots 19\Leftrightarrow \left(-3\right).8^{n}+3.9^{n}\equiv 0\left(\text{mod}19\right)$

$\Leftrightarrow 9^{n}-8^{n}\equiv 0\left(\text{mod}19\right)\Leftrightarrow 9^{n}\equiv 8^{n}\left(\text{mod}19\right)$

$\Rightarrow n=0$

vì trái lại $9^{n}\equiv 8^{n}\left(\text{mod}19\right)\Rightarrow 9\equiv 8\left(\text{mod}19\right)$ là vô lý

Vậy $n=0$.

b.Ta xét các trường hợp sau

*Trường hợp 1*

Nếu $n=3k\left(k\in N\right)\Rightarrow n.2^{n}\vdots 3\Rightarrow n.2^{n}+1\not\vdots 3\Rightarrow$ loại

*Trường hợp 2*

Nếu $n=3k+1\left(k\in N\right)\Rightarrow n.2^{n}+1=\left(3k+1\right).2^{3k+1}+1=3k.2^{3k+1}+2^{3k+1}+1=3k.2^{3k+1}+2.8^{k}+1$

$\Rightarrow n.2^{n}+1\vdots 3\Leftrightarrow \left(2.8^{k}+1\right)\vdots 3$

$8\equiv -1\left(\text{mod}3\right)\Rightarrow 8^{k}\equiv \left(-1\right)^{k}\left(\text{mod}3\right)$

$\Rightarrow 2.8^{k}+1\vdots 3\Leftrightarrow 2.\left(-1\right)^{k}+1\equiv 0\left(\text{mod}3\right)$

tương đương với k chẵn $\Leftrightarrow k=2m\left(m\in N\right)\Rightarrow n=6m+1\left(m\in N\right)$

*Trường hợp 3*

Nếu

$n=3k+2\left(k\in N\right)\Rightarrow n.2^{n}+1=\left(3k+2\right).2^{3k+2}+1$

$=3k.3^{3k+2}+2.2^{3k+2}+1=3k.2^{3k+2}+8^{k+1}+1$

$\Rightarrow \left(n.2^{n}+1\right)\vdots 3\Leftrightarrow \left(-1\right)^{k+1}+1\equiv 0\left(\text{mod}3\right)$

$\Rightarrow$ k+1 lẻ $k=2m\left(m\in N\right)\Rightarrow n=6m+2\left(m\in N\right)$

Vậy điều kiện cần tìm là $m\equiv 1\left(\text{mod}6\right)$ hoặc $m\equiv 2\left(\text{mod}6\right)$.

**Bài toán 2.** Tìm số tự nhiên n có 4 chữ số sao cho chia n cho 131 thì dư 112 và chia n cho 132 thì dư 98.

*Hướng dẫn giải*

$n \equiv 98(\text{mod}132) \Rightarrow n = 132k + 98(k \in N)(1)$

$\Rightarrow 132 + 98 \equiv 112(\text{mod}131)$

$\Rightarrow k + 98 + 33 = 112 + 33(\text{mod}131) \Rightarrow k \equiv 14(\text{mod}131)$

$\Rightarrow k \equiv 131m + 14(m \in N)(2)$

Từ (1) và (2) $n = 131.132m + 1946 \Rightarrow n = 1946$

**Dạng 4: Tìm một chữ số tận cùng**

*** Cơ sở phương pháp:**

Nếu $a \equiv r(\text{mod}10); 0 \le r < b$ thì $r$ là chữ số tận cùng của a.

Ta cần lưu ý một số tính chất sau:

*Tính chất 1*

Nếu a có chữ số tận cùng là $0;1;5;6$ thì $a^n$ cũng có chữ số tận cùng như a nghĩa là $a^n \equiv a(\text{mod}10)$

*Tính chất 2*

Nếu a có chữ số tận cùng bằng $4;9$ thì $a^2$ có chữ số tận cùng bằng $6;1$.

Nghĩa là: Nếu $a \equiv 4(\text{mod}10) \Rightarrow a^2 \equiv 6(\text{mod}10) \Rightarrow a^{2k} \equiv 6(\text{mod}10)$

Nếu $a \equiv 9(\text{mod}10) \Rightarrow a^2 \equiv 1(\text{mod}10) \Rightarrow a^{2k} \equiv 1(\text{mod}10)$

Do vậy để tìm chữ số tận cùng của $a^n$ ta chia $n$ cho 2.

*Tính chất 3*

Nếu a có chữ số tận cùng là $2;3;7;8$ thì ta áp dụng một trong các kết quả sau:

$2^{4k} \equiv 6(\text{mod}10); 3^{4k} \equiv 1(\text{mod}10); 7^{4k} \equiv 1(\text{mod}10); 8^{4k} \equiv 6(\text{mod}10)$

Do vậy để tìm chữ số tận cùng của $a^n$ ta chia n cho 4.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Cho số $A = 2012^{2013}$ tìm chữ số tận cùng của A.

*Hướng dẫn giải*

Ta có $2013 = 4.503 + 1$

Vì $2012 \equiv 2(\text{mod}10) \Rightarrow 2012^4 \equiv 6(\text{mod}10)$

$\Rightarrow \left(2012^4\right)^{503} \equiv 6(\text{mod}10) \Leftrightarrow 2012^{2012} \equiv 6(\text{mod}10)$

$\Rightarrow 2012^{2013} \equiv 6.2(\text{mod}10) \Leftrightarrow 2012^{2013} \equiv 2(\text{mod}10)$

Vậy A có chữ số tận cùng là 2.

**Bài toán 2.** Cho $B = 1978^{1986^8}$ tìm chữ số tận cùng của B.

***Hướng dẫn giải***

$1978 \equiv 8(\text{mod}10) \Rightarrow 1978^4 \equiv 6(\text{mod}10)$

$1986^8 \equiv 0(\text{mod}\,4) \Rightarrow 1986 = 4k(k \in N)$

$\Rightarrow C = 1978^{4k} \equiv 6(\text{mod}10)$

Vậy chữ số tận cùng của B là 6.

**🗁 Dạng 5: Tìm hai chữ số tận cùng**

*** Cơ sở phương pháp:** Nếu $a \equiv r(\text{mod}100); 10 \le r < 100$ thì r là chữ số tận cùng của a.

Ta cần lưu ý một số tính chất sau:

$2^{20} \equiv 76(\text{mod}100); 3^{20} \equiv 01(\text{mod}100); 6^5 \equiv (\text{mod}100)$

$7^6 \equiv 01(\text{mod}100); 5^2 \equiv 25(\text{mod}100)$

$76^n \equiv 76(\text{mod}100); 25^n \equiv 25(\text{mod}100)(\forall n \ge 2)$

Từ đó ta có: $\begin{cases} a \equiv 0(\text{mod}10) \Rightarrow a^{20k} \equiv 01(\text{mod}100) \\ a \equiv 1;3;7;9(\text{mod}10) \Rightarrow a^{20k} \equiv 01(\text{mod}100) \\ a \equiv 5(\text{mod}10) \Rightarrow a^{20k} \equiv 25(\text{mod}100) \\ a \equiv 2;4;6;8 \Rightarrow a^{20k} \equiv 76(\text{mod}100) \end{cases}$

Do vậy để tìm hai chữ số tận cùng của $a^n$ ta chia n cho 20.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Cho số $A = 2012^{2013}$ tìm hai chữ số tận cùng của A.

***Hướng dẫn giải***

Ta có

$2013 = 20.100 + 13$

$2012 \equiv 2(\text{mod}10) \Rightarrow 2012^{20} \equiv 76(\text{mod}100)$

$\Rightarrow \left(2012^{20}\right)^{100} \equiv 76(\text{mod}100) \Leftrightarrow 2012^{2000} \equiv 76(\text{mod}100)(1)$

Mặt khác $\begin{array}{l} 2012 \equiv 12(\text{mod}100) \Rightarrow 2012^6 \equiv 12^6(\text{mod}100) \Rightarrow 2012^6 \equiv 84(\text{mod}100) \\ \Rightarrow 2012^6 \equiv 56(\text{mod}100) \Rightarrow 2012^{12} \equiv 56(\text{mod}100) \Rightarrow 2012^{2013} \equiv 72(\text{mod}100)(2) \end{array}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2012^{2013} = 2012^{2000}.2012^{2013} \equiv 76.72(\text{mod}100) \Leftrightarrow 2012^{2013} \equiv 72(\text{mod}100)$

Vậy A có hai chữ số tận cùng là: 72

**Bài toán 2.** Tìm hai chữ số tận cùng của các số sau

a. $A = 7^{9^{7^9}}$ b. $B = 29^{9^{2012}}$ c. $C = 1978^{1986^8}$

***Hướng dẫn giải***

a. Vì $7^4 \equiv 01(\bmod 100)$ nên ta đi tìm số dư khi chia $9^{7^9}$ cho 4.

Ta có

$9 \equiv 1(\bmod 4) \Rightarrow 9^{7^9} \equiv 1(\bmod 4) \Rightarrow 9^{7^9} = 4k\,(k \in N)$

$\Rightarrow A = 7^{9^{7^9}} = 7^{4k+1} = 7.\left(7^4\right)^k \equiv 7.01(\bmod 100) \Rightarrow 7^{9^{7^9}} \equiv 07(\bmod 100)$

Vậy A có hai chữ số tận cùng là 07.

b. Vì $29^{10} \equiv 01(\bmod 100) \Rightarrow$ nên ta đi tìm số dư khi chia $9^{2012}$ cho 10

Ta có :

$9 \equiv -1(\bmod 10) \Rightarrow 9^{2012} \equiv 1(\bmod 10) \Rightarrow 9^{2012} = 10k + 1(k \in N)$

$\Rightarrow B = 29^{10k+1} = 29.\left(29^{10}\right)^k \equiv 29.01(\bmod 100) \Leftrightarrow B \equiv 29(\bmod 100)$

Vậy B có hai chữ số tận cùng là 29.

c. Vì $C \equiv 6(\bmod 10) \Rightarrow C^{20} \equiv 76(\bmod 100) \Rightarrow C^{20m} \equiv 76(\bmod 100)$

Mặt khác

$1986 \equiv 6(\bmod 20) \Rightarrow 1986^8 \equiv 16(\bmod 20)$

$\Rightarrow C = 1978^{20k+6} = \left(1978^{20}\right)^k .1978^{16} \equiv 1978^{16}.76(\bmod 100)$

Ta lại có :

$1978 \equiv -22(\bmod 100) \Rightarrow 1978^4 \equiv 56(\bmod 100) \Rightarrow \left(1978^4\right)^4 \equiv 56^4(\bmod 100)$

$\Rightarrow 1978^{16} \equiv 76(\bmod 100)$

$\Rightarrow C \equiv 96.76(\bmod 100) \Leftrightarrow C \equiv 76(\bmod 100)$

Vậy C có hai chữ số tận cùng là 76.

🗁 **Dạng 6: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán về số chính phương**

*** Cơ sở phương pháp:**

Số chính phương là số có dạng $n^2\,(n \in N)$

Ta đi chứng minh một số tính chất cơ bản của số chính phương bằng đồng dư :

1. Số chính phương khi chia cho 3 chỉ có hai số dư là 0 hoặc 1.

Thật vậy ta đi xét các trường hợp sau

Với $n = 3k \Rightarrow n \equiv 0(\bmod 3) \Rightarrow n^2 \equiv 0^2(\bmod 3) \Leftrightarrow n^2 \equiv 0(\bmod 3)$ số dư bằng 0

Với $n = 3k \pm 1 \Rightarrow n \equiv \pm 1(\bmod 3) \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 1)^2(\bmod 3) \Leftrightarrow n^2 \equiv 1(\bmod 3) \Rightarrow$ số dư bằng.

2. Số chính phương khi chia cho 4 chỉ có hai số dư là 0 hoặc 1.

Chứng minh tương tự :

Với $n = 4k \Rightarrow n \equiv 0(\bmod 4) \Rightarrow n^2 \equiv 0^2(\bmod 4) \Rightarrow n \equiv 0(\bmod 4) \Rightarrow$ số dư bằng 0.

Với $n = 4k \pm 1 \Rightarrow n \equiv \pm 1(\bmod 4) \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 1)^2 \bmod 4 \Leftrightarrow n^2 \equiv 1(\bmod 4) \Rightarrow$ số dư bằng 1.

Với $n = 4k + 2 \Rightarrow n \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow n^2 \equiv 2^2 = 4 \pmod 4 \Leftrightarrow n^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow$ số dư bằng 0.

3. Số chính phương khi chia cho 8 chỉ có ba số dư là 0,1 hoặc 4.

Tương tự ta xét các trường hợp sau :

$n = 8k \Rightarrow n \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow n^2 \equiv 0 \pmod 8$

$n = 8k \pm 1 \Rightarrow n \equiv \pm 1 \pmod 8 \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod 8$

$n = 8k \pm 2 \Rightarrow n \equiv \pm 2 \pmod 8 \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 2)^2 = 4 \pmod 8$

$n = 8k \pm 3 \Rightarrow n \equiv \pm 3 \pmod 8 \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 3)^2 \pmod 8 \Leftrightarrow n^2 \equiv 1 \pmod 8$

$n = 8k + 4 \Rightarrow n \equiv 4 \pmod 8 \Rightarrow n^2 \equiv 4^2 \pmod 8 \Leftrightarrow n^2 \equiv 0 \pmod 8$

Hoàn toàn tương tự ta có thể xét các trường hợp số dư của số chính phương khi chia cho 5,7,9..

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng số : $A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ với k chẵn không thể là số chính phương.

***Hướng dẫn giải***

Với k chẵn ta có

$19^k \equiv (-1)^k \pmod 4 \Rightarrow 19^k \equiv 1 \pmod 4$

$1995^k \equiv (-1)^k \pmod 4 \Rightarrow 1995^5 \equiv 1 \pmod 4$

$1996^k \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k \equiv 3 \pmod 4$

Hay A chia 3 dư 4. Vậy A không thể là số chính phương.

**Bài toán 2.** Tìm tất cả số tự nhiên x,y để $2^x + 5^y$ là số chính phương.

***Hướng dẫn giải***

Giả sử $2^x + 5^y = k^2$ (k thuộc N)

Nếu x = 0 thì $1 + 5^y = k^2$ do đó k chẵn => $k^2$ chia hết cho 4 nhưng $1+5^y$ chia 4 dư 2.

Vậy x khác 0, từ $2^x + 5^y = k^2$ => k lẻ và k không chia hết cho 5. Xét hai trường hợp.

+) Với $y = 0$ thì $2^x + 1 = k^2 = (2n+1)^2$ (vì k lẻ nên $k = 2n+1, n \in N$ ).

$\Rightarrow 2^x = 4n(n+1) \Rightarrow n = 1$. Khi đó x = 3; y = 0 (thỏa mãn)

Thử lại: $2^x + 5^y = 2^3 + 5^0 = 9$ là số chính phương.

+) Với $y \neq 0$ và $k$ không chia hết cho 5 $\Rightarrow k^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$

Từ $2^x + 5^y = k^2 \Rightarrow 2^x \equiv \pm 1 \pmod 5 \Rightarrow x$ chẵn

Đặt $x = 2x_1$ $(x_1 \in N)$, ta có

$5^y=(k+2^{x_1})(k-2^{x_1})$

$\Rightarrow\begin{cases}k+2^{x_1}=5^{y_1}\\k-2^{x_1}=5^{y_2}\end{cases}$ với $y_1+y_2=y$ với $y_1>y_2$, $y_1$, $y_2$ là các số tự nhiên.

$\Rightarrow 2^{x_1+1}=5^{y_2}(5^{y_1-y_2}-1)\Rightarrow 5^{y_2}=1\Rightarrow y_2=0$ .

$\Rightarrow y_1=y$. Khi đó $2^{x_1+1}=5^y-1$.

Nếu $y=2t\,(t\in N)$ thì $2^{x_1+1}=5^{2t}-1=25^t-1\vdots 3$ , vô lý

Vậy y lẻ, khi đó $2^{x_1+1}=5^y-1=4(5^{y-1}+5^{y-2}+...+5+1)$.

Nếu $y>1$ thì $5^{y-1}+5^{y-2}+..+1$,lẻ (vô lý).

Nếu $y=1\Rightarrow x_1=1$ khi đó $x=2; y=1$.

Thử lại $2^x+5^y=2^2+5^1=9$ là số chính phương

Vậy $x=2; y=1$ hoặc x = 3, y = 0.

**Bài toán 3.** Giả sử rằng $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $5n+3$ là một hợp số.

***Hướng dẫn giải***

Giả sử $2n+1=a^2$ và $3n+1=b^2$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ . Khi đó $5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4a^2-b^2$ $=(2a-b)(2a+b)$.

Do $a^2\equiv 1(mod 2)$ nên $a^2\equiv 1(mod\ 4)$ . Suy ra $n\equiv 0\ (\text{mod}\ 2)$ và $b\equiv 1(\text{mod}\ 2)$ . Do đó $2a-b>1$ và $2a+b>1$ . Vậy $5n+3$ là hợp số.

**Bài toán 3.** Tìm nghiệm nguyên dương *x* để $3^x+171$ là số chính phương.

*(HSG Lai Châu 2015 - 2016)*

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $3^x\equiv 1,3(mod 8)$; $y^2\equiv 0,1,4(mod 8)$. Mà: $3^x+171=y^2\Rightarrow 3^x\equiv 1(mod 8)$. Do đó: x có dạng 2k $(k\in\mathbb{N})$.

Phương trình trở thành $A=\left(3^k\right)^2+171=y^2$ với k = 0, 1, 2 thì phương trình vô nghiệm nên nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó phải $\geq 3$. Do đó theo nguyên lý kẹp được ta có: $\left[\left(3^k\right)^2+3\right]^2\geq a>\left(3^k\right)^2$.

Khi đó: $A=\left[\left(3^k\right)^2+3\right]^2$ hoặc $A=\left[\left(3^k\right)^2+2\right]^2$

Giải từng trường hợp ra ta được k = 3 $\Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 30$. Vậy x = 6.

### 🗁 Dạng 7: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán về số nguyên tố, hợp số

*** Cơ sở phương pháp:** Đối với nhiều bài toán về số nguyên tố và hợp số ngoài sử dụng các tính chất về số nguyên tố chúng ta còn phải vận dụng các tính chất của đồng dư thức và định lý Fermat.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Tìm tất cả các số nguyên tố $p$ sao cho $p^2+14$ là số nguyên tố

***Hướng dẫn giải***

Ta xét hai trường hợp sau

*Trường hợp 1*

Với $p=3 \Rightarrow p^2+14=23$ là số nguyên tố

*Trường hợp 2*

Với $p \neq 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow p^2+14 \vdots 3 \left(p^2+14>3\right) \Rightarrow$ $p^2+14$ không phải là số nguyên tố.

Vậy $p=3$.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố $p$ đều tồn tại vô số số tự nhiên $n$ sao cho $2^n - n \vdots p$.

***Hướng dẫn giải***

Ta xét hai trường hợp sau

*Trường hợp 1*

Nếu $p=2 \Rightarrow 2^n - n \vdots 2 \left(\forall n = 2k; k \in N\right)$

*Trường hợp 2*

Nếu $p>2 \Rightarrow 2^{p-1} \equiv 1 \left(\bmod p\right)$

Theo định lý Fermat$\Rightarrow 2^{(p-1)k} - (p-1)k \equiv 1+k \left(\bmod p\right) \left(\forall k \in N\right)$

Do đó với mọi số tự nhiên n có dạng $n = (p-1)(hp-1)\left(k \in N^*\right)$

Ta có $2^n - n \equiv 1 + (hp-1) \equiv 0 \left(\bmod p\right)$ tức là $2^n - n \vdots p$

**Bài toán 3.** Cho $n \in N^*$ chứng minh rằng: $19.8^n + 17$ là hợp số.

***Hướng dẫn giải***

Ta xét các trường hợp sau

*Trường hợp 1*

Nếu $n=2k \Rightarrow 19.8^n+17 \equiv 1.(-1)^{2k}+2=3 \equiv 0 \left(\bmod 3\right) \Rightarrow 19.8^n+17 \vdots 3$

Mặt khác $19.8^n + 17 > 3 \Rightarrow 19.8^n + 17$ là hợp số.

*Trường hợp 2*

$n = 4k+1 \Rightarrow 19.8^n + 17 = 19.8^{4k+1} + 17 = 19.8.64^{2k} + 17 \equiv 6.8.(-1)^{2k} + 4 \equiv 52 \equiv 0 \pmod{13}$ Mà $19.8^n + 17 > 3 \Rightarrow 19.8^n + 17$ là hợp số

*Trường hợp 3*

$n = 4k+3 \Rightarrow 19.8^n + 17 = 19.8^{4k+3} + 17 = 19.8.64^{2k+1} + 17 \equiv (-1).3.(-1)^{2k+1} + 2 \equiv 5 \equiv 0 \pmod{3}$

$\Rightarrow 19.8^n + 17 \vdots 5$

Mà $19.8^n + 17 > 5 \Rightarrow 19.8^n + 17$ là hợp số.

**Bài toán 4.** Cho $p$ là số nguyên tố lớn hơn 8. Chứng min rằng : $(3^p - 2^p - 1) \vdots 42p$

***Hướng dẫn giải***

Ta có $42p = 2.3.7.9$ để chứng minh $A = 3^p - 2^p - 1$ chia hết cho $42p$ ta chỉ cần chỉ ra rằng A chia hết cho 2,3,7

Thật vậy

Ta có $A \equiv 1^p - 0 - 1 = 0 \pmod{2} \Rightarrow A \vdots 2$

Vì $p$ là số nguyên tố lớn hơn 8 nên $p$ là số lẻ :

$p = 2k+1 \Rightarrow A = 3^p - 2^{2k+1} - 1 \equiv 0 - 4^k.2 - 1 \equiv -1.2 - 1 \equiv -3 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow A \vdots 3$

Mặt khác $A = 3^{2k+1} - 2^{2k+1} - 1 = 3.9^k - 2^{2k+1} - 1 \equiv 3.2^k - 2^{2k+1} - 1 = -(2^k - 1)(2^{2k+1} - 1) \pmod{7}$

Do $p = 2k+3$ không chia hết cho $3 \Rightarrow k \vdots 3$ hoặc $k + 1 \vdots 3$

Ta xét các trường hợp sau:

*Trường hợp 1*

Nếu $k = 3h (h \in N) \Rightarrow 2^k - 1 = 8^h - 1 \vdots 7$

*Trường hợp 2*

Tương tự nếu $k + 1 \vdots 3 \Rightarrow 2^{k+1} - 1 \vdots 7$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $A \vdots 7$

Theo định lý Fermat ta có $A = 3^p - 2^p - 1 = (3^p - 3) - (2^p - 2) \vdots p$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

🗁 **Dạng 8: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán giải phương trình nghiệm nguyên**

*** Cơ sở phương pháp:** Trong giải phương trình nghiệm nguyên việc lựa chọn môđun một cách thích hợp sẽ giúp việc giải các phương trình khó phức tạp trở nên đơn giản hơn. Đặc biệt là các bài toán chứng minh phương trình nghiệm nguyên vô nghiệm.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$ b) $x^2 + y^2 = 1999$

***Hướng dẫn giải***

- Nhận xét: Số chính phương chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1

a) Ta có: $\left.\begin{matrix} x^2 \equiv 0,1 \pmod 4 \\ y^2 \equiv 0,1 \pmod 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 - y^2 \equiv 0,1,3 \pmod 4$

Mà 1998 chia cho 4 dư 2, nên phương trình không có nghiệm nguyên.

b) Ta có: $\left.\begin{matrix} x^2 \equiv 0,1 \pmod 4 \\ y^2 \equiv 0,1 \pmod 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 \equiv 0,1,2 \pmod 4$

Mà 1999 chia cho 4 dư 3, nên phương trình không có nghiệm nguyên.

**Bài toán 2.** Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$ (1)

***Hướng dẫn giải***

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2 = 2(y-2)^2 - 5$

- Nhận xét: Số chính phương chia cho 8 chỉ có số dư 0, 1 hoặc 4

Ta có: $x^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8$

$$\left.\begin{matrix} (y-2)^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8 \Rightarrow 2(y-2)^2 \equiv 0,2 \pmod 8 \\ -5 \equiv 3 \pmod 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2(y-2)^2 - 5 \equiv 3,5 \pmod 8$$

Suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

**Bài toán 3.** Phương trình $z^2 = (x^2-1).(y^2-1) + 2013$ có nghiệm nguyên dương hay không?

***Hướng dẫn giải***

Ta có:

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} x^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8 \Rightarrow x^2 - 1 \equiv 0,3,7 \pmod 8 \\ y^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8 \Rightarrow y^2 - 1 \equiv 0,3,7 \pmod 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x^2-1)(y^2-1) \equiv 0,1,5 \pmod 8 \\ 2013 \equiv 5 \pmod 8 \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow (x^2-1)(y^2-1) + 2013 \equiv 5,6,2 \pmod 8$

Mà $z^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8$

Suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

🗁 **Dạng 8: Sử dụng các định lý (ta thừa nhận không chứng minh)**

*** Cơ sở phương pháp:**

**1. Định lý Fermat bé.** Cho a là số nguyên dương và p là số nguyên tố. Khi đó ta luôn có $a^p \equiv a$ (mod p). Đặc biệt nếu (a, p) =1thì $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).

**2. Định lý Wilson.** Với mọi số nguyên tố p thì (p – 1)! ≡–1(mod p).

**3. Định lý Euler.** Cho m là số nguyên dương và a là số nguyên tố cùng nhau với m; φ(m) là số các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m. Khi đó $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

*Chú ý*: Nếu số nguyên dương m có dạng phân tích thành thừa số nguyên tố: m = $p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.....p_k^{\alpha_k}$ thì $\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Cho $a,b \in Z;(a,b)=1$ Chứn minh rằng : $a^3-2b^3$ không chia hết cho 19.

*Hướng dẫn giải*

Ta chứng minh bằng phản chứng như sau:

Giả sử $(a^3-2b^3) \vdots 19$ khi đó $(a^3)^6-(2b^3)^6 \vdots (a^3-2b^3) \vdots 19$.

Mặt khác $(a^3)^6-(2b^3)^6 = a^{18}-64b^{18}$ . Nếu $a,b$ không chia hết cho 19 thì theo định lý Fermat *(Định lý Fermat: $a^p \equiv a(\text{mod } p) \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$ Với mọi a nguyên và p nguyên tố).*

$\Rightarrow a^{18} \equiv b^{18} \equiv 1(\text{mod} 19) \Rightarrow a^{18}-64b^{18} \equiv 1-64=-63 \not\equiv 0(\text{mod} 19)$ (Vô lý)

Nếu một trong hai số chia hết cho 19 thì từ $(a^3-2b^3) \vdots 19 \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 19 \\ b \vdots 19 \end{cases} \Rightarrow$ vô lý vì $(a,b)=1$.

Vậy $a^3-2b^3$ không chia hết cho 19.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì :

$$2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+2007 \text{ chia hết cho } 22$$

*Hướng dẫn giải*

Theo Định lý Fermat bé ta có $2^{10} \equiv 1$(mod 11) ; $3^{10} \equiv 1$(mod 11)

Ta có $3^4 = 81 \equiv 1$(mod 10) ⇒ $3^{4n+1} = 3.(3^4)^n \equiv 3$(mod 10)

⇒ $3^{4n+1} = 10k + 3$ , (k ∈ N)

Mặt khác $2^4 = 16 \equiv 1$ (mod 5) ⇒ $2^{4n} \equiv 1$(mod 5)

⇒ $2^{4n+1} = 2.(2^4)^n \equiv 2$ (mod 10) ⇒ $2^{4n+1} = 10t + 2$ , (t ∈ N)

Do đó $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+2007 = 2^{10k+3}+3^{10t+2}+2002+5$

$= 2^3.\left(2^{10}\right)^k + 3^2.\left(3^{10}\right)^t + 22.91 + 5 \equiv 2^3 + 3^2 + 0 + 5 \equiv 0 \pmod{11}$

Mà $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 \vdots 2$ (vì $2^{3^{4n+1}}$ là số chẵn $3^{2^{4n+1}}$ là số lẻ $2007$ là số lẻ).

Do $(2 ; 11) = 1$ nên $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 \vdots 22$.

**Bài toán 3.** Cho $a_1 ; a_2 ; ... ; a_{2016}$ là 2016 số nguyên dương . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5 \vdots 30$ là $a_1 + a_2 + ... + a_{2016} \vdots 30$.

*Hướng dẫn giải*

Theo định lý Fermat bé , do 2; 3; 5 là các số nguyên tố và a là số nguyên dương bất kỳ ta có :

$a^2 \equiv a \pmod 2 \Rightarrow a^4 = (a^2)^2 \equiv a^2 \equiv a \pmod 2 \Rightarrow a^5 \equiv a \pmod 2$

$a^3 \equiv a \pmod 3 \Rightarrow a^5 = a^3.\ a^2 \equiv a.a^2 \equiv a^3 \equiv a \pmod 3$

$a^5 \equiv a \pmod 5$

Theo tính chất nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo mô đun là BCNN của các môđun ấy.

Do đó $a^5 \equiv a \pmod{2.3.5}$ hay $a^5 \equiv a \pmod{30} \Rightarrow a^5 - a \equiv 0 \pmod{30}$

Nghĩa là $\left(a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5\right) - (a_1 + a_2 + ... + a_{2016}) \equiv 0 \pmod{30}$

Vậy $a_1 + a_2 + ... + a_{2016} \vdots 30 \Leftrightarrow a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5 \vdots 30$

**Bài toán 3.** Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho $10^5$.

*(Đề thi học sinh giỏi toán cấp 2 toàn quốc năm 1983).*

*Hướng dẫn giải*

Vì 1983 không chia hết cho 2 và không chia hết cho 5 mà $10^5 = 2^5.5^5$ nên $(1983; 10^5) = 1$. Áp dụng định lý Euler ta có :

$$1983^{\varphi\left(10^5\right)} \equiv 1\left(\bmod 10^5\right).$$

Ta có $\varphi\left(10^5\right) = 10^5\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4.10^4$ . Nghĩa là $1983^{4.10^4} - 1 \vdots 10^5$

Vậy $k = 4.\ 10^4$.

**B. BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**Bài 1.** Chứng minh $4^{2018} - 7 \vdots 9$

**Bài 2**: Chứng minh rằng với mọi số nguyên

$A = \left(n^n - n^2 + n - 1\right) \vdots (n-1)^2 \quad (\forall n \in Z, n > 1)$

**Bài 3.** Chứng minh rằng: $\left(9^n + 1\right)$ không chia hết cho $100\left(\forall n \in N\right)$

**Bài 4.** Cho số a = $\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ $(1 \le a_n \le 9\,;\ 0 \le a_i \le 9;\ i = 0;\ 1;\ ...;\ n-1)$

Hãy xác định dấu hiệu chia hết :

a) Cho 3; b) Cho 4.

**Bài 5.** Chứng minh rằng: $A = \left(1924^{2003^{2004^n}} + 1920\right) \vdots 124\left(\forall n \in N^*\right)$

**Bài 6.** a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của $3^{1000}$

**Bài 7.** Tìm số dư trong phép chia

a) $8! - 1$ cho 11. b) $2014^{2015} + 2016^{2015} + 2018$ cho 5.

c) $2^{50} + 41^{65}$ cho 7 d) $1^5 + 3^5 + 5^5 + ... + 97^5 + 99^5$ cho 4.

**Bài 8.** Tìm số dư trong phép chia :

a) $1532^5 - 4$ cho 9 ; b) $2^{2000}$ cho 25;

c) $2014^{2015^{2016}}$ cho 13.

**Bài 9.** Tìm số dư trong phép chia :

a) $A = 35^2 - 35^3 + 35^4 - 35^8 + 35^{16} + 35^{32}$ cho 425.

b) $B = 10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + ... + 10^{10^{10}}$ cho 7.

**Bài 10.** a) Tìm chữ số tận cùng của $4^{3^2}$

b) Tìm hai chữ số tận cùng của $3^{999}$.

c) Tìm ba chữ số tận cùng của số $2^{512}$.

**Bài 11.** Chứng minh :

a) $41^{2015} - 6 \vdots 7$ ; b) $2^{4n+1} - 2 \vdots 15$ $(n \in N)$;

c) $3^{76} - 2^{76} \vdots 13$ ; d) $20^{15} - 1 \vdots 341$.

**Bài 12.** Chứng minh $1890^{79} + 1945^{2015} + 2017^{2018} \vdots 7$.

**Bài 13.** a) Chứng minh $5555^{2222} + 2222^{5555} + 15554^{1111} \vdots 7$

b) Cho $M = 220^{119^{69}} + 119^{69^{220}} + 69^{220^{119}} + (220 + 119 + 69)^{102}$

Chứng minh $M \vdots 102$.

**Bài 14.** Chứng minh rằng $5^{2n-1} . 2^{n+1} + 2^{2n-1} . 3^{n+1} \vdots 38$ $(n \in N^*)$

**Bài 15.** Cho số a = $\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ $(1 \le a_n \le 9\,;\ 0 \le a_i \le 9;\ i = 0;\ 1;\ ...;\ n-1)$

Hãy xác định dấu hiệu chia hết :

a) Cho 9; b) Cho 25; c) Cho 11; d) Cho 8.

**Bài 16.** Cho $A = 2^{2^{10n+1}} + 19$ với $n \in N^*$. Chứng minh rằng A là một hợp số.

**Bài 17.** Cho B = $(12!)^{13} + 2016^{2015}$. Chứng minh rằng B chia hết cho 13.

**Bài 18.** Chứng minh rằng với $n \in N$ :

a) $2^{2^{2n+1}} + 3.2^{3n} \vdots 7$ ;

b) $2^{2^{4n+1}} + 2.12^{5n+1} + 5.10^{2n} \vdots 11$.

**Bài 19.** a) Với giá trị nào của số tự nhiên n thì $3^n + 63$ chia hết cho 72.

b) Cho $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$ . Tìm giá trị tự nhiên của n để $A \vdots 323$.

**Bài 20.** Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + 1 \vdots p$ .

**Bài 21.** Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 20$ là số nguyên tố .

**Bài 22.** Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng số $ab^p - ba^p \vdots p$ với mọi số nguyên dương a, b.

**Bài 23.** a) Chứng minh rằng tổng các bình phương của ba số nguyên trong phép chia cho 8 không thể có dư là 7.

b) Chứng minh phương trình $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 2015$ không có nghiệm nguyên.

**Bài 24.** Tìm hai chữ số tận cùng của $2011^{2010^{2009}}$

*(Đề thi Olympic Toán Singapore năm 2010)*

**Bài 25.** Cho biểu thức $A = (a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}) - (a^{2008} + b^{2008} + c^{2008})$ với a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho 30.

*(Đề thi chọn học sinh giỏi môn toán lớp 9 TP Hà Nội năm học 2011 – 2012)*

**Bài 26.** Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên (x; y; z) thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

*(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2011 – 2012).*

**Bài 27.** Tìm hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$.

*(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2012 – 2013).*

**Bài 28.** Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn a + 20 và b + 13 cùng chia hết cho 21. Tìm số dư trong phép chia $A = 4^a + 9^b + a + b$ cho 21.

*(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Trần Phú Hải Phòng năm học 2013 – 2014)*

**Bài 29.** Cho n là một số nguyên dương chứng minh $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số.

*(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP Hà Nội năm học 2014 – 2015)*

**Bài 30.** Chứng minh $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

*(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh năm học 2015 – 2016)*

**Bài 31.** Chứng minh rằng phương trình : $x^{15} + y^{15} + z^{15} = 19^{2003} + 7^{2003} + 9^{2003}$ không có nghiệm nguyên.

**Bài 32.** Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x(x+3)+y(y+3)=z(z+3)$ với điều kiện $x, y$ là các số nguyên tố.

**Bài 33.** Chứng minh $(2013^{2016}+2014^{2016}-2015^{2016})^{10} \vdots 106$

**Bài 34.** Chứng minh rằng $1^{4k}+2^{4k}+3^{4k}+4^{4k}$ không chia hết cho 5.

**Bài 35.** Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p tồn tại vô số số có dạng $2^n - n$, $(n \in N)$ chia hết cho p.

# HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

**Bài 1.**

Ta có $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow 4^{2016} = \left(4^3\right)^{672} \equiv 1 \pmod 9$

Mặt khác $4^2 = 16 \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow 4^{2018} = 4^{2016}.4^2 \equiv 1.7 \pmod 9$

Vậy $4^{2018}-7 \equiv 0 \pmod 9$ hay $4^{2018}-7 \vdots 9$.

**Bài 2.**

Trường hợp 1:

Với $n=2 \Rightarrow A=1 \vdots (2-1)^2$ luôn đúng

Trường hợp 2:

Với $n>2 \Rightarrow A=n^2\left(n^{n-2}-1\right)+(n-1)=n^2(n-1)\left(n^{n-3}+n^{n-4}+...+1\right)+(n-1)$

$=(n-1)\left(n^{n-1}+n^{n-2}+...+n^2+1\right)$

Mặt khác

$n \equiv 1(\bmod(n-1)) \Rightarrow n^k \equiv 1(\bmod(n-1))(\forall k \in N)$

$\Rightarrow n^{n-1}+n^{n-2}+...+n^2 \equiv n-2(\bmod(n-1))$

$\Rightarrow n^{n-1}+...+n^2+1 \equiv n-1(\bmod(n-1))$

$n^{n-1}+...+n^2+1 \equiv 0(\bmod(n-1))(1)$

$\Rightarrow (n-1)\left(n^{n-1}+..+n^2+1\right) \equiv 0\left(\bmod(n-1)^2\right)$

$\Rightarrow A=\left(n^n-n^2+n-1\right) \vdots (n-1)^2$

**Bài 3.**

*Trường hợp 1:*

Với $n=0 \Rightarrow 9^n+1=2$ không chia hết cho 100.

hoặc $n=1 \Rightarrow 9^n+1=10$ không chia hết cho 100.

*Trường hợp 2:*

$n \geq 2$ Ta đi xét 2 khả năng sau:

*Khả năng 1:*

Với n chẵn $n = 2k\left(k \in N^*\right) \Rightarrow 9^n + 1 = 9^{2k} + 1 \equiv 2\left(\bmod 10\right)$

$\Rightarrow \left(9^n + 1\right)$ không chia hết cho 10. $\Rightarrow \left(9^n + 1\right)$ không chia hết cho 100.

*Khả năng 2:*

Với n lẻ $n = 2k + 1\left(n \in N^*\right) \Rightarrow 9^n + 1 = 9.81^k + 1 \equiv 2\left(\bmod 4\right)$

$\Rightarrow \left(9^n + 1\right)$ không chia hết cho 4. $\Rightarrow \left(9^n + 1\right)$ không chia hết cho 100.

**Bài 4.**

Ta có a = $\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ = $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0$ .

a) Ta có $10 \equiv 1 (\bmod 3)$ do đó $a_i.\, 10^i \equiv a_i (\bmod 3)$ , i = 1; 2; 3; ...; n

Do đó $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0 \equiv (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) (\bmod 3)$

Vậy $a \,\vdots\, 3 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \equiv 0 (\bmod 3)$

$\Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \,\vdots\, 3$.

b) Ta có $10^2 = 100 \equiv 0 (\bmod 4) \Rightarrow a_i.\, 10^i \equiv 0 (\bmod 4)$ , i = 2; 3; ...; n

$\Rightarrow a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0 \equiv (a_1.10 + a_0) (\bmod 4)$

Vậy $a \,\vdots\, 4 \Leftrightarrow a_1.\, 10 + a_0 \equiv 0 (\bmod 4) \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \,\vdots\, 4$.

**Bài 5.** Ta có $124 = 4.31 \Rightarrow A \equiv 0\left(\bmod 4\right)$

Do vậy để chứng minh $A \vdots 124$ ta đi chứng minh $A \vdots 31$

Thật vậy : $1924 \equiv 2\left(\bmod 31\right); 1920 \equiv -2\left(\bmod 31\right) \Rightarrow A \equiv 2^{2003^{2004^n}} - 2\left(\bmod 31\right)(*)$

Mặt khác : $2^5 = 32 \equiv 1\left(\bmod 31\right)$. Ta đi tìm số dư của $2003^{2004^n}$ khi chia cho5.

$2004^n \equiv 0\left(\bmod 4\right) \Rightarrow 2004^n = 4k \Rightarrow 2003^{2004^n} = 2003^{4k}$

$2003 \equiv 3\left(\bmod 5\right) \Rightarrow 2003^{4k} \equiv 3^{4k} \equiv 81^k \equiv 1\left(\bmod 5\right)$

$\Rightarrow 2003^{2004^n} \equiv 1\left(\bmod 5\right) \Rightarrow 2003^{2004^n} = 5m + 1$

$\Rightarrow 2^{2003^{2004^n}} = 2^{5m+1} = 2.\left(2^5\right)^m \equiv 2\left(\bmod 31\right)$

Thay vào (*) ta có $A \equiv 0\left(\bmod 31\right) \Rightarrow A \vdots 31$

**Bài 6.**

a) Tìm chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 10. Vì $9^{2n+1} = 9.81^n \equiv 9(\bmod 10)$. Do $9^{10}$ là số lẻ nên số $9^{9^{10}}$ có chữ số tận cùng là 9.

b) Tìm hai chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 100.

Ta có $3^4 = 81 \equiv -19(\bmod 100) \Rightarrow 3^8 \equiv (-19)^2(\bmod 100)$

Mà $(-19)^2 = 361 \equiv 61(\bmod 100)$ Vậy $3^8 \equiv 61(\bmod 100)$

$3^{10} \equiv 61.9 \equiv 549 \equiv 49 (\bmod 100)$

$3^{20} \equiv 49^2 \equiv 01 \pmod{100}$ ( do $49^2 = 2401 = 24.100 + 1$)

Do đó $3^{1000} \equiv 01 \pmod{100}$ nghĩa là hai chữ số sau cùng của $3^{1000}$ là 01.

**Bài 7.** Với những bài toán dạng này, phương pháp chung là tính toán để đi đến $a \equiv b \pmod{m}$ với b là số có trị tuyệt đối nhỏ nhất có thể được (tốt nhất là $b = \pm 1$) từ đó tính được thuận lợi $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

a) $8! = 1.2.3.4.5.6.7.8.$

Ta có $3.4 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$ ; $2.6 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$ ; $7.8 \equiv 1 \pmod{11}$ Vậy $8! \equiv 5 \pmod{11}$ $\Rightarrow 8! - 1 \equiv 4 \pmod{11}$. Số dư trong phép chia $8! - 1$ cho 11 là 4.

b) $2014 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 2014^{2015} \equiv -1 \pmod{5}$

$2016 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2016^{2015} \equiv 1 \pmod{5}$ ; $2018 \equiv 3 \pmod{5}$

$2014^{2015} + 2016^{2015} + 2018 \equiv 3 \pmod{5}$.

c) $2^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2^{50} = (2^3)^{16}.\ 4 \equiv 4 \pmod{7}$

$41 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 41^{65} \equiv (-1)^{65} \equiv -1 \pmod{7}$

$2^{50} + 41^{65} \equiv 4 - 1 \equiv 3 \pmod{7}$.

d) $1^5 \equiv 1 \pmod{4}$; $3^5 \equiv -1 \pmod{4}$ ; $5^5 \equiv 1 \pmod{4}$ ; ...;

$97^5 \equiv 1 \pmod{4}$; $99^5 \equiv -1 \pmod{4}$. Đáp số : Dư 0 .

**Bài 8.** a) $1532 \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 \equiv 2^5 \equiv 5 \pmod{9}$

$\Rightarrow 1532^5 - 4 \equiv 1 \pmod{9}$

b) $2^5 = 32 \equiv 7 \pmod{25} \Rightarrow 2^{10} = (2^5)^2 \equiv 7^2 \equiv -1 \pmod{25}$.

$2^{2000} = (2^{10})^{200} \equiv (-1)^{200} \equiv 1 \pmod{25}$.

c) $2014 = 155.13 - 1$ nên $2014 \equiv -1 \pmod{13}$; $2015^{2016} = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow 2014^{2015^{2016}} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{13}$. Đáp số : dư 12.

**Bài 9.** a) Ta có $35^2 = 1225 = 425.3 - 50 \equiv -50 \pmod{425}$

$35^3 = 35^2.\ 35 \equiv -50.\ 35 \equiv -1750 \equiv -50 \pmod{425}$

$35^4 = (35^2)^2 \equiv (-50)^2 \equiv 2500 \equiv -50 \pmod{425}$

Tương tự với $35^8$; $35^{16}$; $35^{32}$. Từ đó có $A \equiv -100 \pmod{425}$.

Hay số dư trong phép chia A cho 425 là 325.

b) Ta có $10^5 = 7.14285 + 5 \equiv 5 \pmod{7}$; $10^6 = 5.10 \equiv 1 \pmod{7}$;

$10^n - 4 = \underbrace{\overline{99...96}}_{n-1\,\text{số}\,9} \equiv 0 \pmod{2}$ và $\underbrace{\overline{99...96}}_{n-1\,\text{số}\,9} \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 10^n - 4 \equiv 0 \pmod{6}$

$\Rightarrow 10^n \equiv 4 \pmod{6}$ và $10^n = 6k + 4$ $(k, n \in \mathbb{N}^*)$.

Do đó $10^{10^n} = 10^{6k+4} = \left(10^6\right)^k.10^4 \equiv 10^4 \pmod{7}$

Vậy $B \equiv 10^4 + 10^4 + 10^4 + ... + 10^4 \equiv 10.\ 10^4 \equiv 10^5 \equiv 5 \pmod{7}$.

**Bài 10.** a) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 10.

Vì $4^2 \equiv 6 \pmod{10}$ nên $4^{3^2} = 4^9 = (4^2)^4.4 \equiv 6.4 \equiv 4 \pmod{10}$ $\Rightarrow$ chữ số tận cùng là 4.

b) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 100. Theo ví dụ 3 chuyên đề 26 ta đã có $3^{1000} \equiv 01$ (mod 100) nghĩa là hai chữ số sau cùng của $3^{1000}$ là 01. Số $3^{1000}$ là bội số của 3 nên chữ số hàng trăm của nó khi chia cho 3 phải có số dư là 2 để chia tiếp thì 201 chia hết cho 3 ( nếu số dư là 0 hay 1 thì 001; 101 đều không chia hết cho 3). Vậy số $3^{999} = 3^{1000} : 3$ có hai chữ sô tận cùng bằng $201 : 3 = 67$.

c) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 1000. Do $1000 = 125.8$ trước hết ta tìm số dư của $2^{512}$ cho 125. Từ hằng đẳng thức:

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ ta có nhận xét nếu $a \vdots 25$ thì $(a + b)^5 \equiv b^5 \pmod{125}$.

Vì $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$ nên $2^{10} = 25k - 1$ $(k \in N)$.

Từ nhận xét trên ta có $2^{50} = (2^{10})^5 = (25k - 1)^5 \equiv -1 \pmod{125}$

Vì vậy $2^{512} = (2^{50})^{10}.\, 2^{12} \equiv (-1)^{10}.\, 2^{12} \equiv 2^{12} \pmod{125}$.

Do $2^{12} = 2^{10}\,.\, 2^2 = 1024.\,4 \equiv 24.4 \equiv 96 \pmod{125}$. Vậy $2^{512} \equiv 96 \pmod{125}$.

Hay $2^{512} = 125m + 96$, $m \in N$ . Do $2^{512} \vdots 8$ ; $96 \vdots 8$ nên $m \vdots 8 \Rightarrow m = 8n$ $(n \in N)$.

$2^{512} = 125.\,8n + 96 = 1000n + 96$. Vậy ba chữ số tận cùng của số $2^{512}$ là 096.

**Bài 11.** Để chứng tỏ $a \vdots m$ ta chứng minh $a \equiv 0 \pmod{m}$

a) $41 = 42 - 1 \equiv -1 \pmod 7$. Do đó $41^{2015} \equiv (-1)^{2015} \equiv -1 \pmod 7$

Hay $41^{2015} \equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow 41^{2015} - 6 \equiv 0 \pmod 7$

b) Ta có $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 2^{4n} - 1 \equiv 0 \pmod{15}$

Do đó $2^{4n+1} - 2 = 2(2^{4n} - 1) \equiv 0 \pmod{15}$.

c) Ta có $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$ ; $3^{76} = (3^3)^{25}.3 \equiv 3 \pmod{13}$

Ta có $2^4 \equiv 3 \pmod{13} \Rightarrow 2^6 \equiv 12 \equiv -1 \pmod{13}$

$2^{76} = (2^6)^{12}.\, 2^4 \equiv 3 \pmod{13}$

Do đó $3^{76} - 2^{76} \equiv 0 \pmod{13}$ hay $3^{76} - 2^{76} \vdots 13$

d) $341 = 11\,.\,31$

* Ta có $2^5 = 32 \equiv -1 \pmod{11}$ ; $20 = 22 - 2 \equiv -2 \pmod{11}$

Do đó $20^{15} \equiv (-2)^{15} \equiv -(2^5)^3 \equiv 1 \pmod{11}$

* $20^{15} = (2^5)^3.\,(5^3)^5 \equiv 1 \pmod{31}$ do $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ và $5^3 \equiv 1 \pmod{31}$

Do đó $20^{15} \equiv 1 \pmod{11.31}$ hay $20^{15} \equiv 1 \pmod{341} \Rightarrow 20^{15} - 1 \vdots 341$

**Bài 12.** $1890 \equiv 0 \pmod 7$ ; $1945 \equiv -1 \pmod 7$ ; $2017 \equiv 1 \pmod 7$

$1890^{79} \equiv 0 \pmod 7$ ; $1945^{2015} \equiv -1 \pmod 7$ ; $2017^{2018} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow$ đpcm.

**Bài 13.** a)Ta có $5555 = 793.7 + 4 \equiv 4 \pmod 7$; $2222 = 318.7 - 4 \equiv -4 \pmod 7$

$\Rightarrow 5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 4^{2222} + (-4)^{5555} \equiv -4^{2222}(4^{3333} - 1) \pmod 7$

Do $4^{3333} - 1 = \left[\left(4^3\right)^{1111} - 1\right]$ ; $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 7$ nên $(4^3)^{1111} \equiv 1 \pmod 7$

Hay $4^{3333} - 1 \equiv 0 \pmod 7$ . Do đó $5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 0 \pmod 7$ và

$15554^{1111} = (2.\ 7777)^{1111} = 2^{1111}.\ 7777^{1111} \equiv 0 \pmod 7$ $\Rightarrow$ đpcm.

b) Ta có 102 = 2.3.17. Ta có $(220 + 119 + 69)^{102} \equiv 0 \pmod{102}$

*$220 \equiv 0 \pmod 2$ ; $119 \equiv -1 \pmod 2$ ; $69 \equiv 1 \pmod 2$ $\Rightarrow$ $M \equiv 0 \pmod 2$

*$220 \equiv 1 \pmod 3$ ; $119 \equiv -1 \pmod 3$ ; $69 \equiv 0 \pmod 3$ $\Rightarrow$ $M \equiv 0 \pmod 3$

*$220 \equiv -1 \pmod{17}$;$119 \equiv 0 \pmod{17}$ ; $69 \equiv 1 \pmod{17}$ $\Rightarrow$ $M \equiv 0 \pmod{17}$

(Để ý $119^{69}$ và $69^{220}$ là các số lẻ) ; $\Rightarrow M \equiv 0 \pmod{2.3.17}$. Hay $M \vdots 102$

**Bài 14.** Đặt $A = 5^{2n-1}.\ 2^{n+1} + 2^{2n-1}.\ 3^{n+1}$ . Ta có $A \vdots 2$, $\forall n \in N^*$ ;

Ta có $A = 2^n (5^{2n-1}.\ 2 + 2^{n-1}.\ 3^{n+1}) = 2^n (25^{n-1}.\ 10 + 6^{n-1}.\ 9)$

Do $25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow A \equiv 2^n (6^{n-1}.10 + 6^{n-1}.\ 9) \equiv 2^n.6^{n-1}.\ 19 \equiv 0 \pmod{19}$

Hay $A \vdots 19$. Mà $(2 ; 19) = 1$ $\Rightarrow$ $A \vdots 19.\ 2$ $\Rightarrow$ $A \vdots 38$.

**Bài 15.** Ta có $a = \overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0$ .

a) Ta có $10 \equiv 1 \pmod 9$ do đó $a_i.\ 10^i \equiv a_i \pmod 9$ , i = 1; 2; 3; ...; n

Do đó $a \equiv (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) \pmod 9$. Vậy

$a \vdots 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \vdots 9$.

b) Ta có $10^2 = 100 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow a_i.\ 10^i \equiv 0 \pmod{25}$ , i = 2; 3; ...; n.

$\Rightarrow a \equiv (a_1.10 + a_0) \pmod{25}$.

Vậy $a \vdots 25 \Leftrightarrow a_1.\ 10 + a_0 \equiv 0 \pmod{25} \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 25$.

c) Do $10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow a_i.\ 10^i \equiv a_i.(-1)^i \pmod{11}$

$a \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + ...) - (a_1 + a_3 + a_5 + ...) \pmod{11}$

Do đó $a \vdots 11 \Leftrightarrow (a_0 + a_2 + a_4 + ...) - (a_1 + a_3 + a_5 + ...) \equiv 0 \pmod{11}$

Tức là hiệu của tổng các chữ số ở vị trí lẻ và tổng các chữ số ở vị trí chẵn bằng 0.

d) Ta có $10^3 = 1000 \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow a_i.\ 10^i \equiv 0 \pmod 8$ , i = 3; 4; ...; n.

$\Rightarrow a \equiv (a_2.\ 10^2 + a_1.10 + a_0) \pmod 8$.

Vậy $a \vdots 8 \Leftrightarrow a_2.\ 10^2 + a_1.\ 10 + a_0 \equiv 0 \pmod 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$.

**Bài 16.** Theo định lý Fermat bé, do 11 là số nguyên tố nên ta có

$2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10n} \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow 2^{10n+1} = 2.\ 2^{10n} \equiv 2 \pmod{22}$ $\Rightarrow 2^{10n+1} = 22k + 2$ $(k \in N)$

Do 23 là số nguyên tố ta cũng có $2^{22} \equiv 1 \pmod{23}$ $\Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} = 4.2^{22k} \equiv 4 \pmod{23} \Rightarrow$

$2^{2^{10n+1}} + 19 \equiv 4 + 19 \equiv 0 \pmod{23}$ Tức là $A \vdots 23$. Mà $A > 23$, $\forall n \geq 1$ nên A là hợp số.

**Bài 17.** Theo định lý Wilson : Với mọi số nguyên tố p thì $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

Do 13 nguyên tố nên $12! \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow (12!)^{13} \equiv (-1)^{13} \equiv -1 \pmod{13}$.

Ta có $2016 = 13.155 + 1 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2016^{2015} \equiv 1 \pmod{13}$.

Do đó B = $(12!)^{13} + 2016^{2015} \equiv 0 \pmod{13}$. Hay B $\vdots$ 13.

**Bài 18.** a) Theo Định lý Fermat bé , do 7 là số nguyên tố nên $2^6 \equiv 1 \pmod 7$.

Ta có $4 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 4^n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 2.4^n \equiv 2 \pmod 6$ . Nghĩa là

$2^{2n+1} = 2(2^2)^n = 2.\ 4^n \equiv 2 \pmod 6 \Rightarrow 2^{2n+1} = 6k + 2$ , $(k \in N)$

Mặt khác $2^{3n} = (2^3)^n = 8^n \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 3.\ 2^{3n} \equiv 3 \pmod 7$.

Do đó $2^{2^{2n+1}} + 3.2^{3n} \equiv 2^{6k+2} + 3 \equiv 2^2.(2^6)^k + 3 \equiv 2^2.1 + 3 \equiv 0 \pmod 7$.

b) Do 11 là số nguyên tố nên $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

Ta có $16 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 16^n \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2.16^n \equiv 2 \pmod{10}$. Nghĩa là $2^{4n+1} = 2(2^4)^n = 2.16^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2$ , $(k \in N)$

Mặt khác $12 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 12^{5n+1} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2.\ 12^{5n+1} \equiv 2 \pmod{11}$ ;

Do $10^2 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 10^{2n} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 5.10^{2n} \equiv 5 \pmod{11}$.

Vì thế $2^{2^{4n+1}} + 2.12^{5n+1} + 5.10^{2n} \equiv 2^{10k+2} + 2 + 5 \equiv 2^2 + 7 \equiv 0 \pmod{11}$.

**Bài 19.** a) Ta có 72 = 8.9 và (8; 9) = 1.

*$63 \equiv 0 \pmod 9$; khi n = 2 thì $3^n \equiv 0 \pmod 9$ do đó $3^n + 63 \equiv 0 \pmod 9$.

*Mặt khác, với n = 2k $(k \in N^*)$ thì $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1 \equiv 1^k - 1$

$\equiv 0 \pmod 8$ do đó $3^n + 63 = 3^n - 1 + 64 \equiv 0 \pmod 8$.

Vậy với n = 2k $(k \in N^*)$ thì $3^n + 63 \vdots 72$ .

b) Ta có 323 = 17 . 19 và (17; 19) = 1.

*$A = (20^n - 1) + (16^n - 3^n) = P + Q$.

Ta có $20^n \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow P \equiv 0 \pmod{19}$.

Nếu n = 2k $(k \in N^*)$ thì $Q = 16^{2k} - 3^{2k} \equiv (-3)^{2k} - 3^{2k} \equiv 3^{2k} - 3^{2k} \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow A = P + Q \equiv 0 \pmod{19}$

* $A = (20^n - 3^n) + (16^n - 1) = P' + Q'$

$20^n \equiv 3^n \pmod{17}$. Do đó $P' = 20^n - 3^n \equiv 0 \pmod{17}$.

Nếu n = 2k $(k \in N^*)$ thì $Q' = 16^{2k} - 1 = (-1)^{2k} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{17}$

$\Rightarrow A = P' + Q' \equiv 0 \pmod{17}$. Do (17 ; 19) = 1 nên $A \equiv 0 \pmod{17.\ 19}$.

Vậy với n = 2k $(k \in N^*)$ thì $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 323$ .

**Bài 20.** Theo định lý Fermat bé ta có $2^p \equiv 2 \pmod p$ nên nếu $2^p \equiv -1 \pmod p$ thì ta có $3 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow p = 3$.

Mặt khác khi p = 3 thì $2^3 + 1 = 9 \equiv 0 \pmod 3$ . Vậy p = 3 là số cần tìm.

**Bài 21.** Với p = 3 thì $p^2 + 20 = 29$ là số nguyên tố.

Với $p \neq 3$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ nên $p^2 + 20 \equiv 21 \equiv 0 \pmod 3$.

Vậy $p^2 + 20 \vdots 3$ mặt khác $p^2 + 20 > 3$ nên $p^2 + 20$ là hợp số . Vậy chỉ có 1 số nguyên tố cần tìm là $p = 3$.

**Bài 22.** Với $a, b \in N^*$. Nếu $ab \vdots p$ thì số $ab^p - ba^p \vdots p$

Nếu $ab \not\vdots p$ thì $(a, p) = (b, p) = 1$. Do đó $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow$

$a^{p-1} - b^{p-1} \equiv 0 \pmod p \Rightarrow ab(a^{p-1} - b^{p-1}) \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow ab^p - ba^p \equiv 0 \pmod p$ hay $ab^p - ba^p \vdots p$, $\forall a, b \in N^*$.

**Bài 23.** a) Giả sử $a, b, c \in Z$ mà $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 7 \pmod 8$.

Ta có $a \equiv 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; 4 \pmod 8 \Rightarrow a^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 8$

$\Rightarrow b^2 + c^2 \equiv 7; 6; 3 \pmod 8$. Điều này vô lý vì $b^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 8$ và $c^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 8$

$\Rightarrow b^2 + c^2 \equiv 0; 1; 2; 4; 5 \pmod 8$.

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \not\equiv 7 \pmod 8$.

b) Áp dụng câu a) ta có với $x, y, z \in Z$

$4x^2 + y^2 + 9z^2 = (2x)^2 + y^2 + (3z)^2 \not\equiv 7 \pmod 8$.

Mà $2015 = 8.251 + 7 \equiv 7 \pmod 8$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

**Bài 24.** Ta có $2011 \equiv 11 \pmod{100}$ ; $11^2 \equiv 21 \pmod{100}$ ; $11^3 \equiv 31 \pmod{100}$;

$11^5 \equiv 21.31 \equiv 51 \pmod{100} \Rightarrow 11^{10} \equiv 51^2 \equiv 1 \pmod{100}$.

Ta có $2010^{2009} \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 2010^{2009} = 10k$ $(k \in Z)$

$\Rightarrow 2011^{2010^{2009}} = 2011^{10k} \equiv 11^{10k} \equiv (11^{10})^k \equiv 1 \pmod{100}$. Do đó hai chữ số tận cùng là số 01.

**Bài 25.** Bài toán có nhiều cách giải. Sau đây là cách giải theo đồng dư thức:

* Ta có $\forall n \in N^*$ thì $n^5 - n \equiv 0 \pmod{30}$ (ví dụ 8 chuyên đề 26 đã chứng minh)

$A = (a^{2012} - a^{2008}) + (b^{2012} - b^{2008}) + (c^{2012} - c^{2008})$

$A = a^{2007}(a^5 - a) + b^{2007}(b^5 - b) + c^{2007}(c^5 - c)$

Ta có $a^5 - a \equiv 0 \pmod{30} \Rightarrow a^{2007}(a^5 - a) \equiv 0 \pmod{30}$

Tương tự $b^{2007}(b^5 - b) \equiv 0 \pmod{30}$ ; $c^{2007}(c^5 - c) \equiv 0 \pmod{30}$

Vậy $A \equiv 0 \pmod{30}$. Hay $A \vdots 30$.

**Bài 26.** Giả sử tồn tại bộ ba số nguyên $(x; y; z)$ thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$

$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 8z^4 + 5$ (1).

Xét với một số nguyên a bất kỳ thì nếu a chẵn thì $a = 2k$ $(k \in Z)$

$\Rightarrow a^4 = 16k^4 \equiv 0 \pmod 8$ ; nếu a lẻ thì $a^4 = (2k + 1)^4 \equiv 1 \pmod 8$

Do đó $x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0; 1; 2; 3 \pmod 8$. Trong khi đó $8z^4 + 5 \equiv 5 \pmod 8$ mâu thuẫn với (1).
Vậy không tồn tại các bộ ba số nguyên $(x; y; z)$ thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

**Bài 27.** Ta có $41^2 = (40 + 1)^2 = 40^2 + 80 + 1 \equiv 81 \pmod{100}$

$41^4 \equiv 81^2 \equiv 6561 \equiv 61 \pmod{100} \Rightarrow 41^5 \equiv 61.41 \equiv 1 \pmod{100}$

$\Rightarrow 41^{106} \equiv 41.(41^5)^{21} \equiv 41 \pmod{100}$

Mặt khác $57^4 = 10556001 \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 57^{2012} = (57^4)^{503} \equiv 1 \pmod{100}$

Vì thế $A \equiv 41 + 1 \pmod{100}$.

Do đó hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$ là 42

**Bài 28.** Do $a + 20 \vdots 21 \Rightarrow a \equiv 1 \pmod 3$ và $a \equiv 1 \pmod 7$

$b + 13 \vdots 21 \Rightarrow b \equiv 2 \pmod 3$ và $b \equiv 2 \pmod 7$

Suy ra $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 1 + 0 + 1 + 2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow A \equiv 10 \pmod 3$

Xét $a = 3k + 1$ ; $b = 3q + 2$ với $k, q \in N$ ta có $4^a = 4^{3k+1} = 4.64^k \equiv 4 \pmod 7$

$9^b = 9^{3q+2} \equiv 2^{3q+2} \equiv 4.8^q \equiv 4 \pmod 7$.

Do đó $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 4 + 4 + 1 + 1 \equiv 10 \pmod 7 \Rightarrow A \equiv 10 \pmod 7$

$A \equiv 10 \pmod 3$ và $A \equiv 10 \pmod 7$ mà $(3; 7) = 1$ nên $A \equiv 10 \pmod{3.7}$

Hay $A \equiv 10 \pmod{21}$. Vậy số dư trong phép chia A cho 21 là 10.

**Bài 29.** $2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow (2^3)^n \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2^{3n+1} = 2.(2^3)^n \equiv 2 \pmod 7$.

và $2^{3n-1} = 2^2.(2^3)^{n-1} \equiv 4 \pmod 7$.

Nên $A \equiv 2 + 4 + 1 \equiv 0 \pmod 7$ nghĩa là $A \vdots 7$. Mà với $n \in N^*$ thì $A > 7$.

Vậy A là hợp số.

**Bài 30.** $\forall n \in N^*$ ta có $2012^{4n} \equiv 0 \pmod 2$ ; $2013^{4n} \equiv 1 \pmod 2$ ;

$2014^{4n} \equiv 0 \pmod 2$ ; $2015^{4n} \equiv 1 \pmod 2$. Do đó $A \equiv 2 \equiv 0 \pmod 2$.

* Ta lại có $2012 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2012^{4n} \equiv 0 \pmod 4$ ;

$2014 \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow 2014^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2014^{4n} \equiv (2014^2)^{2n} \equiv 0 \pmod 4$

Do $2013 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 2013^{4n} \equiv 1 \pmod 4$ ;

Do $2015 \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow 2015^{4n} = (-1)^{4n} \equiv 1 \pmod 4$

Vậy $A \equiv 2 \pmod 4$ nghĩa là A chia cho 4 dư 2. Ta có $A \vdots 2$ ; $A \not\vdots 2^2$ ; 2 là số nguyên tố. Vậy A không là số chính phương $\forall n \in N^*$.

**Bài 31.**

Ta có

$19^{2003} \equiv (2.9+1)^{2003} \equiv 1 \pmod{2003} (1); 7^{2003} \equiv (9-2)^{2003} \Rightarrow 7^{2003} \equiv (-2)^{2003} \pmod 9$ Mặt khác

$(-2)^{2003} = (-2).2^{2002} = (-2).(2^3)^{667}.2 = (-4).(2^3)^{667}$

Do

$2^3 \equiv 1(\bmod 9) \Rightarrow \left(2^3\right)^{667} \equiv -1(\bmod 9) \Rightarrow (-4)\left(2^3\right)^{667} \equiv 4(\bmod 9) \Rightarrow 7^{2003} \equiv 4(\bmod 9)(2)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow 19^{2003} + 7^{2003} + 9^{2003} \equiv 5(\bmod 9)(3)$

Vì lập phương của một số tự nhiên khi chia cho 9 chỉ có thể dư là $0,1,-1$ nên mọi số nguyên $x,y,z$ ta có : $x^{15} + y^{15} + z^{15} = \left(x^5\right)^3 + \left(y^5\right)^3 + \left(z^5\right)^3 \equiv (-3);(-1);0;1;3(\bmod 9)(4)$

Từ (3) và (4) suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

**Bài 32.**

Ta có $z(z+3) = z^2 + 3z$

Mặt khác ta luôn có $z^2 \equiv 0(\bmod 3)$ hoặc $z^2 \equiv 1(\bmod 3)$

Do đó với mọi z nguyên ta có :

$z(z+3) \equiv c(\bmod 3); c \in \{0;1\}(1)$

Chứng min tương tự với y,x

$\Rightarrow x(x+3) + y(y+3) \equiv d(\bmod 3); d \in \{0;1;2\}(2)$

Lại để ý rằng : $x(x+3) + y(y+3) = \left(x^2 + y^2\right)(\bmod 3)(3)$

Chú ý rằng nếu p là số nguyên tố khác 3 thì $p^2 \equiv 1(\bmod 3)$. Do vậy $x,y$ đồng thời là các số nguyên tố khác 3 thì :

$x^2 + y^2 \equiv 2(\bmod 3)(4)$

Kết hợp (1), (2), (3), (4) suy ra ít nhất một trong hai số x,y phải là 3. Do vai trò đối xứng của x,y chọn $x = 3$

Khi $x = 3$ ta có :

$18 + y^2 + 3y = z^2 + 3z \Leftrightarrow 18 = z^2 + 3z - y^2 - 3y \Leftrightarrow 18 = (z-y)(x+y+3)(5)$

Từ $z > 0, y > 0 \Rightarrow z + y + z > 3 \Rightarrow z - y > 0$.

Vì thế kết hợp với $(z+y+3) - (z-y) = 2y + 3 \geq 7$ (do y nguyên tốn lớn hơn 2). Nên từ (5) suy ra :

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z+y+3=18 \\ z-y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} z+y+3=9 \\ z-y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=7 \\ z=8 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ z=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Do tính đối xứng nên phương trình có 4 nghiệm nguyên dương :

$(3;7;8);(7;3;8);(3;2;4);(2;3;4)$

**Bài 33.** Ta phải tìm số tự nhiên r sao cho

$0 = r \equiv (2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{10} \pmod{106}$

Ta có $2013 = 106.19 - 1 \Rightarrow 2013 \equiv -1 \pmod{106} \Rightarrow 2013^{2016} \equiv 1 \pmod{106}$

$2014 = 106.19 \quad \Rightarrow 2014 \equiv 0 \pmod{106} \Rightarrow 2014^{2016} \equiv 0 \pmod{106}$

$2015 = 106.19 + 1 \Rightarrow 2015 \equiv 1 \pmod{106} \Rightarrow 2015^{2016} \equiv 1 \pmod{106}$

Do đó $(2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{20} \equiv 0 \pmod{106}$.

**Bài 34.** Do 5 là số nguyên tố nên theo Định lý Fermat bé ta có: với a = 1; 2; 3; 4 ta có $a^5 \equiv a \pmod 5 \Leftrightarrow a^4 \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow a^{4k} \equiv 1 \pmod 5$.

Do đó $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 4 \pmod 5$.

Chứng tỏ $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \not\vdots\ 5$.

**Bài 35.** * Nếu p = 2 thì $2^n - n \ \vdots\ 2,\ \forall n = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$.

* Nếu $p \neq 2$ do $(2 ; p) = 1$ nên theo định lý Fermat bé ta có :

$2^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow 2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}} - 1 \equiv 0 \pmod p$.

Hay là $2^{(p-1)^{2k}} - 1 \ \vdots\ p \quad (k \in \mathbb{N} ; k \geq 2)$.

Mặt khác $(p-1)^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod p$

$$\Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}} - (p-1)^{2k} = \underbrace{\left[2^{(p-1)^{2k}} - 1\right]}_{\vdots p} - \underbrace{\left[(p-1)^{2k} - 1\right]}_{\vdots p} \vdots\ p$$

Vậy tồn tại vô số số tự nhiên n có dạng $n = (p-1)^{2k}$, $(\forall k \in \mathbb{N} ; k \geq 2)$ sao cho $2^n - n \ \vdots\ p$.

# CHUYÊN ĐỀ 13: NGUYEN LÝ DIRICHLET

## A. Kiến thức cần nhớ

### 1. Giới thiệu nguyên lý Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Dirichlet (Đi-rích-lê) (1805 – 1859) là nhà toán học người Đức, được cho là người đưa ra định nghĩa hiện đại về hàm số. Trên cơ sở quan sát thực tế, ông đã phát biểu thành một nguyên lí mang tên ông – nguyên lí Dirichlet: *Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà mỗi cái lồng có không quá 2 con thỏ.* Nói cách khác, *nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con trở lên.* Một cách tổng quát hơn, **nếu có k lồng để nhốt m con thỏ (với** $k = kn + r$ $(0 < r \le k - 1)$**) thì tồn tại ít nhất một lồng có chứa từ n + 1 con thỏ trở lên.**

Ta cũng có thể dễ dàng chứ minh nguyên lí Dirichet bằng phương pháp phản chứng như sau: Giả sử không có một lồng nào chứ n + 1 con thỏ trở lên, tức là mỗi lồng chứa nhiều nhất n con thỏ, thì số con thỏ chứa trong k lồng nhiều nhất chỉ có thể là kn con. Điều này mâu thuẫn với giả thiết có m con thỏ với $m = kn + r$ $(0 < r \le k - 1)$.

Nguyên lí Dirichlet thật đơn giản, dễ hiểu nhưng được vận dụng vào giải rất nhiều bài toán trong số học, đại số, hình học về việc chỉ ra sự tồn tại của một hay nhiều đối tượng thỏa mãn một điều kiện đặt ra.

Khi sử dụng nguyên lí Dirichlet vào bài toán cụ thể, điều quan trọng là phải nhận ra (hay tạo ra) *Lồng* hoặc *Thỏ* hoặc cả *Lồng* và *Thỏ*.

### 2. Một số dạng áp dụng của nguyên lý Dirichlet

- **Nguyên lý Dirichlet cơ bản:** Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ.
- **Nguyên lý Dirichlet tổng quát:** Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left[\frac{N}{k}\right]$ đồ vật. (Ở đây $\left[x\right]$ là số nguyên nhỏ nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x)
- **Nguyên lí Dirichlet mở rộng:** Nếu nhốt n con thỏ vào $m \ge 2$ cái chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\left[\frac{n+m-1}{m}\right]$ con thỏ.

• **Nguyên lí Dirichlet dạng tập hợp:** Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng có số phần tử hữu hạn, mà số lượng phần tử của A lớn hơn số lượng phần tử của B. Nếu với một quy tắc nào đó, mỗi phần tử của A cho tương ứng với một phần tử của B, thì tồn tại ít nhất hai phần tử khác nhau của A mà chúng tương ứng với một phần tử của B.

## 3. Phương pháp ứng dụng.

Nguyên lí Dirichlet tưởng chừng như đơn giản như vậy, nhưng nó là một công cụ hết sức có hiệu quả dùng để chứng mình nhiều kết quả hết sức sâu sắc của toán học. Nguyên lí Dirichlet cũng được áp dụng cho các bài toán của hình học, điều đó được thể hiện qua hệ thống bài tập sau:

Để sử dụng nguyên lý Dirichlet ta phải làm xuất hiện tình huống nhốt "thỏ" vào "chuồng" và thoả mãn các điều kiện:

+ Số 'thỏ" phải nhiều hơn số chuồng.

+ "Thỏ" phải được nhốt hết vào các "chuồng", nhưng không bắt buộc chuồng nào cũng phải có thỏ.

Thường thì phương pháp Dirichlet được áp dụng kèm theo phương pháp phản chứng. Ngoài ra nó còn có thể áp dụng với các nguyên lý khác. Một số bài toán cơ bản thường gặp như sau:

1) Trong $n+1$ số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho $n$ có cùng số dư (hoặc hiệu của chúng chia hết cho $n$).
2) Nếu trên một đoạn thẳng độ dài 1 đặt một số đoạn thẳng có tổng độ dài lớn hơn 1 thì có ít nhất hai trong số các đoạn thẳng đó có điểm chung.
3) Nếu trên đường tròn có bán kính 1 đặt một số cung có tổng độ dài lớn hơn $2\pi$ thì có ít nhất hai trong số các cung đó có điểm chung.
4) Trong một hình có diện tích S đặt một số hình có tổng diện tích lớn hơn S thì có ít nhất hai trong số các hình đó có điểm chung.

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### 🗁 Dạng 1: Chứng minh sự tồn tại chia hết

*** Cơ sở phương pháp:**

Thông thường ta coi m số tự nhiên đã cho là m "con thỏ", các số dư trong phép chia các số tự nhiên đó cho n là những "lồng"; như vậy sẽ có n cái lồng: lồng i $(0 \le i \le b)$ gồm những số tự nhiên đã cho chia cho n dư i.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng:

a) Trong 2012 số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho 2011 có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho 2011).

b) Trong 2012 sô tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho 2012 hoặc luôn tìm được hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

*Hướng dẫn giải*

a) Ta coi 2012 số tự nhiên đã cho là 2012 "con thỏ"; "lồng i" gồm các số chia cho 2011 dư i $(0 \le i \le 2011)$ nên có 2011 lồng: lồng 0, lồng 1, …, lồng 2010. Như vậy có 2011 lồng chứa 2012 con thỏ nên theo nguyên lí Dirchlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn hai con thỏ, tức là có ít nhất hai số chia cho 2011 có cùng số dư.

b) Nếu trong 2012 số đã cho có ít nhất một số chia hết cho 2012 thì ta chọn luôn số này. Nếu không có số nào chia hết cho 2012 thì khi chia cho 2012 nhận nhiều nhất 2012 số dư khác nhau là 1, 2, …, 2011. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

***Nhận xét***. Ta có thể tổng quát bài toán trên như sau:

1) Trong n + 1 số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho n).

2) Trong n số tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho n hoặc luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 20122012…2012 (gồm các số 2012 viết liên tiếp nhau) chia hết cho 2013.

*Hướng dẫn giải*

Xét 2014 số sau: 2012, 20122012, ..., 2012...2012 (gồm 2014 bộ số 2102).

Đem 2014 số này lần lượt chia cho 2013, có 2014 số mà chỉ có 2013 số dư trong phép chia cho 2013 (là 0, 1, 2, ..., 2012) nên luôn tồn tại hai số chia cho 2013 có cùng số dư, chẳng hạn đó là a = 2012...2012 (gồm i bộ 2012) và b = 2012...2012 (gồm j bộ 2012) với $1 \le i \le j \le 2014$.

Khi đó

$b - a = 2012...2012.10^{4i}$ (gồm j – i bộ 2012) sẽ chia hết cho 2013.

Lại có $ƯCLN(10^{4i}, 2013) = 1$ nên số 2012...2012 (gồm j – i bộ 2012 sẽ chia hết cho 2013. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây "thỏ" là số có dạng 2012...2012, "lồng" là số dư trong phép chia cho 2013).

***Nhận xét.*** Mấu chốt của bài toán là chọn ra 2014 (= 2013 + 1) số tự nhiên có dạng đã cho. Từ đó ta có thể phát biểu nhiều bài toán tương tự, chẳng hạn như: Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 111...1 chia hết cho 29.

**Bài toán 3.** Cho sáu số tự nhiên $a, b, c, d, e, g$. Chứng minh rằng trong sáu số ấy, tồn tại một số chia hết cho 6 hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho 6.

*Hướng dẫn giải*

Trường hợp có một số bằng 0 thì ta chọn số 0 thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Trường hợp sáu số đều lớn hơn 0. Xét 6 số sau

$$S_1 = a$$
$$S_2 = a + b$$
$$S_3 = a + b + c$$
$$S_4 = a + b + c + d$$
$$S_5 = a + b + c + d + e$$
$$S_6 = a + b + c + d + e + g.$$

Đem mỗi số này chia cho 6 ta nhận được số dư thuộc tập $\{0,1,2,3,4,5\}$.

Nếu tồn tại $S_i (i = 1,2,...,6)$ chia hết cho 6 thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu không có $S_i$ nào chia hết cho 6 thì ta có 6 số chia hết cho 6 chỉ nhận 5 loại số dư khác nhau $(1,2,3,4,5)$; theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia cho 6 có cùng số dư, chẳng hạn $S_2$ và $S_5$ do đó hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 6, tức là $c + d + e$ chia hết cho 6. Bài toán đã được chứng minh.

(Ở đây "thỏ" là các số $S_i$, "lồng" là số dư trong phép chia cho 6).

***Nhận xét.*** Ta có thể phát biểu bài toán tổng quát sau:

Cho n số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_n$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho n hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho n.

**Bài toán 4.** Chứng minh rằng:

a) Trong n số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho n.

b) Trong 39 số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11.

***Hướng dẫn giải***

a) Giả sử không tìm được số nào trong n số tự nhiên liên tiếp đã cho mà chia hết cho n. Khi đó n số này chia cho n chỉ nhận được nhiều nhất là n – 1 số dư khác nhau $(1,2,3,...,n-1)$, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số chia hết cho n có cùng số dư, chẳng hạn là a và b với $a > b$, khi đó a – b chia hết cho n, điều này mâu thuẫn với $0 < a - b < n$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Lấy 20 số tự nhiên liên tiếp đầu của dãy, ta luôn tìm được một số có chữ số hàng đơn vị là 0 và có chữ số hàng chục khác 9.Giả sử đó là N và tổng các chữ số của N là s. Khi đó 11 số $N, N+1, N+2, N+3, ...N+9, N+19$ sẽ nằm trong 39 số đã cho. Vì N tận cùng bằng 0 nên tổng các chữ số của $N, N+1, N+2, ..., N+9$ lần lượt bằng $s, s+1, s+2, ..., s+9$. Vì N tận cùng bằng 0 và có chữ số hàng chục khác 9 nên tổng các chữ số của N + 10 bằng s + 1, tổng các chữ số của N + 19 bằng s + 10.

Trong 11 số tự nhiên liên tiếp $s, s+1, s+2, s+3, ..., s+9, s+10$ luôn tìm được một số chia hết cho 11. Chẳng hạn số đó là $s + i (0 \le i \le 10)$: Nếu $0 \le i \le 9$ thì ta chọn được số $N + i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán; nếu i = 10 thì ta chọn được số N + 19 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

***Nhận xét.*** Mấu chốt để giải bài toán câu b) là phải tìm ra 11 số trong 39 số đã cho có tổng các chữ số thứ tự là 11 số tự nhiên liên tiếp, đồng thời sử dụng kết quả câu a).

**Bài toán 5.** Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2012. Hỏi có thể chọn ra được nhiều nhất bao nhiêu số sao cho tổng của hai số bất kì trong chúng không chia hết cho hiệu của nó?

*Hướng dẫn giải*

Nhận thấy, nếu hai số chia cho 3 cùng dư 2 thì hiệu của chúng chia hết cho 3, còn tổng của chúng chia cho 3 dư 1; nên tổng của chúng không chia hết cho hiệu của chúng.

Trong các số tự nhiên từ 1 đến 2012, sẽ có 671 số chia cho 3 dư 2 là các số có dạng $3k+2$ $(k=0,1,2,...,670)$. Khi đó hai số bất kì trong 671 số này có tổng chia 3 dư 1, hiệu chia hết cho 3, nên tổng không chia hết cho hiệu của chúng. Ta sẽ chứng minh rằng chọn được nhiều nhất $672(=671+1)$ số trong các số từ 1 đến 2012, thì trong 672 số này luôn tìm được $a,b(a>b)$ sao cho $a-b\le 2$ (Thật vậy, giả sử ngược lại thì hiệu giữa số nhỏ nhất và số lớn nhất trong các số đã chọn sẽ không nhỏ hơn $3.671=2013$. Điều này mâu thuẫn giả thiết với hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất không vượt quá $2012-1=2011$), nghĩa là a – b bằng 1 hoặc 2.

- Nếu a – b = 1 thì hiển nhiên a + b chia hết cho a – b (= 1)
- Nếu a – b = 2 thì a + b là số chẵn nên a + b chia hết cho a – b (= 2).

Như vậy từ 2012 số đã cho không thể chọn được hơn 671 số thỏa mãn điều kiện bài toán. Suy ra số lượng lớn nhất các số phải tìm là 671.

### 🗁 Dạng 2: Bài toán về tính chất các phần tử trong tập hợp

*** Cở sở phương pháp:** Thông thường ta phải lập ra những tập hợp có tính chất cần thiết rồi sử dụng nguyên lí Dirichlet để chứng tỏ có hai phần tử thuộc hai tập hợp bằng nhau.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Cho sáu số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số trong đó có một số bằng tổng hai số còn lại.

*Hướng dẫn giải*

Gọi sáu số nguyên dương đã cho là $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6$ với $0<a_1<a_2<...<a_6<10$.

Đặt $A=\{a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ gồm 5 phần tử có dạng $a_m$ với $m\in\{2,3,4,5,6\}$.

Đặt $B=\{a_2-a_1,a_3-a_1,a_4-a_1,a_5-a_1,a_6-a_1\}$ gồm 5 phần tử có dạng $a_n-a_1$ với $n\in\{2,3,4,5,6\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 9 phần tử $\{1,2,3,...,9\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $5+5=10$.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B, tức là $a_m=a_n-a_1$, do đó $a_n=a_m+a_1$.

Ba số $a_m,a_n,a_1$ đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m\ne a_n$ vì nếu $a_m=a_n$ thì $a_1=0$ trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số $a_m,a_n,a_1$ trong các số đã cho mà $a_n=a_m+a_1$ (đpcm).

(Ở đây, có 10 "thỏ" là 10 số $a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_2-a_1,a_3-a_1,a_4-a_1,a_5-a_1,a_6-a_1$ và có 9 "lồng" là 9 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

***Nhận xét.*** Để giải bài toán này, ta cần tạo ra hai tập hợp gồm các phần tử nhỏ hơn 10 và tổng số phần tử của hai tập hợp phải không nhỏ hơn 10. Từ đó suy ra tồn tại hai phần tử của hai tập hợp bằng nhau.

**Bài toán 2.** Cho X là tập hợp gồm 700 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

***Hướng dẫn giải***

Giả sử 700 số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, ..., a_{700}$. Ta xét các tập hợp sau:

$A = \{a_1, a_2, ...a_{700}\}$;

$B = \{a_1 + 6, a_2 + 6, ...a_{700} + 6\}$;

$C = \{a_1 + 9, a_2 + 9, ...a_{700} + 9\}$;

Tổng số phần tử của ba tập hợp A, B, C là 700.3 = 2100, trong đó mỗi phần tử đều không vượt quá 2006 + 9 = 2015, mà 2100 > 2015 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai phần tử bằng nhau. Vì mỗi tập hợp A, B, C có các phần tử đôi một khác nhau nên hai phần tử bằng nhau đó phải thuộc hai tập hợp: A và B, hoặc A và C, hoặc B và C.

- Nếu hai phần tử thuộc A và B, chẳng hạn $a_i = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 6$.
- Nếu hai phần tử thuộc A và C, chẳng hạn $a_i = a_j + 9$ suy ra $a_i - a_j = 9$.
- Nếu hai phần tử thuộc B và C, chẳng hạn $a_i + 3 = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 3$.

Như vậy luôn tồn lại hai số thuộc tập hợp A có hiệu là 3, 6, 9. Ta được điều phải chứng minh.

(Ở đây 2100 "thỏ" là 2010 phần tử của ba tập hợp A, B, C; 2015 "lồng" là các số từ 1 đến 2015)

***Nhận xét.*** Ta còn có kết quả mạnh hơn như sau:

Cho X là tập hợp gồm 505 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

*Chứng minh.*

Gọi A là tập hợp các số thuộc X mà chia hết cho 3, gọi B là tập hợp các số thuộc X mà chia cho 3 dư 1, gọi C là tập hợp các số thuộc X mà chia cho3 dư 2.

Có 505 số xếp vào ba tập hợp, mà 505 = 3.168 + 1 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một tập hợp có chứa từ 169 số trở lên.

Trong tập hợp này, hai số bất kì có hiệu là một bội của 3. Tồn tại hai số x, y có hiệu nhỏ hơn 12. Thật vậy, nếu mọi số trong tập hợp này đều có hiệu không nhỏ hơn 12 thì số lớn nhất trong tập hợp không nhỏ hơn 12.168 = 2016 > 2006, trái với đề bài.

Vậy trong tập hợp X tồn tại hai phần tử x, y mà $x - y \in E$.

**Bài toán 3.** Cho hai tập hợp số nguyên dương phân biệt mà mỗi số đều nhỏ hơn n. Chứng minh rằng nếu tổng số phần tử của hai tập hợp không nhỏ hơn n thì có thể chọn được trong mỗi tập hợp một phần tử sao cho tổng của chúng bằng n.

***Hướng dẫn giải***

Giả sử hai tập hợp số nguyên dương đã cho là

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \text{ và } B = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$$

với $a < n$ $(i = 1, 2, ..., m)$, $b_j < n$ $(j = 1, 2, ..., k)$ và $m + l \geq n$.

Xét tập hợp $C = \{n - b_1, n - b_2, ..., n - b_k\}$.

Nhận thấy, có tất cả n – 1 số nguyên dương phân biệt nhỏ hơn n, các phần tử của A và C đều nhỏ hơn n và tổng số các phần tử của A và C không nhỏ hơn n. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai phần tử bằng nhau, chúng không cùng thuộc A và C, do đó một phần tử thuộc A và một phần tử thuộc C, tức là tồn tại hai số $a_p$ và $n - b_q$ mà $a_p = n - b_q \Leftrightarrow a_p + b_q = n$ (điều phải chứng minh).

(Ở đây coi m + k "thỏ" là các số nguyên dương thuộc tập hợp A hoặc C, n – 1 "lồng" là các số nguyên dương từ 1 đến n – 1).

🗁 **Dạng 3: Bài toán liên quan đến bảng ô vuông**

*** Cở sở phương pháp:** Một bảng vuông kích thước n x n gồm n dòng, n cột và 2 đường chéo. Mỗi dòng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều có n ô vuông.

Một bảng các ô vuông kích thước m x n gồm m dòng và n cột.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Cho một mảng ô vuông kích thước 5 x 5. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số -1, 0, 1; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

*Hướng dẫn giải*

Bảng ô vuông kích thước 5 x 5 có 5 dòng, 5 cột, 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng của các số được tính theo dòng, theo cột và theo đường chéo. Mỗi dòng, cột và đường chéo đều có ghi 5 số thuộc tập {–1; 0; 1}. Vì vậy giá trị mỗi tổng thuộc tập hợp {–5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5} có 11 phần tử. Có 12 tổng nhận trong tập 11 các giá trị khác nhau nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng nhận cùng một giá trị. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây "thỏ" là tổng nên có 12 "thỏ", "lồng" là giá trị của tổng nên có 11 "lồng").

***Nhận xét.*** Với cách giải tương tự, ta có bài toán tổng quát sau:

Cho một bảng ô vuông kích thước n x n. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số –1, 0, 1; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

**Bài toán 2.** Trên bảng ô vuông kích thước 8 x 8, ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 64, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.

*Hướng dẫn giải*

Ta xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 64. Hiệu giữa hai ô này là 63.

Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nhiều nhất là 14 (gồm 7 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 7 cặp ô chung cạnh tính theo cột).
Ta có 64 = 14.4 + 7 nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kề nhau mà hai số ghi trên đó có hiệu không nhỏ hơn 4 + 1 = 5. Bài toán được chứng minh.
(Ở đây, "thỏ" là hiệu của hai số trong 64 số (từ 1 đến 64) nên có 63 thỏ; "lồng" là số cặp ô vuông kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nên có nhiều nhất là 14 lồng).

***Nhận xét.***

- Mấu chốt của bài toán là quan tâm đến hai ô vuông ghi số nhỏ nhất (số 1) và số lớn nhất (số 64) sẽ có hiện lớn nhất là 63; đồng thời xét từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 chỉ cần tối đa là (8 – 1) + (8 – 1) = 14 ô. Ở đây ta đã vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát: Có m thỏ, nhốt vào k lồng mà m = kn + r $(1 \le r \le k-1)$ thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn n + 1 con thỏ.
- Nếu thay bởi bảng chữ nhật gồm 8 x 10 ô vuông, trên đó ghi các số từ 1 đến 80 không lặp một cách tùy ý thì kết quả cầu bài toán còn đúng hay không? Hãy chứng minh.

### 🗁 Dạng 4: Bài toán liên quan đến thực tế

**Cở sở phương pháp:** Khi chứng minh sự tồn tại một số đối tượng thỏa mãn điều kiện nào đó, ta thường sử dụng nguyên lí Dirichlet.
Điều quan trọng nhất là phải xác định được "thỏ" và "lồng".

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Một tổ học tập có 10 học sinh. Khi viết chính tả, cả tổ đều mắc lỗi, trong đó bạn Bình mắc nhiều lỗi nhất (mắc 5 lỗi). Chứng minh rằng trong tổ ấy có ít nhất 3 bạn đã mắc một số lỗi bằng nhau.

*Hướng dẫn giải*

Ta coi "thỏ" là học sinh (trừ bạn Bình) nên có 9 thỏ; "lồng" là số lỗi chính tả học sinh mắc phải nên có 4 lồng: lồng i gồm những học sinh mắc i lỗi (i = 1, 2, 3, 4). Có 9 thỏ nhốt vào 4 lồng, mà 9 = 4.2 + 1, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn 2 + 1 = 3 thỏ, tức là có ít nhất 3 bạn mắc một số lỗi bằng nhau.

**Bài toán 2.** Ở một vòng chung kết cờ vua có 8 đấu thủ tham gia. Mỗi đấu thủ đều phải gặp đủ 7 đấu thủ còn lại, mỗi người một trận. Chứng minh rằng, trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

*Hướng dẫn giải*

Ta coi "thỏ" là đấu thủ nên có 8 thỏ; "lồng" là số trận đấu của đấu thủ nên có 8 lồng: "lồng i" gồm các đấu thủ đã thi đấu i trận (với i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).
Ta thấy lồng 0 và lồng 7 không đồng thời tồn tại, vì nếu có một đấu thủ chưa đấu trận nào thì sẽ không có đấu thủ nào đã đấu đủ 7 trận, cũng như nếu có đấu thủ đã đấu đủ 7 trận thì không có ai chưa đấu trận nào.

Như vậy, có 7 lồng chứa 8 con thỏ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một lồng chứa không ít hơn 2 con thỏ, tức là trong mọi thời điểm giữa các cược đấu luôn tìm được 2 đấu thủ đã đấu dùng một số trận.

**Bài toán 3.** Có 6 nhà khoa học viết thư trao đổi với nhau về một trong hai đề tài: bảo vệ môi trường và chương trình dân số. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

*Hướng dẫn giải*

Gọi 6 nhà khoa học là A, B, C, D, E, F.

Nhà khoa học A sẽ viết thư trao đổi với 5 nhà khoa học còn lại về 2 đề tài, có $5 = 2.2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 nhà khoa học (chẳng hạn B, C, D) được nhà khoa học A trao đổi về cùng một đề tài (chẳng hạn đề tài môi trường).

Trong ba nhà khoa học B, C, D nếu có hai người nào cũng trao đổi về đề bài môi trường (chẳng hạn B, C) thì ta chọn được A, B, C cùng trao đổi về một đề tài.

Nếu trong ba nhà khoa học B, C, D không có hai người nào trao đổi về đề tài môi trường thì họ sẽ trao đổi với nhau về đề tài dân số, ta sẽ chọn được B, C, D cùng trao đổi một đề tài.

(Ở đây coi nhà khoa học (trừ A) là "thỏ" nên có 5 thỏ, coi đề tài là "lồng" nên có 2 lồng và vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát).

🗁 **Dạng 5: Bài toán liên quan đến sự sắp xếp**

*** Cơ sở phương pháp:** Các bài toán về sắp xếp chỗ, phân công việc không đòi hỏi nhiều về kiến thức và kĩ năng tính toán, chúng chủ yếu kết hợp suy luận lôgic để xét các khả năng có thể xảy ra với nguyên lí Dirichlet.

*** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Có 20 người quyết định đi bơi thuyền bằng 10 chiếc thuyền đôi. Biết rằng nếu hai người A và B mà không quen nhau thì tổng số những người quen của A và những người quen của B không nhỏ hơn 19. Chứng minh rằng có thể phân công vào các thuyền đôi sao cho mỗi thuyền đều là hai người quen nhau.

*Hướng dẫn giải*

Nếu trong 20 người không có hai người nào quen nhau thì tổng số người quen của hai người bất kì là 0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là tổng số người quen của hai người không nhỏ hơn 19. Vậy tồn tại một số cặp quen nhau.

Ta xếp mỗi cặp quen nhau đó vào một thuyền đôi. Gọi k là số lượng thuyền lớn nhất mà trong đó ta có thể xếp được những cặp quen nhau vào một thuyền và kí hiệu thuyền thứ i xếp hai người $A_i$ và $B_i$ quen nhau $(1 \le i \le k)$.

Giả sử $k \le 9$, kí hiệu tập hợp M gồm những người chưa được xếp vào thuyền nào, tức là gồm những người đôi một không quen nhau. Chọn hai người A và B trong tập hợp M. Theo bài ra thì tổng số người quen của A và số người quen của B không nhỏ hơn 19 và những người quen A hoặc quen B đã được xếp vào thuyền rồi. Như vậy có 19 người quen hệ quen A hoặc B được xếp vào nhiều nhất là 9 thuyền đôi (trừ 1 thuyền vì A, B chưa được xếp), mà 19 = 9.2 + 1 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một thuyền chở 2 người quen cả A và B. Nhưng khi đó ta có thể xếp lại như sau: trong k – 1 thuyền đầu tiên vẫn giữ nguyên, còn thuyền thứ k xếp $A_k$ và B, còn thuyền thứ k + 1 xếp A và $B_k$. Điều này mâu thuẫn với giả sử.

Theo cách xếp này ta tiếp tục xếp đến hết 10 thuyền sao cho mỗi thuyền hai người đều quen nhau.

**Bài toán 2.** Kì thi tuyển sinh vào trường THPT chuyên Long An năm nay có 529 học sinh đến từ 16 địa phương khác nhau tham dự. Giả sử điểm bài thi môn Toán của mỗi học sinh đều là số nguyên lớn hơn 4 và bé hơn hoặc bằng 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 6 học sinh có điểm môn Toán giống nhau và cùng đến từ một địa phương.

***Hướng dẫn giải***

Ta có 529 học sinh có điểm bài thi từ 5 điểm đến 10 điểm. Theo nguyên lý Dirichlet ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau (từ 5 điểm đến 10 điểm).

Ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau và đến từ 16 địa phương. Theo nguyên lý Dirichlet tìm được 6 em có cùng điểm thi môn toán và đến từ cùng một địa phương.

🗁 **Dạng 6: Vận dụng nguyên lí Dirichlet vào các bài toán hình học**

*** Cơ sở phương pháp:**Một số các dạng toán hình học thường gặp:

1) Nếu trên một đoạn thẳng độ dài 1 đặt một số đoạn thẳng có tổng độ dài lớn hơn 1 thì có ít nhất hai trong số các đoạn thẳng đó có điểm chung.
2) Nếu trên đường tròn có bán kính 1 đặt một số cung có tổng độ dài lớn hơn $2\pi$ thì có ít nhất hai trong số các cung đó có điểm chung.
3) Trong một hình có diện tích S đặt một số hình có tổng diện tích lớn hơn S thì có ít nhất hai trong số các hình đó có điểm chung.
4) *** Ví dụ minh họa:**

**Bài toán 1.** Trong hình vuông mà độ dài mỗi cạnh là 4 cho trước 33 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, Người ta vẽ các đường tròn có bán kính đều bằng $\sqrt{2}$, có tâm là các điểm đã cho.

Hỏi có hay không 3 điềm trong số các điểm nói trên sao cho chúng đều thuộc vào phần chung của 3 hình tròn có các tâm cũng chính là 3 điểm đó?

*(Thi chọn HSG lớp 9 Quốc Gia năm 1995-1996- Bảng A)*

***Hướng dẫn giải***

Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh là 1; vì có 33 điểm chứa trong 16 hình vuông, do đó theo nguyên tắc Dirichlet ắt phải có ít nhất là một hình vuông chứa không ít hơn 3 điểm.

Khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong hình vuông đơn vị đã cho không thể vượt qua độ dài đường chéo của nó bằng $\sqrt{2}$.

Gọi $O_1, O_2, O_3$ là 3 điểm cùng nằm trong một hình vuông đơn vị nào đó .

Vẽ ba đường tròn tâm $O_1, O_2, O_3$ cùng bán kính là $\sqrt{2}$. Chắc chắn cả ba điểm $O_1, O_2, O_3$ đều nằm trong cả ba đương tròn này, nghĩa là chúng nằm trong phần chung của 3 hình tròn có tâm tại chính các điểm $O_1, O_2, O_3$.

**Bài toán 2.** Trên mặt phẳng cho 25 điểm sao cho từ ba điểm bất kỳ trong số chúng đều tìm được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 13 điểm.

***Hướng dẫn giải***

Xét điểm $A$ và hình tròn $(C_1)$ có tâm A và bán kính là 1. Nếu tất cả 24 điểm còn lại đều nằm trong $(C_1)$ thì hiển nhiên bài toán được chứng minh.

Xét trường hợp có điểm B nằm ngoài $(C_1)$. Ta có $AB > 1$ xét hình tròn $(C_2)$ tâm B và bán kính là 1.

Giả sử C là một điểm bất kỳ khác $A$ và $B$ . Ta chứng minh C phải thuộc một trong hai hình tròn $(C_1)$hoặc $(C_2)$.

Thật vậy: giả sử ngược lại điểm C không thuộc cả $(C_1)$, cả $(C_2) \Rightarrow AC > 1$ và $BC > 1$; theo trên , $AB > 1$ như vậy có bộ ba điểm $A, B, C$ trong đó không có bất kỳ 2 điểm nào có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1. Vô Lý, vì trái với giả thiết.

Điều vô lý đó chứng tỏ rằng hoặc là C thuộc vào $(C_1)$ hoặc là C thuộc vào $(C_2)$.

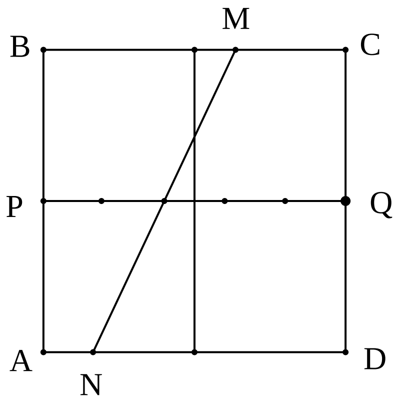
Như vậy cả 25 điểm đã cho đều thuộc vào $(C_1)$ và $(C_2)$.

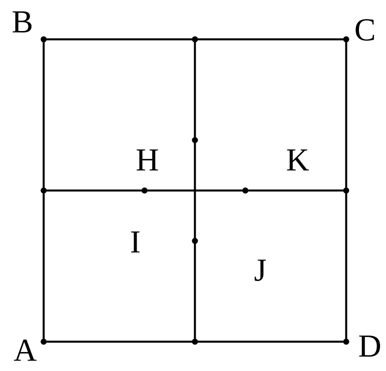
Theo nguyên tắc Dirichlet, ắt phải có ít nhất là một hình tròn chứa không ít hơn 13 điểm.

**Bài toán 3.** Cho hình vuông $ABCD$ và chín đường thẳng phân biệt thỏa mãn mỗi một đường thẳng đều chia hình vuông thành hai tứ giác có diện tích tỷ lệ với 2 và 3.

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là ba đường thẳng đồng qui tại một điểm.

***Hướng dẫn giải***




Nhận xét: các đường thẳng đã cho không thể đi qua trung điểm các cạnh hình vuông $ABCD$ bởi vì ngược lại thì hình vuông sẽ bị phân thành hai phần tam giác và ngũ giác.

Giả sử một đường thẳng trong số đó cắt cạnh $BC$ tại $M$ và cắt cạnh $AD$ tại $N$ .

Các hình thang $ABMN$ và $CDNM$ có chiều cao bằng nhau nên từ giả thiết suy ra $MN$ chia đoạn thẳng nối trung điểm $P$ ,$Q$ của $AB$ và $CD$ theo tỷ lệ $\frac{2}{3}$.

Dễ thấy chỉ có 4 điểm chia 2 đường trung bình của hing vuông ABCD theo tỷ lệ $\frac{2}{3}$ là $I, J, K, H$ . Có 9 đường thẳng đia qua 4 điểm này; theo nguyên tắc Dirichlet, phải có ít nhất là 3 đường thẳng cùng đi qua một điểm.

**Bài toán 4.** Cho đa giác đều gồm 1999 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng 2 màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng ắt phải tồn tại 3 đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.

***Hướng dẫn giải***

Ta có đa giác 1999 cạnh nên có 1999 đỉnh. Do đó ắt phải tồn tại 2 đỉnh kề nhau là $P$ và $Q$ được sơn bởi cùng 1 màu ( chẳng hạn màu đỏ).

Vì đa giác đã cho là đa giác đều có một số lẻ đỉnh, cho nên phải tồn tại một đỉnh nào đó nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng $PQ$ . Giả sử đỉnh đó là $A$ .

Nếu $A$ tô màu đỏ thì ta có $\Delta APQ$ là tam giác cân có 3 đỉnh $A, P, Q$ được tô cùng màu đỏ.

Nếu $A$ tô màu xanh. Lúc đó gọi $B$ và $C$ là các đỉnh khác của đa giác kề với $P$ và $Q$ .

Nếu cả 2 đỉnh B và C được tô màu xanh thì $\Delta ABC$ cân và có 3 đỉnh cùng tô màu xanh.

Nếu ngược lại một ttrong hai đỉnh B hoặc C mà tô màu đỏ thì tam giác $BPQ$ hoặc tam giác $CPQ$ là các tam giác cân có 3 đỉnh được tô màu đỏ.

## C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

**Bài 1.** Một đồi thông có 800 000 cây thông. Trên mỗi cây thông có không quá 500 000 chiếc lá. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 2 cây thông có cùng số lá như nhau ở trên cây.

**Bài 2.** Một lớp học có 40 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 4 học sinh có tháng sinh giống nhau**.**

**Bài 3.** Cho dãy số gồm 5 số tự nhiên bất kì $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 5 hoặc tổng của một số số liên tiếp trong dãy đã cho chia hết cho 5.

**Bài 4.** Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. chứng minh rằng tồn tại một số có dạng 111...11 mà chia hết cho p.

**Bài 5.** Với 39 số tự nhiên liên tiếp, hỏi rằng ta có thể tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11 hay không?

**Bài 6.** Chứng minh rằng trong 52 số tự nhiên tùy ý, chí ít cũng có một cặp gồm hai số sao cho hoặc tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

**Bài 7.** Chứng minh rằng tồn tại lũy thừa của 29 mà các chữ số tận cùng của nó là 00001.

**Bài 8.** (Bài toán áp dụng 2 lần nguyên tắc Dirichlet)

Có 17 nhà toán học viết thư cho nhau trao đổi về 3 vấn đề khoa học, mỗi người viết thư cho một người về một vấn đề. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 3 nhà toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

**Bài 9.** Một lớp học có 30 học sinh. Khi viết chính tả, em A phạm 14 lỗi, các em khác phạm ít lỗi hơn. Chứng minh rằng có ít nhất là 3 học sinh không mắc lỗi hoặc mắc số lỗi bằng nhau.

**Bài 10.** Cho 5 người tùy ý. Chứng minh rằng trong số đó có ít nhất là hai người có số người quen bằng nhau ( chú ý là A quen B thì B quen A).

**Bài 11.** Trong một giải bóng đá có 10 đội tham gia, bất cứ hai đội nào trong số đó cũng phải đấu với nhau một trận. Chứng minh rằng tại bất cứ thời điểm nào của lịch thi đấu cũng có hai đội đã đấu được một số trận như nhau.

**Bài 12.** Chứng minh rằng đối với một số n nguyên dương bất kì bao giờ ta cũng tìm được một số tự nhiên mà các chữ số của nó bao gồm chỉ có chữ số 5 và chữ số 0 và chia hết cho n.

**Bài 13.** Chứng minh rằng luôn tồn tại số được viết bởi toàn chữ số 8 chia hết cho 2011.

**Bài 14.** Chứng minh rằng nếu ( n, 2010 ) = 1 thì luôn tồn tại một số k nguyên dương sao cho $n^k - 1$ chia hết cho 2010.

**Bài 15.** Chứng minh rằng trong 1007 số tự nhiên bất kỳ luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 2011.

**Bài 16.** Cho n + 1 số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn 2n ( n > 1 ). Chứng minh rằng có thể chọn ra 3 số nào đó mà một số bằng tổng hai số kia.

**Bài 17.** Cho tam giác đều $ABC$ có cạnh bằng 1. Đánh dấu 5 điểm phân biệt bất kỳ trong $\Delta ABC$. Chứng minh rằng ắt tồn tại ít nhất là 2 điểm trong số đó mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn $0,5$.

**Bài 18.** Bên trong hình vuông có cạnh bằng 1, lấy bất kỳ 51 điểm phân biệt. Chứng minh rằng phải tồn tại ít nhất là 3 điểm trong số 51 điểm này nằm trong một hình tròn có bán kính bằng $\frac{1}{7}$.

**Bài 19.** Bên trong hình tròn $(O,R)$ có diện tích bằng 8, người ta lấy 17 điểm phân biệt bất kỳ. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được ít nhất là 3 điểm tạo thành một tam giác có diện tích bé hơn 1.

**Bài 20.**Bên trong một cái sân hình chữ nhật có chiều dài 4m và chiều rộng là 3m có 6 con chim đang ăn. Chứng minh rằng phải có ít nhất là hai con chim mà khoảng cách đậu giữa chúng nhỏ hơn là $\sqrt{5}m$.

**Bài 21.** Các điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 2 điểm được tô bởi cùng một màu và khoảng các giữa chúng bằng 1.

**Bài 22.** Trên mặt phẳng cho $100$ điểm bất kỳ. Nối mỗi điểm với ít nhất là $66$ điểm trong số $99$ điểm còn lại bằng một đoạn thẳng. Chứng minh rằng có thể xãy ra trường hợp có 2 điểm trong số 4 điểm bất kỳ của $100$ điểm đã cho không được nối với nhau.

**Bài 23.** Cho $5$ điểm phân biệt nằm bên trong hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $35+\sqrt{3}$. Chứng minh rằng ắt tìm được ít nhất là một điểm trong hình vuông đã cho sao cho, khoảng cách từ nó đến ểm đã cho lớn hơn 10.

**Bài 24.** Mỗi điểm cửa mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng ắt tìm được ít nhất là ba điểm được tô bởi cùng một màu tạo thành một tam giác đều có cạnh là 1 hoặc $\sqrt{3}$.

**Bài 25.** Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu đen và đỏ. Chứng tỏ rằng tồn tại một tam giác đều mà các đỉnh của nó chỉ được tô bằng một màu.

**Bài 26.** Trên mặt phẳng cho $2000$ đường thẳng phân biệt, đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 2 đường thẳng mà góc tạo bởi chúng không lớn hơn $\frac{180°}{2000}$

**Bài 27.** Bên trong đường tròn có bán kính $2000$ có $8000$ đoạn thẳng có độ dài là 1. Chứng minh rằng có thể dựng được một đường thẳng $d$ hoặc là song song hoặc là vuông góc với một đường thẳng $l$ cho trước, sao $d$ cắt ít nhất là hai đoạn thẳng đã cho.

**Bài 28.** Cho bảng ô vuông kích thước 10.10 gồm 100 ô vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

**Bài 29.**Trong hình chữ nhật kích thước 1.2 ta lấy $6n^2+1$ điểm với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại 1 hình tròn có bán kính $\frac{1}{n}$ chứa không ít hơn 4 trong số các điểm đã cho.

**Bài 30.** Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

**Câu 31.** Lớp 6A có 45 học sinh làm bài kiểm tra môn Toán không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có 2 bạn được điểm 10. Chứng tỏ rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau. Biết điểm kiểm tra là số tự nhiên từ 0 đến 10?

**Câu 32.** Chứng minh rằng từ 52 số nguyên bất kì luôn tồn tại 2 số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

**Câu 33.** Trên mặt phẳng cho $2019$ điểm phân biệt sao cho trong bất cứ 3 điểm nào trong $2019$ điểm ở trên ta luôn tìm được 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1 cm. Chứng minh rằng: Sẽ tồn tại ít nhất $1010$ điểm nằm trong 1 đường tròn có bán kính bằng 1 cm.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.** Ta hãy tưởng tượng mỗi cây thông là một "thỏ", như vậy có 800.000 "thỏ" được nhốt vào không quá 500.000 "chiếc lồng". Lồng 1 ứng với cây thông có 1 chiếc lá trên cây, lồng 2 ứng với cây thông có 2 chiếc lá trên cây v.v... Số thỏ lớn hơn số lồng, theo nguyên tắc Đirichlet ít nhất có 1 lồng nhốt không ít hơn 2 thỏ nghĩa là có ít nhất 2 cây thông có cùng số lá.

**Bài 2.** Một năm có 12 tháng. Ta phân chia 40 học sinh vào 12 tháng đó. Nếu mỗi tháng có không quá 3 học sinh được sinh ra thì số học sinh không quá: 3.12 = 36 mà 36 < 40 (vô lý).

Vậy tồn tại một tháng có ít nhất 4 học sinh trùng tháng sinh ( trong bài này 40 thỏ là 40 học sinh, 12 lồng là 12 tên tháng).

**Bài 3.** Ta sẽ thành lập dãy số mới gồm 5 số sau đây:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

- Nếu một trong cách $S_i\left(i = 1,...,5\right)$ chia hết cho 5 thì bài toán đã được chứng minh.

- Nếu không có số nào chia hết cho 5 thì khi đem chia các số $S_i$ cho 5 sẽ được 5 số dư có giá trị từ 1 đến 4.

Có 5 số dư mà chỉ có 4 giá trị (5 thỏ, 4 lồng). Theo nguyên tắc Đirichlet ít nhất phải có 2 số dư có cùng giá trị. Hiệu của chúng chia hết cho 5. Hiệu này chính là tổng các $a_i$ liên tiếp nhau hoặc là $a_i$ nào đó.

**Bài 4.**

Xét dãy số 1,11,111,..., $\underbrace{111....11}_{p \text{ chữ số } 1}$

Ta chứng minh trong dãy trên phải có số chia hết cho p. Giả sử kết luận ấy không đúng, tức là không có bất kỳ số nào của dãylại chia hết cho p.

Cho tương ứng mỗi số dư của phép chia cho p . Tập hợp số dư có thể thuộc tập hợp {1, 2, 3,..., p – 1} (Do 0 không thể thuộc tập hợp này). Ta lại có p số trong dãy số trên. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho p. Giả sử các số đó là 111...11 (m chữ số 1) và số 111....11 (n chữ số 1) với $\left(1 \le n < m \le p\right)$. Từ đó ta có

$$(\underbrace{111...11}_{m \text{ chữ số } 1} - \underbrace{111...11}_{n \text{ chữ số } 1}) \vdots p, \quad hay \quad \underbrace{111...1}_{m-n \text{ chữ số } 1}\underbrace{000...0}_{n \text{ chữ so } 0} \vdots p \quad Hay \quad \underbrace{111...1}_{m-n \text{ chữ số } 1}.10^n \vdots p \qquad (1)$$

Do p là sô nguyên tố lớn hơn 5 nên (p; 10) = 1, Vì thế từ (1) ta suy ra $\underbrace{111...1}_{m-n \text{ chữ số } 1} \vdots p$ (2)

$\underbrace{111...1}_{m-n \text{ chữ số } 1}$ là một số thuộc dãy trên nên từ (2) suy ra mâu thuẫn với giả thiết. Vậy giả sử phản chứng là sai. Ta suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 5.** Từ 20 số đầu tiên của dãy bao giờ ta cũng có thể tìm được 2 số mà chữ số hàng đơn vị là 0, và trong hai số đó ít nhất phải có một số có chữ số hàng chục khác 9. Giả sử N là số đó, và ta gọi S là tổng các chữ số của N.

Ta có dãy số mới N, N + 1, N + 2,... N + 9, N + 19 là 11 số vẫn nằm trong 39 số cho trước mà tổng các chữ số của chúng là S, S + 1, S + 2, ... S + 9, S + 10. Đó là 11 số tự nhiên liên tiếp, ắt phải có một số chia hết cho 11.

**Bài 6.** Để làm xuất hiện số "thỏ" và số "lồng ta làm như sau:

Trong tập hợp các số dư trong phép chia cho 100 ta lấy ra từng cặp số sao cho tổng các cặp đó bằng 100 và thành lập thành các nhóm sau:

(0 ; 0), (1 ; 99), (2 ; 98), (3 ; 97), (4 ; 96), (5 ; 95), (6 ; 94)... (49 ; 51), (50 ; 50). Chú ý rằng sẽ có 50 cặp như vậy, ta thêm vào cặp (0, 0) sẽ có 51 cặp (51 lồng).

- Đem chia 52 số tự nhiên cho 100 sẽ có 52 số dư (52 thỏ).

- Có 52 số dư mà chỉ có 51 nhóm, theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất cũng phải có 2 số dư cùng rơi vào một nhóm.

Rõ ràng là cặp số tự nhiên ứng với cặp số dư này chính là hai số tự nhiên có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100. (đpcm)

**Bài 7.** Trước hết ta chú ý rằng:

$29^m$ có tận cùng là 1 nếu m là số chẵn

$29^m$ có tận cùng là 9 nếu m là số lẻ.

Ta hãy xét $10^5$ lũy thừa của 29 với các số mũ chẵn khác nhau. Có hai khả năng xảy ra:

a. Trong đó nếu có số mũ 2k nào mà $29^{2k}$ có tận cùng là 00001 thì bài toán đã được chứng minh.

b. Không có số mũ 2k nào để $29^{2k}$ có tận cùng là 00001.

Từ b, ta thấy rằng:

Số các số có 5 chữ số tận cùng khác nhau nhỏ hơn $10^5$ (kể từ 5 chữ số tận cùng 00002, 00003, ... 99 999, $10^5$).

trong khi đó số các số khác nhau mà ta đang xét là $10^5$ số. Theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất phải có hai lũy thừa nào đó có 5 chữ số tận dùng là như nhau.

Giả sử $A_1 = 29^{2k_1} = M_1 \,.\, 10^5\ \overline{abcd_1}$

$$A_2 = 29^{2k_2} = M_2 \,.\, 10^5\ \overline{abcd_1}$$

Có thể giả sử $k_1 > k_2$ mà không làm mất tính chất tổng quát của bài toán. Thế thì ta có:

$$A_1 - A_2 = 29^{2k_1} - 29^{2k_2} = (M_1 - M_2)\ 10^5$$

$$A_1 - A_2 = 29^{2k_1} - 29^{2k_2} = 29^{2k_2}\left(29^{2(k_1 - k_2)} - 1\right)$$

Vì $29^{2k_2}$ có tận cùng là 1 và $A_1 - A_2 = (M_1 - M_2)10^5$ có tận cùng không ít hơn 5 số 0 nên suy ra $\left(29^{2(k_1-k_2)} - 1\right)$ phải có tận cùng không ít hơn 5 chữ số 0, từ đó suy ra $29^{2(k_1-k_2)}$ có tận cùng là 00001 (số các chữ số 0 ít nhất là 4).

Ta tìm được số $k = 2(k_1 - k)$ thỏa mãn đề bài (đpcm).

**Bài 8.** Gọi A là nhà toán học nào đó trong số 17 nhà toán học, thì nhà toán học A phải trao đổi với 16 nhà toán học còn lại về 3 vấn đề. Như vậy nhà toán học A phải trao đổi ít nhất với 6 nhà toán học về một vấn đề nào đó. Vì nếu chỉ trao đổi với số ít hơn 6 nhà toán học về một vấn đề thì số nhà toán học được trao đổi với A ít hơn 16. (Các bạn có thể diễn tả theo khái niệm "thỏ" và "lồng" để thấy ở đây đã áp dụng nguyên tắcDirichlet lần thứ nhất.)

- Gọi các nhà toán học trao đổi với nhà toán học A về một vấn đề nào đó (giả sử vấn đề I) là $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$ . Như vậy có 6 nhà toán học trao đổi với nhau về 3 vấn đề (không kể trao đổi với A). Như vậy có 6 nhà toán học $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$ trao đổi với nhau về 3 vấn đề, I, II, III.

Có hai khả năng xảy ra:

a. Nếu có 2 nhà toán học nào đó cùng trao đổi với nhau về vấn đề I thế thì có 3 nhà toán học (kể cả A) trao đổi với nhau về vấn đề I. Bài toán được chứng minh.

b. Nếu không có nhà toán học nào trong 6 nhà toán học $A_1$, $A_2$ ... $A_6$ trao đổi về vấn đề I thì ta có 6 nhà toán học chỉ trao đổi với nhau về 2 vấn đề II và III. Theo nguyên tắcDirichlet có ít nhất 3 nhà toán học cùng trao đổi với nhau về một vấn đề II hoặc III. Bài toán cũng được chứng minh.

**Bài 9.** Để tôn trọng ta cần thay đổi ngôn ngữ ***thỏ, chuồng*** là ***học sinh , phòng***.

*Phòng 1: Chứa các em mắc 1 lỗi.*

*Phòng 2: Chứa các em mắc 2 lỗi.*

……………………………………

*Phòng 14: Chứa các em mắc 14 lỗi.*

*Phòng 15: Chứa các em không  mắc lỗi.*

Theo giả thiết *phòng 14* chỉ có em A. Còn lại 14 phòng chứa 29 em. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một phòng chứa ít nhất 3 em. Từ đó có điều phải chứng minh.

**Bài 10.** Có 5 người nên số người quen nhiều nhất của mỗi người là 4.

*Phòng 0: Chứa những người không có người quen.*

*Phòng 1: Chứa những người có 1 người quen.*

…………………………………………………………

*Phòng 4: Chứa những người có 4 người quen.*

Để ý rằng *phòng 0* & *phòng 4*  không thể cùng có người.

Thực chất 5 người chứa trong 4 phòng.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một phòng chứa ít nhất 2 người. Từ đó có điều phải chứng minh.

**Bài 11.** Xét một thời điểm bất kỳ của lịch thi đấu ( mỗi đội thi đấu tối đa 9 trận).

*Phòng 0: Chứa các đội chưa đấu trận nào.*

*Phòng 1: Chứa các đội đã thi đấu 1 trận.*

…………………………………………………

*Phòng 9: Chứa các đội đã thi đấu 9 trận.*

Để ý rằng *phòng 0* và *phòng 9* không thể cùng có đội thi đấu.

Thực chất 10 đội chứa trong 9 phòng.

Theo nguyên lý Dirichlet ta suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 12.** Xét n+ 1 số sau: $a_1 = 5; a_2 = 55; ...; a_{n+1} = 55...5$ ( n+1 chữ số 5).

Theo nguyên lý Dirichlet : với n+1 số trên ắt tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho n. Hiệu của hai số này là số có dạng: 55…50…0 gồm toàn chữ số 5 và chữ số 0 và chia hết cho n. Đó là điều phải chứng minh!

**Bài 13.** Xét 2012 số $a_1 = 8; a_2 = 88; ...; a_{2012} = 88...8$ (2012 chữ số 8). Tương tự ví dụ 4 sẽ tồn tại số có dạng 88…80…0 ( n chữ số 8 và k chữ số 0) chia hết cho 2011.

Mà: 88…80…0 = 88…8.$10^k$ và ($10^k$,2011) = 1 suy ra số: 88…8 chia hết cho 2011. Điều phải chứng minh! ( *Lưu ý: 2011 là số nguyên tố*)

**Bài 14.** Xét 2011 số sau: n; $n^2$ ; $n^3$;…; $n^{2011}$.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 2010.Giả sử hai số đó là $n^i$ và $n^j$ với $1 \le i < j \le 2011$. Khi đó $n^j - n^i = n^i(n^{j-i} - 1) = n^i(n^k - 1)$ chia hết cho 2010 ( k = j - i là số nguyên dương). Vậy $n^k - 1$ chia hết cho 2010 ( vì ($n^i$, 2010) =1).

**Bài 15.** Ta xét phép chia 1007 số trên cho 2011 và xếp vào:

*Nhóm 0: Các số chia hết cho 2011 ( dư 0)*

*Nhóm 1: Các số chia cho 2011 dư 1 hoặc 2010.*

*Nhóm 2: Các số chia cho 2011 dư 2 hoặc 2009.*

…………………………………………………….

*Nhóm 1005: Các số chia cho 2011 dư 1005 hoặc 1006.*

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một nhóm chứa ít nhất hai số. Theo cách xếp nhóm thì hoặc là tổng hoặc là hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 2011.

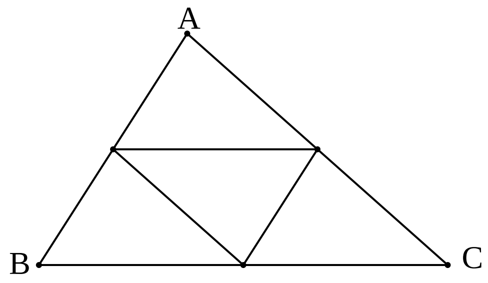
**Bài 16.** Sắp thứ tự n + 1 số đã cho $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{n+1} < 2n$ ( Nhóm 1). Xét thêm n số:

$b_1 = a_2 - a_1; b_2 = a_3 - a_1; ...; b_n = a_{n+1} - a_1$. Ta có: $1 \le b_1 < b_2 < ... < b_n < 2n$ (Nhóm 2).

Tập 2n số của cả 2 nhóm trên ( trừ $a_1$ của nhóm 1) nhận 2n -1 giá trị ( *chuồng).*

Theo nguyên lý Dirichlet có 2 số bằng nhau nhưng không cùng một nhóm 1 hoặc nhóm 2 tức là phải thuộc 2 nhóm. Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

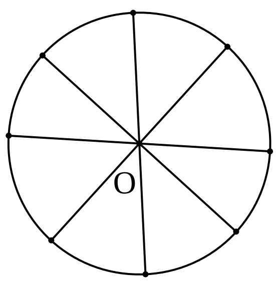
**Bài 17.**




Các đường trung bình của $\Delta ABC$ chia nó thành bốn tam giác đều có cạnh là $0,5$. Theo nguyên tắc Dirichlet, ắt tồn tại ít nhất là 2 điểm rơi vào cùng một tam giác nhỏ. Ta có khoảng cách giữa 2 điểm này nhỏ hơn $0,5$.

**Bài 18.** Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông con bằng nhau có cạnh là 0,2. Suy ra theo nguyên tắc Dirichlet, ắt tồn tại ít nhất là 3 điểm nằm trong một hình vuông con. Ta có bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông này bằng $\frac{1}{5\sqrt{2}} < \frac{1}{7}$. Suy ra 3 điểm đã cho nằm trong hình tròn bán kính là $\frac{1}{7}$.

**Bài 19.**

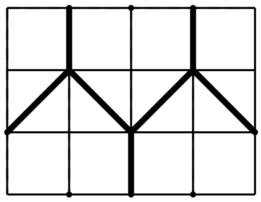



Chia hình tròn $(O,R)$ thành 8 phần bằng nhau. Do đó mỗi hình quạt có diện tích bằng 1.

Theo nguyên tắc Dirichlet, ắt có ít nhất là một hình quạt chưa nhiều hơn 2 điểm.

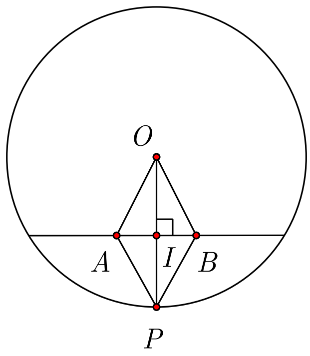
Xét 3 điểm phân biệt trong hình quạt đã cho. Dễ thấy tam giác tạo bởi 3 điểm này có diện tích bé hơn 1.

**Bài 20.**



Chia sân thành 5 hình như hình vẽ. Áp dụng nguyên tắc Dirichlet, ta suy ra kết quả cần chứng minh.

**Bài 21.** Dựng $(0;\sqrt{3})$. $P$ là một điểm thuộc $(0;\sqrt{3})$. Dựng hình thoi $OAPB$ có đường chéo $OP$ cạnh là 1.




Gọi $I$ là giao điểm của hai đường chéo, ta có: $OI=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow AI^2=AO^2-OI^2=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow AI=\frac{1}{2}\Rightarrow AB=1$$

Vậy $\Delta AOB$ đều có cạnh bằng 1.

Giả sử ngược lại, mọi cặp hai điểm có khaongr cách giữa chúng bằng 1 mà đều được tô bằng hai màu khác nhau.

Không matas tính chất tổng quát, ta giả sử điểm $O$ được tô bằng màu xanh, điểm $A$ được tô bằng màu đỏ và điểm $B$ được tô bằng màu vàng.

Bởi vì $PA=PB=1$ suy ra $P$ phải được tô bằng màu xanh.

Với cách lập luận như vậy ta suy ra, tất cả các điểm trên đường $(0;\sqrt{3})$ đều được tô cùng một màu xanh. Mặt khác dễ dàng tìm được trên $(0;\sqrt{3})$ hai điểm mà khoảng cách giữa chúng bằng 1, nên theo giả sử chúng được tô bằng hai màu khác nhau. Vô lý.

Điều vô lý đó chứng tỏ có hai điểm được tô cùng một màu mà khoảng cách của chúng bằng 1.

**Bài 22.** Gọi các điểm đã cho là $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{100}$

Kí hiệu: $M=\{A_1,A_2,A_3,\ldots,A_{33}\}$, $N=\{A_{34},A_{35},A_{36},\ldots,A_{66}\}$, $P=\{A_{67},A_{68},A_{69},\ldots,A_{100}\}$

Tập $M$ gồm 33 điểm, tập $N$ gồm 33 điểm và tập $P$ gồm 34 điểm. Trường hợp của bài toán: yêu cầu chứng minh có thể xảy ra nếu như:

Mỗi điểm trong tập hợp $M$ chỉ được nối với các điểm của tập hợp $N$ hoặc $P$.

Ccacs điểm của tập hợp $N$ chỉ được nối với các điểm của tập hợp $P$ hoặc tập $M$.

Các điểm của tập hợp $P$ chỉ được nối với các điểm có trong tập $M$ hoặc tập $N$ (2 tập này có 66 điểm).

Thật vậy, giả sử $(A_i, A_j, A_k, A_l)$ là 4 điểm bất kỳ trong số 100 điểm. Theo nguyên tắc Dirichlet awrt phải có ít nhất là 2 điểm cùng thuộc vào cùng 1 tập hợp ($M$, $N$ hoặc $P$)

Do đó với cách phân chia trên đây, 2 điểm này không được nối với nhau.

**Bài 23.** Gọi $K, I$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$ và $CD$.

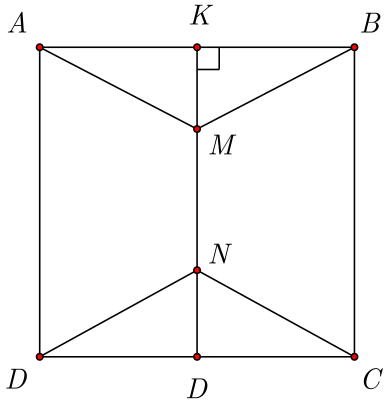
Trên đoạn $KI$ lấy điểm $M$ và $N$ sao cho:

$KM = NI = 8$

Ta có: $MN = KI - KM - NI = 35 + \sqrt{3} - 16 = 19 + \sqrt{3}$

còn $AM = BM = DN = CN$

$= \sqrt{\left(\frac{35+\sqrt{3}}{2}\right) + 8^2} > 20$




Do đó nếu ta vẽ các đường trong có tâm là $A, B, C, D, M, N$ bán kính là 10 thì các đường tròn này không cắt nhau.

Bởi vì chỉ có 5 điểm phân biệt nằm trong hình vuông, do đó ắt tồn tại ít nhất là một hình tròn không chứa điểm nào trong số 5 điểm đã cho.

Nhận thấy, tâm của đường tròn này có khoảng các tới 5 điểm đã cho lớn hơn 10.

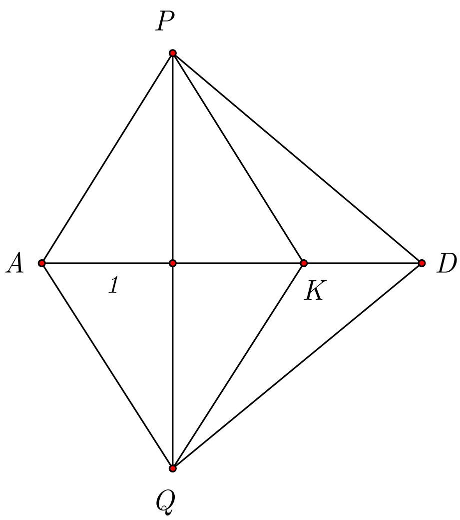
**Bài 24.** Dựng một tam giác đều có cạnh bằng 1. Nếu cả ba đỉnh được to bởi cùng một màu (xanh hoặc đỏ) thì bài toán được chứng minh.

Trong trường hợp ngược lại, xét tam giác đều $ABC$ có cạnh $AB = 1$ mà $A$ và $B$ được tô bằng hai màu khác nhau.

Lấy điểm $D$ của mặt phẳng sao cho $AO = BO = 2$. Vì $A, B$ khác màu nên $D$ cùng màu với chỉ một trong hai điểm $A$ hoặc $B$.

Suy ra tồn tại đoạn t hẳng $AD = 2$ hoặc $BD = 2$ có 2 mút được tô bằng hai màu khác nhau. Giả sử là đoạn thẳng $AD$. Gọi $K$ là trung điểm của đoạn thẳng $AD$ thì $K$ cùng màu với một trong hai điểm $A$ hoặc $D$. Giả sử $K$ và $A$ cùng có màu xánh.

Vẽ các tam giác đều $APK$ và $AQK$.



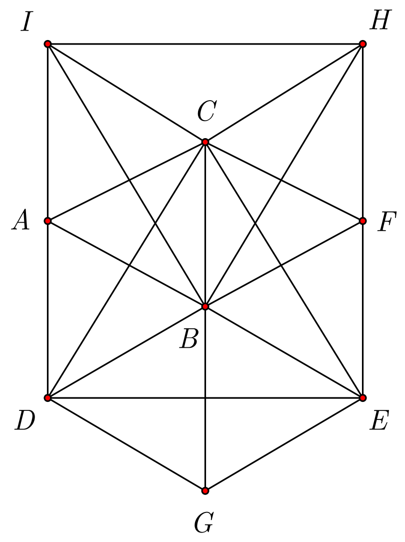

Nếu $P$ và $Q$ có màu xanh thì ta có tam giác đều $APK$ và $AQK$ có cạnh bằng 1 và ba đỉnh được tô bằng cùng màu xanh.

Nếu $P$ và $Q$ có màu đỏ thì tam giác $PQD$ có 3 đỉnh được tô cùng màu đỏ. Dễ thấy, tam giác $PQD$ đều có cạnh là $\sqrt{3}$.

**Bài 25.**

Cách 1. Có thể giải như bài 808

Cách 2: có thể giải như cách sau đây:




Vẽ tam giác $ABC$ nếu cả ba đỉnh $A, B, C$ được tô cùng một màu thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Nếu $A, B, C$ được tô bởi 2 màu khác nhau, theo nguyên tắc Dirichlet, ắt phải có hai đỉnh được tô cùng một màu. Giả sử các đỉnh $A$ và $B$ được tô cùng màu đen, khi đó $C$ được tô bằng màu đỏ..

Dựng lục giác đều $ADGEFC$ có tâm là $B$.

Ta có tam giác $ADB$ đều. Nếu $D$ được tô màu đen ta có ngay điều phải chứng minh. Còn nếu $D$ được tô màu đỏ, lại xét tam giác $CDE$ đều. Nếu $E$ được tô bằng màu đỏ thì tam giác $CDE$ có ba đỉnh được tô cùng màu đỏ, thỏa mãn.

Có nếu ngược lại $E$ được tô bằng màu đen, lại xét tam giác $BEF$ đều. Nếu $F$ được tô bằng màu đen thì ta có $BEF$ có ba đỉnh được tô cùng màu đen, thỏa mãn.

Giả sử ngược lại $F$ được tô bằng màu đỏ, thì lại xét tam giác $CFH$ đều.

Nếu điểm $H$ được tô bằng màu đỏ thì ta có tam giác $CFH$ có ba đỉnh được to bằng màu đỏ, thỏa mãn. Còn giả sử ngược lại $H$ được tô bằng màu đen thì lại vẽ tam giác đều $BHI$. Nếu $I$ được tô bằng màu đen thì tam giác $BHI$ có ba đỉnh được tô bằng màu đen, thỏa mãn. Giả sử ngược lại, $I$ được tô bằng màu đỏ thì xét tam giác $IDF$. Dễ thấy tam giác $IDF$ đều, theo trên ta có ba đỉnh $I, D, F$ được tô bởi cùng màu đỏ, thỏa mãn.

Tóm lại: ta chứng tỏ được rằng, tồn tại tam giác đều mà ba đỉnh được tô bởi cùng một màu.

**Bài 26.** Lấy một điểm $O$ bất kỳ trên mặt phẳng. Qua $O$ dựng các đường thẳng song song với $2000$ đường thẳng đã cho. Tại $O$ ta có $4000$ góc đôi một đối đỉnh có tổng số đo bằng $360°$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 27.** Giả sử $xy$ là một đường thẳng bất kỳ vuông góc với $l$. Ta đánh dấu các đoạn thẳng theo thứ tự $1, 2, 3, \ldots, 8000$. Chiếu các đoạn thẳng này lên hai đường thẳng $xy$ và $l$.

Kí hiệu $a_i$ và $b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 8000$) tương ứng là độ dài của các đoạn thẳng đã cho trên các đường thẳng $xy$ và $l$.

Ta có $a_i + b_i \geq 1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, 8000$

Do đó $\left(a_1+a_2+\ldots a_{8000}\right)+\left(b_1+b_2+\ldots b_{8000}\right)\geq 8000=4000+4000$

Suy ra: hoặc là $a_1+a_2+\ldots a_{8000}\geq 4000$

hoặc là $b_1+b_2+\ldots b_{8000}\geq 4000$

Ta có $8000$ đoạn thẳng có thể chiếu vuông góc lên đường kính của đường trong với độ dài $4000$.

Nếu các hình chiếu của các đoạn thẳng đã cho lên đường thẳng $l$ mà không có các điểm chung thì ta có: $a_1+a_2+\ldots a_{8000}<4000$.

Vì vậy trên $l$ tìm được một điểm là hình chiếu của các điểm thuộc ít nhất là hai trong số các đoạn thẳng đã cho.

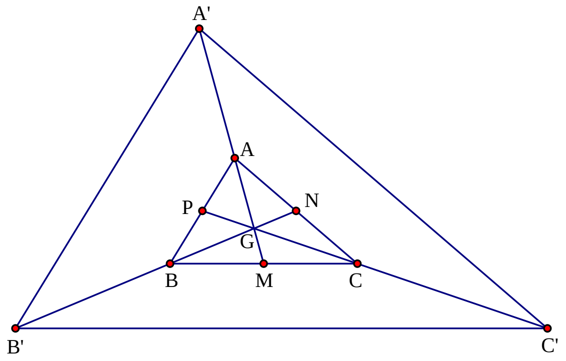
Khi đó đường thẳng vuông góc với $l$ dựng qua điểm này sẽ có điểm chung với ít nhất hai đoạn thẳng trong số $8000$ đoạn thẳng đã cho.

**Bài 28.** Xét hình vuông cạnh $2x2$, do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn chung cạnh hoặc chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho 3 do đó có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3. Bảng $10x10$ được chia thành 25 hình vuông có cạnh $2x2$ nên có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 0 có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1, 5, 7. Áp dụng nguyên lí Dirichlet ta được một trong ba số trên xuất hiện ít nhất $\left[\frac{50}{3}\right]+1=17$ lần

**Bài 29.** Chia các cạnh của hình chữ nhật thành n đoạn và 2n đoạn bằng nhau ,mỗi đoạn có độ dài $\frac{1}{n}$. Nối các điểm chia bằng các đường thẳng song songvới các cạnh của hình chữ nhật ta được $n.2n=2n^2$ hình vuông nhỏ với cạnh là $\frac{1}{n}$. Nếu mỗi hình vuông chứa không quá 3 điểm thì tổng số điểm đã cho không quá $3.2n^2=6n^2$(trái với giả thiết). Do đó phải tồn tại 1 hình vuông chứa không ít hơn 4 điểm. Rõ ràng hình vuông cạnh $\frac{1}{n}$ nội tiếp đường tròn bán kính là $\frac{\sqrt{2}}{2n}$ và đường tròn này được chứa trong đường tròn đồng tâm bán kính $\frac{1}{n}$.

**Bài 30.**

Lấy năm điểm tùy ý sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng trên mặt phẳng. Khi đó vì chỉ dùng có hai màu để tô các đỉnh, mà theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại ba điểm trong số đó cùng màu. Giả sử đó là ba điểm A, B, C có màu đỏ. Như vậy ta có tam giác ABC với ba đỉnh màu đỏ. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chỉ có hai khả năng xảy ra:




+ Nếu G có màu đỏ. Khi đó A, B, C, G cùng đỏ và bài toán đã được giải.

+ Nếu G có màu xanh. Kéo dài GA, GB, GC các đoạn $AA' = 3GA,\ BB' = 3GB,\ CC' = 3GC$. Khi đó gọi M, N, P tương ứng là các trung điểm của BC, CA, AB thì

$A'A = 3AG = 6GM \Rightarrow A'A = 2AM$.

Tương tự $B'B = 2BN,\ CC' = 2CP$. Do đó các tam giác A'BC, B'AC, C'AB tương ứng nhận A, B, C là trọng tâm. Mặt khác, ta cũng có các tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm G. Có hai trường hợp sau có thể xảy ra:

- Nếu A', B', C' cùng xanh. Khi đó tam giác A'B'C' và trọng tâm G có cùng màu xanh.
- Nếu ít nhất một trong các điểm A', B', C' có màu đỏ. Không mất tính tổng quát giả sử A' đỏ. Khi đo tam giác A'BC và trọng tâm A màu đỏ.

Vậy trong mọi khả năng luôn tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

**Câu 31.** Số học sinh lớp 6A đạt điểm kiểm tra từ 2 đến 9 là: $45 - 2 = 43$ ( học sinh)

Ta có: $43 = 8.5 + 3$

Khi phân chia 43 học sinh vào 8 loại điểm kiểm tra từ 2 đến 9 thì theo Nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại ít nhất $5 + 1 = 6$ học sinh có điểm kiểm tra giống nhau.

**Câu 32.** Chia 52 số nguyên tùy ý cho 100,ta có thể có các số dư từ 0,1,2,3,…,99.Ta phân các số dư thành các nhóm sau: $\{0\};\{1,99\};\ldots;\{49,51\},\{50\}$. Ta có tất cả 51 nhóm và khi chia 52 số cho 100 ta có 52 số dư. Theo nguyên lí Dirichlet sẽ có 2 số dư cùng thuộc một nhóm. Ta có 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Hai số dư giống nhau, suy ra hiệu hai số có 2 số dư tương ứng đó sẽ chia hết cho 100.

Trường hợp 2: Hai số dư khác nhau,suy ra tổng của hai số dư có hai số dư tương ứng đó sẽ chia hết cho 100

Ta suy ra điều phải chứng minh.

**Câu 33.** Nếu khoảng cách giữa hai điểm đều bé hơn 1 thì ta chỉ cần chọn một điểm $A$ bất kì trong số 2019 điểm đã cho, rồi vẽ đường tròn $(A,1)$, đường tròn ấy sẽ chứa cả 2018 điểm còn lại, do đó ta có điều phải chứng minh.

Giả sử có hai điểm $A$ và $B$ trong đó 2019 điểm đã cho mà có khoảng cách lớn hơn 1. Vẽ các đường tròn tâm là $A,\ B$ và bán kính cùng là 1. Ta còn lại 2017 điểm. Mỗi điểm $C$ bất kì trong số 2017 điểm ấy.

Theo bài thì $AB,\ AC,\ BC$ phải có một đoạn thẳng có độ dài bé hơn 1.

Vì $AB > 1$ nên $BC < 1$ hoặc $AC < 1$. Do đó hoặc là $C$ nằm trong đường tròn $(A,1)$ hoặc là $B$ nằm trong đường tròn $(B,1)$.

Do có 2017 điểm C như vậy nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất $\left[\frac{2017}{2}\right]+1=1009$ điểm nằm trong cùng một đường tròn.

Giả sử đường tròn đó là $(A,1)$. Cùng với điểm A ta có $1010$ điểm nằm trong đường tròn $(A,1)$ (đpcm).

# CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI HÌNH HỌC LỚP 7

## CHUYÊN ĐỀ 1: GÓC TRONG TAM GIÁC

**I. Cơ sở lí thuyết**

Để giải tốt các bài toán tính số đo góc thì học sinh tối thiểu phải nắm vững các kiến thức sau:

- Trong tam giác:
  - o Tổng số đô ba góc trong tam giác bằng $180^0$.
  - o Biết hai góc ta xác địn được góc còn lại.
  - o Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.
- Trong tam giác cân: biết một góc ta xác định được hai góc còn lại.
- Trong tam giác vuông:
  - o Biết một góc nhọn, xác định được góc còn lại.
  - o Cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông có số đo bằng $30^0$.
- Trong tam giác vuông cân: mỗi góc nhọn có số đo bằng $45^0$.
- Trong tam giác đều: mỗi góc có số đo bằng $60^0$.
- Đường phân giác của một góc chia góc đó ra hai góc có số đo bằng nhau.
- Hai đường phân giác của hai góc kề bù tạo thành một góc có số đo là $90^0$.
- Hai đường phân giác của hai góc kề phụ tạo thành một góc có số đo là $45^0$.
- Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.
- Tính chất về góc so le trong, so le ngoài, đồng vị, hai góc trong cung phía, …

**Khi giải bài toán về tính số đo góc cần chú ý:**

1.Vẽ hình chính xác, đúng với các số liệu trong đề bài để có hường chứng minh đúng.
2.Phát hiện các tam giác đều, "nửa tam giác đều", tam giác vuông cân, tam giác cân trong hình vẽ.
3.Chú ý liên hệ giữa các góc của tam giác, liên hệ giữa các cạnh và các góc trong tam giác, phát hiện các cặp tam giác bằng nhau. Vẽ đường phụ hợp lí làm xuất hiệ các góc đặc biệt, những cặp góc bằng nhau. Trong các đường phụ vẽ thêm, có thể vẽ đường phân giác, đường vuông góc, tam giác đều, …
4. Có thể dùng chữ để diễn đạt mối quan hệ giữa các góc.
5.Xét đủ các trường hợp về số đo góc có thể xảy ra (ví dụ góc nhọn, góc tù, …)

**(Tham khảo toán nâng cao lớp 7, tập 2 – Vũ Hữu Bình)**

Trong thực tế, để giải bài toán **tính số đo góc** ta thường xét các góc đó nằm trong mối liên hệ với các góc ở các hình đặc biệt đã nêu ở trên hoặc xét các góc tương ứng bằng nhau ... rồi suy ra kết quả.

Tuy nhiên, đứng trước một bài toán không phải lúc nào cũng gặp thuận lợi, có thể đưa về các trường hợp trên ngay mà có nhiều bài đòi hỏi người đọc phải tạo ra được những *"điểm sáng bất ngờ"* có thể là một đường kẻ phụ, một hình vẽ phụ… từ mối quan hệ giữa giả thiết, kết luận và những kiến thức, kỹ năng đã học trước đó mới giải quyết được. Chúng ta có thể xem *"đường kẻ phụ", "hình vẽ phụ"* như là *"chìa khoá "* thực thụ để giải quyết dạng toán này.

## II. Một số dạng toán và hướng giải quyết

### Dạng 1. Tính số đo góc qua việc phát hiện tam giác đều.

**Bài toán 1.** **Cho $\Delta ABC$ có $\widehat{A} = 20^0$ có $AB = AC$, lấy $M \in AB$ sao cho $MA = BC$. Tính số đo $\widehat{AMC}$?**

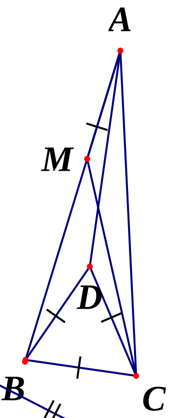
**Nhận xét**

Ta cần tìm $\widehat{AMC}$ thuộc $\Delta ABC$ có $\hat{A} = 20^0$ mà $\hat{B} = \hat{C} = 80^0 = 20^0 + 60^0$.

Ta thấy có sự liên hệ rõ nét giữa góc $20^0$ và góc $60^0$, mặt khác $MA = BC$.

Từ đây, ta thấy các yếu tố xuất hiệ ở trên liên quan đến tam giác đều.

Điều này giúp ta nghĩ đến việc dựng hình phụ là tam giác đều.




**Hướng giải**

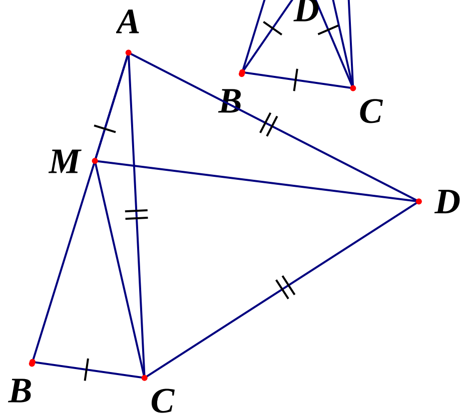
Cách 1. (Hình 1)

Vẽ $\Delta BDC$ đều (D, A cùng phía so với BC). Nối A với D.

Ta có $\Delta ABD = \Delta ACD$ (c.c.c) => $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} = 10^0$

Lại có $\Delta AMC = \Delta CDA$ (c.g.c) => $\widehat{MCA} = \widehat{DAC} = 10^0$

=> $\widehat{AMC} = 180^0 - \left(\widehat{ACM} + \widehat{MAC}\right) = 180^0 - (20^0 + 10^0) = 150^0$




Cách 2. (Hình 2)

Vẽ $\Delta ACD$ đều (M, D khác phía so với AC).

Ta có $\Delta BAC = \Delta ADM$ (c.g.c) => $\widehat{AMD} = 80^0$ (1)

=> $\Delta MDC$ cân tại D, $\widehat{MDC} = 40^0$ => $\widehat{DMC} = 70^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AMC} = 150^0$.

Từ hướng giải quyết trên chúng ta thử giải Bài toán1 theo các phương án sau:

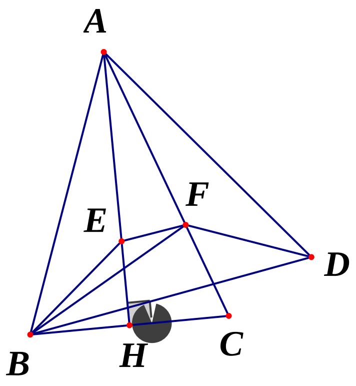
- Vẽ $\Delta ACD$ đều (C, D khác phía so với AB)
- Vẽ $\Delta ABD$ đều (B, D khác phía so với AC)
- Vẽ $\Delta AMD$ đều (D, C khác phia so với AB)

…………………………..

Lập luận tương tự ta cũng có kết quả.

**Bài toán 2.** **Cho $\Delta ABC$ cân tại $A$, $\hat{A} = 40^0$. Đường cao AH, các điểm E, F theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng AH, AC sao cho $\widehat{EBA} = \widehat{FBC} = 30^0$. Tính $\widehat{AEF}$?**

**Hướng giải**




Vẽ $\Delta ABD$ đều (B, D khác phía so với AC)

$\Delta ABC$ cân tại $A$, $\hat{A} = 40^0$ (gt)

=> $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 70^0$ mà $\widehat{FBC} = 30^0$ (gt)

=> $\widehat{ABF} = 40^0$, $\widehat{BAF} = 40^0$ => $\Delta AFB$ cân tại F.

=> $AF = BF$, mặt khác $AD = BD$, FD chung

$$=> \Delta AFB = \Delta BFD\ (c.c.c) => \widehat{ADF} = \widehat{BDF} = \frac{60^0}{2} = 30^0$$

Do AH là đường cao của tam giác cân BAC

=> $\widehat{BAE} = 20^0 = \widehat{FAD} = 60^0 - 40^0$, $AB = AD$ (vì $\Delta ABD$ đều), $\widehat{ABE} = 30^0$ (gt)

=> $\Delta ABE = \Delta ADF$ (g.c.g) => $AE = AF$ => $\Delta EAF$ cân tại A mà $\widehat{EAF} = 20^0$

$$=> \widehat{AEF} = \frac{180^0 - 20^0}{2} = 80^0.$$

**Nhận xét**

Vấn đề suy nghĩ vẽ tam giác đều xuất phát từ đâu?

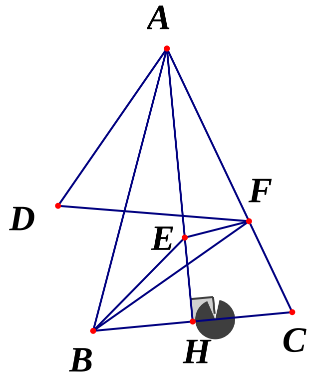
Phải chăng xuất phát từ giả thiết $40^0 = 60^0 - 20^0$ và mối liên hệ $FA = FB$ được suy ra từ $\Delta ABE$ cân tại F.

Với hướng suy nghĩ trên chúng ta có thể giải Bài toán 2 theo các cách sau:

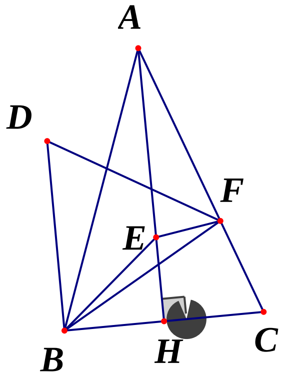
- Vẽ $\Delta AFD$ đều, F, D khác phía so với AB (H.1).
- Vẽ $\Delta BFD$ đều, F, D khác phía so với AB (H.2).

…………………

(H.1)




(H.2)



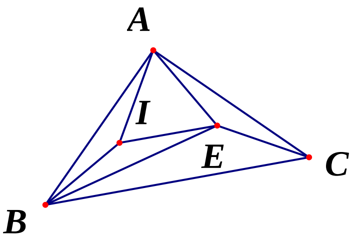

**Bài toán 3.** (Trích toán nâng cao lớp 7 – Vũ Hữu Bình)

**Cho $\Delta ABC$, $\hat{B} = \hat{C} = 45^0$. Điểm E nằm trong $\Delta$ sao cho $\widehat{EAC} = \widehat{ECA} = 15^0$. Tính $\widehat{BEA}$?**

**Nhận xét**

Xuất phát từ $15^0$ và $75^0$ đã biết, ta có $60^0 = 75^0 - 15^0$ và $EA = EC$ do $\Delta EAC$ cân tại E. Với những yếu tố đó giúp ta nghĩ đế việc dựng hình phụ là tam giác đều.

**Hướng giải**




Vẽ $\Delta AEI$ đều (I, B cùng phía so với AE).

Ta có $\Delta AEC = \Delta AIB$ (c.g.c)

$=> IB = CE$ mà $EI = CE$ ($\Delta AEI$ đều)

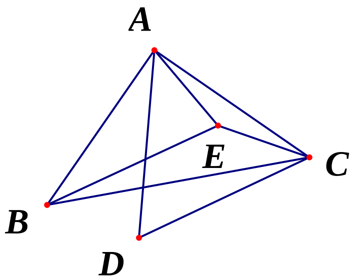
$=> IB = EI => \Delta EIB$ cân tại $I$.

$$=> \widehat{EIB} = 360^0 - (60^0 + 150^0) = 150^0$$

$$=> \widehat{IEB} = 15^0$$

$=> \widehat{BEA} = \widehat{BEI} + \widehat{IEA} = 75^0$

**Khai thác**




Chúng ta có thể giải Bài toán 3 theo cách sau:

Vẽ $\Delta ACD$ đều (D, E khác phía so với AC)

- **Một số bài toán tương tự**

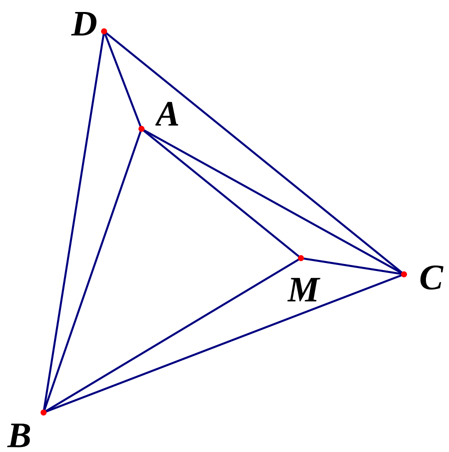
**Bài toán 3.1.** Cho $\Delta ABC$, $\hat{A} = 1V, AB = 2AC$. Kẻ tia $Cx//AB$. Kẻ AD sao cho $\widehat{CAD} = 15^0, D \in Cx$ (B, D cùng phía so với AC). Tính $\widehat{ADB}$?

**Bài toán 3.2.** Cho $\Delta ABC$, $\hat{A} = 1V, \hat{B} = 75^0, BH = 2AC, H \in AB$ (B, H khác phía so với AC). Tính $\widehat{HCA}$?

**Bài toán 3.3.** Cho $\Delta ABC$ $(AB = AC)$. $\hat{A} = \alpha$ $(60^0 < \alpha < 120^0)$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{MCA} = \frac{\alpha - 60^0}{2}$. Tính $\widehat{BMC}$?

**<u>Bài toán 4.</u> Cho $\Delta ABC$, $\hat{A} = 80^0, AB = AC$. M là điểm nằn trong tam giác sao cho $\widehat{MBC} = 10^0, \widehat{MCB} = 30^0$. Tính $\widehat{AMB}$?**

**Nhận xét**




Xuất phát từ giả thiết $AB = AC$ và liên hệ giữa góc $10^0$ với $50^0$ ta có

$50^0 + 10^0 = 60^0$. Từ đó nghĩ đến giải pháp dựng tam giác đều.

**Hướng giải**

Cách 1. (H.1)

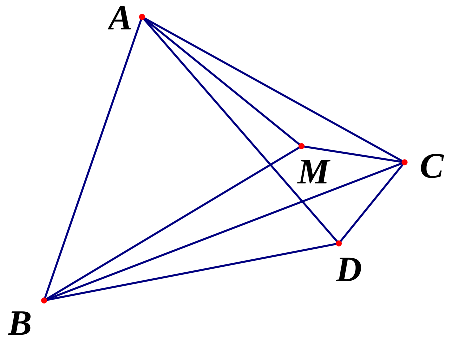
Vẽ $\Delta BDC$ đều (A, D cùng phía so với BC)

Dễ thấy $\Delta BAD = \Delta CAD$ (c.g.c) và $\Delta DAB = \Delta CMB$ (g.c.g)

$$=> BA = BM$$

$=> \Delta ABM$ cân tại B, $\widehat{ABM} = 50^0 - 10^0 = 40^0$

$$=> \widehat{AMB} = 70^0$$




Cách 2. (H.2)

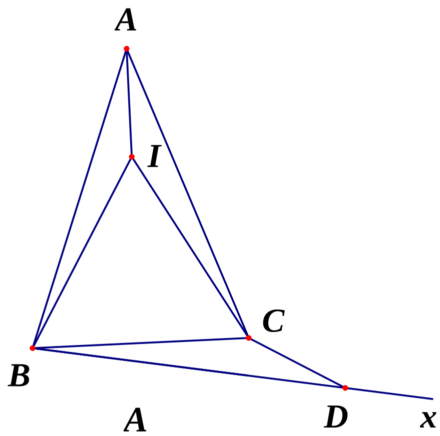
Vẽ $\Delta ABD$ (D, A khác phía so với BC)

=> $\Delta ABM$ cân tại A. Từ đó có hướng giải quyết tương tự.

**<u>Bài toán 5.</u> Cho $\Delta ABC$, $(\hat{B} = \hat{C} = 70^0)$. Kẻ tia $Bx$ sao cho $\widehat{CBx} = 10^0$. Trên tia $Bx$ lấy điểm D sao cho $BD = BA$ (A, D khác phía so với BC). Tính $\widehat{BCD}$?**

**Nhận xét**

Ta thấy bài ra xuất hiện góc $70^0$ và $10^0$ mà $60^0 = 70^0 - 10^0$, đồng thời với $BD = BA$. Điều này làm nảy sinh suy nghĩ về vẽ hình phụ là tam giác đều.




**Hướng giải**

Cách 1

Vẽ $\Delta BIC$ đều (I, A cùng phía so với BC)

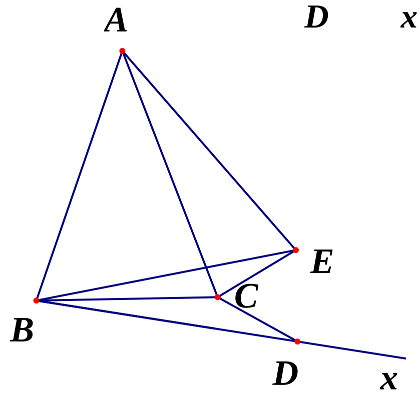
Ta thấy $\Delta BIA = \Delta CIA$ (c.g.c) và $\Delta BIA = \Delta BCD$ (c.g.c)

=> $\widehat{BCD} = \widehat{BIA} = 180^0 - \left(10^0 + \frac{\widehat{BAC}}{2}\right) = 150^0$

Cách 2

Vẽ $\Delta ABE$ đều (E, B khác phía so với AC)

Từ đây ta có cách giải quyết tương tự.




**Dạng 2. Tính số đo góc qua việc phát hiện tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền**

**<u>Bài toán 6.</u> Tính các góc của tam giác ABC biết rằng đường cao AH, trung tuyến AM chia góc BAC thành ba góc bằng nhau.**

**Phân tích**

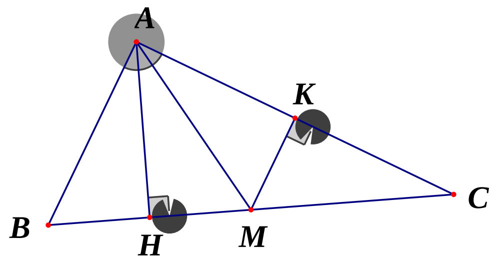
+/ Đường cao AH, trung tuyến AM chia $\widehat{BAC}$ thành ba góc bằng nhau

=> $\Delta ABM$ cân tại A (Đường cao đồng thời là phân giác)

=> $AH$ đồng thời là trung tuyến

$$=> HB = HM = \frac{1}{2}BM => HM = \frac{1}{2}MC$$

+/ Có thể vẽ thêm đường phụ liên quan đến $\widehat{MAC} = \widehat{MAH} = \widehat{HAB}$ và liên quan đến HM = HB = $\frac{1}{2}$BM = $\frac{1}{2}$MC



⟶Kẻ MK ⊥ AC tại K. Khi đó có sơ sơ đồ phân tích.

$$AM \perp AC \text{ tại } K \to \Delta AHM = \Delta AKM \to MK = MH \to MK = \frac{1}{2}MC \to \hat{C} = 30^0$$

$$\to \widehat{HAC} = 60^0 \to \widehat{HAM} = \widehat{MAC} = 30^0 \to \widehat{HAB} = 30^0 \to \widehat{BAC} = 90^0$$

$$\to \hat{B} = 60^0$$

**Hướng giải**

Vì $MK \perp AC$ tại K. Xét $\Delta ABM$ có

AH là đường cao ứng với BM

AH là đường phân giác ứng với cạnh BM (vì $\widehat{BAH} = \widehat{HAM} = \frac{1}{2}\widehat{BAM}$)

Nên $\Delta ABM$ cân tại đỉnh A

=> H là trung điểm BM

$$=> HM = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{4}BC$$

Xét $\Delta AHM$ và $\Delta AKM$ có

AM là cạnh huyền chung

$\widehat{HAM} = \widehat{KAM}$ (gt)

=> $\Delta AHM = \Delta AKM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

=> $HM = KM$ (hai cạnh tương ứng)

$$=> KM = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{2}MC$$

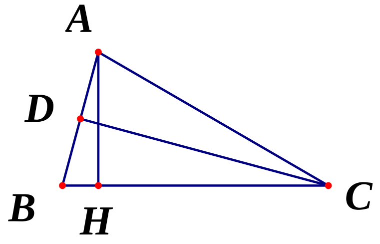
Xét $\Delta MKC$ có $\widehat{MKC} = 90^0$, $KM = \frac{1}{2}MC$

=> $\hat{C} = 30^0$ khi đó ta tính được $\hat{B} = 30^0, \hat{A} = 90^0$

Vậy $\hat{B} = 30^0, \hat{A} = 90^0, \hat{C} = 60^0$

**<u>Bài toán 7</u>. Cho $\Delta ABC$, $\hat{C} = 30^0$. Đường cao AH, AH = $\frac{1}{2}$ BC. D là trung điểm của AB. Tính $\widehat{ACD}$?**

**Hướng giải**




*Xét* $\Delta AHC$ *có* $\hat{C} = 30^0, \widehat{AHC} = 1V => AH = \frac{1}{2}AC$

$$\text{mà } AH = \frac{1}{2}BC\ (gt) => AC = BC$$

=> $\Delta ACB$ cân tại $C$ => $CD$ là phân giác => $\widehat{ACD} = 15^0$

**Nhận xét**

Suy nghĩ chứng minh $\Delta ACB$ cân xuất phát từ đâu? Phải chăng xuất phát từ $\Delta AHC$ vuông có $\hat{C} = 30^0$ và AH = $\frac{1}{2}$BC. Thực sự hai yếu tố này đã giúp ta nghĩ đến tam giác vuông có một góc bằng $30^0$.

**<u>Bài toán 8.</u> Cho $\Delta ABC$ có ba góc nhọn. Về phía ngoài của $\Delta ABC$ ta vẽ các tam giác đều ABD và ACE. I là trực tâm $\Delta ABD$, H là trung điểm BC. Tính $\widehat{IEH}$?**

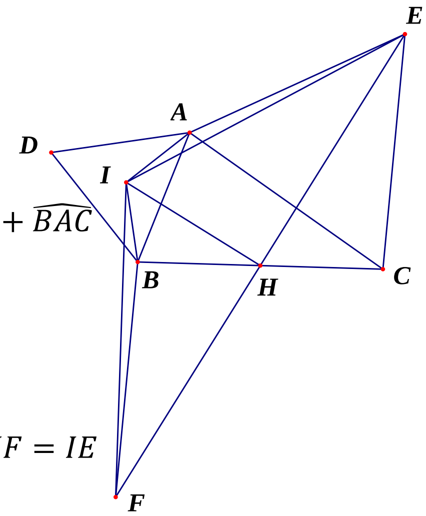
**Phân tích**

$\Delta HEI$ là một nửa tam giác đều

=>, vẽ thêm đường phụ để xuất hiện nửa tam giác đều (còn lại)

=> Trên tia đối của tia HE lấy điểm F sao cho HE = HF

**Hướng giải**




Trên tia đối của tia HE lấy điểm F sao cho HE = HF

Ta có $\Delta BHF = \Delta CHE\ (c.g.c) => BF = CE$

Ta có IA = IB và $\widehat{AIB} = 120^0$ (vì $\Delta ABD$ đều)

$$\widehat{IAE} = 30^0 + \widehat{BAC} + 60^0 = 90^0 + \widehat{BAC}$$

Mà $\widehat{IBF} = 360^0 - \left(\widehat{IBA} + \widehat{ABC} + \widehat{HBF}\right)$

$= 360^0 - \left(30^0 + \widehat{ABC} + \widehat{ECH}\right)$

$= 360^0 - \left(30^0 + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + 60^0\right)$

$= 360^0 - \left(90^0 + 180^0 - \widehat{BAC}\right) = 90^0 + \widehat{BAC}$

$$=> \Delta IBF = \Delta AIE\ (c.g.c) => IF = IE$$

$=> \Delta FIE$ cân tại I mà $\widehat{AIB} = 120^0$

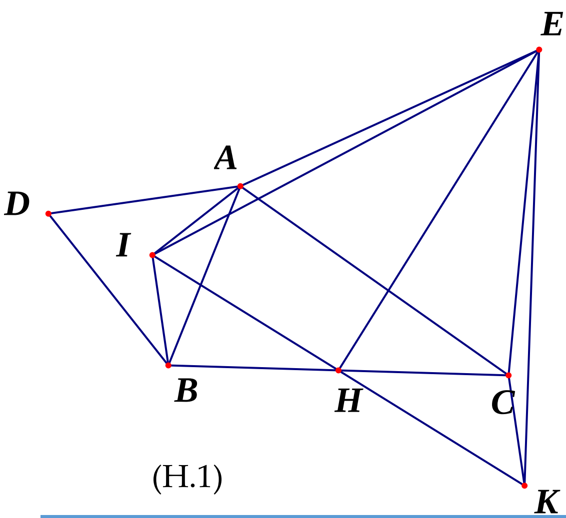
$$=> \widehat{FIE} = 120^0 => \widehat{IEH} = 30^0$$

**Khai thác**

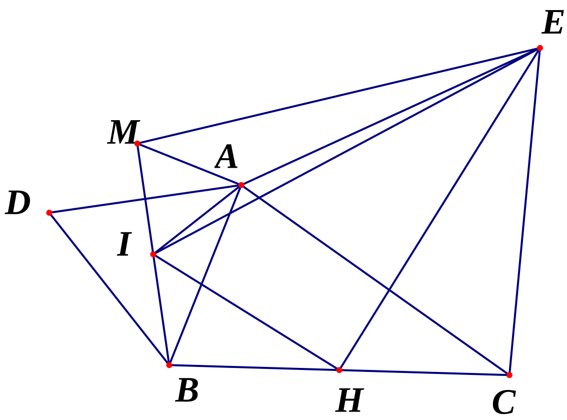
Với cách giải này nhiều em đã phát hiện và đề xuất cách vẽ đường phụ như sau:

- Lấy K đối xứng với I qua H (H.1)
- Lấy M đối xứng với B qua I (H.2)

………………………




(H.1)




(H.2)

**Bài tập cùng dạng:**

Cho $\Delta ABC$, vẽ $\Delta ABD, \Delta ACE$ đều (E, D nằm ngoài tam giác). I, P lần lượt là trung điểm của AD và CE. Điểm F nằm trên BC sao cho BF = 3FC. Tính $\widehat{FPI}$?

**Dạng 3. Tính số đo góc qua việc phát hiện tam giác vuông cân**

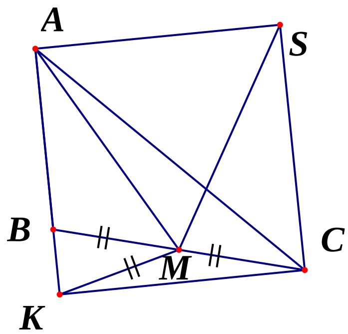
**Bài toán 9.** **Cho $\Delta ABC$, M là trung điểm của BC, $\widehat{BAM} = 30^0, \widehat{MAC} = 15^0$. Tính $\widehat{FPI}$?**

**Phân tích**

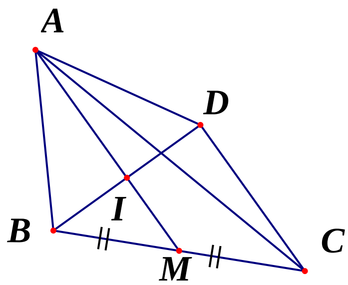
Khi đọc kĩ bài toán ta thấy $\widehat{BAM} = 30^0, \widehat{MAC} = 15^0, BM = MC$, quan sát hình vẽ rồi nhận dạng bài toán ta biết được nó có nguồn gốc từ Bài toán 3. Mặt khác $\widehat{BAC} = 45^0$, điều này giúp ta nghĩ đến dựng tam giác vuông cân.

**Hướng giải**

Cách 1.
Hạ $CK \perp AB$ (Dễ chứng minh được tia CB nằm giữa hai tia CA và CK)
Ta có $\Delta AKC$ vuông cân tại K (vì $\widehat{BAC} = 45^0$) => $KA = KC$
Vẽ $\Delta ASC$ vuông cân tại S (K, S khác phía so với AC)
Do $\Delta BKC$ vuông tại K => KM = $\frac{1}{2}$ BC = MC
=> $\Delta KMC$ cân tại M
Dễ thấy $\Delta KAM = \Delta CSM$ $(c.g.c)$ => $\widehat{CSM} = 30^0$
=> $\widehat{ASM} = 60^0$ và $\widehat{SAM} = 60^0$
=> $\Delta ASM$ đều => AS = SM = AK
=> $\Delta AKM$ cân tại A
=> $\widehat{MKC} = \widehat{MCK} = 90^0 - 75^0 = 15^0$
=> $\widehat{BCA} = 45^0 - 15^0 = 30^0$



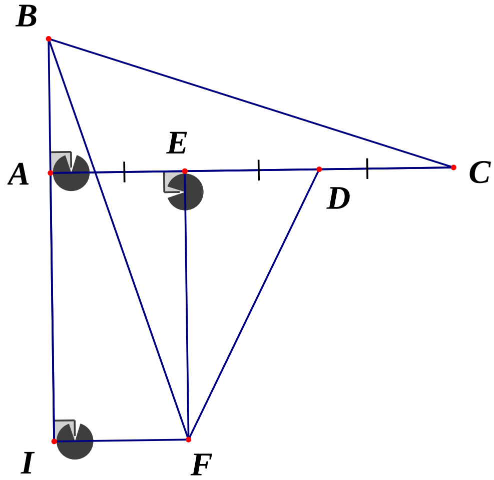

Cách 2.
Lấy D đối xứng B qua AM => $\Delta BAD$ cân tại A
Mà $\widehat{BAM} = 30^0$ $(gt)$ => $\widehat{BAD} = 60^0$ => $\Delta ABD$ đều
Ta có DC // MI (vì MB = MC, IB = ID), $(BD \cap AM = \{I\})$
Mà $MI \perp BD$ => $CD \perp BD$
Mặt khác xét $\Delta ABD$ có
$\widehat{CAD} = 15^0(gt), \widehat{ADC} = 60^0 + 90^0 = 150^0$
=> $\widehat{DCA} = 15^0$ => $\Delta ADC$ cân tại D => AD = CD
Mà AD = BD ($\Delta ABD$ đều)
Vậy $\Delta BDC$ vuông cân tại D => $\widehat{DCB} = 45^0$
=> $\widehat{BCA} = 45^0 - \widehat{DCA} = 45^0 - 15^0 = 30^0$




**Bài toán 10.** **Cho $\Delta ABC, \widehat{A} = 1V, AC = 3AB$. D là điểm thuộc đoạn AC sao cho AD = 2DC. Tính $\widehat{ADB} + \widehat{ACB}$ =?**

**Hướng giải**

Kẻ $EK \perp AC$ sao cho EA = ED, $E \in AD$ với EF = AD (B, F khác phía so với AC)




Ta có $\Delta BAD = \Delta DEF$ (c.g.c) (*)

$=> BD = FD, \widehat{BDF} = 1V => \Delta BDF$ vuông cân tại D

$=> \widehat{DFB} = 45^0$ (1)

Trên tia đối của tia AB lấy I sao cho AI = 2AB

Dễ thấy $\Delta IBF = \Delta ACB$ (c.g.c) => $\widehat{ACB} = \widehat{IBF} = \widehat{EFB}$ (2)

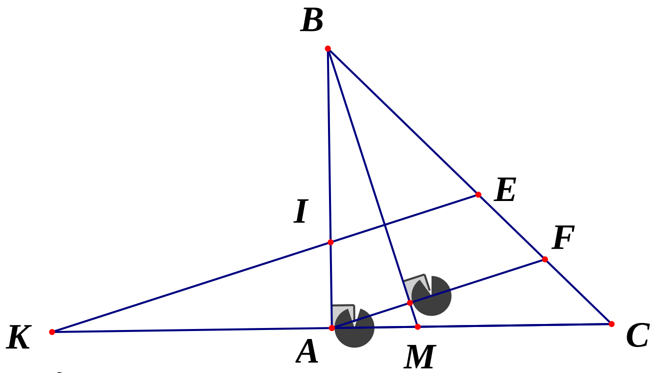
Từ (*), (1) và (2) ta có $\widehat{ADB} + \widehat{ACB} = \widehat{BFD} = 45^0$

**Nhận xét**

Sau khi vẽ hình ta dự đoán $\widehat{ADB} + \widehat{ACB} = 45^0$ lúc đó ta nghĩ đến việc tạo ra một tam giác vuông cân làm sao để tổng số đo của hai góc cần tìm bằng số đo góc $45^0$. Ý nghĩ dự đoán $\widehat{ADB} + \widehat{ACB} = 45^0$ xuất phát từ đâu? Phải chăng xuất phát từ $\Delta ABE$ vuông cân (E là trung điểm AD). Khi phát hiện tổng hai góc đó bằng $45^0$ chúng ta có thể giải bài toán theo nhiều cách giải khác nhau.

**<u>Bài toán 11.</u> Cho $\Delta ABC$ vuông cân tại A, M là điểm bất kì trên đoạn AC (M khác A, C). Kẻ $AF \perp BM, F \in BC$. E là điểm thuộc đoạn BF sao cho EF = FC kẻ EI // BM, $I \in BA$. Tính $\widehat{AIM}$?**

**Hướng giải**




Gọi K là giao điểm của IE và AC

Xét $\Delta KEC$ có FA // EK, EF = FC (gt)

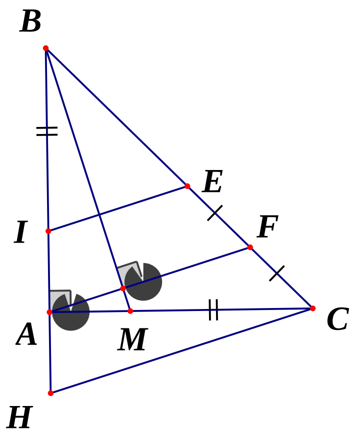
=> KA = AC và $\widehat{K} = \widehat{FAC}$

Ta có $\Delta ABM = \Delta AKI$ $(g.c.g)$(vì $\widehat{FAC} = \widehat{ABM}$)

=> AM = AI => $\Delta AIM$ vuông cân tại A

$=> \widehat{AIM} = 45^0$

**Nhận xét**




Đường kẻ phụ KI và KA xuất phát từ đâu? Ta thấy có hai nguyên nhân cơ bản làm nảy sinh kẻ đường phụ này:

+/ Một là do IE // AF

+/ Hai là EF = FC

Từ đó làm xuất hiện ý nghĩ chứng minh $\Delta ABM = \Delta AKI$ và bài toán được giải quyết.

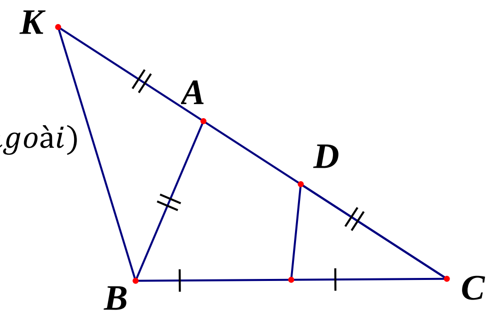
Căn cứ vào các yếu tố giả thiết đã cho của bài toán ta có các cách vẽ hình phụ khác như sau: Trên tia đối của tia AB lấy điểm H sao cho AH = AM.

Từ đó ta có cách giải quyết tương tự như trên.

**Dạng 4. Tính số đo góc qua việc phát hiện tam giác cân khi biết một góc.**

**<u>Bài toán 12.</u> Cho $\Delta ABC, \widehat{A} = 80^0, AC > AB$. D là điểm thuộc đoạn AC sao cho DC=AB. M, N theo thứ tự là trung điểm của AD và BC. Tính $\widehat{CMN}$?**

**Hướng giải**




Trên tia đối của tia AC lấy điểm K sao cho AK = DC

Nối K với B ta có $\Delta AKB$ cân tại A (vì AB = DC)

$$=> \ \widehat{BKA} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 80^0 = 40^0 \ (t/c \ \text{góc ngoài})$$

Mặt khác ta có MA = MD => MK = MC, BN = NC

=> MN là đường trung bình của $\Delta KBC$

$$=> \ \widehat{NMC} = \widehat{BKC} = 40^0$$

**Nhận xét**

Vì đâu ta có kẻ đường phụ AK?

+/ Thứ nhất: Ta có $\Delta AKB$ cân và biết $\widehat{BAC}$. Như vậy các góc của $\Delta AKB$ sẽ tìm được.

+/ Thứ hai: Vì MA = MD dẫn đến MK = MC

+/ Thứ ba: Do NB = MC

Với lí do thứ hai và ba ta có được góc cần tìm bằng $\widehat{BKA}$. Vậy bài toán được giải quyết. Sau khi nêu ra các lí do cơ bản đó, ta có các đường kẻ phụ khác như sau:

- Lấy K đối xứng với A qua N
- Lấy K là trung điểm của BD
- Lấy K đối xứng M qua B
- Lấy K đối xứng D qua N

…………………………

Bài toán trên có thể ra dưới dạng tổng quát như sau: Giữ nguyên giả thiết và thay $\hat{A} = \alpha \ (0^0 < \alpha < 180^0)$

**Một số bài toán tham khảo**

**Bài 1.** Cho $\Delta ABC, \hat{A} = 60^0$, các phân giác AD, CE cắt nhau tại F, $E \in AB, D \in AC$. Tính $\widehat{EDB}$?

**Bài 2.** Cho $\Delta ABC, \hat{C} = 100^0$, CA = CB, điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{CAM} = 10^0, \widehat{CBM} = 20^0$. Tính $\widehat{AMC}$?

**Bài 3.** Cho $\Delta ABC$ cân tại C, $\hat{C} = 80^0$, M nằm trong tam giác sao cho

$\widehat{MAB} = 10^0, \widehat{CBM} = 20^0$. Tính $\widehat{AMC}$?

**Bài 4**. Cho $\Delta ABC$ AB = AC, $\hat{A} = \alpha$, trung tuyến CM. trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho BD = BA, biết $\widehat{BCM} = \beta$. Tính $\widehat{BDC}$?

# CHUYÊN ĐỀ 2 : CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC

**A, Tóm tắt lý thuyết**

**1.Hai tam giác bằng nhau:**

Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

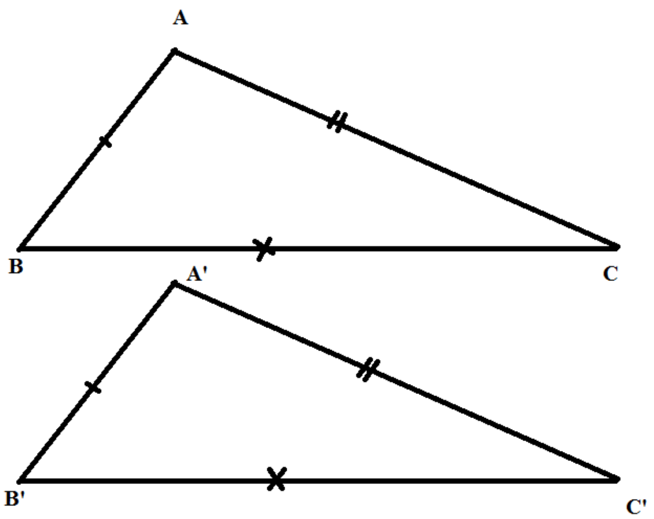
Δ ABC = Δ A'B'C' ⇔ $\begin{cases} AB = A'B'; AC = A'C'; BC = B'C' \\ \hat{A} = \widehat{A'}; \hat{B} = \widehat{B'}; \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$

**2. Các trường hợp bằng nhau của tam giác**

**a.Trường hợp bằng nhau thứ nhất của tam giác cạnh – cạnh – cạnh ( c.c.c )**

Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$\left.\begin{matrix} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{matrix}\right\}$ ⇨ ΔABC = Δ A'B'C' (c.c.c)




***<u>Nâng cao</u>*** : quan hệ bằng nhau của hai tam giác có tính chất bắc cầu

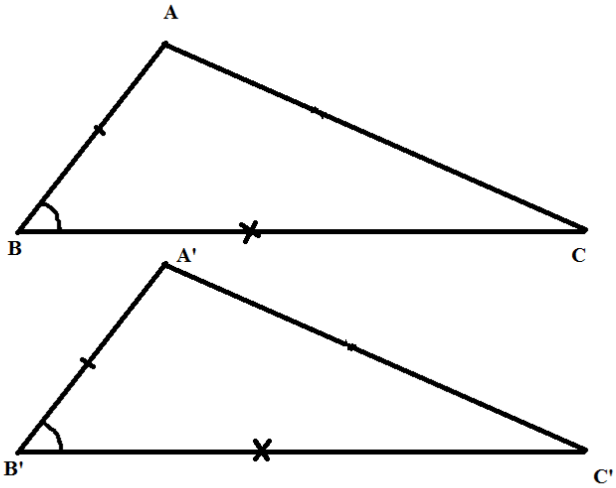
Nếu △ ABC = △ DEF; △DEF = △ HIK

Thì △ ABC = △ HIK

**b.Trường hợp bằng nhau thứ hai của tam giác cạnh – góc – cạnh (c.g.c)**

Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B' \\ \hat{B} &= \widehat{B'} \\ BC &= B'C' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (c.g.c)}$$




***Hệ quả :*** Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

***Nâng cao*** : Trong trường hợp bằng nhau cạnh – góc – cạnh, cặp góc bằng nhau phải là cặp góc xen giữa hai cặp cạnh bằng nhau. Nếu không có điều kiện đó thì hai tam giác chưa chắc đã bằng nhau.

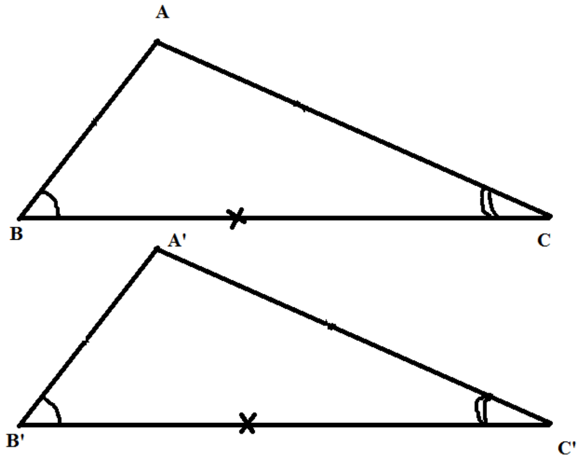
Tuy nhiên, người ta đã chứng minh được rằng :

Nếu hai tam giác nhọn có hai cặp cạnh bằng nhau từng đôi một và một cặp góc tương ứng bằng nhau (không cần xen giữa) thì hai tam giác đó bằng nhau.

**c.Trường hợp bằng nhau thứ ba của tam giác góc – cạnh – góc ( g.c.g )**

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left.\begin{aligned} \hat{B} &= \widehat{B'} \\ BC &= B'C' \\ \hat{C} &= \widehat{C'} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ ( g.c.g )}$$




***Nâng cao***: Trong trường hợp bằng nhau góc – cạnh – góc, cặp cạnh bằng nhau phải là cặp cạnh kề với hai cặp góc bằng nhau. Nếu không có điều kiện đó thì hai tam giác chưa chắc đã bằng nhau.

Tuy nhiên có thể thay điều kiện cặp cạnh kề bằng điều kiện khác như sau :

Nếu hai góc của tam giác này bằng hai góc của tam giác kia và có một cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau.

**d.Trường hợp bằng nhau của tam giác vuông**

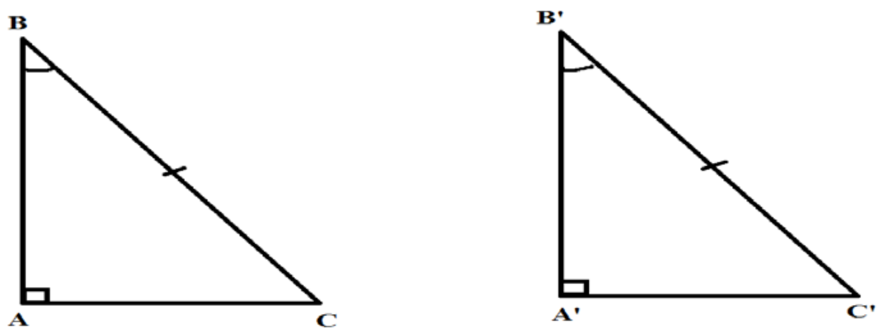
- Trường hợp 1 : hai cạnh góc vuông (cạnh – góc – cạnh)

Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

- Trường hợp 2 : cạnh huyền – góc nhọn (góc – cạnh - góc)

Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ \widehat{B} = \widehat{B'}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ ( cạnh huyền – góc nhọn )}$$




- Trường hợp 3 : cạnh huyền – cạnh góc vuông (cạnh – cạnh – cạnh)

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \widehat{A'} = 90° \\ BC = B'C' \\ AC = A'C'\end{array}\right\}$ ⇨ ΔABC = Δ A'B'C' ( cạnh huyền – cạnh góc vuông )

**3. Ứng dụng**

Chúng ta thường vận dụng các trường hợp bằng nhau của tam giác để :

- Chứng minh : hai tam giác bằng nhau, hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau, hai đường thẳng vuông góc, hai đường thẳng song song, ba điểm thẳng hàng,…
- Tính : các độ dài đoạn thẳng, tính số đo góc, tính chu vi, diện tích,…
- So sánh : các độ dài đoạn thẳng, so sánh các góc,….

**B. Các dạng bài tập**

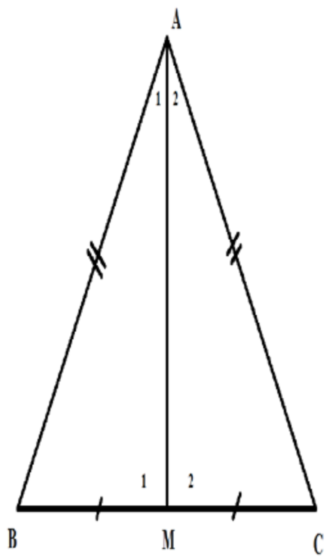
***Dạng 1 : Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh – cạnh – cạnh. Chứng minh hai góc bằng nhau dựa vào hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh – cạnh – cạnh.***

*Phương pháp : chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh- cạnh – cạnh rồi suy ra hai góc tương ứng bằng nhau.*

**Ví dụ 1:** Cho hai tam giác ABC có $\hat{A}$ = $40^0$, AB = AC . Gọi M là trung điểm của BC. Tính các góc của mỗi tam giác AMB, AMC.

*Phân tích:* Ta thấy rằng ΔABC có AB = AC nên ΔABC là tam giác cân và M là trung điểm của BC từ đó suy ra ΔAMB = ΔAMC theo trường hợp (c.c.c) . Cho $\hat{A}$ = $40^0$ từ đó có thể tính được các góc còn lại dựa vào định nghĩa hai tam giác bằng nhau.

*Lời giải*




Xét Δ AMB và Δ AMC có :

AB = AC (giả thiết)

MB = MC (giả thiết)

AM chung

⇨ Δ AMB = Δ AMC (c.c.c)

⇨ $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ , $\hat{B} = \hat{C}$ , $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (các góc tương ứng)

Ta lại có :

$\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 40^0$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 20^0$

$\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 180^0$ nên $\widehat{M_1} = \widehat{M_2} = 90^0$

Suy ra $\widehat{B} = \hat{C} = 180^0 - 90^0 - 20^0 = 70^0$

_Khai thác_ : giả sử tam giác ABC là tam giác đều, M là trung điểm của BC

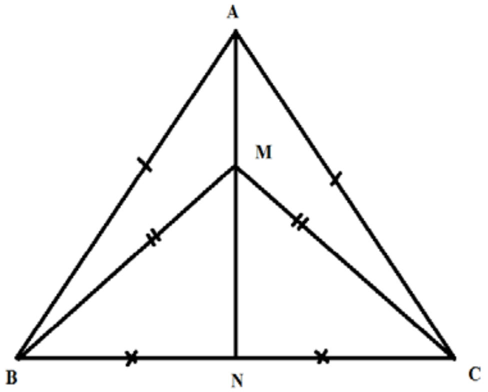
Tính các góc của mỗi tam giác AMB, AMC.

**Ví dụ 2** : Cho tam giác ABC có AB = AC. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác sao cho MB = MC. N là trung điểm của BC. Chứng minh rằng :

AM là tia phân giác của góc BAC.

_Phân tích_ : Chứng minh AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ thì ta cần chứng minh $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ .Muốn chứng minh hai góc này bằng nhau thì phải chứng minh △AMB = △ AMC (c.c.c)

_Lời giải_




Xét△ AMB và △AMC có :

AB = AC (gt)

AM chung

MB = MC (gt)

⇨△AMB = △ AMC (c.c.c)

⇨ $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$

Vậy AM là tia phân giác $\widehat{BAC}$ (đpcm)

_Khai thác_ : c, Hãy chứng minh MN là đường trung trực của đoạn BC.

b, Ba điểm A, M, N thẳng hàng.

**Bài tập vận dụng:**

**Bài 1** : Cho tam giác ABC. Vẽ cung tâm A có bán kính bằng BC, vẽ cung tâm C có bán kính bằng AB, chúng cắt nhau ở M (M và B nằm khác phía đối với AC). Chứng minh rằng AM// BC.

*(Trích Nâng cao và phát triển Toán 7 tập 1 – Vũ Hữu Bình)*

**Bài 2**: Cho tam giác ABC. Vẽ đoạn thẳng AD vuông góc với AB (D và C nằm khác phía đối với AB), AD = AB. Vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AC (E và B nằm khác phía đối với AC), AE = AC. Biết rằng DE = BC. Tính $\widehat{BAC}$.

*(Trích Nâng cao và phát triển Toán 7 tập 1 – Vũ Hữu Bình)*

**Bài 3** : Cho đoạn thẳng AB và điểm C cách đều hai điểm A và B, điểm D cách đều hai điểm A và B (C và D nằm khác phía đối với AB).

a,Chứng minh rằng tia CD là tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$.

b, Kết quả ở câu a có đúng không nếu C và D nằm cùng phía đối với AB?

*(Trích Nâng cao và phát triển Toán 7 tập 1 – Vũ Hữu Bình)*

**Bài 4**: Cho Δ ABC = Δ A′B′C′ . Gọi M và M′ tương ứng là trung điểm của BC và B′C′. Biết AM = A′M′. Chứng minh rằng :

a, Δ AMB = Δ A′M′B′

b, $\widehat{AMC} = \widehat{A'M'C'}$

**Bài 5** : Cho Δ ABC. Vẽ cung tròn tâm C bán kính bằng AB, cung tròn tâm B bán kính bằng AC. Hai cung tròn trên cắt nhau tại D (A và D thuộc hai nửa mặt phẳng bờ BC) . Chứng minh CD // AB và BD // AC.

**Bài 6** : Cho góc nhọn xOy. Trên tia Ox và Oy lấy tương ứng hai điểm A và B sao cho OA = OB, vẽ đường tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại hai điểm M, N nằm trong góc xOy. Chứng minh rằng :

a,△OMA = △ OMB và △ONA = △ ONB.

b, Ba điểm O, M, N thẳng hàng.

c, △AMN = △BMN.

d, MN là tia phân giác của góc AMB.

**Bài 7** : Cho Δ ABC có AB = AC. Gọi H là trung điểm cạnh BC.

a, Chứng minh AH vuông góc với BC và là tia phân giác của góc BAC.

b, Trên tia đối của HA lấy điểm K sao cho HK = HA, chứng minh rằng CK // AB.

**Bài 8** : Cho Δ ABC có AB = AC. Gọi D và E là hai điểm trên BC sao cho BD = DE = EC.

a, Chứng minh $\widehat{EAB} = \widehat{DAC}$.

b, Gọi M là trung điểm của BC, chứng minh rằng AM là tia phân giác của góc DAE.

c, Giả sử $\widehat{DAE} = 60^0$, có nhận xét gì về các góc của △ AED.

**Bài 9** : Cho Δ ABC, vẽ đoạn AD vuông góc với AB (C và D nằm ở hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC), AE = AC. Biết rằng DE = BC, tính $\widehat{BAC}$ .

**Dạng 2 : Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh – góc – cạnh.Từ đó vận dụng để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau.**

*Phương pháp : chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh- góc – cạnh rồi suy ra hai góc, hai đoạn thẳng tương ứng bằng nhau.*

**Ví dụ 1** : Cho tam giác ABC có $\hat{B}$ < 90°. Trên nửa mặt phẳng có chứa A bờ BC, vẽ tia Bx vuông góc với BC, trên tia đó lấy điểm D sao cho BD = BC. Trên nửa mặt phẳng có chứa C bờ AB, vẽ tia By vuông góc với BA, trên tia đó lấy điểm E sao cho BE = BA.

Chứng minh rằng : DA = EC

*Phân tích:*

Để chứng minh DA = EC ta cần chứng minh △ ABD = △ EBC

*Lời giải:*

Xét △ ABD và △ EBC có :

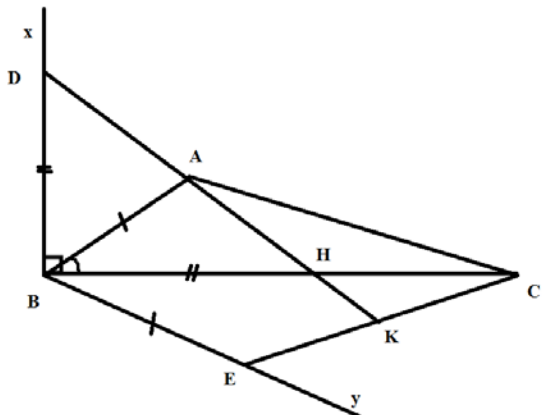
AB = BE

$\widehat{ABD} = \widehat{EBC}$ ( cùng bằng 90⁰ - $\widehat{ABC}$ )

BD = BC

⇨△ ABD = △ EBC ( c.g.c)

⇨ DA = EC




*Khai thác :*

b, Chứng minh DA vuông góc với EC.

**Ví dụ 2:** Chứng minh định lý : Trong tam giác vuông, trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

*Phân tích:*

Để chứng minh AM = $\frac{1}{2}$ BC ta phải vẽ thêm đoạn thẳng MD sao cho MD = MA, do đó AM = $\frac{1}{2}$ AD. Như vậy chỉ còn phải chứng minh AD = BC. Ta cần chứng minh △ ABC = △CDA từ đó suy ra các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

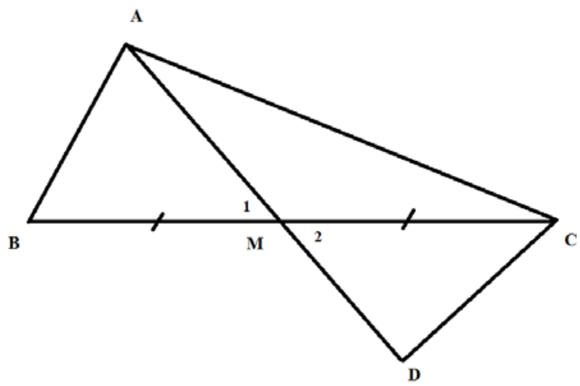
*Lời giải :*

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA.

Xét △ AMB và △DMC có:

MB = MC (gt)

$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (đối đỉnh)



MA = MD (do cách vẽ)

⇨ $\triangle$ AMB = $\triangle$DMC ( c.g.c )

⇨ AB = DC và $\widehat{A_1} = \widehat{D}$

⇨ AB // CD ( vì có cặp góc so le trong bằng nhau)

Vì AC vuông góc với AB (gt) nên AC vuông góc với CD ( quan hệ giữa tính song song và vuông góc )

Xét $\triangle$ ABC và $\triangle$CDA có:

AB = CD ( chứng minh trên)

$\hat{A} = \hat{C} = 90^0$

AC chung

⇨ $\triangle$ ABC = $\triangle$CDA ( c.g.c )

⇨ BC = AD

Vì AM = $\frac{1}{2}$ AD nên AM = $\frac{1}{2}$ BC

*Khai thác :*

Cho $\triangle$ ABC, các trung tuyến BD, CE. Trên tia BD lấy điểm M, trên tia CE lấy điểm N sao cho BD = $\frac{1}{2}$ BM, CE = $\frac{1}{2}$ CN. Chứng minh rằng BC = $\frac{1}{2}$ MN.

**Bài tập vận dụng:**

**Bài 1** : Cho tam giác ABC, gọi D là trung điểm của AC, gọi E là trung điểm của AB. Trên tia đối của tia DB lấy điểm M sao cho DM = DB. Trên tia đối của tia EC lấy điểm N sao cho EN = EC.

Chứng minh rằng A là trung điểm của MN.

*(các dạng toán và phương pháp giả Toán 7- tập 1)*

**Bài 2** : Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 50^0$. Vẽ đoạn thẳng AI vuông góc và bằng AB ( I và C khác phía đối với AB). Vẽ đoạn thẳng AK vuông góc và bằng AC ( K và B khác phía đối với AC). Chứng minh rằng :

a. IC = BK.

b. IC vuông góc với BK.

*(các dạng toán và phương pháp giả Toán 7 – tập 1)*

**Bài 3** : Tam giác ABC có $\hat{A} = 100^0$ . M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm K sao cho MK = MA.

a.Tính số đo góc ABK.

b. Về phía ngoài của tam giác ABC, vẽ các đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB, AE vuông góc và bằng AC. Chứng minh rằng △ ABK = △ DAE.

c.Chứng minh : MA vuông góc với DE.

*(các dạng toán và phương pháp giả Toán 7- tập 1)*

**Bài 4** : Trên các cạnh Ox và Oy của góc xOy lấy các điểm A và B sao cho OA = OB. Tia phân giác của góc xOy cắt AB ở C. Chứng minh rằng :

a.C là trung điểm của AB.

b. AB vuông góc với OC.

*(Nâng cao và phát triển Toán 7 – tập 1)*

**Bài 5** : Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^0$, M là trung điểm của AC. Trên tia đối của MB lấy điểm K sao cho MK = MB. Chứng minh rằng :

a.KC vuông góc với AC.

b. AK song song với BC.

*(Nâng cao và phát triển Toán 7 – tập 1)*

**Bài 6** : Cho tam giác ABC, D là trung điểm của AC, E là trung điểm của AB. Trên tia đối của tia DB lấy điểm N sao cho DN = DB. Trên tia đối của tia EC, lấy điểm M sao cho EM = EC. Chứng minh rằng A là trung điểm của MN.

*(Nâng cao và phát triển Toán 7 – tập 1)*

**Bài 7** : Cho O là điểm thuộc đoạn thẳng AB ( không trùng haid đầu mút). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ox và Oy sao cho $\widehat{AOx} = \widehat{BOy} < 90^0$. Lấy điểm C trên tia Ox và điểm D trên tia Oy sao cho OC = OA và OD = OB. Chứng minh rằng AD = BC.

*(Nâng cao và phát triển Toán 7 – tập 1)*

**Bài 8**: Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn thẳng. Lấy các điểm E trên đoạn thẳng AD, F trên đoạn thẳng BC sao cho AE = BF. Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

*(Nâng cao và phát triển Toán 7 – tập 1)*

**Bài 9** : Chứng minh rằng nếu hai cạnh và trung tuyến thuộc cạnh thứ ba của tam giác này bằng hai cạnh và trung tuyến của cạnh thứ ba của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

*(Nâng cao và phát triển Toán 7 – tập 1)*

**Dạng 3 : Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp góc – cạnh – góc .Từ đó vận dụng để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau, các đường thẳng song song, các điểm thẳng hàng.**

*Phương pháp: Phương pháp : chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp góc – cạnh – góc rồi suy ra hai góc, hai đoạn thẳng tương ứng bằng nhau.*

**Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^0$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở M, tia phân giác của góc C cắt AB ở N. Chứng minh rằng BN + CM = BC.

*Phân tích:*

Gọi I là giao điểm của BM và CN.

Ta có $\hat{A} = 60^0$ từ đó suy ra $\widehat{I_1} = 60^0$, $\widehat{I_2} = 60^0$. Chứng minh △BIN = △ BID để suy ra BN = BD(1) . Chứng minh tương tự △CIM = △ CID (g.c.g) suy ra CM = CD(2) . Từ (1) và (2) suy ra BN + CM = BD + CD = BC

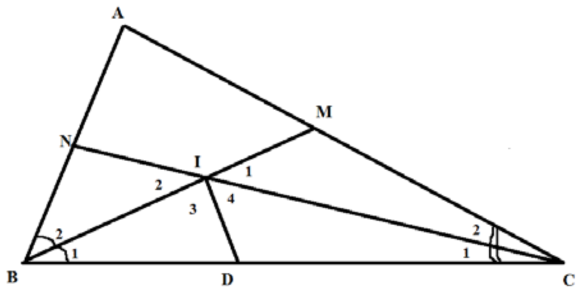
*Lời giải :*

Gọi I là giao điểm của BM và CN.

Ta có $\hat{A} = 60^0$ suy ra $\hat{B} + \hat{C} = 180^0 - 60^0 = 120^0$

Do đó $\widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 120^0 : 2 = 60^0$

Vì vậy $\widehat{I_1} = 60^0$, $\widehat{I_2} = 60^0$




Kẻ tia phân giác của góc BIC cắt BC ở D. Tam giác BIC có $\widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 120^0$ nên $\widehat{BIC} = 120^0$. Do đó $\widehat{I_3} = \widehat{I_4} = 60^0$

Xét △BIN và △ BID có :

$\widehat{B_2} = \widehat{B_1}$

Chung BI

$\widehat{I_3} = \widehat{I_4} = 60^0$

Do đó △BIN = △ BID (g.c.g) suy ra BN = BD(1)

Chứng minh tương tự △CIM = △ CID (g.c.g) suy ra CM = CD(2)

Từ (1) và (2) suy ra BN + CM = BD + CD = BC

*Khai thác :*

Nêu các cặp tam giác bằng nhau trong hình trên

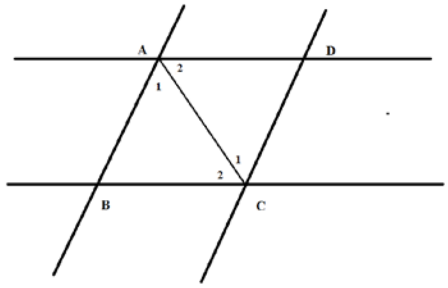
**Ví dụ 2**: Chứng minh định lý : Hai đoạn thẳng song song bị chắn giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau.

*Phân tích:* Việc nối AC làm xuất hiện trong hình vẽ hai tam giác có một cạnh chung là AC. Muốn chứng minh AB = CD và BC = AD ta cần chứng minh △ABC = △CDA. Do hai tam giác này đã có một cạnh bằng nhau (cạnh chung) nên chỉ cần chứng minh hai cặp góc kề cạnh đó bằng nhau là vận dụng được trường hợp bằng nhau góc – cạnh – góc. Điều này thực hiện được nhờ vận dụng tính chất của hai đường thẳng song song.

*Lời giải :*

Nối AC.

△ABC và △CDA có:




$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (cặp so le trong của AB // CD)

AC chung

$\widehat{A_2} = \widehat{C_2}$ (cặp so le trong của BC // AD)

Vậy △ABC = △CDA (g.c.g)

Suy ra AB = CD và BC = AD.

*Khai thác :*

Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy ba điểm A, B, C sao cho OA = AB = BC . Từ A, B, C vẽ ba đường thẳng song song với nhau cắt tia Oy lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng OD = DE = EF.

**Bài tập vận dụng:**

**Bài 1:** Cho tam giác ABC có AB = AC. Trên các cạnh AB và AC lấy điểm D và E sao cho AD = AE. Gọi K là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng :

a.BE = CD

b. △KBD = △KCE

*(Nâng cao và phát triển Toán 7 – tập 1)*

**Bài 2**: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^0$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D, tia phân giác của góc C cắt AB ở E. Các tia phân giác đó cắt nhau ở I. Chứng minh rằng ID = IE.

*(Nâng cao và phát triển Toán 7 – tập 1)*

**Bài 3** : Cho đoạn thẳng AB, O là trung điểm AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các đường thẳng song song với BA, chúng cắt cạnh AC theo thứ tự ở G và H. Chứng minh rằng EG + FH = AB.

*(Nâng cao và phát triển Toán 7 – tập 1)*

**Bài 4** : Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^0$, AB = AC. Qua A vẽ đường thẳng d sao cho B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng d. Kẻ BH và CK vuông góc với d. Chứng minh rằng :

a.AH = CK

b. HK = BH + CK

*(Nâng cao và phát triển Toán 7 – tập 1)*

**Bài 5:** Cho tam giác ABC. Vẽ đoạn thẳng AD bằng và vuông góc với AB (D và C nằm khác phía đối với AB). Vẽ đoạn thẳng AE bằng và vuông góc với AC (E và B nằm khác phía đối với AC) . Vẽ AH vuông góc với BC. Đường thẳng HA cắt DE ở K. Chứng minh rằng DK = KE.

*(Nâng cao và phát triển Toán 7 – tập 1)*

**Bài 6**: Cho góc xOy khác góc bẹt và một điểm A ở trong góc đó. Hãy nêu cách vẽ một đường thẳng qua A cắt Ox, Oy lần lượt tại B và C sao cho AB = CD.

*(bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán 7)*

**Bài 7**: Cho tam giác ABC. Các điểm D và M di động trên cạnh AB sao cho AD = BM. Qua D và M vẽ các đường thẳng song song với BC cắt AC lần lượt tại E và N. Chứng minh rằng tổng DE + MN không đổi.

*(bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán 7)*

**Bài 8**: Cho tam giác ABC,$\hat{A}$ = $120^0$, phân giác BD và CE cắt nhau ở O. trên cạnh BC lấy hai điểm I và K sao cho $\widehat{BOI}$ = $\widehat{COK}$= $30^0$. Chứng minh rằng :

a.OI vuông góc với OK

b. BE + CD < BC

*(bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán 7)*

**Bài 9**: Cho tam giác ABC. Vẽ ra phía ngoài của tam giác này các tam giác vuông cân ở A là ABE và ACF. Vẽ AH vuông góc với BC. Đường thẳng AH cắt EF tại O. chứng minh rằng O là trung điểm của EF.

*(bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán 7)*

**Dạng 4 : Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông.**

*Phương pháp:*

*Ngoài các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông suy ra từ các trường hợp bằng nhau cạnh – góc – cạnh, góc – cạnh – góc và trường hợp cạnh huyền – góc nhọn, đối với tam giác vuông còn có trường hợp bằng nhau cạnh huyền – cạnh góc vuông.*

*Nếu một cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau.*

**Ví dụ 1** : Tam giác ABC có AB = 24, AC = 32, BC = 40

Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho AM = 7.Chứng minh rằng:

a.Tam giác ABC vuông.

b. $\widehat{AMB}$ = $2\hat{C}$

Phân tích:

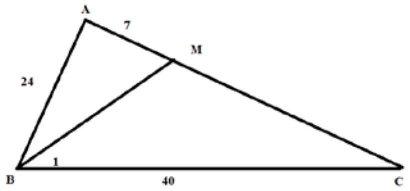
- Nhờ có định lý Py – ta – go mà ta có thể tính được một cạnh của tam giác vuông khi biết hai cạnh còn lại.
- Định lý Py – ta – go đảo cho ta thêm một cách chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

Lời giải:

a, Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = 24^2 + 32^2 = 1600$

$BC^2 = 1600$. Vậy $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Suy ra tam giác ABC vuông tại A (định lý Py – ta - go đảo)




b, Áp dụng định lý Py – ta - go vào tam giác vuông AMB ta có :

$BM^2 = AB^2 + AM^2 = 24^2 + 7^2 = 625$

⇨$BM = 25$

Mặt khác, $MC = AC – AM = 32 – 7 = 25$

Vậy MB = MC suy ra △MBC cân tại M do đó $\hat{C} = \widehat{B_1}$

$\widehat{AMB} = \hat{C} + \widehat{B_1}$ (tính chất góc ngoài của △MBC) hay $\widehat{AMB} = 2\hat{C}$

Khai thác:

Cho tam giác ABC, trung tuyến AM cũng là phân giác.

a.Chứng mỉnh rằng tam giác ABC cân.

b. Cho biết AB = 37, AM = 35. Tính BC.

**Ví dụ 2 :** Cho tam giác vuông ABC vuông tại A ( AB < AC ) và các điểm M thuộc AC, H thuộc cạnh BC sao cho MH vuông góc với BC và MH = HB. Chứng minh rằng AH là tia phân giác góc A.

Phân tích:

Để chứng minh AH là tia phân giác của góc A ta cần chứng minh các cặp tam giác bằng nhau để suy ra được các cặp góc tương ứng bằng nhau.

Lời giải:

Kẻ HI vuông góc với AB, HK vuông góc với AC

Ta có $\widehat{HMK} = \hat{B}$ ( cùng phụ với $\hat{C}$)

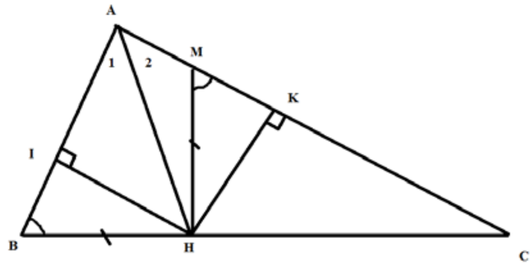
Xét △HKM và △HIB có:

$\widehat{K} = \widehat{I} = 90^0$

HM = HB ( gt )

$\widehat{HMK} = \widehat{B}$ (chứng minh trên)

Do đó △HKM = △HIB (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra HI = HK




Xét △HIA và △HKA có :

$\widehat{K} = \widehat{I} = 90^0$

HA chung

HI = HK (chứng minh trên)

Do đó △HIA = △HKA ( cạnh huyền – cạnh góc vuông), suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

Do đó AH là tia phân giác của góc A.

<u>Khai thác:</u>

Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC và AM là tia phân giác của góc A. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

**Bài tập vận dụng :**

**Bài 1:** Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho BD = CE. Kẻ BH vuông góc với AD ( H ∈ AE). CMR :

a.BH = CK

b. △ AHB = △AKC

c.BC // HK

**Bài 2:** Cho tam giác ABC cân tại A, góc A nhọn. Kẻ BD vuông góc với AC (E ∈ AB ). Gọi I là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng :

a.AD = CE

b. AI là phân giác của góc BAC

**Bài 3:** Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ A kẻ AH vuông góc với BC. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = BA. Kẻ EK vuông góc với AC (K ∈ AC ). Chứng minh rằng AK = AH.

**Bài 4:** Cho tam giác ABC vuông cân ở A, M là trung điểm của BC, điểm E nằm giữa M và C. Kẻ BH, CK vuông góc với AE ( H và K thuộc đường thẳng AE). Chứng minh rằng :

a.BH = AK

b. △MBH = △MAK

c.△MHK vuông cân

**Bài 5:** Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC). Tia phân giác góc B cắt AC ở D. Kẻ DH vuông góc với BC. Trên tia AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Đường thẳng vuông góc với AE cắt tia DH ở K. Chứng minh rằng :

a.BA = BH

b. $\widehat{DBK} = 45^0$

**Bài 6**: Cho tam giác vuông cân tại A. Một đường thẳng d bất kì luôn đi qua A. Kẻ BH và CK cùng vuông góc với d. Chứng minh rằng tổng $BH^2 + CK^2$ có giá trị không đổi.

**Bài 7 :** Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC và AM là tia phân giác của góc A. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

**Bài 8**: Cho tam giác ABC cân tại A, $\hat{A} < 90^0$. Kẻ BD vuông góc với AC, kẻ CE vuông góc với AB. Gọi K là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng AK là tia phân giác của góc A.

**Bài 9** : Cho một tam giác có ba đường cao bằng nhau

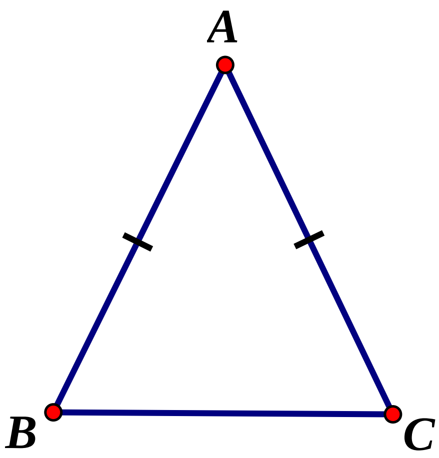
a.Chứng minh rằng tam giác đó là tam giác đều.

b. Biết mỗi đường cao có độ dài là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, tính độ dài mỗi cạnh của tam giác đó.

# CHUYÊN ĐỀ 3: CÁC TAM GIÁC ĐẶC BIỆT

## A. Tóm tắt lý thuyết

### I. Tam giác cân




1.***Định nghĩa***: Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

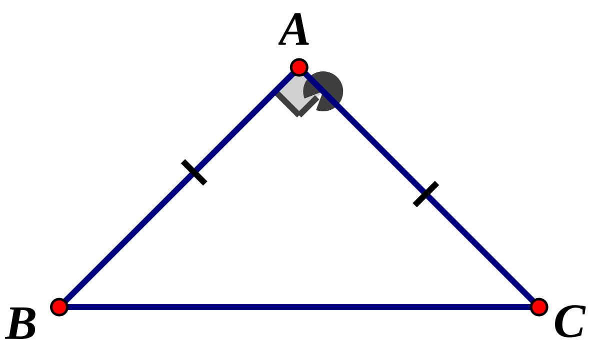
Δ ABC cân tại A ⇔ $\begin{cases} \Delta\, ABC \\ AB = AC \end{cases}$

2.***Tính chất***: Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau. Δ ABC cân tại A ⇨ $\widehat{B} = \hat{C}$

***3.Dấu hiệu nhận biết:***

- Theo định nghĩa.
- Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

### II. Tam giác vuông cân



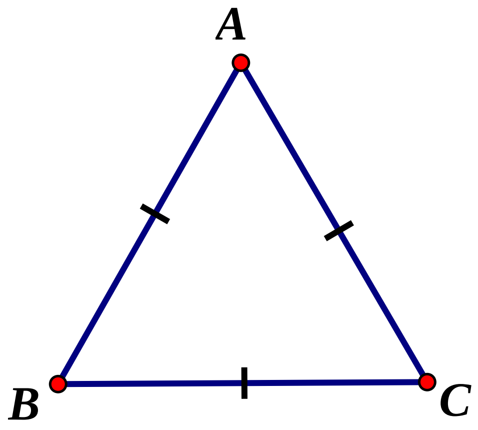

1.***Định nghĩa:*** Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.

Δ ABC vuông cân tại A ⇔ $\begin{cases} \Delta\, ABC \\ \hat{A} = 90° \\ AB = AC \end{cases}$

2.***Tính chất:*** Mỗi góc nhọn của tam giác vuông cân bằng 45°.

$\hat{B} = \hat{C}$

## III. Tam giác đều




1.***Định nghĩa:*** Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

Δ ABC đều ⇔ $\begin{cases} \Delta\, ABC \\ AB = AC = BC \end{cases}$

2.***Tính chất***: Trong tam giác đều, mỗi góc bằng 60°

***3.Dấu hiệu nhận biết:***

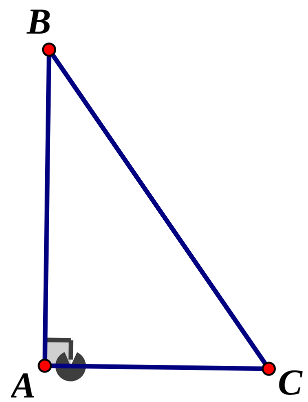
- Theo định nghĩa.
- Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.
- Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.

## IV. Định lý Pi-ta-go

1.***Định lý py – ta – go:*** ( thể hiện tính chất về cạnh của tam giác vuông)

Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

Δ ABC vuông tại A ⇨ $BC^2 = AB^2 + AC^2$




2.***Định lý Py- ta – go đảo***: ( Cách nhận biết tam giác vuông)

Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

## B. Các dạng toán

### I. Dạng 1: Vẽ tam giác cân, tam giác vuông cân, tam giác đều.

***1.Phương pháp giải***

Dựa vào cách vẽ tam giác đã học ( vẽ bằng compa đã học ở lớp 6)và định nghĩa tam giác cân, tam giác vuông cân, tam giác đều để vẽ.

***2.Ví dụ***

a.*Ví dụ 1*: Dùng thước có chia xentimet và compa vẽ tam giác đều ABC có cạnh bằng 3 cm.

Hướng dẫn cách vẽ:

- Vẽ đoạn thẳng BC = 3cm.
- Vẽ cung tròn tâm B bán kính 3cm và

cung tròn tâm C bán kính 3cm, chúng cắt nhau tại A.

- Vẽ các đoạn thẳng AB, AC.

3.Bài tập áp dụng

- Bài 1: Cho 2 điểm A và B nằm về cùng một phía của đường thẳng d. Hãy dựng tam giác MNP sao cho đáy MN nằm trên d, còn A và B lần lượt là chân hai đường cao kẻ từ M và N.

**II. Dạng 2: Chứng minh một tam giác là tam giác cân, tam giác vuông cân, tam giác đều từ các dấu hiệu nhận biết các tam giác đặc biệt và từ điều chứng minh trên suy ra 2 đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau.**

***1.Phương pháp giải***

- Dựa vào dấu hiệu nhận biết và định nghĩa các tam giác đặc biệt để nhận biết được các tam giác đó thuộc loại tam giác nào.
- Sử dụng các tính chất của các tam giác đặc biệt đó để chứng minh 2 đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau.

***2.Ví dụ minh họa***

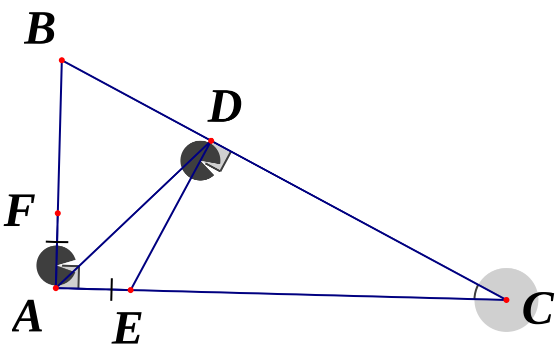
a.*Ví dụ 1*: Cho tam giác ABC vuông tại A ( AB < AC). Tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc BC, cắt AC tại E. Trên AB lấy điểm P sao cho AF = AE.

Chứng minh rằng:

+ $\hat{B} = \widehat{DEC}$

+ Δ DBF là tam giác cân

+ DB = DE.




❖ Bài giải:

+ $\hat{B}$ phụ $\hat{C}$, $\widehat{DEC}$ phụ $\hat{C}$ nên $\hat{B} = \widehat{DEC}$.(1)

+ Δ EAD = Δ FAD ( c.g.c) vì $\begin{cases} \widehat{FAD} = \widehat{DAE} \\ AF = AE \\ AD\ chung \end{cases}$

⇨ $\widehat{AED} = \widehat{AFD}$ => $\widehat{DEC} = \widehat{DFB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra, $\hat{B} = \widehat{DFB}$, do đó Δ DBF cân tại D( dấu hiệu nhận biết tam giác cân sử dụng tính chất của tam giác cân)

+ Δ DBF cân tại D => DB = DF( định nghĩa tam giác cân)(3)

Δ EAD = Δ FAD ( chứng minh trên) => DE =DF (4)

Từ ( 3) và (4) suy ra DB = DE.

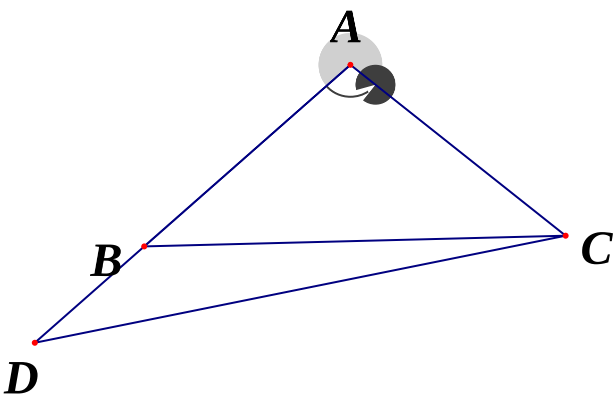
❖ Khai thác bài toán:

Nếu thay điều kiện $\widehat{BAC} = \widehat{CDE} = 90°$ bởi $\widehat{BAC} = \widehat{CDE} = \alpha$

Thì bài toán có đúng nữa không?( Trả lời: bài toán vẫn đúng).

b. *Ví dụ 2*:

Cho tam giác ABC cân tại A, $\hat{A} = 100°$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho AD = BC. Chứng minh rằng $\widehat{ADC} = 30°$.



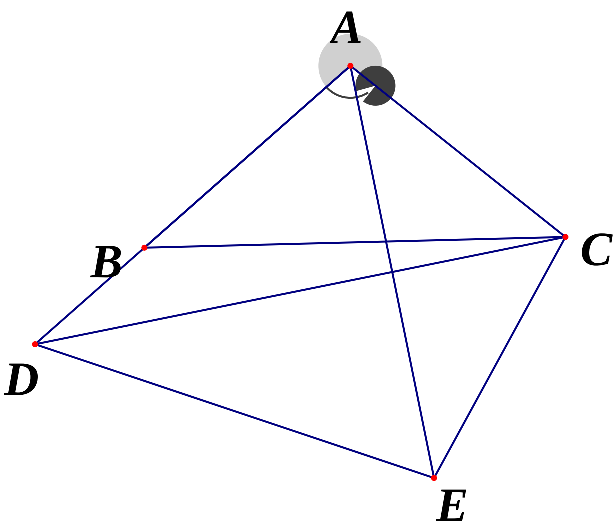

❖ Phân tích:

- Từ việc chứng minh 2 tam giác bằng nhau và áp dụng tính chất cộng góc của các góc ta sẽ đi tới điều phải chứng minh.

❖ Bài giải:

Δ ABC cân tại A, $\hat{A} = 100° \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40°$

➢ Cách 1: Dựng Δ ADE đều, E và C cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB.




Ta có: $\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAE}$ = 100° - 60° = 40°

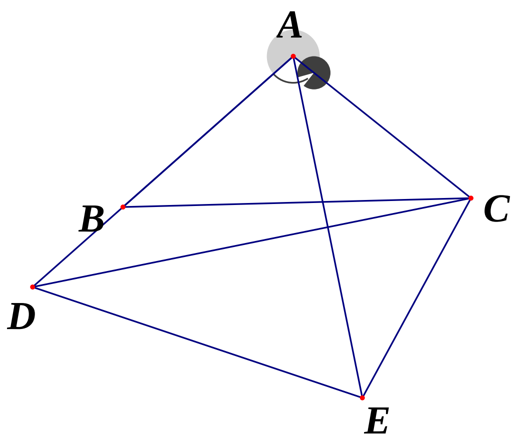
Δ ABC = Δ CAE ( c.g.c) vì $\begin{cases} AB = AC \\ \widehat{ABC} = \widehat{CAE} \\ BC = AE \end{cases}$

⇨ $AC = CE$ ( hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau của 2 tam giác bằng nhau)

Ta lại có: Δ ADC = Δ EDC (c.c.c) => $\widehat{ADC} = \widehat{EDC}$ ( hai góc tương ứng bằng nhau của 2 tam giác bằng nhau)

Mà $\widehat{ADC} + \widehat{EDC} = \widehat{ADE}$ = 60°. Do đó, $\widehat{ADC}$ = 30°.

➢ Cách 2: Dựng tam giác BCF đều, A và F nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ BC.




$\widehat{ACF} = \widehat{ACB} + \widehat{BCF}$ = 100°

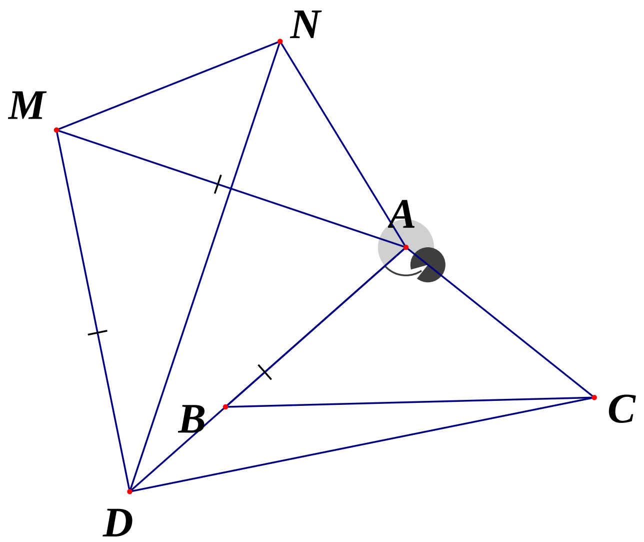
Δ ACF = Δ CAD ( vì AC chung, $\widehat{ACF} = \widehat{CAD}$ = 100°, CF = AD)

⇨ $\widehat{CFA} = \widehat{ADC}$ ( hai góc tương ứng bằng nhau của 2 tam giác bằng nhau)

Ta có: Δ ABF = Δ ACF ( c.c.c)

⇨ $\widehat{BFA} = \widehat{CFA}$ mà $\widehat{BFA} + \widehat{CFA}$ = 60°. Do đó, $\widehat{ADC} = \widehat{CFA}$ = 30°

➢ Cách 3: Vẽ tam giác ADM đều, M và C nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB. Vẽ điểm N sao cho $\widehat{DAN}$ = 100°, AN = AC, N và A cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ MD.




Δ NAD = Δ CAD (c.g.c) vì $\begin{cases} AN = AC \\ \widehat{DAN} = \widehat{DAC} = 100° \\ AD\ chung. \end{cases}$

⇨ $\widehat{ADN}$ = $\widehat{ADC}$ (hai góc tương ứng bằng nhau của hai tam giác bằng nhau)

Δ ABC = Δ NMA (c.g.c) vì $\begin{cases} AC = AN \\ \widehat{ACB} = \widehat{MAN} = 40° \\ BC = AM \end{cases}$

⇨ $AB = MN$ ( hai cạnh tương ứng bằng nhau của hai tam giác bằng nhau)

Δ AND = Δ MND (c.c.c) ⇨ $\widehat{ADN}$ = $\widehat{MDN}$

Mà $\widehat{ADN}$ = $\widehat{MDN}$ = $\widehat{ADM}$ = 60° ⇨ $\widehat{AND}$ = 30°. Do đó, $\widehat{ADC}$ = 30°.

**3.<u>Bài tập vận dụng</u>**

- Bài 1: Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tam giác đều AMC, BMD. Gọi E, F lần lượt theo thứ tự là trung điểm của AD< CB.

Chứng minh rằng tam giác MEF là tam giác đều

*( trích sách " Nâng cao và phát triển toán 7 của tác giả Vũ Hữu Bình)*

- Bài 2: Ở miền trong góc nhọn xOy, vẽ tia Oz sao cho $\widehat{xOz} = \frac{1}{2}\widehat{yOz}$ . Qua điểm A thuộc tia Oy, vẽ AH vuông góc với Ox, cắt Oz ở B. Trên tia BZ lấy điểm D sao cho BD = OA .

Chứng minh rằng tam giác AOD là tam giác cân.

*( trích sách " Nâng cao và phát triển toán 7 của tác giả Vũ Hữu Bình)*

- Bài 3: Cho tam giác ABC cân tịa A, $\hat{A}$ = 140°. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, kẻ tia Cx sao cho $\widehat{ACx}$= 110°. Gọi D là giao điểm của các tia Cx và BA.

Chứng minh rằng AD = BC.

*( trích sách " Nâng cao và phát triển toán 7 của tác giả Vũ Hữu Bình)*

- Bài 4: Cho tam giác cân ABC ( AB = AC), có $\hat{A}$ = 80°. Gọi D là điểm trong tam giác sao cho $\widehat{DBC}$ = 10°, $\widehat{DCB}$ = 30°.

Tìm số đo góc BAD.

*( trích sách " Cẩm nang vẽ them hình phụ trong giải toán hình học phẳng của tác giả Nguyễn Đức Tấn)*

- Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A, có $\hat{A}$ = 108°, BC= a, AC = b. Vẽ phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác ABD cân tại A có $\widehat{BAD}$ = 36°.

Tính chu vi tam giác ABD theo a và b.

*( trích sách " Cẩm nang vẽ them hình phụ trong giải toán hình học phẳng của tác giả Nguyễn Đức Tấn)*

**III. Dạng 3: Áp dụng định lí py – ta – go.**

**1.Dạng 3.1: Tính độ dài một cạnh của tam giác vuông( một tam giác vuông cân)**

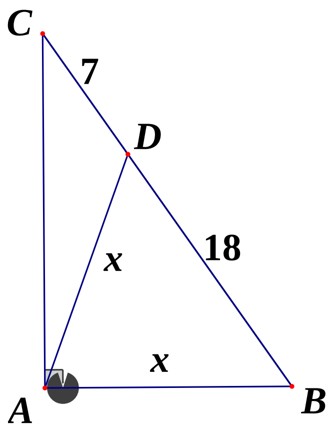
a) *Phương pháp giải*:

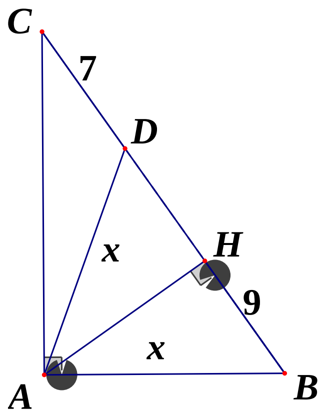
Sử dụng định lí thuận của định lí Py – ta – go để tìm độ dài các cạnh.

- Chú ý: Có trường hợp phải kẻ thêm đường vuông góc để tạo thành tam giác vuông để áp dụng được định lý Py – ta – go.

b) Ví dụ

- Ví dụ 1: Tính độ dài x trên hình sau, biết rằng CD = 7, DB = 18, $\widehat{BAC}$ = 90°.




❖ Phân tích:

- Dựa vào đề bài ta thấy để tính được cạnh x ta chỉ có thể áp dụng định lí py- ta – go đối với tam giác vuông.
- Mà trong tam giác vuông ABC , vuông tại A, ta chỉ mới biết độ dài của cạnh huyền. Vì vậy, để áp dụng được định lý Py – ta – go vào trong tam giác vuông để tính cạnh x ta phải gắn chúng vào 1 tam giác vuông

⇨ Kẻ AH vuông góc với BC ta sẽ áp dụng được đinh lý Py – ta –go và tính ra độ dài cạnh x.

❖ Giải:

Kẻ AH  BD. Dễ chứng minh  BH = HD = 9.

Áp dụng định lý Py – ta – go vào ΔABC vuông tại H, ta có:

$AH^2 = AB^2 - HB^2 = x^2 - 9^2 = x^2 - 81$.(1)

Áp dụng định lý Py – ta – go vào Δ ABC vuông tại H, ta có:

$AH^2 = AC^2 - CH^2 = (25^2 - x^2) - 16^2 = 369 - x^2$.(2)

Từ (1) và (2) ta có:

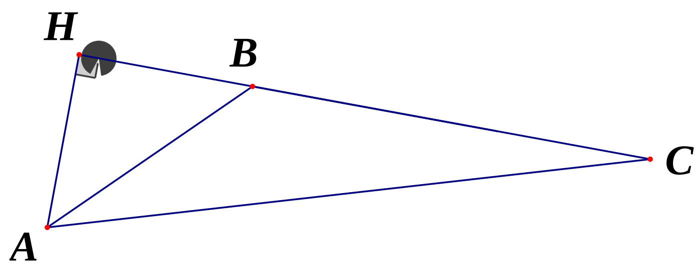
$X^2 - 81 = 369 - x^2$.

Do đó: $2x^2 = 450 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x^2 = 15^2 \Rightarrow x = 15$ ( đvđd)

❖ Khai thác bài toán:

- Cho tam giác ABC vuông tại A, D nằm trên cạnh huyền CD sao cho
CD = 7, BD = 18.
Chứng minh rằng tam giác ABD cân.

• Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 135°$, AB = $\sqrt{2}$ cm, BC = 2 cm. Tính độ dài cạnh AC




❖ Phân tích:

- $\widehat{ABC} = 135°$. Gợi ta nghĩ đến đường phụ cần vẽ thêm AH, AH vuông góc với BC tại H.
- Áp dụng định lý Py – ta – go vào tam giác vuông ta tính được canh AH.

❖ Bài giải:

Vẽ AH vuông góc với BC tại H.

Ta có $\widehat{ABH} + \widehat{ABC} = 180°$ ( hai góc kề bù)

Nên $\widehat{ABH} + 135° = 180° \Rightarrow \widehat{ABH} = 45°$

Xét tam giác vuông HBA, vuông tại H, có $\widehat{ABH} = 45°$

$\Rightarrow$ ΔHAB vuông cân tại H $\Rightarrow$ HA = HB

Ta có: $AH^2 + HB^2 = AB^2$ ( áp dụng định lý Py – ta – go)

$AH^2 + AH^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow AH = 1$ ( cm)

Nên HB =HA = 1 cm

Ta có HC = HB + BC = 1 + 2 = 3 cm.

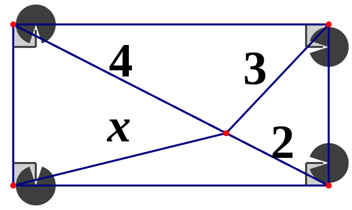
Xét Δ HAC vuông tại H ⇨ $AC^2 = AH^2 + HC^2 = 1^2 + 3^2$ ⇨ $AC = \sqrt{10}$ cm.

❖ Bài tập vận dụng:

- Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH vuông goc với BC ( H∈ BC). Biết HB = 9cm, HC = 16 cm. Tính độ dài AH.
- Bài 2: Cho tam giác ABC, $\hat{A} < 90°$, M là trung điểm của BC.

Chứng minh rằng: $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$

- Bài 3: Tính độ dài x trên hình sau:




- Bài 4: Cho tam giác ABC vuông ở A. Biết BC = 20 cm và 4AB = 3AC. Tính độ dài các cạnh AB, AC.
- Bài 5: Cho tam giác cân ở A. $\hat{A} = 30°$, BC = 2 cm. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{CBD} = 60°$. Tính độ dài AD.

*( trích sách " ôn tập hình học 7"_ tác giả Nguyễn Ngọc Đạm*

*Và sách " Nâng cao và phát triển toán 7" _ tác giả Vũ Hữu Bình*

*Và sách : "Cẩm nang vẽ thêm hình phụ trong giải toán hình học phẳng"_ tác giả Nguyễn Đức Tấn.)*

**2.Dạng 3.2: Sử dụng định lý Py – ta – go để nhận biết tam giác vuông**

*a) Phương pháp:*

- Tính bình phương các độ dài ba cạnh của tam giác.
- So sánh bình phương của cạnh lớn nhất với tổng các bình phương của hai cạnh kia.
- Nếu hai kết quả bằng nhau thì tam gác đó là tam giác vuông, cạnh lớn nhất là cạnh huyền.

*b) Ví dụ:*

• Ví dụ : Tam giác nào là tam giác vuông trong các tam giác có độ dài ba cạnh như sau:

a) 9 cm, 15 cm, 12 cm.

b) 7 dm, 7 dm, 100 cm

❖ Phân tích:

- Để chứng minh xem tam giác có đội dài các cạnh như trên có là tam giác vuông không ta lần lượt tính các bình phương.
- So sánh xem tổng bình phương cạnh dài nhất có bằng tổng bình phương các cạnh còn lại không:

+ Nếu bằng ta kết luận tam giác đó là tam giác cân.

+ Nếu không bằng thì kết luận tam giác đó không phải là tam giác cân.

- Chú ý: phải đổi tất cả các cạnh cùng một đơn vị đo.

❖ Bài giải:

a) $9^2 = 81$; $15^2 = 225$; $12^2 = 144$

Ta thấy $225 = 81 + 144$

Nên tam giác này là tam giác vuông.

b) Đổi 100 cm = 10 m.

Ta có $7^2 = 49$, $10^2 = 100$.

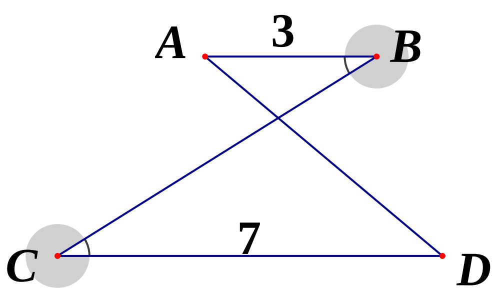
Ta thấy $100 \neq 49 + 49$

Nên tam giác này không là tam giác vuông.

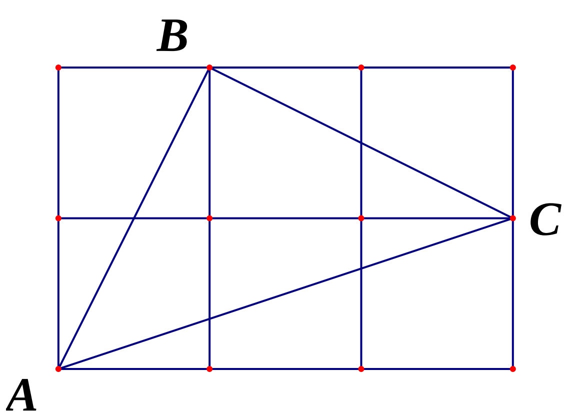
❖ Khai thác bài toán

c) Bài tập vận dụng:

- Bài 1: Chọn trong các số 5, 8, 9, 12, 13, 15 các bộ ba số có thể là độ dài các cạnh của một tam giác vuông.
- Bài 2: Cho hình vẽ, trong đó BC = 6cm, AD = 8 cm. Chứng minh AD vuông góc với BC.




- Bài 3: Vẽ về cùng một phía của đoạn thẳng AB = 5 cm các tia Ax, By vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm D sao cho AD = 5 cm. Trên tia By lấy điểm E sao cho BE = 1 cm. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm C sao cho AC = 2 cm. Góc DCE có là góc vuông hay không? Vì sao?
- Bài 4: Chứng minh tam giác ABC ở hình vẽ sau là tam giác vuông cân




*(trích sách " ôn tập hình học 7"_ tác giả Nguyễn Ngọc Đạm*

*Và sách " Nâng cao và phát triển toán 7" _ tác giả Vũ Hữu Bình*

*Và sách : "Cẩm nang vẽ thêm hình phụ trong giải toán hình học phẳng"_ tác giả Nguyễn Đức Tấn.*

# CHUYÊN ĐỀ 4: BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

## I. LÝ THUYẾT

### 1. Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác

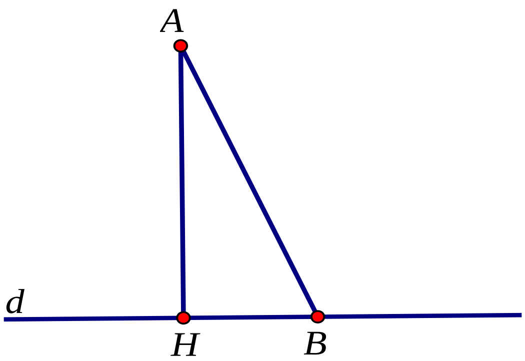
Trong một tam giác :

- Góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.
- Cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Nhận xét :

- Trong tam giác tù ( hoặc tam giác vuông ), góc tù ( hoặc góc vuông) là góc lớn nhất nên cạnh đối diện với góc tù ( hoặc góc vuông – cạnh huyền ) là cạnh lớn nhất.
- Trong tam giác đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn.

### 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu.




*2.1 Khái niệm về đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu của đường xiên.*

Điểm A ở ngoài đường thẳng d, kẻ đường thẳng vuông góc với d tại H. Trên d lấy điểm B bất kì ( B ≠ H) . Khi đó :

- Đoạn thẳng AH gọi là đoạn vuông góc hay đường vuông góc kẻ từ điểm A đến chân đường thẳng d. Điểm H được gọi là chân đường vuông góc hay hình chiếu của A trên đường thẳng d.
- Đoạn thẳng AB gọi là một đường xiên kẻ từ điểm A đến đường thẳng d.
- Đoạn thẳng HB gọi là hình chiếu của đường xiên AB trên đường thẳng.

*2.2 Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên*

Trong các đường xiên và đường thẳng vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

Chú ý : Độ dài đường vuông góc AH gọi là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d.

*2.3 Các đường xiên và các hình chiếu của chúng.*

Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.

- Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hình chiếu của chúng bằng nhau và ngược lại. Nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

3. **Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác – Bất đẳng thức trong tam giác**.

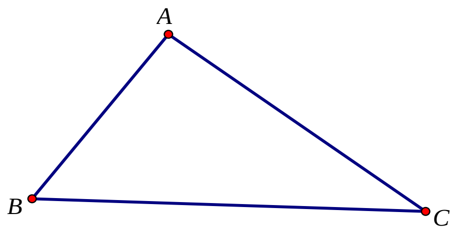
*3.1 Bất đẳng thức tam giác*

Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớ hơn độ dài cạnh còn lại.

AB+BC > AC

AB + AC > BC

AC + BC > AB




*3.2 Hệ quả của bất đẳng thức tam giác*

Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng độ dài của hai cạnh còn lại.

$$|AC - BC| < AB < AC + BC$$
$$|AB - AC| < BC < AB + AC$$
$$|AB - BC| < AC < AB + BC$$

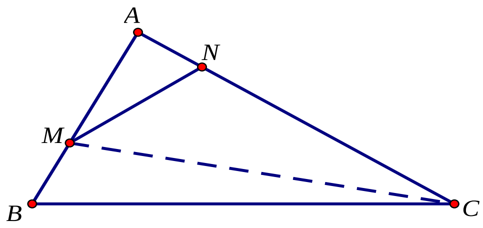
***II. BÀI TẬP***

**1. <u>Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác</u>**

**<u>Bài 1</u>** : Cho tam giác ABC, $\hat{A} \geq 90^0$. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N không trùng với các đỉnh của tam giác. CMR : BC > MN

**Phân tích lời giải** :

Dữ liệu đề bài cho $\hat{A} \geq 90^0$ nên ta có thể c/m $\widehat{BMC} \geq 90^0$ . Áp dụng quan hệ giữa góc và cạnh trong tam giác ta có BC > MC




Mà $\widehat{MNC} > \hat{A} \Rightarrow \widehat{MNC} > 90^0$

- ⇨ MC > MN
- ⇨ BC > MN

**Giải** :

Xét tam giác BMC ta có $\widehat{BMC} = \widehat{BAC} + \widehat{ACM}$ ( tính chất góc ngoài tam giác)

- ⇨ $\widehat{BMC} > \hat{A}$ mà $\hat{A} \geq 90^0$ nên $\widehat{BMC} \geq 90^0$
- ⇨ BM > MC ( quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác )

Xét tam giác MNC có $\widehat{MNC} > \hat{A}$ => $\widehat{MNC} > 90^0$

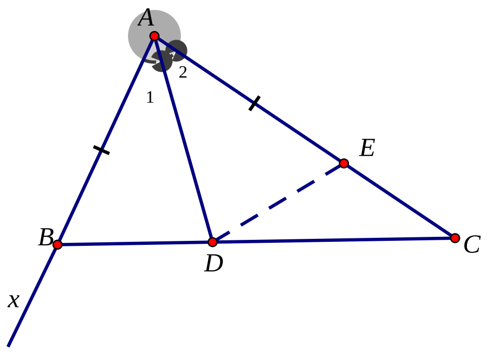
- ⇨ MC > MN
- ⇨ BC > MN

**Khai thác bài toán** : Cho tam giác ABC, $\hat{A} < 90^0$. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N không trùng với các đỉnh của tam giác. BC > MN hay không ? Vì sao ?

***Bài 2*** : Cho $\Delta ABC$, AB< AC , phân giác AD. Chứng tỏ rằng :

a. Góc ADC là góc tù
b. DC > DB

**Phân tích lời giải :**




a. C/m :

$$\widehat{ADC} > 90^0$$

$$\uparrow$$

$$\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^0$$

$$\uparrow$$

$$\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$$

b. Vì DB và DC là 3 điểm thẳng hàng nên ta không thể sử dụng BĐT trong tam giác. Vậy ta sẽ lấy thêm điểm E sao cho AE = AB. Khi đó :
$\Delta ADB = \Delta ADE (c.g.c)$ => DB = DE
và chứng minh được DC > DE => DC > DB

**Giải :**

a. Tam giác ABC có : AB < AC ( giả thiết ) nên $\hat{C} < \hat{B}$ ( quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác )

Xét tam giác ABD và ACD có :

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ( giả thiết )

$\hat{C} < \hat{B}$ ( chứng minh trên )

⇨ $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$ mà $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^0$ ( kề bù )

Nên $\widehat{ADC} > \dfrac{180^0}{2} = 90^0$ . Vậy góc ADC là góc tù

b. Trên tia AC lấy điểm E sao cho AE = AB

$\Delta ADB = \Delta ADE (c.g.c)$ => DB = DE ( 2 cạnh tương ứng ) (1)

và $\widehat{ABD} = \widehat{AED}$ do đó $\widehat{CBx} = \widehat{CED}$ ( cùng bù với hai góc bằng nhau )

⇨ $\widehat{CBx} > \widehat{C}$ ( tính chất góc ngoài của tam giác ABC )

⇨ $\widehat{CED} > \widehat{C}$ do đó DC > DE (2)

Từ (1) và (2) : DC > DB

**Khai thác bài toán** : Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường phân giác BD của góc B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BD cắt BC tai E

a. CM : BA = BE
b. Chứng minh : Tam giác BED là tam giác vuông
c. So sánh : AD và DC

***Bài 3*** : Cho tam giác $\Delta ABC$ có AB < AC, M là trung điểm của cạnh BC. So sánh $\widehat{BAM} < \widehat{MAC}$

**Phân tích lời giải** :

Hai góc BAM và MAC không thuộc về một tam giác. Do vậy ta tìm một tam giác có hai góc bằng hai góc BAM và MAC và liên quan đến AB, AC vì AB < AC

Lấy điểm D trên tia đối của tia MA sao cho MA = MD . Điểm D là yếu tố phụ cần vẽ thêm.

**Giải** :

Vẽ tia đối của tia MA và trên đó lấy điểm D sao cho MD = MA

## CHUYÊN ĐỀ

## BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

### III. LÝ THUYẾT

### 4. Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác

Trong một tam giác :

- Góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.
- Cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Nhận xét :

- Trong tam giác tù ( hoặc tam giác vuông ), góc tù ( hoặc góc vuông) là góc lớn nhất nên cạnh đối diện với góc tù ( hoặc góc vuông – cạnh huyền ) là cạnh lớn nhất.

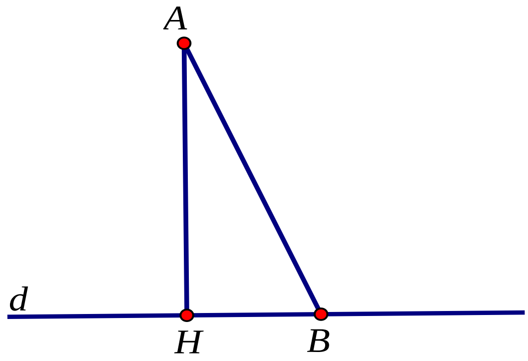
- Trong tam giác đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn.

**5. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu.**

*5.1 Khái niệm về đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu của đường xiên.*

Điểm A ở ngoài đường thẳng d, kẻ đường thẳng vuông góc với d tại H. Trên d lấy điểm B bất kì ( $B \neq H$) . Khi đó :

- Đoạn thẳng AH gọi là đoạn vuông góc hay đường vuông góc kẻ từ điểm A đến chân đường thẳng d. Điểm H được gọi là chân đường vuông góc hay hình chiếu của A trên đường thẳng d.
- Đoạn thẳng AB gọi là một đường xiên kẻ từ điểm A đến đường thẳng d.
- Đoạn thẳng HB gọi là hình chiếu của đường xiên AB trên đường thẳng.




*5.2 Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên*

Trong các đường xiên và đường thẳng vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

Chú ý : Độ dài đường vuông góc AH gọi là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d.

*5.3 Các đường xiên và các hình chiếu của chúng.*

Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.
- Nếu hai dường xiên bằng nhau thì hình chiếu của chúng bằng nhau và ngược lại. Nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

6. **Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác – Bất đẳng thức trong tam giác**.

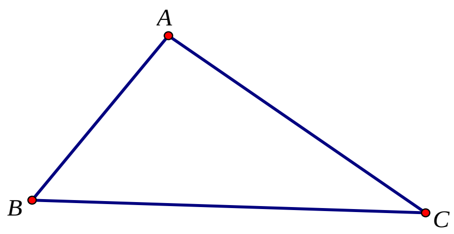
*6.1 Bất đẳng thức tam giác*

Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng ló hơn độ dài cạnh còn lại.

$AB+BC > AC$

$AB + AC > BC$

$AC + BC > AB$




*6.2 Hệ quả của bất đẳng thức tam giác*

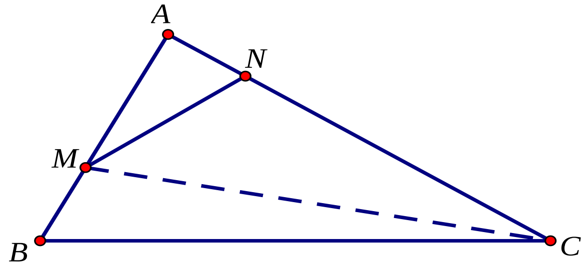
Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng độ dài của hai cạnh còn lại.

$$|AC - BC| < AB < AC + BC$$
$$|AB - AC| < BC < AB + AC$$
$$|AB - BC| < AC < AB + BC$$

***IV. BÀI TẬP***

## 2. <u>Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác</u>

**<u>Bài 1</u>** : Cho tam giác ABC, $\hat{A} \geq 90^0$. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N không trùng với các đỉnh của tam giác. CMR : BC > MN




**Phân tích lời giải** :

Dữ liệu đề bài cho $\hat{A} \geq 90^0$ nên ta có thể c/m $\widehat{BMC} \geq 90^0$ . Áp dụng quan hệ giữa góc và cạnh trong tam giác ta có BC > MC

Mà $\widehat{MNC} > \hat{A} \Rightarrow \widehat{MNC} > 90^0$

- ⇨ MC > MN
- ⇨ BC > MN

**Giải** :

Xét tam giác BMC ta có $\widehat{BMC} = \widehat{BAC} + \widehat{ACM}$ ( tính chất góc ngoài tam giác)

- ⇨ $\widehat{BMC} > \hat{A}$ mà $\hat{A} \geq 90^0$ nên $\widehat{BMC} \geq 90^0$
- ⇨ BM > MC ( quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác )

Xét tam giác MNC có $\widehat{MNC} > \hat{A} \Rightarrow \widehat{MNC} > 90^0$

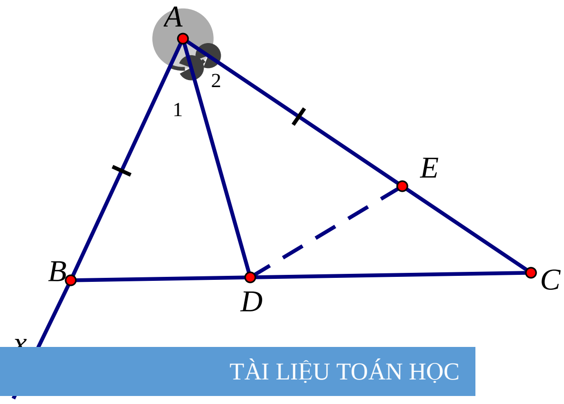
- ⇨ MC > MN
- ⇨ BC > MN

**Khai thác bài toán** : Cho tam giác ABC, $\hat{A} < 90^0$. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N không trùng với các đỉnh của tam giác. BC > MN hay không ? Vì sao ?

***<u>Bài 2</u>*** : Cho $\Delta ABC$, AB< AC , phân giác AD. Chứng tỏ rằng :

c. Góc ADC là góc tù

d. DC > DB




**Phân tích lời giải** :

c. C/m :

$$\widehat{ADC} > 90^0$$

$$\uparrow$$

$$\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^0$$

$$\uparrow$$

$$\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$$

d. Vì DB và DC là 3 điểm thẳng hàng nên ta không thể sử dụng BĐT trong tam giác. Vậy ta sẽ lấy thêm điểm E sao cho AE = AB. Khi đó :

$\Delta ADB = \Delta ADE (c.g.c)$ => DB = DE

và chứng minh được DC > DE => DC > DB

**Giải** :

c. Tam giác ABC có : AB < AC ( giả thiết ) nên $\widehat{C} < \widehat{B}$ ( quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác )

Xét tam giác ABD và ACD có :

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ ( giả thiết )

$\widehat{C} < \widehat{B}$ ( chứng minh trên )

⇨ $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$ mà $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^0$ ( kề bù )

Nên $\widehat{ADC} > \dfrac{180^0}{2} = 90^0$ . Vậy góc ADC là góc tù

d. Trên tia AC lấy điểm E sao cho AE = AB

$\Delta ADB = \Delta ADE (c.g.c)$ => DB = DE ( 2 cạnh tương ứng ) (1)

và $\widehat{ABD} = \widehat{AED}$ do đó $\widehat{CBx} = \widehat{CED}$ ( cùng bù với hai góc bằng nhau )

⇨ $\widehat{CBx} > \widehat{C}$ ( tính chất góc ngoài của tam giác ABC )

⇨ $\widehat{CED} > \widehat{C}$ do đó DC > DE (2)

Từ (1) và (2) : DC > DB

**Khai thác bài toán** : Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường phân giác BD của góc B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BD cắt BC tai E

d. CM : BA = BE

e. Chứng minh : Tam giác BED là tam giác vuông

f. So sánh : AD và DC

***Bài 3*** : Cho tam giác $\Delta ABC$ có AB < AC, M là trung điểm của cạnh BC. So sánh $\widehat{BAM} < \widehat{MAC}$

**Phân tích lời giải** :

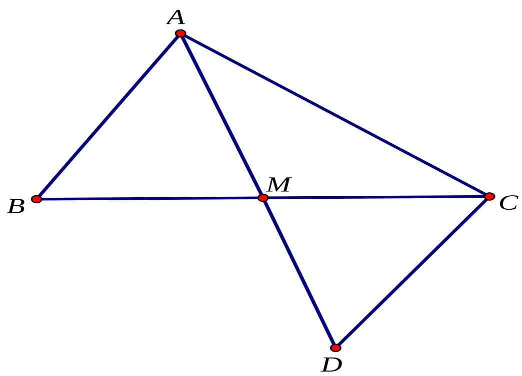
Hai góc BAM và MAC không thuộc về một tam giác. Do vậy ta tìm một tam giác có hai góc bằng hai góc BAM và MAC và liên quan đến AB, AC vì AB < AC

Lấy điểm D trên tia đối của tia MA sao cho MA = MD . Điểm D là yếu tố phụ cần vẽ thêm.

**Giải** :

Vẽ tia đối của tia MA và trên đó lấy điểm D sao cho MD = MA

Xét $\Delta MAB$ và $\Delta MDC$ có :




MA = MD

$\widehat{AMD} < \widehat{DMC}$ ( đối đỉnh )

MB = MC ( M là trung điểm cạnh BC )

Do đó : $\Delta MAB = \Delta MDC$ ( c.g.c)

⇨ AB = CD ( 2 cạnh tương ứng )

⇨ $\widehat{BAM} = \widehat{MDC}$ ( 2 góc tương ứng )

Ta có : AB = CD, AB < AC => CD < AC

Xét $\Delta ADC$ có CD < AC => $\widehat{MAC} < \widehat{MDC}$ ( quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác ).

Mà $\widehat{MAC} < \widehat{MDC}$ và $\widehat{BAM} = \widehat{MDC}$

⇨ $\widehat{BAM} < \widehat{MAC}$

***Khai thác bài toán*** : Cho tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC và $\widehat{BAM} < \widehat{MAC}$. Chứng minh : AB < AC

**Bài tập áp dụng**

***Bài 1*** : Cho tam giác ABC có AB < AC, AD là tia phân giác của góc BAC ( D thuộc BC ). Chứng minh : CD > BD

Hướng dẫn giải : Cần tạo ra một tam giác mà hai cạnh có độ dài bằng BD. CD. Sau đó so sánh góc đối diện với hai cạnh ý. Lấy điểm E trêm cạnh AC sao cho

AE = AB.

***Bài 2*** : Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^0$. Tren tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho AD < AC. Nối B với D. Chứng minh : BC > BD ( Cách làm tương tự bài 1 )

***Bài 3*** : Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng AB + AC > BC

Hướng dẫn giải : Cần tạo ra một tam giác mà trong đó có hai cạnh có độ dài bằng AB + AC, BC. Sau đó tìm cách so sánh các góc đối diện với các cạnh đó. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AC.

***Bài 4*** : Cho tam giác cân ABC ( AB = AC ). Trên cạnh đáy BC lấy các điểm D, E sao cho BD = DE = EC. Chứng minh rằng : $\widehat{BAD} < \widehat{DAE}$

Hướng dẫn giải : Tìm một tam giác có hai góc bằng góc BAD và DAE, rồi so sánh hai cạnh đối diện của chúng

Xét tam giác AEC có $\widehat{AED} < \widehat{ACE}$ mà $\widehat{ACE} = \widehat{ABC}$

Do đó $\widehat{AED} < \widehat{ABE}$ . Từ đó suy ra AB > AE => $\widehat{BAD} < \widehat{DAE}$

***Bài 5*** : Cho tam giác ABC ( AB = AC ), D là điểm bất kì trong tam giác sao cho $\widehat{ADB} > \widehat{ADC}$ . Chứng minh rằng : DC > DB

Hướng dẫn giải : Vẽ tia Ax trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{BAD}$ và trên tia Ax lấy điểm E sao cho AE = AD

***Bài 6*** : Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác. Tia AM cắt BC tại K. Hãy so sánh các góc :

a. $\widehat{CMK}$ với $\widehat{CAK}$

b. $\widehat{CMB}$ với $\widehat{CAB}$

Hướng dẫn giải : Áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác

**Tài liệu tham khảo** :


- Vẽ thêm yếu tố hình phụ để giải một số bài toán Hình Học 7 _ Nguyễn Đức Tấn
- Chuyên đề BĐT và cực trị trong hình học phẳng _ Nguyễn Đức Tấn


3. **Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu.**

***Bài 1*** : Cho $\Delta ABC$ với đường cao AH. Gọi M và N lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ H đến AB và AC. Chứng minh rằng nếu BM=CN thì $\Delta ABC$ cân với đáy BC.

**Phân tích lời giải** :

Ta nhận thấy rằng đây là 1 bài toán mang tính giả thiết tạm thời .

Nếu BM = CN thì tam giác ABC cân với đáy BC.

Trước hết để làm bài này ta cần phải giả sử là nếu BM = CN thì tam giác ABC không cân. Sau đó ta áp dụng định lý Pitago và liên hệ giữa hình chiếu và đường xiên để làm bài .

**Giải** :

Giả sử $\Delta ABC$ không cân

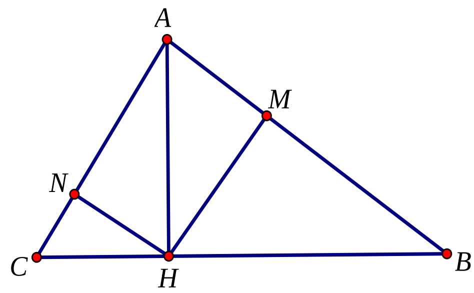
Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử AB> AC. Khi đó

HB> HC ( liên hệ giữa hình chiếu và đường xiên ).

Ta có :

$BH^2 = BM^2 + HM^2$ ( Định lý Pitago trong tam giác vuông BMH)

$CH^2 = CN^2 + HN^2$ ( Đ/L Pitago)




Mà BM = CN ( giả thiết )

⇨ HM > HN (1)

Ta lại có :

$AH^2 = AM^2 + HM^2$

$AH^2 = AN^2 + HN^2$

Mà từ (1) có : HM > HN => AM < AN

Kết hợp với điều kiện BM=CN => AB < AC ( mâu thuẫn với giả sử trên )

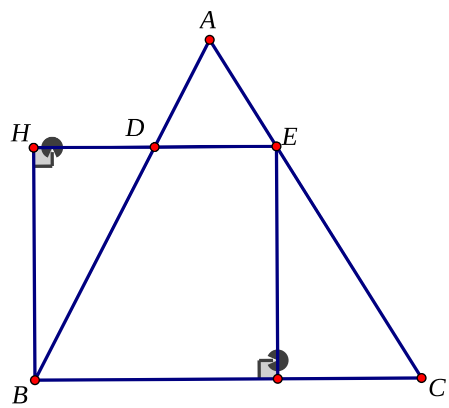
Vậy ta được $\Delta ABC$ cân với đáy BC

**Khai thác bài toán** :

Cho $\Delta ABC$ cân tại A. Gọi M và N lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ H đến AB và AC. Chứng minh rằng : BM=CN

***Bài 2*** : Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Từ điểm D trên cạnh AB vẽ đường thẳng song song với BC cắt cạnh AC tại E. Chứng minh : $BC > \frac{1}{2}(DE + BC)$

**Phân tích lời giải** :




Vẽ $BH \perp DE (H \in DE), EN \perp BC (N \in BC)$

Cần c/m $BE > \frac{1}{2}$ ( DE+BC)

↑

2 BE > BC + DE

↑

BE + BE > HE + BN

↑

HD = NC

↑

$\Delta HBD = \Delta NEC$

**Giải** :

Vẽ $BH \perp DE(H \in DE), EN \perp BC(N \in BC)$

Xét $\Delta HBE(\widehat{BHE} = 90^0)$ và $\Delta NEB(\widehat{ENB} = 90^0)$ có :

BE chung $\Delta NEC$

$\widehat{HBE} = \widehat{NEB}$ ( vì DE // BC )

⇨ $\Delta HBE = \Delta NEB$ ( cạnh huyền – góc nhọn)

⇨ BH= EN ( 2 cạnh tương ứng)

Mặt khác : $\widehat{HBD} + \widehat{DBC} = \widehat{HBC} = 90^0$

$\widehat{NEC} + \widehat{ECN} = 90^0$ ( $\Delta NEC$ có $\hat{N} = 90^0$)

Mà $\widehat{DBC} = \widehat{ECN}$ ( tam giác ABC cân tại A)

⇨ $\widehat{HBD} = \widehat{NEC}$

Xét $\Delta HBD$ và $\Delta NEC$ có :

$\widehat{DHB} = \widehat{CNE}$ ( = $90^0$), BH = EN ( chứng minh trên )

$\widehat{HBD} = \widehat{NEC}$ ( CMT)

Do đó : $\Delta HBD = \Delta NEC$ ( g.c.g)

⇨ HD = NC ( 2 cạnh tương ứng)

Mà $BH \perp DE \Rightarrow BE > HE$ (Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc ) mà HE = HD + DE

Mặt khác $EN \perp BC \Rightarrow BE > BN$ ( Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc)

Do đó : BE + BE > HE + BN

Mà HE + BN = DE + HD + BN = DE + NC+ BN= DE + BC nên

BE + BE > DE + BC => 2 BE > BC + DE

⇨ BE > $\frac{1}{2}$ ( DE+BC) ( đpcm)

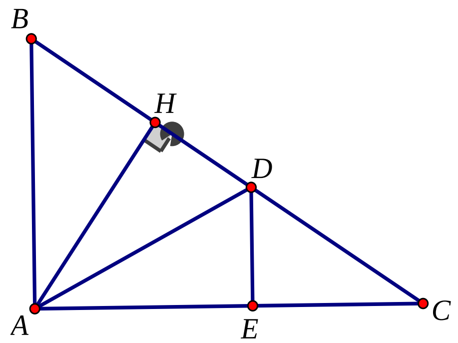
***Khai thác bài toán***

Cho tam giác ABC cân tại A, trên cạnh AB, AC lấy hai điểm M và N sao cho AM=AN. CMR :

a. Các hình chiếu của BM và CN trên BC bằng nhau
b. BN > $\frac{1}{2}$ ( BC + MN)

***<u>Bài 3</u>*** : Cho tam giác ABC ( $\hat{A}=90^0$), vẽ AH vuông góc với BC ( H thuộc BC ). Chứng minh AH + BC > AB + AC

**Phân tích lời giải** :




Nhân xét rằng AH < AC, AB < BC .

Lấy D thuộc BC sao cho BD = AB . Lấy E thuộc AC sao cho AE = AH

AH + BC = AH + AB + DC

Và AB + AC = AH + AB + EC

C/m DC > EC

**Giải** :

Trên tia BC lấy điểm D sao cho BD = AB.

Trên tia AC lấy điểm E sao cho AE = AH

Vì AB < BC nên D nằm giữa B và C, AH < AC nên E nằm giữa A và C, tam giác ABD cân đỉnh B ( vì BD= AB)

⇨ $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$

Ta có : $\widehat{BAD} + \widehat{DAE} = \widehat{BDA} + \widehat{HAD} = 90^0$

⇨ $\widehat{DAE} = \widehat{HAD}$

Xét $\Delta HAD$ và $\Delta EAD$ có :

AH = AE

AD chung

$\widehat{HAD} = \widehat{DAE}$

⇨ $\Delta HAD = \Delta EAD(c.g.c)$

⇨ $\widehat{DAE} = \widehat{HAD}$ ( 2 góc tương ứng )

Mà $\widehat{AHD} = 90^0$ nên $\widehat{AED} = 90^0$

Ta có : $DE \perp AC \Rightarrow DC > EC$ ( quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc)

Do đó : AH + BC = AH + BD + DC > AE + AB+ EC = AB + AC

Vậy AH + BC > AB + AC

***Khai thác bài toán*** :

Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác

a. Gọi I là giao điểm của đường thẳng BM và cạnh AC. Chứng minh rằng :

MA+MB< IA+IB < CA + CB

b. CMR : MA + MB +MC lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tam giác ABC.

***<u>Bài 4</u>*** : Cho tam giác ABC, có góc B và C nhọn. Điểm M nằm giữa B và C. Gọi d là tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AM

a. Chứng minh $d \le BC$

b. Xác định vị trí của M trên BC sao cho d có giá trị lớn nhất

**Phân tích lời giải** :

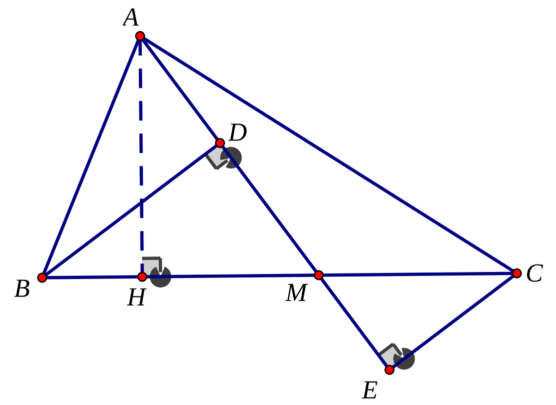
a. Kẻ $BD \perp AM ; CE \perp AM ; BD + CE = d$

Áp dụng quan hệ giữa hình chiếu và đường xiên trong tam giác ta được điều cần c/m

Xác định vị trí lớn nhất của d dựa vào câu a. Xảy ra ⇔ BD= BM; CE= CM

⇔ D trùng với M và E trùng với M

⇔ M trùng với hình chiếu H của A trên BC




**Giải**

a. Kẻ $BD \perp AM ; CE \perp AM ; BD + CE = d$

Ta có : $BD \le BM; CE \le CM$

Nên $BD + CE \le BM + CM$

Hay $d \le BC$

b. Giá trị lớn nhất của d = BC

⇔ BD= BM; CE= CM

⇔ D trùng với M và E trùng với M

⇔ M trùng với hình chiếu H của A trên BC

Khai thác bài toán :

Cho đường thẳng d và hai điểm A,B nằm cùng về một phía của đường thẳng d. Tìm trên đường thẳng d điểm C sao cho CA + CB nhỏ nhất.

**Bài tập áp dụng**

***Bài 1*** : Cho tam giác ABC vuông tại B, phân giác AD. Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với BC cắt tia AD tại E. CMR : Chu vi tam giác ECD lớn hơn chu vi tam giác ABD

***Bài 2*** : Cho tam giác ABC. Vẽ AH vuông góc với BC ( H thuộc BC ). Gọi D,E,F lần lượt là các điểm nằm giữa A và H, nằm giữa B và H, nằm giữa C và H. Chứng minh rằng chu vi tam giác DEF nhỏ hơn chu vi tam giác ABC. Với vị trí nào của điểm D,E,F thì chu vi tam giác DEF bằng $\frac{1}{2}$ chu vi tam giác ABC.

***Bài 3*** : Cho tam giác ABC, AB > AC, vẽ $BD \perp AC, CE \perp AB (D \in AC, E \in AB)$

Chứng minh rằng : AB – AC > BD – CE

***Bài 4*** : Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^0$, $\widehat{ABC} = 54^0$ , trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{DBC} = 18^0$ . Chứng minh rằng : BD < AC

***Bài 5*** : Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho BD=CE. Nối D với E. Chứng minh : BC < DE

***Tài liệu tham khảo*** :


- Vẽ thêm yếu tố hình phụ để giải một số bài toán Hình Học 7 _ Nguyễn Đức Tấn
- Chuyên đề BĐT và cực trị trong hình học phẳng _ Nguyễn Đức Tấn
- Tuyển tập các bài toán chọn lọc THCS – Vũ Dương Thụy


### *4. Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác, bất đẳng thức tam giác*

***Bài 1*** : Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC.

Chứng minh rằng : $AB + AC \ge 2AM$

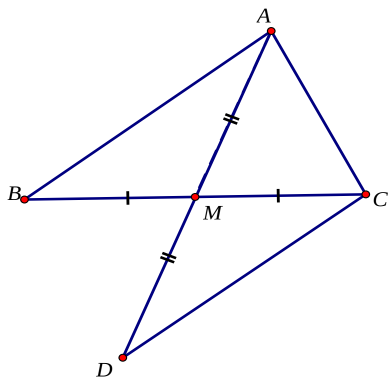
**Phân tích lời giải** :

Ta tìm cách tạo ra đường thẳng có độ dài bằng 2AM và là cạnh của tam giác có hai cạnh còn lại bằng hai cạnh AB, AC hoặc tạo ra một tam giác có 3 cạnh $\frac{AB}{2}, \frac{AC}{2}, AM$

Trên tia đối của tia AM lấy điểm D sao cho MD=MA. Tam giác ADC có AD = 2 AM, DC= AB . từ đó ta sẽ c/m được $AB + AC \geq 2AM$

**Giải** :

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA




Xét $\Delta MAB$ và $\Delta MDC$ có

MA=MD

$\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ ( đối đỉnh )

MB=MC( giả thiết )

⇨ $\Delta MAB = \Delta MDC (c.g.c)$

⇨ AB=DC ( 2 cạnh tương ứng )

Xét $\Delta ADC$ có : CD + AC > AD ( bất đẳng thức trong tam giác )

Do đó : AB + AC > AD mà AD = 2 AM

⇨ $AB + AC \geq 2AM$ ( đpcm)

***Khai thác bài toán*** :

Cho hai điểm B và C nằm trên đoạn thẳng AD sao cho AB=CD. M là điểm nằm ngoài đường thẳng AD. Chứng minh rằng : MA+ MD > MB + MC

***Bài 2*** : Cho điểm M nằm trong $\Delta ABC$

Chứng minh rằng : MB + MC < AB+ AC

Từ đó suy ra : MA + MB + MC < AB + AC + BC

**Phân tích lời giải** :

Nối BM cắt AC tại D. Áp dụng BĐT trong tam giác ABD và tam giác MDC ta sẽ được điều cần phải c/m

**Giải**

Kẻ BM cắt cạnh AC tại D

Xét $\Delta ABD$ có :

BD < AB + AD

⇨ MB + MD < AB + AD (1)

Xét $\Delta MDC$ có :

MC < MD + DC (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

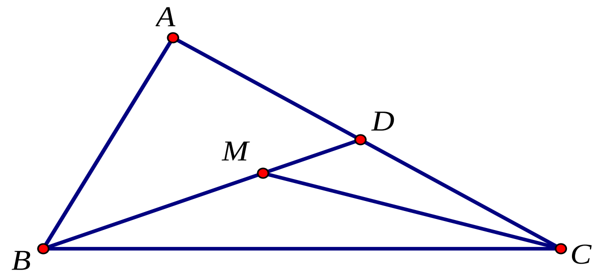
MB + MC + MD < AB + AD + DC + MD

⇨ MB + MC < AB + AC

CMTT ta có : MA + MC < AB + BC và MA + MB < AC + BC

Do đó : 2 ( MA + MB + MC ) < 2 ( AB + AC + BC )

⇨ MA + MB + MC < AB + AC + BC




***Khai thác bài toán*** : Cho $\Delta ABC$. Tìm vị trí của điểm M để thỏa mãn điều kiện MB + MC $\leq$ AB + AC.

***<u>Bài 3</u>*** : Cho góc xOy, Oz là tia phân giác của góc xOy. Từ điểm M ở trong góc xOz vẽ MH vuông góc với Ox ( H thuộc Õ ), MK vuông góc với Oy ( K thuộc Oy ). CMR : MH < MK

**Phân tích lời giải** :

Gọi A là giao điểm của MK với Oz

Vẽ AB vuông góc với Ox ( B thuộc Ox ). Ta có : AK = AB

MH < MB < AB + AM = AK + AM = MK

Từ đó ta sẽ c/m được bài toán.

**Giải** :

Gọi A là giao điểm của MK với Oz. Vẽ AB vuông góc với Ox ( B thuộc Ox). Nối B với M

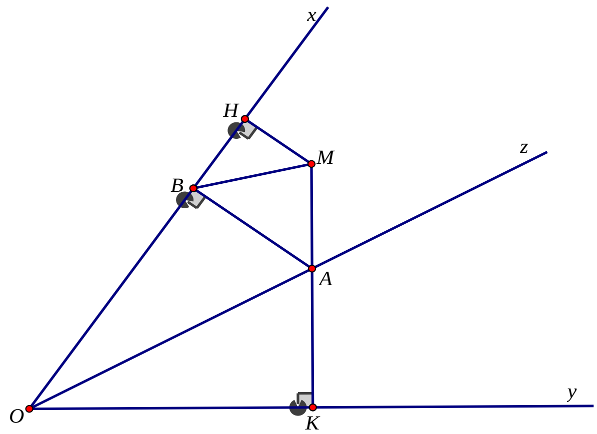
Xét $\Delta KOA(\widehat{K} = 90^0)$ và $\Delta BOA(\widehat{B} = 90^0)$ có :

OA chung

$\widehat{KOA} = \widehat{BOA}$ ( Oz là tia phân giác $\widehat{xOy}$ )

⇨ $\Delta KOA = \Delta BOA$ ( cạnh huyền – góc nhọn )

⇨ AK = AB



Xét $\Delta ABM$ có BM < AB + AM ( Bất đẳng thức trong tam giác )

Do đó : BM < AK + AM hay BM < MK

Mà MH < BM ( quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc )

⇨ MH < MK ( đpcm )

***Khai thác bài toán*** :

Cho tam giác ABC có $\hat{B} > \hat{C}$, AM là trung tuyến . D là điểm trên đoạn AM. CMR : DB < DC

***Bài tập áp dụng***

***<u>Bài 1</u>*** : Cho tam giác ABC có AB > AC, AD là tia phân giác của góc BAC. (D thuộc BC ). M là một điểm nằm trên đoạn thẳng AD

CMR : MB – MC < AB – AC

***<u>Bài 2</u>*** : Cho tam giác ABC, M là điểm trên tia phân giác ngoài của góc C. CMR : MA + MB > AC + BC

***<u>Bài 3</u>*** : Ba thành phố A, B, C trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác, trong đó AC=40km, AB=80km

a. Nếu đặt ở B máy phát sóng truyền hình có bán kính hoạt động bằng 40km thì ở thành phố C có nhận được tín  hiệu hay không ? Vì sao ?
b. Nếu đặt ở B máy phát sóng truyền hình có bán kính hoạt động bằng 120km thì ở thành phố C có nhận được tín hiệu hay không ? Vì sao ?

***<u>Bài 4</u>*** : Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại O , AB = 6, CD = 4. Chứng minh rằng trong 4 đoạn thẳng AC, CB, BD, DA luôn tồn tại hai đoạn thẳng nhỏ hơn 5.

***<u>Bài 5</u>*** : Cho tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh bên bằng 5 và hai điểm M, N bất kì. Chứng minh rằng trên các cạnh của tam giác ABC tồn tại 1 điểm sao cho tổng các khoảng cách từ đó đén M và N lớn hơn 7.

**Tài liệu tham khảo** :


- Vẽ thêm yếu tố hình phụ để giải một số bài toán Hình Học 7 _ Nguyễn Đức Tấn
- Chuyên đề BĐT và cực trị trong hình học phẳng _ Nguyễn Đức Tấn
- Tuyển tập các bài toán chọn lọc THCS – Vũ Dương Thụy

# BÀI TOÁN DỰNG HÌNH

## I. Các vấn đề dựng hình

Dựng hình là dùng thước và compa để dựng một hình nào đó theo yêu cầu của bài toán trên cơ sở những dữ liệu mà bài toán đã cho.

### 1. Các phép dựng hình cơ bản

Có 5 phép dựng hình cơ bản:

- Dựng những hình đã cho trước.
- Dựng đường thẳng đi qua hai điểm
- Dựng đường tròn có tâm và bán kính cho trước
- Dựng giao điểm (nếu có) của hai hình đã biết.
- Dựng điểm tuỳ ý trên mặt phẳng (thuộc hay không thuộc hình đã dựng)

Mọi phép dựng khác đều phải quy về 5 phép dựng cơ bản trên.

### 2. Giải bài toán dựng hình

Là ta đi tìm các nghiệm của bài toán.

Nghiệm của bài toán dựng hình là hình dựng được thoả mãn điều kiện của bài toán. Đi tìm nghiệm của bài toán nghĩa là chúng ta phải:

- Xác lập một số hữu hạn trường hợp bao hàm tất cả những khả năng có thể xảy ra đối với việc lựa chọn những cái đã cho.
- Đối với mỗi trường hợp trả lời câu hỏi bài toán có nghiệm hay không và nếu có thì bao nhiêu nghiệm.
- Đối với mỗi trường hợp mà bài toán có nghiệm, chỉ ra một số hữu hạn các phép dựng hình cơ bản cần tiến hành theo một thứ tự nào đó để có thể dựng được nó bằng thước và compa.

Nếu những hình không yêu cầu về vị trí thì những hình đó bài toán yêu cầu dựng coi như một nghiệm. Nếu có yêu cầu về vị trí thì những vị trí khác nhau cho ta những hình khác nhau.

Để cho đơn giản trong thực hành, trình bày lời giải người ta thêm các bài toán dựng hình cơ bản ngoài những phép dựng hình cơ bản.

### 3. Các bài toán dựng hình cơ bản:

- Dựng một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng cho trước.

- Dựng một đoạn thẳng bằng tổng (hiệu) hai đoạn thẳng đã cho.

- Dựng  một góc bằng một góc đã cho.

- Dựng  một góc bằng tổng (hiệu) hai góc đã cho.

- Chia đôi một đoạn thẳng đã cho.

- Chia đôi một góc đã cho.

- Dựng đường trung trực của đoạn thẳng đã cho.

- Dựng đường thẳng đi qua một điểm đã cho và song song với một đường thẳng khác đã cho.

- Dựng đường thẳng đi qua một điểm đã cho và vuông góc với một đường thẳng đã cho.

- Chia đoạn thẳng thành những phần tỷ lệ với những đoạn thẳng đã cho.

- Dựng đoạn thẳng tỉ lệ thứ tự đối với ba đoạn thẳng đã cho.

- Dựng tiếp tuyến với một đường tròn đã cho và đi qua một điểm đã cho.

- Dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn đã cho.

- Dựng đoạn thẳng trung bình nhân của hai đoạn thẳng đã cho.

- Dựng đoạn thẳng mà bình phương của nó bằng tổng (hiệu) các bình phương hai đoạn thẳng đã cho.

- Dựng tam giác biết (g.c.g), (c.g.c), (c.c.c).

- Dựng tam giác vuông biết cạnh huyền và cạnh góc vuông.

- Dựng tam giác vuông biết cạnh góc vuông và góc nhọn.

**4. Các bước của một bài toán dựng hình**

Để giải một bài toán dựng hình một cách dễ dàng ta giải theo 4 bước: phân tích, dựng hình, chứng minh, biện luận.

***a) Phân tích***

Là bước nhằm tìm ra cách dựng bằng cách thiết lập mối quan hệ giữa những yếu tố phải tìm và những yếu tố đã cho làm cơ sở để tiến hành các bước dựng.

- Trước hết ta vẽ phác hình giả sử dựng được như trên (như yêu cầu của bài toán), có thể vẽ thêm những hình phụ.

- Tìm mối tương quan giữa cái đã biết và cái chưa biết để đưa việc dựng hình F quy về dựng hình $F_1$, quy việc dựng hình $F_1$ về dựng hình $F_2$: $F \mapsto F_1 \mapsto F_2 \mapsto \ldots \mapsto F_n$.

Trong đó $F_n$ là hình cơ bản đã biết cách dựng. Hình là một tập hợp điểm, hình cơ bản đôi khi là những điểm chốt. Từ đó ta đưa ra đường lối dựng.

*Chú ý:* Phân tích là bước quan trọng nhất vì nó cho ta biết phải dựng như thế nào để được hình theo yêu cầu của đề bài.

***b) Cách dựng***

- Là bước chỉ ra một số hữu hạn và có thứ tự các phép dựng cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản rồi dựng ngược từ $F_n$ đến $F_{n-1}$... cuối cùng được hình F.

*Chú ý:*

- Các bước dựng phải là các phép dựng cơ bản hay các bài toán dựng hình cơ bản.

- Mỗi bước dựng nếu cần có thể viết thêm điều kiện có thể dựng được các phép dựng ấy.

- Các bước dựng phải theo một thứ tự xác định, tránh lộn xộn.

- Số các bước dựng phải hữu hạn.

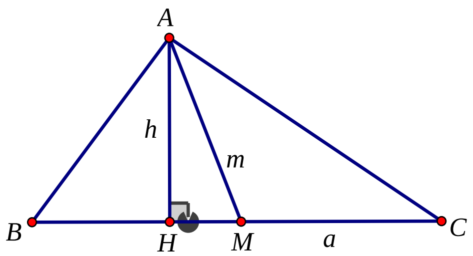
***c) Chứng minh***

Là bước kiểm tra xem hình đã dựng đã thoả mãn điều kiện đầu bài không?

Để thực hiện bước này ta dựa vào các bước dựng và các định lý đã học mà chứng minh. Điều kiện dễ chứng minh trước, điều kiện khó chứng minh sau.

*Chú ý*:

Cần chứng minh hình dựng được thoả mãn đề bài cả về định lượng cũng như định tính.




***d) Biện luận***

Là bước xem khi nào bài toán có nghiệm và nếu có thì có bao nhiêu nghiệm. Hay là để xét xem những yếu tố nào đã cho phải thoả mãn điều kiện nào để có thể dựng được hình phải tìm, nếu dựng được thì có bao nhiêu nghiệm hình.

- Biện luận theo cách dựng là ở mỗi bước dựng đó xét xem phải thoả mãn điều kiện gì thì bước dựng này thực hiện được và nếu dựng được thì có bao nhiêu nghiệm.

*Chú ý:*

- Phân chia các trường hợp tránh lộn xộn dẫn đến sót hoặc trùng lặp các trường hợp.

- Nếu hình phải dựng không áp dụng được cách dựng tổng quát trong phần dựng hình thì phải trình bày cách dựng tương ứng cho từng trường hợp cụ thể này.

- Số nghiệm bài toán dựng hình ta quy ước như sau:

Nếu bài toán không quy định vị trí của hình phải tìm đối với mỗi hình đã cho tương ứng thì những hình bằng nhau (chỉ khác nhau về vị trí) thoả mãn điều kiện đầu bài đã được xem là một nghiệm.

Biện luận là một bước góp phần rèn luyện tư duy đầy đủ cho học sinh (biện luận đủ), tư duy khái quát cho học sinh.

Tóm lại, khi làm một bài toán dựng hình chúng ta không được bỏ một bước nào trong bốn bước trên. Nếu bỏ bước phân tích hoặc phân tích không rõ ràng tổng quát có thể dẫn đến sót nghiệm. Nếu bỏ bước chứng minh có thể dẫn đến thừa nghiệm vì không phải tất cả kết quả của các bước dựng đều là hình phải tìm.

**5. áp dụng**

**Bài toán 1**

Dựng ΔABC biết cạnh BC = a, đường cao AH = h, trung tuyến AM = m

<u>*Bài giải:*</u>

*a) Phân tích*

Giả sử ta dựng được ΔABC thoả mãn:

Cạnh BC = a, đường cao AH = h, trung tuyến AM = m. Ta phải xác định đỉnh A thoả mãn 2 điều kiện:

_A cách BC một khoảng bằng h, suy ra A ∈ đường thẳng p// BC và cách BC một khoảng h.

_ A cách điểm M là trung điểm của BC một khoảng m.

*b) Cách dựng*

- Dựng BC bằng a

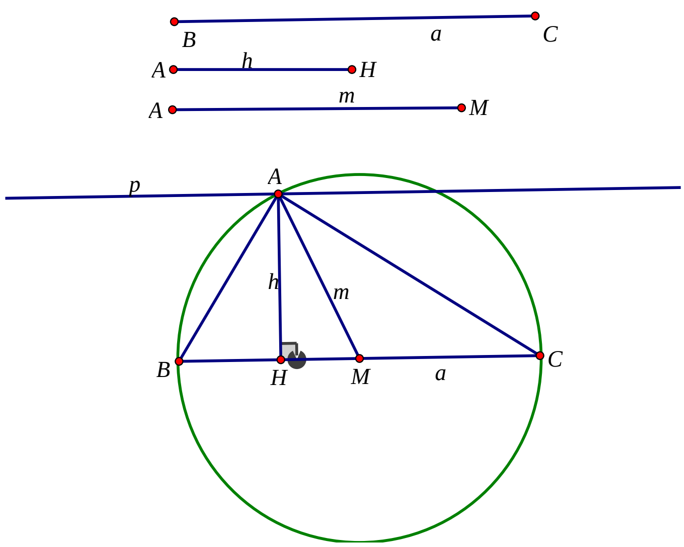
- Dựng đường thẳng p//BC

và cách BC một khoảng bằng h.

- Dựng đường tròn tâm M bán

kính m cắt p tại A.

⇒ ΔABC là tam giác cần dựng.




*c) Chứng minh*

ΔABC có BC = a (cách dựng)

Đường cao AH = h (cách dựng)

Trung tuyến AM = m (cách dựng)

⇒ ΔABC là tam giác cần dựng.

d) Biện luận

- m > h ⇒ bài toán có 4 nghiệm (4 điểm A)

- m = h ⇒ bài toán có 2 nghiệm (2 điểm A)

- m < h ⇒ bài toán vô nghiệm (không có điểm A)

**Bài toán 2**

Cho đường thẳng m song song với đường thẳng n và điểm A không thuộc 2 đường thẳng đó. Dựng điểm B ∈ m, C ∈ n sao cho ΔABC là tam giác đều.

<u>*Bài giải:*</u>

*a) Phân tích*

Giả sử đã dựng được điểm B ∈ m, điểm C ∈ n để ΔABC đều.

Dựng hình chiếu vuông góc của A trên điểm M là E

Dựng tam giác đều AEF. Xét ΔAEB và ΔAFC ta có:

AE = AF (ΔABF đều)

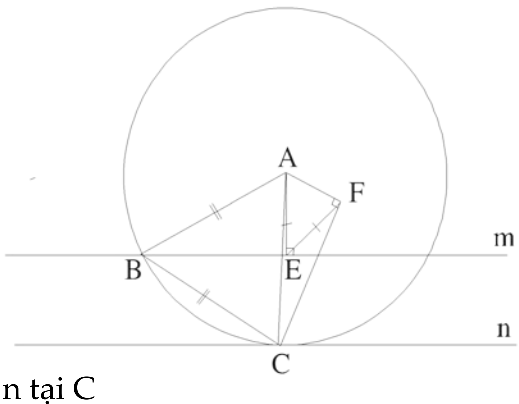
CAF = BAE (= $60^0$ + CAE)

AB = AC (ΔABC đều)

⇒ ΔAEB = ΔAFC (c.g.c)

⇒ BEA = CFA = $90^0$ (vì AE ⊥ BE)

*b) Cách dựng*




Từ A hạ AE ⊥ m tại E

- Dựng Δ đều AEF

- Từ F dựng đường vuông góc với AF cắt n tại C

- Nối A với C, dựng đường tròn tâm A bán kính AC cắt m tại B.

- Nối A với B, B với C ta được ΔABC cần dựng

*c) Chứng minh*

Xét Δ vuông ABE và Δ vuông ACF có:

AB = AC } (Cách dựng) ⇒ Δ vuông ABF = Δ vuông ACF (c.g.c)
AE = AF

⇒ BAE = CAF

Mà CAF = EAF + CAE = $60^0$ + CAE

Và BAE = BAC + CAE

⇒ BAC = $60^0$

ΔABC có AB = AC và BAC = $60^0$ ⇒ ΔABC đều

*d) Biện luận*

Bài toán có 2 nghiệm vì ta có thể dựng được 2 Δ đều

**Bài toán 3.** Dựng ΔABC biết BC = a; AB + AC = d; ABC = α

*<u>Bài giải:</u>*

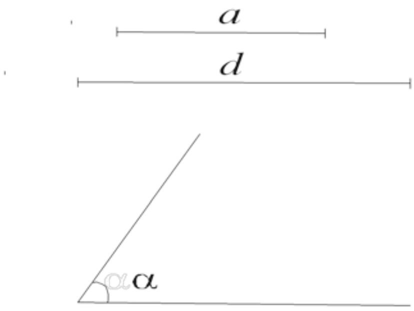
*a) Phân tích*

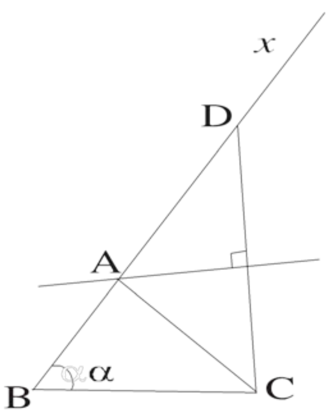
Giả sử ta đã dựng được ΔABC thoả mãn các điều kiện của đầu bài. Kéo dài BA và trên đường kéo dài lấy điểm D sao cho AD = AC.

Suy ra: BD = AB + AD = AB + AC = d

⇒ Δ DAC cân ⇒ A = BD ∩ đường trung trực của CD

*b) Cách dựng*



- Dựng đoạn BC = a

- Dựng tia Bx sao cho xBC = $\alpha$

- Dựng điểm D trên Bx sao cho BD = d

- Nối D với C

- Dựng điểm A là giao của BD và đường trung trực của CD

- Nối A với C ta được $\Delta$ABC cần dựng

*c) Chứng minh*

ABC = $\alpha$ (cách dựng)

BC = a (cách dựng)

A $\in$ đường trung trực của DC $\Rightarrow$ AD = AC

A, D $\in$ Bx; BD = d (cách dựng)

$\Rightarrow$ BD = AB + AD = AB + AC = d

$\Rightarrow$ $\Delta$ABC là $\Delta$ cần dựng

*d) Biện luận*

- d < a $\Rightarrow$ bài toán vô nghiệm

- d > a $\Rightarrow$ Bài toán có một nghiệm

**Bài toán 4**

Dựng $\Delta$ABC biết BC = a, trung tuyến AM = m, đường cao CH = h

**Bài giải**

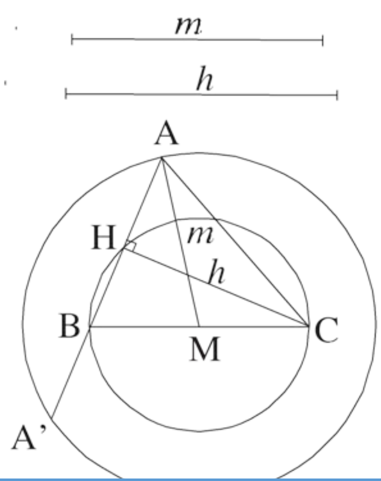
*a) Phân tích*

Giả sử đã dựng được $\Delta$ABC thoả mãn điều kiện của đầu bài

$\Rightarrow$ A $\in$ đường tròn tâm M bán kính m.

H $\in$ đường tròn đường kính BC

CH = h; B, H, A thẳng hàng




*b) Cách dựng*

- Dựng BC = a, trung điểm M của BC

- Dựng đường tròn (M, m)

- Dựng đường tròn đường kính BC

- Dựng điểm H $\in$ đường tròn đường kính BC sao cho HC = h

- Dựng điểm A là giao điểm của BH và (M, m)

*c) Chứng minh*

$\left.\begin{array}{l} BC = a \\ CH = h \end{array}\right\}$ (cách dựng)

A $\in$ (M, m) $\Rightarrow$ AM = m

$\Rightarrow$ $\Delta$ABC là tam giác cần dựng

*d) Biện luận*

Bài toán có nghiệm khi $\begin{cases} h < BC = a \\ 2m > h \end{cases}$

Bài toán có hai nghiệm do BH cắt (M, m) tại hai điểm là A và A'

**II - Các phương pháp dựng hình**

Có 3 phương pháp dựng hình cơ bản

**1. Dựng hình bằng phương pháp tương giao**

Mọi hình đều được xác định bởi một số hữu hạn điểm nên bài toán có thể quy về dựng vài điểm nào đó gọi là điểm chốt. Giải một bài toán dựng hình bằng phương pháp quỹ tích tương giao nghĩa là quy về xác định một điểm thoả mãn hai điều kiện 1 và 2. Ta tạm bỏ điều kiện 2 và tìm quỹ tích những điểm thoả mãn điều kiện 1. Quỹ tích này là hình $H_1$. Sau đó ta tạm bỏ điều kiện 1 và tìm quỹ tích thoả mãn điều kiện 2. Quỹ tích này là hình $H_2$. Qua đó một điểm thoả mãn cả hai điều kiện 1 và 2 phải là giao của hình $H_1$ và $H_2$.

***Ví dụ áp dụng***

**Bài toán 1**

Dựng $\Delta$ABC biết B = $\beta < 90^0$, đường cao BH và đường cao AD

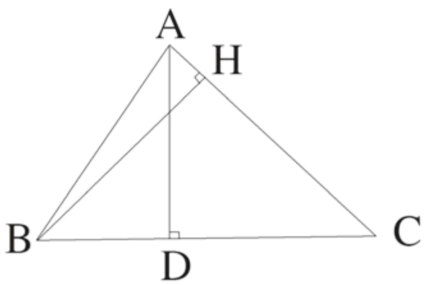
**Bài giải**

*a) Phân tích*

Giả sử $\Delta$ABC đã dựng được.

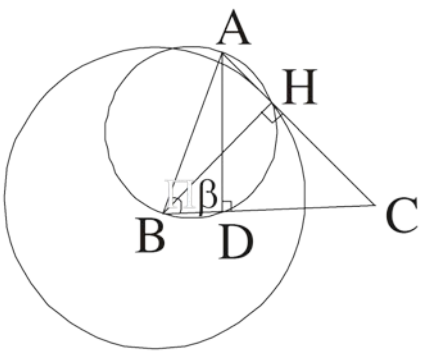
$\Delta$ vuông ABD là dựng được

$\Rightarrow$ ta chỉ cần dựng điểm C.



Muốn vậy ta phải đi dựng điểm H: H $\in$ giao của hai đường tròn đường kính AB và đường tròn tâm B bán kính BH $\Rightarrow$ C = AH $\cap$ BD

*b) Cách dựng*




- Dựng $\Delta$ABD vuông tại D
  sao cho ABD < $90^0$
  và AD cho trước.
- Dựng điểm H là giao điểm
  của hai đường tròn: (B,BH)
  và đường tròn đường kính AB (BH cho trước).
- Dựng điểm C là giao của BD và AH $\Rightarrow\Delta$ABC là $\Delta$ ta cần dựng.

*c) Chứng minh*

ABD = $\beta$ < $90^0$ (cách dựng)

AD là đường cao có độ dài cho trước (cách dựng)

BH bằng đoạn cho trước (cách dựng)

$\Rightarrow$ $\Delta$ABC thoả mãn yêu cầu của đề bài

*d) Biện luận*

Bài toán luôn có nghiệm

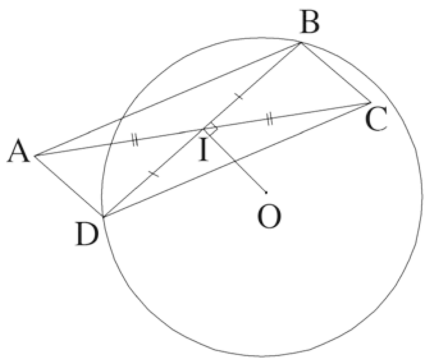
Bài toán có một nghiệm

**Bài toán 2**

Dựng hình bình hành ABCD biết 2 đỉnh đối diện A và C còn 2 đỉnh B và D thuộc một đường tròn (O,R) cho trước.

*<u>Bài giải:</u>*

*a) Phân tích*




Giả sử đã dựng được hình bình hành thoả mãn điều kiện của đề bài là ABCD. Nếu I là giao điểm của 2 đường chéo của ABCD thì: I $\in$ AC và IA = IC, I $\in$ BD và IB = ID; B, D $\in$ (O,R) $\Rightarrow$ OI $\perp$ BD

*b) Cách dựng*

- Dựng I là trung điểm của AC

- Dựng đường thẳng qua I

  và $\perp$ OI cắt (O) tại B và D

  $\Rightarrow$ ABCD là hình bình hành cần dựng.

*c) Chứng minh*

OI $\perp$ BD $\Rightarrow$ IB = ID

IA = IC (cách dựng); B, D $\in$ (O,R) (cách dựng)

$\Delta$AIB = $\Delta$DIC (c.g.c) $\Rightarrow$ ABI = IDC $\Rightarrow$ AB//CD

$\Rightarrow$ ABCD là hình bình hành thoả mãn đầu bài.

*d) Biện luận*

Bài toán có nghiệm khi điểm I ở trong đường tròn (O) khi đó bài toán có 1 nghiệm.

<u>Bài toán 3:</u>

Cho đường tròn C(O,R) và điểm A $\in$ đường thẳng d. Dựng đường tròn tiếp xúc với C(O,R) và tiếp xúc với d tại A.

*<u>Bài giải:</u>*

*a) Phân tích*

Giả sử đã dựng được (O',R') tiếp xúc với (O,R) và tiếp xúc với d tại A $\Rightarrow$ O' $\in$ p là đường thẳng qua A và $\perp$ với d. Dựng điểm E sao cho O'E = O'O (AE = R).

$\Rightarrow$ O' nằm trên đường trung trực của OE

$\Rightarrow$ O' là giao  của đường trung trực của OE & p

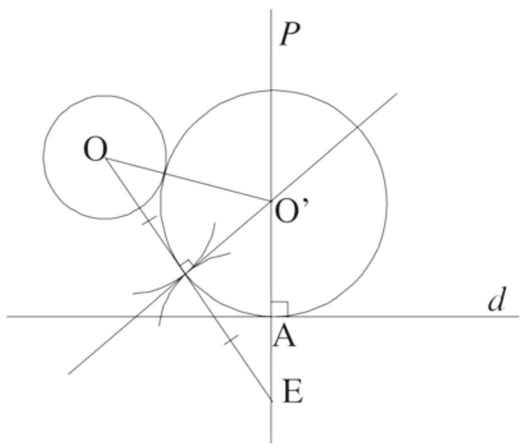
*b) Cách dựng*

- Dựng đường thẳng p $\perp$ d tại A
- Dựng điểm E $\in$ p sao cho AE = R
- Dựng đường trung trực của

  OE là q, q $\cap$ p $\equiv$ O'

- Dựng đường tròn (O',O'A)

  Đó là đường tròn cần dựng




*c) Chứng minh*

(O',O'A) tiếp xúc với d tại A (cách dựng)

Nối O với O'. Vì O' $\in$ đường trung trực của OE $\Rightarrow$ OO' = O'E

Mà O'E = O'A + AE $\Rightarrow$ OO' = OA + AE = O'A +R

$\Rightarrow$ (O,R) & (O',O'A) tiếp xúc với nhau

$\Rightarrow$ (O') là đường tròn cần dựng

*d) Biện luận*

Trên p có thể lấy $E_1$ ở trong đường tròn (O') sao cho $AE_1$ = R. Vậy bài toán có 2 nghiệm hình.

**2. Dựng hình bằng phương pháp đại số**

Giải một bài toán dựng hình bằng phương pháp đại số thường được quy về dựng một số đoạn thẳng. Ta gọi các độ dài các đoạn thẳng phải tìm là x, y, z. Sau đó ta lập phương trình để biểu thị mối tương quan giữa các đoạn thẳng đã biết là a, b, c. Sau đó giải hệ phương trình để được các ẩn x, y, z.

* Một vài đoạn thẳng dựng được biểu thị bằng biểu thức đơn giản là:

$x = a \pm b$ ; $x = \dfrac{a.b.c}{e.f}$

$x = na,\ n \in N$ ; $x = \sqrt{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}$ $(a^2 + d^2 > b^2 + c^2)$

$x = \dfrac{a}{n},\ n \in N$ ; $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$

$x = \dfrac{na}{m};\ m, n \in N$ ; $x = \sqrt{ab}$

$x = \dfrac{ab}{c}$ ; $x = a\sqrt{n};\ n \in N$

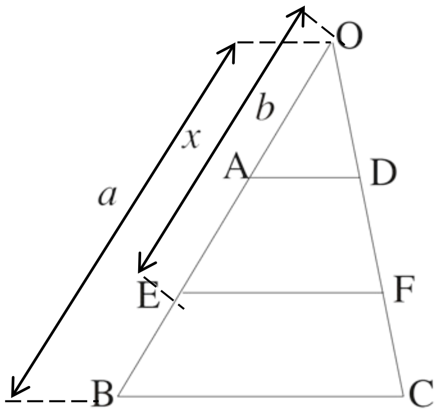
**<u>Ví dụ áp dụng</u>**

**Bài toán 1**

Cho hình thang ABCD, AD // BC. Dựng đường thẳng EF//BC chia đôi diện tích hình thang.

*a) Phân tích*

Giả sử đã dựng được EF//BC chia đôi diện tích hình thang kéo dài BC, CD cắt nhau tại O. Suy ra:




$\Delta OBC \backsim \Delta OEF \backsim \Delta OAD$

Đặt OB = a, OA = b, OE = x

Ta có: $\dfrac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEF}} = \dfrac{a^2}{x^2}$; $\dfrac{S_{\Delta OAD}}{S_{\Delta OEF}} = \dfrac{b^2}{x^2}$

$\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAD}}{S_{\Delta OEF}} = \dfrac{a^2 + b^2}{x^2}$

Mà: $S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAD} = S_{\Delta OEF} + S_{\text{hình thang EBCF}} + S_{\Delta OAD}$

$= S_{\Delta OEF} + S_{\text{hình thang AEFD}} + S_{\Delta OAD}$

$= 2S_{\Delta OEF}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2 + b^2}{x^2} = \dfrac{2}{1}$ <=> $2x^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow x^2 = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}}$

Đặt $y = \sqrt{\dfrac{a^2}{2}}$; $z = \sqrt{\dfrac{b^2}{2}}$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt{y^2 + z^2}$

*b) Cách dựng*

- Kéo dài BA, CD cắt nhau ở O

- Dựng đoạn trung bình nhân

  của a, $\dfrac{a}{2}$ ta được y

- Dựng đoạn trung bình nhân

  của $\dfrac{b}{2}$, b ta được z

- Dựng Δ vuông có y, z là 2 cạnh góc vuông

  $\Rightarrow$ độ dài cạnh huyền của Δ đó là x.

- Trên OB lấy OE = x, dựng EF // BC ta sẽ được đoạn EF cần dựng.

*c) Chứng minh*

Gọi hình thang ADEF diện tích là $S_1$ và hình thang EBCF có diện tích là $S_2$

Ta phải chứng minh $S_1 = S_2$

Ta có ΔOAD ∽ ΔDEF (vì AD//EF) ⇒ tỉ số đồng dạng là: $\frac{a}{x}$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta OAD}}{S_{\Delta OEF}} = \frac{a^2}{x^2} = \frac{S_0}{S_0 + S_1}$$

$$\Delta OEF \backsim \Delta OBC \Rightarrow \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEF}} = \frac{b^2}{x^2} = \frac{S_0 + S_1 + S_2}{S_0 + S_1}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{x^2} = \frac{2S_0 + S_1 + S_2}{S_0 + S_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2 + b^2}{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \frac{2S_0 + S_1 + S_2}{S_0 + S_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2S_0 + S_1 + S_2}{S_0 + S_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2S_0 + S_1 + S_2 = 2S_0 + 2S_1 \quad \Leftrightarrow \quad S_1 = S_2$$

⇒ $S_{\text{hình thang ADEF}} = S_{\text{hình thang EBCF}}$

*d) Biện luận*

Bài toán luôn có một nghiệm hình

**Bài toán 2**

Cho hình bình hành ABCD. Dựng hai đường thẳng đi qua A đỉnh A và chia hình bình hành thành 3 phần có diện tích bằng nhau.

<u>*Bài giải:*</u>

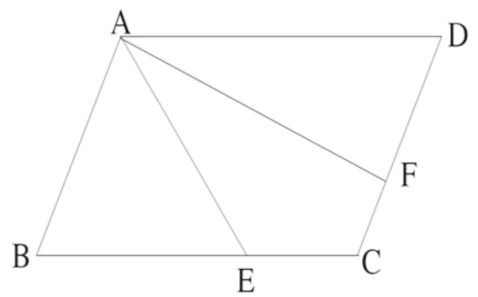
*a) Phân tích*

Giả sử đã dựng được đường thẳng qua A cắt BC tại E, cắt CD tại F thoả mãn: $S_{\Delta ABE} = S_{TM BECF} = S_{\Delta AFD} = \frac{1}{3} S_{TM ABCD}$

Gọi độ dài: BE = x, đường cao AH = h ⇒ $S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}h.x$

$S_{TM ABCD}$ = AH.BC = h.BC. Mà $S_{TM ABCD} = 3 S_{\Delta ABE}$

⇒ h.BC = 3. $\frac{1}{2}$hx <=> BC = $\frac{3}{2}$x ⇒ x = $\frac{2}{3}$BC




Tương tự ta gọi: DF = y ⇒ y = $\frac{2}{3}$DC

*b) Cách dựng*

- Dựng đoạn BE = $\frac{2}{3}$BC

- Dựng đoạn DF = $\frac{2}{3}$DC

- Nối A với E, A với F ta được:

$S_{\Delta ABE} = S_{\Delta AFD} = S_{\text{™AECF}} = \frac{1}{3}\ S_{\text{™ABCD}}$

*c) Chứng minh*

Ta có: $S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}hx = \frac{1}{2}h.\ \frac{2}{3}BC = \frac{1}{3}h.BC = \frac{1}{3}\ S_{\text{™ABCD}}$

Tương tự: $S_{\Delta ADF} = \frac{1}{3}\ S_{\text{™ABCD}}$

$\Rightarrow\ S_{\text{™AECF}} = \frac{1}{3}\ S_{\text{™ABCD}} \Rightarrow$ Điều phải chứng minh

*d) Biện luận*

Bài toán có một nghiệm hình

**3. Dựng hình bằng phương pháp biến hình:**

Dựng hình bằng phương pháp biến hình là áp dụng phép đối xứng, phép tịnh tiến, phép quay, đồng dạng. Ta quy việc dựng một hình về việc dựng một điểm M. Dựng trực tiếp điểm M đôi khi gặp khó khăn. Trong trường hợp này ta chọn một phép biến hình là một song ánh f (để f có ánh xạ ngược) biến điểm M thành điểm M' mà điểm M' này ta có thể dựng được một cách dễ dàng. Sau khi đã dựng được điểm M' ta được phép biến hình ngược: $f^{-1}(M') = M$. Ví dụ như tịnh tiến $\vec{a}$ .

**Ví dụ áp dụng**

Bài toán 1

Cho 2 điểm A, B nằm về một phía của đường thẳng d. Tìm điểm M $\in$ d sao cho AM + MB là nhỏ nhất.

***Bài giải:***

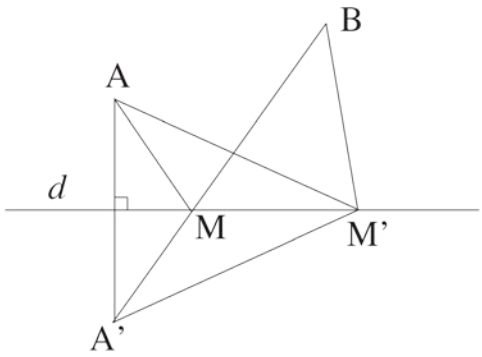
*a) Phân tích*

Giả sử đã dựng được điểm M $\in$ d để (AM + MB) ngắn nhất. Ta lấy điểm A' đối xứng với A qua d.

$\Rightarrow$ IA = IA'; MA = MA' $\Rightarrow$ (AM + MB) ngắn nhất khi: A, M, B thẳng hàng.

$\Rightarrow$ M $\in$ giao của đường thẳng nối 2 điểm A', B và đường thẳng d.

*b) Cách dựng*




- Dựng điểm A' đối xứng A qua d
- Nối A' với B
- Dựng M = A'B $\cap$ d

Đó là điểm M cần dựng

*c) Chứng minh*

- Lấy M' $\in$ d (M' tuỳ ý) và ta chứng minh: M'A + M'B > MA + MB

Theo cách dựng thì A', M, B thẳng hàng và AM = A'M

Xét $\Delta$A'BM' ta có: M'A + M'B > A'B (1)

Mà theo cách dựng thì A'B = MA' + MB = MA + MB (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ MA' + MB' > MA + MB $\Rightarrow$ (MA + MB) min (đpcm)

*d) Biện luận*

Bài toán có 1 nghiệm hình vì điểm A' dựng được là duy nhất.

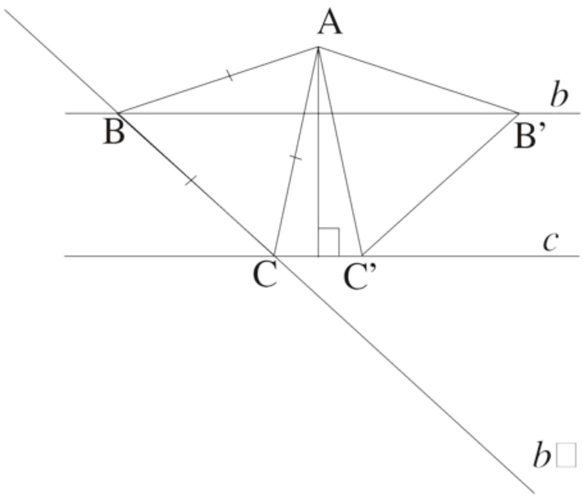
<u>Bài toán 2</u>

Cho 2 đường thẳng b//c, điểm A$\notin$b,c. Dựng $\Delta$ đều ABC sao cho B$\in$b, C$\in$c.

*<u>Bài giải:</u>*

*a) Phân tích:*

Giả sử ta dựng được $\Delta$ đều ABC thoả mãn điều kiện của bài toán. B $\in$ b, C $\in$ c. Ta thực hiện phép quay theo chiều kim đồng hồ ta có:




r(A, 60$^0$)(B) = C ; r(A, 60$^0$)(b) = b'

Mà B $\in$ b $\Rightarrow$ C $\in$ b'. Mặt khác: C $\in$ c $\Rightarrow$ c $\cap$ b' = C

*b) Cách dựng*

- Dựng đường thẳng b' = r(A, 60$^0$)(b)
- Dựng điểm C là giao điểm của b' và c
- Dựng điểm B bằng cách:

r(A, $60^0$)(C) = B

*c) Chứng minh:*

r(A, -$60^0$)(C) = B;    r(A, -$60^0$)(b') = b

Mà C ∈ b' ⇒ B ∈ b ⇒ (đpcm).

*d) Biện luận*

Bài toán có 2 nghiệm hình

<u>Bài toán 3</u>

Cho ΔABC. Dựng hình vuông MNPQ sao cho M ∈ AB; N,P ∈ BC, Q ∈ AC.

*<u>Bài giải:</u>*

*a) Phân tích*

Giả sử đã dựng được hình vuông MNPQ thoả mãn điều kiện của bài toán. Nối B với Q và thực hiện phép vị tự: h(B, k = $\frac{BQ'}{BQ}$) (Q' ∈ BQ) thì: Q → Q'; M → M'; N →N'; P → P'

$$\frac{M'Q'}{MQ}=\frac{N'M'}{NM}=\frac{N'P'}{NP}=\frac{P'Q'}{PQ}$$

Mà MQ = MN = NP = PQ và NMQ = $90^0$

⇒ M'Q' = M'N' = N'P' = P'Q'; N'M'Q' = $90^0$

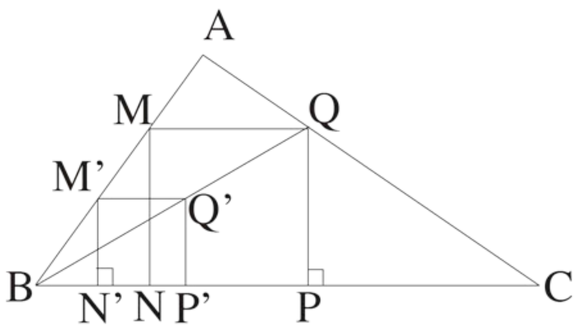
⇒ ™M'N'P'Q' là hình vuông.

*b) Cách dựng*

- Lấy M' ∈ AB, dựng M'N' ⊥ BC

- Dựng hình vuông M'N'P'Q'

- Kẻ BQ' cắt AC tại Q




- Thực hiện phép vị tự: h(B; k = $\frac{BQ'}{BQ}$) (Q') = Q; p' ↦ p; M' ↦ M; N' ↦ N ta dựng được hình vuông MNPQ cần dựng.

*c) Chứng minh*

Theo cách dựng ta có: $\frac{MQ}{M'Q'}=\frac{NM}{N'M'}=\frac{NP}{N'P'}=\frac{PQ}{P'Q'}$ và ◊M'N'P'Q' là hình vuông; N'M'P' = $90^0$

$\Rightarrow$ MN = NP = PQ = MQ & NMP = $90^0$

$\Rightarrow$ ◊MNPQ là hình vuông

*d) Biện luận*

Bài toán có 1 nghiệm hình

**4. Các phương pháp khác**

Các phương pháp dựng hình trên là rất cơ bản nhưng không thể là đầy đủ. Vì thế chúng ta phải tìm tòi, sáng tạo ra những phương pháp tích cực khác. Những phương pháp đó sẽ hình thành khi chúng ta làm những bài toán dựng hình trên cơ sở vận dụng, phân tích và tổng hợp những phương pháp trên một cách thông minh và linh hoạt.

**Bài tập dựng hình**

1. Cho hai đường tròn ($O_1$, $R_1$) và ($O_2$, $R_2$) và phương Δ. Dựng đoạn AB = a song song với Δ sao cho A ∈ ($O_1$, $R_1$), B ∈ ($O_2$, $R_2$).

2. Cho hai đường tròn ($O_1$, $R_1$) và ($O_2$, $R_2$) cùng đường thẳng d. Dựng hình vuông ABCD sao cho A ∈ ($O_1$, $R_1$), C ∈ ($O_2$, $R_2$); B, D ∈ d.

3. Dựng một Δ đều sao cho diện tích của nó bằng diện tích một Δ cho trước

4. Cho hai điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng d. Dùng đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với d.

5. Cho hai điểm A, B ∉ đường thẳng d cho trước. Dựng đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng d.

6. Dựng hai đường thẳng đi qua A chia hình bình hành thành 3 phần bằng nhau về diện tích.

7. Cho ΔABC, dựng đường thẳng song song với BC chia ΔABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

8. Cho đường tròn (O, R) và hai điểm A, B ∈ (O, R) cùng một đoạn thẳng đã biết l. Dựng hai dây cung song song đi qua A và B sao cho tổng của chúng bằng l.

9. Cho điểm A ở ngoài (O, R). Dựng cát tuyến đi qua A cắt (O, R) tại B và C sao cho AB = BC.

10. Cho đường tròn (O) và một dây cung AB cố định. Dựng Δ đều MNP thoả mãn: M & P ∈ (O); N ∈ AB và MN ⊥ AB.

11. Cho hình vuông ABCD có giao điểm hai đường chéo là 0. hãy dựng ảnh của các điểm A, B, C, D trong phép quay tâm O một góc $45^0$ ngược chiều kim đồng hồ.

12. Dựng một hình vuông nội tiếp một đường tròn bán kính R, dựng một lục giác và một tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R.

## CHUYÊN ĐỀ 5 : TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

**1.Nhắc lại kiến thức**

-Đường trung tuyến của tam giác:Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của tam giác ABC với trung điểm M của cạnh BC gọi là đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A hoặc ứng với cạnh BC ) của tam giác ABC.Đường thẳng AM cũng gọi là đường trung tuyến của tam giác ABC.

Mỗi tam giác có 3 đường trung tuyến.

-Tính chất 3 đường trung tuyến của tam giác:

Định lý: Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm ,điểm đó ccahs mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Điểm đó gọi là trọng tâm của tam giác

**2.Ví dụ**

**Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC cân tại A có AB = AC= 34cm, BC = 32cm. Kẻ đường trung tuyến AM.

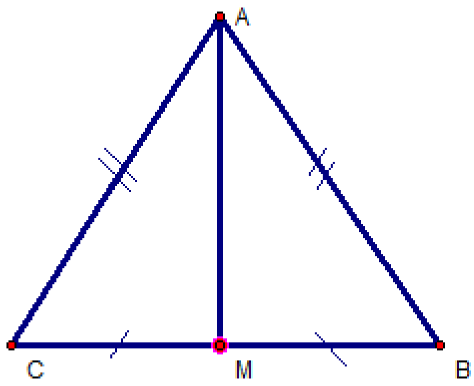
1. Chứng minh : AM vuông góc BC.
2. **2.** Tính AM.

**GIẢI**

*Phân tích bài toán:
a) để chứng minh AM vuông góc với BC ta cần chứng minh
$A\hat{M}C = A\hat{M}B = 90^0$
Ta sử dụng các giả thiết đã cho để chứng minh 2 góc trên bằng nhau,đồng thời 2 góc đó lại kề bù.
+tam giác ABC cân
+AM là đường trung tuyến
b) Để tìm được độ dài AM,ta cần gắn vào tam giác AMC
chứng minh được tam giác AMC vuông vì:
+sử dụng các giả thiết đã cho để chứng minh tam giác AMB=tam giác AMC
⇨ $A\hat{M}B = A\hat{M}C$
+ góc AMB và AMC kề bù

⇨ $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^0$

Áp dụng định lý pitago trong tam giác vuông AMC để tính được AM




1. AM vuông góc BC :

Xét ΔAMB và ΔAMC, ta có :

AB =AC (gt)

MB = MC (AM là đường trung tuyến)

AM cạnh chung

=> ΔAMB = ΔAMC (c – c – c)

=> $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$

Mà : $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^0$ (hai góc kề bù)

=> $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^0$

Hay AM $\perp$ BC.

2.Tính AM :

Ta có : BM = BC : 2 = 16cm (AM là đường trung tuyến)

Xét ΔAMB vuông tại M. ta có :

$AB^2 = AM^2 + BM^2$ (pitago)

$34^2 = AM^2 + 16^2$

=>AM = 30cm.

**Ví dụ 2**: Cho tam giác DEF cân tại D có đường trung tuyến DI.

a) Chứng minh : ΔDEI = ΔDFI.

b) Các góc DIE và góc DIF là góc gì ?

c) DE = DF = 13cm, EF = 10cm. Tính DI.

**Giải.**

- **Phân tích bài toán:**

a) **Để chứng minh tam giác DEI=DFI**

**Ta nhận thấy 2 tam giác trên bằng nhau theo trường hợp c-c-c**

**Sử dụng các giả thiết đã cho để chứng minh**

b) **Từ chứng minh câu a ta có được rằng : góc DIE=DIF**

**Lại nhận thấy rằng 2 góc trên kề bù,từ đó ta sử dụng để chứng minh rằng 2 góc đó là hai góc vuông.**

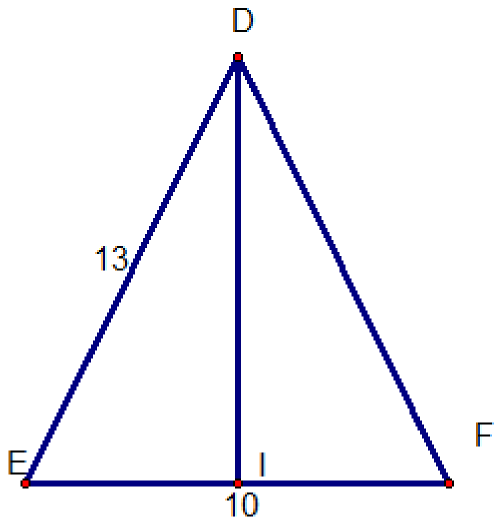
c) **Ta sử dụng được giả thiết DI là đường trung tuyến**

⇨ **EI=IF**

**Mặt khác sử dụng được định lý pitago vì đã chứng mình được câu b**

**Từ đó tìm được độ dài cạnh DI**

- **a) Chứng minh : ΔDEI = ΔDFI.**




Xét ΔDEI và ΔDFI, ta có :

DE = DF (gt)

IE = IF ( DI là trung tuyến)

DI cạnh chung.

=> ΔDEI = ΔDFI (c – c – c)

**b) Các góc DIE và góc DIF** :

$\widehat{DIE} = \widehat{DIF}$ (ΔDEI = ΔDFI)

Mà : $\widehat{DIE} + \widehat{DIF} = 180^0$ (E, I,F thẳng hàng )

=> $\widehat{DIE} = \widehat{DIF} = 90^0$

**c) tính DI :**

IE = EF : 2 = 10 : 2 = 5cm

Xét ΔDEI vuông tại I, ta có :

$DE^2 = DI^2 + IE^2$

=> $DI^2 = DE^2 – IE^2$ =132 – 52 = 144

=> DI = 12cm.

**Ví dụ 3**:Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Trên tia đối của MA lấy điểm D sao cho MD = MA.

a) Tính số đo góc ABD

b) Chứng minh : ABC = BAD.

c) So sánh độ dài AM và BC.

**Giải.**

- **Phân tích bài toán:**

a) **Để tính được số đo góc ABD ta cần tính được tổng** $\hat{B}1+\hat{B}2$

**Sử dụng giả thiết tam giác ABC vuông tại A ta có** $\hat{B}1+\hat{C}=90^0$

**Sử dụng các giả thiết về cạnh để chứng minh tam giác AMC =BMD**

⇨ $\hat{B}2=\hat{C}$

⇨ $\hat{B}1+\hat{B}2=90^0$

⇨ $A\hat{B}D=90^0$

b) **Sử dụng câu b để chứng minh(AC=BD)**

c) **Để so sánh AM và BC ta đi so sánh AM và AD( vì AD=BC)**

GIẢI

**a) Tính số đo góc ABD**

b) Xét ΔAMC và ΔDMB, ta có :

MA = MD (gt)

$\widehat{AMC}=\widehat{DMB}$ (đối đỉnh)

MC = MB (gt)

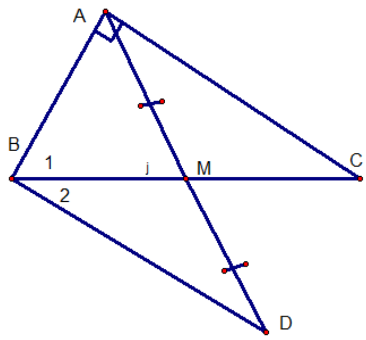
=> ΔAMC = ΔDMB

=> $\widehat{B_1}=\widehat{C}$ (góc tương ứng);

Mà : $\widehat{B_2}+\widehat{C}=90^0$ (ΔABC vuông tại A)

=> $\widehat{B_1}+\widehat{B_2}=90^0$

Hay $\widehat{ABD}=90^0$




**b)Chứng minh : ABC = BAD**

Xét ABC và BAD, ta có :

$\widehat{BAC}=\widehat{ABD}=90^0$

AB cạnh chung.

AC = BD (AMC = ΔDMB)

=> ΔABC =Δ BAD

**c)So sánh độ dài AM và BC :**

AM = $\frac{AD}{2}$ (gt).

Mà : AD = BC (ΔABC =Δ BAD)

=> AM = $\frac{BC}{2}$

**3.Bài tập áp dụng:**

**<u>BÀI 1 :</u>**

Hai đường trung tuyến AD và BE của tam giác ABC cắt nhau tại G. kéo dài GD thêm một đoạn DI = DG. Chứng minh : G là trung điểm của AI.

**<u>BÀI 2 :</u>**

Trên đường trung tuyến AD của tam giác ABC, lấy hai điểm I và G sao cho AI = IG = GD. Gọi E là trung điểm của AC.

1. Chứng minh B, G, E thẳng hàng và so sánh BE và GE.

2. CI cắt GE tại O. điểm O là gì của tam giác ABC. chứng minh BE = 9OE.

**BÀI 3 :**

Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 8cm, BC = 10cm. lấy điểm M trên cạnh AB sao cho BM = 4cm. lấy điểm D sao cho A là trung điểm của DC.

1. Tính AB.
2. Điểm M là gì của tam giác BCD.
3. Gọi E là trung điểm của BC. chứng minh D, M, E thẳng hàng.

**BÀI 4:** Giả sử hai đường trung tuyến BD và CE của tam giác ABC có độ dài bằng nhau và cắt nhau tại G.

1. Tam giác BGC là tam giác gì ?
2. So sánh tam giác BCD và tam giác CBE.
3. Tam giác ABC là tam giác gì ?

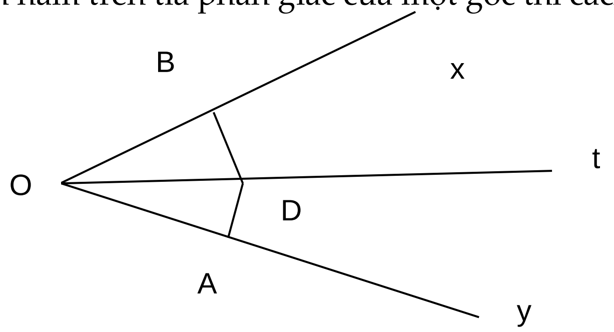
**BÀI 5:**Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 8cm, BC = 10cm. lấy điểm M trên cạnh AB sao cho BM = 16/3cm. lấy điểm D sao cho A là trung điểm của DC.

1. Tính AC.
2. Điểm M là gì của tam giác BCD.
3. Gọi E là trung điểm của BC. chứng minh D, M, E thẳng hàng.

CHỦ ĐIỂM 2: TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

**1.Nhắc lại kiến thức**

-Định lý 1: Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.



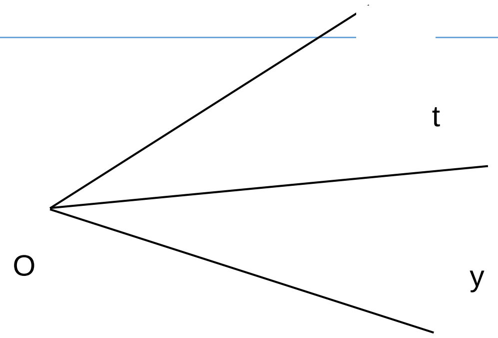

-Định lý 2: (định lý đảo)

Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

**2.Các dạng bài tập**

Dạng 1:chứng minh một tia là tia phân giác của một góc

Cách giải: chứng minh tia Ot là tia phân giác của góc xOy




+ Cách 1: chứng minh:

$\begin{cases} \text{Tia Ot nằm giữa 2 tia Ox và Oy} \\ x\hat{O}t = t\hat{O}y \end{cases}$

+ Cách 2: Chứng minh

$x\hat{O}t = t\hat{O}y = \frac{1}{2}x\hat{O}y$

**Ví dụ** :Trên nửa mặt phẳng chứa tia Ox,vẽ tia Oy,Ot sao cho $x\hat{O}y = 130^0$; $x\hat{O}t = 65^0$

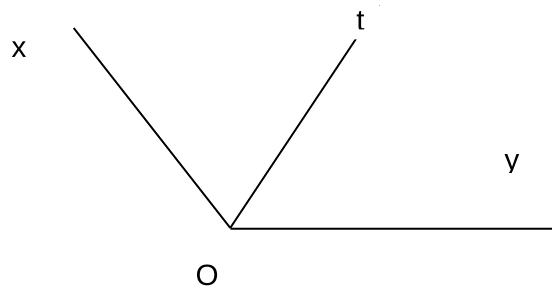
Chứng minh rằng : Ot là tia phân giác của $x\hat{O}y$

*Phân tích bài toán:

Để chứng minh Ot là tia phân giác của góc xOy ta cần áp dụng cách chứng minh 1 hoặc 2.

ở bài này ta sử dụng cách 2 vì chưa có điều kiện tia Ot nằm giữa Ox và Oy

Chứng minh:




Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox

Ta có: $x\hat{O}t < x\hat{O}y (65^0 < 130^0)$

=>tia Ot nằm giữa Ox và Oy (1)

=> $x\hat{O}t + t\hat{O}y = x\hat{O}y$

Thay $x\hat{O}y = 130^0; x\hat{O}t = 65^0$ (gt)

Ta được: $65^0 + t\hat{O}y = 130^0$

=> $t\hat{O}y = 130^0 - 65^0$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow t\hat{O}y = 65^0 \\ \text{Mà } x\hat{O}t = 65^0 (gt) \end{array}\right\} x\hat{O}t = t\hat{O}y \ (2)$

Từ (1)và (2)=> Ot là tia phân giác của $x\hat{O}y$

DẠNG 2: Sử dụng tính chất tia phân giác của một góc để giải các bài toán khác

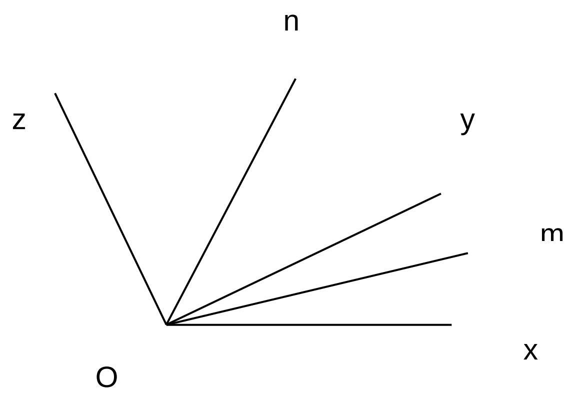
Ví dụ: tia Oy và Oz cùng nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là tia Ox $x\hat{O}y = 30^0$; $x\hat{O}z = 120^0$

Om là tia phân giác của $x\hat{O}y$

On là tia phan giác của $y\hat{O}z$

Tính $y\hat{O}z$ và $m\hat{O}n$

Giải:
*Phân tích bài toán:
Sử dụng các tính chất kề bù và tia phân giác của góc để tính các góc




Ta có: $x\hat{O}y + y\hat{O}z = x\hat{O}z$ (vì tia Oy nằm giữa Ox và Oz)

Thay $x\hat{O}y = 30^0; x\hat{O}z = 120^0$ (gt)

ta được: $30^0 + y\hat{O}z = 120^0$

hay $y\hat{O}z = 120^0 - 30^0$

⇨ $y\hat{O}z = 90^0$

b)Tính $m\hat{O}n = ?$

ta có:

$x\hat{O}m = m\hat{O}y = \frac{1}{2}x\hat{O}y = \frac{1}{2}30^0 = 15^0$

(vì Om là tia p/g của $x\hat{O}y$ )

Lại có:

$y\hat{O}n = n\hat{O}z = \frac{1}{2}y\hat{O}z = \frac{1}{2}90^0 = 45^0$

(vì On là tia p/g của $y\hat{O}z$ )

Mà $m\hat{O}n = m\hat{O}y + y\hat{O}n$ (vì tia Oy nằm giữa Om và On)

Thay $m\hat{O}y = 15^0; y\hat{O}n = 45^0$ ta được:

$m\hat{O}n = 15^0 + 45^0 = 60^0$

**3.Bài tập áp dụng**

**BÀI 1 :**Cho hình thoi ABCD. Trên tia đối tia CD lấy điểm E, gọi F là giao điểm của AE và BC. Đường thẳng song song AB kẻ từ F cắt BE tại P.

Chứng minh CP là phân giác góc CBE.

**BÀI 2 :**Cho hình bình hành ABCD. phân giác góc A cắt đường chéo BD tại E và phân giác góc B cắt đường chéo AC tại F.

Chứng minh : EF // AB.

**BÀI 3 :**Cho tam giác ABC có AB = 4cm, BC = 6cm, CA = 8cm. Đường phân giác trong AD và BE cắt nhau tại I.

Tính : BD và CD.

**BÀI 4**:Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. chứng minh : IG // BC và tính IG.

cho tam giác ABC có AB= 5cm, AC = 6cm và BC =7cm. Tia phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại E.

Tính EB và EC.

**BÀI 5:**Vẽ hai góc kề bù xOy,yOx',biết $x\hat{O}y = 100^0$ .Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy,Ot'là tia phân giác của góc x'Oy.

Tính $x'\hat{O}t;\ x\hat{O}t';\ t\hat{O}t'$

# Chủ điểm 6:
# TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

**1.Kiến thức cần nhớ**

+Định lý 1(định lý thuận):điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

+ Định lý 2(định lý đảo): điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

Nhận xét: Tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

Ứng dụng:

Ta có thể vẽ đường trung trực của đoạn thẳng AB bằng thước và compa như sau:

-Lấy A làm tâm vẽ cung tròn bán kính lớn hơn $\frac{1}{2}$AB

-Lấy B làm tâm vẽ cung tròn có cùng bán kính đó sao cho hai cung tròn này có 2 điểm chung ,gọi là C và D

-Dùng thước vẽ đường thẳng CD .Đường thẳng CD là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

**2.Các dạng bài tập**

*Dạng 1*: Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng

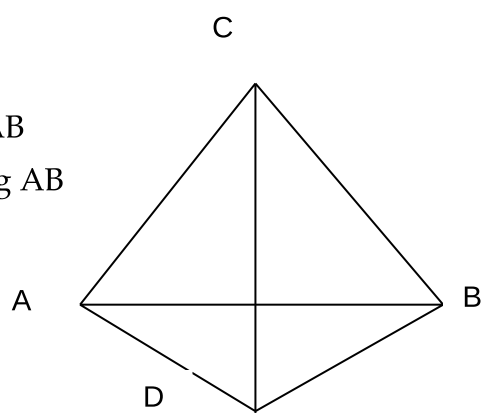
Cách giải:

Cách 1:chứng minh rằng đường thẳng đó vuông góc với đoạn thẳng tai trung điểm của đoạn thẳng đó

Cách 2: chứng minh 2 điểm thuộc đường thẳng cách đều 2 đầu mút của đoạn thẳng

Ví dụ 1:cho tam giác ABC cân đỉnh C,tam giác ABD cân đỉnh D

Chứng minh rằng CD là đường trung trực của đoạn thẳng AB




Giải:

*Phân tích bài toán: để chứng minh CD là đường trung trực của AB

Ta chứng minh C và D nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

Tam giác ABC cân đỉnh C (gt)

=> CA=CB

=>C nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

Tương tự D cùng nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

=>CD là đường trung trực của đoạn thẳng AB

Dạng 2: sử dụng tính chất đường trung trực của đoạn thẳng để giải các bài toán khác

Ví dụ 1:Tam giác ABC cân tại A .Đường trung trực của cạnh AC cắt AB tại D .Biết CD là tia phân giác của góc $A\hat{C}B$ ,Tính các góc của tam giác ABC

Giải:

Ta có: DA = Dc => tam giác ADC cân tại D

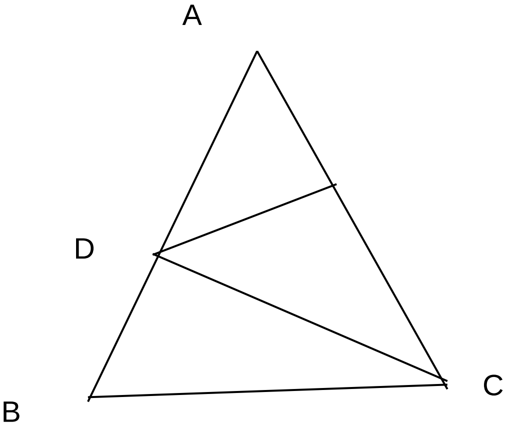
$\Rightarrow \hat{A} = \hat{C}2 \Rightarrow \hat{C} = 2\hat{A}$ (1)

Tam giác ABC cân tại A => $\hat{C} = \hat{B}$ (2)

Tam giác ABC có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180$ (3)

Từ 1,2,3 suy ra $\hat{A} = 36^0$

$\hat{B} = \hat{C} = 72^0$




**3.Bài tập áp dụng**

**BÀI 1 :**

Cho tam giác nhọn ABC , đường cao AH. Vẽ các điểm D, E sao cho các đường AB, AC lần lượt là các đường trung trực của DH, EH.

1. Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân.
2. Đường thẳng DE cắt AB, AC lần lượt tại M và N. chứng minh tia HA là phân giác của góc NHM.
3. Chứng minh : $\widehat{DAE} = 2\widehat{MHB}$

**BÀI 2 :**

Cho tam giác ABC cân tại A. hai tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I.

1. Chứng minh tam giác BIC cân tại I.
2. Chứng minh AI là đường trung trực của BC.

**BÀI 3 :**

Cho tam giác ABC cân tại A. gọi M là trung điểm của BC. hai đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại D. chứng minh :

1. DB = DC.
2. A, M, D thẳng hàng.

**BÀI 4:** Cho d là đường trung trực của AC. Lấy điểm B sao cho A và B ở cùng bên đường thẳng d. BC cắt d tại I. điểm M di động trên d.

1. So sánh MA + MB với BC.
2. Tìm vị trí M trên d để MA + MB nhỏ nhất.

**BÀI 5 :**

Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho BM = AB. trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho CN = AC. Vẽ đường cao BH của tam giác ABM và đường cao CK của tam giác ACN, hai đường cao cắt nhau tại O. chứng minh rằng :

1. Điểm O nằm trên đường trung trực của MN.
2. AO là phân giác của góc BAC.

# TUYỂN TẬP CÁC BÀI HÌNH HỌC TRONG ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 7

**Câu 1.**

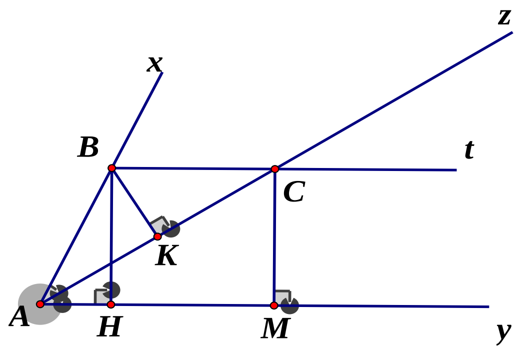
Cho $\widehat{xAy} = 60^0$ có tia phân giác $Az$. Từ điểm $B$ trên $Ax$ kẻ $BH$ vuông góc với $Ay$ tại $H$, kẻ $BK$ vuông góc với $Az$ và $Bt$ song song với $Ay, Bt$ cắt $Az$ tại C. Từ C kẻ $CM$ vuông góc với $Ay$ tại M. Chứng minh:

a) $K$ là trung điểm của $AC$

b) $\Delta KMC$ là tam giác đều

c) Cho $BK = 2cm$, tính các cạnh của $\Delta AKM$

## Lời giải




a) $\Delta ABC$ cân tại B do $\widehat{CAB} = \widehat{ACB}\left(= \widehat{MAC}\right)$ và $BK$ là đường cao $\Rightarrow BK$ là đường trung tuyến $\Rightarrow K$ là trung điểm của $AC$

b) $\Delta ABH = \Delta BAK$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AK$ (hai cạnh tương ứng) mà $AK = \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow BH = \dfrac{1}{2}AC$

Ta có: $BH = CM$ (tính chất đoạn chắn) mà $CK = BH = \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \Delta MKC$ là tam giác cân (1)

Mặt khác: $\widehat{MCB} = 90^0$ và $\widehat{ACB} = 30^0 \Rightarrow \widehat{MCK} = 60^0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MKC$ là tam giác đều

c) Vì $\Delta ABK$ vuông tại K mà $\widehat{KAB} = 30^0 \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4cm$

Vì $\Delta ABK$ vuông tại K nên theo pytago ta có: $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$

Mà $KC = \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$

$\Delta KCM$ đều $\Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$

Theo phần b, $AB = BC = 4, AH = BK = 2, HM = BC$ ($HBCM$ là hình chữ nhật)

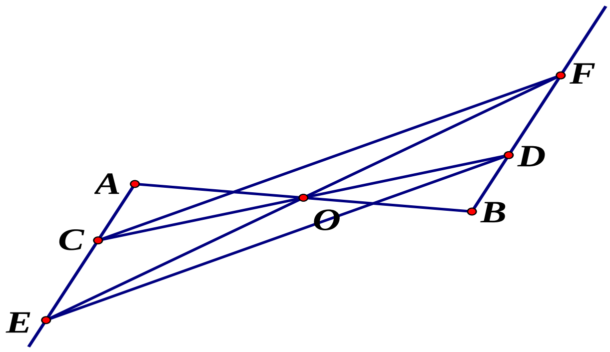
$\Rightarrow AM = AH + HM = 6$

**Bài 2** Cho đoạn thẳng $AB$ có O là trung điểm. Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ $AB$ kẻ hai tia $Ax//By$. Lấy hai điểm $C, E$ và $D, F$ lần lượt trên $Ax, By$ sao cho $AC = BD, CE = DF$ . Chứng minh:

a) Ba điểm $C, O, D$ thẳng hàng, $E, O, F$ thẳng hàng

b) $ED = CF$

**Lời giải**




a) Chứng minh được $\Delta AOE = \Delta BOF(c.g.c) \Rightarrow E, O, F$ thẳng hàng và $OE = OF$ (1)

Tương tự chứng minh được $\Delta AOC = \Delta BOD(c.g.c) \Rightarrow C, O, D$ thẳng hàng và $OC = OD$ (2)

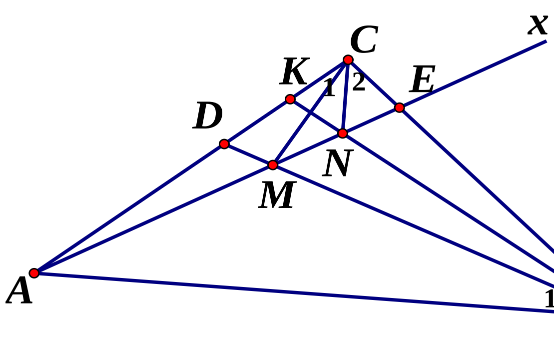
b) Từ (1), (2) kết hợp giả thiết chứng minh được $\Delta EOD = \Delta FOC(c.g.c) \Rightarrow ED = CF$

**Bài 3.** Tam giác $ABC$ cân tại C và $\widehat{C} = 100^0$; $BD$ là phân giác của $\widehat{B}$. Từ A kẻ tia $Ax$ tạo với $AB$ một góc $30^0$. Tia $Ax$ cắt $BD$ tại M, cắt $BC$ tại E. BK là phân giác $\widehat{CBD}$, $BK$ cắt $Ax$ tại N

a) Tính số đo $\widehat{ACM}$

b) So sánh $MN$ và $CE$.

**Lời giải**



a) Học sinh chứng minh được: $\Delta ANB$ cân tại N(có hai góc bằng nhau $=30^0$)

$\Rightarrow NA = NB$

Nối $CN$, chứng minh được $\Delta CAN = \Delta CBN(c.c.c)$

$\Rightarrow \widehat{NCA} = \widehat{NCB} = 50^0; \widehat{NMB}$ là góc ngoài của $\Delta ABM \Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 50^0$

Từ đó, học sinh chứng minh được: $\Delta BNM = \Delta BNC(g.c.g) \Rightarrow BC = BM \Rightarrow \Delta CBM$ cân tại B, mà lại có góc ở đỉnh $\widehat{CBM} = 20^0$ nên tính được $\widehat{ACM} = 20^0$

b) Từ chứng minh trên , ta chứng minh được $\Delta MNC$ cân tại $N \Rightarrow MN = NC$, so sánh $CN$ với CE

Xét trong tam giác $CNE$ tính được $\widehat{CEN} = 180^0 - \left(100^0 + 10^0\right) = 70^0$

Và tính được $\widehat{CNE} = 50^0 + 10^0 = 60^0$ (góc ngoài của $\Delta CAN$)

$\Rightarrow \widehat{CEN} > \widehat{CNE} \Rightarrow CN > CE$ hay $MN > CE$

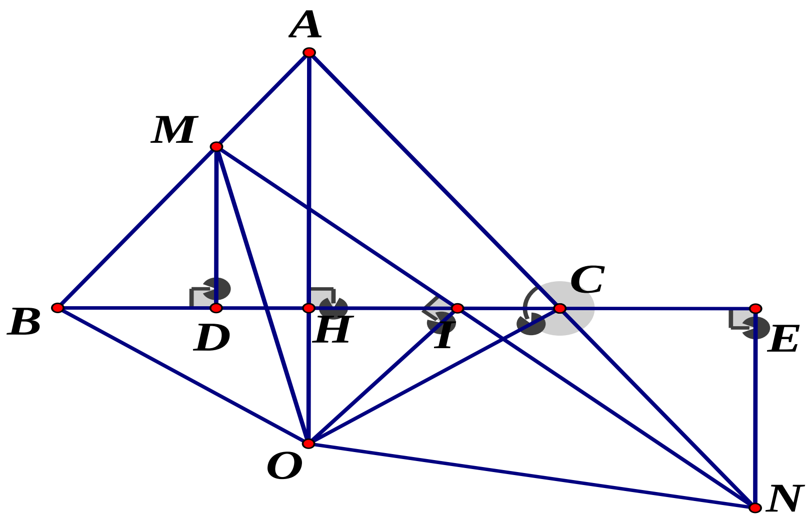
**Câu 4.** Cho tam giác cân $ABC, AB = AC$ . Trên cạnh $BC$ lấy điểm $D$, trên tia đối của $CB$ lấy điểm $E$ sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với $BC$ kẻ từ $D$ và $E$ cắt $AB, AC$ lần lượt ở $M, N$. Chứng minh rằng:

a) $DM = EN$

b) Đường thẳng $BC$ cắt $MN$ tại điểm $I$ là trung điểm của $MN$

c) Đường thẳng vuông góc với $MN$ tại $I$ luôn luôn đi qua một điểm cố định khi $D$ thay đổi trên cạnh BC.

**Lời giải**




a) $\Delta MDB = \Delta NEC\left(g.c.g\right) \Rightarrow DM = EN$ (cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow MB = NC$ (cặp cạnh tương ứng)

b) Ta có:

$\Delta MDI$ vuông tại D: $\widehat{DMI} + \widehat{MID} = 90^0$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

$\Delta NEI$ vuông tại E: $\widehat{ENI}+\widehat{NIE}=90^0$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

Mà $\widehat{MID}=\widehat{NIE}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{DMI}=\widehat{ENI}$

$\Rightarrow \Delta MDI=\Delta NEI(g.c.g)\Rightarrow IM=IN$ (cặp cạnh tương ứng)

Vậy $BC$ cắt $MN$ tại điểm $I$ là trung điểm của $MN$

c) Gọi $H$ là chân đường vuông góc kẻ từ $A$ xuống $BC$.

$\Delta AHB=\Delta AHC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{HAB}=\widehat{HAC}$ (cặp góc tương ứng)

Gọi $O$ là giao điểm của $AH$ với đường thẳng vuông góc với $MN$ kẻ từ I

$\Delta OAB=\Delta OAC(c.g.c)\Rightarrow \widehat{OBA}=\widehat{OCA}$ (cặp góc tương ứng) (1)

$\Rightarrow OC=OB$ (cặp cạnh tương ứng)

$\Delta OIM=\Delta OIN(c.g.c)\Rightarrow OM=ON$ (cặp cạnh tương ứng )

$\Delta OBM=\Delta OCN(c.c.c)\Rightarrow \widehat{OBM}=\widehat{OCN}$ (cặp góc tương ứng ) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OCA}=\widehat{OCN}=90^0$, do đó $OC\perp AC$

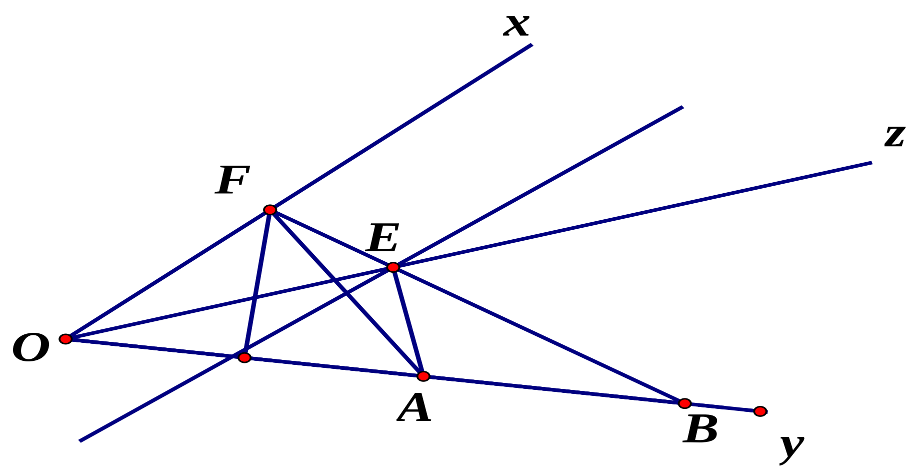
Vậy điểm $O$ cố định

**Bài 5.** Cho góc nhọn $xOy$ và tia phân giác $Ot$. Trên tia $Oy$ lấy điểm $A$. Đường trung trực của $OA$ cắt tia $Ox$ tại F. Trên tia $Ay$ lấy điểm $B$ sao cho $AB=AF$. $BF$ cắt $Ot$ tại E.

a) Chứng minh $E$ thuộc đường trung trực của $FA$

b) So sánh $EF$ và $EB$

**Lời giải**




a) $F$ thuộc đường trung trực của $FA\Rightarrow FO=FA\Rightarrow \Delta OFA$ cân tại F

$\Rightarrow \widehat{FOA}=\widehat{FAO}=2.\widehat{EOB}=2.\widehat{FOE}$

$AF=AB\Rightarrow \Delta FAB$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{AFB}=\widehat{ABF}\Rightarrow \widehat{FAO}=2\widehat{FBA}$

Vậy $\widehat{EOB}=\widehat{EBO}\Rightarrow OE=EB$

$\Delta OFE=\Delta BAE\left(OF=AB, OE=EB, \widehat{FOE}=\widehat{EBO}\right)$

$\Rightarrow EF = EA \Rightarrow E$ thuộc đường trung trực của $FA.$

b) $\widehat{FOA} \le 90^0 \Rightarrow \widehat{FOE} < 45^0$

$\Delta OFE$ có $\widehat{OFE} = 180^0 - 3\widehat{FOE} = 3\left(60^0 - \widehat{FOE}\right)$

$> 3\left(60^0 - 45^0\right) = 45^0 > \widehat{FOE}$

**Bài 6.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại A, $M$ là trung điểm $BC.$ Lấy điểm D bất kỳ thuộc cạnh $BC.$ $H$ và $I$ thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng $AD.$ Đường thẳng $AM$ cắt CI tại N. Chứng minh rằng:

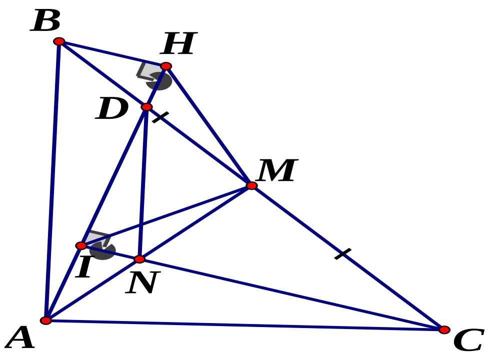
a) $BH = AI$

b) $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi

c) Đường thẳng $DN$ vuông góc với $AC$

d) $IM$ là phân giác của $\widehat{HIC}$

**Lời giải**




a) $\Delta AIC = \Delta BHA \Rightarrow BH = AI$

b) $BH^2 + CI^2 = BH^2 + AH^2 = AB^2$

c) $AM, CI$ là hai đường cao cắt nhau tại $N \Rightarrow N$ là trực tâm $\Rightarrow DN \perp AC$

d) $\Delta BHM = \Delta AIM \Rightarrow HM = MI$ và $\widehat{BHM} = \widehat{IMA}$

Mà $\widehat{IMA} + \widehat{BMI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BMH} + \widehat{BMI} = 90^0 \Rightarrow \Delta HMI$ vuông cân

$\Rightarrow \widehat{HIM} = 45^0$ mà $\widehat{HIC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HIM} = \widehat{MIC} = 45^0 \Rightarrow IM$ là phân giác của $\widehat{HIC}$

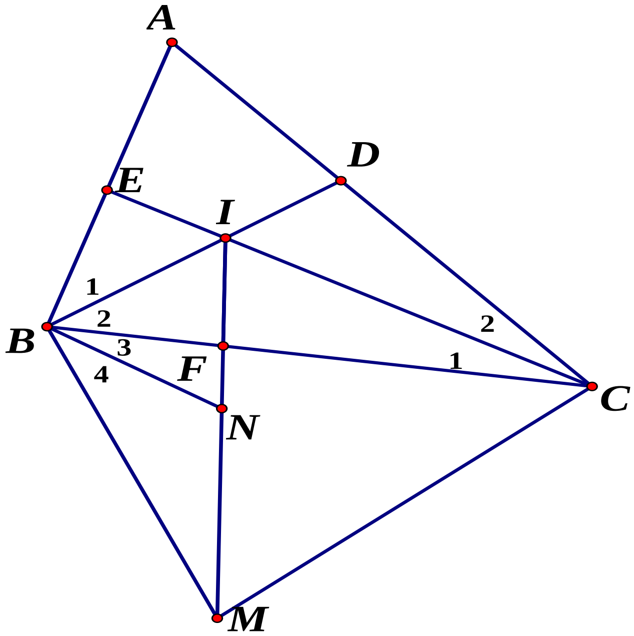
**Bài 7.** Cho $\Delta ABC$ nhọn có góc A bằng $60^0$. Phân giác $\widehat{ABC}$ cắt $AC$ tại D, phân giác $\widehat{ACB}$ cắt $AB$ tại E. $BD$ cắt $CE$ tại I.

a) Tính số đo $\widehat{BIC}$

b) Trên cạnh $BC$ lấy điểm F sao cho $BF = BE.$ Chứng minh $\Delta CID = \Delta CIF$

c) Trên tia $IF$ lấy điểm $M$ sao cho $IM = IB + IC.$ Chứng minh $\Delta BCM$ đều

**Lời giải**




a) $BD$ là phân giác của $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$

$CE$ là phân giác của $\widehat{ACB}$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$

Mà tam giác $ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0 \Rightarrow 60^0 + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 120^0 \Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{C_1} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BIC} = 120^0$

b) $\Delta BIE = \Delta BIF\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{BIE} = \widehat{BIF}$

$\widehat{BIC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BIE} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BIE} = \widehat{BIF} = 60^0$

Mà $\widehat{BIE} + \widehat{BIF} + \widehat{CIF} = 180^0 \Rightarrow \widehat{CIF} = 60^0$

$\widehat{CID} = \widehat{BIE} = 60^0$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{CIF} = \widehat{CID} = 60^0 \Rightarrow \Delta CID = \Delta CIF\,(g.c.g)$

c) Trên đoạn $IM$ lấy điểm $N$ sao cho $IB = IN \Rightarrow NM = IC$

$\Rightarrow \Delta BIN$ đều $\Rightarrow BN = BI$ và $\widehat{BNM} = 120^0 \Rightarrow \Delta BNM = \Delta BIC(gcg)$

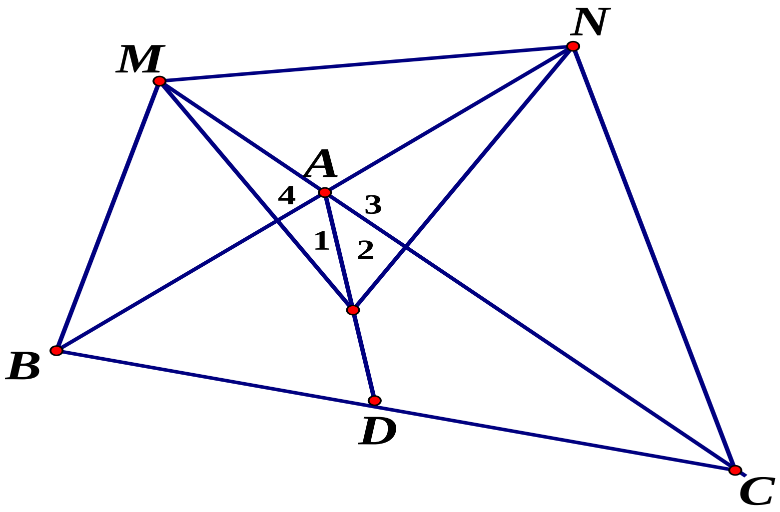
$\Rightarrow BM = BC$ và $\widehat{B_2} = \widehat{B_4} \Rightarrow \Delta BCM$ đều

**Câu 8.**

1. Cho $\Delta ABC$ có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^0$, phân giác $AD$. Trên $AD$ lấy điểm $O$, trên tia đối của tia $AC$ lấy điểm $M$ sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{ABO}$. Trên tia đối của tia $AB$ lấy điểm N sao cho $\widehat{ACN} = \widehat{ACO}$. Chứng minh rằng
   a) $AM = AN$
   b) $\Delta MON$ là tam giác đều
2. Cho tam giác $ABC$ vuông ở $A$, điểm $M$ nằm giữa B và C. Gọi $D, E$ thứ tự là hình chiếu của $M$ trên $AC, AB$. Tìm vị trí của $M$ để $DE$ có độ dài nhỏ nhất

**Lời giải**

1.




a) $\Delta ABC$ có $\widehat{B}+\widehat{C}=60^0$ nên $\widehat{A}=120^0$

Do $AD$ là tia phân giác nên $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}=60^0$, ta lại có $\widehat{A_3}=\widehat{A_4}=180^0-\widehat{A}=60^0$

Suy ra $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}=\widehat{A_3}=\widehat{A_4}\left(=60^0\right)\Rightarrow \begin{cases}\Delta ABM=\Delta ABD(g.c.g)\Rightarrow AM=AO(1)\\ \Delta ACN=\Delta ACO(g.c.g)\Rightarrow AN=AO(2)\end{cases}$

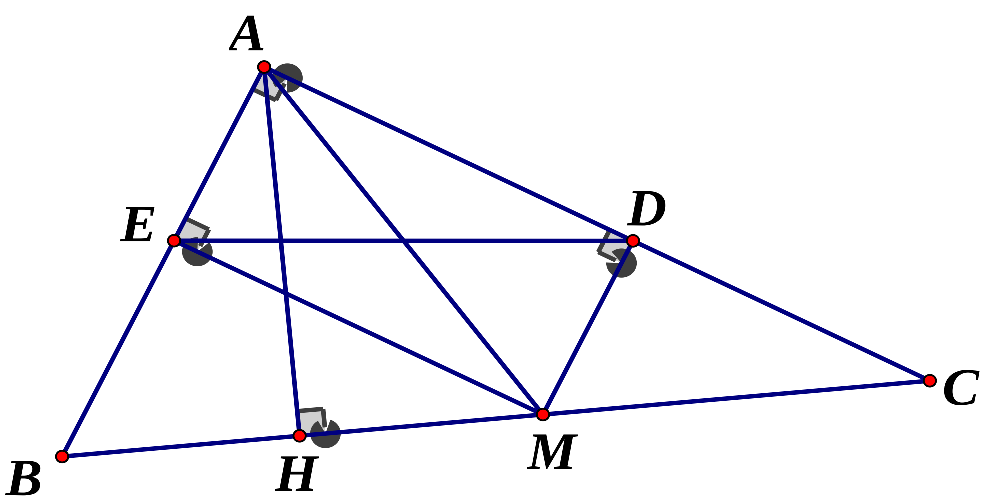
Từ (1) và (2) suy ra $AM=AN$

b) $\Delta AOM=\Delta ON(c.g.c)\Rightarrow OM=ON(3)$

$\Delta AOM=\Delta AMN(c.g.c)\Rightarrow OM=NM(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $OM=ON=NM\Rightarrow \Delta MON$ là tam giác đều

2.




$DE=AM\geq AH$ (AH là đường cao của $\Delta ABC$)

Vậy $DE$ nhỏ nhất khi AM nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ trùng với H

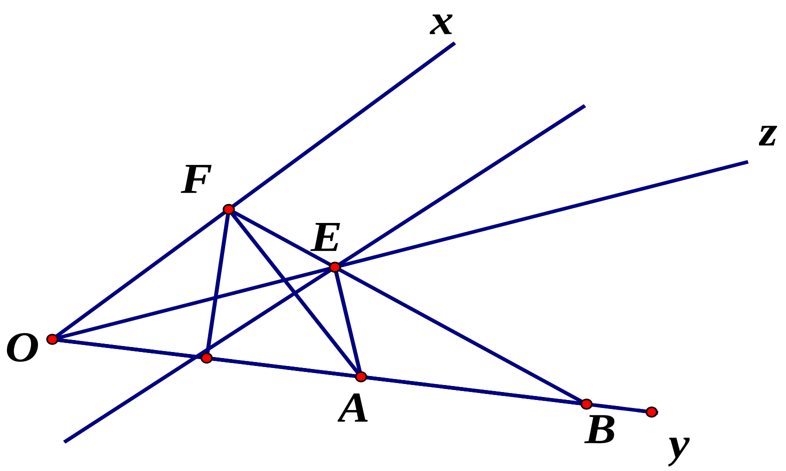
**Câu 9.**

Cho góc nhọn $xOy$ và tia phân giác $Ot$. Trên tia $Oy$ lấy điểm $A$. Đường trung trực của $OA$ cắt tia $Ox$ tại F. Trên tia $Ay$ lấy điểm $B$ sao cho $AB = AF$. $BF$ cắt $Ot$ tại E.

c) Chứng minh $E$ thuộc đường trung trực của $FA$

d) So sánh $EF$ và $EB$

**Lời giải**




c) $F$ thuộc đường trung trực của $FA \Rightarrow FO = FA \Rightarrow \Delta OFA$ cân tại F

$\Rightarrow \widehat{FOA} = \widehat{FAO} = 2.\widehat{EOB} = 2.\widehat{FOE}$

$AF = AB \Rightarrow \Delta FAB$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{ABF} \Rightarrow \widehat{FAO} = 2\widehat{FBA}$

Vậy $\widehat{EOB} = \widehat{EBO} \Rightarrow OE = EB$

$\Delta OFE = \Delta BAE\left(OF = AB, OE = EB, \widehat{FOE} = \widehat{EBO}\right)$

$\Rightarrow EF = EA \Rightarrow E$ thuộc đường trung trực của $FA$.

d) $\widehat{FOA} \le 90^0 \Rightarrow \widehat{FOE} < 45^0$

$\Delta OFE$ có $\widehat{OFE} = 180^0 - 3\widehat{FOE} = 3\left(60^0 - \widehat{FOE}\right)$

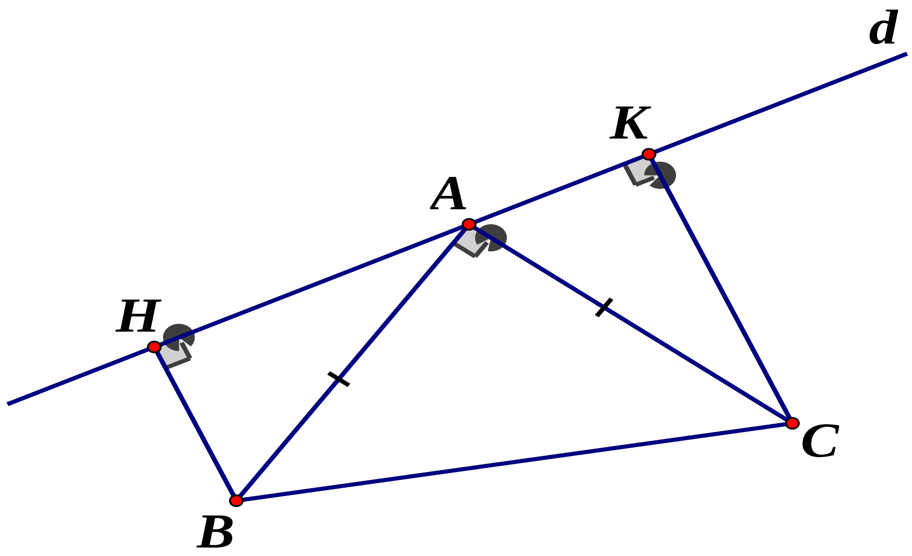
$> 3\left(60^0 - 45^0\right) = 45^0 > \widehat{FOE}$

**Câu 10.** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{A} = 90^0, AB = AC$. Qua $A$ vẽ đường thẳng $d$ sao cho B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng $d$. Kẻ $BH$ và $CK$ vuông góc với $d$. Chứng minh rằng:

$a) AH = CK$

$b) HK = BH + CK$

**Lời giải**




a) Xét $\Delta AHK$ và $\Delta CKH$ có: $\widehat{H}=\widehat{K}=90^0; AB=AC(gt); \widehat{HAB}=\widehat{KCA}$(cùng phụ với $\widehat{KAC}$) $\Rightarrow \Delta AHK=\Delta CKA(g.c.g) \Rightarrow AH=CK$ (cặp cạnh tương ứng)

b) Từ câu $a)\Delta AHK=\Delta CKA \Rightarrow BH=AK$ (cặp cạnh tương ứng)

Vậy $KH=AH+AK=BH+CK$

**Bài 11.** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{B}<90^0$ và $\widehat{B}=2\widehat{C}$. Kẻ đường cao $AH$. Trên tia đối của tia $BA$ lấy điểm E sao cho $BE=BH$. Đường thẳng $HE$ cắt $AC$ tại D

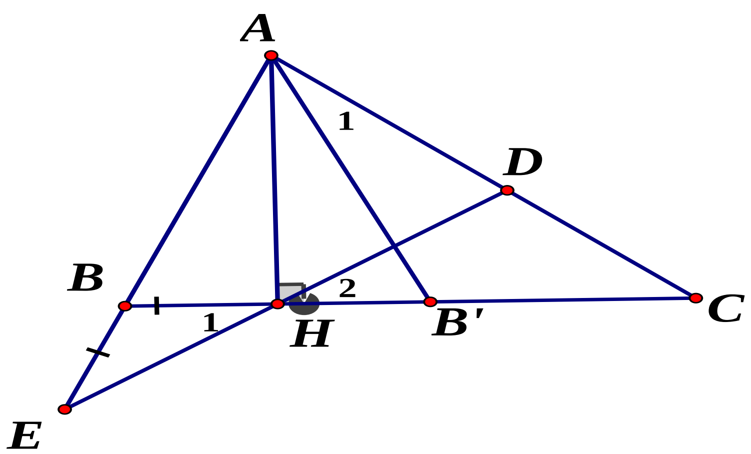
a) Chứng minh $\widehat{BEH}=\widehat{ACB}$

b) Chứng minh $DH=DC=DA$

c) Lấy $B'$ sao cho $H$ là trung điểm của $BB'$. Chứng minh tam giác $AB'C$ cân

d) Chứng minh $AE=HC$

**Lời giải**




a) $\Delta BEH$ cân tại B nên $\widehat{E}=\widehat{H_1}$; $\widehat{ABC}=\widehat{E}+\widehat{H_1}=2\widehat{E}$;

$\widehat{ABC} = 2\widehat{C} \Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{ACB}$

b) Chứng tỏ được $\Delta DHC$ cân tại D nên $DC = DH$

$\Delta DAH$ có: $\widehat{DAH} = 90^0 - \widehat{C}; \widehat{DHA} = 90^0 - \widehat{H_2} = 90^0 - \widehat{C}$

$\Rightarrow \Delta DAH$ cân tại $D$ nên $DA = DH$

c) $\Delta ABB'$ cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{B'} = 2\widehat{C}$

$\widehat{B'} = \widehat{A_1} + \widehat{C}$ nên $2\widehat{C} = \widehat{A_1} + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A_1} \Rightarrow \Delta AB'C$ cân tại $B'$

d) $AB = AB' = CB'; BE = BH = B'H$

Có: $AE = AB + BE; \quad HC = CB' + B'H \Rightarrow AE = HC$

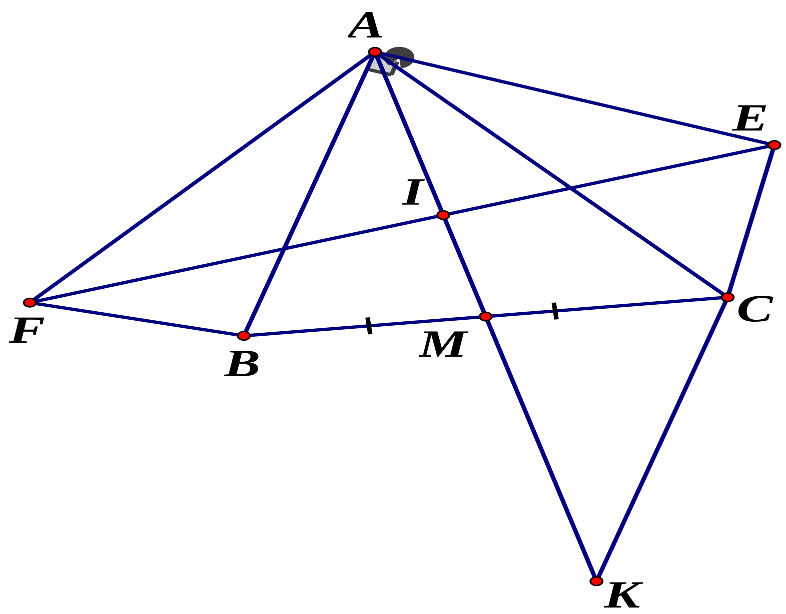
**Câu 12.** Cho tam giác $ABC$, trung tuyến $AM$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng $AB$ dựng đoạn $AE$ vuông góc với $AB$ và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng $AC$ dựng đoạn $AF$ vuông góc với $AC$ và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

$a) FB = EC$

$b) EF = 2AM$

$c) AM \perp EF$

**Lời giải**




a) Chứng minh $\Delta ABF = \Delta AEC(cgc) \Rightarrow FB = EC$

b) Trên tia đối của tia $MA$ lấy K sao cho $AK = 2AM$.

Ta có: $\Delta ABM = \Delta KCM \Rightarrow CK // AB$

$\Rightarrow \widehat{ACK} + \widehat{CAB} = \widehat{EAF} + \widehat{CAB} = 180^0 \Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{EAF}$

$\Delta EAF$ và $\Delta KCA$ có $AE = AB = CK; AF = AC(gt); \widehat{ACK} = \widehat{EAF}$

$\Rightarrow \Delta EAF = \Delta KCA(cgc) \Rightarrow EF = AK = 2AM$

c) Từ $\Delta EAF = \Delta KCA$

$\Rightarrow \widehat{CAK} = \widehat{AFE} \Rightarrow \widehat{AFE} + \widehat{FAK} = \widehat{CAK} + \widehat{FAK} = 90^0$

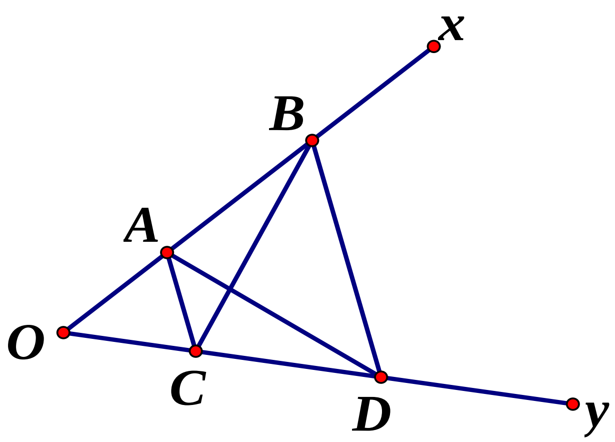
$\Rightarrow AK \perp EF$

**Câu 13.** Cho góc $\widehat{xOy}$. Trên $Ox$ lấy hai điểm $A$ và B, trên $Oy$ lấy hai điểm $C$ và D sao cho $OA = OC, AB = CD.$ Chứng minh

a) $\Delta ABC = \Delta ACD$

b) $\Delta ABD = \Delta BCD$

**Lời giải**




a) Xét $\Delta OAD$ và $\Delta OCB$ có: $\widehat{O}$ chung;

$OA = OC(gt); OB = OD \Rightarrow \Delta OAD = \Delta OCB(c.g.c) \Rightarrow AD = BC$

Xét $\Delta ABC$ và $\Delta ACD$ có: $AB = CD(gt); AC$ chung; $AD = BC \Rightarrow \Delta ABC = \Delta ACD$

b) Xét $\Delta ABD$ và $\Delta BCD$ có: $AB = CD(gt); BD$ chung; $AD = BC \Rightarrow \Delta ABD = \Delta BCD$

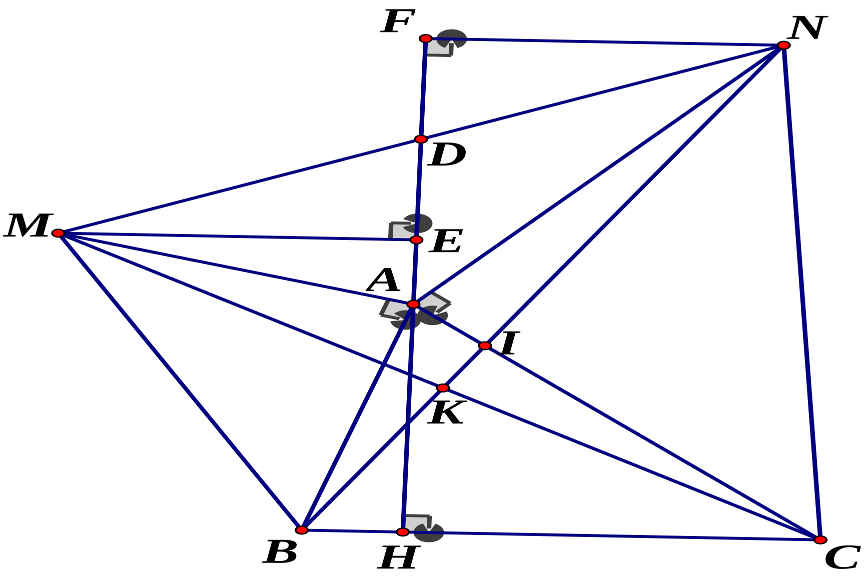
**Câu 14.** Cho tam giác $ABC$ có góc $A$ nhỏ hơn $90^0$. Vẽ ra ngoài tam giác $ABC$ các tam giác vuông cân tại $A$ là $\Delta ABM$ và $\Delta ACN$

a) Chứng minh rằng: $\Delta AMC = \Delta ABN$

b) Chứng minh: $BN \perp CM$

c) Kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$. Chứng minh $AH$ đi qua trung điểm của $MN$

**Lời giải**




a) Xét $\Delta AMC$ và $\Delta ABN$ có: $AM = AB(\Delta AMB$ vuông cân)

$AC = AN(\Delta ACN$ vuông cân)

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{NAC}\left(=90^0 + \widehat{BAC}\right) \Rightarrow \Delta AMC = \Delta ABN(c.g.c)$

b) Gọi $I$ là giao điểm của $BN, AC, K$ là giao điểm của $BN, MC$

Xét $\Delta KIC$ và $\Delta AIN$ có: $\widehat{ANI} = \widehat{KCI}$ ($\Delta AMC = \Delta ABN$)

$\widehat{AIN} = \widehat{KIC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{IKC} = \widehat{NAI} = 90^0$, do đó: $MC \perp BN$

c) Kẻ $ME \perp AH$ tại E, $NF \perp AH$ tại F. Gọi $D$ là giao điểm của $MN$ và AH

Ta có: $\widehat{BAH} + \widehat{MAE} = 90^0\left(\widehat{MAB} = 90^0\right)$

Lại có: $\widehat{MAE} + \widehat{AME} = 90^0$ nên $\widehat{AME} = \widehat{BAH}$

Xét $\Delta MAE$ và $\Delta ABH$ vuông tại E và H ta có:

$\widehat{AME} = \widehat{BAH}; MA = AB \Rightarrow \Delta MAE = \Delta ABH(ch-gn) \Rightarrow ME = AH$

Chứng minh tương tự ta có $\Delta AFN = \Delta CHA \Rightarrow FN = AH$

Xét $\Delta MED$ và $\Delta NFD$ vuông tại $E, F$ có:

$ME = NF(= AH), \widehat{EMD} = \widehat{FND}$ (cùng phụ với $\widehat{MDE}$ và $\widehat{FDN}$ mà $\widehat{MDE} = \widehat{FDN}$)

$\Rightarrow \Delta MED = \Delta NFD \Rightarrow BD = ND$

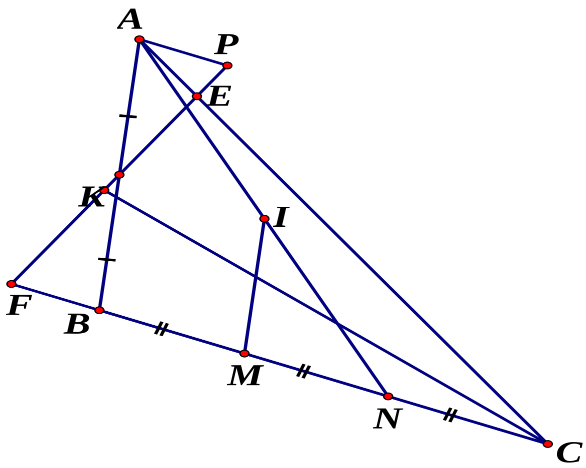
Vậy $AH$ đi qua trung điểm của $MN$

**Câu 15.** Cho tam giác $ABC(CA < CB)$, trên $BC$ lấy các điểm $M$ và $N$ sao cho $BM = MN = NC$. Qua điểm $M$ kẻ đường thẳng song song với $AB$ cắt AN tại I

a) Chứng minh $I$ là trung điểm của $AN$

b) Qua K là trung điểm của $AB$ kẻ đường thẳng vuông góc với đường phân giác góc $\widehat{ACB}$ cắt đường thẳng $AC$ tại E, đường thẳng BC tại F. Chứng minh $AE = BF$

**Lời giải**




a) Từ I kẻ đường thẳng //BC cắt AB tại H. Nối MH

Ta có: $\Delta BHM = \Delta IMH$ vì: $\widehat{BHM} = \widehat{IMH}; \widehat{BMH} = \widehat{IHM}(slt); HM....chung$

$\Rightarrow BM = IH = MN$

$\Delta AHI = \Delta IMN$ vì: $IH = MN(cmt); \widehat{AHI} = \widehat{IMN}\left(= \widehat{ABC}\right); \widehat{AIH} = \widehat{INM}$ (đồng vị)

$\Rightarrow AI = IN(dfcm)$

b) Từ A kẻ đường thẳng song song với $BC$ cắt $EF$ tại P. $\Delta PKA = \Delta FKB$ vì:

$\widehat{PKA} = \widehat{FKB}$(đối đỉnh); $\widehat{APK} = \widehat{BFK}$ (so le trong); $AK = KB \Rightarrow AP = BF(1)$

$\widehat{EPA} = \widehat{KFC}$ (đồng vị); $\widehat{CEF} = \widehat{KFC}$ ($\Delta CFE$ cân)

$\Rightarrow \widehat{EPA} = \widehat{CEF} \Rightarrow \Delta APE$ cân $\Rightarrow AP = AK\left(2\right)$

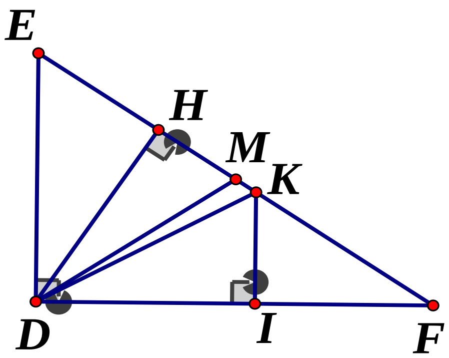
Từ (1) và (2) suy ra $AE = BF(dfcm)$

**Câu 16.** Cho $\Delta DEF$ vuông tại $D$ và $DF > DE$, kẻ DH vuông góc với $EF$ (H thuộc cạnh $EF$). Gọi $M$ là trung điểm của $EF$.

a) Chứng minh $\widehat{MDH} = \widehat{E} - \widehat{F}$

b) Chứng minh : $EF - DE > DF - DH$

**Lời giải**




a) Vì $M$ là trung điểm của $EF$ suy ra $MD = ME = MF \Rightarrow \Delta MDE$ cân tại $M$

$\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{MDE}$, mà $\widehat{HDE} = \widehat{F}$ cùng phụ với $\widehat{E}$,

Ta có: $\widehat{MDH} = \widehat{MDE} - \widehat{HDE}$, vậy $\widehat{MDH} = \widehat{E} - \widehat{F}$

b) Trên cạnh $EF$ lấy $K$ sao cho $EK = ED$, trên cạnh $DF$ lấy I sao cho $DI = DH$

Ta có: $EF - DE = EF - EK = KF$; $\quad DF - DH = DF - DI = IF$

Ta cần chứng minh $KF > IF$

$EK = ED \Rightarrow \Delta DEK$ cân $\Rightarrow \widehat{EDK} = \widehat{EKD}$

$\widehat{EDK} + \widehat{KDI} = \widehat{EKD} + \widehat{HDK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{KDI} = \widehat{HDK}$

$\Delta DHK = \Delta DIK (c.g.c) \Rightarrow \widehat{KID} = \widehat{DHK} = 90^0$

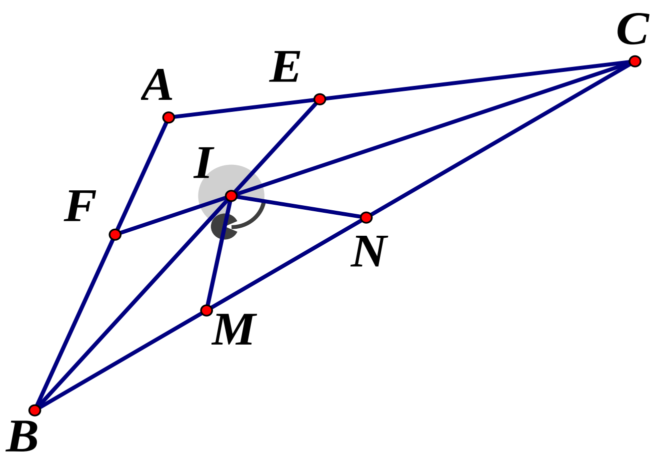
Trong $\Delta KIF$ vuông tại $I \Rightarrow KF > FI$ (đpcm)

**Câu 17.** Cho $\Delta ABC$ có $\widehat{A} = 120^0$. Các tia phân giác $BE, CF$ của $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ cắt nhau tại I ($E, F$ lần lượt thuộc các cạnh $AC, AB$). Trên cạnh $BC$ lấy hai điểm $M, N$ sao cho $\widehat{BIM} = \widehat{CIN} = 30^0$

a) Tính số đo của $\widehat{MIN}$

b) Chứng minh $CE + BF < BC$

**ĐÁP ÁN**



a) Ta có: $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=180^0-\widehat{A}=60^0\Rightarrow\frac{1}{2}\widehat{B}+\frac{1}{2}\widehat{C}=30^0$

$\Rightarrow\widehat{BIC}=150^0$ mà $\widehat{BIM}=\widehat{CIN}=30^0\Rightarrow\widehat{MIN}=90^0$

b) $\widehat{BIC}=150^0\Rightarrow\widehat{FIB}=\widehat{EIC}=30^0$

Suy ra $\Delta BFI=\Delta BMI(g.c.g)\Rightarrow BF=BM$

$\Delta CNI=\Delta CEI(g.c.g)\Rightarrow CN=CE$

Do đó $CE+BF=BM+CN<BM+MN+NC=BC$

Vậy $CE+BF<BC$

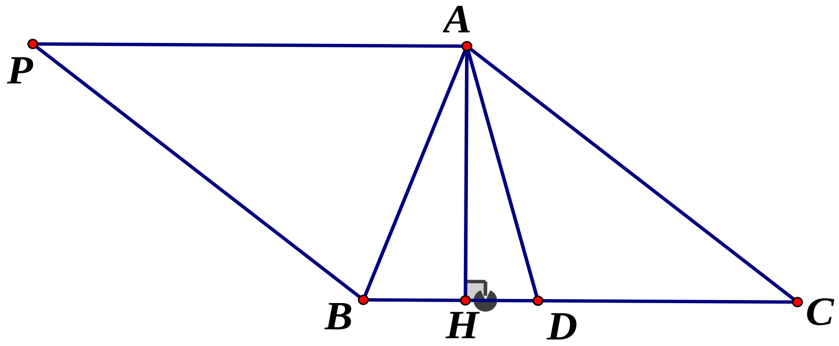
**Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{B}-\widehat{C}=\alpha$, tia phân giác $\widehat{A}$ cắt $BC$ tại D

a) Tính số đo $\widehat{ADC}$ và $\widehat{ADB}$

b) Vẽ $AH\perp BC\left(H\in BC\right)$, tính số đo $\widehat{HAD}$

c) Trên nửa mặt phẳng bờ $AB$ không chứa điểm C vẽ tam giác $ABP$ sao cho $AP=BC; PB=AC$. Chứng minh rằng $AC$ song song với $BP$ và $AH\perp AP$

**Lời giải**




a) Ta có: $\widehat{ADC}-\widehat{ADB}=\widehat{B}+\widehat{BAD}-\left(\widehat{C}+\widehat{CAD}\right)=\widehat{B}-\widehat{C}=\alpha$

Mặt khác: $\widehat{ADC}+\widehat{ADB}=180^0$ nên $\widehat{ADC}=90^0+\frac{\alpha}{2};\widehat{ADB}=90^0-\frac{\alpha}{2}$

b) Trong tam giác $HAD$ có: $\widehat{HAD}=90^0-\widehat{ADH}=\frac{\alpha}{2}$

c) $\Delta ABC=\Delta BAP(c.c.c)\Rightarrow\widehat{ABC}=\widehat{BAP}$ nên $AP//BC$

Mà $AH\perp BC\Rightarrow AH\perp AP$

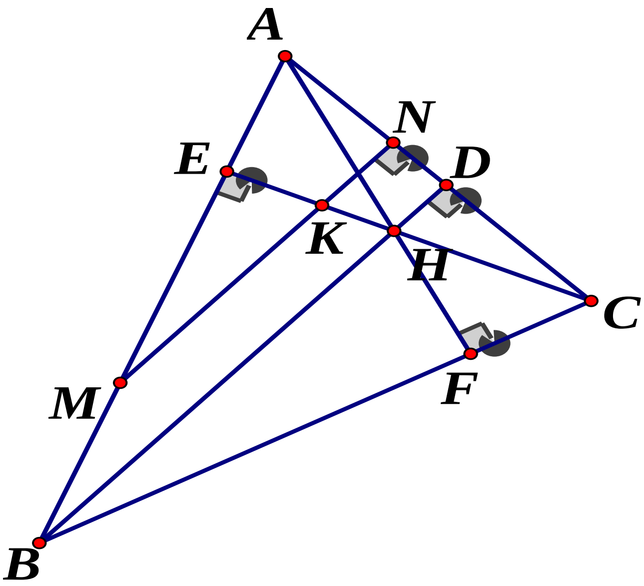
Tương tự $\widehat{ABP}=\widehat{BAC}$ nên $BP//AC$

**Câu 19.** Cho tam giác nhọn $ABC$ có $AB>AC$, ba đường cao $BD,CE$ và AF cắt nhau tại H. Lấy điểm $M$ trên cạnh AB sao cho $AM=AC$. Gọi N là hình chiếu của $M$ trên AC; K là giao điểm của $MN$ và CE

a) Chứng minh hai góc $KAH$ và $MCB$ bằng nhau

b) Chứng minh $AB + CE > AC + BD$

**Lời giải**




a) Nêu được $AK \perp MC \Rightarrow \widehat{KAH} = \widehat{MCB}$

b) Chứng minh $CE = MN$

Viết được $AB - AC > BD - CE \Rightarrow BM > BD - MN$

$MI \perp BD \Rightarrow BM > BI$

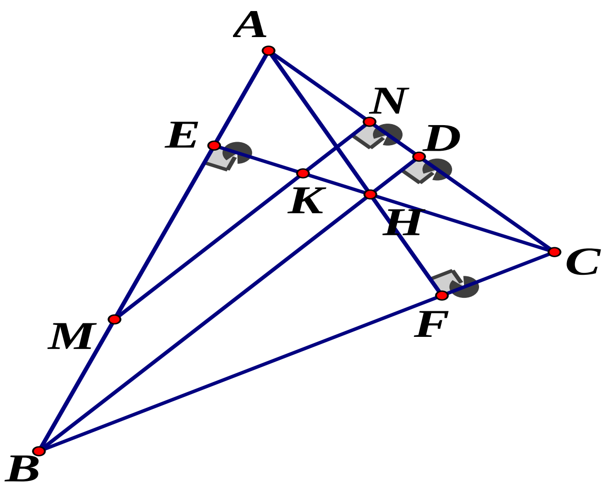
Vậy $AB + CE > AC + BD$

**Câu 20.** Cho tam giác nhọn $ABC$ có $AB > AC,$ ba đường cao $BD, CE$ và AF cắt nhau tại H. Lấy điểm $M$ trên cạnh AB sao cho $AM = AC.$ Gọi N là hình chiếu của $M$ trên AC; K là giao điểm của $MN$ và CE

c) Chứng minh hai góc $KAH$ và $MCB$ bằng nhau

d) Chứng minh $AB + CE > AC + BD$

**Lời giải**



c) Nêu được $AK \perp MC \Rightarrow \widehat{KAH} = \widehat{MCB}$

d) Chứng minh $CE = MN$

Viết được $AB - AC > BD - CE \Rightarrow BM > BD - MN$

$MI \perp BD \Rightarrow BM > BI$

Vậy $AB + CE > AC + BD$

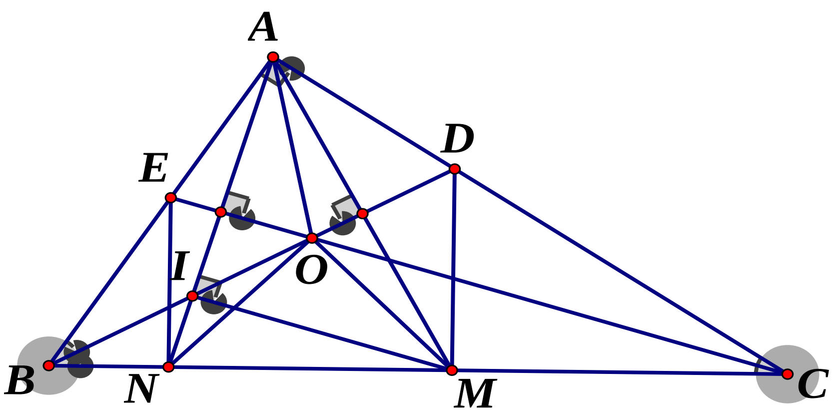
**Câu 21.** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{A} = 90^0$. Vẽ phân giác $BD$ và CE $(D \in AC, E \in AB)$ chúng cắt nhau tại O

a) Tính số đo góc $\widehat{BOC}$

b) Trên $BC$ lấy hai điểm $M$ và N sao cho $BM = BA, CN = CA$. Chứng minh $EN$ song song với $DM$

c) Gọi $I$ là giao điểm của $BD$ và $AN$. Chứng minh tam giác $AIM$ vuông cân

**Lời giải**




a) $\widehat{BOC} = \widehat{BAC} + \dfrac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = 90^0 + \dfrac{90^0}{2} = 90^0 + 45^0 = 135^0$

b) $\Delta ABM$ cân, nên phân giác $BD$ đồng thời là đường trung trực

$\Delta ACN$ cân, nên phân giác $CE$ đồng thời là đường trung trực.

Suy ra $DA = DM, EA = EN$

Dẫn tới $\Delta ABD = \Delta MBD, \Delta ACE = \Delta NCE (c.c.c)$

Suy ra $\widehat{DMB} = \widehat{DAB} = 90^0; \widehat{ENC} = \widehat{EAC} = 90^0$

Hay $EN \perp BC, DM \perp BC$. Do vậy $EN // DM$

c) Phân giác $BD$ và phân giác $CE$ cắt nhau tại O cho ta $AO$ là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{OAE} = 45^0$ (1)

$\Delta OAE = \Delta ONE (c.c.c) \Rightarrow \widehat{OAE} = \widehat{ONM} = 45^0$

Theo chứng minh câu b, ta thấy, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $AMN \Rightarrow OM = ON$ hay $\Delta OMN$ cân tại O(2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta OMN$ vuông cân tại O

Dễ chứng minh $\widehat{MON} = 2\widehat{MAI} \Rightarrow 2\widehat{MAI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MAI} = 45^0$

$\Delta AIM$ có $IA = IM$ (do I thuộc trung trực BD của AM) nên cân tại I.

Lại có $\widehat{MAI} = 45^0$.Vậy $\Delta AIM$ vuông cân tại $I$.

**Câu 22.** Cho tam giác cân $ABC, AB = AC$.Trên tia đối của các tia $BC, CB$ lấy theo thứ tự hai điểm $D$ và $E$ sao cho $BD = CE$.

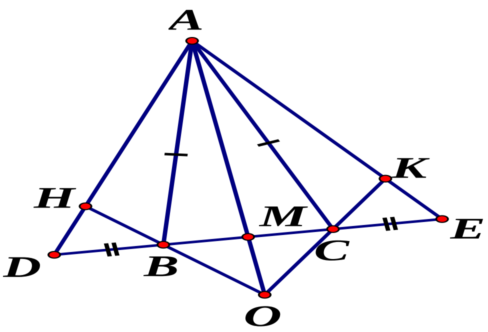
a) Chứng minh tam giác $ADE$ là tam giác cân

b) Gọi M là trung điểm của $BC$.Chứng minh $AM$ là tia phân giác của $\widehat{DAE}$

c) Từ B và C vẽ $BH, CK$ theo thứ tự vuông góc với $AD, AE$. Chứng minh $BH = CK$

d) Chứng minh 3 đường thẳng $AM, BH, CK$ gặp nhau tại 1 điểm.

**Lời giải**




a) $\Delta ABC$ cân nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE}$

Xét $\Delta ABD$ và $\Delta ACE$ có: $AB = AC(gt); \widehat{ABD} = \widehat{ACE}(cmt); DB = CE(gt)$

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACE(c.g.c) \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A

b) Xét $\Delta AMD$ và $\Delta AME$ có:

$MD = ME(DB = CE; MB = MC); AM$ chung; $AD = AE(cmt)$

$\Rightarrow \Delta AMD = \Delta AME(c.c.c) \Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MAE}$

Vậy $AM$ là tia phân giác của $\widehat{DAE}$

c) Vì $\Delta ADE$ cân tại A (cm câu a) nên $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$

Xét $\Delta BHD$ và $\Delta CKE$ có: $\widehat{BDH} = \widehat{CEK}(do...\widehat{ADE} = \widehat{AED}); DB = CE(gt)$

$\Rightarrow \Delta BHD = \Delta CKE(ch - gn) \Rightarrow BH = CK$

d) Gọi giao điểm của $BH$ và $CK$ là O

Xét $\Delta AHO$ và $\Delta AKO$ có: $OA$ cạnh chung;

$AH = AK(AD = AE, DH = KE(do \Delta BHD = \Delta CKE))$

$\Rightarrow \Delta AHO = \Delta AKO(ch - cgv)$

Do đó $\widehat{OAH} = \widehat{OAK}$ nên $AO$ là tia phân giác của $\widehat{KAH}$ hay $AO$ là tia phân giác của $\widehat{DAE}$, mặt khác theo câu b) $AM$ là tia phân giác của $\widehat{DAE}$

Do đó $AO \equiv AM$, suy ra ba đường thẳng $AM, BH, CK$ cắt nhau tại O.

**Câu 23**

1. Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax và By lần lượt vuông góc với AB tại A và B. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên tia Ax lấy điểm C và trên tia By lấy điểm D sao cho góc COD bằng $90^0$.

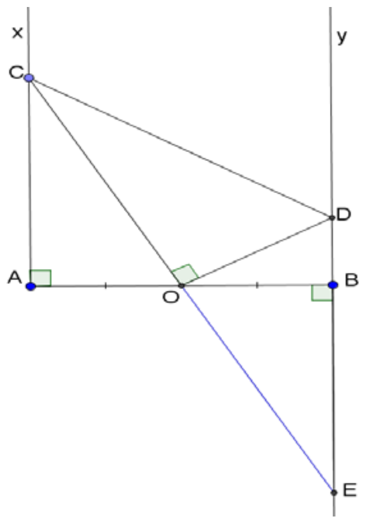
a) Chứng minh rằng: AC + BD = CD.

b) Chứng minh rằng: $AC.BD = \frac{AB^2}{4}$

2. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Chứng minh rằng:

HA + HB + HC < $\frac{2}{3}(AB + AC + BC)$

**Lời giải**




A, Vẽ tia CO cắt tia đối của tia By tại điểm E.

Chứng minh $\Delta AOC = \Delta BOE\left(g-c-g\right) \Rightarrow AC = BE; CO = EO$

Chứng minh $\Delta DOC = DOE\left(c-g-c\right) \Rightarrow CD = ED$

Mà $ED = EB + BD = AC + BD$.

Từ đó : $CD = AC + BD$ (đpcm)

B, Áp dụng định lí Pytago vào các tam giác vuông BOE và BOD ta có:

$$\begin{cases} OE^2 = OB^2 + EB^2 \\ OD^2 = OB^2 + DB^2 \end{cases} \Rightarrow OE^2 + OD^2 = 2OB^2 + EB^2 + DB^2$$

Mà $OE^2 + OD^2 = DE^2$; Nên

$$DE^2 = 2OB^2 + EB^2 + DB^2$$
$$= 2OB^2 + EB.\left(DE - BD\right) + DB.(DE - BE)$$
$$= 2OB^2 + EB.DE - EB.BD + DB.DE - DB.BE$$
$$= 2OB^2 + \left(EB.DE + DB.DE\right) - 2BD.BE$$
$$= 2OB^2 + DE.\left(EB + DB\right) - 2BD.BE$$
$$= 2OB^2 + DE^2 - 2BD.BE$$

Suy ra $2OB^2 - 2BD.BE = 0 \Rightarrow BD.BE = OB^2$

Mà $BE = AC; OB = \dfrac{AB}{2}$.

Vậy $AC.BD = \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{AB^2}{4}$ (đpcm)

2. Qua H kẻ đường thẳng // với AB cắt AC tại D, kẻ đường thẳng // với AC cắt AB tại E

Ta có $\Delta$AHD = $\Delta$HAE (g –c-g)

⇨ AD = HE; AE = HD

$\Delta$ AHD có HA< HD + AD nên HA < AE + AD (1)

Từ đó HE $\perp$ BH

$\Delta$HBE vuông nên HB < BE (2)

Tương tự ta có HC < DC (3)

Từ 1,2,3 HA + HB + HC < AB + AC (4)

Tương tự HA + HB + HC < AB + BC (5)

HA + HB + HC < BC + AC (6)

Từ đó suy ra HA + HB + HC < $\dfrac{2}{3}(AB + AC + BC)$ đpcm

**Câu 24.**

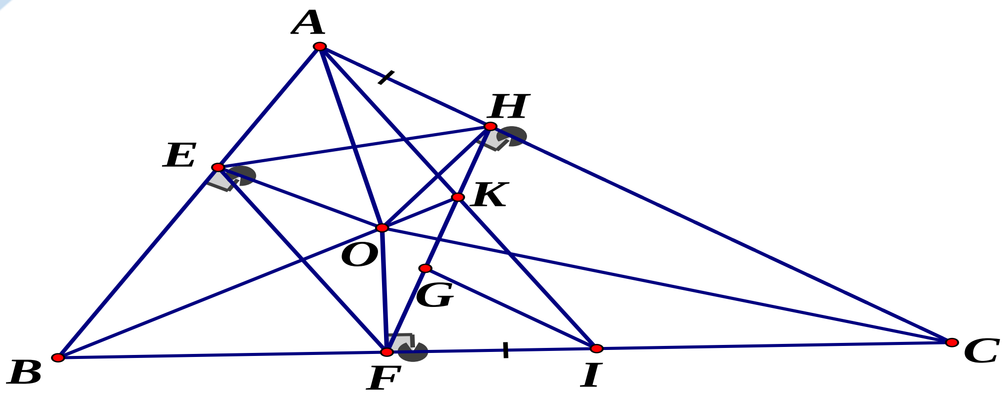
Cho $\Delta ABC$ có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc $A$ và góc $C$ cắt nhau tại O. Gọi $F$ là hình chiếu của $O$ trên BC; $H$ là hình chiếu của O trên $AC$. Lấy điểm $I$ trên đoạn $FC$ sao cho $FI = AH$. Gọi $K$ là giao điểm của $FH$ và $AI$.

a) Chứng minh $\Delta FCH$ cân

b) Chứng minh $AK = KI$

c) Chứng minh 3 điểm $B, O, K$ thẳng hàng.

**Lời giải**




a) Chứng minh

Ta có $\widehat{CHO} = \widehat{CFO} = 90^0$ ( vì $OH \perp AC, OF \perp BC$)

Xét $\Delta CHO$ vuông và $\Delta CFO$ vuông có: $OC$ chung; $\widehat{HCO} = \widehat{FCO}$($OC$ là phân giác $\widehat{C}$)

Vậy $\Delta CHO = \Delta CFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow CH = CF$ (hai cạnh tương ứng). Vậy $\Delta FCH$ cân tại C

b) Qua $I$ vẽ $IG // AC \left(G \in FH\right)$

Ta có $\Delta FCH$ cân tại C (cmt)$\Rightarrow \widehat{CHF} = \widehat{CFH}$ (1)

Mà $\widehat{CHF} = \widehat{FGI}$ (đồng vị, $IG // AC$)     (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CFH} = \widehat{FGI}$ hay $\widehat{IFG} = \widehat{IGF}$ , Vậy $\Delta IFG$ cân tại I

$\Rightarrow FI = GI$ , mặt khác : $FI = AH$ nên $GI = AH (= FI)$

Ta lại có : $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}; \widehat{HAK} = \widehat{GIK}$ (so le trong , $IG // AC$)

Xét $\Delta AHK$ và $\Delta IGK$ có: $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}(cmt); GI = AH(cmt); \widehat{HAK} = \widehat{GIK}(cmt)$

$\Rightarrow \Delta AHK = \Delta IGK(gcg) \Rightarrow AK = KI(dfcm)$

c) Vẽ $OE \perp AB$ tại E, Chứng minh được $BO$ là tia phân giác của $\widehat{ABC}$   (*)

Chứng minh được $AB = BI$

Chứng minh được: $\Delta ABK = \Delta IBC(c.c.c) \Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{IBK}$

Từ đó suy ra $BK$ là tia phân giác của $\widehat{ABC} \left(**\right)$

Từ (*) và (**) suy ra tia $BK, BO$ trùng nhau

Hay $B, O, K$ là ba điểm thẳng hàng.

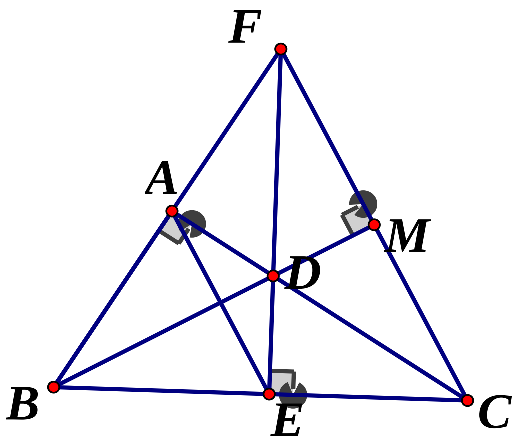
**Câu 25.** Cho tam giác $ABC$ vuông góc tại A. Phân giác trong của B cắt cạnh $AC$ tại điểm D. Từ D kẻ $DE$ vuông góc với $BC \left(E \in BC\right)$.Tia $ED$ và tia $BA$ cắt nhau tại $F$.

a) So sánh $DA$ và $DC$

b) Chứng minh $BD \perp FC$

c) Chứng minh $AE // FC$

**Lời giải**




a) Ta có $\Delta ABD = \Delta EDB$ vì có $AD$ chung ; $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ cho ta $DA = DE$ (1)

Trong tam giác vuông $EDC$ thì $DE < DC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DA < DC$

b) $\Delta ABD = \Delta EDB$ nên $AB = BE$ (hai cạnh tương ứng)

Hai tam giác $EFB$ và $ACB$ có $AB = BE$ và $\widehat{B}$ chung, suy ra $BF = BC$

$\Rightarrow \Delta FBC$ cân , đỉnh B

Mà $BM$ là phân giác của $\widehat{B}$ nên cũng là đường cao, suy ra $BM \perp FC(3)$ hay $BD \perp FC$

c) Ta dễ dàng thấy $BD \perp AE(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $AE / / FC$

**Câu 26.** Cho tam giác $ABC(AB > AC), M$ là trung điểm của $BC$. Đường thẳng đi qua $M$ vuông góc với tia phân giác của $\widehat{A}$ tại H cắt cạnh $AB, AC$ lần lượt tại $E$ và $F$

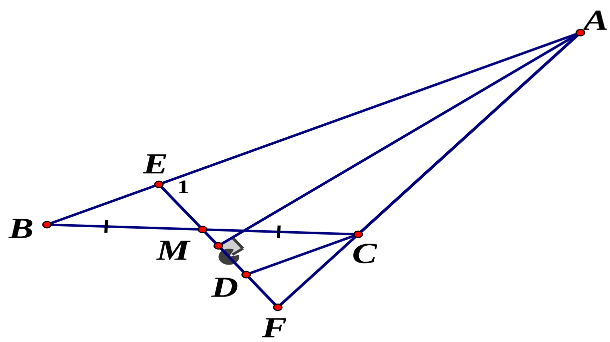
Chứng minh:

a) $2\widehat{BME} = \widehat{ACB} - \widehat{B}$

b) $\dfrac{FE^2}{4} + AH^2 = AE^2$

c) $BE = CF$

**Lời giải**



a) $\Delta AEH = \Delta AFH\,(cgc) \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{F}$

Xét $\Delta CMF$ có $\widehat{ACB}$ là góc ngoài suy ra $\widehat{CMF} = \widehat{ACB} - \widehat{F}$

$\Delta BME$ có $\widehat{E_1}$ là góc ngoài suy ra $\widehat{BME} = \widehat{E_1} - \widehat{B}$

Vậy $\widehat{CMF} + \widehat{BME} = (\widehat{ACB} - \widehat{F}) + \left(\widehat{E_1} - \widehat{B}\right)$

Hay $2\widehat{BME} = \widehat{ACB} - \widehat{B}(dfcm)$

b) Áp dụng định lý Pytago vào tam giác $AFH$

Ta có: $HF^2 + HA^2 = AF^2$ hay $\dfrac{FE^2}{4} + AH^2 = AE^2(dfcm)$

c) Chứng minh $\Delta AHE = \Delta AHF\,(g.c.g) \Rightarrow AE = AF; \widehat{E_1} = \widehat{F}$

Từ $C$ vẽ $CD // AB (D \in EF)$

Chứng minh được $\Delta BME = \Delta CMD(g.c.g) \Rightarrow BE = CD$ (1)

Và có $\widehat{E_1} = \widehat{CDF}$ (cặp góc đồng vị)

Do đó: $\widehat{CDF} = \widehat{F} \Rightarrow \Delta CDF$ cân $\Rightarrow CF = CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE = CF$

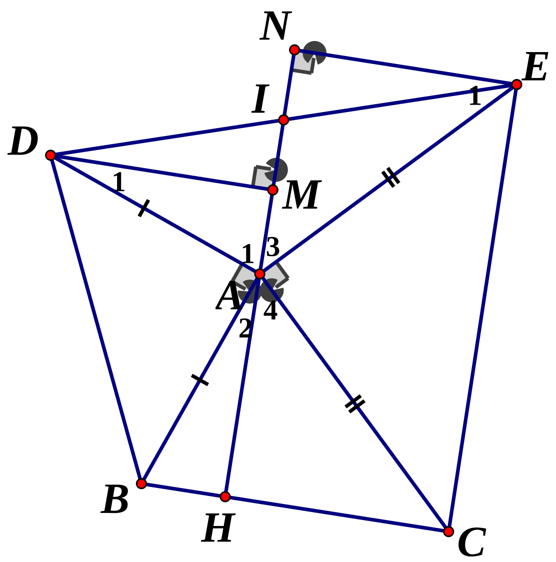
**Câu 27.**

Cho tam giác nhọn $ABC$. Vẽ về phía ngoài tam giác $ABC$ các tam giác vuông tại A: $\Delta ABD, \Delta ACE$ sao cho $AB = AD, AE = AC$. Kẻ $AH$ vuông góc với $BC$, $DM$ vuông góc với $AH$, $EN$ vuông góc với $AH$.

a) Chứng minh : $DM = AH$

b) Chứng minh $MN$ đi qua trung điểm của $DE$.

**Lời giải**



a) Xét $\Delta MAD$ và $\Delta HBA$ có: $\widehat{AMD}=\widehat{BHA}=90^0(gt)(1); AD=AB(gt)(2)$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{D_1}+\widehat{A_1}=90^0\\ \widehat{A_1}+\widehat{A_2}=90^0\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{D_1}=\widehat{A_2}(3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\Delta MAD=\Delta HBA(ch-gn)\Rightarrow DM=AH(4)$

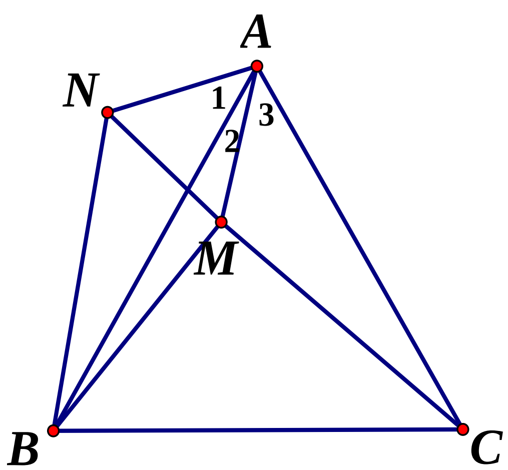
b) Chứng minh tương tự câu a $\Rightarrow EN=AH(5)$

Gọi giao điểm của $MN$ và $DE$ là I

Chứng minh được: $\Delta MID=\Delta NIE(cgv-gn)\Rightarrow ID=IE\Rightarrow I$ là trung điểm của $DE\Rightarrow MN$ đi qua trung điểm I của $DE$

**Câu 28.** Cho tam giác đều $ABC$.M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $MA:MB:MC=3:4:5$. Tính số đo góc $\widehat{AMB}$

**Lời giải**




Do $MA:MB:MC=3:4:5$

Đặt $\dfrac{MA}{3}=\dfrac{MB}{4}=\dfrac{MC}{5}=a\Rightarrow MA=3a, MB=4a, MC=5a$

Trên nửa mặt phẳng bờ $AC$ dựng tam giác đều $AMN$

$\Rightarrow AM=AN=MN=3a$ và $\widehat{AMN}=60^0$

Xét $\Delta ABN$ và $\Delta ACM$ có: $AB=AC(gt)(1); AN=AM=3a(2)$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=60^0\\ \widehat{A_2}+\widehat{A_3}=60^0\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{A_3}(3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \Delta ABN=\Delta ACM(c.g.c)\Rightarrow BN=CN=5a$

Xét $\Delta BMN$ có $BN^2=(5a)^2=25a^2$

$BM^2+MN^2=(4a)^2+(3a)^2=25a^2$

$\Rightarrow BN^2 = BM^2 + MN^2 \Rightarrow \Delta BMN$ vuông tại M (định lý Pytago đảo)

$\Rightarrow \widehat{NMB} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMN} + \widehat{NMB} = 90^0 + 60^0 = 150^0$

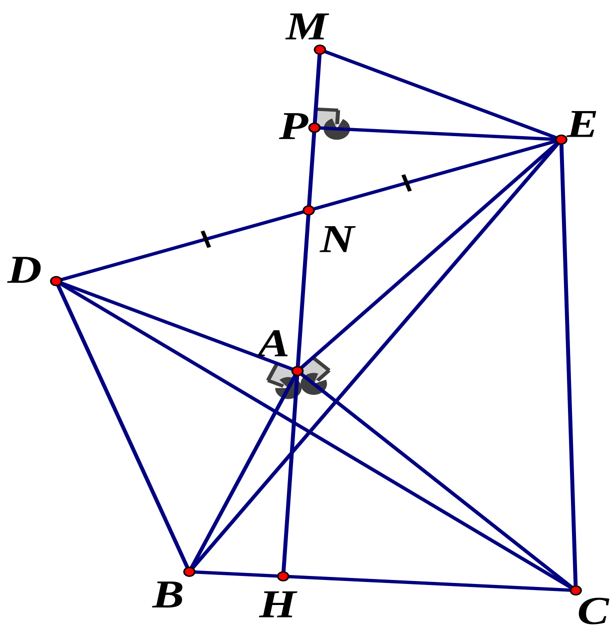
**Câu 29.** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{A} < 90^0$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng $AD$ vuông góc và bằng $AB$; $AE$ vuông góc và bằng $AC$.

a) Chứng minh: $DC = BE$ và $DC \perp BE$

b) Gọi $N$ là trung điểm của $DE$. Trên tia đối của tia $NA$ lấy $M$ sao cho $NA = NM$. Chứng minh $AB = ME, \Delta ABC = \Delta EMA$

c) Chứng minh : $MA \perp BC$

**Lời giải**




a) Xét $\Delta ADC$ và $\Delta BAF$ ta có:

$$DA = BC(gt); AE = AC(gt); \widehat{DAC} = \widehat{BAE}\left(= 90^0 + \widehat{BAC}\right)$$

$\Rightarrow \Delta DAC = \Delta BAE(c.g.c) \Rightarrow DC = BE$

Xét $\Delta AIE$ và $\Delta TIC$ có: $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2$ (đối đỉnh); $\widehat{E}_1 = \widehat{C}_1 \left(\Delta DAC = \Delta BAE\right)$

$\Rightarrow \widehat{EAI} = \widehat{CTI} \Rightarrow \widehat{CTI} = 90^0 \Rightarrow DC \perp BE$

b) Ta có: $\Delta MNE = \Delta AND(c.g.c) \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{MEN}, AD = ME$ mà

$AD = AB(gt) \Rightarrow AB = ME(dpcm)(1)$

Vì $\widehat{D}_1 = \widehat{MEN} \Rightarrow DA//ME \Rightarrow \widehat{DAE} + \widehat{AEM} = 180^0$ (trong cùng phía)

Mà $\widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{AEM}$ (2)

Ta lại có: $AC = AE(gt)(3)$. Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow \Delta ABC = \Delta EMA(dfcm)$

c) Kéo dài $MA$ cắt $BC$ tại H. Từ $E$ hạ $EP \perp MH$

Xét $\Delta AHC$ và $\Delta EPA$ có:

$\widehat{CAH} = \widehat{AEP}$ (cùng phụ với $\widehat{PAE}$); $AE = CA(gt)$; $\widehat{PAE} = \widehat{HCA}$ (do $\Delta ABC = \Delta EMA$)

$\Rightarrow \Delta AHC = \Delta EPA \Rightarrow \widehat{EPA} = \widehat{AHC} \Rightarrow \widehat{AHC} = 90^0 \Rightarrow MA \perp BC(dfcm)$

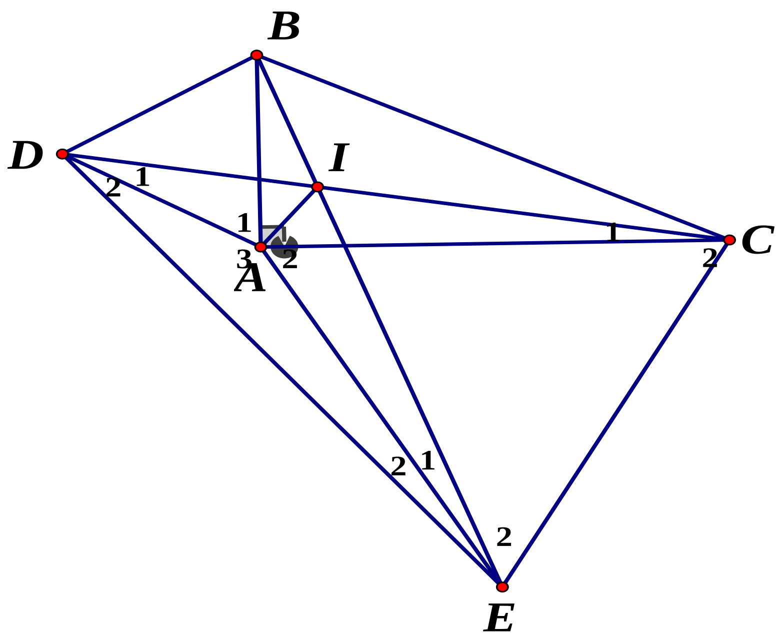
**Câu 30.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Vẽ về phía ngoài tam giác $ABC$ các tam giác đều $ABD$ và $ACE$. Gọi $I$ là giao điểm của $BE$ và $CD$. Chứng minh rằng:

$a) BE = CD$

b) $\Delta BDE$ là tam giác cân

$c) \widehat{EIC} = 60^0$ và $IA$ là tia phân giác của $\widehat{DIE}$

**Lời giải**




a) Ta có: $\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{A_1} + 90^0 = 60^0 + 90^0 = 150^0 \\ \widehat{BAE} = \widehat{A_2} + 90^0 = 60^0 + 90^0 = 150^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$

Xét $\Delta DAC$ và $\Delta BAE$ có: $DA = BA(gt)$; $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}(cmt)$; $AC = AE(gt)$

$\Rightarrow \Delta DAC = \Delta BAE(c.g.c) \Rightarrow BE = CD$ (hai cạnh tương ứng)

b) Ta có : $\widehat{A_3} + \widehat{A_1} + \widehat{BAC} + \widehat{A_2} = 360^0$

$\Leftrightarrow \widehat{A_3} + 60^0 + 90^0 + 60^0 = 360^0$

$\Leftrightarrow \widehat{A_3} = 150^0 = \widehat{DAC}$

Xét $\Delta DAE$ và $\Delta BAE$ có: $DA = BA(gt)$; $\widehat{A_3} = \widehat{DAC}(cmt)$; $AE$ chung

$\Rightarrow \Delta DAE = \Delta BAE(c.g.c) \Rightarrow DE = BE \Rightarrow \Delta BDE$ cân tại $E$

c) Ta có: $\Delta DAC = \Delta BAE$ ($cm$ câu a) $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ (hai góc tương ứng)

Lại có: $\widehat{I_1} + \widehat{E_2} + \widehat{ICE} = 180^0$ (tổng 3 góc trong $\Delta ICE$)

$\Leftrightarrow \widehat{I_1} + \left(\widehat{AEC} - \widehat{E_1}\right) + \left(\widehat{C_1} + \widehat{C_2}\right) = 180^0$

$\Leftrightarrow \widehat{I_1} + 60^0 - \widehat{E_1} + \widehat{C_1} + 60^0 = 180^0$

$\Leftrightarrow \widehat{I_1} + 120^0 = 180^0 (\widehat{E_1} = \widehat{C_1})$

$\Leftrightarrow \widehat{I_1} = 60^0$

Vì $\Delta DAE = \Delta BAE$ ($cm$ câu b) $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow EA$ là tia phân giác của $\widehat{DEI}$ (1)

Vì $\begin{cases} \Delta DAC = \Delta BAE \\ \Delta DAE = \Delta BAE \end{cases} \Rightarrow \Delta DAC = \Delta DAE \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow DA$ là tia phân giác của $\widehat{EDC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A$ là giao điểm của 2 tia phân giác trong $\Delta DIE \Rightarrow IA$ là đường phân giác thứ 3 trong $\Delta DIE \Rightarrow IA$ là tia phân giác của $\widehat{DIE}$

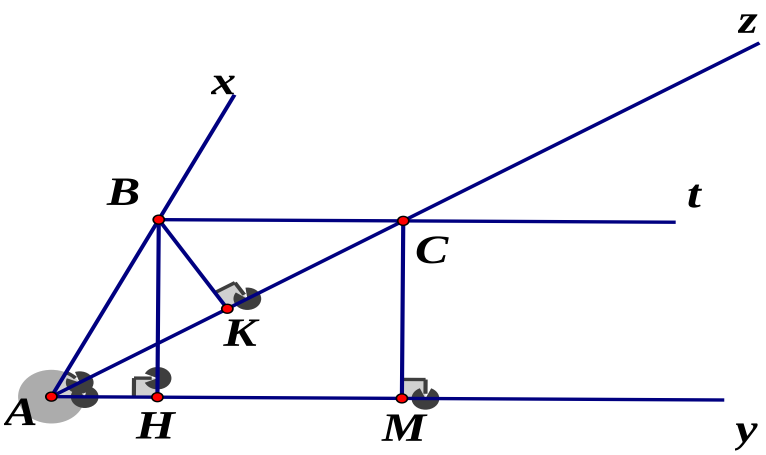
**Câu 31.** Cho $\widehat{xAy} = 60^0$ có tia phân giác $Az$. Từ điểm $B$ trên $Ax$ kẻ $BH$ vuông góc với $Ay$ tại $H$, kẻ $BK$ vuông góc với $Az$ và $Bt$ song song với $Ay$, $Bt$ cắt $Az$ tại C. Từ C kẻ $CM$ vuông góc với $Ay$ tại M. Chứng minh:

d) $K$ là trung điểm của $AC$

e) $\Delta KMC$ là tam giác đều

f) Cho $BK = 2cm$, tính các cạnh của $\Delta AKM$

**Lời giải**



d) $\Delta ABC$ cân tại B do $\widehat{CAB} = \widehat{ACB}\left(= \widehat{MAC}\right)$ và $BK$ là đường cao $\Rightarrow BK$ là đường trung tuyến $\Rightarrow K$ là trung điểm của $AC$

e) $\Delta ABH = \Delta BAK$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AK$ (hai cạnh tương ứng) mà $AK = \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow BH = \dfrac{1}{2}AC$

Ta có: $BH = CM$ (tính chất đoạn chắn) mà $CK = BH = \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \Delta MKC$ là tam giác cân (1)

Mặt khác: $\widehat{MCB} = 90^0$ và $\widehat{ACB} = 30^0 \Rightarrow \widehat{MCK} = 60^0 (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MKC$ là tam giác đều

f) Vì $\Delta ABK$ vuông tại K mà $\widehat{KAB} = 30^0 \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4cm$

Vì $\Delta ABK$ vuông tại K nên theo pytago ta có: $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$

Mà $KC = \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$

$\Delta KCM$ đều $\Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$

Theo phần b, $AB = BC = 4, AH = BK = 2, HM = BC$ ($HBCM$ là hình chữ nhật)

$\Rightarrow AM = AH + HM = 6$

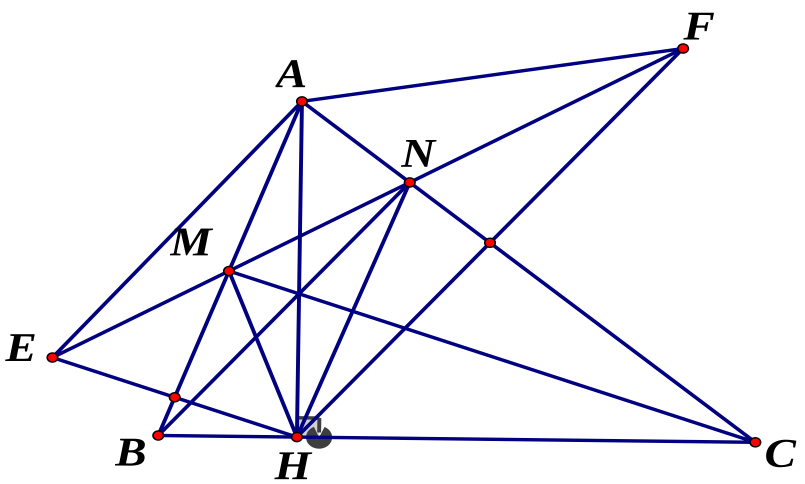
**Câu 32.** Cho tam giác $ABC\left(\widehat{BAC} < 90^0\right)$, đường cao $AH$. Gọi $E, F$ lần lượt là điểm đối xứng của $H$ qua $AB, AC$, đường thẳng $EF$ cắt $AB, AC$ lần lượt tại $M$ và $N$. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$

b) $HA$ là phân giác của $\widehat{MHN}$

c) Chứng minh $CM // EH, BN. // FH$

**Lời giải**



a) Vì $AB$ là trung trực của $EH$ nên ta có: $AE = AH$ (1)

Vì $AC$ là trung trực của $HF$ nên ta có: $AH = AF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE = AF$

b) Vì $M \in AB$ nên $MB$ là phân giác $\widehat{EMH} \Rightarrow MB$ là phân giác ngoài góc $M$ của tam giác $MNH$

Vì $N \in AC$ nên $NC$ là phân giác $\widehat{FNH} \Rightarrow NC$ là phân giác ngoài $\widehat{N}$ của tam giác $MNH$

Do $MB, NC$ cắt nhau tại $A$ nên $HA$ là phân giác trong góc $H$ của tam giác $HMN$ hay $HA$ là phân giác của $\widehat{MHN}$.

c) Ta có: $AH \perp BC(gt)$ mà $HM$ là phân giác $\widehat{MHN} \Rightarrow HB$ là phân giác ngoài của $\widehat{H}$ của tam giác $HMN$

$MB$ là phân giác ngoài của $\widehat{M}$ của tam giác $\widehat{HMN}(cmt) \Rightarrow NB$ là phân giác trong góc N của tam giác $HMN \Rightarrow BN \perp AC$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau) $\Rightarrow BN // HF$ (cùng vuông góc với $AC$)

Chứng minh tương tự ta có: $EH // CM$

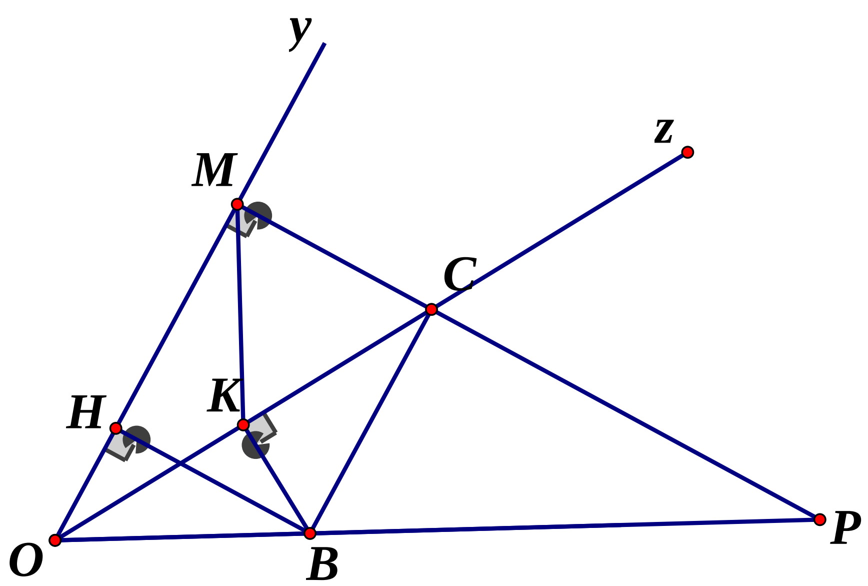
**Câu 33.** Cho Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy} = 60^0$. Từ một điểm B trên tia Ox vẽ đường thẳng song song với tia Oy cắt Oz tại điểm C. Kẻ $BH \perp Oy; CM \perp Oy; BK \perp Oz$ $(H, M \in Oy; K \in Oz)$. MC cắt Ox tại P. Chứng minh

a) K là trung điểm của OC

b) $\Delta KMC$ là tam giác đều

c) $OP > OC$

**Lời giải**



a) $\Delta ABC$ có $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy}$), $\widehat{O_1} = \widehat{C_1}$ (Oy // BC, so le trong)

$\Rightarrow \widehat{O_2} = \widehat{C_1} \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại B $\Rightarrow BO = BC$, mà $BK \perp OC$ tại K $\Rightarrow KC = KO$ (hai đường xiên bằng nhau $\Leftrightarrow$ hai hình chiếu bằng nhau). Hay K là trung điểm OC (đpcm)

b) Học sinh lập luận để chứng minh: $\Delta KMC$ cân

Mặt khác $\Delta OMC$ có $\widehat{M} = 90^0; \widehat{O} = 30^0 \Rightarrow \widehat{MKC} = 90^0 - 30^0 = 60^0 \Rightarrow \Delta KMC$ đều

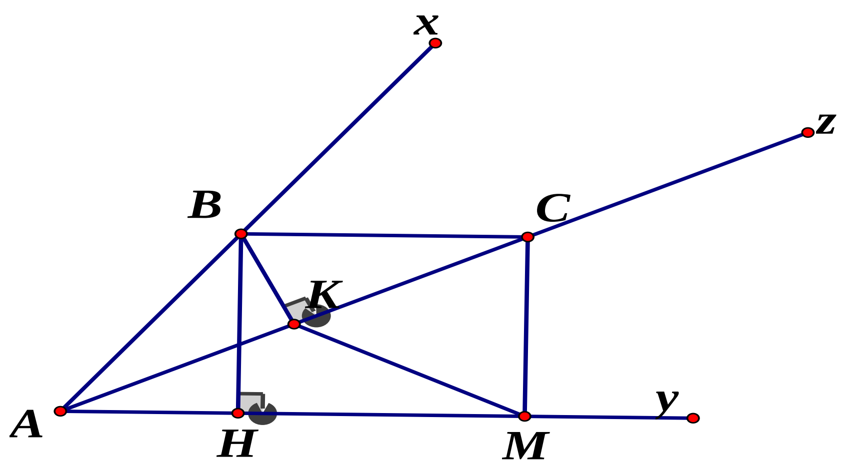
c) $\Delta OMC$ vuông tại M $\Rightarrow \widehat{MCO}$ nhọn $\Rightarrow \widehat{OCP}$ tù (Hai góc $\widehat{MCO}; \widehat{OCP}$ bù nhau)

Xét trong $\Delta OCP$ có $\widehat{OCP}$ tù nên OP > OC.

**Bài 34.** Cho $\widehat{xAy} = 60^0$, vẽ tia phân giác $Az$ của góc đó. Từ một điểm $B$ trên tia $Ax$ vẽ đường thẳng song song với $Ay$ cắt $Az$ tại C. Kẻ $BH \perp Ay$ tại H, $CM \perp Ay$ tại M, $BK \perp AC$ tại K. Chứng minh

a) $KC = KA$ b) $BH = \dfrac{AC}{2}$ c) $\Delta KMC$ đều

**Lời giải**




a) Ta có: $\widehat{yAz} = \widehat{zAx} = 30^0$ ($Az$ là tia phân giác của $\widehat{xAy}$)

Mà $\widehat{yAz} = \widehat{ACB}\left(Ay // BC, slt\right) \Rightarrow \widehat{zAx} = \widehat{ACB} \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại B

Trong tam giác cân $ABC$ có $BK$ là đường cao ứng với cạnh đáy $\Rightarrow BK$ cũng là đường trung tuyến của $\Delta ABC \Rightarrow KC = KA$

b) Ta có: $\widehat{ABH} = 90^0 - \widehat{xAy} = 30^0$ ($\Delta ABH$ vuông tại H)

Xét hai tam giác vuông $\Delta ABH$ và $\Delta BAK$ có:

$AB$ chung; $\widehat{zAx} = \widehat{ABH}\left(= 30^0\right) \Rightarrow \Delta ABH = \Delta BAK \Rightarrow BH = AK$

Mà $AK = \dfrac{AC}{2}(cmt) \Rightarrow BH = \dfrac{AC}{2}$

c) Ta có: $\Delta AMC$ vuông tại M có $MK$ là trung tuyến ứng với cạnh huyền

$\Rightarrow KM = \dfrac{AC}{2}$ (1) mà $AK = KC = \dfrac{AC}{2}$ (2)

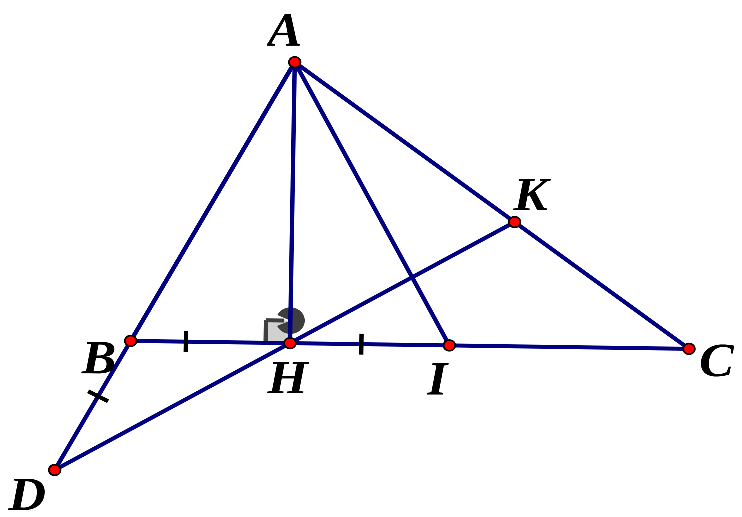
Từ (1) và (2) $\Rightarrow KM = KC \Rightarrow \Delta KMC$ cân tại K (3)

Mặt khác $\Delta AMC$ có $\widehat{AMC} = 90^0, \widehat{yAz} = 30^0 \Rightarrow \widehat{MCK} = 90^0 - 30^0 = 60^0$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\Delta AMC$ đều.

**Câu 35.** Cho $\Delta ABC$ có $\widehat{B} = 2\widehat{C} < 90^0$ Vẽ $AH$ vuông góc với $BC$ tại H. Trên tia $AB$ lấy điểm D sao cho $AD = HC$. Chứng minh rằng đường thẳng $DH$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $AC$.

**Lời giải**




Ta có: $\widehat{B} = 2\widehat{C} \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{C}$ nên $AC > AB \Rightarrow HC > HB$

Trên đoạn thẳng $HC$ lấy điểm I sao cho $IH = IB \Rightarrow \Delta AHI = \Delta AHB$

$\Rightarrow AI = AB$ và $\widehat{AIB} = \widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$

Mặt khác : $\widehat{AIB} = \widehat{ACB} + \widehat{IAC} \Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{ACB}$

Do đó: $IA = IC < HC$ hay $AB < HC = AD$

Gọi K là giao điểm của $DH$ với $AC$.

Vì $AD = HC, AB = IC$ nên $BD = HI = HB \Rightarrow \Delta DBH$ cân tại B

Do đó: $\widehat{BDH} = \widehat{BHD} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{KHC} = \widehat{ACB}\left(= \widehat{BHD}\right) \Rightarrow \widehat{KAH} = \widehat{KHA}$ (phụ hai góc bằng nhau)

Suy ra $KA = KH = KC$ hay $K$ là trung điểm của đoạn thẳng AC

Vậy đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC

**Câu 36.** Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn $(AB < AC)$. Vẽ về phía ngoài tam giác $ABC$ các tam giác đều $ABD$ và $ACE$. Gọi I là giao của $CD$ và BE, K là giao của $AB$ và DC.

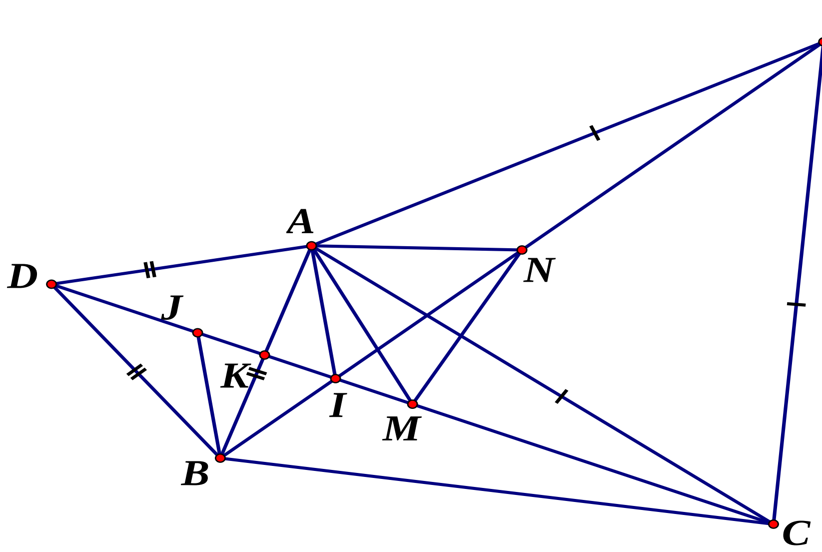
a) Chứng minh rằng : $\Delta ADC = \Delta ABE$

b) Chứng minh rằng: $\widehat{DIB} = 60^0$

c) Gọi $M$ và N lần lượt là trung điểm của $CD$ và BE. Chứng minh rằng $\Delta AMN$ đều

d) Chứng minh rằng $IA$ là phân giác của $\widehat{DIE}$

**Lời giải**




a) Ta có: $AD = AB, \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ và $AC = AE \Rightarrow \Delta ADC = \Delta ABE(c.g.c)$

b) Từ $\Delta ADC = \Delta ABE \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ADC}$ mà $\widehat{BKI} = \widehat{AKD}$ (đối đỉnh)

Khi đó xét $\Delta BIK$ và $\Delta DAK$ suy ra $\widehat{BIK} = \widehat{DAK} = 60^0 (dfcm)$

c) Từ $\Delta ADC = \Delta ABE \Rightarrow CM = EN, \widehat{ACM} = \widehat{AEN}$

$\Rightarrow \Delta ACM = \Delta AEN(c.g.c) \Rightarrow AM = AN$ và $\widehat{CAM} = \widehat{EAN}$

$\widehat{MAN} = \widehat{CAE} = 60^0$. Do đó $\Delta AMN$ đều

d) Trên tia $ID$ lấy điểm $J$ sao cho $IJ = IB \Rightarrow \Delta BIJ$ đều $\Rightarrow BJ = BI$ và

$\widehat{JBI} = \widehat{DBA} = 60^0 \Rightarrow \widehat{IBA} = \widehat{JBD}$, kết hợp $BA = BD$

$\Rightarrow \Delta IBA = \Delta JBD(c.g.c) \Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{DJB} = 120^0$ mà $\widehat{BID} = 60^0$

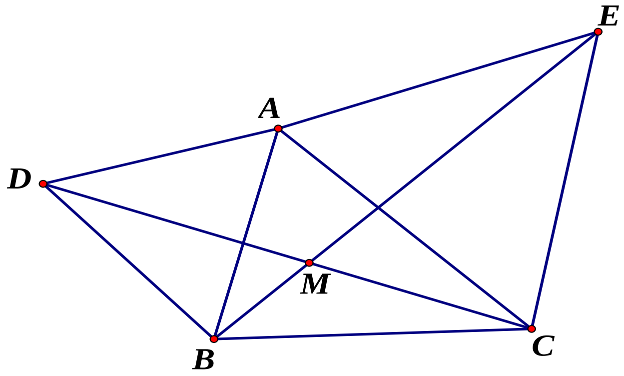
$\Rightarrow \widehat{DIA} = 60^0$. Từ đó suy ra $IA$ là phân giác của $\widehat{DIE}$

**Câu 37.** Cho tam giác nhọn $ABC$. Vẽ về phía ngoài tam giác $ABC$ các tam giác đều $ABD, ACE$. Gọi M là giao điểm của $DC$ và $BE$

a) Chứng minh $\Delta ABE = \Delta ADC$

b) Tính số đo $\widehat{BMC}$

**Lời giải**




$\Delta ABE$ và $\Delta ADC$ có:

$AD = AB(\Delta ADB$ đều); $AE = AC(\Delta AEC$ đều)

$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}\left(= 60^0 + \widehat{BAC}\right) \Rightarrow \Delta ABE = \Delta ADC \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{AEM}$

$\widehat{BMC} = \widehat{MCE} + \widehat{CEM}$

$= \widehat{MCA} + \widehat{ACE} + \widehat{CEM}$

$= \widehat{AEM} + \widehat{ACE} + \widehat{CEM}$

$= \widehat{AEC} + \widehat{ACE} = 60^0 + 60^0 = 120^0$

**Câu 38.**

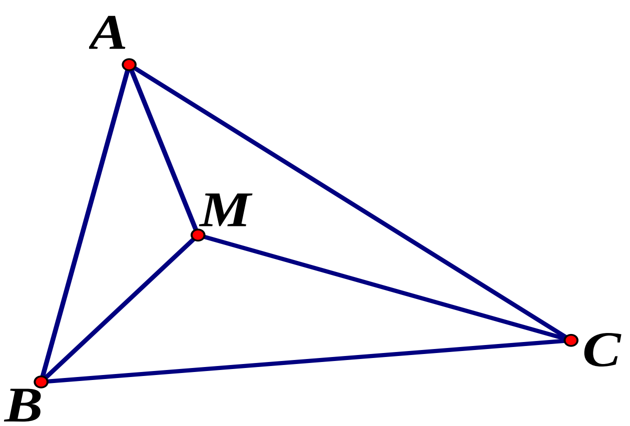
a) Cho tam giác $ABC.M$ là điểm bất kỳ trong tam giác. Chứng minh:

$$2(MA + MB + MC) > AB + AC + BC$$

b) Cho tam giác $ABC.AN, BP, CQ$ là ba trung tuyến. Chứng minh:

$$\frac{4}{3}(AN + BP + CQ) > AB + AC + BC$$

**Lời giải**




a) Tam giác $MBC$ có : $MB + MC > BC$

Tương tự : $MC + MA > AC; MA + MB > AB$

$\Rightarrow 2MA + 2MB + 2MC > AB + AC + BC$

$\Rightarrow 2(MA + MB + MC) > AB + AC + BC$

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác. Áp dụng câu a ta có:

$2(GA + GB + GC) > AB + AC + BC$

Có: $GA = \frac{2}{3}AN; GB = \frac{2}{3}BP; GC = \frac{2}{3}CQ$

Thay vào trên được:

$2\left(\frac{2}{3}AN + \frac{2}{3}BP + \frac{2}{3}CQ\right) > AB + AC + BC$

$\Rightarrow \frac{4}{3}(AN + BP + CQ) > AB + AC + BC$

**Câu 39.** Cho tam giác cân $ABC, AB = AC.$ Trên tia đối của các tia $BC, CB$ lấy theo thứ tự hai điểm $D$ và $E$ sao cho $BD = CE.$

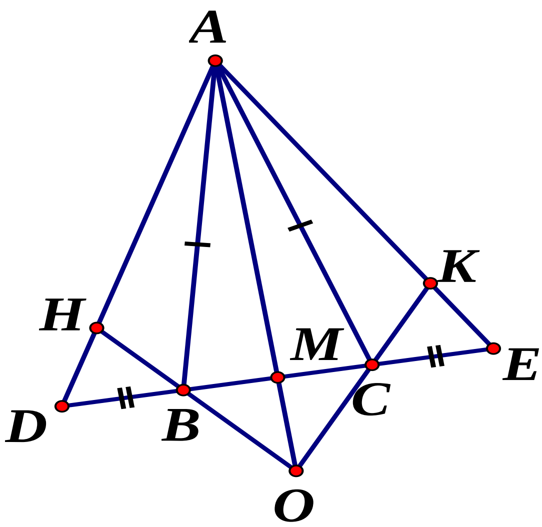
e) Chứng minh tam giác $ADE$ là tam giác cân

f) Gọi M là trung điểm của $BC.$ Chứng minh $AM$ là tia phân giác của $\widehat{DAE}$

g) Từ B và C vẽ $BH, CK$ theo thứ tự vuông góc với $AD, AE$. Chứng minh $BH = CK$

h) Chứng minh 3 đường thẳng $AM, BH, CK$ gặp nhau tại 1 điểm.

**Lời giải**




e) $\Delta ABC$ cân nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE}$

Xét $\Delta ABD$ và $\Delta ACE$ có: $AB = AC(gt); \widehat{ABD} = \widehat{ACE}(cmt); DB = CE(gt)$

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACE(c.g.c) \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A

f) Xét $\Delta AMD$ và $\Delta AME$ có:

$MD = ME(DB = CE; MB = MC); AM$ chung; $AD = AE(cmt)$

$\Rightarrow \Delta AMD = \Delta AME(c.c.c) \Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MAE}$

Vậy $AM$ là tia phân giác của $\widehat{DAE}$

g) Vì $\Delta ADE$ cân tại A (cm câu a) nên $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$

Xét $\Delta BHD$ và $\Delta CKE$ có: $\widehat{BDH} = \widehat{CEK}(do...\widehat{ADE} = \widehat{AED}); DB = CE(gt)$

$\Rightarrow \Delta BHD = \Delta CKE(ch - gn) \Rightarrow BH = CK$

h) Gọi giao điểm của $BH$ và $CK$ là O

Xét $\Delta AHO$ và $\Delta AKO$ có: $OA$ cạnh chung;

$AH = AK(AD = AE, DH = KE(do \Delta BHD = \Delta CKE))$

$\Rightarrow \Delta AHO = \Delta AKO(ch - cgv)$

Do đó $\widehat{OAH} = \widehat{OAK}$ nên $AO$ là tia phân giác của $\widehat{KAH}$ hay $AO$ là tia phân giác của $\widehat{DAE}$, mặt khác theo câu b) $AM$ là tia phân giác của $\widehat{DAE}$

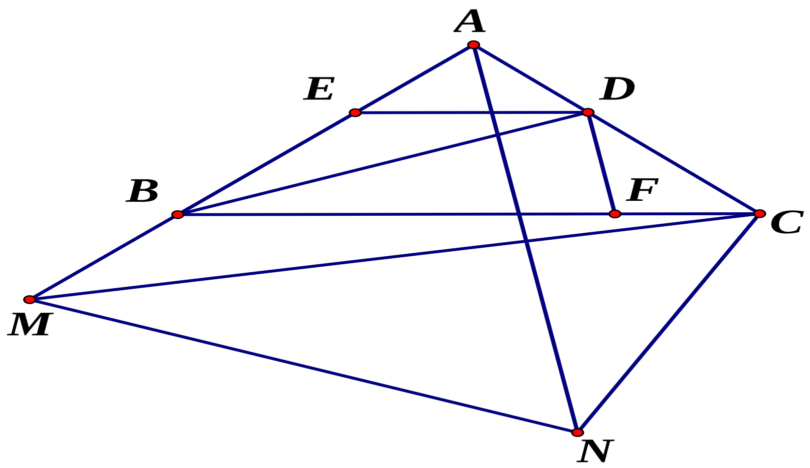
Do đó $AO \equiv AM$, suy ra ba đường thẳng $AM, BH, CK$ cắt nhau tại O.

**Bài 40.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A\left(\widehat{B} = \widehat{C} = 40^0\right)$. Kẻ phân giác $BD(D \in AC)$. Trên tia $AB$ lấy điểm $M$ sao cho $AM = BC$

a) Chứng minh $BD + AD = BC$

b) Tính $\widehat{AMC}$

**Lời giải**




a) Từ $D$ kẻ $DE // BC$, trên $BC$ lấy điểm $F$ sao cho $BD = BF(1)$

Chứng minh được $DE = BE$ (tam giác $BED$ cân)

Do tam giác $AED$ cân nên $AD = AE \Rightarrow BE = CD \Rightarrow DE = CD$

Tam giác $BDF$ cân có $\widehat{DBF} = 20^0$ nên $\widehat{BFD} = 80^0 \Rightarrow \widehat{DFC} = 100^0$

$\Rightarrow \widehat{DFC} = \widehat{EAD} = 100^0$

Vậy $\Delta DFC$ có $\widehat{FDC} = 40^0$

Chứng minh được: $\Delta ADE = \Delta FCD(g.c.g) \Rightarrow AD = CF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $dfcm$

b) Dựng tam giác đều $AMN$ sao cho $N$ và $C$ ở cùng một phía so với $AB$

Vì $AC$ chung; $BC = AN\left(= AM\right); \widehat{ACB} = \widehat{CAN} = 40^0$

$\Rightarrow \Delta BAC = \Delta NCA \Rightarrow AC = CN = AB$

Vậy $MC$ là trung trực của $AN$ nên $\widehat{AMC} = \frac{1}{2}\widehat{AMN} = 30^0$

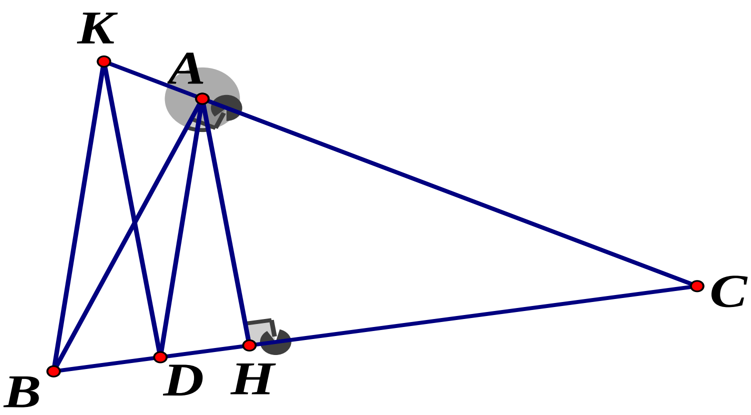
**Câu 41.** Cho tam giác $ABC$ vuông ở A có $AB = 6cm, AC = 8cm$ và đường cao $AH$. Tia phân giác của $\widehat{BAH}$ cắt $BH$ tại D. Trên tia $CA$ lấy điểm $K$ sao cho $CK = BC.$

a) Chứng minh $KB // AD$

b) Chứng minh $KD \perp BC$

c) Tính độ dài $KB$

**Lời giải**




a) Chứng minh $KB // AD$

$\widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{CAD} = 90^0, AH \perp BC \Rightarrow \Delta AHD$ vuông ở H

$\Rightarrow \widehat{HAD} + \widehat{ADH} = 90^0$ mà $\widehat{BAD} = \widehat{HAD}$ (vì $AD$ là phân giác của $\widehat{BAH}$)

Nên $\widehat{CAD} = \widehat{ADH} \Rightarrow \Delta ACD$ cân ở C $\Rightarrow \widehat{CAD} = \dfrac{180^0 - \widehat{C}}{2}$

$CK = BC(gt) \Rightarrow \Delta CBK$ cân ở C $\Rightarrow \widehat{CKB} = \dfrac{180^0 - \widehat{C}}{2}$

Do đó $\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CKB} \Rightarrow KB // AD$

b) Chứng minh $KD \perp BC$

$KC = BC(gt); AC = CD(\Delta ACD$ cân ở C$) \Rightarrow DB = KA$ (1)

$\Delta CBK$ cân ở C$\Rightarrow \widehat{DBK} = \widehat{AKB}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta BKD = \Delta KBA(c.g.c) \Rightarrow \widehat{BDK} = \widehat{KAB} = 90^0 \Rightarrow KD \perp BC$

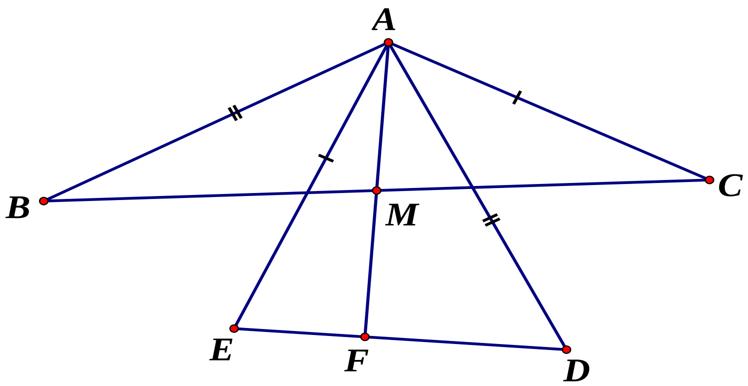
c) Tính độ dài $KB$

Lập luận tính đúng $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow BC = 10$
$\Delta ACD$ cân ở C$\Rightarrow CD = AC = 8 \Rightarrow BD = BC - CD = 10 - 8 = 2$
$\Delta BKD = \Delta KBA(cmt) \Rightarrow KD = AB = 6$

$KD \perp BC \Rightarrow \Delta KDB$ vuông ở D$\Rightarrow KB^2 = KD^2 + BD^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \Rightarrow KB = \sqrt{40}$

**Câu 42.** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{A}$ tù. Kẻ $AD \perp AB$ và $AD = AB$ (tia $AD$ nằm giữa hai tia $AB$ và $AC$). Kẻ $AE \perp AC$ và $AE = AC$ (tia $AE$ nằm giữa hai tia $AB$ và $AC$). Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Chứng minh rằng $AM \perp DE$.

**Lời giải**




Trên tia đối của tia $MA$ lấy điểm $F$ sao cho $MF = MA \Rightarrow \Delta AMB = \Delta FMC(c.g.c)$

$\Rightarrow AB = AD = CF$ (1); $\widehat{ABM} = \widehat{FCM}$ (2)

Từ (2)$\Rightarrow CF // AB \Rightarrow \widehat{FCA} + \widehat{BAC} = 180^0$ (3)

$AD \perp AB \Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{EAD} = \widehat{BAD} = 90^0, AE \perp AC \Rightarrow \widehat{CAD} + \widehat{EAD} = \widehat{CAE} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{EAD} + \widehat{CAD} + \widehat{EAD} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{BAC} + \widehat{EAD} = 180^0$ (4)

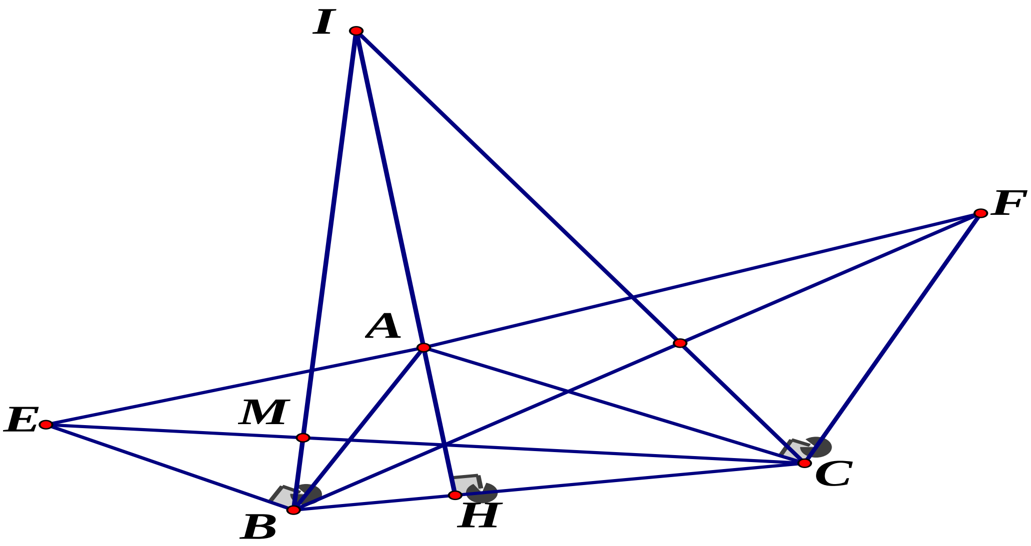
Từ (3), (4) $\Rightarrow \widehat{FCA} = \widehat{EAD} \Rightarrow \Delta ADE = \Delta CFA(c.g.c) \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{CAF}$

Mà $\widehat{CAF} + \widehat{FAE} = \widehat{CAE} = 90^0$ nên $\Rightarrow \widehat{AED} + \widehat{FAE} = 90^0$ hay $\widehat{AEK} + \widehat{KAE} = 90^0$
$\Rightarrow \Delta AKE$ vuông tại $K \Rightarrow AM \perp DE$

**Câu 43.** Cho tam giác nhọn $ABC$. Về phía ngoài của tam giác vẽ các tam giác vuông cân $ABE, ACF$ vuông ở B và C. Có $AH$ vuông góc với BC, trên tia đối của tia $AH$ lấy điểm I sao cho $AI = BC$. Chứng minh:

a) $\Delta ABI = \Delta BEC$
b) $BI = CE$ và $BI$ vuông góc với $CE$
c) Ba đường thẳng $AH, CE, BF$ cắt nhau tại một điểm

**Lời giải**




a) Ta có: $\widehat{IAB}=180^0-\widehat{BAH}=180^0-\left(90^0-\widehat{ABC}\right)=90^0+\widehat{ABC}=\widehat{EBC}$

$\Rightarrow \Delta ABI=\Delta BEC(c.g.c)$

b) $\Delta ABI=\Delta BEC$ (câu a) nên $BI=EC$ (hai cạnh tương ứng)

$\widehat{ECB}=\widehat{BIA}$ hay $\widehat{ECB}=\widehat{BIH}$

Gọi giao điểm của $CE$ với $AB$ là M, ta có:

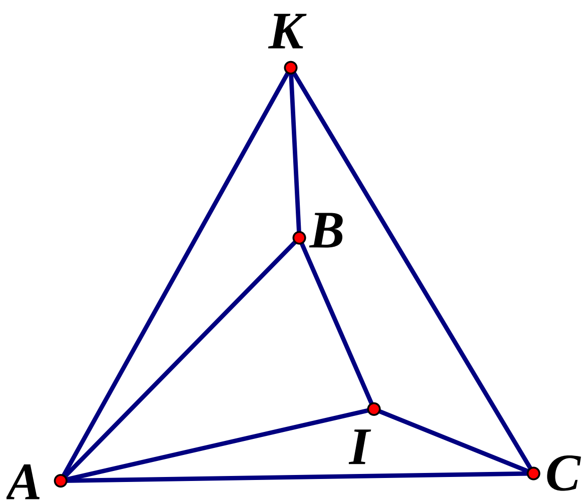
$\widehat{MCB}+\widehat{MBC}=\widehat{BIH}+\widehat{IBH}=90^0\Rightarrow \widehat{BMC}=90^0$

Do đó $CE\perp BI$. Chứng minh tương tự $BF\perp CI$

c) Trong tam giác $BIC$: $AH, CE, BF$ là ba đường cao. Vậy $AH, CE, BF$ đồng quy tại một điểm.

**Câu 44.** Tam giác $ABC$ cân ở $B$ có $\widehat{ABC}=80^0$. $I$ là một điểm nằm trong tam giác, biết $\widehat{IAC}=10^0$, và $\widehat{ICA}=30^0$. Tính $\widehat{AIB}$

**Lời giải**



$\Delta ABC$ cân ở B, $\widehat{ABC}=80^0$ nên $\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=50^0$

Vì $\widehat{IAC}=20^0,\widehat{ICA}=30^0$ nên $\widehat{IAB}=40^0,\widehat{ICB}=20^0$

Vẽ tam giác đều $AKC$ (K và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AC)

Ta có: $\widehat{BAK}=\widehat{BCK}=10^0$

$\Delta ABK=\Delta CKB(c.g.c)\Rightarrow \widehat{BAK}=\widehat{BCK}=30^0$

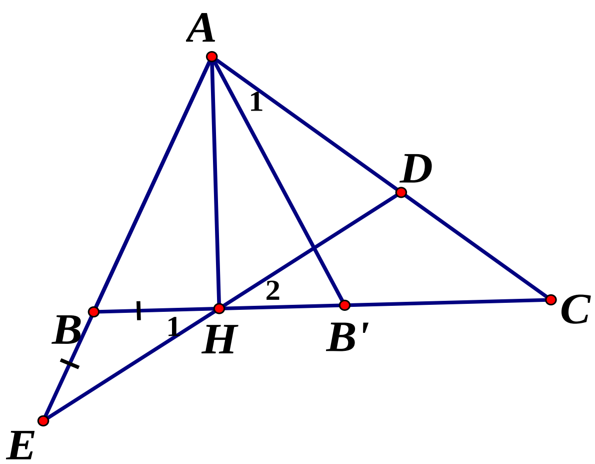
$\Delta ABK=\Delta AIC(g.c.g)\Rightarrow AB=AI$

$\Delta ABI$ cân ở $A\Rightarrow \widehat{AIB}=70^0$

**Câu 45.** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{B}<90^0$ và $\widehat{B}=2\widehat{C}$. Kẻ đường cao $AH$. Trên tia đối của tia $BA$ lấy điểm $E$ sao cho $BE=BH$. Đường thẳng $HE$ cắt $AC$ tại $D$.

1) Chứng minh $\widehat{BEH}=\widehat{ACB}$
2) So sánh độ dài của ba đoạn thẳng : $DH, DC$ và $DA$
3) Lấy $B'$ sao cho $H$ là trung điểm của $BB'$. Tam giác $AB'C$ là tam giác gì ? Vì sao ?
4) Chứng minh: Nếu tam giác $ABC$ vuông tại A thì $DE^2=BC^2-AB^2$

**Lời giải**




1) Tam giác $BEH$ cân tại B nên $\widehat{E}=\widehat{H_1}$ mà $2\widehat{C}=\widehat{ABC}=\widehat{E}+\widehat{H_1}=2\widehat{E}$.

   Vậy $\widehat{BEH}=\widehat{ACB}$
2) Chứng tỏ được $\Delta DHC$ cân tại D nên $DC=DH$ (1)

   Chứng minh được: $\widehat{DAH}=90^0-\widehat{C}$, $\widehat{DAH}=90^0-\widehat{H_2}$

   Suy ra $\widehat{DAH}=\widehat{AHD}\Rightarrow \Delta DAH$ cân tại D nên $DA=DH$ (2)

   Từ (1) và (2) ta có: $DC=DH=DA$
3) $\Delta ABB'$ cân tại A nên $\widehat{AB'B}=\widehat{ABB'}=2\widehat{C}$ mà $\widehat{AB'B}=\widehat{A_1}+\widehat{C}$

   Vậy $2\widehat{C}=\widehat{A_1}+\widehat{C}\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{C}\Rightarrow \Delta AB'C$ cân tại $B'$

4) Chứng minh được: $\Delta ABC$ vuông tại A thì $\widehat{ABC}=60^0,\widehat{ACB}=30^0$

Chứng minh được: $\Delta AHC=\Delta DAE\Rightarrow DE=AC$

Do $AC^2=BC^2-AB^2$ từ đó $DE^2=BC^2-AB^2$

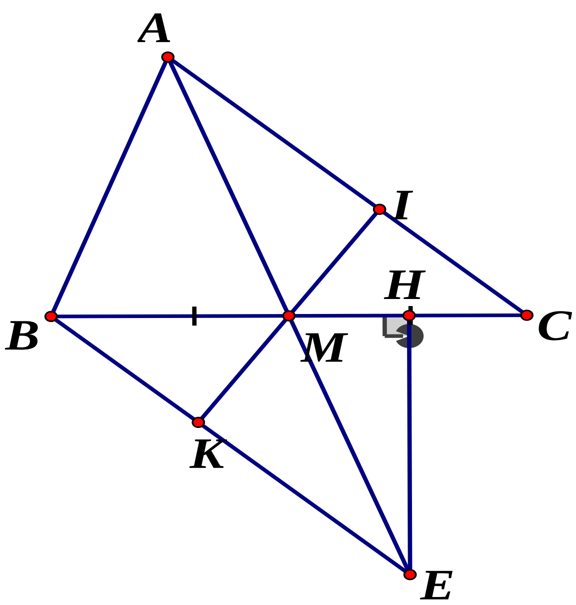
**Câu 46.** Cho tam giác $ABC, M$ là trung điểm BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME=MA.$ Chứng minh rằng:

a) $AC=EB, AC//BE$

b) Gọi I là một điểm trên $AC, K$ là một điểm trên $EB$ sao cho $AI=EK.$ Chứng minh rằng $I,M,K$ thẳng hàng

c) Từ E kẻ $EH\perp BC\left(H\in BC\right)$. Biết $\widehat{HBE}=50^0,\widehat{MEB}=25^0.$ Tính $\widehat{HEM}$ và $\widehat{BME}$

**Lời giải**




a) Xét $\Delta AMC$ và $\Delta EMB$ có: $AM=EM\,(gt);\widehat{AMC}=\widehat{EMB}$ (đối đỉnh);

$BM=MC(gt)$ nên $\Delta AMC=\Delta EMB(c.g.c)\Rightarrow AC=EB$

b) Vì $\Delta AMC=\Delta EMB\Rightarrow\widehat{MAC}=\widehat{MEB}$, mà 2 góc này ở vị trí so le trong \

Suy ra $AC//BE$

Xét $\Delta AMI$ và $\Delta EMK$ có: $AM=EM\,(gt);\widehat{MAI}=\widehat{MEK}(\Delta AMC=\Delta EMB)$

Nên $\widehat{AMI}=\widehat{EMK}$ mà $\widehat{AMI}+\widehat{IME}=180^0$ (kề bù)

$\Rightarrow\widehat{EMK}+\widehat{IME}=180^0\Rightarrow I,M,K$ thẳng hàng

c) Trong $\Delta BHE\left(\widehat{H}=90^0\right)$ có $\widehat{HBE}=50^0$

$\Rightarrow\widehat{HBE}=90^0-\widehat{HEB}=90^0-50^0=40^0$

$\Rightarrow\widehat{HEM}=\widehat{HEB}-\widehat{MEB}=40^0-25^0=15^0$

$\widehat{BME}$ là góc ngoài tại đỉnh M của $\Delta HEM$

Nên $\widehat{BME} = \widehat{HEM} + \widehat{MHE} = 15^0 + 90^0 = 105^0$

(định lý góc ngoài của tam giác)

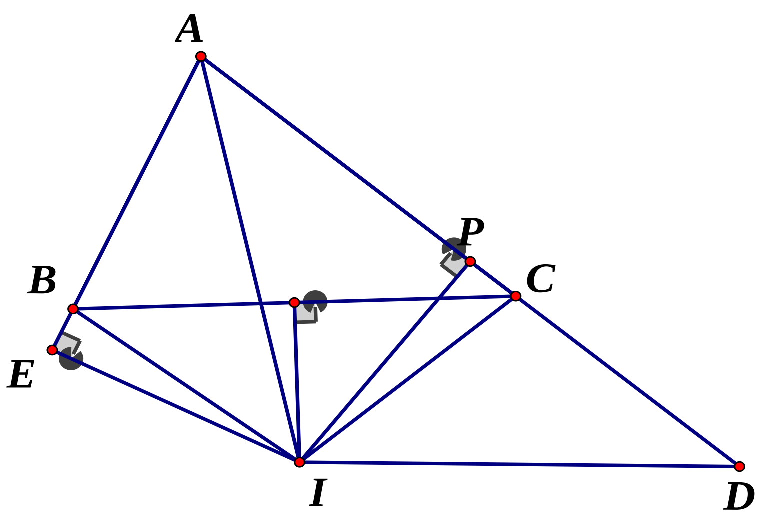
**Câu 47.** Cho tam giác $ABC$ có $AB < AC$. Trên tia đối của tia $CA$ lấy điểm $D$ sao cho $CD = AB$. Gọi $I$ là giao điểm các đường trung trực của $BC$ và $AD$

a) Chứng minh $\Delta AIB = \Delta DIC$

b) Chứng minh $AI$ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

c) Kẻ $IE$ vuông góc với $AB$, chứng minh $AE = \frac{1}{2}AD$

**Lời giải**




a) Vì $I$ là giao điểm các đường trung trực của $BC$ và $AD$ nên $IB = IC, IA = ID$

Lại có $AB = CD(gt)$, do đó $\Delta AIB = \Delta DIC(c.c.c)$

b) $\Delta AID$ cân ở I, suy ra $\widehat{DAI} = \widehat{D}$

$\Delta AIC = \Delta DIC$ (câu a) $\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{D}$, do đó: $\widehat{DAI} = \widehat{BAI}$

Vậy $AI$ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

c) Kẻ $IP \perp AD$, ta có: $\Delta AIE = \Delta AIP$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AE = AP$ mà $AP = \frac{AD}{2}$ (vì P là trung điểm $AD$)

Suy ra $AE = \frac{1}{2}AD$

**Câu 48.**

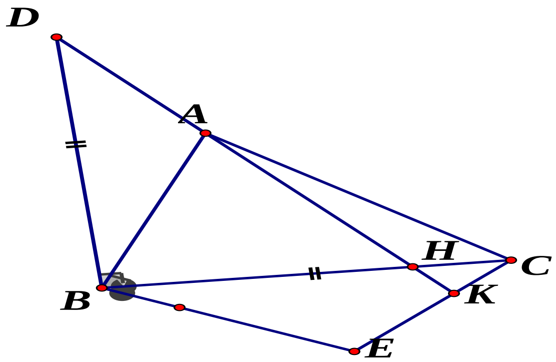
Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{B} < 90^0$. Trên nửa mặt phẳng có chứa $A$ bờ $BC$, vẽ tia $Bx$ vuông góc với $BC$, trên tia đó lấy điểm $D$ sao cho $BD = BC$. Trên nửa mặt phẳng có chứa

$C$ bờ $AB$, vẽ tia $By$ vuông góc với $BA$, trên đó lấy điểm $E$ sao cho $BE = BA$. Chứng minh rằng:

a) $DA = BC$

b) $DA \perp EC$

**Lời giải**




a) Xét $\Delta ABC$ và $\Delta EBC$ có: $AB = BE; \widehat{ABD} = \widehat{EBC}$ (cùng bằng $90^0 - \widehat{ABC}$)

$BD = BC \Rightarrow \Delta ABD = \Delta EBC(c.g.c) \Rightarrow DA = EC$

b) Gọi giao điểm của $DA$ với $BC$ và $EC$ theo thứ tự là H và K

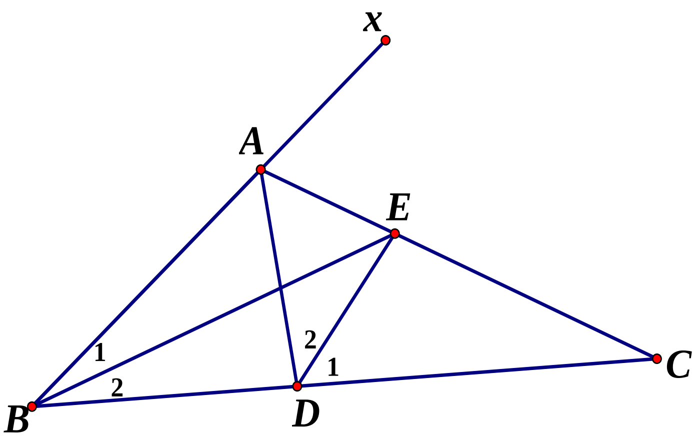
Ta có: $\Delta ABD = \Delta EBC(cmt) \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{BDH} = \widehat{KCH}$

$\Delta DBH$ và $\Delta CKH$ có: $\widehat{BDH} = \widehat{KCH}, \widehat{DHB} = \widehat{CHK} \Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{CKH}$

Do $\widehat{DBH} = 90^0$ nên $\widehat{CKH} = 90^0$. Vậy $DA \perp EC$

**Câu 49.** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{A} = 120^0$. Các đường phân giác $AD$ và $BE$, tính số đo của góc $BED$

**Lời giải**




Gọi $Ax$ là tia đối của tia $AB$ ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = 60^0$

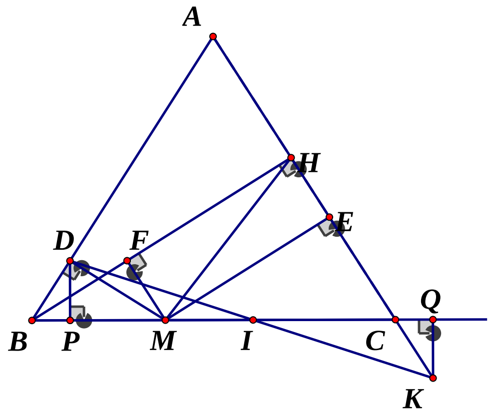
Xét $\Delta ABD$ có $AE$ là tia phân giác góc ngoài của đỉnh A

BE là phân giác của góc $B$ chúng cắt nhau tại E nên $DE$ là phân giác góc ngoài của D, do đó: $\widehat{BED} = \widehat{D_1} - \widehat{B_1} = \dfrac{\widehat{ADC} - \widehat{ABC}}{2} = \dfrac{\widehat{BAD}}{2} = 30^0$

**Câu 50.** Cho tam giác $ABC$ cân tại A, $BH$ vuông góc với $AC$ tại H. Trên cạnh $BC$ lấy điểm $M$ bất kỳ (khác $B$ và C). Gọi $D, E, F$ là chân đường vuông góc hạ từ $M$ đến $AB, AC, BH$

a) Chứng minh $\Delta DBM = \Delta FMB$
b) Chứng minh khi $M$ chạy trên cạnh $BC$ thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi
c) Trên tia đối của tia $CA$ lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh $BC$ đi qua trung điểm của $DK$.

**Hướng dẫn giải**




a) Chứng minh được $\Delta DBM = \Delta FMB(ch - gn)$
b) Theo câu a ta có: $\Delta DBM = \Delta FMB(ch - gn) \Rightarrow MD = BF\,(1)$
Chứng minh $\Delta MFH = \Delta HEM \Rightarrow ME = FH\,(2)$
Từ (1) và (2) suy ra $MD + ME = BF + FH = BH$
BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đpcm)
c) Vẽ $DP \perp BC$ tại $P$, $KQ \perp BC$ tại Q, gọi $I$ là giao điểm của $DK$ và BC.

+Chứng minh : $BD = FM = EH = CK$

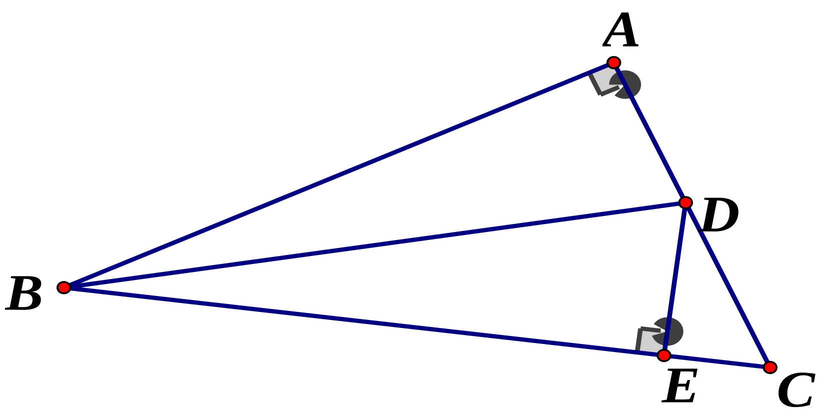
Chứng minh $\Delta BDP = \Delta CKQ(ch - gn) \Rightarrow DP = KQ$ (hai cạnh tương ứng)

Chứng minh $\widehat{IDP} = \widehat{IKQ} \Rightarrow \Delta DPI = \Delta KQI\,(c.g.c) \Rightarrow ID = IK\,(dfcm)$

**Câu 51.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, tia phân giác $\widehat{ABC}$ cắt $AC$ tại D. Trên cạnh $BC$ lấy điểm $E$ sao cho $BE = BA$. Chứng minh rằng:

a) $DA = DE$
b) $DA < DC$
c) $DB^2 + DC^2 = 2DE^2 + EB^2 + EC^2$

**Hướng dẫn giải**




a) Chứng minh được $\Delta ABE = \Delta EBD(c.g.c) \Rightarrow DA = DE$

b) $\Delta ABE = \Delta EBD(cmt) \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{E} = 90^0$

Trong $\Delta EDC$ có $DE < DC$ hay $AD < DC$

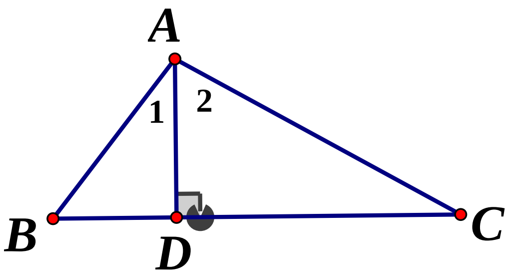
c) $DB^2 + DC^2 = \left(FB^2 + ED^2\right) + \left(ED^2 + EC^2\right) = EB^2 + EC^2 + 2ED^2$

**Câu 52.** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{A} = 3\widehat{B} = 6\widehat{C}$

a) Tính số đo các góc của $\Delta ABC$

b) Kẻ $AD \perp BC\left(D \in BC\right)$. Chứng minh : $AD < BD < CD$

**Hướng dẫn giải**




a) Từ $\widehat{A} = 3\widehat{B} = 6\widehat{C} \Rightarrow \dfrac{\widehat{A}}{6} = \dfrac{\widehat{B}}{2} = \dfrac{\widehat{C}}{1} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{6 + 2 + 1} = \dfrac{180^0}{9} = 20^0$

$\Rightarrow \widehat{A} = 120^0, \widehat{B} = 40^0, \widehat{C} = 20^0$

Vậy $\widehat{A} = 120^0, \widehat{B} = 40^0, \widehat{C} = 20^0$

b) Trong $\Delta ACD$ có:

$\widehat{ADC} = 90^0, \widehat{C} = 20^0 \Rightarrow \widehat{A_2} = 70^0 \Rightarrow \widehat{A_1} = 50^0$

Xét $\Delta ABD$ có $\widehat{B} = 40^0 > \widehat{C} = 20^0 \Rightarrow AB < AC \Rightarrow AB^2 < AC^2\left(*\right)$

Áp dụng định lý Pytago cho hai tam giác vuông $ADB, ADC$ có:

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ và $AC^2 = AD^2 + CD^2$

Do đó, từ (*)$\Rightarrow AD^2 + BD^2 < AD^2 + CD^2 \Rightarrow BD^2 < CD^2 \Rightarrow BD < CD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AD < BD < CD$

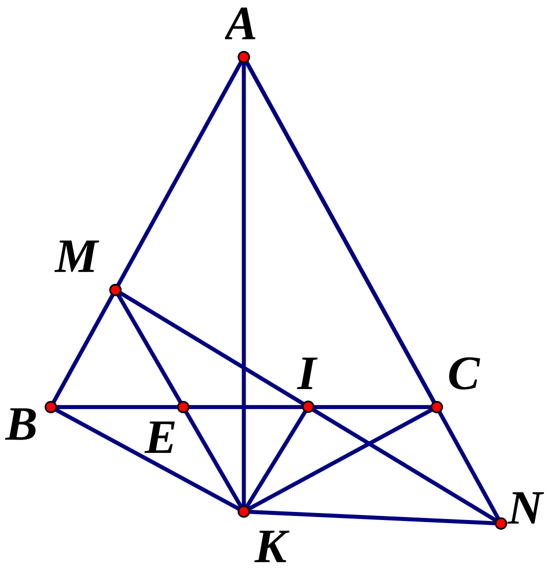
**Bài 53.** Cho tam giác $ABC$ cân ở A. Trên cạnh $AB$ lấy điểm $M$, trên tia đối của tia $CA$ lấy điểm $N$ sao cho $AM + AN = 2AB$

a) Chứng minh rằng: $BM = CN$

b) Chứng minh rằng: $BC$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $MN$

c) Đường trung trực của $MN$ và tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $KC \perp AC$

**Hướng dẫn giải**




a) Theo giả thiết, ta có:

$2AB = AB + AB = AB + AM + BM$

$AM + AN = AM + AC + CN$, $\Delta ABC$ cân ở A $\Rightarrow AB = AC$

Do đó, từ $AM + AN = 2AB \Rightarrow BM = CN$

b) Qua M kẻ $ME // AC\left(E \in BC\right)$

$\Delta ABC$ cân ở A $\Rightarrow \Delta BME$ cân ở M $\Rightarrow EM = BM = CN$

$\Rightarrow \Delta MEI = \Delta NCI(g.c.g) \Rightarrow IM = IN$

Vậy $BC$ đi qua trung điểm của $MN$

c) K thuộc đường trung trực của $MN \Rightarrow KM = KN(1)$

$\Delta ABK = \Delta ACK(c.g.c) \Rightarrow KB = KC(2); \widehat{ABK} = \widehat{ACK}(*)$

Kết quả chứng minh câu a: $BM = CN(3)$

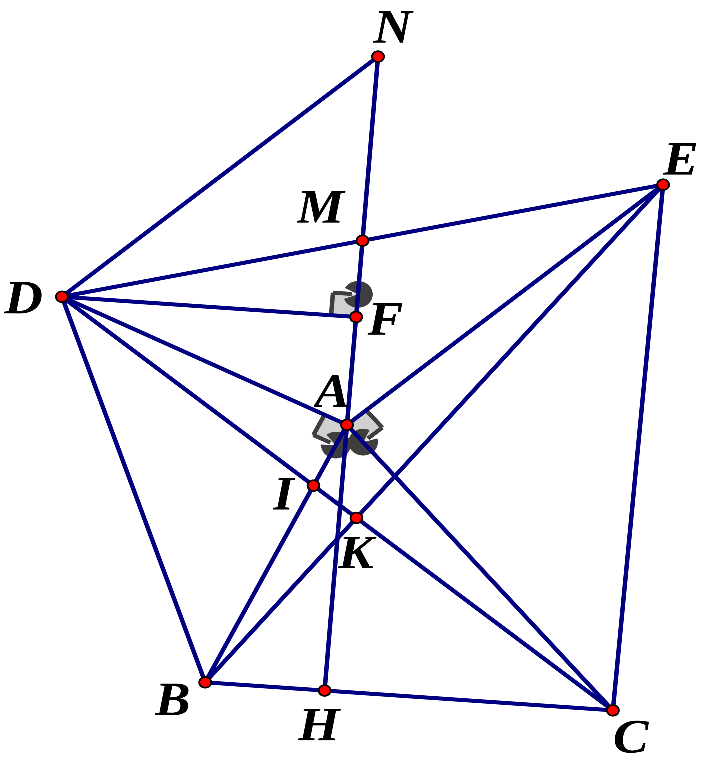
Từ $\left(1\right),\left(2\right),\left(3\right) \Rightarrow \Delta BMK = \Delta CNK(c-c-c) \Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{NCK}(**)$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{NCK} = \dfrac{180^0}{2} = 90^0 \Rightarrow KC \perp AN$

**Câu 54.** Cho $\Delta ABC$ nhọn. Trên nửa mặt phẳng bờ $AB$ không chứa điểm C dựng đoạn thẳng $AD$ vuông góc với $AB$ và $AD = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ $AC$ không chứa điểm $B$ dựng đoạn thẳng $AE$ vuông góc với $AC$ và $AE = AC$.

1) Chứng minh rằng: $BE = CD$
2) Gọi $M$ là trung điểm của $DE$, tia $MA$ cắt $BC$ tại H. Chứng minh $MA \perp BC$
3) Nếu $AB = c, AC = b, BC = a$. hãy tính độ dài đoạn $HC$ theo $a, b, c$

**Hướng dẫn giải**




1) Ta có: $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC}$ (vì tia $AB$ nằm giữa hai tia $AD, AC$)

Mà $\widehat{BAD} = 90^0$ (Vì $AB \perp AD$ tại A) nên $\widehat{DAC} = 90^0 + \widehat{BAC}(1)$

Ta có: $\widehat{BAE} = \widehat{CAE} + \widehat{BAC}$ (vì tia $AC$ nằm giữa hai tia $AB, AE$)

Mà $\widehat{CAE} = 90^0$ (Vì $AE \perp AC$ tại A) nên $\widehat{BAE} = 90^0 + \widehat{BAC}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$

Xét $\Delta ABE$ và $\Delta ADC$ có: $AB = AD(gt); \widehat{BAE} = \widehat{DAC}(cmt); AE = AC(gt)$

Do đó $\Delta ABE = \Delta ADC(c.g.c) \Rightarrow BE = CD$ (hai cạnh tương ứng)

2) Trên tia đối của tia $MA$ lấy điểm $N$ sao cho M là trung điểm AN

Từ D kẻ $DF$ vuông góc với $MA$ tại F

Xét $\Delta MAE$ và $\Delta MDN$ có: $MN = MA$( vẽ thêm); $\widehat{AME} = \widehat{DMN}\left(cmt\right); ME = MD(gt)$

$\Rightarrow \Delta MAE = \Delta MND(c.g.c)$

Suy ra $AE = DN$ và $\widehat{NDM} = \widehat{MEA}$

Mà $\widehat{NDM}$ và $\widehat{MEA}$ ở vị trí so le trong nên $AE // DN \Rightarrow \widehat{ADN} + \widehat{DAE} = 180^0$ ( trong cùng phía) (3)

Ta lại có : $\widehat{DAE} + \widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{EAC} = 360^0$

Hay $\widehat{DAE} + \widehat{BAC} = 180^0 (do....\widehat{DAB} = \widehat{EAC} = 90^0)$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{BAC}$

Ta có: $AE = DN(cmt); AE = AC(gt)$ nên $AC = DN$

Xét $\Delta ABC$ và $\Delta DAN$ có: $AB = AD(gt); \widehat{ADN} = \widehat{BAC}(cmt); AC = DN(cmt)$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta DAN(c.g.c) \Rightarrow \widehat{DNA} = \widehat{ACB}$ hay $\widehat{DNF} = \widehat{ACB}$

Ta có: $\widehat{DAF} + \widehat{BAD} + \widehat{BAH} = 180^0 (F, A, H$ thẳng hàng)

Hay $\widehat{DAF} + \widehat{BAH} = 90^0 \left(Do....\widehat{BAD} = 90^0\right)$ (5)

Trong $\Delta ADF$ vuông tại F có $\widehat{FDA} + \widehat{DAF} = 90^0$ ( hai góc phụ nhau) (6)

Từ (5), (6) $\Rightarrow \widehat{FDA} = \widehat{BAH}$

Ta có: $\widehat{ADN} = \widehat{NDF} + \widehat{FDA}$ (vì tia $DF$ nằm giữa hia tia DA, DN)

$\widehat{BAC} = \widehat{HAC} + \widehat{BAH}$ (vì tia $AH$ nằm giữa hai tia $AB, AC$)

Mà $\widehat{ADN} = \widehat{BAC}; \widehat{FDA} = \widehat{BAH}(cmt)$ nên $\widehat{NDF} = \widehat{HAC}$

Xét $\Delta AHC$ và $\Delta DFN$ có: $\widehat{NDF} = \widehat{HAC}(cmt); AC = DN(cmt); \widehat{DNF} = \widehat{ACB}(cmt)$

$\Rightarrow \Delta AHC = \Delta DFN(g.c.g) \Rightarrow \widehat{DFN} = \widehat{AHC}$ mà $\widehat{DFN} = 90^0$ (vì $DE \perp MA$ tại F)

Nên $\widehat{AHC} = 90^0 \Rightarrow MA \perp BC$ tại H ( $dfcm$)

3) $MA \perp BC$ tại H nên $\Delta AHB, \Delta AHC$ vuông tại H

Đặt $HC = x \Rightarrow HB = a - x$ (vì H nằm giữa B và C)

Áp dụng định lý Pytago cho 2 tam giác vuông $AHB, AHC$ ta có:

$AH^2 = AB^2 - BH^2$ và $AH^2 = AC^2 - CH^2$

$\Rightarrow AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2 \Rightarrow c^2 - (a - x)^2 = b^2 - x^2$

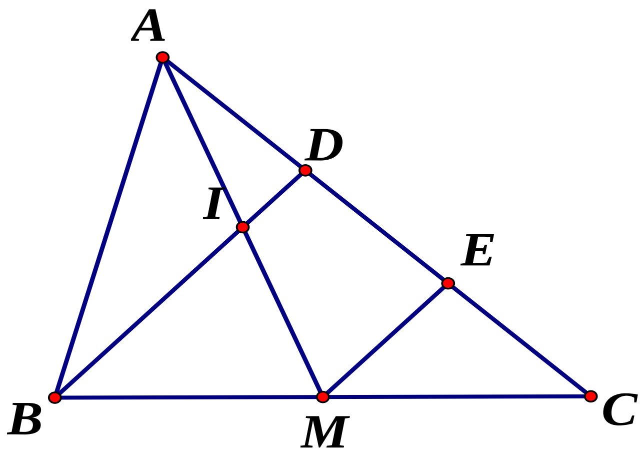
Từ đó tìm được: $HC = x = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$

**Câu 55.** Cho tam giác $ABC$, trung tuyến $AM$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AM$, BI cắt cạnh $AC$ tại D

a) Chứng minh $AC = 3AD$

b) Chứng minh: $ID = \frac{1}{4}BD$

**Hướng dẫn giải**




a) Gọi $E$ là trung điểm $CD$ trong tam giác $BCD$ nên $ME$ là đường trung bình $\Rightarrow ME//BD.$

Trong tam giác $MAE$ có $I$ là trung điểm của cạnh $AM(gt)$ mà $ID//ME(gt)$

Nên $D$ là trung điểm của $AE \Rightarrow AD = DE$ (1)

Vì $E$ là trung điểm của $DC \Rightarrow DE = EC$ (2)

So sánh $(1)$ và $(2) \Rightarrow AD = DE = EC \Rightarrow AC = 3AD$

b) Trong tam giác $MAE, ID$ là đường trung bình (theo a) $\Rightarrow ID = \frac{1}{2}ME(1)$

Trong $\Delta BCD, ME$ là đường trung bình $\Rightarrow ME = \frac{1}{2}BD(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ID = \frac{1}{4}BD.$

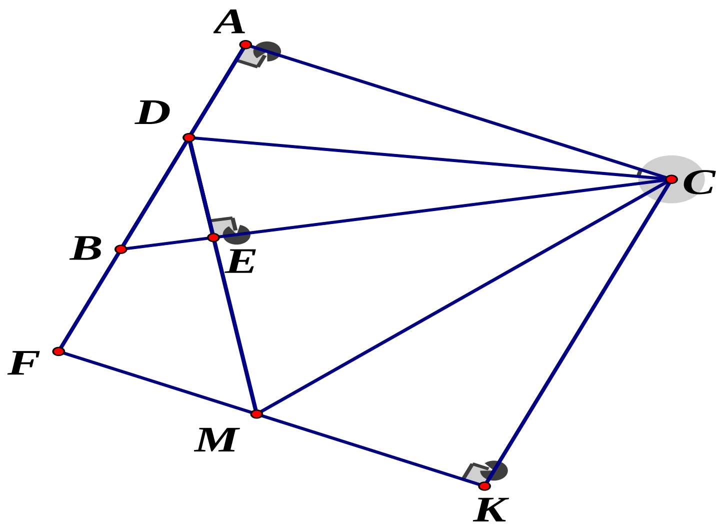
**Câu 56.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ với $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 15cm.$ Tia phân giác góc C cắt $AB$ tại D. Kẻ $DE \perp BC\left(E \in BC\right).$

a) Chứng minh $AC = CE$

b) Tính độ dài $AB, AC$

c) Trên tia $AB$ lấy điểm $F$ sao cho $AF = AC.$ Kẻ tia $Fx \perp FA$ cắt tia $DE$ tại M. Tính $\widehat{DCM}$

**Hướng dẫn giải**




a) Chứng minh được $\Delta ACD = \Delta ECD(ch - gn) \Rightarrow AC = CE$

$$b)\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}(gt) \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{AB^2 + AC^2}{9+16} = \frac{BC^2}{25} = \frac{15^2}{25} = 9$$

$$\Rightarrow AB^2 = 9.9 = 81 \Rightarrow AB = 9cm$$

$$AC^2 = 9.16 = 144 \Rightarrow AC = 12cm$$

c) Kẻ $Cy \perp Fx$ cắt nhau tại $K$

Ta thấy $AC = AF = FK = CK = CE$ và $\widehat{ACK} = 90^0$

Chứng minh được $\Delta CEM = \Delta CKM\,(ch - cgv) \Rightarrow \widehat{ECM} = \widehat{KCM}$ (2 góc tương ứng)

Mà $\widehat{DCM} = \widehat{DCE} + \widehat{ECM} = \frac{1}{2}\widehat{ACK} = \frac{1}{2}.90^0 = 45^0$

**Câu 57.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại A, M là trung điểm của $BC$. Lấy điểm $D$ bất kỳ thuộc cạnh $BC$. H và I thứ tự là hình chiếu của $B$ và $C$ xuống đường thẳng AD. Đường thẳng $AM$ cắt $CI$ tại N. Chứng minh rằng:

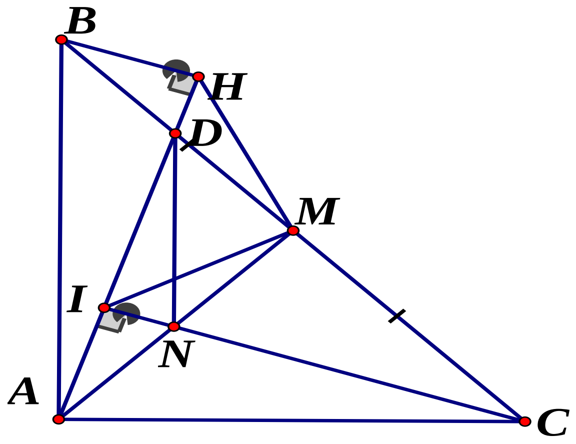
a) $BH = AI$

b) $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi

c) Đường thẳng $DN$ vuông góc với $AC$.

d) $IM$ là phân giác của $\widehat{HIC}$

**Hướng dẫn giải**




a) $\Delta AIC = \Delta BHA \Rightarrow BH = AI$

b) $BH^2 + CI^2 = BH^2 + AH^2 = AB^2$

c) $AM, CI$ là hai đường cao cắt nhau tại $N \Rightarrow N$ là trực tâm $\Rightarrow DN \perp AC$

d) $\Delta BHM = \Delta AIM \Rightarrow HM = MI$ và $\widehat{BHM} = \widehat{IMA}$

Mà $\widehat{IMA} + \widehat{BMI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BMH} + \widehat{BMI} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta HMI$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{HIM} = 45^0$

Mà : $\widehat{HIC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HIM} = \widehat{MIC} = 45^0 \Rightarrow IM$ là phân giác $\widehat{HIC}$

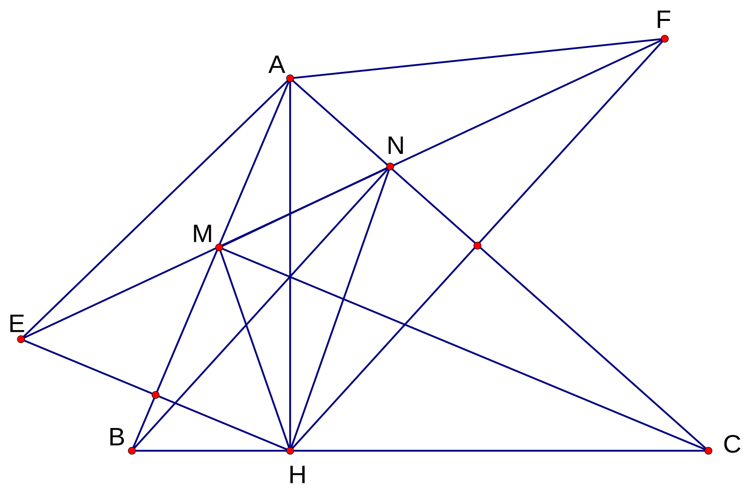
**Câu 58.** Cho tam giác ABC ($\widehat{BAC} < 90^o$), đường cao AH. Gọi E; F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB; AC, đường thẳng EF cắt AB; AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a. AE = AF;

b. HA là phân giác của $\widehat{MHN}$ ;

c. CM // EH; BN // FH.

**Hướng dẫn giải**



**a)** Vì AB là trung trực của EH nên ta có: AE = AH (1)

Vì AC là trung trực của HF nên ta có: AH = AF (2)

Từ (1) và (2) suy ra: AE = AF

**b)** Vì M $\in$ AB nên MB là phân giác $\widehat{EMH}$ $\Rightarrow$MB là phân giác ngoài góc M của tam giác MNH

Vì N $\in$ AC nên NC là phân giác $\widehat{FNH}$ $\Rightarrow$NC là phân giác ngoài góc N của tam giác MNH

Do MB; NC cắt nhau tại A nên HA là phân giác trong góc H của tam giác HMN hay HA là phân giác của $\widehat{MHN}$ .

**c)** Ta có AH $\perp$BC (gt) mà HM là phân giác $\widehat{MHN}$ $\Rightarrow$HB là phân giác ngoài góc H của tam giác HMN

MB là phân giác ngoài góc M của tam giác HMN (cmt) $\Rightarrow$NB là phân giác trong góc N của tam giác HMN

$\Rightarrow$BN$\perp$AC ( Hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau). $\Rightarrow$ BN // HF ( cùng vuông góc với AC)

Chứng minh tương tự ta có: EH // CM

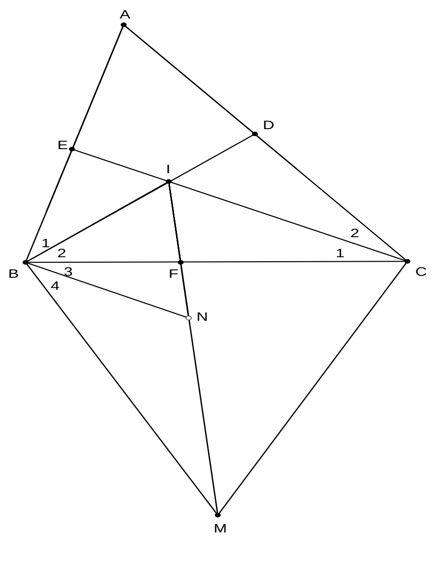
**Câu 59.** Cho $\Delta$ABC nhọn có góc A bằng $60^0$. Phân giác $\widehat{ABC}$ cắt AC tại D, phân giác $\widehat{ACB}$ cắt AB tại E. BD cắt CE tại I.

a) Tính số đo góc BIC.

b) Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho BF = BE. Chứng minh $\Delta$CID = $\Delta$CIF.

c) Trên tia IF lấy điểm M sao cho IM = IB + IC. Chứng minh $\Delta$BCM là tam giác đều.

**Hướng dẫn giải**



a) BD là phân giác của góc ABC nên $B_1 = B_2 = \frac{1}{2}ABC$

CE là phân giác của góc ACB nên $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}ACB$

Mà tam giác ABC có A+B+C = $180^0$ suy ra $60^0$ + ABC+ACB = $180^0$

$\Rightarrow$ ABC+ACB = $120^0$ $\Rightarrow$ $B_2+C_1 = 60^0$ $\Rightarrow$ BIC = $120^0$

b) $\Delta$BIE = $\Delta$BIF (cgc) $\Rightarrow$ BIE = BIF

BIC = $120^0$ $\Rightarrow$ BIE = $60^0$ $\Rightarrow$ BIE = BIF = $60^0$

Mà BIE + BIF + CIF = $180^0$ $\Rightarrow$ CIF = $60^0$

CID = BIE = $60^0$ (đ.đ) $\Rightarrow$ CIF = CID = $60^0$

$\Rightarrow$ $\Delta$CID = $\Delta$CIF (g.c.g)

c) Trên đoạn IM lấy điểm N sao cho IB = IN $\Rightarrow$ NM = IC

$\Rightarrow$ $\Delta$BIN đều $\Rightarrow$ BN = BI và BNM = $120^0$

$\Rightarrow$ $\Delta$BNM = $\Delta$BIC (c.g.c)

$\Rightarrow$ BM = BC và $B_2 = B_4$ $\Rightarrow$ $\Delta$BCM đều

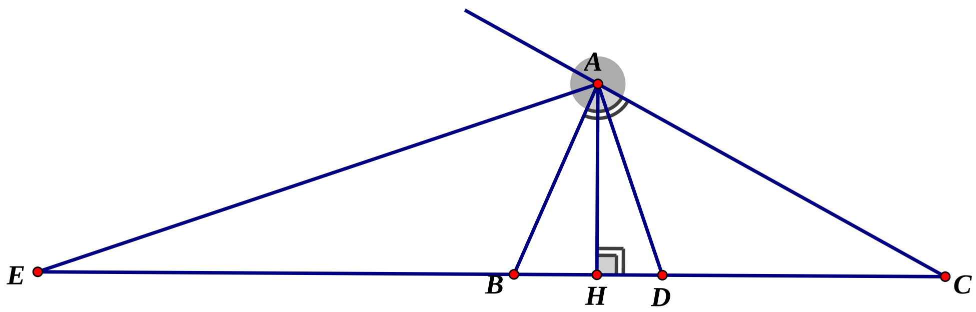
**Câu 60.** Cho tam giác ABC, AD là tia phân giác của góc A và $\widehat{B} > \widehat{C}$.

a) Chứng minh rằng $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} - \widehat{C}$.

b) Vẽ đường thẳng AH vuông góc BC tại H. Tính $\widehat{ADB}$ và $\widehat{HAD}$ khi biết $\widehat{B} - \widehat{C} = 40^0$

c) Vẽ đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc đỉnh A, nó cắt đường thẳng BC tại E. Chứng minh rằng $\widehat{AEB} = \widehat{HAD} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$

**Hướng dẫn giải**




a)

$\widehat{ADC} = \widehat{B} + \widehat{BAD}$ ( góc ngoài ΔABD) (1)

$\widehat{ADB} = \widehat{C} + \widehat{CAD}$ ( góc ngoài ΔADC) (2)

Mà AD là phân giác góc BAD nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra đpcm

b)

Ta có:

$\widehat{ADC}-\widehat{ADB}=\widehat{B}-\widehat{C}=40^0$

$\widehat{ADC}+\widehat{ADB}=180^0$

$\Rightarrow \widehat{ADC}=\dfrac{180^0+40^0}{2}=110^0; \widehat{ADB}=70^0$

$\Rightarrow \widehat{AHD}=20^0$

c)

Ta có AD, AE là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh A nên AD⊥AE

Xét $\Delta$AED ta có: $\widehat{AEB}+\widehat{ADE}=90^0$ (4)

Xét $\Delta$AHD ta có: $\widehat{HAD}+\widehat{ADE}=90^0$ (5)

Mặt khác

$$\widehat{ADB}=\widehat{C}+\widehat{DAC}=\widehat{C}+\frac{\widehat{A}}{2}$$

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^o$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{A}}{2}=90^o-\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$$

$$\widehat{ADB}=\widehat{C}+90^o-\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$$

$$=\frac{\widehat{C}-\widehat{B}}{2}+90^o$$

$$\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}+\widehat{ADB}=90^o (6)$$

Từ (4), (5) và (6) suy ra đpcm