NGỌC HUYỀN LB
the BEST or NOTHING

Tuyển tập 200 bài toán VD - VDC hay nhất năm 2020 - 2021

Chúc em đỗ đại học NV 1.
Cô của em
Huyền
Ngọc Huyền LB ♡

*"Đây là món quà tâm huyết cô dành tặng cho tất cả học sinh **Livestream** trên page **Học Toán cô Ngọc Huyền LB**.*
Chúc tất cả các em sẽ dành điểm cao trong kì thi đại học sắp tới"

Hệ thống đào tạo trực tuyến **ngochuyenlb.edu.vn**

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách 200 BÀI TOÁN VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO là món quà tâm huyết nhất trong năm học này của cô. Đây là món quà cô muốn tặng cho tất cả các em học sinh đã và đang theo dõi cô trên fan page **"Học toán cô Ngọc Huyền LB"** nhân dịp Giao Thừa chuyển sang năm mới Tân Sửu. Đặc biệt cô muốn gửi tới tất cả các bạn học sinh **"VỀ ĐÍCH 9 + TỔNG ÔN VÀ LUYỆN 150 ĐỀ:**

*"Giai đoạn ra Tết sẽ rất khốc liệt, vì các em vừa phải gồng mình Luyện đề, vừa phải nghiền ngẫm lại các bài VD-VDC và kĩ thuật Casio nhưng cô tin rằng khóa Vận Dụng – Vận Dụng Cao mà cô cho triển khai từ 1/3 tới sẽ giúp các em qua giai đoạn này một cách ngoạn mục nhất. Ngoài việc sàng lọc những câu VD – VDC từ hơn **200 đề thi thử mới nhất**, cô còn bổ sung thêm những câu TH-NB mà các em hay nhầm lẫn nữa. Tất cả sẽ được quay video chi tiết nhất và sẽ được làm file chi tiết nữa. Ngoài ra, những bạn gia nhập VỀ ĐÍCH 9+ sau thì chỉ cần tập trung vào những tinh hoa mà cô đã sàng lọc ra từ các đề đã thi trong khóa VD-VDC. Không cần thiết phải xem lại cả đề dài lê thê".*

1 đề có thể không giỏi, 10 đề có thể chưa giỏi, 100 đề có thể chưa thực sự giỏi, nhưng trải qua 150 đề thì cô tin chúng ta sẽ chinh phục được mọi cánh cổng Đại Học!

Cuối cùng, cô mong các em hãy kiên định mục tiêu đã định, hãy ghì chặt nó và xông lên chinh phục nó cùng cô!

Cô tin, chúng ta sẽ làm được!

"Nếu tôi quyết làm gì, tôi sẽ làm nó một cách thật ngoạn mục hoặc tôi sẽ không làm gì cả".

MỤC LỤC

A. ĐỀ BÀI

I. HÀM SỐ

Câu 1: Biết rằng tồn tại các số nguyên a,b sao cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất đều là các số nguyên và tập giá trị của hàm số đã cho chỉ có đúng 6 số nguyên. Giá trị của a^2+2b^2 bằng

A. 36. **B.** 34. **C.** 41. **D.** 25.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình $f(3-4x)\le e^{3-4x}+2m$ đúng với mọi $x\in\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{4}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(-2)-\dfrac{1}{e^2}$. **B.** $m\ge \dfrac{f(2)}{2}-\dfrac{1}{2}e^2$. **C.** $m\ge \dfrac{f(-2)}{2}-\dfrac{1}{2e^2}$. **D.** $m\ge f(2)-e^2$.

Câu 3: Cho hàm số $y=x^2-2\left(m+\dfrac{1}{m}\right)x+m\ (m\ne 0)$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;1]$ lần lượt là y_1, y_2. Số giá trị của m để $y_1-y_2=8$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 4: Giá trị tham số thực k nào sau đây để đồ thị hàm số $y=x^3-3kx^2+4$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $-1<k<1$. **B.** $k>1$. **C.** $k<1$. **D.** $k\ge 1$.

Câu 5: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x-y+z=3\\ x^2+y^2+z^2=5\end{cases}$. Hỏi biểu thức $P=\dfrac{x+y-2}{z+2}$ có thể nhận bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash[-2;2]$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
y'		$-$				$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	2018	$\nearrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f(2018x-2019)\right|=2020$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tập tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\dfrac{a}{b};c\right)$ với a, b, c là các số nguyên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b+c$.

A. $a+b+c=11$. **B.** $a+b+c=8$. **C.** $a+b+c=10$. **D.** $a+b+c=5$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$ tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\ln 2+1$. **B.** $f^2(2)=\sqrt{\ln 2+1}$. **C.** $f^2(2)=2\ln 2+2$. **D.** $f^2(2)=\sqrt{2\ln 2+2}$.

Câu 9: Tìm tất cả giá trị của tham số thực m để phương trình $2\log_2(x+2)+\log_2(x-2)^2=2\log_2\left(2x^2-6x+m\right)$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m\in(-20;4)$. **B.** $m\in(-20;4)\cup(5;7)$. **C.** $m\in(5;+\infty)$. **D.** $m\in[-20;4)\cup(5;7)$.

Câu 10: Cho hàm số $y=x^3-3x+2\,(C)$. Biết rằng đường thẳng $d:y=mx+1$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A,B,C. Tiếp tuyến tại ba điểm A,B,C của đồ thị (C) cắt đồ thị (C) lần lượt tại các điểm A',B',C' (tương ứng khác A,B,C). Biết rằng A',B',C' thẳng hàng, tìm giá trị của tham số m để đường thẳng đi qua ba điểm A',B',C' vuông góc với đường thẳng $\Delta:x+2018y-2019=0$.

A. $m=\frac{1009}{2}$. **B.** $m=\frac{1009}{4}$. **C.** $m=\frac{2009}{4}$. **D.** $m=\frac{2019}{4}$.

Câu 11: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)(x_0<0)$ của đồ thị (C) tạo với hai đường tiệm cận của đồ thị (C) một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Giá trị biểu thức $T=2018x_0+2019y_0$ bằng

A. $T=2021$. **B.** $T=2016$. **C.** $T=2018$. **D.** $T=2019$.

Câu 12: Cho hàm số $y=x^3-3x+1\,(C)$. Biết rằng tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị (C) phân biệt và có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân. Gọi S là tập các giá trị của k thỏa mãn điều kiện trên, tính tổng các phần tử của S.

A. 3. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 0.

Câu 13: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $e^{x+y+z}\le e(x+y+z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4}{(x-z)^2}+\frac{4}{xz}+\frac{1}{y^3}$.

A. 108. **B.** 106. **C.** 268. **D.** 106.

Câu 14: Hàm số $y=|x-2|\left(x^2+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\frac{2|x|-1}{|x|+2}=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left(1;\frac{5}{2}\right)$. **B.** $m\in\left(-2;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in(0;3)$. **D.** $m\in\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=x^3-12x^2+ax+b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(f(f(3)))=3$ và $f(f(f(f(4))))=4$. Tìm $f(7)$.

A. 31. **B.** 32. **C.** 33. **D.** 34.

Câu 17: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ đạt cực trị tại các điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1\in(-1;0);x_2\in(1;2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương. Khẳng định nào dưới đây đúng?

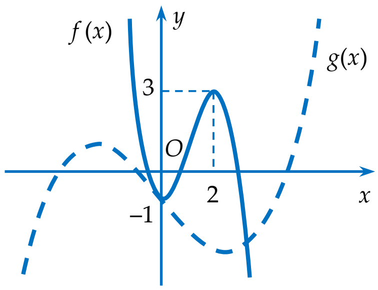
A. $a<0,b>0,c>0,d>0$. **B.** $a<0,b<0,c>0,d>0$.

C. $a>0,b>0,c>0,d>0$. **D.** $a<0,b>0,c<0,d>0$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$. Gọi d_1,d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)=x.f(2x-1)$ tại điểm có hoành độ $x=1$. Biết rằng hai đường thẳng d_1 và d_2 vuông góc với nhau. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\sqrt{2}<|f(1)|<2$. **B.** $|f(1)|\le\sqrt{2}$. **C.** $|f(1)|\ge 2\sqrt{2}$. **D.** $2\le|f(1)|<2\sqrt{2}$.

Câu 19: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x)=-f(mx+n)$ $(m,n\in\mathbb{Q})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 5. Giá trị biểu thức $3m+2n$ là

A. –5. **B.** $-\dfrac{13}{5}$. **C.** $\dfrac{16}{5}$. **D.** 4.

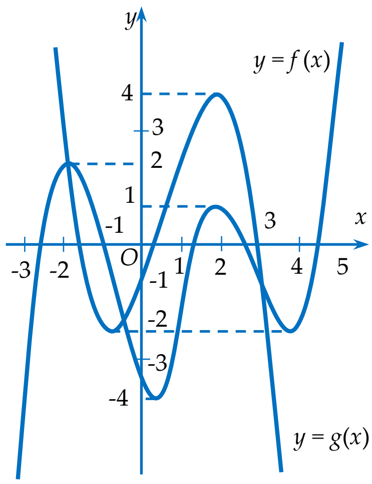
Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

Hàm số $y=f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 21: Cho hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là



A. 25. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 26.

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-11x$ có đồ thị là (C). Gọi M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1=-2$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3

khác $M_2,...,$ tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} $(n\in\mathbb{N},n\ge 4)$. Gọi $M_n(x_n;y_n)$. Tìm n sao cho $11x_n+y_n+2^{2019}=0$.

A. $n=675$. **B.** $n=673$. **C.** $n=674$. **D.** $n=672$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)\ge x^4+\dfrac{2}{x^2}-2x$ $\forall x>0$ và $f(1)=-1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

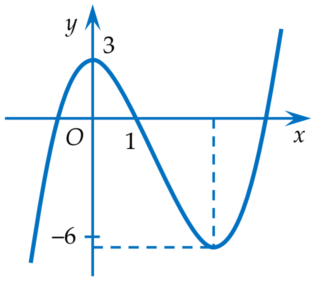
A. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(0;1)$.

B. Phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0;+\infty)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(1;2)$.

D. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(2;5)$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



Đặt $g(x)=2^{f(x)}-3^{f(x)}$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 25: Cho phương trình $\sin x(2-\cos 2x)-2(2\cos^3 x+m+1)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 26: Các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\left(1+\dfrac{4x}{1+x^2}\right)m+\dfrac{2x}{1+x^2}<3$ nghiệm đúng với mọi số thực x là

A. $m\in(-\infty;-4)\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

B. $m\in\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

C. $m\in\left(-4;\dfrac{2}{3}\right)$.

D. $m\in(-\infty;-4)$.

Câu 27: Gọi T là tập hợp các giá trị nguyên của m sao cho trong nửa khoảng $(1;2019]$, phương trình $\left|x^2-4|x|-5\right|+1-m=0$ có hai nghiệm phân biệt. Khi đó số phần tử của T là

A. 2006. **B.** 2009. **C.** 2019. **D.** 2018.

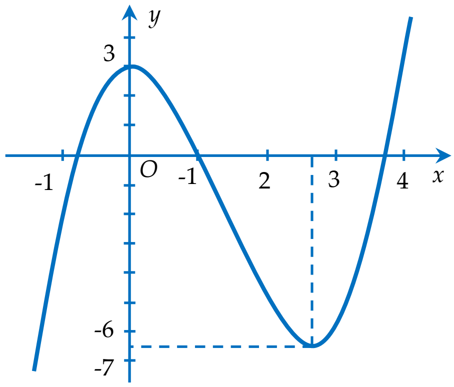
Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên a nhỏ hơn 5 để bất phương trình $a(x+4)>3-x$ với mọi $x\in[-2;1]$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 29: Giả sử đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x-1}{1-2x}$ tại hai điểm phân biệt E và F. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại E và F. Tìm giá trị nhỏ nhất $\min S$ của biểu thức $S=k_1^4+k_2^4-3k_1k_2$.

A. $\min S = -1$. **B.** $\min S = -\dfrac{5}{8}$. **C.** $\min S = 135$. **D.** $\min S = -\dfrac{25}{81}$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 31: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có đồ thị là (C). Gọi T là tập hợp tất cả các điểm thuộc đường thẳng $y = x - 1$ mà từ điểm đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C). Tìm tổng tung độ của các điểm thuộc T.

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

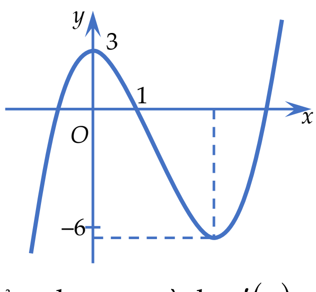
Câu 32: Cho hàm số $y = \left|x^3 + 3x^2 - 72x + 90\right|$. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-5;5\right]$.

A. 328. **B.** 470. **C.** 314. **D.** 400.

Câu 33: Một mảnh giấy hình chữ nhật có chiều dài là $12cm$ và chiều rộng là $6cm$. Thực hiện thao tác gấp góc dưới bên phải sao cho đỉnh được gấp nằm trên cạnh chiều dài còn lại (như hình vẽ). Hỏi chiều dài L tối thiểu của nếp gấp là bao nhiêu?

A. $\min L = 6\sqrt{2}\ cm$. **B.** $\min L = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}\ cm$. **C.** $\min L = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}\ cm$. **D.** $\min L = 9\sqrt{2}\ cm$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x) = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 35: Cho $x, y > 0$ và $x + y = \dfrac{5}{4}$ sao cho biểu thức $P = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó:

A. $x^2 + y^2 = \dfrac{25}{32}$. **B.** $x^2 + y^2 = \dfrac{17}{16}$. **C.** $x^2 + y^2 = \dfrac{25}{16}$. **D.** $x^2 + y^2 = \dfrac{13}{16}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C), điểm M di động trên (C). Gọi d là tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ. Khi đó giá trị nhỏ nhất của d là:

A. $\dfrac{207}{250}$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $2\sqrt{2}-2$.

Câu 37: Cho hai chất điểm A và B cùng bắt đầu chuyển động trên trục Ox từ thời điểm $t=0$. Tại thời điểm t, vị trí của chất điểm A được cho bởi $x=f(t)=-6+2t-\frac{1}{2}t^2$ và vị trí của chất điểm B được cho bởi $x=g(t)=4\sin t$. Biết tại đúng hai thời điểm t_1 và t_2 ($t_1<t_2$), hai chất điểm có vận tốc bằng nhau. Tính theo t_1 và t_2 độ dài quãng đường mà chất điểm A đã di chuyển từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2.

A. $4-2(t_1+t_2)+\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)$. **B.** $4+2(t_1+t_2)-\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)$.

C. $2(t_2-t_1)-\frac{1}{2}(t_2^2-t_1^2)$. **D.** $2(t_1-t_2)-\frac{1}{2}(t_1^2-t_2^2)$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)=x^3+3ax^2+3x+3$ có đồ thị (C) và $g(x)=x^3+3bx^2+9x+5$ có đồ thị (H), với a,b là các tham số thực. Đồ thị $(C),(H)$ có chung ít nhất 1 điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+2|b|$

A. $\sqrt{21}$. **B.** $2\sqrt{6}+6$. **D.** $3+5\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x<0\\ m+\dfrac{1-x}{1+x} & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $m=1$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=0$

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, với $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Biết rằng $f'(x)+3x(x-2)f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(|x|)+m=0$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

A. $1<m<e^4$. **B.** $-e^6<m<-1$. **C.** $-e^4<m<-1$. **D.** $0<m<e^4$.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau vô nghiệm:

$x^6+3x^5+6x^4-mx^3+6x^2+3x+1=0$.

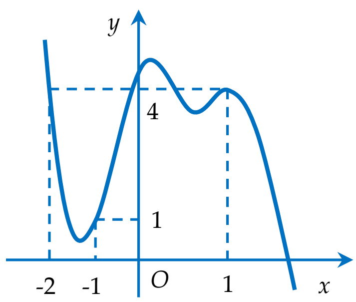
A. Vô số. **B.** 26. **C.** 27. **D.** 28.

Câu 42: Cho các số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn: $x+y=\frac{5}{4}$ thì biểu thức $S=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}$ thì $a.b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $a.b=\frac{3}{8}$. **B.** $a.b=\frac{25}{64}$. **C.** $a.b=0$. **D.** $a.b=\frac{1}{4}$.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

Đặt $g(x)=3f(x)-x^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



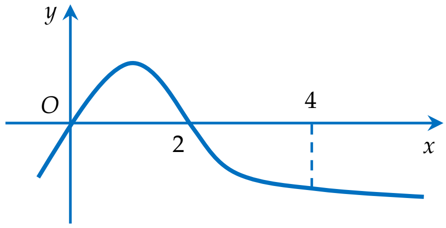
A. $g(-2)>g(2)>g(-1)$.

B. $g(2)>g(-2)>g(-1)$.

C. $g(-1)>g(-2)>g(2)$.

D. $g(-1)>g(2)>g(-2)$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ. Biết rằng $f(2)+f(4)=f(3)+f(0)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ lần lượt là:

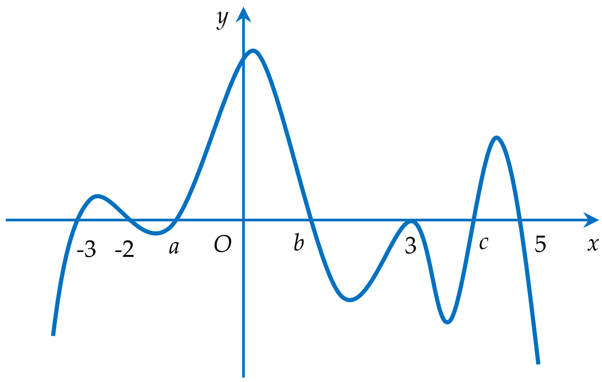


A. $f(2);f(0)$. **B.** $f(4);f(2)$.
C. $f(0);f(2)$. **D.** $f(2);f(4)$.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để hàm số $y=x^3-3x^2-(2m-5)x+5$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

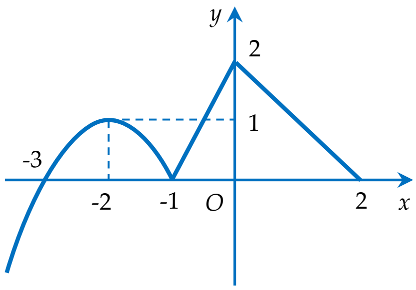
A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2023.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3;-2;a;b;3;c;5$ với $-\frac{4}{3}<a<-1;1<b<\frac{4}{3}$; $4<c<5$ có dạng như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f(2|x|+m-3)$ có 7 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3.
C. 4. **D.** Vô số.

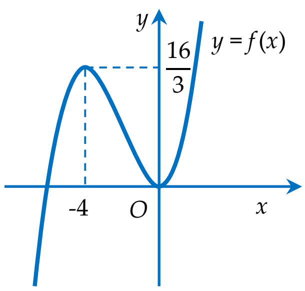
Câu 47: Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Biết $f(-3)=0$, giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng

A. $\frac{23}{6}$. **B.** $\frac{31}{6}$. **C.** $\frac{35}{3}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

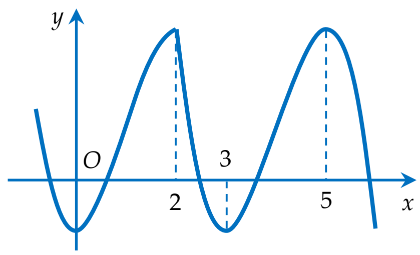
Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f(m^2+4m+4)$ có nghiệm?

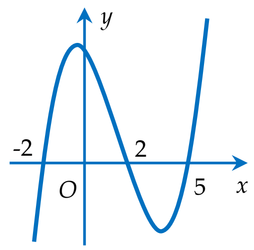
A. 4. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 3.

Câu 49: Cho số thực m và hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y=g(x)=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)=\left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+x-|x|-m\right|$, với m là tham số. Gọi a là giá trị nguyên nhỏ nhất của m để hàm số có ít điểm cực trị nhất; A là giá trị nguyên lớn nhất của m để hàm số có nhiều điểm cực trị nhất. Giá trị của $A+a$ bằng

A. -7. **B.** -4. **C.** -3. **D.** 4.

Câu 52: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2 || $+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để phương trình $m^3f^3(x)+3mf(x)=\left(12m^2+7\right)\sqrt{12m^2+1}+36m^2+7$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 4041. **B.** 2019. **C.** 2010. **D.** 2021.

Câu 53: Biết rằng họ đồ thị $(C_m):y=(m-3)x^3-4(m-3)x^2-(m+1)x+m$ luôn đi qua ba điểm cố định thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng đi qua ba điểm cố định này.

A. $y=4x-3$. **B.** $y=-4x-3$. **C.** $y=4x+3$. **D.** $y=-4x+3$.

II. MŨ – LOGARIT

Câu 1: Cho các số thực a, b thỏa mãn $\frac{3}{16} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a \frac{16b-3}{256} + 16\log^2_{\frac{b}{a}} a$.

A. 15. B. 16. C. 17. D. 18.

Câu 2: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3) = 72$

A. $m = \frac{61}{2}$. B. $m = 3$. C. Không tồn tại. D. $m = \frac{9}{2}$.

Câu 3: Để cấp tiền cho con trai tên là Lâm học đại học, ông Anh gửi vào ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất cố định 0,7%/tháng, số tiền lãi hàng tháng được nhập vào vốn để tính lãi cho tháng tiếp theo (thể thức lãi kép). Cuối mỗi tháng, sau khi chốt lãi, ngân hàng sẽ chuyển vào tài khoản của Lâm một khoản tiền giống nhau. Tính số tiền m mỗi tháng Lâm nhận được từ ngân hàng, biết rằng sau bốn năm (48 tháng), Lâm nhận hết số tiền cả vốn lẫn lãi mà ông Anh đã gửi vào ngân hàng (kết quả làm tròn đến đồng).

A. $m = 5.008.376$ (đồng). B. $m = 5.008.377$ (đồng).

C. $m = 4.920.224$ (đồng). D. $m = 4.920.223$ (đồng).

Câu 4: Cho phương trình $9^x + 2(x-m)3^x + 2x - 2m - 1 = 0$. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình có nghiệm dương. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. T là một khoảng. B. T là một nửa khoảng.

C. T là một đoạn. D. $T = \mathbb{R}$.

Câu 5: Cho biểu thức $A = \log\left(2017 + \log\left(2016 + \log\left(2015 + \log\left(... + \log\left(3 + \log 2\right)...\right)\right)\right)\right)$.

Biểu thức A có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(\log 2017; \log 2018)$. B. $(\log 2018; \log 2019)$.

C. $(\log 2019; \log 2020)$. D. $(\log 2020; \log 2021)$.

Câu 6: Xét số thực a, b thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \le b < a$. Biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a}{b}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

A. $a = b^2$. B. $a^2 = b^3$. C. $a^3 = b^2$. D. $a^2 = b$.

Câu 7: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để phương trình $(x^2-1)\log^2(x^2+1) - m\sqrt{2(x^2-1)}.\log(x^2+1) + m + 4 = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $1 \le |x_1| \le |x_2| \le 3$

A. 4017. B. 4028. C. 4012. D. 4003.

Câu 8: Trong thời gian liên tục 25 năm, một người lao động luôn gửi đúng 4.000.000 đồng vào một ngày cố định của tháng ở ngân hàng M với lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền là 0,6% tháng. Gọi A là số tiền người đó có được sau 25 năm. Hỏi mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $3.500.000.000 < A < 3.550.000.000$ B. $3.400.000.000 < A < 3.450.000.000$

C. $3.350.000.000 < A < 3.400.000.000$ D. $3.450.000.000 < A < 3.500.000.000$

Câu 9: Cô Huyền gửi tổng cộng 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng tiền lãi đạt được ở hai ngân hàng là 27.507.768,13 đồng (chưa làm tròn). Hỏi số tiền cô Huyền gửi lần lượt ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

A. 140 triệu và 180 triệu **B.** 120 triệu và 200 triệu

C. 200 triệu và 120 triệu **D.** 180 triệu và 140 triệu

Câu 10: Đầu mỗi tháng bác An gửi tiết kiệm vào ngân hàng HD Bank một số tiền như nhau với lãi suất $0,45\%/$ tháng. Giả sử rằng lãi suất hàng tháng không thay đổi trong 3 năm liền kể từ khi bác An gửi tiết kiệm. Hỏi bác An cần gửi một lượng tiền tối thiểu T (đồng) bằng bao nhiêu vào ngân hàng HD Bank để sau 3 năm gửi tiết kiệm số tiền lãi đủ để mua được chiếc xe máy có trị giá 30 triệu đồng?

A. $T = 10050000$. **B.** $T = 25523000$. **C.** $T = 9493000$. **D.** $T = 9492000$.

Câu 11: Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về giảm biên chế cán bộ công chức trong 6 năm từ 2017 đến 2023 là 10,6% với số lượng hiện có năm 2017 theo phương thức "ra 2 vào 1" (tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách Nhà nước 2 người thì được tuyển mới 1 người). Giả sử tỉ lệ giảm và tuyển mới hàng năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm (làm tròn đến 0,01%) là

A. 1,13%. **B.** 1,72%. **C.** 2,02%. **D.** 1,85%.

Câu 12: Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \dfrac{1+\log_{12} x + \log_{12} y}{2.\log_{12}(x+3y)}$.

A. $M = 1$. **B.** $M = \dfrac{1+\log_{12} 3y}{\log_{12} 6}$. **C.** $M = 2$. **D.** $M = \log_{12} 6$.

Câu 13: Cho a, b là các số thực và hàm số: $f(x) = a\log^{2021}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + b\sin x.\cos(2020x) + 6$.

Biết $f\left(2020^{\ln 2021}\right) = 10$. Tính $P = f\left(-2021^{\ln 2020}\right)$.

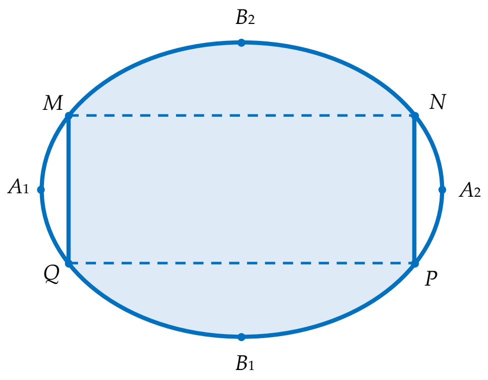
A. $P = 4$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = -2$. **D.** $P = 10$.

Câu 14: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\dfrac{1}{4} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a\left(b - \dfrac{1}{4}\right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b}$

A. $P = \dfrac{7}{2}$. **B.** $P = \dfrac{3}{2}$. **C.** $P = \dfrac{9}{2}$. **D.** $P = \dfrac{1}{2}$.

III. TÍCH PHÂN

Câu 1: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí phần tô đậm là 200 000 đồng/ m² và phần còn lại là 100 000 đồng/ m². Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8m$, $B_1B_2 = 6m$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3m$?



A. 7.322.000 đồng. B. 7.213.000 đồng.
C. 5.526.000 đồng. D. 5.782.000 đồng.

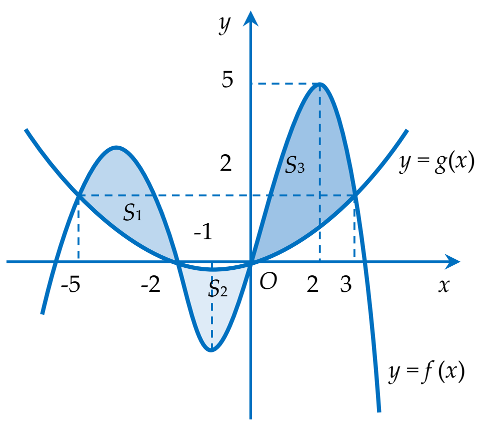
Câu 2: Cho hàm số $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ với $x > 0$. Tính $g'(e^2)$.

A. $g'(e^2) = \frac{e^2 - 1}{2}$. B. $g'(e^2) = \frac{1 - e^2}{2}$. C. $g'(e^2) = \frac{1}{2}$. D. $g'(e^2) = 2$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$ thỏa mãn $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1)$ và $f(1) = 2\ln 2 + 1$. Khi đó $f(2) = a + b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $a + b$.

A. $\frac{27}{16}$. B. $\frac{15}{16}$. C. $\frac{39}{16}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường parabol $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ lần lượt là m, n, p.



Giá trị của tích phân $\int_{-5}^{3} f(x) dx$ bằng

A. $-m + n - p - \frac{208}{45}$. B. $m - n + p + \frac{208}{45}$. C. $m - n + p - \frac{208}{45}$. D. $-m + n - p + \frac{208}{45}$.

Câu 5: Tính tích phân $\int_0^2 \max\{x, x^3\} dx$

A. 2. B. 4. C. $\frac{15}{4}$. D. $\frac{17}{4}$.

Câu 6: Khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{\frac{5 + (x-4)e^x}{xe^x + 1}}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$ quanh trục hoành có thể tích $V = \pi[a + b\ln(e+1)]$, trong đó a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + b = 5$. B. $a - 3b = -7$. C. $a + b = 9$. D. $a - 3b = 17$.

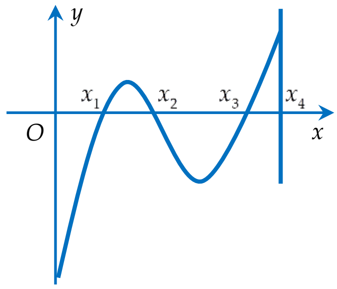
Câu 7: Cho hàm số $f(x)=(x^2-2x-3)e^{-x}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ trên đoạn $[-1;0]$, biết rằng $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $T=am+bM+c$.

A. $T=2-24e$. **B.** $T=0$. **C.** $T=3-2e$. **D.** $T=-16e$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0)=0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$. Biết rằng giá trị của biểu thức $P=2M-m$ có dạng $a\sqrt{11}-b\sqrt{3}+c,(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $a+b+c$

A. $a+b+c=4$. **B.** $a+b+c=7$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=5$.

Câu 9: Cho các số thực x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn $0<x_1<x_2<x_3<x_4$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;x_4]$. Đáp án nào sau đây đúng?



A. $M+m=f(0)+f(x_3)$. **B.** $M+m=f(x_3)+f(x_4)$.

C. $M+m=f(x_1)+f(x_2)$. **D.** $M+m=f(0)+f(x_1)$.

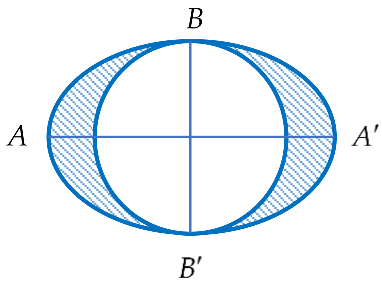
Câu 10: Cho $0<a\neq 1+\sqrt{2}$ và các hàm $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$, $g(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

I. $f^2(x)-g^2(x)=1$. II. $g(2x)=2g(x)f(x)$.

III. $f[g(0)]=g[f(0)]$. IV. $g'(2x)=g'(x)f(x)-g(x)f'(x)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 11: Trong mặt phẳng (P), cho elip (E) có độ dài trục lớn là $AA'=8$ và độ dài trục nhỏ là $BB'=6$. Đường tròn tâm O đường kính BB' như hình vẽ. Tính thể tích vật thể tròn xoay có được bằng cách cho miền hình phẳng giới hạn bởi đường elip và đường tròn đó (phần hình phẳng tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục AA'



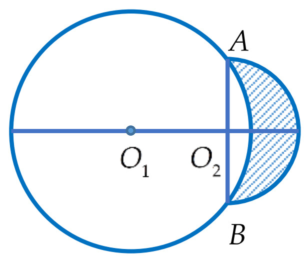
A. $V=36\pi$. **B.** $V=12\pi$.

C. $V=16\pi$. **D.** $V=\dfrac{64\pi}{3}$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x f'(x)dx=\int_0^1 e^x f''(x)dx\neq 0$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{e.f'(1)-f'(0)}{e.f(1)-f(0)}$ bằng

A. –2. **B.** –1. **C.** –2. **D.** 1.

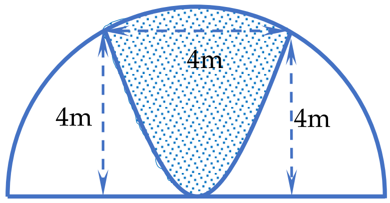
Câu 13: Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A,B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành



A. $V=\dfrac{14\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{68\pi}{3}$.

C. $V=\dfrac{40\pi}{3}$. **D.** $V=36\pi$.

Câu 14: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}\left(\text{m}\right)$. Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng $4\left(\text{m}\right)$, phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/ m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



A. 3.895.000 đồng **B.** 1.948.000 đồng .**C.** 2.388.000 đồng **D.** 1.194.000 đồng

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[1;2\right]$ thỏa mãn $f\left(2\right)=0,\int\limits_1^2\left[f'\left(x\right)\right]^2dx=\frac{1}{45}$ và $\int\limits_1^2\left(x-1\right)f\left(x\right)dx=-\frac{1}{30}$. Tính $I=\int\limits_1^2 f\left(x\right)dx.$

A. $I=-\frac{1}{12}$. **B.** $I=-\frac{1}{15}$. **C.** $I=-\frac{1}{36}$. **D.** $I=\frac{1}{12}$.

Câu 16: Cho biết $\int\limits_0^{\sqrt{2}} x.f\left(x^2\right)\text{d}x=4,\ \int\limits_2^3 f\left(z\right)\text{d}z=2,\ \int\limits_9^{16}\frac{f\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\text{d}t=2.$ Tính $\int\limits_0^4 f\left(x\right)\text{d}x.$

A. 1. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 17: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên $\left[1;3\right]$, $f\left(1\right)=f'\left(1\right)=1$ và $f\left(x\right)>0, f\left(x\right)f''\left(x\right)=\left[f'\left(x\right)\right]^2-\left[xf\left(x\right)\right]^2, \forall x\in\left[1;3\right]$. Tính $\ln f\left(3\right)$.

A. -4. **B.** -3. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 18: Xét hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-1;2\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+2xf\left(x^2-2\right)+3f\left(1-x\right)=4x^3$. Tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-1}^2 f\left(x\right)\text{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

Câu 19: Cho hàm số $f\left(x\right)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'\left(x\right)=\left(2x+3\right).f^2\left(x\right)$ và $f\left(0\right)=\frac{-1}{2}$. Biết tổng $f\left(1\right)+f\left(2\right)+...+f\left(2017\right)+f\left(2018\right)+f\left(2019\right)=\frac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $\frac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=1516$.

Câu 20: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$, có đồ thị $\left(C\right)$ và M là một điểm bất kì thuộc $\left(C\right)$ sao cho tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M cắt $\left(C\right)$ tại điểm thứ hai N; tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại N cắt $\left(C\right)$ tại điểm thứ hai P. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng MN và $\left(C\right)$; đường thẳng NP và $\left(C\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S_2=\frac{1}{16}S_1$. **B.** $S_1=\frac{1}{8}S_2$. **C.** $S_1=\frac{1}{16}S_2$ **D.** $S_2=\frac{1}{8}S_1$.

IV. SỐ PHỨC

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+3i|+|\bar{z}+5+i|=2\sqrt{65}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+2+i|$ đạt được khi $z=a+bi$ với a,b là các số thực dương. Giá trị của $2b+3a$ bằng

A. 19. **B.** 16. **C.** 24. **D.** 13.

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+2|z-\bar{z}|=8$; a,b,c dương. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-3i|$. Tính $M+m$.

A. $\sqrt{10}+\sqrt{34}$ **B.** $\sqrt{5}+\sqrt{58}$ **C.** $\sqrt{10}+\sqrt{58}$ **D.** $2\sqrt{10}$

Câu 3: Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2+7-24i|$ nằm trong khoảng nào?

A. $(0;1009)$. **B.** $(1009;2018)$. **C.** $(2018;4036)$. **D.** $(4036;+\infty)$.

Câu 4: Cho phương trình $z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$, với a,b,c,d là các số thực. Biết phương trình có 4 nghiệm không là số thực, tích hai trong bốn nghiệm bằng $13+i$ và tổng của hai nghiệm còn lại bằng $3+4i$. Hỏi b nằm trong khoảng nào?

A. $(0;10)$. **B.** $(10;40)$. **C.** $(40;60)$. **D.** $(60;100)$.

Câu 5: Cho $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z}-3-2i|\le 5$ và $\left|\dfrac{z+4+3i}{z-3+2i}\right|\le 1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^2+y^2+8x+4y$. Tính $M+m$

A. -18. **B.** -4. **C.** -20. **D.** -2.

Câu 6: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+1|=|1-i-2z|$ là đường tròn (C). Tính bán kính R của (C).

A. $R=\dfrac{10}{9}$. **B.** $R=2\sqrt{3}$. **C.** $R=\dfrac{7}{3}$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 7: Cho $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z}+2-3i|\le|z+i-2|\le 5$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+8x+6y$. Tính $M+m$

A. $\dfrac{156}{5}-20\sqrt{10}$. **B.** $60-20\sqrt{10}$. **C.** $\dfrac{156}{5}+20\sqrt{10}$. **D.** $60+20\sqrt{10}$.

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-i|=1$ và $|z-\sqrt{2}m|=2$ với m là tham số thực. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để tồn tại hai số phức thỏa mãn các điều kiện trên là

A. $(-2;2)\setminus\{0\}$. **B.** $[-2;2]$. **C.** $[-2;2)\setminus\{0\}$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 9: Xét các số phức $z=a+bi\;(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=10$. **B.** $P=4$. **C.** $P=6$. **D.** $P=8$.

Câu 10: Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|+|z+2-i|=5\sqrt{2}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-4-3i|$. Tính tổng bình phương của M và m.

A. 82. **B.** 162. **C.** 90. **D.** $90+40\sqrt{5}$.

Câu 11: Cho hai số phức $z_1=7+9i$ và $z_2=8i$. Gọi $z=a+bi$ ($a,\,b\in\mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn $|z-1-i|=5$. Tìm $a+b$, biết biểu thức $P=|z-z_1|+2|z-z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. -3. **B.** -7. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 12: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=3,|z_2|=4,|z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Xét số phức $z=\dfrac{z_1}{z_2}=a+bi$. Tìm $|b|$

A. $|b|=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $|b|=\dfrac{\sqrt{39}}{8}$. **C.** $|b|=\dfrac{3}{8}$. **D.** $|b|=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Câu 13: Cho z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(z_1^2+1\right)\left(z_2^2+1\right)\left(z_3^2+1\right)\left(z_4^2+1\right)$

A. $P = \dfrac{17}{9}$. B. $P = -\dfrac{17}{9}$. C. $P = 425$. D. $P = -425$.

Câu 14: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2i| = 3$ và $|z_2 + 2 + 2i| = |z_2 + 2 + 4i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$ bằng

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 15: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z_1 - 2|^2 - |z_1 + 1|^2 = 1$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2 - 4 - i| = \sqrt{5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. B. $\sqrt{5}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 16: Cho 2 số phức z_1, z_2 thỏa mãn tổng của chúng là 3 và tích là 4. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ là:

A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. 4. D. $\dfrac{3+\sqrt{7}}{4}$.

Câu 17: Cho các số phức $z_1 = 1, z_2 = 2 - 3i$ và số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| + |z - 3 + i| = 2\sqrt{2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - z_2|$. Tính tổng $S = M + m$

A. $S = 4 + 2\sqrt{5}$. B. $S = 5 + \sqrt{17}$. C. $S = 1 + \sqrt{10} + \sqrt{17}$. D. $S = \sqrt{10} + 2\sqrt{5}$.

Câu 18: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 3$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. 0. B. 3. C. 2. D. $\sqrt{13}$.

Câu 19: Biết số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \le |z - 3i + 1| \le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng

A. 16π B. 4π C. 9π D. 25π

Câu 20: Cho các số phức z thỏa mãn $|z - i| = |z - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (2 - i)z + 1$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

A. $x - 7y - 9 = 0$ B. $x + 7y - 9 = 0$ C. $x + 7y + 9 = 0$ D. $x - 7y + 9 = 0$

Câu 21: Trong các số phức z thỏa mãn $|z + 4 - 3i| + |z - 8 - 5i| = 2\sqrt{38}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 - 4i|$.

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{5}{2}$ C. 2 D. 1

Câu 22: Với hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$. B. $P = 2\sqrt{26}$. C. $P = 4\sqrt{6}$. D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn tập hợp $|z - 1| = 3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức w với $(3 - 2i)w = iz + 2$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của đường tròn đó.

A. $I\left(\dfrac{8}{13}; \dfrac{1}{13}\right)$, $r = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$. B. $I(-2; 3)$, $r = \sqrt{13}$. C. $I\left(\dfrac{4}{13}; \dfrac{7}{13}\right)$, $r = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$. D. $I\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{2}\right)$, $r = 3$.

Câu 24: Cho z_1, z_2 là nghiệm phương trình $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i|$ và thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \dfrac{8}{5}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z_1 + z_2|$.

A. $\dfrac{56}{5}$. B. $\dfrac{28}{5}$. C. 6. D. 5.

V. KHỐI ĐA DIỆN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,SC. Thể tích khối chóp $S.ADNM$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{8}a^3$. **B.** $\frac{3\sqrt{6}}{16}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{16}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{24}a^3$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, trên các cạnh SA,SB,SC lần lượt lấy các điểm M,N,P sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{1}{3},\frac{SN}{SB}=\frac{1}{4},\frac{SP}{SC}=\frac{1}{6}$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD tại Q. Biết thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng $\frac{1}{8}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=10$. **B.** $V=12$. **C.** $V=80$. **D.** $V=8$.

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD). Biết khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCD)$ lần lượt là $1;2;\sqrt{5}$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SAD).

A. $d=\sqrt{\frac{20}{19}}$. **B.** $d=\sqrt{\frac{19}{20}}$. **C.** $d=\sqrt{2}$. **D.** $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=AB=1$, $AD=2$. Điểm M thuộc SA sao cho $AM=x(0<x<1)$. Tìm x để mặt phẳng (MCD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối có thể tích là V_1,V_2. Biết $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{7}$, hỏi giá trị của x nằm trong khoảng nào?

A. $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{9}\right)$. **C.** $\left(\frac{4}{9};\frac{5}{6}\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{6};1\right)$.

Câu 5: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,SC. Biết mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{5}}{8}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC cân tại B, $AB=BC=a$, $\widehat{ABC}=120°$ và $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90°$. Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC), $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{8}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$, biết khoảng cách từ điểm S và mặt phẳng (ABC) nhỏ hơn $2a$.

A. $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, SA tạo với đáy một góc $30°$. Tính theo a khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và CD.

A. $d=\frac{3\sqrt{14}a}{5}$. **B.** $d=\frac{2\sqrt{10}a}{5}$. **C.** $d=\frac{2\sqrt{15}a}{5}$. **D.** $d=\frac{4\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P. Tính thể tích V của khối đa diện $MBPA'B'N$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^37\sqrt{3}}{96}$. **D.** $V=\dfrac{a^37\sqrt{3}}{48}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA=a,SB=2a,SC=3a$ và $\widehat{ASB}=\widehat{ASC}=\widehat{BSC}=60°$. Biết đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=a^3\sqrt{2}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=3a^3\sqrt{2}$.

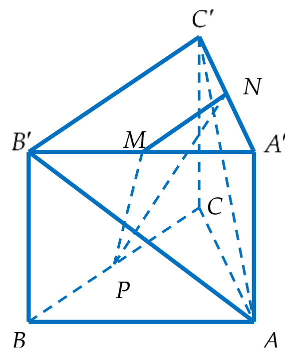
Câu 10: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của khối tứ diện tương ứng. Giá trị lớn nhất của tích các khoảng cách từ điểm M đến bốn mặt phẳng của tứ diện đã cho là

A. $\dfrac{a^4}{521}$. **B.** $\dfrac{a^4}{576}$. **C.** $\dfrac{a^4\sqrt{6}}{81}$. **D.** $\dfrac{a^4\sqrt{6}}{324}$.

Câu 11: Cho tam giác nhọn ABC, biết rằng khi quay tam giác này quanh các cạnh AB, BC và CA ta lần lượt được các khối tròn xoay có thể tích tương ứng là $672\pi,\dfrac{3136\pi}{5},\dfrac{9408\pi}{13}$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S=1979$. **B.** $S=364$. **C.** $S=84$. **D.** $S=96$.

Câu 12: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=2\sqrt{3}$ và $AA'=2$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B',A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng:



A. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

C. $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA=2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{21}}{12}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{42}}{12}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{462}}{66}$.

Câu 14: Xét các hình chóp $S.ABCD$ thỏa mãn các điều kiện: đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng a. Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất V_0 khi cosin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\sqrt{\dfrac{p}{q}}$, trong đó p,q là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{p}{q}$ là tối giản. Tính $T=(p+q).V_0$.

A. $T=3\sqrt{3}a^3$. **B.** $T=\sqrt{6}a^3$. **C.** $T=2\sqrt{3}a^3$. **D.** $T=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}a^3$.

Câu 15: Xét các tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi V_1,V_2 và V_3 lần lượt là thể tích của các khối tròn xoay sinh ra khi quay tam giác OCA quanh trung trực của đoạn thẳng CA, quay tam giác OAB quanh trung trực của đoạn thẳng AB và quay tam giác OBC quanh trung trực của đoạn thẳng BC. Tính V_3 theo R khi biểu thức V_1+V_2 đạt giá trị lớn nhất.

A. $V_3=\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}R^3$. **B.** $V_3=\dfrac{8\pi}{81}R^3$.

C. $V_3=\dfrac{2\sqrt{2}}{81}\pi R^3$. **D.** $V_3=\dfrac{\sqrt{18-6\sqrt{2}}}{9}\pi R^3$.

Câu 16: Cho hình tứ diện đều (H). Gọi (H') là hình tứ diện đều có các đỉnh là tâm các mặt của (H). Tính tỉ số diện tích toàn phần của (H') và (H).

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{1}{27}$.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ và M, N là các điểm thay đổi trên cạnh AB và CD sao cho $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$. Gọi P là một điểm trên cạnh AC và S là diện tích thiết diện cắt bởi mặt phẳng (MNP) và hình chóp. Tính tỉ số k của diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện S.

A. $\frac{2k}{k+1}$. **B.** $\frac{1}{k}$. **C.** $\frac{k}{k+1}$. **D.** $\frac{1}{k+1}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành . Gọi K là trung điểm SC. Mặt phẳng (P) qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, N. Gọi V và V' lần lượt là thể tích các khối chóp $S.ABCD$ và $S.AMKN$. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 19: Cho tam giác OAB đều cạnh a. Trên đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M sao cho $OM=x$. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên MB và OB. Gọi N là giao điểm của EF và OM. Tìm x để thể tích tứ diện $ABMN$ có giá trị nhỏ nhất

A. $x=a\sqrt{2}$. **B.** $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $x=\frac{a\sqrt{6}}{12}$. **D.** $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20: Cho hình thoi $ABCD$ có $BAD=60°, AB=2a$. Gọi H là trung điểm của AB. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S thay đổi khác H. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho $BM=\frac{1}{4}BC$. Tính theo a độ dài của SH để góc giữa SC và (SAD) có số đo lớn nhất

A. $SH=\sqrt[4]{\frac{21}{4}}a$. **B.** $SH=\frac{\sqrt[4]{21}}{4}a$. **C.** $SH=\sqrt{\frac{21}{4}}a$. **D.** $SH=\frac{\sqrt{21}}{4}a$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh cùng bằng a, hình chiếu của C trên mặt phẳng $(ABB'A')$ là tâm của hình bình hành $ABB'A'$. Tính theo a thể tích khối cầu đi qua năm điểm A, B, B', A' và C.

A. $\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\frac{8\pi\sqrt{2}a^3}{81}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{24}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{81}$.

Câu 22: Cho mặt cầu (S) bán kính R cố định. Gọi (H) là hình chóp tứ giác đều có thể tích lớn nhất nội tiếp trong (S). Tìm theo R độ dài cạnh đáy của (H).

A. $\frac{4R}{3}$. **B.** $\frac{2R}{3}$. **C.** $\frac{R}{3}$. **D.** R.

Câu 23: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) cắt khối lập phương đã cho thành hai phần, gọi V_1 là thể tích khối chứa điểm A' và V_2 là thể tích khối chứa điểm C'. Khi đó $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{25}{47}$. **B.** 1. **C.** $\frac{17}{25}$. **D.** $\frac{8}{17}$.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC)$, đáy ABC thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{\cot A+\cot B+\cot C}{2}=\frac{BC}{AB.AC}+\frac{CA}{BA.BC}+\frac{AB}{CA.CB}.$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BD và BC. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $A.BCHK$

A. $V=\frac{4\pi}{3}$. **B.** $V=\frac{32\pi}{3}$. **C.** $V=\frac{8\pi}{3}$. **D.** $V=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

Câu 25: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB', CC'. Mặt phẳng $(A'MN)$ chia khối lăng trụ thành hai phần, V_1 là thể tích của phần đa diện chứa điểm B, V_2 thể tích phần đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=2$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=3$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{2}$

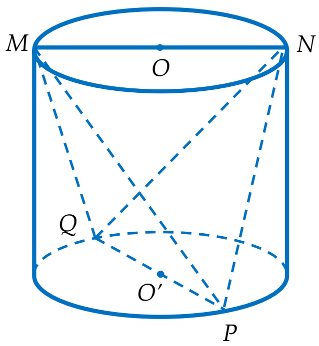
Câu 26: Một hình lập phương có cạnh 4 cm. Người ta sơn đỏ mặt ngoài của hình lập phương rồi cắt hình lập phương bằng các mặt phẳng song song với các mặt của hình lập phương thành 64 hình lập phương nhỏ có cạnh 1 cm. Có bao nhiêu hình lập phương có đúng một mặt được sơn đỏ?

A. 8 **B.** 16 **C.** 24 **D.** 48

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 4. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC. Thể tích khối chóp $S.ABPN$ là x, thể tích khối tứ diện $CMNP$ là y. Giá trị của x, y thỏa mãn các bất đẳng thức nào dưới đây?

A. $x^2+2xy-y^2>160$ **B.** $x^2-2xy+2y^2<109$ **C.** $x^2+xy-y^4<145$ **D.** $x^2-xy+y^4>125$

Câu 28: Một người thợ có một khối đá hình trụ có bán kính đáy bằng $30\,cm$. Kẻ hai đường kính MN,PQ của hai đáy sao cho $MN\perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua ba trong bốn điểm M,N,P,Q để được một khối đá có hình tứ diện (như hình vẽ dưới). Biết rằng khối tứ diện $MNPQ$ có thể tích bằng $30\,dm^3$. Thể tích của lượng đá bị cắt bỏ gần với kết quả nào dưới đây nhất?



A. $111,40\,dm^3$. **B.** $111,39\,dm^3$.

C. $111,30\,dm^3$. **D.** $111,35\,dm^3$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=2, AD=2\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,CD,CB. Tính côsin góc tạo bởi hai mặt phẳng (MNP) và (SCD).

A. $\frac{2\sqrt{435}}{145}$. **B.** $\frac{11\sqrt{145}}{145}$. **C.** $\frac{2\sqrt{870}}{145}$. **D.** $\frac{3\sqrt{145}}{145}$.

Câu 30: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại B. $BC=a$, $ABC=60°$, $CC'=4a$. Tính thể tích khối $A'CC'B'B$.

A. $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=a^3\sqrt{3}$. **D.** $V=3a^3$.

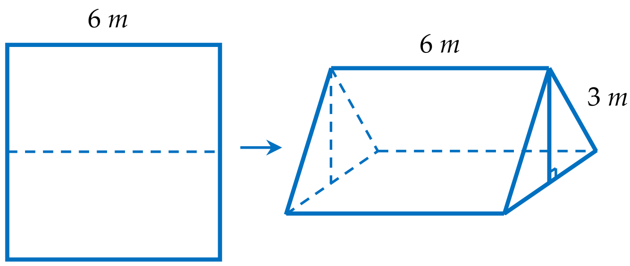
Câu 31: Kim tự tháp Kê - ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao là 147 m, cạnh đáy là 230 m. Thể tích của nó là:

A. $2592100\ m^3$. **B.** $2952100\ m^3$. **C.** $2529100\ m^3$. **D.** $2591200\ m^3$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = y > 0$ và vuông góc với đáy. Trên AD lấy điểm M, đặt $AM = x\left(0 < x < a\right)$. Nếu $x^2 + y^2 = a^2$ thì giá trị lớn nhất của thể tích $S.ABCM$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 33: Một nhóm bạn đi du lịch dựng lều bằng cách gập đôi chiếc bạt hình vuông cạnh là 6 m (hình vẽ), sau đó dùng hai chiếc gậy có chiều dài bằng nhau chống theo phương thẳng đứng vào hai mép gấp để không gian trong lều là lớn nhất thì chiều dài của chiếc gậy là:



A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ m. **C.** $\frac{3}{2}$ m. **D.** 1 m.

Câu 34: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, $O = AC \cap BD$, M, N lần lượt là trung điểm của BB' và $C'D'$. Mặt phẳng $\left(MNO\right)$ cắt $B'C'$ tại E thì tỉ số $\frac{B'E}{EC'}$ là:

A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 35: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân đỉnh A, $ABC = \alpha$, BC' tạo với $\left(ABC\right)$ góc β. Gọi I là trung điểm AA', biết $BIC = 90°$. Tính $\tan^2\alpha + \tan^2\beta$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 1.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $SI = \frac{1}{3}SO$. Mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ thay đổi đi qua B và I. $\left(\alpha\right)$ cắt các cạnh SA, SC, SD lần lượt tại M, N, P.

Gọi m, n lần lượt là GTLN, GTNN của $V_{S.MBNP}; V_{S.ABCD}$. Tính $\frac{m}{n}$

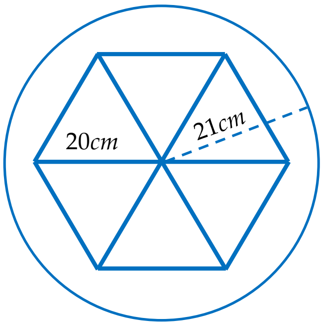
A. 2. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $\frac{8}{5}$.

Câu 37: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng a, góc hợp bởi đường cao SH của hình chóp và mặt bên bằng α. Tìm α để thể tích $S.ABCD$ là lớn nhất.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

VI. KHỐI TRÒN XOAY

Câu 1: Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột tròn của một cửa hàng kinh doanh gồm 10 chiếc. Trước khi hoàn thiện, mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lăng trụ lục giác đều có cạnh bằng 20 *cm*; sau khi hoàn thiện (bằng cách trát thêm vữa vào xung quanh), mỗi cột là một khối trụ có đường kính đáy bằng 42 *cm*. Chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là 4 *m*. Biết lượng xi măng cần dùng chiếm 80% lượng vữa và cứ một bao xi măng 50 kg thì tương đương với 64000 cm^3 xi măng. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bao xi măng loại 50 kg để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột?



A. 22 bao. **B.** 17 bao. **C.** 18 bao. **D.** 25 bao.

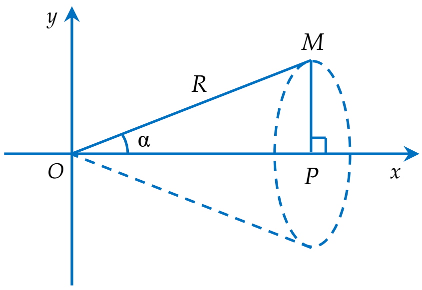
Câu 2: Thầy Thư dạy toán ở trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, tỉnh Đồng Tháp muốn xây dựng một hố ga dạng hình hộp chữ nhật có nắp bằng bê tông với thể tích 3m^3, biết tỉ số chiều cao và chiều rộng của hố ga bằng 1,5. Xác định chiều cao của hố ga để khi xây hố tiết kiệm được nguyên liệu nhất?

A. 1,2 (m). **B.** $\sqrt[3]{\frac{45}{8}}$ (m). **C.** 2 (m). **D.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ (m).

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Tính bán kính mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

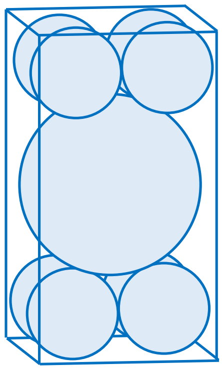
Câu 4: Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên trục Ox, cạnh huyền OM không đổi, $OM = R$ ($R > 0$). Tính theo R giá trị lớn nhất của thể tích khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó xung quanh trục Ox.



A. $\frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{9}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}\pi R^3}{27}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}\pi R^3}{9}$.

Câu 5: Một hình hộp chữ nhật có kích thước $4 \times 4 \times h$ chứa một khối cầu bán kính bằng 2 và tám khối cầu nhỏ hơn có bán kính bằng 1. Các khối cầu nhỏ đôi một tiếp xúc nhau và tiếp xúc với ba mặt của hình hộp, khối cầu lớn tiếp xúc với cả tám khối cầu nhỏ (xem hình vẽ). Tìm giá trị của h.



A. $2+2\sqrt{7}$. **B.** $3+2\sqrt{5}$. **C.** $4+2\sqrt{7}$. **D.** $5+2\sqrt{5}$.

Câu 6: Cho khối trụ có bán kính đáy bằng r và chiều cao bằng h. Cắt khối trụ bằng mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\frac{r\sqrt{2}}{2}$. Mặt phẳng (P) chia khối trụ thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa tâm của đường tròn đáy và V_2 thể tích của phần không chứa tâm của đường tròn đáy, tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3\pi-2}{\pi-2}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi-2}{3\pi+2}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=3+2\sqrt{2}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3\pi+2}{\pi-2}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABC=ADC=90°$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc tạo bởi SC và mặt phẳng đáy bằng $60°, CD=a$ và ΔADC có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $S=16\pi a^2$. **B.** $S=4\pi a^2$. **C.** $S=32\pi a^2$. **D.** $S=8\pi a^2$.

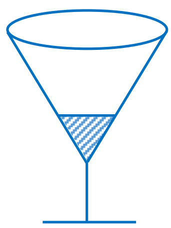
Câu 8: Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính r. Hình nón có đường tròn đáy (C) và đỉnh I đều thuộc (S) được gọi là hình nón nội tiếp mặt cầu (S). Gọi h là chiều cao của hình nón. Tìm h để thể tích của khối nón là lớn nhất.

A. $\frac{4r}{3}$. **B.** $\frac{r}{3}$. **C.** $\frac{r}{6}$. **D.** $\frac{7r}{6}$.

Câu 9: Cho một chiếc cốc có dạng hình nón cụt và một viên bi có đường kính bằng chiều cao của cốc. Đổ đầy nước vào cốc rồi thả viên bi vào, ta thấy lượng nước tràn ra bằng một nửa lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu. Biết viên bi tiếp xúc với đáy cốc và thành cốc. Tìm tỉ số bán kính của miệng cốc và đáy cốc (bỏ qua độ dày của cốc).

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 10: Một chiếc ly dạng hình nón (như hình vẽ). Người ta đổ một lượng nước vào ly sao cho chiều cao của lượng nước trong ly bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của ly (tính phần chứa nước). Hỏi nếu bịt kín miệng ly rồi úp ngược ly lại thì tỉ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước lúc đó bằng bao nhiêu?



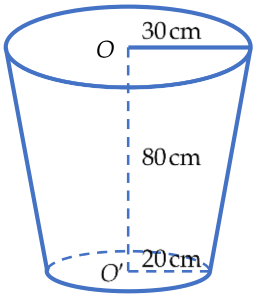
A. $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{3-\sqrt[3]{25}}{3}$.

C. $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{3-\sqrt[3]{26}}{3}$.

Câu 11: Cho hình nón đỉnh S đáy là hình tròn tâm O, SA, SB là hai đường sinh biết $SO=3$, khoảng cách từ O đến (SAB) là 1 và diện tích ΔSAB là 18. Tính bán kính đáy của hình nón trên.

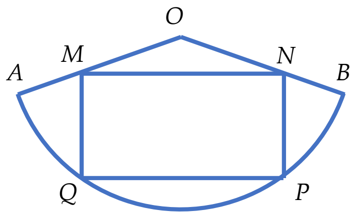
A. $\dfrac{\sqrt{674}}{4}$. B. $\dfrac{\sqrt{530}}{4}$. C. $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. D. $\dfrac{23}{4}$.

Câu 12: Học sinh A sử dụng 1 xô đựng nước có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ, trong đó đáy xô là hình tròn có bán kính 20 cm, miệng xô là đường tròn bán kính 30 cm, chiều cao xô là 80 cm. Mỗi tháng A dùng hết 10 xô nước. Hỏi A phải trả bao nhiêu tiền nước mỗi tháng, biết giá nước là 20000 đồng/ 1 m^3 (số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?



A. 35279 đồng B. 38905 đồng
C. 42116 đồng D. 31835 đồng

Câu 13: Cho tấm tôn hình nón có bán kính đáy là $r=\dfrac{2}{3}$, độ dài đường sinh $l=2$. Người ta cắt theo một đường sinh và trải phẳng ra được một hình quạt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm OA và OB. Hỏi khi cắt hình quạt theo hình chữ nhật $MNPQ$ (hình vẽ) và tạo thành hình trụ đường sinh PN trùng MQ (2 đáy làm riêng) thì được khối trụ có thể tích bằng bao nhiêu?



A. $\dfrac{3\pi\left(\sqrt{13}-1\right)}{8}$ B. $\dfrac{3\left(\sqrt{13}-1\right)}{8\pi}$ C. $\dfrac{5\left(\sqrt{13}-1\right)}{12\pi}$ D. $\dfrac{\pi\left(\sqrt{13}-1\right)}{9}$

Câu 14: Cho hình cầu (S) tâm O, bán kính R. Hình cầu (S) ngoại tiếp một hình trụ tròn xoay (T) có đường cao bằng đường kính đáy và hình cầu (S) lại nội tiếp trong một hình nón tròn xoay (N) có góc ở đỉnh bằng $60°$. Tính tỉ số thể tích của hình trụ (N) và hình nón (T).

A. $\dfrac{V_{(T)}}{V_{(N)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\dfrac{V_{(T)}}{V_{(N)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\dfrac{V_{(T)}}{V_{(N)}}=3\sqrt{2}$ D. Đáp án khác

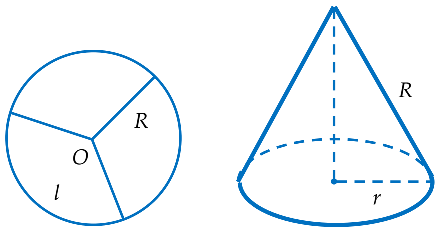
Câu 15: Một phễu đựng kem hình nón bằng bạc có thể tích $12\pi\,(\text{cm}^3)$ và chiều cao là 4 cm. Muốn tăng thể tích kem trong phễu hình nón lên 4 lần nhưng chiều cao không thay đổi thì diện tích miếng giấy bạc cần thêm là

A. $\left(12\sqrt{13}-15\right)\pi\,(\text{cm}^2)$. B. $12\pi\sqrt{13}\,(\text{cm}^2)$. C. $\dfrac{12\sqrt{13}}{15}\,(\text{cm}^2)$. D. $\left(12\sqrt{13}+15\right)\pi\,(\text{cm}^2)$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối $SCMN$ là:

A. $\frac{3a}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{93}}{6}a$. **D.** $\frac{31}{12}a$.

Câu 17: Chia tấm bìa hình tròn bán kính $R = 30\,\text{cm}$ thành 3 phần (như hình vẽ). Lấy một phần và uốn thành một hình nón có đường sinh là bán kính của hình tròn trên. Khi đó thể tích của khối nón tạo thành là:



A. $\frac{2\pi R^3\sqrt{2}}{81}$. **B.** $\frac{\pi R^3}{27}$. **C.** $\frac{2\pi R^3\sqrt{2}}{27}$. **D.** $\frac{\pi R^3}{81}$.

Câu 18: Thể tích khối tròn khối tròn xoay gây nên bởi hình tròn $x^2 + (y-a)^2 \le R^2\ (0 < R < a)$ khi quay quanh trục Ox là:

A. $8\pi^2 aR^2$. **B.** $4\pi^2 aR^2$. **C.** $\pi^2 aR^2$. **D.** $2\pi^2 aR^2$.

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ có đáy BCD là tam giác đều, trọng tâm G. Δ là đường thẳng qua G và vuông góc với (BCD). A chạy trên Δ sao cho mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ có thể tích nhỏ nhất. Khi đó thể tích khối $ABCD$ là:

A. $\frac{a^3}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 20: Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính R và chiều cao là $R\sqrt{2}$. Trên hai đường tròn (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho góc của hai đường thẳng OA và OB bằng α không đổi. Tính AB theo R và α.

A. $R\sqrt{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **B.** $R\sqrt{2+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **C.** $R\sqrt{2+4\sin^2\alpha}$. **D.** $R\sqrt{1+4\sin^2\alpha}$.

VII. HÌNH TỌA ĐỘ OXYZ

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4), B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng:

A. 135. **B.** 105. **C.** 108. **D.** 145.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;-1)$. Biết rằng tồn tại duy nhất điểm $S(a;b;c)$ khác gốc tọa độ để SA, SB, SC đôi một vuông góc. Tính tổng bình phương giá trị của a, b và c.

A. $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{4}{81}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{16}{81}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại các điểm D, E, F sao cho $OD=2OE=(m^2-2m+2)OF \neq 0$, trong đó m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để chỉ có đúng ba mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu trên. Tập hợp S có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng?

A. 7. **B.** 3. **C.** 15. **D.** 4.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;4;2), B(-1;2;4)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$. Biết rằng tồn tại điểm $M(a;b;c) \in d$ sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $2a-b+3c$ bằng

A. 10. **B.** $\frac{35}{3}$. **C.** 11. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ với $S(1;-1;6), A(1;2;3), B(3;1;2)$, $D(2;3;4)$. Gọi I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp. Tính khoảng cách d từ I đến mặt phẳng (SAD).

A. $d=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $d=\frac{\sqrt{21}}{2}$. **C.** $d=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z-7=0$ và đường thẳng d_m là giao tuyến của hai mặt phẳng $x+(1-2m)y+4mz-4=0$ và $2x+my-(2m+1)z-8=0$. Khi m thay đổi các giao điểm của d_m và (S) nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=\sqrt{\frac{142}{15}}$. **B.** $r=\sqrt{\frac{92}{3}}$. **C.** $r=\sqrt{\frac{23}{3}}$. **D.** $r=\sqrt{\frac{586}{15}}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(3;2;0)$, $C(-1;2;4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA, MB, MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay đổi nằm trên mặt cầu $(S): (x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{1}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(0;0;3), B(0;3;0)$, $C(3;0;0)$, $D(3;3;3)$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M(x;y;z)$ (với x, y, z nguyên) nằm trong tứ diện.

A. 4. **B.** 1. **C.** 10. **D.** 7.

Câu 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(1;1;1)$. Hai điểm

B,C di động trên đường thẳng d sao cho mặt phẳng (OAB) vuông góc (OAC). Gọi điểm B' là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AC. Biết quỹ tích các điểm B' là một đường tròn cố định, tính bán kính r của đường tròn này.

A. $r=\dfrac{\sqrt{60}}{10}$. **B.** $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{70}}{10}$. **D.** $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1); B(1;2;-1); C(1;2;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z-1=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt phẳng (α), giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2+MB^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ bằng

A. $\dfrac{25}{4}$. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** $\dfrac{13}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-3;1)$ và $B(-4;4;1)$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt phẳng $(P): z=-2$. Giá trị nhỏ nhất của $3MA^2+4MB^2$ bằng

A. 245. **B.** 189. **C.** 231. **D.** 267.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$, $(Q): x-2y+z+8=0$ và $(R): x-2y+z-4=0$. Một đường thẳng d thay đổi cắt ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại A,B,C. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=AB^2+\dfrac{144}{AC}$

A. $72\sqrt[3]{3}$. **B.** 96. **C.** 108. **D.** $72\sqrt[3]{4}$.

Câu 13: Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật sao cho mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền của nhà đó. Biết rằng trên bề mặt của quả bóng đều tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà mà nó tiếp xúc bằng 1, 2, 4. Tổng độ dài đường kính của hai quả bóng đó bằng

A. 6. **B.** 14. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết rằng tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ sao cho $|x|+|y|+|z|=3$ là một hình đa diện. Tính thể tích V của khối đa diện đó

A. $V=54$. **B.** $V=72$. **C.** $V=36$. **D.** $V=27$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(2;-3;-2), C(0;-1;1)$. Mặt cầu (S) có bán kính $R=6$ và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại trọng tâm G của tam giác ABC. Mặt cầu (S) nhận điểm nào dưới đây làm tâm?

A. $M(-3;1;4)$. **B.** $N(-5;3;-4)$. **C.** $P(5;-3;4)$. **D.** $Q(-3;-1;4)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(x_0;0;0)$, $B(-x_0;0;0), C(0;1;0)$ và $B'(-x_0;0;y_0)$, trong đó x_0, y_0 là các số thực dương và thoả mãn $x_0+y_0=4$. Khi khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ lớn nhất thì mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ có bán kính R bằng bao nhiêu?

A. $R=\sqrt{17}$. **B.** $R=\dfrac{29}{4}$. **C.** $R=17$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết rằng tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ sao cho $|x|+|y|+|z|=3$ là một hình đa diện. Tính thể tích V của khối đa diện đó

A. $V=54$. **B.** $V=72$. **C.** $V=36$. **D.** $V=27$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với a,b,c khác 0 và $a+2b+2c=6$. Biết rằng khi a,b,c thay đổi thì quỹ tích tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P)

A. $d=1$. **B.** $d=\sqrt{3}$. **C.** $d=2$. **D.** $d=3$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a, SB=b, SC=c$. Một mặt phẳng (α) đi qua trọng tâm của ΔABC, cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{1}{SA'^2}+\dfrac{1}{SB'^2}+\dfrac{1}{SC'^2}$.

A. $\dfrac{3}{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $\dfrac{2}{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $\dfrac{9}{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt Ox, Oy, Oz tương ứng tại A, B, C. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.

A. $T=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $T=\dfrac{1}{3}$. **C.** $T=\dfrac{1}{9}$. **D.** $T=\sqrt{3}$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;0), B(0;-\sqrt{2};0), M\left(\dfrac{6}{5};-\sqrt{2};2\right)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=2-t \end{cases}$. Điểm C thuộc d sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất thì độ dài CM bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=9$ ngoại tiếp khối bát diện (H) được ghép từ hai khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ (đều có đáy là tứ giác $ABCD$). Biết rằng đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $ABCD$ là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-8=0$. Tính thể tích khối bát diện (H)

A. $V_{(H)}=\dfrac{34}{9}$. **B.** $V_{(H)}=\dfrac{665}{81}$. **C.** $V_{(H)}=\dfrac{68}{9}$. **D.** $V_{(H)}=\dfrac{1330}{81}$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+16=0$. Điểm M, N di động lần lượt trên (S) và (P). Khi đó giá trị nhỏ nhất của đoạn MN là:

A. 8. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-1;2;-3)$, véc – tơ $\vec{u}(6;-2;-3)$ và đường thẳng d: $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-5}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với giá của $\vec{u}$ và cắt d.

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-3}{6}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z+1}{2}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$. **D.** $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-1}{4}$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-y+2z+1=0$ và $(Q): 2x+y+z-1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc Ox, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r. Xác định r sao cho chỉ có duy nhất một mặt cầu (S) thỏa mãn điều kiện bài toán

A. $r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $r=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** $r=\sqrt{3}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(6;-3;4), B(a;b;c)$. Gọi M,N,P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$. Biết rằng M,N,P nằm trên đoạn AB sao cho $AM=MN=NP=PB$. Tính giá trị của tổng $a+b+c$

A. $a+b+c=11$. **B.** $a+b+c=-11$.
D. $a+b+c=17$. **D.** $a+b+c=-17$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P):2x-y-z-2=0$, $(Q):x-2y+z+2=0$, $(R):x+y-2z+2=0$, $(T):x+y+z=0$. Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc (T) và tiếp xúc với $(P),(Q),(R)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, và $C(0;0;1)$. Hỏi có bao nhiêu điểm cách đều các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA), (ABC)?

A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-2;0;0), B(0;4;2), C(2;2;-2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), S là điểm di động trên đường thẳng d, G và H lần lượt là trọng tâm của ΔABC, trực tâm của ΔSBC. Đường thẳng GH cắt đường thẳng d tại S'. Tính tích $SA.S'A$

A. $SA.S'A=\dfrac{3}{2}$. **B.** $SA.S'A=\dfrac{9}{2}$. **C.** $SA.S'A=12$. **D.** $SA.S'A=6$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình lăng trụ có diện tích đáy bằng 5 (đvdt) và hai đáy là hai tam giác nằm trên hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ có phương trình lần lượt là $(\alpha):x-2y+3z-a=0$ và $(\beta):3x-6y+9z+b=0\left(a,b\in\mathbb{R}^+,b\neq 3a\right)$. Hỏi nếu thể tích khối lăng trụ bằng $5\sqrt{14}$ thì khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $|3a+b|=\sqrt{14}$. **B.** $\left|a+\dfrac{b}{3}\right|=42$. **C.** $|3a+b|=14$. **D.** $\left|a+\dfrac{b}{3}\right|=14$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\ y=-1\\ z=-t\end{cases}$ và 2 mặt phẳng $(P),(Q)$ lần lượt có phương trình $x+2y+2z+3=0$; $x+2y+2z+7=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d, tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\dfrac{4}{9}$ **B.** $(x-3)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=\dfrac{4}{9}$

C. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=\dfrac{4}{9}$ **D.** $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\dfrac{4}{9}$

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C khác với gốc tọa độ O sao cho biểu thức $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất

A. $(P): x+2y+3z-14=0$ **B.** $(P): x+2y+3z-11=0$

C. $(P): x+2y+z-14=0$ **D.** $(P): x+y+3z-14=0$

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(0;1;1), B(3;0;-1), C(0;21;-19)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$. $M(a,b,c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T=3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$

A. $a+b+c=\dfrac{14}{5}$ **B.** $a+b+c=0$ **C.** $a+b+c=\dfrac{12}{5}$ **D.** $a+b+c=12$

Câu 34: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-4)^2+z^2=5$. Tìm tọa độ điểm *A* thuộc trục *Oy*, biết rằng ba mặt phẳng phân biệt qua *A* có các vec-tơ pháp tuyến lần lượt là các vec-tơ đơn vị của các trục tọa độ cắt mặt cầu theo thiết diện là ba hình tròn có tổng diện tích là 11π

A. $\left[\begin{array}{l}A(0;2;0)\\A(0;6;0)\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}A(0;0;0)\\A(0;8;0)\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}A(0;0;0)\\A(0;6;0)\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}A(0;2;0)\\A(0;8;0)\end{array}\right.$

Câu 35: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{3}$. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng *d*?

A. $Q(1;0;2)$ **B.** $N(1;-2;0)$ **C.** $P(1;-1;3)$ **D.** $M(-1;2;0)$

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\left(\dfrac{59}{9};-\dfrac{32}{9};\dfrac{2}{9}\right)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Từ điểm M kẻ các tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S), trong đó A, B, C là các tiếp điểm. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $px+qy+z+r=0$. Giá trị của biểu thức $p+q+r$ bằng

A. –4. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 36.

Câu 37: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;1), B(-1;2;0), C(1;1;-2)$. Đường thẳng d đi qua trực tâm của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+5}{-8}=\dfrac{z-4}{5}$. **B.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+13}{-8}=\dfrac{z-9}{5}$.

C. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-11}{-8}=\dfrac{z+6}{5}$. **D.** $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+21}{-8}=\dfrac{z-14}{5}$.

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$ và $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với tam giác một góc $30°$. có dạng: $x+ay+bz+c=0$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ khi đó giá trị $a+b+c$ là

A. 8 **B.** -8 **C.** 7 **D.** -7

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P): 2mx+(m^2+1)y+(m^2-1)z-10=0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với (P) và cùng đi qua A. Tìm tổng bán kính của hai mặt cầu đó.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $7\sqrt{2}$. **D.** $12\sqrt{2}$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(\alpha): 2x+4y-5z+2=0$, $(\beta): x+2y-2z+1=0$ và $(\gamma): 4x-my+z+n=0$. Để ba mặt phẳng đó có chung giao tuyến thì tổng $m+n$ bằng

A. -4 **B.** 8. **C.** -8 **D.** 4.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6), D(1;1;1)$. Kí hiệu d là đường thẳng đi qua D sao cho tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến d là lớn nhất. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(5;7;3)$. **C.** $P(3;4;3)$. **D.** $Q(7;13;5)$.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(8;1;1)$. Mặt phẳng (P) qua M cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn $OA^2+OB^2+OC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất có dạng là (P): $ax+by+cz-12=0$. Khi đó $a+b+c$ là:

A. 9. **B.** -9. **C.** 11. **D.** -11.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3;-1;-3)$, $B(-3;0;-1)$, $C(-1;-3;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+4y+3z-19=0$. Tọa độ điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a+b+c$ bằng:

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(\alpha): 2x-2y-z+14=0$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Mặt phẳng $(P)//(\alpha)$ cắt (S) theo thiết diện là một hình tròn có diện tích 16π. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $2x-2y-z+14=0$. **B.** $2x-2y-z+4=0$. **C.** $2x-2y-z+16=0$. **D.** $2x-2y-z-4=0$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;-3)$, $B(-1;1;2)$, $C(0;-3;-5)$ Xác định điểm M trên mặt phẳng Oxy sao cho: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất đó là:

A. 0. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;-1;2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P). Số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) có phương trình $-y+z=0$ là:

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(2;1;-1)$, $B(0;3;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+3=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-4;-1;0)$. **B.** $M(-1;-4;0)$. **C.** $M(4;1;0)$. **D.** $M(1;-4;0)$.

Câu 48: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $d: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và $d': \begin{cases} x=3+t' \\ y=2+t', t'\in\mathbb{R} \\ z=5 \end{cases}$. Viết phương trình chính tắc của đường vuông góc chung của d và d'.

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{-2}$.

C. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$.

Câu 49: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$, $B(0;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+12=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất?

A. $M(2;2;9)$.

B. $M\left(-\frac{6}{11};-\frac{18}{11};\frac{23}{11}\right)$.

C. $M\left(\frac{7}{6};\frac{7}{6};\frac{31}{4}\right)$.

D. $M\left(-\frac{2}{5};-\frac{11}{5};\frac{18}{5}\right)$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=-1+3t \end{cases}$, $d': \begin{cases} x=2+t' \\ y=-1+2t' \\ z=-2t' \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P), cắt d và d' có phương trình là

A. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$.

B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-4}$.

C. $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$.

D. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{2}$.

Câu 51: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+y+z-3=0$ và các điểm $A(3;2;4)$, $B(5;3;7)$. Mặt cầu (S) thay đổi đi qua A, B và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính $r=2\sqrt{2}$. Biết tâm của đường tròn (C) luôn nằm trên một đường tròn cố định (C_1). Bán kính của (C_1) là

A. $r_1=\sqrt{14}$.

B. $r_1=12$.

C. $r_1=2\sqrt{14}$.

D. $r_1=6$.

VIII. TỔ HỢP – XÁC SUẤT, GIỚI HẠN, DÃY SỐ

Câu 1: Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 nam và 3 nữ, ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{20}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{1}{10}$.

Câu 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, chọn ngẫu nhiên một điểm mà tọa độ là các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn hoặc bằng 4. Nếu các điểm có cùng xác suất được chọn như nhau thì xác suất để chọn được một điểm mà khoảng cách đến gốc tọa độ nhỏ hơn hoặc bằng 2 là

A. $\frac{13}{81}$. **B.** $\frac{15}{81}$. **C.** $\frac{13}{32}$. **D.** $\frac{11}{16}$.

Câu 3: Có 8 người ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn. Mỗi người cầm một đồng xu cân đối, đồng chất. Cả 8 người đồng thời tung đồng xu. Ai tung được mặt ngửa thì phải đứng dậy, ai tung được mặt sấp thì ngồi yên tại chỗ. Tính xác suất sao cho không có hai người nào ngồi cạnh nhau phải đứng dậy?

A. $\frac{47}{256}$. **B.** $\frac{67}{256}$. **C.** $\frac{55}{256}$. **D.** $\frac{23}{128}$.

Câu 4: Trong một hình tứ diện ta tô màu các đỉnh, trung điểm các cạnh, trọng tâm các mặt và trọng tâm tứ diện. Chọn ngẫu nhiên 4 điểm trong số các điểm đã tô màu. Tính xác suất để 4 điểm được chọn là 4 đỉnh của một hình tứ diện

A. $\frac{188}{273}$. **B.** $\frac{1009}{1365}$. **C.** $\frac{245}{273}$. **D.** $\frac{136}{195}$.

Câu 5: Trong khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n, n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, ..., a_n$, biết $a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = 4096$.

A. 126720. **B.** 213013. **C.** 130272. **D.** 130127.

Câu 6: Lớp 12B có 25 học sinh được chia thành hai nhóm I và II sao cho mỗi nhóm đều có học sinh nam và nữ, nhóm I gồm 9 học sinh nam. Chọn ra ngẫu nhiên mỗi nhóm 1 học sinh, xác suất để chọn ra được 2 học sinh nam bằng 0,54. Xác suất để chọn ra được hai học sinh nữ bằng

A. 0,42. **B.** 0,04. **C.** 0,23. **D.** 0,46.

Câu 7: Cho ba toa tàu đánh số từ 1 đến 3 và 12 hành khách. Mỗi toa đều chứa được tối đa 12 hành khách. Gọi n là số cách xếp các hành khách vào các toa tàu thỏa mãn điều kiện "mọi toa đều có khách". Tìm số các chữ số của n.

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 8: Cho đa giác lồi (H) có 22 cạnh. Gọi X là tập hợp các tam giác có 3 đỉnh là ba đỉnh của (H). Chọn ngẫu nhiên hai tam giác trong X. Tính xác suất để chọn được 1 tam giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác (H) và 1 tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác (H) (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba)

A. 0,374. **B.** 0,375. **C.** 0,376. **D.** 0,377.

Câu 9: Cho tập hợp các số nguyên liên tiếp như sau: $\{1\}, \{2;3\}, \{4;5;6\}, \{7;8;9;10\}, ...$, trong đó mỗi tập hợp chứa nhiều hơn tập hợp ngay trước đó 1 phần tử, và phần tử đầu tiên của mỗi tập hợp lớn hơn phần tử cuối cùng của tập hợp ngay trước nó 1 đơn vị. Gọi S_n là tổng của các phần tử trong tập hợp thứ n. Tính S_{999}

A. 498501999. **B.** 498501998. **C.** 498501997. **D.** 498501995.

Câu 10: Chiếc kim của bánh xe trong trò chơi "Chiếc nón kì diệu" có thể dừng lại ở một trong mười vị trí với khả năng như nhau. Xác suất để trong ba lần quay, chiếc kim của bánh xe đó lần lượt dừng lại ở ba vị trị khác nhau là

A. 0,001. **B.** 0,72. **C.** 0,072. **D.** 0,9.

Câu 11: Để thi học kỳ bằng hình thức vấn đáp, thầy giáo đã chuẩn bị 50 câu hỏi cho ngân hàng đề thi. Bạn A đã học và làm được 20 câu trong đó. Để hoàn thành bài thi thì bạn A phải rút và trả lời 4 câu trong ngân hàng đề. Tính xác suất để bạn đó rút được 4 câu mà trong đó có ít nhất 1 câu đã học.

A. $\frac{C_{20}^4}{C_{50}^4}$. **B.** $1-\frac{C_{30}^4}{C_{50}^4}$. **C.** $\frac{C_{30}^4}{C_{50}^4}$. **D.** $1-\frac{C_{20}^4}{C_{50}^4}$.

Câu 12: Tổng $P=C_{2018}^0.2^{2018}-C_{2018}^1.2^{2017}+C_{2018}^2.2^{2016}-...+C_{2018}^{2018}$ là:

A. $P=1$. **B.** $P=0$. **C.** $P=2^{2017}$. **D.** $P=2^{2018}$.

Câu 13: Cho dãy số $C_{23}^0, C_{23}^1, C_{23}^2, ..., C_{23}^{23}$. Có bao nhiêu bộ gồm 3 số hạng liên tiếp trong dãy số trên lập thành cấp số cộng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 14: Một bình chứa các viên bi đủ bốn màu: đỏ, trắng, xanh và lam. Lấy ngẫu nhiên và đồng thời bốn viên bi từ trong bình thì xác suất xảy ra các biến cố sau là như nhau:

(1) Cả bốn viên bi đều màu đỏ.

(2) Có một viên bi màu trắng và ba viên bi màu đỏ.

(3) Có một viên bi màu trắng, một viên bi màu xanh và hai viên bi màu đỏ.

(4) Bốn viên bi có đủ cả bốn màu.

Hỏi số viên bi nhỏ nhất trong bình thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 19. **B.** 69. **C.** 46. **D.** 21.

Câu 15: Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-3x+1}{2x+1}-ax-b\right)=0$. Khi đó $a+2b$ bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** 4. **D.** -3.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1=1\\u_n=3u_{n-1}+1\end{cases}(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $\log_9 u_n>100$.

A. 102. **B.** 101. **C.** 202. **D.** 201.

Câu 17: Cho cấp số cộng (u_n). Gọi $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Biết rằng $\frac{S_p}{S_q}=\frac{p^2}{q^2}$ với $p\neq q; p,q\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{u_{2017}}{u_{2018}}$

A. $\frac{4031}{4035}$. **B.** $\frac{4031}{4033}$. **C.** $\frac{4033}{4035}$. **D.** $\frac{4034}{4035}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{4-3x}-e^4}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 3ae^4 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$ bằng

A. -5. **B.** 1. **C.** $5e^4$. **D.** -1.

B. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

I. HÀM SỐ

Câu 1: Biết rằng tồn tại các số nguyên a,b sao cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất đều là các số nguyên và tập giá trị của hàm số đã cho chỉ có đúng 6 số nguyên. Giá trị của a^2+2b^2 bằng

A. 36. **B.** 34. **C.** 41. **D.** 25.

Lời giải

Bằng cách sử dụng điều kiện tồn tại nghiệm của phương trình, chúng ta có: Khi $a=0$ thì hàm số chỉ đạt giá trị lớn nhất (khi $b<0$) hoặc chỉ đạt giá trị nhỏ nhất (khi $b>0$). Còn khi $a\neq 0$ thì $\dfrac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}\le y\le \dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

Do đó, $\min\limits_{\mathbb{R}} y=\dfrac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ và $\max\limits_{\mathbb{R}} y=\dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

Vì $\min\limits_{\mathbb{R}} y;\ \max\limits_{\mathbb{R}} y$ là các số nguyên nên tập giá trị của hàm số đã cho chỉ có đúng 6 số nguyên khi và chỉ khi $\max\limits_{\mathbb{R}} y-\min\limits_{\mathbb{R}} y=5\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=5\Leftrightarrow a^2+b^2=25$.

Suy ra, $\min\limits_{\mathbb{R}} y=\dfrac{b-5}{2}$ và $\max\limits_{\mathbb{R}} y=\dfrac{b+5}{2}$.

Theo giả thiết, thì b là số nguyên lẻ và $a\neq 0$ nên $a^2=16, b^2=9$.

Do đó, $a^2+2b^2=34$.

Đáp án B.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình $f(3-4x)\le e^{3-4x}+2m$ đúng với mọi $x\in\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{4}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(-2)-\dfrac{1}{e^2}$. **B.** $m\ge\dfrac{f(2)}{2}-\dfrac{1}{2}e^2$.

C. $m\ge\dfrac{f(-2)}{2}-\dfrac{1}{2e^2}$. **D.** $m\ge f(2)-e^2$.

Lời giải

Đặt $g(x)=f(3-4x)-e^{3-4x}$.

Ta có $g'(x)=-4f'(3-4x)+4e^{3-4x}$.

Với $x\in\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{4}\right)$ thì $3-4x\in(-2;2)$. Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$, ta có $f'(3-4x)\le 0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{4}\right)$. Do đó, $g'(x)>0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{4}\right)$ hay hàm số $g(x)$ đồng

STUDY TIP

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Đặt $M=\max\limits_{[a;b]} f(x)$ và $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$. Khi đó:

(1): $f(x)=k$ có nghiệm thuộc $[a;b]$ khi và chỉ khi $m\le k\le M$.

(2): $f(x)<k$ đúng với mọi $x\in[a;b]$ khi và chỉ khi $M<k$.

(3): $f(x)>k$ đúng với mọi khi và chỉ khi $m>k$.

(4): $f(x)<k$ có nghiệm thuộc $[a;b]$ khi và chỉ khi $m<k$.

(5): $f(x)>k$ có nghiệm thuộc $[a;b]$ khi và chỉ khi $M>k$.

biến trên khoảng $\left(\frac{1}{4};\frac{5}{4}\right)$. Do đó bất phương trình $g(x)\le 2m$ đúng với mọi $x\in\left(\frac{1}{4};\frac{5}{4}\right)$ khi và chỉ khi $g\left(\frac{5}{4}\right)\le 2m \Leftrightarrow m\ge \frac{f(-2)}{2}-\frac{1}{2e^2}$.

Đáp án C.

Câu 3: Cho hàm số $y=x^2-2\left(m+\frac{1}{m}\right)x+m\ (m\ne 0)$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;1]$ lần lượt là y_1, y_2. Số giá trị của m để $y_1-y_2=8$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $y=f(x)=x^2-2\left(m+\frac{1}{m}\right)x+m$, $y'=2x-2\left(m+\frac{1}{m}\right)$

$y'=0\Leftrightarrow x=m+\frac{1}{m}$.

* Với $m>0$, $m+\frac{1}{m}\ge 2$. Khi đó, hàm số nghịch biến trên $[-1;1]$.

$\Rightarrow y_1=f(-1)=3m+\frac{2}{m}+1$; $y_2=f(1)=1-m-\frac{2}{m}$.

Theo đề bài ta có:

$y_1-y_2=8 \Leftrightarrow 3m+\frac{2}{m}+1-1+m+\frac{2}{m}=8\ (m>0)\Leftrightarrow m^2-2m+1=0\Leftrightarrow m=1$.

* Với $m<0$, $m+\frac{1}{m}\le -2$. Khi đó, hàm số đồng biến trên $[-1;1]$.

$\Rightarrow y_1=f(1)=1-m-\frac{2}{m}$; $y_2=f(-1)=3m+\frac{2}{m}+1$.

Theo đề bài ta có:

$y_1-y_2=8 \Leftrightarrow 3m+\frac{2}{m}+1-1+m+\frac{2}{m}=-8\ (m<0)\Leftrightarrow m^2+2m+1=0\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy có đúng hai giá trị của m thỏa mãn.

Đáp án A.

STUDY TIP

Cho hàm số $y=ax^2+bx+c\ (a\ne 0)$ với $x\in[\alpha;\beta]$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

+ Nếu $-\frac{b}{2a}\notin[\alpha;\beta]$ thì $M,m\in\{f(\alpha),f(\beta)\}$.

+ Nếu $-\frac{b}{2a}\in[\alpha;\beta]$ thì $M,m\in\left\{f(\alpha),f(\beta),f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right\}$

Câu 4: Giá trị tham số thực k nào sau đây để đồ thị hàm số $y=x^3-3kx^2+4$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $-1<k<1$. **B.** $k>1$. **C.** $k<1$. **D.** $k\ge 1$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $y'=3x^2-6kx$.

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có hai cực trị nằm về hai phía so với trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'_{y'}>0\\ y_{CD}.y_{CT}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k^2>0\\ \left(-2k^2x_{CD}+4\right)\left(-2k^2x_{CT}+4\right)<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k\ne 0\\ 4k^4x_{CD}x_{CT}-8k^2\left(x_{CD}+x_{CT}\right)+16<0\end{cases}$$

Theo Vi-et, ta có $\begin{cases} x_{CD} + x_{CT} = 2k \\ x_{CD}.x_{CT} = 0 \end{cases}$. Suy ra $\begin{cases} k \neq 0 \\ -16k^3 + 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow k > 1$.

Cách 2: Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3kx^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3+4}{3x^2} = k\ (*)$, $x \neq 0$

Xét hàm số $y = \dfrac{x^3+4}{3x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{3x^4 - 24x}{9x^4}$.

Với $x \neq 0 \Rightarrow 9x^4 > 0 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 24x = 0 \Rightarrow x = 2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$ ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow k > 1$.

Cách 3: Ta có $y' = 3x^2 - 6kx$. Xét $y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2k \end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía so với trục hoành

Điều kiện: $\begin{cases} 2k \neq 0 \\ y(0).y(2k) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ 16 - 16k^3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow k > 1$.

Đáp án B.

> **STUDY TIP**
> Một số hướng tìm điều kiện để phương trình bậc ba có ba nghiệm phân biệt:
> + Hướng 1: Cô lập m quy về khảo sát hàm số.
> + Hướng 2: Nhẩm nghiệm $x = x_0$ đi đến phương trình tích $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$
> + Hướng 3: Dùng điều kiện $y_{CD}.y_{CT} < 0$.

Câu 5: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$. Hỏi biểu thức $P = \dfrac{x+y-2}{z+2}$ có thể nhận bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Cách 1: Điều kiện: $z \neq -2$.

$P = \dfrac{x+y-2}{z+2} \Leftrightarrow P(z+2) + 2 = x + y$

$x - y + z = 3 \Leftrightarrow x - y = 3 - z$

$x^2 + y^2 + z^2 = 5 \Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-y)^2 + 2z^2 = 10$

$\Rightarrow (x+y)^2 = 10 - 2z^2 - (3-z)^2 \Rightarrow (x+y)^2 = -3z^2 + 6z + 1$.

Do đó, $(P(z+2)+2)^2 = -3z^2 + 6z + 1$

$\Leftrightarrow (P^2+3)z^2 + (4P^2 + 4P - 6)z + 4P^2 + 8P + 3 = 0\ (1)$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow (2P^2 + 2P - 3)^2 - (P^2+3)(4P^2 + 8P + 3) \geq 0$

> **STUDY TIP**
> Trong biểu thức P vai trò của z khác x, y do đó, ta tìm cách rút x, y theo z từ điều kiện ban đầu. Từ đó quy về phương trình ẩn z và tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

$\Leftrightarrow 4P^4+4P^2+9+8P^3-12P^2-12P-\left(4P^4+8P^3+15P^2+24P+9\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow -23P^2-36P\ge 0 \Leftrightarrow -\dfrac{36}{23}\le P\le 0$.

Do đó, P có thể nhận các giá trị nguyên là $0;-1$.

STUDY TIP

Các biểu thức liên hệ giữa *x*, *y*, *z* có dạng phương trình mặt phẳng, mặt cầu. Từ đó giúp ta nghĩ đến việc xét vị trí tương đối giữa mặt cầu với đường thẳng và mặt phẳng.

Cách 2: Ta có:

$P=\dfrac{x+y-2}{z+2}\Leftrightarrow x+y-Pz=2P+2\ \ (2)$

$x-y+z=3\ \ (3)$

$x^2+y^2+z^2=5\ \ (4)$

Phương trình $(2),(3)$ là các phương trình mặt phẳng.

Hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến d có vecto chỉ phương là $\vec{u}(P-1;P+1;2)$ và đi qua điểm $M\left(\dfrac{2P+5}{2};\dfrac{2P-1}{2};0\right)$.

$\left[\vec{u};\overrightarrow{OM}\right]=(1-2P;2P+5;-5P-2)$

Phương trình (4) là phương trình mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ bán kính $R=\sqrt{5}$

x,y,z tồn tại khi và chỉ khi d cắt $(S)\Leftrightarrow d(O,d)\le R\Leftrightarrow \dfrac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{OM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}\le\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow(-2P+1)^2+(2P+5)^2+(-5P-2)^2\le 5\left[(P-1)^2+(P+1)^2+4\right]$

$\Leftrightarrow -23P^2-36P\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{-36}{23}\le P\le 0$.

Do đó, P có thể nhận các giá trị nguyên là $0;-1$.

Đáp án A.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash[-2;2]$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2	2		3		$+\infty$
y'		$-$			$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	2018	↗	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f(2018x-2019)\right|=2020$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f(x)\right|$

x	$-\infty$				-2	2		3		$+\infty$
y'		$-$		$+$			$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	2018	↗	$-\infty$

Đường thẳng $y=2020$ cắt đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4.

Do đó, $\left|f(2018x-2019)\right|=2020 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2018x-2019=x_1 \\ 2018x-2019=x_2 \\ 2018x-2019=x_3 \\ 2018x-2019=x_4 \end{array}\right.$ các phương trình này cho ta 4 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình $\left|f(2018x-2019)\right|=2020$ có 4 nghiệm phân biệt.

Đáp án C.

STUDY TIP

Để tìm số nghiệm phương trình $f(u(x))=m$ khi biết đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta xác định số giao điểm của đường thẳng $y=m$ với đồ thị hàm số $y=f(x)$. Gọi hoành độ các giao điểm đó là $x_1,x_2,...,x_n$ ta có

$f(u(x))=m$

$\Leftrightarrow u(x)=x_i, i=1;2;...;n$

Bài toán trở về tìm số nghiệm của n phương trình $u(x)=x_i, i=1;2;...;n$

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tập tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\frac{a}{b};c\right)$ với a, b, c là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b+c$.

A. $a+b+c=11$. **B.** $a+b+c=8$. **C.** $a+b+c=10$. **D.** $a+b+c=5$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+(2-m)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2-3(2-m)>0 \\ 2m-1>0 \\ 2-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2-m-5>0 \\ \frac{1}{2}<m<2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4}<m<2$$

$\Rightarrow a=5, b=4, c=2$

Vậy $a+b+c=11$.

Đáp án A.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$ tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\ln 2+1$. **B.** $f^2(2)=\sqrt{\ln 2+1}$.

C. $f^2(2)=2\ln 2+2$. **D.** $f^2(2)=\sqrt{2\ln 2+2}$.

Lời giải

Ta có $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right] \Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$$\Leftrightarrow \left[f(x)f'(x)\right]'=\left(x+\frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow f'(x).f(x)=x+\frac{1}{x}+C_1$$

Do $f(1)=f'(1)=1$ nên ta có $C_1=-1$.

Do đó, $f'(x).f(x)=x+\frac{1}{x}-1 \Leftrightarrow \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'=\left(\frac{x^2}{2}+\ln x-x\right)'$

$\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+2\ln x-2x+C_2$.

Mà $f(1)=1$ nên ta có $C_2=2$.

Vậy $f^2(x)=x^2+2\ln x-2x+2 \Rightarrow f^2(2)=2\ln 2+2$.

Câu 9: Tìm tất cả giá trị của tham số thực m để phương trình $2\log_2(x+2)+\log_2(x-2)^2=2\log_2(2x^2-6x+m)$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m\in(-20;4)$.
B. $m\in(-20;4)\cup(5;7)$.
C. $m\in(5;+\infty)$.
D. $m\in[-20;4)\cup(5;7)$.

Lời giải

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\neq 2 \\ 2x^2-6x+m>0 \\ 2\log_2(x+2)+2\log_2|x-2|=2\log_2(2x^2-6x+m) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\neq 2 \\ 2x^2-6x+m>0 \\ (x+2)|x-2|=2x^2-6x+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\neq 2 \\ (x+2)|x-2|=2x^2-6x+m \end{cases}$

FOR REVIEW
Sai lầm thường gặp:
Biến đổi
$\log_2(x-2)^2=2\log_2(x-2)$.

Xét hàm số $f(x)=(x+2)|x-2|-2x^2+6x=\begin{cases} -x^2+6x-4 & \text{nếu } x>2 \\ -3x^2+6x+4 & \text{nếu } -2<x<2 \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} -2x+6 & \text{nếu } x>2 \\ -6x+6 & \text{nếu } -2<x<2 \end{cases}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-20	$\nearrow$	7	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $m\in(-20;4)\cup(5;7)$.

Đáp án B.

Câu 10: Cho hàm số $y=x^3-3x+2\,(C)$. Biết rằng đường thẳng $d:y=mx+1$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A,B,C. Tiếp tuyến tại ba điểm A,B,C của đồ thị (C) cắt đồ thị (C) lần lượt tại các điểm A',B',C' (tương ứng khác A,B,C). Biết rằng A',B',C' thẳng hàng, tìm giá trị của tham số m để đường thẳng đi qua ba điểm A',B',C' vuông góc với đường thẳng $\Delta:x+2018y-2019=0$.

A. $m=\dfrac{1009}{2}$.
B. $m=\dfrac{1009}{4}$.
C. $m=\dfrac{2009}{4}$.
D. $m=\dfrac{2019}{4}$.

Lời giải

Giả sử $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2), C(x_3;y_3)$.

Ta có phương trình tiếp tuyến tại A của đồ thị (C) là:

$\Delta_1 : y = (3x_1^2 - 3)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1 + 2$

Xét phương trình $(3x_1^2 - 3)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1 + 2 = x^3 - 3x + 2$.

Do đó $A'(-2x_1; -8x_1^3 + 6x_1 + 2)$.

Lại có $-8x_1^3 + 6x_1 + 2 = -8(x_1^3 - 3x_1 + 2) - 18x_1 + 18 = -8y_1 - 18x_1 + 18$

$$= -8(mx_1 + 1) - 18x_1 + 18 = -2x_1(4m + 9) + 10$$

$\Rightarrow y_{A'} = (4m+1)x_{A'} + 10$. Tương tự ta có $y_{B'} = (4m+9)x_{B'} + 10$

Do đó phương trình đường thẳng đi qua 3 điểm A', B', C' là

$$\Delta_2 : y = (4m+9)x + 10.$$

Theo đề bài $\Delta \perp \Delta_2$ nên $4m + 9 - 2018 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{2009}{4}$ (thỏa mãn).

Đáp án C.

FOR REVIEW

Bài toán bên được xây dựng từ ý tưởng của bài toán gốc sau đây: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2\ (C)$ có 3 điểm A, B, C thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến tại 3 điểm A, B, C của đồ thị (C) cắt (C) lần lượt tại các điểm A', B', C' (tương ứng khác A, B, C). Biết rằng A, B, C thẳng hàng, chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.

Câu 11: Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)(x_0 < 0)$ của đồ thị (C) tạo với hai đường tiệm cận của đồ thị (C) một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Giá trị biểu thức $T = 2018x_0 + 2019y_0$ bằng

A. $T = 2021$. **B.** $T = 2016$. **C.** $T = 2018$. **D.** $T = 2019$.

Lời giải

Chú ý: Ta có một số bài toán sau có thể giải bằng công thức tính nhanh

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\ (C)$ với $ad - bc \neq 0, ac \neq 0$

1. Tìm điểm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến tại M tạo với hai tiệm cận

a. Một tam giác vuông cân.

b. Một tam giác vuông có cạnh huyền nhỏ nhất.

c. Một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

d. Một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp nhỏ nhất.

e. Một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

2. Tìm điểm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM.

3. Tìm điểm $M \in (C)$ sao cho khoảng cách từ điểm I đến tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M lớn nhất.

4. Tìm 2 điểm M, N thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị (C) sao cho độ dài MN đạt giá trị nhỏ nhất.

5. Tìm 2 điểm M, N thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại M và N song song với nhau đồng thời MN đạt giá trị nhỏ nhất.

Công thức tính nhanh cho các bài toán trên như sau:

Hoành độ điểm M (hoặc hoành độ hai điểm M, N) cần tìm là nghiệm của phương trình: $(y')^2 = 1$

STUDY TIP

Để giải bài toán này ta sử dụng công thức tính nhanh liên quan đến hàm phân thức.

Cách 1: TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{1\}; y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Xét phương trình $(y')^2=1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x+1}\right)'=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Do $x_0<0$ nên $x_0=-2 \Rightarrow y_0=3$. Vậy $T=2021$

Cách 2:

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0;y_0)$ là:

$$\Delta: y=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0+1}$$

(C) có tiệm cận . $d_1: x=-1$; $d_2: y=2$; $d_1\cap d_2=I(-1;2)$.

Gọi $A=d_1\cap\Delta_1 \Rightarrow A\left(-1;\dfrac{2x_0}{x_0+1}\right)$; $B=d_2\cap\Delta \Rightarrow B(2x_0+1;2)$

$\Rightarrow IA=\dfrac{2}{|x_0+1|}; IB=2|x_0+1| \Rightarrow IA.IB=4$

MEMORIZE

Công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp $r=\dfrac{S}{P}$

(S, P lần lượt là diện tích, chu vi của tam giác đó)

Do ΔABI vuông tại I nên bán đường tròn nội tiếp ΔIAB bằng

$$r=\frac{2S_{IAB}}{IA+IB+AB}=\frac{IA.IB}{IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}}\le\frac{IA.IB}{2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2IA.IB}}=\frac{4}{4+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA=IB \Leftrightarrow |x_0+1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$

Do $x_0<0$ nên $x_0=-2 \Rightarrow y_0=3$. Vậy $T=2021$.

Đáp án A.

Câu 12: Cho hàm số $y=x^3-3x+1(C)$. Biết rằng tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị (C) phân biệt và có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân. Gọi S là tập các giá trị của k thỏa mãn điều kiện trên, tính tổng các phần tử của S.

A. 3. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 0.

Lời giải

Cách 1:

Tập xác định $\mathbb{R}$, $y'=3x^2-3$

Theo bài ra ta có phương trình $3x^2-3=k\ (1)$ có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $k>-3(*)$

Gọi $x_1;x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1), $M(x_1;y_1); N(x_2;y_2)\in(C)$

STUDY TIP

Ta lập phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến với (C) bằng phương pháp gián tiếp

Ta có: $y_1=x_1^3-3x_1+1=\dfrac{x_1}{3}(3x_1^2-3)-2x_1+1=\dfrac{k}{3}x_1-2x_1+1=\left(\dfrac{k}{3}-2\right)x_1+1$

Tương tự $y_2=\left(\dfrac{k}{3}-2\right)x_2$

Do đó phương trình MN là: $y=\left(\dfrac{k}{3}-2\right)x+1\ (d)$

Vì (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân nên d có hệ số góc bằng 1 hoặc -1

+) $\frac{k}{3}-2=1 \Leftrightarrow k=9$ (thỏa mãn (*))

+) $\frac{k}{3}-2=-1 \Leftrightarrow k=3$ (thỏa mãn (*))

Vậy tổng các phần tử của S là 12.

Cách 2:

STUDY TIP

Cho (C) là đồ thị hàm số bậc 3. Nếu hai điểm M, N thuộc đồ thị (C) mà tiếp tuyến của (C) tại hai điểm này song song với nhau thì M, N luôn đối xứng nhau qua điểm uốn của (C).

Ta có $y''=6x, y''=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow (C)$ có điểm uốn $I(0;1)$

TH1: Đường thẳng MN có hệ số góc bằng 1 và đi qua I

$\Rightarrow$ Phương trình MN: $y=x+1$

$\Rightarrow$ Hoành độ M, N là nghiệm của phương trình:

$$x^3-3x+1=x+1 \Leftrightarrow x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ (l) \\ x=\pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow k=y'(2)=y'(-2)=9.$$

TH2: Đường thẳng MN có hệ số góc bằng -1 và đi qua I

$\Rightarrow$ Phương trình MN: $y=-x+1$

$\Rightarrow$ Hoành độ M, N là nghiệm của phương trình:

$$x^3-3x+1=-x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ \ (l) \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow k=y'(\sqrt{2})=y'(-\sqrt{2})=3$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 12.

Đáp án C.

Câu 13: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $e^{x+y+z} \le e(x+y+z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4}{(x-z)^2}+\frac{4}{xz}+\frac{1}{y^3}$.

A. 108. **B.** 106. **C.** 268. **D.** 106.

Lời giải

Xét hàm số $f(t)=e^t-et, t\in(0;+\infty); f'(t)=e^t-e, f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$

Ta có bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

MEMORIZE

Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz: Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là số thực bất kì và $b_1, b_2, ..., b_n$ là số thực dương. Khi đó ta có:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

Từ bảng biến thiên ta có $e^t-et \ge 0 \forall t>0 \Rightarrow e^{x+y+z} \ge e(x+y+z)$

Kết hợp với giả thiết ta có $x+y+z=1$

Khi đó $P=4\left[\frac{1}{(x-z)^2}+\frac{4}{4xz}\right]+\frac{1}{y^3} \ge 4.\frac{(1+2)^2}{(x+z)^2}+\frac{1}{y^3}=\frac{36}{(1-y)^2}+\frac{1}{y^3}$

Xét hàm số $g(y)=\frac{36}{(1-y)^2}+\frac{1}{y^3}$ với $y\in(0;1)$

$g'(y)=\frac{72}{(1-y)^3}-\frac{3}{y^4}; f'(y)=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}$

t	0		$1/3$		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\searrow$	108	$\nearrow$	

Do đó $g(y)\ge 108;\ \forall y\in(0;1)$

Vậy $\min P=108$ đạt được khi $x=\dfrac{4}{9};y=\dfrac{1}{3};z=\dfrac{2}{9}$

Đáp án A.

Câu 14: Hàm số $y=|x-2|(x^2+1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $y=\begin{cases}(x-2)(x^2+1) & \text{nếu } x\ge 2\\ -(x-2)(x^2+1) & \text{nếu } x<2\end{cases}$.

Suy ra $y'=\begin{cases}3x^2-4x+1 & \text{nếu } x>2\\ -(3x^2-4x+1) & \text{nếu } x<2\end{cases}$ và y' không xác định tại $x=2$.

Ta có bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		$-1/3$		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Ta thấy y' đổi dấu 3 lần $\Rightarrow$ Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Lưu ý: Có thể giải thích đạo hàm của hàm số đã cho không xác định tại $x=2$ theo 2 cách như sau:

Cách 1: Ta có $y=\sqrt{(x-2)^2}\,(x^2+1)$.

Do đó $y'=\dfrac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2}}(x^2+1)+\sqrt{(x-2)^2}.2x$. Vậy y' không xác định tại $x=2$.

Cách 2: Ta có $y'(2^+)=5;\ y'(2^-)=-5\ \Rightarrow y'(2^+)\ne y'(2^-)\Rightarrow y'(2)$ không xác định.

(Đọc bài đọc thêm "Đạo hàm một bên", SGK Đại số và Giải tích 11, NXB GDVN).

Lưu ý: Ta có thể giải nhanh bài toán trên dựa vào nhận xét sau: "Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ và số nghiệm (không trùng với các điểm cực trị) của phương trình $f(x)=0$".

Ta có: $y=|x-2|(x^2+1)\Leftrightarrow y=|(x-2)(x^2+1)|$ (do $x^2+1>0\ \forall x$).

Xét hàm số $f(x)=(x-2)(x^2+1)$ có $f'(x)=3x^2-4x+1$.

Vậy $f(x)$ có 2 điểm cực trị $x=\dfrac{1}{3}$ và $x=1$.

Mặt khác phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=2$ (không trùng với các điểm cực trị nêu trên).

STUDY TIP

Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ và số nghiệm (không trùng với các điểm cực trị) của phương trình $f(x)=0$.

Do đó hàm số $y=\left|(x-2)\left(x^2+1\right)\right|$ có 3 điểm cực trị.

Đáp án D.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\dfrac{2|x|-1}{|x|+2}=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$. **B.** $m\in\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in(0;3)$. **D.** $m\in\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$.

Lời giải

Cách 1: Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\dfrac{2|x|-1}{|x|+2}=m\Leftrightarrow 2|x|-1=m|x|+2m\Leftrightarrow (2-m)|x|=2m+1$ (*)

+ Nếu $2-m=0\Leftrightarrow m=2$: (*) vô nghiệm.

+ Nếu $2-m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 2$: (*) $\Leftrightarrow |x|=\dfrac{2m+1}{2-m}$.

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \dfrac{2m+1}{2-m}>0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<m<2$.

Cách 2: Ta có:

+ Với $x\geq 0$ thì $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$;

+ Hàm số $y=\dfrac{2|x|-1}{|x|+2}$ là một hàm số chẵn nên đồ thị của nó đối xứng qua trục Oy (đường thẳng $x=0$).

* Xét hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ có $y'=\dfrac{5}{(x+2)^2}>0$ $\forall x\neq -2$ nên là hàm đồng biến trên từng khoảng xác định.

Bảng biến thiên của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	‖		$+$		
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-1/2$	$\nearrow$	2

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=\dfrac{2|x|-1}{|x|+2}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	2	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	2

Vậy phương trình $\dfrac{2|x|-1}{|x|+2}=m$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<m<2$.

Đáp án D.

MEMORIZE

- Hàm số $y=f(|x|)$ là một hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua Oy.
- Các bước vẽ đồ thị hàm số $y=f(|x|)$:

Bước 1: Vẽ đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$.

Bước 2: Giữ nguyên phần nằm bên phải Oy của (C), xóa phần nằm bên trái Oy của (C).

Bước 3: Lấy đối xứng phần đồ thị có được ở bước 2 qua Oy, ta được đồ thị hàm số $y=f(|x|)$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=x^3-12x^2+ax+b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(f(f(3)))=3$ và $f(f(f(f(4))))=4$. Tìm $f(7)$.

A. 31. **B.** 32. **C.** 33. **D.** 34.

Lời giải

STUDY TIP

Cho $f(x)$ là hàm số đồng biến (chặn) trên $\mathbb{R}$. Nếu $f(f...f(a)...)=a$ thì suy ra $f(a)=a$.

* Giả sử $f(3)>3$. Vì $f(x)$ là hàm bậc ba đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $f(f(3))>f(3)$.

Suy ra $f(f(f(3)))>f(f(3))>f(3)>3$. Mâu thuẫn với giả thiết.

* Tương tự ta thấy $f(3)<3$ cũng không thể xảy ra.

* Vậy $f(3)=3$ (1).

* Tương tự ta có $f(4)=4$ (2).

* Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}3a+b=84\\4a+b=132\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=48\\b=-60\end{cases}$.

Khi đó $f(x)=x^3-12x^2+48x-60$ có $f'(x)=3x^2-24x+48\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(7)=31$.

Đáp án A.

Câu 17: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ đạt cực trị tại các điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1\in(-1;0);x_2\in(1;2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a<0,b>0,c>0,d>0$. **B.** $a<0,b<0,c>0,d>0$.

C. $a>0,b>0,c>0,d>0$. **D.** $a<0,b>0,c<0,d>0$.

Lời giải

STUDY TIP

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $x_1;x_2$.

+ Nếu $a>0$, đồ thị hàm số có dạng "dấu ngã", hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1;x_2)$;

+ Nếu $a<0$, đồ thị hàm số có dạng "dấu đồng dạng", hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ nên $a<0$.

Vì $x_1\in(-1;0)$; $x_2\in(1;2)$ nên $|x_2|>|x_1|$. Do đó ta có $x_1x_2<0$ và

Đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1x_2<0$ và $x_1+x_2>0$. Suy ra $S=-\dfrac{2b}{3a}>0$ và $P=\dfrac{c}{3a}<0$.

Do đó $b>0$ và $c>0$ (do $a<0$).

Vậy $a<0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$.

Đáp án A.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$. Gọi d_1,d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)=x.f(2x-1)$ tại điểm có hoành độ $x=1$. Biết rằng hai đường thẳng d_1 và d_2 vuông góc với nhau. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\sqrt{2}<|f(1)|<2$. **B.** $|f(1)|\leq\sqrt{2}$.

C. $|f(1)|\geq 2\sqrt{2}$. **D.** $2\leq|f(1)|<2\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $g'(x)=f(2x-1)+2x.f'(2x-1)$.

Đường thẳng d_1 là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x=1$ nên có hệ số góc là $k_1=f'(1)$.

Đường thẳng d_2 là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=g(x)=x.f(2x-1)$ tại điểm $x=1$ nên có hệ số góc là $k_2=g'(1)=f(1)+2f'(1)$.

Mà $d_1\perp d_2$ nên $k_1.k_2=-1\Rightarrow f'(1).g'(1)=-1\Leftrightarrow f'(1).\left[f(1)+2f'(1)\right]=-1$

$\Leftrightarrow f(1)=-\dfrac{1}{f'(1)}-2f'(1)=-\dfrac{1+2\left[f'(1)\right]^2}{f'(1)}$.

Do $f'(1)\neq 0$ nên $\left|f(1)\right|=\left|\dfrac{1+2\left[f'(1)\right]^2}{f'(1)}\right|$. Đặt $f'(1)=t\,(t\neq 0)$.

> **STUDY TIP**
>
> Ngoài ra cũng có thể xét hàm số $f(t)=\left|\dfrac{1+2t^2}{t}\right|$ với $t\neq 0$. Sử dụng đạo hàm, lập bảng biến thiên ta cũng tìm được kết quả $f(t)\geq 2\sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(t)=\left|\dfrac{1+2t^2}{t}\right|$ trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

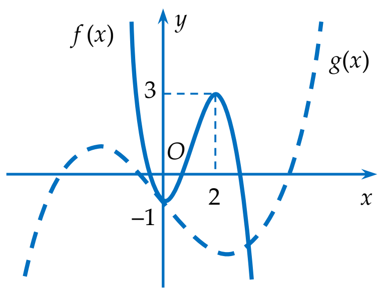
* Nếu $t>0$ thì $f(t)=\dfrac{1+2t^2}{t}=\dfrac{1}{t}+2t\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{t}.2t}=2\sqrt{2}$.

* Nếu $t<0$ thì $f(t)=-\dfrac{1+2t^2}{t}=\left(-\dfrac{1}{t}\right)+(-2t)\geq 2\sqrt{\left(-\dfrac{1}{t}\right).(-2t)}=2\sqrt{2}$.

Vậy $h(t)\geq 2\sqrt{2},\forall t\neq 0$ hay $\left|f(1)\right|\geq 2\sqrt{2}$.

Đáp án C.

Câu 19: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x)=-f(mx+n)$ $(m,n\in\mathbb{Q})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 5. Giá trị biểu thức $3m+2n$ là

A. –5. **B.** $-\dfrac{13}{5}$. **C.** $\dfrac{16}{5}$. **D.** 4.

Lời giải

* Giả sử hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a\neq 0)\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $(2;3),(0;-1)$ và nhận hai điểm này làm hai điểm cực trị nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} f(2)=3 \\ f(0)=-1 \\ f'(2)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+4b+2c+d=3 \\ d=-1 \\ 12a+4b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=0 \\ d=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-x^3+3x^2-1$$

Suy ra $g(0)=-f(n)=n^3-3n^2+1$.

Mà từ đồ thị ta có $g(0)=-1$

$$\Rightarrow n^3-3n^2+1=-1 \Leftrightarrow n^3-3n^2+2=0 \Leftrightarrow (n-1)(n^2-2n-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Do $n\in\mathbb{Q}$ nên $n=1$.

* Hàm số $g(x)=-f(mx+n)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 5 $\Leftrightarrow$ Hàm số $h(x)=-g(x)=f(mx+n)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng 5.

Quan sát đồ thị, ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ nên hàm số $h(x)=g(mx+n)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-n}{m};\frac{2-n}{m}\right)$ với $m>0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left|\frac{2-n}{m}-\frac{-n}{m}\right|=5 \Leftrightarrow \frac{2}{|m|}=5 \Leftrightarrow m=\frac{2}{5}$ do $m>0$.

Vậy $3m+2n=3.\frac{2}{5}+2.1=\frac{16}{5}$.

Đáp án C.

STUDY TIP

Để hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài bằng k khi và chỉ khi hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ và $|x_2-x_1|=k$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=4 \end{array}\right.$

Đặt $g(x)=f(|x-3|)=f\left(\sqrt{(x-3)^2}\right)$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}.f'\left(\sqrt{(x-3)^2}\right)=\frac{x-3}{|x-3|}.f'(|x-3|) \text{ với } x\neq 3.$$

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(|x-3|)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-3|=-2\ (L) \\ |x-3|=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=-4 \\ x-3=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=7 \end{array}\right.$

Ta có $g'(8)=f'(5)>0$; $g'(5)=f'(2)<0$; $g'(1)=-f'(2)>0$; $g'(-2)=-f'(5)<0$.

Ta có bảng biến thiên:

STUDY TIP

Để xét sự đổi dấu của $g'(x)$ ta làm như sau:

Bước 1: Tìm các giá trị $x_1,x_2,...,x_n\ (x_1<x_2<...<x_n)$ thỏa mãn $g'(x)=0$ và $g'(x)$ không xác định.

Bước 2: Trên một khoảng bất kì, chẳng hạn trên khoảng $(-\infty;x_1)$ ta lấy một điểm x_0 cụ thể, tính $g'(x_0)$ và xét dấu của $g'(x_0)$, dấu của $g'(x_0)$ cũng chính là dấu của $g'(x)$ trên khoảng $(-\infty;x_1)$.

Bước 3: Ta xác định được dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại dựa theo quy tắc:

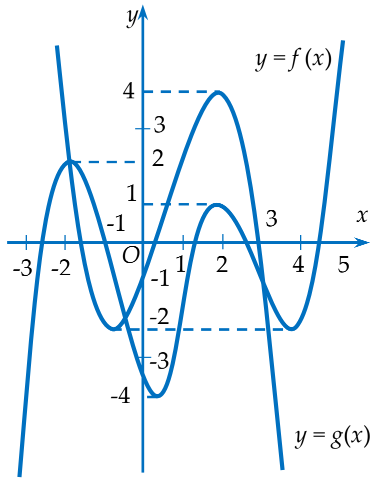
- Nếu x_i là nghiệm bội lẻ của $g'(x)$ thì $g'(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_i.
- Nếu x_i là nghiệm bội chẵn của $g'(x)$ thì $g'(x)$ không đổi dấu khi x đi qua x_i.

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\searrow$			$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x)=f(|x-3|)$ có 3 điểm cực trị.

Đáp án C.

Câu 21: Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là



A. 25. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 26.

Lời giải

* Từ đồ thị: $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-3;-2) \\ x=-1 \\ x=x_2\in(1;2) \\ x=x_3\in(2;3) \\ x=x_4\in(4;5) \end{array}\right.$ nên $f(g(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=x_1\in(-3;-2) \\ g(x)=-1 \\ g(x)=x_2\in(1;2) \\ g(x)=x_3\in(2;3) \\ g(x)=x_4\in(4;5) \end{array}\right.$

Số nghiệm của phương trình $g(x)=x_1$ chính là số giao điểm của đồ thị $y=g(x)$ với đường thẳng $y=x_1$ với $x_1\in(-3;-2)$. Suy ra phương trình $g(x)=x_1$ có đúng 1 nghiệm.

Tương tự, phương trình $g(x)=-1$ có 3 nghiệm; phương trình $g(x)=x_2$, $x_2\in(1;2)$ có 3 nghiệm; phương trình $g(x)=x_3, x_3\in(2;3)$ có 3 nghiệm; $g(x)=x_4, x_4\in(4;5)$ có 1 nghiệm.

Do các nghiệm trên đều phân biệt nên phương trình $f(g(x))=0$ có 11 nghiệm.

* Từ đồ thị: $g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_5\in(-2;-1) \\ x=x_6\in(0;1) \\ x=3 \end{array}\right.$ nên $g(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x_5\in(-2;-1) \\ f(x)=x_6\in(0;1) \\ f(x)=3 \end{array}\right.$

STUDY TIP

Để xác định số nghiệm của phương trình $f(x)=k$ (với k là một số thực cụ thể) bằng đồ thị, ta xác định số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=k$ (đường thẳng này song song với Ox). Khi đó, số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và đường thẳng $y=k$ chính là số nghiệm của phương trình $f(x)=k$.

Phương trình $f(x)=x_5, x_5\in(-2;-1)$ có 5 nghiệm; phương trình $f(x)=x_6$, $x_6\in(0;1)$ có 5 nghiệm; phương trình $f(x)=3$ có 1 nghiệm.

Do các nghiệm này đều phân biệt nên phương trình $g(f(x))=0$ có 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của cả hai phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là 22 nghiệm.

Đáp án B.

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-11x$ có đồ thị là (C). Gọi M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1=-2$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2,..., tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} $(n\in\mathbb{N}, n\ge 4)$. Gọi $M_n(x_n;y_n)$. Tìm n sao cho $11x_n+y_n+2^{2019}=0$.

A. $n=675$. **B.** $n=673$. **C.** $n=674$. **D.** $n=672$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-11$. Giả sử $M(m;m^3-11m)$ thì tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm M có hệ số góc là $k=y'(m)=3m^2-11$.

Phương trình Δ: $y=(3m^2-11)(x-m)+m^3-11m \Leftrightarrow y=(3m^2-11)x-2m^3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng Δ là:

$$x^3-11x=(3m^2-11)x-2m^3 \Leftrightarrow (x-m)^2(x+2m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=-2m \end{array}\right..$$

Suy ra hoành độ các điểm M_n lập thành một cấp số nhân (x_n) có số hạng đầu $x_1=-2$ và công bội $q=-2$. Ta có $x_n=x_1.q^{n-1}=(-2).(-2)^{n-1}=(-2)^n$

$$\Rightarrow y_n=x_n^3-11x_n=\left[(-2)^n\right]^3-11.(-2)^n.$$

Để $11x_n+y_n+2^{2019}=0 \Rightarrow 11.(-2)^n+\left[(-2)^n\right]^3-11.(-2)^n+2^{2019}=0$

$$\Leftrightarrow (-2)^{3n}=(-2)^{2019} \Leftrightarrow 3n=2019 \Leftrightarrow n=673.$$

Đáp án B.

STUDY TIP

Phương trình hoành độ giao điểm có hai nghiệm $x=m$ và $x=-2m$ có nghĩa là: Tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ bằng m cắt đồ thị hàm số tại điểm M' có hoành độ bằng $-2m$. Từ đó ta có tiếp tuyến của (C) tại điểm M_1, hoành độ x_1 cắt (C) tại điểm M_2 có hoành độ $x_2=-2x_1$. Tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} hoành độ x_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n có hoành độ $x_n=-2x_{n-1}$ $=(-2)^2.x_{n-2}=(-2)^3.x_{n-3}$ $=...=(-2)^{n-1}.x_1$

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)\ge x^4+\dfrac{2}{x^2}-2x \quad \forall x>0$ và $f(1)=-1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(0;1)$.

B. Phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0;+\infty)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(1;2)$.

D. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(2;5)$.

Lời giải

Ta có $f'(x)\ge x^4+\dfrac{2}{x^2}-2x=\dfrac{x^6-2x^3+2}{x^2}=\dfrac{(x^3-1)^2+1}{x^2}>0, \forall x>0.$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$ (1)

Từ $f'(x)\ge x^4+\dfrac{2}{x^2}-2x>0,\forall x>0$ suy ra $\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x\ge\int\limits_1^2\left(x^4+\dfrac{2}{x^2}-2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{21}{5}$

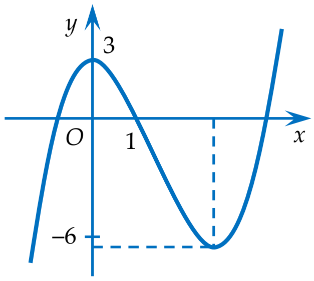
$\Rightarrow f(2)-f(1)\ge\dfrac{21}{5}\Leftrightarrow f(2)\ge f(1)+\dfrac{21}{5}=-1+\dfrac{21}{5}\Rightarrow f(2)\ge\dfrac{17}{5}$.

Kết hợp giả thiết ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và $f(2).f(1)<0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có đúng một nghiệm trên $(1;2)$.

Đáp án C.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



Đặt $g(x)=2^{f(x)}-3^{f(x)}$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải Ta có $g'(x)=f'(x).2^{f(x)}.\ln 2-f'(x).3^{f(x)}.\ln 3=f'(x)\left[2^{f(x)}.\ln 2-3^{f(x)}.\ln 3\right]$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\2^{f(x)}.\ln 2=3^{f(x)}.\ln 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=\dfrac{\ln\left(\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\right)}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}\approx-1,136\end{array}\right.$$

STUDY TIP

Chú ý rằng, số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=m$ (đường thẳng này song song với Ox).

* Nhận thấy đồ thị hình vẽ có dạng đồ thị hàm bậc ba, đồ thị có hai điểm cực trị nên phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

* Số nghiệm của phương trình $f(x)=-1,136$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với đường thẳng $y=-1,136$.

Vậy phương trình $f(x)=-1,136$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt.

Đáp án A.

Câu 25: Cho phương trình

$$\sin x(2-\cos 2x)-2(2\cos^3 x+m+1)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\sin x(2-\cos 2x)-2(2\cos^3 x+m+1)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}$

$\Leftrightarrow \sin x\left(1+2\sin^2 x\right)=2\left(2\cos^3 x+m+2\right)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}+\sqrt{2\cos^3 x+m+2}$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x+\sin x=2\left(\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\right)^3+\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ trên $\mathbb{R}$. Có $f'(t)=6t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $(*)\Leftrightarrow f(\sin x)=f\left(\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\right)\Leftrightarrow \sin x=\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\quad (1)$

Với $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$ thì $0\le \sin x\le 1$ và $(1)\Leftrightarrow \sin^2 x=2\cos^3 x+m+2$

$\Leftrightarrow -2\cos^3 x-\cos^2 x-1=m\quad (2)$

Đặt $t=\cos x$. Xét hàm số $t(x)=\cos x$ trên $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$.

Ta có $t'(x)=-\sin x\le 0,\forall x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$ nên hàm số $t(x)$ nghịch biến trên $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $t(x)$ ta thấy $t\left(\frac{2\pi}{3}\right)<t(x)\le t(0)$ hay $t\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$.

Và với mỗi $t\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$ thì phương trình $\cos x=t$ cho ta một nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$.

Phương trình (2) trở thành $-2t^3-t^2-1=m\quad (3)$

Để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$ thì phương trình (3) phải có đúng một nghiệm $t\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$.

Xét hàm số $g(t)=-2t^3-t^2-1$ với $t\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$.

Ta có $g'(t)=-6t^2-2t$, $g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	-1	$\searrow$	$-\frac{28}{27}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-4

Từ bảng biến thiên suy ra, phương trình (4) có đúng một nghiệm $t\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$ khi và chỉ khi $-4\le m<-\frac{28}{27}$.

Vậy các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$ là $m\in\{-4;-3;-2\}$.

Đáp án C.

Câu 26: Các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\left(1+\dfrac{4x}{1+x^2}\right)m+\dfrac{2x}{1+x^2}<3$ nghiệm đúng với mọi số thực x là

A. $m\in(-\infty;-4)\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

C. $m\in\left(-4;\dfrac{2}{3}\right)$. **D.** $m\in(-\infty;-4)$.

Lời giải

Đặt $t=\dfrac{2x}{1+x^2},-1\le t\le 1$. Bài toán trở thành: Tìm m sao cho $f(t)<0,\forall t\in[-1;1]$ với $f(t)=(1+2m)t+m-3$.

Ta có $f(t)<0,\forall t\in[-1;1]\Leftrightarrow\begin{cases}f(-1)<0\\f(1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m-4<0\\3m-2<0\end{cases}\Leftrightarrow -4<m<\dfrac{2}{3}$.

Đáp án C.

STUDY TIP

Cho $f(x)=ax+b\ (a\ne 0)$

Khi đó: $f(x)\ge 0,\forall x\in[\alpha;\beta]$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)\ge 0\\f(\beta)\ge 0\end{cases}$.

Câu 27: Gọi T là tập hợp các giá trị nguyên của m sao cho trong nửa khoảng $(1;2019]$, phương trình $\left|x^2-4|x|-5\right|+1-m=0$ có hai nghiệm phân biệt. Khi đó số phần tử của T là

A. 2006. **B.** 2009. **C.** 2019. **D.** 2018.

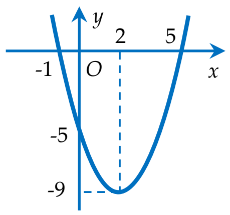
Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với $\left|x^2-4|x|-5\right|=m-1$ (*). Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|x^2-4|x|-5\right|$ và đường thẳng $d:y=m-1$ (cùng phương Ox).

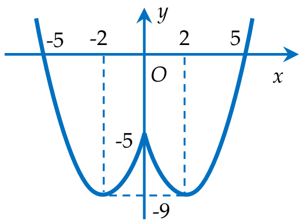
Xét hàm số $y=x^2-4x-5$ có đồ thị (C_1) như hình 1.

STUDY TIP

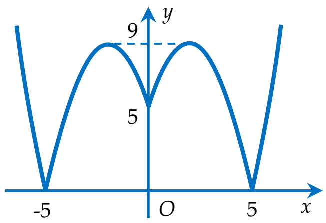
Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Xét hàm số chẵn $y=x^2-4|x|-5$, đồ thị (C_2) của hàm số này có được (như hình 2) bằng cách đối xứng phần bên phải Oy của (C_1) qua trục tung.

Xét hàm số $y=\left|x^2-4|x|-5\right|$, ta có: $y=\begin{cases}x^2-4|x|-5 & (y\ge 0)\\-\left(x^2-4|x|-5\right) & (y<0)\end{cases}$

Suy ra đồ thị hàm số (C) gồm hai phần:

- Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (C_2) phần trên Ox.

- Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số (C_2) phần dưới Ox qua trục Ox.

Ta được đồ thị (C) như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số (C), ta thấy (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} m-1>9 \\ m-1=0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} m>10 \\ m=1 \end{matrix}\right.$. Mà $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in(1;2019] \end{cases} \Rightarrow m\in\{11;12;13;...;2019\}$.

Đáp án B.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên a nhỏ hơn 5 để bất phương trình $a(x+4)>3-x$ với mọi $x\in[-2;1]$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

STUDY TIP

Cho $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$

Khi đó: $f(x)\geq 0, \forall x\in[\alpha;\beta]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)\geq 0 \\ f(\beta)\geq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $f(x)=(a+1)x+4a-3>0$

Để $a(x+4)>3-x, \forall x\in[-2;1] \Leftrightarrow \begin{cases} f(-2)>0 \\ f(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-5>0 \\ 5a-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow a>\frac{5}{2}$.

Mà $a<5$ và $a\in\mathbb{Z} \Rightarrow a\in\{3;4\}$.

Đáp án B.

Câu 29: Giả sử đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x-1}{1-2x}$ tại hai điểm phân biệt E và F. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại E và F. Tìm giá trị nhỏ nhất $\min S$ của biểu thức $S=k_1^4+k_2^4-3k_1k_2$.

A. $\min S=-1$. **B.** $\min S=-\frac{5}{8}$. **C.** $\min S=135$. **D.** $\min S=-\frac{25}{81}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng đã cho là

$\frac{x-1}{1-2x}=x+m \Leftrightarrow x-1=(1-2x)(x+m)$ (do $x=\frac{1}{2}$ không là nghiệm)

$\Leftrightarrow 2x^2+2mx-m-1=0\ (*)$.

Đồ thị (C) với đường thẳng đã cho cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m^2+2m+2>0$ (nghiệm đúng với mọi m).

Giả sử $E(x_1;y_1), F(x_2;y_2)$ thì x_1,x_2 là hai nghiệm của $(*)$.

Suy ra $x_1+x_2=-m; x_1x_2=-\frac{m+1}{2}$.

Do đó $(2x_1-1)(2x_2-1)=4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1=-1$.

Ta có $k_1=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}; k_2=-\frac{1}{(2x_2-1)^2}$ nên $k_1k_2=1$.

Suy ra $S\geq 2k_1^2k_2^2-3k_1k_2=-1$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} k_1=-1 \\ k_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow m=-1$. Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Phân tích phương án nhiễu:

Phương án B: Sai do HS tính sai $(2x_1-1)(2x_2-1)=-2(m+1)-2(-m)+1=2$.

Suy ra $k_1k_2=\frac{1}{4}$. Do đó $S\geq 2(k_1k_2)^2-3k_1k_2=-\frac{5}{8}$. Vậy $\min S=-\frac{5}{8}$.

Phương án C: Sai do HS tính sai hệ số góc. Cụ thể:

$$k_1=\frac{3}{(2x_1-1)^2};k_2=\frac{3}{(2x_2-1)^2}\text{ nên } k_1k_2=9.$$

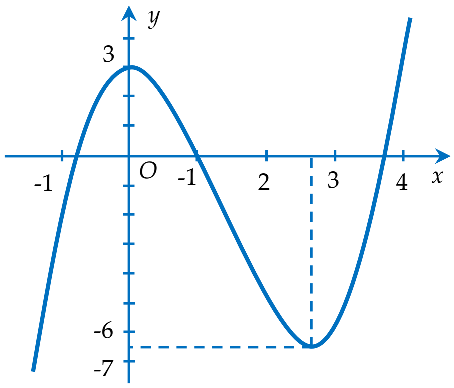
Suy ra $S\ge 2(k_1k_2)^2-3k_1k_2=135$. Vậy $\min S=135$.

Phương án D: Sai do HS tính sai $(2x_1-1)(2x_2-1)=-2(m+1)-2(-m)+1=3$.

Suy ra $k_1k_2=\frac{1}{9}$. Do đó $S\ge 2(k_1k_2)^2-3k_1k_2=-\frac{25}{81}$. Vậy $\min S=-\frac{25}{81}$.

Đáp án A.

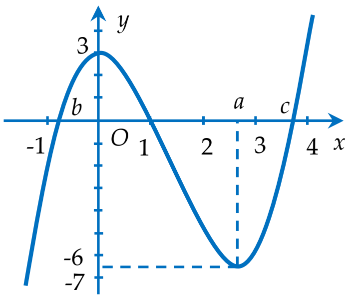
Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Kí hiệu trên đồ thị như hình bên.



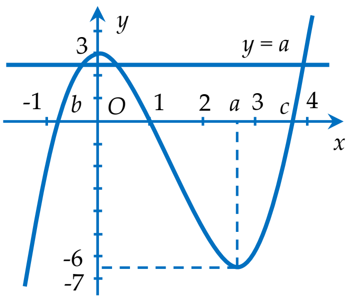
Đặt $u=f(x)$. Ta có $g(x)=f\left[f(x)\right]=f(u)$.

$g'(x)=u'.f'(u)=f'(x).f'(u)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'(u)=0\end{array}\right.$.

* $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=a\ (2<a<3)\end{cases}$ (nhìn hình để xác định a).

* $f'(u)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=x_1\\u=x_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=x_1=0\\f(x)=x_2=a\ \ (2<a<3)\end{array}\right.$.



$f(x)=0\Leftrightarrow x\in\{b;1;c\}=\{x_3;x_4;x_5\}$.

$f(x)=a$ (nhìn vào đồ thị thể hiện bên ta thấy đồ thị hàm số $f(x)$ cắt đường thẳng $y=a$ (với $2<a<3$) tại ba điểm phân biệt do vậy phương trình $f(x)=a$ có ba nghiệm phân biệt $x_6;x_7;x_8$.

Rõ ràng $x_1,...,x_8$ là đôi một khác nhau.

Kết hợp lại thì phương trình $g'(x)=0$ có 8 nghiệm phân biệt.

Đáp án D.

Câu 31: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-1$ có đồ thị là (C). Gọi T là tập hợp tất cả các điểm thuộc đường thẳng $y=x-1$ mà từ điểm đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C). Tìm tổng tung độ của các điểm thuộc T.

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải $y'=3x^2-12x+9$.

Gọi $M\left(x_0;x_0^3-6x_0^2+9x_0-1\right)$ là một điểm bất kì thuộc (C). Tiếp tuyến tại M:

$y=\left(3x_0^2-12x_0+9\right)\left(x-x_0\right)+x_0^3-6x_0^2+9x_0-1$

$\Leftrightarrow y=\left(3x_0^2-12x_0+9\right)x-2x_0^3+6x_0^2-1$.

Gọi $A(a;a-1)$ là một điểm bất kì thuộc đường thẳng $y=x-1$.

Tiếp tuyến tại M đi qua A $\Leftrightarrow\left(3x_0^2-12x_0+9\right)a-2x_0^3+6x_0^2-1=a-1$

$\Leftrightarrow\left(3x_0^2-12x_0+8\right)a=2x_0^3-6x_0^2$ (*).

Từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm x_0 phân biệt.

Ta có $3x_0^2-12x_0+8=0\Leftrightarrow x_0=\dfrac{6\pm2\sqrt{3}}{3}$.

Dễ thấy $x_0=\dfrac{6\pm2\sqrt{3}}{3}$ không thỏa mãn (*).

Với $x_0\neq\dfrac{6\pm2\sqrt{3}}{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow a=\dfrac{2x_0^3-6x_0^2}{3x_0^2-12x_0+8}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2x^3-6x^2}{3x^2-12x+8}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{6\left(x^4-8x^3+20x^2-16x\right)}{\left(3x^2-12x+8\right)^2}$.

Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	-	||	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy để (*) có 2 nghiệm phân biệt thì $a\in\{0;4\}$. Suy ra tập $T=\{(0;-1);(4;3)\}$.

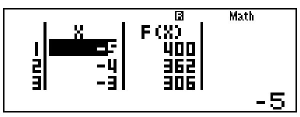
Do đó tổng tung độ các điểm thuộc T bằng 2.

Đáp án D.

Câu 32: Cho hàm số $y=\left|x^3+3x^2-72x+90\right|$. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-5;5]$.

A. 328. **B.** 470. **C.** 314. **D.** 400.

Lời giải Sử dụng máy tính cầm tay chức năng TABLE với thiết lập Start -5; End 5; Step 1 thì ta có



MODE 7 SHIFT hyp ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ▶ + 3 ALPHA) x^2 − 7 2 ALPHA) + 9 0 = (−) 5 = 5 = =

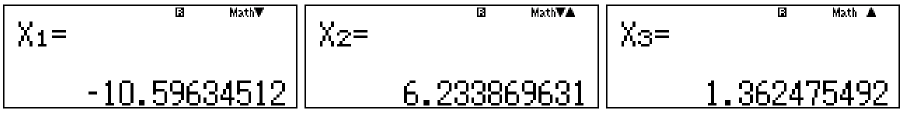
Từ bảng giá trị ta kết luận được giá trị lớn nhất của hàm số đạt được là 400 khi $x=-5.$

Từ bảng giá trị trên ta chưa thể kết luận được giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Ta thấy $\left|x^3+3x^2-72x+90\right|\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Dấu bằng xảy ra khi $x^3+3x^2-72x+90=0.$

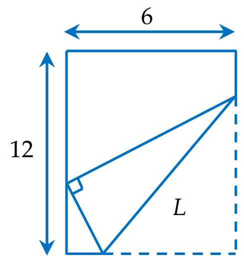
MODE 5 4 1 = 3 = − 7 2 = 9 0 = =



Trong ba nghiệm trên ta thấy nghiệm $x_3\in\left[-5;5\right]$. Từ đây ta có thể kết luận giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt được là 0 khi $x=x_3$.

Vậy tổng cần tìm là 400. Ta chọn D.

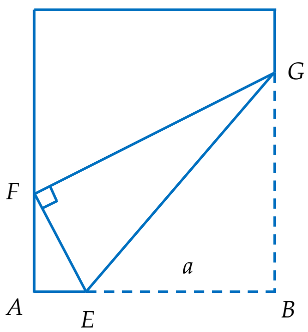
Đáp án D.



Câu 33: Một mảnh giấy hình chữ nhật có chiều dài là 12*cm* và chiều rộng là 6*cm*. Thực hiện thao tác gấp góc dưới bên phải sao cho đỉnh được gấp nằm trên cạnh chiều dài còn lại (như hình vẽ). Hỏi chiều dài L tối thiểu của nếp gấp là bao nhiêu?

A. $\min L=6\sqrt{2}\ cm.$ **B.** $\min L=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\ cm.$

C. $\min L=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\ cm.$ **D.** $\min L=9\sqrt{2}\ cm.$



Lời giải

Đặt $EB=a$ như hình vẽ $\Rightarrow\begin{cases}EF=a\\AE=6-a\end{cases}$.

Trong tam giác vuông AEF có

$$\cos AEF=\frac{6-a}{a}\Rightarrow\cos FEB=\frac{a-6}{a}\ \text{(hai góc bù nhau)}.$$

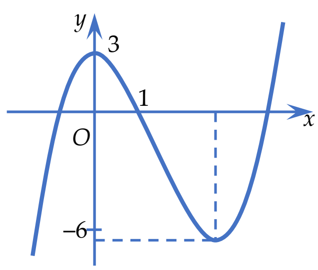
Ta có $\Delta BEG=\Delta FEG\Rightarrow FEG=BEG=\dfrac{1}{2}FEB\Rightarrow\cos FEG=\sqrt{\dfrac{a-3}{a}}$.

Trong tam giác vuông AEF có $EG=\dfrac{EF}{\cos FEG}=\sqrt{\dfrac{a^3}{a-3}}$.

Xét hàm $f\left(a\right)=\dfrac{a^3}{a-3}$ với $a>3$, ta được $\min f\left(a\right)$ đạt tại $a=\dfrac{9}{2}\Rightarrow EG=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Đáp án B.

Câu 34: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g\left(x\right)=2^{f(x)}-3^{f(x)}$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'\left(x\right)=0$

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải Ta có $g'(x)=f'(x).2^{f(x)}.\ln 2-f'(x).3^{f(x)}.\ln 3=f'(x)\left[2^{f(x)}.\ln 2-3^{f(x)}.\ln 3\right]$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\2^{f(x)}.\ln 2=3^{f(x)}.\ln 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}=\frac{\ln 3}{\ln 2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=\frac{\ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\approx-1,136\end{array}\right.$$

* Nhận thấy đồ thị hình vẽ có dạng đồ thị hàm bậc ba, đồ thị có hai điểm cực trị nên phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

* Số nghiệm của phương trình $f(x)=-1,136$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với đường thẳng $y=-1,136$. Vậy phương trình $f(x)=-1,136$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt.

Đáp án A.

Câu 35: Cho $x,y>0$ và $x+y=\frac{5}{4}$ sao cho biểu thức $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó:

A. $x^2+y^2=\frac{25}{32}$. **B.** $x^2+y^2=\frac{17}{16}$. **C.** $x^2+y^2=\frac{25}{16}$. **D.** $x^2+y^2=\frac{13}{16}$.

Lời giải Từ $x+y=\frac{5}{4}\Rightarrow y=\frac{5}{4}-x\Rightarrow P=\frac{4}{x}+\frac{1}{5-4x}$

Xét $f(x)=\frac{4}{x}+\frac{1}{5-4x}\ \forall x\in\left(0;\frac{5}{4}\right)\Rightarrow f'(x)=-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{(5-4x)^2}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{5}{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		1		5/4
$f'(x)$	||	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

$\Rightarrow\min f(x)=5$. Khi $x=1\Rightarrow y=\frac{1}{4}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{17}{16}$.

Đáp án B.

Câu 36: Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C), điểm M di động trên (C). Gọi d là tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ. Khi đó giá trị nhỏ nhất của d là:

A. $\frac{207}{250}$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $2\sqrt{2}-2$.

Lời giải $y=\frac{x-1}{x+1}(C)\Rightarrow M\left(m;\frac{m-1}{m+1}\right)\ (m\neq-1)$

$\Rightarrow$ Tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là $d=|m|+\left|\dfrac{m-1}{m+1}\right|\ (m\neq -1)$

- Với $m=0\Rightarrow d=1\Rightarrow \min d\le 1\Rightarrow$ Xét sao cho $d\le 1$

$$\Leftrightarrow |m|+\left|\frac{m-1}{m+1}\right|\le 1\Rightarrow \begin{cases}|m|\le 1\\ \left|\dfrac{m-1}{m+1}\right|<1\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le 1$$

- Với $m\in[0;1]\Rightarrow d=m+\dfrac{1-m}{m+1}=\dfrac{m^2+1}{m+1}$

Khảo sát hàm số $f(m)=\dfrac{m^2+1}{m+1}$ trên $[0;1]\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} f(m)=2\sqrt{2}-2$

Khi $m=\sqrt{2}-1\Rightarrow M\left(-1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$

Đáp án D.

Câu 37: Cho hai chất điểm A và B cùng bắt đầu chuyển động trên trục Ox từ thời điểm $t=0$. Tại thời điểm t, vị trí của chất điểm A được cho bởi $x=f(t)=-6+2t-\dfrac{1}{2}t^2$ và vị trí của chất điểm B được cho bởi $x=g(t)=4\sin t$. Biết tại đúng hai thời điểm t_1 và t_2 ($t_1<t_2$), hai chất điểm có vận tốc bằng nhau. Tính theo t_1 và t_2 độ dài quãng đường mà chất điểm A đã di chuyển từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2.

A. $4-2(t_1+t_2)+\dfrac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)$.

B. $4+2(t_1+t_2)-\dfrac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)$.

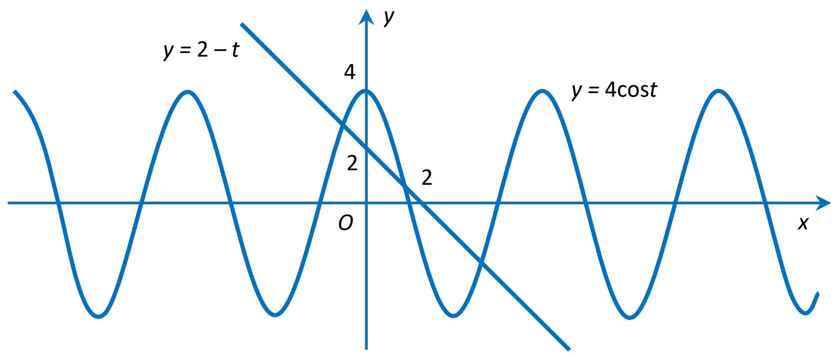
C. $2(t_2-t_1)-\dfrac{1}{2}(t_2^2-t_1^2)$.

D. $2(t_1-t_2)-\dfrac{1}{2}(t_1^2-t_2^2)$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $f'(t)=2-t;\ g'(t)=4\cos t$.

Vẽ đồ thị hai hàm số $y=f'(t)$ và $y=g'(t)$ ta có



Nhìn vào đồ thị ta thấy $\begin{cases}0<t_1<t_2\\ f'(t_1)>0\\ f'(t_2)<0\\ f(2)=0\end{cases}$ và $\begin{cases}f(2)=-6+4-2=-4\\ f(t_1)=-6+2t_1-\dfrac{1}{2}{t_1}^2\\ f(t_2)=-6+2t_2-\dfrac{1}{2}{t_2}^2\end{cases}$

$$\Rightarrow s=f(2)-f(t_1)+f(2)-f(t_2)=-4-\left(-6+2t_1-\frac{1}{2}{t_1}^2\right)+(-4)-\left(-6+2t_2-\frac{1}{2}{t_2}^2\right)$$

$$=4+\frac{1}{2}\left({t_1}^2+{t_2}^2\right)-2(t_1+t_2).$$

Cách 2: **Sử dụng tích phân.**

Từ cách 1 ta có hai chất điểm gặp nhau khi $2-t=4\cos t\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=A\\t_2=B\end{cases}$.

Từ hình vẽ ở cách 1 ta có $A<2<B$.

Quãng đường đi được từ thời điểm A đến thời điểm B được tính bằng công thức

$$\int_A^B|2-t|\mathrm{d}t=\int_A^2|2-t|\mathrm{d}t+\int_2^B|2-t|\mathrm{d}t=\int_A^2(2-t)\mathrm{d}t+\int_2^B(t-2)\mathrm{d}t$$

$$=\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_A^2+\left(\frac{t^2}{2}-2t\right)\Bigg|_2^B=4-2-2A+\frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}-2B-2+4$$

$$=4+\frac{1}{2}\left(A^2+B^2\right)-2(A+B)=4+\frac{1}{2}\left(t_1^{\ 2}+t_2^{\ 2}\right)-2\left(t_1+t_2\right).$$

Đáp án A.

STUDY TIPS

Trong vật lý hàm vận tốc là đạo hàm của hàm li độ, do vậy trong bài toán ta thực hiện vẽ hai đồ thị hàm $y=f'(t)$ và $y=g'(t)$ để tìm giao điểm $t_1;t_2$ và xét dấu v.

Lưu ý vận tốc có thể âm, tức chất điểm có điểm "lùi". Do đó không được tính quãng đường bằng $f(t_2)-f(t_1)$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)=x^3+3ax^2+3x+3$ có đồ thị (C) và $g(x)=x^3+3bx^2+9x+5$ có đồ thị (H), với a,b là các tham số thực. Đồ thị $(C),(H)$ có chung ít nhất 1 điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+2|b|$

A. $\sqrt{21}$. **B.** $2\sqrt{6}+6$. **D.** $3+5\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases}f'(x)=3x^2+6ax+3=0\,(*)\\g'(x)=3x^2+6bx+9=0\end{cases}\Rightarrow 6x(a-b)=6\Leftrightarrow x=\frac{1}{a-b}$.

Áp dụng công thức nghiệm cho phương trình $(*)$ ta có $x=-a\pm\sqrt{a^2-1}$ với $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

* **<u>Trường hợp 1:</u>** $x=-a+\sqrt{a^2-1}$.

Ta có $\frac{1}{a-b}=-a+\sqrt{a^2-1}\Leftrightarrow b=a+\frac{1}{a-\sqrt{a^2-1}}=2a+\sqrt{a^2-1}$

Suy ra $P=|a|+2|b|=|a|+\left|4a+2\sqrt{a^2-1}\right|\ge\left|5a+2\sqrt{a^2-1}\right|$

Xét hàm số $f(x)=5x+2\sqrt{x^2-1},x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Đạo hàm $f'(x)=5+\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}};f'(x)=0\Leftrightarrow 5\sqrt{x^2-1}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\25\left(x^2-1\right)=4x^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{5}{\sqrt{21}}$ (thỏa mãn).

Lại có $f\left(-\frac{5}{\sqrt{21}}\right)=-\sqrt{21}\Rightarrow P\ge\sqrt{21}$ (lập bảng biến thiên của hàm số $|f(x)|$).

* **<u>Trường hợp 2:</u>** Tương tự, ta tìm được $P\ge\sqrt{21}$.

Đáp án A.

STUDY TIPS

Phân tích đề bài: Yêu cầu bài toán tương đương với hai phương trình $f'(x)=0$, $g'(x)=0$ có ít nhất một nghiệm chung. Do phương trình $f'(x)=0,g'(x)=0$ có bậc hai nên nếu có hai nghiệm trùng nhau thì $f'(x)=k.g'(x)$ với $k\in\mathbb{R}$, $k\ne 0$, điều này vô lý vì hệ số tự do trong hai phương trình này không tỉ lệ với nhau.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x<0\\ m+\frac{1-x}{1+x} & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $m=1$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=0$

Lời giải

Ta có $f(0)=m+\dfrac{1-0}{1+0}=m+1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(m+\dfrac{1-x}{1+x}\right)=m+1$

và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1-x)-(1+x)}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=-1$

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

$\Leftrightarrow m+1=-1 \Leftrightarrow m=-2.$

Đáp án B.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, với $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Biết rằng $f'(x)+3x(x-2)f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(|x|)+m=0$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

A. $1<m<e^4$. **B.** $-e^6<m<-1$.

C. $-e^4<m<-1$. **D.** $0<m<e^4$.

Lời giải

Ta có $f'(x)+3x(x-2)f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=6x-3x^2,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (\ln f(x))'=6x-3x^2,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \ln f(x)=3x^2-x^3+C \Leftrightarrow f(x)=e^{3x^2-x^3+C}$.

Do $f(0)=1$ nên $e^C=1 \Leftrightarrow C=0$. Suy ra $f(x)=e^{3x^2-x^3}$.

Ta có $f'(x)=(6x-3x^2)e^{3x^2-x^3}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0; x=2$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ là

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	e^4	$\searrow$	0

Hàm số $f(|x|)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị của hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng. Do đó phương trình $f(|x|)+m=0$ có bốn nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(x)+m=0$ có hai nghiệm dương phân biệt hay phương trình $f(x)=-m$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow 1<-m<e^4 \Leftrightarrow -e^4<m<-1.$$

Phân tích phương án nhiễu.

Phương án A: Sai do HS biến đổi sai $f(x)+m=0 \Leftrightarrow f(x)=m$ nên tìm được $1<m<e^4$.

Phương án B: Sai do HS tính sai $f(2)=e^6$ nên tìm được $-e^6<m<-1$.

Phương án D: Sai do HS biến đổi sai $f(x)+m=0 \Leftrightarrow f(x)=m$ và đọc sai bảng biến thiên.

Đáp án C.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau vô nghiệm:

$x^6+3x^5+6x^4-mx^3+6x^2+3x+1=0.$

A. Vô số. **B.** 26. **C.** 27. **D.** 28.

Lời giải

Do $x=0$ không thỏa mãn phương trình

$\Rightarrow$ Chia 2 vế phương trình cho x^3 ta được:

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)=m\ (*)$$

Đặt $t=x+\frac{1}{x}\Rightarrow |t|\geq 2$, phương trình (*) $\Leftrightarrow m=t^3+3t^2+t-6$

STUDY TIPS

$|t|=\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\left|\frac{1}{x}\right|$

Áp dụng BĐT Cô – si

$\Rightarrow |t|\geq 2$

Xét $f(t)=t^3+3t^2+3t-6$ trên $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=-1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(t)$	+		+	
$f(t)$	$-\infty \nearrow$	-8	20	$\nearrow +\infty$

$\Rightarrow f(t)\in(-\infty;-8]\cup[20;+\infty)\ \forall t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(t)=m$ vô nghiệm $\Leftrightarrow m\in(-8;20)$

$\Rightarrow$ Có 27 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Đáp án C.

Câu 42: Cho các số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn: $x+y=\frac{5}{4}$ thì biểu thức $S=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$ thì $a.b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $a.b=\frac{3}{8}$. **B.** $a.b=\frac{25}{64}$. **C.** $a.b=0$. **D.** $a.b=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Từ $x+y=\frac{5}{4}\Rightarrow y=\frac{5}{4}-x$ vì $y>0\Rightarrow 0<x<\frac{5}{4}$ $\Rightarrow S=\frac{4}{x}+\frac{1}{5-4x}\ \forall x\in\left(0;\frac{5}{4}\right)$

Xét $f(x)=\frac{4}{x}-\frac{1}{5-4x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{4}{x^2}+\frac{4}{(5-4x)^2}=0\Leftrightarrow x=1\in\left(0;\frac{5}{4}\right)$

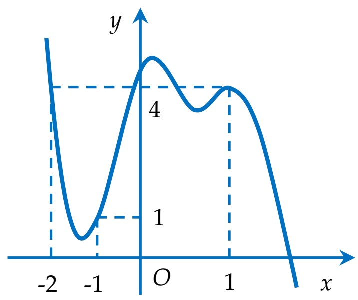
Bảng biến thiên:

x	0		1		5/4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

$$\Rightarrow \min S = \min_{\left(0;\frac{5}{4}\right)} f(x) = 5 \text{ khi } \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a.b = \frac{1}{4}$$

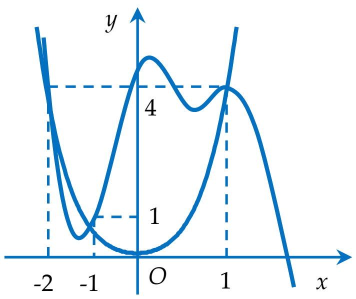
Đáp án D.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=3f(x)-x^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $g(-2)>g(2)>g(-1)$.
B. $g(2)>g(-2)>g(-1)$.
C. $g(-1)>g(-2)>g(2)$.
D. $g(-1)>g(2)>g(-2)$.

Lời giải



Ta thấy đồ thị hàm số $y=x^2$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại 3 điểm có tọa độ $(-2;4),(-1;1),(2;4)$. Căn cứ vào diện tích hình phẳng trên hình vẽ ta có:

$$\int_{-2}^{-1}\left[x^2-f'(x)\right]dx < \int_{-1}^{2}\left[f'(x)-x^2\right]dx$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3}-f(x)\right]\Bigg|_{-2}^{-1} < \left[f(x)-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-3f(x)}{3}\Bigg|_{-2}^{-1} < \frac{3f(x)-x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} \Leftrightarrow -g(x)\Big|_{-2}^{-1} < g(x)\Big|_{-1}^{2}$$

$$\Leftrightarrow -g(-1)+g(-2)<g(2)-g(-1) \Leftrightarrow g(-2)<g(2)\ (1)$$

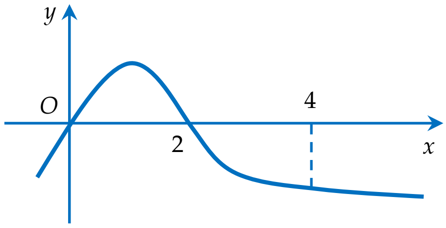
Mặt khác từ đồ thị ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	$g(-2)$	↘	$g(-1)$	↗	$g(2)$	↘	

$$\Rightarrow g(2)>g(-2)>g(-1).$$

Đáp án B.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ. Biết rằng $f(2)+f(4)=f(3)+f(0)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ lần lượt là:



A. $f(2);f(0)$. **B.** $f(4);f(2)$. **C.** $f(0);f(2)$. **D.** $f(2);f(4)$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	0		2		4
$f'(x)$	0	+	0	–	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(2)$	↘	$f(4)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max f(x)=f(2)$ và $f(3)>f(4)$ (do hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$).

Mà $f(2)+f(4)=f(3)+f(0)$ $\Rightarrow f(2)-f(3)=f(0)-f(4)>0$

$\Rightarrow f(0)>f(4)\Rightarrow \min f(x)=f(4)$.

Đáp án B.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để hàm số $y=x^3-3x^2-(2m-5)x+5$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2023.

Lời giải

Cách 1: Ta có $y'=3x^2-6x-2m+5$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x-2m+5\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow 3(x-1)^2\ge 2m-2,\forall x\in(0;+\infty)$

Vì $(x-1)^2\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$ (dấu bằng xảy ra khi $x=1$) nên

$3(x-1)^2\ge 2m-2,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow 2m-2\le 0\Leftrightarrow m\le 1$.

Do m nguyên và $m\in[-2020;2020]\Rightarrow m\in\{-2020;-2019;-2018,....,0,1\}$.

Vậy có 2022 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Cách 2: Ta có $y'=3x^2-6x-2m+5;\Delta'=9-3(5-2m)=6m-6$.

+) Nếu $\Delta'\le 0\Leftrightarrow m\le 1$ thì $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ do đó, hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

+) Nếu $\Delta'>0\Leftrightarrow m>1$ thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2\,(x_1<x_2)$.

Khi đó, hàm số đồng biến trên $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;+\infty)$.

Để hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ thì

$$x_1<x_2\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2<0\\x_1x_2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2<0\\\dfrac{-2m+5}{3}\ge 0\end{cases}\text{ (vô nghiệm).}$$

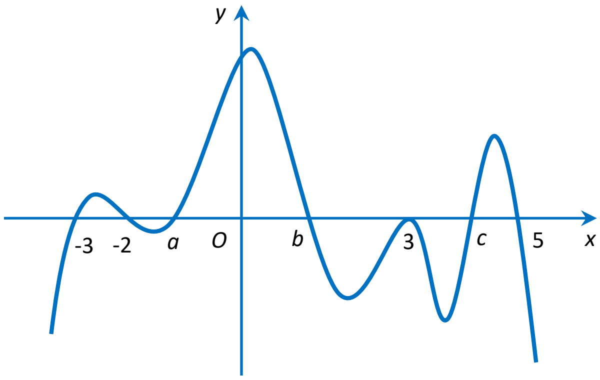
Do vậy, $m\le 1$ thỏa mãn bài toán.

Mà m nguyên và $m\in[-2020;2020]\Rightarrow m\in\{-2020;-2019;-2018,....,0,1\}$.

Vậy có 2022 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Đáp án B.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3;-2;a;b;3;c;5$ với $-\dfrac{4}{3}<a<-1;1<b<\dfrac{4}{3};4<c<5$ có dạng như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f(2|x|+m-3)$ có 7 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

STUDY TIP

Tổng quát:

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)f_1(x)$ với $f_1(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ (hoặc $f_1(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$) và $x_1<x_2<...<x_n$. Khi đó, với hàm số $y=h(x)=f(|x|+m)$ có

+ $2n+1$ điểm cực trị thì $m<x_1$.

+ $2l+1\,(0<l<n)$ điểm cực trị thì $x_k\le m<x_{k+1}$ với $l=n-k$ hay $k=n-l$.

+ Đúng 1 điểm cực trị thì $m>x_n$.

Lời giải

Từ hình vẽ ta thấy hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $-3;-2;a;b;c;5$.

Xét hàm số $y=g(x)=f(2|x|+m-3)$

$$g'(x)=\frac{2x}{|x|}.f'(2|x|+m-3).$$

Khi đó, để xác định số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ ta cần xác định số nghiệm của hệ $\left[\begin{array}{l}x=0\\2|x|+m-3\in\{-3;-2;a;b;c;5\}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\|x|\in\left\{\dfrac{-m}{2};\dfrac{-m+1}{2};\dfrac{a+3-m}{2};\dfrac{b+3-m}{2};\dfrac{c+3-m}{2};\dfrac{8-m}{2}\right\}\end{array}\right.$$

Đặt $x_1=\dfrac{-m}{2};x_2=\dfrac{-m+1}{2};x_3=\dfrac{a+3-m}{2};x_4=\dfrac{b+3-m}{2};x_5=\dfrac{c+3-m}{2};x_6=\dfrac{8-m}{2}$.

Ta có $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6$.

Với mỗi $i=1;2;...;7$

Nếu $x_i > 0$ phương trình $|x| = x_i$ có hai nghiệm phân biệt $x = \pm x_i$, dẫn đến $x = \pm x_i$ là hai điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

Nếu $x_i = 0$ phương trình $|x| = x_i$ có duy nhất $x = 0$, dẫn đến $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

Nếu $x_i < 0$ phương trình $|x| = x_i$ vô nghiệm.

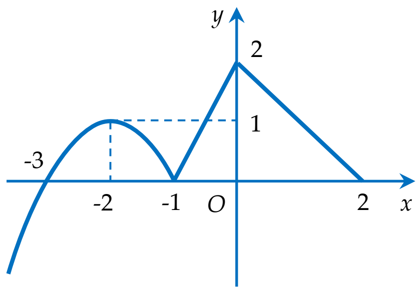
Do đó, hàm số $y = g(x)$ có 7 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow x_3 \le 0 < x_4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a+3-m}{2} \le 0 \\ \dfrac{b+3-m}{2} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a+3 \le m < b+3 \Rightarrow -1+3 \le m < \frac{4}{3}+3.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $2;3;4$.

Đáp án B.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(-3) = 0$, giá trị của $f(-1) + f(1)$ bằng

A. $\dfrac{23}{6}$. **B.** $\dfrac{31}{6}$. **C.** $\dfrac{35}{3}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Cách 1: Giải bằng phương pháp tự luận dùng nguyên hàm

Ta xác định biểu thức của hàm số $y = f'(x)$. Từ hình vẽ ta thấy trên $[-3;2]$ đồ thị gồm 3 nhánh:

- Nhánh parabol $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ xác định trên $[-3;-1]$ đi qua 3 điểm $(-3;0)$, $(-2;1)$ và $(-1;0)$.

- Nhánh đường thẳng $y = a_2x + b_2$ xác định trên $[-1;0]$ đi qua 2 điểm $(-1;0)$ và $(0;2)$.

- Nhánh đường thẳng $y = a_3x + b_3$ xác định trên $[0;2]$ đi qua 2 điểm $(0;2)$ và $(2;0)$.

Từ đây, giải các hệ phương trình tương ứng ta suy ra biểu thức của $f'(x)$ là:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3 & \text{khi } -3 \le x \le -1 \\ 2x + 2 & \text{khi } -1 \le x \le 0 \\ -x + 2 & \text{khi } 0 \le x \le 2 \end{cases}.$$

$f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$, do đó biểu thức của $f(x)$ có dạng:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^3}{3}-2x^2-3x+C_1 & \text{khi } -3\le x\le -1\\ x^2+2x+C_2 & \text{khi } -1\le x\le 0\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x+C_3 & \text{khi } 0\le x\le 2\end{cases}.$$

Vì $f(-3)=0$ nên ta có: $-\dfrac{(-3)^3}{3}-2(-3)^2-3(-3)+C_1=0\Leftrightarrow C_1=0$.

Do f liên tục tại $x=-1$ nên ta có: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, suy ra:

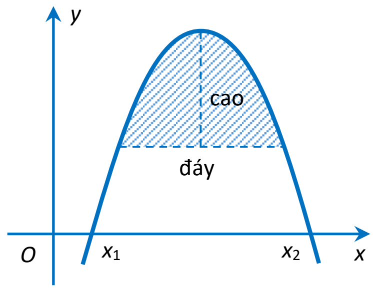
$$-\frac{(-1)^3}{3}-2(-1)^2-3(-1)=(-1)^2+2(-1)+C_2\Leftrightarrow C_2=\frac{7}{3}.$$

Tương tự, f liên tục tại $x=0$ nên ta có: $0^2+2.0+\dfrac{7}{3}=-\dfrac{0^2}{2}+2.0+C_3\Leftrightarrow C_3=\dfrac{7}{3}$.

Vậy $f(-1)+f(1)=\left[(-1)^2+2(-1)+\dfrac{7}{3}\right]+\left[-\dfrac{1^2}{2}+2.1+\dfrac{7}{3}\right]=\dfrac{31}{6}$.

Cách 2: Giải nhanh bằng phương pháp đánh giá diện tích trên đồ thị

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một parabol và một đường thẳng có phương song song với trục Ox được cho bởi công thức: $S=\dfrac{2}{3}$ đáy x cao (1)



Áp dụng công thức này ta giải nhanh bài toán này như sau:

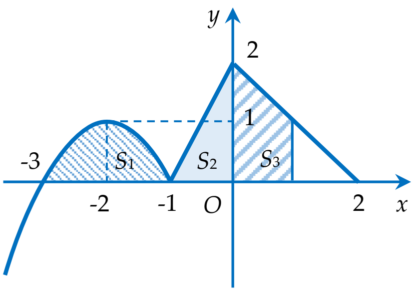
Nhánh parabol $y=ax^2+bx+c$ qua 3 điểm $(-3;0)$, $(-2;1)$ và $(-1;0)$ nên ta tính ra được hệ số $a=-1$.

Ta có:

$$f(-1)+f(1)=\left[f(-1)-f(-3)\right]+\left[f(1)-f(-3)\right]=S_1+(S_1+S_2+S_3).$$

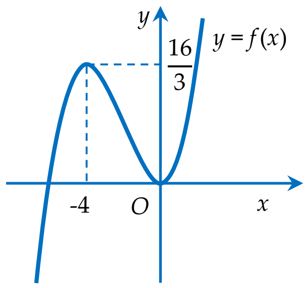
Với: $S_1=\dfrac{2}{3}.2.1=\dfrac{4}{3}$, $S_2=\dfrac{1}{2}.1.2=1$, $S_3=\dfrac{1}{2}(1+2).1=\dfrac{3}{2}$.

Suy ra: $f(-1)+f(1)=\dfrac{31}{6}$.



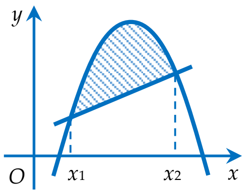
Đáp án B.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



STUDY TIP

Một nhược điểm của công thức (1) là chỉ có thể tính được diện tích khi "lát cắt" parabol song song với trục Ox. Trường hợp "lát cắt" bất kỳ, diện tích hình giới hạn bởi một đường thẳng và parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 (như hình minh hoạ) ta có diện tích được cho bởi công thức $S=\dfrac{|a||x_1-x_2|^3}{6}$ (2)



Với công thức tính nhanh diện tích "lát cắt parabol", ta có thể xây dựng bài toán tương tự với đồ thị liên tục gồm các nhánh là đường thẳng hoặc parabol.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f\left(m^2+4m+4\right)$ có nghiệm?

A. 4. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Ta có hàm số $y=f(x)$, liên tục và đồng biến trên $[0;+\infty)$ nên

$$f\left(\left|\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f\left(m^2+4m+4\right)\Leftrightarrow\left|\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|=(m+2)^2\ (*)$$

Xét $a=\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}$, điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Khi đó:

$$a(2\cos x-\sin x+4)=3\sin x-\cos x-1\Leftrightarrow(a+3)\sin x-(2a+1)\cos x=4a+1\ (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow(a+3)^2+(2a+1)^2\ge(4a+1)^2\Leftrightarrow-\dfrac{9}{11}\le a\le 1$.

Suy ra $0\le\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\le 1$.

Do đó phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0\le(m+2)^2\le 1\Leftrightarrow-3\le m\le-1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-3;-2;-1\}$.

Đáp án D.

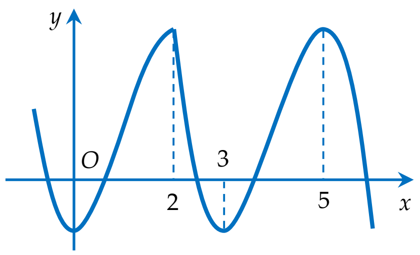
STUDY TIP

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục, đồng biến (hoặc nghịch biến) trên miền D (D là một khoảng, 1 đoạn, hoặc nửa khoảng) thì với $u,v\in D$, $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.

FOR REVIEW

Phương trình $a\sin x+b\cos x=c$ $\left(a^2+b^2\ne 0\right)$ có nghiệm khi và chỉ khi $a^2+b^2\ge c^2$.

Câu 49: Cho số thực m và hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Xét $g(x)=2^x+2^{-x}$ với $x\in[-1;2]$

$$g'(x)=2^x.\ln 2-\frac{2^x.\ln 2}{4^x}=\ln 2\left(2^x-\frac{1}{2^x}\right)$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 4^x=1\Leftrightarrow x=0$$

x	-1		0		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{5}{2}$	↘	2	↗	$\frac{17}{4}$

$g(0)=2,g(-1)=\dfrac{5}{2},g(2)=\dfrac{17}{4}$. Vậy $2\le 2^x+2^{-x}\le\dfrac{17}{4}$.

Với $t_0 \in \{2\} \cup \left(\frac{5}{2};\frac{17}{4}\right]$ thì phương trình $2^x + 2^{-x} = t_0$ có một nghiệm.

Với $t_0 \in \left(2;\frac{5}{2}\right]$ thì phương trình $2^x + 2^{-x} = t_0$ có hai nghiệm phân biệt.

Bài toán trở thành: Phương trình $f(t) = m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[2;\frac{17}{4}\right]$ với $t = 2^x + 2^{-x}$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$, ta có:

- Nếu $m = f(3)$ thì $f(t) = f(3) \Leftrightarrow t = 3$: Phương trình đã cho có một nghiệm.

- Nếu $f(3) < m < 0$ thì $f(t) = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_1 \\ t = t_2 \end{array}\right.$, với $\frac{5}{2} < t_1 < 3$, $t_2 > 3$, suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm.

- Nếu $0 \le m \le f\left(\frac{17}{4}\right)$ thì $f(t) = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_4 \\ t = t_5 \end{array}\right.$, với $2 < t_4 \le \frac{5}{2}$, $3 < t_5 \le \frac{17}{4}$, suy ra phương trình đã cho có tối đa ba nghiệm.

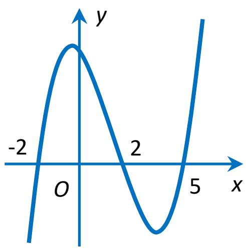
- Nếu $f\left(\frac{17}{4}\right) < m \le f(2)$ thì $f(t) = m \Leftrightarrow t = t_3$, với $2 \le t_3 < \frac{5}{2}$, suy ra phương trình đã cho có tối đa hai nghiệm.

Vậy phương trình trên có tối đa 3 nghiệm phân biệt.

Đáp án B.

> **STUDY TIP**
>
> Phương pháp biện luận theo m số nghiệm phương trình $f(u(x)) = h(m)$ trên D:
>
> + Bước 1: Đặt $u(x) = t$ khảo sát $u(x)$ trên D tìm điều kiện K của t và số nghiệm của x dựa vào số nghiệm của t.
>
> + Bước 2: Biện luận theo số nghiệm phương trình $f(t) = h(m)$ trên miền K.
>
> + Bước 3: Khảo sát, dựa và bảng biến thiên hàm $f(t)$ trên K rồi kết luận.

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Ta có $g'(x) = -2.f'(3-2x)$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < 2 \\ x > 5 \end{array}\right.$.

Do đó, $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 3-2x < 2 \\ 3-2x > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \\ x < -1 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ và $(-\infty;-1)$.

Đáp án A.

> **STUDY TIP**
>
> Với bài toán xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(u(x))$ khi biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và biết hàm số $y = u(x)$, ta quy về xét dấu của tích $u'(x)$ và $f'(u(x))$. Dựa vào đồ thị của hàm $y = f(x)$ ta xét dấu được $f'(x)$ đi đến xét dấu $f'(u(x))$.

Câu 51: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+x-\left|x\right|-m\right|$, với m là tham số. Gọi a là giá trị nguyên nhỏ nhất của m để hàm số có ít điểm cực trị nhất; A là giá trị nguyên lớn nhất của m để hàm số có nhiều điểm cực trị nhất. Giá trị của $A+a$ bằng

A. -7. **B.** -4. **C.** -3. **D.** 4.

Lời giải

Xét hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+x-\left|x\right|$ với $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;1\right\}$.

$g'\left(x\right)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}+1-\dfrac{x}{\left|x\right|}$.

Nếu $x>0$ thì $g'\left(x\right)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}<0,\forall x\in\left(0;1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$. Do đó, hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(0;1\right),\left(1;+\infty\right)$.

Nếu $x<0$ thì $g'\left(x\right)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}+2$

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}=2\Leftrightarrow\dfrac{1}{\left(2x\right)^2}+\dfrac{1}{\left(2x-2\right)^2}=\dfrac{1}{2}$.

Đặt $t=2x-1\left(t<-1\right)$ ta có: $\dfrac{1}{\left(t+1\right)^2}+\dfrac{1}{\left(t-1\right)^2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 4\left(t^2+1\right)=\left(t^2-1\right)^2$

$\Leftrightarrow t^4-6t^2-3\Leftrightarrow t^2=3+2\sqrt{3}\Rightarrow t=-\sqrt{3+2\sqrt{3}}$.

Do đó, $x=\dfrac{1-\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2}=x_0$, $-4<g\left(x_0\right)<-3$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_0		-1		1		$+\infty$
y'		$+$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
y	$-\infty$	↗	$g(x_0)$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	0

STUDY TIP

Số cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ bằng tổng số cực trị của hàm $y=f\left(x\right)$ và số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $f\left(x\right)=0$.

Hàm số $y=g\left(x\right)$ có 1 điểm cực trị.

Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ tại nhiều điểm nhất là 3 điểm khi $m<g\left(x_0\right)$. Giá trị nguyên lớn nhất của m thỏa mãn là $m=-4$. Khi đó, hàm số $y=f\left(x\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất là 4 điểm.

Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ tại ít điểm nhất là 1 điểm khi $g\left(x_0\right)<m\le 0$. Giá trị nguyên nhỏ nhất của m thỏa mãn là $m=-3$. Khi đó, hàm số $y=f\left(x\right)$ có ít điểm cực trị nhất là 2 điểm.

Vậy $A+a=-7$.

Đáp án A.

Câu 52: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$2 \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-2020;2020\right]$ để phương trình $m^3f^3\left(x\right)+3mf\left(x\right)=\left(12m^2+7\right)\sqrt{12m^2+1}+36m^2+7$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 4041. **B.** 2019. **C.** 2010. **D.** 2021.

Lời giải

Ta có: $m^3f^3\left(x\right)+3mf\left(x\right)=\left(12m^2+7\right)\sqrt{12m^2+1}+36m^2+7$

$$\Leftrightarrow m^3f^3\left(x\right)+3mf\left(x\right)$$
$$=\left[\left(\sqrt{12m^2+1}\right)^3+3\left(12m^2+1\right)+3\sqrt{12m^2+1}+1\right]+3\left(\sqrt{12m^2+1}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow m^3f^3\left(x\right)+3mf\left(x\right)=\left(\sqrt{12m^2+1}+1\right)^3+3\left(\sqrt{12m^2+1}+1\right)\left(1\right)$$

Xét hàm số $g\left(t\right)=t^3+3t, t\in\mathbb{R}$.

Suy ra $g'\left(t\right)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $g\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình $\left(1\right)$ trở thành:

$$g\left[mf\left(x\right)\right]=g\left(\sqrt{12m^2+1}+1\right)\Leftrightarrow mf\left(x\right)=\sqrt{12m^2+1}+1$$

- Với $m=0$ không thỏa mãn
- Với $m\neq 0$, ta có $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{12m^2+1}+1}{m}$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{12m^2+1}+1}{m}=-4\left(1\right)\\ \dfrac{\sqrt{12m^2+1}+1}{m}>2\left(2\right)\end{array}\right.$

+ *Trường hợp 1:*

$$\frac{\sqrt{12m^2+1}+1}{m}=-4\Leftrightarrow\sqrt{12m^2+1}=-1-4m\Leftrightarrow\begin{cases}-1-4m>0\\12m^2+1=1+8m+16m^2\end{cases}\Leftrightarrow m=-2.$$

+ *Trường hợp 2:*

$$\frac{\sqrt{12m^2+1}+1}{m}>2\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\\sqrt{12m^2+1}>2m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{1}{2}\\12m^2+1>4m^2-4m+1\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}.$$

Vì m nguyên và $m\in\left[-2020;2020\right]$ nên có 2021 giá trị thỏa mãn.

Đáp án D.

STUDY TIP

Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, đồng biến (hoặc nghịch biến) trên miền D (D là một khoảng, 1 đoạn, hoặc nửa khoảng) thì với $u,v\in D$, $f\left(u\right)=f\left(v\right)\Leftrightarrow u=v$.

Câu 53: Biết rằng họ đồ thị $(C_m): y=(m-3)x^3-4(m-3)x^2-(m+1)x+m$ luôn đi qua ba điểm cố định thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng đi qua ba điểm cố định này.

A. $y=4x-3$. **B.** $y=-4x-3$. **C.** $y=4x+3$. **D.** $y=-4x+3$.

Lời giải

STUDY TIP

$I(x;y)$ là điểm cố định của họ đường cong $(C_m): y=f(x;m)$ khi và chỉ khi phương trình $y=f(x;m)$ (ẩn m) có nghiệm với mọi m

Giả sử $M(x;y)$ là điểm cố định của (C_m). Khi đó

$y=(m-3)x^3-4(m-3)x^2-(m+1)x+m, \forall m$

$\Leftrightarrow (x^3-4x^2-x+1)m-3x^3+12x^2-x-y=0, \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2-x+1=0 \\ y=-3x^3+12x^2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2-x+1=0 \ (1) \\ y=-4x+3 \end{cases}$

Phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt và $M(x;y)\in d: y=-4x+3$

Vậy đường thẳng đi qua 3 điểm cố định của đồ thị hàm số là $d: y=-4x+3$

Đáp án D.

II. MŨ – LOGARIT

Câu 1: Cho các số thực $a,\ b$ thỏa mãn $\frac{3}{16}<b<a<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\frac{16b-3}{256}+16\log_{\frac{b}{a}}^2 a$.

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Ta có $\frac{16b-3}{256}\le b^4\Leftrightarrow\left(16b^2-8b+1\right)\left(16b^2+8b+3\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(4b-1\right)^2\left(16b^2+8b+3\right)\ge 0$ luôn đúng khi $b\in\left(\frac{3}{16};1\right)$

Do đó $P\ge 4\log_a b+\frac{16}{\left(\log_a b-1\right)^2}$.

Đặt $t=\log_a b$ (điều kiện $t\in\left(1;+\infty\right)$)

$\Rightarrow P\ge 4t+\frac{16}{\left(t-1\right)^2}=2\left(t-1\right)+2\left(t-1\right)+\frac{16}{\left(t-1\right)^2}+4$

$\Rightarrow P\ge 3\sqrt[3]{2\left(t-1\right).2\left(t-1\right).\frac{16}{\left(t-1\right)^2}}+4=16$

Dấu bằng xảy ra khi $a=\frac{1}{\sqrt[3]{4}};b=\frac{1}{4}$.

Đáp án B.

FOR REVIEW

Để giải quyết bài toán này ta phải tìm được số α thỏa mãn $\frac{16b-3}{256}\le b^{\alpha}\ \forall b\in\left(\frac{3}{16};1\right)$.

Câu 2: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left(x_1+3\right)\left(x_2+3\right)=72$

A. $m=\frac{61}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** Không tồn tại. **D.** $m=\frac{9}{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=\log_3 x\Leftrightarrow x=3^t$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2-3t+2m-7=0\ \left(*\right)$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\Leftrightarrow$ Phương trình $\left(*\right)$ có hai nghiệm phân biệt $t_1,t_2\Leftrightarrow\Delta=9-4\left(2m-7\right)>0\Leftrightarrow 37-8m>0\Leftrightarrow m<\frac{37}{8}$.

Giả sử $\left(*\right)$ có hai nghiệm $t_1=\log_3 x_1$ và $t_2=\log_3 x_2$.

Khi đó $x_1.x_2=3^{t_1}.3^{t_2}=3^{t_1+t_2}=3^3=27$.

Suy ra $\left(x_1+3\right)\left(x_2+3\right)=72\Leftrightarrow x_1x_2+3\left(x_1+x_2\right)=63\Leftrightarrow x_1+x_2=12$

$\Rightarrow x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-12x+27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\\x=3\end{array}\right.$

* Với $x=9\Rightarrow t=\log_3 9=2$ thay vào $\left(*\right)$ ta được: $2m-9=0\Leftrightarrow m=\frac{9}{2}$ (thỏa mãn).

STUDY TIP

Nếu bài toán xuất hiện dữ kiện $a.f^2\left(x\right)+b.f\left(x\right)+c=0$ thì ta nên đặt ẩn phụ $t=f\left(x\right)$ và đưa về giải phương trình bậc hai ẩn t: $at^2+bt+c=0$.

* Với $x=3\Rightarrow t=\log_3 3=1$ thay vào $(*)$ ta được: $2m-9=0\Leftrightarrow m=\frac{9}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy $m=\frac{9}{2}$ là giá trị cần tìm.

Đáp án D.

Câu 3: Để cấp tiền cho con trai tên là Lâm học đại học, ông Anh gửi vào ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất cố định 0,7%/tháng, số tiền lãi hàng tháng được nhập vào vốn để tính lãi cho tháng tiếp theo (thể thức lãi kép). Cuối mỗi tháng, sau khi chốt lãi, ngân hàng sẽ chuyển vào tài khoản của Lâm một khoản tiền giống nhau. Tính số tiền m mỗi tháng Lâm nhận được từ ngân hàng, biết rằng sau bốn năm (48 tháng), Lâm nhận hết số tiền cả vốn lẫn lãi mà ông Anh đã gửi vào ngân hàng (kết quả làm tròn đến đồng).

A. $m=5.008.376$ (đồng). **B.** $m=5.008.377$ (đồng).
C. $m=4.920.224$ (đồng). **D.** $m=4.920.223$ (đồng).

Lời giải

Gọi M là số tiền ban đầu; r là lãi suất hàng tháng.
Số tiền lãi tháng 1 là $M.r$.
Số tiền cả vốn lẫn lãi tháng 1 là $M(1+r)$.

Số tiền còn lại sau khi chuyển cho Lâm m đồng là $M(1+r)-m$.

Tương tự: Số tiền còn lại sau tháng thứ 2 là:

$$\left[M(1+r)-m\right](1+r)-m=M(1+r)^2-m\left[(1+r)+1\right].$$

Số tiền còn lại sau tháng thứ 3 là:

$$\left\{M(1+r)^2-m\left[(1+r)+1\right]\right\}(1+r)-m=M(1+r)^3-m\left[(1+r)^2+(1+r)+1\right]$$

$$=M(1+r)^3-m.\frac{(1+r)^3-1}{(1+r)-1}=M(1+r)^3-m.\frac{(1+r)^3-1}{r}.$$

…

Số tiền còn lại sau 48 tháng là: $M(1+r)^{48}-m.\frac{(1+r)^{48}-1}{r}$.

Vì sau 48 tháng là hết tiền trong tài khoản nên ta có:

$$M(1+r)^{48}-m.\frac{(1+r)^{48}-1}{r}=0\Rightarrow m=\frac{M.(1+r)^{48}.r}{(1+r)^{48}-1}.$$

Thay số vào ta tìm được $m\approx 4.920.224$ (đồng).

STUDY TIPS

$$x^n+x^{n-1}+...+x+1=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Đáp án C.

Câu 4: Cho phương trình $9^x+2(x-m)3^x+2x-2m-1=0$. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình có nghiệm dương. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. T là một khoảng. **B.** T là một nửa khoảng.
C. T là một đoạn. **D.** $T=\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có $9^x+2(x-m)3^x+2x-2m-1=0\Leftrightarrow 3^{2x}+3^x+2(x-m)3^x-3^x-1=0$

$\Leftrightarrow \left(3^x+1\right)\left(3^x+2x-2m-1\right)=0 \Leftrightarrow 3^x+2x-2m-1=0 \Leftrightarrow 3^x+2x=2m+1$ (*).

Xét hàm số $f(x)=3^x+2x$ có $f'(x)=3^x.\ln 3+2>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Để (*) có nghiệm dương thì ta phải có $2m+1>f(0)=1\Leftrightarrow m>0$.

Vậy T là một khoảng. Ta chọn A.

Lưu ý: Đặt $t=3^x$ $(t>0)$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2+2(x-m)t+2x-2m-1=0 \ (1).$$

Dễ thấy phương trình (1) có $a-b+c=0$ nên có một nghiệm $t=-1$ và một nghiệm $t=-2x+2m+1$. Từ đó ta có phân tích

$$9^x+2(x-m)3^x+2x-2m-1=0 \Leftrightarrow \left(3^x+1\right)\left(3^x+2x-2m-1\right)=0.$$

Đáp án A.

Câu 5: Cho biểu thức

$$A=\log\left(2017+\log\left(2016+\log\left(2015+\log\left(...+\log\left(3+\log 2\right)...\right)\right)\right)\right).$$

Biểu thức A có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(\log 2017;\log 2018)$. **B.** $(\log 2018;\log 2019)$.

C. $(\log 2019;\log 2020)$. **D.** $(\log 2020;\log 2021)$.

Lời giải

Dựa vào đáp án ta suy ra $3<A<4$.

$\Rightarrow 3<\log 2019<A_{2016}=\log\left(2016+A_{2015}\right)<\log 2020<4$

$\Rightarrow 3<\log 2020<A_{2017}=\log\left(2017+A_{2016}\right)<\log 2021<4$.

Vậy $A_{2017}\in\left(\log 2020;\log 2021\right)$.

Đáp án D.

Câu 6: Xét số thực a,b thỏa mãn $b>1$ và $\sqrt{a}\le b<a$. Biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}}a+2\log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a}{b}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

A. $a=b^2$. **B.** $a^2=b^3$. **C.** $a^3=b^2$. **D.** $a^2=b$.

Lời giải

Ta có $\log_{\frac{a}{b}}b=\log_{\frac{a}{b}}\left(a.\frac{b}{a}\right)=\log_{\frac{a}{b}}a-1$.

Do đó $P=2\left[2\log_{\frac{a}{b}}a-\left(\log_{\frac{a}{b}}a-1\right)\right]^2+\frac{27}{\log_{\frac{a}{b}}a}=2\left(\log_{\frac{a}{b}}a+1\right)^2+\frac{27}{\log_{\frac{a}{b}}a}$.

Đặt $t=\log_{\frac{a}{b}}a$. Do $1<a\le b^2\Rightarrow\sqrt{a}\le b$,

suy ra $\frac{1}{t}=\frac{1}{\log_{\frac{a}{b}}a}=\log_a\frac{a}{b}=1-\log_a b\le 1-\log_a\sqrt{a}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow t\ge 2$.

Khi đó $P=2(t+1)^2+\frac{27}{t}=f(t)$.

Khảo sát $f(t)$ trên $\left[2;+\infty\right)$, ta được $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{63}{2}$ khi $t=2$.

Với $t=2 \Rightarrow \log_{\frac{a}{b}} a = 2 \Leftrightarrow a=b^2$.

Đáp án C.

Câu 7: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $\left[-2017;2017\right]$ để phương trình $\left(x^2-1\right)\log^2\left(x^2+1\right)-m\sqrt{2\left(x^2-1\right)}.\log\left(x^2+1\right)+m+4=0$ có đúng hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $1\le\left|x_1\right|\le\left|x_2\right|\le 3$

A. 4017. **B.** 4028. **C.** 4012. **D.** 4003.

Lời giải

Điều kiện: $x^2-1\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x\ge 1\end{array}\right.$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$2\left(x^2-1\right)\log^2\left(x^2+1\right)-2m\sqrt{2\left(x^2-1\right)}.\log\left(x^2+1\right)+2m+8=0$

$\Leftrightarrow\left[\sqrt{2\left(x^2-1\right)}.\log\left(x^2+1\right)\right]^2-2m.\sqrt{2\left(x^2-1\right)}.\log\left(x^2+1\right)+2m+8=0\ (*)$

Đặt $t=x^2\ge 1,$ theo bài ra ta có $1\le\left|x_1\right|<\left|x_2\right|\le 3 \Leftrightarrow 1\le x_1^2<x_2^2\le 9 \Rightarrow t\in\left[1;9\right]$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\sqrt{2\left(t-1\right)}.\log\left(t+1\right)$ trên đoạn $\left[1;9\right]$.

Ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{\log\left(t+1\right)}{\sqrt{2\left(t-1\right)}}+\dfrac{\sqrt{2\left(t-1\right)}}{\left(t+1\right).\ln 10}>0,\forall t\in\left[1;9\right]\Rightarrow$ Hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên đoạn $\left[1;9\right]$. Khi đó $f\left(1\right)\le f\left(t\right)\le f\left(9\right)$ hay $0\le f\left(t\right)\le 4$.

Đặt $u=\sqrt{2\left(x^2-1\right)}.\log\left(x^2+1\right)\Rightarrow u\in\left[0;4\right]$. Khi đó phương trình $\left(*\right)$ trở thành $u^2-2m.u+2m+8=0\ \left(1\right)$.

Nhận thấy $u=1$ không phải là nghiệm của phương trình $\left(1\right)$. Với $u\ne 1$ thì phương trình $\left(1\right)$ tương đương với $u^2+8=2m\left(u-1\right)\Leftrightarrow 2m=\dfrac{u^2+8}{u-1}\ \left(2\right)$

Xét hàm số $g\left(u\right)=\dfrac{u^2+8}{u-1}$ trên $\left[0;4\right]\backslash\left\{1\right\}$.

Ta có $g'\left(u\right)=\dfrac{u^2-2u-8}{\left(u-1\right)^2}$; $g'\left(u\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u=4 \\ u=-2\end{array}\right.$. Mà $u\in\left[0;4\right]\backslash\left\{1\right\}$ nên $u=4$.

Mặt khác, có $g\left(0\right)=-8; g\left(4\right)=8; \lim\limits_{x\to 1^-} g\left(u\right)=-\infty; \lim\limits_{x\to 1^+} g\left(u\right)=+\infty$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		4
y'		$-$	||	$-$	
y	-8 ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	8

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm duy nhất trên $[0;4]\backslash\{1\}$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}2m\ge 8\\ 2m\le -8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 4\\ m\le -4\end{array}\right.$.

Mặt khác $m\in\mathbb{Z}, m\in[-2017;2017]$ nên suy ra $\left[\begin{array}{l}4\le m\le 2017\\ -2017\le m\le -4\end{array}\right.$.

Vậy có tất cả $(2017-4+1)+(-4+2017+1)=4028$ giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán.

Đáp án B.

Câu 8: Trong thời gian liên tục 25 năm, một người lao động luôn gửi đúng 4.000.000 đồng vào một ngày cố định của tháng ở ngân hàng M với lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền là 0,6% tháng. Gọi A là số tiền người đó có được sau 25 năm. Hỏi mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $3.500.000.000 < A < 3.550.000.000$ **B.** $3.400.000.000 < A < 3.450.000.000$

C. $3.350.000.000 < A < 3.400.000.000$ **D.** $3.450.000.000 < A < 3.500.000.000$

Lời giải

Sau tháng thứ 1 người lao động đó có $4(1+0,6\%)$ (triệu đồng).

Sau tháng thứ 2 người lao động có:

$(4(1+0,6\%)+4)(1+0,6\%)=4\left[(1+0,6\%)^2+(1+0,6\%)\right]$ (triệu đồng).

Sau tháng thứ 3 người lao động đó có:

$$\left\{4\left[(1+0,6\%)^2+(1+0,6\%)\right]+4\right\}(1+0,6\%)$$
$$=4\left[(1+0,6\%)^3+(1+0,6\%)^2+(1+0,6\%)\right] \text{ (triệu đồng).}$$

....

Sau tháng thứ 300 người lao động đó có:

$$4\left[(1+0,6\%)^{300}+(1+0,6\%)^{299}+...+(1+0,6\%)\right]=4(1+0,6\%)\frac{(1+0,6\%)^{300}-1}{(1+0,6\%)-1}$$
$$\approx 3364,866 \text{ (triệu đồng) } \approx 3.364.866.000 \text{ (đồng).}$$

Đáp án C.

Câu 9: Cô Huyền gửi tổng cộng 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng tiền lãi đạt được ở hai ngân hàng là 27.507.768,13 đồng (chưa làm tròn). Hỏi số tiền cô Huyền gửi lần lượt ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

A. 140 triệu và 180 triệu **B.** 120 triệu và 200 triệu

C. 200 triệu và 120 triệu **D.** 180 triệu và 140 triệu

Lời giải

Gọi số tiền cô Huyền gửi ở hai ngân hàng X và Y lần lượt là x đồng và y đồng.

Theo giả thiết ta có $x+y=320.10^6$ (1)

Tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà cô Huyền nhận được ở ngân hàng X sau 15 tháng (5 quý) là $A = x(1+2,1\%)^5 = x.(1,021)^5$ (đồng). Suy ra số tiền lãi nhận được sau 15 thàng là $r_A = A - x = x(1,021)^5 - x = x\left[(1,021)^5 - 1\right]$ (đồng).

Tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà cô Huyền nhận được ở ngân hàng Y sau 9 tháng là $B = y(1+0,73\%)^9 = y(1,0073)^9$ (đồng). Suy ra số tiền lãi nhận được ở ngân hàng Y sau 9 tháng là $r_B = B - y = y(1,0073)^9 - y = y\left[(1,0073)^9 - 1\right]$ (đồng).

Từ giả thiết, ta có:

$$r_A + r_B = 27507768,13 \Leftrightarrow \left[(1,021)^5 - 1\right]x + \left[(1,0073)^9 - 1\right]y = 27507768,13 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có hệ: $\begin{cases} x + y = 320.10^6 \\ \left[(1,021)^5 - 1\right]x + \left[(1,0073)^9 - 1\right]y = 27507768,13 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 140.10^6 \\ y = 180.10^6 \end{cases}.$$

Vậy cô Huyền gửi ở ngân hàng X 140 triệu đồng và gửi ở ngân hàng Y 180 triệu đồng.

Đáp án A.

Câu 10: Đầu mỗi tháng bác An gửi tiết kiệm vào ngân hàng HD Bank một số tiền như nhau với lãi suất $0,45\%/$ tháng. Giả sử rằng lãi suất hàng tháng không thay đổi trong 3 năm liền kể từ khi bác An gửi tiết kiệm. Hỏi bác An cần gửi một lượng tiền tối thiểu T (đồng) bằng bao nhiêu vào ngân hàng HD Bank để sau 3 năm gửi tiết kiệm số tiền lãi đủ để mua được chiếc xe máy có trị giá 30 triệu đồng?

A. $T = 10\,050\,000$. **B.** $T = 25\,523\,000$.

C. $T = 9\,493\,000$. **D.** $T = 9\,492\,000$.

Lời giải

Giả sử bác An gửi số tiền tối thiểu hàng tháng là T (đồng). Đặt $r = 0,45\%$.

Hết tháng thứ nhất bác An nhận được số tiền cả gốc và lãi là

$$T_1 = T + T.r = T.(1+r).$$

Hết tháng thứ hai bác An nhận được số tiền cả gốc và lãi là

$$T_2 = T.(2+r) + T.(2+r).r = T.\left[(r+1)^2 + (r+1)\right].$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh được rằng sau n tháng gửi tiết kiệm thì bác An nhận được số tiền cả gốc và lãi là

$$T_n = T\left[(1+r)^n + (1+r)^{n-1} + \ldots + (1+r)\right].$$

Dễ dàng tính được $T_n = \dfrac{T}{r}.(1+r).\left[(1+r)^n - 1\right]$.

Suy ra số tiền lãi sau n tháng gửi tiết kiệm là

$$L_n = T_n - Tn = \frac{T}{r}.(1+r).\left[(1+r)^n - 1\right] - Tn.$$

Theo giả thiết, ta có $n = 36, L_{36} \geq 30\,000\,000$.

Suy ra $T \geq 9\,493\,000$.

Phân tích phương án nhiễu.

Phương án A: Sai do HS tính chỉ gửi 35 tháng.

Phương án B: Sai do HS sử dụng công thức của bài toán tính lãi kép và hiểu đề bài yêu cầu số tiền thu được sau 3 năm đủ để mua xe máy có trị giá 30 triệu đồng nên tìm được $T = 25523000$.

Phương án D: Sai do HS giải đúng như trên nhưng lại làm tròn $T = 9492000$.

Đáp án C.

Câu 11: Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về giảm biên chế cán bộ công chức trong 6 năm từ 2017 đến 2023 là 10,6% với số lượng hiện có năm 2017 theo phương thức "ra 2 vào 1" (tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách Nhà nước 2 người thì được tuyển mới 1 người). Giả sử tỉ lệ giảm và tuyển mới hàng năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm (làm tròn đến 0,01%) là

A. 1,13%. **B.** 1,72%. **C.** 2,02%. **D.** 1,85%.

Lời giải

Gọi x là số cán bộ công chức tỉnh A năm 2017.

Gọi r là tỉ lệ giảm hàng năm.

Số người mất việc năm thứ nhất là $x.r$

Số người còn lại sau năm thứ nhất là $x - x.r = x(1-r)$

Tương tự số người mất việc sau năm thứ hai là $x.(1-r).r$

Số người còn lại sau năm thứ hai là $x(1-r)^2$

…

$\Rightarrow$ Số người mất việc sau năm thứ 6 là $x(1-r)^5.r$

Tổng số người mất việc là:

$$x.r + x(1-r).r + x(1-r)^2.r + ... + x(1-r)^5.r = 10,6\%.x$$

$$\Leftrightarrow \frac{r\left[1-(1-r)^6\right]}{1-(1-r)} = 0,106 \Rightarrow r \approx 0,0185$$

Vậy tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm là 1,85%.

Đáp án D.

STUDY TIPS

Tổng của n số hạng của cấp số nhân: $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$

Câu 12: Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \dfrac{1+\log_{12} x + \log_{12} y}{2.\log_{12}(x+3y)}$.

A. $M = 1$. **B.** $M = \dfrac{1+\log_{12} 3y}{\log_{12} 6}$. **C.** $M = 2$. **D.** $M = \log_{12} 6$.

Lời giải

Ta có $x^2 + 9y^2 = 6xy \Leftrightarrow (x-3y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3y$

$$\Rightarrow M = \frac{1+\log_{12} 3y + \log_{12} y}{2.\log_{12} 6y} = \frac{\log_{12} 12 + \log_{12} 3y^2}{\log_{12} 36y^2} = \frac{\log_{12} 36y^2}{\log_{12} 36y^2} = 1.$$

Đáp án A.

STUDY TIPS

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g > 0 \end{cases}$.

Câu 13: Cho a, b là các số thực và hàm số:

$$f(x) = a\log^{2021}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + b\sin x.\cos(2020x) + 6.$$

Biết $f\left(2020^{\ln 2021}\right) = 10$. Tính $P = f\left(-2021^{\ln 2020}\right)$.

A. $P = 4$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = -2$. **D.** $P = 10$.

MEMORIZE

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 6 = a\log^{2021}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + b\sin x.\cos(2020x)$

Do $\sqrt{x^2+1}+x > |x| + x \geq 0$ nên hàm số $g(x)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

và $g(-x) = a\log^{2021}\left(\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)\right) + b\sin(-x).\cos(2020(-x))$

$\Leftrightarrow g(-x) = a\log^{2021}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) - b\sin x.\cos(2020x)$

$\Leftrightarrow g(-x) = a\log^{2021}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) - b\sin x.\cos(2020x)$

$\Leftrightarrow g(-x) = -a\log^{2021}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) - b\sin x.\cos(2020x)$

$\Leftrightarrow g(-x) = -g(x)$.

Vậy hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ.

STUDY TIP

+ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên D được gọi là hàm số chẵn nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ \forall x \in D : f(-x) = f(x) \end{cases}$

+ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên D được gọi là hàm số lẻ nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ \forall x \in D : f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Lại có: $2020^{\ln 2021} = 2021^{\ln 2020} \Rightarrow g\left(2020^{\ln 2021}\right) = -g\left(-2021^{\ln 2020}\right)$

$\Leftrightarrow f\left(2020^{\ln 2021}\right) - 6 = -\left[f\left(-2021^{\ln 2020}\right) - 6\right]$

$\Leftrightarrow 10 - 6 = -f\left(-2021^{\ln 2020}\right) + 6 \Leftrightarrow f\left(-2021^{\ln 2020}\right) = 2$

Đáp án B.

Câu 14: Cho hai số thực *a*, *b* thỏa mãn $\dfrac{1}{4} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a\left(b - \dfrac{1}{4}\right) - \log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}$

A. $P = \dfrac{7}{2}$. **B.** $P = \dfrac{3}{2}$. **C.** $P = \dfrac{9}{2}$. **D.** $P = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - b + \dfrac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow 0 < b - \dfrac{1}{4} \leq b^2, \forall b \in \left(\dfrac{1}{4}; 1\right)$

(đánh giá để đưa $\log_a\left(b - \dfrac{1}{4}\right)$ về $\log_a b^2$)

STUDY TIP

Phương pháp: Đánh giá $P \geq P(t)$ với $t = \log_b a$ qua bất đẳng thức $b - \dfrac{1}{4} \leq b^2$.

Mà $\dfrac{1}{4} < a < 1$ nên $\log_a\left(b - \dfrac{1}{4}\right) \geq \log_a b^2$

Do đó

$P \geq \log_a b^2 - \log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b} = 2\log_a b - \dfrac{1}{2}\log_{\frac{a}{b}} b = \dfrac{2}{\log_b a} - \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\log_b \dfrac{a}{b}} = \dfrac{2}{\log_b a} - \dfrac{1}{2(\log_b a - 1)}$

MEMORIZE

Nếu $0 < a < 1$ thì $0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \log_a \alpha > \log_a \beta$

Đặt $\log_b a = t$. Do $b < a < 1$ nên $\log_b b > \log_b a > \log_b 1 \Rightarrow 0 < t < 1$

Suy ra $P \ge P(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{2(t-1)}$ với $0 < t < 1$.

Xét $P(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{2(t-1)}$ trên $(0;1)$ ta có $P'(t) = \frac{-3t^2 + 8t - 4}{2t^2(t-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{3} \in (0;1) \\ t = 2 \notin (0;1) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{2}{3}$		1
$P'(t)$		$-$	0	$+$	
$P(t)$	$\searrow$		$\frac{9}{2}$		$\nearrow$

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $P(t) \ge \frac{9}{2}$ suy ra $\min\limits_{t\in(0;1)} P(t) = \frac{9}{2}$ khi $t = \frac{2}{3}$

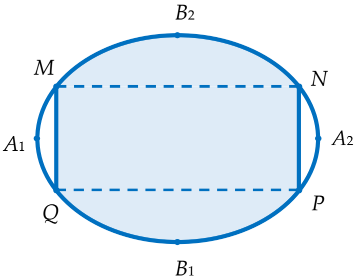
Do đó $P \ge P(t) \Rightarrow P \ge \frac{9}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} b^2 = b - \frac{1}{4} \\ \log_b a = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{2}$.

Đáp án C.

III. TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

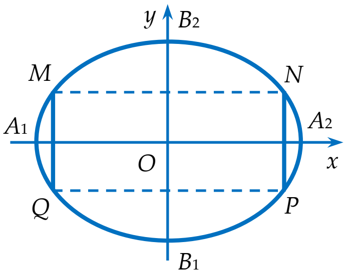
Câu 1: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí phần tô đậm là 200 000 đồng/ m² và phần còn lại là 100 000 đồng/ m². Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8m$, $B_1B_2 = 6m$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3m$?



A. 7.322.000 đồng. **B.** 7.213.000 đồng.

C. 5.526.000 đồng. **D.** 5.782.000 đồng.

Lời giải



Vì elip có độ dài trục lớn $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$, độ dài trục bé $2b = 6 \Leftrightarrow b = 3$ nên elip có diện tích là $S = \pi ab = 12\pi$.

Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó elip có phương trình chính tắc là $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Ta có $MQ = 3 = NP$ nên $N\left(x_0; \dfrac{3}{2}\right)$ với $x_0 > 0$.

Do $N \in (E)$ nên $x_0 = \sqrt{16\left(1 - \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{9}\right)} = 2\sqrt{3} \Rightarrow N\left(2\sqrt{3}; \dfrac{3}{2}\right)$.

MEMORIZE

Cho hình elip có độ dài trục lớn là $2a$ và độ dài trục bé là $2b$. Khi đó diện tích của hình elip được tính theo công thức $S = \pi ab$.

Ta có $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 9\left(1 - \dfrac{x^2}{16}\right) \Leftrightarrow y = \pm 3\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{16}}$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3.\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{16}}, y = 0, x = 0, x = 2\sqrt{3}$.

Do tính đối xứng của hình elip nên diện tích phần được tô đậm là $S_{td} = 4S_1 = 4\int\limits_0^{2\sqrt{3}} 3\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{16}}\mathrm{d}x = 3\int\limits_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 4\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 4\cos t.\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0. \\ x = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$.

Do đó $S = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16 - 16\sin^2 t}.4\cos t\mathrm{d}t = 48\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t.\mathrm{d}t = 24\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t)\mathrm{d}t$

$= 24\left(t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 24\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) = 8\pi + 6\sqrt{3}\,(m^2)$.

Diện tích phần còn lại là $S_c = S - S_{td} = 12\pi - \left(8\pi + 6\sqrt{3}\right) = 4\pi - 6\sqrt{3}\,(m^2)$.

Do đó số tiền cần làm biển quảng cáo là

$$T = \left(8\pi + 6\sqrt{3}\right).200000 + \left(4\pi - 6\sqrt{3}\right).100000 \approx 7\,322\,000 \text{ đồng}.$$

Đáp án A.

Câu 2: Cho hàm số $g(x) = \int\limits_x^{x^2} \dfrac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$ với $x > 0$. Tính $g'(e^2)$.

A. $g'(e^2) = \dfrac{e^2 - 1}{2}$. **B.** $g'(e^2) = \dfrac{1 - e^2}{2}$. **C.** $g'(e^2) = \dfrac{1}{2}$. **D.** $g'(e^2) = 2$.

STUDY TIP

Công thức tổng quát

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right)' = v'(x).f\left[v(x)\right] - u'(x).f\left[u(x)\right]$$

Lời giải Giả sử $F(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{1}{\ln t}$.

Khi đó $F'(t)=\frac{1}{\ln t}$ hay $F'(x)=\frac{1}{\ln x}$.

Ta có $g(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt = F(x^2)-F(x)$.

Suy ra $g'(x)=\left(F(x^2)-F(x)\right)' = F'(x^2)-F'(x) = \frac{1}{\ln x^2}.2x-\frac{1}{\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}$

$\Rightarrow g'(e^2)=\frac{e^2-1}{2}$.

Đáp án A.

STUDY TIP

Bài toán bên thuộc lớp những bài toán mà từ đề bài ta có phương trình $a(x).f(x)+b(x).f'(x)=c(x)\ (1)$, $(a(x),b(x),c(x),f(x),f'(x)$ liên tục)

Ta có hai hướng biến đổi cơ bản như sau:

Hướng 1: Biến đổi (1) về dạng

$f'(x).g(x)+f(x).g'(x)=h(x)$

$\Leftrightarrow \left[f(x).g(x)\right]'=h(x)$

$= f(x).g(x)=\int h(x)dx$

Hướng 2: Biến đổi (1) về dạng

$\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}=h(x)$

$\Rightarrow \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=h(x)$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=\int h(x)dx$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$ và $f(1)=2\ln 2+1$. Khi đó $f(2)=a+b\ln 3$, với a,b là hai số hữu tỉ. Tính $a+b$.

A. $\frac{27}{16}$. **B.** $\frac{15}{16}$. **C.** $\frac{39}{16}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải Ta có: $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}.f'(x)+\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

$\Rightarrow \int\left[\frac{x^2}{x+1}.f'(x)+\left(\frac{x^2}{x+1}\right)'.f(x)\right]dx=\int\frac{x^2}{x+1}dx$

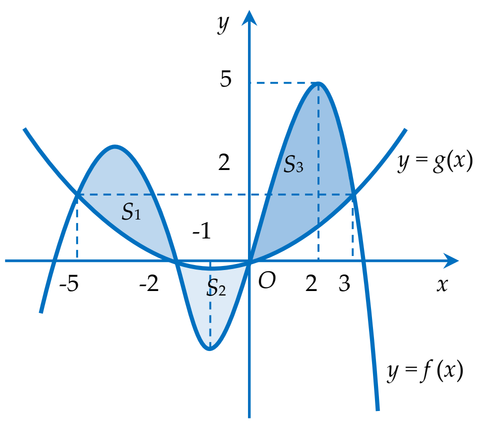
$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x)=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C$

Mà $f(1)=2\ln 2+1\Rightarrow \frac{1}{2}(2\ln 2+1)=\frac{1}{2}-1+\ln 2+C\Rightarrow C=1$

Khi đó $\frac{4}{3}f(2)=\ln 3+1\Rightarrow f(2)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\ln 3\Rightarrow a=b=\frac{3}{4}$. Vậy $a+b=\frac{3}{2}$

Đáp án D.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1,S_2,S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường parabol $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m, n, p.



Giá trị của tích phân $\int_{-5}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-m+n-p-\dfrac{208}{45}$. **B.** $m-n+p+\dfrac{208}{45}$.

C. $m-n+p-\dfrac{208}{45}$. **D.** $-m+n-p+\dfrac{208}{45}$.

Lời giải

Quan sát đồ thị hình vẽ, ta có:

$$S_1=\int_{-5}^{-2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-5}^{-2}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-5}^{-2}g(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_{-5}^{-2}f(x)\mathrm{d}x=m+\int_{-5}^{-2}g(x)\mathrm{d}x;$$

$$S_2=\int_{-2}^{0}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}g(x)\mathrm{d}x-\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}g(x)\mathrm{d}x-n;$$

$$S_3=\int_{0}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{3}g(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x=p+\int_{0}^{3}g(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_{-5}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-5}^{-2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow\int_{-5}^{3}f(x)\mathrm{d}x=m-n+p+\int_{-5}^{-2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x=m-n+p+\int_{-5}^{3}g(x)\mathrm{d}x.$$

Từ đồ thị ta thấy $\int_{-5}^{3}g(x)\mathrm{d}x$ là một số dương nên chỉ có phương án B là phù hợp.

Đáp án B.

STUDY TIP

Ta có thể tính $\int_{-5}^{3}g(x)\mathrm{d}x$ như sau: Đồ thị hàm số $y=g(x)$ đi qua các điểm $(-5;2)$, $(-2;0)$, $(0;0)$ nên ta có:

$$\begin{cases}25a-5b+c=2\\4a-2b+c=0\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{15}\\b=\dfrac{4}{15}\\c=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int_{-5}^{3}g(x)\mathrm{d}x=\int_{-5}^{3}\left(\frac{2}{15}x^2+\frac{4}{15}x\right)=\frac{208}{45}.$$

Câu 5: Tính tích phân $\int_{0}^{2}\max\left\{x,x^3\right\}\mathrm{d}x$

A. 2. **B.** 4. **C.** $\dfrac{15}{4}$. **D.** $\dfrac{17}{4}$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $x^3=x\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$. Do $x\in[0;2]$ nên $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Xét dấu, ta được $x^3-x<0,\forall x\in(0;1)$ và $x^3-x>0,\forall x\in(1;2)$.

Suy ra $\max\limits_{[0;1]}\left\{x,x^3\right\}=x$ và $\max\limits_{[1;2]}\left\{x,x^3\right\}=x^3$.

Vậy $\int_{0}^{2}\max\left\{x,x^3\right\}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}x^3\mathrm{d}x=\dfrac{17}{4}$.

Cách 2: $\int_{0}^{2}\max\left\{x,x^3\right\}\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\dfrac{x^3+x+\left|x^3-x\right|}{2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}x^3\mathrm{d}x=\dfrac{17}{4}$.

Đáp án D.

Câu 6: Khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{\dfrac{5+(x-4)e^x}{xe^x+1}}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,x=1$ quanh trục hoành có thể tích $V=\pi\left[a+b\ln(e+1)\right]$, trong đó a,b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=5$. **B.** $a-3b=-7$. **C.** $a+b=9$. **D.** $a-3b=17$.

STUDY TIP

Thể tích khối tròn xoay của hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, Ox và hai đường $x=a,\ x=b\ (a<b)$ là

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Lời giải

Ta có $V=\pi\int_0^1\left(\frac{5+(x-4)e^x}{xe^x+1}\right)dx=\pi\int_0^1\left(5-\frac{4(x+1)e^x}{xe^x+1}\right)dx=\pi\left(5x-4\ln\left(xe^x+1\right)\right)\Big|_0^1$

$=\pi\left[5-4\ln(e+1)\right].$

Do đó $a-3b=5-3.(-4)=17.$

Đáp án D.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=(x^2-2x-3)e^{-x}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ trên đoạn $[-1;0]$, biết rằng $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $T=am+bM+c$.

A. $T=2-24e$. **B.** $T=0$. **C.** $T=3-2e$. **D.** $T=-16e$.

Lời giải

Ta có $F'(x)=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}$.

$$F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}-a=1\\2a-b=-2\\b-c=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=0\\c=3\end{cases}\Rightarrow F(x)=(3-x^2)e^{-x}.$$

$$F'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-1;0]\\x=3\notin[-1;0]\end{array}\right..$$

Ta có $F(-1)=2e;F(0)=3$. Suy ra $M=2e;m=3\Rightarrow T=-1.3+0.2e+3=0.$

Phân tích phương án nhiễu:

Phương án A: Sai do HS tính sai $F'(x)=\left[ax^2+(2a+b)x+b+c\right]e^{-x}$.

$$\text{Do đó } F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-4\Rightarrow F(x)=(x^2-4x+1)e^{-x}.\\c=1\end{cases}$$

$$F'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-1;0]\\x=3\notin[-1;0]\end{array}\right..$$

Ta có $F(-1)=6e;F(0)=1$. Suy ra $M=6e;m=1\Rightarrow T=2-24e$.

Phương án C: Sai do HS giải đúng $M=2e;m=3$ nhưng lại tính sai T. Cụ thể:

$$T=-1.2e+0.3+3=3-2e.$$

Phương án D: Sai do HS tính sai $F'(x)=\left[-ax^2+(2a+b)x+b+c\right]e^{-x}$ và giải sai a,b,c.

$$\text{Do đó } F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-4\Rightarrow F(x)=(-x^2-4x+1)e^{-x}.\\c=1\end{cases}$$

$$F'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-1;0]\\x=3\notin[-1;0]\end{array}\right..$$

Ta có $F(-1)=4e;F(0)=1$. Suy ra $M=4e;m=1\Rightarrow T=-1.1-4.4e+1=-16e$.

Đáp án B.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0)=0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$. Biết rằng giá trị của biểu thức $P=2M-m$ có dạng $a\sqrt{11}-b\sqrt{3}+c,(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $a+b+c$

A. $a+b+c=4$. **B.** $a+b+c=7$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=5$.

Lời giải

Từ $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}\Rightarrow \dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}=2x\Rightarrow \int\dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x$ (1)

Đặt $\sqrt{f^2(x)+1}=t\Rightarrow f^2(x)=t^2-1\Rightarrow 2f(x).f'(x)\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t\Rightarrow f(x).f'(x)\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$

Suy ra $\int\dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{t\mathrm{d}t}{t}=\int\mathrm{d}t=t+C_1=\sqrt{f^2(x)+1}+C_1$ và $\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C_2$

Từ (1) ta suy ra $\sqrt{f^2(x)+1}+C_1=x^2+C_2$.

Do $f(0)=0$ nên $C_2-C_1=1$.

Như vậy $\sqrt{f^2(x)+1}=x^2+(C_2-C_1)=x^2+1\Rightarrow f^2(x)=(x^2+1)^2-1=x^4+2x^2$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^4+2x^2}=|x|\sqrt{x^2+2}=x\sqrt{x^2+2}$ $(\text{do } x\in[1;3])$.

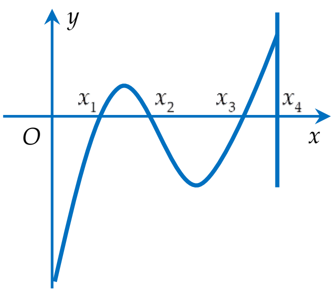
Ta có $f'(x)=\sqrt{x^2+2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2}}>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số $f(x)=x\sqrt{x^2+2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ cũng đồng biến trên $[1;3]$.

Khi đó $M=\max\limits_{[1;3]}f(x)=f(3)=3\sqrt{11}$ và $m=\min\limits_{[1;3]}f(x)=f(1)=\sqrt{3}$.

Vậy $P=2M-m=6\sqrt{11}-\sqrt{3}\Rightarrow a=6;b=1;c=0\Rightarrow a+b+c=7$.

Đáp án B.

Câu 9: Cho các số thực x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn $0<x_1<x_2<x_3<x_4$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;x_4]$. Đáp án nào sau đây đúng?



A. $M+m=f(0)+f(x_3)$. **B.** $M+m=f(x_3)+f(x_4)$.

C. $M+m=f(x_1)+f(x_2)$. **D.** $M+m=f(0)+f(x_1)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có nhận xét:

- Hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x=x_1$.
- Hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x=x_2$.
- Hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x=x_3$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;x_4]$ như sau:

x	0		x_1		x_2		x_3		x_4
		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Sử dụng bảng biến thiên ta tìm được: $\begin{cases} \max\limits_{[0;x_4]}\left[f(x)\right] = \max\left\{f(0), f(x_2), f(x_4)\right\} \\ \min\limits_{[0;x_4]}\left[f(x)\right] = \min\left\{f(x_1), f(x_3)\right\} \end{cases}$.

Quan sát đồ thị, dùng phương pháp tích phân để tính diện tích, ta có

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx < \int_{x_2}^{x_3}\left[0 - f'(x)\right]dx \Rightarrow f(x_3) < f(x_1) \Rightarrow \min_{[0;x_4]}\left[f(x)\right] = f(x_3).$$

Tương tự, ta có

$$\begin{cases} \int_0^{x_1}\left[0 - f'(x)\right]dx > \int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx \Rightarrow f(0) > f(x_2) \\ \int_{x_2}^{x_3}\left[0 - f'(x)\right]dx > \int_{x_3}^{x_4} f'(x)dx \Rightarrow f(x_2) > f(x_4) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(0) > f(x_2) > f(x_4) \Rightarrow \max\limits_{[0;x_4]}\left[f(x)\right] = f(0).$

Vậy $\max\limits_{[0;x_4]}\left[f(x)\right] = f(0)$; $\min\limits_{[0;x_4]}\left[f(x)\right] = f(x_3)$.

Đáp án A.

Câu 10: Cho $0 < a \neq 1 + \sqrt{2}$ và các hàm $f(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$, $g(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

I. $f^2(x) - g^2(x) = 1.$ II. $g(2x) = 2g(x)f(x).$

III. $f\left[g(0)\right] = g\left[f(0)\right].$ IV. $g'(2x) = g'(x)f(x) - g(x)f'(x).$

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

$+$ Ta có $f^2(x) - g^2(x) = \left(\dfrac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow$ I đúng.

$+ g(2x) = \dfrac{a^{2x} - a^{-2x}}{2} = \dfrac{\left(a^x - a^{-x}\right)\left(a^x + a^{-x}\right)}{2} = 2.\dfrac{a^x - a^{-x}}{2}.\dfrac{a^x + a^{-x}}{2} = 2g(x).f(x)$

$\Rightarrow$ II đúng.

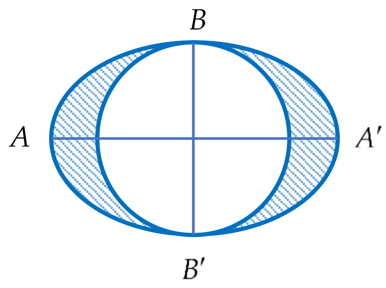
$+ \begin{cases} f\left(g(0)\right) = f(0) = 1. \\ g\left(f(0)\right) = g(1) = \dfrac{a - \frac{1}{a}}{2} = \dfrac{a^2 - 1}{2a} \end{cases} \Rightarrow f\left(g(0)\right) \neq g\left(f(0)\right) \Rightarrow$ III sai.

$+$ Do $g(2x) = 2g(x)f(x)$ nên $g'(2x) = 2\left[g'(x)f(x) - g(x)f'(x)\right] \Rightarrow$ IV sai.

Vậy có 2 khẳng định đúng.

Đáp án D.

Câu 11: Trong mặt phẳng (P), cho elip (E) có độ dài trục lớn là $AA' = 8$ và độ dài trục nhỏ là $BB' = 6$. Đường tròn tâm O đường kính BB' như hình vẽ. Tính thể tích vật thể tròn xoay có được bằng cách cho miền hình phẳng giới hạn bởi đường elip và đường tròn đó (phần hình phẳng tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục AA'



A. $V=36\pi.$ **B.** $V=12\pi.$ **C.** $V=16\pi.$ **D.** $V=\dfrac{64\pi}{3}.$

Lời giải

Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay elip có trục lớn $AA'=8,$ trục nhỏ $BB'=6$ khi quay quanh trục AA' là $V_{(E)}=\dfrac{4}{3}\pi.\dfrac{AA'}{2}.\left(\dfrac{BB'}{2}\right)^2=\dfrac{4}{3}\pi.4.3^2=48\pi$ (đvtt).

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay đường tròn $\left(O;\dfrac{BB'}{2}\right)$ quanh trục AA' cũng chính là thể tích khối cầu tâm O, bán kính $R=3$. Thể tích đó là

$$V_{(O;3)}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.3^3=36\pi \text{ (đvtt).}$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=V_{(E)}-V_{(O;3)}=48\pi-36\pi=12\pi$ (đvtt).

Đáp án B.

STUDY TIPS

1. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình elip (E) có trục lớn bằng 2a, trục nhỏ bằng 2b quanh trục lớn là $V=\dfrac{4}{3}\pi ab^2$.

2. Thể tích khối cầu bán kính R là $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x f'(x)dx=\int_0^1 e^x f''(x)dx\neq 0.$ Giá trị của biểu thức $\dfrac{e.f'(1)-f'(0)}{e.f(1)-f(0)}$ bằng

A. –2. **B.** –1. **C.** –2. **D.** 1.

Lời giải

* Đặt $\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x f'(x)dx=\int_0^1 e^x f''(x)dx=k\neq 0.$

Đặt $\begin{cases}u=e^x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=e^x dx\\ v=f(x)\end{cases}\Rightarrow\int_0^1 e^x f'(x)dx=e^x f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 e^x f(x)dx$

$\Rightarrow k=e.f(1)-f(0)-k\Rightarrow ef(1)-f(0)=2k.$

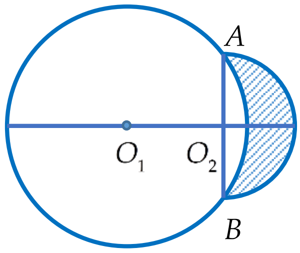
* Đặt $\begin{cases}u=e^x\\ dv=f''(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=e^x dx\\ v=f'(x)\end{cases}\Rightarrow\int_0^1 e^x f''(x)dx=e^x f'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 e^x f'(x)dx$

$\Rightarrow k=e.f'(1)-f'(0)-k\Rightarrow e.f'(1)-f'(0)=2k.$

Vậy $\dfrac{e.f'(1)-f'(0)}{e.f(1)-f(0)}=\dfrac{2k}{2k}=1.$

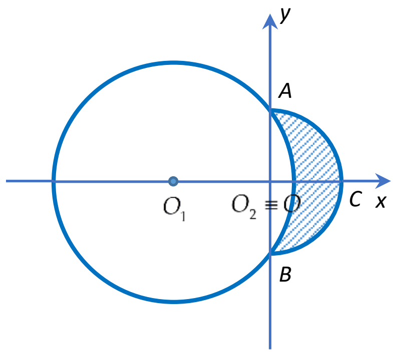
Đáp án D.

Câu 13: Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A,B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành



A. $V=\dfrac{14\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{68\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{40\pi}{3}$. **D.** $V=36\pi$.

Lời giải



Chọn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ với $O_2\equiv O, O_2C\equiv Ox, O_2A\equiv Oy$.

Ta có $O_1O_2=\sqrt{O_1A^2-O_2A^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4\Rightarrow O_1(-4;0)$.

Phương trình đường tròn $(O_1):(x+4)^2+y^2=25$.

Phương trình đường tròn $(O_2):x^2+y^2=9$.

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(O_1):(x+4)^2+y^2=25$, trục $Oy:x=0$ khi $x\ge 0$.

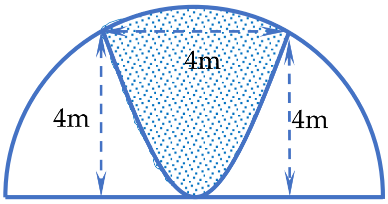
Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(O_2):x^2+y^2=9$, trục $Oy:x=0$ khi $x\ge 0$.

Khi đó thể tích V cần tìm chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox (thể tích nửa khối cầu bán kính bằng 3) trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.

Ta có $V_2=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi.3^3=18\pi$ (đvtt); $V_1=\pi\displaystyle\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1\left[25-(x+4)^2\right]dx=\dfrac{14\pi}{3}$ (đvtt).

Vậy $V=V_2-V_1=18\pi-\dfrac{14\pi}{3}=\dfrac{40\pi}{3}$ (đvtt).

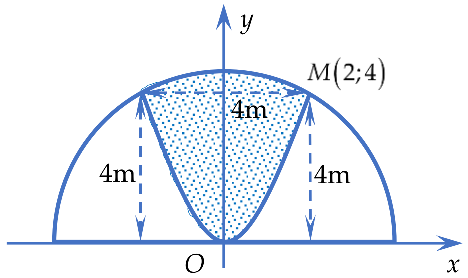
Đáp án C.



Câu 14: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}(\text{m})$. Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng $4(\text{m})$, phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)

A. 3.895.000 đồng **B.** 1.948.000 đồng.
C. 2.388.000 đồng **D.** 1.194.000 đồng

Lời giải



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là $y=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-x^2}=\sqrt{20-x^2}$.

Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y=ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm $M(2;4)$ do đó $4=a.(-2)^2 \Leftrightarrow a=1$.

Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn (phần tô màu) là $S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{20-x^2}-x^2\right)\mathrm{d}x\approx 11,94\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Phần diện tích trồng cỏ là: $S_{trong\,co}=\frac{1}{2}S_{hinh\,tron}-S_1\approx 19,47592654\left(\mathrm{m}^2\right)$

Vậy số tiền cần có là $S_{trong\,co}\times 100000\approx 1948000$ (đồng).

Đáp án B.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(2)=0,\int_1^2\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{1}{45}$ và $\int_1^2(x-1)f(x)dx=-\frac{1}{30}$. Tính $I=\int_1^2 f(x)dx$.

A. $I=-\frac{1}{12}$. **B.** $I=-\frac{1}{15}$. **C.** $I=-\frac{1}{36}$. **D.** $I=\frac{1}{12}$.

Lời giải

Ta có

$$-\frac{1}{30}=\int_1^2(x-1)f(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)d\left((x-1)^2\right)=\frac{1}{2}(x-1)^2f(x)\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2(x-1)^2f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow\int_1^2(x-1)^2f'(x)dx=\frac{1}{15}.$$

Ta lại có $\int_1^2(x-1)^4dx=\frac{1}{5}(x-1)^5\Big|_1^2=\frac{1}{5}$.

Từ giả thiết và các kết quả trên ta có

$$9\int_1^2\left[f'(x)\right]^2dx-6\int_1^2(x-1)^2f'(x)dx+\int_1^2(x-1)^4dx=0.$$

Mặt khác

$$9\int_1^2\left[f'(x)\right]^2dx-6\int_1^2(x-1)^2f'(x)dx+\int_1^2(x-1)^4dx=\int_1^2\left[3f'(x)-(x-1)^2\right]^2dx\ge 0.$$

Do vậy, xét trên đoạn $[1;2]$, ta có

$$3f'(x)-(x-1)^2=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{9}(x-1)^3+C.$$

Lại do $f(2)=0$ nên $C+\frac{1}{9}=0\Leftrightarrow C=-\frac{1}{9}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{9}(x-1)^3-\frac{1}{9}$.

Suy ra $I=\frac{1}{9}\int_1^2\left[(x-1)^3-1\right]dx=\frac{1}{36}(x-1)^4\Big|_1^2-\frac{1}{9}(x-1)\Big|_1^2=-\frac{1}{12}$.

Phân tích phương án nhiễu.

Phương án B: Sai do HS sử dụng sai tính chất của tích phân. Cụ thể:

$$-\frac{1}{30}=\int_1^2(x-1)f(x)dx=\int_1^2(x-1)dx.\int_1^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx\Rightarrow\int_1^2 f(x)dx=-\frac{1}{15}.$$

Phương án C: Sai do HS giải như trên nhưng khi tính I lại bị sai. Cụ thể:

$$I=\frac{1}{9}\int_1^2\left[(x-1)^3-1\right]dx=\frac{1}{36}(x-1)^4\Big|_1^2-\frac{1}{18}(x-1)\Big|_1^2=-\frac{1}{36}.$$

Phương án D: Sai do HS tìm sai hàm số $f(x)$. Cụ thể:

$$3f'(x)-(x-1)^2=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(1-x)^2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{9}(1-x)^3+C.$$

Lại do $f(2)=0$ nên $C-\frac{1}{9}=0\Leftrightarrow C=\frac{1}{9}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{9}(1-x)^3+\frac{1}{9}$. Do đó tính được $I=\frac{1}{12}$.

Đáp án A.

Câu 16: Cho biết $\int\limits_0^{\sqrt{2}}x.f(x^2)\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_2^3 f(z)\mathrm{d}z=2$, $\int\limits_9^{16}\frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=2$. Tính $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

- Với $I_1=\int\limits_0^{\sqrt{2}}x.f(x^2)\mathrm{d}x=4$. Đặt $x^2=t\Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\sqrt{2}\Rightarrow t=2$

$\Rightarrow I_1=\int\limits_0^2 f(t).\frac{\mathrm{d}t}{2}=4\Rightarrow\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=8$ hay $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8$

- Với $I_2=\int\limits_9^{16}\frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. Đặt $x=\sqrt{t}$ $\Rightarrow\int\limits_9^{16}\frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}=\int\limits_3^4 f(x).2\mathrm{d}x=2\Rightarrow\int\limits_3^4 f(x)\mathrm{d}x=1$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_3^4 f(x)\mathrm{d}x=8+2+1=11$

Đáp án D.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên $[1;3]$, $f(1)=f'(1)=1$ và $f(x)>0, f(x)f''(x)=[f'(x)]^2-[xf(x)]^2, \forall x\in[1;3]$. Tính $\ln f(3)$.

A. -4. **B.** -3. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $f(x)f''(x)=[f'(x)]^2-[xf(x)]^2\Leftrightarrow f(x)f''(x)-[f'(x)]^2=-[xf(x)]^2$

$$\Rightarrow\frac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}=-x^2\Rightarrow\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=-x^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{x^3}{3}+C.$$

Do $f(1)=f'(1)=1$ nên $C=\frac{4}{3}$ $\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{x^3}{3}+\frac{4}{3}\Rightarrow\ln f(x)=-\frac{x^4}{12}+\frac{4}{3}x+C'$.

Vì $f(1)=1$ nên $C'=-\frac{5}{4}$.

Do đó $\ln f(x)=-\frac{x^4}{12}+\frac{4}{3}x-\frac{5}{4}\Rightarrow\ln f(3)=-4$.

Đáp án A.

STUDY TIP

Nguyên hàm – Tích phân hàm ẩn cho giả thiết $f(x), f'(x), f''(x)$
+ Biến đổi phương trình về một vế chứa $f(x)$ và $f'(x)$
+ Lấy nguyên hàm hoặc tích phân hai vế.
+ Tìm nguyên hàm hoặc dựa vào tích phân để tính giá trị.

Câu 18: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức)

Với: $f(x)+(2x)f(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$. Ta có:

$A=1;B=1;C=3$ và $u=x^2-2$ thỏa mãn $\begin{cases}u(-1)=-1\\u(2)=2\end{cases}$.

Khi đó áp dụng công thức có: $I=\int_{-1}^{2}f(x)=\frac{1}{1+1+3}\int_{-1}^{2}4x^3\mathrm{d}x=\left.\frac{x^4}{5}\right|_{-1}^{2}=3$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến)

Từ $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$.

$\Rightarrow\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}2x.f(x^2-2)\mathrm{d}x+3\int_{-1}^{2}f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}4x^3\mathrm{d}x\quad(*)$

+) Đặt $u=x^2-2\Rightarrow\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$;

Với $x=-1\Rightarrow u=-1$ và $x=2\Rightarrow u=2$.

Khi đó $\int_{-1}^{2}2x.f(x^2-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x\quad(1)$

+) Đặt $t=1-x\Rightarrow\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$;

Với $x=-1\Rightarrow t=2$ và $x=2\Rightarrow t=-1$.

Khi đó $\int_{-1}^{2}f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x\quad(2)$

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được: $5\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=15\Rightarrow\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=3$.

Đáp án C.

MEMORIZE

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $A.f(x)+B.u'.f(u)+C.f(a+b-x)=g(x)$

+) Với $\begin{cases}u(a)=a\\u(b)=b\end{cases}$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{A+B+C}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

+) Với $\begin{cases}u(a)=b\\u(b)=a\end{cases}$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{A-B+C}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số *A, B, C.*

+ Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)\neq0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3).f^2(x)$ và $f(0)=\frac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)+f(2019)=\frac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $\frac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=1516$.

Lời giải

Biến đổi $f'(x)=(2x+3).f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3\Leftrightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+3)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+C}$. Mà $f(0)=\frac{-1}{2}$ nên $C=2$.

Do đó $f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+2}=-\frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

STUDY TIP

Nguyên hàm hàm ẩn cho giả thiết $f(x),f'(x)$

+ Biến đổi phương trình về một vế chứa $f(x)$ và $f'(x)$

+ Lấy nguyên hai vế tìm được $f(x)$

+ Phân tích $f(x)$ về dạng hiệu các phân thức hữu tỉ

+ Tính giá trị của biểu thức

Khi đó $\frac{a}{b}=f(1)+f(2)+...+f(2019)+f(2020)$

$$=-\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{2020.2021}+\frac{1}{2021.2022}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}\right)=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2022}\right)=\frac{-505}{1011}.$$

Với điều kiện a,b thỏa mãn bài toán, suy ra: $\begin{cases}a=-505\\ b=1011\end{cases}\Rightarrow b-a=1516$.

Đáp án D.

MEMORIZE

Ta có: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, có đồ thị (C) và M là một điểm bất kì thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm thứ hai N; tiếp tuyến của (C) tại N cắt (C) tại điểm thứ hai P. Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng MN và (C); đường thẳng NP và (C). Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S_2=\frac{1}{16}S_1$. **B.** $S_1=\frac{1}{8}S_2$. **C.** $S_1=\frac{1}{16}S_2$ **D.** $S_2=\frac{1}{8}S_1$.

Lời giải

Giả sử $a>0$ và gọi m,n,p lần lượt là hoành độ các điểm M,N,P với $m<n$. Tiếp tuyến tại M là $y=ex+f$ cắt (C) tại điểm M, N có hoành độ m,n trong đó tại điểm M là điểm tiếp xúc.

Vì vậy phương trình $(ax^3+bx^2+cx+d)-(ex+f)=a(x-m)^2(x-n)$ có các nghiệm là $x_1=x_2=m;x_3=n$. Theo định lý Vi-et ta có $2m+n=\frac{-b}{a}\Leftrightarrow n=-\frac{b}{a}-2m.$

Với giả sử $m<n\Rightarrow m<\frac{-b}{3a}$.

Một cách tương tự cho tiếp tuyến NP có

$$2n+p=\frac{-b}{a}\Leftrightarrow p=\frac{-b}{a}-2n=\frac{-b}{a}-2\left(\frac{-b}{a}-2m\right)=\frac{b}{a}+4m<n$$

Sử dụng tích phân $\int_a^b (x-a)^2(x-b)\mathrm{d}x=\frac{-1}{12}(a-b)^4$. Diện tích các mặt phẳng:

$$S_1=S_{(MN,(C))}=\int_m^{-\frac{b}{a}-2m}\left|a(x-m)^2\left(x+\frac{b}{a}+2m\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=-\int_m^{-\frac{b}{a}-2m}a(x-m)^2\left(x+\frac{b}{a}+2m\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{12}\left(-\frac{b}{a}-3m\right)^4$$

$$S_2=S_{(NP,(C))}=\int_{\frac{b}{a}+4m}^{-\frac{b}{a}-2m}\left|a\left(x+\frac{b}{a}+2m\right)^2\left(x-\frac{b}{a}-4m\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_m^{-\frac{b}{a}-2m}a\left(x+\frac{b}{a}+2m\right)^2\left(x-\frac{b}{a}-4m\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{12}\left(-\frac{2b}{a}-6m\right)^4$$

$$\Rightarrow S_1=\frac{1}{16}S_2.$$

Đáp án C.

STUDY TIP

Có thể chọn 1 hàm bậc ba cụ thể với điểm M cụ thể để thử đáp án trắc nghiệm.

IV. SỐ PHỨC

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+3i|+|\overline{z}+5+i|=2\sqrt{65}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+2+i|$ đạt được khi $z=a+bi$ với a,b là các số thực dương. Giá trị của $2b+3a$ bằng

A. 19. **B.** 16. **C.** 24. **D.** 13.

Lời giải

Cách 1: (*Sử dụng kiến thức Hình học*)

Ta có $|z-1+3i|+|\overline{z}+5+i|=8 \Leftrightarrow |z-(1-3i)|+|z-(-5+i)|=8$.

Gọi M,A,B,I lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z,1-3i,-5+i,-2-i$.

Khi đó $A(1;-3)$, $B(-5;1)$ và $I(-2;-1)$.

Có I là trung điểm của đoạn thẳng AB và $MA+MB=2\sqrt{65}$ và $MI=|z+2+i|$.

Do I là trung điểm của đoạn thẳng AB nên

$$MI^2=\frac{MA^2+MB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}=\frac{MA^2+MB^2}{2}-13.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$MA^2+MB^2\geq 2MA.MB \Leftrightarrow 2\left(MA^2+MB^2\right)\geq\left(MA+MB\right)^2$$

Kết hợp với giả thiết, suy ra $MA^2+MB^2\geq 130$.

Do đó $MI^2\geq 65-13=52 \Leftrightarrow MI\geq 2\sqrt{13}$.

Đẳng thức xảy ra khi $MA=MB=\sqrt{65}$ hay MI là đường trung trực của đoạn AB và $MI=2\sqrt{13}$. Dễ dàng tìm được $M(-6;-7)$ hoặc $M(2;5)$. Theo giả thiết thì ta lấy $M(2;5)$ ứng với $z=2+5i$.

Do đó $a=2,b=5$ và $2b+3a=16$.

Cách 2: (*Sử dụng kiến thức Đại số*)

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Từ giả thiết, ta có $|(x-1)+(y+3)i|+|(x+5)-(y-1)i|=2\sqrt{65}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}=2\sqrt{65}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xky, ta có

$$2\sqrt{65}=1.\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}+1.\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}$$

$$\leq\sqrt{2\left[(x-1)^2+(y+3)^2+(x+5)^2+(y-1)^2\right]}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{65}\leq 2\sqrt{x^2+y^2+4x+2y+18}=2\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2+13}$$

$$\Leftrightarrow 52\leq(x+2)^2+(y+1)^2 \Rightarrow 2\sqrt{13}\leq|z+2+i|.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x-1)^2+(y+3)^2=(x+5)^2+(y-1)^2=65$

$\Leftrightarrow(x;y)=(-6;-7)$ hoặc $(x;y)=(2;5)$. Theo giả thiết, ta lấy $a=2,b=5$.

Đáp án B.

DISCOVERY

Từ cách làm của câu này, chúng ta có kết quả tổng quát sau:

Cho hai số phức z_1,z_2 khác nhau và các số phức z thỏa mãn:

$$|z-z_1|+|z-z_2|=d,$$

trong đó $d>|z_1-z_2|$.

Khi đó $\left|z-\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

$$\frac{1}{2}\sqrt{d^2-|z_1-z_2|^2}.$$

Trường hợp $d=|z_1-z_2|$ bạn đọc có thể tham khảo trong Công phá Toán 1 hoặc Công phá Toán 3.

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\bar{z}\right|+2\left|z-\bar{z}\right|=8$; a,b,c dương. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z-3-3i\right|$. Tính $M+m$.

A. $\sqrt{10}+\sqrt{34}$ **B.** $\sqrt{5}+\sqrt{58}$ **C.** $\sqrt{10}+\sqrt{58}$ **D.** $2\sqrt{10}$

Lời giải

Gọi $E(3;3)$ là điểm biểu diễn $w=3+3i$.

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ ta có

$$\left|z+\bar{z}\right|+2\left|z-\bar{z}\right|=8\Leftrightarrow\left|2x\right|+2\left|2yi\right|=8\Leftrightarrow\left|x\right|+2\left|y\right|=4$$

Suy ra điểm N biểu diễn z nằm trên hình bình hành giới hạn bởi các đường thẳng $\pm x\pm 2y=4$. Các đỉnh của hình bình hành là

$$A_1(4;0),A_2(0;2),A_3(-4;0),A_4(0;-2).$$

Ta lại có với điểm $C\notin AB$ và mọi điểm $M\in AB$ thì

$$\min\{AC,BC\}\le MC\le\max\{AC,BC\}.$$

*** Tìm max**

Với mọi điểm N nằm trên hình bình hành, giả sử $N\in A_iA_{i+1}\left(A_5\equiv A_1\right)$ ta có

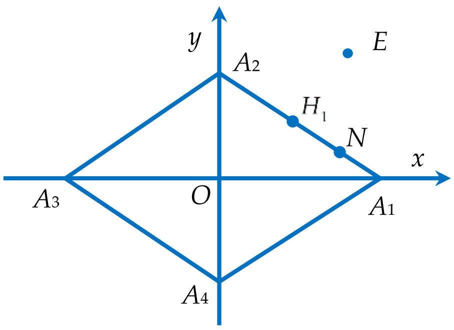
$EN\le\max\{EA_i,EA_j\}\le\max\{EA_i\},i=1,2,3,4$

$\Rightarrow\ M=EN_{\max}=\max\{EA_i\}(i=1,2,3,4)=EA_3=\sqrt{58}$.

*** Tìm min**

Gọi H_1,H_2,H_3,H_4 lần lượt là hình chiếu của E trên $A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,A_4A_1$.

Dễ thấy, $m=EN_{\min}=EH_1=\sqrt{5}$. Vậy $m+M=\sqrt{5}+\sqrt{58}$.



Tổng quát: Cho số phức z thỏa mãn $a\left|z+\bar{z}\right|+b\left|z-\bar{z}\right|=2c$; a,b,c dương. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z-w\right|$.

Gọi E là điểm biểu diễn w. Từ giả thiết suy ra điểm M biểu diễn z nằm trên hình bình hành giới hạn bởi các đường thẳng $\pm ax\pm by=c$.

Ta có nhận xét sau: Cho đoạn AB và điểm $C\notin AB$. Với mọi điểm $M\in AB$, $\min\{AC,BC\}\le MC\le\max\{\{AC,BC\}\}$.

**** Tìm max***

Với mọi điểm M nằm trên hình bình hành, giả sử $M\in A_iA_{i+1}\left(A_5\equiv A_1\right)$ ta có

$EM\le\max\{EA_i,EA_j\}\le\max\{EA_i\},i=1,2,3,4$

$\Rightarrow\ EM_{\max}=\max\{EA_i\},i=1,2,3,4$

**** Tìm min***

Gọi H_i là hình chiếu của E trên d_i. Khi đó,

+) Nếu tất cả H_i đều không thuộc đoạn chứa trên d_i tương ứng thì

$EM\ge\min\{EA_i,EA_{i+1}\}\ge\min\{EA_1,EA_2,EA_3,EA_4\}$

$\Rightarrow\ EM_{\min}=\min\{EA_i\},i=1,2,3,4$.

+) Có H_i thuộc đoạn chứa trên d_i tương ứng thì

$EM\ge\min\{EH_i,EA_i,EA_{i+1}\}\ge\min\{EH_i,EA_1,EA_2,EA_3,EA_4\}$ với những H_i thuộc đoạn chứa trên d_i tương ứng $\Rightarrow\ EM_{\min}=\min\{EH_i,EA_i\},i=1,2,3,4$ với những H_i thuộc đoạn chứa trên d_i tương ứng.

Đáp án B

Câu 3: Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2+7-24i|$ nằm trong khoảng nào?

A. $(0;1009)$. **B.** $(1009;2018)$. **C.** $(2018;4036)$. **D.** $(4036;+\infty)$.

Lời giải

STUDY TIP

Với mọi số phức z_1,z_2 ta có

- $||z_1|-|z_2||\le|z_1+z_2|$
- $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

Ta có $1=|z-3i+4|\ge||z|-|3i-4||=||z|-5|\Rightarrow -1\le|z|-5\le1\Rightarrow 4\le|z|\le6$.

Đặt $z_0=4-3i\Rightarrow|z_0|=5, z_0^2=7-24i$.

Ta có $A=|z^2+7-24i|^2=|z^2+z_0^2|^2=\left(z^2+z_0^2\right)\left(\overline{z}^2+\overline{z_0}^2\right)$

$$=|z|^4+|z_0|^4+\left(z.\overline{z_0}+z_0.\overline{z}\right)^2-2|z.z_0|^2$$

Mà $(z+z_0)\left(\overline{z}+\overline{z_0}\right)=1\Rightarrow z.\overline{z_0}+z_0.\overline{z}=1-|z|^2-|z_0|^2$

Suy ra, $A=|z|^4+|z_0|^4+\left(1-|z|^2-\left|\overline{z_0}\right|^2\right)^2-2|z.z_0|^2=2|z|^4-2|z|^2+1201$.

Hàm số $y=2t^4-2t^2+1201$ đồng biến trên $[4;6]$ nên

$$A\ge 2.4^4-2.4^2+1201=1681.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}|z|=4\\ |z+4-3i|=1\end{cases}$.

Do đó, $|z^2+7-24i|$ nằm trong khoảng $(1009;2018)$.

Đáp án B.

Câu 4: Cho phương trình $z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$, với a,b,c,d là các số thực. Biết phương trình có 4 nghiệm không là số thực, tích hai trong bốn nghiệm bằng $13+i$ và tổng của hai nghiệm còn lại bằng $3+4i$. Hỏi b nằm trong khoảng nào?

A. $(0;10)$. **B.** $(10;40)$. **C.** $(40;60)$. **D.** $(60;100)$.

Lời giải

MEMORIZE

Với hai số phức z_1,z_2 ta có tính chất:

+ Nếu $z_1+z_2\in\mathbb{R}$ thì $z_2=\overline{z_1}$

+ Nếu $z_1.z_2\in\mathbb{R}$ thì $z_2=\overline{z_1}$

Gọi các nghiệm của phương trình là z_1,z_2,z_3,z_4.

Khi đó, $z^4+az^3+bz^2+cz+d=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$, $\forall z$.

Do đó, $b=z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4$.

Do vai trò như nhau nên ta có thể giả sử $z_1z_2=13+i, z_3+z_4=3+4i$.

Vì $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ nên z_1z_2 và z_3z_4 cũng như z_1+z_2 và z_3+z_4 là các số phức liên hợp của nhau. Do đó, $z_1+z_2=3-4i, z_3z_4=13-i$.

$\Rightarrow b=(z_1+z_2)(z_3+z_4)+z_1z_2+z_3z_4=(3-4i)(3+4i)+13+i+13-i=51$.

Vậy $b\in(40;60)$.

Đáp án C.

Câu 5: Cho $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\overline{z}-3-2i|\le5$ và $\left|\dfrac{z+4+3i}{z-3+2i}\right|\le1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^2+y^2+8x+4y$. Tính $M+m$

A. -18. **B.** -4. **C.** -20. **D.** -2.

MEMORIZE

Cho 2 số phức $z_1;z_2$, ta có:

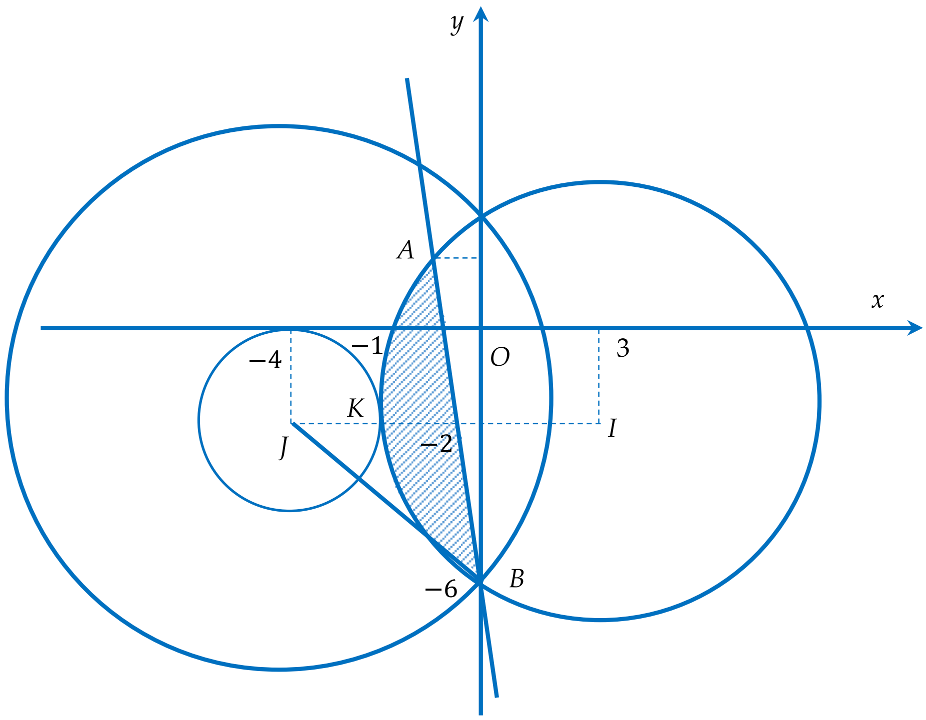
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ (với } z_2\neq 0\text{)}$$

Lời giải

Theo đề bài: $\begin{cases}|\bar{z}-3-2i|\le 5\\ |z+4+3i|\le|z-3+2i|\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2\le 5^2\\ (x+4)^2+(y+3)^2\le(x-3)^2+(y+2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2\le 25\,(C_1)\\ 7x+y+6\le 0\,(d)\end{cases}(*)$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là miền mặt phẳng (T) mà tọa độ các điểm thỏa mãn hệ (*)



Lại có: đường thẳng d cắt đường tròn (C_1) tại $A(-1;1);B(0;-6)$

Mặt khác: $T=(x+4)^2+(y+2)^2-20\Leftrightarrow(x+4)^2+(y+2)^2=T+20$

Gọi (C_2) là đường tròn tâm $J(-4;-2)$, bán kính $R=\sqrt{T+20}\,(T>-20)$

Khi đó ta có đường tròn (C_2) có điểm chung với miền mặt phẳng T khi và chỉ khi $JK\le R\le\max\{JA;JB\}$

$\Leftrightarrow IJ-IK\le R\le\max\{3\sqrt{2};4\sqrt{2}\}\Leftrightarrow 7-5\le\sqrt{T+20}\le 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 4\le T+20\le 32\Leftrightarrow -16\le T\le 12\Rightarrow M=12;m=-16$

Vậy $M+m=-4$

Đáp án B.

Câu 6: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+1|=|1-i-2z|$ là đường tròn (C). Tính bán kính R của (C).

A. $R=\frac{10}{9}$. **B.** $R=2\sqrt{3}$. **C.** $R=\frac{7}{3}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Đặt $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$.

+ $z+1=a+1+bi\Rightarrow|z+1|^2=(a+1)^2+b^2$.

+ $1-i-2z=1-i-2(a+bi)=1-2a-(1+2b)i\Rightarrow|1-i-2z|^2=(1-2a)^2+(1+2b)^2$.

Vậy $|z+1|=|1-i-2z|\Leftrightarrow(a+1)^2+b^2=(1-2a)^2+(1+2b)^2$

$\Leftrightarrow 3a^2-6a+3b^2+4b+1=0\Leftrightarrow a^2+b^2-2a+\frac{4}{3}b+\frac{1}{3}=0$.

Phương trình trên có $A^2+B^2-C=1+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}=\frac{10}{9}>0$ nên là phương trình đường tròn có bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2-C}=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

FOR REVIEW

Phương trình $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ với $A^2+B^2-C>0$ là phương trình đường tròn có tâm $I(-A;-B)$ và bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2-C}$

Đáp án D.

Câu 7: Cho $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z}+2-3i|\le|z+i-2|\le5$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+8x+6y$. Tính $M+m$

A. $\frac{156}{5}-20\sqrt{10}$. **B.** $60-20\sqrt{10}$. **C.** $\frac{156}{5}+20\sqrt{10}$. **D.** $60+20\sqrt{10}$.

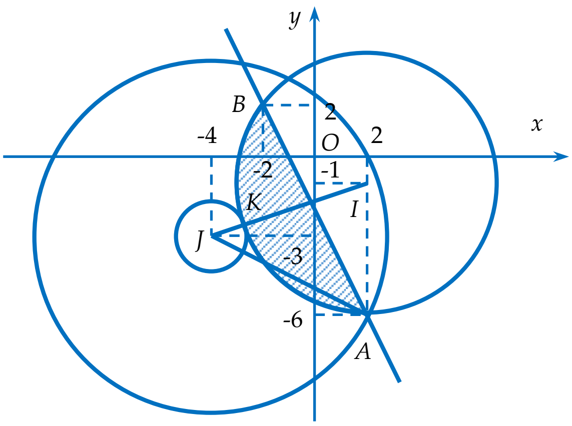
Lời giải Từ giả thiết ta có:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}\le\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}\le5\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+2\le0\\(x-2)^2+(y+1)^2\le25\end{cases}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là miền mặt phẳng (T) thỏa mãn $\begin{cases}2x+y+2\le0\\(x-2)^2+(y+1)^2\le25\end{cases}$ (miền tô đậm trong hình vẽ bên).

STUDY TIP

Tập hợp các điểm $(x;y)$ thỏa mãn $2x+y+2\le0$ là một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d:2x+y+2=0$ không chứa điểm $O(0;0)$ (kể cả bờ là đường thẳng d). Tập hợp các điểm $(x;y)$ thỏa mãn $(x-2)^2+(y+1)^2\le25$ là hình tròn $(x-2)^2+(y+1)^2=25$. Hợp của hai miền này chính là miền mặt phẳng (T) được tô đậm trong hình vẽ bên.



Gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng $2x+y+2=0$ và đường tròn (C'): $(x-2)^2+(y+1)^2=25$. Ta tìm được $A(2;-6)$ và $B(-2;2)$.

Ta có $P=x^2+y^2+8x+6y\Leftrightarrow(x+4)^2+(y+3)^2=P+25$.

Gọi (C) là đường tròn có tâm $J(-4;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{P+25}$.

Đường tròn (C) cắt miền (T) khi và chỉ khi $JK\le R\le JA\Leftrightarrow IJ-IK\le R\le JA$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{10}-5\le\sqrt{P+25}\le3\sqrt{5}\Leftrightarrow 40-20\sqrt{10}\le P\le20$.

Vậy $M=20, m=40-20\sqrt{10}\Rightarrow M+m=60-20\sqrt{10}$.

Đáp án B.

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-i|=1$ và $|z-\sqrt{2}m|=2$ với m là tham số thực. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để tồn tại hai số phức thỏa mãn các điều kiện trên là

A. $(-2;2)\setminus\{0\}$. **B.** $[-2;2]$. **C.** $[-2;2)\setminus\{0\}$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn $z=x+iy\,(x,y\in\mathbb{R})$ trên mặt phẳng phức.

Từ $|z-i|=1\Rightarrow x^2+(y-1)^2=1\Rightarrow M$ đường tròn (C_1) có tâm $I_1(0;1)$, bán kính $R_1=1$. Từ $|z-\sqrt{2}m|=2\Rightarrow\left(x-\sqrt{2}m\right)^2+y^2=4\Rightarrow M$ đường tròn (C_2) có tâm $I_2\left(\sqrt{2}m;0\right)$, bán kính $R_2=2$.

Để tồn tại hai số phức thỏa mãn các điều kiện đã cho khi và chỉ khi tồn tại hai điểm M, tức là (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$|R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2\Leftrightarrow 1<\sqrt{\left(\sqrt{2}m\right)^2+1}<3\Leftrightarrow 0<m^2<4\Leftrightarrow m\in(-2;2)\setminus\{0\}.$$

Đáp án A.

> **STUDY TIP**
> $|z-(a+bi)|=r\Rightarrow$ Tập hợp biểu diễn là đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính r.

Câu 9: Xét các số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=10$. **B.** $P=4$. **C.** $P=6$. **D.** $P=8$.

Lời giải

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky

Từ giả thiết $|z-4-3i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(a-4)^2+(b-3)^2=5\Leftrightarrow a^2+b^2-8a-6b+20=0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2=8a+6b-20$.

Mặt khác $T=|z+1-3i|+|z-1+i|=\sqrt{(a+1)^2+(b-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}$.

Suy ra $M^2\le(1^2+1^2)\left[(a+1)^2+(b-3)^2+(a-1)^2+(b+1)^2\right]=2\left[2(a^2+b^2)-4b+12\right]$

$$=2\left[2(8a+6b-20)-4b+12\right]=8(4a+2b-7)$$

Dấu "=" xảy ra khi $(a+1)^2+(b-3)^2=(a-1)^2+(b+1)^2\Leftrightarrow a-2b=-2$.

Lại có $4a+2b=4(a-4)+2(b-3)+22\le\sqrt{(4^2+2^2)\left[(a-4)^2+(b-3)^2\right]}+22$

$$=\sqrt{20.5}+22=32.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a-4}{4}=\dfrac{b-3}{2}\Leftrightarrow a-4=2(b-3)\Leftrightarrow a-2b=-2$.

Suy ra $M^2\le 8(4a+2b-7)\le 8(32-7)=200\Rightarrow M\le 10\sqrt{2}$.

Vậy $M_{max}=10\sqrt{2}$ khi $\begin{cases}4a+2b=32\\a-2b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=4\end{cases}$. Vậy $P=a+b=10$.

Cách 2: Lượng giác hóa

Từ giả thiết $|z-4-3i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(a-4)^2+(b-3)^2=5$. Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{5}\sin\alpha+4\\b=\sqrt{5}\cos\alpha+3\end{cases}$

> **STUDY TIPS**
> Với hai bộ số $(a_1;a_2;...;a_n)$ và $(b_1;b_2;...;b_n)$ ta có:
> $(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\le(a_1^2+...+a_n^2)(b_1^2+...+b_n^2)$
> Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi
> $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$

Khi đó $T=|z+1-3i|+|z-1+i|=\sqrt{(a+1)^2+(b-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}\sin\alpha+5\right)^2+\left(\sqrt{5}\cos\alpha\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}\sin\alpha+3\right)^2+\left(\sqrt{5}\sin\alpha+4\right)^2}$

$=\sqrt{10\sqrt{5}\sin\alpha+30}+\sqrt{6\sqrt{5}\sin\alpha+8\sqrt{5}\cos\alpha+30}$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có

$M\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(16\sqrt{5}\sin\alpha+8\sqrt{5}\cos\alpha+60\right)}=\sqrt{2\left[8\sqrt{5}\left(2\sin\alpha+\cos\alpha\right)+60\right]}$

và $2\sin\alpha+\cos\alpha\le\sqrt{\left(2^2+1^2\right)\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}=\sqrt{5}$.

Suy ra $M\le\sqrt{2\left[8\sqrt{5}\left(2\sin\alpha+\cos\alpha\right)+60\right]}\le\sqrt{2\left(8\sqrt{5}.\sqrt{5}+60\right)}=10\sqrt{2}$.

Nên $M_{\max}=10\sqrt{2}$ khi $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{5}\sin\alpha+4=6\\ b=\sqrt{5}\cos\alpha+3=4\end{cases}$. Vậy $P=a+b=10$.

Đáp án A.

Câu 10: Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|+|z+2-i|=5\sqrt{2}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-4-3i|$. Tính tổng bình phương của M và m.

A. 82. **B.** 162. **C.** 90. **D.** $90+40\sqrt{5}$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó

$|z-3+4i|+|z+2-i|=5\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{(a-3)^2+(b+4)^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-1)^2}=5\sqrt{2}$.

Coi $I(a;b),P(3;-4),Q(-2;1)$ và $R(4;3)$, với chú ý $PQ=5\sqrt{2}$ thì đẳng thức trên trở thành $IP+IQ=PQ$.

Đẳng thức trên chỉ xảy ra khi I thuộc đoạn PQ. Hơn nữa $|z-4-3i|=IR$.

Nhận thấy tam giác PQR là tam giác có ba góc nhọn nên

$$\min RI=d(R,PQ);\max RI=\max\{RP,RQ\}.$$

Bằng tính toán ta có $m=4\sqrt{2};M=5\sqrt{2}$. Suy ra $M^2+m^2=82$.

Phân tích phương án nhiễu:

Phương án B: Sai do HS tính đúng như trên nhưng lại cho rằng tổng bình phương của M và m là $(M+m)^2$ nên tính được kết quả 162.

Phương án C: Sai do HS cho rằng

$$\min RI=\min\{RP,RQ\};\max RI=\max\{RP,RQ\}$$

nên tìm được $M=5\sqrt{2}$ và $m=2\sqrt{10}$. Do đó tính được kết quả bằng 90.

Phương án D: Sai do HS cho rằng

$$\min RI=\min\{RP,RQ\};\max RI=\max\{RP,RQ\}$$

nên tìm được $M=5\sqrt{2}$ và $m=2\sqrt{10}$. Đồng thời, hiểu tổng bình phương của M và m là $(M+m)^2$ nên tính được kết quả bằng $90+40\sqrt{5}$.

Đáp án A.

Câu 11: Cho hai số phức $z_1 = 7+9i$ và $z_2 = 8i$. Gọi $z = a+bi$ ($a,\ b \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn $|z-1-i| = 5$. Tìm $a+b$, biết biểu thức $P = |z-z_1| + 2|z-z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. -3. **B.** -7. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a+bi$. Đặt $I = (1;1)$, $A(7;9)$ và $B(0;8)$

Ta xét bài toán: Tìm điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm I, bán kính $R = 5$ sao cho biểu thức $P = MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trước tiên, ta tìm điểm $K(x;y)$ sao cho $MA = 2MK\ \forall M \in (C)$.

Ta có $MA = 2MK \Leftrightarrow MA^2 = 4MK^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 = 4\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IK}\right)^2$

$\Leftrightarrow MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} = 4\left(MI^2 + IK^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}\right)$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IK}\right) = 3R^2 + 4IK^2 - IA^2$ (*).

(*) luôn đúng $\forall M \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IK} = \vec{0} \\ 3R^2 + 4IK^2 - IA^2 = 0 \end{cases}$.

$\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IK} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-1) = 6 \\ 4(y-1) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = 3 \end{cases}$.

Thử trực tiếp ta thấy $K\left(\dfrac{5}{2};3\right)$ thỏa mãn $3R^2 + 4IK^2 - IA^2 = 0$.

Ta có $MA + 2MB = 2MK + 2MB = 2(MK + MB) \geq 2KB$.

Vì $BI^2 = 1^2 + 7^2 = 50 > R^2 = 25$ nên B nằm ngoài (C).

Vì $KI^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 2^2 < R^2 = 25$ nên K nằm trong (C).

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng BK.

Do đó $MA + 2MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của (C) và đường thẳng BK.

Phương trình đường thẳng $BK: 2x + y - 8 = 0$.

Phương trình đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$.

Thử lại thấy $M(1;6)$ thuộc đoạn BK.

Vậy $a = 1, b = 6 \Rightarrow a + b = 7$.

Đáp án D.

STUDY TIPS
Cho số phức $z = a+bi$ có điểm biểu diễn M và số phức $z' = a' + b'i$ có điểm biểu diễn N. Khi đó $|z - z'| = MN$.

STUDY TIPS
Cho ba điểm phân biệt M, A, B. Khi đó ta luôn có $MA + MB \geq AB$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M nằm trong đoạn thẳng AB.

Câu 12: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Xét số phức $z = \dfrac{z_1}{z_2} = a + bi$. Tìm $|b|$

A. $|b| = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $|b| = \dfrac{\sqrt{39}}{8}$. **C.** $|b| = \dfrac{3}{8}$. **D.** $|b| = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

STUDY TIPS

Với hai số phức z_1, z_2 ta có:

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

Lời giải

Từ $z = \dfrac{z_1}{z_2} = a + bi \to |z| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \sqrt{a^2+b^2} \to \sqrt{a^2+b^2} = \dfrac{3}{4}$

Từ $\dfrac{|z_1 - z_2|}{|z_2|} = \left|\dfrac{z_1 - z_2}{z_2}\right| = \left|\dfrac{z_1}{z_2} - 1\right| = |z-1| = \dfrac{\sqrt{37}}{4} \to \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = \dfrac{\sqrt{37}}{4}$

Ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} a^2+b^2 = \dfrac{9}{16} \\ (a-1)^2 + b^2 = \dfrac{37}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = \dfrac{9}{16} \\ (a-1)^2 - a^2 = \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = \dfrac{9}{16} \\ -2a = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{8} \\ b^2 = \dfrac{9}{16} - \left(-\dfrac{3}{8}\right)^2 = \dfrac{27}{64} \end{cases}$. Vậy $b = \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{8} \to |b| = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Đáp án A.

Câu 13: Cho z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = (z_1^2+1)(z_2^2+1)(z_3^2+1)(z_4^2+1)$

A. $P = \dfrac{17}{9}$. **B.** $P = -\dfrac{17}{9}$. **C.** $P = 425$. **D.** $P = -425$.

Lời giải

Ta có $\left(\dfrac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow (z-1)^4 - (2z-i)^4 = 0$. Đặt $f(z) = (z-1)^4 - (2z-1)^4$. Phương trình $f(z) = 0$ có 4 nghiệm nên $f(z) = 15(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$.

Do $i^2 = -1$ nên $z^2 + 1 = z^2 - i^2 = (z-i)(z+i)$. Từ đó ta có:

$P = \left[(z_1 - i)(z_2 - i)(z_3 - i)(z_4 - i)\right].\left[(z_1 + i)(z_2 + i)(z_3 + i)(z_4 + i)\right]$

$= \left[(i - z_1)(i - z_2)(i - z_3)(i - z_4)\right].\left[(-i - z_1)(-i - z_2)(-i - z_3)(-i - z_4)\right]$

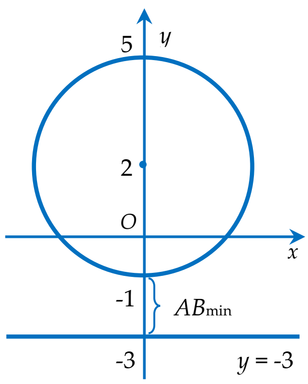
$\Rightarrow P = \dfrac{f(i)}{15}.\dfrac{f(-i)}{15} = \dfrac{(i-1)^4 - (2i-1)^4}{15}.\dfrac{(-i-1)^4 - (-2i-1)^4}{15} = \dfrac{13}{5}$.

Đáp án C.

Câu 14: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2i| = 3$ và $|z_2 + 2 + 2i| = |z_2 + 2 + 4i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải



Đặt $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$ với $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

- $|z_1 - 2i| = 3 \Leftrightarrow x_1^2 + (y_1 - 2)^2 = 9 \Rightarrow$ tập hợp các số phức z_1 là đường tròn $(C): x^2 + (y-2)^2 = 9$.
- $|z_2 + 2 + 2i| = |z_2 + 2 + 4i|$

$\Leftrightarrow (x_2+2)^2 + (y_2+2)^2 = (x_2+2)^2 + (y_2+4)^2 \Leftrightarrow y_2 + 3 = 0$

STUDY TIPS
Đường thẳng và đường tròn có vị trí đặc biệt nên vẽ hình sẽ nhận ra ngay được hai điểm A & B, nếu không thì viết phương trình đường thẳng qua tâm C và vuông góc với d, sau đó tìm giao điểm với C và d rồi loại điểm.

$\Rightarrow$ Tập hợp các số phức z_2 là đường thẳng $d: y=-3$.

Ta có $P=|z_1-z_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ đây chính là khoảng cách từ điểm $B(x_2;y_2)\in d$ đến điểm $A(x_1;y_1)\in(C)$.

Do đó $|z_2-z_1|_{\min} \Leftrightarrow AB_{\min}$.

Dựa vào hình vẽ ta tìm được $AB_{\min}=2$ khi $A(0;-1)$, $B(0;-3)$.

Đáp án B.

Câu 15: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z_1-2|^2-|z_1+1|^2=1$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2-4-i|=\sqrt{5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

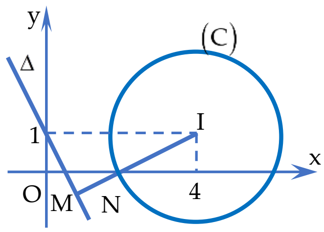
Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z_1. Khi đó $|z_1-2|^2-|z_1+i|^2=1$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2-x^2-(y+1)^2=1 \Leftrightarrow -4x-2y+2=0 \Leftrightarrow 2x+y-1=0$. Suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z_1 là đường thẳng $\Delta: 2x+y-1=0$.

Gọi $N(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức z_2. Khi đó $|z_2-4-i|=\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (a-4)^2+(b-1)^2=5$. Suy ra tập hợp các điểm N biểu diễn số phức z_2 là đường tròn $(C):(x-4)^2+(y-1)^2=5$ có tâm $I(4;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.



Nhận thấy $d(I;\Delta)=\frac{|2.4+1-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}>\sqrt{5}=R$ nên đường thẳng Δ và đường tròn (C) không cắt nhau.

Lại có $|z_1-z_2|=|(x-a)+(y-b)i|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=MN$. Dựa vào hình vẽ ta thấy $MN_{\min} \Leftrightarrow MN=d(I;\Delta)-R$. Vậy $|z_1-z_2|_{\min}=\frac{8\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Đáp án D.

Câu 16: Cho 2 số phức z_1, z_2 thỏa mãn tổng của chúng là 3 và tích là 4. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ là:

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $\frac{3+\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=3 \\ z_1.z_2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2=3-z_1 \\ z_1(3-z_1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2=3-z_1 \\ z_1^2-3z_1+4=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2=3-z_1 \\ \left[\begin{array}{l} z_1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i \\ z_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z_1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i \\ z_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i \end{cases} \\ \begin{cases} z_1=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i \\ z_2=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow |z_1|+|z_2|=2\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{7}{4}}=4$$

Đáp án C.

Câu 17: Cho các số phức $z_1=1, z_2=2-3i$ và số phức z thỏa mãn $|z-1-i|+|z-3+i|=2\sqrt{2}$. Gọi *M, m* lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_1|+|z-z_2|$. Tính tổng $S=M+m$

A. $S=4+2\sqrt{5}$. **B.** $S=5+\sqrt{17}$.

C. $S=1+\sqrt{10}+\sqrt{17}$. **D.** $S=\sqrt{10}+2\sqrt{5}$.

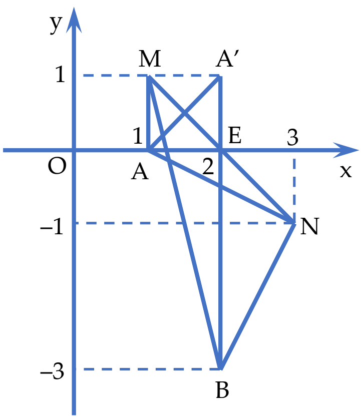
Lời giải

Số phức $z_1=1$ có điểm biểu diễn là $A(1;0)$, số phức $z_2=2-3i$ có điểm biểu diễn là $B(2;-3)$.

Gọi $E(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z, khi đó $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Suy ra $P=|(x-1)+yi|+|(x-2)+(y+3)i|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$

$\Rightarrow P=EA+EB$.



Mặt khác $|z-1-i|+|z-3+i|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow|(x-1)+(y-1)i|+|(x-3)+(y+1)i|=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}=2\sqrt{2}\ \ (*)$

Gọi $M(1;1),N(3;-1)$ thì $EM+EN=2\sqrt{2}=MN\Rightarrow$ Điểm E thuộc đoạn MN.

Ta có phương trình đường thẳng MN là $x+y-2=0$ với $x\in[1;3]$.

Bài toán trở thành: Cho điểm E thuộc đoạn MN. Tìm giá trị lớn nhất cúa biểu thức $P=EA+EB$.

Đặt $f(x)=x+y-2$. Ta có $\begin{cases}f(1;0)=1+0-2=-1\\f(2;-3)=2-3-2=-3\end{cases}\Rightarrow f(1;0).f(2;-3)=3>0$. Suy ra hai điểm A,B nằm về cùng một phía đối với MN. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua MN thì $A'(2;1)$. Khi đó $P=EA+EB=EA'+EB\geq A'B=4$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $E\in A'B\Rightarrow E=A'B\cap MN\Rightarrow E(2;0)$ hay $z=2$.

Do điểm E luôn thuộc đoạn thẳng MN nên $P=EA+EB$ đạt giá trị lớn nhất khi $E\equiv M$ hoặc $E\equiv N$.

Có $\begin{cases}MA+MB=1+\sqrt{17}\\NA+NB=2\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow MA+MB>NA+NB\Rightarrow\max P=MA+MB=1+\sqrt{17}$.

Vậy $M=1+\sqrt{17},m=4\Rightarrow S=M+m=5+\sqrt{17}$.

Đáp án B.

Câu 18: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\frac{1}{z}\right|=3$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\sqrt{13}$.

Lời giải

Ta có $\left|z+\frac{1}{z}\right|=3\Leftrightarrow\left|z+\frac{1}{z}\right|^2=9\Leftrightarrow\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)=9\Leftrightarrow\frac{(z^2+1)\left(\overline{z}^2+1\right)}{z.\overline{z}}=9$

STUDY TIPS

Tổng quát: Cho a,b,c là các số thực dương và số phức z khác 0 thỏa mãn $\left|az+\frac{b}{z}\right|=c$.

Khi đó $\frac{-c+\sqrt{c^2+4ac}}{2a}\le$ $|z|\le\frac{c+\sqrt{c^2+4ab}}{2a}$.

$\Leftrightarrow z^2.\overline{z}^2+z^2+\overline{z}^2+1=9z\overline{z}=9|z|^2\Leftrightarrow|z|^4+\left(z+\overline{z}\right)^2-2|z|^2+1=9|z|^2$

Do $\left(z+\overline{z}\right)^2\ge0$ nên $-|z|^4+11|z|^2-1\ge0\Leftrightarrow|z|^4-11|z|^2+1\le0$

$\Leftrightarrow\frac{11-3\sqrt{13}}{2}\le|z|^2\le\frac{11+3\sqrt{13}}{2}\Leftrightarrow\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\le|z|\le\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

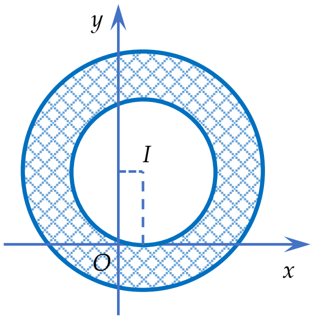
Vậy $\max|z|+\min|z|=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}+\frac{3+\sqrt{13}}{2}=\sqrt{13}$.

Đáp án D.

Câu 19: Biết số phức z thỏa mãn điều kiện $3\le|z-3i+1|\le5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng

A. 16π **B.** 4π **C.** 9π **D.** 25π

Lời giải



Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có $|z-3i-1|=|(x-1)+(y-3)i|=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$

Do đó $3\le|z-3i+1|\le5\Leftrightarrow9\le(x-1)^2+(y-3)^2\le25$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn của z là hình phẳng nằm trong đường tròn tâm $I(1;3)$ bán kính $R=5$ đồng thời nằm ngoài đường tròn tâm $I(1;3)$ bán kính $r=3$.

Diện tích của hình phẳng đó (phần tô màu) là $S=\pi.5^2-\pi.3^2=16\pi$ (đvdt).

Đáp án A.

Câu 20: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(2-i)z+1$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

A. $x-7y-9=0$ **B.** $x+7y-9=0$ **C.** $x+7y+9=0$ **D.** $x-7y+9=0$

Lời giải

Giả sử $w=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Từ $w=(2-i)z+1\Leftrightarrow z=\frac{(x-1)+yi}{2-i}$

$\Leftrightarrow z=\frac{[(x-1)+yi](2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2x-y-2}{5}+\frac{x+2y-1}{5}i$.

Từ $|z-i|=|z-1+2i|\Leftrightarrow\left|\frac{2x-y-2}{5}+\frac{x+2y-6}{5}i\right|=\left|\frac{2x-y-7}{5}+\frac{x+2y+9}{5}i\right|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(2x-y-2)^2+(x+2y-6)^2}=\sqrt{(2x-y-7)^2+(x+2y+9)^2}$

$\Leftrightarrow5x^2+5y^2-20x-20y+40=5x^2+5y^2-10x+50y+130\Leftrightarrow x+7y+9=0$.

Đáp án C.

Câu 21: Trong các số phức z thỏa mãn $|z+4-3i|+|z-8-5i|=2\sqrt{38}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-2-4i|$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Từ giả thiết ta có: $|(x+4)+(y-3)i| + |(x-8)+(y-5)i| = 2\sqrt{38}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2} + \sqrt{(x-8)^2+(y-5)^2} = 2\sqrt{38}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$1.\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2} + 1.\sqrt{(x-8)^2+(y-5)^2} \le$

$\le \sqrt{(1^2+1^2)\left[(x+4)^2+(y-3)^2+(x-8)^2+(y-5)^2\right]} = 2\sqrt{x^2-4x+y^2-8y+57}$

$\Leftrightarrow \sqrt{38} \le \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2+37} \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2 \ge 1$

Lại có $|z-2-4i| = |(x-2)+(y-4)i| = \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} \ge \sqrt{1} = 1$.

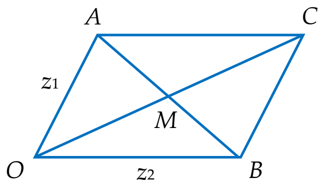
Đáp án D.

STUDY TIPS
Với các số a,b,x,y ta có:
$(ax+by)^2 \le$
$\le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ (Bất đẳng thức Bunyakovsky).

Câu 22: Với hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$. **B.** $P = 2\sqrt{26}$. **C.** $P = 4\sqrt{6}$. **D.** $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải



Đặt $OA = |z_1|, OB = |z_2|$, O là gốc tạo độ, A và B là hai điểm biểu diễn của z_1, z_2

Dựng hình bình hành $OACB$, khi đó $AB = |z_1 - z_2| = 2$

$OC = |z_1 + z_2| = 10 \Rightarrow OM = 5$

$OM^2 = \dfrac{2(OA^2+OB^2) - AB^2}{4} \Rightarrow OA^2 + OB^2 = 52 \Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 52$

Ta có: $|z_1| \le |z_2| \le \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)} = 2\sqrt{26} \Rightarrow P_{max} = 2\sqrt{26}$

Đáp án B.

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn tập hợp $|z-1| = 3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức w với $(3-2i)w = iz + 2$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của đường tròn đó.

A. $I\left(\frac{8}{13}; \frac{1}{13}\right)$, $r = \frac{3}{\sqrt{13}}$. **B.** $I(-2; 3)$, $r = \sqrt{13}$.

C. $I\left(\frac{4}{13}; \frac{7}{13}\right)$, $r = \frac{3}{\sqrt{13}}$. **D.** $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right)$, $r = 3$.

Lời giải

Từ giả thiết $\Rightarrow w = \dfrac{i}{3-2i}z + \dfrac{2}{3-2i} = \left(-\dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}i\right)z + \dfrac{6}{13} + \dfrac{4}{13}i$

$\Leftrightarrow w = \left(-\dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}i\right)(z-1) + \dfrac{4}{13} + \dfrac{7}{13}i$

$\Rightarrow \left|w - \left(\dfrac{4}{13} + \dfrac{7}{13}i\right)\right| = \left|-\dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}i\right| . |z-1| = \dfrac{1}{\sqrt{13}} . 3 = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

STUDY TIPS
$|z-(a+bi)| = r \Rightarrow$ Tập hợp biểu diễn là đường tròn tâm $(a;b)$ bán kính r.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w thuộc đường tròn tâm $I\left(\frac{4}{13};\frac{7}{13}\right)$, bán kính $r=\frac{3}{\sqrt{13}}$.

Đáp án C.

Câu 24: Cho z_1, z_2 là nghiệm phương trình $|6-3i+iz|=|2z-6-9i|$ và thỏa mãn $|z_1-z_2|=\frac{8}{5}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z_1+z_2|$.

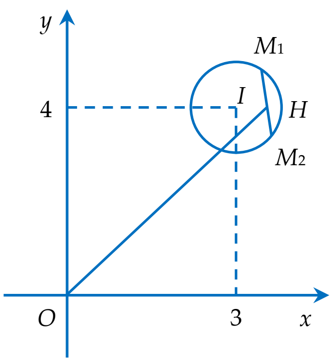
A. $\frac{56}{5}$. **B.** $\frac{28}{5}$. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$; $z_1=x_1+y_1i$; $z_2=x_2+y_2i$

+ $|6-3i+iz|=|2z-6-9i| \Leftrightarrow x^2+y^2-6x+8y+24=0 \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(3;4)$ và bán kính $R=1$.

+ Có $|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ với $M_1(x_1;y_1)$ là điểm biểu diễn số phức z_1, $M_2(x_2;y_2)$ là điểm biểu diễn số phức z_2



$\Rightarrow M_1M_2=\frac{8}{5}$ (M_1, M_2 thuộc đường tròn (C))

+ $|z_1+z_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}=\left|\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}\right|=2\left|\overrightarrow{OH}\right|$ với H là trung điểm của M_1, M_2 (hình vẽ)

$\Rightarrow |z_1+z_2|_{max} \Leftrightarrow OH_{max}$ mà $OH\le OI+IH$

$\Rightarrow OH_{max}=OI+IH=5+IH=5+\sqrt{1-\left(\frac{8}{10}\right)^2}=\frac{28}{5} \Rightarrow |z_1+z_2|_{max}=2OH_{max}=\frac{56}{5}$

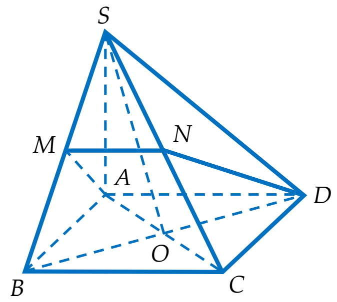
Đáp án A.

V. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,SC. Thể tích khối chóp $S.ADNM$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{8}a^3$. **B.** $\frac{3\sqrt{6}}{16}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{16}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{24}a^3$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ thì $BD\perp(SAO)$.

Do đó $(\widehat{(SBD),(ABCD)}) = (\widehat{SO,OA}) = \widehat{SOA}$. Theo giả thiết, ta có $\widehat{SOA}=60°$.

Tam giác SAO vuông tại A nên $SA = OA.\tan SOA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{6}}{6}a^3$.

Để ý rằng $V_{S.ABC}=V_{S.ACD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$ và $V_{S.ADNM}=V_{S.ADN}+V_{S.ANM}$.

Lại có $\frac{V_{S.ADN}}{V_{S.ADC}}=\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2};\frac{V_{SANM}}{V_{S.ACB}}=\frac{AN}{SC}.\frac{SM}{SB}=\frac{1}{4}$ nên $\frac{V_{S.ADNM}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$.

Suy ra $V_{S.ADNM}=\frac{3}{8}.\frac{\sqrt{6}}{6}a^3=\frac{\sqrt{6}}{16}a^3$.

Đáp án C.

STUDY TIP

1) Cho hình chóp $S.ABC$. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA,SB,SC lần lượt tại A',B',C' thì $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$.

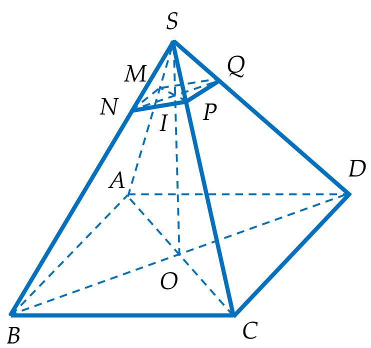
2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là **hình bình hành**. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA,SB,SC,SD lần lượt tại A',B',C',D' thì $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\right)$

hoặc $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}\left(\frac{SA'}{SA}+\frac{SC'}{SC}\right)$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, trên các cạnh SA,SB,SC lần lượt lấy các điểm M,N,P sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{1}{3},\frac{SN}{SB}=\frac{1}{4},\frac{SP}{SC}=\frac{1}{6}$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD tại Q. Biết thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng $\frac{1}{8}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=10$. **B.** $V=12$. **C.** $V=80$. **D.** $V=8$.

Lời giải

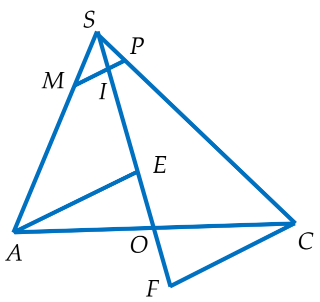


Cách 1:

Gọi $O=AC\cap BD, I=MP\cap SO, Q=MI\cap SC$, khi đó $Q=SD\cap(MNP)$

Xét mặt phẳng (SAC), từ A,C kẻ các đường thẳng song song với MP cắt đường thẳng SO tại E,F. Theo định lí Ta lét ta có

$$\frac{SA}{SM}+\frac{SC}{SP}=\frac{SE}{SI}+\frac{SF}{SI}=2\frac{SO}{SI}(1)$$



Chứng minh tương tự ta có $\frac{SB}{SN}+\frac{SD}{SQ}=2\frac{SO}{SI}(2)$

Từ $(1),(2)$ ta có $\frac{SA}{SM}+\frac{SC}{SP}=\frac{SB}{SN}+\frac{SD}{SQ}\Rightarrow\frac{SD}{SQ}=5$

Mặt khác $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}\frac{SP}{SC}=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}\Rightarrow V_{S.MNP}=\frac{1}{72}V_{S.ABC}=\frac{1}{144}V_{S.ABCD}$

$\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}\frac{SQ}{SD}.=\frac{1}{3}.\frac{1}{5}.\frac{1}{6}\Rightarrow V_{S.MNP}=\frac{1}{90}V_{S.ABC}=\frac{1}{180}V_{S.ABCD}$

Do đó $V_{S.MNPQ}=\left(\frac{1}{144}+\frac{1}{180}\right)V_{S.ABCD}=\frac{1}{80}V_{S.ABCD}\Rightarrow V_{S.ABCD}=10$

Cách 2: Đặt $SA=x,SM=a,SN=b,SP=c,SQ=d,V=V_{ABCD}$ ta có:

$a=\frac{x}{3},b=\frac{x}{4},c=\frac{x}{6}$

$\frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}}=\frac{abc}{x^3}\Rightarrow V_{SMNP}=\frac{abc}{2x^3}V$. Tương tự $V_{SMQP}=\frac{adc}{2x^3}V\Rightarrow V_{S.MNPQ}=\frac{ac(b+d)}{2x^3}V$

Chứng minh tương tự $V_{S.MNPQ}=\frac{bd(a+c)}{2x^3}V\Rightarrow ac(b+d)=bd(a+c)$

$\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{x}{c}=\frac{x}{b}+\frac{x}{d}\Rightarrow 3+6=4+\frac{x}{d}\Rightarrow\frac{x}{d}=5\Rightarrow d=\frac{x}{5}$

Do đó, $V_{S.MNPQ}=\frac{bd(a+c)}{2x^3}V=\frac{\frac{x}{4}\frac{x}{5}\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{6}\right)}{2x^3}V=\frac{V}{80}=\frac{1}{8}\Rightarrow V=10$

STUDY TIP

Ta có thể dùng tính chất: Nếu $Q\in(MNP)$ và $\overrightarrow{SQ}=x\overrightarrow{SM}+y\overrightarrow{SN}+z\overrightarrow{SP}$ thì $x+y+z=1$.

Đáp án A.

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD). Biết khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCD)$ lần lượt là $1;2;\sqrt{5}$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SAD).

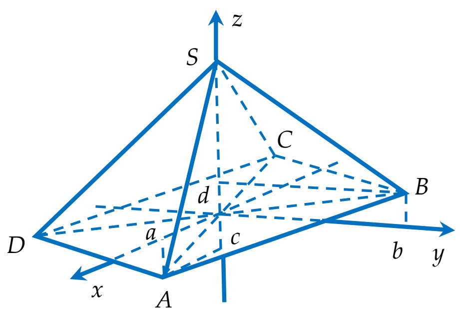
A. $d=\sqrt{\frac{20}{19}}$. **B.** $d=\sqrt{\frac{19}{20}}$. **C.** $d=\sqrt{2}$. **D.** $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Cách 1:

Lấy mặt phẳng (α) vuông góc với SO cắt $(SAC),(SBD)$ theo các giao tuyến $x'Ox,y'Oy$. Do $(SAC)\perp(SBD)$ nên $x'Ox\perp y'Oy$

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Oz trùng với tia OS.



Ta có $A(a;0;c)\in(Oxz),B(0;b;d)\in(Oyz),S(0;0;h)\in Oz$

Điểm C,D lần lượt đối xứng với A,B qua O nên

$$C(-a;0;-c),D(0;-b;-d)$$

Ta có $\overrightarrow{SA}(a;0;c-h),\overrightarrow{SB}(0;b;d-h)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]=(b(c-h);a(d-h);ab)$

Phương trình mặt phẳng (SAB) có dạng

$$b(c-h)x+a(d-h)y+ab(z-h)=0$$

MEMORIZE

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD). Gọi p, q, u, v lần lượt là các khoảng cách từ O đến các mp $(SAB),(SBC),(SCD),(SDA)$.

Khi đó: $\frac{1}{p^2}+\frac{1}{u^2}=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{v^2}$.

$$p=d(O,(SAB))=\frac{|-abh|}{\sqrt{b^2(c-h)^2+a^2(d-h)^2+a^2b^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2}=\frac{b^2(c-h)^2+a^2(d-h)^2+a^2b^2}{a^2b^2h^2}$$

Tương tự $\frac{1}{u^2}=\frac{b^2(c+h)^2+a^2(d+h)^2+a^2b^2}{a^2b^2h^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2}+\frac{1}{u^2}=\frac{2(a^2b^2+a^2d^2+b^2c^2+a^2h^2+b^2h^2)}{a^2b^2h^2}$$

Hoàn toàn tương tự

$$\Rightarrow \frac{1}{q^2}+\frac{1}{v^2}=\frac{2(a^2b^2+a^2d^2+b^2c^2+a^2h^2+b^2h^2)}{a^2b^2h^2}\Rightarrow \frac{1}{p^2}+\frac{1}{u^2}=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{v^2}.$$

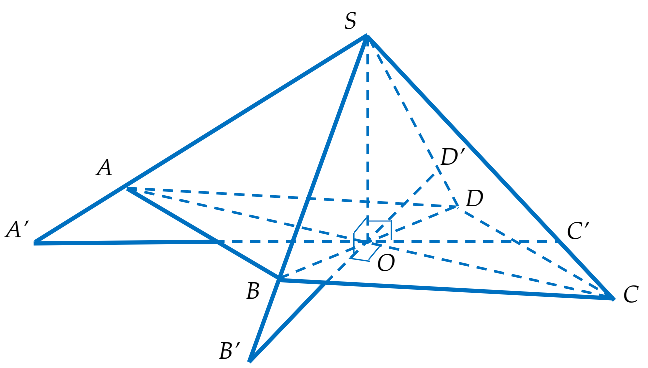
Cách 2:

Trong mặt phẳng (SAC) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SA,SC lần lượt tại A',C'

Trong mặt phẳng (SBD) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SB,SD lần lượt tại B',D'

Do $(SAC)\perp(SBD),(SAC)\cap(SBD)=SO, A'C'\perp SO$ nên $A'C'\perp(SBD)$

$\Rightarrow A'C'\perp B'D'$



Khi đó tứ diện $OSA'B'$ có OS,OA',OB' đôi một vuông góc nên ta chứng minh được $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OA'^2}+\frac{1}{OB'^2}(1)$

Chứng minh tương tự: $\frac{1}{q^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OB'^2}+\frac{1}{OC'^2}(2)$;

$$\frac{1}{u^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OC'^2}+\frac{1}{OD'^2}(3)$$

$$\frac{1}{v^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OD'^2}+\frac{1}{OA'^2}(4)$$

Từ $(1),(2),(3),(4)$ ta có $\frac{1}{p^2}+\frac{1}{u^2}=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{v^2}$.

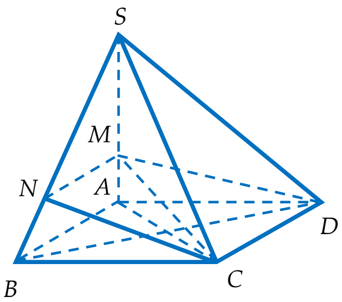
Với $p=1;q=2;u=\sqrt{5}\Rightarrow \frac{1}{1^2}+\frac{1}{(\sqrt{5})^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{v^2}\Rightarrow \frac{1}{v^2}=\frac{19}{20}\Rightarrow d=v=\sqrt{\frac{20}{19}}$.

Đáp án A.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=AB=1, AD=2$. Điểm M thuộc SA sao cho $AM=x(0<x<1)$. Tìm x để mặt phẳng (MCD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối có thể tích là V_1,V_2. Biết $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{7}$, hỏi giá trị của x nằm trong khoảng nào?

A. $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{9}\right)$. **C.** $\left(\frac{4}{9};\frac{5}{6}\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{6};1\right)$.

Lời giải



STUDY TIP

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành, điểm M nằm trên cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA}=k$. Khi đó, mặt phẳng (CDM) cắt khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, tỉ số thể tích phần chứa S và thể tích khối chóp ban đầu bằng $\frac{k^2+k}{2}$.

Cách 1: Do $CD//(SAB)$ nên (CDM) cắt (SAB) theo giao tuyến qua M song song với AB và cắt SB tại N.

Khi đó, $V_1=V_{S.CDMN}, V_2=V_{ABCDMN}$.

Ta có $\frac{V_{SMCD}}{V_{SACD}}=1-x \Rightarrow V_{SMCD}=(1-x)V_{SACD}=\frac{1-x}{2}V_{SABCD}$.

$\frac{V_{SMNC}}{V_{SABC}}=(1-x)^2 \Rightarrow V_{SMNC}=(1-x)^2V_{SABC}=\frac{(1-x)^2}{2}V_{SABCD}$.

Mà $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{7} \Rightarrow \frac{V_1}{V_{SABCD}-V_1}=\frac{2}{7} \Rightarrow V_1=\frac{2}{9}V_{SABCD}$.

Do đó, $\frac{(1-x)^2}{2}+\frac{1-x}{2}=\frac{2}{9} \Leftrightarrow 9x^2-27x+14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3} \\ x=\frac{7}{3}, loại \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra $x\in\left(\frac{4}{9};\frac{5}{6}\right)$.

Cách 2: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho

$S(0;0;1), A(0;0;0), B(0;1;0), D(2;0;0), C(2;1;0), M(0;0;a), 0<a<1$.

Dễ dàng tìm được phương trình mặt phẳng (MCD) là $a(x-2)+2z=0$ nên

$d(S,(MCD))=\frac{2(1-a)}{\sqrt{a^2+4}}$.

Lại có $MDCN$ là hình thang vuông tại M và D.

Bằng định lí Talet và Pitago ta tính được $MN=1-a$ và $MD=\sqrt{a^2+4}$.

Do đó, $V_{S.MDCN}=\frac{1}{3}\frac{2(1-a)(2-a)\sqrt{a^2+4}}{2\sqrt{a^2+4}}=\frac{(1-a)(2-a)}{3}$;

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{2}{3}$

Từ giả thiết suy ra

$$V_{S.MDCN}=\frac{2}{9}V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{a^2-3a+2}{3}=\frac{2}{9}.\frac{2}{3} \Leftrightarrow 9a^2-27a+14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{2}{3} \\ a=\frac{7}{3}, loại \end{array}\right.$$

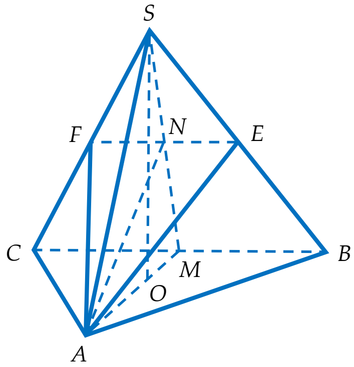
Đáp án C.

Câu 5: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,SC. Biết mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{5}}{8}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABC)$.



STUDY TIP

Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi E, F lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh SB, SC sao cho $\frac{SE}{SB}=\frac{SF}{SC}=k$ $(0<k<1)$. Biết mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}\sqrt{\frac{2+k}{3-3k}}$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và EF.

Ta có S, M, N thẳng hàng và $SM\perp BC$ tại M, $SM\perp EF$ tại N.

Ta có

$$\left.\begin{array}{l}(AEF)\cap(SBC)=EF\\ SM\subset(SBC)\\ SM\perp EF\end{array}\right\}\Rightarrow SM\perp(AEF)\Rightarrow MN\perp AN\Rightarrow \Delta ANM \text{ vuông tại } N.$$

Từ đó suy ra hai tam giác $\Delta ANM,\Delta SOM$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{AN}{SO}=\frac{AM}{SM}=\frac{NM}{OM}$

$\Rightarrow NM.SM=AM.OM$.

Vì E, F lần lượt là trung điểm của SB, SC nên N là trung điểm của SM

$\Rightarrow NM=\frac{1}{2}SM$.

ΔABC đều cạnh a và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $OM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $\frac{1}{2}SM^2=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a^2}{4}\Rightarrow SM=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Ta có $SO=\sqrt{SM^2-OM^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{12}}=\frac{a\sqrt{15}}{6}$;

$S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SO.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

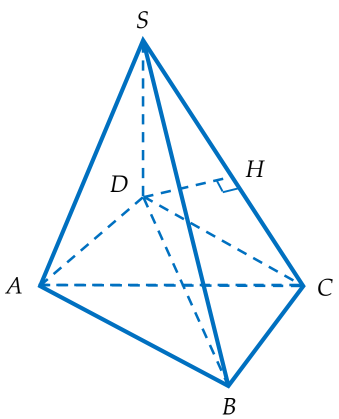
Đáp án A.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC cân tại $B, AB=BC=a$, $\widehat{ABC}=120°$ và $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90°$. Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC), $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{8}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$, biết khoảng cách từ điểm S và mặt phẳng (ABC) nhỏ hơn $2a$.

A. $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi D là hình chiếu của điểm S lên (ABC)

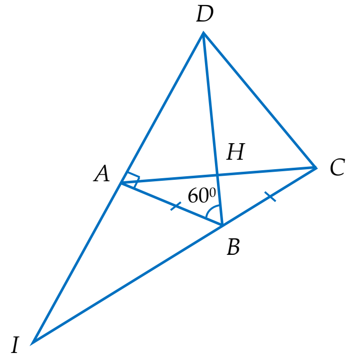
$\Rightarrow SD\perp AB\Rightarrow AB\perp(SAD)$ (vì $SA\perp AB$) $\Rightarrow AB\perp AD\Rightarrow\widehat{BAD}=90°$

Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{BCD}=90°$

Do đó $BD=\frac{AB}{\cos 60°}=2a$, $AD=a\sqrt{3}=CD$

Đặt $SD=x$. Theo đề bài $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{8}\Rightarrow\frac{d(A;(SBC))}{SA}=\frac{\sqrt{3}}{8}$ (1)

Mà $SA=\sqrt{SD^2+AD^2}=\sqrt{x^2+3a^2}$ (2)



Gọi H là hình chiếu của D lên SC

$\Rightarrow DH\perp(SBC)$ (do $BC\perp(SCD)$) $\Rightarrow d(D;(SBC))=DH$

$$\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{SD^2}+\frac{1}{CD^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{x^2+3a^2}{3a^2x^2}$$

Do đó $d(D;(SBC))=\dfrac{3ax}{\sqrt{3x^2+9a^2}}\Rightarrow d(A;(SBC))=\dfrac{1}{2}d(D;(SBC))=\dfrac{3ax}{2\sqrt{3x^2+9a^2}}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có: $\dfrac{3ax}{2\sqrt{3}(x^2+3a^2)}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\Leftrightarrow x^2-4ax+3a^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\,(t/m)\\x=3a\,(l)\end{array}\right.$

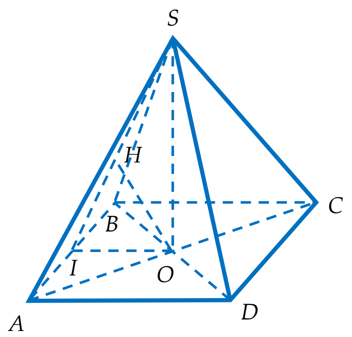
Do đó $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SD.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.a.\dfrac{1}{2}.a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Đáp án A.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, SA tạo với đáy một góc $30°$. Tính theo a khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và CD.

A. $d=\dfrac{3\sqrt{14}a}{5}$. **B.** $d=\dfrac{2\sqrt{10}a}{5}$. **C.** $d=\dfrac{2\sqrt{15}a}{5}$. **D.** $d=\dfrac{4\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của AC và BD. Ta có $SO\perp(ABCD)$ (do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều). Suy ra góc giữa SA và $(ABCD)$ là góc $SAO\Rightarrow\widehat{SAO}=30°$.

Vì $CD//AB$ nên $CD//(SAB)$.

Do đó $d=d(CD,AB)=d(CD,(SAB))=d(C,(SAB))=2d(O,(SAB))$.

Gọi I là trung điểm của AB. Ta có $\begin{cases}AB\perp OI\\AB\perp SO\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SOI)$.

Dựng OH vuông góc với SI tại H thì $AB\perp OH$.

Ta có $\begin{cases}OH\perp SI\\OH\perp AB\end{cases}\Rightarrow OH\perp(SAB)\Rightarrow d(O,(SAB))=OH$.

Ta có $SO=OA.\tan30°=\dfrac{2a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

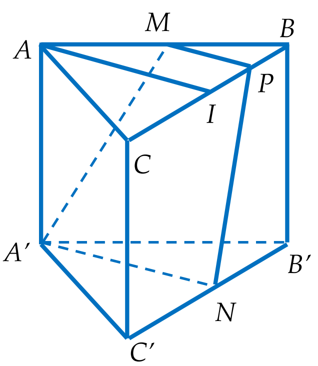
Ta có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OI^2}=\dfrac{3}{2a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{2a^2}\Rightarrow OH=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}\Rightarrow d=\dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$.

Đáp án B.

Câu 8: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P. Tính thể tích V của khối đa diện $MBPA'B'N$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^37\sqrt{3}}{96}$. **D.** $V=\dfrac{a^37\sqrt{3}}{48}$.

Lời giải



Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $h=AA'=a$ và diện tích đáy $B=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi I là trung điểm của BC và P là trung điểm của $BI\Rightarrow MP//A'N$.

Suy ra, P là giao điểm của BC và $(A'MN)$.

Ta có $\Delta MBP \# \Delta A'B'N$ nên khối đa diện $MBPA'B'N$ là một khối chóp cụt.

Ta có:

$$S_{\Delta MBP}=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{8}B$$

$$S_{\Delta A'B'N}=\frac{1}{2}.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}B$$

Do đó $V_{MBP.A'B'N}=\dfrac{h}{3}\left(\dfrac{1}{8}B+\dfrac{1}{2}B+\sqrt{\dfrac{1}{8}B.\dfrac{1}{2}B}\right)=\dfrac{h}{3}.\dfrac{7B}{8}=\dfrac{a.7.a^2\sqrt{3}}{3.8.4}=\dfrac{a^3 7\sqrt{3}}{96}$.

Đáp án C.

FOR REVIEW

Thể tích khối chóp cụt có chiều cao h và diện tích hai đáy là B và B':

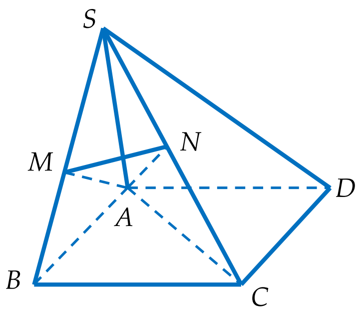
$$V=\frac{h}{3}\left(B+B'+\sqrt{BB'}\right).$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA=a, SB=2a, SC=3a$ và $\widehat{ASB}=\widehat{ASC}=\widehat{BSC}=60°$. Biết đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=a^3\sqrt{2}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=3a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Cách 1:



Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $SM=SN=SA=a$.

Mà $\widehat{ASB}=\widehat{ASC}=\widehat{BSC}=60°$ nên $AM=MN=NA=a$ và $S.AMN$ là tứ diện đều có cạnh bằng a và $V_{S.AMN}=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$ (đvtt).

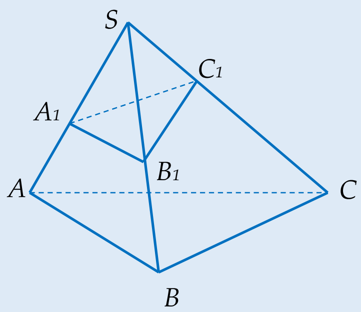
Áp dụng công thức tỉ số thể tích trong hình tứ diện, ta có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=\frac{a}{2a}.\frac{a}{3a}=\frac{1}{6}\Rightarrow V_{S.ABC}=6V_{S.AMN}=\frac{\sqrt{2}a^3}{2}\text{ (đvtt)}$$

Vậy $V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}=\sqrt{2}a^3$ (đvtt).

Công thức tỷ số thể tích áp dụng trong hình tứ diện (hình chóp tam giác):

Cho khối chóp $S.ABC$ và các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc các đường thẳng SA, SB và SC.



Khi đó $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA_1}{SA}.\dfrac{SB_1}{SB}.\dfrac{SC_1}{SC}$.

Cách 2:

Áp dụng công thức $V=\dfrac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ ta có:

$$V_{S.ABC}=\frac{a.2a.3a}{6}.\sqrt{1-3\cos^2 60°+2\cos^3 60°}=a^3.\sqrt{1-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{a^3}{\sqrt{2}}\text{ (đvtt)}.$$

Suy ra $V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}=2.\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}=a^3\sqrt{2}$ (đvtt).

Đáp án A.

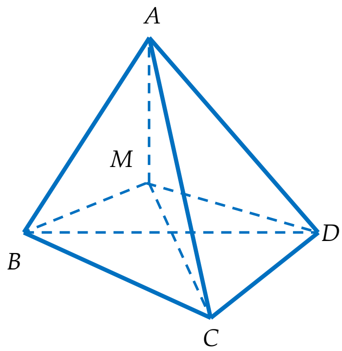
DISCOVERY

Cách 2 trong lời giải này áp dụng công thức tính nhanh dưới đây:

"Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a, SB=b, SC=c$ và $\widehat{ASB}=\alpha, \widehat{BSC}=\beta, \widehat{CSA}=\gamma$. Đặt $\cos\alpha=x, \cos\beta=y$ và $\cos\gamma=z$ thì $V_{S.ABC}=\dfrac{abc}{6}\times\sqrt{1-x^2-y^2-z^2+2xyz}$.

Câu 10: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của khối tứ diện tương ứng. Giá trị lớn nhất của tích các khoảng cách từ điểm M đến bốn mặt phẳng của tứ diện đã cho là

A. $\frac{a^4}{521}$. **B.** $\frac{a^4}{576}$. **C.** $\frac{a^4\sqrt{6}}{81}$. **D.** $\frac{a^4\sqrt{6}}{324}$.



Lời giải

Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng $(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$.

Gọi S là diện tích một mặt của tứ diện đều thì $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích tứ diện đều $ABCD$ là $V_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ta có $V_{ABCD}=V_{M.BCD}+V_{M.ACD}+V_{M.ABD}+V_{M.ABC}=\frac{1}{3}.S.r_1+\frac{1}{3}.S.r_2+\frac{1}{3}.S.r_3+\frac{1}{3}.S.r_4$

$\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{S}{3}(r_1+r_2+r_3+r_4)$.

Suy ra $V_{ABCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}(r_1+r_2+r_3+r_4)=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}\Leftrightarrow r_1+r_2+r_3+r_4=a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta có:

$$\frac{a\sqrt{6}}{3}=r_1+r_2+r_3+r_4\ge 4.\sqrt[4]{r_1r_2r_3r_4}\Leftrightarrow r_1r_2r_3r_4\le\left(\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)^4=\frac{a^4}{576}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $r_1=r_2=r_3=r_4=\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Đáp án B.

MEMORIZE

Thể tích của khối tứ diện đều cạnh a là $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

FOR REVIEW

Bất đẳng thức Cauchy áp dụng cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n\ge 2, n\in\mathbb{N})$ là $a_1+a_2+...+a_n\ge n.\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$

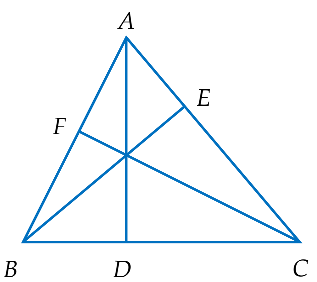
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=...=a_n$.

Câu 11: Cho tam giác nhọn ABC, biết rằng khi quay tam giác này quanh các cạnh AB, BC và CA ta lần lượt được các khối tròn xoay có thể tích tương ứng là $672\pi, \frac{3136\pi}{5}, \frac{9408\pi}{13}$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S=1979$. **B.** $S=364$. **C.** $S=84$. **D.** $S=96$.

Lời giải

Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C đến các cạnh BC, AC và AB. Đặt $AD=h_a, BE=h_b, CF=h_c$ và $BC=a, AC=b, AB=c$.



Khi quay ΔABC xung quanh cạnh AB ta được một khối tròn xoay có thể tích là

$$V_1=\frac{1}{3}\pi h_c^2.AF+\frac{1}{3}\pi h_c^2.BF=\frac{1}{3}\pi h_c^2(AF+BF)=\frac{1}{3}\pi h_c^2.c=\frac{4\pi}{3c}\left(\frac{1}{2}c.h_c\right)^2=\frac{4\pi}{3c}S^2 \text{ (đvtt)}.$$

Khi quay ΔABC xung quanh cạnh BC ta được một khối tròn xoay có thể tích là

$$V_2=\frac{1}{3}\pi h_a^2.BD+\frac{1}{3}\pi h_a^2.CD=\frac{1}{3}\pi h_a^2.(BD+CD)=\frac{1}{3}\pi h_a^2.a=\frac{4\pi}{3a}.\left(\frac{1}{2}ah_a\right)^2=\frac{4\pi}{3a}S^2 \text{ (đvtt)}.$$

Khi quay ΔABC xung quanh cạnh AC ta được một khối tròn xoay có thể tích là

$$V_3=\frac{1}{3}\pi h_b^2.AE+\frac{1}{3}\pi h_b^2.CE=\frac{1}{3}\pi h_b^2.(AE+CE)=\frac{1}{3}\pi h_b^2.b=\frac{4\pi}{3b}.\left(\frac{1}{2}bh_b\right)^2=\frac{4\pi}{3b}S^2 \text{ (đvtt)}.$$

MEMORIZE

Tam giác ABC có độ dài ba cạnh BC, AC, AB lần lượt là a, b, c thì diện tích của nó được tính theo công thức $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ trong đó $p=\frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} V_1=\frac{4\pi}{3c}S^2=672\pi \\ V_2=\frac{4\pi}{3a}S^2=\frac{3136}{5}\pi \\ V_3=\frac{4\pi}{3b}S^2=\frac{9408}{13}\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{S^2}{504} \\ a=\frac{5S^2}{2352} \\ b=\frac{13S^2}{7056} \end{cases} \Rightarrow p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{S^2}{336}$

Có $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{S^2}{336}\left(\frac{S^2}{336}-\frac{5S^2}{2352}\right)\left(\frac{S^2}{336}-\frac{13S^2}{7056}\right)\left(\frac{S^2}{336}-\frac{S^2}{504}\right)}$

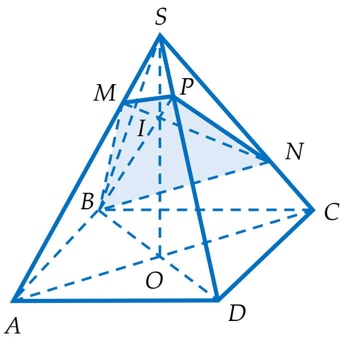
$\Rightarrow S=\frac{S^4}{592704} \Leftrightarrow S=84$ (đvtt).

Đáp án C.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $SI=\frac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I. (α) cắt các cạnh SA,SC,SD lần lượt tại M,N,P. Gọi m,n lần lượt là GTLN, GTNN của $V_{S.MBNP};V_{S.ABCD}$. Tính $\frac{m}{n}$

A. 2. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $\frac{8}{5}$.

Lời giải



+) Đặt $\begin{cases} \frac{SA}{SM}=x \\ \frac{SC}{SN}=y \end{cases},(x,y\ge 1)$.

+) Có $\frac{SB}{SB}+\frac{SD}{SP}=2\frac{SO}{SI}=2.3=6\Rightarrow\frac{SD}{SP}=5$.

+) Có $x+y=2\frac{SO}{SI}=6\Leftrightarrow y=6-x,1\le x\le 5$.

+) $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{x+1+y+5}{4.x.1.y.5}=\frac{12}{20xy}=\frac{3}{5xy}=\frac{3}{5x(6-x)}=\frac{3}{5(6x-x^2)}$.

+) Xét $f(x)=\frac{3}{5(6x-x^2)}$, với $1\le x\le 5$. Có $f'(x)=\frac{-3}{5}.\frac{6-2x}{(6x-x^2)^2}$.

+) $\begin{cases} f'(x)=0 \\ 1<x<5 \end{cases}\Leftrightarrow x=3$.

+) $f(1)=\frac{3}{25}; f(3)=\frac{1}{15}; f(5)=\frac{3}{25}\Rightarrow\begin{cases} m=\frac{3}{25} \\ n=\frac{1}{15} \end{cases}\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{9}{5}$.

STUDY TIP

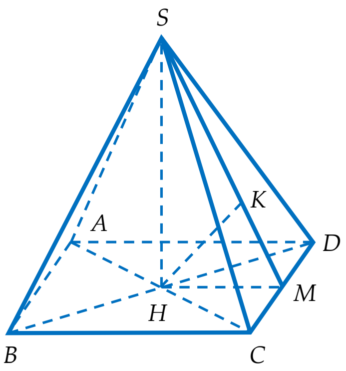
Có thể sử dụng công thức $\frac{V_{S.MBNP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{a+b+c+d}{4abcd}$ với $a=\frac{SA}{SM}$, b, c, d tương tự.

Đáp án C.

Câu 13: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng a, góc hợp bởi đường cao SH của hình chóp và mặt bên bằng α. Tìm α để thể tích $S.ABCD$ là lớn nhất.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

Lời giải



STUDY TIP

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng.

Do hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên H là giao điểm của AC và BD.

Gọi M là trung điểm của CD ta có $CD\perp(SHM)$ nên $(SHM)\perp(SCD)$ mà $(SHM)\cap(SCD)=SM$ nên từ H dựng $HK\perp SM$ tại K thì $HK\perp(SCD)$

Hay SK là hình chiếu của SH lên mặt phẳng (SCD) suy ra $(SH,(SCD))=(SH,SK)=\widehat{HSK}$ do tam giác SHK vuông tại K theo giả thiết ta có $\widehat{HSM}=\alpha$ với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Đặt $SH=h\Rightarrow HC^2=a^2-h^2\Rightarrow HM=\sqrt{\dfrac{a^2-h^2}{2}}$ và $BC=\sqrt{2\left(a^2-h^2\right)}$

Tam giác SHM vuông tại H: $\tan\alpha=\dfrac{HM}{SH}=\dfrac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{2}h}\Leftrightarrow 2h^2\tan^2\alpha=a^2-h^2$

$$\Leftrightarrow h^2\left(1+2\tan^2\alpha\right)=a^2\Rightarrow h=\frac{a}{\sqrt{1+2\tan^2\alpha}}$$

$$BC^2=2\left(a^2-h^2\right)=4h^2\tan^2\alpha=\frac{4a^2\tan^2\alpha}{1+2\tan^2\alpha}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}BC^2.SH=\frac{1}{3}\frac{4a^3\tan^2\alpha}{\sqrt{(1+2\tan^2\alpha)^3}}$$

Đặt $t=1+2\tan^2\alpha$. Với $t\in(1;+\infty)\Rightarrow\tan^2\alpha=\dfrac{t-1}{2}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2a^3}{3}.\dfrac{t-1}{t\sqrt{t}}$ trên $D=(1;+\infty)$

$$f'(t)=\frac{a^3}{3}.\frac{\left[t\sqrt{t}-\frac{3}{2}\sqrt{t}(t-1)\right]}{t^3}=\frac{a^3}{3}.\frac{(3-t)}{2t^2\sqrt{t}}$$

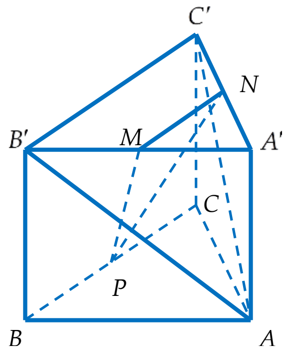
$f'(t)=0\Leftrightarrow t=3$

Bảng biến thiên

t	1		3		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	$\dfrac{4a^3}{9\sqrt{3}}$	↘	

Vậy $\max f(t)=\dfrac{4a^3}{9\sqrt{3}}$ khi $t=3\Rightarrow\tan\alpha=1$ do $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ hay $\alpha=45^\circ$.

Đáp án B.



Câu 14: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=2\sqrt{3}$ và $AA'=2$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B',A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng:

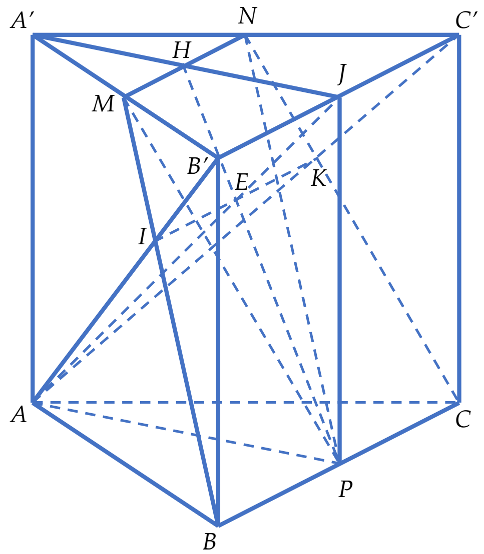
A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{65}$. **C.** $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải

__Cách 1:__ Tư duy tự luận

Xử lý và vẽ lại hình như dưới đây để có thể dễ quan sát hơn.

Ta có $(MNP)\equiv(MNCB)$. Gọi I là giao điểm của BM và AB', K là giao điểm của CN và AC'.



Suy ra $IK=(MNCB)\cap(AB'C')$. Gọi J là trung điểm của $B'C'$, do $\Delta AB'C'$ cân tại A nên $AJ\perp B'C'$, dễ chứng minh $IK//B'C'$ nên $AJ\perp IK$

Gọi H là giao điểm của AJ và MN, suy ra H là trung điểm của MN. Dễ chứng minh được $IK//MN$ và $PH\perp MN$. Suy ra $PH\perp IK$.

Vậy $\left((MNP),(AB'C')\right)=(AJ,PH)$.

Gọi E là giao điểm của AJ và $A'P$, ta tính góc AEP.

Ta có $HJ//AP\Rightarrow\frac{HJ}{AP}=\frac{EH}{EP}=\frac{EJ}{EA}=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}EH=\frac{1}{2}EP\\EJ=\frac{1}{2}EA\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}PE=\frac{2}{3}PH\\AE=\frac{2}{3}AJ\end{cases}$

$A'J=AP=\frac{2\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}=3; A'H=HJ=\frac{1}{2}A'J=\frac{3}{2};$

$AJ=\sqrt{AP^2+PJ^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13};$

$PH=\sqrt{PJ^2+HJ^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$.

Suy ra $PE=\frac{2}{3}PH=\frac{2}{3}.\frac{5}{2}=\frac{5}{3}$; $AE=\frac{2}{3}AJ=\frac{2\sqrt{13}}{3}$.

Áp dụng định lý hàm số cosin vào tam giác AEP ta có:

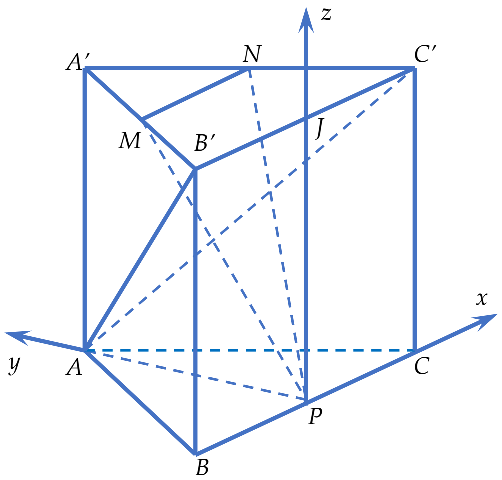
$$\cos AEP=\frac{AE^2+PE^2-AP^2}{2AE.PE}=\frac{\left(\frac{2\sqrt{13}}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2-3^2}{2.\frac{2\sqrt{13}}{3}.\frac{5}{3}}=-\frac{\sqrt{13}}{65}\Rightarrow 90^\circ<AEP<180^\circ.$$

Vậy $\left((MNP),(AB'C')\right)=(AJ,PH)=180^\circ-AEP\Rightarrow\cos\left((MNP),(AB'C')\right)$

$$=\cos(180^\circ-AEP)=-\cos AEP=\frac{\sqrt{13}}{65}.$$

__Cách 2:__ Sử dụng máy tính cầm tay

Gọi J là trung điểm BC.

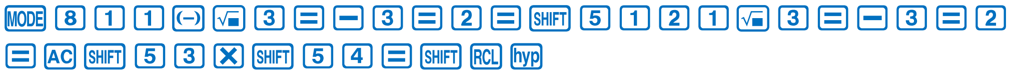


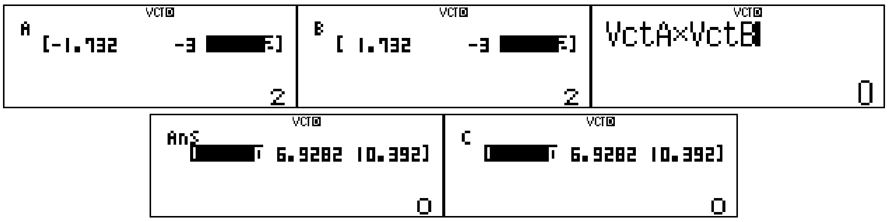
Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz* như hình vẽ bên:

$A(0;3;0), B(-\sqrt{3};0;0), C(\sqrt{3};0;0), A'(0;3;2), B'(-\sqrt{3};0;2),$
$C'(\sqrt{3};0;2), P(0;0;0)$.

M,N là trung điểm $A'B', A'C'$ thì $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};2\right), N\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};2\right)$.

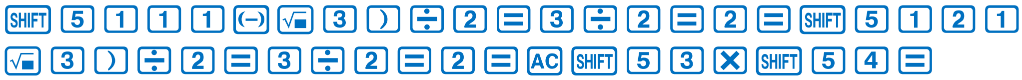
Ta có $\overrightarrow{AB'}=(-\sqrt{3};-3;2), \overrightarrow{AC'}=(\sqrt{3};-3;2), \overrightarrow{PM}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};2\right)$ và $\overrightarrow{PN}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};2\right)$ Đưa máy về phương thức VECTOR, nhập $\text{VctA}=\left[-\sqrt{3};-3;2\right], \text{VctB}=\left[\sqrt{3};-3;2\right]$

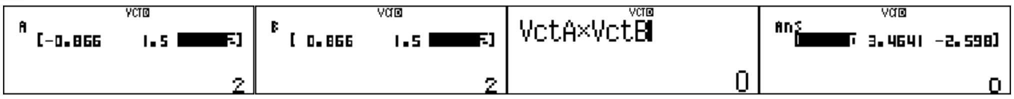




Kết quả trên được gán vào VctC, đó cũng là một VTPT của mặt phẳng $(AB'C')$.

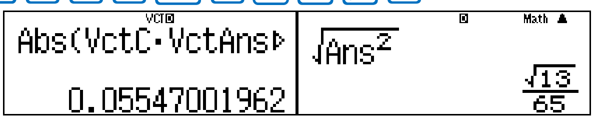
Nhập $\text{VctA}=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},2\right]$ và $\text{VctB}=\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},2\right]$.





Kết quả trên được gán vào VctAns, đó cũng là một VTPT của mặt phẳng (MNP)

Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctC}\bullet\text{VctAns})\div(\text{Abs}(\text{VctC})\times\text{Abs}(\text{VctAns}))$



Vậy $\cos\left((AB'C'),(MNP)\right)=\frac{\sqrt{13}}{65}$.

Đáp án B.

STUDY TIPS

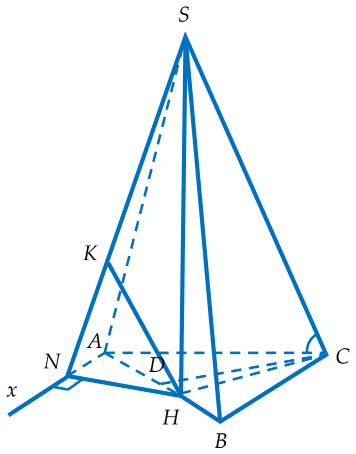
Mặt phẳng (P) có VTPT là $\overrightarrow{n_1}$, mặt phẳng (Q) có VTPT là $\overrightarrow{n_2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ được tính theo công thức:

$$\cos\left((P),(Q)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}.$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA=2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

A. $d=\frac{a\sqrt{42}}{8}$. **B.** $d=\frac{a\sqrt{21}}{12}$. **C.** $d=\frac{a\sqrt{42}}{12}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{462}}{66}$.

Lời giải



Ta có $SCH = 60^0$ và $HC = \frac{a\sqrt{7}}{3}; SH = HC\tan SCH = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Từ A kẻ tia $Ax//CB$ (như hình vẽ). Khi đó $BC//(SAx)$ và do $BA = \frac{3}{2}HA$ nên

$d(BC,SA) = d(BC,(SAx)) = d(B,(SAx)) = \frac{3}{2}d(H,(SAx))$.

Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN.

Do $AN \perp (SHN)$ và $HK \perp SN$ nên $HK \perp (SAN)$. Khi đó $d(BC,SA) = \frac{3}{2}HK$.

Ta có $AH = \frac{2a}{3}; HN = AH\sin NAH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $HK = \frac{HN.HS}{\sqrt{HN^2 + HS^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$. Vậy $d(BC,SA) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$.

Phân tích phương án nhiễu:

Phương án B: Sai do HS giải như trên nhưng tính sai

$$SH = HC\tan SCH = \frac{a\sqrt{7}}{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{9}.$$

Do đó tìm được $d = \frac{a\sqrt{21}}{12}$.

Phương án C: Sai do HS tìm được $HK = \frac{a\sqrt{42}}{12}$ và kết luận ngay $d = \frac{a\sqrt{42}}{12}$.

Phương án D: Sai do HS giải như trên nhưng tính sai

$$HN = AH\sin NAH == \frac{2a}{3}.\frac{1}{2} = \frac{a}{3}.$$

Do đó tìm được $d = \frac{a\sqrt{462}}{66}$.

Đáp án A.

Câu 16: Xét các hình chóp $S.ABCD$ thỏa mãn các điều kiện: đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng a. Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất V_0 khi cosin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\sqrt{\frac{p}{q}}$, trong đó p,q là các số nguyên dương và phân số $\frac{p}{q}$ là tối giản. Tính $T = (p+q).V_0$.

A. $T = 3\sqrt{3}a^3$. **B.** $T = \sqrt{6}a^3$. **C.** $T = 2\sqrt{3}a^3$. **D.** $T = \frac{5\sqrt{3}}{2}a^3$.

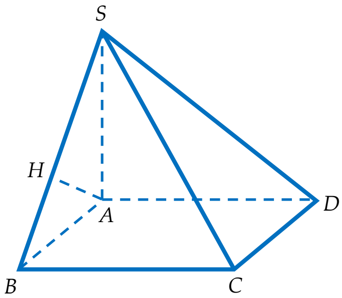
Lời giải

Ta có $BC \perp AB; BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB.

Khi đó $AH \perp (SBC)$ và $d(A,(SBC)) = AH$.

Ta có góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SBA.



Đặt $SBA = \alpha$.

Theo giả thiết ta có $AB = \dfrac{a}{\sin\alpha}; SA = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}a^3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\sin^2\alpha.\sin^2\alpha.2\cos^2\alpha \le \left(\dfrac{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}.$$

Suy ra $\sin^2\alpha\cos\alpha \le \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. Do đó $V \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

Dấu bằng xảy ra khi $\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^3$ khi $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

Suy ra $V_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^3; p = 1, q = 3$

$\Rightarrow T = (p+q)V_0 = 2\sqrt{3}a^3$.

Phân tích phương án nhiễu:

Phương án A: Sai do HS giải đúng như trên nhưng tìm ra được $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ thì lại suy ra $p = 3; q = 3$ nên $T = 3\sqrt{3}a^3$.

Phương án B: Sai do HS đánh giá sai $\sin^2\alpha\cos\alpha \le \dfrac{2\sqrt{6}}{9}$ (quên không chia cho 2 trước khi khai căn).

Do đó dẫn đến $V_0 = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a^3$. Suy ra $T = \sqrt{6}a^3$.

Phương án D: Sai do HS tính sai $V = \dfrac{1}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}a^3$. Do đó đánh giá $V \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

Nhưng dấu bằng xảy ra khi $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ do vậy tính ra được

$$T = (2+3).\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^3 = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}a^3.$$

Đáp án C.

Câu 17: Xét các tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi V_1, V_2 và V_3 lần lượt là thể tích của các khối tròn xoay sinh ra khi quay tam giác OCA quanh trung trực của đoạn thẳng CA, quay tam giác OAB quanh trung trực của đoạn thẳng AB và quay tam giác OBC quanh trung trực của đoạn thẳng BC. Tính V_3 theo R khi biểu thức $V_1 + V_2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $V_3 = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}R^3$.

B. $V_3 = \dfrac{8\pi}{81}R^3$.

C. $V_3 = \dfrac{2\sqrt{2}}{81}\pi R^3$.

D. $V_3 = \dfrac{\sqrt{18 - 6\sqrt{2}}}{9}\pi R^3$.

Lời giải

Đặt $a=BC,b=CA,c=AB$.

Quay tam giác OCA quanh trung trực của đoạn thẳng CA thì khối tròn xoay sinh ra là khối nón có chiều cao $h_1=\sqrt{R^2-\frac{1}{4}b^2}$ và bán kính đáy $r_1=\frac{1}{2}b$ nên ta có $V_1=\frac{1}{3}\pi r_1^2h_1=\frac{1}{24}\pi b^2\sqrt{4R^2-b^2}$.

Tương tự, ta có $V_2=\frac{1}{24}\pi c^2\sqrt{4R^2-c^2};V_3=\frac{1}{24}\pi a^2\sqrt{4R^2-a^2}$.

Bằng việc khảo sát hàm số $f(t)=t^2(4R^2-t)$ trên khoảng $(0;4R^2)$ hoặc dựa vào bất đẳng thức Cô-si

$$\frac{1}{2}b^2.\frac{1}{2}b^2.(4R^2-b^2)\le\left(\frac{\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}b^2+4R^2-b^2}{3}\right)^3=\frac{64}{27}R^6.$$

Ta được $V_1\le\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}R^3;V_2\le\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}R^3$. Suy ra $V_1+V_2\le\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b=c=\frac{2\sqrt{6}}{3}R$.

Vậy V_1+V_2 đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3$ khi $b=c=\frac{2\sqrt{6}}{3}R$.

Khi đó tam giác ABC cân tại A và có $AB=AC=\frac{2\sqrt{6}}{3}R$.

Gọi AH là đường cao của tam giác ABC thì $2R.AH=AB^2$. Từ đó suy ra $AH=\frac{AB^2}{2R}=\frac{4}{3}R$. Do đó $OH=AH-R=\frac{1}{3}R$ và $a=2\sqrt{R^2-OH^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}R$.

Suy ra $V_3=\frac{8\pi}{81}R^3$.

Phân tích phương án nhiễu:

Phương án A: Sai do HS tìm ra được $AB=AC=\frac{2\sqrt{6}}{3}R$ thì nghĩ ngay rằng lúc đó tam giác ABC đều nên tương tự ta cũng có $V_3=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}R^3$. Cần chú ý rằng tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ nên nếu tam giác ABC đều thì $AB=BC=CA=R\sqrt{3}$ chứ không phải là $AB=AC=\frac{2\sqrt{6}}{3}R$.

Phương án C: Sai do HS giải đúng như trên nhưng thay nhầm số liệu trong công thức tính V_3. Cụ thể: $V_3=\frac{1}{24}\pi\left(\frac{2R}{3}\right)^2.\frac{4\sqrt{2}}{3}R=\frac{2\sqrt{2}}{81}\pi R^3$.

Phương án D: Sai do HS giải đúng như trên nhưng khi tính V_3 lại nhầm. Cụ thể:

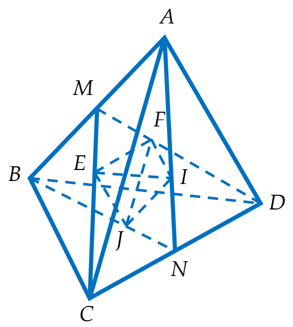
$$V_3=\frac{1}{24}\pi a^2\sqrt{4R^2-a^2}=\frac{1}{24}\pi.\frac{4\sqrt{2}}{3}R^2.\sqrt{4R^2-\frac{4\sqrt{2}}{3}R^2}=\frac{\sqrt{18-6\sqrt{2}}}{9}\pi R^3.$$

Đáp án B.

Câu 18: Cho hình tứ diện đều (H). Gọi (H') là hình tứ diện đều có các đỉnh là tâm các mặt của (H). Tính tỉ số diện tích toàn phần của (H') và (H).

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{1}{27}$.

Lời giải



Đặt (H) là hình tứ diện đều *ABCD*, cạnh bằng *A*. Gọi *E; F; I; J* lần lượt là tâm của các mặt *ABC; ABD; ACD; BCD*.

Kí hiệu như hình vẽ.

Ta có $\frac{ME}{MC}=\frac{MF}{MD}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{EF}{CD}=\frac{1}{3}\Rightarrow EF=\frac{CD}{3}=\frac{a}{3}$.

Vậy tứ diện *EFIJ* là tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{a}{3}$.

Tỉ số thể tích của diện tích toàn phần tứ diện đều *EFIJ* và tứ diện đều *ABCD* là

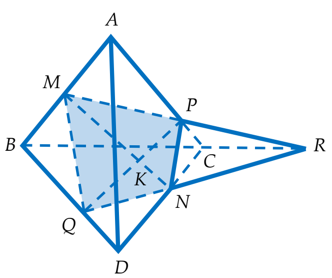
$$\left(\frac{\frac{a}{3}}{a}\right)^2=\frac{1}{9}.$$

Đáp án C.

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ và *M, N* là các điểm thay đổi trên cạnh AB và CD sao cho $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$. Gọi P là một điểm trên cạnh *AC* và *S* là diện tích thiết diện cắt bởi mặt phẳng (MNP) và hình chóp. Tính tỉ số k của diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện *S*.

A. $\frac{2k}{k+1}$. **B.** $\frac{1}{k}$. **C.** $\frac{k}{k+1}$. **D.** $\frac{1}{k+1}$.

Lời giải



Xét trường hợp $\frac{AP}{PC}=k$, lúc này $MP \parallel BC$ nên $BC \parallel (MNP)$.

Ta có: $\begin{cases} N\in(MNP)\cap(BCD) \\ BC \parallel (MNP) \\ BC\subset(BCD) \end{cases} \Rightarrow (BCD)\cap(MNP)=NQ\parallel BC, Q\in BD$.

Thiết diện là tứ giác $MPNQ$.

Xét trường hợp $\frac{AP}{PC}\neq k$

Trong (ABC) gọi $R=BC\cap MP$

Trong (BCD) gọi $Q=NR\cap BD$ thì thiết diện là tứ giác $MPNQ$.

Gọi $K=MN\cap PQ$. Ta có $\frac{S_{MNP}}{S_{MPNQ}}=\frac{PK}{PQ}$.

Do $\frac{AM}{NB}=\frac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales đảo thì AC, NM, BD lần lượt thuộc ba mặt phẳng song song với nhau và đường thẳng PQ cắt ba mặt phẳng này tương ứng tại P,K,Q nên áp dụng định lí Thales ta được $\dfrac{PK}{KQ}=\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{CN}{ND}=k$

$$\Rightarrow \frac{PK}{PQ}=\frac{PK}{PK+KQ}=\frac{\frac{PK}{KQ}}{\frac{PK}{KQ}+1}=\frac{k}{k+1}.$$

Đáp án C.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành . Gọi K là trung điểm SC. Mặt phẳng (P) qua AK cắt các cạnh SB,SD lần lượt tại M,N. Gọi V và V' lần lượt là thể tích các khối chóp $S.ABCD$ và $S.AMKN$. Tỉ số $\dfrac{V'}{V}$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Giả sử $\overrightarrow{SD}=m.\overrightarrow{SM};\ \overrightarrow{SB}=n.\overrightarrow{SN}$.

$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

Do $A; M; N; K$ đồng phẳng nên $m+n=3$.

$$\frac{V_{S.AKM}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{2}.1.\frac{1}{m}=\frac{1}{2m}\Rightarrow\frac{V_{S.AKM}}{V}=\frac{1}{4m}.$$

Tương tự ta có $\dfrac{V_{S.AKN}}{V}=\dfrac{1}{4n}\Rightarrow\dfrac{V'}{V}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{m+n}{mn}=\dfrac{3}{4mn}\ge\dfrac{3}{(m+n)^2}=\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{1}{3}$.

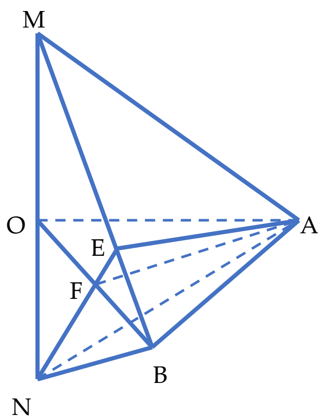
Dấu bằng xảy ra khi $m=n=1,5$

Đáp án C.

Câu 21: Cho tam giác OAB đều cạnh a. Trên đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M sao cho $OM=x$. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên MB và OB. Gọi N là giao điểm của EF và OM. Tìm x để thể tích tứ diện $ABMN$ có giá trị nhỏ nhất

A. $x=a\sqrt{2}$. **B.** $x=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $x=\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$. **D.** $x=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Ta có $AF\perp OB, AF\perp MO\Rightarrow AF\perp(MOB)\Rightarrow AF\perp MB$. Mà $MB\perp AE$ nên $MB\perp(AEF)\Rightarrow MB\perp EF$.

Suy ra $\Delta MOB\backsim\Delta MEN$, mà $\Delta MEN\backsim\Delta FON$ nên $\Delta MOB\backsim\Delta FON$. Khi đó

$$\frac{OB}{OM}=\frac{ON}{OF}\Rightarrow ON=\frac{OB.OF}{OM}=\frac{a.\frac{a}{2}}{x}=\frac{a^2}{2x}.$$

Từ $V_{ABMN}=V_{M.OAB}+V_{N.OAB}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta OAB}.(OM+ON)=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\left(x+\dfrac{a^2}{2x}\right)$

$$\Rightarrow V_{ABMN}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\left(x+\frac{a^2}{2x}\right)\ge\frac{a^2\sqrt{3}}{12}.2\sqrt{x.\frac{a^2}{2x}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}.\sqrt{2}a=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

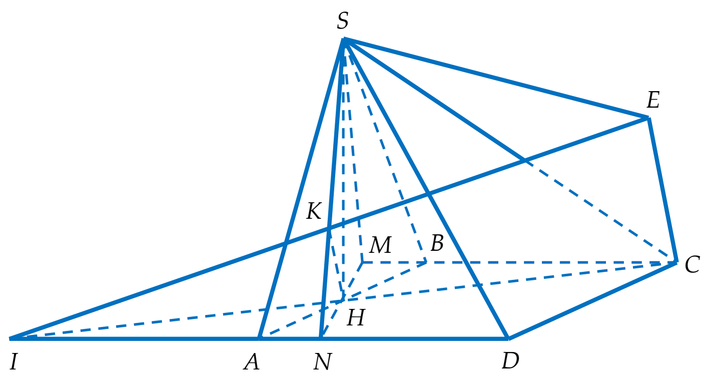
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{a^2}{2x}\Leftrightarrow 2x^2=a^2\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đáp án B.

Câu 22: Cho hình thoi $ABCD$ có $BAD=60°, AB=2a$. Gọi H là trung điểm của AB. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S thay đổi khác H. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho $BM=\dfrac{1}{4}BC$. Tính theo a độ dài của SH để góc giữa SC và (SAD) có số đo lớn nhất

A. $SH=\sqrt[4]{\dfrac{21}{4}}a$. **B.** $SH=\dfrac{\sqrt[4]{21}}{4}a$. **C.** $SH=\sqrt{\dfrac{21}{4}}a$. **D.** $SH=\dfrac{\sqrt{21}}{4}a$.

Lời giải



Gọi φ là góc giữa SC và $(SAD), N$ là giao điểm của HM và AD, K là hình chiếu vuông góc của H trên SN, I là giao điểm của HC với AD. Gọi E là điểm đối xứng với I qua K.

Ta có $MB=\dfrac{1}{4}BC=\dfrac{a}{2}, HB=a, HBM=BAD=60°$

$\Rightarrow HM=\sqrt{HB^2+MB^2-2HB.MB.\cos HBM}$

$\Rightarrow HM=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{4}-2.a.\dfrac{a}{2}.\cos 60°}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\Rightarrow HM^2+MB^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=a^2=HB^2\Rightarrow \Delta HMB$ vuông tại M

$\Rightarrow HM\perp MB$ hay $MN\perp BC$.

Vì $\begin{cases} SH\perp AD\left(\text{do } SH\perp(ABCD)\right)\\ MN\perp AD\left(\text{do } MN\perp BC\right)\end{cases}\Rightarrow AD\perp(SMN)\Rightarrow AD\perp HK$, mà $HK\perp SN$ nên $HK\perp(SAD)$. Lại có HK là đường trung bình của ΔICE nên $HK//CE$. Suy ra $CE\perp(SAD)$ tại E và SE là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SAD).

Vậy $\varphi=\left(SC,(SAD)\right)=(SC,SE)=CSE$.

Đặt $SH=x,(x>0)$. Do ΔSHN vuông tại H có HK là đường cao nên ta có

$\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HN^2}\Rightarrow HK=\dfrac{SH.HN}{\sqrt{SH^2+HN^2}}=\dfrac{\sqrt{3}ax}{\sqrt{4x^2+3a^2}}\Rightarrow CE=2HK=\dfrac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{4x^2+3a^2}}$

Do ΔSHC vuông tại H nên

$$SC=\sqrt{SH^2+HC^2}=\sqrt{SH^2+HM^2+MC^2}=\sqrt{x^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\dfrac{5a}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2+7a^2}$$

ΔSEC vuông tại E nên $\sin\varphi=\sin CSE=\dfrac{EC}{SC}=\dfrac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^2+3a^2)(x^2+7a^2)}}$

$$\Rightarrow \sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^4+21a^4)+31a^2x^2}}\le\dfrac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{4\sqrt{21}a^2x^2+31a^2x^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4\sqrt{21}+31}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $4x^4 = 21a^4 \Leftrightarrow x^4 = \frac{21}{4}a^4 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\frac{21}{4}}a.$

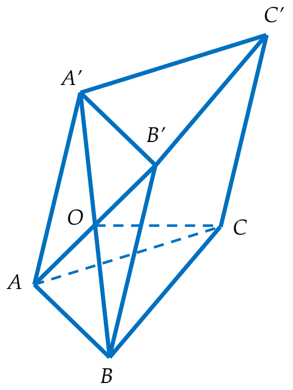
Vậy góc φ đạt lớn nhất khi $\sin\varphi$ đạt lớn nhất, khi đó $SH = \sqrt[4]{\frac{21}{4}}a.$

Đáp án A.

Câu 23: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh cùng bằng a, hình chiếu của C trên mặt phẳng $(ABB'A')$ là tâm của hình bình hành $ABB'A'$. Tính theo a thể tích khối cầu đi qua năm điểm A, B, B', A' và C.

A. $\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\frac{8\pi\sqrt{2}a^3}{81}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{24}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{81}$.

Lời giải



Gọi O là tâm hình bình hành $ABB'A'$. ta có $CO \perp (ABB'A')$.

Vì $CA = CB$ nên $OA = OB$, suy ra hình thoi $ABB'A'$ là hình vuông.

Do đó $OA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Suy ra $OC^2 = AC^2 - AO^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Suy ra tam giác ABC vuông tại C. Từ đây ta suy ra khối cầu đi qua năm điểm $A; B; B'; A'$ và C là khối cầu tâm O bán kính $OA = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi.OA^3 = \frac{\pi\sqrt{2}.a^3}{3}$.

Đáp án A.

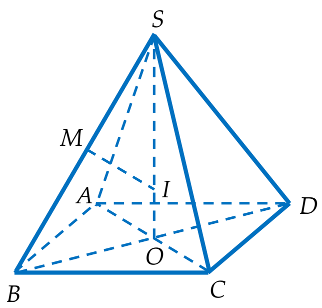
Câu 24: Cho mặt cầu (S) bán kính R cố định. Gọi (H) là hình chóp tứ giác đều có thể tích lớn nhất nội tiếp trong (S). Tìm theo R độ dài cạnh đáy của (H).

A. $\frac{4R}{3}$. **B.** $\frac{2R}{3}$. **C.** $\frac{R}{3}$. **D.** R.

Lời giải

Kí hiệu như hình vẽ. Đặt $AB = BC = CD = DA = a; SO = h$.

Suy ra $SB = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$.



Gọi M là trung điểm của SB.

Trong (SBD) kẻ trung trực của SB cắt SO tại I.

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$. Suy ra $IS = R$.

Hai tam giác vuông SMI và SOB đồng dạng $\Rightarrow \frac{SI}{SB} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow R = \frac{a^2 + 2h^2}{4h}$ với $0 < h < 2R$. Suy ra $a^2 = 2h(2R - h)$.

Thể tích V của khối chóp là:

$$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}2h^2(2R-h) = \frac{8}{3}\frac{h}{2}\frac{h}{2}(2R-h) \le \frac{8}{3}\left(\frac{\frac{h}{2}+\frac{h}{2}+2R-h}{3}\right)^3 = \frac{64R^3}{81}.$$

Vậy GTLN của V bằng $\frac{64R^3}{81}$ đạt được khi $\frac{h}{2} = 2R - h \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3}$.

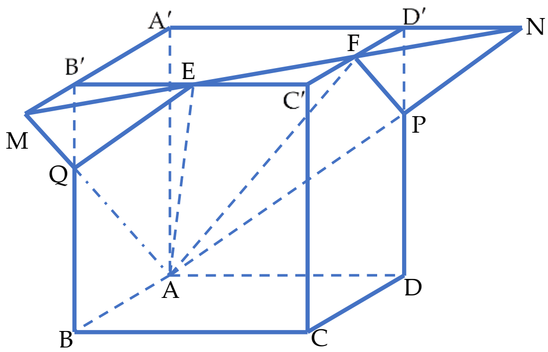
Suy ra $a=\dfrac{4R}{3}$.

Đáp án A.

Câu 25: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) cắt khối lập phương đã cho thành hai phần, gọi V_1 là thể tích khối chứa điểm A' và V_2 là thể tích khối chứa điểm C'. Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2}$ là

A. $\dfrac{25}{47}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{17}{25}$. **D.** $\dfrac{8}{17}$.

Lời giải



Đường thẳng EF cắt $A'D'$ và $A'B'$ tại N, M; AN cắt DD' tại P, AM cắt BB' tại Q. Khi đó thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng (AEF) là ngũ giác $APFEQ$.

Từ giả thiết ta có $V_1=V_{A'B'D'APFEQ}$ và $V_2=V_{ABCDC'PFEQ}$.

Gọi $V=V_{ABCD.A'B'C'D'}; V_3=V_{A.A'MN}; V_4=V_{PFD'N}; V_5=V_{QMB'E}$.

Do tính đối xứng của hình lập phương nên $V_4=V_5$.

Nhận thấy

$$V_3=\frac{1}{6}AA'.A'M.A'N=\frac{1}{6}.a.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2}=\frac{3a^3}{8}\ \text{(đvtt)}.$$

$$V_4=\frac{1}{6}.D'P.D'F.D'N=\frac{1}{6}.\frac{a}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^3}{72}\ \text{(đvtt)}.$$

$$V_1=V_3-2V_4=\frac{3a^3}{8}-2.\frac{a^3}{72}=\frac{25a^3}{72}\ \text{(đvtt)};$$

$$V_2=V-V_1=a^3-\frac{25a^3}{72}=\frac{47a^3}{72}\ \text{(đvtt)}.$$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{25}{47}$.

Đáp án A.

Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC)$, đáy ABC thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{\cot A+\cot B+\cot C}{2}=\frac{BC}{AB.AC}+\frac{CA}{BA.BC}+\frac{AB}{CA.CB}.$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BD và BC. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $A.BCHK$

A. $V=\dfrac{4\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{32\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{8\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

STUDY TIPS

Để xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp, ta tìm giao điểm của hai đường thẳng vuông góc với hai mặt bên (bất kì) tại tâm đường tròn ngoại tiếp hai mặt bên đó.

Lời giải

**** Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp A.BCHK***

Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AC và AB. Trong mặt phẳng (ABC), kẻ các đường thẳng d,d' lần lượt vuông góc với AC và AB tại E,F. Do $DA\perp d, DA\perp d'$ $(\text{do } DA\perp(ABC))$ nên $d\perp(DAC), d'\perp(DAB)$. Gọi I là giao điểm của d,d' thì I chính là tâm của mặt cầu chứa hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác AHC, AKC.

Hay nói cách khác, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCHK$, bán kính $R=IA$ cũng chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC $\left(\text{do } IA=IB=IC\right)$.

*** Một số hệ thức lượng cần nhớ trong tam giác**

Cho ΔABC, gọi AH là đường cao $\left(H\in BC\right)$. R,r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác, p là nửa chu vi. Kí hiệu $BC=a, AC=b, AB=c$, diện tích $S_{\Delta ABC}=S.$

1. Định lý cosin: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A; b^2=a^2+c^2-2ac\cos B; c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$

2. Định lý sin: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$

3. Độ dài trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A,B,C (Kí hiệu lần lượt là m_a,m_b,m_c):

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4};\ m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4};\ m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

4. Các công thức tính diện tích tam giác:

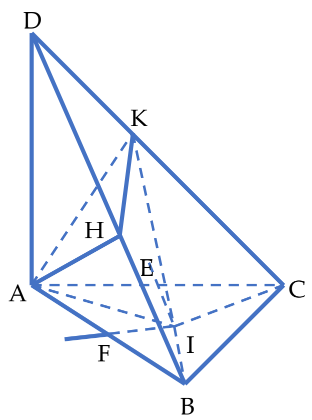
$$\begin{cases} S=\dfrac{1}{2}a.h_a=\dfrac{1}{2}b.h_b=\dfrac{1}{2}c.h_c \\ S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C \\ S=\dfrac{abc}{4R}=pr=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}. \end{cases}$$

5. Định lý tang: $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}};\ \dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\tan\dfrac{B+C}{2}};\ \dfrac{c-a}{c+a}=\dfrac{\tan\dfrac{C-A}{2}}{\tan\dfrac{C+A}{2}}.$

6. Định lý cotang: $\cot A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S};\ \cot B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4S};\ \cot C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}.$

$\longrightarrow \cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$

*** Phân tích dữ kiện đề bài:**



$$\frac{\cot A+\cot B+\cot C}{2}=\frac{BC}{AB.AC}+\frac{CA}{BA.BC}+\frac{AB}{CA.CB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^2+BC^2+CA^2}{8S_{\Delta ABC}}=\frac{BC^2+CA^2+AB^2}{AB.AC.BC}\Leftrightarrow 8S_{\Delta ABC}=AB.AC.BC$$

$$\Leftrightarrow 8.\frac{AB.AC.BC}{4R}=AB.AC.BC\Leftrightarrow R=2=IA$$

Vậy thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCHK$ là:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.2^3=\frac{32\pi}{3}\ (\text{đvtt}).$$

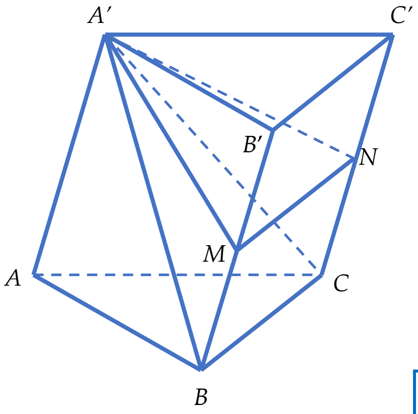
Đáp án B.

Câu 27: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB', CC'. Mặt phẳng $\left(A'MN\right)$ chia khối lăng trụ thành hai phần, V_1 là thể tích của phần đa diện chứa điểm B, V_2 thể tích phần đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{2}$ **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=2$ **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=3$ **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{5}{2}$

Lời giải

Vì M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' nên ta có:



$S_{MNC'B'} = \frac{1}{2}S_{BCC'B'} \Rightarrow V_{A'.MNC'B'} = \frac{1}{2}V_{A'.BCC'B'} = \frac{1}{2}\left(V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'.ABC}\right)$

Lại có:

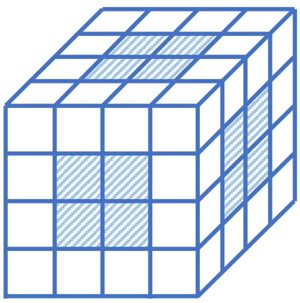
$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{A'.MNC'B'} = \frac{1}{2}\left(V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}\right) = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

Vậy tỉ số $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{A'MNABC}}{V_{A'.MNC'B'}} = \frac{V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}}{\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}} = 2$.

Đáp án B.

Câu 28: Một hình lập phương có cạnh 4 cm. Người ta sơn đỏ mặt ngoài của hình lập phương rồi cắt hình lập phương bằng các mặt phẳng song song với các mặt của hình lập phương thành 64 hình lập phương nhỏ có cạnh 1 cm. Có bao nhiêu hình lập phương có đúng một mặt được sơn đỏ?

A. 8   **B.** 16   **C.** 24   **D.** 48



Lời giải

Mỗi mặt sẽ có 4 phần thuộc hình chỉ được tô một lần tức là mỗi mặt sẽ sinh ra 4 hình lập phương thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta có 6 mặt, từ đó ta có 24 hình thỏa mãn yêu cầu.

Đáp án C.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 4. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC. Thể tích khối chóp $S.ABPN$ là x, thể tích khối tứ diện $CMNP$ là y. Giá trị của x, y thỏa mãn các bất đẳng thức nào dưới đây?

A. $x^2 + 2xy - y^2 > 160$ **B.** $x^2 - 2xy + 2y^2 < 109$

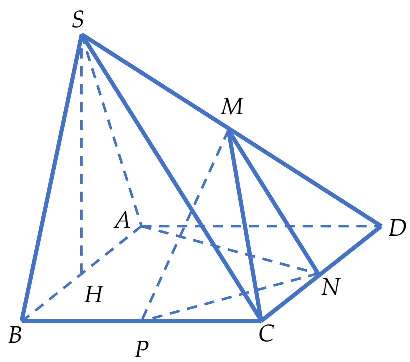
C. $x^2 + xy - y^4 < 145$ **D.** $x^2 - xy + y^4 > 125$

Lời giải

Gọi H là trung điểm của AB. Do ΔSAB đều nên $SH \perp AB$ và $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Từ $\frac{d(S;(ABCD))}{d(M;(ABCD))} = \frac{SD}{MD} = 2 \Rightarrow d(M;ABCD) = \frac{d(S;(ABCD))}{2} = \frac{SH}{2} = \sqrt{3}$.



Ta có $S_{\Delta PCN} = \frac{1}{2}PC.CN = \frac{1}{2}.\frac{BC}{2}.\frac{CD}{2} = \frac{1}{2}.\frac{4}{2}.\frac{4}{2} = 2$ (đvdt).

$\longrightarrow V_{M.PCN} = \frac{1}{3}.d(M;(ABCD)).S_{\Delta PCN} = \frac{1}{3}.\sqrt{3}.2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (đvtt)

$\rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lại có $S_{ABPN} = S_{ABCD} - S_{\Delta PCN} - S_{\Delta ADN} = 4^2 - \frac{1}{2}.2.2 - \frac{1}{2}.4.2 = 10$ (đvdt)

$\longrightarrow V_{S.ABPN} = \frac{1}{3}SH.S_{ABPN} = \frac{1}{3}.2\sqrt{3}.10 = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ (đvtt) $\rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

* *Phương án A:* $x^2+2xy-y^2=\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2+2.\frac{20\sqrt{3}}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{476}{3}<160$.

* *Phương án B:* $x^2-2xy+2y^2=\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2-2.\frac{20\sqrt{3}}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{3}+2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{328}{3}>109$.

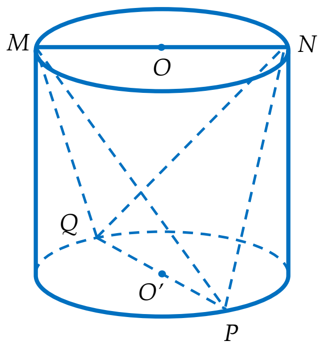
* *Phương án C:* $x^2+xy-y^4=\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{20\sqrt{3}}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^4=\frac{1304}{9}<145$.

* *Phương án D:* $x^2-xy+y^4=\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{20\sqrt{3}}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{3}+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^4=\frac{1096}{9}<125$.

Đáp án C.

Câu 30: Một người thợ có một khối đá hình trụ có bán kính đáy bằng $30cm$. Kẻ hai đường kính MN,PQ của hai đáy sao cho $MN\perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua ba trong bốn điểm M,N,P,Q để được một khối đá có hình tứ diện (như hình vẽ dưới). Biết rằng khối tứ diện $MNPQ$ có thể tích bằng $30dm^3$. Thể tích của lượng đá bị cắt bỏ gần với kết quả nào dưới đây nhất?

A. $111,40\ dm^3$. **B.** $111,39\ dm^3$. **C.** $111,30\ dm^3$. **D.** $111,35\ dm^3$.



Lời giải

Trước hết ta có kết quả: Khối tứ diện $ABCD$ có thể tích được tính theo công thức $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.d(AB;CD).\sin(AB,CD)$.

Áp dụng kết quả này, ta có $V_{MNPQ}=\frac{1}{6}MN.PQ.d(MN;PQ).\sin(MN,PQ)=6.h$, trong đó $MN=PQ=6dm$ và $h=d(MN;PQ)$ là chiều cao của hình trụ.

Từ giả thiết ta có $h=5dm$.

Suy ra thể tích khối trụ là $V=\pi r^2h=45\pi(dm^3)$, với $r=3dm$.

Do đó thể tích của lượng đá bị cắt bỏ là

$$V_0=V-V_{MNPQ}=45\pi-30\approx 111,3716694dm^3.$$

Vậy phương án đúng là B.

Phân tích phương án nhiễu.

Phương án A và C: Sai do HS giải đúng nhưng làm tròn số bị sai hoặc lấy $\pi=3,14$.

Phương án D: Sai do HS chọn $\pi=3,141$.

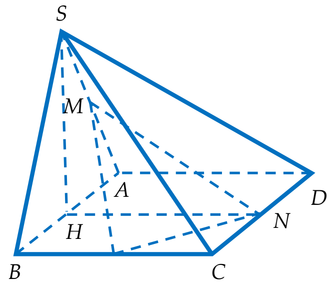
Đáp án B.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=2, AD=2\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,CD,CB. Tính côsin góc tạo bởi hai mặt phẳng (MNP) và (SCD).

A. $\frac{2\sqrt{435}}{145}$. **B.** $\frac{11\sqrt{145}}{145}$. **C.** $\frac{2\sqrt{870}}{145}$. **D.** $\frac{3\sqrt{145}}{145}$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của cạnh AB. Khi đó $SH\perp(ABCD)$.



Ta có $SH \perp AB; AB \perp HN; HN \perp SH$ và $SH = \sqrt{3}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho H trùng với O, B thuộc tia Ox, N thuộc tia Oy và S thuộc tia Oz. Khi đó: $B(1;0;0), A(-1;0;0), N\left(0;2\sqrt{3};0\right)$,

$C\left(1;2\sqrt{3};0\right), D\left(-1;2\sqrt{3};0\right), S\left(0;0;\sqrt{3}\right)$, $M\left(-\frac{1}{2};0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right), P\left(1;\sqrt{3};0\right)$

Mặt phẳng (SCD) nhận $\overrightarrow{n_1} = -\frac{\sqrt{3}}{6}\left[\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{SC}\right] = (0;1;2)$ làm một vectơ pháp tuyến; mặt phẳng (MNP) nhận $\overrightarrow{n_2} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = \left(\sqrt{3};1;5\right)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (MNP) và (SCD) thì

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{11\sqrt{145}}{145}.$$

Phân tích phương án nhiễu.

Phương án A: Sai do HS tính đúng $\overrightarrow{n_1} = (0;1;2); \overrightarrow{n_2} = \left(\sqrt{3};1;5\right)$ nhưng lại tính sai $\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right| = 2\sqrt{3}$. Do đó tính được $\cos\varphi = \frac{2\sqrt{435}}{145}$.

Phương án C: Sai do HS tính đúng $\overrightarrow{n_1} = (0;1;2); \overrightarrow{n_2} = \left(\sqrt{3};1;5\right)$ nhưng lại tính sai

$$\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right| = \left|\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right]\right| = \sqrt{3^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{6}.$$

Do đó tính được $\cos\varphi = \frac{2\sqrt{870}}{145}$.

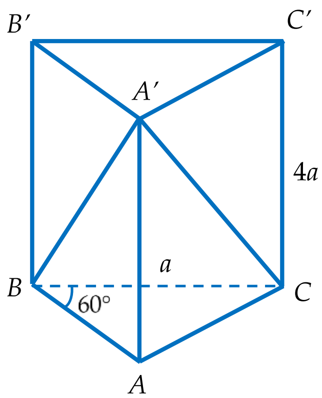
Phương án D: Sai do HS tính đúng $\overrightarrow{n_1} = (0;1;2); \overrightarrow{n_2} = \left(\sqrt{3};1;5\right)$ nhưng lại tính sai $\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right| = 3$. Do đó tính được $\cos\varphi = \frac{3\sqrt{145}}{145}$.

Đáp án B.

Câu 32: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại B. $BC = a$, $\widehat{ABC} = 60°$, $CC' = 4a$. Tính thể tích khối $A'CC'B'B$.

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 3a^3$.

Lời giải



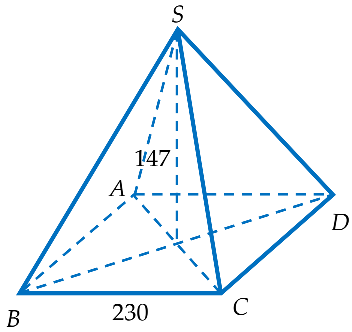
ΔABC cân có $\widehat{ABC} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh a

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.CC' = \frac{1}{2}.a.a.\sin 60°.4a = a^3\sqrt{3}$

$V_{A'ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow V_{A'CC'B'B} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'.ABC} = a^3\sqrt{3} - \frac{a^3\sqrt{3}}{3} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Đáp án A.



Câu 33: Kim tự tháp Kê - ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao là 147 m, cạnh đáy là 230 m. Thể tích của nó là:

A. $2592100\ \text{m}^3$. **B.** $2952100\ \text{m}^3$.
C. $2529100\ \text{m}^3$. **D.** $2591200\ \text{m}^3$.

Lời giải

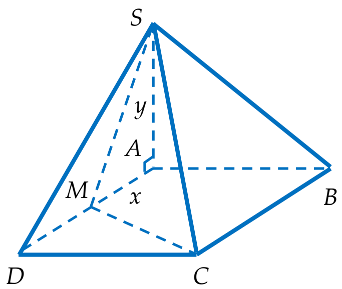
Ta có $V=\frac{1}{3}S_d.h=\frac{1}{3}.230^2.147=2592100\ \text{m}^3$.

Đáp án A.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=y>0$ và vuông góc với đáy. Trên AD lấy điểm M, đặt $AM=x\left(0<x<a\right)$. Nếu $x^2+y^2=a^2$ thì giá trị lớn nhất của thể tích $S.ABCM$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải



$SA=y=\sqrt{a^2-x^2}$; $S_{ABCM}=\frac{BC+AM}{2}.AB=\frac{a+x}{2}.a$

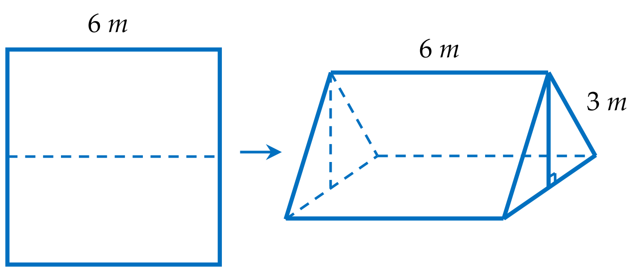
$V_{SABCM}=\frac{1}{3}S_{ABCM}.SA=\frac{a}{6}\left(a+x\right)\sqrt{a^2-x^2}$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\left(a+x\right)\sqrt{a^2-x^2}$ trên $\left(0;a\right)$ ta được:

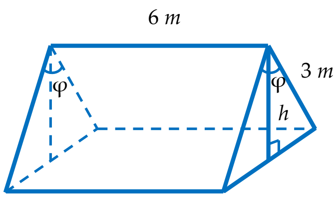
$$\max_{(0;a)}f\left(x\right)=f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}\Rightarrow V_{\max}=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

Đáp án B.

Câu 35: Một nhóm bạn đi du lịch dựng lều bằng cách gập đôi chiếc bạt hình vuông cạnh là 6 m (hình vẽ), sau đó dùng hai chiếc gậy có chiều dài bằng nhau chống theo phương thẳng đứng vào hai mép gấp để không gian trong lều là lớn nhất thì chiều dài của chiếc gậy là:



A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ m. **C.** $\frac{3}{2}$ m. **D.** 1 m.



STUDY TIPS
Cho tam giác cân có góc ở đỉnh φ thay đổi ⇒ diện tích tam giác lớn nhất khi $\varphi=90^\circ$

Lời giải

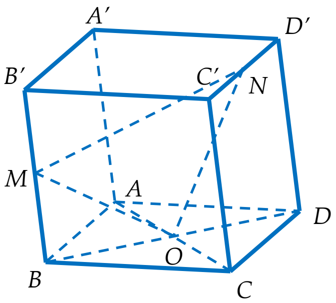
Không gian lều là một khối lăng trụ đứng có chiều cao là 6 m, đáy là tam giác cân có cạnh bên là 3 m và góc ở đỉnh là $\varphi\in\left(0;180^\circ\right)$.

Khi đó thể tích của khối lăng trụ là: $V=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.3.3.\sin\varphi.6=9\sin\varphi\,(\text{m}^3)$

$\Rightarrow V_{\max}\Leftrightarrow\sin\varphi_{\max}\Rightarrow\varphi=90^\circ$

Gọi chiều cao gậy là $h \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (m)

Đáp án B.



Câu 36: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, $O = AC \cap BD$, M, N lần lượt là trung điểm của BB' và $C'D'$. Mặt phẳng (MNO) cắt $B'C'$ tại E thì tỉ số $\frac{B'E}{EC'}$ là:

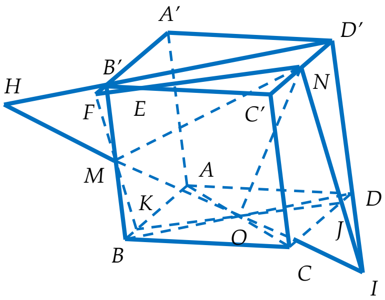
A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

+ Trong mặt phẳng $(BB'D'D)$ gọi $I = MO \cap DD'$, $H = MO \cap B'D'$

Trong mặt phẳng $(DD'C'C)$ gọi $J = NI \cap DC$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $K = JO \cap AB$



Trong mặt phẳng $(AA'B'B)$ gọi $F = MK \cap A'B'$

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ gọi $E = B'C' \cap FN \Rightarrow E = BC \cap (MNO)$

$BO = B'H = OD \Rightarrow \frac{CD}{HD'} = \frac{1}{3}$ $(OD // D'H) \Rightarrow \frac{ID}{ID'} = \frac{OD}{HD'} = \frac{1}{3}$

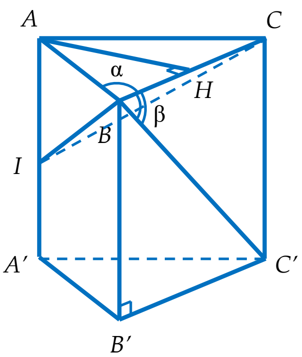
Mà $JD // ND' \Rightarrow \frac{JD}{ND'} = \frac{ID}{ID'} = \frac{1}{3}$

Có $ND' = NC'$; $JD = KB = FB'$ $\Rightarrow \frac{FB'}{CN} = \frac{1}{3} = \frac{B'E}{EC} = \frac{1}{3}$

Đáp án C.

Câu 37: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân đỉnh A, $ABC = \alpha$, BC' tạo với (ABC) góc β. Gọi I là trung điểm AA', biết $BIC = 90°$. Tính $\tan^2\alpha + \tan^2\beta$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 1.



Lời giải

Ta có $\tan\beta = \frac{BB'}{B'C'}$. Gọi H là trung điểm của BC.

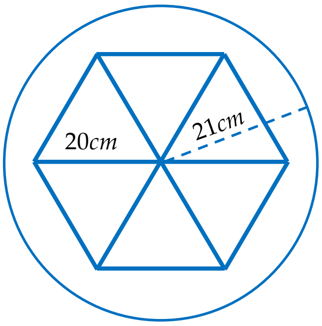
ΔAHB vuông tại H $\Rightarrow \tan\alpha = \frac{AH}{BH} = \frac{2AH}{BC} \Rightarrow \tan^2\alpha + \tan^2\beta = \frac{4(AI^2 + AH^2)}{BC^2}$ (*)

Mà ΔBIC vuông tại I $\Rightarrow IH = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC^2 = 4IH^2$

Thay vào (*) ta có: $\tan^2\alpha + \tan^2\beta = 1$.

Đáp án D.

VI. KHỐI TRÒN XOAY



Câu 1: Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột tròn của một cửa hàng kinh doanh gồm 10 chiếc. Trước khi hoàn thiện, mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lăng trụ lục giác đều có cạnh bằng 20 *cm*; sau khi hoàn thiện (bằng cách trát thêm vữa vào xung quanh), mỗi cột là một khối trụ có đường kính đáy bằng 42 *cm*. Chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là 4 *m*. Biết lượng xi măng cần dùng chiếm 80% lượng vữa và cứ một bao xi măng 50 kg thì tương đương với 64000 cm^3 xi măng. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bao xi măng loại 50 kg để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột?

A. 22 bao. **B.** 17 bao. **C.** 18 bao. **D.** 25 bao.

Lời giải

Trước khi hoàn thiện, mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lăng trụ với đáy là hình lục giác đều có diện tích là $S_1 = 6.\dfrac{20^2\sqrt{3}}{4} = 600\sqrt{3}\left(cm^2\right)$.

Thể tích mỗi khối lăng trụ lúc đầu là: $V_1 = S_1.h = 600\sqrt{3}.400 = 240000\sqrt{3}\left(cm^3\right)$.

Thể tích mỗi khối cột hình trụ sau khi hoàn thiện là:

$$V_2 = \pi.21^2.400 = 176400\pi\left(cm^3\right).$$

Suy ra thể tích lượng vữa trát thêm vào cho cả 10 cây cột là:

$$V = 10.\left(V_2 - V_1\right) = 10.\left(176400\pi - 240000\sqrt{3}\right) \approx 1384847,503\left(cm^3\right).$$

Do lượng xi măng chiếm 80% lượng vữa nên lượng xi măng cần dùng để xây hệ thống cột là: $V_{xm} \approx 1384847,503 \times 80\% \approx 1107878,002\left(cm^3\right)$.

Số bao xi măng loại 50 kg cần dùng là: $\dfrac{V_{xm}}{64000} \approx 17,3106$.

Vậy cần ít nhất 18 bao xi măng để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột.

Đáp án C.

STUDY TIP

Nhiều học sinh chọn đáp án B, tuy nhiên nếu chỉ sử dụng 17 bao xi măng thì vẫn còn thiếu một lượng nhỏ xi măng nữa mới có thể hoàn thiện hệ thống cột. Vì vậy ta nên chọn 18 bao xi măng và khi hoàn thiện xong toàn bộ hệ thống cột sẽ còn thừa lại một lượng xi măng.

Câu 2: Thầy Thư dạy toán ở trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, tỉnh Đồng Tháp muốn xây dựng một hố ga dạng hình hộp chữ nhật có nắp bằng bê tông với thể tích 3m^3, biết tỉ số chiều cao và chiều rộng của hố ga bằng 1,5. Xác định chiều cao của hố ga để khi xây hố tiết kiệm được nguyên liệu nhất?

A. 1,2 (m). **B.** $\sqrt[3]{\dfrac{45}{8}}$ (m). **C.** 2 (m). **D.** $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}$ (m).

Lời giải

Gọi x,y,h lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của hố ga $(x>0,y>0,h>0,\text{m})$

Thể tích hố ga $V = xyh \Leftrightarrow y = \dfrac{V}{xh} = \dfrac{3}{x.\left(\dfrac{3}{2}x\right)} = \dfrac{2}{x^2}$.

Diện tích cần xây dựng hố ga là $S(x) = 2xy + 2xh + 2yh = 3x^2 + \dfrac{10}{x}$.

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ nhỏ nhất

FOR REVIEW

Một hình hộp chữ nhật nếu biết ba kích thước a,b,c thì thể tích của nó được tính theo công thức $V = abc$.

Ta có $S'(x)=6x-\dfrac{10}{x^2}$, $S'(x)=0\Leftrightarrow x_0=\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}$.

Lập bảng xét dấu $S'(x)$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $S'(x)$, thấy $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}$.

Vậy $h=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{45}{8}}$(m) là chiều cao xây hố ga tiết kiệm được nguyên liệu nhất.

Đáp án B.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi B_1,C_1 lần lượt là hình chiếu của A trên SB,SC. Tính bán kính mặt cầu đi qua năm điểm A,B,C,B_1,C_1.

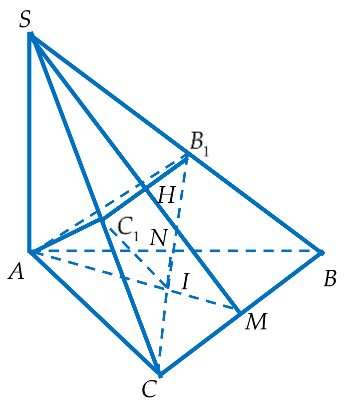
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $\Rightarrow IA=IB=IC$ (1)

Ta có $\Delta SAC=\Delta SAB\Rightarrow AB_1=AC_1$. Từ đây ta chứng minh được $B_1C_1//BC$.

Gọi M là trung điểm của BC $\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow B_1C_1\perp(SAM)$.



Gọi $\{H\}=SM\cap B_1C_1\Rightarrow\dfrac{HB_1}{MB}=\dfrac{HC_1}{MC}$, do $MB=MC$ nên $HB_1=HC_1$

Mặt phẳng (SAM) đi qua trung điểm H của B_1C_1 và $B_1C_1\perp(SAM)$ nên (SAM) là mặt phẳng trung trực của B_1C_1. Do $I\in AM\subset(SAM)$ nên $IB_1=IC_1$ (2).

Gọi N là trung điểm của AB, suy ra $\begin{cases}AB\perp IN\\SA\perp IN\end{cases}\Rightarrow IN\perp(SAB)$.

Tam giác ABB_1 vuông tại B_1 có N là trung điểm của AB nên $NA=NB_1=\dfrac{1}{2}AB$.

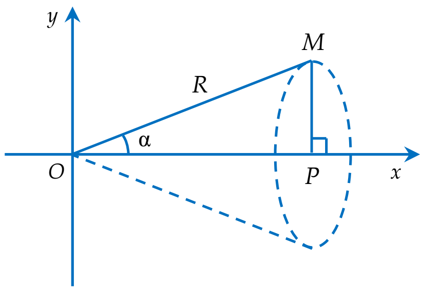
Như vậy ta có các tam giác vuông sau bằng nhau

$\Delta INA=\Delta INB=\Delta INB_1\Rightarrow IA=IB=IB_1$ (3).

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra 5 điểm $A;B;C;B_1;C_1$ cùng nằm trên mặt cầu tâm I, bán kính $R=IA=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ (do ABC là tam giác đều và I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Rightarrow I$ cũng là trọng tâm tam giác ABC).

Đáp án B.

Câu 4: Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên trục Ox, cạnh huyền OM không đổi, $OM=R$ $(R>0)$. Tính theo R giá trị lớn nhất của thể tích khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó xung quanh trục Ox.



A. $\dfrac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}\pi R^3}{9}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}\pi R^3}{27}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}\pi R^3}{9}$.

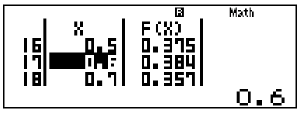
Lời giải

Tam giác OPM vuông tại P suy ra $OP = R.\cos\alpha; MP = R.\sin\alpha$.

Thể tích khối nón được tính bằng công thức

$$V = \frac{1}{3}.OP.\pi MP^2 = \frac{1}{3}.R.\cos\alpha.\pi.R^2.\sin^2\alpha = \frac{\pi R^3}{3}.\cos\alpha.\sin^2\alpha = \frac{\pi.R^3}{3}.\cos\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right).$$

V đạt giá trị lớn nhất khi $-\cos^3\alpha + \cos\alpha$ đạt giá trị lớn nhất.



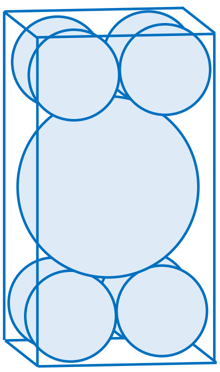
Sử dụng TABLE ta có

MODE 7 (−) ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ▶ + ALPHA) = − 1 = 1 = 0 • 1 =

Ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $0,384 = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. Suy ra $\max V = \dfrac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$.

Đáp án A.

Câu 5: Một hình hộp chữ nhật có kích thước $4\times4\times h$ chứa một khối cầu bán kính bằng 2 và tám khối cầu nhỏ hơn có bán kính bằng 1. Các khối cầu nhỏ đôi một tiếp xúc nhau và tiếp xúc với ba mặt của hình hộp, khối cầu lớn tiếp xúc với cả tám khối cầu nhỏ (xem hình vẽ). Tìm giá trị của h.



A. $2+2\sqrt{7}$. **B.** $3+2\sqrt{5}$. **C.** $4+2\sqrt{7}$. **D.** $5+2\sqrt{5}$.

Lời giải

Bốn tâm của các bi nhỏ cùng với tâm của các bi lớn tạo thành hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 2 và cạnh bên bằng 3. Khi đó chiều cao của hình chóp đều này là $\sqrt{7}$.

Khoảng cách từ tâm của bi lớn đến đáy của hình hộp là $\sqrt{7}+1$.

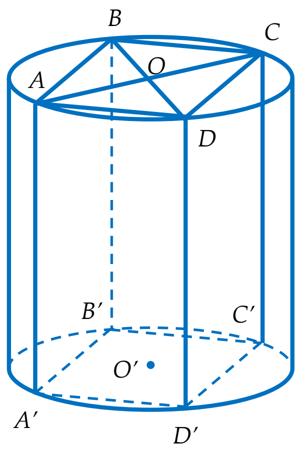
Do đó chiều cao của hình hộp là $2.\left(\sqrt{7}+1\right) = 2+2\sqrt{7}$.

Đáp án A.

Câu 6: Cho khối trụ có bán kính đáy bằng r và chiều cao bằng h. Cắt khối trụ bằng mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$. Mặt phẳng (P) chia khối trụ thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa tâm của đường tròn đáy và V_2 thể tích của phần không chứa tâm của đường tròn đáy, tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3\pi-2}{\pi-2}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi-2}{3\pi+2}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = 3+2\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3\pi+2}{\pi-2}$.

Lời giải



Mặt phẳng (P) cắt đường tròn đáy theo dây cung có độ dài bằng $2\sqrt{r^2-\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2}=r\sqrt{2}.$

Độ dài $r\sqrt{2}$ chính là độ dài cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn bán kính r.

Xét hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông nội tiếp hình trụ. Khi đó khối hộp chữ nhật đó chia khối trụ thành 5 phần gồm một phần là khối hộp và bốn phần bằng nhau ở ngoài khối hộp nhưng ở trong khối trụ.

Thể tích khối trụ là $V=\pi r^2 h.$ Thể tích khối hộp chữ nhật nói trên là

$$V_0=\left(r\sqrt{2}\right)^2 h=2r^2h.$$

Suy ra $V_2=\frac{1}{4}\left(V-V_0\right)=\frac{\pi-2}{4}r^2h$ và $V_1=V-V_2=\frac{3\pi+2}{4}r^2h.$

Do đó $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3\pi+2}{\pi-2}.$

Phân tích phương án nhiễu:

Phương án A: Sai do HS giải đúng như trên nhưng khi tính V_1 lại sai. Cụ thể:

$$V_1=V-V_2=\pi r^2h-\frac{\pi-2}{4}r^2h=\frac{3\pi-2}{4}r^2h.$$

Do đó $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3\pi-2}{\pi-2}.$

Phương án B: Sai do HS xác định sai các phần do mặt phẳng (P) tạo ra nên tính được $V_1=\frac{\pi-2}{4}r^2h$ và $V_2=V-V_1=\frac{3\pi+2}{4}r^2h.$

Phương án C: Sai do HS cho rằng khi chiều cao bằng nhau thì tỷ số thể tích bằng tỷ số đoạn thẳng chắn trên đường kính tương ứng. Cụ thể:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{r+\frac{r\sqrt{2}}{2}}{r-\frac{r\sqrt{2}}{2}}=3+2\sqrt{2}.$$

Đáp án D.

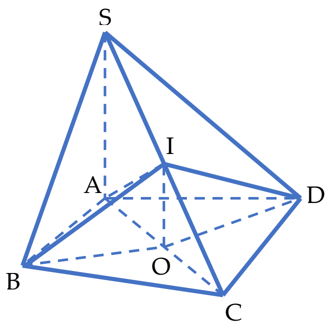
Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABC=ADC=90^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc tạo bởi SC và mặt phẳng đáy bằng $60^\circ, CD=a$ và ΔADC có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $S=16\pi a^2$. **B.** $S=4\pi a^2$. **C.** $S=32\pi a^2$. **D.** $S=8\pi a^2$.

Lời giải

1. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Ta có $CB\perp AB, CB\perp SA, AB\cap SA=A\Rightarrow CB\perp (SAB)\Rightarrow CB\perp SB\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.



Lại có $CD \perp AD, CD \perp SA, AD \cap SA = A \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \Delta SDC$ vuông tại D.

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại A.

Gọi I là trung điểm của SC. Các tam giác: $\Delta SAC, \Delta SBC, \Delta SDC$ lần lượt vuông tại các đỉnh A, B và D nên $IS = IA = IB = IC = ID = \frac{1}{2}SC$. Vậy mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có tâm I, bán kính $R = \frac{1}{2}SC$.

2. Tính diện tích mặt cầu

STUDY TIPS
Diện tích mặt cầu có bán kính R được tính theo công thức: $S = 4\pi R^2$.

Ta có $(SC,(ABCD)) = (SC, AC) = SCA = 60°$.

Do ΔADC vuông tại A nên $S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}AD.CD \Leftrightarrow AD = \frac{2S_{\Delta ADC}}{CD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{a} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$.

Mà $AC = SC.\cos SCA \Rightarrow SC = \frac{2a}{\cos 60°} = 4a$.

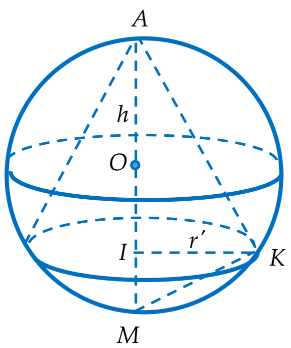
Vậy bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = \frac{SC}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$ và diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi.(2a)^2 = 16\pi a^2$ (đvdt).

Đáp án A.

Câu 8: Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính r. Hình nón có đường tròn đáy (C) và đỉnh I đều thuộc (S) được gọi là hình nón nội tiếp mặt cầu (S). Gọi h là chiều cao của hình nón. Tìm h để thể tích của khối nón là lớn nhất.

A. $\frac{4r}{3}$. **B.** $\frac{r}{3}$. **C.** $\frac{r}{6}$. **D.** $\frac{7r}{6}$.

Lời giải



Kí hiệu như hình vẽ.

Ta thấy $IK = r'$ là bán kính đáy của hình chóp, $AI = h$ là chiều cao của hình chóp.

Tam giác AKM vuông tại K có IK là là đường cao

$\Rightarrow IK^2 = AI.IM \Rightarrow r'^2 = h.(2r - h)$.

Ta có $V_{chop} = \frac{1}{3}.\pi r'^2.h = \frac{1}{3}\pi.h.h.(2r-h) = \frac{4}{3}\pi\frac{h}{2}.\frac{h}{2}(2r-h)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{h}{2}.\frac{h}{2}.(2r-h) \le \frac{\left(\frac{h}{2}+\frac{h}{2}+2r-h\right)^3}{27} = \frac{8r^3}{27}$

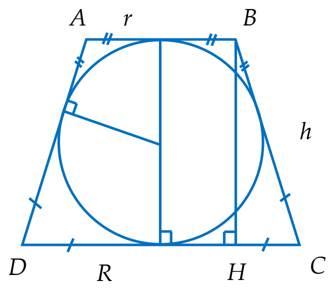
$\Leftrightarrow V_{chop} \le \frac{4}{3}\pi.\frac{8r^3}{27} = \frac{32}{81}.\pi r^3$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{h}{2} = 2r - h \Leftrightarrow h = \frac{4r}{3}$. Vậy ta chọn A.

Đáp án A.

Câu 9: Cho một chiếc cốc có dạng hình nón cụt và một viên bi có đường kính bằng chiều cao của cốc. Đổ đầy nước vào cốc rồi thả viên bi vào, ta thấy lượng nước tràn ra bằng một nửa lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu. Biết viên bi tiếp xúc với đáy cốc và thành cốc. Tìm tỉ số bán kính của miệng cốc và đáy cốc (bỏ qua độ dày của cốc).

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Lời giải

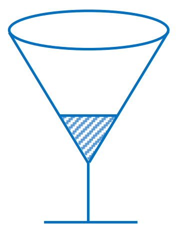
Ta có $V_{bi}=V_{mc}=\frac{4}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3.\pi;\ V_{coc}=V_{nc}=\frac{\pi}{3}.h.\left(R^2+r^2+Rr\right)$.

Mà $V_{nc}=2V_{mc}$ do vậy $\frac{\pi}{3}h\left(R^2+r^2+Rr\right)=2.\frac{4}{3}.\left(\frac{h}{2}\right)^3\pi \Leftrightarrow R^2+r^2+R.r=h^2$

Mà $h^2=(R+r)^2-(R-r)^2$ do vậy $PT\Leftrightarrow\left(\frac{r}{R}\right)^2-3\frac{r}{R}+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{r}{R}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}(tm)\\ \frac{r}{R}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}(l)\end{array}\right.$.

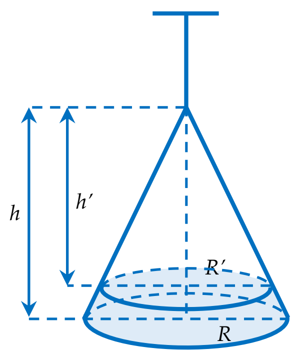
Đáp án C.

Câu 10: Một chiếc ly dạng hình nón (như hình vẽ). Người ta đổ một lượng nước vào ly sao cho chiều cao của lượng nước trong ly bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của ly (tính phần chứa nước). Hỏi nếu bịt kín miệng ly rồi úp ngược ly lại thì tỉ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước lúc đó bằng bao nhiêu?



A. $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{3-\sqrt[3]{25}}{3}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{3-\sqrt[3]{26}}{3}$.

Lời giải



Gọi chiều cao và bán kính đường tròn đáy của chiếc ly lần lượt là h và R

$\Rightarrow$ Thể tích của chiếc ly $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$.

● Khi để cốc theo chiều xuôi thì lượng nước trong cốc là hình nón có chiều cao và bán kính đường tròn đáy lần lượt là $\frac{h}{3}$ và $\frac{R}{3}$

$\Rightarrow$ Thể tích của lượng nước $V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\left(\frac{h}{3}\right)=\frac{V}{27}$

$\Rightarrow$ Thể tích phần không chứa nước $V_2=\frac{26V}{27}$.

● Khi úp ngược ly lại thì phần thể tích nước trong ly không đổi và lúc đó phần không chứa nước là hình nón. Gọi h' và R' lần lượt là chiều cao và bán kính đường tròn đáy của phần hình nón không chứa nước đó. Ta có $\frac{R'}{R}=\frac{h'}{h}$ và phần thể tích hình nón không chứa nước là

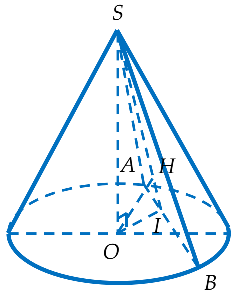
$$V_2=\frac{26}{27}.V\Leftrightarrow\frac{1}{3}\pi R'^2.h'=\frac{26}{27}.\left(\frac{1}{3}\pi R^2.h\right)\Leftrightarrow\frac{R'^2.h'}{R^2.h}=\frac{26}{27}\Leftrightarrow\left(\frac{h'}{h}\right)^3=\frac{26}{27}\Leftrightarrow\frac{h'}{h}=\frac{\sqrt[3]{26}}{3}.$$

Vậy tỷ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước trong trường hợp úp ngược ly là $\frac{h-h'}{h}=1-\frac{h'}{h}=1-\frac{\sqrt[3]{26}}{3}=\frac{3-\sqrt[3]{26}}{3}$.

Đáp án D.

Câu 11: Cho hình nón đỉnh S đáy là hình tròn tâm O, SA, SB là hai đường sinh biết $SO=3$, khoảng cách từ O đến (SAB) là 1 và diện tích ΔSAB là 18. Tính bán kính đáy của hình nón trên.

A. $\dfrac{\sqrt{674}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{530}}{4}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{23}{4}$.



STUDY TIPS

Bạn đọc có thể thử từng kết quả ở các phương án ngược lại để được đáp án chính xác.

Lời giải

+ Gọi I là trung điểm của AB, H là hình chiếu của O lên SI

$\Rightarrow OH\perp(SAB)\Rightarrow OH=1$

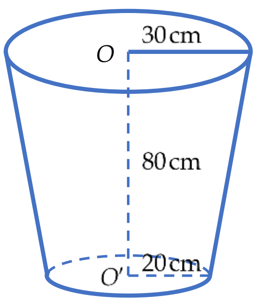
$$+\ \frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OI^2}\Rightarrow\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\Rightarrow OI^2=\frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow SI=\sqrt{OI^2+OS^2}=\sqrt{\frac{9}{8}+9}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$$

$$+\ S_{SAB}=\frac{1}{2}SI.AB\Rightarrow AB=\frac{2.18}{\frac{9\sqrt{2}}{4}}=\frac{16}{\sqrt{2}}\Rightarrow AI=\frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow AO=\sqrt{\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{9}{8}}=\frac{\sqrt{530}}{4}=R$$

Đáp án B.

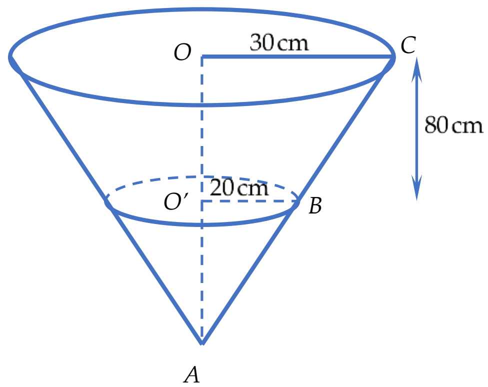


Câu 12: Học sinh A sử dụng 1 xô đựng nước có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ, trong đó đáy xô là hình tròn có bán kính 20 cm, miệng xô là đường tròn bán kính 30 cm, chiều cao xô là 80 cm. Mỗi tháng A dùng hết 10 xô nước. Hỏi A phải trả bao nhiêu tiền nước mỗi tháng, biết giá nước là 20000 đồng/1 m^3 (số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?

A. 35279 đồng **B.** 38905 đồng **C.** 42116 đồng **D.** 31835 đồng

Lời giải

Xét hình nón đỉnh A, đường cao h $(h>80\text{cm})$ và có đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R=30\text{cm}$. Mặt phẳng (α) cách mặt đáy 80cm và cắt hình nón theo giao tuyến là đường tròn tâm O' có bán kính $r=20\text{cm}$. Mặt phẳng (α) chia hình nón thành 2 phần. Phần (I) là phần chứa đỉnh A, phần (II) là phần không chứa đỉnh A (hình vẽ).



STUDY TIPS

Cái xô có dạng hình nón cụt, bán kính hai đáy lần lượt là R, r và chiều cao h nên thể tích cũng được tính nhanh theo công thức:

$V=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+r^2+Rr\right)$.

Ta có $\dfrac{O'B}{OC}=\dfrac{AO'}{AO}\Leftrightarrow\dfrac{AO'}{AO'+O'O}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{AO'}{AO'+80}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow AO'=160(\text{cm})$

Thể tích hình nón là $V=\dfrac{1}{3}AO.\pi R^2=\dfrac{1}{3}(160+80).\pi.30^2=72000\pi\left(\text{cm}^3\right)$

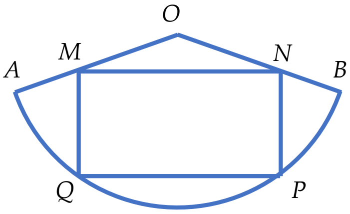
Thể tích phần (I) là $V_{(I)}=\dfrac{1}{3}AO'.\pi r^2=\dfrac{1}{3}160.\pi.20^2=\dfrac{64000}{3}\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Thể tích cái xô cũng là thể tích phần (II), ta có:

$$V_{(II)} = V - V_{(I)} = 72000\pi - \frac{64000}{3}\pi = \frac{152000}{3}\pi\left(cm^3\right) = \frac{19}{375}\pi\left(m^3\right).$$

Vậy số tiền phải trả mỗi tháng là $20000.V_{(II)}.10 = 20000.\frac{19}{375}\pi.10 \approx 31835$ (đồng).

Đáp án D.



Câu 13: Cho tấm tôn hình nón có bán kính đáy là $r = \frac{2}{3}$, độ dài đường sinh $l = 2$. Người ta cắt theo một đường sinh và trải phẳng ra được một hình quạt. Gọi *M*, *N* thứ tự là trung điểm *OA* và *OB*. Hỏi khi cắt hình quạt theo hình chữ nhật *MNPQ* (hình vẽ) và tạo thành hình trụ đường sinh *PN* trùng *MQ* (2 đáy làm riêng) thì được khối trụ có thể tích bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3\pi\left(\sqrt{13}-1\right)}{8}$ **B.** $\frac{3\left(\sqrt{13}-1\right)}{8\pi}$ **C.** $\frac{5\left(\sqrt{13}-1\right)}{12\pi}$ **D.** $\frac{\pi\left(\sqrt{13}-1\right)}{9}$

Lời giải

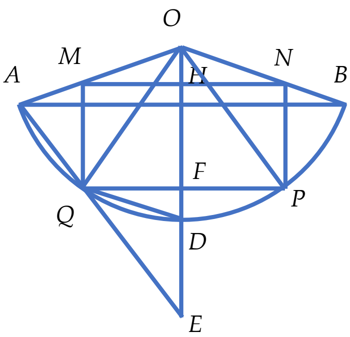
Qua *O* kẻ đường thẳng vuông góc với *MN*, đường thẳng này cắt *MN*, *PQ*, cung *AB*, *AQ* lần lượt tại *H*, *F*, *D*, *E*.

Độ dài cung *AB* là chu vi đường tròn đáy của hình nón nên $l_{AB} = 2\pi.r = 2\pi.\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Lại có $l_{AB} = \alpha.OA \Rightarrow \alpha = \frac{l_{AB}}{OA} = \frac{4\pi}{3} : 2 = \frac{2\pi}{3} = AOB$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác *OAB* có

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos AOB} = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2.2^2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{3}.$$



Do *M*, *N* lần lượt là trung điểm của *OA*, *OB* nên $MN = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3} = PQ$

$$\Rightarrow MH = \frac{1}{2}MN = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do $OD \perp AB$ nên *OD* là tia phân giác của $AOB \Rightarrow AOD = 60°$. Xét tam giác vuông *OMH* có $OH = OM.\cos 60 = 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Xét tam giác *OPQ* có $\cos POQ = \frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2.OP.OQ} = \frac{2^2 + 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}{2.2.2} = \frac{5}{8}$

Mà $\cos POQ = \cos\left(2DOQ\right) = 2\cos^2 DOQ - 1 = \frac{5}{8} \Rightarrow \cos DOQ = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

Xét tam giác *DOQ* có:

$$QD^2 = OQ^2 + OD^2 - 2.OQ.OD.\cos DOQ = 8 - 2\sqrt{13}$$

Xét tam giác vuông *DQF* có $DF^2 = QD^2 - QF^2 = \left(8 - 2\sqrt{13}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} - 2\sqrt{13}$

$$\Rightarrow DF = \frac{\sqrt{29 - 8\sqrt{13}}}{2} = \frac{\sqrt{\left(4-\sqrt{13}\right)^2}}{2} = \frac{4-\sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow HF = OD - OH - DF = 2 - \frac{1}{2} - \frac{4-\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13}-1}{2} = MQ = NP.$$

Gọi R là bán kính đáy của hình trụ tạo bởi hình chữ nhật $MNPQ$. Chu vi đáy của hình trụ chính là độ dài của PQ nên $PQ = 2\pi R \to R = \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$.

Khi đó thể tích khối trụ tạo ra bởi hình chữ nhật $MNPQ$ là:

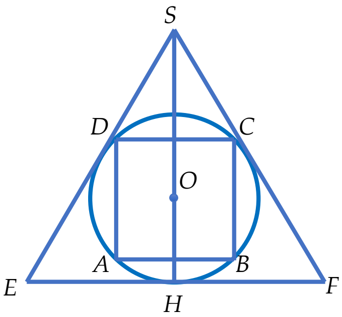
$$V = \pi.R^2.MQ = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)^2.\frac{\sqrt{13}-1}{2} = \frac{3\left(\sqrt{13}-1\right)}{8\pi}.$$

Đáp án B.

Câu 14: Cho hình cầu (S) tâm O, bán kính R. Hình cầu (S) ngoại tiếp một hình trụ tròn xoay (T) có đường cao bằng đường kính đáy và hình cầu (S) lại nội tiếp trong một hình nón tròn xoay (N) có góc ở đỉnh bằng $60°$. Tính tỉ số thể tích của hình trụ (N) và hình nón (T).

A. $\dfrac{V_{(T)}}{V_{(N)}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ **B.** $\dfrac{V_{(T)}}{V_{(N)}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\dfrac{V_{(T)}}{V_{(N)}} = 3\sqrt{2}$ **D.** Đáp án khác

Lời giải



Gọi R là bán kính của hình cầu (S). Bài toán có thể quy về: "Cho đường tròn tâm O, bán kính R ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và nội tiếp ΔSEF đều" (hình vẽ).

Hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên

$AC = BD = 2R = AB\sqrt{2} \Leftrightarrow AB = \sqrt{2}R$

$\Rightarrow$ Bán kính đáy và chiều cao của hình trụ (T) lần lượt là $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{2}R}{2}$ và $h = AB = \sqrt{2}R$.

Thể tích khối trụ là $V_{(T)} = \pi r^2 h = \pi.\left(\dfrac{\sqrt{2}R}{2}\right)^2.\sqrt{2}R = \dfrac{\pi\sqrt{2}R^3}{2}$.

Ta có ΔSEF đều và ngoại tiếp đường tròn (O) nên O là trọng tâm của ΔSEF.

Gọi H là trung điểm của EF thì $SH = 3OH = 3R \Rightarrow HF = SH.\tan 30° = R\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ Bán kính đáy và chiều cao của hình nón (N) lần lượt là $HF = R\sqrt{3}$ và $SH = 3R$. Thể tích khối nón là $V_{(N)} = \dfrac{1}{3}\pi.HF^2.SH = \dfrac{1}{3}\pi.\left(R\sqrt{3}\right)^2.3R = 3\pi R^3$.

Vậy $\dfrac{V_{(T)}}{V_{(N)}} = \dfrac{\dfrac{\pi\sqrt{2}R^3}{2}}{3\pi R^3} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

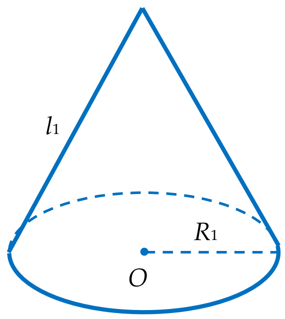
Đáp án A.

Câu 15: Một phễu đựng kem hình nón bằng bạc có thể tích $12\pi\,(\text{cm}^3)$ và chiều cao là 4 cm. Muốn tăng thể tích kem trong phễu hình nón lên 4 lần nhưng chiều cao không thay đổi thì diện tích miếng giấy bạc cần thêm là

A. $\left(12\sqrt{13}-15\right)\pi\,(\text{cm}^2)$. **B.** $12\pi\sqrt{13}\,(\text{cm}^2)$.

C. $\dfrac{12\sqrt{13}}{15}\,(\text{cm}^2)$. **D.** $\left(12\sqrt{13}+15\right)\pi\,(\text{cm}^2)$.

Lời giải



Gọi R_1, h_1 lần lượt là bán kính đường tròn đáy và chiều cao của hình nón lúc đầu; R_2, h_2 lần lượt là bán kính đường tròn đáy và chiều cao của hình nón sau khi tăng thể tích.

$V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2.h_1 \Rightarrow 12\pi = \frac{1}{3}\pi R_1^2.4 \Rightarrow R_1 = 3\text{ cm}$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi R_2^2.h_2$ với $h_1 = h_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = 4 \Leftrightarrow R_2 = 2R_1 = 6$

Diện tích xung quanh của hình nón lúc đầu: $S_{xq1} = \pi.R_1.l_1 = 15\pi$

Diện tích xung quanh hình nón khi tăng thể tích: $S_{xq2} = \pi.R_2.l_2 = 12\pi\sqrt{13}$

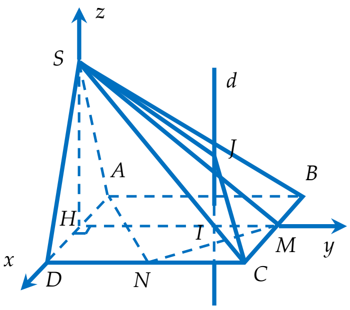
Diện tích phần giấy bạc cần tăng thêm: $S = \left(12\sqrt{13} - 15\right)\pi\,(\text{cm}^2)$.

Đáp án A.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối $SCMN$ là:

A. $\frac{3a}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{93}}{6}a$. **D.** $\frac{31}{12}a$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH = a\sqrt{3}$

Chọ hệ trục tọa độ như hình vẽ $\Rightarrow D(a;0;0)$, $M(0;2a;0)$, $N(a;a;0)$

$\Rightarrow$ Trung điểm MN là $I\left(\frac{a}{2};\frac{3a}{2};0\right)$ có $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right), C(a;2a;0)$

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với $(ABCD)$

$\Rightarrow d$ có vecto chỉ phương $\vec{k} = (0;0;1)$

ΔNCM vuông tại C $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp

$\Rightarrow d$ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN

$\Rightarrow$ Tâm J của mặt cầu ngoại tiếp $SCMN$ thuộc d

Ta có d qua $I\left(\frac{a}{2};\frac{3a}{2};0\right)$ và $\vec{k} = (0;0;1)$ là vecto chỉ phương $\Rightarrow d: \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{3a}{2} \\ z = t \end{cases}$

$\Rightarrow J\left(\frac{a}{2};\frac{3a}{2};t\right)$ mà $JC = JS \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + t^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3} - t\right)^2$

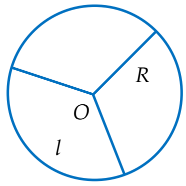
$\Rightarrow t = \frac{5a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$ Bán kính $R = JC = \frac{\sqrt{93}}{6}a$.

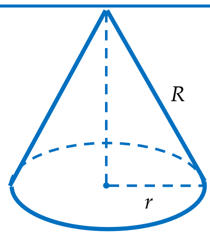
Đáp án C.

NHẬN XÉT

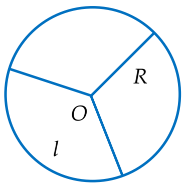
Một số bài toán dựng hình phức tạp thì bạn nên thử với phương pháp tọa độ hóa như bài toán này sẽ "sáng" hơn rất nhiều.

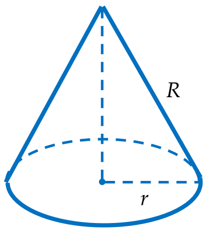
Câu 17: Chia tấm bìa hình tròn bán kính $R = 30\text{ cm}$ thành 3 phần (như hình vẽ). Lấy một phần và uốn thành một hình nón có đường sinh là bán kính của hình tròn trên. Khi đó thể tích của khối nón tạo thành là:





A. $\dfrac{2\pi R^3\sqrt{2}}{81}$. **B.** $\dfrac{\pi R^3}{27}$. **C.** $\dfrac{2\pi R^3\sqrt{2}}{27}$. **D.** $\dfrac{\pi R^3}{81}$.





Lời giải

Gọi hình nón tạo thành có bán kính là r

Chu vi đáy là $2\pi r = \frac{1}{3}.2\pi R$ (bằng $\frac{1}{3}$ chu vi của hình tròn đầu) $\Rightarrow r = \frac{1}{3}R$

Hình nón có đường sinh là $R \Rightarrow$ Chiều cao $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{9}} = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$

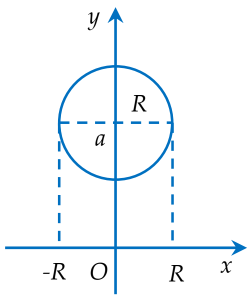
Thể tích khối nón tạo thành là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}.\pi.\frac{R^2}{9}.\frac{2R\sqrt{2}}{3} = \frac{2R^3\pi\sqrt{2}}{81}$

Đáp án A.

Câu 18: Thể tích khối tròn khối tròn xoay gây nên bởi hình tròn $x^2 + (y-a)^2 \le R^2$ $(0 < R < a)$ khi quay quanh trục Ox là:

A. $8\pi^2 aR^2$. **B.** $4\pi^2 aR^2$. **C.** $\pi^2 aR^2$. **D.** $2\pi^2 aR^2$.

Lời giải



Ta có $x^2 + (y-a)^2 = R^2 \Leftrightarrow y = a \pm \sqrt{R^2 - x^2}$

$\Rightarrow$ Nửa trên hình tròn có phương trình là $y = a + \sqrt{R^2 - x^2}$

Nửa dưới hình tròn có phương trình là $y = a - \sqrt{R^2 - x^2}$

$\Rightarrow$ Thể tích của hình xuyến là

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_{-R}^{R}\left(a + \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi\int_{-R}^{R}\left(a - \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = 4\pi a\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}dx$$

Đặt $\begin{cases} x = R\sin t \Rightarrow dx = R\cos t dt \\ x = -R \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2};\ x = R = t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

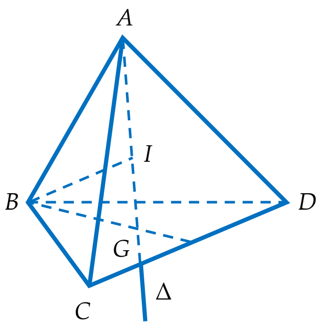
$$\Rightarrow V = 4\pi a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}.R\cos t dt = 4\pi aR^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt = 2\pi^2 aR^2$$

Đáp án D.

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ có đáy BCD là tam giác đều, trọng tâm G. Δ là đường thẳng qua G và vuông góc với (BCD). A chạy trên Δ sao cho mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ có thể tích nhỏ nhất. Khi đó thể tích khối $ABCD$ là:

A. $\dfrac{a^3}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ $\Rightarrow I \in \Delta$ và $IA = IB = R$

$\Rightarrow$ Thể tích mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IB$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow IB \perp \Delta \Leftrightarrow I \equiv G \Rightarrow IA = IB = BG = \frac{a\sqrt{3}}{3} = AG$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{BCD}.AG = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{12}$$

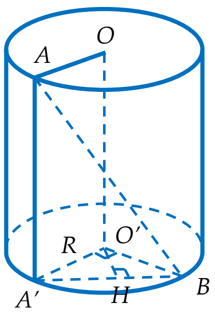
Đáp án A.

Câu 20: Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính R và chiều cao là $R\sqrt{2}$. Trên hai đường tròn (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho góc của hai đường thẳng OA và OB bằng α không đổi. Tính AB theo R và α.

A. $R\sqrt{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **B.** $R\sqrt{2+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

C. $R\sqrt{2+4\sin^2\alpha}$. **D.** $R\sqrt{1+4\sin^2\alpha}$.

Lời giải



Kẻ $O'A' \parallel OA$ thì $A'O'B = \alpha$

Vẽ $O'H \perp A'B$ thì H là trung điểm của $A'B$

$\Delta O'A'H$ vuông tại H nên

$$A'H = O'A'.\sin\frac{\alpha}{2} = R.\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow A'B = 2A'H = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{AA'^2 + A'B^2} = \sqrt{2R^2 + 4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = R\sqrt{2+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Đáp án B.

VII. HÌNH TỌA ĐỘ OXYZ

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4), B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng:

A. 135. **B.** 105. **C.** 108. **D.** 145.

Lời giải

Lấy điểm I thoả mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Ta có $\begin{cases}2(2-x_I)+3(-3-x_I)=0\\2(-2-y_I)+3(3-y_I)=0\\2(4-z_I)+3(-1-z_I)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=-1\\y_I=1\\z_I=1\end{cases}$

Suy ra $I(-1;1;1)$.

Ta có $2MA^2+3MB^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=5MI^2+2IA^2+3IB^2+2\overrightarrow{MI}.\left(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}\right)=5MI^2+2IA^2+3IB^2$ (do $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$).

Với điểm $I(-1;1;1)$ thì IA^2 và IB^2 không đổi. Suy ra $2MA^2+3MB^2$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI\perp(P)$ hay $MI=d(I;(P))=\dfrac{|2(-1)-1+2.1-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3.$

Có $IA^2=27$ và $IB^2=12$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

$$5MI^2+2IA^2+3IB^2=5.3^2+2.27+3.12=135.$$

Bài toán tổng quát: Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$. Tìm điểm M sao cho biểu thức $P=\alpha_1MA_1^2+\alpha_2MA_2^2+...+\alpha_nMA_n^2$

a. Đạt giá trị nhỏ nhất, với $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n>0$.

b. Đạt giá trị lớn nhất, với $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n<0$.

Phương pháp giải:

Gọi I là điểm thỏa mãn $\alpha_1.\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2.\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n.\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$. Điểm I tồn tại và duy nhất nếu $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$. Khi đó $P=\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)^2+\alpha_2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_2}\right)^2+...+\alpha_n\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_n}\right)^2$

$=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n).MI^2+2\left(\alpha_1.\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2.\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n.\overrightarrow{IA_n}\right)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.IA_i^2$

Do $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.IA_i^2$ không đổi nên

a. Nếu $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n>0$ thì P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất.

b. Nếu $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n<0$ thì P lớn nhất $\Leftrightarrow MI$ lớn nhất.

Đáp án A.

DISCOVERY

Ta áp dụng phương pháp giải của bài toán tổng quát để giải các bài toán tương tự ở dưới đây.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$, mặt phẳng $(P): 3x-3y-2z-12=0$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng (P) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A. 3. **B.** 2.

C. –2. **D.** –3.

Đáp án: C.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;-1)$. Biết rằng tồn tại duy nhất điểm $S(a;b;c)$ khác gốc tọa độ để SA, SB, SC đôi một vuông góc. Tính tổng bình phương giá trị của a, b và c.

A. $\dfrac{16}{9}$. **B.** $\dfrac{4}{81}$. **C.** $\dfrac{4}{9}$. **D.** $\dfrac{16}{81}$.

Lời giải

STUDY TIP

1) Trong không gian, cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Khi đó, tồn tại đúng hai điểm S_1 và S_2 sao cho các tứ diện S_1ABC và S_2ABC là các tứ diện vuông tại S_1 và S_2. Đồng thời, S_1 và S_2 đối xứng với nhau qua mặt phẳng (ABC).

2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và mp $(P): ax+by+cz+d=0$. Gọi H và M' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên (P) và điểm đối xứng với M qua (P). Khi đó:

$H(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$,

$M'(x_0+2at;y_0+2bt;z_0+2ct)$

với $t=-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$.

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AS}=(a-1;b;c)$, $\overrightarrow{BS}=(a;b-2;c)$, $\overrightarrow{CS}=(a;b;c+1)$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BS}=0\\ \overrightarrow{BS}.\overrightarrow{CS}=0\\ \overrightarrow{CS}.\overrightarrow{AS}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2+c^2-a-2b=0\\ a^2+b^2+c^2-a+c=0\\ a^2+b^2+c^2-2b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(a;b;c)=(0;0;0)\\ (a;b;c)=\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};-\frac{8}{9}\right)\end{array}\right.$

Do $S\neq O$ nên chọn $(a;b;c)=\left(\dfrac{8}{9};\dfrac{4}{9};-\dfrac{8}{9}\right)$. Suy ra $a^2+b^2+c^2=\dfrac{16}{9}$.

Cách 2: Ta có $(ABC):\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{1}=1 \Leftrightarrow (ABC): 2x+y-2z-2=0$.

$OABC$ là tứ diện vuông tại O. Gọi O' là điểm đối xứng với O qua mặt phẳng (ABC) thì O' chính là điểm S. Khi đó, dễ dàng tính được $S\left(\dfrac{8}{9};\dfrac{4}{9};-\dfrac{8}{9}\right)$.

Do vậy, $a^2+b^2+c^2=\dfrac{16}{9}$.

Đáp án A.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại các điểm D,E,F sao cho $OD=2OE=(m^2-2m+2)OF\neq 0$, trong đó m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để chỉ có đúng ba mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu trên. Tập hợp S có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng?

A. 7. **B.** 3. **C.** 15. **D.** 4.

Lời giải

(P) có phương trình $a(x-2)+b(y+3)+c(z-4)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz=2a-3b+4c$.

Đặt $p=m^2-2m+2$, $p>0$. Do D,E,F khác O nên $abc\neq 0$ và $k=2a-3b+4c\neq 0$.

Do vậy $D\left(\dfrac{k}{a};0;0\right), E\left(0;\dfrac{k}{b};0\right), F\left(0;0;\dfrac{k}{c}\right)$. Lại do $OD=2OE=pOF$ nên

$$\frac{1}{|a|}=\frac{2}{|b|}=\frac{p}{|c|} \text{ hay } \frac{|a|}{1}=\frac{|b|}{2}=\frac{|c|}{p}.$$

Xảy ra các trường hợp sau:

+) a,b,c cùng dấu. Do đó $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{p}$. Suy ra $k=4(p-1)a$.

+) a,b cùng dấu nhưng trái dấu với c. Khi đó $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}=-\dfrac{c}{p}$.

Suy ra $k=-4(p+1)a\neq 0, \forall a\neq 0$ nên trường hợp này tồn tại một mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+) a,c cùng dấu nhưng trái dấu với b. Khi đó $\dfrac{a}{1}=-\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{p}$.

Suy ra $k=4(p+2)a\neq 0, \forall a\neq 0$ nên trường hợp này cũng tồn tại một mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+) b,c cùng dấu nhưng trái dấu với a. Khi đó $-\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{p}$. Suy ra $k=4(2-p)a$.

STUDY TIP

Cho ba số dương p, q, r và điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ với $x_0y_0z_0\neq 0$. Để đếm số mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho $pOA=qOB=rOC\neq 0$ thì ta đếm số giá trị khác 0 trong các giá trị sau: $px_0+qy_0+rz_0$; $px_0+qy_0-rz_0$; $px_0-qy_0+rz_0$; $-px_0+qy_0+rz_0$.

Do $p-1$ và $2-p$ không đồng thời bằng không nên để chỉ có đúng 3 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $\left[\begin{array}{l} p-1=0 \\ 2-p=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-2m+1=0 \\ m^2-2m=0 \end{array}\right. \Rightarrow S=\{0;1;2\}$.

Suy ra số tập hợp con khác rỗng của S là $2^3-1=7$.

Đáp án A.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;4;2), B(-1;2;4)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$. Biết rằng tồn tại điểm $M(a;b;c)\in d$ sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $2a-b+3c$ bằng

A. 10. **B.** $\frac{35}{3}$. **C.** 11. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

STUDY TIP

Cho A là một điểm cố định và M là điểm thay đổi. Khi đó

(1): Nếu M di động trên đường thẳng d cố định thì AM ngắn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của A trên d.

(2): Nếu M di động trên mặt phẳng (P) cố định thì AM ngắn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của A trên (P).

(3): Nếu M di động trên mặt cầu (S) cố định thì AM ngắn nhất hoặc dài nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng IA với mặt cầu (S), trong đó I là tâm của (S).

Cách 1: $M\in d$ nên $M(1-t;t-2;2t)$.

Ta có $MA^2+MB^2=12t^2-48t+76=12(t-2)^2+28\ge 28$.

Dấu bằng xảy ra khi $t=2$ hay $M(-1;0;4)$. Suy ra $2a-b+3c=10$.

Cách 2: Gọi I là trung điểm của đoạn AB thì $I(0;3;3)$ và

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2.$$

Ta có MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI đạt giá trị nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I trên d.

$M\in d$ nên $M(1-t;t-2;2t)$. Ta có $IM\perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0$

$\Leftrightarrow -1(1-t)+1(t-5)+2(2t-3)=0 \Leftrightarrow t=2$. Suy ra $M(-1;0;4)$.

Cách 3: Gọi P là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$ (tương ứng với biểu thức MA^2+MB^2) thì $P(0;3;3)$. Khi đó $MA^2+MB^2=2MP^2+PA^2+PB^2$.

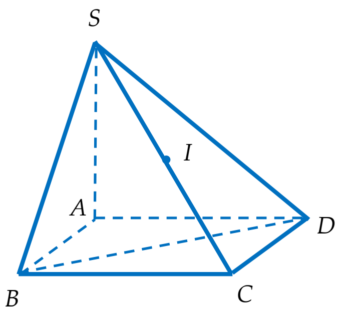
Ta có MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MP đạt giá trị nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của P trên d.

Làm như cách 2, ta cũng tìm được $M(-1;0;4)$.

Đáp án A.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ với $S(1;-1;6), A(1;2;3), B(3;1;2), D(2;3;4)$. Gọi I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp. Tính khoảng cách d từ I đến mặt phẳng (SAD).

A. $d=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $d=\frac{\sqrt{21}}{2}$. **C.** $d=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Lời giải

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AS}(0;-3;3), \overrightarrow{AB}(2;-1;-1), \overrightarrow{AD}(1;1;1)$.

Nhận xét rằng $AS\perp AB, AS\perp AD, AB\perp AD$.

Lấy điểm C trong mặt phẳng (ABD) sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật.

Khi đó, $BC\perp(SAB), CD\perp(SAD)$. Các điểm A,B,D cùng nhìn SC dưới góc 90°

Do vậy, tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là trung điểm $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$ của SC.

Khoảng cách $d=d\left(I;\left(SAD\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(C,\left(SAD\right)\right)=\frac{1}{2}CD=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

STUDY TIP

Khi xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp hoặc lăng trụ ta có thể làm theo hai hướng:
+ Hướng 1: Dùng điều kiện tâm cách đều các đỉnh đi đến giải hệ phương trình.
+ Hướng 2: Dựa vào tính đặc biệt của hình như: Hình chóp đều, hình chóp có các đỉnh cùng nhìn một cạnh dưới một góc vuông.

Cách 2: Gọi $I\left(a;b;c\right)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Ta có

$$\begin{cases} IS=IA \\ IS=IB \\ IS=IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b+1)^2+(c-6)^2=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2 \\ (a-1)^2+(b+1)^2+(c-6)^2=(a-3)^2+(b-1)^2+(c-2)^2 \\ (a-1)^2+(b+1)^2+(c-6)^2=(a-4)^2+(b-2)^2+(c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6b-6c=-24 \\ 4a+4b-8c=-24 \\ 6a+6b-6c=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right).$$

Ta lại có $\overrightarrow{SA}=\left(0;3;-3\right),\overrightarrow{AD}=\left(1;1;1\right)$. Suy ra, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(SAD\right)$ là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AD}\right]=\left(6;-3;-3\right)$. Phương trình mặt phẳng $\left(SAD\right)$ là $2\left(x-1\right)-\left(y-2\right)-\left(z-3\right)=0\Leftrightarrow 2x-y-z+3=0$.

Do đó, $d=d\left(I,\left(SAD\right)\right)=\dfrac{\left|2.\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+3\right|}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Đáp án A.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z-7=0$ và đường thẳng d_m là giao tuyến của hai mặt phẳng $x+\left(1-2m\right)y+4mz-4=0$ và $2x+my-\left(2m+1\right)z-8=0$. Khi m thay đổi các giao điểm của d_m và $\left(S\right)$ nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=\sqrt{\frac{142}{15}}$. **B.** $r=\sqrt{\frac{92}{3}}$. **C.** $r=\sqrt{\frac{23}{3}}$. **D.** $r=\sqrt{\frac{586}{15}}$.

Lời giải

$\left(S\right)$ có tâm $I\left(2;-2;1\right)$, bán kính $R=4$.

Các điểm trên d_m có tọa độ thỏa mãn $x+\left(1-2m\right)y+4mz-4=0$ và $2x+my-\left(2m+1\right)z-8=0$

Do đó $\left[x+(1-2m)y+4mz-4\right]+2\left[2x+my-(2m+1)z-8\right]=0$

$\Leftrightarrow 5x+y-2z-20=0$.

Suy ra d_m luôn nằm trong mp$\left(P\right):5x+y-2z-20=0$ cố định khi m thay đổi.

Mà $d\left(I,\left(P\right)\right)=\frac{14}{\sqrt{30}}<4\Rightarrow\left(P\right)$ cắt $\left(S\right)$ theo giao tuyến là đường tròn tâm H bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2\left(I,\left(P\right)\right)}=\sqrt{16-\frac{196}{225}}=\sqrt{\frac{142}{15}}$.

STUDY TIP

Với hai mặt phẳng
$\left(P\right):a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0;$
$\left(Q\right):a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$
khi đó, giao tuyến của $\left(P\right),\left(Q\right)$ luôn nằm trên mặt phẳng có phương trình:
$\alpha\left(a_1x+b_1y+c_1z+d_1\right)+\beta\left(a_2x+b_2y+c_2z+d_2\right)=0$
với $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Đáp án A.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(3;2;0)$, $C(-1;2;4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA, MB, MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay đổi nằm trên mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{1}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Do đường thẳng MA, MB, MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau nên hình chiếu của M lên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có $\overrightarrow{AB}(2;2;0),\overrightarrow{AC}(-2;2;4)\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow AB\perp AC$. Do đó, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm $H(1;2;2)$ của BC.

Điểm M nằm trên đường thẳng Δ qua H vuông góc với (ABC) nhận $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-1;1)$ là vectơ chỉ phương.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;3)$ bán kính $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$d(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IH},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{2}>R$ nên Δ không cắt (S).

Gọi K là hình chiếu của I trên Δ.

Với mọi $M\in\Delta, N\in(S)$, $MN\ge IM-IN=IM-R\ge IK-R=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Do vậy, MN nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$ khi và chỉ khi $M\equiv K$, N là giao điểm của đoạn IK với mặt cầu (S).

Đáp án A.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(0;0;3), B(0;3;0)$, $C(3;0;0)$, $D(3;3;3)$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M(x;y;z)$ (với x,y,z nguyên) nằm trong tứ diện.

A. 4. **B.** 1. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

Cách 1:

Phương trình các mặt phẳng $(ABC):x+y+z-3=0;(ACD):x-y+z-3=0;$ $(ABD):x-y-z+3=0$; $(BCD):x+y-z-3=0$.

Điểm $M(x;y;z)$ nằm trong tứ diện $\Leftrightarrow \begin{cases} D;M \text{ cung phia doi voi } (ABC) \\ C;M \text{ cung phia doi voi } (ABD) \\ B;M \text{ cung phia doi voi } (ADC) \\ A;M \text{ cung phia doi voi } (BCD) \end{cases}$

STUDY TIP

Cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$

Các điểm $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ không nằm trên (P). Khi đó:

+ A,B nằm cùng phía đối với (P) khi $(ax_A+by_A+cz_A+d).(ax_B+by_B+cz_B+d)>0$

+ A,B nằm khác phía đối với (P) khi $(ax_A+by_A+cz_A+d).(ax_B+by_B+cz_B+d)<0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y+z-3)(3+3+3-3)>0\\(x-y-z+3)(3-0-0+3)>0\\(x-y+z-3)(0-3+0-3)>0\\(x+y-z-3)(0+0-3-3)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z-3>0\ (1)\\x-y-z+3>0\ (2)\\x-y+z-3<0\ (3)\\x+y-z-3<0\ (4)\end{cases}.$$

Cộng vế với vế (1) và (2); (3) và (4) ta được $0<x<3 \Rightarrow x\in\{1;2\}$.

Với $x=1$ thay vào (1) và (2) ta được $2<y+z<4 \Rightarrow y+z=3$.

Với $x=1$ thay vào (3) và (4) ta được $-2<y-z<2 \Rightarrow y-z\in\{-1;0;1\}$.

Từ đó xác định được các cặp $(y;z)$ là $(1;2),(2;1)$.

Do đó, ta được hai điểm là $(1;1;2),(1;2;1)$.

Với $x=2$ thay vào (1) và (2) ta được $1<y+z<5 \Rightarrow y+z\in\{2;3;4\}$.

Với $x=2$ thay vào (3) và (4) ta được $-1<y-z<1 \Rightarrow y-z=0$.

Từ đó xác định được các cặp $(y;z)$ là $(1;1),(2;2)$. Do đó, ta được hai điểm là $(2;1;1),(2;2;2)$.

Vậy có 4 điểm thỏa mãn.

Cách 2: Dễ thấy tứ diện $ABCD$ đều.

Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn bài toán.

Khi đó, $V_{ABCD}=V_{MABC}+V_{MBCD}+V_{MCDA}+V_{MABD}$.

Do các mặt của tứ diện có diện tích bằng nhau nên

$$d(D,(ABC))=d(M,(ABC))+d(M,(BCD))+d(M,(ABD))+d(M,(ADC))$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{d_1}{\sqrt{3}}+\frac{d_2}{\sqrt{3}}+\frac{d_3}{\sqrt{3}}+\frac{d_4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow d_1+d_2+d_3+d_4=6.$$

Mà d_i là các số nguyên dương nên có các bộ (d_1,d_2,d_3,d_4) thỏa mãn là $(1;1;2;2),(1;2;1;2),(1;2;2;1)$, $(2;2;1;1),(2;1;2;1),(2;1;1;2),(1;1;1;3)$, $(1;1;3;1)$, $(1;3;1;1),(3;1;1;1)$.

Kiểm tra các trường hợp chỉ có bốn điểm thỏa mãn.

Đáp án A.

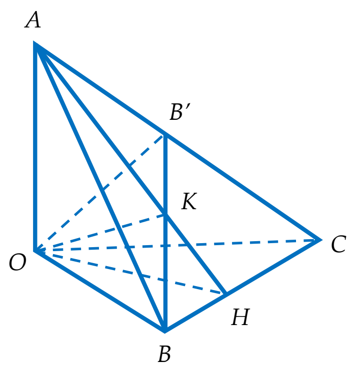
Câu 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(1;1;1)$. Hai điểm B,C di động trên đường thẳng d sao cho mặt phẳng (OAB) vuông góc (OAC). Gọi điểm B' là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AC. Biết quỹ tích các điểm B' là một đường tròn cố định, tính bán kính r của đường tròn này.

A. $r=\frac{\sqrt{60}}{10}$. **B.** $r=\frac{3\sqrt{5}}{10}$. **C.** $r=\frac{\sqrt{70}}{10}$. **D.** $r=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{u_d}=(2;-1;-1)$ là vectơ chỉ phương của d. Mà $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{u_d}=0 \Rightarrow OA\perp d$

Lại có $H(0;1;-1)\in d$ và $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{u_d}=0$ nên H là hình chiếu của O lên đường thẳng d



$\Rightarrow \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OA}=0 \Rightarrow OH\perp OA \Rightarrow OA\perp (OBC) \Rightarrow OB\perp OA \Rightarrow OB\perp (OAC)$

Cách 1: Gọi K là trực tâm ΔABC, suy ra $OK\perp AH$.

Suy ra điểm B' thuộc đường tròn đường kính AK, đường tròn này vẽ trong mặt phẳng (A,d).

Khi đó phương trình đường thẳng AH là $\begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=1+2t \end{cases} \Rightarrow K(1+t;1;1+2t)$

Mà $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AH}=0 \Rightarrow 1+t+2+4t=0 \Rightarrow t=-\dfrac{3}{5} \Rightarrow K\left(\dfrac{2}{5};1;-\dfrac{1}{5}\right) \Rightarrow AK=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $r=\dfrac{AK}{2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Cách 2: Vì B' là hình chiếu của B lên AC nên $AB'\perp OB'$, suy ra B' thuộc mặt cầu (S), đường kính AO.

Phương trình mặt cầu $(S):\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$.

Mà $B'\in (A,d): 2x+5y-z-6=0$ nên B' thuộc đường tròn (C), $(C)=(S)\cap(A,d)$.

Từ đó tính được $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Đáp án B.

FOR REVIEW

Bài toán bên được xây dựng từ ý tưởng của bài toán quỹ tích của hình học không gian:

Bài toán gốc: Cho hai đường thẳng d, d' chéo nhau và vuông góc với nhau. Giả sử A là điểm cố định trên đường thẳng d. Với mỗi điểm B thay đổi trên d' sao cho hai mặt phẳng (d,B) và (d,C) vuông góc với nhau. Gọi B' là chân đường cao kẻ từ B của ΔABC. Chứng minh rằng B' thuộc đường tròn cố định.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1); B(1;2;-1); C(1;2;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z-1=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt phẳng (α), giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2+MB^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ bằng

A. $\dfrac{25}{4}$. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** $\dfrac{13}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải

Chú ý: Để giải quyết bài toán cực trị hình học không gian này ta thường dùng kiến thức liên quan đến tâm tỉ cự:

* Tâm tỉ cự: Trong không gian, cho hệ n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số thực $t_1, t_2, ..., t_n$ $(t_1+t_2+...+t_n=t\neq 0)$. Khi đó tồn tại duy nhất một điểm I trong không gian thỏa mãn $t_1\overrightarrow{IA_1}+t_2\overrightarrow{IA_2}+...+t_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$. Điểm I như thế gọi là tâm tỉ cự của hệ A_i điểm, ứng với có hệ số $t_i\left(i=\overline{1,n}\right)$.

* Bài toán cơ bản: Trong không gian $Oxyz$, cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số thực $t_1, t_2, ..., t_n$ $(t_1+t_2+...+t_n=t\neq 0)$. Cho đường thẳng d (hoặc mặt phẳng (P)). Tìm điểm M thuộc đường thẳng d (hoặc mặt phẳng (P)) sao cho:

a) $\left|t_1.\overrightarrow{MA_1}+t_2.\overrightarrow{MA_2}+...+t_n.\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất.

b) $T=t_1MA_1^2+t_2MA_2^2+...+t_nMA_n^2$ nhỏ nhất khi $t>0$ (lớn nhất khi $t<0$).

Phương pháp giải: Gọi I thỏa mãn $t_1\overrightarrow{IA_1}+t_2\overrightarrow{IA_2}+...+t_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.

Khi đó ta biến đổi: $\left|t_1.\overrightarrow{MA_1}+t_2.\overrightarrow{MA_2}+...+t_n.\overrightarrow{MA_n}\right|=\left|t.\overrightarrow{MI}\right|$

STUDY TIP

Cách tìm tâm tỉ cự I trong các bài toán mở rộng:

Ta có:

$MA^2+MB^2+2.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$

$=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)$

$=4MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)$

$+IA^2+IB^2+2\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$

Khi đó lấy I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

$t_1MA_1^2+t_2MA_2^2+...+t_nMA_n^2=t.MI^2+t_1.IA_1^2+t_2.IA_2^2+...+t_n.IA_n^2$

Do đó điểm M cần tìm chính là hình chiếu của điểm I lên đường thẳng d (hoặc mặt phẳng (P)).

Lấy I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow I\left(\frac{3}{4};\frac{7}{4};\frac{1}{4}\right)$.

$$\Rightarrow MA^2+MB^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=4MI^2+IA^2+IB^2+2\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$$
$$\geq 4d^2\left(I,(\alpha)\right)+IA^2+IB^2+2\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$$

Vậy $MA^2+MB^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}\geq\frac{25}{4}+\frac{27}{8}-\frac{33}{8}=\frac{11}{2}$

Đáp án D.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-3;1)$ và $B(-4;4;1)$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt phẳng $(P):z=-2$. Giá trị nhỏ nhất của $3MA^2+4MB^2$ bằng

A. 245. **B.** 189. **C.** 231. **D.** 267.

Lời giải

Ta tìm điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Cách 1:

$$3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}3(x_I-3)+4(x_I+4)=0\\3(y_I+3)+4(y_I-4)=0\\3(z_I-1)+4(z_I-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x_I=-7\\7y_I=7\\7z_I=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=-1\\y_I=1\\z_I=1\end{cases}\Rightarrow I(-1;1;1).$$

Cách 2:

$$3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow 3\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}\right)+4\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\frac{1}{7}\left(3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right)\Rightarrow I(-1;1;1).$$

Ta có

$$3MA^2+4MB^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=7MI^2+2(3IA+4IB)+3IA^2+4IB^2$$
$$=7MI^2+3IA^2+4IB^2.$$

Vậy $3MA^2+4MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng $(P)\Rightarrow M(-1;1;-2)$.

Khi đó $MA^2=41, MB^2=27\Rightarrow 3MA^2+4MB^2=231$.

Chú ý: Nếu I là điểm thỏa mãn $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ($a+b\neq 0$) thì:

$$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{a+b}\left(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=\frac{1}{a+b}(ax_A+bx_B)\\y_I=\frac{1}{a+b}(ay_A+by_B)\\z_I=\frac{1}{a+b}(az_A+bz_B)\end{cases}.$$

STUDY TIP

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Các bước tìm điểm M trên (P) sao cho aMA^2+bMB^2 nhỏ nhất (với $a+b>0$):

+ Tìm điểm I thỏa mãn $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}=\vec{0}$;

+ Tìm M là hình chiếu của I trên (P).

Chú ý:

Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(a;b;c)$.

+ Hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng $x=x_0$ là $M_1(x_0;b;c)$;

+ Hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng $y=y_0$ là $M_2(a;y_0;c)$;

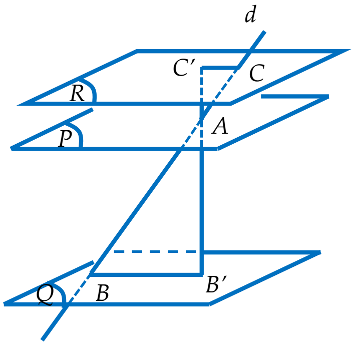
+ Hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng $z=z_0$ là $M_3(a;b;z_0)$;

Đáp án C.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$, $(Q): x-2y+z+8=0$ và $(R): x-2y+z-4=0$. Một đường thẳng d thay đổi cắt ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại A,B,C. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=AB^2+\dfrac{144}{AC}$

A. $72\sqrt[3]{3}$. **B.** 96. **C.** 108. **D.** $72\sqrt[3]{4}$.

Lời giải



Dễ thấy mặt phẳng (P) nằm giữa hai mặt phẳng (Q) và (R); ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ đôi một song song với nhau.

Trên mặt phẳng (P) lấy điểm $M(1;0;0)$.

Gọi B',C' lần lượt là hình chiếu của A trên hai mặt phẳng (Q) và (R). Ta có:

$$AB'=d(A;(Q))=d(M;(Q))=\frac{|1-2.0+0+8|}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

$$AC'=d(A;(R))=d(M;(R))=\frac{|1-2.0+0-4|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Suy ra $AB'=3AC' \Rightarrow \dfrac{AB'}{AC'}=3=\dfrac{BB'}{CC'}$. Đặt $CC'=x\,(x>0) \Rightarrow BB'=3x$.

$$\Rightarrow AB^2=AB'^2+BB'^2=\frac{27}{2}+9x^2 \text{ và } AC=\sqrt{AC'^2+CC'^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+x^2}.$$

Khi đó $T=AB^2+\dfrac{144}{AC}=\dfrac{27}{2}+9x^2+\dfrac{144}{\sqrt{\frac{3}{2}+x^2}}=9\left(\dfrac{3}{2}+x^2\right)+\dfrac{72}{\sqrt{\frac{3}{2}+x^2}}+\dfrac{72}{\sqrt{\frac{3}{2}+x^2}}$

$$\Rightarrow T\ge 3.\sqrt[3]{9\left(\frac{3}{2}+x^2\right).\frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2}+x^2}}.\frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2}+x^2}}}=108.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $9\left(\dfrac{3}{2}+x^2\right)=\dfrac{72}{\sqrt{\frac{3}{2}+x^2}} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

STUDY TIP

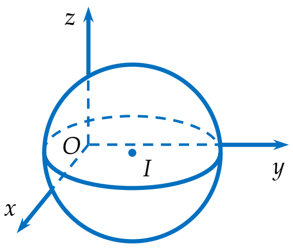
Ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương $9\left(\frac{3}{2}+x^2\right), \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2}+x^2}}, \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2}+x^2}}$ để tìm giá trị nhỏ nhất của T

Đáp án C.

Câu 13: Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật sao cho mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền của nhà đó. Biết rằng trên bề mặt của quả bóng đều tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà mà nó tiếp xúc bằng 1, 2, 4. Tổng độ dài đường kính của hai quả bóng đó bằng

A. 6. **B.** 14. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải



Hai bức tường và nền nhà mà quả bóng tiếp xúc tạo thành một hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Mỗi quả bóng coi như một mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$.

Vì mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà nên chúng tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ $(Oxy),(Oyz)$ và (Oxz).

Tức là $d(I;(Oxy))=d(I;(Oyz))=d(I;(Oxz))=R \Leftrightarrow c=a=b>0$. Suy ra $I(a;a;a)$.

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm nằm trên quả bóng có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà mà nó tiếp xúc bằng 1, 2, 4. Suy ra $M(1;2;4)$.

Điểm M nằm trên quả bóng khi $IM = R = a \Leftrightarrow IM^2 = a^2$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (a-2)^2 + (a-4)^2 = a^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 14a + 21 = 0 \ (*)$

Phương trình $(*)$ có $\Delta' = 7 > 0$ nên có hai nghiệm a_1, a_2 và $a_1 + a_2 = 7$ (theo định lý Vi-ét). Khi đó tổng đường kính của hai quả bóng là $2(a_1 + a_2) = 14$.

STUDY TIP

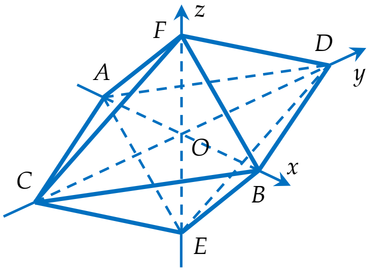
Phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt a_1, a_2 chứng tỏ rằng có hai mặt cầu thỏa mãn bài toán và bán kính của hai mặt cầu này lần lượt bằng a_1 và a_2.

Đáp án B.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết rằng tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ sao cho $|x| + |y| + |z| = 3$ là một hình đa diện. Tính thể tích V của khối đa diện đó

A. $V = 54$. **B.** $V = 72$. **C.** $V = 36$. **D.** $V = 27$.

Lời giải



Ta có $|x| + |y| + |z| = 3 \Leftrightarrow \frac{|x|}{3} + \frac{|y|}{3} + \frac{|z|}{3} = 1$. Suy ra tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ là 8 mặt chắn có phương trình: $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1; \frac{x}{-3} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{-3} = 1; \frac{x}{-3} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{3} = 1;$

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-3} = 1; \frac{x}{3} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{-3} = 1; \frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1; \frac{x}{3} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{3} = 1; \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-3} = 1.$$

Các mặt chắn này cắt các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(-3;0;0), B(3;0;0)$, $C(0;-3;0), D(0;3;0), E(0;0;-3), F(0;0;3)$.

Từ đó, tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $|x| + |y| + |z| = 3$ là các mặt bên của bát diện đều $EACBDF$ (hình vẽ) cạnh bằng $3\sqrt{2}$.

MEMORIZE

Khối bát diện đều cạnh bằng a có thể tích được tính theo công thức $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Thể tích khối bát diện đều là $V = \frac{(3\sqrt{2})^3.\sqrt{2}}{3} = 36$ (đvtt).

Đáp án C.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(2;-3;-2), C(0;-1;1)$. Mặt cầu (S) có bán kính $R = 6$ và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại trọng tâm G của tam giác ABC. Mặt cầu (S) nhận điểm nào dưới đây làm tâm?

A. $M(-3;1;4)$. **B.** $N(-5;3;-4)$. **C.** $P(5;-3;4)$. **D.** $Q(-3;-1;4)$.

Lời giải

Mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-6;3;-6)$.

Tâm I của (S) thuộc đường thẳng Δ đi qua trọng tâm $G(1;-1;0)$ và vuông góc mặt phẳng (ABC), phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$.

Suy ra $I(1+2t;-1-t;2t), IG = 6 \Leftrightarrow t = \pm 2$.

• Với $t = 2 \Rightarrow I(5;-3;4) \equiv P$.

• Với $t = -2 \Rightarrow I(-3;1;-4)$.

STUDY TIP

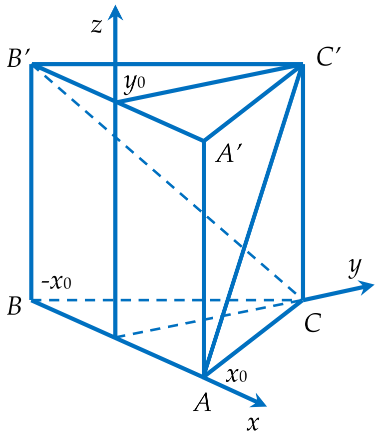
Học sinh có thể giải câu này nhanh hơn bằng cách kiểm tra xem vectơ $\overrightarrow{IG}$ nào cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ của mặt phẳng (ABC) thì ta chọn câu đó.

Đáp án C.

Câu 16: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(x_0;0;0)$, $B(-x_0;0;0), C(0;1;0)$ và $B'(-x_0;0;y_0)$, trong đó x_0, y_0 là các số thực dương và thoả mãn $x_0+y_0=4$. Khi khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ lớn nhất thì mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ có bán kính R bằng bao nhiêu?

A. $R=\sqrt{17}$. **B.** $R=\dfrac{29}{4}$. **C.** $R=17$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của AB, suy ra $O(0;0;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2x_0;0;0), \overrightarrow{OC}=(0;1;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}=0 \Rightarrow AB\perp OC$.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên. Với $A(x_0;0;0), B(-x_0;0;0), C(0;1;0)$, $B'(-x_0;0;4-x_0)$, $A'(x_0;0;4-x_0), C'(0;1;4-x_0)$ do $x_0+y_0=4$ và $0<x_0,y_0<4$.

Có $\overrightarrow{AC'}=(-x_0;1;4-x_0), \overrightarrow{B'C}=(x_0;1;x_0-4) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{B'C}\right]=(2x_0-8;0;-2x_0)$.

$\overrightarrow{AC}=(-x_0;1;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC}=-x_0(2x_0-8)=-2x_0(x_0-4)$.

$$\Rightarrow d(AC';B'C)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{B'C}\right]\right|}=\frac{|2x_0(x_0-4)|}{\sqrt{4(4-x_0)^2+4x_0^2}}=\frac{x_0(4-x_0)}{\sqrt{(4-x_0)^2+x_0^2}},$$

do $x_0\in(0;4)$.

Với $0<x_0<4$, ta có $(4-x_0)^2+x_0^2 \overset{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{(4-x_0)^2x_0^2}=2x_0(4-x_0)$.

Như vậy $d(AC';B'C)=\dfrac{x_0(4-x_0)}{\sqrt{(4-x_0)^2+x_0^2}}\leq\dfrac{x_0(4-x_0)}{2x_0(4-x_0)}=\dfrac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x_0=4-x_0 \Leftrightarrow x_0=2=y_0$.

Khi đó $A(2;0;0), B(-2;0;0), C(0;1;0), B'(-2;0;2)$. Giả sử phương trình mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}2^2+0^2+0^2-2a.2-2b.0-2c.0+d=0\\(-2)^2+0^2+0^2-2a(-2)-2b.0-2c.0+d=0\\0^2+1^2+0^2-2a.0-2b.1-2c.0+d=0\\(-2)^2+0^2+2^2-2a(-2)-2b.0-2c.2+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a-d=4\\4a+d=-4\\2b-d=1\\4a-4c+d=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-\dfrac{3}{2}\\c=1\\d=-4\end{cases}$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I\left(0;-\dfrac{3}{2};1\right)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Đáp án D.

STUDY TIPS

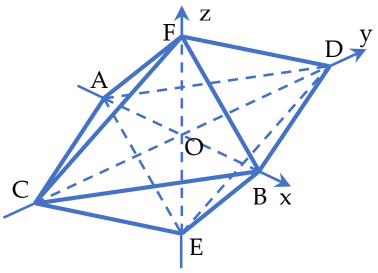
Trong không gian tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và CD được tính theo công thức:

$$d(AB,CD)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}$$

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết rằng tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ sao cho $|x|+|y|+|z|=3$ là một hình đa diện. Tính thể tích V của khối đa diện đó

A. $V=54$. **B.** $V=72$. **C.** $V=36$. **D.** $V=27$.

Lời giải



STUDY TIPS

Khối bát diện đều cạnh bằng a có thể tích được tính theo công thức: $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Ta có $|x|+|y|+|z|=3 \Leftrightarrow \frac{|x|}{3}+\frac{|y|}{3}+\frac{|z|}{3}=1$. Suy ra tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ là 8 mặt chắn có phương trình: $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1; \frac{x}{-3}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{-3}=1; \frac{x}{-3}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{3}=1;$

$\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-3}=1; \frac{x}{3}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{-3}=1; \frac{x}{-3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1; \frac{x}{3}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{3}=1; \frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-3}=1.$

Các mặt chắn này cắt các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(-3;0;0), B(3;0;0), C(0;-3;0), D(0;3;0), E(0;0;-3), F(0;0;3)$.

Từ đó, tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $|x|+|y|+|z|=3$ là các mặt bên của bát diện đều EACBDF (hình vẽ) cạnh bằng $3\sqrt{2}$.

Thể tích khối bát diện đều là $V=\frac{(3\sqrt{2})^3.\sqrt{2}}{3}=36$ (đvtt).

Đáp án C.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với a,b,c khác 0 và $a+2b+2c=6$. Biết rằng khi a,b,c thay đổi thì quỹ tích tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P)

A. $d=1$. **B.** $d=\sqrt{3}$. **C.** $d=2$. **D.** $d=3$.

Lời giải

1. Tìm tọa độ tâm I ngoại tiếp tứ diện $OABC$

Gọi M là trung điểm của AB thì $M\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};0\right)$. Đường thẳng d là trục của ΔABC nên d đi qua M và nhận vectơ chỉ phương $\vec{k}=(0;0;1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{b}{2} \\ z=t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Gọi N là trung điểm của OC thì $N\left(0;0;\frac{c}{2}\right)$.

Mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của OC nên (P) đi qua M và nhận vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(P): z=\frac{c}{2}$.

Khi đó tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P), tức $I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$.

STUDY TIPS

Một số điều cần ghi nhớ:

1. Để xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2...A_n$, ta xác định giao điểm của trục của đa giác đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên bất kì. Trong đó:

– Trục của đa giác đáy là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy, và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy.

– Mặt phẳng trung trực của một cạnh bên là mặt phẳng vuông góc và chứa trung điểm của cạnh bên đó.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxyz, nếu ba điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là $(a;0;0)$, $(0;b;0),(0;0;c)$ thì tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC là $I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$.

STUDY TIPS

Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$, $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$.

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là:

$d(M;(P)) = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

2. Tìm mặt phẳng (P) là quỹ tích của tâm I và tính $d(O;(P))$

Ta có $x_I=\dfrac{a}{2};y_I=\dfrac{b}{2};z_I=\dfrac{c}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=2x_I\\b=2y_I\\c=2z_I\end{cases}$

Mà $a+2b+2c=6$ nên $2x_I+2.2y_I+2.2z_I=6\Leftrightarrow x_I+2y_I+2z_I-3=0.$

Vậy điểm I luôn nằm trên một mặt phẳng có định có phương trình là $(P): x+2y+2z-3=0.$

Vậy $d(O;(P))=\dfrac{|0+2.0+2.0-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1.$

Đáp án A.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a, SB=b, SC=c$. Một mặt phẳng (α) đi qua trọng tâm của ΔABC, cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{1}{SA'^2}+\dfrac{1}{SB'^2}+\dfrac{1}{SC'^2}$.

A. $\dfrac{3}{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $\dfrac{2}{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $\dfrac{9}{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải

Giả sử $\overrightarrow{SA}=x\overrightarrow{SA'};\overrightarrow{SB}=y\overrightarrow{SB'};\overrightarrow{SC}=z\overrightarrow{SC'}$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0.$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=0$

$\Rightarrow\overrightarrow{SG}=\dfrac{\overrightarrow{SA}}{3}+\dfrac{\overrightarrow{SB}}{3}+\dfrac{\overrightarrow{SC}}{3}\Rightarrow\overrightarrow{SG}=\dfrac{x}{3}.\overrightarrow{SA'}+\dfrac{y}{3}.\overrightarrow{SB'}+\dfrac{z}{3}.\overrightarrow{SC'}(1)$

Do $(A'B'C')$ đi qua G nên ba vectơ $\overrightarrow{GA'};\overrightarrow{GB'};\overrightarrow{GC'}$ đồng phẳng

Suy ra tồn tại 3 số $i;m;n,(i^2+m^2+n^2\neq 0)$ sao cho $i.\overrightarrow{GA'}+m.\overrightarrow{GB'}+n.\overrightarrow{GC'}=0$

$(i+m+n).\overrightarrow{GS}+i.\overrightarrow{SA'}+m.\overrightarrow{SB'}+n.\overrightarrow{SC'}=0$

$\Rightarrow\overrightarrow{SG}=\dfrac{i}{i+m+n}.\overrightarrow{SA'}+\dfrac{m}{i+m+n}.\overrightarrow{SB'}+\dfrac{n}{i+m+n}.\overrightarrow{SC'}\ (2)$

Do $SG;SA';SB';SC'$ không đồng phẳng nên từ (1) và (2) ta có

$$\frac{x}{3}=\frac{i}{i+m+n};\frac{y}{3}=\frac{m}{i+m+n};\frac{z}{3}=\frac{n}{i+m+n}$$

$\dfrac{x+y+z}{3}=\dfrac{i+m+n}{i+m+n}=1\Rightarrow x+y+z=3.$

Ta có $\dfrac{1}{SA'^2}+\dfrac{1}{SB'^2}+\dfrac{1}{SC'^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai bộ số thực $\left(\dfrac{x}{a};\dfrac{y}{b};\dfrac{z}{c}\right)$ và $(a;b;c)$ ta có $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)(a^2+b^2+c^2)\geq(x+y+z)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{3}{a^2+b^2+c^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{z}{c^2}$.

Đáp án D.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt *Ox, Oy, Oz* tương ứng tại A, B, C. Tính giá trị của biểu thức $T=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

A. $T=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $T=\frac{1}{3}$. **C.** $T=\frac{1}{9}$. **D.** $T=\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi $\begin{cases}(\alpha)\cap Ox=A(a;0;0)\\(\alpha)\cap Oy=B(0;b;0)\\(\alpha)\cap Oz=C(0;0;c)\end{cases}\Rightarrow(\alpha):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ hay $(\alpha):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I=(0;0;0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.

Do (α) tiếp xúc với (S) nên $d[I,(\alpha)]=R$

$$\Leftrightarrow\frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $T=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{3}$.

Đáp án B.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $A(2;3;0), B(0;-\sqrt{2};0), M\left(\frac{6}{5};-\sqrt{2};2\right)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=2-t\end{cases}$. Điểm C thuộc d sao cho chu vi tam giác *ABC* là nhỏ nhất thì độ dài *CM* bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Do *AB* có độ dài không đổi nên chu vi tam giác *ABC* nhỏ nhất khi tổng $(AC+BC)$ nhỏ nhất.

Do $C\in d\Rightarrow C(t;0;2-t)\Rightarrow\begin{cases}AC=\sqrt{2(t-2)^2+9}\\BC=\sqrt{t^2+(2-t)^2+2}=\sqrt{2(1-t)^2+4}\end{cases}$

Suy ra $AC+BC=\sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}t\right)^2+4}$.

Đặt $\vec{u}=\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2};3\right)$ và $\vec{v}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}t;2\right)$. Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng ta được:

STUDY TIPS
Bất đẳng thức vecto: Cho $\vec{u}=(a;b),\vec{v}=(x;y)$ thì ta có
$$|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|$$
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\vec{u},\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

$$\sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}t\right)^2+4}\ge\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+5^2}=\sqrt{27}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}t-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}t}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{t-2}{1-t}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow t=\dfrac{7}{5}$. Suy ra $C\left(\dfrac{7}{5};0;\dfrac{3}{5}\right)$.

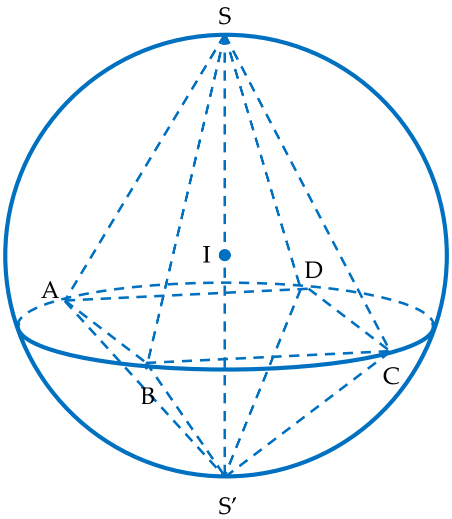
Vậy $CM=\sqrt{\left(\dfrac{7}{5}-\dfrac{6}{5}\right)^2+\left(0+\sqrt{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{5}-2\right)^2}=2.$

Đáp án C.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=9$ ngoại tiếp khối bát diện (H) được ghép từ hai khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ (đều có đáy là tứ giác $ABCD$). Biết rằng đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $ABCD$ là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P):2x+2y-z-8=0$. Tính thể tích khối bát diện (H)

A. $V_{(H)}=\dfrac{34}{9}$. **B.** $V_{(H)}=\dfrac{665}{81}$. **C.** $V_{(H)}=\dfrac{68}{9}$. **D.** $V_{(H)}=\dfrac{1330}{81}$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;2)$, bán kính $R=3$. Nhận xét thấy S,I,S' thẳng hàng và $SS'\perp(ABCD)$. Khi đó $SS'=2R=6$. Ta có:

$$V_{(H)}=V_{S.ABCD}+V_{S'.ABCD}=\frac{1}{3}d\left(S;(ABCD)\right).S_{ABCD}+\frac{1}{3}d\left(S';(ABCD)\right).S_{ABCD}$$

$$=\frac{1}{3}\left[d\left(S;(ABCD)\right)+d\left(S';(ABCD)\right)\right].S_{ABCD}=\frac{1}{3}.SS'.S_{ABCD}=2S_{ABCD}.$$

Từ giả thiết suy ra $ABCD$ là hình vuông, gọi a là cạnh của hình vuông đó.

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r và ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Suy ra $2r=AC=a\sqrt{2}\Rightarrow r=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Từ $\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2+r^2=R^2$

$$\Leftrightarrow r=\sqrt{R^2-\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{3}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a=\frac{2\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}.$$

Vậy $V_{(H)}=2S_{ABCD}=2a^2=2.\left(\dfrac{2\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{68}{9}$.

Đáp án C.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+16=0$. Điểm M, N di động lần lượt trên (S) và (P). Khi đó giá trị nhỏ nhất của đoạn MN là:

A. 8. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

(S) có tâm $I(2;-1;3)$ bán kính $R=\sqrt{4+1+9-5}=3$

STUDY TIPS

Nếu $(S)\cap(C)=\varnothing$

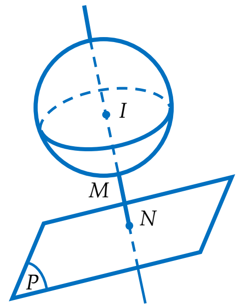
$\Rightarrow MN_{max}=d(I;(P))+R$

$MN_{min}=d(I;(P))-R$

$$d(I;(P))=\frac{|4-2-3+16|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=5>R\Rightarrow(S)\cap(C)=\varnothing$$

$$\Rightarrow MN_{min}=d(I;(P))-R=5-3=2$$

Với $x=2$ ta có $3^{2018}+1=2.S\Rightarrow S=\frac{3^{2018}+1}{2}$.



Đáp án C.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-1;2;-3)$, véc – tơ $\vec{u}(6;-2;-3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-5}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với giá của $\vec{u}$ và cắt d.

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-3}{6}$.

B. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+1}{2}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z-5}{4}$.

D. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-1}{4}$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với giá của $\vec{u}$

$\Rightarrow(P):6(x+1)-2(y-2)-3(z+3)=0\Leftrightarrow(P):6x-2y-3z=-1$.

Gọi $B=(P)\cap d\Rightarrow B(4+3t;1+2t;-2-5t)$

$B\in(P)\Rightarrow 6.(4+3t)-2(1+2t)-3(-2-5t)=-1\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow B(1;-1;3)$.

Đường thẳng Δ đi qua $A(-1;2;-3)$ và $B(1;-1;3)$ có vtcp $\vec{u_\Delta}=\overrightarrow{AB}=(2;-3;6)$.

$$\Rightarrow\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-3}{6}.$$

Đáp án A.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x-y+2z+1=0$ và $(Q):2x+y+z-1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc Ox, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r. Xác định r sao cho chỉ có duy nhất một mặt cầu (S) thỏa mãn điều kiện bài toán

A. $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

B. $r=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

C. $r=\sqrt{3}$.

D. $r=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I(a;0;0)\in Ox$, bán kính $R>0$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là $(x-a)^2+y^2+z^2=R^2$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của I trên (P) và (Q), khi đó:

$$IH=d(I;(P))=\frac{|a+1|}{\sqrt{6}} \text{ và } IK=d(I;(Q))=\frac{|2a-1|}{\sqrt{6}}.$$

STUDY TIPS
Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R. Mặt phẳng (α) cắtmaặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính bằng r thì:
$$R^2 = d^2(I;(\alpha)) + r^2.$$

Do $IH^2+4=R^2$ và $IK^2+r^2=R^2$ nên $\begin{cases} \dfrac{(a+1)^2}{6}+4=R^2 \\ \dfrac{(2a-1)^2}{6}+r^2=R^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{(a+1)^2}{6}+4=\dfrac{(2a-1)^2}{6}+r^2 \Leftrightarrow (a+1)^2+24=(2a-1)^2+6r^2$

$\Leftrightarrow a^2-2a+2r^2-8=0\ (*)$.

Để có duy nhất một mặt cầu (S) thì phương trình $(*)$ phải có một nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'=1-(2r^2-8)=0 \Leftrightarrow r^2=\dfrac{9}{2}$. Do $r>0$ nên $r=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Đáp án A.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(6;-3;4), B(a;b;c)$. Gọi M,N,P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$. Biết rằng M,N,P nằm trên đoạn AB sao cho $AM=MN=NP=PB$. Tính giá trị của tổng $a+b+c$

A. $a+b+c=11$. **B.** $a+b+c=-11$. **C.** $a+b+c=17$. **D.** $a+b+c=-17$.

Lời giải

Các phương trình $(Oxy): z=0; (Oyz): x=0; (Oxz): y=0$. Giả sử $M(x_M;y_M;0)$, $N(x_N;0;z_N), P(0;y_P;z_P)$. Theo giả thiết ta có M là trung điểm của AN nên ta có $M\left(\dfrac{6+x_N}{2};-\dfrac{3}{2};\dfrac{4+z_N}{2}\right)$.

Do $z_M=0$ nên $\dfrac{4+z_N}{2}=0 \Leftrightarrow z_N=-4 \Rightarrow M\left(x_M;-\dfrac{3}{2};0\right)$ và $N(x_N;0;-4)$.

Lại có N là trung điểm của MP nên $N\left(\dfrac{x_M}{2};\dfrac{2y_P-3}{4};\dfrac{z_P}{2}\right)$.

Mà $\begin{cases} y_N=0 \\ z_N=-4 \end{cases}$ nên $\begin{cases} \dfrac{2y_P-3}{4}=0 \\ \dfrac{z_P}{2}=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_P=\dfrac{3}{2} \\ z_P=-8 \end{cases}$ Khi đó $P\left(0;\dfrac{3}{2};-8\right)$.

Từ $\begin{cases} x_M=\dfrac{6+x_N}{2} \\ x_N=\dfrac{x_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_M-x_N=6 \\ x_M-2x_N=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=4 \\ x_N=2 \end{cases}$. Vậy $M\left(4;-\dfrac{3}{2};0\right), N(2;0;-4)$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B-6=2(2-6) \\ y_B+3=2(0+3) \\ z_B-4=2(-4-4) \end{cases} \Rightarrow B(-2;3;-12) \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \\ c=-12 \end{cases}$.

Vậy $a+b+c=-2+3-12=-11$.

Đáp án B.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): 2x-y-z-2=0$, $(Q): x-2y+z+2=0$, $(R): x+y-2z+2=0$, $(T): x+y+z=0$. Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc (T) và tiếp xúc với $(P),(Q),(R)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)\in(T): a+b+c=0$.

Theo bài ra: $d(I;(P))=d(I;(Q))=d(I;(R))$

$$\Leftrightarrow \frac{|2a-b-c-2|}{\sqrt{6}}=\frac{|a-2b+c+2|}{\sqrt{6}}=\frac{|a+b-2c+2|}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3a-2|=|3b-2| \\ |3a-2|=|3c-2| \\ a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ 3a+3b=4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a=c \\ 3a+3c=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

TH1: $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a=b \\ a=c \end{cases} \Rightarrow I(0;0;0)$

Tương tự cho các trường hợp còn lại.

Đáp án D.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ và $C(0;0;1)$. Hỏi có bao nhiêu điểm cách đều các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA), (ABC)?

A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} (OAB)\equiv(Oxy) \\ (OCD)\equiv(Oyz) \\ (CDA)\equiv(Oxz) \\ (ABC): x+y+z=1 \end{cases}$. Gọi $P(a;b;c)$ là tọa độ điểm cần tìm.

Theo đề bài, ta cần có $|a|=|b|=|c|=\dfrac{|a+b+c-1|}{\sqrt{3}}$.

Có tất cả 8 trường hợp và đều có nghiệm. Cụ thể:

$+\ |a|=|b|=|c| \longrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c \\ a=b=-c \\ a=-b=c \\ -a=b=c \end{array}\right.$.

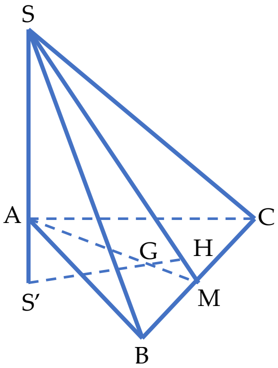
+ Mỗi trường hợp trên kết hợp với $|c|=\dfrac{|a+b+c-1|}{\sqrt{3}}$ sinh ra hai trường hợp.

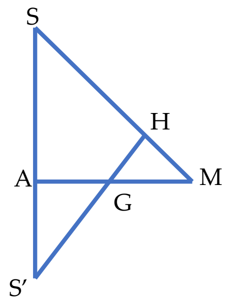
Đáp án D.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-2;0;0), B(0;4;2), C(2;2;-2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), S là điểm di động trên đường thẳng d, G và H lần lượt là trọng tâm của ΔABC, trực tâm của ΔSBC. Đường thẳng GH cắt đường thẳng d tại S'. Tính tích $SA.S'A$

A. $SA.S'A=\dfrac{3}{2}$. **B.** $SA.S'A=\dfrac{9}{2}$. **C.** $SA.S'A=12$. **D.** $SA.S'A=6$.

Lời giải





Nhận thấy $AB = BC = CA = 2\sqrt{6}$ nên ΔABC đều. Do G là trọng tâm của ΔABC nên $CG \perp AB,$ mà $CG \perp SA \Rightarrow CG \perp (SAB) \Rightarrow CG \perp SB$. Lại có $CH \perp SB$ (H là trực tâm của ΔSBC) nên $SB \perp (CHG)$. Suy ra $SB \perp GH$.

Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $BC \perp SA, BC \perp AM \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp GH$.

Như vậy $GH \perp (SBC) \Rightarrow GH \perp SM$ hay $S'H \perp SM \Rightarrow SS'H = SMA$.

Suy ra $\Delta AS'G \backsim \Delta AMS \Rightarrow \dfrac{AS'}{AM} = \dfrac{AG}{AS}$

$$\Rightarrow AS'.AS = AM.AG = AM.\frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\left(\frac{AB\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2}{3}.\left(\frac{2\sqrt{6}.\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 12.$$

Đáp án C.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình lăng trụ có diện tích đáy bằng 5 (đvdt) và hai đáy là hai tam giác nằm trên hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ có phương trình lần lượt là $(\alpha): x - 2y + 3z - a = 0$ và $(\beta): 3x - 6y + 9z + b = 0\left(a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 3a\right)$. Hỏi nếu thể tích khối lăng trụ bằng $5\sqrt{14}$ thì khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $|3a + b| = \sqrt{14}$. **B.** $\left|a + \dfrac{b}{3}\right| = 42$. **C.** $|3a + b| = 14$. **D.** $\left|a + \dfrac{b}{3}\right| = 14$.

Lời giải

Ta có $(\alpha): x - 2y + 3z - a = 0 \Leftrightarrow 3x - 6y + 9z - 3a = 0$.

Gọi h là chiều cao của hình lăng trụ, do $(\alpha)//(\beta)$ nên $h = d\left((\alpha);(\beta)\right) = \dfrac{|b + 3a|}{3\sqrt{14}}$.

Ta có $V = S.h \Leftrightarrow 5\sqrt{14} = 5.\dfrac{|b + 3a|}{3\sqrt{14}} = |3a + b| = 42 \Leftrightarrow \left|a + \dfrac{b}{3}\right| = 14$.

Đáp án D.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$ và 2 mặt phẳng $(P),(Q)$ lần lượt có phương trình $x + 2y + 2z + 3 = 0$; $x + 2y + 2z + 7 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d, tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \dfrac{4}{9}$ **B.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \dfrac{4}{9}$

C. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \dfrac{4}{9}$ **D.** $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = \dfrac{4}{9}$

Lời giải

Ta có $I \in d \to I(t; -1; -t)$. Do mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên ta có $d\left(I;(P)\right) = d\left(I;(Q)\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{|t-2-2t+3|}{3}=\dfrac{|t-2-2t+7|}{3} \Leftrightarrow |1-t|=|5-t| \Leftrightarrow t=3 \to I(3;-1;-3)$.

Mặt cầu (S) có bán kính là $R=d(I;(P))=\dfrac{2}{3}$. Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-3)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=\dfrac{4}{9}$.

Đáp án B.

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C khác với gốc tọa độ O sao cho biểu thức $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất

A. $(P): x+2y+3z-14=0$ **B.** $(P): x+2y+3z-11=0$

C. $(P): x+2y+z-14=0$ **D.** $(P): x+y+3z-14=0$

Lời giải

Xét tứ diện vuông $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nên hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC) chính là trực tâm H của tam giác ABC và $d(O;(ABC))=h$

Ta có $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$, nên $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất khi $d(O;(ABC))$ lớn nhất.

Mặt khác $d(O,(ABC)) \le OM, \forall M \in (P)$. Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv M$ hay mặt phẳng (P) đi qua $M(1;2;3)$ và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}=(1;2;3)$.

Vậy $(P): 1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$.

Đáp án D.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1), B(3;0;-1), C(0;21;-19)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$. $M(a,b,c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T=3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$

A. $a+b+c=\dfrac{14}{5}$ **B.** $a+b+c=0$ **C.** $a+b+c=\dfrac{12}{5}$ **D.** $a+b+c=12$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=1$. Gọi E là điểm thoả mãn hệ thức $3\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0} \to E(1;4;-3)$.

Ta có $T=3MA^2+2MB^2+MC^2=3\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2+\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}\right)^2$

$=6ME^2+3EA^2+2EB^2+EC^2+2\overrightarrow{ME}\left(3\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}\right)$

$\to T=6ME^2+3EA^2+2EB^2+EC^2$. Do EA, EB, EC không đổi nên T nhỏ nhất khi ME nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là một trong hai giao điểm của đường thẳng IE và mặt cầu (S).

Ta có $\overrightarrow{IE}=(0;3;-4)\to$ Phương trình $IE:\begin{cases}x=1\\y=1+3t\\z=1-4t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Giao điểm của IE và mặt cầu (S) thỏa mãn phương trình:

$$(1-1)^2+(1+3t-1)^2+(1-4t-1)^2=1\Leftrightarrow 25t^2=1\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{5}\to\left[\begin{array}{l}M_1\left(1;\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)\\M_2\left(1;\frac{2}{5};\frac{9}{5}\right)\end{array}\right.$$

Ta có $M_1\left(1;\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)\to M_1E=4$ và $M_2\left(1;\frac{2}{5};\frac{9}{5}\right)\to M_2E=6$. Vậy $M_1E<M_2E$ và biểu thức $T=3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $M\left(1;\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)$

$\to a=1,b=\frac{8}{5},c=\frac{1}{5}\to a+b+c=\frac{14}{5}$.

Đáp án A.

Câu 34: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-4)^2+z^2=5$. Tìm tọa độ điểm A thuộc trục *Oy*, biết rằng ba mặt phẳng phân biệt qua A có các vec-tơ pháp tuyến lần lượt là các vec-tơ đơn vị của các trục tọa độ cắt mặt cầu theo thiết diện là ba hình tròn có tổng diện tích là 11π

A. $\left[\begin{array}{l}A(0;2;0)\\A(0;6;0)\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}A(0;0;0)\\A(0;8;0)\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}A(0;0;0)\\A(0;6;0)\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}A(0;2;0)\\A(0;8;0)\end{array}\right.$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;4;0)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$. Điểm $A\in Oy\to A(0;b;0)$. Khi đó ba mặt phẳng theo giả thiết đi qua A và có phương trình tổng quát lần lượt là $(\alpha_1):x=0$, $(\alpha_2):y-b=0$ và $(\alpha_3):z=0$.

Nhận thấy $d(I;(\alpha_1))=d(I;(\alpha_3))=0$ nên mặt cầu (S) cắt các mặt phẳng $(\alpha_1),(\alpha_3)$ theo giao tuyến là đường tròn lớn có tâm *I*, bán kính $R=\sqrt{5}$. Tổng diện tích của hai hình tròn đó là $S_1+S_3=2\pi R^2=10\pi$.

Suy ra mặt cầu (S) cắt (α_2) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích là $S_3=11\pi-(S_1+S_2)=11\pi-10\pi=\pi$. Bán kính đường tròn này là $r=\sqrt{\frac{S_3}{\pi}}=1$.

$\to d(I;(\alpha_3))=\sqrt{R^2-r^2}=2=|4-b|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=2\\b=6\end{array}\right.$. Vậy $\left[\begin{array}{l}A(0;2;0)\\A(0;6;0)\end{array}\right.$.

Đáp án A.

STUDY TIPS

Nếu mặt cầu (S) tâm I, bán kính R cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) tâm H, bán kính r thì ta có công thức:

$IH^2=d^2(I;(P))=R^2-r^2$

Câu 35: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng *d*?

A. $Q(1;0;2)$	**B.** $N(1;-2;0)$	**C.** $P(1;-1;3)$	**D.** $M(-1;2;0)$

Đáp án D.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{59}{9};-\frac{32}{9};\frac{2}{9}\right)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Từ điểm M kẻ các tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S), trong đó A,B,C là các tiếp điểm. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $px+qy+z+r=0$. Giá trị của biểu thức $p+q+r$ bằng

A. –4. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 36.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=\left(\frac{50}{9};-\frac{50}{9};-\frac{25}{9}\right)\Rightarrow IM=\frac{25}{3}$.

Do đó $MA=MB=MC=\sqrt{IM^2-R^2}=\frac{20}{3}$.

Suy ra tọa độ của A,B,C thỏa mãn phương trình

$$\left(x-\frac{59}{9}\right)^2+\left(y+\frac{32}{9}\right)^2+\left(z-\frac{2}{9}\right)^2=\frac{400}{9}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{118}{9}x+\frac{64}{9}y-\frac{4}{9}z+\frac{101}{9}=0.$$

Do vậy tọa độ của A,B,C thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-\frac{118}{9}x+\frac{64}{9}y-\frac{4}{9}z+\frac{101}{9}=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y+z+4=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0 \end{cases}.$$

Như vậy tọa độ của A,B,C thỏa mãn phương trình $-2x+2y+z+4=0$ nên mặt phẳng (ABC) có phương trình là $-2x+2y+z+4=0$.

Suy ra $p=-2;q=2;r=4$. Vậy $p+q+r=4$.

Phân tích phương án nhiễu.

Phương án A: Sai do HS viết được phương trình $2x-2y-z-4=0$ nên suy ra $p=2;q=-2;r=-4$.

Phương án C: Sai do HS xác định $p=-2;q=2;r=1$.

Phương án D: Sai do HS xác định sai hình chiếu vuông góc H của M trên mặt phẳng (ABC).

Cụ thể H được xác định dựa vào hệ thức vecto $\overrightarrow{IH}=-\frac{R^2}{IM}\overrightarrow{IM}$ nên $H\left(\frac{91}{9};-\frac{64}{9};-\frac{14}{9}\right)$.

Do đó viết được phương trình mặt phẳng (ABC) là $-2x+2y+z+36=0$.

Suy ra $p=-2;q=2;r=36$.

Đáp án B.

Câu 37: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;1),B(-1;2;0),C(1;1;-2)$. Đường thẳng d đi qua trực tâm của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{-8}=\frac{z-4}{5}$.

B. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+13}{-8}=\frac{z-9}{5}$.

C. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-11}{-8}=\frac{z+6}{5}$.

D. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+21}{-8}=\frac{z-14}{5}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;-1),\overrightarrow{AC}=(-1;-2;-3)$ nên mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-8;5)$.

Suy ra (ABC) có phương trình là $x-8y+5z+17=0$.

Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm của tam giác ABC. Ta có

$$\overrightarrow{CH}=(x-1;y-1;z+2);\overrightarrow{BH}=(x+1;y-2;z).$$

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên

$$\begin{cases}BH\perp AC\\CH\perp AB\\H\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0\\H\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y+3z=3\\3x+y+z=2\\x-8y+5z=-17\end{cases}\Leftrightarrow(x;y;z)=\left(\frac{2}{15};\frac{29}{15};-\frac{1}{3}\right).$$

Suy ra $H\left(\frac{2}{15};\frac{29}{15};-\frac{1}{3}\right)$.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên nhận $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-8;5)$ làm một vectơ chỉ phương. Suy ra phương trình đường thẳng d là $\frac{x-\frac{2}{15}}{1}=\frac{y-\frac{29}{15}}{-8}=\frac{z+\frac{1}{3}}{5}$.

Dễ thấy điểm $M(2;-13;9)$ thuộc đường thẳng d nên phương án đúng là B.

Phân tích phương án nhiễu.

Phương án A, C và D: Sai do HS tìm tọa độ trực tâm H thiếu điều kiện $H\in(ABC)$ và chỉ kiểm tra hai điều kiện $BH\perp AC;CH\perp AB$.

Đáp án B.

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{-2}$ và $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với tam giác một góc $30°$. có dạng: $x+ay+bz+c=0$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ khi đó giá trị $a+b+c$ là

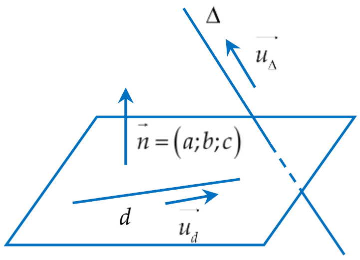
A. 8 **B.** -8 **C.** 7 **D.** -7

Lời giải

- Gọi vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(a;b;c)\neq\vec{0}$

- $d\subset(P)\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow a+b-c=0\Rightarrow c=a+b$ (1)

- Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;1;2)$, góc giữa Δ và (P) là 30° nên



$$\sin 30^\circ=\frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{|a+b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1^2+1^2+4}}\quad(2)$$

Thế (1) vào (2) $\Rightarrow\dfrac{3|a+b|}{\sqrt{6}.\sqrt{2a^2+2b^2+2ab}}=\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 4.9\left(a^2+b^2+2ab\right)=6\left(2a^2+2b^2+2ab\right)$$

$$\Leftrightarrow 24a^2+24b^2+60ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-\frac{1}{2}b\\a=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-2a\\a=-2b\end{array}\right.$$

- Với $b=-2a\Rightarrow c=a+b=-a$. Chọn $a=1\Rightarrow\vec{n}=(1;-2;-1)\Rightarrow(P):x-2y-z-5=0$

- Với $a=-2b\Rightarrow c=-b$. Chọn $b=1\Rightarrow\vec{n}=(-2;1;-1)\Rightarrow(P):2x-y+z-2=0$

Đáp án B.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P):2mx+\left(m^2+1\right)y+\left(m^2-1\right)z-10=0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với (P) và cùng đi qua A. Tìm tổng bán kính của hai mặt cầu đó.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $7\sqrt{2}$. **D.** $12\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$, r lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu

$$\Rightarrow r=d\left(I;(P)\right)=\frac{\left|(b-c)m^2+2ma+b-c-10\right|}{\left(m^2+1\right)\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(b+c-r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c-r\sqrt{2}-10=0\ (1)\\\left(b+c+r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c+r\sqrt{2}-10=0\ (2)\end{array}\right.$$

- Xét phương trình (1):

Do (P) luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định với mọi m nên

$$\begin{cases}b+c-r\sqrt{2}=0\\a=0\\b-c-r\sqrt{2}-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=r\sqrt{2}+5\\a=0\\c=-5\end{cases}\Rightarrow(S):x^2+\left(y-5-r\sqrt{2}\right)^2+(z+5)^2=r^2$$

Do $A\in(S)\Rightarrow 4+\left(-11-5-r\sqrt{2}\right)^2=r^2\Leftrightarrow r^2-12\sqrt{2}r+40=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}r=2\sqrt{2}\\r=10\sqrt{2}\end{array}\right.$

- Xét phương trình (2): ta làm tương tự như trên $\Rightarrow$ không thỏa đề bài.

Vậy tổng bán kính 2 mặt cầu là $12\sqrt{2}$.

Đáp án D.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(\alpha): 2x+4y-5z+2=0$, $(\beta): x+2y-2z+1=0$ và $(\gamma): 4x-my+z+n=0$. Để ba mặt phẳng đó có chung giao tuyến thì tổng $m+n$ bằng

A. –4 **B.** 8. **C.** –8 **D.** 4.

Lời giải

Nhìn vào phương trình (γ), để tính $m+n$ ta cần có $y=-1$.

Cho $y=-1 \Rightarrow \begin{cases}(\alpha): 2x-5z-2=0\\(\beta): x-2z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\z=0\end{cases}$.

Thay vào (γ), ta được $m+n=-4$.

Đáp án A.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6), D(1;1;1)$. Kí hiệu d là đường thẳng đi qua D sao cho tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến d là lớn nhất. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(5;7;3)$. **C.** $P(3;4;3)$. **D.** $Q(7;13;5)$.

Lời giải

Ta thấy $D \in (ABC): 2x+3y+z-6=0$

Ta có: $\begin{cases}d[A,d] \le AD\\d[B,d] \le BD\\d[C,d] \le CD\end{cases} \Rightarrow d[A,d]+d[B,d]+d[C,d] \le AD+BD+CD$

Dấu "=" xảy ra khi $d \perp (ABC)$ tại điểm $D \Rightarrow d: \begin{cases}x=1+2t\\y=1+3t\\z=z+t\end{cases} \Rightarrow N(5;7;3) \in d$

Đáp án B.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(8;1;1)$. Mặt phẳng (P) qua M cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn $OA^2+OB^2+OC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất có dạng là (P): $ax+by+cz-12=0$. Khi đó $a+b+c$ là:

A. 9. **B.** –9. **C.** 11. **D.** –11.

Lời giải

Giả sử (P) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại $a,b,c>0$

$\Rightarrow (P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ qua $M(8;1;1) \Rightarrow \frac{8}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$

$OA^2+OB^2+OC^2=a^2+b^2+c^2+2x\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-2x$

$=a^2+\frac{8x}{a}+\frac{8x}{a}+b^2+\frac{x}{b}+\frac{x}{b}+c^2+\frac{x}{c}+\frac{x}{c}\ge 3\sqrt[3]{(8x)^2}+3\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x^2}$ (Cô – si) (*)

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a^2=\frac{8x}{a} \\ b^2=\frac{x}{b} \\ c^2=\frac{x}{c} \\ \frac{8}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2\sqrt[3]{x} \\ b=\sqrt[3]{x} \\ c=\sqrt[3]{x} \\ \frac{4}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x}=6 \\ a=12 \\ b=6 \\ c=6 \end{cases}$

$\Rightarrow (P): \frac{x}{12}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1 \Leftrightarrow x+2y+2z-12=0$

Bạn có thể thế x vào (*) để tìm min.

Đáp án A.

STUDY TIPS

Phương trình mặt phẳng qua $A(a;0;0), B(0,b,0), C(0;0;c)$ với $a.b.c\ne 0$ là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ gọi là phương trình mặt phẳng dạng đoạn chắn

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3;-1;-3)$, $B(-3;0;-1)$, $C(-1;-3;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+4y+3z-19=0.$ Tọa độ điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a+b+c$ bằng:

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Gọi $I(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3+2.(-3)+5.(-1)}{8}=-1 \\ y=\frac{-1+2.0+5.(-3)}{8}=-2 \\ z=\frac{-3+2.(-1)+5.1}{8}=0 \end{cases}$

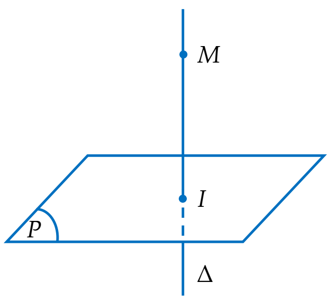
$\Rightarrow I=(-1;-2;0)$

Ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{MI}+5\overrightarrow{IC}$

$=8\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=8\overrightarrow{MI}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}\right|$ min $\Leftrightarrow 8\left|\overrightarrow{MI}\right|$ min

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên (P)



Gọi Δ là đường thẳng qua $I(-1;2;0)$ và vuông góc với $(P): 2x+4y+3z-19=0$

có vecto chỉ phương là $(2;4;3) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2+4t \\ z=3t \end{cases}$

Thế vào $(P) \Rightarrow 2(-1+2t)+4(-2+4t)+3(3t)-19=0 \Leftrightarrow t=1$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow M(1;2;3) \Rightarrow a+b+c=6$

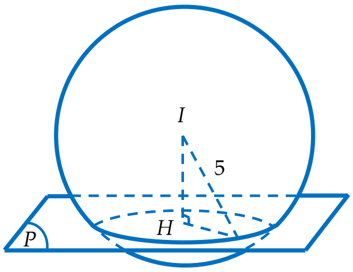
Đáp án C.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(\alpha): 2x-2y-z+14=0$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Mặt phẳng $(P)//(\alpha)$ cắt (S) theo thiết diện là một hình tròn có diện tích 16π. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $2x-2y-z+14=0$. **B.** $2x-2y-z+4=0$.

C. $2x-2y-z+16=0$. **D.** $2x-2y-z-4=0$.

Lời giải



$(P)//(\alpha) \Rightarrow (P): 2x-2y-z+c=0 \; (c \neq 14)$

(S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$

Hình tròn thiết diện (C) có $S=16\pi \Rightarrow$ Bán kính $r=4$

Gọi H là hình chiếu của I lên $(P) \Rightarrow H$ là tâm của $(C) \Rightarrow IH = d_{(I;(P))} = \sqrt{R^2-r^2} = 3$

$$\Rightarrow \frac{|2.1-2.2-3+c|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 3 \Leftrightarrow |c-5| = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=14 \text{ (l)} \\ c=-4 \end{array}\right. \Rightarrow (P): 2x-2y-z-4=0$$

Đáp án D.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;-3)$, $B(-1;1;2)$, $C(0;-3;-5)$. Xác định điểm M trên mặt phẳng Oxy sao cho: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất đó là:

A. 0. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có: $G(0;0;-2)$.

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = \left|3\overrightarrow{MG}\right| = 3MG$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của G trên (Oxy).

$\Rightarrow M(0;0;0) \Rightarrow MG = 2 \Rightarrow 3MG = 6$.

Đáp án D.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;-1;2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P). Số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) có phương trình $-y+z=0$ là:

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải

$$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{OH} = (2;-1;2),\ \overrightarrow{n_Q} = (0;-1;1) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45°.$$

Đáp án C.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(2;1;-1)$, $B(0;3;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+3=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-4;-1;0)$. **B.** $M(-1;-4;0)$. **C.** $M(4;1;0)$. **D.** $M(1;-4;0)$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, suy ra $I(4;-1;-3)$.

Ta có $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{MI}$ $\Rightarrow\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI$.

Do đó $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên (P)

Đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P) là $d:\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{-1}$

Tọa độ hình chiếu M của I trên (P) thỏa mãn: $\begin{cases}\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{-1}\\ x+y-z+3=0\end{cases}\Rightarrow M(1;-4;0)$

Đáp án D.

Câu 48: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$ và $d':\begin{cases}x=3+t'\\ y=2+t',t'\in\mathbb{R}\\ z=5\end{cases}$. Viết phương trình chính tắc của đường vuông góc chung của d và d'.

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{2}$.

D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$.

Lời giải

Hai đường thẳng d và d' lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-1;-1)$ và $\overrightarrow{u'}=(1;1;0)$.

Lấy $A(2+t;1-t;2-t)\in d$ và $B(3+t';2+t';5)\in d'$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1+t'-t;t'+t+1;t+3)$.

AB là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng d và d' khi và chỉ khi

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}\\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1+t'-t)-(t'+t+1)-(t+3)=0\\ (1+t'-t)+(t'+t+1)+0.(t+3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3t-3=0\\ 2t'+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\ t'=-1\end{cases}$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$ và $A(1;2;3)\Rightarrow AB:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$.

Đáp án D.

STUDY TIP

Cách viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d và d'.

Bước 1: Lấy hai điểm A và B lần lượt thuộc hai đường đã cho (tọa độ theo tham số).

Bước 2: Giải điều kiện $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u'}=0\end{cases}$ tìm ra t và t'.

Câu 49: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$, $B(0;-1;2)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+12=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất?

A. $M(2;2;9)$.

B. $M\left(-\frac{6}{11};-\frac{18}{11};\frac{23}{11}\right)$.

C. $M\left(\frac{7}{6};\frac{7}{6};\frac{31}{4}\right)$.

D. $M\left(-\frac{2}{5};-\frac{11}{5};\frac{18}{5}\right)$.

Lời giải

Ta có $(1+2.0-2.2+12).(0+2.(-1)-2.2+12)=54>0$.

Suy ra hai điểm A, B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P).

Áp dụng phương pháp tổng quát ở **STUDY TIP** ta thấy để $MA+MB$ nhỏ nhất thì M là giao điểm của đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (P), trong đó A' là điểm đối xứng của A qua (P).

Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P).

Suy ra $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=2-2t\end{cases},t\in\mathbb{R}$. Gọi I là giao điểm của d và mặt phẳng (P), suy ra $I(1+t;2t;2-2t)\in d$ và I là trung điểm của AA'.

Mặt khác $I\in(P)\Leftrightarrow 1+t+2.2t-2.(2-2t)+12=0\Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra $I(0;-2;4)\Rightarrow A'(-1;-4;6)$.

Đường thẳng $A'B$ đi qua $A'(-1;-4;6)$ và $B(0;-1;2)$ có phương trình

$$A'B:\begin{cases}x=t'\\y=-1+3t',(t'\in\mathbb{R})\Rightarrow M(t';-1+3t';2-4t')\in A'B.\\z=2-4t'\end{cases}$$

Mặt khác $M=(P)\cap A'B\Rightarrow t'+2.(-1+3t')-2.(2-4t')+12=0\Leftrightarrow t'=\frac{-2}{5}$.

Vậy $M\left(\frac{-2}{5};-\frac{11}{5};\frac{18}{5}\right)$.

Đáp án D.

STUDY TIP

Phương pháp là xét vị trí tương đối của các điểm A, B so với mặt phẳng (P).

1. Nếu A, B khác phía so với (P) thì $MA+MB$ nhỏ nhất bằng AB khi và chỉ khi $M=(P)\cap AB$.

2. Hai điểm A, B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) thì ta lấy đối xứng điểm A qua (P) ta được điểm A'.

Khi đó A' và B ở khác phía so với (P) và $MA+MB=MA'+MB\ge A'B$. Dấu bằng xảy ra khi $M=(P)\cap A'B$.

CASIO

Thế điểm M vào (P) $\Rightarrow M\left(\frac{-6}{11};\frac{-18}{11};\frac{23}{11}\right)\notin(P)$ $\Rightarrow$ loại B.

Nhập máy
$\sqrt{(1-x)^2+(-y)^2+(2-z)^2}+\sqrt{(-x)^2+(-1-y)^2+(2-z)^2}$

Sử dụng lệnh CALC với các đáp án A, C, D → Chọn đáp án có kết quả nhỏ nhất

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1-2t\\y=t\\z=-1+3t\end{cases}$, $d':\begin{cases}x=2+t'\\y=-1+2t'\\z=-2t'\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P), cắt d và d' có phương trình là

A. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-4}$.

C. $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$. **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{2}$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;1)$.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $A=\Delta\cap d$, có $A\in d$ nên $A(-1-2t;t;-1+3t)$; gọi $B=\Delta\cap d'$, có $B\in d'$ nên $B(2+t';-1+2t';-2t')$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(t'+2t+3;2t'-t-1;-2t'-3t+1)$.

Do $\Delta\perp(P)$ nên $\overrightarrow{AB},\vec{n}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{t'+2t+3}{1}=\frac{2t'-t-1}{1}=\frac{-2t'-3t+1}{1}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3t-t'=-4\\2t+4t'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t'=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(1;-1;-4)\\B(3;1;-2)\end{cases}.$$

STUDY TIP

Tổng quát: Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P), cắt hai đường thẳng d và d' cho trước.

Gọi $A=\Delta\cap d\Rightarrow$ tọa độ điểm A theo t, $B=\Delta\cap d'\Rightarrow$ tọa độ điểm B theo t'.

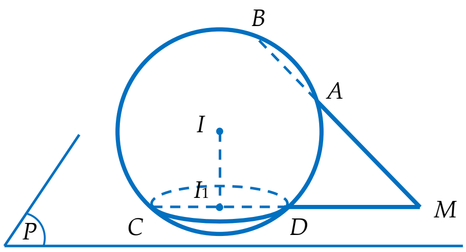
Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{n_{(P)}}$ cùng phương suy ra được t và t'. Tìm được tọa độ A và B suy ra phương trình đường thẳng Δ.

Đường thẳng Δ đi qua điểm B và có vectơ chỉ phương $\vec{n}=(1;1;1)$ nên có phương trình $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$.

Đáp án A.

Câu 51: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+y+z-3=0$ và các điểm $A(3;2;4)$, $B(5;3;7)$. Mặt cầu (S) thay đổi đi qua A, B và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính $r=2\sqrt{2}$. Biết tâm của đường tròn (C) luôn nằm trên một đường tròn cố định (C_1). Bán kính của (C_1) là

A. $r_1=\sqrt{14}$. **B.** $r_1=12$. **C.** $r_1=2\sqrt{14}$. **D.** $r_1=6$.



Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1;3)$ nên phương trình đường thẳng AB là

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=2+t \\ z=4+3t \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$$

Gọi $M=AB\cap(P)$ thì tọa độ điểm M thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x_M=3+2t \\ y_M=2+t \\ z_M=4+3t \\ x_M+y_M+z_M-3=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow(3+2t)+(2+t)+(4+3t)-3=0\Leftrightarrow 6t+6=0\Leftrightarrow t=-1\rightarrow M(1;1;1)$.

Có $MA=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{14}$

và $MB=\sqrt{(5-1)^2+(3-1)^2+(7-1)^2}=2\sqrt{14}$.

Gọi I_1 là tâm của đường tròn (C) và MI_1 cắt đường tròn (C) tại 2 điểm C và D.

Ta có $MC.MD=MA.MB=\sqrt{14}.2\sqrt{14}=28$

$\Leftrightarrow(MI_1+r)(MI_1-r)=28$

$\Leftrightarrow MI_1^2-r^2=28\Leftrightarrow MI_1=\sqrt{28+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=6.$

Do $M(1;1;1)$ nên điểm M cố định. Khi đó tâm I_1 của đường tròn (C) luôn nằm trên đường tròn cố định có tâm M, bán kính $r_1=MI_1=6$.

Đáp án D.

STUDY TIP

Công thức "$MC.MD=MA.MB$" khiến ta nhó đến kiến thức về phương tích của một điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O): "Nếu đường thẳng d qua M (nằm ngoài đường tròn) và cắt đường tròn (O) tại hai điểm A, B thì tích số $MA.MB$ không đổi và $MA.MB=MO^2-r^2$ (r là bán kính đường tròn)".

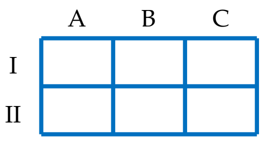
VIII. TỔ HỢP – XÁC SUẤT, GIỚI HẠN, CẤP SỐ

Câu 1: Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 nam và 3 nữ, ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{20}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{1}{10}$.

Lời giải

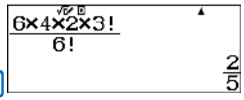
Xếp ngẫu nhiên 6 bạn học sinh vào 6 ghế, suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=6!$.



Giả sử có hai dãy ghế I và II đối diện nhau. Mỗi dãy gồm 3 ghế A, B, C.
Gọi A là biến cố "Xếp mỗi học sinh vào một ghế sao cho mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ". Để xét số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A)$ ta có hai cách dưới đây.

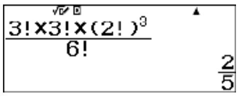
Cách 1: Xếp bạn nam thứ nhất có 6 cách, xếp bạn nam thứ hai có 4 cách (bạn nam thứ hai không được ngồi ở vị trí đối diện với bạn nam thứ nhất), xếp bạn nam thứ ba có 2 cách (bạn nam thứ ba không được ngồi ở vị trí đối diện với hai bạn nam vừa xếp). Xếp 3 bạn nữ vào ba ghế còn lại có $3!$ cách.
Suy ra $n(A)=6.4.2.3!$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6.4.2.3!}{6!}=\frac{2}{5}$.



Cách 2: Xếp 3 bạn nam vào ba loại ghế A, B, C có $3!$ cách. Xếp 3 bạn nữ vào ba loại ghế A, B, C có $3!$ cách. Mỗi loại ghế xếp chỗ ngồi cho cặp nam nữ có $2!$ cách.
Suy ra số cách xếp mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ là $3!.3!.(2!)^3$ cách. Khi đó $n(A)=3!.3!.(2!)^3$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3!.3!.(2!)^3}{6!}.=\frac{2}{5}$..



Đáp án A.

> **DISCOVERY**
>
> Ta lập luận tương tự để giải bài toán dưới đây:
> Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 5 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh trường A và 5 học sinh trường B vào bàn. Tính xác suất để bất cứ học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau.
>
> **A.** $\frac{2}{63}$. **B.** $\frac{4}{63}$.
> **C.** $\frac{8}{63}$. **D.** $\frac{5}{63}$.
>
> **Đáp án: C.**

Câu 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, chọn ngẫu nhiên một điểm mà tọa độ là các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn hoặc bằng 4. Nếu các điểm có cùng xác suất được chọn như nhau thì xác suất để chọn được một điểm mà khoảng cách đến gốc tọa độ nhỏ hơn hoặc bằng 2 là

A. $\frac{13}{81}$. **B.** $\frac{15}{81}$. **C.** $\frac{13}{32}$. **D.** $\frac{11}{16}$.

Lời giải

Gọi điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $x,y\in\mathbb{Z};|x|\le 4;|y|\le 4$.

Suy ra $\begin{cases} x \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\} \\ y \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\} \end{cases}$.

Khi đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9.9 = 81$.

Gọi A là biến cố "Chọn được một điểm có khoảng cách đến gốc tọa độ nhỏ hơn hoặc bằng 2". Gọi điểm $N(a;b)$ là điểm thỏa mãn $a,b \in \mathbb{Z}; ON \le 2$.

Suy ra $\sqrt{a^2+b^2} \le 2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \le 4$. Từ đó ta có $\begin{cases} a,b \in \mathbb{Z} \\ a \in \{0;\pm1;\pm2\} \\ b^2 \le 4-a^2 \end{cases}$

STUDY TIP

Do $a^2+b^2 \le 4 \Rightarrow a^2 \le 4$ $\Leftrightarrow -2 \le a \le 2$. Mà $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{0;\pm1;\pm2\}$. Từ đó ta mới suy ra $\begin{cases} a,b \in \mathbb{Z} \\ a \in \{0;\pm1;\pm2\} \\ b^2 \le 4-a^2 \end{cases}$.

+ Nếu $a=0$ (có 1 cách chọn). Suy ra $b \in \{0;\pm1;\pm2\}$ và có 5 cách chọn b. Có $1.5=5$ cách chọn điểm N thỏa mãn trường hợp này.

+ Nếu $a=\pm1$ (có 2 cách chọn a). Suy ra $b^2 \le 3$ hay $b \in \{0;\pm1\}$, có 3 cách chọn b. Từ đó có $2.3=6$ cách chọn điểm N thỏa mãn trường hợp này.

+ Nếu $a=\pm2$ (có 2 cách chọn a). Suy ra $b^2 \le 0 \Rightarrow b=0$, có 1 cách chọn b. Từ đó có $2.1=2$ cách chọn điểm N thỏa mãn trường hợp này.

Vậy số phần tử thuận lợi cho biến cố A là $n(A)=5+6+2=13$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{13}{81}$.

Đáp án A.

Câu 3: Có 8 người ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn. Mỗi người cầm một đồng xu cân đối, đồng chất. Cả 8 người đồng thời tung đồng xu. Ai tung được mặt ngửa thì phải đứng dậy, ai tung được mặt sấp thì ngồi yên tại chỗ. Tính xác suất sao cho không có hai người nào ngồi cạnh nhau phải đứng dậy?

A. $\dfrac{47}{256}$. **B.** $\dfrac{67}{256}$. **C.** $\dfrac{55}{256}$. **D.** $\dfrac{23}{128}$.

Lời giải

Đặt Ω là không gian mẫu. Ta có $n(\Omega)=2^8=256$.

Gọi A là biến cố "Không có hai người nào ngồi cạnh nhau phải đứng dậy".

- TH1: Không có ai tung được mặt ngửa. Trường hợp này có 1 khả năng xảy ra.
- TH2: Chỉ có 1 người tung được mặt ngửa. Trường hợp này có 8 khả năng xảy ra.
- TH3: Có 2 người tung được mặt ngửa nhưng không ngồi cạnh nhau: Có $\dfrac{8.5}{2}=20$ khả năng xảy ra (do mỗi người trong vòng tròn thì có 5 người không ngồi cạnh).
- TH4: Có 3 người tung được mặt ngửa nhưng không có 2 người nào trong 3 người này ngồi cạnh nhau. Trường hợp này có $C_8^3-8-8.4=16$ khả năng xảy ra.

Thật vậy:

+ Có C_8^3 cách chọn 3 người trong số 8 người.

+ Có 8 khả năng cả ba người này ngồi cạnh nhau.

+ Nếu chỉ có 2 người ngồi cạnh nhau: Có 8 cách chọn ra một người, với mỗi cách chọn ra một người có 4 cách chọn ra hai người ngồi cạnh nhau và không ngồi cạnh người đầu tiên (độc giả vẽ hình để rõ hơn). Vậy có 8.4 khả năng.

- TH5: Có 4 người tung được mặt ngửa nhưng không có 2 người nào trong 4 người này ngồi cạnh nhau. Trường hợp này có 2 khả năng xảy ra.

Suy ra $n(A)=1+8+20+16+2=47 \Rightarrow P(A)=\dfrac{47}{256}$.

Đáp án A.

Câu 4: Trong một hình tứ diện ta tô màu các đỉnh, trung điểm các cạnh, trọng tâm các mặt và trọng tâm tứ diện. Chọn ngẫu nhiên 4 điểm trong số các điểm đã tô màu. Tính xác suất để 4 điểm được chọn là 4 đỉnh của một hình tứ diện

A. $\dfrac{188}{273}$. **B.** $\dfrac{1009}{1365}$. **C.** $\dfrac{245}{273}$. **D.** $\dfrac{136}{195}$.

Lời giải

Có tất cả 15 điểm được tô màu gồm 4 đỉnh của tứ diện, 6 trung điểm của 6 cạnh, 4 trọng tâm của 4 mặt bên và 1 trọng tâm của tứ diện.

Không gian mẫu là "Chọn ngẫu nhiên 4 trong số 15 điểm đã tô màu". Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{15}^4$.

Gọi A là biến cố "4 điểm được chọn đồng phẳng". Suy ra $\overline{A}$ là biến cố "4 điểm được chọn là 4 đỉnh của một hình tứ diện". Để xác định số kết quả thuận lợi cho biến cố A ta xét các trường hợp sau:

a. 4 điểm cùng thuộc "một mặt bên của tứ diện"

Một mặt bên có 7 điểm được tô màu nên số cách chọn 4 điểm (đồng phẳng) trên một mặt bên là C_7^4 (cách).

Có tất cả 4 mặt bên nên số cách chọn thỏa mãn trường hợp **a.** là $4.C_7^4$ (cách).

b. 4 điểm cùng thuộc mặt phẳng "chứa 1 cạnh của tứ diện và trung điểm của cạnh đối diện".

Mặt phẳng đó có 7 điểm được tô màu nên số cách chọn 4 điểm (đồng phẳng) trên mỗi mặt là C_7^4 (cách).

Hình tứ diện có 6 cạnh nên có tất cả 6 mặt như thế. Số cách chọn 4 điểm thỏa mãn trường hợp b. là $6C_7^4$ (cách).

c. 4 điểm cùng thuộc mặt phẳng "chứa 1 đỉnh và đường trung bình của tam giác đối diện đỉnh đó".

Mặt phẳng đó có 5 điểm được tô màu nên số cách chọn 4 điểm (đồng phẳng) trên mỗi mặt là C_5^4 (cách).

Do mỗi mặt bên là một tam giác có 3 đường trung bình, nên mỗi đỉnh có tương ứng 3 mặt phẳng như thế (chứa đỉnh và đường trung bình). Mà tứ diện có 4 đỉnh nên có tất cả $3.4=12$ mặt phẳng ở trường hợp **c.**

Vậy số cách chọn thỏa mãn trường hợp **c.** là $12C_5^4$ (cách).

d. 4 điểm cùng thuộc mặt phẳng "chứa 2 đường nối 2 trung điểm của các cạnh đối diện".

Có 3 đường nối 2 trung điểm của các cạnh đối diện. Số mặt phẳng được tạo thành từ 2 trong 3 đường đó là C_3^2 (mặt phẳng).

Mỗi mặt phẳng như thế có 5 điểm được tô màu nên số cách chọn 4 điểm (đồng phẳng) là C_5^4 (cách).

Vậy số cách chọn thỏa mãn trường hợp **d.** là $C_3^2.C_5^4$ (cách).

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n\left(A\right)=4C_7^4+6C_7^4+12C_5^4+C_3^2.C_5^4=425$.

Vậy xác suất cần tính là $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)=1-\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=1-\dfrac{425}{C_{15}^4}=\dfrac{188}{273}$.

Đáp án A.

Câu 5: Trong khai triển $\left(1+2x\right)^n=a_0+a_1x+...+a_nx^n, n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, ..., a_n$, biết $a_0+\dfrac{a_1}{2}+...+\dfrac{a_n}{2^n}=4096$.

A. 126720. **B.** 213013. **C.** 130272. **D.** 130127.

Lời giải

Theo đề ta có $\left(1+2x\right)^n=a_0+a_1x+...+a_nx^n$

Thay $x=\dfrac{1}{2}$ ta có $\left(1+1\right)^n=a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+...+\dfrac{a_n}{2^n}=4096$.

$\Leftrightarrow 2^n=4096\Leftrightarrow n=12$.

Hệ số của số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức $\left(1+2x\right)^{12}$ là $a_n=C_{12}^n.2^n$

$a_{n-1}=C_{12}^{n-1}.2^{n-1}$.

Xét bất phương trình với ẩn số n ta có $C_{12}^{n-1}.2^{n-1}\le C_{12}^n.2^n$

$\Leftrightarrow\dfrac{12!}{\left(n-1\right)!.\left(13-n\right)!}\le\dfrac{12!.2}{n!.\left(12-n\right)!}\Leftrightarrow\dfrac{1}{13-n}\le\dfrac{2}{n}\Leftrightarrow n\le\dfrac{26}{3}$.

Do đó bất đẳng thức đúng với $n\in\left\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\right\}$ và dấu đẳng thức không xảy ra.

Ta được $a_0<a_1<a_2<...<a_8$ và $a_8>a_9>a_{10}>a_{11}>a_{12}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hệ số trong khai triển nhị thức là $C_{12}^8.2^8=126720$.

Đáp án A.

Câu 6: Lớp 12B có 25 học sinh được chia thành hai nhóm I và II sao cho mỗi nhóm đều có học sinh nam và nữ, nhóm I gồm 9 học sinh nam. Chọn ra ngẫu nhiên mỗi nhóm 1 học sinh, xác suất để chọn ra được 2 học sinh nam bằng 0,54. Xác suất để chọn ra được hai học sinh nữ bằng

A. 0,42. **B.** 0,04. **C.** 0,23. **D.** 0,46.

Lời giải

Gọi x,y lần lượt là số học sinh nữ ở nhóm I và nhóm II. Khi đó số học sinh nam ở nhóm II là $25-\left(9+x\right)-y=16-x-y$. Điều kiện để mỗi nhóm đều có học sinh nam và nữ là $x\ge1, y\ge1, 16-x-y\ge1; x,y\in\mathbb{N}$.

Xác suất để chọn ra được hai học sinh nam bằng $\dfrac{C_9^1C_{16-x-y}^1}{C_{9+x}^1C_{16-x}^1}=0,54$

$$\Leftrightarrow \frac{9(16-x-y)}{(9+x)(16-x)}=0,54 \Leftrightarrow \frac{144-9x-9y}{144+7x-x^2}=0,54 \Leftrightarrow y=\frac{184}{25}-\frac{71}{50}x+\frac{3}{50}x^2$$

Ta có hệ điều kiện sau $\begin{cases} x\ge 1 \\ \frac{184}{25}-\frac{71}{50}x+\frac{3}{50}x^2\ge 1 \\ 16-x-\left(\frac{184}{25}-\frac{71}{50}x+\frac{3}{50}x^2\right)\ge 1 \\ x\in\mathbb{N} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ \frac{3}{50}x^2-\frac{71}{50}x+\frac{159}{25}\ge 0 \\ -\frac{3}{50}x^2+\frac{21}{50}x+\frac{191}{25}\ge 0 \\ x\in\mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge \frac{53}{3} \\ x\le 6 \end{array}\right. \\ \frac{21-5\sqrt{201}}{6}\le x\le \frac{21+5\sqrt{201}}{6} \\ x\in\mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le x\le 6 \\ x\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Ta có bảng các giá trị của x,y:

x	1	2	3	4	5	6
y	6 (thỏa)	$\frac{119}{25}$ (loại)	$\frac{91}{25}$ (loại)	$\frac{66}{25}$ (loại)	$\frac{44}{25}$ (loại)	1 (loại)

Vậy ta tìm được hai cặp nghiệm nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện là $(1;6)$ và $(6;1)$.

Xác suất để chọ ra hai học sinh nữ là $\frac{C_x^1C_y^1}{C_{9+x}^1C_{16-x}^1}=\frac{xy}{(9+x)(16-x)}$.

Nếu $(x;y)\in\{(1;6),(6;1)\}$ thì xác suất này bằng $\frac{1}{25}=0,04$.

Đáp án B.

Câu 7: Cho ba toa tàu đánh số từ 1 đến 3 và 12 hành khách. Mỗi toa đều chứa được tối đa 12 hành khách. Gọi n là số cách xếp các hành khách vào các toa tàu thỏa mãn điều kiện "mọi toa đều có khách". Tìm số các chữ số của n.

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

* Xếp 12 khách vào 3 toa tàu (có thể có toa không có khách): Có 3^{12} cách.
* Trừ đi các trường hợp có KHÔNG QUÁ 2 toa có khách: $-C_3^2.2^{12}$.

(Chọn ra hai toa tàu có C_3^2 cách. Sau đó xếp tùy ý 12 khách vào 2 toa đã chọn ra này, tức là có thể có một trong hai toa này không có khách).

Nhưng như vậy ta đã trừ đi các trường hợp chỉ có một toa có khách đến hai lần nên phải cộng lại số này: $+C_3^1.1^{12}$.

* Vậy số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là $3^{12}-C_3^2.2^{12}+C_3^1.1^{12}=519156$ cách.

Do đó chọn đáp án B.

Bài toán tổng quát: Có bao nhiêu cách xếp q hành khách vào n toa tàu khác nhau sao cho toa tàu nào cũng có khách? (hay chính là bài toán chia quà: Có bao nhiêu cách chia q món quà ***khác nhau*** cho n bạn sao cho bạn nào cũng có quà?).

Ở bài toán trên, ta có:

$$3^{12}-C_3^2.2^{12}+C_3^1.1^{12}=C_3^0\left(3-0\right)^{12}-C_3^1\left(3-1\right)^{12}+C_3^2\left(3-2\right)^{12}-C_3^3\left(3-3\right)^{12}.$$

Lập luận tương tự như bài toán trên ta có số cách xếp (cách chia) là:

$$C_n^0\left(n-0\right)^q-C_n^1\left(n-1\right)^q+C_n^2\left(n-2\right)^q-C_n^3\left(n-3\right)^q+...=\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k C_n^k\left(n-k\right)^q.$$

Bài toán này khác với bài toán chia kẹo Euler: Có bao nhiêu cách chia q chiếc kẹo ***giống nhau*** cho n em bé sao cho em nào cũng có kẹo?

Đáp án B.

Câu 8: Cho đa giác lồi $\left(H\right)$ có 22 cạnh. Gọi X là tập hợp các tam giác có 3 đỉnh là ba đỉnh của $\left(H\right)$. Chọn ngẫu nhiên hai tam giác trong X. Tính xác suất để chọn được 1 tam giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác $\left(H\right)$ và 1 tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác $\left(H\right)$ (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba)

A. 0,374. **B.** 0,375. **C.** 0,376. **D.** 0,377.

Lời giải

* Đa giác lồi $\left(H\right)$ có 22 cạnh nên cũng có 22 đỉnh. Số tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác $\left(H\right)$ là $C_{22}^3=1540$ (tam giác).

Suy ra số phần tử của không gian mẫu Ω là $n\left(\Omega\right)=C_{1540}^2$.

* Số tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác $\left(H\right)$ là $22.18=396$ (tam giác).

Số tam giác có hai cạnh là cạnh của đa giác $\left(H\right)$ là 22 (tam giác).

Số tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác $\left(H\right)$ là $1540-396-22=1122$ (tam giác).

Gọi A là biến cố "Hai tam giác được chọn có có 1 cạnh là cạnh của đa giác $\left(H\right)$ và 1 tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác $\left(H\right)$".

Số phần tử của A là $n\left(A\right)=C_{396}^1.C_{1122}^1$.

* Vậy xác suất cần tìm là $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{C_{396}^1.C_{1122}^1}{C_{1540}^2}=\dfrac{748}{1995}\approx 0,375.$

Đáp án B.

Câu 9: Cho tập hợp các số nguyên liên tiếp như sau: $\{1\},\{2;3\},\{4;5;6\},\{7;8;9;10\},...$, trong đó mỗi tập hợp chứa nhiều hơn tập hợp ngay trước đó 1 phần tử, và phần tử đầu tiên của mỗi tập hợp lớn hơn phần tử cuối cùng của tập hợp ngay trước nó 1 đơn vị. Gọi S_n là tổng của các phần tử trong tập hợp thứ n. Tính S_{999}

A. 498501999. **B.** 498501998. **C.** 498501997. **D.** 498501995.

Lời giải

Ta thấy tập hợp thứ n có n số nguyên liên tiếp, và phần tử cuối cùng của tập này là $1+2+3+...+n=\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$.

STUDY TIPS

Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có số hạng đầu u_1, công sai d là:

$$S_n = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}.$$

Khi đó S_n là tổng của n số hạng trong một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, công sai là $d = -1$ (coi số hạng cuối cùng trong tập hợp thứ n là số hạng đầu tiên của cấp số cộng này), ta có:

$$S_n = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2} = \frac{n}{2}\left[n(n+1) - (n-1)\right] = \frac{1}{2}n\left(n^2+1\right).$$

Vậy $S_{999} = \frac{1}{2}.999.\left(999^2+1\right) = 498501999.$

Đáp án A.

Câu 10: Chiếc kim của bánh xe trong trò chơi "Chiếc nón kì diệu" có thể dừng lại ở một trong mười vị trí với khả năng như nhau. Xác suất để trong ba lần quay, chiếc kim của bánh xe đó lần lượt dừng lại ở ba vị trị khác nhau là

A. 0,001. **B.** 0,72. **C.** 0,072. **D.** 0,9.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu Ω là $n(\Omega) = 10^3$.

Gọi A là biến cố "chiếc kim của bánh xe đó lần lượt dừng lại ở ba vị trị khác nhau", suy ra $n(A) = 10.9.8 = 720$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{720}{10^3} = 0,72.$

Đáp án B.

Câu 11: Để thi học kỳ bằng hình thức vấn đáp, thầy giáo đã chuẩn bị 50 câu hỏi cho ngân hàng đề thi. Bạn A đã học và làm được 20 câu trong đó. Để hoàn thành bài thi thì bạn A phải rút và trả lời 4 câu trong ngân hàng đề. Tính xác suất để bạn đó rút được 4 câu mà trong đó có ít nhất 1 câu đã học.

A. $\frac{C_{20}^4}{C_{50}^4}$. **B.** $1 - \frac{C_{30}^4}{C_{50}^4}$. **C.** $\frac{C_{30}^4}{C_{50}^4}$. **D.** $1 - \frac{C_{20}^4}{C_{50}^4}$.

Lời giải

+ Rút ra 4 câu bất kì $\Rightarrow$ Có C_{50}^4 cách.

+ Rút ra 4 câu mà không có câu nào học thuộc $\Rightarrow$ Có C_{30}^4 cách.

$\Rightarrow$ Xác suất đề bạn đó rút được 4 câu trong đó có ít nhất một câu đã học là $1 - \frac{C_{30}^4}{C_{50}^4}$

Đáp án B.

Câu 12: Tổng $P = C_{2018}^0.2^{2018} - C_{2018}^1.2^{2017} + C_{2018}^2.2^{2016} - ... + C_{2018}^{2018}$ là:

A. $P = 1$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = 2^{2017}$. **D.** $P = 2^{2018}$.

Lời giải

Xét các khai triển $(a+b)^{2018} = C_{2018}^0 a^{2018} + C_{2018}^1 a^{2017} b + C_{2018}^2 a^{2016} b^2 + ... + C_{2018}^{2018} b^{2018}$

Thay $a = 2, b = -1$ ta có:

$1 = C_{2018}^0 2^{2018} - C_{2018}^1 2^{2017} + C_{2018}^2 2^{2016} + ... + C_{2018}^{2018} = P$

Đáp án A.

Câu 13: Cho dãy số $C_{23}^0, C_{23}^1, C_{23}^2, ..., C_{23}^{23}$. Có bao nhiêu bộ gồm 3 số hạng liên tiếp trong dãy số trên lập thành cấp số cộng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ba số $C_{23}^n, C_{23}^{n+1}, C_{23}^{n+2}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow 2C_{23}^{n+1} = C_{23}^n + C_{23}^{n+2}$

$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = \left(C_{23}^n + C_{23}^{n+1}\right) + \left(C_{23}^{n+1} + C_{23}^{n+2}\right)$

$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = C_{24}^{n+1} + C_{24}^{n+2} \Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = C_{25}^{n+2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4.23!}{(n+1)!(22-n)!} = \dfrac{25!}{(n+2)!(23-n)!} \Leftrightarrow (n+2)(23-n) = 150 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=8 \\ n=13 \end{array}\right.$

Ta được số hạng liên tiếp lập thành cấp số cộng trong dãy số trên là $C_{23}^8, C_{23}^9, C_{23}^{10}$ và $C_{23}^{13}, C_{23}^{14}, C_{23}^{15}$.

Đáp án C.

STUDY TIPS

a, b, c theo thứ tự tạo thành cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$

Câu 14: Một bình chứa các viên bi đủ bốn màu: đỏ, trắng, xanh và lam. Lấy ngẫu nhiên và đồng thời bốn viên bi từ trong bình thì xác suất xảy ra các biến cố sau là như nhau:

(1) Cả bốn viên bi đều màu đỏ.

(2) Có một viên bi màu trắng và ba viên bi màu đỏ.

(3) Có một viên bi màu trắng, một viên bi màu xanh và hai viên bi màu đỏ.

(4) Bốn viên bi có đủ cả bốn màu.

Hỏi số viên bi nhỏ nhất trong bình thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 19. **B.** 69. **C.** 46. **D.** 21.

Lời giải

Gọi r, w, g, b lần lượt là số viên bi màu đỏ, trắng, xanh và lam.

Điều kiện $r, w, g, b \in \mathbb{N}^*; r \geq 4$.

Suy ra tổng số bi là $n = r + w + g + b$.

Do đó, số cách lấy bốn viên bi từ trong bình là C_n^4.

Số cách lấy được bốn viên bi màu đỏ là C_r^4.

Số cách lấy được một viên bi màu trắng và ba viên bi màu đỏ là $C_w^1 C_r^3$.

Số cách lấy được một viên bi máu trắng, một viên màu xanh và hai viên màu đỏ là $C_w^1 C_g^1 C_r^2$.

Số cách lấy được bốn viên bi có đủ cả bốn màu là $C_w^1 C_g^1 C_r^1 C_b^1$.

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{C_r^4}{C_n^4} = \dfrac{C_w^1 C_r^3}{C_n^4} = \dfrac{C_w^1 C_g^1 C_r^2}{C_n^4} = \dfrac{C_w^1 C_g^1 C_r^1 C_b^1}{C_n^4}$.

Giải hệ ra ta được $\begin{cases} r-3 = 4w \\ r-2 = 3g \\ r-1 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r+1 = 4(w+1) \\ r+1 = 3(g+1) \\ r+1 = 2(b+1) \end{cases}$. Ta tìm số nguyên dương r nhỏ nhất sao cho w, g, b cũng là các số nguyên dương.

Xét $r+1$ là bội chung nhỏ nhất của $4, 3$ và 2, tức là $r+1 = 12 \Leftrightarrow r = 11$.

STUDY TIP

Gọi r, w, g, b là số bi đen, trắng, xanh, lam. Ta có:

$w = \dfrac{r-3}{4}, g = \dfrac{r-2}{3}, b = \dfrac{r-1}{2}$

$\Rightarrow n = r + w + g + b$

$= 2r - 1 + \dfrac{r-11}{12}$

Có $n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow r = 12k + 11, k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow n \geq 2.11 - 1 = 21$.

(Thỏa mãn vì w, g, b đều thuộc $\mathbb{N}^*$)

Thử lại thấy $w=2, g=3, b=5$ đều là các số nguyên dương.

Vậy số bi nhỏ nhất cần tìm là $n=21$.

Đáp án D.

Câu 15: Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-3x+1}{2x+1}-ax-b\right)=0$. Khi đó $a+2b$ bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** 4. **D.** -3.

Lời giải

Cách 1: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-3x+1}{2x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4-2a)x^2-(a+2b+3)x-b+1}{2x+1}=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4-2a=0\\a+2b+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow a+2b=-3$.

Cách 2: Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-3x+1}{2x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\dfrac{5}{2}+\dfrac{7}{2(2x+1)}-ax-b\right)$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-3x+1}{2x+1}-ax-b\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\dfrac{5}{2}+\dfrac{7}{2(2x+1)}-ax-b\right)=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2-a=0\\-\dfrac{5}{2}-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$.

Khi đó $a+2b=-3$.

Đáp án D.

STUDY TIP

Với $f(x), g(x)$ là các đa thức thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0\Leftrightarrow$ Bậc $f(x)<$ Bậc $g(x)$.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1=1\\u_n=3u_{n-1}+1\end{cases}(\forall n\in\mathbb{N}, n\ge 2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $\log_9 u_n>100$.

A. 102. **B.** 101. **C.** 202. **D.** 201.

Lời giải

Ta có $u_n=3u_{n-1}+1\Leftrightarrow\left(u_n+\dfrac{1}{2}\right)=3\left(u_{n-1}+\dfrac{1}{2}\right)$

Xét dãy số (v_n) với $v_n=u_n+\dfrac{1}{2}$. Khi đó $(v_n):\begin{cases}v_1=\dfrac{3}{2}\\v_n=3v_{n-1}\end{cases}$

Suy ra (v_n) là cấp số nhân với số hạng đầu tiên $v_1=\dfrac{3}{2}$ và công bội $q=3$

$\Rightarrow v_n=\dfrac{3}{2}.3^{n-1}=\dfrac{3^n}{2}\Rightarrow u_n=\dfrac{3^n}{2}-\dfrac{1}{2}$.

Do đó $\log_9 u_n>100\Leftrightarrow u_n>9^{100}\Leftrightarrow 3^n-1>2.3^{200}$

$\Leftrightarrow 3^n>2.3^{200}+1\Leftrightarrow n>\log_3\left(2.3^{200}+1\right)$

Vậy số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên là $n_0=201$.

Đáp án D.

FOR REVIEW

Bài toán tổng quát: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases}u_1=a\\u_{n+1}=qu_n+d,\forall n\ge 1\end{cases}$ $(q\ne 0, q\ne 1, d\ne 0)$. Tìm u_n.

Xét (v_n) sao cho

$$v_n=u_n+\frac{d}{1-q}.$$

Từ đó tìm được

$$v_n=\left(a-\frac{d}{1-q}\right)q^{n-1}, n\ge 1.$$

Suy ra

$$u_n=\left(a-\frac{d}{1-q}\right)q^{n-1}+\frac{d}{1-q}.$$

Câu 17: Cho cấp số cộng (u_n). Gọi $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Biết rằng $\frac{S_p}{S_q} = \frac{p^2}{q^2}$ với $p \neq q; p, q \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{u_{2017}}{u_{2018}}$

A. $\frac{4031}{4035}$. **B.** $\frac{4031}{4033}$. **C.** $\frac{4033}{4035}$. **D.** $\frac{4034}{4035}$.

Lời giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n).

Ta có $\frac{S_p}{S_q} = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \frac{(u_1 + u_p).p}{(u_1 + u_q).q} = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_p}{u_1 + u_q} = \frac{p}{q}$.

Suy ra $\frac{u_1 + u_{2017}}{u_1 + u_{2018}} = \frac{2017}{2018} \Leftrightarrow \frac{u_1 + (u_1 + 2016d)}{u_1 + (u_1 + 2017d)} = \frac{2017}{2018} \Leftrightarrow \frac{2u_1 + 2016d}{2u_1 + 2017d} = \frac{2017}{2018}$

$\Leftrightarrow 2017(2u_1 + 2017d) = 2018(2u_1 + 2016d) \Leftrightarrow 2u_1 = 2017^2.d - 2018.2016d$

$\Leftrightarrow 2u_1 = 2017^2.d - (2017+1)(2017-1)d = 2017^2 d - (2017^2 - 1)d \Leftrightarrow 2u_1 = d.$

Vậy $\frac{u_{2017}}{u_{2018}} = \frac{u_1 + 2016d}{u_1 + 2017d} = \frac{u_1 + 2016.2u_1}{u_1 + 2017.2u_1} = \frac{4033}{4035}$.

Đáp án C.

FOR REVIEW

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì

* Số hạng thứ n là

$u_n = u_1 + (n-1).d$.

* Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng là

$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

$= \frac{(u_1 + u_n).n}{2}$

$= \frac{[2u_1 + (n-1)d].n}{2}$

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{4-3x} - e^4}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 3ae^4 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$ bằng

A. –5. **B.** 1. **C.** $5e^4$. **D.** –1.

Lời giải

Ta có $f(0) = 3ae^4$; $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{4-3x} - e^4}{x} = (-3e^4) \lim_{x \to 0} \frac{e^{-3x} - 1}{-3x} = -3e^4$.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a = -1$.

Đáp án D.

STUDY TIP

Để giải được bài toán này, các em cần nhớ:

* $f(x)$ liên tục tại $x_0 \in K$ $\Leftrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(x_0)$, với K là khoảng xác định của hàm số $f(x)$

* $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.