# MỤC LỤC

# Đề 1. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(3.0 điểm)*

a) Cho phương trình bậc hai $x^2-2mx+3m-2=0$, trong đó $x$ là ẩn, $m$ là tham số. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1, x_2$ và $x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$. Chứng minh rằng nếu $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $4a+c\geq 4b$.

**Lời giải.**

a) Phương trình đã cho có hai nghiệm suy ra $\Delta'=m^2-3m+2\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 2 \\ m\leq 1. \end{array}\right.$

Theo định lí Vi-ét ta có $x_1+x_2=2m, x_1x_2=3m-2$.
Do đó $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4m^2-2(3m-2)=4m^2-6m+4$.
Lập bảng biến thiên của hàm số $f(m)=4m^2-6m+4$ trên $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$ ta được

| $m$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(m)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | | $8$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta được $f(m)=4m^2-6m+4$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m=1$.

b) Do $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên $f(0)\geq 0 \Leftrightarrow c\geq 0$.

Mặt khác $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta=b^2-4ac\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b^2\leq 4ac. \end{cases}$

Ta có $4a+c\geq 2\sqrt{4ac}\geq 2\sqrt{b^2}=2|b|\geq 2b$.

**Bài 2** *(2.0 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{x-2}-\sqrt{3x}=1-\sqrt{2x+3}\,(x\in\mathbb{R})$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)\left(x^2+xy+y^2+3\right)=3\left(x^2+y^2\right)+2 \\ \sqrt{x+6}+\sqrt{y+3}=-x^2+2x+8 \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$.

**Lời giải.**

a) Điều kiện xác định $\begin{cases} 3x\geq 0 \\ x-2\geq 0 \\ 2x+3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\geq 2 \\ x\geq -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 2.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x}+1\\
\Leftrightarrow\ & x-2+2x+3+2\sqrt{(x-2)(2x+3)}=3x+1+2\sqrt{3x}\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(x-2)(2x+3)}=\sqrt{3x}\\
\Leftrightarrow\ & (x-2)(2x+3)=3x\\
\Leftrightarrow\ & 2x^2-x-6=3x\\
\Leftrightarrow\ & 2x^2-4x-6=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=3.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x=3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$.

b) Điều kiện xác định: $x\geq -6, y\geq -3$

Từ phương trình đầu của hệ ta có

$$\begin{aligned}
&(x-y)\left(x^2+xy+y^2+3\right)=3\left(x^2+y^2\right)+2\\
\Leftrightarrow\ & (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+3(x-y)=3x^2+3y^2+2\\
\Leftrightarrow\ & x^3-y^3+3x-3y=3x^2+3y^2+2\\
\Leftrightarrow\ & (x-1)^3=(y+1)^3\\
\Leftrightarrow\ & x-1=y+1\\
\Leftrightarrow\ & y=x-2\\
\Rightarrow\ & x\geq -1
\end{aligned}$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=-x^2+2x+8\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x+6}-3+\sqrt{x+1}-2+x^2-2x-3=0\\
\Leftrightarrow\ & \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3}+\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}+(x-3)(x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ & (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}+x+1\right)=0\\
\Leftrightarrow\ & x=3.
\end{aligned}$$

So sánh với điều kiện xác định ta được $(x,y)=(3,1)$.

**Bài 3** *(2.0 điểm)*

a) Cho $a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}.$$

b) Giải bất phương trình $\sqrt[3]{3-x}\geq 1-\sqrt{x-2}\ (x\in\mathbb{R})$.

**Lời giải.**

a) Ta có

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\ge\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow 4a(c+1)+4b(a+1)+4c(b+1)\ge 3(a+1)(b+1)(c+1)$$
$$\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)+4(a+b+c)\ge 3abc+3+3(ab+bc+ca)+3(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca+a+b+c\ge 6.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si cho ba số dương ta được

$ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{ab.bc.ca}=3$

$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$

Cộng từng vế hai bất đẳng thức trên ta được $ab+bc+ca+a+b+c\ge 6$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Điều kiện xác định $x\ge 2$.

Đặt $t=\sqrt{x-2}, t\ge 0$ suy ra $x=t^2+2$, thay vào bất phương trình ta được:

$$\sqrt[3]{1-t^2}\ge 1-t$$
$$\Leftrightarrow 1-t^2\ge(1-t)^3$$
$$\Leftrightarrow t^3-4t^2+3t\ge 0$$
$$\Leftrightarrow t(t-1)(t-3)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 3\\ 0\le t\le 1\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}\ge 3\\ 0\le\sqrt{x-2}\le 1\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 11\\ 2\le x\le 3.\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm là $S=[2;3]\cup[11;+\infty)$.

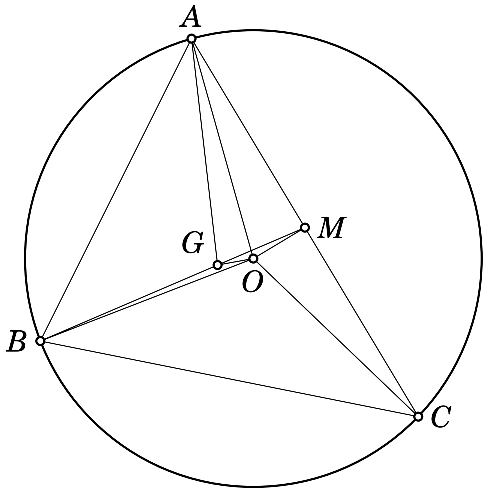
**Bài 4** *(3.0 điểm)*

a) Cho tam giác $ABC(AB<AC)$ nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn $(O)$, trọng tâm $G$ và $a=BC, b=CA, c=AB$. Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $AC$. Chứng minh rằng nếu bốn điểm $A$, $O$, $M$, $G$ cùng nằm trên một đường tròn thì $b^2+c^2=2a^2$.

b) Cho tam giác $ABC$ không vuông và $a=BC, b=CA, c=AB$. Chứng minh rằng nếu $a^2+b^2=2c^2$ và $\tan A+\tan B=2\tan C$ thì $ABC$ là một tam giác cân.

c) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc $Oxy$; cho tam giác $ABC$ có tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm lần lượt có tọa độ là $I(4;0), G\left(\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh $A$, $B$, $C$ của tam giác $ABC$ biết rằng đỉnh $B$ nằm trên đường thẳng $(d)$: $2x+y-1=0$ và điểm $M(4;2)$ nằm trên đường cao kẻ từ đỉnh $B$ của tam giác $ABC$.

**Lời giải**.




a) Ta có

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3.\overrightarrow{OG}$$
$$\Rightarrow 9.OG^2=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2$$
$$= OA^2+OB^2+OC^2+2.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+2.\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+2.\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$$
$$= 3R^2+OA^2+OB^2-AB^2+OB^2+OC^2-BC^2+OC^2+OA^2-CA^2$$
$$= 9R^2-a^2-b^2-c^2.$$

Do 4 điểm $A,G,O,M$ cùng nằm trên một đường tròn nên $OG$ vuông góc với $GA$ hay

$$OG^2+GA^2=OA^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}\left(9R^2-a^2-b^2-c^2\right)+\frac{1}{9}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)=R^2$$
$$\Leftrightarrow 9R^2-a^2-b^2-c^2+2b^2+2c^2-a^2=9R^2$$
$$\Leftrightarrow b^2+c^2=2a^2.$$

b) Ta có $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\dfrac{2S}{bc}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\dfrac{4S}{b^2+c^2-a^2}$.

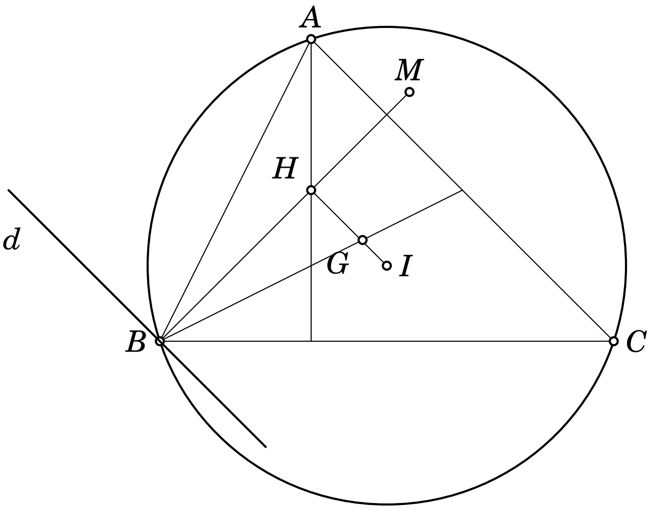
Tương tự ta tính được $\tan B$, $\tan C$

Theo giả thiết

$$\tan A+\tan B=2\tan C$$
$$\Leftrightarrow \frac{4S}{b^2+c^2-a^2}+\frac{4S}{c^2+a^2-b^2}=2\frac{4S}{a^2+b^2-c^2}$$
$$\Leftrightarrow a^4-\left(b^2-c^2\right)^2+b^4-\left(c^2-a^2\right)^2=2\left(c^4-\left(a^2-b^2\right)^2\right)$$
$$\Leftrightarrow a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+b^4-c^4-a^4+2c^2a^2=2c^4-2a^4-2b^4+4a^2b^2$$
$$\Leftrightarrow 2c^4-\left(a^2-b^2\right)^2=c^2\left(a^2+b^2\right)$$
$$\Leftrightarrow 2c^4-\left(a^2-b^2\right)^2=2c^4$$
$$\Leftrightarrow a=b.$$

Hay tam giác $ABC$ cân.

c)




Gọi $H$ là trực tâm tam giác $ABC$ ta có $\overrightarrow{IH} = 3.\overrightarrow{IG}$

Suy ra $H(3;1) \Rightarrow MH: \dfrac{x-4}{3-4} = \dfrac{y-2}{1-2} \Leftrightarrow x-y-2=0.$

Do $B$ là giao của $(d)$ và đường thẳng $MH$ nên tọa độ $B$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y-2=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(1;-1).$$

Gọi $N$ là trung điểm của $AC$. Khi đó $\overrightarrow{BN} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BG} \Rightarrow N(5;1).$

Ta có $\overrightarrow{n}_{AC} = \overrightarrow{u}_{MN} = (1;1)$

$\Rightarrow AC: 1(x-5) + 1\cdot(y-1) = 0 \Leftrightarrow x+y-6=0.$

Do $A$ thuộc đường thẳng $AC$ nên $A(t;6-t)$, kết hợp với $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (t-4)^2 + (6-t)^2 = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=7. \end{array}\right.$$

- Với $t=3 \Rightarrow A(3;3), C(7;-1).$
- Với $t=7 \Rightarrow A(7;-1), C(3;3).$

Vậy $A(3;3), B(1;-1), C(7;-1)$ hoặc $A(7;-1), B(1;-1), C(3;3).$

## Đề 2. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(3.0 điểm)*

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x+3)\sqrt{4x-1} + (2y+3)\sqrt{4y-1} = 2\sqrt{(2x+3)(2y+3)} \\ y+x=4xy. \end{cases}$

b) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn:

$$f(x+y) = f(x) + y,\ \forall x,y \in \mathbb{R} \text{ và } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}, \forall x \neq 0.$$

**Lời giải.**

a) $\begin{cases} (2x+3)\sqrt{4x-1} + (2y+3)\sqrt{4y-1} = 2\sqrt{(2x+3)(2y+3)} & (1) \\ y+x=4xy & (2) \end{cases}$

Điều kiện xác định $x \geq \frac{1}{4}; y \geq \frac{1}{4}$.

$(2) \Leftrightarrow x = y(4x-1) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 4x - 1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 4y - 1$ thay vào (1) ta được

$(2x+3)\sqrt{\frac{x}{y}} + (2y+3)\sqrt{\frac{y}{x}} = 2\sqrt{(2x+3)(2y+3)}$

Do $(2x+3)\sqrt{\frac{x}{y}} + (2y+3)\sqrt{\frac{y}{x}} \geq 2\sqrt{(2x+3)(2x+3)}$

Suy ra $(1) \Leftrightarrow x(2x+3) = y(2y+3) \Leftrightarrow (x-y)(2x+2y+3) = 0 \Leftrightarrow x = y$ thay vào (2) ta được $2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$. Với $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

b) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn:

$$f(x+y) = f(x) + y \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ và } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}, \forall x \neq 0.$$

Ta có $f(x+y) = f(x) + y \Rightarrow f(y) = f(0) + y, \forall y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x) = a + x$ với $a = f(0)$.

$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$

Mặt khác $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(0)+x}{x^2} = \frac{a+x}{x^2}, \forall x \neq 0$.

$\Rightarrow a + \frac{1}{x} = \frac{a+x}{x^2}, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow ax^2 = a, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

**Bài 2** *(2.0 điểm)* Tìm tất cả các số nguyên tố $p, q$ sao cho $\left(7^p - 4^p\right)\left(7^q - 4^q\right)$ chia hết cho $pq$.

**Lời giải**. $p, q$ đều khác 2, 7. Không mất tính tổng quát ta giả sử $q \geq p$. Khi đó từ giả thiết ta được $7^p - 4^p \vdots p$ hoặc $7^q - 4^q \vdots p$

TH1. $7^p - 4^p \vdots p$, theo định lí Fermat ta có $7^p - 4^p \equiv 3 \pmod{p} \Rightarrow 3 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 3$.

TH2. $7^q - 4^q \vdots p$, ta có $(p-1, q) = 1 \Rightarrow$ tồn tại 2 số nguyên dương $u, v$ sao cho $qv - (p-1)u = 1 \Rightarrow 7^q \equiv 4^q \pmod{p} \Rightarrow 7^{qv} \equiv 4^{qv} \pmod{p} \Rightarrow 7^{1+(p-1)u} \equiv 4^{1+(p-1)u} \pmod{p} \Rightarrow 7 \equiv 4 \pmod{p} \Rightarrow 3 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 3$.

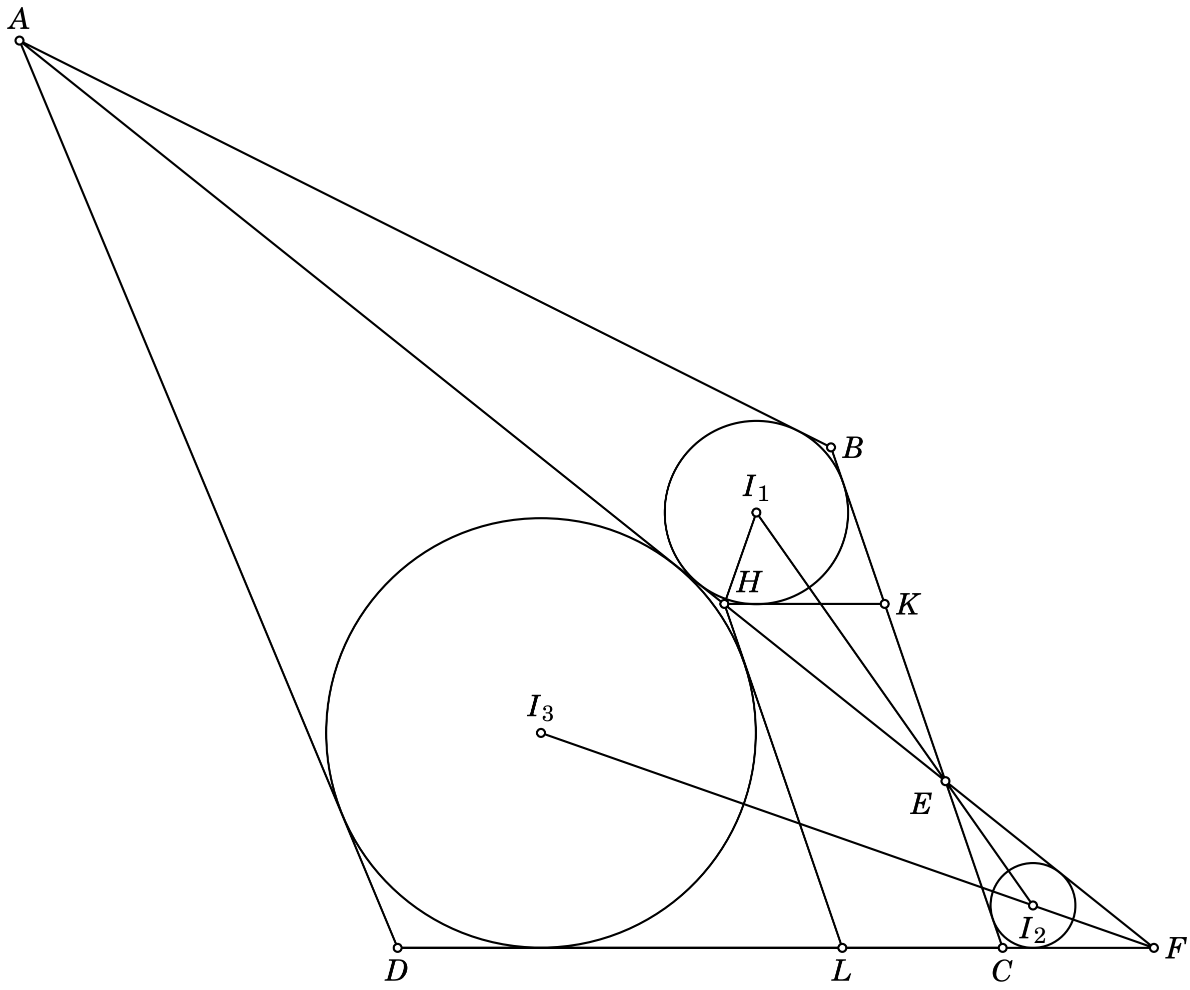
Với $p = 3$, từ giả thiết ban đầu ta được

$$\left(7^3 - 4^3\right)\left(7^q - 4^q\right) \vdots 3q \Rightarrow 9.31 \cdot \left(7^q - 4^q\right) \vdots 3q \Rightarrow q = 3, q = 31.$$

Vậy $(p, q) \in \{(3,3), (31,3), (3,31)\}$.

**Bài 3** *(2.0 điểm)* Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được một đường tròn. Một đường thẳng $\triangle$ đi qua $A$ cắt đoạn thẳng $BC$, tia đối của tia $CD$ tương ứng tại $E, F$ ($E, F$ không trùng với $B, C$). Gọi $I_1, I_2$ và $I_3$ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác $ABE, ECF$ và $FAD$. Tiếp tuyến của đường tròn $(I_1)$ song song với $CD$ (ở vị trí gần $CD$ hơn) cắt $\Delta$ tại $H$. Chứng minh rằng $H$ là trực tâm của tam giác $I_1I_2I_3$.

**Lời giải.**




Giả sử tiếp tuyến qua $H$ song song với $CD$ của đường tròn $(I_1)$ cắt $BC$ tại $K$ và đường thẳng qua $H$ song song với $BC$ cắt đường thẳng $CD$ tại $L$, suy ra $CKHL$ là một hình bình hành.

Do các tứ giác $ABCD, ABKH$ ngoại tiếp, nên

$$\begin{aligned} AD + HL &= AD + CK = AD + BC - BK \\ &= AB + CD - BK = AB - BK + CD = AH - HK + CD \\ &= AH - LC + CD = AH + DL \end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $ADLH$ ngoại tiếp, hay $HL$ tiếp xúc với $(I_3)$

Vì $\overrightarrow{FD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KH}; \overrightarrow{FH} \uparrow\uparrow \overrightarrow{HA}$ nên các đường phân giác $HI_1$ của góc $\widehat{AHK}$ và $FI_3$ của góc $\widehat{HFD}$ vuông góc với nhau; hay $I_1H \perp I_2I_3$ (Do $F, I_2, I_3$ thẳng hàng) (1)

Chứng minh tương tự, cũng được $HI_3 \perp EI_2$ hay $I_3H \perp I_1I_2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 4** Xét các số thực dương $a, b, c$ thỏa mãn $a + 2b + 3c \geq 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$L = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c}.$$

**Lời giải.** Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$a+\frac{4}{a}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4\Rightarrow\frac{3}{4}\left(a+\frac{4}{a}\right)\geq 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2$;

$b+\frac{9}{b}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{9}{b}}=6\Rightarrow\frac{1}{2}\left(b+\frac{9}{b}\right)\geq 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=3$;

$c+\frac{16}{c}\geq 2\sqrt{c\cdot\frac{16}{c}}=8\Rightarrow\frac{1}{4}\left(c+\frac{16}{c}\right)\geq 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c=4$.

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều, thu được $\frac{3a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\geq 8$ (1).

Mặt khác, do $a+2b+3c\geq 20$ nên $\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4}\geq 5$ (chia hai vế cho 4) (2).

Cộng (1) và (2), vế theo vế, ta được $L=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\geq 13$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2,b=3,c=4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $L$ bằng 13 , đạt được khi $a=2,b=3,c=4$.

**Bài 5** Tìm tất cả các tập hợp $X$ là tập con của tập hợp số nguyên dương thoả mãn các tính chất: $X$ chứa ít nhất hai phần tử và với mọi $m,n\in X, m<n$ thì tồn tại $k\in X$ sao cho $n=mk^2$.

**Lời giải**. Giả sử tìm được tập hợp $X$ thỏa mãn và $m<n$ là hai phần tử bé nhất của $X$. Khi đó, do cách xác định $X$ nên tồn tại $k\in X$ sao cho $n=mk^2$. Suy ra $m\leq k\leq n$ và do đó $k=m$ hoặc $k=n$.

Với $k=n\Rightarrow n=mn^2\Leftrightarrow mn=1$ vô lí. Với $k=m\Rightarrow m<n=m^3\Rightarrow m>1$.

- Nếu $|X|=2$ thì tập hợp $X=\{m,m^3\mid m>1\}$.
- Nếu $|X|\geq 3$, gọi $q$ là phần tử bé thứ ba của $X$ (tức là $m<n<q$ ). Khi đó tồn tại $\ell\in X$ sao cho $q=m\ell^2$.
  Do $q>\ell$ nên hoặc $\ell=m$ hoặc $\ell=n$.
  Nếu $\ell=m$ thì $q=m^3=n$, vô lý. Vậy $\ell=n=m^3$ và $q=m\ell^2=m^7$.
  Nhưng tồn tại $t\in X$ sao cho $q=nt^2$, do đó $t=m^2$. Mà $m<m^2<m^3\Rightarrow m^2\notin X$, vô lý.

Vậy $|X|=2$ và $X=\{m,m^3\mid m>1\}$.

## Đề 3. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} xy+3y^2-8y+7=\sqrt{3xy^3+6y^2} \\ \sqrt{xy+y+7}=\sqrt{y}(5-\sqrt{3y+1}) \end{cases}.$$

**Lời giải**.Điều kiện $\begin{cases} 3xy^3+6y^2\geq 0 \\ xy+y+7\geq 0 \\ y\geq 0. \end{cases}$

Dễ thấy $y=0$ không thoả mãn hệ. $y\neq 0$ chia hai vế phương trình thứ nhất trong hệ cho $y$ và chia hai vế phương trình thứ hai trong hệ cho $\sqrt{y}$ ta được

$$\begin{cases} x+3y+\dfrac{7}{y}-8=\sqrt{3xy+6} \\ \sqrt{x+\dfrac{7}{y}+1}+\sqrt{3xy+1}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+\dfrac{7}{y}-8=\sqrt{3xy+6} \\ x+3y+\dfrac{7}{y}+2+2\sqrt{x+3y+\dfrac{7}{y}+3xy+21}+1=25. \end{cases}$$

Đặt $a=x+3y+\dfrac{7}{y}$ và $b=\sqrt{3xy+6}$. Hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} a-8=b \\ a+2+2\sqrt{a+b^2+16}=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=11 \\ b=3. \end{cases}$$

Từ đó giải ra $(x;y)=(1;1),\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{3}{8}\right)$ tất cả đều thỏa điều kiện.

**Bài 2** Cho đa thức với hệ số thực $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ thoả mãn $P(1)=3, P(3)=11, P(5)=27$. Tính $P(-2)+7P(6)$.

**Lời giải**. Nhận xét $f(x)=x^2+2$ thoả mãn $f(1)=3, f(3)=11, f(5)=27$. Xét đa thức $Q(x)=P(x)-f(x)$ là đa thức bậc 4 có các nghiệm là $x=1, x=3, x=5$ nên $Q(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-m)$.

Ta có $P(-2)=Q(-2)+f(-2)=216+105m$, $P(6)=Q(6)+f(6)=128-15m$.

Vậy $P(-2)+7P(6)=216+105m+7(128-15m)=1112$.

**Bài 3** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn phương trình

$$(x^2+4y^2+28)^2=17(x^4+y^4+14y^2+49).$$

**Lời giải**.

$$\begin{aligned} & (x^2+4y^2+28)^2=17(x^4+y^4+14y^2+49) \\ \Leftrightarrow\ & x^2+4(y^2+7)=17[x^4+(y^2+7)^2] \\ \Leftrightarrow\ & 16x^4-8x^2(y^2+7)+(y^2+7)^2=0 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2-y^2-7=0 \\ \Leftrightarrow\ & (2x+y)(2x-y)=7 \end{aligned}$$

Do $x,y$ nguyên dương nên $2x+y\ge 2x-y$ và $2x+y>0$. Vì vậy

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(2;3).$$

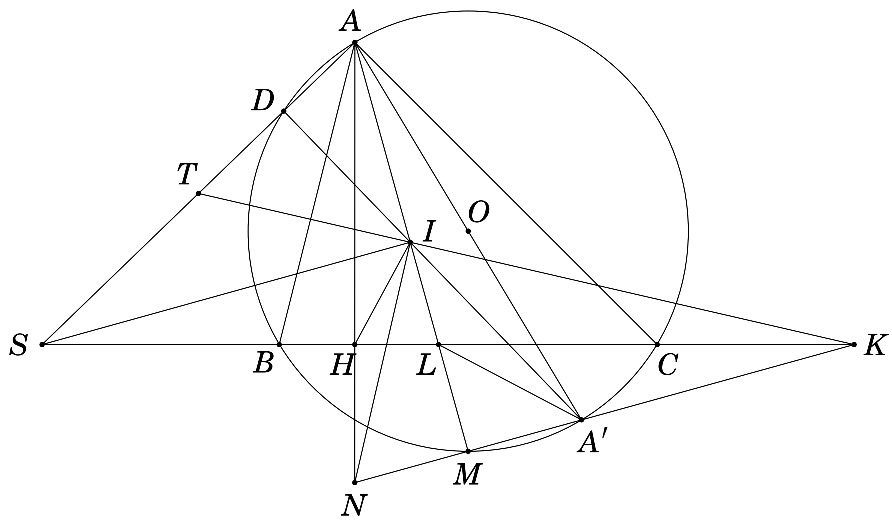
Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)=(2;3)$.

**Bài 4** Cho tam giác nhọn $ABC$ không cân nội tiếp đường tròn $(O)$, có đường cao $AH$ và tâm đường tròn nội tiếp là $I$. Đường thẳng $AI$ cắt lại đường tròn $(O)$ tại điểm thứ hai $M$. Gọi $A'$ là điểm đối xứng với $A$ qua $O$. Đường thẳng $MA'$ cắt các đường thẳng $AH, BC$ theo thứ tự tại $N$ và $K$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $NHIK$ nội tiếp đường tròn.

b) Đường thẳng $A'I$ cắt lại đường tròn $(O)$ tại điểm thứ hai $D$, hai đường thẳng $AD$ và $BC$ cắt nhau tại điểm $S$. Chứng minh rằng nếu $AB+AC=2BC$ thì $I$ là trọng tâm của tam giác $AKS$.

**Lời giải.**




a) Ta có $\widehat{OAC}=90^\circ-\dfrac{1}{2}\widehat{AOC}=90^\circ-\widehat{ABC}=\widehat{BAH}$, mà $AI$ là phân giác góc $A$ nên $\widehat{HAI}=\widehat{OAI}$, suy ra tam giác $ANA'$ cân tại $A$.
Gọi $L$ là giao điểm của $MA$ và $BC$.
Ta có $\widehat{HKN}=90^\circ-\widehat{HNK}=\widehat{HAM}=\widehat{LAA'}$, suy ra tứ giác $ALA'K$ nội tiếp. Do đó $MA'.MK=ML.MA$. (1)
Dễ thấy ngay hai tam giác $MCL$ và $MAC$ đồng dạng, suy ra $ML.MA=MC^2$. (2)
Do $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ nên $MI=MC$. (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra $MN.MK=MI^2\Rightarrow\widehat{NIK}=90^\circ$. Vậy tứ giác $NHIK$ nội tiếp.

b) Từ tứ giác $NHIK$ nội tiếp suy ra $\widehat{IHK}=\widehat{INK}=\widehat{IA'M}=\widehat{IAD}$. Suy ra tứ giác $AIHS$ nội tiếp. Do đó $\widehat{AIS}=\widehat{IHS}=90^\circ$.
Gọi $T$ là trung điểm của cạnh $SA$. Khi đó $\widehat{TIA}=\widehat{TAI}=\widehat{INK}=\widehat{MIK}$, suy ra ba điểm $T,I,K$ thẳng hàng (4).
Tiếp theo ta sẽ chứng minh $L$ là trung điểm của $SK$.
Ta có $\dfrac{AI}{IL}=\dfrac{AB}{BL}$ và $\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{AB}{AC}\Rightarrow\dfrac{BL}{BC}=\dfrac{AB}{AB+AC}=\dfrac{AB}{2BC}\Rightarrow BL=\dfrac{1}{2}AB$.
Do đó $\dfrac{AI}{IL}=2$ (5).
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác $ASL$ với cát tuyến $TIK$ ta có $\dfrac{TA}{TS}\cdot\dfrac{KS}{KL}\cdot\dfrac{IL}{IA}=1$ (6).
Từ (5) và (6) suy ra $KS=2KL$, tức $L$ là trung điểm của $SK$ (7).
Từ (4) và (7) suy ra $I$ là trọng tâm tam giác $AKS$ (đpcm).

**Bài 5** Cho các số thực $a$, $b$, $c$, $d$ thoả mãn $4a^2+b^2=2$ và $c+d=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2ac+bd+cd$.

**Lời giải**. Ta có $2ac\le 4a^2+\dfrac{c^2}{4}$; $bd\le b^2+\dfrac{d^2}{4}$; $cd\le\dfrac{(c+d)^2}{8}+\dfrac{cd}{2}$. Suy ra

$$P=2ac+bd+cd\le 4a^2+b^2+\frac{c^2}{4}+\frac{d^2}{4}+\frac{cd}{2}+\frac{(c+d)^2}{8}=\left(4a^2+b^2\right)+\frac{3(c+d)^2}{8}=8.$$

$P=8\Leftrightarrow(a;b;c;d)=\left(\dfrac{1}{2};1;2;2\right)$. Vậy giá trị lớp nhất của $P$ bằng 8.

**Bài 6** Cho tập hợp $M$ gồm 2014 số dương $a_1,a_2,\dots,a_{2014}$. Xét tất cả các tập con khác rỗng $T_i$ của $M$, gọi $s_i$ là tổng các số thuộc tập con $T_i$. Chứng minh có thể chia tập hợp tất cả các số $s_i$ được thành lập như vậy thành 2014 tập con khác rỗng không giao nhau, sao cho tỉ số của hai số bất kì thuộc cùng một tập tập con vừa được phân chia không vượt quá 2.

**Lời giải**. Đặt $n=2014$. Giả sử các phần tử của $M$ thoả mãn $a_1\le a_2\le\dots\le a_n$.
Đặt $S_0=0, S_m=a_1+a_2+\dots+a_m$, $(0\le m\le n)$.
Gọi $P$ là tập tất cả những số $s_i$ được xác định trong đề bài.
Kí hiệu $P_m=\{s\in P\mid S_{m-1}<s\le S_m\}$ với $m=1,2,3,\dots,n$. Ta chứng minh cách chia $P$ thành các tập $P_m$ như vậy thoả mãn điều kiện bài toán. Muốn vậy ta chỉ cần chứng minh $b\in P_m$ thì $S_m<2b$.
Thật vậy $b>S_{m-1}=a_1+a_2+\dots+a_m-1$ và $b=\sum\limits_{k=1}^{h}a_{i_k}$ nên phải tồn tại $i_k$ để $i_k\ge m$.
Vậy $b\ge a_{i_k}\ge a_m=S_m-S_{m-1}>S_m-b\Rightarrow 2b>S_m$.

## Đề 4. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1**

a) Giải phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2(x\in\mathbb{R})$.

b) Cho phương trình bậc hai $x^2-2mx+m^2-2m+4=0$ ($x$ là ẩn và $m$ là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm không âm $x_1$, $x_2$. Tính theo $m$ giá trị của biểu thức $P=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của $P$.

**Lời giải**.

a) Giải phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2(x\in\mathbb{R})$.

Điều kiện: $\begin{cases}x\ne 0\\ 2-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\sqrt{2};0)\cup(0;\sqrt{2})$

Đặt $y=\sqrt{2-x^2}>0$. Thay vào ta được: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$. Do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2\\ x+y=2xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy=2\\ x+y=2xy\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-(x+y)-2=0\\ x+y=2xy\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=2\\ xy=1\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-1\\ xy=-0{,}5\end{cases}\end{array}\right.$$

+ $\begin{cases}x+y=2\\ xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\ x^2-2x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1.\end{cases}$

+ $\begin{cases}x+y=-1\\ xy=-0{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-y\\ 2y^2+2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}$ (do $y>0$).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{3}}{2};1\right\}$.

b) Cho phương trình bậc hai $x^2-2mx+m^2-2m+4=0$ ($x$ là ẩn và $m$ là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm không âm $x_1$, $x_2$. Tính theo $m$ giá trị của biểu thức $P=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của $P$.

Phương trình $x^2-2mx+m^2-2m+4=0$ (1) có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-m^2+2m-4\ge 0\\ S=2m\ge 0\\ P=m^2-2m+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 2.$$

Theo định lý Vi-ét ta có $x_1+x_2=2m; x_1x_2=m^2-2m+4$. Do đó

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2}=\sqrt{x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{2m+2\sqrt{(m-1)^2+3}}$$

Do $m\ge 2\Rightarrow\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\ge\sqrt{8}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m=2$.

**Bài 2** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2-xy+y^2+x-2y=0\\ 2x-xy+y=2\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

**Lời giải**. Đặt $z=y-1$, thay vào hệ ta được:

$$\begin{cases}x^2-xz+z^2=1\\ x-xz+z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+z)^2-3xz=1\\ x+z-1=xz\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+z)^2-3(x+z)+2=0\\ x+z-1=xz\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+z=2\\ x+z=1\end{array}\right.\\ xz=x+z-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+z=2\\ xz=1\end{cases}\\ \begin{cases}x+z=1\\ xz=0\end{cases}\end{array}\right.$$

+ $\begin{cases} x+z=2 \\ xz=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2. \end{cases}$

+ $\begin{cases} x+z=1 \\ xz=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1-x \\ x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, z=0 \\ x=0, z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=1 \\ x=0, y=2. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $S=\{(1;2),(1;1),(0;2)\}$.

**Bài 3** Cho $a$, $b$, $c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác không nhọn. Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 10.$$

**Lời giải**. Do $a$, $b$, $c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác không nhọn nên có một trong các bất đẳng thức sau xảy ra: $a^2\geq b^2+c^2$, $b^2\geq c^2+a^2$, $c^2\geq a^2+b^2$. Giả sử $a^2\geq b^2+c^2$, khi đó ta có

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=1+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{b^2+c^2}{a^2}+(b^2+c^2)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$
$$\geq 1+a^2\cdot\frac{4}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{a^2}+4$$
$$=1+\frac{3a^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{a^2}+4\geq 1+3+2\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2}\cdot\frac{b^2+c^2}{a^2}}+4=10.$$

Do đó

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 10.$$

**Bài 4**

a) Cho tam giác $ABC$ nhọn, không cân và nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi $G$ và $M$ lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC$ và trung điểm cạnh $BC$. Chứng minh rằng nếu đường thẳng $OG$ vuông góc với đường thẳng $OM$ thì $AC^2+AB^2+2BC^2=12R^2$.

b) Cho tam giác $ABC$ có độ dài các đường cao kẻ từ đỉnh $A$, $B$, $C$ lần lượt là $m$, $n$, $p$. Tính độ dài các cạnh $AB$, $BC$, $CA$ theo $m$, $n$, $p$.

c) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ các đỉnh $A$, $B$, $C$ lần lượt có phương trình là

$$x-2y=0, x-2=0, x+y-3=0.$$

Tìm tọa độ các đỉnh $A$, $B$, $C$, biết rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ bằng $\sqrt{10}$ và đỉnh $A$ có hoành độ âm.

**Lời giải**.

a) Áp dụng quy tắc trọng tâm và quy tắc trung điểm ta có:

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}, \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}.$$

Khi đó

$$OG \perp OM \Rightarrow \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$$
$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 2R^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2R^2 - AB^2\right) + \frac{1}{2}\left(2R^2 - AC^2\right) + 2R^2 - BC^2 + 2R^2 = 0$$
$$\left(\text{chú ý } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 + 2BC^2 = 12R^2$$

b) Kí hiệu $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $p = \frac{a+b=c}{2}$. Khi đó ta có $a = \frac{2S}{m}$, $b = \frac{2S}{n}$, $c = \frac{2S}{p}$. Theo công thức Hê - rông ta có

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$\Leftrightarrow 4S = \sqrt{2S\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)2S\left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)2S\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)2S\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right)}$$
$$\Leftrightarrow 4S = 4S^2 \cdot k \Leftrightarrow S = \frac{1}{k}, \text{ trong đó}$$
$$k = \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right)}.$$

Do đó $a = \frac{2}{mk}$, $b = \frac{2}{nk}$, $c = \frac{2}{pk}$.

c) Do $BC$ vuông góc với đường cao kẻ từ $A$ nên $BC$ có dạng $2x + y + c = 0$.

Tọa độ đỉnh $B$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y + c = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -c - 4 \end{cases} \Rightarrow B(2; -c-4),$$

tọa độ $C$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y + c = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -c - 3 \\ y = c + 6 \end{cases} \Rightarrow C(-c-3; c+6).$$

$AB$ đi qua $B(2; -c-4)$ và vuông góc với đường cao kẻ từ $C$ nên

$AB: 1 \cdot (x-2) - 1 \cdot (y + c + 4) = 0 \Leftrightarrow x - y - c - 6 = 0.$

Tọa độ đỉnh $C$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y - c - 6 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2c + 12 \\ y = c + 6 \end{cases} \Rightarrow A(2c+12; c+6).$$

Theo giả thiết ta có

$$\sqrt{10} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} \Leftrightarrow \sqrt{10} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{2 \cdot \mathrm{d}(A, BC) \cdot BC} \Leftrightarrow \frac{AB \cdot AC}{\mathrm{d}(A, BC)} = 2\sqrt{10}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(2c+10)^2 + (2c+10)^2} \cdot |3c+15|}{\dfrac{|4c + 24 + c + 6 + c|}{\sqrt{5}}} = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow |c+5| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = -7 \\ c = -3. \end{array}\right.$$

**+** Nếu $c = -7 \Rightarrow A(-2; -1), B(2; 3), C(4; -1).$

+ Nếu $c=-3 \Rightarrow A(6;3), B(2;-1), C(0;3)$ không thỏa mãn hoành độ của $A$ âm.

Vậy $A(-2;-1)$, $B(2;3)$, $C(4;-1)$.

**Bài 5** Cho tứ giác lồi $ABCD$ và một điểm $M$ nằm bên trong tứ giác đó ($M$ không nằm trên các cạnh của tứ giác $ABCD$). Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một trong các góc $MAB$, $MBC$, $MCD$, $MDA$ có số đo không lớn hơn $45^\circ$.

**Lời giải**. Giả sử $\min\{\widehat{MAB}, \widehat{MBC}, \widehat{MCD}, \widehat{MDA}\} > 45^\circ$. (1)

Ta có $\cot\widehat{MAB} = \dfrac{\cos\widehat{MAB}}{\sin\widehat{MAB}} = \dfrac{MA^2+AB^2-MB^2}{2\cdot MA\cdot AB\cdot \sin\widehat{MAB}} = \dfrac{MA^2+AB^2-MB^2}{4S_{MAB}}$.

Kết hợp với (1) ta được

$$\frac{MA^2+AB^2-MB^2}{4S_{MB}} < \cot 45^\circ = 1 \Rightarrow MA^2+AB^2-MB^2 < 4S_{MB}. \quad (2)$$

Tương tự ta được các bất đẳng thức sauı đây :

$$MB^2+BC^2-MC^2 < 4S_{MIC} \quad (3)$$

$$MC^2+CD^2-MD^2 < 4S_{MCD} \quad (4)$$

$$MD^2+DA^2-MA^2 < 4S_{MMM} \quad (5)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (2), (3), (4), (5) ta được:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 < 4(S_{MAB}+S_{MBC}+S_{MCD}+S_{MDM}) = 4S_{ABCD} \quad (6)$$

Mặt khác ta lại có:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 \geq 2ABBC+2CDDA \geq 4S_{ABC}+4S_{CDM} = 4S_{ABCD}$$

mâu thuẫn với (6).

Do đó giả sử ban đầu là sai suy ra tồn tại ít nhất một trong các góc $MAB$, $MBC$, $MCD$, $MDA$ có số đo không lớn hơn $45^\circ$.

# Đề 5. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(3,0 điểm)*

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}} = (x+3y)(3x+y) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{y}} = 2(y^2-x^2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

b) Tìm tất cả các giá trị của $a$, $b$ sao cho phương trình $x^3+ax^2+bx+3a=0$ có các nghiệm đều là các số nguyên dương.

**Lời giải**.

a) Điều kiện $x$, $y>0$.

Đặt $\sqrt{x}=a>0$, $\sqrt{y}=b>0$; viết hệ đã cho về dạng

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b} = (a^2+3b^2)(3a^2+b^2) & (1) \\ \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2b} = 2(b^4-a^4) & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2)$ thu được $\dfrac{2}{a} = a^4+10a^2b^2+5b^4 \Rightarrow a^5+10a^3b^2+5ab^4 = 2(3)$.

(2) − (1) thu được $\frac{1}{b} = 5a^4 + 10a^2b^2 + b^4 \Rightarrow 5a^4b + 10a^2b^3 + b^5 = 1(4)$.

Từ (3) và (4) thu được $(a+b)^5 = 3$ và $(a-b)^5 = 1$.

Từ đó, tìm được $a = \frac{\sqrt[5]{3}+1}{2}$ và $b = \frac{\sqrt[5]{3}-1}{2}$.

Và do đó, tìm được $x = \frac{(\sqrt[5]{3}+1)^2}{4}$, $y = \frac{(\sqrt[5]{3}-1)^2}{4}$.

b) Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm nguyên dương $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Khi đó, theo định lý Vi-ét ta có $\alpha+\beta+\gamma = -a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = b$ và $\alpha\beta\gamma = -3a$ và do đó $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\alpha\beta\gamma}{3}$ (1).

(1) $\Leftrightarrow 3\alpha+3\beta+3\gamma = \alpha\beta\gamma \Leftrightarrow (\alpha\gamma-3)(\beta\gamma-3) = 3\gamma^2+9$ (2).

- Với $\gamma > 3$ thì $\beta > 3$ và $\frac{\alpha\beta\gamma}{3} > 3\alpha \geq \alpha+\beta+\gamma = \frac{\alpha\beta\gamma}{3}$, mâu thuẫn với (1). Vậy $1 \leq \gamma \leq 3$.
- Với $\gamma = 3$ khi đó $\beta \geq 3, (3\alpha-3)\cdot(3\beta-3) = 3\cdot 3^2+9 \Leftrightarrow (\alpha-1)\cdot(\beta-1) = 4$. Từ đó $\alpha = \beta = 3 \Rightarrow a = -9, b = 27$.
- Với $\gamma = 2 : \beta \geq 2, (2\alpha-3)\cdot(2\beta-3) = 3\cdot 3^2+9 \Leftrightarrow (2\alpha-3)\cdot(2\beta-3) = 21$. Giải phương trình này với chú ý $\alpha \geq \beta \geq 2$ ta được $(\alpha;\beta) \in \{(12;2),(5;3)\}$. Với $\alpha = 12, \beta = 2 \Rightarrow a = -16, b = 52$. Với $\alpha = 5, \beta = 3 \Rightarrow a = -10, b = 31$.
- Với $\gamma = 1 : \beta \geq 1, (2\alpha-3)\cdot(2\beta-3) = 3\cdot 1^2+9 \Leftrightarrow (2\alpha-3)\cdot(2\beta-3) = 12$, vô lí.

Vậy tất cả các cặp số $(a;b) \in \{(-9;27),(-16;52),(-10;31)\}$.

**Bài 2** *(2,0 điểm)* Giả sử $a$, $b$, $c$, $d$ là các số nguyên sao cho $a-b+c-d$ là số nguyên lẻ và chia hết $a^2-b^2+c^2-d^2$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương $n$ đều có $a-b+c-d$ chia hết $a^n-b^n+c^n-d^n$.

**Lời giải**.

- Chứng minh được nhận xét: "Với $a,b,x,y,z,t$ là các số nguyên sao cho $a-b$ là ước của $x-y$ và là ước của $z-t$ thì $a-b \mid xz-yt$".
- Mặt khác, do $(a+c)^2-(b+d)^2 = (a-b+c-d)(a+b+c+d) \vdots (a-b+c-d)$ nên suy ra
$$(a-b+c-d) \mid [a^2-b^2+c^2-d^2-2(ac-bd)]$$
Từ đó, do giả thiết nên thu được $(a-b+c-d) \mid (ac-bd)$.
- Ta sẽ chứng minh kết luận của bài toán bằng phương pháp quy nạp toán học.
  - ⋆ Với $n=1, n=2$: thì kết luận hiển nhiên đúng.
  - ⋆ Giả sử khẳng định đúng tới $n$, tức là $(a-b+c-d) \mid (a^n-b^n+c^n-d^n)$ với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
    Ta cần chứng minh $a-b+c-d \mid a^{n+1}-b^{n+1}+c^{n+1}-d^{n+1}$.
    Thật vậy, do $a-b+c-d \mid (a+c)-(b+d)$ và nhận xét ở trên suy ra $a-b+c-d$ là ước của
$$(a+c)\cdot(a^n+c^n)-(b+d)\cdot(b^n+d^n) = a^{n+1}-b^{n+1}+c^{n+1}-d^{n+1} - ac\cdot(a^{n-1}+c^{n-1})-bd\cdot(b^{n-1}+d^{n-1}).$$

Nhưng, do (1), giả thiết quy nạp và nhận xét ở trên suy ra

$$(a-b+c-d)\mid\left[c\cdot(a^{n-1}+c^{n-1})-bd\cdot(b^{n-1}+d^{n-1})\right]$$

Vậy suy ra $a-b+c-d$ là ước của

$$(a+c)\cdot(a^n+c^n)-bd\cdot(b^n+d^n)+ac\cdot(a^{n-1}+c^{n-1})+bd\cdot(b^{n-1}+d^{n-1})$$
$$=a^{n+1}-b^{n+1}+c^{n+1}-d^{n+1}.$$

Lúc đó, (2) được chứng minh.

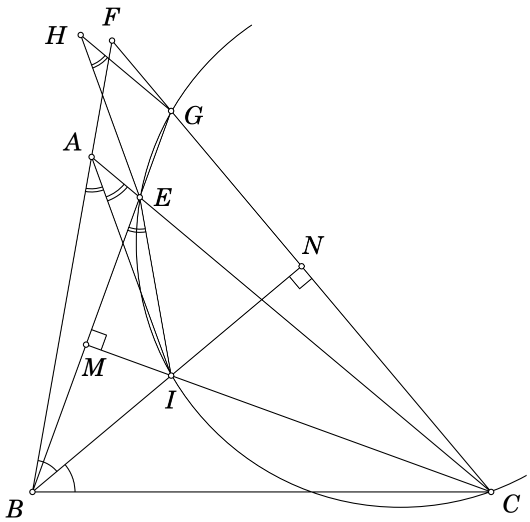
Từ đó, theo nguyên lý quy nạp, suy ra $(a-b+c-d)\mid(a^n-b^n+c^n-d^n)$ với mọi số nguyên dương $n$.

**Bài 3** *(3,0 điểm)* Trong mặt phẳng cho tam giác $ABC$ không cân ngoại tiếp đường tròn tâm $I$. Lấy $E$ và $F$ lần lượt trên các đường thẳng $AC$ và $AB$ sao cho $CB=CE=BF$, đồng thời chúng nằm về cùng một phía với $A$ đối với đường thẳng $BC$. Các đường thẳng $BE$ và $CF$ cắt nhau tại $G$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm $C$, $E$, $I$ và $G$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) Trên đường thẳng qua $G$ và song song với $AC$ lấy điểm $H$ sao cho $HG=AF$ đồng thời $H$ khác phía với $C$ đối với đường thẳng $BG$. Chứng minh rằng $\widehat{EHG}=\frac{1}{2}\cdot\widehat{CAB}$.

**Lời giải.**




a) Không mất tính tổng quát, xét trường hợp $AB<BC<CA$, các trường hợp khác xét tương tự. Khi đó, $E$ nằm trên đoạn $CA$, $F$ nằm trên tia đối của tia $AB$ (hình vẽ).

Từ giả thiết, suy ra $F$ đối xứng với $C$ qua phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$.

Do đó $\widehat{CFA}=\widehat{CFB}=90^\circ-\dfrac{\widehat{ABC}}{2}$ và $\widehat{AIC}=180^\circ-\dfrac{\widehat{CAB}+\widehat{BCA}}{2}=90^\circ+\dfrac{\widehat{ABC}}{2}$.

Suy ra tứ giác $AFCI$ nội tiếp.

Từ đó $\widehat{AFI}=\widehat{ACI}=\dfrac{\widehat{BCA}}{2}$ và $\dfrac{\widehat{CAB}}{2}=\widehat{IAC}=\widehat{IFC}=\widehat{ICF}$.

Do $\widehat{EBA}=\widehat{BEC}-\widehat{CAB}=\left(90^\circ-\dfrac{\widehat{BCA}}{2}\right)-\widehat{CAB}=\dfrac{\widehat{CAB}}{2}\Rightarrow\widehat{IBE}=\dfrac{\widehat{CAB}}{2}$.

Hơn nữa, do tính đối xứng nên $\widehat{IEB} = \widehat{IBE} = 90^\circ - \widehat{MGC} = \widehat{MCG} = \widehat{ICG}$.
Suy ra tứ giác $CIEG$ nội tiếp.

b) Do tứ giác $CIEG$ nội tiếp, nên $\widehat{EGI} = \widehat{ECI} = \dfrac{\widehat{BCA}}{2} = \widehat{AFI}$.
Hơn nữa, do $\widehat{IAB} = \widehat{IEB}$ nên $\widehat{GEI} = \widehat{FAI}$.
Suy ra $\triangle GEI \backsim \triangle FAI$.
Suy ra $\dfrac{EG}{BI} = \dfrac{EG}{EI} = \dfrac{AF}{AI} \Rightarrow \dfrac{HG}{GE} = \dfrac{AF}{GE} = \dfrac{AI}{BI}$.
Nhưng $\widehat{HGE} = \widehat{AEB} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{BCA}}{2} = \widehat{AIB}$
Suy ra $\triangle HGE \backsim \triangle AIB$.
Từ đó $\widehat{EHG} = \widehat{BAI} = \dfrac{\widehat{CAB}}{2}$.

**Bài 4** *(1,0 điểm)* Ký hiệu $\mathbb{R}^\star$ để chỉ tập hợp các số thực khác 0. Tìm tất cả các hàm số $f$ xác định trên $\mathbb{R}^\star$, nhận giá trị thực và thỏa mãn

$$xf\left(x+\frac{1}{y}\right)+yf(y)+\frac{y}{x}=yf\left(y+\frac{1}{x}\right)+xf(x)+\frac{x}{y}\quad \forall x,y\neq 0.$$

**Lời giải**. Đặt $f(x)-x=g(x)$, phương trình hàm đã cho được viết lại về dạng

$$x\cdot g\left(x+\frac{1}{y}\right)+y\cdot g(y)=y\cdot g\left(y+\frac{1}{x}\right)+x\cdot g(x)\quad \forall x,y\neq 0\quad (1)$$

Cho $y=1$ thu được $x\cdot g(x+1)+g(1)=g\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+x\cdot g(x)\quad \forall x\neq 0\quad (2)$.

Trong (2), thay $x$ bởi $\dfrac{1}{x}$, ta được

$$\frac{1}{x}\cdot g\left(\frac{1}{x}+1\right)+g(1)=g(1+x)+\frac{1}{x}\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow g\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\cdot g(x+1)+g\left(\frac{1}{x}\right)-x\cdot g(1)\quad \forall x\neq 0\quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $x\cdot g(x)+g\left(\dfrac{1}{x}\right)=(x+1)\cdot g(1)\quad \forall x\neq 0$.

Trong (1), cho $y=-1$, bằng lập luận tương tự, cũng được

$$x\cdot g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)=-g(-1)\cdot(x-1)\quad \forall x\neq 0$$

Từ (4) và (5) suy ra

$$2x\cdot g(x)=(g(1)-g(-1))\cdot x+(g(1)+g(-1))\quad \forall x\neq 0$$

hay

$$g(x)=a+\frac{b}{x}\quad \forall x\neq 0$$

Ở đây $a,b$ là hai hằng số.

Suy ra $f(x)=a+\dfrac{b}{x}+x;\forall x\neq 0$.

Thử lại ta thấy $f(x)=a+\dfrac{b}{x}+x;\forall x\neq 0$ thỏa mãn phương trình đã cho.

**Bài 5** Một số nguyên dương được gọi là *dễ thương* nếu trong biểu diễn thập phân của nó không có chứa chữ số 0 và tổng bình phương các chữ số của nó là một số chính phương.

a) Tìm số *dễ thương* lớn nhất có hai chữ số.

b) Hỏi có hay không số *dễ thương* có 2013 chữ số?

**Lời giải.**

a) Giả sử số dễ thương có hai chữ số lớn nhất là $\overline{ab}, 1 \le a, b \le 9$.
Theo giả thiết ta có $a^2 + b^2 = c^2$ là số chính phương.
Nếu $a$, $b$ đều không chia hết cho 3 thì $a^2 + b^2 \equiv 2 (\text{mod} 3)$, vô lý vì $a^2 + b^2$ là số chính phương suy ra $ab \equiv 0 (\text{mod} 3)$.

- Nếu $a = 9 \Rightarrow 81 + b^2 = c^2 \Rightarrow c^2 - b^2 = 81$ không có nghiệm nguyên dương với $1 \le b \le 9$
- Nếu $a = 8 \Rightarrow b \vdots 3 \Rightarrow b \in \{3;6;9\}$, thử trực tiếp ta thấy $b = 6$ thỏa mãn.
  Vậy số *dễ thương* lớn nhất có 2 chữ số là 86.

b) Xét số $A = 222211\ldots1$. Khi đó $2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + \underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{2009 \text{ số } 1^2} = 2025 = 45^2$.

Suy ra $A = 2222\underbrace{11\ldots1}_{2009 \text{ số } 1}$ là số *dễ thương*.

## Đề 6. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(4.0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 2 \ (x \in \mathbb{R})$.

b) Giả sử phương trình bậc hai ẩn $x$ ( $m$ là tham số): $x^2 - 2(m-1)x - m^3 + (m+1)^2 = 0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 \le 4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2(3x_1 + 3x_2 + 8)$.

**Lời giải.**

a) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 2 \ (x \in \mathbb{R})$.
Ta có $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ nên phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - x + 1 + x^2 + x + 1 + 2\sqrt{\left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^4 + x^2 + 1} = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \ge 0 \\ x^4 + x^2 + 1 = (1 - x^2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^4 + x^2 + 1 = 1 - 2x^2 + x^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 \le 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m^2-4) \ge 0 \\ 2(m-1) \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ -2 \le m \le 0 \end{array}\right. \\ m \le 3 \end{cases} \left[\begin{array}{l} -2 \le m \le 0 \\ 2 \le m \le 3. \end{array}\right.$$

Theo định lí Viet ta có $x_1 + x_2 = 2(m-1)$, $x_1x_2 = -m^3 + (m+1)^2$ suy ra

$P = (x_1+x_2)^3 + 8x_1x_2 = 8(m-1)^3 - 8m^3 + 8(m+1)^2 = -16m^2 + 40m$

Bảng biến thiên

| $m$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $-144$ | $\nearrow$ | $0$ | ////// | $16$ | $\searrow$ | $-24$ |

Từ bảng biến thiên ta được: $P_{\max} = 16$ khi $m = 2$, $P_{\min} = -144$ khi $m = -2$.

**Bài 2** *(1.5 điểm)* Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x-1) = 1 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

**Lời giải**. Ta có

$$\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x-1) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 - y\right) + xy\left(x^2 - y\right) + xy = 1 \\ \left(x^2 - y\right)^2 + xy = 1. \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = x^2 - y \\ b = xy \end{cases}$ Hệ trở thành: $\begin{cases} a + ab + b = 1 \\ a^2 + b = 1 \end{cases}$ (*).

Hệ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 2a = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(a^2 + a - 2\right) = 0 \\ b = 1 - a^2. \end{cases}$

Từ đó tìm ra $(a; b) \in \{(0;1); (1;0); (-2;-3)\}$

- Với $(a;b) = (0;1)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$
- Với $(a;b) = (1;0)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = (0;-1); (1;0); (-1;0).$
- Với $(a;b) = (-2;-3)$ ta có hệ

$$\begin{cases} x^2 - y = -2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{3}{x} \\ x^3 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{3}{x} \\ (x+1)\left(x^2 - x + 3\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1; y = 3.$$

Kết luận: Hệ có 5 nghiệm $(x;y) \in \{(1;1); (0;-1); (1;0); (-1;0); (-1;3)\}$.

**Bài 3** *(1.5 điểm)* Cho $x$, $y$ là hai số thực dương thoả mãn điều kiện $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=2012$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$.

**Lời giải**. Đặt $t=x+\sqrt{1+x^2}$ thì dễ thấy $t>0$ và $x=\dfrac{t^2-1}{2t}$ (1)

Từ giả thiết ta có $y+\sqrt{1+y^2}=\dfrac{2012}{t}$. Từ đây cũng suy ra $y=\dfrac{2012^2-t^2}{2.2012.t}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x+y=\dfrac{t^2-1}{2t}+\dfrac{2012^2-t^2}{2.2012.t}=\dfrac{2011}{2.2012}\left(t+\dfrac{2012}{t}\right)$

Do đó $x+y\geq\dfrac{2011}{2\cdot2012}\cdot2\sqrt{t\cdot\dfrac{2012}{t}}=\dfrac{2011}{2\cdot2012}\cdot2\sqrt{2012}=\dfrac{2011}{\sqrt{2012}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=\sqrt{2012}$. Từ (1) và (2) suy ra $x=y=\dfrac{2011}{2\sqrt{2012}}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P$ bằng $\dfrac{2011}{\sqrt{2012}}$, khi $x=y=\dfrac{2011}{2\sqrt{2012}}$.

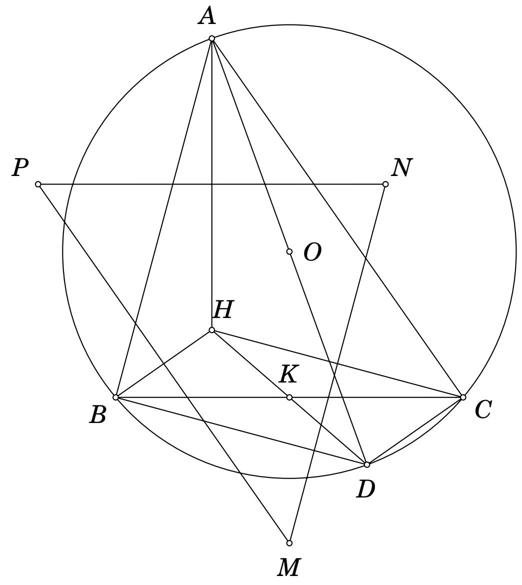
**Bài 4** *(3.0 điểm)*

a) Cho tam giác $ABC$ nội tiếp trong đường tròn tâm $O$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là điểm đối xứng của $O$ qua các đường thẳng $BC$, $CA$, $AB$; $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$ và $L$ là trọng tâm tam giác $MNP$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ và ba điểm $O$, $H$, $L$ thẳng hàng.

b) Cho tứ giác lồi $ABCD$. Giả sử tồn tại một điểm $M$ nằm bên trong tứ giác sao cho $\widehat{MAB}=\widehat{MBC}=\widehat{MCD}=\widehat{MDA}=\varphi$. Chứng minh đẳng thức sau:
$$\cot\varphi=\frac{AB^2+BC^2+CD^2+DA^2}{2AC\cdot BD\cdot\sin\alpha}$$
trong đó $\alpha$ là số đo góc giữa hai đường thẳng $AC$ và $BD$.

c) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc $Oxy$, cho tam giác $ABC$ ngoại tiếp đường tròn tâm $I$. Các đường thẳng $AI$, $BI$, $CI$ lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ tại các điểm $M(1;-5)$, $N\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{5}{2}\right)$, $P\left(-\dfrac{13}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ ($M$, $N$, $P$ không trùng với các đỉnh của tam giác $ABC$ ). Tìm tọa độ các đỉnh $A$, $B$, $C$ biết rằng đường thẳng $AB$ đi qua điểm $Q(-1;1)$ và điểm $A$ có hoành độ dương.

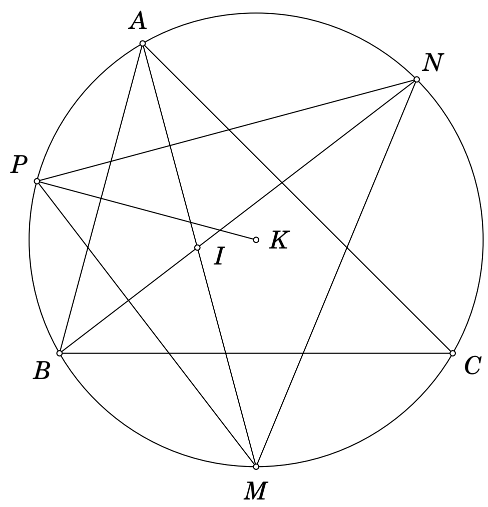
**Lời giải**.




a) Kẻ đường kính $AD$, khi đó tứ giác $BHCD$ là hình bình hành nên trung điểm $K$ của $BC$ cũng là trung điểm của $HD$, trong tam giác $AHD$ có $OK$ là đường trung bình nên
$2\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$
Ta có $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OM}$ và các đẳng thức tương tự ta được:
$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=2\overrightarrow{OH}$
$\Rightarrow 3\overrightarrow{OL}=2\overrightarrow{OH}$ suy ra $O$, $H$, $L$ thẳng hàng.

b) Trước hết ta có các kết quả sau: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$; $\cot\varphi=\frac{AB^2+MA^2-MB^2}{4S_{MAB}}$
Tương tự ta được:
$$\cot\varphi=\frac{AB^2+MA^2-MB^2}{4S_{MAB}}=\frac{BC^2+MB^2-MC^2}{4S_{MBC}}=\frac{CD^2+MC^2-MD^2}{4S_{MCD}}$$
$$=\frac{DA^2+MD^2-MA^2}{4S_{MDA}}=\frac{AB^2+BC^2+CD^2+DA^2}{4(S_{MAB}+S_{MBC}+S_{MCD}+S_{MDA})}$$
$$=\frac{AB^2+BC^2+CD^2+DA^2}{4S_{ABCD}}=\frac{AB^2+BC^2+CD^2+DA^2}{2\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\alpha}$$

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là đường tròn đi qua 3 điểm $M$, $N$, $P$ nên ta lập được phương trình này là $x^2+y^2+3x-29=0$ suy ra tâm $K$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ có tọa độ là $K\left(-\frac{3}{2};0\right)$.




Do $AB \perp KP$ nên $AB$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AB}} = \overrightarrow{KP} = -\frac{5}{2}(2;-1)$.

Suy ra phương trình $AB : 2(x+1)-1(y-1)=0 \Leftrightarrow 2x-y+3=0$. Do đó tọa độ $A$, $B$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ x^2+y^2+3x-29=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+3 \\ x^2+3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=5 \\ x=-4, y=-5. \end{array}\right.$$

Suy ra $A(1;5)$, $B(-4;-5)$. Do $AC \perp KN$ nên $AC$ có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{AC}} = \overrightarrow{KN} = \frac{5}{2}(2;1)$.

Suy ra phương trình đường thẳng $AC$: $2(x-1)+y-5=0 \Leftrightarrow 2x+y-7=0$. Khi đó tọa độ $A$, $C$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+y-7=0 \\ x^2+y^2+3x-29=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+7 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=5 \\ x=4, y=-1 \end{array}\right.$$

Từ đây suy ra $C(4;-1)$

Vậy $A(1;5)$, $B(-4;-5)$, $C(4;-1)$.

## Đề 7. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(4,0 điểm)*

a) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y=m-2 \\ x^2+y^2+2x+2y=-m^2+4 \end{cases}$ (trong đó $m$ là tham số; $x$ và $y$ là ẩn).

i) Tìm $m$ để hệ phương trình trên có nghiệm.

ii) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $A = xy + 2(x+y) + 2011$.

b) Tìm tất cả các giá trị $m$ để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt đều lớn hơn $-3$

$$x^4-(3m+1)x^2+6m-2=0.$$

**Lời giải**.

a) Đặt $S = x+y; P = xy$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} S=m-2 \\ S^2-2P+2S=-m^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=m-2 \\ P=m^2-m-2. \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm thì

$S^2 \geq 4P$

$\Leftrightarrow (m-2)^2 \geq 4\left(m^2 - m - 2\right)$

$\Leftrightarrow m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$

b) Ta có $A = P + 2S + 2011 = m^2 + m + 2005.$

Lập bảng biến thiên ta được

| $m$ | $-2$ | $-0{,}5$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | 2007 ↘ | 2004,75 | ↗ 2011 |

$\max A = 2011$ khi $m = 2; \min A = 2004{,}75$ khi $m = -0{,}5$

Đặt $t = x^2 \geq 0$, thay vào phương trình ta được

$t^2 - (3m+1)t + 6m - 2 = 0 \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3m - 1. \end{array}\right.$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi

$\begin{cases} 3m - 1 > 0 \\ 3m - 1 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{3}.$

Khi đó phương trình đã cho có bốn nghiệm là $\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{3m-1}.$

Để các nghiệm đều lớn hơn $-3$ thì $-\sqrt{3m-1} > -3 \Leftrightarrow \sqrt{3m-1} < 3 \Leftrightarrow m < \dfrac{10}{3}.$

Vậy các giá trị của $m$ là $m \in \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{10}{3}\right) \setminus \{1\}$

**Bài 2** *(1,5 điểm)* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 1 \\ \sqrt{x^2+3} + \sqrt{y^2+3} = 4. \end{cases}$$

**Lời giải**. ĐK $xy \geq 0$,

ta thấy từ phương trình thứ nhất $\Rightarrow x + y > 0$,

do đó $x \geq 0, y \geq 0$.

Từ đó ta đặt $u = \sqrt{x} \geq 0, v = \sqrt{y} \geq 0$ thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 1 \\ \sqrt{u^4+3} + \sqrt{v^4+3} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 = 1 + 3uv \\ u^4 + v^4 + 6 + 2\sqrt{3u^4 + 3v^4 + u^4v^4 + 9} = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 = 1 + 3uv \\ \left[(u+v)^2 - 2uv\right]^2 - 2u^2v^2 + 2\sqrt{u^4v^4 + 3\left[(u+v)^2 - 2uv\right]^2 - 6u^2v^2 + 9} = 10 \end{cases}$$

Đặt $t = uv \Rightarrow 0 \le t \le 1$ (vì $1 + 3uv = (u+v)^2 \ge 4uv \Rightarrow uv \le 1$ ).

Thế từ phương trình thứ nhất của hệ trên vào phương trình thứ hai ta được

$$2\sqrt{t^4 - 3t^2 + 6t + 12} = t^2 - 2t + 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(t^4 - 3t^2 + 6t + 12\right) = \left(t^2 - 2t + 9\right)^2 \\ t^2 - 2t + 9 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3t^4 + 4t^3 - 34t^2 + 60t - 33 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(3t^3 + 7t^2 - 27t + 33\right) = 0.$$

+Nếu $t = 1 \Leftrightarrow uv = 1$ ta có $\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$

+Nếu $3t^3 + 7t^2 - 27t + 33 = 0 \Leftrightarrow 3t^3 + 7t^2 + 6 + 27(1-t) = 0$ vô lý vì $0 \le t \le 1$.

+Nếu $3t^3 + 7t^2 - 27t + 33 = 0 \Leftrightarrow 3t^3 + 7t^2 + 6 + 27(1-t) = 0$ vô lý vì $0 \le t \le 1$.

Kết luận nghiệm của hệ là $(x;y) = (1;1)$.

**Bài 3** *(1 điểm)* Chứng minh rằng nếu $x, y$ là các số thực dương thì

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \ge \frac{1}{1+xy}.$$

**Lời giải**. Do $x, y > 0$ nên bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left[(1+x)^2 + (1+y)^2\right](1+xy) \ge (1+x)^2(1+y)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(2 + 2x + 2y + x^2 + y^2\right)(1+xy) \ge \left(1 + 2x + x^2\right)\left(1 + 2y + y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)^2 + (xy-1)^2 \ge 0.$$

Bất đẳng thức này luôn đúng. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$.

**Bài 4** *(3,5 điểm)*

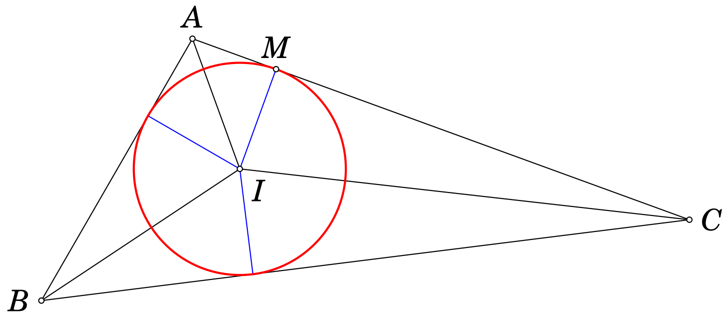
a) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(4;3)$. Tìm tọa độ điểm $M$ trên trục hoành sao cho góc $AMB$ bằng $45°$.

b) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ nhọn với trực tâm $H$. Các đường thẳng $AH$, $BH$, $CH$ lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ tại $D$, $E$, $F$ ($D$ khác $A$, $E$ khác $B$, $F$ khác $C$). Hãy viết phương trình cạnh $AC$ của tam giác $ABC$; biết rằng $D(2;1)$, $E(3;4)$, $F\left(\frac{6}{5};\frac{17}{5}\right)$.

c) Cho tam giác $ABC$, có $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Gọi $I$, $p$ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, nửa chu vi của tam giác $ABC$. Chứng minh rằng

$$\frac{IA^2}{c(p-a)} + \frac{IB^2}{a(p-b)} + \frac{IC^2}{b(p-c)} = 2.$$

**Lời giải**.




a) Giả sử tọa độ của $M(x;0)$.

Khi đó $\overrightarrow{MA} = (1-x;2); \overrightarrow{MB} = (4-x;3)$.

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 45^\circ$

$$\Leftrightarrow (1-x)(4-x)+6 = \sqrt{(1-x)^2+4} \cdot \sqrt{(4-x)^2+9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+10 = \sqrt{x^2-2x+5} \cdot \sqrt{x^2-8x+25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-5x+10\right)^2 = \left(x^2-2x+5\right)\left(x^2-8x+25\right) \left( \text{do } x^2-5x+10>0\right)$$

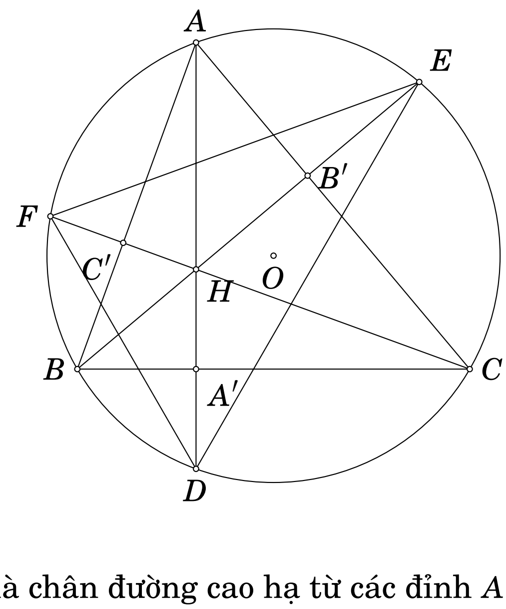
$$\Leftrightarrow x^4-10x^3+44x^2-110x+75=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-5)\left(x^2-4x+15\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1; x=5.$$

Vậy ta có hai điểm cần tìm là $M(1;0)$ hoặc $M(5;0)$.

b)




Gọi $A'$, $B'$, $C'$ lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh $A$, $B$, $C$.

Do tứ giác $BCB'C'$ nội tiếp nên $\widehat{FDA} = \widehat{FCA} = \widehat{ABE} = \widehat{ADE}$

$\Rightarrow H$ nằm trên đường phân giác trong hạ từ $D$ của tam giác $DEF$.

Tương tự ta cũng chỉ ra được $H$ nằm trên đường phân giác trong hạ từ đỉnh $E$ của tam giác $DEF$.

Vậy $H$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $DEF$.

Ta lập được phương trình các đường thẳng $DE$, $DF$ lần lượt là $DE: 3x-y-5=0$,

$DF: 3x + y - 7 = 0$.

Do đó phương trình phân giác trong và ngoài của đỉnh $D$ là $\dfrac{3x-y-5}{\sqrt{10}} = \pm\dfrac{3x+y-7}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow$ $x - 2 = 0; y - 1 = 0$.

Kiểm tra vị trí tương đối của $E$, $F$ với hai đường trên ta được phân giác trong kẻ từ đỉnh $D$ là $(d): x - 2 = 0$.

Tương tự ta lập được phương trình phân giác trong kẻ từ đỉnh $E$ là $(d'): x - y + 1 = 0$.

Mặt khác $H$ là giao điểm của $(d)$ và $(d)'$ nên $H(2;3)$.

Ta có $AC$ là trung trực của $HE$ nên $AC$ đi qua trung điểm $B'\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}\right)$ và có vtpt là $\overrightarrow{HE} = (1;1)$

$\Rightarrow (AC): x + y - 6 = 0$.

c) Gọi $M$ là tiếp điểm của $AC$ với đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$.

Khi đó ta có $AM = p - a; IM = r$.

Gọi $S$ là diện tích tam giác $ABC$, theo công thức Heron ta có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác $AIM$ ta có

$$\begin{aligned} IA^2 &= AM^2 + MI^2 \\ &= (p-a)^2 + r^2 \\ &= (p-a)^2 + \left(\frac{S}{p}\right)^2 \\ &= (p-a)^2 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \\ &= \frac{(p-a)bc}{p} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \dfrac{IA^2}{c(p-a)} = \dfrac{b}{p}$.

Tương tự ta có $\dfrac{IB^2}{a(p-b)} = \dfrac{c}{p}; \dfrac{IC^2}{b(p-c)} = \dfrac{a}{p}$

Do vậy $\dfrac{IA^2}{c(p-a)} + \dfrac{IB^2}{a(p-b)} + \dfrac{IC^2}{b(p-c)} = \dfrac{a+b+c}{p} = 2$.

## Đề 8. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(4,0 điểm)*

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + y^3 + 3x - 6y = 0 \\ x^2 + xy - 3 = 0. \end{cases}$

b) Giải phương trình $18x + 16 + 4\sqrt{2x^2+5x-3} = 7\sqrt{4x^2+2x-2} + 7\sqrt{2x^2+8x+6}$.

**Lời giải.**

a)

- Nếu $y = 0$ thay vào hệ ta có $\begin{cases} 3x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

⋄ Nếu $y \neq 0$ thì ta đặt $x = ty$ thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} ty^3 + y^3 + 3ty - 6y = 0 \\ t^2y^2 + ty^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(ty^2 + y^2 + 3t - 6) = 0 \\ (t^2 + t)y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ty^2 + y^2 + 3t - 6 = 0 \\ y^2 = \dfrac{3}{t^2 + t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+1)\dfrac{3}{t(t+1)} + 3t - 6 = 0 \\ y^2 = \dfrac{3}{t^2 + t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{t} + 3t - 6 = 0 \\ y^2 = \dfrac{3}{t^2 + t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2t + 1 = 0 \\ y^2 = \dfrac{3}{t^2 + t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ y^2 = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}};\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right);\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}};-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

b)

ĐK $x \geq \dfrac{1}{2}$ với điều kiện này phương trình được đưa về dạng

$$18x + 16 + 4\sqrt{(x+3)(2x-1)} = 7\sqrt{(2x+2)(2x-1)} + 7\sqrt{(2x+2)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1})^2 - 7\sqrt{2x+2}(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1}) + 6(2x+2) = 0.$$

Đặt $a = \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1}; b = \sqrt{2x+2}$ thay vào phương trình trên ta được $2a^2 - 7ab + 6b^2 = 0 \Leftrightarrow (2a - 3b)(a - 2b) = 0 \Leftrightarrow 2a = 3b; a = 2b$.

+) $a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 2\sqrt{2x+2}$, phương trình này vô nghiệm.

+) $2a = 3b \Leftrightarrow 2\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1} = 3\sqrt{2x+2}$, giải phương trình này được nghiệm $x = 1$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$.

**Bài 2** *(1,0 điểm)* Tìm tất cả các bộ ba số hữu tỷ dương $(m;n;p)$ sao cho mỗi một trong các số $m + \dfrac{1}{np}; n + \dfrac{1}{pm}; p + \dfrac{1}{mn}$ là một số nguyên.

**Lời giải.**

Giả sử tìm được bộ ba số $(m;n;p)$ trong đó $m,n,p$ là các số hữu tỉ dương sao cho có các số nguyên dương $a,b,c$ thỏa mãn

$$a = m + \frac{1}{np}; b = n + \frac{1}{pm}; c = p + \frac{1}{mn}.$$

Từ đó $mnp + 1 = anp = bpm = cmn$.

Suy ra $abc(mnp)^2 = (mnp+1)^3$

Đặt $mnp = \dfrac{u}{v}$ trong đó $u,v \in \mathbb{Z}^+, (u;v) = 1$ ta được

$$abc \cdot \frac{u^2}{v^2} = \left(\frac{u}{v} + 1\right)^3 \Leftrightarrow abcu^2v = (u+v)^3$$

Do $(u;v) = 1$ nên nếu $p$ là một số nguyên tố sao cho $p \mid u^2v$ thì hoặc $p \mid u$ hoặc $p \mid v$ do đó $u+v$ không chia hết cho $p$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow abc=\dfrac{(u+v)^3}{u^2v} \Leftrightarrow \begin{cases} abc=(u+v)^3 \\ u^2v=1 \end{cases}$

Suy ra $u=v=1, abc=8, mnp=1$.

Từ đó tìm được $(a;b;c)=(1;1;8),(1;2;4),(2;2;2)$ và các hoán vị.

Vì vậy $(m;n;p)=(1;1;1),\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};4\right),\left(\dfrac{1}{2};1;2\right)$ và các hoán vị.

**Bài 3** *(2,0 điểm)*

a) Giả sử $a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{a^{2012}}{b^{2010}}+\dfrac{b^{2012}}{c^{2010}}+\dfrac{c^{2012}}{a^{2010}}<2011$. Chứng minh rằng luôn tồn tại số tự nhiên $n$ sao cho
$$\frac{a^{n+3}}{b^{n+1}}+\frac{b^{n+3}}{c^{n+1}}+\frac{c^{n+3}}{a^{n+1}} \le \frac{2011}{2010}+\frac{a^{n+2}}{b^n}+\frac{b^{n+2}}{c^n}+\frac{c^{n+2}}{a^n}.$$

b) Cho $a,b,c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $m$ ta có bất đẳng thức
$$\frac{a^{m+3}}{b^{m+1}}+\frac{b^{m+3}}{c^{m+1}}+\frac{c^{m+3}}{a^{m+1}} \ge \frac{a^{m+2}}{b^m}+\frac{b^{m+2}}{c^m}+\frac{c^{m+2}}{a^m}.$$

**Lời giải.**

a) Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử không tồn tại số tự nhiên $n$ nào thỏa mãn thì với mọi số tự nhiên $n$ ta luôn có
$$\frac{a^{n+3}}{b^{n+1}}+\frac{b^{n+3}}{c^{n+1}}+\frac{c^{n+3}}{a^{n+1}} > \frac{2011}{2010}+\frac{a^{n+2}}{b^n}+\frac{b^{n+2}}{c^n}+\frac{c^{n+2}}{a^n}.$$
Lần lượt cho $n=0,1,2,\ldots,2009$ và cộng từng vế của 2010 bất đẳng thức ta được
$$\frac{a^{2012}}{b^{2010}}+\frac{b^{2012}}{c^{2010}}+\frac{c^{2012}}{a^{2010}} > 2010\cdot\frac{2011}{2010}+a^2+b^2+c^2>2011.$$
Mâu thuẫn với giả thiết nên ta có đpcm.

b)

Áp dụng bđt AM-GM cho 2 số $\dfrac{a^{m+2}}{b^m}$ và $m$ số $b^2$ ta có
$$2\frac{a^{m+2}}{b^m}+mb^2 \ge (m+2)\sqrt[m+2]{\frac{a^{2(m+2)}\cdot b^{2m}}{b^{2m}}}=(m+2)a^2$$
Tương tự ta được
$$2\frac{b^{m+2}}{c^m}+mc^2 \ge (m+2)\sqrt[m+2]{\frac{b^{2(m+2)}\cdot c^{2m}}{c^{2m}}}=(m+2)b^2$$
$$2\frac{c^{m+2}}{a^m}+ma^2 \ge (m+2)\sqrt[m+2]{\frac{c^{2(m+2)}\cdot a^{2m}}{a^{2m}}}=(m+2)c^2$$
Cộng từng vế các bđt trên ta được
$$\frac{a^{m+2}}{b^m}+\frac{b^{m+2}}{c^m}+\frac{c^{m+2}}{a^{m+1}} \ge a^2+b^2+c^2$$

Áp dụng bđt AM - GM cho $m$ số $\dfrac{a^{m+2}}{b^m}$ và $a^2$ ta được

$$m\frac{a^{m+3}}{b^{m+1}}+a^2\geq(m+1)\sqrt[m+1]{\frac{a^{m(m+3)}\cdot a^2}{b^{m(m+1)}}}=(m+1)\frac{a^{m+2}}{b^{m\prime}}.$$

Tương tự ta có

$$m\frac{b^{m+3}}{c^{m+1}}+b^2\geq(m+1)\sqrt[m+1]{\frac{b^{m(m+3)}b^2}{c^{m(m+1)}}}=(m+1)\frac{b^{m+2}}{c^m}$$

$$m\frac{c^{m+3}}{a^{m+1}}+c^2\geq(m+1)\sqrt[m+1]{\frac{c^{m(m+3)}\cdot c^2}{a^{m(m+1)}}}=(m+1)\frac{c^{m+2}}{a^m}$$

Cộng từng vế của các bdt trên ta được

$$m\left(\frac{a^{m+3}}{b^{m+1}}+\frac{b^{m+3}}{c^{m+1}}+\frac{c^{m+3}}{a^{m+1}}\right)\geq m\left(\frac{a^{m+2}}{b^m}+\frac{b^{m+2}}{c^m}+\frac{c^{m+2}}{a^m}\right)+\frac{a^{m+2}}{b^m}+\frac{b^{m+2}}{c^m}+\frac{c^{m+2}}{a^m}-a^2-b^2-c^2$$

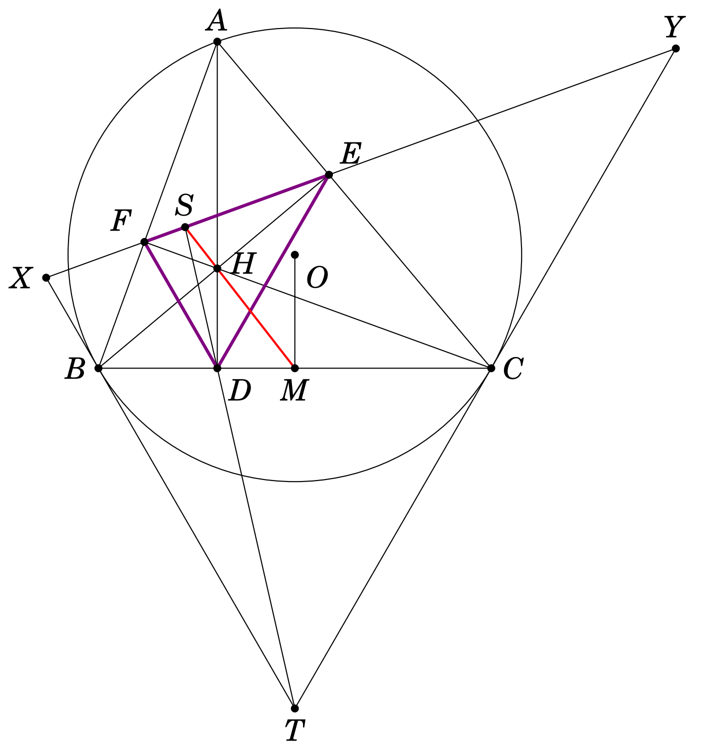
Kết hợp với (1) ta có đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

**Bài 4** *(2,0 điểm)* Cho tam giác $ABC$ nhọn với ba đường cao $AD$, $BE$, $CF$ cắt nhau tại điểm $H$. Tiếp tuyến tại $B$, $C$ của đường tròn $(O)$ ngoại tiếp tam giác $ABC$ cắt nhau tại điểm $T$, các đường thẳng $TD$ và $EF$ cắt nhau tại điểm $S$. Gọi $X$, $Y$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng $EF$ với các đường thẳng $TB$, $TC$; $M$ là trung điểm của cạnh $BC$.

a) Chứng minh rằng $H$, $M$ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $DEF$ và $XTY$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng $SH$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $BC$.

**Lời giải.**



+) Do các tứ giác $BFHD$, $DHEC$ và $CBFE$ nội tiếp nên

$$\widehat{FDH}=\widehat{FBH}=\widehat{FBE}=\widehat{FCE}=\widehat{HCE}=\widehat{HDE}.$$

Suy ra $DH$ là phân giác của góc $\widehat{EDF}$.

Tương tự cũng được $EH$ là phân giác của góc $DEF$ và $FH$ là phân giác của góc $EFD$.

Từ đó $H$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $DEF$.

+) Do $MBT=MCT=BAC; MB=MC=\dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow d(M;BT)=d(M;CT)=\dfrac{a\cdot\sin A}{2}$.

+) Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{MEF}&=\widehat{HEF}+\widehat{HEM}\\&=\widehat{HAB}+HEM\\&=\widehat{HAB}+\widehat{HBM}\\&=90^\circ-\widehat{B}+90^\circ-\widehat{C}\\&=\widehat{A}\end{aligned}$$

$$ME=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow d(M;EF)=\frac{a\cdot\sin A}{2}.$$

Do đó $d(M,TB)=d(M,TC)=d(M,EF)=\dfrac{a}{2}\cdot\sin A$

nên $M$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $XTY$.

+) Do tứ giác $AFDC$ nội tiếp và $TX$ tiếp xúc với $(O)$ nên

$$\widehat{FDB}=\widehat{FAC}=\widehat{BAC}=\widehat{CBT}=\widehat{DBT}$$

Suy ra $TX\parallel DF$.

Tương tự cũng có $TY\parallel DE$.

+) Từ đó, với $k=\dfrac{DF}{TX}$ thì phép vị tự tâm $S$ tỷ số $k$ biến tam giác $DEF$ thành tam giác $TYX$.

Và do đó biến $H$ (tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $DEF$ ) thành $M$ (tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $TYX$ ).

Suy ra $S$, $H$, $M$ thẳng hàng.

**Bài 5** *(1,0 điểm)* Kí hiệu $\mathbb{N}$ chỉ tập hợp các số tự nhiên. Giả sử $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ là hàm số thỏa mãn các điều kiện $f(1)>0$ và $f\left(m^2+2n^2\right)=(f(m))^2+2(f(n))^2$ với mọi $m,n\in\mathbb{N}$. Tính các giá trị của $f(2)$ và $f(2011)$.

**Lời giải.**

Đặt $f(2)=a$.

Cho $m=n=0\Rightarrow f(0)=3(f(0))^2\Rightarrow f(0)=0$.

Cho $m=1; n=0\Rightarrow f(1)=(f(1))^2\Rightarrow f(1)=1$.

Cho $m=n=1\Rightarrow f(3)=3$.

Cho $n=0\Rightarrow f\left(m^2\right)=(f(m))^2,\forall m\in\mathbb{N}$ nên $f(4)=a^2$.

Mặt khác với mỗi số tự nhiên

$$k \geq 3 \Rightarrow (k+1)^2 + 2(k-2)^2 = (k-3)^2 + 2k^2$$

$$\Rightarrow (f(k+1))^2 + 2(f(k-2))^2 = (f(k-3))^2 + 2(f(k))^2$$

Từ (1) cho $k = 3$ ta có

$$(f(4))^2 + 2(f(1))^2 = (f(0))^2 + 2(f(3))^2 \Rightarrow a^4 = 16 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(2) = 2.$$

Theo trên ta chứng minh được $f(n) = n$ với $n = 0;1;2;3;4$.

Ta chứng minh bằng quy nạp $f(n) = n$.

Thật vậy, với $n \geq 3$ từ đẳng thức (1) ta có:

$$(f(n+1))^2 + 2(f(n-2))^2 = (f(n-3))^2 + 2(f(n))^2$$

$$\Rightarrow (f(n+1))^2 = (n-3)^2 + 2n^2 - 2(n-2)^2 = (n+1)^2$$

$$\Rightarrow f(n+1) = n+1$$

Do đó $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(2011) = 2011$.

## Đề 9. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(2 điểm)*

a) Cho parabol (P) : $y = -x^2 + 4x + 5$ và điểm $I(1;4)$. Tìm trên $(P)$ hai điểm $M$, $N$ đối xứng nhau qua điểm $I$.

b) Tìm các giá trị của $m$ để phương trình $\left|x^2 - 2\right| = m^4 - m^2$ có 4 nghiệm phân biệt.

**Lời giải.**

- Cho parabol (P) : $y = -x^2 + 4x + 5$ và điểm $I(1;4)$. Tìm trên (P) hai điểm M, N đối xứng nhau qua điểm $I$.

  Đường thẳng $\Delta$ qua $I$ và có hsg $k$ có phương trình $y = k(x-1) + 4$.

  Xét pt $-x^2 + 4x + 5 = k(x-1) + 4 \Leftrightarrow x^2 + (k-4)x - k - 1 = 0$

  $\Delta = (k-4)^2 + 4(k+1) > 0 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 20 > 0, \forall k \Rightarrow \Delta$ cắt $(P)$ tại $M$ và $N$.

  Gọi 2 nghiệm của (1) là $x_1$, $x_2$ $\Rightarrow M(x_1; k(x_1-1)+4), N(x_2; k(x_2-1)+4)$.

  $M$, $N$ đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm của $MN$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2} = 1 \\ \dfrac{k(x_1-1)+4+k(x_2-1)+4}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4-k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2.$$

  Khi đó (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

  Vậy $M(-1;0)$, $N(3;8)$.

- Tìm $m$ để phương trình $\left|x^2 - 2\right| = m^4 - m^2$ có 4 nghiệm phân biệt.

  Điều kiện cần $m^4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ hoặc $m < -1$. (1)

  Khi đó $\begin{cases} x^2 - 2 = m^4 - m^2 \\ x^2 - 2 = -\left(m^4 - m^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 + m^4 - m^2 \\ x^2 = 2 - \left(m^4 - m^2\right). \end{cases}$

  Điều kiện đủ $2 - \left(m^4 - m^2\right) > 0 \Leftrightarrow -1 < m^2 < 2$.

  Kết hợp với ĐK (1) ta được $1 < m < \sqrt{2}$ hoặc $-\sqrt{2} < m < -1$.

  **Cách khác.**

  Pt có 4 nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m^4 - m^2$ cắt đths $y = \left|x^2 - 2\right|$ tại 4 điểm.

Từ đồ thị suy ra $0 < m^4 - m^2 < 2 \Leftrightarrow 1 < |m| < \sqrt{2}$.

**Bài 2** *(3 điểm)*

a) Giải bất phương trình: $(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} \geq x^2 + 7x + 12$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)\left(y^2+6\right) = y\left(x^2+1\right) \\ (y-1)\left(x^2+6\right) = x\left(y^2+1\right). \end{cases}$

c) Tìm $m$ để phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm.

**Lời giải.**

a) ĐK: $x \geq -2$.

$$\begin{aligned} \text{BPT} &\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x+2}-2) + (x+6)(\sqrt{x+7}-3) \geq x^2 + 2x - 8 \\ &\Leftrightarrow (x+1)\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + (x+6)\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3} \geq (x-2)(x+4) \\ &\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - (x+4)\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Ta có $\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \dfrac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - (x+4)$

$$\begin{aligned} &= \frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{x+2}{2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - \frac{x+6}{2} - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} \\ &= \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{(x+6)(\sqrt{x+7}+1)}{\sqrt{x+7}+3} - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} < 0, \forall x \geq -2. \end{aligned}$$

BPT $\Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Vậy tập nghiệm của BPT là $S = [-2;2]$.

b) Trừ vế ta được $(x-y)(x+y-2xy+7) = 0$.

TH 1. $x = y$. Thế vào pt thứ nhất ta được

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

TH 2. $x + y - 2xy + 7 = 0 \Leftrightarrow 2xy = x + y + 7$

Cộng hai pt theo vế ta được

$$\begin{aligned} &5(x+y) - \left(x^2+y^2\right) - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow &5(x+y) - (x+y)^2 + 2xy - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow &-(x+y)^2 + 6(x+y) - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} x+y = 1 \\ x+y = 5. \end{array}\right. \end{aligned}$$

* $x + y = 1 \Rightarrow xy = 4$ (Loại)

* $x + y = 5 \Rightarrow xy = 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = 3 \\ x = 3, y = 2. \end{array}\right.$

Vậy hệ có 4 nghiệm là $(2;2), (3;3), (2;3), (3;2)$.

c) ĐK: $x \geq 1$. Chia hai vế cho $\sqrt{x+1}$ ta được

$$\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$$

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}, 0\le t<1$ ta được $3t^2+m=2t \Leftrightarrow -3t^2+2t=m$.
Pt (1) có nghiệm $x\ge 1 \Leftrightarrow$ pt (2) có nghiệm $t\in[0;1)$.
Lập bảng biến thiên của $f(t)=-3t^2+2t$ trên $[0;1)$.
Từ BBT suy ra pt (2) có nghiệm $t\in[0;1) \Leftrightarrow -1<m\le \dfrac{1}{3}$.

**Bài 3** *(3 điểm)*

a) Cho tam giác $ABC$ có trọng tâm là $G$. Hai điểm $D$ và $E$ được xác định bởi các hệ thức: $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng: $D$, $E$, $G$ thẳng hàng.

b) Gọi $H$ là trực tâm $\triangle ABC$, $M$ là trung điểm của $BC$.
Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{4}BC^2$.

c) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình bình hành $ABCD$, điểm $M(-2;0)$ là trung điểm của cạnh $AB$, điểm $H(1;-1)$ là hình chiếu của $B$ trên $AD$ và điểm $G\left(\dfrac{7}{3};3\right)$ là trọng tâm tam giác $BCD$. Đường thẳng $HM$ cắt $BC$ tại $E$, đường thẳng $HG$ cắt $BC$ tại $F$. Tìm tọa độ các điểm $E$, $F$ và $B$.

**Lời giải.**

a) Gọi M là trung điểm của $BC$ ta có:

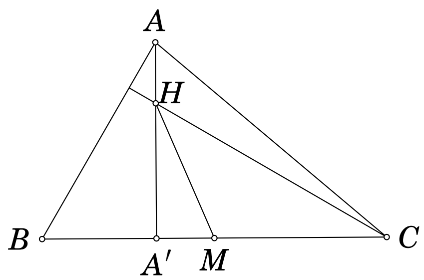
$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{5}(-5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(-5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{DE}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{DG}\Rightarrow D$, $E$, $G$ thẳng hàng.

b)




Ta có

$$\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA})\overrightarrow{MH}$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MH})$$
$$=\frac{1}{2}[\overrightarrow{BA}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CH})+\overrightarrow{CA}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BH})]$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BH})$$

Vì $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CH} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CH} = 0; \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$

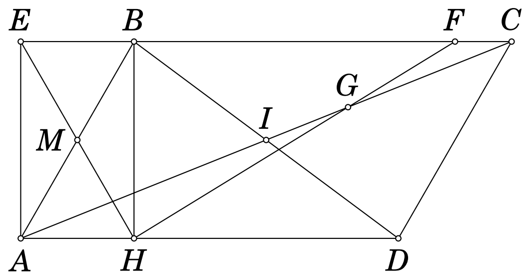
$\Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB}.$

Mặt khác ta có $\overrightarrow{BA}\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA'}\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}$.

Nên

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{MC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{MC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{BA'} - \overrightarrow{CA'}\right) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= \frac{1}{4}BC^2. \quad \text{(đpcm)}
\end{aligned}$$

c)




Chứng minh được $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{ME}$ từ đó suy ra $E(-5;1)$.

Chứng minh được $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GF}$ từ đó suy ra $F(3;5)$.

Giả sử $B(x;y)$. Từ giả thiết suy ra $B$, $E$, $F$ thẳng hàng và $BE \perp BH$.

Tìm được tọa độ $B(-1;3)$.

**Bài 4** *(1 điểm)* Cho $x$, $y$ là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{(x-y)^2 - 3y^2}{xy+1}$.

**Lời giải**.

Thế $x^2 + y^2 = 1$ vào $S$ ta được $S = \dfrac{x^2 - 2xy - 2y^2}{xy + x^2 + y^2}$

TH 1. $y = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow S = 1$.

TH2. $y \neq 0 \Rightarrow S = \dfrac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} - 2}{\frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$.

Đặt $t = \dfrac{x}{y} \Rightarrow S = \dfrac{t^2 - 2t - 2}{t^2 + t + 1}$

$\Leftrightarrow S\left(t^2 + t + 1\right) = t^2 - 2t - 2 \Leftrightarrow (S-1)t^2 + (S+2)t + S + 2 = 0.$

Với $S \neq 1$, tồn tại $t \Leftrightarrow \Delta = (S+2)^2 - 4(S-1)(S+2) \geq 0$.

Biến đổi ta được $(S+2)(-3S+6) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq S \leq 2$.

Do $S = 1 \in [-2;2]$ nên $\max S = 2, \min S = -2$.

**Bài 5** *(1 điểm)* Cho $x$, $y$ là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|.$$

**Lời giải.**

$A=\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|\geq\sqrt{(1-x+x+1)^2+(y+y)^2}+|y-2|$.

Vậy $A\geq\sqrt{4+4y^2}+|y-2|$.

TH1. $y\geq 2\Rightarrow A\geq 2\sqrt{1+y^2}\geq 2\sqrt{5}$.

TH2. $y<2$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A&\geq 2\sqrt{1+y^2}+2-y\\&=\sqrt{\left((\sqrt{3})^2+1^2\right)\left(1^2+y^2\right)}+2-y\\&\geq\sqrt{3}\cdot 1+1\cdot y+2-y=\sqrt{3}+2\end{aligned}$$

$A=2+\sqrt{3}$ khi và chỉ khi $x=0, y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có $2+\sqrt{3}<2\sqrt{5}\Rightarrow\min A=2+\sqrt{3}$.

# Đề 10. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(2 điểm)* Giải bất phương trình $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right|\leq\left|\dfrac{10}{x-1}\right|$.

**Lời giải.** $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right|\leq\left|\dfrac{10}{x-1}\right|$. (1)

Điều kiện $x\neq -2$, $x\neq 1$. $(*)$

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow\frac{1}{(x+2)^2}\leq\frac{4}{(x-1)^2}\\&\Leftrightarrow(x-1)^2\leq 4(x+2)^2\\&\Leftrightarrow 3x^2+18x+15\geq 0\\&\Leftrightarrow x\in(-\infty;-5]\cup[-1;+\infty).\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ tập nghiệm của (1) là $S=(-\infty;-5]\cup[-1;1)\cup(1;+\infty)$.

**Bài 2** *(2 điểm)* Giải phương trình $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

**Lời giải.** $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6\Leftrightarrow x^2+5x-3\sqrt{x^2+5x+2}-2=0$.

- Đặt $t=\sqrt{x^2+5x+2}$, điều kiện $t\geq 0$.

  Ta có $x^2+5x=t^2-2$, phương trình đã cho trở thành $t^2-3t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=4.\end{array}\right.$

- Kết hợp điều kiện có $t=4$ hay $\sqrt{x^2+5x+2}=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-7\\x=2.\end{array}\right.$

- Tập nghiệm của phương trình là $S=\{-7;2\}$.

**Bài 3** *(2 điểm)* Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+4xy+2y^2+3x+3y-2=0 \\ x^2+y^2+2y(2x+1)=0. \end{cases}$

**Lời giải.** $\begin{cases} 2x^2+4xy+2y^2+3x+3y-2=0 & (3) \\ x^2+y^2+2y(2x+1)=0. & (4) \end{cases}$

- $(3) \Leftrightarrow 2(x+y)^2+3(x+y)-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=-2 \\ x+y=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$
- Với $x+y=-2$, thay $y=-2-x$ vào (4) có
  $x^2+(-2-x)^2+2(-2-x)(2x+1)=0 \Leftrightarrow 2x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3. \end{array}\right.$
  Với $x=0$ thì $y=-2$, với $x=-3$ thì $y=1$.
- Với $x+y=\dfrac{1}{2}$, thay $y=\dfrac{1}{2}-x$ vào (4) có
  $x^2+\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2+2\left(\dfrac{1}{2}-x\right)(2x+1)=0 \Leftrightarrow -2x^2-x+\dfrac{5}{4}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}}{4}.$
  Với $x=\dfrac{-1-\sqrt{11}}{4}$ thì $y=\dfrac{3+\sqrt{11}}{4}$, với $x=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{4}$ thì $y=\dfrac{3-\sqrt{11}}{4}$.

Kết luận: Hệ đã cho có 4 nghiệm $(x,y)$ là $(0;-2)$, $(-3;1)$, $\left(\dfrac{-1-\sqrt{11}}{4};\dfrac{3+\sqrt{11}}{4}\right)$, $\left(\dfrac{-1+\sqrt{11}}{4};\dfrac{3-\sqrt{11}}{4}\right)$.

**Bài 4** *(2 điểm)* Tìm tất cả các giá trị của $m$ để phương trình sau có nghiệm thực $x$

$$\sqrt{x^2-2x+m^2}=2x+4.$$

**Lời giải.**

- $\sqrt{x^2-2x+m^2}=2x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4\ge 0 \\ x^2-2x+m^2=(2x+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 3x^2+18x+16-m^2=0. \ (5) \end{cases} \quad (*)$
- (5) là phương trình bậc hai có $\Delta'=3m^2+33>0$, $\forall m$.
  (5) có hai nghiệm là $x_1=\dfrac{-9-\sqrt{3m^2+33}}{3}$, $x_2=\dfrac{-9+\sqrt{3m^2+33}}{3}$.
- Nhận xét $x_2\ge \dfrac{\sqrt{33}-9}{3}>-2$, $\forall m$ nên hệ $(*)$ luôn có nghiệm với mọi $m$.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của $m$.

**Bài 5** *(2 điểm)* Tìm tất cả các giá trị của $m$ để tập nghiệm của bất phương trình $x^2+mx+m+1\le 0$ có biểu diễn trên trục số là một đoạn có độ dài bằng 1.

**Lời giải.** $x^2+mx+m+1\le 0$. (6)

Xét tam thức bậc hai $f(x)=x^2+mx+m+1$ có hệ số bậc hai $a=1>0$, biệt số $\Delta=m^2-4m-4$.

- **Trường hợp 1.** $\Delta<0$, khi đó $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
  (6) có tập nghiệm là $S=\varnothing$, không thỏa mãn yêu cầu.
- **Trường hợp 2.** $\Delta=0$, khi đó $f(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{m}{2}$.

Tập nghiệm của (6) chỉ chứa một phần tử, không thỏa mãn yêu cầu.

◇ **Trường hợp 3.** $\Delta > 0$.

$f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = \dfrac{-m-\sqrt{\Delta}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-m+\sqrt{\Delta}}{2}$.
Tập nghiệm của (6) là $S = \{[x_1; x_2]\}$.
Biểu diễn của $S$ trên trục số là đoạn có độ dài bằng 1 khi và chỉ khi
$|x_2 - x_1| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 1$ (thỏa mãn điều kiện $\Delta > 0$).

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 5. \end{array}\right.$$

Kết luận $m \in \{-1; 5\}$.

**Bài 6** *(2 điểm)* Giả sử tam giác $ABC$ có diện tích là $S$; $a$, $b$, $c$ lần lượt là độ dài các cạnh $BC$, $CA$, $AB$. Chứng minh rằng $4S(\cot A + \cot B + \cot C) = a^2 + b^2 + c^2$.

**Lời giải.**

◇ Chứng minh được hệ thức $\cot A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$. (7)

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\dfrac{2S}{bc}} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}.$$

◇ Chứng minh tương tự có $\cot B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{4S}$ (8), $\cot C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}$. (9)

◇ Cộng vế theo vế các đẳng thức (7), (8), (9) ta được

$\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$ hay $4S(\cot A + \cot B + \cot C) = a^2 + b^2 + c^2$.

**Bài 7** *(6 điểm)* Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho đường thẳng $d_1: x + y - 6 = 0$ và đường thẳng $d_2: x + 2y - 5 = 0$.

a) Gọi $\alpha$ là góc giữa đường thẳng $d_1$ và đường thẳng $d_2$. Tính giá trị của biểu thức $m = \dfrac{3\cos\alpha + \sin\alpha + \sqrt{10}}{2\cos\alpha - \sin\alpha}$.

b) Viết phương trình của đường tròn $(C)$ có tâm là điểm $I$ thuộc đường thẳng $d_1$, $I$ có hoành độ bằng 2 và đường tròn $(C)$ cắt đường thẳng $d_2$ tạo thành một dây cung có độ dài bằng 2.

c) Biết tam giác $ABC$ cân tại $A$, cạnh $AB$ và cạnh $BC$ lần lượt nằm trên các đường thẳng $d_1$ và $d_2$. Viết phương trình của đường thẳng chứa đường cao kẻ từ $B$ của tam giác $ABC$.

**Lời giải.**

a) Xét $d_1: x + y - 6 = 0$ và $d_2: x + 2y - 5 = 0$.

* $\cos\alpha = \cos(d_1, d_2) = \dfrac{|1\cdot 1 + 1\cdot 2|}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

* $\alpha$ là góc giữa hai đường thẳng nên $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$, $\sin\alpha \ge 0$.
Do đó $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

* Vậy $m=\dfrac{3\cos\alpha+\sin\alpha+\sqrt{10}}{2\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\dfrac{9}{\sqrt{10}}+\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\sqrt{10}}{\dfrac{6}{10}-\dfrac{1}{\sqrt{10}}}=4.$

b) * $I$ thuộc đường thẳng $d_1$ và có hoành độ bằng $2\Rightarrow I(2;4)$.

* Gọi $M,N$ là các giao điểm của $d_2$ với $(C)$, $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên $MN$ thì $IH=\mathrm{d}(I,d_2)=\dfrac{|2+2\cdot4-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$.

  $H$ là trung điểm của $MN$ nên $HM=\dfrac{1}{2}MN=1$.

  Tam giác $IHM$ vuông tại $H$ có $IM=\sqrt{IH^2+HM^2}=\sqrt{6}$.

* Đường tròn $(C)$ có tâm là $I$ và bán kính là $IM$ nên có phương trình là $(x-2)^2+(y-4)^2=6$.

c) * $B$ là giao điểm của $d_1$ và $d_2$ nên tìm được $B(7;-1)$.

* Đặt $\vec{u}=(a;b)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $AC$ $(a^2+b^2>0)$.

  Đường thẳng $BC$ hay $d_2$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{v}=(2;-1)$.

* Tam giác $ABC$ cân tại $A$ nên góc giữa đường thẳng $AB$ và $BC$ bằng góc giữa đường thẳng $AC$ và $BC$.

$$\cos\alpha=|\cos(\vec{u},\vec{v})|\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{|2a-b|}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}|2a-b|\Leftrightarrow 9\left(a^2+b^2\right)=2(2a-b)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2+8ab+7b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b\\ a=-7b.\end{array}\right.$$

* Với $a=-b$, chọn $a=1$, $b=-1$ khi đó $\vec{u}=(1;-1)$ nên đường thẳng $AC$ và đường thẳng $AB$ cùng véc-tơ chỉ phương. Điều này không thể xảy ra.

* Với $a=-7b$, chọn $b=-1$, $a=7$, $\vec{u}=(7;-1)$ (thỏa mãn điều kiện $AC$ và $AB$ cắt nhau).

  Đường thẳng chứa đường cao kẻ từ $B$ của tam giác $ABC$ là đường thẳng đi qua $B$ vuông góc với $AC$ nên nhận $\vec{u}=(7;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến, do đó nó có phương trình là $7(x-7)-1(y+1)=0$ hay $7x-y-50=0$.

Kết luận: Phương trình cần tìm là $7x-y-50=0$.

**Bài 8** *(2 điểm)* Cho $a$, $b$, $c$ là ba số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\sqrt[3]{a^2+7b}+\sqrt[3]{b^2+7c}+\sqrt[3]{c^2+7a}$.

**Lời giải.**

* Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số ta có

$$\sqrt[3]{a^2+7b}\cdot2\cdot2\le\frac{(a^2+7b)+8+8}{3},$$
$$\sqrt[3]{b^2+7c}\cdot2\cdot2\le\frac{(b^2+7c)+8+8}{3},$$
$$\sqrt[3]{c^2+7a}\cdot2\cdot2\le\frac{(c^2+7a)+8+8}{3}.$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên có $4S \le \dfrac{a^2+b^2+c^2+7(a+b+c)+48}{3}$

hay $4S \le \dfrac{7(a+b+c)+51}{3}$. (10)

* Lại có $a = a\cdot 1 \le \dfrac{a^2+1}{2}$, $b = b\cdot 1 \le \dfrac{b^2+1}{2}$, $c = c\cdot 1 \le \dfrac{c^2+1}{2}$

nên $a+b+c \le \dfrac{a^2+b^2+c^2+3}{2}$ hay $a+b+c \le 11$. (11)

* Từ (10), (11) suy ra $4S \le 24$ hay $S \le 6$.

* Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt[3]{a^2+7b} = \sqrt[3]{b^2+7c} = \sqrt[3]{c^2+7a} = 2 \\ a=b=c=1 \end{cases}$ hay $a=b=c=1$.

Kết luận: Giá trị lớn nhất của $S$ là 6, đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

## Đề 11. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(2 điểm)* Tìm các giá trị của tham số $m$ để phương trình sau có nghiệm

$$\frac{\sqrt{x^2-m}}{\sqrt{-x^2+4x+5}} = 0.$$

**Lời giải**. Phương trình tương đương với $\begin{cases} x^2 = m \ (1) \\ x \in (-1;5). \end{cases}$

- Trường hợp 1. $m<0$ phương trình vô nghiệm.
- Trường hợp 2. $m \ge 0$, (1) có nghiệm $x=\sqrt{m}$, $x=-\sqrt{m}$.

  Phương trình đã cho có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} -1<\sqrt{m}<5 \\ -1<-\sqrt{m}<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<25 \\ m<1. \end{array}\right.$

Kết luận: $0 \le m < 25$ phương trình đã cho có nghiệm.

**Bài 2** *(4 điểm)* Giải phương trình, bất phương trình sau

a) $8\sqrt{(x-2)(x+32)} = x(x+30)-73$

b) $x\sqrt{3-2x}+1>0$

**Lời giải**.

a) Điều kiện $-32 \le x \le 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$8\sqrt{x^2+30x-64} = x^2+30x-64-9$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+30x-64} = -1 \text{ (vô nghiệm)} \\ \sqrt{x^2+30x-64} = 9 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow x^2+30x-145=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-15+\sqrt{370} \\ x=-15-\sqrt{370}. \end{array}\right.$$

Tập nghiệm $S=\left\{-15+\sqrt{370}; -15-\sqrt{370}\right\}$.

b) Điều kiện $x \le \frac{3}{2}$.

$x\sqrt{3-2x}+1>0 \Leftrightarrow x\sqrt{3-2x}>-1.$ (2)

+ $0 \le x \le \frac{3}{2}$ là nghiệm.

+ $x<0$

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow x^2(3-2x)<1\\ &\Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1>0\\ &\Leftrightarrow (x-1)\left(2x^2-x-1\right)>0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1)>0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{2}\\ x\ne 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Kết luận: $x \in \left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.

**Bài 3** *(4 điểm)* Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^3+x^2y=2y\\ x^2y-y^3=y.\end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-\sqrt{5x+2y}=3y-\sqrt{7x-y}\\ xy=6.\end{cases}$

**Lời giải.**

a) $\begin{cases} x^3+x^2y=2y\\ x^2y-y^3=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x^2y=2x^2y-2y^3 \text{ (1)}\\ x^2y-y^3=y\end{cases}$

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x^3-x^2y+2y^3=0\\ &\Leftrightarrow (x+y)\left(x^2-2xy+2y^2\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y\\ x^2-2xy+2y^2=0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow x=-y.\end{aligned}$$

Khi đó $-x^3+x^3=-x \Leftrightarrow x=0,\ y=0$.

Hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ là $(0;0)$.

b) Điều kiện $\begin{cases} 5x+2y\ge 0\\ 7x-y\ge 0.\end{cases}$

Nhận xét $(x;y)=(0;0)$ không thỏa hệ nên $2x-\sqrt{5x+2y}=3y-\sqrt{7x-y}$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (2x-3y)+\sqrt{7x-y}-\sqrt{5x+2y}=0\\ &\Leftrightarrow (2x-3y)+\frac{7x-y-5x-2y}{\sqrt{7x-y}+\sqrt{5x+2y}}=0\\ &\Leftrightarrow (2x-3y)\left[1+\frac{1}{\sqrt{7x-y}+\sqrt{5x+2y}}\right]=0\\ &\Leftrightarrow 2x=3y.\end{aligned}$$

Khi đó $\dfrac{3y^2}{2}=6 \Leftrightarrow y^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-2. \end{array}\right.$

Khi $y=2$ thì $x=3$ (thỏa mãn).

Khi $y=-2$ thì $x=-3$ (loại).

Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;2)$.

**Bài 4** *(2 điểm)* Tìm các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình sau có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho $x$, $y$ là các số nguyên $\begin{cases} mx+y=3m \\ 2mx+y=m-3. \end{cases}$

**Lời giải**. $D=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 2m & 1 \end{vmatrix}=-m$, $D_x=\begin{vmatrix} 3m & 1 \\ m-3 & 1 \end{vmatrix}=2m+3$, $D_y=\begin{vmatrix} m & 3m \\ 2m & m-3 \end{vmatrix}=-5m^2-3m$.

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó nghiệm là $\begin{cases} x=\dfrac{2m+3}{-m} \\ y=\dfrac{-5m^2-3m}{-m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2-\dfrac{3}{m} \\ y=5m+3. \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x\in\mathbb{Z} \\ y\in\mathbb{Z} \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \\ m=3 \\ m=-3. \end{array}\right.$

**Bài 5** *(2 điểm)* Cho $x$, $y$, $z>1$ và thỏa điều kiện $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=(x-1)(y-1)(z-1)$.

**Lời giải**.Từ giả thiết ta có $\dfrac{1}{x}\geq 1-\dfrac{1}{y}+1-\dfrac{1}{z}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\geq\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\geq 2\sqrt{\frac{y-1}{y}\cdot\frac{z-1}{z}}.$$

Tương tự $\dfrac{1}{y}\geq 2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}\cdot\dfrac{z-1}{z}}$, $\dfrac{1}{z}\geq 2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}\cdot\dfrac{y-1}{y}}$.

Suy ra $\dfrac{1}{xyz}\geq 8\cdot\sqrt{\left(\dfrac{(x-1)(y-1)(z-1)}{xyz}\right)^2}$

$\Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1)\leq\dfrac{1}{8}$.

Giá trị lớn nhất của $A$ bằng $\dfrac{1}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{3}{2}$.

**Bài 6** *(2 điểm)* Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại $A$ và $B$, đáy lớn $AD$. Biết chu vi hình thang là $16+4\sqrt{2}$, diện tích hình thang là 24. Cho $A(1;2)$, $B(1;6)$. Tìm tọa độ các đỉnh $C$ và $D$ biết hoành độ điểm $D$ lớn hơn 2.

**Lời giải**.$AB=4$ đặt $BC=x$, $AD=y$ $(y>x)$.

Diện tích hình thang là 24 nên $24=\dfrac{(x+y)\cdot 4}{2}\Leftrightarrow x+y=12$.

Chu vi hình thang là $16+4\sqrt{2}$ nên $16+4\sqrt{2}=4+x+y+\sqrt{16+(y-x)^2}$

Suy ra $4\sqrt{2}=\sqrt{16+(y-x)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-x=4 \\ y-x=-4 \text{ (loại).}\end{array}\right.$

Khi đó $\begin{cases} x+y=12 \\ y-x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ y=8. \end{array}\right.$

Phương trình $AD: y=2$ với $D(x_o;2)$, $x_o>2$.

$$\begin{aligned} AD=8 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_o-1)^2}=8 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o-1=8 \\ x_o-1=-8 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o=9 \\ x_o=-7 \text{ (loại).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ta được $D(9;2)$.

$\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Tìm được $C(5;6)$.

**Bài 7** *(4 điểm)* Trong hệ toạ độ $Oxy$ cho đường tròn $(C)$ có phương trình $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ và đường thẳng $d$ có phương trình $d: x+y=0$

a) Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ song song với đường thẳng $d$ và cắt $(C)$ theo dây cung có độ dài bằng 1.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ biết khoảng cách biết khoảng cách từ $A(0;-2)$ đến tiếp tuyến là lớn nhất.

c) Viết phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ $O$ tạo với đường thẳng $d$ góc $60°$.

**Lời giải**.

a) $(C)$ có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{1+4+3}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

$\Delta /\!/ d$; $\Delta$ có phương trình là $x+y+c=0$ $(c\neq 0)$.

$\Delta$ cắt $(C)$ theo dây cung có độ dài bằng 1 nên tính được $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{\sqrt{31}}{2}$.

Do đó $\dfrac{|1-2+c|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{31}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=\dfrac{\sqrt{31}}{2}+1 \\ c=-\dfrac{\sqrt{31}}{2}+1. \end{array}\right.$

b) Nhận xét $IA<R$ nên $A$ nằm trong đường tròn.

Tia $AI$ cắt $(C)$ tại $M$, tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ là $d_1$ nên $\mathrm{d}(A,d_1)=IA+R=AM$.

Gọi $d_2$ là tiếp tuyến bất kì của $(C)$ tại $M_1$ nên $\mathrm{d}(A;d_2)\leq AM_1\leq AM$.

Vậy $d_1$ là tiếp tuyến có khoảng cách từ $A$ đến tiếp tuyến là lớn nhất.

$M(x;y)$; $\overrightarrow{IM}=(x-1;y+2)$; $\overrightarrow{IA}=(-1;0)$.

$\overrightarrow{IM}=-\sqrt{8}\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-\sqrt{8}(-1) \\ y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{8}+1 \\ y=-2. \end{cases}$

$M\left(\sqrt{8}+1;-2\right)$.

Véc-tơ pháp tuyến của $d_1$ là $\overrightarrow{IA}=(-1;0)$.

Phương trình của $d_1$ là $-1\left(x-\sqrt{8}-1\right)=0 \Leftrightarrow x-\sqrt{8}-1=0$.

c) Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là véc-tơ pháp tuyến của $d'$ $\left(a^2+b^2\neq 0\right)$.

$\vec{n}_1$ là véc-tơ pháp tuyến của $d$.

$$\begin{aligned}\cos 60^\circ=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2=2\left(a^2+b^2+2ab\right)\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+4ab=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&a=\left(-2+\sqrt{3}\right)b\\ &a=\left(-2-\sqrt{3}\right)b.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Chọn $b=1$, $a=-2\pm\sqrt{3}$.

Các đường thẳng thỏa mãn là $\left(-2-\sqrt{3}\right)x+y=0$; $\left(-2+\sqrt{3}\right)x+y=0$.

## Đề 12. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(2 điểm)* Cho parabol $(P)$: $y=x^2+2x-1$. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để đường thẳng $d: y=-x-m$ cắt parabol $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A, B$ sao cho tam giác $OAB$ vuông tại $O$ (với $O$ là gốc tọa độ).

**Lời giải**. Phương trình hoành độ giao điểm $x^2+3x+m-1=0$. (1)

$(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 13-4m>0 \Leftrightarrow m<\frac{13}{4}. \quad (*)$$

$A(x_1;-x_1-m)$; $B(x_1;-x_2-m)$ với $x_1$; $x_2$ là nghiệm của phương trình (1).

Theo hệ thức Vi-ét $\begin{cases}x_1+x_2=-3\\ x_1\cdot x_2=m-1.\end{cases}$

Theo giả thiết có $\triangle OAB$ vuông tại $O$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow 2x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2=0\\ &\Leftrightarrow m^2-m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&m=-1\\ &m=2.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện $(*)$ ta có 2 giá trị của $m$ là $m=-1$ và $m=2$.

**Bài 2** *(4 điểm)*

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt $(m-2)x^4-2(m+1)x^2+2m-1=0$.
2. Cho $3\sin^4\alpha-8\cos^2\alpha=-5$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Tính $P=\sin^4\alpha+\cos^3\alpha$.

**Lời giải**.

1. ⟐ Đặt $t = x^2 \geq 0$, phương trình đã cho trở thành
$$(m-2)t^2 - 2(m+1)t + 2m - 1 = 0. \quad (*)$$
⟐ Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt hay
$$\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - (m-2)(2m-1) > 0 \\ \dfrac{m+1}{m-2} > 0 \\ \dfrac{2m-1}{m-2} > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} < m < \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{1}{2} \\ m > 2 \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 2 < m < \frac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$
Kết luận: $m \in \left(2; \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. Ta có
$$\begin{aligned} & 3\sin^4\alpha - 8\cos^2\alpha = -5 \\ \Leftrightarrow\ & 3\sin^4\alpha - 8\left(1-\sin^2\alpha\right) + 5 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin^2\alpha = \dfrac{1}{3} \\ \sin^2\alpha = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \sin^2\alpha = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, ta có $\cos\alpha > 0$.

Khi đó $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $P = \sin^4\alpha + \cos^3\alpha = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \dfrac{1+2\sqrt{6}}{9}$.

**Bài 3** *(6 điểm)*

1. Giải phương trình $x^2 + 2\sqrt{x^2+x+1} = x + 3 + \sqrt{x^4+x^2+1}$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 5x + y = 9 \\ 3x^3 + 6x^2 + x^2y + 2xy = 18. \end{cases}$

3. Giải bất phương trình $3-3x^2+2x \geq 2\sqrt{3x^2-2x}$.

**Lời giải.**

1. Tập xác định $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
   Ta có $x^4+x^2+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$.
   Viết lại phương trình đề bài $(x^2-x+1)+2\sqrt{x^2+x+1}=4+\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$.
   Đặt $a=\sqrt{x^2+x+1}$, $b=\sqrt{x^2-x+1}$.
   Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & b^2+2a=ab+4 \\ \Leftrightarrow\ & (b-2)(b-a+2)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=a-2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

* Với $b=2$, ta có $\sqrt{x^2-x+1}=2 \Leftrightarrow x^2-x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.
* Với $b=a-2$, ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x^2+x+1}-2 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x^2-x+1}+2=\sqrt{x^2+x+1} \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{x^2-x+1}=x-2 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\geq 2 \\ 4x^2-4x+4=x^2-4x+4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\geq 2 \\ x=0 \end{cases} \text{(vô nghiệm).} \end{aligned}$$

   Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.

2. $\begin{cases} x^2+5x+y=9 \\ 3x^3+6x^2+x^2y+2xy=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+3x+y=9 \\ \left(x^2+2x\right)(3x+y)=18. \end{cases}$
   Đặt $u=x^2+2x$, $v=3x+y$.
   Hệ phương trình thành $\begin{cases} u+v=9 \\ uv=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=6 \\ v=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=3 \\ v=6. \end{cases}$

* Với $\begin{cases} u=6 \\ v=3 \end{cases}$, ta có $\begin{cases} x^2+2x=6 \\ 3x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ hoăc $\begin{cases} x=-3 \\ y=15. \end{cases}$
* Với $\begin{cases} u=3 \\ v=6 \end{cases}$, ta có $\begin{cases} x^2+2x=3 \\ 3x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+\sqrt{7} \\ y=6-3\sqrt{7} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-1-\sqrt{7} \\ y=6+3\sqrt{7}. \end{cases}$

   Hệ đã cho có 4 nghiệm $(x;y)$ là $(1;3)$, $(-3;15)$, $\left(-1+\sqrt{7};6-3\sqrt{7}\right)$, $\left(-1-\sqrt{7};6+3\sqrt{7}\right)$.

3. Đặt $t=\sqrt{3x^2-2x}$ $(t\geq 0)$. Ta có bất phương trình thành

$$3-t^2\geq 2t \Leftrightarrow t^2+2t-3\leq 0 \Leftrightarrow -3\leq t\leq 1.$$

   Kết hợp với điều kiện $t\geq 0$ ta được $0\leq t\leq 1$.

Với $0 \le t \le 1$, ta có

$$0 \le \sqrt{3x^2-2x} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-2x \ge 0 \\ 3x^2-2x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{2}{3} \\ x \le 0 \end{array}\right. \\ -\dfrac{1}{3} \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{3} \le x \le 0 \\ \dfrac{2}{3} \le x \le 1. \end{array}\right.$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[-\dfrac{1}{3};0\right] \cup \left[\dfrac{2}{3};1\right]$.

**Bài 4** *(2 điểm)* Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $AB = 5$, $AC = 10$, trung tuyến $AD$ ($D \in BC$) và $M$ là một điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. Tính độ dài đoạn $BM$ và chứng minh $AD \perp BM$.

**Lời giải**. Ta có $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

Suy ra $M$ nằm giữa $A$ và $C$ nên $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right) = \widehat{MAB} = 60^\circ$.

$AM = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \dfrac{2}{5}AC = 4$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$.

$BM^2 = \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AM^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = AM^2 + AB^2 - 2AM\cdot AB\cos 60^\circ = 21$.

Chỉ ra $\overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AD} = \left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{3}{10}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{5}AC^2 - \dfrac{1}{2}AB^2 = 0$.

Suy ra $BM \perp AD$.

**Bài 5** *(4 điểm)*

1. Trong mặt phẳng $Oxy$, cho elip $(E)$: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ có hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $MF_1F_2$ bằng $\dfrac{4}{3}$.
2. Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$ và đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$.
   a) Tìm điểm $M$ nằm trên $d$ sao cho từ $M$ kẻ được hai tiếp tuyến tới đường tròn $(C)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.
   b) Cho hình thoi $ABCD$ có tất cả các cạnh đều tiếp xúc với đường tròn $(C)$, biết $A$ thuộc đường thẳng $d$ và hoành độ của $A$ không nhỏ hơn 1, $BD = 2AC$. Tìm tọa độ $A$.

**Lời giải**.

1. Ta có $a = 5$; $b = 3$ suy ra $c = 4$, $MF_1 + MF_2 = 2a = 10$, $F_1F_2 = 2c = 8$, $p = \dfrac{MF_1 + MF_2 + F_1F_2}{2} = 9$.
   - Ta có $S_{MF_1F_2} = pr = 9\cdot\dfrac{4}{3} = 12$.
   - Mặt khác $S_{MF_1F_2} = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(M,Ox)\cdot F_1F_2 = 4\mathrm{d}(M,Ox)$.

   Từ đó ta có $\mathrm{d}(M,Ox) = 3 = |y_M| \Rightarrow y_M = \pm 3$.

Do đó $M(x_M;3)$ hoặc $M(y_M;3)$.
Vì $M \in (E)$ nên $x_M = 0$. Khi đó ta có $M(0;3)$ hoặc $M(0;-3)$.
Kết luận: $M(0;3)$ hoặc $M(0;-3)$.

2. a) $M(2a-3;a) \in d$, đường tròn $(C)$ có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.
Từ $M$ kẻ được 2 tiếp tuyến tới $(C)$ khi và chỉ khi $M$ nằm ngoài hình tròn $(C)$ khi và chỉ khi $IM > R$ hay $IM > 2\sqrt{2}$. (*)
Giả sử từ $M$ kẻ được 2 tiếp tuyến tới $(C)$ và 2 tiếp tuyến đó vuông góc nhau khi đó $IM = R\sqrt{2} = 4$ (thỏa mãn (*)) hay

$$\begin{aligned} &\sqrt{(2a-5)^2+(a+1)^2} = 4 \\ \Leftrightarrow\ &(2a-5)^2+(a+1)^2 = 16 \\ \Leftrightarrow\ &5a^2-18a+10 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{9+\sqrt{31}}{5} \\ a = \dfrac{9-\sqrt{31}}{5}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

⋄ Với $a = \dfrac{9+\sqrt{31}}{5}$ ta có $M\left(\dfrac{3+2\sqrt{31}}{5};\dfrac{9+\sqrt{31}}{5}\right)$.

⋄ Với $a = \dfrac{9-\sqrt{31}}{5}$ ta có $M\left(\dfrac{3-2\sqrt{31}}{5};\dfrac{9-\sqrt{31}}{5}\right)$.

Vậy $M\left(\dfrac{3+2\sqrt{31}}{5};\dfrac{9+\sqrt{31}}{5}\right)$ hoặc $M\left(\dfrac{3-2\sqrt{31}}{5};\dfrac{9-\sqrt{31}}{5}\right)$.

b) Từ $BD = 2AC$, ta có $IB = 2IA$.
Trong tam giác vuông $IAB$ ta có $\dfrac{1}{IA^2}+\dfrac{1}{IB^2} = \dfrac{1}{IH^2}$ ($H$ là tiếp điểm của $AB$ với $(C)$).
Suy ra $\dfrac{5}{4IA^2} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow IA = \sqrt{10}$.
Giả sử $A(2t-3;t) \in d$ và $x_A \geq 1$ nên $t \geq 2$.

Ta có $IA = \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{(2t-5)^2+(t+1)^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \text{ (thỏa)} \\ t = \dfrac{8}{5} \text{ (không thỏa).} \end{array}\right.$

Với $t = 2$ ta có $A(1;2)$.
Kết luận: $A(1;2)$.

**Bài 6** *(2 điểm)* Cho $x$, $y$, $z$ là ba số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{1}{xy+2}+\dfrac{1}{yz+2}+\dfrac{1}{zx+2}$.

**Lời giải**. Với $a$, $b$, $c$ là 3 số dương. Chứng minh được

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có

$$A = \frac{1}{xy+2}+\frac{1}{yz+2}+\frac{1}{zx+2} \geq \frac{9}{xy+yz+zx+6}.$$

Ta có $\begin{cases}(x-y)^2 \geq 0 \\ (y-z)^2 \geq 0 \\ (z-x)^2 \geq 0\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx.$

Theo giả thiết $x^2+y^2+z^2=3$. Suy ra $A \geq 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=y=z \\ x^2+y^2+z^2=3\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A$ bằng 1 khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

## Đề 13. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(4.0 điểm)* Giải phương trình sau: $\begin{cases}x^3-y^3-3y^2=9 \\ x^2+y^2=x-4y.\end{cases}$

**Lời giải**. Ta có

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}x^3-y^3-3y^2=9 \\ x^2+y^2=x-4y\end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x^3=y^3+3y^2+9 \\ x^2-x=-y^2-4y\end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x^3-3(x^2-x)=y^3+3y^2+9-3(-y^2-4y) \\ x^2-x=-y^2-4y\end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x^3-3x^2+3x=y^3+6y^2+12y+9 \\ x^2-x=-y^2-4y\end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x^3-3x^2+3x-1=y^3+6y^2+12y+8 \\ x^2-x=-y^2-4y\end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases}(x-1)^3=(y+2)^2 \\ x^2-x=-y^2-4y\end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x-1=y+2 \\ x^2-x=-y^2-4y\end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x=y+3 \\ (y+3)^2-(y+3)=-y^2-4y\end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x=y+3 \\ 2y^2+9y+6=0\end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases}y=\dfrac{-9-\sqrt{33}}{4} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}\end{cases} \vee \begin{cases}y=\dfrac{-9+\sqrt{33}}{4} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}\end{cases}.
\end{aligned}$$

**Bài 2** *(4.0 điểm)* Cho $x$, $y$, $z$ là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge 1.$$

**Lời giải**. Theo bất đẳng thức Cauchy cho các số thực dương, ta có

$$\sqrt{x^3+8}=\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}\le\frac{(x+2)+(x^2-2x+4)}{2}=\frac{x^2-x+6}{2}$$

Suy ra $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}\ge\dfrac{2x^2}{x^2-x+6}$.

Tương tự, ta cũng có $\dfrac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}\ge\dfrac{2y^2}{y^2-y+6}$; $\dfrac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge\dfrac{2z^2}{z^2-z+6}$.

Từ đó suy ra

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge\frac{2x^2}{x^2-x+6}+\frac{2y^2}{y^2-y+6}+\frac{2z^2}{z^2-z+6}. \qquad (1)$$

Mặt khác theo công thức Cauchy - Schwarz:

$$\frac{2x^2}{x^2-x+6}+\frac{2y^2}{y^2-y+6}+\frac{2z^2}{z^2-z+6}\ge\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18}. \qquad (2)$$

Ta chứng minh:

$$\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18}\ge 1. \qquad (3)$$

Thật vậy ta có

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18&=(x+y+z)^2-(x+y+z)-2(xy+yz+zx)+18\\&=(x+y+z)^2-(x+y+z)+12>0.\end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow 2(x+y+z)^2\ge x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18\\&\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+x+y+z\ge 6.\end{aligned}$$

Mặt khác, do $x$, $y$, $z$ là các số dương nên ta có

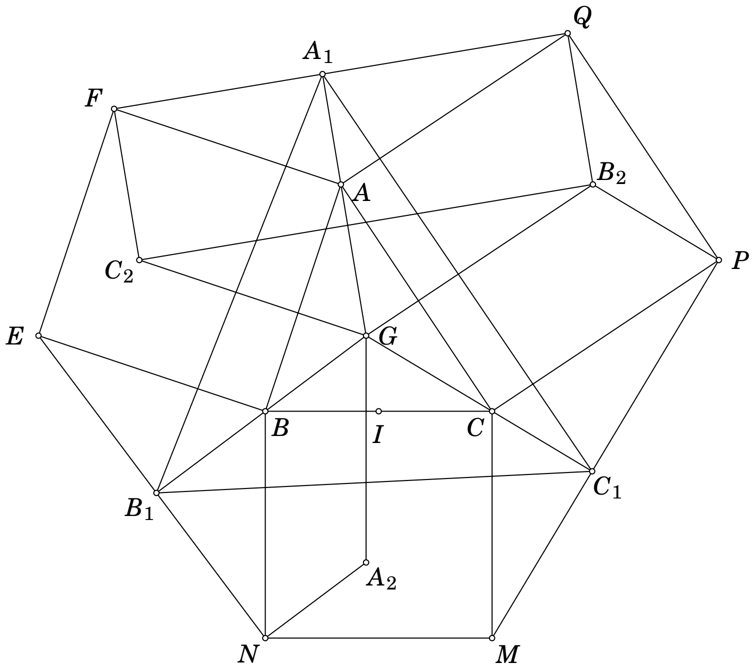
$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$
$$x+y+z\ge\sqrt{3(xy+yz+zx)}$$

Mà $xy+yz+zx=3$ nên bất đẳng thức (3) đúng. Từ (1), (2) và (3), ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

**Bài 3** *(4.0 điểm)* Trên các cạnh $BC$, $CA$, $AB$ và phía ngoài tam giác $ABC$ ta dựng các hình vuông $BCMN$, $ACPQ$, $ABEF$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Kí hiệu $A_1$ là giao điểm của $AG$ và $FQ$; $B_1$ là giao điểm của $BG$ và $NE$; $C_1$ là giao điểm của $CG$ và $MP$. Ta xác định các điểm $A_2$, $B_2$, $C_2$ sao cho $AGC_2F$, $BGA_2N$, $CGB_2P$ là các hình bình hành. Chứng minh rằng các đường đi qua $A_2$, $B_2$, $C_2$ tương ứng vuông với $B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$ đồng quy.

**Lời giải**.




Gọi $I$ là trung điểm $BC$. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FQ}\cdot\overrightarrow{AI} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AQ}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(0-\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}+0\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-AF\cdot AC\cos\widehat{FAC}+AQ\cdot AB\cos\widehat{QAB}\right)=0\end{aligned}$$

(Do $AF=AB, AQ=AC, \widehat{FAB}=\widehat{QAC}=90^\circ+\widehat{A}$)

Suy ra $FQ\perp AI$ hay $FQ\perp A_1G$ (1).

Ta có $CGB_2P$ là hình bình hành nên $GB_2$ song song và bằng $CP$ nên $GB_2$ song song và bằng $AQ$, suy ra $AQB_2G$ là hình bình hành, vậy có $QB_2$ song song và bằng $AG$. Suy ra $QB_2$ song song và bằng $FC_2$. Nên $FQB_2C_2$ là hình bình hành, hay $FQ$ song song với $B_2C_2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A_1G\perp B_2C_2$.

Tương tự cũng có $B_1G\perp A_2C_2$, $C_1G\perp A_2B_2$.

Vậy các đường thẳng đi qua $A_1$, $B_1$, $C_1$ tương ứng vuông góc với $B_2C_2$, $C_2A_2$, $A_2B_2$ đồng quy tại $G$ nên theo hệ quả của định lí Carnot, ta có các đường thẳng đi qua $A_2$, $B_2$, $C_2$ tương ứng vuông góc với $B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$ cũng đồng quy.

**Bài 4** *(4.0 điểm)* Giả sử $m$, $n$ là các số tự nhiên thỏa mãn: $4m^3+m=12m^3+n$. Chứng minh rằng $m-n$ là lập phương của một số nguyên.

**Lời giải**. Ta có:

$$\begin{aligned}4m^3+m=12m^3+n &\Leftrightarrow 4(m^3-n^3)+(m-n)=8n^3\\ &\Leftrightarrow (m-n)(4m^2+4mn+4n^2+1)=8n^3 \qquad (1)\end{aligned}$$

Giả sử $p$ là một ước nguyên tố chung của $m-n$ và $4m^2+4mn+4n^2+1$.

Do $4m^2+4mn+4n^2+1$ là số lẻ nên $p$ là số lẻ.
Từ (1) suy ra $8n^3 \vdots p$ mà $p$ là số nguyên lẻ $\Rightarrow n \vdots p \Rightarrow m \vdots p$.
Mặt khác $p$ là ước của $4m^2+4mn+4n^2+1 \Rightarrow p=1$ (vô lí),
Do đó $m-n$ và $4m^2+4mn+4n^2+1$ không có ước nguyên tố chung, suy ra

$$\left(m-n, 4m^2+4mn+4n^2+1\right)=1.$$

Do $8n^3=(2n)^3$, suy ra $m-n$ là lập phương của một số nguyên.

**Bài 5** *(4.0 điểm)* Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét các tập hợp $M$ các điểm có tọa độ $(x;y)$ với $x,\ y \in \mathbb{R}^*$ và $x \le 12$; $y \le 12$. Mỗi điểm trong $M$ được tô bởi một trong ba màu: màu đỏ, màu trắng và màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ mà tất cả các đỉnh của nó thuộc $M$ và được tô màu.

**Lời giải**. Tập $M$ có 144 điểm được tô bằng 3 màu nên tồn tại 1 màu tô được tô ở không ít hơn $\dfrac{144}{3}=48$ điểm.
Ta chọn trong các điểm của $M$ đúng 48 điểm được tô cùng màu. Chia các điểm của $M$ thành 12 hàng (các điểm có cùng tung độ) và 12 cột (các điểm có cùng hoành độ). Gọi $a_i$ $(i=1,\ldots,12)$ là số điểm trong 48 điểm được chọn có trong cột thứ $i$ suy ra: $\sum\limits_{i=1}^{12} a_i=48$.
Khi đó, số cặp điểm được chọn trong cột thứ $i$ là: $\dfrac{a_i(a_i-1)}{2}$.
Số cặp điểm có hoành độ trùng nhau là: $\sum\limits_{i=1}^{12}\dfrac{a_i(a_i-1)}{2}$.

$$\sum_{i=1}^{12}\frac{a_i(a_i-1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{12}a_i^2-\sum_{i=1}^{12}a_i\right)\ge\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{12}a_i\right)^2}{12}-\sum_{i=1}^{12}a_i\right]=72.$$

Ta có
Vì mỗi cặp được chọn trong cùng một cột tương ứng với một cặp hàng trong đó các điểm trong cùng một hàng có cùng tung độ.
Số các cặp hàng khác nhau là $C_{12}^2=66$.
Vì $72>66$ nên luôn tìm được hai cặp điểm nằm trên cùng một hàng.
Vậy luôn tồn tại một hình chữ nhật có các cạnh song song với trục tọa độ và có 4 đỉnh tô cùng một màu.

## Đề 14. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(4.0 điểm)* Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$(6x-3)\sqrt{7-3x}+(15-6x)\sqrt{3x-2}=2\sqrt{-9x^2+27x-14}+11.$$

**Lời giải**. Điều kiện: $\dfrac{2}{3}\le x\le\dfrac{7}{3}$.

Đặt $a = \sqrt{7-3x}$, $b = \sqrt{3x-2}$ $(a, b \geq 0)$. Suy ra:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ (2b^2+1)a + (2a^2+1)b = 2ab + 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s^2 - 2p = 5 \\ 2sp + s = 2p + 11 \end{cases} \quad (s = a+b,\ p = ab)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p = s^2 - 5 \\ s(s^2-5) + s = s^2 - 5 + 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p = s^2 - 5 \\ s^3 - s^2 - 4s - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p = s^2 - 5 \\ (s-3)(s^2+2s+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ s = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \text{ và } b = 1 \\ a = 1 \text{ và } b = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Thử lại thỏa mãn.

Vậy nghiệm phương trình là $x = 1$ hoặc $x = 2$.

**Bài 2** *(4.0 điểm)* Cho tam giác $ABC$ $(BC < AC)$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB$, $AP$ vuông góc với $BC$ tại $P$, $BQ$ vuông góc với $AC$ tại $Q$. Giả sử đường thẳng $PQ$ cắt đường thẳng $AB$ tại $T$. Chứng minh rằng $TH \perp CM$, trong đó $H$ là trực tâm tam giác $ABC$.

**Lời giải.**

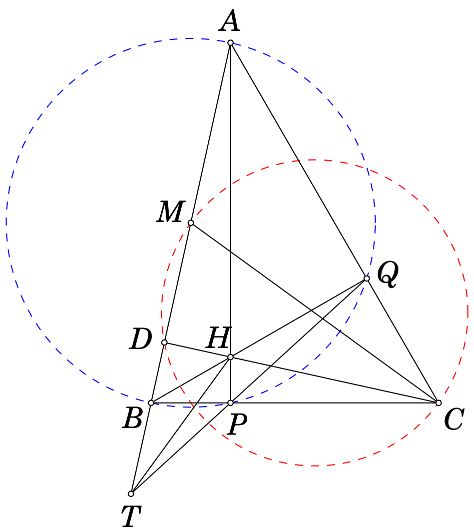
Gọi $CD \perp AB$ tại $D$. Khi đó $AP$, $BQ$, $CD$ đồng quy nên $T$, $B$, $D$, $A$ là hàng điểm điều hòa (với $(TDBA) = -1$).

Do đó ta có $TM \cdot TD = TA \cdot TB$.

Xét hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác $CDM$ và ngoại tiếp tứ giác $ABPQ$, tâm của hai đường tròn này đều nằm trên $CM$.

Nhưng $TM \cdot TD = TA \cdot TB$ và $HP \cdot HA = HQ \cdot HB$ nên $H$ và $T$ nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn nói trên.

Vậy $HT \perp CM$.



**Bài 3** *(4.0 điểm)* Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ là tập số thực) thỏa mãn $f(f(x))=x^3+\frac{3}{4}x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại 3 số thực phân biệt $a$, $b$, $c$ sao cho $f(a)+f(b)+f(c)=0$.

**Lời giải**. Đặt $g(x)=x^3+\frac{3}{4}x$ thì $f(f(x))=g(x)$. Suy ra $f(g(x))=f(f(f(x)))=g(f(x))$.
Dễ thấy $g(x)$ là đơn ánh nên từ $f(f(x))=g(x)$ suy ra $f(x)$ cũng là đơn ánh.
Gọi $x_0$ là một điểm cố định của hàm $g(x)$. Suy ra $g(x_0)=x_o\Rightarrow x_0\in\left\{0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.
Ta có $f(x_0)=f(g(x_0))=g(f(x_0))$. Suy ra $f(x_0)$ cũng là một điểm cố định của hàm $g(x)$, $f(x)$ là một song ánh trên tập $\mathcal{D}=\left\{0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ nên

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}=0.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

**Bài 4** *(4.0 điểm)* Giả sử $m$, $n$ là các số tự nhiên thỏa mãn: $4m^3+m=12m^3+n$. Chứng minh rằng $m-n$ là lập phương của một số nguyên.

**Lời giải**. Ta có: $a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geq k(ab+bc+ca)^2$.
Vì bất đẳng thức đúng với mọi giá trị $a$, $b$, $c$ nên đúng với $a=b=c=1\Rightarrow k\leq\frac{2}{3}$.
Ta chứng minh $k=\frac{2}{3}$ là giá trị lớn nhất.
Xét $k=\frac{2}{3}$ bất đẳng thức trở thành

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geq\frac{2}{3}(ab+bc+ca)^2\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow\ 3\left(a^4+b^4+c^4\right)\geq(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+abc(a+b+c).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(a^4+b^4)+(b^4+c^4)+(a^4+c^4)\geq 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$$

$$\Leftrightarrow\ 3\left(a^4+b^4+c^4\right)\geq 3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right).\quad(2)$$

Mặt khác

$$\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-abc(a+b+c)=\frac{1}{2}(ab-bc)^2+\frac{1}{2}(bc-ca)^2+\frac{1}{2}(ca-ab)^2\geq 0.\quad(3)$$

Từ (2) và (3) suy ra (1) được chứng minh. Vậy số $k$ lớn nhất $k=\frac{2}{3}$.

**Bài 5** *(4.0 điểm)* Tìm số nguyên dương $n$ nhỏ nhất để $2013^n-1$ chia hết cho $2^{2014}$.

**Lời giải**. Xét $n=2^kt$ với $k$, $t$ là các số tự nhiên và $t$ là số lẻ.
Đặt $2013^n-1=a^n-1$.

$$\begin{aligned}a^n-1=a^{2^kt}-1&=\left(a^{2^k}\right)^t-1\\&=\left(a^{2^k}-1\right)\left[\left(a^{2^k}\right)^{t-1}+\cdots+a^{2^k}+1\right]\end{aligned}$$

Do $t$ là số lẻ nên $a^n-1\ \vdots\ 2^{2014}\Leftrightarrow a^{2^k}-1\ \vdots\ 2^{2014}$.

Ta có $a^{2^k}-1=\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)\left(a^k+1\right)\cdots\left(a^{2^{k-1}}+1\right)$ và $a$ chia 4 dư 1 nên $a^{2^{k-1}}+1$ chia 4 dư 2.

Do đó $a^n-1 \,\vdots\, 2^{2014} \Leftrightarrow (k-1)+3 \geq 2014$.

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của $n$ cần tìm là $n=2^{2012}$.

## Đề 15. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(5 điểm)* Cho Parabol $(P)$ có phương trình $y=4x^2+1$, đường thẳng $d$ có phương trình $y=x+3$.

a) Lập phương trình đường thẳng $\Delta$ song song với đường thẳng $d$ sao cho $\Delta$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ và $AB=1$.

b) Gọi $I$ là đỉnh của $(P)$; $A$, $B$ là hai điểm phân biệt trên $(P)$ và không trùng với $I$ sao cho $IA$ vuông góc với $IB$. Tìm quỹ tích trung điểm $N$ của đoạn thẳng $AB$ khi $A$, $B$ thay đổi.

**Lời giải.**

a) Đường thẳng $\Delta$ song song với $d$ có dạng $y=x+m$ $(m\neq 3)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $\Delta$ và $(P)$ là

$$4x^2-x+1-m=0. \tag{1}$$

Để $\Delta$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là $\Delta>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{15}{16}$.

Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm phân biệt của (1).

Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{1}{4} \\ x_1x_2=\dfrac{1-m}{4}. \end{cases}$

Suy ra $A(x_1;x_1+m)$, $B(x_2;x_2+m)$, vì $AB=1$ nên

$$\begin{aligned} & AB=1 \\ \Leftrightarrow\ & 2(x_2-x_1)^2=1 \\ \Leftrightarrow\ & 2\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]=1 \\ \Leftrightarrow\ & 2\left(\frac{1}{16}-4\cdot\frac{1-m}{4}\right)=1 \\ \Leftrightarrow\ & m=\frac{23}{16}. \end{aligned}$$

Vậy $m=\dfrac{23}{16}$.

b) Gọi $A\left(a;4a^2+1\right)\in(P)$; đỉnh $I(0;1)$.

Đường thẳng $IB$ qua $I(0;1)$, nhận $\overrightarrow{IA}\left(a;4a^2\right)$ là vec-tơ pháp tuyến. Phương trình của đường thẳng $IB$ là $x+4ay-4a=0$.

Toạ độ của $B$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y=4x^2+1 \\ x+4ay-4a=0 \end{cases} \Leftrightarrow B\left(-\dfrac{1}{16a};\dfrac{1}{64a^2}+1\right)$.

$N$ là trung điểm của $AB$, suy ra $N\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{32a};2a^2+\dfrac{1}{128a^2}+1\right)$.

Nhận xét $y_N=8x_N^2+\dfrac{5}{4}$.

Vậy quỹ tích của điểm $N$ là Parabol $y = 8x^2 + \dfrac{5}{4}$

**Bài 2** *(5 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = x\sqrt{x}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+21} = \sqrt{y-1} + y^2 \\ \sqrt{y^2+21} = \sqrt{x-1} + x^2. \end{cases}$

**Lời giải**.

a) Điều kiện $x \geq 1$, khi đó ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = x\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x^2-1} = x\sqrt{x} - \sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\sqrt{x} - \sqrt{x-1} \geq 0 \\ x^2 - 1 = x^3 + x - 1 - 2x\sqrt{x^2-1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x-1) - 2\sqrt{x(x-1)} + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x(x-1)} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) Ta có $\begin{cases} \sqrt{x^2+21} = \sqrt{y-1} + y^2 & (1) \\ \sqrt{y^2+21} = \sqrt{x-1} + x^2 & (2). \end{cases}$

Điều kiện $x \geq 1$; $y \geq 1$.

Trừ vế với vế của (1) cho (2), ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+21} - \sqrt{y^2+21} = \sqrt{y-1} - \sqrt{x-1} + y^2 - x^2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+21}+\sqrt{y^2+21}} = \frac{y-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x-1}} + (y-x)(y+x) \\ \Leftrightarrow\ & (x-y)\left(\frac{x-y}{\sqrt{x^2+21}+\sqrt{y^2+21}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x-1}} + x + y\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = y \text{ vì } \frac{x-y}{\sqrt{x^2+21}+\sqrt{y^2+21}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x-1}} + x + y > 0,\ \forall x \geq 1; y \geq 1. \end{aligned}$$

Thay $x = y$ vào (1) ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+21} = \sqrt{x+1} + x^2 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x^2+21} - 5 = \sqrt{x-1} + 1 + x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+21}+5} = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + (x-2)(x+2) \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5} - x - 2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[(x+2)\left(\frac{-\sqrt{x^2+21}-4}{\sqrt{x^2+21}+5}\right)-\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ vì } (x+2)\left(\frac{-\sqrt{x^2+21}-4}{\sqrt{x^2+21}+5}\right)-\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}<0$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(2;2)$.

**Bài 3** *(5 điểm)*

a) Cho tam giác $ABC$ có $AC=b$, $BA=a$, $AB=c$ $(b<a)$. Gọi $D$, $E$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $AC$. Đường phân giác trong của góc $C$ cắt $DE$ tại $P$. Đường tròn nội tiếp của tam giác $ABC$ tiếp xúc với $AB$, $BC$ lần lượt tại $N$, $M$.

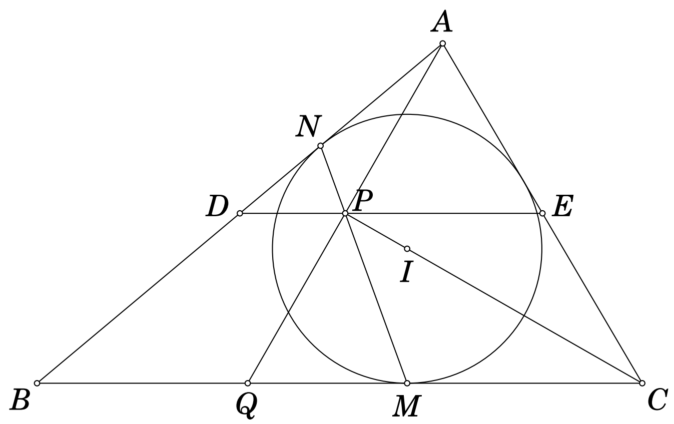
i) Tính $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{BP}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ và theo $a$, $b$, $c$

ii) Chứng minh rằng $P$, $M$, $N$ thẳng hàng

b) Cho tam giác $ABC$ có $AC=b$, $BA=a$, $AB=c$ là độ dài ba cạnh của tam giác; $m_a$, $m_b$, $m_c$ là độ dài ba đường trung tuyến lần lượt xuất phát từ $A$, $B$, $C$. Gọi $R$, $S$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, diện tích của tam giác $ABC$.

Chứng minh rằng nếu $\dfrac{1}{abm_c}+\dfrac{1}{bcm_a}+\dfrac{1}{cam_b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2RS}$ thì tam giác $ABC$ đều.

**Lời giải.**




a) i) Gọi $Q$ là giao điểm của $AP$ và $BC$.

Suy ra $P$ là trung điểm của $AQ$, $\triangle ACQ$ cân tại $C$.

$CQ=CA=b$ nên suy ra $BQ=BC-CQ=a-b$.

Suy ra $\overrightarrow{BN}=\dfrac{a+c-b}{2c}\cdot\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BM}=\dfrac{a+c-b}{2c}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\dfrac{a-b}{a}\overrightarrow{BC}\right)$.

ii) Ta có

- $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\dfrac{a+c-b}{2c}\cdot\overrightarrow{BA}-\dfrac{a+c-b}{2c}\cdot\overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BP}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{c}{2a}\overrightarrow{BC}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{PM}=\dfrac{-c}{a+c-b}\cdot\overrightarrow{MN}$.

Khi đó $\overrightarrow{PM}$ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.

Vậy ba điểm $P$, $M$, $N$ thẳng hàng.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{abm_c}+\frac{1}{bcm_a}+\frac{1}{cam_b}=\frac{\sqrt{3}}{2RS}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{abm_c}+\frac{1}{bcm_a}+\frac{1}{cam_b}=\frac{2\sqrt{3}}{abc}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{c}{\sqrt{3}m_c}+\frac{a}{\sqrt{3}m_a}+\frac{b}{\sqrt{3}m_b}=2.
\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sqrt{3}m_a}&=\frac{a^2}{\sqrt{3}a\sqrt{\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}}\\
&=\frac{2a^2}{\sqrt{3}a\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}\\
&\ge\frac{2a^2}{\dfrac{3a^2+2b^2+2c^2-a^2}{2}}\\
&=\frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2}.
\end{aligned}$$

Chương minh tương tự ta cũng có

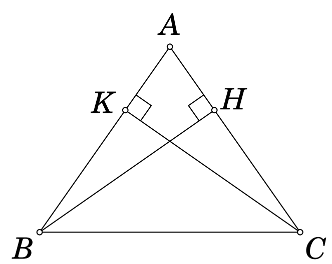
- $\dfrac{b}{\sqrt{3}m_b}\ge\dfrac{2b^2}{a^2+b^2+c^2}$.
- $\dfrac{c}{\sqrt{3}m_c}\ge\dfrac{2c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Vậy $\dfrac{a}{\sqrt{3}m_a}+\dfrac{b}{\sqrt{3}m_b}+\dfrac{c}{\sqrt{3}m_c}\ge 2$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}3a^2=2b^2+2c^2-a^2\\3b^2=2a^2+2c^2-b^2\\3c^2=2a^2+2b^2-c^2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.$

**Bài 4** *(3 điểm)* Trong mặt phẳng với hệ toạ độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ cân tại $A$, đường thẳng $BC$ có phương trình $x+2y-17=0$, đường cao $CK$ có phương trình $4x+3y-28=0$, đường cao $BH$ qua điểm $M(1;6)$. Tìm toạ độ đỉnh $A$ và tính diện tích tam giác $ABC$.

**Lời giải**.




Vì $\triangle ABC$ cân tại $A$ nên $\widehat{CBH}=\widehat{BCK}$.
Suy ra $\cos(BC,BH)=\cos(BC,CK)$.
Đường thẳng $BC$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{BC}=(1;2)$.
Đường thẳng $CK$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{CK}=(4;3)$.
Gọi véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng $BH$.
là $\vec{n}_{BH}=(a;b)$ $\left(a^2+b^2>0\right)$, ta có

$$\begin{aligned}
&\cos(BC,BH)=\cos(BC;CK)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{|\vec{n}_{BC}\cdot\vec{n}_{BH}|}{|\vec{n}_{BC}|\cdot|\vec{n}_{BH}|}=\frac{|\vec{n}_{BC}\cdot\vec{n}_{CK}|}{|\vec{n}_{BC}|\cdot|\vec{n}_{CK}|}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}\cdot 5}$$
$$\Leftrightarrow (a+2b)^2=4\left(a^2+b^2\right)$$
$$\Leftrightarrow 3a^2-4ab=0.$$

- Nếu $b=0$ thì $a=0$ (loại).
- Nếu $b\neq 0$, chọn $b=3$ suy ra $a=0$ hoặc $a=4$.
- Nếu $a=4$; $b=3$ thì $\vec{n}_{BH}=(4;3)$ suy ra $\vec{n}_{BH}=\vec{n}_{CK}$ (loại).
- Nếu $a=0$; $b=3$ suy ra phương trình $BH$ là $y-6=0$.

  Toạ độ điểm $C$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+2y-17=0\\ 4x+3y-28=0\end{cases} \Rightarrow C(1;8)$.

  Phương trình của $AC: x=1$.
  Lại có $B$ là giao điểm của $BH$ và $BC$ suy ra $B(5;6)$.
  Phương trình $BA: 3x-4y+9=0$.
  $A$ là giao điểm của $AB$ và $AC$ suy ra $A(1;3)$.
  Từ đó ta tính được $BC=\sqrt{20}$ và $\mathrm{d}(A,BC)=\dfrac{|1+6-17|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$.

  Vậy $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot \mathrm{d}(A,BC)=10$.

**Bài 5** *(2 điểm)* Cho ba số dương $a$, $b$, $c$ thoả mãn $a^2+b^2+c^2=12$. Chứng minh
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+1}\geq\frac{8}{a^2+28}+\frac{8}{b^2+28}+\frac{8}{c^2+28}.$$

**Lời giải**. Ta có $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}\geq\dfrac{4}{a+2b+c}$.
Chứng minh tương tự ta có

- $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}\geq\dfrac{4}{a+2c+b}$.
- $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\geq\dfrac{4}{b+2a+c}$.

Suy ra
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\geq 2\left(\frac{1}{b+2a+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}\right).$$

Ta chứng minh $\dfrac{1}{b+2a+c}\geq\dfrac{4}{a^2+28}$, thật vậy ta có
$$\frac{1}{b+2a+c}\geq\frac{4}{a^2+28}$$
$$\Leftrightarrow a^2+28\geq 4b+8a+4c$$
$$\Leftrightarrow 2a^2+b^2+c^2+16-4b-8a-4c\geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Suy ra $\dfrac{1}{b+2a+c}+\dfrac{1}{a+2b+c}+\dfrac{1}{b+2c+a}\geq\dfrac{4}{a^2+28}+\dfrac{4}{b^2+28}+\dfrac{4}{c^2+28}$.

Vậy $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}\geq\dfrac{8}{a^2+28}+\dfrac{8}{b^2+28}+\dfrac{8}{c^2+28}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

# Đề 16. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** Cho parabol $(P)$: $y = ax^2 + bx - 1$.

a) Tìm các giá trị của $a$, $b$ để parabol có đỉnh $S\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{11}{2}\right)$.

b) Với giá trị của $a$, $b$ tìm được ở câu a), tìm giá trị của $k$ để đường thẳng $\Delta$: $y = x(k+6)+1$ cắt parabol tại hai điểm phân biệt $M$, $N$ sao cho trung điểm của đoạn thẳng $MN$ nằm trên đường thẳng $d$: $4x + 2y - 3 = 0$.

**Lời giải.**

a) Do Parabol nên $a \neq 0$ và có trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow 3a - b = 0$.

Tọa độ đỉnh có tung độ là $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$ mà $\Delta = b^2 + 4a$ nên ta có $b^2 + 4a = 22a$ hay $b^2 - 18a = 0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3a - b = 0 \\ b^2 - 18 = 0 \end{cases}$ thế vào ta được $b^2 - 6b = 0 \Rightarrow b = 0; b = 6$.

- Nếu $b = 0 \Rightarrow a = 0$ loại.
- Nếu $b = 6 \Rightarrow a = 2$ thỏa mãn.

Vậy $a = 2; b = 6$ là giá trị cần tìm.

b) Để đường thẳng cắt Parabol tại hai điểm phân biệt thì phương trình

$$2x^2 + 6x - 1 = kx + 6x + 1$$

có hai nghiệm phân biệt $x_1$ ; $x_2$, hay phương trình $2x^2 - kx - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Điều này luôn đúng vì $\Delta = k^2 + 16 > 0$.

Khi đó, giao điểm $M(x_1; (k+6)x_1 + 1), N(x_2; (k+6)x_2 + 1)$ nên trung điểm của đoạn $MN$ là $I\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{(k+6)x_2 + 1 + (k+6)x_2 + 1}{2}\right)$.

Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{k}{2}$ nên $I\left(\dfrac{k}{4}; \dfrac{2 + 3k + \dfrac{1}{2}k^2}{2}\right)$.

Do $I$ thuộc đường thẳng $4x + 2y - 3 = 0$ nên $k^2 + 8k - 2 = 0$ hay $k = -4 \pm \sqrt{18}$ thì thỏa mãn bài toán.

**Bài 2** Cho tam giác đều $ABC$ và các điểm $M$, $N$, $P$ thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = \dfrac{4}{15}\overrightarrow{AB}$. Tìm $k$ để $AM$ vuông góc với $PN$.

**Lời giải.**

- $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.
- $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = -\dfrac{4}{15}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Để $AM$ vuông góc với $PN$ thì $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[(1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}\right]\left(-\frac{4}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4(1-k)}{15}AB^2 + \frac{k}{3}AC^2 + \left(\frac{1-k}{3} - \frac{4k}{15}\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4(1-k)}{15}+\frac{k}{3}+\left(\frac{1-k}{3}-\frac{4k}{15}\right)\cos 60^\circ=0$$
$$\Leftrightarrow k=\frac{1}{3}.$$

Vậy $k=\frac{1}{3}$.

**Bài 3**

a) Tìm $m$ để phương trình $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+m\sqrt{x+2\sqrt{x-9}-8}=x+\frac{3m+1}{2}$ có hai nghiệm $x_1,x_2$ sao cho $x_1<10<x_2$.

b) Giải phương trình $x=\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{3-x}$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-2y-6+2\sqrt{2y+3}=0 \\ (x-y)\left(x^2+xy+y^2+3\right)=3\left(x^2+y^2\right)+2. \end{cases}$

**Lời giải.**

a) Viết lại phương trình thành $\sqrt{x-9}+3+m(\sqrt{x-9}+1)=x+\frac{3m+1}{2}$.

Đặt $t=\sqrt{x-9}, t\geq 0$, phương trình trở thành
$$t+3+m(t+1)=t^2+9+\frac{3m+1}{2}\Leftrightarrow 2t^2-2(m+1)t+m+13=0. \qquad (1)$$

Phương trình ban đầu có nghiệm $x_1<10<x_2 \Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $0\leq t_1<1<t_2$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ (t_1-1)(t_2-1)<0 \\ t_1+t_2>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2-2(m+13)>0 \\ \frac{m+13}{2}-m-1+1<0 \\ m+1>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-25>0 \\ 13-m<0 \\ m>-1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow m>13.$$

b) Điều kiện: $x\leq 3$.

Đặt $\sqrt{3-x}=a;\sqrt{4-x}=b;\sqrt{5-x}=c$ với $a,b,c$ là số thực không âm.

Ta có $x=3-a^2=4-b^2=5-c^2=ab+bc+ca$.

Do đó
$$\begin{cases} 3-a^2=ab+bc+ca \\ 4-b^2=ab+bc+ca \\ 5-c^2=ab+bc+ca \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(c+a)=3 \\ (b+c)(a+b)=4 \\ (c+a)(b+c)=5. \end{cases}$$

Nhân từng vế ba phương trình ta được $(a+b)(b+c)(c+a)=2\sqrt{15}$.

Suy ra $\begin{cases} a+b=\dfrac{2\sqrt{15}}{5} \\ b+c=\dfrac{2\sqrt{15}}{3} \\ c+a=\dfrac{2\sqrt{15}}{4} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=\dfrac{\sqrt{15}}{5}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}+\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

Suy ra $x=\dfrac{671}{240}$.

Thử lại $x=\dfrac{671}{240}$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{671}{240}$.

c) Điều kiện $y \geq -\dfrac{3}{2}$.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow x^3-y^3+3x-3y=3\left(x^2+y^2\right)+2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^3=(y+1)^3 \\ &\Leftrightarrow x-1=y+1 \\ &\Leftrightarrow y=x-2.\end{aligned}$$

Thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$x^2-3x+1=-\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}=1-x \\ \sqrt{2x-1}=x.\end{array}\right.$$

(Có thể bình phương được phương trình $(x-1)^2\left(x^2-4x+2\right)=0$ ).

Giải hai phương trình này ta được $x=1, x=2-\sqrt{2}$.

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(1;-1),\left(2-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.

**Bài 4** Cho hình vuông $BCD$ cạnh có độ dài là $a$. Gọi $E$, $F$ là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, đường thẳng $BF$ cắt đường thẳng $AE$ tại điểm $I$.

a) Tính giá trị của $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{CE}$ theo $a$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{AIC}=90^\circ$.

**Lời giải**.

a) Tính $\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CE}$ theo $a$.

Ta có $CE=\dfrac{2a}{3}$.

Ta có $AE^2=AB+BE^2=a^2+\dfrac{a^2}{9}=\dfrac{10a^2}{9}$ nên $AE=\dfrac{a\sqrt{10}}{3}$.

Mặt khác $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{CE}=EA\cdot CE\cdot\cos\widehat{AEB}$.

Trong tam giác vuông $BAE$ ta có $\cos\widehat{AEB}=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Nên $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{CE}=EA\cdot CE\cdot\cos\widehat{AEB}=\dfrac{a\sqrt{10}}{3}\cdot\dfrac{2a}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{2}{9}a^2$.

b) Chứng minh $\widehat{AIC}=90^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Giả sử $\overrightarrow{BI} = k \cdot \overrightarrow{BF}, k \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + kBF = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}) = \left(1 + \frac{k}{2}\right)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD}.$$

Do $A$, $E$, $I$ thẳng hàng nên $\left(1 + \frac{k}{2}\right) : 1 = k : \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{2}{5}$.

Nên

$$\overrightarrow{AI} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$$

và

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}.$$

Suy ra

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CI} = \left(\frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{6}{25}a^2 - \frac{6}{25}a^2 = 0$$

nên $\widehat{AIC} = 90^\circ$.

**Bài 5** Cho các số dương $a, b, c$ có $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c + a + b}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2a + b + c}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2b + c + a}}.$$

**Lời giải**. Ta có

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c + a + b}} = \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{c + (a + b + c)}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{c + 3}} + \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{c + 3}} + \frac{c + 3}{8}\right) - \frac{c + 3}{16}.$$

Suy ra $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c + a + b}} \geq \frac{3a}{4} - \frac{c + 3}{16}$.

Tương tự $\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2a + b + c}} \geq \frac{3b}{4} - \frac{a + 3}{16}$ và $\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2b + a + c}} \geq \frac{3c}{4} - \frac{b + 3}{16}$.

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức cùng chiều ta được $P \geq \frac{3}{2}$.

$P = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.

## Đề 17. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1**

a) Giải phương trình $x^2 - 2x - 3 = \sqrt{x + 3}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{y}} - \sqrt{x - \sqrt{y}} = 2 \\ \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x^2 + y} = 4. \end{cases}$

**Lời giải**.

a) Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 4 = \sqrt{x + 3}$.

Đặt $\sqrt{x + 3} = y - 1$, $(y \geq 1) \Rightarrow (y - 1)^2 = x + 3$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (y - 1)^2 = x + 3 \\ (x - 1)^2 = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y - 1) = 0 \\ (y - 1)^2 = x + 3. \end{cases}$

⟐ Trường hợp 1:

$$\begin{cases} x = y \\ (y-1)^2 = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \text{ (loại)} \\ y = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

⟐ Trường hợp 2:

$$\begin{cases} x = 1-y \\ (y-1)^2 = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-y \\ y^2 - y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-y \\ \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ (loại)} \\ y = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ và $x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2 & (1) \\ \sqrt{x^2-y} + \sqrt{x^2+y} = 4 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $y \geq 0$, $x \geq \sqrt{y}$, $x^2 \geq y$. Nhận xét: Ta thấy $VT(1) \geq 0$.

⟐ Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{x^2-y} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-y} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y = 4x-4. \end{cases}$

⟐ Thay $y = 4x-4$ vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2+4x-4} = 4 \\ \Leftrightarrow\ & x-2+\sqrt{x^2+4x-4} = 4 (\text{ vì } x \geq 2) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \leq 6 \\ x^2+4x-4 = (6-x)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Với $x = \dfrac{5}{2} \Rightarrow y = 6$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y) = \left(\dfrac{5}{2};6\right)$.

**Bài 2**

a) Tìm tham số $m$ để bất phương trình $\dfrac{x+1}{mx^2-4x+m-3} < 1$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

b) Tìm tham số $m$ để hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y = 2m \\ (x+y-2)^2 = 4 \end{cases}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

**Lời giải.**

a) Để bất phương trình có tập nghiệm $\mathbb{R}$ ta cần có $mx^2-4x+m-3\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$(m=0$ không thỏa mãn$)\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ -m^2+3m+4<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1\\ m>4.\end{cases}$

- Với $m<-1$, khi đó ta có $mx^2-4x+m-3<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
  Bất phương trình $\Leftrightarrow x+1>mx^2-4x+m-3\Leftrightarrow mx^2-5x+m-4<0.$ (1)
  Bất phương trình có tập nghiệm $\mathbb{R}$
  $$\Leftrightarrow\Delta_{(1)}<0\Leftrightarrow 4m^2-16m-25>0$$
  $$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<\dfrac{4-\sqrt{41}}{2}\\ m>\dfrac{4+\sqrt{41}}{2}.\end{array}\right.$$
  Mà $m<-1\Rightarrow m<\dfrac{4-\sqrt{41}}{2}$.
- Với $m>4$, khi đó ta có $mx^2-4x+m-3>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.
  Bất phương trình $\Leftrightarrow x+1<mx^2-4x+m-3\Leftrightarrow mx^2-5x+m-4>0.$ (2)
  Bất phương trình có tập nghiệm $\mathbb{R}$
  $$\Leftrightarrow\Delta_{(2)}<0\Leftrightarrow 4m^2-16m-25>0$$
  $$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<\dfrac{4-\sqrt{41}}{2}\\ m>\dfrac{4+\sqrt{41}}{2}.\end{array}\right.$$
  Mà $m>4$ nên $m>\dfrac{4+\sqrt{41}}{2}$.

Vậy $m<\dfrac{4-\sqrt{41}}{2}$, $m>\dfrac{4+\sqrt{41}}{2}$.

b) Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}x^2+y^2-2(x+y)=2m\\ \left[\begin{array}{l}x+y=4\\ x+y=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}y=-x\\ x^2=m\quad(2)\end{cases} & (I)\\ \begin{cases}y=4-x\\ (x-2)^2=m.\quad(2)\end{cases} & (II)\end{array}\right.$$

Nhận xét: Nghiệm của hệ $(I)$ thỏa mãn $x+y=0$ và nghiệm của hệ $(II)$ thỏa mãn $x+y=4$, suy ra hai hệ không thể có nghiệm chung, do đó hệ phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

**Bài 3** Tam thức $f(x)=x^2+bx+c$ thỏa mãn $|f(x)|\leq\dfrac{1}{2}$ với $\forall x\in[-1;1]$. Hãy tìm các hệ số $b$ và $c$.

**Lời giải.**

- **Điều kiện cần:**

Ta có $\begin{cases} |f(0)| \le \dfrac{1}{2} \\ |f(-1)| \le \dfrac{1}{2} \\ |f(1)| \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le c \le \dfrac{1}{2} & (1) \\ -\dfrac{3}{2} \le -b+c \le -\dfrac{1}{2} & (2) \\ -\dfrac{3}{2} \le b+c \le -\dfrac{1}{2}. & (3) \end{cases}$

Từ (2) và (3) suy ra $-\dfrac{3}{2} \le c \le -\dfrac{1}{2}$ kết hợp với (1) ta được $c = -\dfrac{1}{2}$.

Với $c = -\dfrac{1}{2}$ thay vào (2) và (3) ta được $\begin{cases} -1 \le -b \le 0 \\ -1 \le b \le 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$.

⟐ **Điều kiện đủ:**

Với $b = 0$, $c = -\dfrac{1}{2}$ ta có $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$.

Với $-1 \le x \le 1 \Rightarrow x^2 \le 1 \Rightarrow |f(x)| \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow b = 0, c = -\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn.

**Bài 4** Cho $x, y, z$ là ba số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng ta luôn có $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \dfrac{z}{\sqrt{z^2+1}} \le \dfrac{3}{2}$.

**Lời giải**. Ta có

$$x^2 + 1 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(x+z)$$
$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \le \frac{x}{2}\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z}\right).$$

Tương tự ta được

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}} \le \frac{y}{2}\left(\frac{1}{y+x} + \frac{1}{y+z}\right),$$
$$\frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \le \frac{z}{2}\left(\frac{1}{z+x} + \frac{1}{z+y}\right).$$

Từ đó $VT \le \dfrac{1}{x+y}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}\right) + \dfrac{1}{x+z}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{z}{2}\right) + \dfrac{1}{z+y}\left(\dfrac{z}{2} + \dfrac{y}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$.

**Bài 5**

a) Cho tam giác $ABC$ trọng tâm $G$. Các điểm $M, N$ được xác định bởi $\overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.

   a) Chứng minh rằng ba điểm $G$, $M$, $N$ thẳng hàng.

   b) Đường thẳng $MN$ chia tam giác $CAN$ thành hai tam giác. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác đó.

b) Tam giác $ABC$ có các đường phân giác trong $AE$, $BF$ và $CP$. Chứng minh rằng ta luôn có

$$\frac{S_{\triangle EFP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \text{( với } BC = a; AC = b; AB = c).$$

**Lời giải**.

a) ⟐ Ta có $\overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \overrightarrow{AN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. (1)

$$3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AM}+4\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}. \quad (2)$$

$G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ nên

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right). \quad (3)$$

Từ (1) và (2) ta được $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-\frac{15}{14}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Từ (2) và (3) ta được $\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=-\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\frac{9}{2}\overrightarrow{MG}$ nên $M$, $N$, $G$ thẳng hàng.

- Gọi $P=MN\cap AC$ và $E$ là trung điểm $BC$.

  Đặt $S_1=S_{NPA}$, $S_2=S_{NPC}$.

  Kẻ $NH\perp AC$ ($H\in AC$).

  Khi đó $S_1=\frac{1}{2}\cdot PA\cdot NH$, $S_2=\frac{1}{2}\cdot PC\cdot NH \Rightarrow \frac{S_1}{S_2}=\frac{PA}{PC}$.

  Kẻ $CK /\!/ AG$ ($K\in MN$).

  Ta có $\frac{PA}{PC}=\frac{AG}{CK}=\frac{2EG}{CK}=2\cdot\frac{EN}{NC}=4$

  $\Rightarrow \frac{S_1}{S_2}=\frac{PA}{PC}=4$.

b) Ta có $\dfrac{S_{APF}}{S_{ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot AP\cdot AF\sin A}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\sin A}=\dfrac{AP\cdot AF}{AB\cdot AC}=\dfrac{AP\cdot AF}{bc}$.

Áp dụng tính chất đường phân giác ta được

$$\frac{AP}{BP}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{AP}{AP+PB}=\frac{b}{a+b}\Rightarrow AP=\frac{bc}{a+b}.$$

Tương tự $AF=\dfrac{bc}{a+c}$.

Ta có $\dfrac{S_{APF}}{S_{ABC}}=\dfrac{AP\cdot AF}{bc}=\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}\Rightarrow S_{APF}=\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}\cdot S_{ABC}$.

Hoàn toàn tương tự ta có

$$S_{BPE}=\frac{ac}{(a+b)(b+c)}\cdot S_{ABC}$$

và

$$S_{CEF}=\frac{ab}{(a+c)(b+c)}\cdot S_{ABC}.$$

Mà

$$\begin{aligned}S_{EFP}&=S_{ABC}-(S_{APF}+S_{BPE}+S_{CEF})\\&=\left[1-\frac{bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{ac}{(a+b)(b+c)}-\frac{ab}{(a+c)(b+c)}\right]S_{ABC}\\&=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\cdot S_{ABC}.\end{aligned}$$

## Đề 18. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1**

a) Giải phương trình $3\sqrt[3]{4x-3}-4\sqrt{6-2x}+5=0$.

b) Cho hai số $x$, $y$ thoả mãn $4x^2+y^2=4$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $M=x^2-3xy+2y^2$.

**Lời giải.**

a) Ta có $3\sqrt[3]{4x-3}-4\sqrt{6-2x}+5=0 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{4x-3}+5=4\sqrt{6-2x}$.
Dễ có $x=1$ là một nghiệm của phương trình.
Vế trái là hàm số đồng biến trên $(-\infty;3]$.
Vế phải là hàm nghịch biến trên $(-\infty;3]$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

b) Ta có $M=\dfrac{4\left(x^2-3xy+2y^2\right)}{4x^2+y^2}=\dfrac{4x^2-12xy+8y^2}{4x^2+y^2}$.

- Với $y=0$ thì $M=1$.
- Với $y\neq 0$ thì $M=\dfrac{4t^2-12t+8}{4t^2+1}$ $\quad(*)$, $t=\dfrac{x}{y}$.
  Gọi $M$ là một giá trị bất kỳ của nó thì
  $$(*)\Leftrightarrow 4(M-1)t^2+12t+M-8=0$$
  có nghiệm $t$.
  Với $M=1$ thì $t=\dfrac{7}{12}$ thỏa mãn.
  Với $M\neq 1$, để $(*)$ có nghiệm thì
  $$\Delta'=-4(M^2-9M-1)\geq 0\Leftrightarrow M\in\left[\frac{9-\sqrt{85}}{2};\frac{9+\sqrt{85}}{2}\right].$$
  Vậy giá trị nhỏ nhất của $M=\dfrac{9-\sqrt{85}}{2}$, giá trị nhỏ nhất của $M=\dfrac{9+\sqrt{85}}{2}$.

**Bài 2**

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=8\\ \left(x^2+x\right)\left(y^2+y\right)=12\end{cases}$.

b) Giải phương trình $2010x^2-4x+3=2009x\sqrt{4x-3}$

**Lời giải.**

a) Đặt $\begin{cases}u=x^2+x\\ v=y^2+y\end{cases}$ hệ cho trở thành $\begin{cases}u+v=8\\ uv=12\end{cases}$, vậy $u,v$ là hai nghiệm của phương trình $t^2-8t+12=0\Leftrightarrow t=2$ hoặc $t=6$.

- Nếu $u=6$ thì $v=2$, khi đó ta có hệ $\begin{cases}x^2+x=2\\ y^2+y=6\end{cases}$ có các nghiệm $(1;-3)$, $(1;2)$, $(-2;-3)$, $(-2;2)$.
- Nếu $u=2$ thì $v=6$ khi đó ta có hệ $\begin{cases}x^2+x=6\\ y^2+y=2\end{cases}$ có các nghiệm $(-3;1)$, $(2;1)$, $(-3;-2)$, $(2;-2)$.

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(1;-3)$, $(1;2)$, $(-2;-3)$, $(-2;2)$, $(-3;1)$, $(2;1)$, $(-3;-2)$, $(2;-2)$.

b) Điều kiện $x\geq\dfrac{3}{4}$.
Đặt $\sqrt{4x-3}=t\geq 0$.

Phương trình đã cho trở thành $2010x^2 - 2009xt - t^2 = 0$.
Giải ra ta được $x = t$ hoặc $x = -\dfrac{t}{2010}$ (loại).
Với $x = t$ ta có $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$
Vậy $x = 1$, $x = 3$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

**Bài 3** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ $Oxy$. Viết phương trình đường thẳng $(d)$ qua $M(5;-2)$ cắt $Ox, Oy$ lần lượt tại $A, B$ sao cho $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{2OB^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**. Từ giả thiết ta có $d: \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Vì $M \in d$ nên $\dfrac{5}{a} - \dfrac{2}{b} = 1$. (1)
Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có
$$1 = \left(\frac{5}{a} - \frac{2}{b}\right)^2 \le (25 + 8)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2}\right).$$
Hay $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{2OB^2} \ge \dfrac{1}{33}$, đẳng thức xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{33}{5} \\ b = -\dfrac{33}{4}. \end{array}\right.$
Khi đó đường thẳng $d$ có phương trình $5x - 4y - 33 = 0$.

**Bài 4** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ $Oxy$. Cho hai điểm $A(1;1), B(4;-3)$. Tìm điểm $C$ thuộc đường thẳng $(d)$: $x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ $C$ đến đường thẳng $AB$ bằng 6.

**Lời giải**. Phương trình đường thẳng $AB$: $4x + 3y - 7 = 0$.
Giả sử $C(x;y)$. Theo giả thiết ta có $x - 2y - 1 = 0$.
Khoảng cách $\mathrm{d}(C, AB) = 6 \Leftrightarrow \dfrac{|4x + 3y - 7|}{5} = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 4x + 3y - 37 = 0 & (2a) \\ 4x + 3y + 23 = 0. & (2b) \end{array}\right.$
Giải hệ (1) và $(2a)$ ta được $C_1(7;3)$; giải hệ (1) và $(2b)$ ta được $C_2\left(-\dfrac{43}{11}; -\dfrac{27}{11}\right)$.

**Bài 5** Cho hai số dương $x, y$ thoả mãn $x + y = 2010$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{\sqrt{2010 - x}} + \dfrac{y}{\sqrt{2010 - y}}$

**Lời giải**. Ta có $P = \dfrac{2010 - y}{\sqrt{y}} + \dfrac{2010 - x}{\sqrt{x}} = 2010\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}\right) - \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$. (1)
Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} \ge \dfrac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$. (2)
Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.
Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có
$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 \le 2(x + y) = 4020 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{4020}. \qquad (3)$$
Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.
Từ (1), (2), (3) ta có $P \ge \dfrac{4 \cdot 2010}{\sqrt{4020}} - \sqrt{4020} = \sqrt{4020}$, đẳng thức xảy ra khi $x = y$.
Vậy $P$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{4020}$ khi $x = y = 1005$.

# Đề 19. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1**

a) Giải bất phương trình $x^2-6x+2\ge 2(2-x)\sqrt{2x-1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6 \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6. \end{cases}$

**Lời giải.**

a) Điều kiện $x\ge \dfrac{1}{2}$. Đặt $t=\sqrt{2x-1}\,(t\ge 0)$ thì $2x=t^2+1$. Khi đó ta có

$$x^2-6x+2-2(2-x)t\ge 0 \Leftrightarrow x^2+2tx-4t-3\left(t^2+1\right)+2\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x+t)^2-(2t+1)^2\ge 0 \Leftrightarrow (x+3t+1)(x-t-1)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x-1\ge t\left(\text{do } x+3t+1>0;\forall x\ge \frac{1}{2};\forall t\ge 0\right).$$

Với $x-1\ge t$ ta có $x-1\ge \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-2x+1\ge 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2+\sqrt{2}$.

Đối chiếu điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[2+\sqrt{2};+\infty\right)$.

b) $\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6. & (2) \end{cases}$

Điều kiện $x\ge -\dfrac{5}{4}$.

Trường hợp 1. $y=0\Rightarrow x=0$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2. $y\ne 0$ ta có

$(1)\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y}\right)^5+\dfrac{x}{y}=y^5+y$

$\Leftrightarrow (t-y)\left(t^4+t^3y+t^2y^2+ty^3+y^4\right)=0$ với $t=\dfrac{x}{y}$

$\Leftrightarrow (t-y)\left[\left(t^2+y^2\right)^2+(t+y)^2\left(t^2-yt+y^2\right)+2\right]=0$

$\Leftrightarrow t=y$ hay $y^2=x$.

Thay vào (2), ta có

$$\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}=6 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2+37x+40}=23-5x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{23}{5} \\ x^2-42x+41=0 \end{cases} \Rightarrow x=1\Rightarrow y=\pm 1.$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm hệ là $(x;y)=\{(1;1);(-1;1)\}$.

**Bài 2** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2-m=y(x+my) \\ x^2-y=xy. \end{cases}$$

**Lời giải.** Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} my^2-y+m=0(1) \\ x^2-yx-y=0.(2) \end{cases}$

Phương trình (2) (ẩn $x$) có nghiệm là $\Delta_x = y^2 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \geq 0 \\ y \leq -4. \end{array}\right.$

Trường hợp 1. $m = 0$, ta có $y = 0, x = 0$. Suy ra $m = 0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2. $m \neq 0$. Phương trình (1) (ẩn $y$) không có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty) (*)$ là (1) vô nghiệm hoặc (1) có 2 nghiệm đều thuộc $(-4; 0)$, điều kiện là

$$\left[\begin{array}{l} \Delta = 1 - 4m^2 < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 1 - 4m^2 \geq 0 \\ -4 < y_1 < 0 \\ -4 < y_2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta = 1 - 4m^2 < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 1 - 4m^2 \geq 0 \\ -4 < \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4m^2}}{2m} < 0 \\ -4 < \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4m^2}}{2m} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \\ \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq m < 0 \\ \sqrt{1 - 4m^2} > 1 + 8m (A) \\ \sqrt{1 - 4m^2} < -1 - 8m \end{cases} \end{array}\right. (B)$$

(với $y_1, y_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1)).

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq m < -\dfrac{1}{8} \\ \sqrt{1 - 4m^2} < -1 - 8m \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq m < -\dfrac{4}{17}$$

$\Rightarrow (B) \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\dfrac{4}{17}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) (ẩn $y$) có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$ hay $(*)$ không xảy ra, điều kiện là $\dfrac{-4}{17} \leq m \leq \dfrac{1}{2}$; $m \neq 0$.

Vậy tất cả các giá trị $m$ cần tìm là $\dfrac{-4}{17} \leq m \leq \dfrac{1}{2}$.

**Bài 3** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $I(2;4)$ và các đường thẳng $d_1: 2x - y - 2 = 0$, $d_2: 2x + y - 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn $(C)$ có tâm $I$ sao cho $(C)$ cắt $d_1$ tại $A, B$ và cắt $d_2$ tại $C, D$ thỏa mãn $AB^2 + CD^2 + 16 = 5AB \cdot CD$.

**Lời giải**. Gọi hình chiếu của $I$ trên $d_1, d_2$ lần lượt là $E, F$. khi đó

$$IE = d_{(I;d_1)} = \frac{2}{\sqrt{5}}; IF = d_{(I;d_2)} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Gọi $R$ là bán kính của đường tròn $(C)$ cần tìm $\left(R > \dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)$

$$AB = 2AE = 2\sqrt{R^2 - \frac{4}{5}}; CD = 2CF = 2\sqrt{R^2 - \frac{36}{5}}.$$

Theo giả thiết ta có

$$4\left(R^2 - \frac{4}{5}\right) + 4\left(R^2 - \frac{36}{5}\right) + 16 = 20\sqrt{R^2 - \frac{4}{5}}\sqrt{R^2 - \frac{36}{5}}$$

$$\Leftrightarrow 8R^2 - 16 = 4\sqrt{(5R^2 - 4)(5R^2 - 36)}$$

$$\Leftrightarrow 2R^2 - 4 = \sqrt{(5R^2 - 4)(5R^2 - 36)}$$

$$\Leftrightarrow (2R^2 - 4)^2 = (5R^2 - 4)(5R^2 - 36) \left(\text{do } R > \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Leftrightarrow R = 2\sqrt{2} \left(\text{do } R > \frac{6}{\sqrt{5}}\right).$$

Vậy phương trình đường tròn $(C)$ cần tìm là $(C)\colon (x-2)^2+(y-4)^2=8$.

**Bài 4**

a) Cho tam giác $ABC$ có $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$.Trung tuyến $CM$ vuông góc với phân giác trong $AL$ và $\dfrac{CM}{AL}=\dfrac{3}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Tính $\dfrac{b}{c}$ và $\cos A$.

b) Cho $a,b\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $(2+a)(1+b)=\dfrac{9}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{16+a^4}+4\sqrt{1+b^4}$.

**Lời giải.**

a) Ta có $\overrightarrow{AL}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CM}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}}{2}$.

Theo giả thiết

$$\begin{aligned}AL\perp CM &\Leftrightarrow \overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{CM}=0\\ &\Leftrightarrow \left(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right)=0\\ &\Leftrightarrow bc^2+bc^2\cos A-2cb^2\cos A-2cb^2=0\\ &\Leftrightarrow (c-2b)(1+\cos A)=0\Rightarrow c=2b\,(\text{do } \cos A>-1).\end{aligned}$$

Khi đó $CM^2=\dfrac{b^2+a^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}=\dfrac{a^2-b^2}{2}$

$AL^2=\dfrac{1}{9}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\dfrac{1}{9}\left(AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{2}{9}\left(9b^2-a^2\right)$

$$\begin{aligned}\frac{CM}{AL}=\frac{3}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}} &\Leftrightarrow \frac{CM^2}{AL^2}=\frac{9}{4}\cdot\frac{a^2-b^2}{9b^2-a^2}=\frac{9}{4}(5-2\sqrt{5})\\ &\Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{9b^2-a^2}=5-2\sqrt{5}\\ &\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2}=6-\sqrt{5}.\end{aligned}$$

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5b^2-a^2}{4b^2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

b) Chứng minh được $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$.

Dấu bằng xẩy ra khi $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.

Áp dụng (1) ta có : $\dfrac{p}{4}=\sqrt{1+\left(\dfrac{a^2}{4}\right)^2}+\sqrt{1+b^4}\ge\sqrt{4+\left(\dfrac{a^2}{4}+b^2\right)^2}=\sqrt{4+\dfrac{\left(a^2+4b^2\right)^2}{16}}$.

Mặt khác $(1+2a)(1+b)=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow a+2b+ab=\dfrac{5}{2}$.

Mà $\begin{cases}a^2+1\ge 2a\\ 4b^2+1\ge 4b\\ \dfrac{a^2+4b^2}{2}\ge 2ab\end{cases}\Rightarrow \dfrac{3\left(a^2+4b^2\right)}{2}+2\ge 2a+4b+2ab\Rightarrow a^2+4b^2\ge 2.$

Từ (1) và (3) suy ra $p\ge 2\sqrt{17}$. Dấu "=" xẩy ra khi $a=1$ và $b=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\min P=2\sqrt{17}$ Đạt được khi$a=1$ và $b=\dfrac{1}{2}$.

**Bài 5** Cho $f(x)=x^2-ax+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện: Tồn tại các số nguyên $m$, $n$, $p$ đôi một phân biệt và $1\le m,n,p\le 9$ sao cho $|f(m)|=|f(n)|=|f(p)|=7$. Tìm tất cả các bộ số $(a;b)$.

**Lời giải**. 3 số $f(m),f(n),f(p)$ hoặc cùng dương, âm hoặc có 2 số cùng dấu.
Trường hợp 1. $f(m),f(n),f(p)$ cùng bằng 7 hoặc $-7\Rightarrow$ loại vì phương trình $f(x)-7=0$ có 3 nghiệm phân biệt.
Trường hợp 2. $f(m)=f(n)=7$ và $f(p)=-7$.
Không mất tính tổng quát, giả sử $m>n$ và $|m-p|\ge|n-p|$ ta có $m,n$ là nghiệm phương trình $x^2-ax+b-7=0$ và $p$ là nghiệm phương trình $x^2-ax+b+7=0$ nên

$$\begin{cases} m+n=a \\ (n-p)(n+p-a)=14 \\ (m-p)(m+p-a)=14 \end{cases} \Rightarrow (n-p)(p-m)=14 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n-p=2 \\ p-m=7 \end{cases} \Rightarrow n-m=9 \text{ (loại)} \\ \begin{cases} n-p=-2 \\ p-m=-7 \end{cases} \Rightarrow n-m=-9 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Trường hợp 3. $f(m)=f(n)=-7$ và $f(p)=7$, khi đó hoàn toàn tương tự ta có

$$(p-n)(m-p)=-14\Rightarrow \begin{cases} m-p=-7 \\ p-n=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m-p=7 \\ p-n=-2. \end{cases}$$

Do $m,n,p\in[1;9]$ nên tìm được 4 bộ là $(a;b)=\{(11;17),(13;29),(7;-1),(9;7)\}$.

## Đề 20. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1**

a) Cho hàm số $y=x^2+2mx-3m$ và hàm số $y=-2x+3$. Tìm $m$ để đồ thị các hàm số đó cắt nhau tại hai điểm phân biệt và hoành độ của chúng đều dương.

b) Giải bất phương trình $\sqrt{-x^2+8x-12}>10-2x$.

**Lời giải**.

a) Tìm $m$: $y=x^2+2mx-3m$ và $y=-2x+3$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt và hoành độ dương.
Yêu cầu bài toán tương đương phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt
$x^2+2mx-3m=-2x+3\Leftrightarrow x^2+2(m+1)x-3m-3=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ -3(m+1)>0 \\ -2(m+1)>0 \end{cases}$$

$$\Delta'>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-4. \end{array}\right.$$

Kết hợp nghiệm, kết luận $m<-4$.

b) Giải bất phương trình $\sqrt{-x^2+8x-12}>10-2x$.
Tập xác định $-x^2+8x-12\ge0\Leftrightarrow 2\le x\le 6$.
Nếu $5<x\le 6$ thì $\sqrt{-x^2+8x-12}\ge 0>10-2x$, bất phương trình nghiệm đúng với

mọi $x: 5 < x \le 6$.

Nếu $2 \le x \le 5 \Rightarrow \begin{cases} 10-2x \ge 0 \\ \sqrt{-x^2+8x-12} \ge 0 \end{cases}$ bất phương trình đã cho tương đương

$$-x^2+8x-12 > 4x^2-40x+100 \Leftrightarrow 5x^2-48x+112 < 0 \Leftrightarrow 4 < x < \frac{28}{5}.$$

Kết hợp nghiệm, trường hợp này ta có $4 < x \le 5$.

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho $(4;6]$.

## Bài 2

a) Giải phương trình $\left(4x^3-x+3\right)^3-x^3=\frac{3}{2}$.

b) Giải phương trình $2x^2-11x+23=4\sqrt{x+1}$.

**Lời giải**.

a) $\left(4x^3-x+3\right)^3-x^3=\frac{3}{2}$.(1)

Đặt $y=4x^3-x+3$. (1) có dạng $\begin{cases} 2y^3-2x^3=3 \\ 4x^3-x+3=y. \end{cases}$ $(I)$

Khi đó nghiệm của (1) là $x$ ứng với $(x;y)$ là nghiệm của $(I)$.

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3-2x^3=3 \\ 2x^3+2y^3-(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3-2x^3=3 & (2) \\ (x+y)\left(2x^2-2xy+2y^2-1\right)=0. & (3) \end{cases}$ Trường hợp

1. $y=-x$ kết hợp (2), có nghiệm của (1): $x=-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

Trường hợp 2. $2x^2-2xy+2y^2-1=0; \Delta'_x=2-3y^2$. Nếu có nghiệm thì $|y| \le \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Tương tự cũng có $|x| \le \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Khi đó $VT(2) \le 4\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} < 3$. Chứng tỏ Trường hợp 2 vô nghiệm.

Kết luận (1) có 1 nghiệm $x=-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

b) Phương trình $2x^2-11x+23=4\sqrt{x+1}$.(1)

Điều kiện $x \ge -1$.

$(1) \Leftrightarrow 2\left(x^2-6x+9\right)+(x+1-4\sqrt{x+1}+4)=0 \; 2(x-3)^2+(\sqrt{x+1}-2)^2=0.(*)$

Do $a^2 \ge 0 (\forall a)$ nên pt $\left(^*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x+1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm $x=3$.

## Bài 3

a) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho điểm $M(1;4)$. Đường thẳng $d$ qua $M$, $d$ cắt trục hoành tại $A$ (hoành độ của $A$ dương), $d$ cắt trục tung tại $B$ (tung độ của $B$ dương). Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác $OAB$.

b) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho đường tròn $(C)$: $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ và điểm $A(1;-2)$. Đường thẳng $\Delta$ qua $A, \Delta$ cắt $(C)$ tại $M$ và $N$. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng $MN$.

**Lời giải.**

a) $M(1;4)$. Đường thẳng $d$ qua $M$, $d$ cắt trục hoành tại $A$; $d$ cắt trục tung tại $B$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác $OAB\,(x_A; y_B > 0)$.

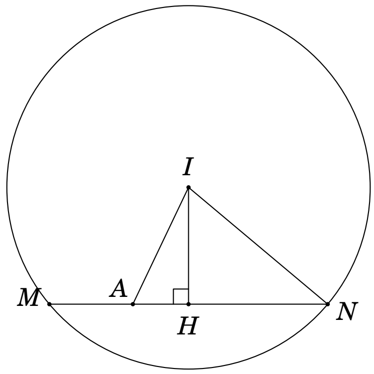
Giả sử $A(a;0)$; $B(0;b)$, $a>0; b>0$. Phương trình đường thẳng $AB: \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Vì $AB$ qua $M$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}=1 \Rightarrow 1 \ge 2\sqrt{\dfrac{4}{ab}} \Rightarrow 1 \ge \dfrac{16}{ab} \Rightarrow \dfrac{ab}{2} \ge 8$.

Dấu " = " $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}=\dfrac{4}{b}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=8. \end{cases}$

Diện tích tam giác vuông $OAB$( vuông ở $O$)là$S=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}ab \ge 8$.

Vậy $S$ nhỏ nhất bằng 8 khi $d$ qua $A(2;0)$, $B(0;8)$.




b)

$(C)$ có tâm $I(2;-3)$, bán kính $R=3$.

Có $A$ nằm trong đường tròn $(C)$ vì $IA^2=(1-2)^2+(-2+3)^2=2<9$.

Kẻ $IH$ vuông góc với $MN$ tại $H$ ta có

$$IH^2+HN^2=IN^2=9 \Rightarrow MN^2=4HN^2=4\left(9-IH^2\right).$$

Mà $IH \perp AH \Rightarrow IH \le IA=\sqrt{2} \Rightarrow MN^2 \ge 4(9-2)=28 \Rightarrow MN \ge 2\sqrt{7}$.

Vậy $MN$ nhỏ nhất bằng $2\sqrt{7}$ khi $H$ trùng $A$ hay $MN$ vuông góc với $IA$ tại $A$.

## Bài 4

a) Chứng minh rằng tứ giác lồi $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$.

b) Tìm tất cả các tam giác $ABC$ thỏa mãn $\dfrac{1}{h_a^2}=\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ (trong đó $AB=c$; $AC=b$; đường cao qua $A$ là $h_a$).

**Lời giải.**

a) Chứng minh rằng tứ giác lồi $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2.$$

Tứ giác lồi $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{DC}^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = 0$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + DC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + DC^2 - \left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) + \left(AB^2 + AD^2 - BD^2\right) = 0.(*)$$

$$\left(\text{vì } (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 \Rightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2\right)$$

$$(*) \Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 (\text{Đpcm}).$$

b) Tìm tất cả các tam giác $ABC$ thỏa mãn $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}.(1)$

Có $a\cdot h_a = 2S = bc\sin A \Rightarrow \dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{a^2}{b^2c^2\sin^2 A} = \dfrac{4R^2}{b^2c^2}.$

$$(1) \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 4R^2 \Leftrightarrow \sin^2 B + \sin^2 C = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C = 2 \Leftrightarrow \cos 2B + \cos 2C = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(B + C)\cos(B - C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B + C = \dfrac{\pi}{2} \text{ hay } A = \dfrac{\pi}{2} (0 < B + C < \pi; 0 \le |B - C| < \pi) \\ |B - C| = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tam giác $ABC$ vuông ở $A$ hoặc có $|B - C| = \dfrac{\pi}{2}$.

**Bài 5** Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \ge 3 + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a+b+c)^2}.$$

**Lời giải**. Xét

$$M = \frac{2a}{b+c} - 1 + \frac{2b}{c+a} - 1 + \frac{2c}{a+b} - 1 = \frac{a-b+a-c}{b+c} + \frac{b-c+b-a}{c+a} + \frac{c-a+c-b}{a+b}$$

$$= (a-b)\left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a}\right) + (b-c)\left(\frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b}\right) + (c-a)\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c}\right)$$

$$= (a-b)^2\frac{1}{(b+c)(c+a)} + (b-c)^2\frac{1}{(c+a)(a+b)} + (c-a)^2\frac{1}{(a+b)(b+c)}.$$

Vì $\dfrac{1}{(b+c)(c+a)} \ge \dfrac{4}{(a+b+2c)^2} > \dfrac{1}{(2a+2b+2c)^2} = \dfrac{1}{(a+b+c)^2}$.

$(a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow (a-b)^2\dfrac{1}{(b+c)(c+a)} \ge \dfrac{(a-b)^2}{(a+b+c)^2}$; dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Làm hoàn toàn tương tự với hai biểu thức còn lại.

Suy ra $M \ge \dfrac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a+b+c)^2}$. (Đpcm);

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

# Đề 21. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1**

a) Cho hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và hàm số $y = -x + m$. Tìm $m$ để đồ thị các hàm số đó cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A, B$ đồng thời khoảng cách từ trung điểm $I$ của đoạn thẳng $AB$ đến các trục tọa độ bằng nhau.

b) Giải bất phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}} - \dfrac{1}{2x-4} > 0$.

**Lời giải**.

a) Yêu cầu bài toánsuy ra phương trình sau có hai nghiệm phân biệt $x^2 - 3x + 2 = -x + m$ hay $x^2 - 2x + 2 - m = 0(*)$ có $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1$.
Gọi $x_A; x_B$ là 2 nghiệm của $(*)$, $I$ là trung điểm $AB$ ta có $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 1$; $y_I = -x_I + m = m - 1$.
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow |y_I| = |x_I| \Leftrightarrow |m-1| = 1 \Leftrightarrow m = 2; m = 0$.
Kết hợp điều kiện, kết luận $m = 2$.

b) Giải bất phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}} - \dfrac{1}{2x-4} > 0.(1)$

Tập xác định $\begin{cases} -x^2+4x-3>0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2; 2 < x < 3.$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}} > \dfrac{1}{2x-4}$.

Nếu $1 < x < 2$ thì $\sqrt{-x^2+4x-3} > 0 > 2x - 4$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x$: $1 < x < 2$.

Nếu $2 < x < 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-4>0 \\ \sqrt{-x^2+4x-3}>0 \end{cases}$, bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & 2x - 4 > \sqrt{-x^2+4x-3} \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2 - 16x + 16 > -x^2 + 4x - 3 \\ \Leftrightarrow\ & 5x^2 - 20x + 19 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & x > 2 + \frac{\sqrt{5}}{5}; x < 2 - \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm, trường hợp này ta có $2 + \dfrac{\sqrt{5}}{5} < x < 3$.

Tập nghiệm của bpt đã cho $(1;2) \cup \left(2 + \dfrac{\sqrt{5}}{5}; 3\right)$.

**Bài 2**

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác $ABC$ có $B(1;2)$. Đường thẳng $\Delta$ là đường phân giác trong của góc $A$ có phương trình $2x + y - 1 = 0$; Khoảng cách từ $C$ đến $\Delta$ gấp 3 lần khoảng cách từ $B$ đến $\Delta$. Tìm tọa độ của $A$ và $C$ biết $C$ nằm trên trục tung.

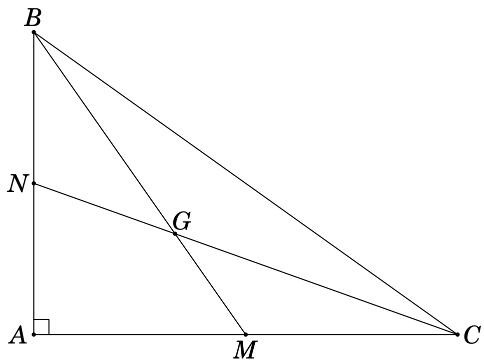
b) Cho tam giác $ABC$ vuông ở $A$, gọi $\alpha$ là góc giữa hai đường trung tuyến $BM$ và $CN$ của tam giác. Chứng minh rằng $\sin\alpha \le \dfrac{3}{5}$.

**Lời giải.**

a) $D(B;\Delta) = \dfrac{3}{\sqrt{5}}; C(0:y_0); D(C;\Delta) = \dfrac{|y_0-1|}{\sqrt{5}}$, theo bài ra ta có

$$\frac{|y_0-1|}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow y_0 = 10; y_0 = -8.$$

Vẽ hệ trục tọa độ, điểm $B$, chú ý $C$ khác phía $B$ đối với $\Delta$ suy ra $C(0;-8)$.
Gọi $B'(a;b)$ là điểm đối xứng với $B$ qua $\Delta$ thì $B'$ nằm trên $AC$.
Do $\overrightarrow{BB'} \perp \overrightarrow{u_\Delta} = (1;-2)$ nên ta có $a - 2b + 3 = 0$.
Từ đó ta có $a = -\dfrac{7}{5}; b = \dfrac{4}{5}$.
Theo định lý Ta-Let suy ra $\overrightarrow{CA} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CB'}$ $A(x;y); \overrightarrow{CA} = (x; y+8); \overrightarrow{CB'} = \left(-\dfrac{7}{5}; \dfrac{44}{5}\right)$.
Từ đó suy ra $A\left(\dfrac{-21}{10}; \dfrac{26}{5}\right); C(0;-8)$.




b)

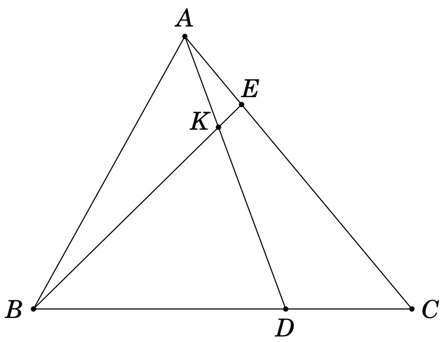
Gọi $a, b$ và $c$ tương ứng là độ dài các cạnh đối diện các góc $A, B$ và $C$ của tam giác. Có $CN^2 = b^2 + \dfrac{c^2}{4}; BM^2 = c^2 + \dfrac{b^2}{4}$.
Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$, ta có
$$\cos BGC = \frac{BG^2 + CG^2 - BC^2}{2BG \cdot CG} = \frac{-2\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{\left(4c^2+b^2\right)\left(4b^2+c^2\right)}};$$
Do đó $\cos\alpha = \dfrac{2\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{\left(4c^2+b^2\right)\left(4b^2+c^2\right)}}$.
Có $\sqrt{\left(4c^2+b^2\right)\left(4b^2+c^2\right)} \le \dfrac{5\left(b^2+c^2\right)}{2}$; " = " $\Leftrightarrow 4c^2+b^2 = 4b^2+c^2 \Leftrightarrow b = c$.
Do đó $\cos\alpha = \dfrac{2\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{\left(4c^2+b^2\right)\left(4b^2+c^2\right)}} \ge \dfrac{2\left(b^2+c^2\right)\cdot 2}{5\left(b^2+c^2\right)} = \dfrac{4}{5}$.
Hay $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \le \dfrac{3}{5}$. Dấu bằng có khi tam giác vuông cân đỉnh $A$.

## Bài 3

a) Cho tam giác $ABC$. Gọi $D, E$ lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Tìm vị trí của điểm $K$ trên $AD$ sao cho 3 điểm $B, K, E$ thẳng hàng.

b) Cho tam giác $ABC$ vuông ở $A$; $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$. Xác định điểm $I$ thỏa mãn hệ thức $b^2\overrightarrow{IB} + c^2\overrightarrow{IC} - 2a^2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$. Tìm điểm $M$ sao cho biểu thức $\left(b^2MB^2 + c^2MC^2 - 2a^2MA^2\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải.**




a)

Vì $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$.

Giả sử $\overrightarrow{AK}=x\cdot\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{BK}=x\cdot\overrightarrow{BD}+(1-x)\overrightarrow{BA}$.

Mà $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{AK}=x\cdot\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{BK}=\frac{2x}{3}\overrightarrow{BD}+(1-x)\overrightarrow{BA}$.

Vì $B,K,E$ thẳng hàng $(B\neq E)$ nên có $m$ sao cho $\overrightarrow{BK}=m\overrightarrow{BE}$.

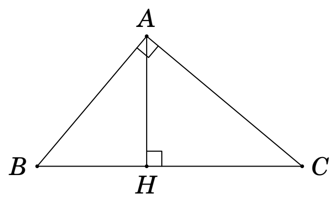
Do đó có $\frac{m}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{3\text{ m}}{4}\overrightarrow{BA}=\frac{2x}{3}\overrightarrow{BC}+(1-x)\overrightarrow{BA}$.

Hay $\left(\frac{m}{4}-\frac{2x}{3}\right)\overrightarrow{BC}+\left(1-x-\frac{3\text{ m}}{4}\right)\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

Do $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}$ không cùng phương nên $\frac{m}{4}-\frac{2x}{3}=0\&1-x-\frac{3\text{ m}}{4}=0$.

Từ đó suy ra $x=\frac{1}{3};m=\frac{8}{9}$.

Vậy $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.




Kẻ đường cao $AH$, ta có $b^2=a\cdot CH;c^2=a\cdot BH$ nên $b^2\cdot BH=c^2\cdot CH$. Do đó $b^2\cdot\overrightarrow{BH}+c^2\cdot\overrightarrow{CH}=\vec{0}$.

Suy ra $b^2\cdot\overrightarrow{IB}+c^2\cdot\overrightarrow{IC}=b^2\cdot\overrightarrow{IH}+c^2\cdot\overrightarrow{IH}=a^2\cdot\overrightarrow{IH}$.

Kết hợp giả thiết suy ra $2a^2\cdot\overrightarrow{IA}=a^2\cdot\overrightarrow{IH}$ hay

b) $2\cdot\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IH}$.

Do đó điểm $I$ thỏa mãn gt là $I$ thỏa mãn $A$ là trung điểm $IH$.

Với $x,y,z$ tùy ý thỏa mãn $x\cdot\overrightarrow{IA}+y\cdot\overrightarrow{IB}+z\cdot\overrightarrow{IC}=\vec{0}\ (^*)$ bình phương vô hướng 2 vế $(*)$, chú ý rằng $2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=IA^2+IB^2-AB^2$ ta có

$$\left(x\cdot IA^2+y\cdot IB^2+z\cdot IC^2\right)(x+y+z)=xyc^2+xzb^2+yza^2.$$

Từ đó có $\left(-2a^2\cdot IA^2+b^2\cdot IB^2+c^2\cdot IC^2\right)=3b^2c^2$.

Mặt khác $xMA^2=x(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM})^2=x\left(IM^2+IA^2-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IM}\right)$,

$xMA^2+yMB^2+zMC^2=(x+y+z)IM^2+xIA^2+yIB^2+zIC^2$.

Thay số có $-2a^2MMA^2+b^2MB^2+c^2MC^2=-a^2IM^2+3b^2c^2\leq 3b^2c^2$;

Dấu bằng xảy ra khi $M$ trùng $I$.

## Bài 4

a) Giải phương trình $1+(6x+2)\sqrt{2x^2-1}=2\left(5x^2+4x\right)$.

b) Cho $x,y,z$ là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\leq xyz.$$

**Lời giải.**

a) Giải phương trình $1+(6x+2)\sqrt{2x^2-1}=2\left(5x^2+4x\right).(*)$

Điều kiện $x\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}};x\leq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\left(^*\right)\Leftrightarrow(3x+1)^2+\left(2x^2-1\right)-2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}-1=(3x+1)^2+\left(2x^2-1\right)-\left(10x^2+8x\right)$

$\Leftrightarrow\left(3x+1-\sqrt{2x^2-1}\right)^2=(x-1)^2$

Giải

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2-1}=2x+2(a)\\ \sqrt{2x^2-1}=4x.(b)\end{array}\right.$

$(a)$ và đối chiếu ffi$K$ có 1 nghiệm $x=\dfrac{-4+\sqrt{6}}{2}$.

Giải $(b)$ vô nghiệm.

Kết luận $(*)$ có 1 nghiệm $x=\dfrac{-4+\sqrt{6}}{2}$.

b) Giả thiết suy ra $\dfrac{1}{\mathrm{xy}}+\dfrac{1}{\mathrm{yz}}+\dfrac{1}{\mathrm{zx}}=1$.

Ta có $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{\mathrm{zx}}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$; Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $y=z$.

Viết hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta được

$\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\dfrac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\leq3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$; Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Ta sẽ chứng minh $3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\leq xyz\Leftrightarrow3(xy+yz+zx)\leq(xyz)^2=(x+y+z)^2\Leftrightarrow$ $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq0$ Điều này luôn đúng, dấu bằng có khi và chỉ khi $x=y=Z$.

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh, dấu bằng có khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{3}$.

## Đề 22. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** Cho parabol $(P)$: $y=x^2-2x+4$ và các đường thẳng $d_m: y=3x+2m+1$ ($m$ là tham số).

a) Biện luận số giao điểm của $(P)$ và $d_m$ theo tham số $m$.

b) Khi $d_m$ cắt $(P)$ tại hai điểm $A$, $B$ ($A$ và $B$ có thể trùng nhau), tìm tập hợp trung điểm $I$ của $AB$ khi $m$ thay đổi.

**Lời giải.**

a) Biện luận số giao điểm của $(P)$ và $d_m$ theo tham số $m$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $d_m$

$$x^2-2x+4=3x+2m+1\Leftrightarrow x^2-5x+3-2m=0.\quad(1)$$

Ta có $\Delta=8m+13$.

- Nếu $m>-\dfrac{13}{8}$ $(\Delta>0)$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt, do đó $d_m$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

- Nếu $m = -\dfrac{13}{8}$ $(\Delta = 0)$ thì (1) có 1 nghiệm kép, do đó $d_m$ cắt $(P)$ tại một điểm.
- Nếu $m < -\dfrac{13}{8}$ $(\Delta < 0)$ thì (1) vô nghiệm, do đó $d_m$ không cắt $(P)$.

b) Khi $d_m$ cắt $(P)$ tại hai điểm $A, B$ ($A$ và $B$ có thể trùng nhau), tìm tập hợp trung điểm $I$ của $AB$ khi $m$ thay đổi.

$d_m$ cắt $(P)$ tại hai điểm $A, B$ ($A$ và $B$ có thể trùng nhau) $\Leftrightarrow m \geq -\dfrac{13}{8}$.

Gọi hai nghiệm của phương trình (1) là $x_1$, $x_2$ thì ta có

$$x_1 + x_2 = 5; \quad x_1 \cdot x_2 = 3 - 2m.$$

$x_1$, $x_2$ cũng là hoành độ giao điểm $A, B$ nên trung điểm $I$ của $AB$ có tọa độ

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{5}{2} \\ y_I = 3x_I + 2m + 1 = 2m + \dfrac{17}{2}. \end{cases}$$

Do $m \geq -\dfrac{13}{8}$ nên ta có $\dfrac{y_I}{2} - \dfrac{17}{4} \geq -\dfrac{13}{8} \Leftrightarrow y_I \geq \dfrac{21}{4}$.

Kết luận: Tập hợp điểm $I$ là phần đường thẳng $x = \dfrac{5}{2}$ ứng với $y \geq \dfrac{21}{4}$.

## Bài 2

a) Giải bất phương trình $\left(2x - 5 - \sqrt{x^2 - x + 25}\right)\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 0$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{5(8x+y)} \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0. \end{cases}$

**Lời giải**.

a) Giải bất phương trình $\left(2x - 5 - \sqrt{x^2 - x + 25}\right)\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 0$

Điều kiện xác định $\left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 2. \end{array}\right.$

Nếu $x = 3$ hoặc $x = 2$ thì bất phương trình nghiệm đúng.

Nếu $\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 2 \end{array}\right.$ thì bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2x - 5 - \sqrt{x^2 - x + 25} \leq 0 \quad (a)$.

$$\begin{aligned} (a) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 25} \geq 2x - 5 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x - 5 < 0 \quad \left(\text{Do } x^2 - x + 25 > 0\right) & (1) \\ \begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x^2 - x + 25 \geq 4x^2 - 20x + 25. \end{cases} & (2) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Giải (1) và kết hợp nghiệm ta được $x < 2$.

Giải (2)

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{5}{2} \\ 3x^2 - 19x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{5}{2} \\ 0 \leq x \leq \dfrac{19}{3}. \end{cases}$$

Kết hợp nghiệm ta được $3 < x \leq \dfrac{19}{3}$.

Kết luận: Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=(-\infty;2]\cup\left[3;\dfrac{19}{3}\right]$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{5(8x+y)} & (1)\\ x^2+y^2-2x+4y-31=0. & (2)\end{cases}$

**Trường hợp 1:** $x=0$.

Thay vào hệ phương trình ta có $\begin{cases}\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{5y}\\ y^2+4y-31=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ -31=0\end{cases}$ không thỏa mãn.

**Trường hợp 2:** $x\neq 0$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\sqrt[3]{x}$, ta được $2+\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=\sqrt[3]{5\left(8+\dfrac{y}{x}\right)}$.

Đặt $t=\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$, ta được phương trình

$$\begin{aligned}2+t=\sqrt[3]{5\left(8+t^3\right)}&\Leftrightarrow(2+t)^3=5\left(8+t^3\right)\\&\Leftrightarrow(t+2)\left(4t^2-14t+16\right)=0\\&\Leftrightarrow t=-2\\&\Rightarrow y=-8x.\end{aligned}$$

Thế vào (2) ta được

$$x^2+64x^2-2x-32x-31=0\Leftrightarrow 65x^2-34x-31=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=1\\&x=-\frac{31}{65}.\end{aligned}\right.$$

Vậy hệ có 2 nghiệm là $(1;-8)$, $\left(-\dfrac{31}{65};\dfrac{248}{65}\right)$.

## Bài 3

a) Trong mặt phẳng $Oxy$, cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ có phương trình đường thẳng chứa cạnh $AB$ là $x+2y-2=0$, phương trình đường thẳng chứa cạnh $AC$ là $2x+y+1=0$. Điểm $M(1;2)$ thuộc đoạn thẳng $BC$. Tìm tọa độ điểm $D$ sao cho $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

b) Cho tứ giác $ABCD$, hai điểm $M$, $N$ thay đổi sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$, $(0\le k\le 1)$. Gọi $I$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IM}=-2\overrightarrow{IN}$. Tìm tập hợp các điểm $I$ khi $M$, $N$ thay đổi.

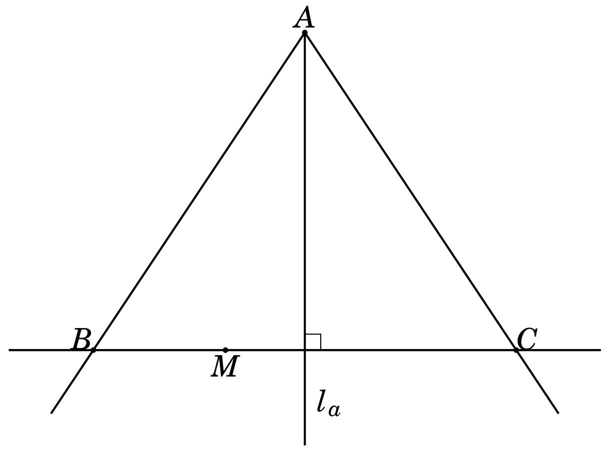
✍ **Lời giải**.

a) Trong mặt phẳng $Oxy$, cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ có phương trình đường thẳng chứa cạnh $AB$ là $x+2y-2=0$, phương trình đường thẳng chứa cạnh $AC$ là $2x+y+1=0$. Điểm $M(1;2)$ thuộc đoạn thẳng $BC$. Tìm tọa độ điểm $D$ sao cho $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

Các đường phân giác góc $A$ là tập hợp các điểm cách đều $AB$, $AC$ nên có phương trình

$$\frac{|x+2y-2|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x+y+1|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x-y+3=0\\&3x+3y-1=0.\end{aligned}\right.$$

Do $\triangle ABC$ cân tại $A$ nên phân giác trong $l_a$ của góc $A$ vuông góc với $BC$.




**Trường hợp 1:** $l_a: x-y+3=0$, khi đó $BC$ đi qua $M(1;2)$ và có vtpt $\overrightarrow{n}_1=(1;1)$;
Suy ra phương trình $BC: x+y-3=0$.

Tọa độ $B$ là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(4;-1)$.

Tọa độ $C$ là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow C(-4;7)$.

Khi đó $\overrightarrow{MB}=(3;-3)$, $\overrightarrow{MC}=(-5;5)$ suy ra $\overrightarrow{MB}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{MC}$ suy ra $B$, $C$ nằm về hai phía $l_a$ (thỏa mãn).

**Trường hợp 2:** $l_a: 3x+3y-1=0$, khi đó $BC$ đi qua $M(1;2)$ và có vtpt $\overrightarrow{n}_2=(1;-1)$.
Suy ra phương trình $BC: x-y+1=0$.

Tọa độ $B$ là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B(0;1)$.

Tọa độ $C$ là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{MB}=(-1;-1)$; $\overrightarrow{MC}=\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{5}{3}\right)$ cùng hướng (loại).

Với $B(4;-1)$; $C(-4;7)$. Gọi $D(x;y)$ suy ra $\overrightarrow{DB}=(4-x;-1-y)$, $\overrightarrow{DC}=(-4-x;7-y)$
$\Rightarrow \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=x^2+y^2-6y-23=x^2+(y-3)^2-32\geq -32$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x=0 \\ y=3. \end{cases}$

Vậy $D(0;3)$ thì $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$ nhỏ nhất bằng $-32$.

b) Cho tứ giác $ABCD$, hai điểm $M$, $N$ thay đổi sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$, $(0\leq k\leq 1)$. Gọi $I$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IM}=-2\overrightarrow{IN}$. Tìm tập hợp các điểm $I$ khi $M$, $N$ thay đổi.

Gọi $E$, $F$ là các điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{EA}=-2\overrightarrow{ED}$, $3\overrightarrow{FB}=-2\overrightarrow{FC}$. $(*)$

Ta có

$$\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MI}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{MN}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{NI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{DC}-\frac{3}{5}\overrightarrow{MN}. \quad (2)$$

Nhân hai vế (1) với 3, nhân hai vế (2) với 2 rồi cộng lại ta được

$$5\overrightarrow{EI} = k\left(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}\right).$$

Tương tự

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}. \quad (4)$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có $5\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}$.

Từ (3) và (6) ta được $\overrightarrow{EI} = k\overrightarrow{EF}$.

Ngược lại, với mỗi $I'$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{EI'} = m\overrightarrow{EF} \quad (0 \le m \le 1)$.

Gọi $M$, $N$, $I$ là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DN} = m\overrightarrow{DC}; 3\overrightarrow{IM} = -2\overrightarrow{IN}$.

Theo chứng minh trên thì $\overrightarrow{EI} = m\overrightarrow{EF}$. Suy ra $I'$ trùng với $I$.

Có $E$, $F$ cố định do thỏa mãn $(*)$ và $0 \le k \le 1$ nên tập hợp các điểm $I$ là đoạn $EF$.

**Bài 4**

a) Tam giác $ABC$ có $S = b^2 - (a-c)^2$ với $S$ là diện tích tam giác; $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Tính $\tan B$.

b) Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{ab}{\sqrt{5a^2 + 10ab + 10b^2}} + \frac{bc}{\sqrt{5b^2 + 10bc + 10c^2}} + \frac{ca}{\sqrt{5c^2 + 10ca + 10a^2}}.$$

**Lời giải.**

a) Tam giác $ABC$ có $S = b^2 - (a-c)^2$ với $S$ là diện tích tam giác; $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Tính $\tan B$.

Ta có

$$\begin{aligned} S = b^2 - (a-c)^2 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}ac\sin B = a^2 + c^2 - 2ac\cos B - a^2 - c^2 + 2ac \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}ac\sin B = 2ac(1 - \cos B) \\ &\Leftrightarrow \sin B = 4(1 - \cos B) \\ &\Leftrightarrow \cos B = 1 - \frac{1}{4}\sin B. \quad (*) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \sin^2 B + \cos^2 B = 1 &\Leftrightarrow \sin^2 B + \left(1 - \frac{1}{4}\sin B\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{17}{16}\sin^2 B - \frac{1}{2}\sin B = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin B = \frac{8}{17} \quad (\text{do} \sin B > 0) \end{aligned}$$

Kết hợp với $(*)$ ta được $\cos B = \dfrac{15}{17} \Rightarrow \tan B = \dfrac{8}{15}$.

b) Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{ab}{\sqrt{5a^2 + 10ab + 10b^2}} + \frac{bc}{\sqrt{5b^2 + 10bc + 10c^2}} + \frac{ca}{\sqrt{5c^2 + 10ca + 10a^2}}.$$

Ta có $5a^2+10ab+10b^2=(2a+3b)^2+(a-b)^2\geq(2a+3b)^2$.
Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.
Suy ra $\sqrt{5a^2+10ab+10b^2}\geq 2a+3b\Rightarrow \dfrac{ab}{\sqrt{5a^2+10ab+10b^2}}\leq\dfrac{ab}{2a+3b}$.
Ta chứng minh $\dfrac{ab}{2a+3b}\leq\dfrac{3a+2b}{25}$. $(*)$
Thật vậy $(*)\Leftrightarrow 25ab\leq(2a+3b)(3a+2b)\Leftrightarrow 6(a-b)^2\geq 0$. (luôn đúng)
Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.
Do đó $\dfrac{ab}{\sqrt{5a^2+10ab+10b^2}}\leq\dfrac{3a+2b}{25}$.
Tương tự ta có

$$\frac{bc}{\sqrt{5b^2+10bc+10c^2}}\leq\frac{3b+2c}{25};\quad \frac{ca}{\sqrt{5c^2+10ca+10a^2}}\leq\frac{3c+2a}{25}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta được

$$M\leq\frac{3a+2b}{25}+\frac{3b+2c}{25}+\frac{3c+2a}{25}=\frac{1}{5}(a+b+c)$$

Ta có

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=a^2+b^2+c^2+(2ab+2bc+2ca)\\&\leq a^2+b^2+c^2+\left(a^2+b^2\right)+\left(b^2+c^2\right)+\left(c^2+a^2\right)\\&=3a^2+3b^2+3c^2\\&=9.\end{aligned}$$

Do đó $a+b+c\leq 3$.
Vậy $M\leq\dfrac{3}{5}$, giá trị lớn nhất của $M$ bằng $\dfrac{3}{5}$ khi $a=b=c=1$.

## Đề 23. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** Cho parabol $(P)$: $y=-x^2$ và đường thẳng $d$ đi qua điểm $I(0;-1)$ và có hệ số góc là $k$. Gọi $A$ và $B$ là các giao điểm của $(P)$ và $d$. Giả sử $A$, $B$ lần lượt có hoành độ là $x_1$; $x_2$.

1) Tìm $k$ để trung điểm của đoạn thẳng $AB$ nằm trên trục tung.

2) Chứng minh rằng $\left|x_1^3-x_2^3\right|\geq 2\ (\forall k\in\mathbb{R})$.

**Lời giải.**

1) Tìm $k$ để trung điểm của đoạn thẳng $AB$ nằm trên trục tung.
   - Đường thẳng $d$ có phương trình $y=kx-1$.
   - Phương trình tương giao của $d$ và $(P)$ là
     $-x^2=kx-1\Leftrightarrow x^2+kx-1=0$. $(*)$
   - $(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1$; $x_2$ vì $\Delta=k^2+4>0,\ \forall k\in\mathbb{R}$.
   - Trung điểm $M$ của $AB$ có hoành độ là $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-k}{2}$;
     $M$ nằm trên trục tung $\Leftrightarrow\dfrac{-k}{2}=0\Leftrightarrow k=0$.

2) Chứng minh rằng $\left|x_1^3-x_2^3\right|\geq 2\ (\forall k\in\mathbb{R})$.
   Theo Vi-et có $x_1+x_2=-k$; $x_1\cdot x_2=-1$.
   Ta có $\left|x_1^3-x_2^3\right|=\left|(x_1-x_2)\left[(x_1+x_2)^2-x_1x_2\right]\right|=|x_1-x_2|\cdot\left|(x_1+x_2)^2-x_1x_2\right|$.

Có $|x_1-x_2|^2 = x_1^2+x_2^2-4x_1\cdot x_2 = k^2+4$.
Suy ra $|x_1^3-x_2^3| = \sqrt{k^2+4}\left(k^2+1\right) \geq 2, \forall k\in\mathbb{R}$.
Đẳng thức xảy ra khi $k=0$.

**Bài 2**

1) Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4} = 3x^2-x+3$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+x^3y-xy^2+xy-y=1 \\ x^4+y^2-xy(2x-1)=1. \end{cases}$

**Lời giải**.

1) Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4} = 3x^2-x+3$. (1)

Điều kiện $x \geq -\dfrac{1}{3}$.

$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1}-1\right)+\left(\sqrt{5x+4}-2\right) = 3x^2-x$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1}+\frac{5x}{\sqrt{5x+4}+2} = x(3x-1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\,(\text{tm}) \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+1}+\dfrac{5}{\sqrt{5x+4}+2} = 3x-1. \quad (*) \end{array}\right.$$

Nếu $x=1$ thì $\text{VT}(*)=2=\text{VP}(*)$ nên $x=1$ là một nghiệm của $(*)$

Nếu $x>1$ thì $\text{VT}(*)<2<\text{VP}(*)$.

Nếu $x<1$ thì $\text{VT}(*)>2>\text{VP}(*)$.

Vậy (1) có 2 nghiệm $x=0; x=1$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+x^3y-xy^2+xy-y=1 \\ x^4+y^2-xy(2x-1)=1 \end{cases}$ $(**)$

Hệ $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-y\right)+xy\left(x^2-y\right)+xy=1 \\ \left(x^2-y\right)^2+xy=1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=x^2-y \\ b=xy \end{cases}$. Hệ trở thành $\begin{cases} a+ab+b=1 \\ a^2+b=1 \end{cases}$ $(***)$

Hệ $(***) \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+a^2-2a=0 \\ b=1-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(a^2+a-2\right)=0 \\ b=1-a^2. \end{cases}$

Từ đó tìm ra $(a;b)\in\{(0;1),(1;0),(-2;-3)\}$.

Với $(a;b)=(0;1)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2-y=0 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Với $(a;b)=(1;0)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2-y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)\in\{(0;-1),(1;0),(-1;0)\}$.

Với $(a;b)=(-2;-3)$ ta có hệ

$$\begin{cases} x^2-y=-2 \\ xy=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{3}{x} \\ x^3+2x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{3}{x} \\ (x+1)\left(x^2-x+3\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3. \end{cases}$$

Kết luận: Hệ có 5 nghiệm $(x;y)\in\{(1;1),(0;-1),(1;0),(-1;0),(-1;3)\}$.

**Bài 3**

1) Trong mặt phẳng $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có đỉnh $A(2;6)$, chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh $A$ là điểm $D\left(2;-\frac{3}{2}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là điểm $I\left(-\frac{1}{2};1\right)$. Viết phương trình của đường thẳng $BC$.
2) Cho tam giác $ABC$ có $BC=a$; $CA=b$; $AB=c$, $(b\neq c)$ và diện tích là $S$. Kí hiệu $m_a$; $m_b$; $m_c$ lần lượt là độ dài của các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh $A$, $B$, $C$. Biết rằng $2m_a^2\geq m_b^2+m_c^2$.
   i) Chứng minh rằng $a^2\leq 4S\cdot\cot A$.
   ii) Gọi $O$ và $G$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm tam giác $ABC$; $M$ là trung điểm của $BC$. Chứng minh rằng góc $\widehat{MGO}$ không nhọn.

**Lời giải.**

1) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có đỉnh $A(2;6)$, chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh $A$ là điểm $D\left(2;-\frac{3}{2}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là điểm $I\left(-\frac{1}{2};1\right)$. Viết phương trình của đường thẳng $BC$.
Đường tròn $(C)$ ngoại tiếp tam giác $ABC$ có tâm $I$ và bán kính $IA$.
Đường thẳng $AD$ đi qua $A$ và có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AD}=\left(0;-\frac{15}{2}\right)\Rightarrow\vec{n}=(1;0)$ là véc tơ pháp tuyến của $AD$.
Phương trình đường thẳng $AD$ là $x=2$.
Ta có $A'=AD\cap(C); A'\neq A$ suy ra $A'$ thuộc $AD$ và $IA'=IA$. Tìm được $A'(2;-4)$.
$A'$ là trung điểm cung $BC$ không chứa $A$ nên $IA'\perp BC$. Đường thẳng $BC$ đi qua $D$ và có $\overrightarrow{A'I}=\left(-\frac{5}{2};5\right)$ là véc-tơ pháp tuyến.
Phương trình đường thẳng $BC$ là $x-2y-5=0$.

2) Cho tam giác $ABC$ có $BC=a; CA=b; BA=c$, $(b\neq c)$ và diện tích là $S$. Kí hiệu $m_a;m_b;m_c$ lần lượt là độ dài của các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh $A$, $B$, $C$. Biết rằng $2m_a^2\geq m_b^2+m_c^2$. $\quad(*)$
   i) Chứng minh rằng $a^2\leq 4S\cdot\cot A$.
   Sử dụng công thức độ dài trung tuyến, ta có
   $(*)\Leftrightarrow b^2+c^2-\frac{a^2}{2}\geq\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\Leftrightarrow b^2+c^2\geq 2a^2.\quad(**)$
   Ta có $4S\cdot\cot A=2bc\cdot\sin A\cdot\frac{\cos A}{\sin A}=2bc\cdot\cos A=b^2+c^2-a^2$.
   Từ $(**)\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2\geq a^2$ hay $4S\cdot\cot A\geq a^2$.
   ii) Gọi $O$ và $G$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm tam giác $ABC$; $M$ là trung điểm của $BC$. Chứng minh rằng góc $\widehat{MGO}$ không nhọn.
   Ta sẽ chứng minh $\overrightarrow{GO}\cdot\overrightarrow{GM}\leq 0\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{GM}\geq 0$.
   Ta có $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$; $6\overrightarrow{GM}=2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}$

Suy ra

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{OG}\cdot 6\overrightarrow{GM} &= \left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}\right)\\ &= OB^2+OC^2-2OA^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\ &= 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

Mặt khác ta có $BC^2=\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)^2=OB^2+OC^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$.

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=2R^2-a^2$ trong đó $R=OA=OB=OC$.

Tương tự có $2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2R^2-b^2$; $2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2R^2-c^2$.

Vậy $18\cdot\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{GM}=\dfrac{b^2+c^2}{2}-a^2\ge 0\Rightarrow \overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{GM}\ge 0$ (do có $(**)$).

**Bài 4** Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $a+b+c=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\dfrac{1}{a^2+b^2+3}+\dfrac{1}{b^2+c^2+3}+\dfrac{1}{c^2+a^2+3}$.

**Lời giải**. Bđt phụ: Cho các số thực $x,y,z>0$, $a,b,c$ là các số thực bất kì. Khi đó

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

Dễ thấy bđt trên suy ra từ bđt Bunhia.

Vào bài chính

Ta sẽ chứng minh

$$M=\frac{1}{a^2+b^2+3}+\frac{1}{b^2+c^2+3}+\frac{1}{c^2+a^2+3}\le\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{a^2+b^2+3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{b^2+c^2+3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{c^2+a^2+3}\right)\ge\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+3}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+3}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+3}\ge\frac{3}{2}.$$

Giả sử $a\ge b\ge c$.

Biến đổi $\dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2+3}=\dfrac{(a+b)^2}{2\left(a^2+b^2+3\right)}+\dfrac{(a-b)^2}{2\left(a^2+b^2+3\right)}$.

Biến đổi tương tự với 2 số hạng còn lại của $P$. Sau đó áp dụng bđt $(*)$ ta có

$$P\ge\frac{(a+b+b+c+c+a)^2}{4\left(a^2+b^2+c^2\right)+18}+\frac{(a-b+b-c+a-c)^2}{4\left(a^2+b^2+c^2\right)+18}$$

$$\Leftrightarrow P\ge\frac{4(a+b+c)^2+4(a-c)^2}{4\left(a^2+b^2+c^2\right)+18}$$

$$\Leftrightarrow P\ge\frac{2(a+b+c)^2+2(a-c)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+9}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{2(a+b+c)^2+2(a-c)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+9}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b+c)^2+4(a-c)^2\ge 6\left(a^2+b^2+c^2\right)+27$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b+c)^2+4(a-c)^2\ge 6\left(a^2+b^2+c^2\right)+2(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)^2+2(a-c)^2 \geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)+(a+b+c)^2$$
$$\Leftrightarrow -b^2+ab+bc-ca \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(b-c) \geq 0.$$

Bđt cuối cùng đúng, suy ra đpcm.

## Đề 24. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** **(Câu hỏi đề xuất của trường THPT chuyên Trần Phú - Hải Phòng).**
Giải phương trình $x^2+2\sqrt{2x+7}=2\sqrt{3-2x}+5$.

**Lời giải**. Điều kiện $-\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.
Phương trình ban đầu tương đương với phương trình

$$\left(6-2\sqrt{2x+7}\right)+\left(2\sqrt{3-2x}-2\right)=x^2-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{4-4x}{3+\sqrt{2x+7}}+\frac{4-4x}{\sqrt{3-2x}+1}=x^2-1$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{4}{3+\sqrt{2x+7}}+\dfrac{4}{\sqrt{3-2x}+1}=-x-1. \quad (1)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) tương đương với phương trình

$$\left(\frac{4}{3+\sqrt{2x+7}}-1\right)+\left(\frac{4}{\sqrt{3-2x}+1}-1\right)=-x-3$$
$$\Leftrightarrow \frac{-2x-6}{\left(3+\sqrt{2x+7}\right)\left(1+\sqrt{2x+7}\right)}+\frac{2x+6}{\left(\sqrt{-2x+3}+1\right)\left(\sqrt{-2x+3}+3\right)}=-x-3.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ \dfrac{-2}{\left(3+\sqrt{2x+7}\right)\left(1+\sqrt{2x+7}\right)}+\dfrac{2}{\left(\sqrt{-2x+3}+1\right)\left(\sqrt{-2x+3}+3\right)}=-1. \quad (2)\end{array}\right.$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì $\mathrm{VT} > \dfrac{-2}{\left(3+\sqrt{2x+7}\right)\left(1+\sqrt{2x+7}\right)}$.

Lại có $\dfrac{-2}{\left(3+\sqrt{2x+7}\right)\left(1+\sqrt{2x+7}\right)} \geq -\dfrac{2}{3} > \mathrm{VP}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ hoặc $x=-3$.

**Cách khác.**

Điều kiện $-\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Với điều kiện trên ta có $x+5+2\sqrt{2x+7} \geq \frac{3}{2}$ và $-2\sqrt{-2x+3}+x-3 \leq -\frac{3}{2} < 0$.

Do đó $\dfrac{1}{x+5+2\sqrt{2x+7}}+\dfrac{1}{-2\sqrt{-2x+3}+x-3}-1 < \dfrac{2}{3}-1=-\dfrac{1}{3} < 0$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \left(x+5-2\sqrt{2x+7}\right)+\left(2\sqrt{-2x+3}+x-3\right)-x^2-2x+3=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-3}{x+5+2\sqrt{2x+7}}+\frac{x^2+2x-3}{-2\sqrt{-2x+3}+x-3}-x^2-2x+3=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2+2x-3)\left[\frac{1}{x+5+2\sqrt{2x+7}}+\frac{1}{-2\sqrt{-2x+3}+x-3}-1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3. \end{array}\right.$$

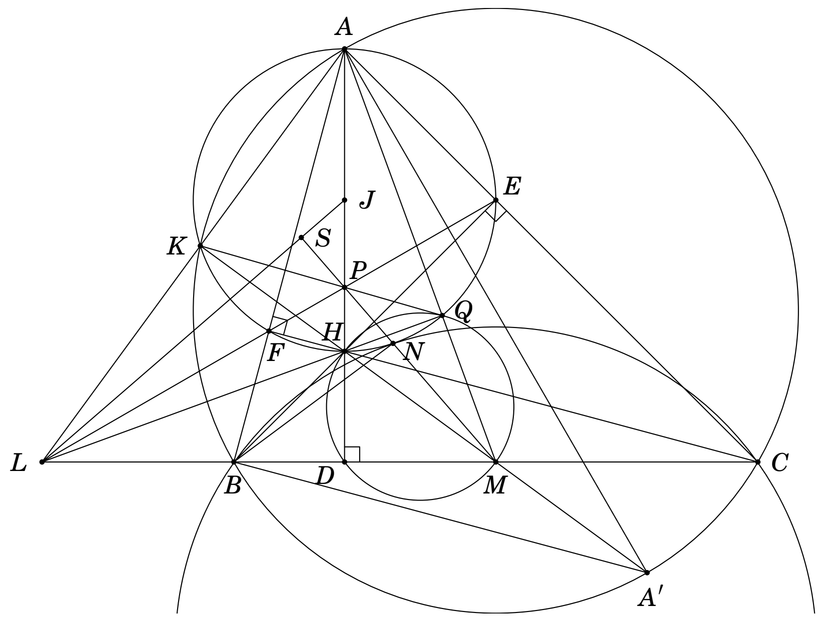
Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ hoặc $x=-3$.

**Bài 2** **(Câu hỏi đề xuất của trường THPT chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa.)** Cho tam giác $ABC$ ($AB < AC$) nhọn, không cân nội tiếp đường tròn $(O)$. Các đường cao $AD$, $BE$ và $CF$ cắt nhau tại $H$. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $BC$. Đường tròn $(J)$ ngoại tiếp tam giác $AEF$ cắt đường tròn $(O)$ tại điểm thứ hai là $K$ ($K \neq A$). Đường thẳng $AM$ cắt đường tròn $(J)$ tại điểm thứ hai là $Q$ ($Q \neq A$). $EF$ cắt $AD$ tại $P$. Đoạn $PM$ cắt đường tròn $(J)$ tại $N$.

a) Chứng minh các đường thẳng $KF$, $EQ$ và $BC$ đồng quy hoặc song song và ba điểm $K$, $P$, $Q$ thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $DMN$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác $BNC$ tiếp xúc nhau.

**Lời giải.**




a) Gọi $A'$ là điểm đối xứng với $H$ qua $M$, suy ra $BHCA'$ là hình bình hành.
Do đó $A'C /\!/ BH$; $A'B /\!/ CH$, suy ra $A'CA = A'BA = 90^\circ \Rightarrow AA'$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Suy ra $A'K \perp AK$. (1)
Dễ thấy $AH$ là đường kính của đường tròn $(J)$, suy ra $HK \perp AK$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $K$, $H$, $A'$ thẳng hàng.
Mà $H$, $M$, $A'$ thẳng hàng nên suy ra $K$, $H$, $M$, $A'$ thẳng hàng.
Gọi $L$ là giao điểm của $AK$ và $BC$.
Từ các kết quả trên và giả thiết, suy ra $H$ là trực tâm của tam giác $ALM$, suy ra $LH$ vuông góc với $AM$, gọi $Q' = LH \cap AM \Rightarrow Q' \in (J) \Rightarrow Q' \equiv Q$. Suy ra các tứ giác $ABDE$, $ALDQ$ nội tiếp, suy ra $\overline{HL} \cdot \overline{HQ} = \overline{HA} \cdot \overline{HD} = \overline{HB} \cdot \overline{HE} \Rightarrow LBQE$ nội tiếp.
Ta có $\overline{AF} \cdot \overline{AB} = \overline{AE} \cdot \overline{AC} = \overline{AK} \cdot \overline{AL} = \overline{AH} \cdot \overline{AD} = \overline{AQ} \cdot \overline{AM}$. Suy ra các tứ giác $KLBF$, $CMQE$ nội tiếp.
Như vậy: $LB$ là trục đẳng phương của hai đường tròn $(LBQE)$ và $(KLBF)$;
$KF$ là trục đẳng phương của hai đường tròn $(KLBF)$ và $(J)$;
$EQ$ là trục đẳng phương của hai đường tròn $(J)$ và $(LBQE)$.

Do đó ba đường thẳng $KF$, $EQ$ và $BC$ đồng quy hoặc song song.
$EF$ là trục đẳng phương của hai đường tròn $(BC)$ và $(J)$.
$KQ$ là trục đẳng phương của hai đường tròn $(J)$ và $(LM)$.
$P_{A/(LM)} = P_{A/(BC)}$ nên $A$ thuộc trục đẳng phương của $(LM)$ và $(BC)$. Do $AD$ vuông góc với đường nối tâm hai đường tròn $(LM)$ và $(BC)$ nên $AD$ là trục đẳng phương của hai đường tròn $(LM)$ và $(BC)$. Lại có, $P$ là giao điểm của $EF$ với $AD$ nên suy ra $P$ thuộc $KQ$.
**Cách khác:** Ta có $\overline{AF}\cdot\overline{AB} = \overline{AE}\cdot\overline{AC} = \overline{AK}\cdot\overline{AL} = \overline{AQ}\cdot\overline{AM} = \overline{AF}\cdot\overline{AB} = \overline{AH}\cdot\overline{AD}$,
Qua phép nghịch đảo $\psi(A, \overline{AH}\cdot\overline{AD})$, tâm $A$ phương tích $k = \overline{AH}\cdot\overline{AD}$:
Đường thẳng $KF$ biến thành đường tròn $(ABL)$;
Đường thẳng $EQ$ biến thành đường tròn $(ACM)$;
Đường thẳng $BC$ biến thành đường tròn $(AEF)$.
Ba đường tròn $(ABL)$; $(ACM)$; $(AEF)$ có chung nhau điểm $A$.
Do đó trục đẳng phương của ba đường tròn đó đồng qui tại $A$ hoặc trùng nhau.
Vậy ba đường thẳng $KF$, $EQ$ và $BC$ song song hoặc đồng quy.

b) Ta có $AK$ là trục đẳng phương của hai đường tròn $(O)$ và $(J)$;
$EF$ là trục đẳng phương của hai đường tròn $(J)$ và $(BFEC)$;
$BC$ là trục đẳng phương của hai đường tròn $(BFEC)$ và $(O)$, mà $AK$ cắt $BC$ tại $L$, suy ra $AK$, $EF$, $BC$ đồng quy tại $L$.
Ta có $M$ là tâm của đường tròn $(BFEC)$, suy ra $MJ \perp EF$, kết hợp với $JD \perp LM$. Suy ra $P$ là trực tâm tam giác $JLM$. Do đó $MP \perp JL$. Gọi $S$ là giao điểm của $JL$ và $MP$, ta có tứ giác $LDPS$ nội tiếp, suy ra $\overline{JS}\cdot\overline{JL} = \overline{JP}\cdot\overline{JD}$. (3)
Xét tứ giác toàn phần $AEHFBC$, ta có $(A,H,P,D) = -1$, mà $J$ là trung điểm $AH$ nên theo hệ thức Newton suy ra $JH^2 = \overline{JP}\cdot\overline{JD}$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $\overline{JS}\cdot\overline{JL} = JH^2 = JN^2$, mà $NS \perp J$ suy ra $LN$ vuông góc với $JN$ hay $LN$ là tiếp tuyến của $(J)$. Suy ra $LN^2 = \overline{LK}\cdot\overline{LA} = \overline{LB}\cdot\overline{LC} \Rightarrow LN$ là tiếp tuyến của đường tròn $(BNC)$. (5)
Từ $AKM = ADM = 90^\circ \Rightarrow 4$ điểm $A,K,D,M$ cùng thuộc một đường tròn, suy ra $LN^2 = \overline{LK}\cdot\overline{LA} = \overline{LD}\cdot\overline{LM} \Rightarrow LN$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $MND$. (6)
Từ (5) và (6) suy ra hai đường tròn $(BNC)$ và $(MND)$ tiếp xúc nhau tại $N$ (đpcm).

**Bài 3** Tìm tất cả các bộ ba số nguyên $(a,b,c)$ sao cho số $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2}+2$ là một lũy thừa nguyên không âm).

**Lời giải**. Giả sử $a$, $b$, $c$ là các số nguyên và $n$ là một số nguyên dương sao cho
$$(a-b)(b-c)(c-a)+4 = 2.2016^{2017n}.$$
Đặt $a-b=-x$; $b-c=-y$ và ta viết lại phương trình trên như sau
$$xy(x+y)+4 = 2.2016^{2017n}.$$

Nếu $n \geq 1$ thì vế phải của (1) chia hết cho 7, vì thế ta có

$$xy(x+y)+4 \equiv 0 \pmod 7.$$

Gọi $u, v \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ thỏa mãn $x \equiv u \pmod 7$, $y \equiv v \pmod 7$.
Ta có $uv(u+v)+4 \equiv 0 \pmod 7$ (2). Từ (2) ta được $u \neq 0$, $v \neq 0$, $u+v \neq 0$.
Giả sử $u \geq v$. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

- $v=-3 \Rightarrow u \in \{-3,-2,-1,1,2\}$ thử thấy không thỏa mãn (2).
- $v=-2 \Rightarrow u \in \{-2,-1,1,3\}$ thử thấy không thỏa mãn (2).
- $v=-1 \Rightarrow u \in \{-1,2,3\}$ thử thấy không thỏa mãn (2).
- $v=1 \Rightarrow u \in \{1,2,3\}$ thử thấy không thỏa mãn (2).
- $v=2 \Rightarrow u \in \{2,3\}$ thử thấy không thỏa mãn (2).
- $v=3 \Rightarrow u \in \{3\}$ thử thấy không thỏa mãn (2).

**Chú ý:** (Hướng khác học sinh có thể làm).
Để chứng minh $xy(x+y)+4 \equiv 0 \pmod 7$ không xảy ra ta có thể chứng minh như sau:
từ $xy(x+y)+4 \equiv 0 \pmod 7$ suy ra $3xy(x+y) \equiv 2 \pmod 7$ hay
$(x+y)^3 - x^3 - y^3 \equiv 2 \pmod 7$ (3).
Để ý rằng với mọi số nguyên $k$, ta có $k^3 \equiv -1; 0; 1 \pmod 7$.
Từ (3) suy ra một trong các số $(x+y)^3$, $x^3$ và $y^3$ phải có số chia hết cho 7.
Do 7 là số nguyên tố nên một trong các số $x+y$, $x$, $y$ phải có số chia hết cho 7.
Suy ra $xy(x+y)$ chia hết cho 7. Đây là một điều mâu thuẫn $xy(x+y)+4 \equiv 0 \pmod 7$.
Vì vậy, chỉ có thể là $n=0$. Khi đó

$$xy(x+y)+4=2 \Leftrightarrow xy(x+y)=-2$$
$$\Leftrightarrow xy(x+y) = 1\cdot(-2) = (-2)\cdot 1 = (-1)\cdot 2 = 2\cdot(-1)$$

Xét các trường hợp sau:

- $\begin{cases} xy=1 \\ x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-1.$
- $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-1 \\ y=2. \end{cases}$
- $\begin{cases} xy=-1 \\ x+y=2 \end{cases}$ không có nghiệm nguyên.
- $\begin{cases} xy=2 \\ x+y=-1 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy bộ ba số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(a,b,c)=(k+2,k+1,k)$ (với $k \in \mathbb{Z}$) cùng các hoán vị.

**Bài 4** **(Câu hỏi đề xuất của trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội).**

Cho $a$, $b$, $c$ là ba số thực dương thỏa mãn $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}=2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)$.
Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(ab+bc+ca)$.

**Lời giải**. Giả thiết tương đương với

$$\frac{b+c}{a}+1+\frac{c+a}{b}+1+\frac{a+b}{c}+1=2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+3$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{abc}\right)=3$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ac-2)=3abc.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(a+b+c)(ab+bc+ac-2)=3abc\le\frac{(a+b+c)^3}{9}.$$

Do đó

$$ab+bc+ac-2\le\frac{(a+b+c)^2}{9}\Leftrightarrow 18\ge 9(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2$$
$$\Leftrightarrow 3\ge\frac{9}{6}(ab+bc+ca)-\frac{(a+b+c)^2}{6}=\frac{7(ab+bc+ca)-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{6}$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+3\ge\frac{7(ab+bc+ca)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)}{6}$$

Do $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca, \forall a,b,c$ nên $\dfrac{7(ab+bc+ca)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)}{6}\ge 2(ab+bc+ca)$.

Vậy $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(ab+bc+ca)$.

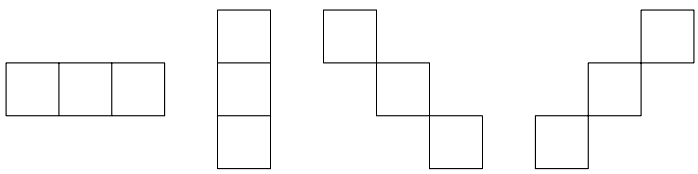
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

**Bài 5** Cho một bảng ô vuông kích thước $10\times 10$, trên đó đã điền các số nguyên dương từ 1 đến 100 vào các ô vuông con theo trình tự như hình a. Ở mỗi bước biến đổi, người ta chọn tùy ý ba ô vuông con liên tiếp theo hàng hoặc theo cột hoặc theo một đường chéo của hình vuông kích thước $3\times 3$ (xem hình b) rồi thực hiện: Hoặc là giảm số ở ô nằm giữa đi 2 đơn vị đồng thời tăng số ở hai ô liền kề lên 1 đơn vị, hoặc là tăng số ở ô nằm giữa lên 2 đơn vị đồng thời giảm số ở hai ô liền kề đi 1 đơn vị. Giả sử rằng sau hữu hạn bước, tập hợp tất cả các số ghi trên bảng ô vuông vẫn là tập $\{1;2;3;\ldots;100\}$. Chứng minh rằng khi đó các số ghi trên bảng theo đúng vị trí như trước khi biến đổi.

**Lời giải**.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | … | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | … | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | … | 29 | 30 |
| … | … | … | … | … | … |
| 91 | 92 | 93 | … | 99 | 100 |

Hình a - bảng ô vuông ban đầu



Hình b - ba ô vuông con liên tiếp

Ta kí hiệu $a^n_{(i,j)}$ là số ghi ở ô vuông con thuộc hàng $i$, cột $j$ ở ngay sau bước biến đổi thứ $n$, ở đó thứ tự hàng $i$ tính từ trên xuống dưới, thứ tự cột $j$ tính từ trái sang phải.

- Ban đầu (coi là "ngay sau lần biến đổi thứ 0") trên bảng có các số $a^0_{(i,j)}$ được điền vào ô theo quy luật $a^0_{(i,j)}=10(i-1)+j$ với mọi $i,j\in\mathbb{N}^*, 1\le i,j\le 10$.
- Xét đại lượng $T_n=\sum\limits_{1\le i,j\le 10} a^0_{(i,j)}\cdot a^n_{(i,j)}$ với $n\in\mathbb{N}$.

Ban đầu khi chưa biến đổi, có $T_0 = \sum\limits_{1\le i,j\le 10} a^0_{(i,j)} \cdot a^0_{(i,j)}$.

Xét từ lần biến đổi thứ $n$ sang lần biến đổi thứ $n+1$, bằng cách thử từng khả năng về chọn bộ ba ô vuông liền kề (ô ở giữa điền $a^n_{(i,j)}$):

| | | |
|---|---|---|
| $a^n_{(i-1,j)}$ | $a^n_{(i,j)}$ | $a^n_{(i+1,j)}$ |

Trường hợp chọn 3 ô vuông liên tiếp như hình vẽ trên

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= a^0_{(1,1)} \cdot a^{n+1}_{(1,1)} + \ldots + a^0_{(i-1,j)} \cdot a^{n+1}_{(i-1,j)} + a^0_{(i,j)} \cdot a^{n+1}_{(i,j)} + a^0_{(i+1,j)} \cdot a^{n+1}_{(i+1,j)} \\ &\quad + \ldots a^0_{(10,10)} \cdot a^{n+1}_{(10,10)} \\ &= a^0_{(1,1)} \cdot a^n_{(1,1)} + \ldots + a^0_{(i-1,j)} \cdot \left(a^n_{(i-1,j)} \mp 1\right) + a^0_{(i,j)} \cdot \left(a^n_{(i,j)} \pm 2\right) \\ &\quad + a^0_{(i+1,j)} \cdot \left(a^n_{(i+1,j)} \mp 1\right) + \ldots + a^0_{(10,10)} \cdot a^n_{(10,10)} = T_n \pm \left(2a^0_{(i,j)} - a^0_{(i+1,j)} - a^0_{(i-1,j)}\right) \end{aligned}$$

Các trường hợp còn lại, với cách thức biến đổi tương tự, ta thấy giá trị của $T_n$ chỉ "tăng" hoặc "giảm" đi một lượng dạng $2a^0_{(i,j)} - a^0_{(p,m)} - a^0_{(q,r)}$ với $p, m, q, r$ là số nguyên dương thỏa mãn $p+q = 2i$ và $m + r = 2j$.

Mặt khác: $2a^0_{(i,j)} - a^0_{(p,m)} - a^0_{(q,r)} = 2[10(i-1)+j] - [10(p-1)+m] - [10(q-1)+r] = 0$.

Vậy $T_n = T_{n+1}$ với mọi $n$, nghĩa là $T_n$ là một bất biến của quá trình biến đổi.

Giả sử sau $N$ bước, tập hợp các số ghi trên bảng đúng bằng $\{1;2;3;\ldots;100\}$ nghĩa là bộ $\left(a^N_{(1,1)}, a^N_{(1,2)}, \ldots, a^N_{(1,10)}, a^N_{(2,1)}, \ldots, a^N_{(10,10)}\right)$ là một hoán vị của bộ $(1;2;3;\ldots;100)$.

Ta có $T_N = T_{N-1} = \ldots = T_0$ nên $\sum\limits_{1\le i,j\le 10} a^0_{(i,j)} \cdot a^N_{(i,j)} = \sum\limits_{1\le i,j\le 10} a^0_{(i,j)} \cdot a^0_{(i,j)}$.

Mặt khác theo bất đẳng thức về dãy sắp xếp ta luôn có $\sum\limits_{1\le i,j\le 10} a^0_{(i,j)} \cdot a^N_{(i,j)} \le \sum\limits_{1\le i,j\le 10} a^0_{(i,j)} \cdot a^0_{(i,j)}$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi hai dãy $\left(a^N_{(1,1)}, a^N_{(1,2)}, \ldots, a^N_{(1,10)}, a^N_{(2,1)}, \ldots, a^N_{(1,10)}\right)$ và $\left(a^0_{(1,1)}, a^0_{(1,2)}, \ldots, a^0_{(1,10)}, a^0_{(2,1)}, \ldots, a^0_{(10,10)}\right)$ xếp theo cùng trật tự tăng giảm.

Hai dãy này là hoán vị của nhau nên điều đó chỉ xảy ra khi và chỉ khi $\left(a^N_{(1,1)}, a^N_{(1,2)}, \ldots, a^N_{(1,10)}, a^N_{(2,1)}, \ldots, a^N_{(10,10)}\right) \equiv \left(a^0_{(1,1)}, a^0_{(1,2)}, \ldots, a^0_{(1,10)}, a^0_{(2,1)}, \ldots, a^0_{(10,10)}\right)$.

Vậy bảng số lúc này được sắp xếp đúng như trật tự lúc đầu.

# Đề 25. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(4.0 điểm)* Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7x^3 + y^3 + 3xy(x-y) = 12x^2 - 6x + 1 \\ 2\sqrt{x^2+3} - \sqrt{9-y^2} = x. \end{cases}$

**Lời giải**. Ta có $\begin{cases} 7x^3 + y^3 + 3xy(x-y) = 12x^2 - 6x + 1 & (1) \\ 2\sqrt{x^2+3} - \sqrt{9-y^2} = x. & (2) \end{cases}$

Điều kiện xác định $-3 \le y \le 3$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-y)^3 = (2x-1)^3 \Leftrightarrow y = 1 - x$. (3)

Thế (3) vào (2) ta được

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{x^2+3}-\sqrt{8+2x-x^2}=x \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{x^2+3}=x+\sqrt{8+2x-x^2} \\
\Leftrightarrow\ & 4\left(x^2+3\right)=2x+8+2x\sqrt{8+2x-x^2} \\
\Leftrightarrow\ & 2(x-1)^2-x\left(\sqrt{8+2x-x^2}-3\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)^2\left[2+\frac{x}{\sqrt{8+2x-x^2}+3}\right]=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 2+\dfrac{x}{\sqrt{8+2x-x^2}+3}=0. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ta có hai trường hợp:

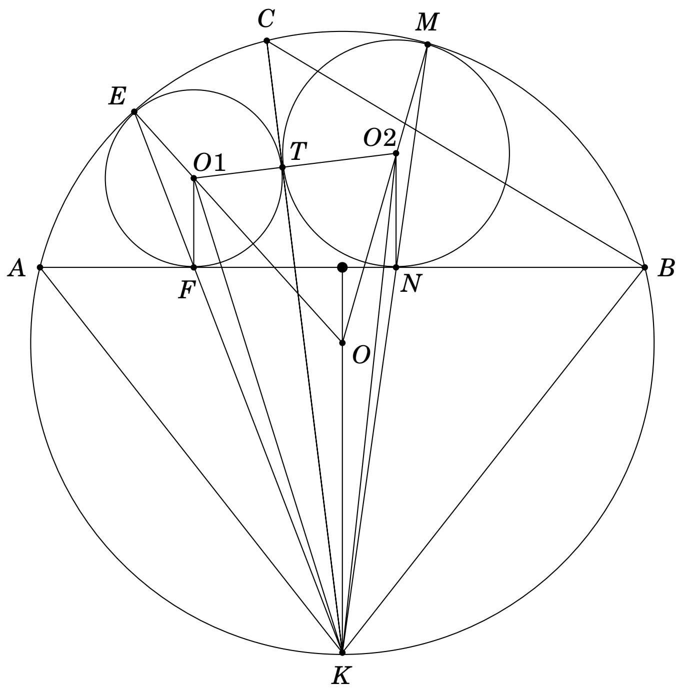
- TH1: Nếu $x=1$ thì $y=0$.
  Thử lại vào hệ phương trình ban đầu thấy thỏa mãn.
- TH2: Nếu $2+\dfrac{x}{\sqrt{8+2x-x^2}+3}=0$ thì ta có phương trình

$$2\sqrt{8+2x-x^2}=-x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} -x-6\geq 0 \\ 5x^2+4x+4=0 \end{cases} \text{(vô nghiệm).}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(1;0)$.

**Bài 2** *(4.0 điểm)* Cho đường tròn $(O)$ và dây $AB$. Các đường tròn $(O_1)$ và $(O_2)$ nằm về một phía đối với đường thẳng $AB$, tiếp xúc với nhau tại $T$ đồng thời tiếp xúc với $AB$ và tiếp xúc trong với đường tròn $(O)$. Tiếp tuyến chung tại $T$ của các đường trong $(O_1)$ và $(O_2)$ cắt đường tròn $(O)$ tại $C$ (với $C$ thuộc nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng $AB$ có chứa hai đường tròn $(O_1)$ và $(O_2)$. Chứng minh rằng $T$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$.

**Lời giải**.




Gọi $E, F, M, N$ lần lượt là tiếp điểm $(O_1)$, $(O_2)$ với đường tròn $(O)$ và $AB$ như hình vẽ. Gọi $K$ là giao điểm $EF$ với $(O)$.

Ta có các điểm $E, O_1, O$ thẳng hàng; các điểm $M, O_2, O$ thẳng hàng.

Hơn nữa $\widehat{EKO} = \widehat{OEF} = \widehat{O_1FE} \Rightarrow O_1F // OK \Rightarrow OK \perp AB$.

Vậy $K$ là điểm chính giữa cung $AB$. Như vậy $EF$ đi qua điểm chính giữa $K$ của cung $AB$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $MN$ cũng đi qua $K$.

Từ đó $\widehat{MEF} = \widehat{MNB}$ nên tứ giác $EFNM$ là tứ giác nội tiếp, do đó

$$P_{K/(O_1)} = \overline{KF} \cdot \overline{KE} = \overline{KN} \cdot \overline{KM} = P_{K/(O_2)}.$$

Vậy điểm $K$ nằm trên trục đẳng phương của $(O_1), (O_2)$.

Suy ra ba điểm $C$, $T$, $K$ thẳng hàng. Từ đó điểm $T$ nằm trên phân giác của $\widehat{ACB}$.(1)

Ta có các cặp tam giác đồng dạng $\triangle KAF$ và $\triangle KEA$; $\triangle KBN$ và $\triangle KMB$.

Từ đó $KA^2 = \overline{KF} \cdot \overline{KE} = KT^2 \Rightarrow KA = KT$.

Ta lại có $KA = KB$, suy ra $KA = KB = KT$.

Vì vậy các $\triangle KAT$ và $\triangle KBT$ cùng cân tại $K$.

Do đó $\widehat{CAT} = \widehat{ATK} - \widehat{ACT} = \widehat{TAK} - \widehat{BAK} = \widehat{TAB}$.

Suy ra $AT$ là phân giác của $\widehat{CAB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $T$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ (đpcm).

**Bài 3** *(4.0 điểm)* Cho $m$ và $n$ là các số nguyên dương thỏa mãn $2016^m + 1$ là ước của $2016^n + 1$. Chứng minh rằng $m$ là ước của $n$.

**Lời giải**. Đặt $n = mq + r \, (0 \le r \le m)$ khi đó ta viết

$$2016^n + 1 = 2016^{mq+r} + 1 = 2016^{mq} \cdot 2016^r + 1.$$

Ta xét các trường hợp sau:

- TH1: Nếu $q$ là số lẻ thì $2016^n + 1 = \left[\left(2016^m\right)^q + 1\right] \cdot 2016^r + 1 - 2016^r$.

Kết hợp với $\left(2016^m+1\right) \mid \left(2016^n+1\right)$ thu được $\left(2016^m+1\right)\left|\left(2016^n+1\right) \Rightarrow r=0 \Rightarrow m\right|n$.

- TH2: Nếu $q$ là chẵn thì $2016^n+1=\left[\left(2016^m\right)^q-1\right]\cdot 2016^r+2016^r+1$.
  Kết hợp với $\left(2016^m+1\right) \mid \left(2016^n+1\right)$ và $\left(2016^m+1\right) \mid \left[\left(2016^m\right)^2-1\right]$ ta thu được $\left(2016^m+1\right) \mid \left(2016^r+1\right)$ (vô lí vì $0 \le r \le m$).

Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Bài 4** *(4.0 điểm)*Cho ba số dương $a,b,c$ thay đổi và thỏa mãn $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng

$$3+\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2} \ge \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+\sqrt{3}.$$

**Lời giải**. Đặt $x=\dfrac{1}{a}, y=\dfrac{1}{b}, z=\dfrac{1}{c}$ ta có $x,y,z$ là các số dương này và $xy+yz+zx=1$. Ta cần chứng minh

$$3-\sqrt{3}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \ge (x+y+z)^2.$$

Trước hết ta chứng minh

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \ge \frac{(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)}{xy+yz+zx}. \qquad (1)$$

Thật vậy, ta có

$$(1) \Leftrightarrow (xy+yz+zx)\sum_{xyz}\frac{x^2}{y} \ge (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$
$$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+x^2z+z^2y+y^2x+\sum_{xyz}\frac{x^3z}{y} \ge x^3+y^3+z^3+\sum_{xyz}x^2y$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^3z}{y}+\frac{y^3x}{z}+\frac{z^3y}{x} \ge xz^2+zy^2+yx^2. \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{x^3z}{y}+\frac{y^3x}{z} \ge 2x^2y;\ \frac{y^3x}{z}+\frac{z^3y}{x} \ge 2y^2z;\ \frac{x^3z}{y}+\frac{z^3y}{x} \ge 2z^2x.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên suy ra bất đẳng thức (2) được chứng minh.
Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Từ (1) suy ra $3-\sqrt{3}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x} \ge 3-\sqrt{3}+(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Vì vậy ta cần chứng minh

$$3-\sqrt{3}+(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge (x+y+z)^2$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge x^2+y^2+z^2\sqrt{3}-1$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z-1) \ge \sqrt{3}-1. \qquad (3)$$

Do $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx=1$ và $x+y+z \ge \sqrt{3(xy+yz+zx)}=\sqrt{3}$ nên ta có bất đẳng thức (3) được chứng minh. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

**Bài 5** *(4.0 điểm)*Cho tập hợp $X$ có 2016 phần tử. Chọn ra 64 tập con $X_1, X_2, \dots X_{64}$ của tập $X$ (mỗi tập con đều chứa nhiều hơn 1008 phần tử). Chứng minh tồn tại tập con $A$ của $X$ có số phần tử không vượt quá 6 mà $A \cap X \ne \emptyset$, với $i=\overline{1,64}$.

**Lời giải**. Tổng số phần tử trong 64 tập con lớn hơn $64\cdot 1008 = 32\cdot 2016$. Vì vậy tồn tại một phần tử $a$ của tập $X$ thuộc ít nhất 33 tập con, giả sử là $X_1, X_2, \dots X_{33}$.
Xét 31 tập con còn lại, lí luận tương tự suy ra tồn tại một phần tử $b$ của tập $X$ thuộc ít nhất 16 tập con, giả sử là $X_{34}, X_{35,\dots\dots} X_{49}$.
Xét 15 tập con còn lại, lí luận tương tự suy ra tồn tại một phần tử c của tập X thuộc ít nhất 8 tập con, giả sử là $X_{50,}X_{51,\dots\dots}X_{57}$.
Xét 7 tập con còn lại, lí luận tương tự suy ra tồn tại một phần tử d của tập $X$ thuộc ít nhất 4 tập con, giả sử là $X_{58}, X_{59}, X_{60}, X_{61}$.
Xét 3 tập con còn lại, lí luận tương tự suy ra tồn tại một phần tử e của tập $X$ thuộc ít nhất 2 tập con, giả sử là $X_{62}, X_{63}$.
Với tập $X_{64}$ còn lại ta lấy một phần tử $f$.
Như vậy tập con $A$ chứa các phần tử $a, b, c, d, e, f$ thỏa mãn bài toán.
Suy ra điều phải chứng minh.

## Đề 26. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(6,0 điểm)*

a) Giải phương trình sau $4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Giải bất phương trình sau $\dfrac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2|$.

**Lời giải**.

a) Điều kiện $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(x+1) = 36(1+x) \\
\Leftrightarrow\ & (2x + 3\sqrt{1+x})^2 = (6\sqrt{1+x})^2 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x + 3\sqrt{1+x} = 6\sqrt{1+x} \\ 2x + 3\sqrt{1+x} = -6\sqrt{1+x} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} 3\sqrt{1+x} = 2x & (1) \\ 9\sqrt{1+x} = -2x. & (2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 9(1+x) = 4x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 9x - 9 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 8(1+x) = 4x^2 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 81x - 81 = 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{81 - 9\sqrt{97}}{8}.$

Vậy $x = 3$; $x = \dfrac{81 - 9\sqrt{97}}{8}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

b) Điều kiện $|x-5| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 8. \end{cases}$

- TH1: Xét x < 2 ta có

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{9}{5-x-3} \geq 2-x \\
&\Leftrightarrow \frac{9}{2-x} \geq 2-x \\
&\Leftrightarrow (2-x)^2 \leq 9 \\
&\Leftrightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \\
&\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5.
\end{aligned}
$$

Vậy $-1 \leq x \leq 5$ là nghiệm.

- TH 2: Xét $2 < x < 5$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{9}{5-x-3} \geq x-2 \Leftrightarrow \frac{9}{2-x} \geq x-2 \Leftrightarrow -(x-2)^2 \geq 9.$$

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

- TH3: Xét $5 < x \neq 8$ ta có

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{9}{x-8} \geq x-2 \\
&\Leftrightarrow \frac{9}{x-8} - (x-2) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{9-(x-8)(x-2)}{x-8} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{-x^2+10x-7}{x-8} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (x-8)\left(x^2-10x+7\right) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 5-3\sqrt{2} \\ 8 < x \leq 5+3\sqrt{2}. \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Kết hợp với miền $x$ đang xét ta có $8 < x \leq 5+3\sqrt{2}$ là nghiệm của bất phương trình.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-1;2) \cup (8;5+3\sqrt{2}]$.

**Bài 2** *(3,0 điểm)* Tìm tất cả các số nguyên dương $n$ sao cho hai số $n+26$ và $n-11$ đều là lập phương của hai số nguyên dương nào nào đó.

**Lời giải**. Giả sử có số nguyên dương $n$ sao cho $n+26 = x^3$ và $n-11 = y^3$ với $x, y$ là hai số nguyên dương $(x > y)$.

Khi đó ta được $x^3 - y^3 = 37 \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) = 37$.

Ta thấy $0 < x-y < x^2+xy+y^2$ nên ta có $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2=37. \end{cases}$

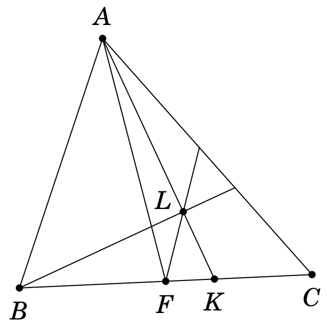
Thay $x = y+1$ từ (1) vào (2) ta được $y^2+y-12=0$ từ đó có $y=3$ và $n=38$.

Vậy $n=38$ là giá trị cần tìm.

**Bài 3** *(3,0 điểm)* Cho tam giác $ABC$ và điểm $K$ thuộc cạnh $BC$ sao cho $KB = 2KC$, $L$ là hình chiếu của $B$ trên $AK$, $F$ là trung điểm của $BC$, biết rằng $\widehat{KAB} = 2\widehat{KAC}$. Chứng minh rằng $FL$ vuông góc với $AC$.

**Lời giải**.

⟐ **Cách 1.**




Đặt $BC = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\widehat{KAC} = \alpha$.
Khi đó $\widehat{KAB} = 2\alpha, \widehat{BAC} = 3\alpha$.
Áp dụng định lí sin cho tam giác $ABK$ và $ACK$, ta được

$$\frac{BK}{\sin 2\alpha} = \frac{AK}{\sin B}; \frac{CK}{\sin\alpha} = \frac{AK}{\sin C}.$$

Do $BK = 2CK$, nên từ các đẳng thức trên ta có

$$\cos\alpha = \frac{\sin B}{\sin C}. \qquad (*)$$

Lại có

$$FA^2 - FC^2 = \left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = bc\cdot\cos A = bc\cdot\cos 3\alpha \qquad (1)$$

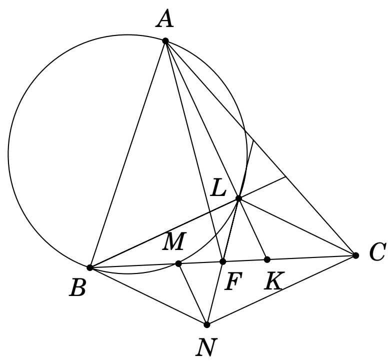
$$LC^2 = LA^2 + b^2 - 2b\cdot LA\cdot\cos\alpha = LA^2 + b^2 - 2bc\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\Rightarrow LA^2 - LC^2 = 2bc\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha - b^2 = bc(\cos\alpha + \cos 3\alpha) - b^2$$

$$= \left(bc\cdot\cos a - b^2\right) + bc\cdot\cos 3\alpha. \qquad (**)$$

Thay $(*)$ vào $(**)$, ta được $LA^2 - LC^2 = bc\cdot\cos 3\alpha$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $FA^2 - FC^2 = LA^2 - LC^2$.
Theo định lí Carnot, suy ra $CA$ vuông góc với $FL$.

⟐ **Cách 2.** Xét hai trường hợp sau:




**Trường hợp 1.** $L$ nằm trên đoạn $AK$.
Ta có $\dfrac{FK}{KC} = \dfrac{BF}{BC}$.
Gọi $M$ là trung điểm của $BK$. Suy ra

$$MF\cdot MC = MB\cdot MK = ML^2 \Rightarrow \widehat{MLF} = \widehat{MCL}.$$

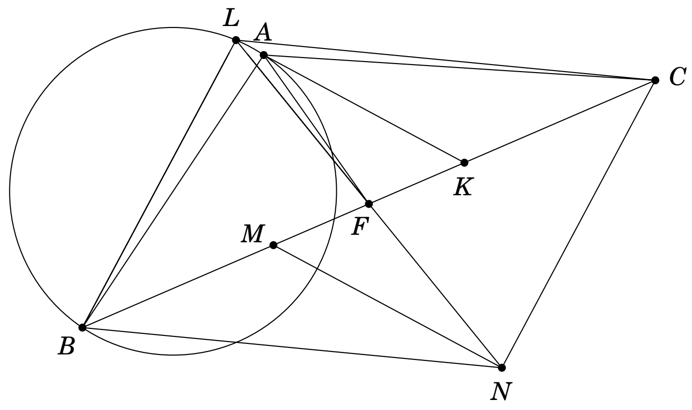
Mà $\widehat{MLK} = \widehat{MKL}$

$$\Rightarrow \widehat{FLK} = \widehat{CLK} \Rightarrow \frac{LC}{LF} = \frac{KC}{KF} = 2.$$

Gọi $N$ là điểm đối xứng với $L$ qua $F$.
Suy ra $LC = LN$, $BN = LC$ ($BNCL$ là hình bình hành).
Suy ra $NB = NL$.
Vậy $\triangle ALC = \triangle ALN$ (c.g.c).

Từ đây $\widehat{LAN} = \widehat{LAC} = \dfrac{\widehat{BAK}}{2} \Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{KAN}$.
Vì $MNKL$ là hình hành, $KL \perp BL$ nên $MN$ là đường trung trực của $BL$. Gọi $N$ là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng $BL$ với đường phân giác góc $A$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABL$. Vậy $N$ là điểm chính giữa của cung $BL$ (không chứa điểm $A$) của $(ABL)$.
Vậy $\widehat{ANL} = \widehat{ABL} = 90^\circ - \widehat{BAL} = 90^\circ - \widehat{NAC}$.
Hay $NL \perp AC$.

**Trường hợp 2.** $L$ nằm ngoài đoạn $AK$. Lập luận tương tự ta cũng có $NL \perp AC$




⋄ **Cách 3.** Gọi $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua $AK$ và $E$ là điểm trên tia $AK$ sao cho $AE = AB = AD$.

Ta thấy tam giác $EAD$ là tam giác cân và $C$ nằm trên phân giác của $\widehat{EAD}$.

Ta chứng minh rằng $C$ là trung điểm của $DE$.

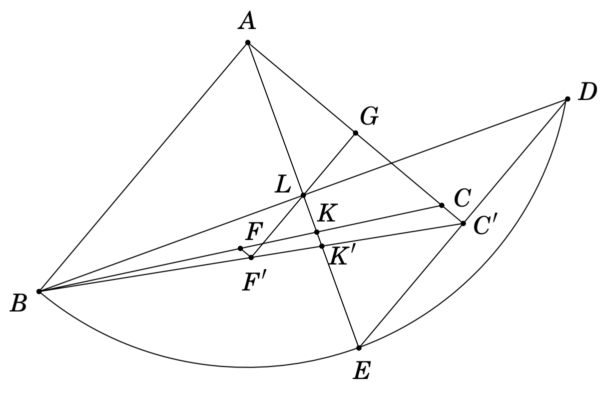
Thật vậy, giả sử $C$ không nằm trên $DE$. Gọi $C'$ là giao điểm của $DE$ và $AC$, $BC'$ cắt $KE$ tạo $K'$.

Suy ra $K'$ là trọng tâm của tam giác $EBD$.

$$\Rightarrow BK' = 2K'C \Rightarrow KK' /\!/ CC' \text{ (vô lý)}.$$

Vậy $C = C'$.

Vì $C$ là trung điểm của $DE$, suy ra $DE \perp AC$. Hơn nữa $F$ là trung điểm của $BC$, $L$ là trung điểm của $BD$, suy ra $FL /\!/ ED$. Vậy $FL \perp AC$.




**Bài 4** *(4,0 điểm)* Cho $A$ là tập hợp gồm 8 phần tử, tìm số lớn nhất của các tập con gồm 3 phần tử của $A$ sao cho giao của 2 tập bất kỳ trong các tập con này **không** phải là một tập hợp gồm 2 phần tử.

**Lời giải**. Ký hiệu $|X|$ là số phần tử của tập hữu hạn $X$.

Gọi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là tập con của $A$ thỏa mãn

$$|B_i| = 3, \left|B_i \cap B_j\right| \neq 2 (i, j = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Giả sử tồn tại phần tử $a \in A$ mà $a$ thuộc vào 4 tập trong số tập $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (chẳng hạn $a \in B_1, B_2, B_3, B_4$), khi đó $\left|B_i \cap B_j\right| \geq 1 (i, j = 1, 2, 3, 4)$.

Mà $B_i \neq B_j$ nếu $i \neq j$, tức là $|B_i \cap B_j| \neq 3$.
Do đó $|B_i \cap B_j| = 1$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$.
Từ đây $|A| \geq 1 + 4 \cdot 2 = 9$, điều này mâu thuẫn.
Như vậy, mỗi phần tử $A$ chỉ thuộc về nhiều nhất là ba trong số các tập hợp $B_1, B_2, \ldots, B_n$.
Khi đó $3n \leq 8 \cdot 3 \Leftrightarrow n \leq 8$.
Giả sử $A = \{a_1; a_2; \ldots, a_8\}$ xét các tập con của $A$ là

$$B_1 = \{a_1; a_2; a_3\}, B_2 = \{a_1; a_4; a_5\}, B_3 = \{a_1; a_6; a_7\}, B_4 = \{a_8; a_3; a_4\}$$

$$B_5 = \{a_8; a_2; a_6\}, B_6 = \{a_8; a_5; a_7\}, B_7 = \{a_3; a_5; a_6\}, B_8 = \{a_2; a_4; a_7\}.$$

Tám tập hợp trên là các tập con gồm ba phần tử $A$ thỏa mãn $|B_i \cap B_j| \neq 2$.
Vì vây số $n$ cần tìm là $n = 8$.

**Bài 5** *(4,0 điểm)* Cho các số dương $x$, $y$, $z$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(x+1)(y+1)^2}{3\sqrt[3]{z^2x^2}+1} + \frac{(y+1)(z+1)^2}{3\sqrt[3]{x^2y^2}+1} + \frac{(z+1)(x+1)^2}{3\sqrt[3]{y^2z^2}+1} \geq x + y + z + 3.$$

**Lời giải**. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{(x+1)(y+1)^2}{3\sqrt[3]{z^2x^2}+1} + \frac{(y+1)(z+1)^2}{3\sqrt[3]{x^2y^2}+1} + \frac{(z+1)(x+1)^2}{3\sqrt[3]{y^2z^2}+1} \geq x + y + z + 3.$$

Gọi vế trái của bất đẳng thức $S$. Do $ab + a + b \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2}, \forall a > 0, b > 0$ nên

$$\begin{aligned} S &\geq \frac{(x+1)(y+1)^2}{(z+1)(x+1)} + \frac{(y+1)(z+1)^2}{(x+1)(y+1)} + \frac{(z+1)(x+1)^2}{(y+1)(z+1)} \\ &= \frac{(y+1)^2}{z+1} + \frac{(z+1)^2}{x+1} + \frac{(x+1)^2}{y+1} \\ &\geq \frac{[(y+1)+(z+1)+(x+1)]^2}{(z+1)+(x+1)+(y+1)} \\ &= x + y + z + 3 \text{ (điều phải chứng minh).} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

## Đề 27. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(4 điểm)* Cho hàm số $y = x^2 - x - 2$

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

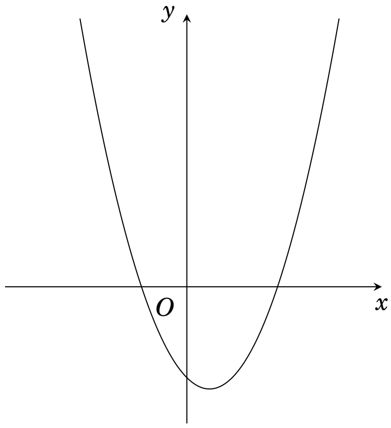
b) Tìm $m$ để đường thẳng $\Delta$: $y = x + m$ cắt đồ thị của hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ thỏa mãn độ dài đoạn thẳng $AB$ bằng khoảng cách từ $O$ đến $\Delta$.

**Lời giải**.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. Ta có $a = 1 > 0$, $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$, $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-9}{4}$.

Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{9}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




b) Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - x - 2 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x - m - 2 = 0$.
Đường thẳng cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -3$.

$$\Delta: x - y + m = 0, \mathrm{d}(O,\Delta) = \frac{|m|}{\sqrt{2}}$$

$$A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 + m - x_1 - m)^2} = AB = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2}$$

$$= \sqrt{2(x_2 + x_1)^2 - 8x_1x_2} = \sqrt{2 \cdot 2^2 - 8(-m-2)} = \sqrt{8m + 24}$$

$$AB = \mathrm{d}(O,\Delta) \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2 - 16m - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 8 \pm 4\sqrt{7} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

**Bài 2** *(6 điểm)*

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x-10)(y-10) = 81 \\ x^2 + y^2 - 10x - 10y + 18 = 0. \end{cases}$

b) Giải phương trình $2\sqrt{x^2 - 5x + 7} = 3(x-1)(x-4) + 8$.

c) Tìm $m$ để phương trình $\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} + 2\sqrt{16 - x^2} = m$ có nghiệm duy nhất.

**Lời giải.**

a) HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 - 10x\right)\left(y^2 - 10y\right) = 81 \\ \left(x^2 - 10x\right)\left(y^2 - 10y\right) = -18. \end{cases}$

Đặt $u = x^2 - 10x$, $v = y^2 - 10y$. Ta có $u \cdot v = 81$, $u + v = -18$.
Suy ra $u$, $v$ là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + 18x + 81 = 0$.
Suy ra $u = v = -9$.
Hệ đã cho tương đương với hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2 - 10x = -9 \\ y^2 - 10y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 9 = 0 \\ y^2 - 10y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 9 \\ y = 1 \vee y = 9. \end{cases}$$

Hệ đã cho có 4 nghiệm $(1;1)$, $(1;9)$, $(9;1)$, $(9;9)$.

b) Đặt $t = \sqrt{x^2 - 5x + 7}$, $(t \geq 0)$ suy ra $(x-1)(x-4) = t^2 - 3$.
Phương trình trở thành $2t = 3\left(t^2 - 3\right) + 8$

$$2t = 3\left(t^2 - 3\right) + 8 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{-1}{3} \text{ (loại).}$$

Với $t=1$, ta có $\sqrt{x^2-5x+7}=1 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=3$.
Vậy phương trình có tập nghiệm là $\{2;3\}$.

c) $\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}+2\sqrt{16-x^2}=m$ (điều kiện $-4\le x\le 4$).

⋄ **Điều kiện cần**: Giả sử hệ có nghiệm duy nhất là $x_0$.
Ta có $\sqrt{4+x_0}+\sqrt{4-x_0}+2\sqrt{16-x_0^2}=m$
$\sqrt{4+(-x_0)}+\sqrt{4-(-x_0)}+2\sqrt{16-(-x_0)^2}=m$.
$\Rightarrow -x_0$ là một nghiệm của phương trình.
Vì phương trinh duy nhất nên $x_0=-x_0 \Rightarrow x_0=0 \Rightarrow m=12$.

⋄ **Điều kiện đủ**: Xét $m=12$ phương trình đã cho trở thành
$2\sqrt{16-x^2}\le 2\sqrt{16}=8(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})^2=8+2\sqrt{16-x^2}=12$.

$$\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}+2\sqrt{16-x^2}\le 16$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+x}+\sqrt{4+x}+2\sqrt{16-x^2}\le 4+8=12$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.
Vậy $m=12$.

**Bài 3** *(4 điểm)*

a) Cho các số dương $a,b,c$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{ab+ac}+\frac{1}{bc+ba}+\frac{1}{ca+cb}\ge\frac{4(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

b) Cho các số thực $x,y,z$ thỏa mãn $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=|x|+|y|+|z|$.

**Lời giải**.

a) Ta có
BĐT $\Leftrightarrow \dfrac{(a+b)(a+c)}{a}+\dfrac{(b+c)(b+a)}{b}+\dfrac{(c+a)(c+b)}{c}\ge 4(a+b+c)$
$\Leftrightarrow a+b+c+\dfrac{bc}{a}+a+b+c+\dfrac{ca}{b}+a+b+c+\dfrac{ab}{c}\ge 4(a+b+c)$
$\Leftrightarrow \dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\ge a+b+c.$
Áp dụng BĐT Cô-si, ta có $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\ge 2c$, $\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\ge 2a$, $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}\ge 2b$,
$$2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\ge 2(a+b+c)$$
$$\Rightarrow \frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\ge a+b+c$$
$$\Rightarrow \frac{1}{ab+ac}+\frac{1}{bc+ba}+\frac{1}{ca+cb}\ge\frac{4(a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

b) Ta có
$$S^2=(|x|+|y|+|z|)^2=x^2+y^2+z^2+2(|x||y|+|y||z|+|z||x|)$$
$$S^2=x^2+y^2+z^2+|x|(|y|+|z|)+|y|(|z|+|x|)+|z|(|x|+|y|).$$

Áp dụng bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối ta có

$$|y|+|z|\geq |y+z|=|-x|=|x| \Rightarrow |x|(|y|+|z|)\geq z^2.$$

Chứng minh tương tự $|y|(|z|+|x|)\geq y^2$, $|z|(|x|+|y|)\geq z^2$.

Vì vậy $S^2\geq 2\left(x^2+y^2+z^2\right)$. Thay $x^2+y^2+z^2=8 \Rightarrow S^2\geq 16 \Rightarrow S\geq 4$.

Dấu bằng có thể xảy ra, khi $(x,y,z)=(2;-2;0)$ hoặc các hoán vị, ta có $S=4$.

Vậy $\min S=4$.

**Bài 4** *(3 điểm)*

a) Cho tam giác $ABC$ có diện tích $S$ và các cạnh $BC=a$, $CA=b$ thỏa mãn điều kiện $\cot A+\cot B=\dfrac{a^2+b^2}{2S}$. Chứng minh rằng tam giác $ABC$ vuông.

b) Cho tam giác $ABC$, $O$ là trọng tâm của tam giác. $M$ là một điểm nằm trong tam giác $M$ khác $O$. Gọi $D$, $E$, $F$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $M$ lên các cạnh $BC$, $CA$, $AB$. Chứng minh rằng đường thẳng $OM$ đi qua trọng tâm của tam giác $DEF$.

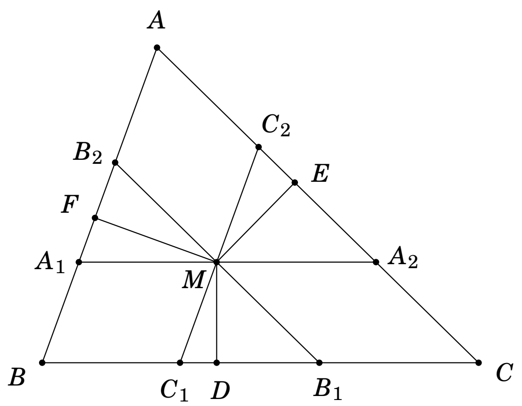
**Lời giải**.

a) Ta có

$$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$$
$$\cot B=\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca\sin B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{4S}$$
$$\Rightarrow \cot A+\cot B=\frac{c^2}{2S}\Rightarrow \frac{c^2}{2S}=\frac{a^2+b^2}{2S}$$

$\Rightarrow c^2=a^2+b^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C.

b) Ta chứng minh $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.




Qua $M$ kẻ đường thẳng song song với $BC$ lần lượt cắt $AB$, $AC$ tại $A_1$, $A_2$.

Kẻ đường thẳng song song với $AC$ lần lượt cắt $B$, $AB$ tại $B_1$,$B_2$.

Kẻ đường thẳng song song với $AB$ lần lượt cắt $BC$, $AC$ tại $C_1$, $C_2$.

Các tam giác $MB_1C_1$, $MA_2C_2$, $MA_1B_2$ đều,

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1}\right)$$

$$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MC_2}\right), \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_2}\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= \frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MC_2}\right) + \left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_1}\right) + \left(\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $DEF$. Ta có $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = 3\overrightarrow{MG}$. (2)

Từ (1), (2) ta có $\frac{3}{2}\overrightarrow{MO} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow \overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MG}$.

$\Rightarrow M, O, G$ thẳng hàng. Vậy $OM$ đi qua trọng tâm của tam giác $DEF$.

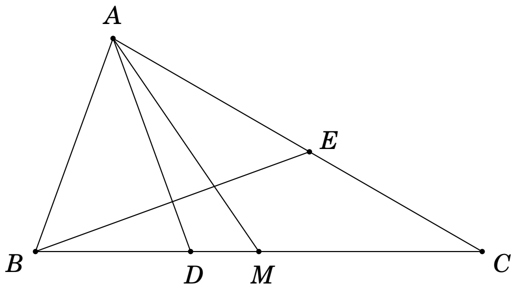
**Bài 5** *(3 điểm)*

a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, Cho tam giác $ABC$. Gọi $a$, $b$ lần lượt là đường trung tuyến và đường phân giác trong của tam giác. các đường thẳng $AD$ lần lượt có phương trình là $x - y - 2 = 0$, $y = 0$. Giả sử $B(1;3)$, viết phương trình đường thẳng $AC$ và xác định tọa độ điểm $C$.

b) Trong mặt phẳng với tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$, $BE$ và $CD$ là các đường cao của tam giác. Giả sử $D(2;0)$, $E(1;3)$ và đường thẳng $bc$ có phương trình $2x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ của điểm $B$ biết $B$ có hoành độ dương.

**Lời giải.**

a)




Ta có $A: \begin{cases} y = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2;0)$.

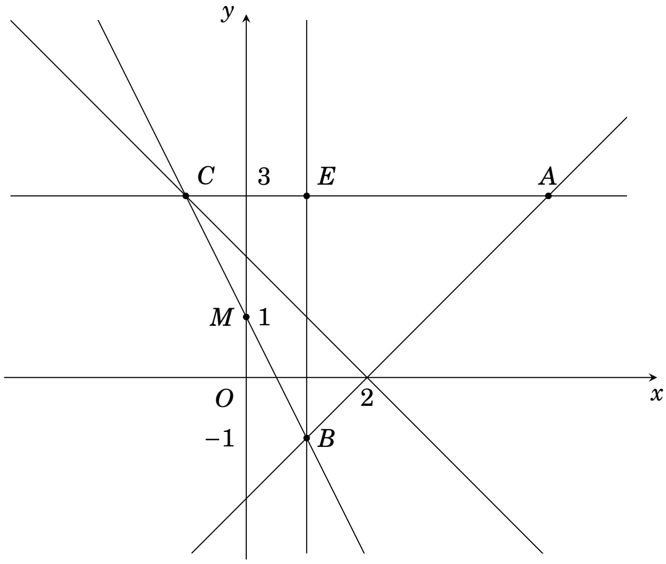
Gọi $E$ là điểm đối xứng của $B$ qua $AD: y = 0$, ta có $E \in AC$, $E(1;-3)$.

Phương trình đường thẳng $AC: \dfrac{x-2}{1-2} = \dfrac{y-0}{-3-0} \Leftrightarrow 3x - y - 6 = 0$.

$C(c;3c-6)$, $M\left(\dfrac{c+1}{2};\dfrac{3c-3}{2}\right)$.

$\dfrac{c+1}{2} - \dfrac{3c-3}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Rightarrow C(0;-6)$.

b) Gọi $M$ là trung điểm của $BC$.




Ta có $MD = ME$.

Gọi $M(m; -2m+1)$, ta có $MD = ME$.

$\Rightarrow \sqrt{5m^2 - 8m + 5} = \sqrt{5m^2 - 10m + 5} \Rightarrow m = 0 \Rightarrow M(0;1)$.

Ta có $B(b; -2b+1)$, $b > 0$. $MB = \sqrt{(b-0)^2 + (-2b+1-1)^2} = \sqrt{5b^2}$.

$MB = MD = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5b^2} = \sqrt{5}$, $b > 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow B(1;-1)$.

## Đề 28. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(4.0 điểm)* Giải bất phương trình $\sqrt{7x^2 - 7x - 9} - \sqrt{x^2 - x - 6} < 2\sqrt{2x+1}$.

**Lời giải**. Điều kiện $x \geq 3$. Bất phương trình tương đương với

$$7x^2 - 7x - 9 < \left[\sqrt{(x+2)(x-3)} + 2\sqrt{2x+1}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 14x - 7 < 4\sqrt{(x+2)(x-3)} \cdot \sqrt{2x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow 3(2x^2 - 5x - 3) - 4\sqrt{(x+2)(x-3)(2x+1)} + (x+2) < 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{2x^2 - 5x - 3}{x+2} - 4\sqrt{\frac{2x^2 - 5x - 3}{x+2}} + 1 < 0$$

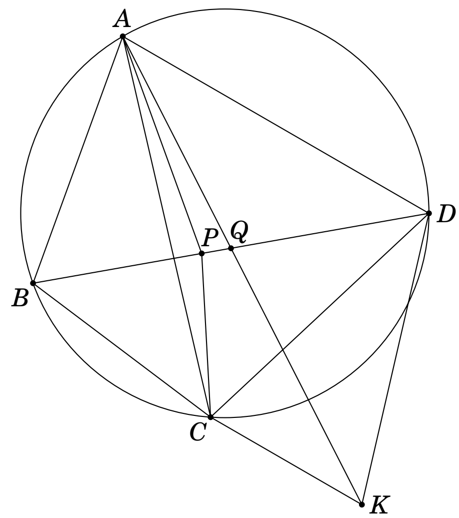
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2 - 46x - 29 > 0 \\ 2x^2 - 6x - 5 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{23 - \sqrt{1051}}{18} \\ x > \dfrac{23 + \sqrt{1051}}{18} \end{array}\right. \\ \dfrac{3 - \sqrt{19}}{2} < x < \dfrac{3 + \sqrt{19}}{2}. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện đã xác định, ta được $\dfrac{23 - \sqrt{1051}}{18} < x < \dfrac{3 + \sqrt{19}}{2}$.

**Bài 2** *(4 điểm)* Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp có giao điểm $P$ của hai đường phân giác của các góc $BAD$, $BCD$, nằm trên đường chéo $BD$. Gọi $Q$ là trung điểm của $BD$. Đường thẳng qua $C$ song song với $AD$ cắt tia $AQ$ tại $K$ nằm ngoài tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng tam giác $CDK$ là tam giác cân.

**Lời giải**.




Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên theo định lí Ptoleme ta có

$$AB\cdot CD + AD\cdot CB = AC\cdot BD. \qquad (1)$$

Vì $AP, CP$ tương ứng là phân giác góc $A$ và $C$ nên

$$\frac{AB}{AD} = \frac{PB}{PD} = \frac{CB}{CD} \Rightarrow AB\cdot CD = AD\cdot CB. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $2AB\cdot CD = AC\cdot BD$.

Mà $Q$ là trung điểm của $BD$ nên $BD = 2BQ$.

Do đó $AB\cdot CD = AC\cdot BQ$ hay $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BQ}{CD}$.

Mà $\widehat{ABQ} = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp chắn cung $CD$) nên $\triangle ABQ \sim \triangle ACD \Rightarrow \widehat{AQB} = \widehat{ADC}$.

Mà $\widehat{AQB} = \widehat{DQK}$ (đối đỉnh); $\widehat{ADC} = \widehat{DCK}$ (so le trong). $(*)$

Suy ra $\widehat{DQK} = \widehat{DCK}$. Do đó tứ giác $CQDK$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{BQC} = \widehat{CKD}$. $(**)$

Chứng minh tương tự $\triangle QBC \sim \triangle DAC \Rightarrow \widehat{BQC} = \widehat{ADC}$. $(***)$

Từ $(*)$, $(**)$ và $(***)$ suy ra $\widehat{DCK} = \widehat{CKD}$.

Suy ra tam giác $CDK$ cân tại $D$.

**Bài 3** *(4 điểm)* Cho ba số thực dương $x, y, z$ thay đổi nhưng luôn thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{y^2}{x(y^2+1)} + \frac{z^2}{y(z^2+1)} + \frac{x^2}{z(x^2+1)}.$$

**Lời giải**. Ta chứng minh giá trị nhỏ nhất của $S$ bằng $\dfrac{3}{2}$.

Đặt $\dfrac{1}{x} = a, \dfrac{1}{y} = b, \dfrac{1}{z} = c$.

Ta có $a, b, c$ là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$ và $S = \dfrac{a}{1+b^2} + \dfrac{b}{1+c^2} + \dfrac{c}{1+a^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta được

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \ge a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

Viết 2 kết quả tương tự và cộng lại ta được $S \ge a+b+c - \dfrac{ab+bc+ca}{2}$.

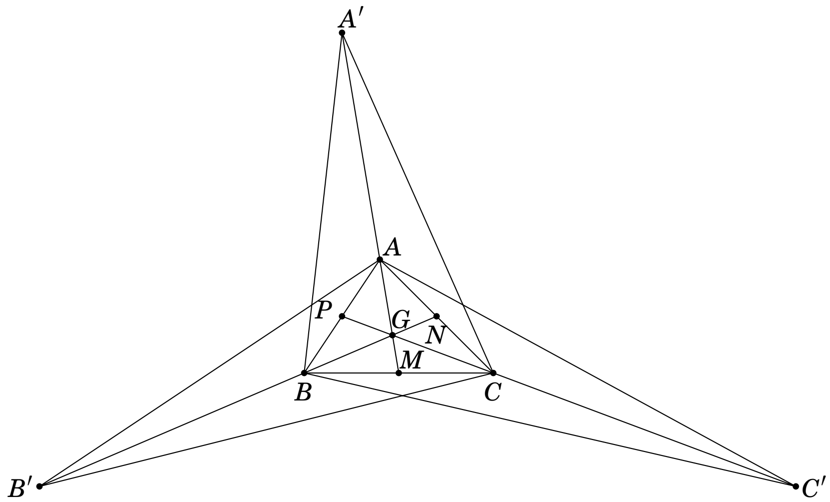
Ta có $a+b+c=3$ và $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$. Từ đó suy ra

$$S \ge a+b+c - \frac{1}{2}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{3} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S$ là $\dfrac{3}{2}$, dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$.

**Bài 4** *(4 điểm)* Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm của nó có cùng màu.

**Lời giải**.




Lấy 5 điểm tùy ý sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng trong mặt phẳng. Khi đó vì chỉ dùng hai màu để tô các điểm nên theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại ba điểm trong số đó cùng màu. Giả sử đó là 3 điểm $A,B,C$, màu đỏ.
Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Nếu $G$ có màu đỏ thì ta được tam giác có 3 đỉnh và trọng tâm màu đỏ.
Nếu $G$ màu xanh. Kéo dài $GA,GB,GC$ các đoạn $AA',BB',CC'$ sao cho $AA'=3GA, BB'=3GB, CC'=3GC$.
Gọi $M,N,P$ tương ứng là trung điểm $BC,CA,AB$ thì $AA'=3GA=3\cdot\dfrac{2}{3}AM=2AM$. Tương tự $BB'=2BN, CC'=2CP$.
Do đó tam giác $A'BC, B'CA, C'AB$ tương ứng nhận $A,B,C$ làm trọng tâm.
Mặt khác, tam giác $ABC, A'B'C'$ cũng có cùng trọng tâm $G$.
Có hai trường hợp có thể xảy ra

- Ba điểm $A',B',C'$ có cùng mùa xanh: Khi đó tam giác $A'B'C'$ và trọng tâm $G$ có màu xanh.
- Ít nhất một trong các điểm $A',B',C'$ có màu đỏ: Không mất tính tổng quát, giả sử $A'$ đỏ. Khi đó tam giác $A'BC$ và trọng tâm $A$ có màu đỏ.

**Bài 5** *(4 điểm)* Chứng minh rằng tồn tại 16 số tự nhiên liên tiếp sao cho không có số nào trong 16 số đó có thể biểu diễn được dưới dạng $\left|7x^2+9xy-5y^2\right|$ $(x,y\in\mathbb{Z})$.

**Lời giải**. Đặt $\left|7x^2+9xy-5y^2\right|=A$ và $28A=\left|(14x+9y)^2-13\cdot 17y^2\right|$. Xét số dư khi chia $A$ cho $9,13,17$, ta được

- $A$ chia cho 9 không có số dư $3,6$;
- $A$ chia cho 13 không có số dư $1,3,4,9,10,12$;
- $A$ chia cho 17 không có số dư $1,2,4,8,9,13,15,16$.

Theo định lí thặng dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên dương $n$ thỏa mãn

$$\begin{cases} n \equiv -4 \pmod 9 \\ n \equiv -2 \pmod{13} \\ n \equiv 0 \pmod{17}. \end{cases}$$

Khi đó

- $n+7, n+10$ không có dạng $|7x^2+9xy-5y^2|$.
- $n+3, n+5, n+6, n+11, n+12, n+14$ không có dạng $|7x^2+9xy-5y^2|$.
- $n+1, n+2, n+4, n+8,, n+9, n+13,, n+15,, n+16$ không có dạng $|7x^2+9xy-5y^2|$.

Từ đó suy ra tại 16 số $n+1, n+2, \dots, n+16$ thỏa mãn bài toán.

# Đề 29. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** Cho bộ số gồm 8 số $D = \{T, R, A, I, H, E, P, N\}$ và $T = \left\{\frac{T+R}{2}; \frac{R+A}{2}; \frac{A+I}{2}; \frac{I+H}{2}; \frac{H+E}{2}; \frac{E+P}{2}; \frac{P+N}{2}; \frac{N+T}{2}\right\}$ là một hoán vị của $D$. Biết rằng $T+R+A+I+H+E+P+N = 2014$. Hãy xác định các giá trị $N$.

**Lời giải**. Ta có

$\left(\frac{(T+R)}{2}\right)^2 \le \frac{T^2+R^2}{2}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $T = R$;

$\left(\frac{(R+A)}{2}\right)^2 \le \frac{R^2+A^2}{2}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $R = A$;

$\vdots$

$\left(\frac{(N+T)}{2}\right)^2 \le \frac{N^2+T^2}{2}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $N = T$.

Ta thu được $\left(\frac{(T+R)^2}{2}\right) + \left(\frac{(R+A)^2}{2}\right) + \dots + \left(\frac{(N+T)^2}{2}\right) \le T^2+R^2+\dots+N^2$.

Mặt khác, theo giả thiết thì $T$ là hoán vị của $D$ nên

$$\left(\frac{(T+R)^2}{2}\right) + \left(\frac{(R+A)^2}{2}\right) + \dots + \left(\frac{(N+T)^2}{2}\right) = T^2+R^2+\dots+N^2.$$

Suy ra $T = R = A = \dots = N = \frac{2014}{8} = \frac{1007}{4}$.

Vậy $N = \frac{1007}{4}$.

**Bài 2** Giải phương trình $x^2+x-3 = \sqrt{3-2x}$.

**Lời giải**. Điều kiện $x \le \frac{3}{2}$.

Ta có

$$x^2+x-3=\sqrt{3-2x} \Leftrightarrow (x+\sqrt{3-2x})(x-\sqrt{3-2x}-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{3-2x}=0 \\ x-\sqrt{3-2x}-1=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (loại)} \\ x=-3 \\ x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-3$ và $x=\sqrt{2}$.

**Bài 3** Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{12-2x^2}=4+y \\ \sqrt{1-2y-y^2}=5-2x. \end{cases}$ (1)

**Lời giải**. Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+y^2+8y+4=0 & (2) \\ 4x^2+y^2-20x+2y+24=0 & (3) \\ y\geq -4; x\leq \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

Nhân hai vế của (3) với 2 cộng với các vế tương ứng của (2), ta thu được phương trình

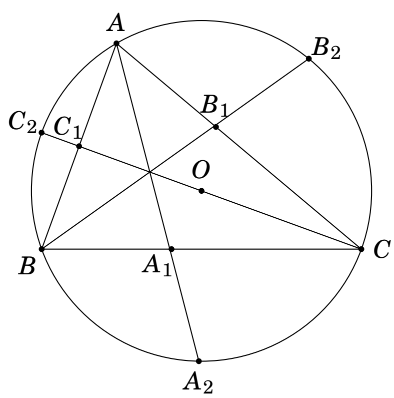
$$10x^2+3y^2-40x+12y+52=0 \Leftrightarrow 10(x-2)^2+3(y+2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2. \end{cases}$$

Thử lại ta thấy $(x;y)=(2;-2)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

**Bài 4** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $O$. Phân giác trong của góc $A$ cắt $BC$ tại $A_1$ và cắt đường tròn $O$ tại $A_2$. Tương tự ta thu được các điểm $B_1, B_2, C_1, C_2$ tương ứng. Chứng minh rằng

$$\frac{A_1A_2}{BA_2+A_2C}+\frac{B_1B_2}{CB_2+B_2A}+\frac{C_1C_2}{AC_2+C_2B}\geq \frac{3}{4}.$$

**Lời giải**.




Áp dụng định lý Ptoleme cho tứ giác nội tiếp $CA_2BA$ ta được

$$CA_2\cdot AB+BA_2\cdot AC=AA_2\cdot BC.$$

Vì $BA_2=CA_2$ nên $CA_2(AB+AC)=AA_2\cdot BC$.

Suy ra $\dfrac{CA_2}{AA_2}=\dfrac{BC}{AB+AC}$.

Xét $\triangle CA_1A_2$ và $\triangle ACA_2$, có

$\widehat{A_2}$ chung; $\widehat{A_1CA_2}=\widehat{CAA_2}$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau).

Suy ra $\triangle CA_1A_2 \sim \triangle ACA_2 \Rightarrow \dfrac{A_1A_2}{CA_2}=\dfrac{CA_2}{AA_2}$.

Từ đó ta có $\dfrac{A_1A_2}{BA_2+A_2C}=\dfrac{A_1A_2}{2CA_2}=\dfrac{CA_2}{2AA_2}=\dfrac{BC}{2(AB+AC)}$.

Tương tự, ta có $\dfrac{B_1B2}{CB_2+B_2A}=\dfrac{AC}{2(BA+BC)}$ và $\dfrac{C_1C_2}{AC_2+C_2B}=\dfrac{AB}{2(AC+BC)}$.

Từ đó suy ra

$$\frac{A_1A_2}{BA_2+A_2C}+\frac{B_1B_2}{CB_2+B_2A}+\frac{C_1C_2}{AC_2+C_2B}=\frac{BC}{2(AB+AC)}+\frac{AC}{2(AB+BC)}+\frac{AB}{2(AC+BC)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Nesbit cho ba số dương $AB, AC, BC$, ta được bất đẳng thứ cần phải chứng minh

$$\frac{A_1A_2}{BA_2+A_2C}+\frac{B_1B_2}{CB_2+B_2A}+\frac{C_1C_2}{AC_2+C_2B}\ge\frac{3}{4}.$$

**Bài 5** Cho số nguyên tố có 4 chữ số $p=\overline{abcd}$. Chứng minh rằng đa thức $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ không phân tích được thành tích của hai đa thức bậc hớn hơn 0 với hệ số thực nguyên.

**Lời giải**. Giả sử $P(x)$ phân tích được thành tích của hai đa thức bậc hớn hơn 0 với hệ số nguyên thì một thừa số là đa thức bậc nhất.

Khi đó $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d=(mx+n)(rx^2+ux+s)$, với $m,n,r,u,s\in\mathbb{Z}$.

Nhận xét rằng $P(x)$ không thể có nghiệm dương và nghiệm bằng 0 (do $a,b,c,d\in\{0;1;2;\dots;9\}$ và $a,d\neq 0$). Do đó $m,n$ cùng dấu. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $m,n>0$.

Đồng nhất các hệ số của $P(x)$, ta được $a=mr$ và $d=ns$, tức là $m$ là một ước của $a$, $n$ là một ước của $d$. Do đó $m\le a\le 9$, $n\le d\le 9$. Từ đó suy ra $1<10m+n\le 99<p=\overline{abcd}$.

Ta lại có $p=P(10)=(10m+n)(100r+10u+s)$. Do đó $p$ có một ước là $10m+n$. Mà $1<10m+n<p$ nên khi đó $p$ là hợp số, trái với giả thiết.

Vậy $P(x)$ không thể phân tích được thành tích của hai đa thức bậc hớn hơn 0 với hệ số nguyên.

## Đề 30. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(3 điểm)*

a) Cho phương trình bậc hai $x^2-2mx+3m-2=0$, trong đó $x$ là ẩn, $m$ là tham số. Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1,x_2$ và $x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$. Chứng minh rằng nếu $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $4a+c\ge 2b$.

**Lời giải**.

a) Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1;x_2$ khi và chỉ khi

$$\Delta'\ge 0\Leftrightarrow m^2-(3m-2)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le 1.\end{array}\right.\quad(*)$$

Với điều kiện trên, theo định lý Vi-ét, ta có $x_1+x_2=2m$, $x_1x_2=3m-2$.

Do đó

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2 &= (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \\ &= 4m^2-2(3m-2) \\ &= 4m^2-6m+4 \\ &= \left(2m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4} \ge \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m=\frac{3}{4}$ $\Big($thỏa mãn điều kiện $(*)\Big)$.

Vậy $x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{7}{4}$ khi và chỉ khi $m=\frac{3}{4}$.

b) Giả sử $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Khi đó $f(-2)=4a-2b+c\ge 0 \Rightarrow 4a+c\ge 2b$.

**Bài 2** *(2 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{x-2}-\sqrt{3x}=1-\sqrt{2x+3}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2\\ \sqrt{x+6}+\sqrt{y+3}=-x^2+2x+8.\end{cases}$

**Lời giải.**

a) Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} &\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{3x} \\ \Rightarrow\ & x-2+2x+3+2\sqrt{(x-2)(2x+3)}=1+3x+2\sqrt{3x} \\ \Leftrightarrow\ & 3x+1+2\sqrt{2x^2-x-6}=3x+1+2\sqrt{3x} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{2x^2-x-6}=\sqrt{3x} \\ \Rightarrow\ & 2x^2-x-6=3x \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2-4x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Thử lại, ta thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

b) Điều kiện $x\ge -6; y\ge -3$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$\begin{aligned} &(x-y)(x^2+xy+y^2)+3x-3y=3x^2+3y^2+2 \\ \Leftrightarrow\ & x^3-y^3+3x-3y=3x^2+3y^2+2 \\ \Leftrightarrow\ & x^3-3x^2+3x-1=y^3+3y^2+3y+1 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^3=(y+1)^3 \\ \Leftrightarrow\ & x-1=y+1 \Leftrightarrow y=x-2. \end{aligned}$$

Ta có $x=y+2\ge -3+2=-1$. Thay $y=x-2$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=-x^2+2x+8\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{x+6}-3+\sqrt{x+1}-2+x^2-2x-3=0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3}+\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}+(x-3)(x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ &(x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}+x+1\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &x=3\ (\text{vì } \frac{1}{\sqrt{x+6}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}+x+1>0).
\end{aligned}$$

**Bài 3** *(2 điểm)*

a) Cho $a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3(a^2+b^2+c^2).$$

b) Giải bất phương trình $\sqrt[3]{3-x}\geq 1-\sqrt{x-2}$.

**Lời giải.**

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ &\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-(a+b+c)\geq 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{a^2}{b}-2a+b+\frac{b^2}{c}-2b+c+\frac{c^2}{a}-2c+a\geq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\geq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức $(*)$ luôn đúng do $0<a,b,c<1$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

b) Điều kiện $x\geq 2$. Đặt $t=\sqrt{x-2}, t\geq 0$. Suy ra $x=t^2+2$, thay vào bất phương trình ta được

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{3-(t^2+2)}\geq 1-t\ &\Leftrightarrow\ \sqrt[3]{1-t^2}\geq 1-t\\
&\Leftrightarrow\ 1-t^2\geq (1-t)^3 \Leftrightarrow t^3-4t^2+3t\geq 0\\
&\Leftrightarrow\ t(t-1)(t-3)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\leq t\leq 1\\ t\geq 3\end{array}\right.\\
&\Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}0\leq \sqrt{x-2}\leq 1\\ \sqrt{x-2}\geq 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\leq x\leq 3\\ x\geq 11.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=[2;3]\cup[11;+\infty)$.

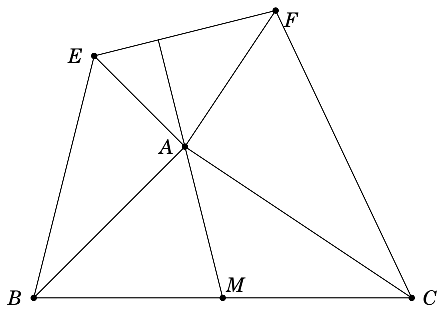
**Bài 4** *(2 điểm)*

a) Cho tam giác $ABC$, dựng về phía ngoài tam giác $ABC$ hai tam giác vuông $ABE$ và $ACF$ với $BAE = CAF = 90^\circ$, sao cho tam giác $ABE$ đồng dạng với tam giác $ACF$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$, chứng minh rằng $AM$ vuông góc với $EF$.

b) Cho tam giác $ABC$ không vuông với $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 = 2c^2$ và $\tan A + \tan B = 2\tan C$ thì $ABC$ là tam giác cân.

**Lời giải**.

a) **Cách 1:**




Ta có $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$. Suy ra

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{EF} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} \text{ (vì } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 0) \\ &= AB \cdot AF \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) - AC \cdot AE \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}). \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF} \Rightarrow AB \cdot AF = AC \cdot AE$. (2)

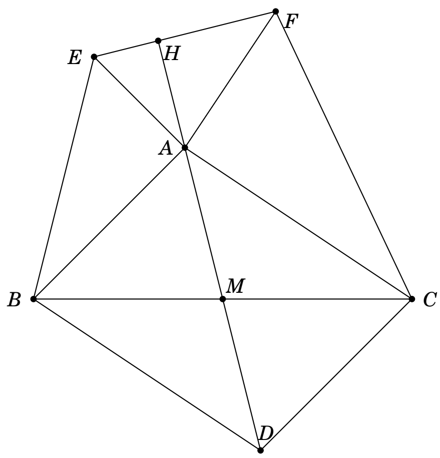
Mặt khác, nếu $\widehat{BAC} \le 90^\circ$ thì $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \widehat{A} + 90^\circ$. Nếu $\widehat{BAC} > 90^\circ$ thì $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = 270^\circ - \widehat{A}$.

Do đó ta luôn có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$. (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra $2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$.

Vậy $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{EF} \Rightarrow AM \perp EF$.

**Cách 2:**




Dựng hình bình hành $ACDB$. Ta có $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF}$.

Vì $ACDB$ là hình bình hành nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{CD}{CA}$.

Do đó $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{CD}{CA}$ (1).

Ta lại có $\widehat{CAB} + \widehat{ACD} = 180^\circ$ và $\widehat{CAB} + \widehat{EAF} = 360^\circ - \widehat{EAB} - \widehat{FAC} = 180^\circ$. Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{EAF}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ACD \sim \triangle FAE$.
Từ đó suy ra $\widehat{CAD} = \widehat{AFE}$.
Gọi $H$ là giao điểm của $AM$ và $EF$. Khi đó $\widehat{CAD} + \widehat{FAH} = 180^\circ - \widehat{FAC} = 90^\circ$.
Do đó $\widehat{AFE} + \widehat{FAH} = \widehat{CAD} + \widehat{FAH} = 90^\circ$. Suy ra $\triangle FAH$ vuông tại $H$. Vậy $AM \perp EF$.

b) Ta có $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{\dfrac{2S}{bc}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \dfrac{4S}{b^2+c^2-a^2}$.

Tương tự, ta có $\tan B = \dfrac{4S}{a^2+c^2-b^2}$, $\tan C = \dfrac{4S}{a^2+b^2-c^2}$.
Ta có $\tan A + \tan B = 2\tan C$ suy ra

$$\frac{4S}{b^2+c^2-a^2} + \frac{4S}{a^2+c^2-b^2} = \frac{8S}{a^2+b^2-c^2}$$
$$\Leftrightarrow a^4 - (b^2-c^2)^2 + b^4 - (c^2-a^2) = 2(c^4 - (a^2-b^2)^2)$$
$$\Leftrightarrow a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + b^4 - c^4 - a^4 + 2c^2a^2 = 2c^4 - 2a^4 - 2b^4 + 4a^2b^2$$
$$\Leftrightarrow 2c^4 - (a^2-b^2)^2 = c^2(a^2+b^2)$$
$$\Rightarrow 2c^4 - (a^2-b^2)^2 = 2c^4$$
$$\Leftrightarrow a = b.$$

Vậy tam giác $ABC$ cân tại $C$.

**Bài 5** *(1 điểm)* Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm lần lượt có tọa độ là $I(4;0)$ và $G\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh $A, B, C$ của tam giác $ABC$ biết rằng đỉnh $B$ nằm trên đường thẳng $d: 2x + y - 1 = 0$ và điểm $M(4;2)$ nằm trên đường cao kẻ từ đỉnh $B$ của tam giác $ABC$.

**Lời giải**. Gọi $B(a;1-2a) \in d$. Gọi $N(x_N;y_N)$ là trung điểm của $AC$.
Ta có $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GN}$ mà $\overrightarrow{BG} = \left(\dfrac{11}{3} - a; 2a - \dfrac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{GN} = \left(x_N - \dfrac{11}{3}; y_N - \dfrac{1}{3}\right)$.

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{11}{3} - a = 2\left(x_N - \dfrac{11}{3}\right) \\ 2a - \dfrac{2}{3} = 2\left(y_N - \dfrac{1}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{11-a}{2} \\ y_N = a \end{cases} \Rightarrow N\left(\dfrac{11-a}{2};a\right)$.

Ta có $\overrightarrow{IN} = \left(\dfrac{3-a}{2};a\right)$, $\overrightarrow{BM} = (4-a;2a+1)$. Ta có $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{BM}$ cùng phương.

Với $a = 4$ hoặc $a = -\dfrac{1}{2}$ thì không thỏa mãn $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{BM}$ cùng phương.

Suy ra $\dfrac{3-a}{2(4-a)} = \dfrac{a}{2a+1} \Rightarrow a = 1$. Do đó $B(1;-1)$, $N(5;1)$.

Đường thẳng $AC$ đi qua $N(5;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{IN} = (1;1)$. Suy ra phương trình đường thẳng $AC$ là $x + y - 6 = 0$.
Đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ có tâm $I(4;0)$ và bán kính bằng $IB = \sqrt{10}$ nên có phương trình $(x-4)^2 + y^2 = 10$.

Suy ra tọa độ $A, C$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y-6=0 \\ (x-4)^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6-y \\ (2-y)^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6-y \\ \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=7 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $A(3;3), B(1;-1), C(7;-1)$ hoặc $A(7;-1), B(1;-1), C(3;3)$.

## Đề 31. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(2 điểm)*Cho parabol $(P)$: $y = x^2 - 2x + m$. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để đường thẳng $d: y = 2x+1$ cắt parabol $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho $AB = 2$.

**Lời giải**. Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 4x - 1 + m = 0$. (1)

- $d$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < 5.$$

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m - 1. \end{cases}$

- Ta có

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (2x_1 + 1 - 2x_2 - 1)^2 = 5(x_1 - x_2)^2 \\ &= 5\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 5[16 - 4(m-1)] = 5(20 - 4m). \end{aligned}$$

- $AB = 2 \Leftrightarrow AB^2 = 4 \Leftrightarrow 5(20 - 4m) = 4 \Leftrightarrow m = \dfrac{24}{5}$.

Đối chiếu điều kiện, ta thấy $m = \dfrac{24}{5}$ thỏa mãn.

**Bài 2** *(4 điểm)*

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt

$$(m-2)x^4 - 2mx^2 + m^2 - 4 = 0.$$

b) Chứng minh rằng $\dfrac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)} - \tan b = \tan a$.

**Lời giải**.

a) Đặt $t = x^2 \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$(m-2)t^2 - 2mt + m^2 - 4 = 0. \quad (*)$$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có một nghiệm dương và một nghiệm bằng 0.

Phương trình (*) có một nghiệm $t = 0$ khi và chỉ khi

$$m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

- Với $m = 2$, phương trình (*) trở thành $-4t = 0$. Trong trường hợp này, (*)

chỉ có một nghiệm là 0.

- Với $m=-2$, phương trình (*) trở thành $-4t^2+4t=0$. Phương trình này có hai nghiệm $t=0$ và $t=1$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m=-2$.

b) Ta có

- $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$.
- $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.
- $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin$.

$$\begin{aligned}VT &= \frac{2(\sin a\cos b+\cos a\sin b)}{\cos a\cos b-\sin a\sin b+\cos a\cos b+\sin a\sin b}-\tan b\\ &= \frac{2(\sin a\cos b+\cos a\sin b)}{2\cos a\cos b}-\frac{\sin b}{\cos b}\\ &= \frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b}-\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}=\tan a=VP.\end{aligned}$$

**Bài 3** *(6 điểm)*

a) Giải bất phương trình $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$.

b) Giải phương trình $2x^2+2x+5=(4x-1)\sqrt{x^2+3}$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+3x^2+6x+4=y^3+3y\\ 2\sqrt{4-x^2}-3\sqrt{3+2y-y^2}=3x-2\end{cases}$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$.

**Lời giải.**

a) - Điều kiện $\begin{cases}1-4x^2\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}$ hay $x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]\setminus\{0\}$.

- Thực hiện phép nhân liên hợp ta thu được bất phương trình

$$\begin{aligned}4x<3\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right) &\Leftrightarrow \sqrt{1-4x^2}>4x-3\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x-3<0\\ 1-4x^2\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}4x-3\ge 0\\ 9(1-4x^2)>(4x-3)^2\end{cases}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\dfrac{3}{4}\\ |x|\le\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge\dfrac{3}{4}\\ 9(1-4x^2)>(4x-3)^2.\end{cases}\end{array}\right.\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{4} \\ 52x^2 - 24x < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{4} \\ 0 < x < \dfrac{6}{13} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Kết hợp điều kiện thu được tập nghiệm $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$.

b) Điều kiện $4x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{4}$.

Biến đổi phương trình

$$4x^2 + 4x + 10 = 2(4x-1)\sqrt{x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2+3) + 4x - 2 = 2(4x-1)\sqrt{x^2+3}.$$

Đặt $2\sqrt{x^2+3} = t$ $(t \geq 2\sqrt{3})$. Khi đó phương trình (1) có dạng

$$t^2 - (4x-1)t + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (loại)} \\ t = 4x - 2. \end{array}\right.$$

Với $t = 4x - 2 \Rightarrow 2x - 1 = \sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 3x^2 - 4x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{2+\sqrt{10}}{3}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2+\sqrt{10}}{3}$.

c) Điều kiện: $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ 3 + 2y - y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 3. \end{cases}$

Biến đổi phương trình đầu của hệ, ta có

$$(x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y$$

$$\Leftrightarrow (x+1-y)\left[(x+1)^2 + y^2 + (x+1)y + 3\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + 1 \\ (x+1)^2 + y^2 + (x+1)y + 3 = 0. \end{array}\right.$$

⟐ Với $y = x + 1$ thay vào phương trình thứ hai ta có

$$\sqrt{4-x^2} = 2 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{2}{3} \\ 10x^2 - 12x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{2}{3} \\ x = 0 \text{ (nhận)} \vee x = \dfrac{6}{5} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x, y) = (0, 1)$.

- Với $(x+1)^2 + y^2 + (x+1)y + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x+1+\dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} + 3 = 0$ (Vô nghiệm).

**Bài 4** *(1 điểm)* Chứng minh rằng trong mọi tam giác $ABC$ ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$.

**Lời giải.**

- Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cdot\cos BAC = AB\cdot AC\cdot\cos BAC$. (1)
- Theo định lí cosin trong tam giác $ABC$ ta có
$$\cos BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}. \quad (2)$$
- Thế (2) vào (1) suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 5** *(5 điểm)*

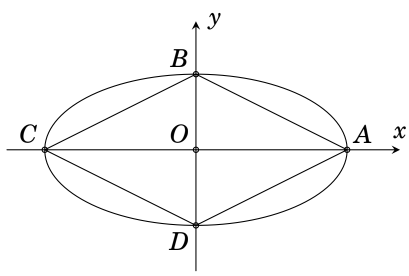
a) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình thoi $ABCD$ có bốn đỉnh trùng với các đỉnh của một elip, bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi bằng $\sqrt{2}$. Viết phương trình chính tắc của elip biết tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip bằng $\dfrac{1}{2}$.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $d_1\colon 2x - y - 1 = 0$, $d_2\colon 2x + y - 3 = 0$ cắt nhau tại $I$, điểm $A$ thuộc $D_1$, $A$ có hoành độ dương khác 1. Lập phương trình đường thẳng $(\Delta)$ đi qua $A$, cắt $d_2$ tại $B$ sao cho diện tích tam giác $IAB$ bằng 6 và $IB = 3IA$.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho điểm $J\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{13}{2}\right)$, đường thẳng $d\colon x + y - 1 = 0$ và đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$. Gọi $M$ là điểm thuộc đường thẳng $d$ và nằm ngoài đường tròn $(C)$. Từ $M$ kẻ các tiếp tuyến $MA$, $MB$ đến đường tròn $(C)$ ($A$, $B$ là các tiếp điểm). Gọi $(J)$ là đường tròn tâm $J$ và tiếp xúc với đường thẳng $AB$. Tìm tọa độ điểm $M$ sao cho đường tròn $(J)$ có chu vi lớn nhất.

**Lời giải.**

a)



Gọi $(E)$ có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$.
Theo giả thiết ta có $AC=2$, $BD=2b$. Tâm của hình thoi $ABCD$ là gốc tọa độ $O$ cũng là tâm đường tròn nội tiếp hình thoi. Ta có

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot AB\Leftrightarrow ab=\sqrt{2(a^2+b^2)}\Leftrightarrow a^2b^2=2(a^2+b^2)\qquad(*).$$

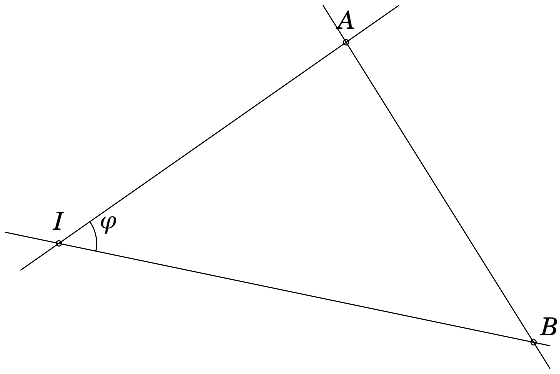
Mặt khác,

$$e=\frac{c}{a}=0{,}5\Leftrightarrow a=2c\Rightarrow b^2=a^2-c^2=\frac{3a^2}{4}\qquad(**).$$

Thay $(**)$ vào $(*)$ ta được $3a^4=14a^2\Rightarrow a^2=\dfrac{14}{3}$, (do $a\neq 0$), suy ra $b^2=\dfrac{7}{2}$.

Vậy phương trình chính tắc của $(E)$: $\dfrac{x^2}{\frac{14}{3}}+\dfrac{y^2}{\frac{7}{2}}=1$.

b)




Gọi $I=d_1\cap d_2$. Suy ra tọa độ giao điểm $I$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2x-y-1=0\\2x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1.\end{cases}$$

Vậy $I(1;1)$ Véc-tơ pháp tuyến của $d_1$ là $\vec{n}_1=(2;-1)$, véc-tơ pháp tuyến của $d_2$ là $\vec{n}_2=(2;1)$. Gọi $\varphi$ là góc của $d_1$ và $d_2$ thì

$$\cos\varphi=\frac{|4-1|}{5}=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin\varphi=\frac{4}{5}\Rightarrow S_{IAB}=\frac{1}{2}\cdot IA\cdot 3IA\cdot\frac{4}{5}=\frac{6IA^2}{5}.$$

Theo giả thiết ta có $S_{IAB}=6\Rightarrow IA^2=5\Rightarrow IB^2=45$.
Do $A\in d_1$ nên $A(a;2a-1)$ với $a>0$, $a\neq 1$. Khi đó

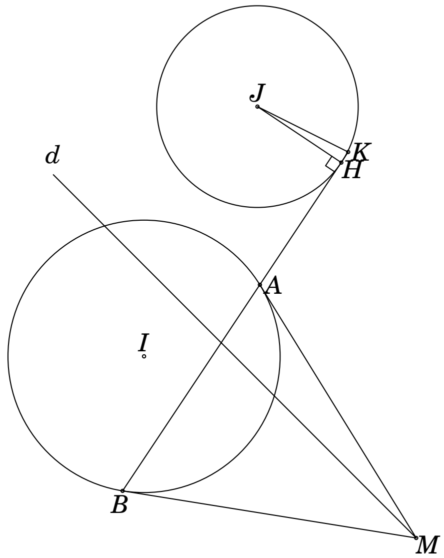
$$IA^2=5\Leftrightarrow(a-1)^2+(2a-2)^2=5\Leftrightarrow 5(a-1)^2=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\text{ (loại)}\\a=2\text{ (nhận)}.\end{array}\right.$$

Vậy $a=2$ nên $A(2;3)$.
Ta lại có $B\in d_2$ nên $B(a;3-2b)$. Khi đó,

$$IB^2=45\Leftrightarrow(b-1)^2+(2-2b)^2=45\Leftrightarrow 5(b-1)^2=45\Leftrightarrow(b-1)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=4\Rightarrow B(4;-5)\\b=-2\Rightarrow B(-2;7).\end{array}\right.$$

Vậy với $A(2;3)$ và $B(4;5)$, phương trình cần tìm là $4x+y-11=0$; với $A(2;3)$ và $B(-2;7)$, phương trình cần tìm là $x+y-5=0$.

c)




Đường tròn $(C)$ tiếp có tâm $I(-2;1)$, bán kính $R=3$. Do $M \in d$ nên $M(a;1-a)$. Khi đó, $M$ nằm ngoài đường tròn $(C)$ khi và chỉ khi

$$IM > R \Leftrightarrow IM^2 > 9 \Leftrightarrow 2a^2+4a-5>0 \qquad (*).$$

Ta có

$$MA^2 = MB^2 = MI^2 - IA^2 = 2a^2+4a-5.$$

Do $A$, $B$ thuộc đường tròn tâm $M$ bán kính $MA$ nên

$$(x-a)^2+(y+a-1)^2 = 2a^2+4a-5.$$

Do $A$, $B$ thuộc đường tròn $(C)$: $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ nên phương trình đường thẳng $AB$ là $(a+2)x-ay+3a-5=0$. Do $(J)$ tiếp xúc với $AB$ nên $(J)$ có bán kính là $\mathrm{d}(J,AB)$. Do đó, chu vi của $(J)$ lớn nhất khi và chỉ khi $\mathrm{d}(J,AB)$ lớn nhất. Mặt khác, do $AB$ luôn đi qua $K\left(\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right)$ nên $\mathrm{d}(J,AB)$ lớn nhất khi $K$ là hình chiếu vuông góc của $J$ trên $AB$. Đường thẳng $AB$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{AB} = (a;a+2)$. Ta có

$$\overrightarrow{JK}\cdot\vec{AB} = 0 \Leftrightarrow a=2 \text{ (thỏa mãn } (*)).$$

Vậy $M(2;-1)$.

**Bài 6** *(2 điểm)* Cho ba số dương $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^6+b^6+1}+\sqrt{c^6+b^6+1}+\sqrt{a^6+c^6+1}$.

**Lời giải**. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$a^6+b^6+1 \ge 3\sqrt[3]{a^6b^6} = 3a^2b^2 \Rightarrow \sqrt{a^6+b^6+1} \ge \sqrt{3a^2b^2} = \sqrt{3}ab.$$
$$c^6+b^6+1 \ge 3\sqrt[3]{c^6b^6} = 3c^2b^2 \Rightarrow \sqrt{c^6+b^6+1} \ge \sqrt{3c^2b^2} = \sqrt{3}cb.$$
$$a^6+c^6+1 \ge 3\sqrt[3]{a^6c^6} = 3a^2c^2 \Rightarrow \sqrt{a^6+c^6+1} \ge \sqrt{3a^2c^2} = \sqrt{3}ac.$$

Cộng vế theo vế ta được

$$P=\sqrt{a^6+b^6+1}+\sqrt{c^6+b^6+1}+\sqrt{a^6+c^6+1} \ge \sqrt{3}(ab+bc+ca) = 3\sqrt{3}.$$

Vậy GTNN của $P$ bằng $3\sqrt{3}$. Dấu "=" khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

# Đề 32. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(2 điểm)*Giải bất phương trình $\dfrac{-x^3+12x-7}{x^2-x-2} \le \dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**.

$$\frac{-x^3+12x-7}{x^2-x-2} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-2x^3+24x-14-x^2+x+2}{x^2-x-2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2+x-12)(2x-1)}{x^2-x-2} \ge 0.$$

Đặt $f(x) = \dfrac{(x^2+x-12)(2x-1)}{x^2-x-2}$.

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-12$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-x-2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$S = [-4;-1) \cup \left[\dfrac{1}{2};2\right) \cup [3;+\infty)$.

**Bài 2** *(2 điểm)*Tìm các giá trị của tham số $m$ để phương trình $(m+1)x^2-2x+m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $2x_1^3-3x_1^2x_2+2x_2^3-3x_1x_2^2=2$.

**Lời giải**. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt nên

$$\begin{cases} m+1 \ne 0 \\ 1-(m+1)(m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \\ m \ne 1. \end{cases}$$

Khi đó $S = x_1+x_2 = \dfrac{2}{m+1}$, $P = x_1x_2 = \dfrac{m-1}{m+1}$.

$A = 2x_1^3-3x_1^2x_2+2x_2^3-3x_1x_2^2 = 2(x_1+x_2)^2-9x_1x_2(x_1+x_2) = 2S^3-9PS = 2.$

Nên ta có

$$2\left(\frac{2}{m+1}\right)^3 - 9\frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{2}{m+1} = 2 \Leftrightarrow \frac{16-18(m^2-1)}{(m+1)^3} = 2$$
$$\Leftrightarrow 16-18m^2+18 = 2m^3+6m^2+6m+2$$
$$\Leftrightarrow m^3+12m^2+3m-16=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{-13+\sqrt{105}}{2} \\ m=\dfrac{-13-\sqrt{105}}{2}. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện suy ra $m=1$ và $m = \dfrac{-13+\sqrt{105}}{2}$.

**Bài 3** (2 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-1)(y-1))xy-2)=6\\ x^2+y^2-2x-2y-3=0.\end{cases}$

**Lời giải**. Đặt $\begin{cases}u=x-1\\ v=y-1\end{cases}$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}uv(u+v)=6\\ u^2+v^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uv(u+v)=6\\ (u+v)^2-2uv=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3\\ uv=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases}\\ \begin{cases}u=1\\ v=2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Khi đó $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}\end{array}\right.$. Vậy phương trình có tập tập nghiệm $\{(x;y)\}=\{(3;2),(2;3)\}$.

**Bài 4** (6 điểm) Trong hệ tọa độ $Oxy$ cho điểm $A(1;-2)$, điểm $B(3;-1)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $2x-y+4=0$.

a) Viết phương trình đường tròn tâm $A$ tiếp xúc với đường thẳng $d$.

b) Tính chu vi và diện tích tam giác $ABO$.

c) Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua $B$ và tạo với $d$ một góc $45^\circ$.

d) Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=1$ sao cho $MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**.

a) Đường tròn tâm $A$ tiếp xúc với đường thẳng $d$ có bán kính là
$$R=d(A;d)=\frac{|2\cdot1+2+4|}{\sqrt5}=\frac{8}{\sqrt5}.$$
Phương trình đường tròn đó là $(x-1)^2+(y+2)^2=\dfrac{64}{5}$.

b) Ta có $OA=\sqrt5$, $OB=\sqrt{10}$, $AB=\sqrt5$.
Chu vi tam giác $OAB$ là $P=\sqrt{10}+2\sqrt5$.
Tam giác $OAB$ cân tại $A$. Gọi $K$ là trung điểm $OB$ ta có $K\left(\dfrac32;-\dfrac12\right)$ và $AK=\sqrt{\dfrac52}$.
Diện tích tam giác $OAB$ là $S=\dfrac12AK\cdot OB=\dfrac52$ (đvdt).
Lưu ý: Học sinh có thể tính theo công thức Hê-rông.

c) Gọi $\vec n=(a;b)$ là vec-tơ pháp tuyến của đường thẳng $\Delta$ $(a^2+b^2\neq0)$.
Đường thẳng $d$ có một vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n_1}=(2;-1)$.
Ta có $\cos45^\circ=\dfrac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt5}$. (1)
Giải (1) tìm được $a=3b$ hoặc $b=-3a$.
Với $a=3b$: Chọn $b=1$, $a=3$. Khi đó phương trình $\Delta$ là $3x+y-8=0$.
Với $b=-3a$: Chọn $a=1$, $b=-3$. Khi đó phương trình $\Delta$ là $x-3y-6=0$.

d) Đường tròn $(C)$ có tâm $J(2;1)$, bán kính bằng 1.
Gọi $I$ là trung điểm $AB$, ta có $I\left(2;-\dfrac{3}{2}\right)$ và $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.
Ta có
$$F=MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=2MI^2+IA^2+IB^2.$$
Nhận xét: $IA^2+IB^2$ không đổi. $IJ=\dfrac{5}{2}>1$ nên điểm $I$ nằm ngoài đường tròn $(C)$.
$F$ nhỏ nhất khi $MI$ nhỏ nhất, hay $M$, $I$, $J$ thẳng hàng và $M$ thuộc $(C)$ và nằm giữa $I$, $J$.
Khi đó $\overrightarrow{MI}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MJ}$. Từ đó tìm được $M(2;0)$.

**Bài 5** *(2 điểm)*Cho $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $F=\tan\alpha+\cot\alpha+\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$.

**Lời giải**. Ta có $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ nên $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\dfrac{4}{9}$.
Suy ra
$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=-\frac{9}{4},$$
$$\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-2=\frac{49}{16}.$$
Vậy $F=\dfrac{13}{16}$.

**Bài 6** *(2 điểm)*Giải bất phương trình $x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x^3+2x^2-4x}\right)$.

**Lời giải**. $x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x^3+2x^2-4x}\right)$. (1)

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}x\geq\sqrt{5}-1\\ -1-\sqrt{5}\leq x\leq 0.\end{array}\right.$

(1) $\Leftrightarrow x^2+2x+4+3x<4\sqrt{x(x^2+2x-4)}$.

- Trường hợp 1: $-1-\sqrt{5}\leq x\leq 0$.
  Khi đó $\begin{cases}x^2+2x-4\leq 0\\ 3x\leq 0\end{cases}$ (hai biểu thức không đồng thời bằng 0) nên
  $$x^2+2x-4+3x<0\leq 4\sqrt{x(x^2+2x-4)}.$$
  Vậy $-1-\sqrt{5}\leq x\leq 0$ thỏa mãn bất phương trình.
- Trường hợp 2: $x\geq -1+\sqrt{5}$.
  Lúc này $x^2+2x-4\geq 0$.
  Đặt $a=\sqrt{x^2+2x-4}\geq 0$, $b=\sqrt{x}\geq 0$. Khi đó
  $$a^2+3b^2<4ab$$
  $$\Leftrightarrow (a-b)(a-3b)<0$$
  $$\Leftrightarrow b<a<3b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{x^2+2x-4} < 3\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-4>0 \\ x^2-7x-4<0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{17}}{2} < x < \frac{7+\sqrt{65}}{2}.$$

Vậy $S = \left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}; \dfrac{7+\sqrt{65}}{2}\right) \cup \left[-1-\sqrt{5}; 0\right]$.

**Bài 7** *(2.0 điểm)* Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2x^2+4y^2}{xy} = \dfrac{4\sqrt{(2x-3y)(x+y)}}{\sqrt{xy}} - 1 \\ \sqrt{2(x+y+3)} = \sqrt{x} + \sqrt{y+3}. \end{cases}$

**Lời giải**. Điều kiện $\begin{cases} (2x-3y)(x+y) \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

Ta có

$$\frac{2x^2+4y^2}{xy} = \frac{4\sqrt{(2x-3y)(x+y)}}{\sqrt{xy}} - 1$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+4y^2+xy = 4\sqrt{(2x-3y)(x+y)xy}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-3xy+4y^2+4xy-2\sqrt{\left(2x^2-3xy\right)\left(4xy+4y^2\right)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3xy} = \sqrt{4xy+4y^2}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-3xy = 4xy+4y^2$$
$$\Leftrightarrow (x-4y)(2x+y) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4y \\ 2x+y = 0 \text{ (loại vì } x,\ y>0). \end{array}\right.$$

Ta có

$$\sqrt{2(x+y+3)} = \sqrt{x} + \sqrt{y+3}$$
$$\Leftrightarrow x+y+3-2\sqrt{x(y+3)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y+3}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = y+3.$$

Khi đó ta có $\begin{cases} x = 4y \\ x = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$. Thử lại thỏa mãn.
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(4; 1)$.

**Bài 8** *(2 điểm)* Cho ba số dương $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $a+b+c \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{1}{ab(a+b)} + \dfrac{1}{bc(b+c)} + \dfrac{1}{ca(c+a)}$.

**Lời giải**. Ta có $1 \geq a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq \dfrac{1}{27}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{ab(a+b)}+\frac{1}{bc(b+c)}+\frac{1}{ca(c+a)} &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc(ab+bc)(bc+ca)(ca+ab)}}\\ &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}\cdot\frac{ab+bc+bc+ca+ab}{3}}}\\ &= \frac{27}{2(ab+bc+ca)}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}M &\geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{27}{2(ab+bc+ca)}\\ &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{23}{2(ab+bc+ca)}\\ &\geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}+\frac{3\cdot 23}{2(a+b+c)^2}\\ &\geq \frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{69}{2(a+b+c)^2}\\ &\geq 9+\frac{69}{2}=\frac{87}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $M \geq \frac{87}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

## Đề 33. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(1.5 điểm)*

a) Xác định tính chẵn - lẻ của hàm số $y=f(x)=\frac{x}{\sqrt{10-x}}-\frac{x}{\sqrt{10+x}}$.

b) Cho các nửa khoảng $A=(a;a+1]$, $B=[b;b+2)$. Đặt $C=A\cup B$. Với điều kiện nào của các số thực $a$ và $b$ thì $C$ là một đoạn? Tính độ dài của đoạn $C$ khi đó.

**Lời giải**.

a) Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}=(-10;10)$ là tập đối xứng qua điểm $x=0$. Ta có

$$\begin{aligned}f(-x) &= \frac{-x}{\sqrt{10-(-x)}}-\frac{-x}{\sqrt{10+(-x)}}=\frac{-x}{\sqrt{10+x}}+\frac{x}{\sqrt{10-x}}\\ &= \frac{x}{\sqrt{10-x}}-\frac{x}{\sqrt{10+x}}=f(x),\ \forall x\in\mathcal{D}.\end{aligned}$$

Vậy $y=f(x)$ là hàm số chẵn.

b) Ta có $C$ là một đoạn khi và chỉ khi

$$b\leq a<b+2\leq a+1 \Leftrightarrow b+1\leq a<b+2.$$

Khi đó $C=[b;a+1]$ là một đoạn có độ dài bằng $a-b+1$.

**Bài 2** *(2 điểm)*

a) Tìm $m$ để phương trình $|x^2-1|=m^4-m^2+1$ có bốn nghiệm phân biệt.

b) Giải và biện luận theo tham số $m$ bất phương trình $\frac{(m-1)x+2}{x-2}<m+1$.

**Lời giải.**

a) Ta có $m^4 - m^2 + 1 > 0$ với mọi $m \in \mathbb{R}$. $(*)$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{ll} x^2 = m^4 - m^2 + 2 & (1) \\ x^2 = m^2 - m^4 = m^2(1 - m^2). & (2) \end{array}\right.$$

Vì $(*)$ nên $m^4 - m^2 + 1 + 1 > 0$ với mọi $m \in \mathbb{R}$, do đó phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt và hai nghiệm này khác 2 nghiệm của phương trình (1). Điều này tương đương với

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m^2 > 0 \\ m^4 - m^2 + 2 \neq m^2 - m^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \in (-1;1) \\ m^4 - m^2 + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1;1) \setminus \{0\}.$$

Vậy $m \in (-1;1) \setminus \{0\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{(m+1)(x-2) + (1-m)x - 2}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x - (m+2)}{x-2} > 0.$$

- Nếu $m = 0$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq 2$.
- Nếu $m > 0$ thì $m + 2 > 2$, do đó tập nghiệm là $S = (-\infty; 2) \cup (m+2; +\infty)$.
- Nếu $m < 0$ thì $m + 2 < 2$, do đó tập nghiệm là $S = (-\infty; m+2) \cup (2; +\infty)$.

**Bài 3** *(2.5 điểm)*

a) Giải phương trình $x^2 - 7x + 8 = 2\sqrt{x}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{7x + y} + \sqrt{2x + y} = 5 \\ x - y + \sqrt{2x + y} = 1. \end{cases}$

**Lời giải.**

a) Điều kiện xác định $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & x^2 - 1 - 7x + 7 + 2 - 2\sqrt{x} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\sqrt{x} - 1)(x\sqrt{x} + x - 6\sqrt{x} - 8) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\sqrt{x} - 1)(x\sqrt{x} + 8 + x - 6\sqrt{x} - 16) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 4 + \sqrt{x} - 8) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)(x - \sqrt{x} - 4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sqrt{x - 1} = 0 \\ x - \sqrt{x} - 4 = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{9 + \sqrt{17}}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $S=\left\{1;\dfrac{9+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

b) Điều kiện $\begin{cases}7x+y\ge 0\\ 2x+y\ge 0.\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{7x+y}\ge 0\\ v=\sqrt{2x+y}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2=7x+y\\ v^2=2x+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u^2-v^2}{5}\\ y=\dfrac{7v^2-2u^2}{5}.\end{cases}$

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned}&\begin{cases}u+v=5\\ u^2-v^2-7v^2+2u^2+5v=5\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}u+v=5\\ 3u^2-8v^2+5v-5=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}u=5-v\\ 3(5-v)^2-8v^2+5v-5\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}u=5-v\\ -5v^2-25v+70=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=3\\ v=2\end{cases}\text{(nhận)}\\ \begin{cases}u=12\\ v=-7\end{cases}\text{(loại)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Do đó hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases}7x+y=9\\ 2x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2.\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(1;2)$.

**Bài 4** *(3 điểm)*

a) Cho tam giác $ABC$ có $AB=c$, $AC=b$ và $\widehat{BAC}=60^\circ$. Các điểm $M$, $N$ được xác định bởi $\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NB}=-2\overrightarrow{NA}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa $b$ và $c$ để $AM$ và $CN$ vuông góc với nhau.

b) Cho tam giác $ABC$. Trên các cạnh $BC$, $CA$ và $AB$ của tam giác đó, lần lượt lấy các điểm $A'$, $B'$ và $C'$. Gọi $S_a$, $S_b$, $S_c$ và $S$ tương ứng là diện tích của các tam giác $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ và $ABC$. Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{S_a}+\sqrt{S_b}+\sqrt{S_c}\le\dfrac{3}{2}\sqrt{S}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

**Lời giải.**

a) Ta có $\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=-2\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Tương tự ta cũng có $3\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

$$\begin{aligned}
& AM \perp CN \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & 2AB^2-3AC^2-5\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \\
\Leftrightarrow\ & 2c^2-3b^2-\frac{5}{2}bc=0 \\
\Leftrightarrow\ & 4c^2-6b^2-5bc=0.
\end{aligned}$$

b) Ta có $2S_a = AC'\cdot AB'\sin A$, $2S = AB\cdot AC\sin A$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{\frac{S_a}{S}}=\sqrt{\frac{AC'}{AB}\cdot\frac{AB'}{AC}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{AC'}{AB}+\frac{AB'}{AC}\right).$$

Tương tự ta cũng có $\sqrt{\frac{S_b}{S}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{BA'}{BC}+\frac{BC'}{BA}\right)$ và $\sqrt{\frac{S_c}{S}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{CB'}{CA}+\frac{CA'}{CB}\right)$.

Do đó

$$\sqrt{\frac{S_a}{S}}+\sqrt{\frac{S_b}{S}}+\sqrt{\frac{S_c}{S}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{AC'}{AB}+\frac{AB'}{AC}+\frac{BA'}{BC}+\frac{BC'}{BA}+\frac{CB'}{CA}+\frac{CA'}{CB}\right)=\frac{3}{2}\,(\text{đpcm}).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{AC'}{AB}=\dfrac{AB'}{AC}\\ \dfrac{BA'}{BC}=\dfrac{BC'}{BA}\\ \dfrac{CB'}{CA}=\dfrac{CA'}{CB}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C'B'\parallel BC\\ A'C'\parallel CA\\ B'A'\parallel AB\end{cases}\Leftrightarrow A', B', C'$ là trung điểm của $BC$, $CA$, $AB$.

**Bài 5** *(1 điểm)* Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường tròn tâm $O$ bán kính $R$ ($R>0$, $R$ không đổi). Gọi $A$ và $B$ lần lượt là các điểm di động trên trục hoành và trục tung sao cho đường thẳng $AB$ luôn tiếp xúc với đường tròn đó. Hãy xác định tọa độ của các điểm $A$, $B$ để tam giác $OAB$ có diện tích nhỏ nhất.

**Lời giải**. Dựa vào tính đối xứng, ta giả sử $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a>0$, $b>0$ (1).

Suy ra $S_{OAB}=\dfrac{ab}{2}$.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{R^2} \quad (2) \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{R^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \\
\Rightarrow\ & a^2b^2=R^2(a^2+b^2)\ge 2R^2ab \\
\Rightarrow\ & S_{OAB}=\frac{ab}{2}\ge R^2\,(\text{không đổi})
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=R\sqrt{2}$.

Vậy có 4 cặp điểm $A\left(\pm R\sqrt{2};0\right)$, $B\left(0;\pm R\sqrt{2}\right)$.

# Đề 34. ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** Giải phương trình sau trên tập số thực $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt[3]{1-x}=1$.

**Lời giải**. Điều kiện xác định $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\le x\le 1$. (1)

Đặt $u=\sqrt{1-x^2}, v=\sqrt{x^2+x-1}, t=\sqrt[3]{1-x}$ ta được $\begin{cases}u,v,t\ge 0\\ u+v+t=1\\ u^2+v^2+t^3=1\end{cases}$. (2)

Từ (2) suy ra $0\le u,v,t\le 1\Rightarrow 1=u^2+v^2+t^3\le u+v+t=1$. Do đó

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}u,v,t\ge 0\\ u+v+t=1\\ u^2=u\\ v^2=v\\ t^3=t\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=1\\ v=t=0\end{cases}\\ \begin{cases}v=1\\ u=t=0\end{cases}\\ \begin{cases}t=1\\ u=v=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Thay lại biến $x$ ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

**Bài 2** Cho tam giác $ABC$. Gọi $(O_1)$ là đường tròn đi qua $B$ và tiếp xúc với $AC$ tại $A$; $(O_2)$ là đường tròn đi qua $C$ và tiếp xúc với $AB$ tại $A$. $P$ là giao điểm thứ hai của $(O_1)$ và $(O_2)$; $K$, $L$ theo thứ tự là giao điểm thứ hai của $(O_1)$, $(O_2)$ với đoạn thẳng $BC$. Gọi $(S)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác $PKL$.

a) Chứng minh rằng $AK$, $AL$ tiếp xúc với $(S)$.

b) Gọi $Q$ là giao điểm thứ hai của $(S)$ và $AP$; $E$ là giao điểm của $QK$ và $AB$; $F$ là giao điểm của $QL$ và $AC$. Chứng minh rằng các điểm $A$, $K$, $L$, $S$, $E$, $F$ cùng thuộc một đường tròn. (Chú ý. Ta kí hiệu $(X)$ là đường tròn có tâm $X$).

**Lời giải**.

a) Tứ giác $ABKP$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ABP}=\widehat{AKP}$. $AC$ là tiếp tuyến của $(O_1)$ nên $\widehat{ABP}=\widehat{PAC}$. Suy ra $\widehat{AKP}=\widehat{PAC}$. (1)
Tứ giác $APLC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{PAC}=\widehat{PLK}$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $AK$ là tiếp tuyến của đường tròn $(S)$.
Tương tự, ta chứng minh $AL$ là cũng là tiếp tuyến của đường tròn $(S)$.

b) **Cách 1** b) Cách 1. Dễ thấy $AKSL$ là tứ giác nội tiếp. Ta chứng minh tứ giác $AEKL$ là tứ giác nội tiếp. Thật vậy, Ta có $\widehat{BEQ}=\widehat{EAQ}+\widehat{EQA}$. (3)
Tứ giác $KPLQ$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{KQP}=\widehat{PLK}$. (4)
$AB$ là tiếp tuyến với $(O_2)$ nên $\widehat{EAQ}=\widehat{PLA}$. (5)
Từ (3), (4) và (5) nên $\widehat{BEQ}=\widehat{ALK}$ (đpcm).
**Cách 2**. Ta có $\widehat{KLQ}=\widehat{KPQ}$ và $\widehat{KPQ}=\widehat{ABK}$ nên $\widehat{ABK}=\widehat{KLQ}$, suy ra $QL/\!/AB$.
Do đó $\widehat{BEK}=\widehat{KQL}$.
Mà $\widehat{KQL}=\widehat{ALK}$ (do $AL$ là tiếp tuyến với $(S)$) nên $\widehat{BEK}=\widehat{ALK}$.

**Bài 3** Cho đa thức $f(x) = x^4 + x^3 + mx^2 + nx + p$, trong đó $m$, $n$, $p$ là các số nguyên đôi một phân biệt, khác không, sao cho $f(m) = m^4 + m^3$ và $f(n) = n^4 + n^3$. Tìm $m$, $n$, $p$.

**Lời giải**. Xét đa thức $g(x) = f(x) - x^4 - x^3 = mx^2 + nx + p$. Theo giả thiết $g(m) = g(n) = 0$. Do $g(x)$ là đa thức bậc 2 nên $g(x) = a(x-m)(x-n)$.
Từ đó ta có $mx^2 + nx + p = a(x-m)(x-n)$.
Đồng nhất các hệ số cho ta $p = amn$, $n = -a(m+n)$ và $m = a$. Từ đó ta được $n = -m(m+n)$ hay $(m+1)n = -m^2$. Từ đây ta được $m+1 \mid 1$ hay $m+1 = \pm 1$. suy ra $m = -2$.
Từ đó $n = 4$ và $p = 16$. Vậy $m = -2$, $n = 4$, $p = 16$.
*Chú ý. Học sinh có thể thay trực tiếp $m,n$ rồi giải hệ phương trình nghiệm nguyên để tìm $m,n,p$.*

**Bài 4** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a,b)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

i) $a + b^2$ là lũy thừa của một số nguyên tố;

ii) $a^2 + b$ chia hết cho $a + b^2$.

**Lời giải**. Đặt $a + b^2 = p^m$, $p$ nguyên tố và $m$ nguyên dương.
Ta viết $\dfrac{a^2+b}{a+b^2} = a - b^2 + \dfrac{b^4+b}{a+b^2}$, suy ra $p^m \mid \left(b^4+b\right) = b\left(b^3+1\right)$.
Từ $\left(b, b^3+1\right) = 1$, và $b < 1 + b \le a + b^2 = p^m$ nên ta suy ra $p^m \mid b^3 + 1$.
Ta có $b^3 + 1 = (b+1)\left(b^2 - b + 1\right)$ và $\left(b+1, b^2-b+1\right) \mid 3$.

TH 1. Nếu $\left(b+1, b^2-b+1\right) = 1$ thì $p^m \mid b+1$ hoặc $p^m \mid b^2-b+1$. Từ $p^m = b^2+a > b^2-b+1$ nên ta chỉ có $p^m \mid b+1$ và suy ta $p^m = a + b^2 = b + 1$. Do đó $a = b = 1$.

TH 2. Nếu $\left(b+1, b^2-b+1\right) = 3$ suy ra $p = 3$.
Xét $m = 1$, không có $(a,b)$.
Xét $m = 2, (a,b) = (5,2)$.
Xét $m \ge 3$, khi đó $3 \mid b+1$ hoặc $3 \mid b^2 - b + 1$ và $3^{m-1}$ là ước của phần tử còn lại.
Từ $b + 1 < \sqrt{b^2+a} + 1 < 3^{m-1}$, vì vậy $3^{m-1} \mid b^2 - b + 1$. Do đó $b^2 - b + 1 \equiv 0 \pmod 9$, mâu thuẫn.

Vậy $(a,b) \in \{(1,1);(5,2)\}$.

**Bài 5** Cho tập $S = \{1,2,3,\ldots,2025\}$. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất $n$ sao cho: Với mọi tập con $T$ của $S$ gồm $n$ phần tử, tồn tại hai phần tử phân biệt $u,v \in T$ sao cho $u + v = 20$.

**Lời giải**. Giả sử $n$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn đề. Xét tập

$$T = \{1,2,\ldots,10\} \cup \{20,21,\ldots,2025\}.$$

Ta thấy, với mọi $u,v \in T$ phân biệt thì: Nếu $u,v \in \{20,21,\ldots,2025\}$ thì $u + v \ge 41 > 20$. Vậy không có $u,v$ thỏa mãn $u + v = 20$.
Nếu $u,v \in \{1,2,3,\ldots,10\}$ thì $u + v \le 19 < 20$. Vậy không có $u,v$ thỏa mãn $u + v = 20$.
Nếu $u \in \{1,2,3,\ldots,10\}, v \in \{20,21,\ldots,2025\}$ thì $u + v \ge 21 > 20$. Vậy không có $u,v$ thỏa

mãn $u+v=20$. Vì $|T|=2016$ nên $n \geq 2017$.
Mặt khác, với mọi tập $T \subset S$, $|T|=2017$, xét 9 cặp số sau $(1;19)$, $(2;18)$, $\ldots$, $(9;11)$.
Nếu một trong các cặp trên thuộc $T$ thì đó là cặp $(u;v)$ thỏa mãn $u+v=20$.
Nếu không có cặp nào thuộc $T$ thì $|T| \leq 2025-9=2016$, vô lí.
Vậy với mọi tập $T \subset S, |T|=2017$ luôn tồn tại $u,v \in T$ thỏa mãn $u+v=20$.
Kết luận giá trị nhỏ nhất của $n$ là 2017.

## Đề 35. ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** Cho hàm số $y=x^2-3x+2$ và hàm số $y=-x+m$. Tìm $m$ để đồ thị các hàm số đó cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ đồng thời khoảng cách từ trung điểm $I$ của đoạn thẳng $AB$ đến các trục tọa độ bằng nhau.

**Lời giải**. Yêu cầu bài toán $\Rightarrow$ phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$x^2-3x+2=-x+m \text{ hay } x^2-2x+2-m=0 \ (^*) \text{ có } \Delta'>0 \Leftrightarrow m>1.$$

Gọi $x_A; x_B$ là 2 nghiệm của $(*)$.
$I$ là trung điểm $AB$ ta có $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=1$; $y_I=-x_I+m=m-1$.
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow |y_I|=|x_I| \Leftrightarrow |m-1|=1 \Leftrightarrow m=2; m=0$.
Kết hợp ĐK, kết luận $m=2$.

**Bài 2**

a) Giải phương trình sau trên $\mathbb{R}$: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{9-x}$.

b) Giải bất phương trình sau $\dfrac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2|$.

**Lời giải**.

a) Điều kiện: $1 \leq x \leq 9$. Ta có $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{9-x}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow 3x+1=8+2\sqrt{x-1}\sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{3} \\ 9x^2-42x+49=4(x-1)(9-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{3} \\ 13x^2-82x+85=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

b) Điều kiện: $|x-5|-3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 8. \end{cases}$

TH 1. Xét $x<2$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{9}{5-x-3} \geq 2-x \Leftrightarrow \frac{9}{2-x} \geq 2-x$$

$$\Leftrightarrow (2-x)^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x-2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5.$$

Vậy $-1 \leq x < 2$ là nghiệm.

TH 2. Xét $2 < x < 5$ ta có $\begin{aligned}&(1) \Leftrightarrow \dfrac{9}{5-x-3} \geq x-2 \Leftrightarrow \dfrac{9}{2-x} \geq x-2\\ &\Leftrightarrow -(x-2)^2 \geq 9 \text{ (Bpt vô nghiệm)}\end{aligned}$

TH 3. Xét $5 < x \neq 8$ ta có $\begin{aligned}&(1) \Leftrightarrow \dfrac{9}{x-8} \geq x-2 \Leftrightarrow \dfrac{9}{x-8}-(x-2) \geq 0\\ &\Leftrightarrow \dfrac{9-(x-8)(x-2)}{x-8} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+10x-7}{x-8} \geq 0\\ &\Leftrightarrow (x-8)\left(x^2-10x+7\right) \leq 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 5-3\sqrt{2}\\ 8 < x \leq 5+3\sqrt{2}\end{array}\right.\end{aligned}$

Kết hợp với miền $x$ đang xét ta có $8 < x \leq 5+3\sqrt{2}$ là nghiệm của bất phương trình.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-1;2) \cup (8;5+3\sqrt{2}]$.

**Bài 3** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 (1)\\ 4x^2-y^2+x+4 = \sqrt{2x+y}+\sqrt{x+4y} (2).\end{cases}$

**Lời giải**. Điều kiện $2x+y \geq 0$, $x+4y \geq 0$. Từ (1) ta được $y = x+1$ hoặc $y = 2x+1$.

TH 1. Với $y = x+1$, thay vào (2) ta được $3x^2-x+3 = \sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+(x+1-\sqrt{3x+1})+(x+2-\sqrt{5x+4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left(3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (x;y) = \{(0;1);(1;2)\}$$

TH 2. Với $y = 2x+1$, thay vào (2) ta được

$$3-3x = \sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}$$

$$\Leftrightarrow 3x+(\sqrt{4x+1}-1)+(\sqrt{9x+4}-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(3+\frac{4}{\sqrt{4x+1}+1}+\frac{9}{\sqrt{9x+4}+2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Khi đó ta được nghiệm $(x;y)$ là $(0;1)$.

Đối chiếu điều kiện bài toán ta được nghiệm $(x;y)$ của hệ đã cho là $(0;1)$ và $(1;2)$.

**Bài 4**

a) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho tam giác $ABC$ có $B(1;2)$. Đường thẳng $\Delta$ là đường phân giác trong của góc $A$ có phương trình $2x+y-1=0$, khoảng cách từ $C$ đến $\Delta$ gấp 3 lần khoảng cách từ $B$ đến $\Delta$. Tìm tọa độ của $A$ và $C$ biết $C$ nằm trên trục tung.

b) Cho tam giác $ABC$ vuông ở $A$; $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$. Xác định điểm $I$

thỏa mãn hệ thức $b^2\overrightarrow{IB}+c^2\overrightarrow{IC}-2a^2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{0}$. Tìm điểm $M$ sao cho biểu thức $(b^2MB^2+c^2MC^2-2a^2MA^2)$ đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải.**

a) Ta có $d(B;\Delta)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$; $C(0;y_0)$; $d(C;\Delta)=\dfrac{|y_0-1|}{\sqrt{5}}$, theo bài ra ta có $\dfrac{|y_0-1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{9}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow$ $y_0=10; y_0=-8$.

$C$ khác phía $B$ đối với $\Delta$ suy ra $C(0;-8)$.

Gọi $B'(a;b)$ là điểm đối xứng với $B$ qua $\Delta$ thì $B'$ nằm trên $AC$.

Do $\overrightarrow{BB'}\perp\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-2)$ nên ta có $a-2b+3=0$.

Trung điểm $I$ của $BB'$ phải thuộc $\Delta$ nên có $2a+b+2=0$.

Từ đó ta có $a=-\dfrac{7}{5}$; $b=\dfrac{4}{5}$.

Theo định lý Ta-let suy ra $\overrightarrow{CA}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CB'}$.

Gọi $A(x;y)$; $\overrightarrow{CA}=(x;y+8)$; $\overrightarrow{CB'}=\left(-\dfrac{7}{5};\dfrac{44}{5}\right)$.

Từ đó suy ra $A\left(\dfrac{-21}{10};\dfrac{26}{5}\right)$; $C(0;-8)$.

b) Kẻ đường cao $AH$, ta có $b^2=a\cdot CH$; $c^2=a\cdot BH$ nên $b^2\cdot BH=c^2\cdot CH$. Do đó $b^2\cdot\overrightarrow{BH}+c^2\cdot\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{0}$.

Suy ra $b^2\cdot\overrightarrow{IB}+c^2\cdot\overrightarrow{IC}=b^2\cdot\overrightarrow{IH}+c^2\cdot\overrightarrow{IH}=a^2\cdot\overrightarrow{IH}$.

Kết hợp giả thiết suy ra $2a^2\cdot\overrightarrow{IA}=a^2\cdot\overrightarrow{IH}$ hay $2\cdot\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IH}$.

Do đó điểm $I$ thỏa mãn giả thiết là $I$ thỏa mãn $A$ là trung điểm $IH$.

Với $x, y, z$ tùy ý thỏa mãn $x\cdot\overrightarrow{IA}+y\cdot\overrightarrow{IB}+z\cdot\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ $(*)$ bình phương vô hướng 2 vế $(*)$, chú ý rằng $2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=IA^2+IB^2-AB^2$ ta có

$$\left(x\cdot IA^2+y\cdot IB^2+z\cdot IC^2\right)(x+y+z)=xyc^2+xzb^2+yza^2.$$

Từ đó có $\left(-2a^2\cdot IA^2+b^2\cdot IB^2+c^2\cdot IC^2\right)=3b^2c^2$.

Mặt khác $xMA^2=x\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2=x\left(IM^2+IA^2-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IM}\right)$.

Tương tự cho $yMB^2$; $zMC^2$ rồi cộng các đẳng thức đó lại ta có

$$xMA^2+yMB^2+zMC^2=(x+y+z)IM^2+xIA^2+yIB^2+zIC^2.$$

Thay số có

$$-2a^2MA^2+b^2MB^2+c^2MC^2=-a^2IM^2+3b^2c^2\le 3b^2c^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $M$ trùng $I$.

## Bài 5

a) Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào $a$.

$$E=\sqrt{\sin^4 a+4\cos^2 a}+\sqrt{\cos^4 a+4\sin^2 a}.$$

b) Cho tam giác $ABC$ và điểm $K$ thuộc cạnh $BC$ sao cho $KB=2KC$, $L$ là hình chiếu của $B$ trên $AK$, $F$ là trung điểm của $BC$, biết rằng $\widehat{KAB}=2\widehat{KAC}$. Chứng minh rằng $FL$ vuông góc với $AC$.

**Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned}E &= \sqrt{\sin^4 a + 4\left(1-\sin^2 a\right)} + \sqrt{\cos^4 a + 4\left(1-\cos^2 a\right)}\\ &= \sqrt{\left(\sin^2 a - 2\right)^2} + \sqrt{\left(\cos^2 a - 2\right)^2}\\ &= \left(2-\sin^2 a\right) + \left(2-\cos^2 a\right) = 3.\end{aligned}$$

b) Đặt $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\widehat{KAC} = \alpha$. Khi đó $\widehat{KAB} = 2\alpha$; $\widehat{BAC} = 3\alpha$. Áp dụng định lí sin cho tam giác $ABK$ và $ACK$, ta được

$$BK\sin 2\alpha = AK\sin B; CK\sin\alpha = AK\sin C.$$

Do $BK = 2CK$, nên từ các đẳng thức trên ta có: $\cos\alpha = \sin B\sin C$. (*) Lại có

$$FA^2 - FC^2 = \left(b^2 + c^2 2 - a^2 4\right) - a^2 4 = b^2 + c^2 - a^2 2 = bc\cdot\cos A = bc\cos 3\alpha \ (1)$$

$$LC^2 = LA^2 + b^2 - 2b\cdot LA\cdot\cos\alpha = LA^2 + b^2 - 2bc\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\Rightarrow LA^2 - LC^2 = 2bc\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha - b^2 = bc(\cos\alpha + \cos 3\alpha) - b^2$$

$$= \left(bc\cos\alpha - b^2\right) + bc\cos 3\alpha.(**)$$

Thay $(^*)$ vào $(^{**})$, ta được $LA^2 - LC^2 = bc\cos 3\alpha.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $FA^2 - FC^2 = LA^2 - LC^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{FL}\cdot\overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow FL \perp CA$.

**Bài 6** Cho $x, y, z$ là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z = xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \le xyz.$$

**Lời giải**. Giả thiết suy ra: $1xy + 1yz + 1zx = 1$. Ta Có:

$$\sqrt{1+x^2 x} = \sqrt{1x^2 + 1xy + 1yz + 1zx} = \sqrt{(1x+1y)(1x+1z)} \le 12(2x+1y+1z);"=" \Leftrightarrow y = z$$

Viết hai BĐT tương tự rồi cộng lại ta được

$$1+\sqrt{1+x^2 x} + 1 + \sqrt{1+y^2 y} + 1 + \sqrt{1+z^2 z} \le 3(1x+1y+1z);"=" \Leftrightarrow x = y = z.$$

Ta sẽ CM: $3(1x+1y+1z) \le xyz \Leftrightarrow 3(xy+yz+zx) \le (xyz)^2 = (x+y+z)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \ge 0$.

Điều này luôn đúng. Dấu bằng có $khi$ và chỉ $khix = y = z$.

Vậy (1) được $CM$, dấu bằng có khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$.

## Đề 36. ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} y^4 - 2xy^2 + 7y^2 = -x^2 + 7x + 8\\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y^2+1} = x^3 + x^2 - 4y^2 + 3.\end{cases}$

**Lời giải**. Xét hệ phương trình sau $\begin{cases} y^4 - 2xy^2 + 7y^2 = -x^2 + 7x + 8 & (1)\\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y^2+1} = x^3 + x^2 - 4y^2 + 3. & (2)\end{cases}$

Điều kiện xác định $x \le 3$.

Ta có phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(y^2 - x\right)^2 + 7\left(y^2 - x\right) - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = x+1\\ y^2 = x-8\end{array}\right.$ Vì $x \le 3$ nên $x - 8 < 0$, do đó không thể xảy ra trường hợp $y^2 = x - 8$.

Vậy $y^2 = x + 1$.

Thay vào (2) ta có $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}=x^3+x^2-4x-1$ (điều kiện $x\geq -2$).

$\Leftrightarrow x^3+x^2-4x-4+2-\sqrt{x+2}+1-\sqrt{3-x}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x+1)-x-2\sqrt{x+2}+2+x-21+\sqrt{3-x}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[(x+2)(x+1)-1\sqrt{x+2}+2+11+\sqrt{3-x}\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[(x+2)(x+1)+13-1\sqrt{x+2}+2+11+\sqrt{3-x}-13\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[(x+2)(x+1)+x+13(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+2}+1)+x+13(\sqrt{3-x}+1)(\sqrt{3-x}+2)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)\left[(x+2)+13(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+2}+1)+13(\sqrt{3-x}+1)(\sqrt{3-x}+2)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0($ Điều kiện $x\geq -2)$

Từ đó ta thu được nghiệm của hệ đã cho là $(-1;0)$, $(2;\sqrt{3})$, $(2;-\sqrt{3})$.

**Bài 2** Cho đường tròn $(w_1)$ và $(w_2)$ cắt nhau tại $P$ và $Q$, một đường thẳng $d$ thay đổi đi qua $P$ cắt $(w_1)$ tại $A$ và các $(w_2)$ tại $B$ sao cho $P$ nằm giữa $A$ và $B$; $C$, $D$ là hai điểm cố định lần lượt thuộc $(w_1)$ và $(w_2)$ sao cho $P$ thuộc tia đối của tia $DC$. Tia $BD$ và đoạn $AC$ cắt nhau tại $X$, điểm $Y$ thuộc $(w_1)$ sao cho đường thẳng $PY$ song song với đường thẳng $BD$, điểm $Z$ thuộc $(w_2)$ sao cho đường thẳng $PZ$ song song với đường thẳng $AC$. Gọi $I$ và $J$ lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABQ$ và $CDQ$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng $IJ$ vuông góc với đường thẳng $XQ$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng $YZ$ luôn đi qua một điểm cố định khi $d$ thay đổi.

**Lời giải.**

a) Vì $ACQP$ và $PDQB$ là các tứ giác nội tiếp nên ta có
$\widehat{XAQ}=\widehat{CAQ}=\widehat{CPQ}=\widehat{DPQ}=\widehat{DBQ}=\widehat{XBQ}$ nên $AXQB$ nội tiếp. (1)
Vì $AXQB$ và $BPDQ$ là các tứ giác nội tiếp nên ta có
$\widehat{QXC}=\widehat{ABQ}=\widehat{PBQ}=\widehat{CDQ}$ nên tứ giác $XDQC$ nội tiếp. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $QX$ là trục thẳng phương của hai đường tròn $(ABQ)$ và $(CDQ)$ do đó $IJ\perp XQ$.

b) Ta sẽ chứng minh rằng đường thẳng $YZ$ đi qua điểm $Q$ cố định và đường thẳng này cũng đi qua điểm $X$.
Vì $XDQC$ nội tiếp nên $\widehat{DQX}=\widehat{DCX}=\widehat{PCA}$.
Từ $PZ/\!/AC$ nên $\widehat{PCA}=\widehat{CPZ}=\widehat{DPZ}$.
Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{DQX}=\widehat{DPZ}$.
Mặt khác $PDQZ$ nội tiếp nên $\widehat{DPZ}+\widehat{DQZ}=180^\circ$, do đó $\widehat{DQX}+\widehat{DPZ}=180^\circ$ hay $Z$, $Q$, $X$ thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta được $Y$, $Q$, $X$ thẳng hàng. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 3** Cho số nguyên tố $p$ và ba số nguyên dương $x$, $y$, $z$ thỏa mãn $x<y<z<p$. Chứng minh rằng nếu $x^3\equiv y^3\equiv z^3 \pmod p$ thì $x^2+y^2+z^2$ chia hết cho $x+y+z$.

**Lời giải**. Từ giả thiết ta có $y^3 - x^2 \equiv 0 \ (\mod p)$.

Suy ra $(y-x)\left(y^2+yx+x^2\right) \equiv 0 \ (\mod p)$. (1)

Ta có $y-xx$ là số nguyên dương bé hơn $p$ và $p$ là số nguyên tố nên $y-x$ và $p$ là nguyên tố cùng nhau.

Do đó (1) ta được $x^2+y^2+z^2 \equiv 0 \ (\mod p)$. (2)

Chứng minh tương tự ta cũng có: $y^2+yz+z^2 \equiv 0 \ (\mod p)$. (3)

Và $z^2+zx+x^2 \equiv 0 \ (\mod p)$. (4)

Từ (2) và (3) ta có: $z^2-x^2+yx-xy \equiv 0$ (modulo $p$).

Suy ra $(z-x)(x+y+z) \equiv 0 \ (\mod p)$.

Do đó $x+y+z$ chia hết cho $p$, mà $0<x+y+x<3p \Rightarrow x+y+z$ bằng $p$ hoặc $2p$. (5)

Sử dụng (2) ta có $(x+y)^2 \equiv xy \ (\mod p)$, kết hợp với $x+y \equiv -z$ (modulo $p$) ta được $z^2 \equiv xy$ (modulo p), thay trở lại (2) ta có $x^2+y^2+z^2 \equiv 0 \ (\mod p)$. (6)

Nếu $x+y+z=p$ thì (6) có ngay $x^2+y^2+z^2$ chia hết cho $x+y+z$.

Nếu $x+y+z=2p$ thì (6) có ngay $x^2+y^2+z^2$ chia hết cho $x+y+z$.

**Bài 4** Xét các số thực dương $x$, $y$ và $z$ thỏa mãn $x+y+z \leq \frac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{z}+\sqrt{x})+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

**Lời giải**. Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta có

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{z}+\sqrt{x}) \geq 8\sqrt{xyz} \Rightarrow P \geq 8\sqrt{xyz}+1x+1y+1z.$$

Cũng theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta được

$$8\sqrt{xyz}+1x+1y+1z \geq 13^{13}\sqrt{8\sqrt{xyz}\cdot(14x)^4+(14y)^4+(14z)^4} = 13^{13}\sqrt{12^{21}\sqrt{xyz}\cdot(xyz)^3}.$$

Và $xyz \leq (x+y+z3)^3 \leq 12^6$. Suy ra $P \geq 13$.

Mà khi $x=y=z=14$ thì $P=13$, suy ra giá trị của $P$ là 13.

**Bài 5** Có 42 học sinh tham gia một buổi giao lưu. Biết rằng cứ 3 học sinh bất kỳ, đều có ít nhất một cặp đôi gồm hai học sinh có trao đổi kinh nghiệm học tập với nhau. Kí hiệu $k$ là số cặp đôi như thế. Tìm giá trị nhỏ nhất của $k$.

**Lời giải**. Ta sẽ giải bài toán tông quát

Bài toán. Cho $m$ là số nguyên dương lớn hơn 1. Có 2 $m$ học sinh tham gia một buổi giao lưu. Biết rằng cứ 3 học sinh bất kỳ, đều có ít nhất một cặp đôi gồm hai học sinh có trao đổi kinh nghiệm học tập với nhau. Kí hiệu $k$ là số cặp đôi như thế. Tìm giá trị nhỏ nhất của $k$.

*Lời giải* Với mỗi số nguyên dương $m>1$, rõ ràng tồn tại giá trị nhỏ nhất của $k$, ta kí hiệu giá trị này bởi $k(m)$ Ta thấy $k(2)=2$.

Bây giờ giả sử $m>2$.

Xét buổi giao lưu gồm 2 $m$ học sinh sao cho có 3 học sinh bất kỳ, đều có ít nhất một cặp đôi gôm hai học sinh có trao đổi học tập với nhau bằng $k(m)$.

Tồn tại ít nhất hai học sinh (kí hiệu là $A$ và $B$ ) không trao đổi học tập với nhau, loại $A$ và $B$ ra khỏi buổi giao lưu này ta có một buổi giao lưu gồm 2( $m-1$) học sinh

mà cứ 3 học sinh bất kỳ, đều có ít nhất một cặp đôi gồm hai học sinh có trao đổi kinh nghiệm học tập với nhau. Số cặp dôi gồm hai học sinh có trao đổi kinh nghiệm học tập với nhau trong buổi liên hoan mới sẽ không ít hơn $k(m-1)$, mà mỗi học sinh trong buổi liên hoan mới sẽ trao đổi kinh nghiệm học tập với $A$ hoặc $B$ (vì $A$ và không trao đổi học tập với nhau).
Suy ra $k(m) \geq k(m-1)+2(m-1)$.
Do đó $k(m) \geq m(m-1)$ với mỗi số nguyên dương $m>1$.
Với mỗi số nguyên dương $m >$, ta xét mội buổi giao lưu gồm 2 $m$ học sinh như sau
Các học sinh trong buổi giao lưu thuộc một trong hai nhồm (gọi là $X$ và $Y$ ). Nhóm $X$ gồm $m$ học sinh có trao đổi học tập từng đôi một, nhóm $Y$ gồm $m$ học sinh có trao đổi học tập từng đôi một. Mỗi học sinh của nhóm này đều không có trao đổi học tập với bất kỳ một học sinh nào của nhóm kia.
Rõ ràng trong buổi giao lưu này, cứ 3 học sinh bất kỳ, đều có ít nhất một cặp đôi gồm hai học sinh có trao đổi kinh nghiệm học tập với nhau số cặp đôi trao đổi học tập với nhau bằng $m(m-1)$.
Suy ra $k(m) \leq m(m-1)$ với mỗi số nguyên dương $m>1$.
Từ (1) và (2) suy ra $k(m)=m(m-1)$ với mỗi số nguyên dương $m>1$.
Trở lại bài toán ban đầu.
Theo trên ta có giá trị $k$ bé nhất là $k(21)=420$.

## Đề 37. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1**

a) Giải phương trình $2(x-6)=3\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}$.

b) Cho số $a,b,c$ thỏa mãn điều kiện $a+2b+5c=0$. Chứng minh phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm.

**Lời giải.**

a) Ta có $2(x-6)=3\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}$. $(*)$

Điều kiện $x \geq 5$.

Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow 2(6-x)=\sqrt{x+3}-3\sqrt{x-5}$$
$$\Leftrightarrow 2(6-x)(\sqrt{x+3}+3\sqrt{x-5})=48-8x$$
$$\Leftrightarrow 2(6-x)(\sqrt{x+3}+3\sqrt{x-5})=4(6-x)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x-6=0 & (1) \\ \sqrt{x+3}+3\sqrt{x-5}=4. & (2) \end{array}\right.$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow x=6$ thỏa mãn điều kiện.

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow 3\sqrt{(x+3)(x-5)} = 29-5x \Leftrightarrow \begin{cases} 29-5x \geq 0 \\ x^2-17x+61=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{29}{5} \\ x = \dfrac{17 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{17-3\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = 6, x = \dfrac{17-3\sqrt{5}}{2}$.

b) Các số $a, b, c$ thỏa mãn điều kiện $a+2b+5c=0$. Chứng minh phương trình $ax^2+bx+c=0 \quad (1)$ có nghiệm.

***Trường hợp 1:*** $a=0$ suy ra $2b+5c=0$ phương trình (1) trở thành $bx+c=0 \quad (2)$

+) Nếu $b=0 \Rightarrow c=0$ phương trình (2) có nghiệm (vô định).

+) Nếu $b \neq 0$ phương trình (2) có nghiệm (duy nhất).

***Trường hợp 2:*** $a \neq 0$. Ta có $b = -\dfrac{a+5c}{2}$.

$\Delta = b^2-4ac \Rightarrow 4\Delta = 4b^2-16ac = (a+5c)^2-16ac = a^2-6ac+25c^2 = (a-3c)^2+16c^2 \geq 0$.

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm.

**Bài 2** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-4xy+x+2y=0 & (1) \\ x^4-8x^2y+3x^2+4y^2=0. & (2) \end{cases}$

**Lời giải**.

$$\begin{cases} x^2-4xy+x+2y=0 \\ x^4-8x^2y+3x^2+4y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y & = 4xy-x \\ (x^2+2y)^2 & = 12x^2y-3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y & = 4xy-x \\ (4xy-x)^2 & = 12x^2y-3x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y & = 4xy-x \\ x^2(4y-1)^2 & = 3x^2(4y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y = 4xy-x \\ x^2(4y-1)(4y-4) = 0. \end{cases}$$

***Trường hợp 1:*** $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (x;y)=(0;0)$ là nghiệm của hệ.

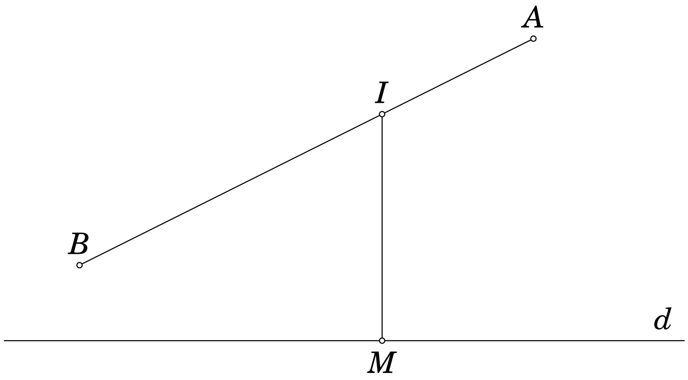
***Trường hợp 2:*** $y=1 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x;y)=(1;1) \vee (x;y)=(2;1)$.

***Trường hợp 3:*** $y = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{2} = 0$ (loại).

Vậy hệ có 3 nghiệm $(0;0),(1;1),(2;1)$.

**Bài 3** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $A(1;3), B(-5;-3)$. Xác định tọa độ điểm $M$ trên đường thẳng $d: x-2y+1=0$ sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

**Lời giải**.




Gọi $I(x_0;y_0)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x_0)=x_0+5 \\ 2(3-y_0)=y_0+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=1. \end{cases}$$

Vậy $I(-1;1)$. Ta có

$$\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = \left|2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right|$$
$$= \left|3\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right| = 3\left|\overrightarrow{MI}\right| = 3MI.$$

Như vậy $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $MI$ nhỏ nhất. Suy ra $M$ là hình chiếu của $I$ trên $d$.

Phương trình tham số của $d$: $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t \end{cases}$. Gọi tọa độ $M(2t_0-1;t_0)$.

Suy ra $\overrightarrow{IM}=(2t_0;t_0-1)$. Ta có $\overrightarrow{IM}\cdot\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow 2.2t_0+t_0-1=0 \Leftrightarrow t_0=\dfrac{1}{5}$.

Vậy $M\left(\dfrac{-3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$.

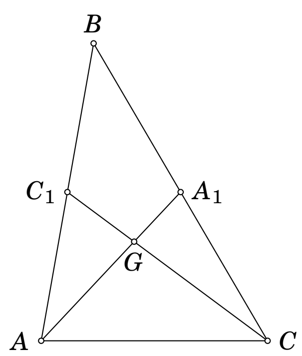
**Bài 4** Cho tam giác $ABC$ có các góc thỏa mãn hệ thức: $\cot A+\cot C=\alpha\cot B$.

a) Xác định góc giữa hai đường trung tuyến $AA_1$ và $CC_1$ của tam giác $ABC$ khi $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của góc $B$ khi $\alpha=2$.

**Lời giải**.

a)




Ta có

$$\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S};\cot B=\frac{a^2+c^2-b^2}{4S};\cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}.$$

Khi $a=\frac{1}{2}$. Ta có

$\cot A+\cot C=\frac{1}{2}\cot B$

$\Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}=\frac{1}{2}\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$

$\Leftrightarrow 5b^2=a^2+c^2$.

Ta có

$AG^2=\frac{4}{9}AA_1^2=\frac{4}{9}\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right); CG^2=\frac{4}{9}CC_1^2=\frac{4}{9}\left(\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)$.

Suy ra $AG^2+CG^2=\frac{4}{9}\left(b^2+\frac{a^2+c^2}{4}\right)=\frac{4}{9}\left(\frac{4b^2+5b^2}{4}\right)=b^2\Rightarrow AA_1\perp CC_1$.

Vậy góc giữa $AA_1$ và $CC_1$ bằng $90^\circ$.

b) Ta có

$\cot A+\cot C=2\cot B\Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}=2\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$

$\Leftrightarrow a^2+c^2=2b^2$.

Ta có $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2}{4ac}\geq\frac{2ac}{4ac}=\frac{1}{2}$. Suy ra $B\leq 60^\circ$.

Dấu = xảy ra khi tam giác $ABC$ đều.

**Bài 5** Cho ba số dương $a,b,c$ thỏa mãn $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}$.

**Lời giải**. Ta có $5a^2+2ab+2b^2=(2a+b)^2+(a-b)^2\geq(2a+b)^2$.

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}\leq\frac{1}{2a+b}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$. (1)

(vì $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{9}{a+b+c}=\frac{9}{2a+b}$.

Tương tự $\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$. (2)

$\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)$. (3)

Cộng theo vế của (1),(2) và (3) suy ra $P\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Mặt khác $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\Rightarrow\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\leq 1\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\sqrt{3}$.

Suy ra $P\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$. Dấu = xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

## Đề 38. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** Cho $a,b,c$ dương thỏa mãn $(a+b+c)abc=1$. Tìm giá trị bé nhất của biểu thức

$S=\frac{a^5}{a^3+2b^3}+\frac{b^5}{b^3+2c^3}+\frac{c^5}{c^3+2a^3}$.

**Lời giải**.

Ta có $\dfrac{a^5}{a^3+2b^3}=\dfrac{a^2(a^3+2b^3)-2a^2b^3}{a^3+2b^3}=a^2-2\dfrac{a^2b^3}{a^3+2b^3}$;

$a^3+2b^3=a^3+b^3+b^3\ge 3\sqrt[3]{a^3b^3b^3}\Rightarrow a^3+2b^3\ge 3ab^2$.

$\Rightarrow \dfrac{a^2b^3}{a^2+2b^3}\le \dfrac{a^2b^3}{3ab^2}\Rightarrow \dfrac{a^2b^3}{a^2+2b^3}\le \dfrac{ab}{3}$

$\Rightarrow a^2-2\dfrac{a^2b^3}{a^2+2b^3}\ge a^2-\dfrac{2}{3}ab\Rightarrow \dfrac{a^5}{a^3+2b^3}\ge a^2-\dfrac{2}{3}ab$

. Chứng minh tương tự $\dfrac{b^5}{b^3+2c^3}\ge b^2-\dfrac{2}{3}bc$, $\dfrac{c^5}{c^3+2a^3}\ge c^2-\dfrac{2}{3}ca$.

Từ đây ta có $S\ge a^2+b^2+c^2-\dfrac{2}{3}ab-\dfrac{2}{3}bc-\dfrac{2}{3}ca$.

Mà $a^2+b^2+c^2-\dfrac{2}{3}ab-\dfrac{2}{3}bc-\dfrac{2}{3}ca=\dfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]+\dfrac{1}{3}(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow S\ge \dfrac{1}{3}(ab+bc+ca)$.

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$, ta có

$(ab+bc+ca)^2\ge 3\Rightarrow ab+bc+ca\ge\sqrt{3}$.

$\Rightarrow S\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

Vậy $\min S=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ tại $(a;b;c)=\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}};\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}};\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$.

**Bài 2** Cho số nguyên $n\ge 2$.

a) Hãy xác định tất cả các bộ $(a_1,\dots,a_n)$ nguyên dương sao cho $(a_1!-1)\dots(a_n!-1)-9$ là số chính phương.

b) Hãy xác định tất cả các bộ $(a_1,\dots,a_n)$ nguyên dương sao cho $(a_1!-1)\dots(a_n!-1)-1$ là số chính phương.

**Lời giải**. Giả sử rằng $(a_1!-1)\dots(a_n!-1)=3^2+x^2$. Khi đó

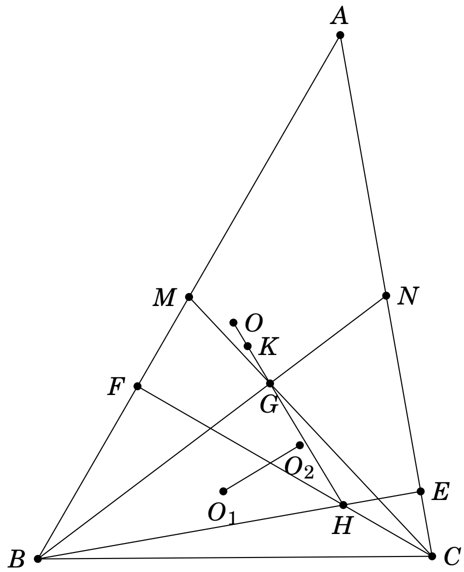
Nếu $a_i=2$ thì không ảnh hưởng đến tích nên có thể xét $a_i\ge 3$ với $k$ giá trị $i$.

Nếu $a_i\ge 4$ thì $a_i!-1$ là số hạng $4k-1$ nên phải có ước số nguyên tố $p$ có dạng $4k-1$. Ta có ngay $p|x^2+3^2$ nên $p=3$. Tuy nhiên $a_j\ge 3$ nên $a_j!-1$ không thể chia hết cho 3 với mọi $j$, mâu thuẫn.

Vậy $a_i=3$ với mọi $i$. Thành thử ta đưa đến phương trình $5^k=x^2+9$. Ta chỉ ra $k$ là số chẵn. Nếu $k$ lẻ thì $5^k\equiv -1(\mod 3)$ do đó $x^2\equiv -1(\mod 3)$. Từ đó đưa về $5^k-x^2=9$ hay $(5^{k/2}-x)(5^{k/2}+x)=9$ suy ra $5^{k/2}-x=1, 5^{k/2}+x=9$. Do đó $5^{k/2}=5$. Vậy $k=2$. Thành thử ta có 2 trong số $n$ số bằng 3 còn lại bằng 2.

**Bài 3** Cho tam giác $ABC$ không vuông và không cân, $O,H$ theo thứ tự làm tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác $ABC$. $E,F$ theo thứ tự là giao điểm của $BH,CH$ và $AC,AB$. $M,N$ theo thứ tự là trung điểm của $AB,AC$. $O_1,O_2$ theo thứ tự làm tâm đương tròn ngoại tiếp của tam giác $BEM,CFN$. Chứng minh rằng $OH\perp O_1O_2$.

**Lời giải**.




Gọi $G = BN \cap CM; K = EM \cap FN$.
Dễ thấy $G$ thuộc $OH$ (đường thẳng Euler); $K$ thuộc $GH$ (định lý Pappus).
Do đó $O, H, K$ thẳng hàng. (1)
Dễ thấy $B, C, E, F (BEC = 90^\circ = BFC)$ và $M, N, E, F$ cùng thuộc một đường tròn (đường tròn Euler).
Do đó $P_{H/(O_1)} = \overline{HB}.\overline{HE} = \overline{HC}.\overline{HF} = P_{H/(O_2)}; P_{K/(O_1)} = \overline{KB}.\overline{KE} = \overline{KN}.\overline{KF} = P_{K/(O_2)}$.
Điều đó có nghĩa là $HK \perp O_1O_2$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp O_1O_2$.

**Bài 4** Tìm số nguyên dương $k$ bé nhất sao cho với mỗi tập gồm $k$ số tự nhiên luôn tồn tại 6 phần tử trong tập có tổng là bội của 6.

**Lời giải**. Ta chứng minh $k$ bé nhất là 11. Xét tập $S_0$ gồm 10 số tự nhiên là $\{0, 6, 12, 18, 24\} \cup \{1, 7, 13, 19, 25, 31\}$.
Mỗi số ở nhóm 2 đều chia 6 dư 1, mỗi số ở nhóm 1 đều chia hết cho 6. Do đó không thể chọn được sáu số từ $S_0$ mà tổng chia hết cho 6. Ta chỉ ra một tập con $S$ bất kì của tập các số nguyên mà $|S| = 11$ thì đều chọn ra được sáu số có tổng chia hết cho 6. Thật vậy, đầu tiên ta chứng minh trong năm số bất kì bao giờ cũng chọn được ba số có tổng chia hết cho 3.
Thật vậy, nếu năm số này có ba số chia hết cho 3 được ba số dư khác nhau thì tổng của ba số đó chia hết cho 3. Nếu năm số này chia cho 3 có tối đa hai số dư khác nhau, thì theo nguyên lý Dirichel, tồn tại ít nhất $\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 3$ số có cùng số dư khi chia cho 3.
Áp dụng kết quả trên, chọn năm số bất kì, khi đó có ba số có tổng chia hết cho 3. Kí hiệu nhóm 3 số đó là $S_1$ và loại bỏ ra khỏi tập $S$ đang xét. Trong $11 - 3 = 8$ số còn lại, lấy tiếp năm số và do đó chọn được ba số có tổng chia hết cho 3. Nhóm ba số này là $S_2$. Loại tiếp ba số này ta còn lại $8 - 3 = 5$ số. Áp dụng kết quả trên một lần nữa ta chọn được $S_3$ gồm ba số có tổng chia hết cho 3.

Tổng số trong $S_1, S_2, S_3$ là ba số chia hết cho ba. Trong ba số ấy có hai số cùng tính chẵn lẻ, do đó tổng hai số đó phải chia hết cho $2.3 = 6$. Thành thử ta có sáu số có tổng chia hết cho 6.
Nhận xét: Đây là trường hợp đặc biệt của định lý EGZ đã khs kinh điển: Cho số nguyên dương $n$, khi đó trong tập hợp $S$ gồm $2n-1$ số nguyên tùy ý, luôn chọn ra được $n$ số có tổng chia hết cho $n$. Lược đồ chứng minh định lý này như sau: Đầu tiên chứng minh bài toán đúng cho số nguyên tố $p$. Sau đó chứng minh đúng cho $pk$ và cuối cùng chứng minh thêm: nếu bài toán đúng cho $n = a$ và $n = b$ với $(a,b) = 1$ thì bài toán đúng cho $n = ab$ hay không?

**Bài 5** Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \\ \sqrt{x+15} + \sqrt{y+15} = 8. \end{cases}$

**Lời giải**. Điều kiện $x, y \geq 0$.
Cách 1.
$x + y + 2\sqrt{xy} = 4, t = \sqrt{xy} \Rightarrow x + y = 4 - 2t.$
$\sqrt{x+15} + \sqrt{y+15} = 8 \Rightarrow x + y + 30 + 2\sqrt{xy + 15(x+y) + 225} = 64.$
$\Rightarrow 4 - 2t + 30 + 2\sqrt{t^2 + 15(4-2t) + 225} = 64 \Rightarrow 2\sqrt{t^2 - 30t + 285} = 2t + 30$
$\Rightarrow \sqrt{t^2 - 30t + 285} = t + 15 \Rightarrow -30t + 285 = 30t + 225 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = y = 1.$
Cách 2.
Xét $\vec{u} = \left(\sqrt{x}; \sqrt{15}\right), \vec{v} = \left(\sqrt{y}; \sqrt{15}\right),$
$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}; 2\sqrt{15}\right) = \left(2; 2\sqrt{15}\right).$
$|\vec{u}| = \sqrt{x+15}, |\vec{v}| = \sqrt{y+15}, |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{15})^2} = 8.$

**Bài 6** Cho bốn số dương $a, b, c, d$ thỏa mãn $a + b + 1 = 7c$ và đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có ba nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt). Đặt $Q(x) = x^2 + 2x + d$. Chứng minh rằng

a) Tích ba nghiệm của đa thức $P(x)$ không vượt quá $-1$.

b) Phương trình $P(Q(x)) = 0$ có tối đa bốn nghiệm thực phân biệt.

**Lời giải**. a) Gọi ba nghiệm là $x_1, x_2, x_3$ khi đó $x_i \leq 0$ nên $y_i = -x_i \geq 0$.
Ta có $P(x) = (x + y_1)(x + y_2)(x + y_3)$.
Theo giả thiết $a + b + 1 = 7c$ ta suy ra $a + b + c + 1 = 8c$. Do đó $P(1) = 8P(0)$. Theo định lý Vi-ét, $8y_1y_2y_3 = (1 + y_1)(1 + y_2)(1 + y_3) \geq 8\sqrt{y_1y_2y_3}$. Suy ra $y_1y_2y_3 \geq 1$ hay $x_1x_2x_3 \leq -1$. Do đó $-c \leq -1$ hay $c \geq 1$.

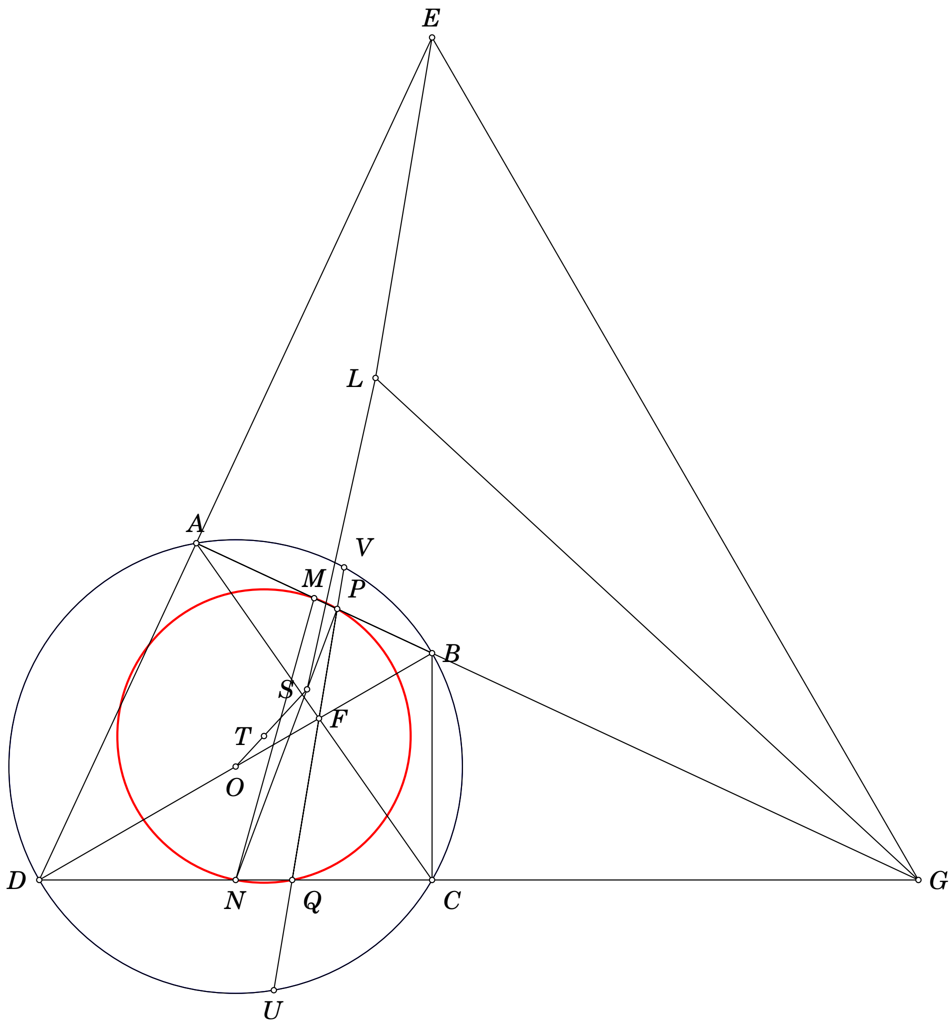
b) Phương trình $P(Q(x)) = 0$ tương đương với $Q(x) - x_i = 0$ với $i = 1, 2, 3$ nào đó. Ta có $\Delta'_i = 1 - d + x_i$. Theo trên $y_1y_2y_3 \geq 1$ nên ít nhất một số $y_i \geq 1$. Khi đó $x_i \leq -1$. Suy ra $\Delta'_i \leq -d < 0$. Vậy phương trình $Q(x) - x_i = 0$ vô nghiệm. Thành thử trong ba phương trình $Q(x) - x_i = 0$ với $i = 1, 2, 3$ có ít nhất một phương trình vô nghiệm. Thành thử phương trình tối đa bốn nghiệm.

**Bài 7** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$ và không phải là hình thang. Gọi $M,N$ theo thứ tự là trung điểm của $AB,CD$. Gọi $E = AD \cap BC, F = AC \cap BD, P = EF \cap AB$ và $Q = EF \cap CD$. Chứng minh rằng

a) $M,N,P,Q$ cùng thuộc một đường tròn có tâm là $T$.

b) $MQ,NP,OT$ đồng quy.

**Lời giải**.




Gọi $G = AB \cap CD$.

a) Vì $(GPAB) = -1; MA = MB$ và $(GQCD) = -1; NC = ND$ nên

$\overline{GM}.\overline{GP} = \overline{GA}.\overline{GB} = \overline{GC}.\overline{GD} = \overline{GN}.\overline{GQ}$.

Do đó $M,N,P,Q$ cùng thuộc đường tròn tâm $T$.

b) Gọi $L$ là trung điểm của $EF; S = MQ \cap NP; \{U;V\} = EF \cap (O)$.

Dễ thấy $TS \perp LG$ (định lý Brocard). (3)

Dễ thấy $(GPAB) = -1$.

Kết hợp với $MA = MB$, theo hệ thức Maclaurin, ta có

$P_{G/(O)} = \overline{GA}.\overline{GB} = \overline{GM}.\overline{GP} = P_{G/(T)}$.

Dễ thấy $(EFUV) = -1 = (EFPQ)$.

Theo hệ thức Newton cho hai hàng điểm điều hòa $(EFUV)$ và $(EFPQ)$, ta có

$LE^2 = LF^2 = LP.LQ = LU.LV$.

Mà $LP.LQ = P_{L/(T)}; LU.LV = P_{L/(O)}$. Vậy $P_{L/(O)} = P_{L/(T)}$.
Do đó $OT \perp LG$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $O, T, S$ thẳng hàng (đpcm).

**Bài 8** Cho ba số nguyên dương $a, m, n$ trong đó $a$ là số chẵn và $n > 1$.

a) Chứng minh rằng mọi ước nguyên tố của $A = a^{2^n} + 1$ đều có dạng $2^{n+1}k + 1$, với $k$ là số tự nhiên.

b) Giả sử rằng $a^m + 1$ chia hết cho $A$. Chứng minh rằng $\dfrac{m}{2^n}$ là số nguyên dương lẻ.

**Lời giải**.

a) Giả sử rằng $d$ là một ước nguyên tố của $a^{2^n} + 1$. Suy ra $ord_d(a) = 2^t$, với $0 \le t \le n+1$. Nếu $t \le n$ thì $(a^{2^n} - 1) \vdots (a^{2^t} - 1) \vdots d$, suy ra $2 \vdots d$, mâu thuẫn vì $d$ lẻ. Vậy $t = n+1$, suy ra $d \equiv 1 (\pmod 2)^{n+1})$.

b) Đặt $m = 2^n q + r$ với $0 \le r \le 2^n$. Nếu $q$ là số chẵn thì $a^m + 1 = a^r(a^{m-r} - 1) + (a^r + 1)$, ta suy ra $a^r + 1 \vdots 4$, mâu thuẫn do $A > a^r + 1$. Thành thử $q$ lẻ.
Từ $a^m + 1 = a^r(a^{m-r} + 1) + 1 - a^r$ chia hết cho $A$. Vậy $r = 0$ nên $\dfrac{m}{2^n} = q$ là số lẻ.

## Đề 39. ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10

**Bài 1** *(2.0 điểm)* Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \dfrac{2014}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} + \dfrac{2015}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

**Lời giải**. Hàm số $f(x)$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -x^2 + 2x + 3 > 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 3 \\ -1 < x < 0 \end{array}\right..$$

Vậy tập xác định của hàm số $f(x)$ là $S = (-1; 0) \cup (2; 3)$.

**Bài 2** *(1.0 điểm)*

a) Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

b) Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sqrt{2015 - x} - \sqrt{2015 + x}$ là một hàm số lẻ.

**Lời giải**.

a) Với mọi $x_1 \cdot x_2 \in (-1; +\infty), x_1 \ne x_2$ ta có

$$K = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{x_1}{x_1 + 1} - \dfrac{x_2}{x_2 + 1}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1(x_2 + 1) - x_2(x_1 + 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$
$$= \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} > 0.$$

(Do $x_1 \cdot x_2 \in (-1; +\infty)$). Do đó $K > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

b) Tập xác định hàm số là $D = [-2015; 2015]$. Với mọi $x \in D$, ta có $-x \in D$, $f(-x) = \sqrt{2015 + x} - \sqrt{2015 - x} = -\left(\sqrt{2015 - x} - \sqrt{2015 + x}\right) = -f(x)$

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

**Bài 3** *(1.0 điểm)* Giải phương trình: $19+3x+4\sqrt{-x^2-x+6}=6\sqrt{2-x}+12\sqrt{3+x}$.

**Lời giải**. Điều kiện $\begin{cases}-x^2-x+6\geq 0\\ 2-x\geq 0\\ 3+x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\leq x\leq 2.$

Phương trình đã cho tương đương với

$19+3x+4\sqrt{(2-x)(3+x)}=6\left(\sqrt{2-x}+2\sqrt{3+x}\right)$.

Đặt $t=\sqrt{2-x}+2\sqrt{3+x}, t>0$ ta có

$t^2=2-x+4(3+x)+4\sqrt{(2-x)(3+x)}=14+3x+4\sqrt{(2-x)(3+x)}$.

Thay vào phương trình trên ta được $5+t^2=6t\Leftrightarrow t^2-6t+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=5.\end{array}\right.$

+) $t=1\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+2\sqrt{3+x}=1\Leftrightarrow 2-x+4(3+x)+4\sqrt{(2-x)(3+x)}=1$

$\Leftrightarrow 3x+13+4\sqrt{-x^2-x+6}=0$ vô nghiệm do $-3\leq x\leq 2$.

+) $t=5\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+2\sqrt{3+x}=5\Leftrightarrow 2-x+4(3+x)+4\sqrt{(2-x)(3+x)}=25$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{-x^2-x+6}=11-3x\Leftrightarrow \begin{cases}16(-x^2-x+6)=(11-3x)^2\\ 11-3x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}25x^2-50x+25=0\\ x\leq \dfrac{11}{3}.\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=1$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{1\}$.

**Bài 4** *(1.0 điểm)* Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+2y^2-3xy-y-1=0 & (1)\\ x^2+y^2-y-3=0. & (2)\end{cases} (I)$

**Lời giải**. Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-y+1)(x-2y-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y-1\\ x=2y+1.\end{array}\right.$

Với $x=y-1$ thay vào (2) ta được $2y^2-3y-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=2\\ y=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

+) $y=2\Rightarrow x=1$.

+) $y=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$.

Với $x=2y+1$ thay vào (2) ta được $5y^2+3y-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=\dfrac{2}{5}.\end{array}\right.$

+) $y=-1\Rightarrow x=-1$.

+) $y=\dfrac{2}{5}\Rightarrow x=\dfrac{9}{5}$.

Vậy $(I)$ có nghiệm $(x;y)$ là: $(1;2),(-1;-1),\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{9}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$.

**Bài 5** *(1.0 điểm)* Tìm tất cả các giá trị của $m$ sao cho bất phương trình $(m-1)x^2+2(m+2)x+2m+2\geq 0$ vô nghiệm ($x$ là ẩn, $m$ là tham số).

**Lời giải**. Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$(m-1)x^2+2(m+2)x+2m+2<0, \forall x \in \mathbb{R}$

**Trường hợp 1:** Nếu $m=1$ thì $6x+4<0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x<-\dfrac{2}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$ vô lí.

**Trường hợp 2:** Nếu $m \neq 1$ thì $(m-1)x^2+2(m+2)x+2m+2<0, \forall x \in \mathbb{R}$

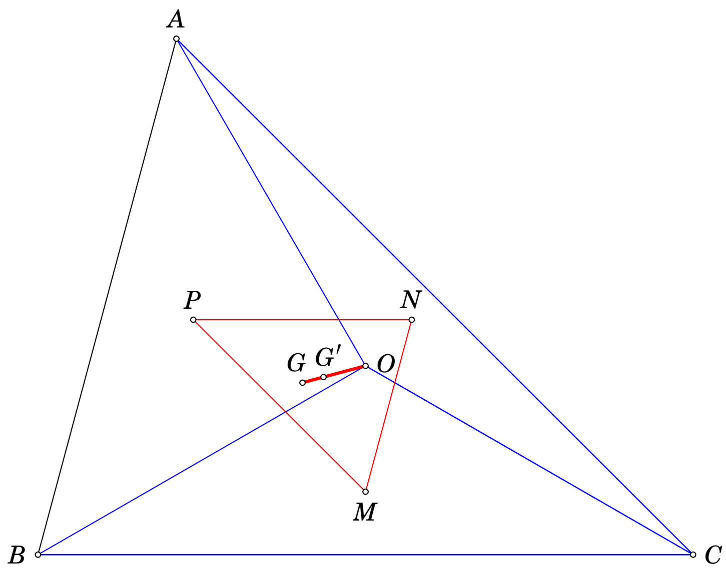
$$\begin{cases} m-1<0 \\ \Delta' = (m+2)^2-(m-1)(2m+2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ -m^2+4m+6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ \left[\begin{array}{l} m>2+\sqrt{10} \\ m<2-\sqrt{10} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m<2-\sqrt{10}$.

Vậy tập hợp các giá trị của $m$ là $S=\left(-\infty;2-\sqrt{10}\right)$.

**Bài 6** *(1.0 điểm)* Cho tam giác $ABC$ không cân nội tiếp đường tròn tâm $O$ và $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trọng tâm tam giác $OBC,OCA,OAB$, và $G'$ là trọng tâm tam giác $MNP$. chứng minh rằng $O,G,G'$ thẳng hàng.

**Lời giải**.




**Cách 1:**

Kết quả cơ bản: cho tam giác $ABC$ trọng tâm $G$.

Khi đó với mọi điểm $O$ ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3.\overrightarrow{OG}$.

Do $M,N,P$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $OBC,OCA,OAB$ nên

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3.\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=3.\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=3.\overrightarrow{OP}$.

Cộng từng vế ba hệ thức trên ta được

$2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=3\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right) \Leftrightarrow 2.3.\overrightarrow{OG}=3.3.\overrightarrow{OG'} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{OG}=3.\overrightarrow{OG'} \Rightarrow O,G,G'$ thẳng hàng.

**Cách 2:**

Vì $M,N,P$ lần lượt là trọng tâm của tam giác $OBC,OCA,OAB$ nên ta có

$$\frac{OM}{OA'}=\frac{ON}{OB'}=\frac{OP}{OC'}=\frac{2}{3}$$

$(A', B', C'$ lần lượt là trung điểm của $BC, CA, AB)$.

Xét vị tự $V_o^{\frac{3}{2}} : \Delta MNP \to \Delta A'B'C'$. Vậy trọng tâm $G'$ của tam giác $MNP$ biến thành trọng tâm $G$ của tam giác $A', B', C'$. Mà trọng tâm $G$ của tam giác $A', B', C'$ chính là trọng tâm của tam giác $A, B, C$. Vậy $O, G, G'$ thẳng hàng.

**Bài 7** *(1.0 điểm)* Cho tam giác $ABC$ không vuông và có cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng nếu tam giác $ABC$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2c^2$ và $\tan A + \tan C = 2\tan B$ thì tam giác $ABC$ đều.

**Lời giải**. Theo định lý hàm số sin và cos ta có

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \frac{abc}{R(b^2+c^2-a^2)}.$$

Tương tự ta có $\tan B = \dfrac{abc}{R(a^2+c^2-b^2)}, \tan C = \dfrac{abc}{R(a^2+b^2-c^2)}$.

$$\Rightarrow \tan A + \tan C = 2\tan B \Leftrightarrow \frac{abc}{R(b^2+c^2-a^2)} + \frac{abc}{R(a^2+b^2-c^2)} = 2\frac{abc}{R(a^2+c^2-b^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} = \frac{2}{a^2+c^2-b^2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2) + (b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2) = 2(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 - (b^2-c^2)^2 + c^4 - (a^2-b^2)^2 = 2(b^4 - (a^2-c^2)^2)$$

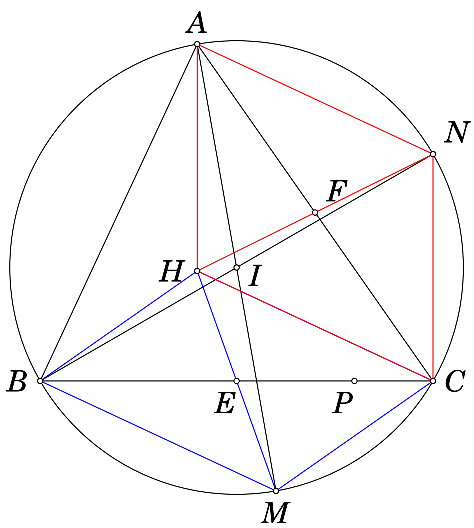
$$\Leftrightarrow a^2(a^2+b^2-2c^2) + (c^2-b^2)(c^2+2b^2) = 0 \Leftrightarrow b = c \text{ (do } a^2+b^2 = 2c^2).$$

Kết hợp với $a^2 + b^2 = 2c^2 \Rightarrow a = b = c$.

Vậy tam giác $ABC$ đều.

**Bài 8** *(1.0 điểm)* Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ không là tam giác vuông và nội tiếp đường tròn $(I)$ (đường tròn $(I)$ có tâm là $I$); điểm $H(2;2)$ là trực tâm tam giác $ABC$. Kẻ các đường kính $AM, BN$ của đường tròn $(I)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác $ABC$ biết $M(5;3), N(1;3)$ và đường thẳng $BC$ đi qua điểm $P(4;2)$.

**Lời giải**.



**Nhận xét:** Các tứ giác $BHCM, AHCN$ là các hình bình hành suy ra nếu gọi $E,F$ lần lượt là trung điểm của $BC, CA$ thì $E,F$ cũng tương tự là trung điểm của $HM, HN$.

Do đó $E\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right), F\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Đường thẳng $BC$ đi qua điểm $P(4;2), E\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$ nên

$BC: \dfrac{x-4}{\frac{7}{2}-4} = \dfrac{y-2}{\frac{5}{2}-2} \Leftrightarrow x+y-6=0.$

$AH$ vuông góc với $BC$ suy ra $AH$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{AH} = (1;-1)$ kết hợp với $AH$ đi qua điểm $H(2;2)$ suy ra $AH: 1(x-2)-1(y-2)=0 \Leftrightarrow x-y=0$.

$A \in AH \Rightarrow A(a;a), C \in BC \Rightarrow C(b;6-b)$, do $F$ là trung điểm $AC$ nên

$$\begin{cases} x_F = \dfrac{x_A+x_C}{2} \\ y_F = \dfrac{y_A+y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a+6-b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow A(1;1), C(2;4).$$

Do $E$ là trung điểm $BC$ nên

$$\begin{cases} x_E = \dfrac{x_B+x_C}{2} \\ y_E = \dfrac{y_B+y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_E - x_C \\ y_B = 2y_E - y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_b = 1 \end{cases} \Rightarrow B(5;1).$$

Vậy $A(1;1), B(5;1), C(2;4)$.

**Bài 9** *(1.0 điểm)* Cho $a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c = 2015$. Chứng minh rằng

$$\frac{2015a-a^2}{bc} + \frac{2015b-b^2}{ca} + \frac{2015c-c^2}{ab} + 6 \geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{2015-a}{a}} + \sqrt{\frac{2015-b}{b}} + \sqrt{\frac{2015-c}{c}}\right).$$

**Lời giải**. Thay $2015 = a+b+c$ thì bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$\frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(c+a)}{ca} + \frac{c(a+b)}{ab} + 6 \geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}}\right).$$

Ta có $\dfrac{a(b+c)}{bc} + \dfrac{b(c+a)}{ca} + \dfrac{c(a+b)}{ab} + 6 = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b} + 6$

$$= \frac{b+c}{a} + 2 + \frac{c+a}{b} + 2 + \frac{a+b}{c} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{b+c}{a}\cdot 2} + 2\sqrt{\frac{c+a}{b}\cdot 2} + 2\sqrt{\frac{a+b}{c}\cdot 2}.$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}}\right)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{2015}{3}$.