TUYỂN TẬP

400 BÀI TOÁN HÌNH

TRONG ĐỀ THI VÀO 10

CÓ ĐÁP ÁN

PHẦN ĐÁP ÁN

TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN HÌNH

ÔN THI VÀO 10

Câu 1.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) và đường kính $AB = 2R = 10cm$. Gọi C là trung điểm OA, Qua C kẻ dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ MB, H là giao điểm AK và MN. Chứng minh:

a) Tứ giác $BHCK$ nội tiếp, $AMON$ là hình thoi

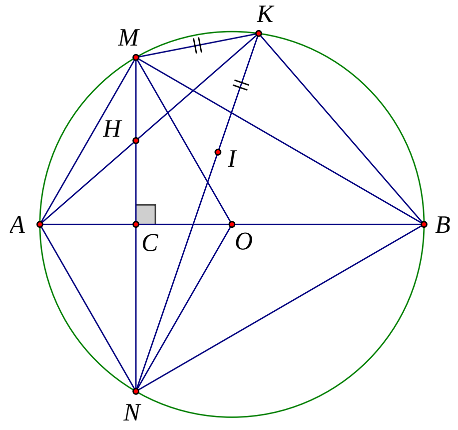
b) $AK.AH = R^2$ và tính diện tích hình quạt tao bởi OM, OB và cung MB

c) Trên KN lấy I sao cho $KI = KM$, chứng minh $NI = KB$

d) Tìm vị trí điểm K để chu vi tam giác MKB lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Tứ giác $BHCK$ nội tiếp, $AMON$ là hình thoi



Vì K nằm trên đường tròn tâm (O) đường kính AB nên

$AKB = 90° \Rightarrow HKB = 90°(H \in AK)$

MN vuông góc AB (gt) nên

$$MCB = 90° \Rightarrow HCB = 90°(H \in MN)$$

Ta có: $HCB + HKB = 90° + 90° = 180°$.

Mà $HCB; HKB$ là 2 góc đối nhau của tứ giác $BHCK$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHCK$ nội tiếp (dhnb)

+) Xét (O) MN là dây cung, AB là đường kính

Mà MN vuông góc AB tại C (gt)

Nên C là trung điểm MN (liên hệ giữa đường kính và dây cung)

Mà C là trung điểm OA (gt) $\Rightarrow$ Tứ giác $AMON$ là hình bình hành (dhnb)

Mà MN vuông góc OA (gt) $\Rightarrow$ Nên $AMON$ là hình thoi (đpcm)

b) $AK.AH = R^2$ và tính diện tích hình quạt tao bởi OM, OB và cung MB

Xét Δ AHC và Δ ABK có:

A là góc chung

$ACH = AKB = 90°$

$\Rightarrow \Delta AHC \backsim \Delta ABK$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AC}{AK} \Rightarrow AH.AK = AB.AC = 2R.\dfrac{1}{2}R = R^2$ (đpcm)

Theo a) $AMON$ là hình thoi nên $AM = MO = OA = R$

Ta có tam giác AMO đều $\Rightarrow AMO = 60° \Rightarrow MOB = 120°$ (tc kề bù)

*) $S_{MOB} = \dfrac{120\pi R^2}{360} = \dfrac{\pi R^2}{3}$, mà $2R = 10cm$ nên $R = 5cm$. Do đó $S_{MOB} = \dfrac{25\pi}{3}$

c) Trên KN lấy I sao cho $KI = KM$, chứng minh $NI = KB$

Dễ dàng chứng minh $MB = NB \Rightarrow$ Tam giác MNB cân (đ/n)

Mà $MKN = MBN = 60°$

$NMI = KMB + IMB = NMB = 60°$

$KMB + IMB = KMI = 60°$

$NMB = MAO$ (cùng phụ với MBA)

Mà $MAO = 60^o$ (tam giác AMO đều)

$\Rightarrow$ Tam giác MNB đều (tam giác cân có 1 góc $60°$) (1)

Chứng minh tương tự ta có tam giác MKI cân

Mà $MKN = MBN = 60°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung NM)

Nên tam giác MIK đều.(2)

Từ 1 và 2 ta có: $NMI + IMB = NMB = 60°$

$KMB + IMB = KMI = 60°$

Nên ta có: $NMI = KMB$ (cùng cộng với IMB bằng $60°$)

Xét ΔMNI và ΔMBK có:

+) $MI = MK$ (ΔMIK đều)

+) $NMI = KMB$ (cmt)

+) $MN = MB$ (ΔNMB đều)

$\Rightarrow NI = BK$ (2 cạnh tương ứng)

d) Tìm vị trí điểm K để chu vi tam giác MKB lớn nhất.

Chu vi của ΔMKB = $MK + KB + MB$

Mà $KB = NI$; $MK = KI$

$P_{MKB} = MK + KB + MB = KI + NI + MB = NK + MB$

Mà MB cố định nên P_{MKB} lớn nhất khi NK lớn nhất

Mà NK là dây cung lớn nhất khi NK là đường kính

Khi đó N, O, K thẳng hàng. Vậy K là điểm chính giữa cung MB.

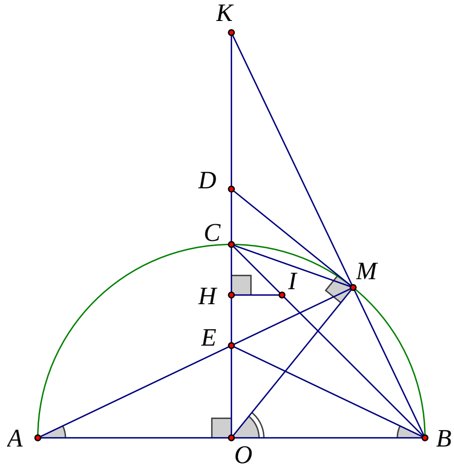
Câu 2.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn (O,R) đường kính AB. Bán kính $OC \perp AB$. Điểm E thuộc đoạn OC. Tia AE cắt nửa đường tròn (O) tại M. Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt OC tại D. Chứng minh:

a)Tứ giác $OEMB$ nội tiếp và ΔMDE cân

b)Gọi BM cắt OC tại K. Chứng minh $BM.BK$ không đổi khi E di chuyển trên OC và tìm vị trí của E để $MA = 2MB$

c)Cho $ABE = 30^0$ tính $S_{quat}MOB$ và chứng minh khi E di chuyển trên OC thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCME thuộc một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn



a)Tứ giác $OEMB$ nội tiếp và ΔMDE cân

* Tứ giác $OEMB$ có:

$EOB + EMB = 180^\circ$

Mà hai góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow OEMB$ là tứ giác nội tiếp

* Vì tứ giác $OEMB$ nội tiếp $\Rightarrow DEM = OBM$ (tính chất góc ngoài tứ giác nội tiếp)

Lại có: $OBM = EMD$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AM)

$\Rightarrow DEM = EMD\left(= OBM\right) \Rightarrow \Delta DEM$ cân tại D (ĐPCM)

b)Gọi BM cắt OC tại K. Chứng minh $BM.BK$ không đổi khi E di chuyển trên OC và tìm vị trí của E để $MA = 2MB$

* có $AMB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔAMB và ΔKOB có:

$AMB = KOB\left(= 90^\circ\right)$

ABK là góc chung

$\Rightarrow \Delta AMB \backsim \Delta KOB\left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{BM}{BO} \Rightarrow BM.BK = AB.BO = 2R.R = 2R^2$ (không đổi)

* Với $MA = 2MB$

Vì ΔAMB vuông tại M nên $\tan MAB = \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \tan MAB = \tan EAO = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{OE}{AO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow EO = \dfrac{R}{2}$

Vậy để $MA = 2MB$ thì E là trung điểm của OC.

c)Cho $ABE = 30^0$ tính $S_{quat}MOB$ và chứng minh khi E di chuyển trên OC thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCME thuộc một đường thẳng cố định.

* Ta thấy OK là đường trung trực của đoạn AB.

Mà $E \in OK \Rightarrow EA = EB \Rightarrow \Delta EAB$ cân tại E.

$\Rightarrow EAB = EBA = 30^\circ \Rightarrow MOB = 2.EAB = 60^\circ$ (quan hệ giữa góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung MB).

$\Rightarrow S_{quat}MOB = \dfrac{60.\pi.R^2}{360} = \dfrac{\pi.R^2}{6}$

* Nối C với B; gọi H là trung điểm của CE, I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCEM

$\Rightarrow \Delta CIE$ cân tại I.

Do IH là đường trung tuyến nên IH đồng thời là đường cao, đường phân giác

$$\Rightarrow IH \perp CE; CIH = \frac{CIE}{2} = CME$$

Lại có $CME = CBA$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

$$\Rightarrow CIH = CBA\left(= CME\right) \Rightarrow HCI = OCB \text{ (Vì } IH \perp CE; OB \perp CO\text{)}$$

$\Rightarrow C, I, B$ thẳng hàng $\Rightarrow I$ chuyển động trên đường thẳng CB cố định (đpcm)

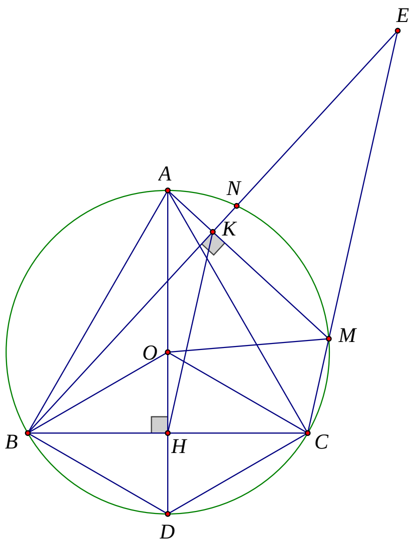
Câu 3.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC đều nội tiếp $(O;R)$ kẻ đường kính AD cắt BC tại H. Gọi M là một điểm trên cung nhỏ AC. Hạ $BK \perp AM$ tại K, BK cắt CM tại E, $R = 6cm$. Chứng minh:

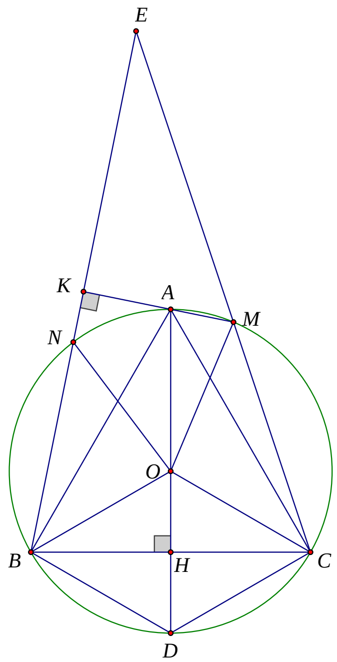
a)Tứ giác $ABHK$ nội tiếp và ΔMBE cân

b)Tứ giác $BOCD$ là hình thoi và gọi BE cắt (O) tại N và tính $S_{quat}MON$

c)Tìm vị trí của M để chu vi ΔMBE lớn nhất và tìm quỹ tích điểm E khi M di chuyển trên cung nhỏ AC.

Hướng dẫn





a)Tứ giác $ABHK$ nội tiếp và ΔMBE cân.

* Vì $AB = AC(\Delta ABC$ đều) và $OB = OC\left(= R\right) \Rightarrow AO$ là đường trung trực của đoạn BC

$\Rightarrow AO \perp BC$ tại $H \Rightarrow AHB = 90°$

Xét tứ giác $AKHB$ có: $AHB = AKB = 90°$

Mà hai góc này ở vị trí kề nhau hoặc đối nhau.

$\Rightarrow ABHK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AB.

* Có $A, M, C, B \in (O) \Rightarrow AMCB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow AME = ABC = 60^\circ$

Lại có $AMB = ACB = 60^\circ \Rightarrow KME = KMB\left(=60^\circ\right) \Rightarrow MK$ là đường phân giác cũng là đường cao của $\Delta MBE \Rightarrow \Delta MBE$ cân tại M

(ĐPCM)

b)Tứ giác $BOCD$ là hình thoi và gọi BE cắt (O) tại N và tính $S_{quat}MON$

* Có $BOC = 2BAC = 120^\circ$ (quan hệ giữa góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn một cung)

ΔBOC cân tại O có OH là đường cao đồng thời là đường phân giác $\Rightarrow BOH = \frac{1}{2}.BOC = 60^\circ$

Lại có $BDA = BCA = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta BOD$ đều $\Rightarrow OB = BD = OD = R$

Chứng minh tương tự $OC = CD = OD = R$

Ta được $OB = BD = OC = CD = R \Rightarrow OBDC$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết).

* Có ΔBKM vuông tại $K \Rightarrow KBM + KMB = 90^\circ \Rightarrow KBM + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow KBM = 30^\circ$

Lại có $NOM = 2.NBM = 2.30^\circ = 60^\circ \Rightarrow S_{quat}MON = \frac{60.\pi.R^2}{360} = \frac{\pi.R^2}{6}$

c)Tìm vị trí của M để chu vi ΔMBE lớn nhất và tìm quỹ tích điểm E khi M di chuyển trên cung nhỏ AC.

* Gọi P là chu vi ΔMBE

$P = MB + ME + BE = 2.\left(MB + BK\right)$

* Có ΔBKM vuông tại $K \Rightarrow BK = MB.\sin BMK = MB.\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.MB$

$\Rightarrow P = \left(2+\sqrt{3}\right).MB$

Để P lớn nhất thì MB lớn nhất $\Leftrightarrow MB$ là đường kính của $(O) \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa AC nhỏ

* Nối A với E

Vì AM là đường trung trực của đoạn BE nên $AE = AB$

Do AB không đổi, điểm A cố định nên E thuộc đường tròn cố định *(A, AB)*

Giới hạn:

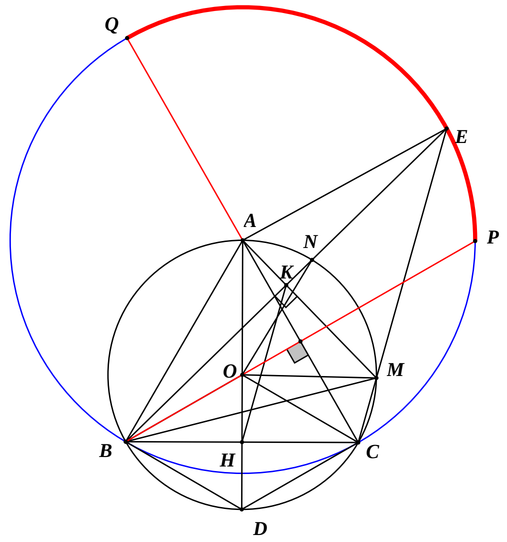
Kẻ đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC cắt (A, AB) tại P.

Lấy điểm Q đối xứng với C qua A.

Khi $M \equiv C \Rightarrow E \equiv P$

Khi $M \equiv A \Rightarrow E \equiv Q$

Vậy khi M di chuyển trên cung nhỏ AC thì E di chuyển trên cung nhỏ PQ của đường tròn (A, AB)



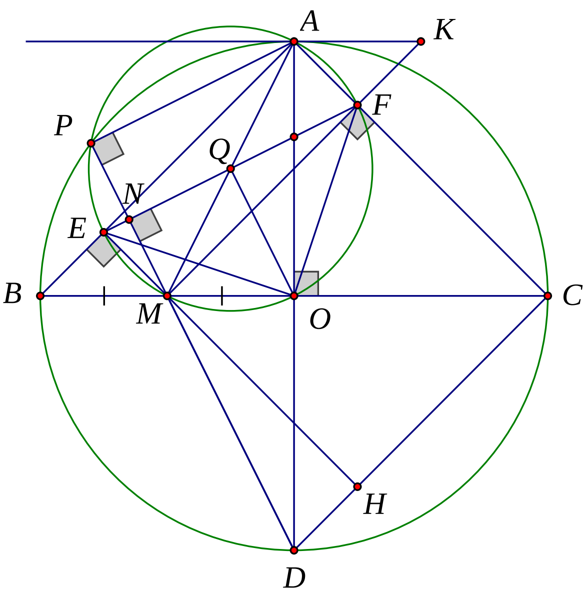
Câu 4.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O,R) có đường kính BC, A là điểm chính giữa cung BC, lấy M là trung điểm BO, kẻ $ME \perp AB$ tại E, kẻ $MF \perp AC$ tại F. Chứng minh:

a) Năm điểm A,E,M,O,F thuộc một đường tròn và $BE.BA = BO.BM$

b) Kẻ tiếp tuyến của (O) tại A cắt MF tại K chứng minh $ME = KF$ và kẻ đường kính AD, kẻ ME cắt DC tại H, tia NM cắt (O) tại D. Chứng minh $\Delta MDH = \Delta FEM$

c)Kẻ MN vuông góc EF tại N. Chứng minh khi M di chuyển trên BC thì MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn



a) Năm điểm A,E,M,O,F thuộc một đường tròn và $BE.BA = BO.BM$

* Do $AEM = AOM = AFM = 90° \Rightarrow E,O,F$ cùng thuộc đường tròn đường kính AM

Hay năm điểm A,E,M,O,F thuộc một đường tròn đường kính AM

* Xét ΔBEM và ΔBOA có:

$BEM = AOB\left(=90°\right)$

ABO là góc chung $\Rightarrow \Delta BEM \backsim \Delta BOA\left(g-g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{BE}{BO} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow BE.BA = BM.BO$

b) Kẻ tiếp tuyến của (O) tại A cắt MF tại K chứng minh $ME = KF$ và kẻ đường kính AD, kẻ ME cắt DC tại H. Chứng minh $\Delta MDH = \Delta FEM$

* Vì A là điểm chính giữa cung BC, BC là đường kính $\Rightarrow$ sđ AB nhỏ = sđ AC nhỏ = $90°$

$\Rightarrow \begin{cases} EBM = 45° \\ KAF = 45° \end{cases} \Rightarrow \Delta EBM, \Delta FAK$ vuông cân $\Rightarrow EM = EB; FA = FK$

Lại có tứ giác $AEMF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật $\Rightarrow ME = FA$

Suy ra $ME = KF$

***Chứng minh tương tự trên ta có:** $ME = DH$

$ACD = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AB \,||\, CD$ (cùng vuông góc với AC)

Mà $HE \perp AB\left(GT\right) \Rightarrow HE \perp CD \Rightarrow MHC = 90°$

$\Rightarrow MHCF$ là tứ giác có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

Mặt khác CM là tia phân giác của $ACD \Rightarrow MHCF$ là hình vuông $\Rightarrow MF = MH$

* Xét ΔMDH và ΔFEM có:

$ME = DH$ (CMT)

$MF = MH\left(CMT\right)$

$FME = MHD\left(=90°\right)$

$\Rightarrow \Delta MDH = \Delta FEM\ \left(2cgv\right)$

c) Chứng minh khi M di chuyển trên BC thì MN luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi $\left(Q\right)$ là đường tròn đi qua các điểm M, O, F, A, P, E.

Vì A là điểm nằm chính giữa cung $BC \Rightarrow BAO = 45^0 \Rightarrow EQO = 90^0$ (tính chất góc nội tiếp và góc ở tâm) Suy ra $OQ \perp EF$

Trong tam giác AMD có OQ là đường trung bình nên $OQ // MD \Rightarrow MD \perp EF$

mà $MN \perp EF \Rightarrow M, D, N$ thẳng hàng. Vì BC cố định nên D cố định.

Vậy MN luôn đi qua điểm D cố định.

Câu 5.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đoạn thẳng MP, lấy điểm N bất kì nằm giữa M và P. Vẽ $\left(O\right)$ đường kính NP. Lấy H là trung điểm MN. Qua H kẻ đường thẳng d vuông góc với MN. Kẻ tiếp tuyến HQ với $\left(O\right)$ tại Q. Tia PQ cắt d tại K. Chứng minh:

a) Tứ giác $KHNQ$ nội tiếp và $NPQ = HKN$.

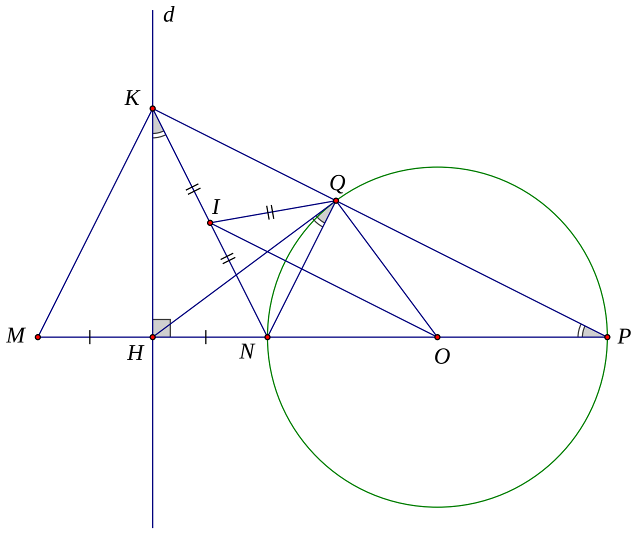
b) $MKP = 90°$ và $PQ.PK = PN.PH$.

c) $HQ^2 + PQ.PK = PH^2$ và cho $HKN = 30°$, $R = 6$ cm. Tính diện tích hình quạt NOQ.

d) Lấy I là trung điểm KN. Chứng minh chu vi đường tròn ngoại tiếp ΔQOI không đổi khi N di chuyển trên MP.

Hướng dẫn

a) Tứ giác $KHNQ$ nội tiếp và $NPQ = HKN$.



Vì $Q \in (O)$ đường kính NP

$\Rightarrow NQP = 90° \Rightarrow NQK = 90°$

Xét tứ giác $KHNQ$ có KHN và KQN là hai góc đối nhau, mà $KHN + KQN = 90° + 90° = 180°$

Suy ra tứ giác $KHNQ$ nội tiếp (dhnb)

Vì $KHNQ$ là tứ giác nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow HKN = HQN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung NH) (1)

Xét (O) có: NPQ là góc nội tiếp chắn cung NQ

HQN là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn NQ $\Rightarrow NPQ = HQN$ ($= \frac{1}{2}$ sđ NQ) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow NPQ = HKN$ (đpcm).

b) $MKP = 90°$ và $PQ.PK = PN.PH$.

Xét ΔKHM và ΔKHN có: KH chung; $KHM = KHN = 90°$; $MH = HN$ (gt)

$\Rightarrow \Delta KHM = \Delta KHN$ (c-g-c) $\Rightarrow HKM = HKN$ (hai góc tương ứng)

mà $HKN = NPQ$ (cmt) $\Rightarrow HKM = NPQ$

Xét ΔKHP vuông tại H $\Rightarrow NPQ + HKP = 90° \Rightarrow HKM + HKP = 90° \Rightarrow MKP = 90°$

Xét ΔPQN và ΔPHK có:

Chung P; $PQN = PHK = 90°$

$\Rightarrow \Delta PQN \backsim \Delta PHK$ (g-g) $\Rightarrow \frac{PQ}{PH} = \frac{PN}{PK}$ (các cặp cạnh tương ứng) $\Rightarrow PQ.PK = PN.PH$ (đpcm).

c) $HQ^2 + PQ.PK = PH^2$ và cho $HKN = 30°$, $R = 6$ cm. Tính diện tích hình quạt NOQ.

Xét ΔHQN và ΔHPQ có:

Góc QHP chung; $HQN = HPQ$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta HQN \backsim HPQ$ (g-g) $\Rightarrow \frac{HQ}{HP} = \frac{HN}{HQ}$ (các cặp cạnh tương ứng) $\Rightarrow HQ^2 = HN.HP$

Ta có: $HQ^2 + PQ.PK = HN.HP + PN.PH$ (cmt)

$= PH.(HN + PN) = PH^2$

Xét (O) có: NPQ là góc nội tiếp chắn NQ

NOQ là góc ở tâm chắn NQ

$\Rightarrow NOQ = 2.NPQ \Rightarrow NOQ = 2.HKN = 2.30^\circ = 60^\circ \Rightarrow S_{NOQ} = \dfrac{\pi.6^2.60^\circ}{360^\circ} = 6\pi$ (cm^2)

d) Lấy I là trung điểm KN. Chứng minh chu vi đường tròn ngoại tiếp ΔQOI không đổi khi N di chuyển trên MP.

HI là đường trung bình của ΔNMK $\Rightarrow HI // MK$ (tính chất đường trung bình tam giác)

$\Rightarrow NIH = NKM$ (hai góc đồng vị)

OI là đường trung bình của $\Delta NKP \Rightarrow OI // KP \Rightarrow NIO = NKP$ (hai góc đồng vị)

Do đó: $NIH + NIO = NKM + NKP \Rightarrow HIO = MKP$

mà $MKP = 90^\circ \Rightarrow HIO = 90^\circ \Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính HO

Vì HQ là tiếp tuyến của (O) tại $Q \Rightarrow HQO = 90^\circ$

$\Rightarrow O$; Q thuộc đường tròn đường kính HO

Do đó: ΔQIO nội tiếp đường tròn đường kính $HO = \dfrac{MP}{2}$ có chu vi đường tròn không đổi và bằng $\dfrac{MP.\pi}{2}$ khi N di chuyển trên MP.

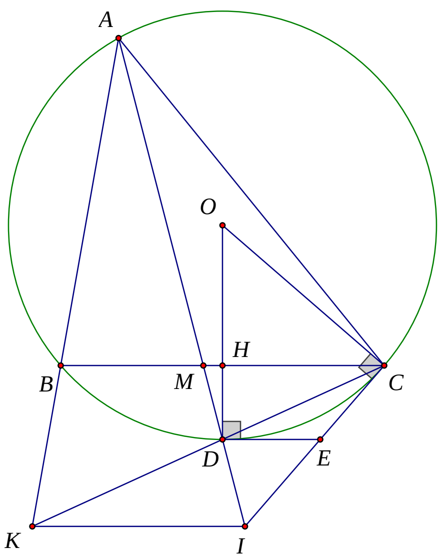
Câu 6.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ với dây BC cố định (BC không đi qua O). Điểm A thuộc cung lớn CB. Đường phân giác BAC cắt (O) tại D, các tiếp tuyến tại C và D của (O) cắt nhau tại E, tia CD cắt AB tại K, đường thẳng AD cắt CE tại I. Gọi AD cắt BC tại M

a) Chứng minh: $BC//DE$ và bốn điểm A, K, I, C thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $AB.AC = AM.AD$ và chứng minh $AB.AC = AM^2 + MB.MC$

c) Cho $BC = R\sqrt{3}$, $R = 6cm$ tính l_{BC} cung nhỏ BC.

Hướng dẫn



a) Chứng minh: $BC//DE$ và bốn điểm A, K, I, C thuộc một đường tròn.

* Có $CDE = CAD$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung với góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$CAD = DAB\,(GT)$

$DAB = BCD$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung với góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Suy ra $CDE = BCD$

Mà hai góc này ở vị trí sole trong

Suy ra $BC \parallel DE$

Cách khác: $CAD = DAB(GT)$ suy ra $BD = CD \Rightarrow BD = CD$ suy ra OD là đường trung trực của BC. Suy ra BC vuông góc với OD. Mà DE vuông góc với OD (tiếp tuyến) nên suy ra BC//DE.

* Có $AKC = \frac{1}{2}(\text{sđ } AC - \text{sđ } BD)$ (góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn)

$AIC = \frac{1}{2}(\text{sđ } AC - \text{sđ } CD)$ (góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn)

Mà $BD = CD\left(BAD = CAD\right)$

$\Rightarrow AKC = AIC$

$\Rightarrow K, I$ là hai đỉnh kề nhau nhìn đoạn AC dưới hai góc bằng nhau

$\Rightarrow AKIC$ là tứ giác nội tiếp (Cách khác là chứng minh tương tự như vậy cho góc KAI và góc KCI). Hay A, K, I, C thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $AB.AC = AM.AD$ và chứng minh $AB.AC = AM^2 + MB.MC$

* Xét ΔABM và ΔADC có:

$ABM = ADC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$MAB = CAD(GT)$

$$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta ADC(g-g) \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AB.AC = AM.AD(1)$$

* Xét ΔABM và ΔCDM có:

$ABM = MDC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$AMB = DMC$ (hai góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta CDM(g-g) \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{BM}{DM} \Rightarrow MB.MC = AM.DM(2)$$

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow AB.AC = AM.AD = AM(AM + MD)$

$\Rightarrow AB.AC = AM^2 + AM.MD$

$\Rightarrow AB.AC = AM^2 + MB.MC$ (ĐPCM)

c) Cho $BC = R\sqrt{3}$, $R = 6cm$ tính l_{BC} cung nhỏ BC.

Gọi giao điểm của BC và OD là H

Vì D là điểm chính giữa cung BC nhỏ

$\Rightarrow OD \perp BC$ tại H; $HB = HC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$

Vì ΔOHB vuông tại H nên $\sin BOH = \frac{BH}{OB} = \frac{R\sqrt{3}}{2.R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BOH = 60° \Rightarrow BOC = 120°$

$$l_{BC}=\frac{\pi.R.120}{180}=\frac{2\pi.R}{3}\approx\frac{2.3,14.6}{3}=12,56(cm)$$

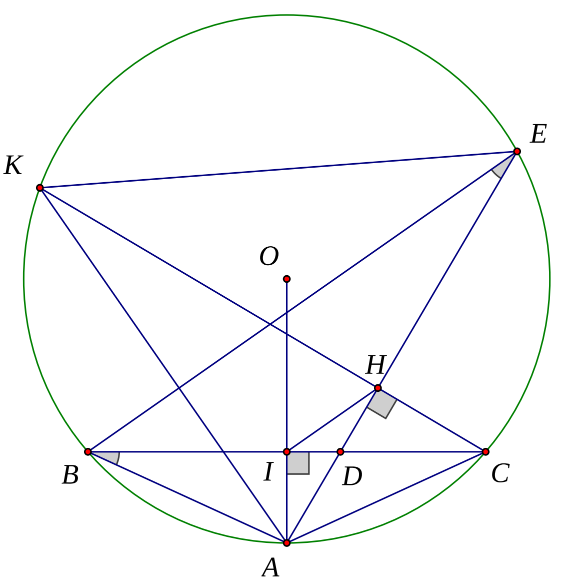
Câu 7.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O,R) với dây BC cố định (BC không đi qua O). Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Điểm E thuộc cung lớn BC, AE cắt BC tại D, kẻ $CH\perp AE$ tại H, gọi AO cắt BC tại I, CH cắt (O) tại K.

a) Chứng minh: Bốn điểm A,H,I,C thuộc một đường tròn và tích $AD.AE$ không đổi khi E di chuyển trên cung lớn BC.

b) Chứng minh $IH // BE$ và cho sđ $KE=100°$, $R=6cm$. Tính độ dài cung BAC.

c) Chứng minh: BA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔBED.

Hướng dẫn



a) Chứng minh: Bốn điểm A,H,I,C thuộc một đường tròn và tích $AD.AE$ không đổi khi E di chuyển trên cung lớn BC

Ta có: $CH\perp AE\Rightarrow CHA=90°$

Vì A là điểm chính giữa cung BC nên

$OA\perp BC\Rightarrow AIC=90°$

Xét tứ giác $AHIC$ có $AHC=AIC=90°$

Suy ra hai điểm H,I cùng nhìn cạnh AC dưới 1 góc vuông.

Do đó tứ giác $AHIC$ nội tiếp đường tròn hay bốn điểm A,H,I,C thuộc một đường tròn.

Vì A là điểm chính giữa cung BC nên $AB=AC$ và A cố định.

Xét ΔADC và ΔACE có:

DAC chung; $ACD=AEC$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Do đó $\Delta ADC\backsim\Delta ACE(g.g)\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AE}\Rightarrow AD.AE=AC^2$

Mà AC cố định, Do đó tích $AD.AE$ không đổi khi E di chuyển trên cung lớn BC.

b) Chứng minh $IH // BE$ và cho sđ $KE=100°$, $R=6cm$. Tính độ dài cung BAC.

Vì tứ giác $AHIC$ nội tiếp đường tròn nên $DHI=ACI$.

Xét (O) có $ACI=BED$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB).

Do đó $DHI=BED$, mà hai góc ở vị trí so le trong

Nên $IH // BE$.

Ta có: $AHC = \dfrac{\left(sd\,KE + sd\,AC\right)}{2} \Leftrightarrow 90^0 = \dfrac{\left(100^0 + sd\,AC\right)}{2} \Rightarrow sd\,AC = 80^0$.

Do đó $sd\,BC = 160^0 \Rightarrow BOC = 160^0$.

Độ dài cung BAC là: $l = \dfrac{\pi.6.160^0}{180^0} = \dfrac{16\pi}{3}\,cm$.

c) Chứng minh: BA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔBED.

Vì cung $AB = AC$ nên góc $ABC = AEB$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Suy ra AB là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔBED (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp)

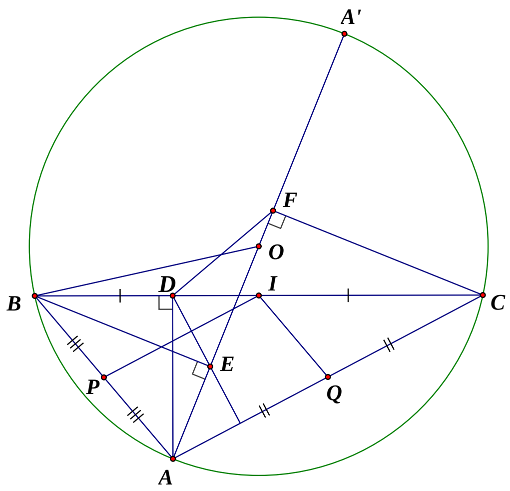
Câu 8.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) , dây cung BC $(O \notin BC)$. Điểm A thuộc cung nhỏ BC, (A khác B và C, độ dài AB khác AC). Kẻ đường kính AA' của (O), D là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC, Hai điểm $E,\ F$ lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ $B,\ C$ đến AA'.

a) Chứng minh: Bốn điểm $A,\ B,\ D,\ E$ thuộc một đường tròn và $BD.AC = AD.AC$.

b) Chứng minh: $DF\,//\,BA$ và DE vuông góc với AC.

c) Cho $ACB = 30°; R = 6cm.$ Tính $S_{quat}BOA$ và chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Hướng dẫn



a) $BDA = BEA = 90°$ nên $A,\ B,\ D,\ E$ thuộc một đường tròn.

b)Tương tự câu a) suy ra A, D, F, C thuộc một đường tròn.

Ta có $DFA = DCA = BA'A$ suy ra $DF\,//\,BA$.

* $A,\ B,\ D,\ E$ thuộc một đường tròn nên $ABE = ADE.$

Mà $ABE = BA'A$(cùng phụ BAE.)

Nên $ADE = BA'A = DCA$, Suy ra DE vuông góc với AC.

c) $ACB = 30° = BA'A \Rightarrow BOA' = 120°$

$\Rightarrow S_{quat}BOA = \dfrac{\pi.6^2.120}{360} = 12\pi\left(cm^2\right).$

* Gọi $I,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của $BC,\ BA,\ AC$. Suy ra I cố định vì BC cố định.

\+ Vì $PD = PE$ nên tam giác PDE cân tại P , mà $PI\,//\,AC, DE \perp AC$ nên $DE \perp PI$ hay PI là đường trung trực của DE (1)

\+ Chứng minh tương tự ta có QI là trung trực của DF (2)

Từ (1), (2) suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là I, một điểm cố định.

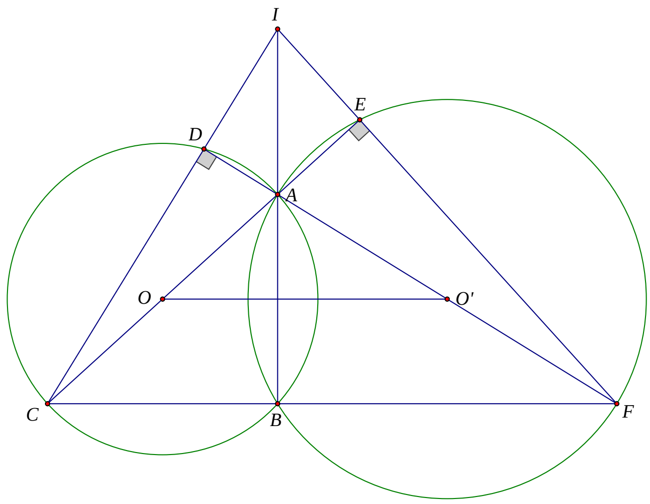
Câu 9.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại A,B (O và O' thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Đường thẳng AO cắt (O) tại điểm C và cắt đường tròn (O') tại E. Đường thẳng AO' cắt (O) tại điểm D và cắt đường tròn (O') tại F.

a) Chứng minh: C,B,F thẳng hàng và tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $AD.AF = AE.AC$ và AB,CD,EF đồng quy.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: C,B,F thẳng hàng và tứ giác $CDEF$ nội tiếp.



Vì ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính AC

nên $ABC = 90^\circ$

Vì ΔABF nội tiếp đường tròn đường kính AF

nên $ABF = 90^\circ$

Suy ra, C và F cùng thuộc đường vuông góc với AB tại B

Do đó, C, B, F thẳng hàng.

Có: $CDA = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O)

$AEF = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O')

$\Rightarrow CDA = AEF$ Mà 2 góc cùng nhìn cạnh CF nên tứ giác $CDEF$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh: $AD.AF = AE.AC$ và AB,CD,EF đồng quy.

Xét ΔCDA và ΔFEA có:

$CDA = AEF$ (cmt)

$DAC = EAF$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta CDA \backsim \Delta FEA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AE}{AF} \Rightarrow AD.AF = AC.AE$

Gọi giao điểm của CD và EF là I

Xét ΔICF có : CE, FD là đường cao

Mà $CE \cap FD = \{A\}$ nên A là trực tâm của ΔICF

Lại có, $AB \perp CF \Rightarrow IB \perp CF$ hay AB,CD,EF đồng quy tại I.

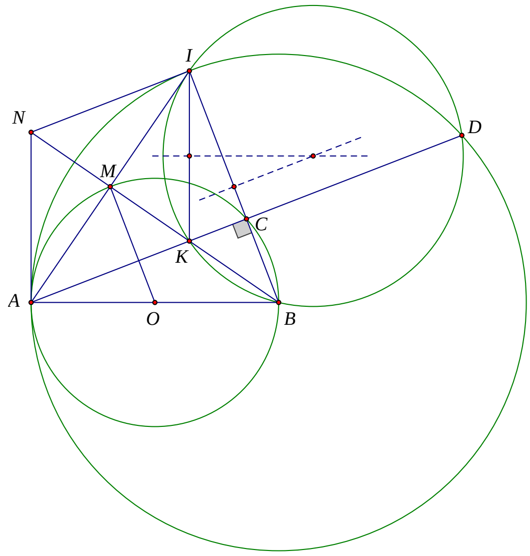
Câu 10.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy điểm C thuộc (O) (C không trùng A, B), M là điểm chính giữa cung nhỏ AC. Các đường thẳng AM và BC cắt nhau tại I, các đường thẳng AC, BM cắt nhau tại K.

a) Chứng minh: ΔABI cân, tứ giác $MICK$ nội tiếp.

b) Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở N. Chứng minh đường thẳng NI là tiếp tuyến của đường tròn $(B;BA)$ và $NI \perp MO$.

c) Đường tròn ngoại tiếp ΔBIK cắt đường tròn $(B;BA)$ tại D (D không trùng với I). Chứng minh ba điểm A, C, D thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) Chứng minh: ΔABI cân, tứ giác $MICK$ nội tiếp.

* Xét (O) có: $sđ\, AM = sđ\, MC$ (M là điểm chính giữa cung AC)

$\Rightarrow ABM = IBM$ (hệ quả góc nội tiếp)

Và $AMB = ACB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow BM \perp AI, AC \perp BI$

Trong ΔABI có BM vừa là đường cao ($BM \perp AI$) vừa là đường phân giác ($ABM = IBM$)

Do đó ΔABI cân tại B.

* Xét tứ giác $MICK$ có: $KMI = 90^\circ$ ($BM \perp AI$); $KCI = 90^\circ$ ($AC \perp BI$)

$\Rightarrow KMI + KCI = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà đây là hai góc có đỉnh đối nhau trong tứ giác $MICK$

Nên tứ giác $MICK$ nội tiếp.

b) Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở N. Chứng minh đường thẳng NI là tiếp tuyến của đường tròn $(B;BA)$ và $NI \perp MO$.

* Xét ΔABN và ΔIBN có:

$AB = BI$ (do ΔABI cân tại B)

$ABN = IBN$ (cmt)

BN chung

Do đó $\Delta ABN = \Delta IBN$ (c.g.c) $\Rightarrow NAB = NIB$ (2 góc tương ứng)

Mà $NAB = 90^\circ$ nên $NIB = 90^\circ$ $\Rightarrow NI \perp BI$

Ta có: $NI \perp BI$ (cmt) mà $I \in (B;BA)$ (do $BI = BA$)

Vậy NI là tiếp tuyến của đường tròn $(B;BA)$.

* Xét ΔABI có M là trung điểm của AI, O là trung điểm của AB

$\Rightarrow MO$ là đường trung bình của ΔABI $\Rightarrow MO // BI$ mà $NI \perp BI$ (cmt). Vậy $NI \perp MO$.

c) Đường tròn ngoại tiếp ΔBIK cắt đường tròn $(B;BA)$ tại D (D không trùng với I). Chứng minh ba điểm A, C, D thẳng hàng

Ta có: $IDK = IBM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung IK của đường tròn ngoại tiếp ΔIBK).

Mà $IDA = \frac{1}{2} IBA = IBM$ (IDA và IBA là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn AI của $\left(B; BA\right)$,

BN là tia phân giác của IBA).

Do đó: $IDK = IDA$ nên hai tia DK và DA trùng nhau.

$\Rightarrow$ D, K, A thẳng hàng mà C, K, A thẳng hàng nên D, K, A, C thẳng hàng.

Vậy ba điểm A, C, D thẳng hàng.

Câu 11.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ $(AB < CD)$. Gọi P là điểm chính giữa của cung nhỏ $AB; DP$ cắt AB tại E và cắt CB tại $K; CP$ cắt AB tại F và cắt DA tại I.

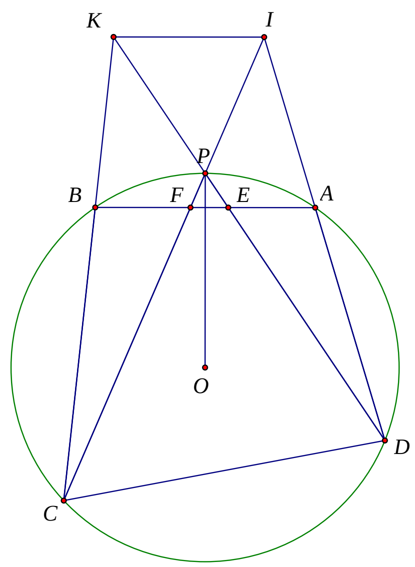
a) Chứng minh tứ giác $CKID; CDFE$ nội tiếp.

b) Chứng minh $IK // AB$ và $AP^2 = PE.PD = PF.PC$.

c) Chứng minh AP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAED.

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác $CKID; CDFE$ nội tiếp.



Ta có:

$$CKD = \frac{sd\,CD - sd\,BP}{2};\ CID = \frac{sd\,CD - sd\,AP}{2}$$

Mà $BP = AP \Rightarrow CKD = CID \Rightarrow$ Tứ giác $CKID$ nội tiếp.

Ta có:

$$BFC = \frac{sd\,CB + sd\,PA}{2} \Rightarrow BFC = \frac{sd\,CB + sd\,PB}{2} = \frac{sd\,PC}{2}$$

$$EDC = \frac{sd\,PC}{2} \Rightarrow BFC = EDC \Rightarrow \text{Tứ giác } CFED \text{ nội tiếp.}$$

b) Chứng minh $IK // AB$ và $AP^2 = PE.PD = PF.PC$.

Ta có tứ giác $CKID$ nội tiếp $\Rightarrow KIC = KDC$

Mà $BFC = EDC \Rightarrow KIC = BFC \Rightarrow IK // AB$

Ta có: $PEA = \dfrac{sd\,BD + sd\,PA}{2} \Rightarrow PEA = \dfrac{sd\,BD + sd\,PB}{2} = \dfrac{sd\,PD}{2}$

Mà $PAD = \dfrac{sd\,PD}{2} \Rightarrow PEA = PAD$

Từ đó chỉ ra $\Delta PEA \backsim \Delta PDA\ (g-g) \Rightarrow AP^2 = PE.PD$

Chứng minh tương tự ta được $BP^2 = PF.PC$

Mà $AP = BP \Rightarrow AP = BP \Rightarrow AP^2 = PE.PD = PF.PC$

c) Chứng minh AP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAED.

Trên nửa mặt phẳng bờ EA chứa điểm P, vẽ tia Ax là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAED

$\Rightarrow xAE = ADE$ mà $PAE = ADE \Rightarrow Ax \equiv AP$

$\Rightarrow AP$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAED

Câu 12.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, M là điểm chính giữa cung AB (K khác M và B), AK cắt MO tại I. Gọi H là hình chiếu của M lên AK.

a) Chứng minh tứ giác $OIKB$, $AMHO$ nội tiếp.

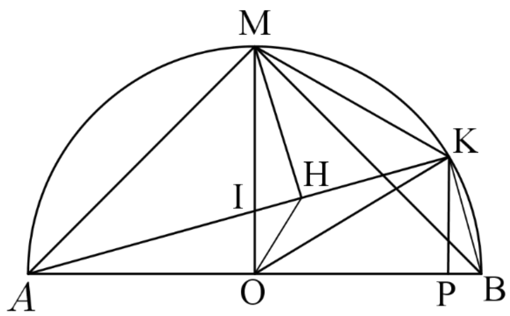
b) Chứng minh ΔHMK cân và $AM^2 = AI.AK$.

c) Chứng minh $HOK = MAK$ và cho $MIK = 60^o, R = 6cm$. Tính $S_{quat}KOB$.

d) Xác định vị trí điểm K để chu vi tam giác OPK lớn nhất (P là hình chiếu của K lên AB).

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác $OIKB$, $AMHO$ nội tiếp.



Ta có M là điểm chính giữa cung AB $\Rightarrow \Delta AMB$ vuông cân tại $M \Rightarrow MO \perp AB$

$\Rightarrow AOM = MOB = 90^o$ Hay $IOB = 90^o$

Ta có $AKB = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) Hay $IKB = 90^o$

Tứ giác $OIKB$ có $IOB + IKB = 180^o \Rightarrow OIKB$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $AMHO$ có $AOM = 90^o$ (chứng minh trên)

$AHM = 90^o$ (H là hình chiếu của M lên AK)

Suy ra $AOM = AHM = 90^o$, mà đây là hai góc có đỉnh kề nhau của tứ giác $AMHO$

Suy ra tứ giác $AMHO$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh ΔHMK cân và $AM^2 = AI.AK$.

Ta có $AKM = ABM$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

mà $ABM = 45^o$ (ΔAMB vuông cân tại M - cmt)

$\Rightarrow AKM = 45^o \Rightarrow HKM = 45^o$

Xét ΔHMK vuông tại H có $HKM = 45^o$ nên ΔHMK cân.

Xét ΔAMB vuông tại M, MO là đường cao có: $AM^2 = AO.AB$ (1) (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Ta có $\Delta AOI \backsim \Delta AKB(g-g) \Rightarrow \dfrac{AO}{AK} = \dfrac{AI}{AB} \Rightarrow AO.AB = AI.AK(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AM^2 = AI.AK$

c) Chứng minh $HOK = MAK$ và cho $MIK = 60^o, R = 6cm$. Tính $S_{quat}KOB$.

$\Delta OMH = \Delta OKH\ (c-c-c) \Rightarrow MOH = KOH$

Mặt khác $MAH = MOH$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MH)

$\Rightarrow MAH = HOK \Rightarrow MAK = HOK$

Ta có: $MIK = AIO = 60^o$ (hai góc đối đỉnh)$\Rightarrow IAO = 30^o$ (vì phụ với AIO) $\Rightarrow KAB = 30^o$

Ta có: $KOB = 2KAB$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung KB)$\Rightarrow KOB = 60^o$

$S_{quat}KOB = \dfrac{\pi.6^2.60^o}{360^o} = 6\pi(cm^2)$

d) Xác định vị trí điểm K để chu vi tam giác OPK lớn nhất (P là hình chiếu của K lên AB).

Ta có ΔOPK vuông tại $P \Rightarrow PO^2 + PK^2 = OK^2 = R^2$ (định lí Py-ta-go)

Chu vi $\Delta OPK : OK + PO + PK$

Ta có $OK + PO + PK \le OK + \sqrt{2(PO^2 + PK^2)} = R + \sqrt{2.R^2} = \left(1+\sqrt{2}\right)R$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $PO = PK$

$\Rightarrow \Delta OPK$ vuông cân tại $P \Rightarrow KOP = 45^o \Rightarrow K$ nằm chính giữa cung MB.

Câu 13.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O),(I)$ tiếp xúc ngoài tại A. Một đường thẳng d tiếp xúc với $(O),(I)$ lần lượt tại B,C. Gọi tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn cắt BC tại M, tia BA cắt (I) tại D, CA cắt (O) tại E.

a) Chứng minh tứ giác $BMAO$ nội tiếp và ΔABC vuông.

b) Chứng minh $OMI = 90°$ và cho $OA = 9cm, AI = 4cm$.Tính BC.

c) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường trong đường kính OI và $S_{\Delta AED} = S_{\Delta ABC}$.

Hướng dẫn

a) + Tứ giác $BMAO$ có:

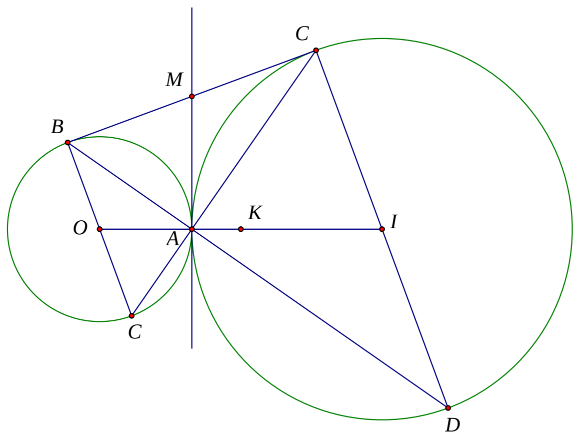
$MBO = 90°$ (tính chất tiếp tuyến)

$MAO = 90°$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow MBO + MAO = 180°$.

$\Rightarrow$Tứ giác $BMAO$ nội tiếp.

+ Trong đường tròn (O) ta có $MA = MB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)



Trong đường tròn (I) ta có $MA = MC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow MA = MB = MC = \dfrac{1}{2}BC$

Tam giác ABC có đường trung tuyến AM ứng với cạnh huyền BC và bằng nửa cạnh BC nên tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có :

MO là tia phân giác BMA (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

MI là tia phân giác AMC (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow OMI = 90^\circ$. Mà $MA \perp OI$ (tính chất tiếp tuyến)

Theo hệ thực lượng trong tam giác vuông ta có :

$MA^2 = OA.AI = 9.4 = 36cm \Rightarrow MA = 6cm$. Mà $MA = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BC = 2.MA = 2.6 = 12cm$.

c) + Gọi đường tròn đường kính OI là (K)

Tam giác OMI vuông tại M và đường trung tuyến MK nên $MK = MO = MI$ (1)

MK là đường trung bình của hình thang $BOIC$ nên $MK // BO \Rightarrow MK \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OI .

+ $BAC = 90^\circ \Rightarrow BAE = 90^\circ \Rightarrow BE$ là đường kính của (O)

$BAC = 90^\circ \Rightarrow CAD = 90^\circ \Rightarrow CD$ là đường kính của (I).

Ta có :

$\Delta BAO \backsim \Delta DAI\,(g-g) \Rightarrow \frac{BA}{DA} = \frac{OB}{ID}$

$\Delta AEO \backsim \Delta ACI\,(g-g) \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{OE}{IC}$

$\Rightarrow \frac{BA}{DA} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow BA.AC = AD.AE$. Vậy $\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AE.AD}{\frac{1}{2}.BA.AC} = 1 \Rightarrow S_{\Delta AED} = S_{\Delta ABC}$.

Câu 14.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính BD. Kéo dài AB và CD cắt nhau tại E ; CB và DA cắt nhau tại F . Góc $ABC > 90^0$.

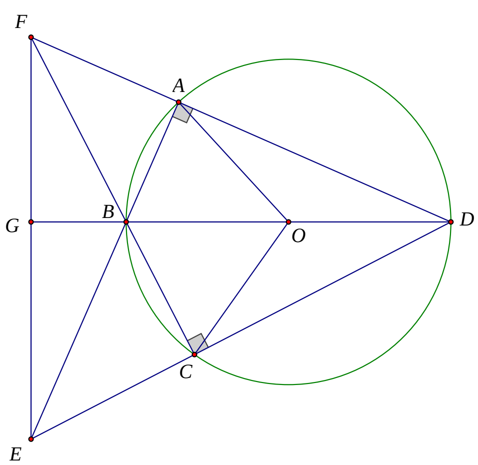
a) Chứng minh: $ACEF$ là tứ giác nội tiếp và $BD \perp EF$.

b) Chứng minh: $BA.BE = BC.BF$ và BD cắt FE tại G, chứng minh B là tâm đường tròn nội tiếp

c) Cho góc $ABC = 135^0$. Tính AC theo BD.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: $ACEF$ là tứ giác nội tiếp và $BD \perp EF$.



* Có $BAD = BCD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow FAE = FCE = 90^\circ \Rightarrow A, C$ là hai đỉnh kề nhau nhìn đoạn FE dưới hai góc bằng nhau

$\Rightarrow ACEF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính EF.

* Xét ΔFED có: EA, FC là hai đường cao ;

$EA \cap FC = \{B\} \Rightarrow B$ là trực tâm của ΔFED

$\Rightarrow DB \perp FE$ (ĐPCM)

b) Chứng minh: $BA.BE = BC.BF$ và BD cắt FE tại G, chứng minh B là tâm đường tròn nội tiếp ΔACG .

* Xét ΔABF và ΔCBE có:

$\widehat{AFB} = \widehat{CEB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung); $\widehat{ABF} = \widehat{CBE}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta ABF \backsim \Delta CBE\left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{BF}{BE} \Rightarrow BA.BE = BF.BC$

* Vì $DB \perp FE \Rightarrow \widehat{BGE} = 90^\circ$

Xét tứ giác $EGBC$ có $\widehat{BGE} + \widehat{BCE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. mà hai góc này ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $EGBC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{GCB} = \widehat{GEB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Lại có $\widehat{GEB} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$\Rightarrow \widehat{GCB} = \widehat{ACB}\left(= \widehat{GEB}\right) \Rightarrow CB$ là tia phân giác của $\widehat{GCA}$

Chứng minh tương tự AB là tia phân giác của $\widehat{GAC}$

Vì $AB \cap CB = \left\{B\right\} \Rightarrow B$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔACG

c) Cho góc $\widehat{ABC} = 135^0$. Tính AC theo BD.

Gọi O là tâm đường tròn đường kính BD.

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 2.45^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta AOC$ vuông cân tại $O \Rightarrow AC = \dfrac{AO}{\sin \widehat{CAO}} = \dfrac{R}{\sin 45^\circ} = R\sqrt{2}$ mà $BD = 2R \Rightarrow AC = \dfrac{BD\sqrt{2}}{2}$

Câu 15.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O đường kính AB và điểm C trên đường tròn sao cho $CA = CB$. Gọi M là trung điểm của dây AC; nối BM cắt cung AC tại E; AE và BC kéo dài cắt nhau tại D.

a) Chứng minh: Tứ giác $DEMC$ nội tiếp và $DE.DA = DC.DB$

b) Chứng minh: Tứ giác $COMD$ là hình bình hành và kẻ $EF \perp AC$. Tính tỉ số $\dfrac{MF}{EF}$

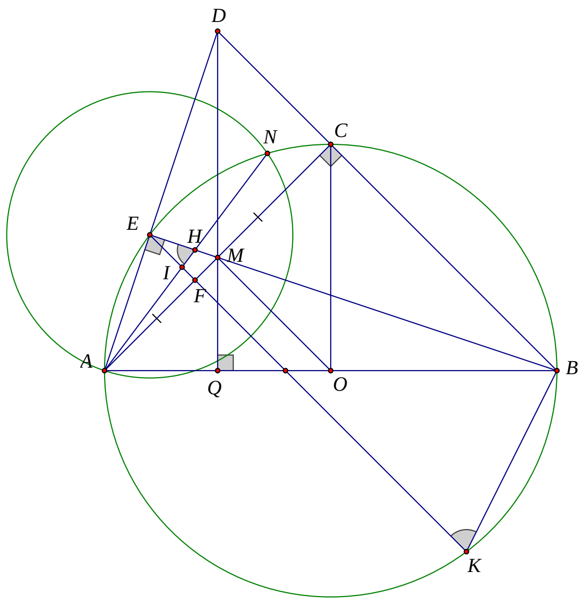
c) Cho $MO = 3cm$. Tính $S_{quat}COA$ và $AE.AD + BM.BE = AB^2$

d) Vẽ đường tròn tâm E bán kính EA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N; EF cắt AN tại I, cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K; BE cắt AN tại H chứng minh tứ giác $BHIK$ nội tiếp được đường tròn.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: Tứ giác $DEMC$ nội tiếp và

$DE.DA = DC.DB$



Ta có: AEB, ACB là hai góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $AEB = 90^0$, $ACB = 90^0$

Xét tứ giác $DEMC$ có: $MED + MCD = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau của tứ giác $DEMC$

Suy ra tứ giác $DEMC$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

Xét ΔACD và ΔBED có $DAC = DBE$ (hai góc chắn cùng 1 cung)

và $ACD = BED = 90^0$

Vậy $\Delta ACD \backsim \Delta BED(g-g)$. Suy ra $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{DE}{DB} \Rightarrow DE.DA = DC.DB$.

b) Chứng minh: Tứ giác $COMD$ là hình bình hành. Tính tỉ số $\dfrac{MF}{EF}$

Xét ΔABD có $\begin{cases} AC \perp BD \\ BE \perp AD \end{cases} \Rightarrow DM \perp AB$ (vì M là trực tâm ΔDAB)

Mà $CO \perp AB$. Suy ra $DM \parallel CO$

Xét ΔABC có $AM = MC$ và $AO = OB$. Suy ra $OM \parallel BC$ (tính chất đường trung bình) $\Rightarrow OM \parallel DC$

Xét tứ giác $COMD$ có $DM \parallel CO$ và $OM \parallel DC$, Vậy tứ giác $COMD$ là hành bình hành (dhbn)

Vì $\begin{cases} EF \perp AC \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow EF // BC$. Suy ra $\dfrac{MF}{EF} = \dfrac{MC}{BC} = \dfrac{MC}{AC} = \dfrac{1}{2}$

c) Cho $MO = 3cm$. Tính $S_{quat}COA$ và $AE.AD + BM.BE = AB^2$

Từ giả thiết các em tính được $MA = MC = MO = 3cm \Rightarrow R = AO = \sqrt{AM^2 + MO^2} = 3\sqrt{2}\ cm$.

Diện tích hình quạt COA bằng $\dfrac{1}{4}$ diện tích hình tròn nên $S_{quat}COA = \dfrac{1}{4}.\pi.\left(3\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{9\pi}{2}\left(cm^2\right)$.

Kéo dài MD cắt AB tại Q.

Chỉ ra H là trực tâm $\Delta DAB \Rightarrow DQ \perp AB$.

Từ đó chỉ ra $\begin{cases} \Delta AQD \backsim \Delta AEB(g-g) \\ \Delta BMQ \backsim \Delta BAE(g-g) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AE.AD = AQ.AB \\ BM.BE = BQ.AB \end{cases}$

$AE.AD + BM.BE = AB(AQ + QB) = AB^2$

d) Chứng minh tứ giác $BHIK$ nội tiếp được đường tròn.

Các em chỉ ra $EHA = \frac{1}{2}\left(sd\,AE + sd\,NB\right) = \frac{1}{2}\left(sd\,NE + sd\,NB\right) = \frac{1}{2}sd\,EB = EKB$.

Xét tứ giác $BHIK$ có $IHB + IKB = IHB + IHE = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau của tứ giác $BHIK$ nên tứ giác $BHIK$ là tứ giác nội tiếp.

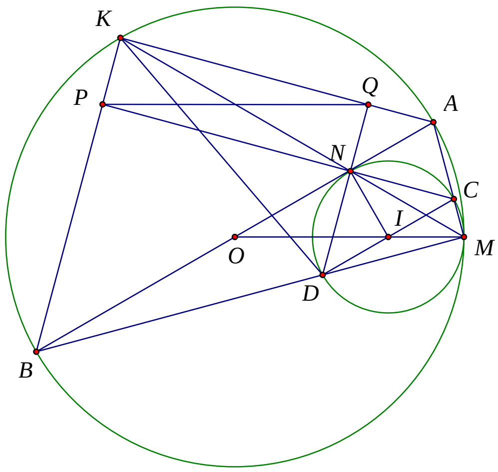
Câu 16.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ tiếp xúc trong với $(I;r)$ tại M với $R \geq 2r$. Đường kính AB của (O) tiếp xúc với (I) tại N. MA, MB cắt (I) tại C, D.

a) Chứng minh: $CD\,//\,AB$ và MN là phân giác của AMB

b) MN cắt (O) tại K. Chứng minh $KA = KB$ và tích $KM.KN$ không đổi.

c) Cho $R = 6cm$, gọi CN cắt KB tại P, DN cắt AK tại Q. Tìm chu vi nhỏ nhất ΔNPQ ?

Hướng dẫn



a) Chứng minh: $CD\,//\,AB$ và MN là phân giác của AMB

Ta có $AMB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow CMD = 90°$

Xét ΔCMD có $CMD = 90°$ (cmt) suy ra ΔCMD nội tiếp đường tròn (I) đường kính CD.

Xét ΔBOM có $OB = OM = R$ $\Rightarrow \Delta BOM$ cân tại O nên

$OBM = OMB$

Xét ΔMDI có $ID = IM = r$ $\Rightarrow \Delta MDI$ cân tại I nên

$IDM = IMD$ mà $IMD = OMB$ suy ra: $OBM = IDM$

Do 2 góc $OBM; IDM$ ở vị trí đồng vị nên $CD\,//\,AB$ (đpcm)

Vì $CD\,//\,AB$ (cmt) mà $IN \perp AB$ (do AB là tiếp tuyến của đường tròn (I)) $\Rightarrow CD \perp IN$

Do đó N là điểm chính giữa CD $\Rightarrow CN = DN \Rightarrow CMN = DMN$ hay $AMN = BMN$

Vậy MN là phân giác của AMB (đpcm)

b) MN cắt (O) tại K. Chứng minh $KA = KB$ và tích $KM.KN$ không đổi.

Vì $AMN = BMN$ (cmt) nên $AMK = BMK$ $\Rightarrow AK = BK \Rightarrow AK = BK$ (đpcm)

Vì $BK = AK \Rightarrow KBA = KAB = AMB$.

Từ đó các em chỉ ra $\Delta KBN \backsim \Delta KMB(g-g) \Rightarrow \frac{KN}{KB} = \frac{KB}{KM} \Rightarrow KN.KM = KB^2$

Vì A, B cố định nên K cố định, suy ra KB không đổi.

Vậy $KN.KM$ không đổi (đpcm)

c) Cho $R = 6cm$, gọi CN cắt KB tại P, DN cắt AK tại Q. Tìm chu vi nhỏ nhất ΔNPQ ?

Tam giác KAB vuông cân tại K nên $AK^2+BK^2=AB^2=144 \Leftrightarrow 2AK^2=144 \Leftrightarrow AK=6\sqrt{2}\ cm$.

Ta có: $BKA=90^0$ (góc nt chắn nửa đường tròn tâm O)

$PNQ=DNM=90^0$ (hai góc đối đỉnh)

$$\begin{cases} NMD=NCD=45^0 \\ KAB=KMB=45^0 \\ QNA=BND=NCD=45^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta NQA \text{ vuông cân tại } Q.$$

Xét tứ giác $KPNQ$ có $PKQ=PNQ=NQK=90^0 \Rightarrow KPNQ$ là hình chữ nhật.

Chu vi tam giác NPQ là: $NP+NQ+PQ=KQ+QA+PQ=AK+PQ=6\sqrt{2}+PQ$.

Ta có: $AK^2=(KQ+QA)^2\le 2\left(KQ^2+QA^2\right)=2\left(PN^2+NQ^2\right)=2PQ^2$

$$\Rightarrow PQ^2\ge \frac{AK^2}{2}=\frac{72}{2}=36\Rightarrow PQ\ge 6$$

Do đó $6\sqrt{2}+PQ\ge 6\sqrt{2}+6$.

Dấu bằng xảy ra khi $KPNQ$ là hình vuông.

Vậy chu vi tam giác NPQ nhỏ nhất bằng $6\sqrt{2}+6\ (cm)$

Câu 17.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Một cát tuyến MN quay quanh trung điểm H của OB. Từ A kẻ $Ax\perp MN$, I là trung điểm của MN. Tia BI cắt Ax tại C.

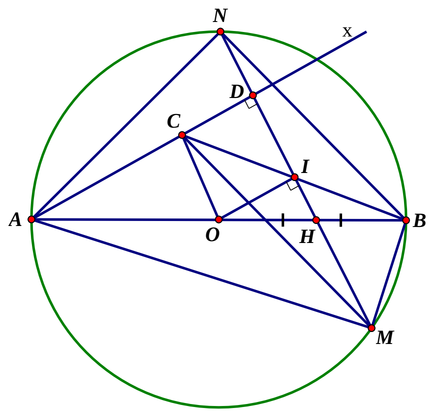
a) Chứng minh: $OI\,//\,Ax$ và tứ giác $BMCN$ là hình bình hành.

b) Chứng minh: C là trực tâm của ΔAMN và $ACO=90°$.

c) Cho $AB=2R,\ AM.AN=3R^2,\ AN=R\sqrt{3}$. Tính diện tích phần hình tròn nằm ngoài ΔAMN.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: $OI\,//\,Ax$ và tứ giác $BMCN$ là hình bình hành.



Do I là trung điểm của $MN \Rightarrow OI\perp MN$, mặt khác:

$$Ax\perp MN\Rightarrow OI//Ax\Rightarrow OI//AC$$

mà O là trung điểm của AB

$\Rightarrow I$ là trung điểm của BC, lại có I là trung điểm của MN (giả thiết)

$\Rightarrow BMCN$ là hình bình hành (vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

b) Chứng minh: C là trực tâm của ΔAMN và $ACO=90°$.

Ta có: $BNA=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BN\perp AN$.

Theo chứng minh trên $BMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow MC // BN \Rightarrow MC \perp AN$, mặt khác: $AD \perp MN \Rightarrow C$ là trực tâm tam giác ΔAMN.

Ta lại có: H là trung điểm của OB, I là trung điểm của $CB \Rightarrow IH$ là đường trung bình của $\Delta OBC \Rightarrow IH // OC$, mà $MN \perp Ax \Rightarrow IH \perp Ax \Rightarrow OC \perp Ax \Rightarrow ACO = 90°$.

c) Cho $AB = 2R,\ AM.AN = 3R^2,\ AN = R\sqrt{3}$. Tính diện tích phần hình tròn nằm ngoài ΔAMN.

Ta có: $AM.AN = 3R^2,\ AN = R\sqrt{3} \Rightarrow AM = AN = R\sqrt{3} \Rightarrow \Delta AMN$ cân đỉnh A (1)

+ Xét ΔABN vuông tại N có: $AB = 2R,\ AN = R\sqrt{3} \Rightarrow BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{4R^2 - 3R^2} = R$.

+ $\sin ABN = \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ABN = 60°$.

+ $ABN = AMN$ (góc nội tiếp chắn cung AN) $\Rightarrow AMN = 60°$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta AMN$ đều $\Rightarrow S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}AD.MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{AN^2 - ND^2}.MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{3R^2 - \dfrac{3R^2}{4}}.R\sqrt{3} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

(D là trung điểm MN).

$\Rightarrow$ diện tích phần hình tròn nằm ngoài ΔAMN là: $S = S_{(O)} - S_{\Delta AMN} = \pi R^2 - \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{R^2\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{4}$.

Câu 18.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây MN đi qua trung điểm H của OB, I là trung điểm MN. Từ A kẻ $Ax \perp MN$ tại K. Tia BI cắt Ax tại C, Ax cắt tiếp tuyến tại B của (O) ở Q.

a) Chứng minh:Tứ giác $BHKQ$ nội tiếp và tứ giác $BMCN$ là hình bình hành.

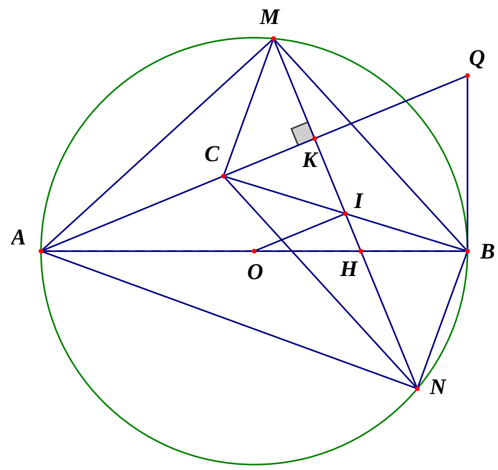
b) Chứng minh : C là trực tâm ΔAMN và tìm quỹ tích điểm C khi cát tuyến MN quay xung quanh H.

c) Cho $AB = 2R,\ AM.AN = 3R^2;\ AN = R\sqrt{3}.$

Tính diện tích phần hình tròn nằm ngoài ΔAMN với $R = 3$ cm.

Hướng dẫn

a) Chứng minh:Tứ giác $BHKQ$ nội tiếp và tứ giác $BMCN$ là hình bình hành.



Vì $Ax \perp MN$ tại K. nên $AQ \perp MN$ tại $K \Rightarrow QKN = 90°$

hay $QKH = 90°$.

Vì BQ là tiếp tuyến của (O) tại $B \Rightarrow BQ \perp AB$ tại B

$\Rightarrow QBH = 90^0 \left(H \in AB\right)$

Xét tứ giác $BHKQ$ có : $QKH + QBH = 90° + 90° = 180^0$

$\Rightarrow$ $BHKQ$ là tứ giác nội tiếp.

Xét (O) có : I là trung điểm của dây cung MN

$\Rightarrow OI \perp MN$ tại I mà $AC \perp MN$ nên $AC \parallel OI$.

Xét ΔABC:

O là trung điểm của AB (do AB là đường kính của (O))

$OI \parallel AC \left(I \in BC\right)$

nên I là trung điểm của BC (định lí về đường trung bình trong tam giác).

Xét tứ giác $BMCN$ có :

I là trung điểm của BC và MN

Do đó $BMCN$ là hình bình hành. (tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường là hbh).

b) C là trực tâm ΔAMN và tìm quỹ tích điểm C khi cát tuyến MN quay xung quanh H.

$AMB = 90°$ (góc nội tiếp chắnu nửa đường tròn) $\Rightarrow AM \perp BM$

mà $BM \parallel CN$ (do $BMCN$ là hình bình hành.)

nên $NC \perp AM$

$\Rightarrow$ NC là đường cao của ΔAMN (1)

Lại có : AK là đường cao của ΔAMN (2)

$NC \cap AK = \{C\}$ (3)

Từ (1) và (2)(3) suy ra C là trực tâm ΔAMN,

+) Chứng minh : IH là đường trung bình của $\Delta OBC \Rightarrow IH \parallel OC \Rightarrow MN \parallel OC$

mà $MN \perp AQ$ nên $OC \perp AQ \Rightarrow ACO = 90°$ với $A; O$ cố định .

Do đó quỹ tích điểm C khi cát tuyến MN quay xung quanh H là đường tròn $\left(O'; \frac{AO}{2}\right)$.

c) Tính diện tích phần hình tròn nằm ngoài ΔAMN với $R = 3$ cm.

Ta có :

$AM.AN = 3R^2$; $AN = R\sqrt{3} \Rightarrow AM = AN = R\sqrt{3} \Rightarrow \Delta AMN$ cân đỉnh A.

+) Xét ΔABM vuông tại có M : $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{4R^2 - 3R^2} = R$

+) $\cos ABM = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow ABM = 60°$

+) Xét (O) có : $ABM = ANM = 60°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

mà ΔAMN cân đỉnh A.

nên ΔAMN đều $\Rightarrow AM = AN = MN = R\sqrt{3}$.

+) Ta có : AK là đường cao của ΔAMN đều $\Rightarrow K$ là trung điểm của MN

$\Rightarrow MK = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

+) $S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}AK.MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{AM^2 - MK^2}.MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{3R^2 - \dfrac{3R^2}{4}}.R\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$

+) Gọi S là diện tích phần hình tròn nằm ngoài ΔAMN , ta có :

$S = S_{(O)} - S_{\Delta AMN} = \pi R^2 - \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \dfrac{\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right).3^2}{4} \approx 16,6$ (đvdt) .

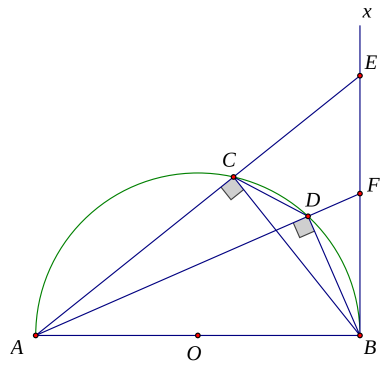
Câu 19.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính $AB = 2R,$ kẻ tiếp tuyến Bx với (O). Gọi C, D là các điểm nằm trên (O). Các tia $AC,\ AD$ cắt Bx tại $E,\ F$ (F nằm giữa $B;\ E$).

a) Chứng minh: $\Delta ABF \backsim \Delta BDF$ và tứ giác $CEFD$ nội tiếp.

b) Chứng minh: Khi C, D di động thì tích $AC.AE = AD.AF$ và không đổi

Hướng dẫn

a) Chứng minh: $\Delta ABF \backsim \Delta BDF$ và tứ giác $CEFD$ nội tiếp.



* Có $ADB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BDF = 90°$ (kề bù)

Xét ΔABF và ΔBDF có:

$ABF = BDF\ (= 90°)$; BAF (góc chung)

$\Rightarrow \Delta ABF \backsim \Delta BDF\ (g - g)$

* Vì $A, C, D, B \in \dfrac{1}{2}(O) \Rightarrow ACDB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow ECD = DBA$ (tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

Mà $DBA = DFB$ (cùng phụ với DBF) $\Rightarrow ECD = DFB\left(= DBA\right)$

Suy ra tứ giác $CEFD$ nội tiếp (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối)

b) Chứng minh: Khi C, D di động thì tích $AC.AE = AD.AF$ và không đổi

* Xét ΔABF vuông tại B, đường cao BD.

$\Rightarrow AD.AF = AB^2$ (hệ thức giữa cạnh và đường cao)

Chứng minh tương tự $AC.AE = AB^2$

$\Rightarrow AC.AE = AD.AF = AB^2 = 4R^2$ (không đổi) (ĐPCM)

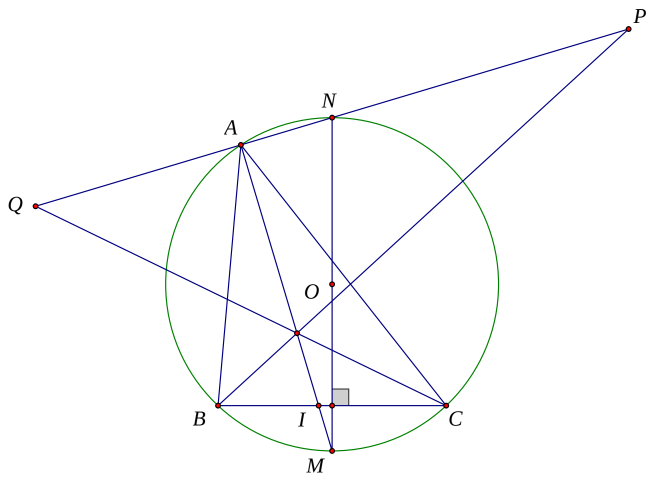
Câu 20.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC nội tiếp (O).Tia phân giác BAC cắt BC tại I và cắt (O) tại M

a) Chứng minh: $OM \perp BC$ và $MC^2 = MI.MA$

b) Kẻ đường kính MN.Các tia phân giác của B và C cắt AN tại P và Q. Chứng minh bốn điểm P, C, B, Q thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: $OM \perp BC$ và $MC^2 = MI.MA$



* Vì AM là tia phân giác

$\Rightarrow BAM = CAM \Rightarrow BM = CM \Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung $BC \Rightarrow OM \perp BC$

Xét ΔMCI và ΔMAC có:

$MAC = MCI$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau); AMC (góc chung)

$\Rightarrow \Delta MCI \backsim \Delta MAC(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{MC}{MA} = \dfrac{MI}{MC} \Rightarrow MC^2 = MA.MI$

b) Kẻ đường kính MN.Các tia phân giác của B và C cắt AN tại P và Q. Chứng minh bốn điểm P, C, B, Q thuộc một đường tròn.

Có $NAM = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AM \perp AN$ tại A

Vì AM là phân giác trong tại A của $\Delta ABC \Rightarrow AN$ là phân giác ngoài tại A của ΔABC

Do BP là phân giác trong tại B của ΔABC

$AN \cap BP = \{P\} \Rightarrow CP$ là phân giác ngoài tại C của ΔABC

$\Rightarrow CP \perp CQ$ (vì CQ là tia phân giác trong tại C của ΔABC)

$\Rightarrow QCP = 90°$

Chứng minh tương tự ta được $QBP = 90°$

$\Rightarrow B,C$ là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn đoạn QP dưới góc $90°$

$\Rightarrow QBCP$ là tứ giác nội tiếp

Vậy bốn điểm P,C,B,Q thuộc một đường tròn.

Câu 21.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn $(O;R)$, đường kính $AA' \perp BC$ tại H ,có $BC = 6cm, AH = 4cm$. Kẻ đường kính CC', kẻ $AK \perp CC'$

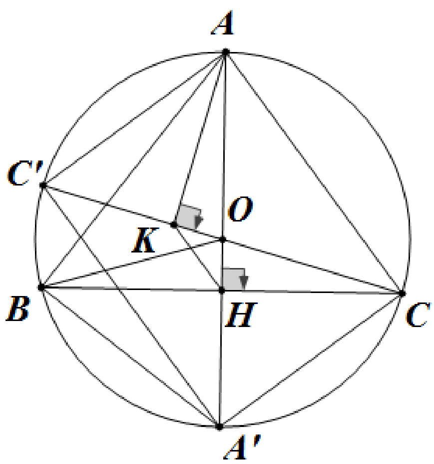
a)Tính R?

b) Tứ giác $CAC'A', AKHC$ là hình gì? Tại sao?

c)Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài ΔABC ?

Hướng dẫn

a) Tính R?



Ta có ΔABC cân, $AH \perp BC \Rightarrow BH = HC = BC : 2 = 3cm$

$ABA' = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

nên $\Delta ABA'$ vuông tại A. Áp dụng hệ thức lượng ta có

$$BH^2 = AH.HA'$$

$\Rightarrow HA' = BH^2 : AH = 3^2 : 4 = 2,25cm$

$\Rightarrow AA' = 4 + 2,25 = 6,25 \Rightarrow R = 6,25 : 2 = 3,125cm$.

b) Tứ giác $CAC'A', AKHC$ là hình gì? Tại sao?

ta có $OA = OA' = OC = OC' = R \Rightarrow$ tứ giác $AC'A'C$ là hình chữ nhật

Xét tứ giác $AKHC$ có $AKC = AHC = 90° \Rightarrow$ tứ giác $AKHC$ nội tiếp

$\Rightarrow HKC = HAC = A'C'C \Rightarrow KH // A'C'$.

Mà $A'C' // AC \Rightarrow KH // AC \Rightarrow$ tứ giác $AKHC$ là hình thang, do tứ giác $AKHC$ nội tiếp nên tứ giác $AKHC$ là hình thang cân.

c) Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài ΔABC ?

ta có $S_{(O)} = \pi R^2 = \pi.3,125^2 = \frac{625}{64}\pi\,(cm^2)$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}.6.4 = 12cm^2$$

Diện tích hình tròn (O) bên ngoài tam giác ΔABC là $\frac{625}{64}\pi - 12 \approx 18,664cm^2$

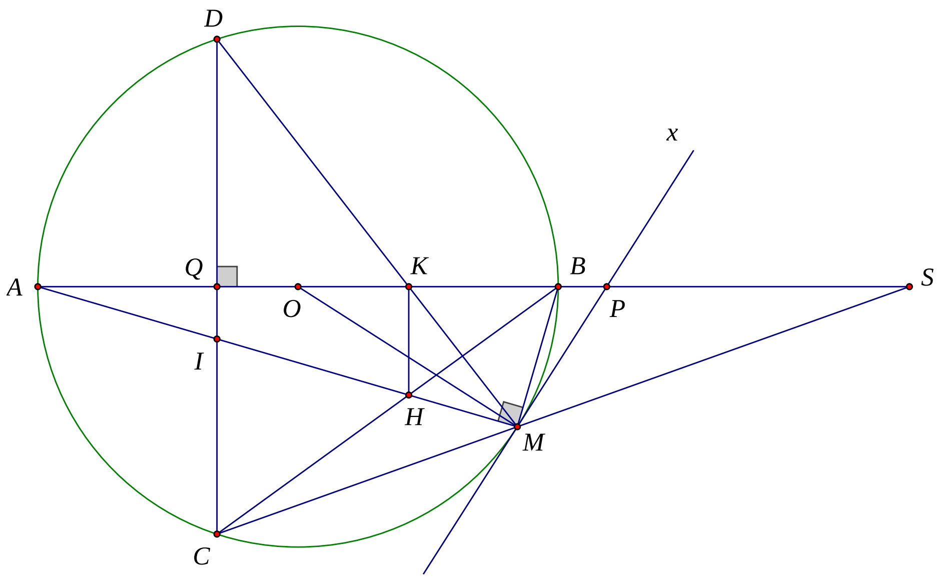
Câu 21.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB, vẽ dây cung CD vuông góc với AO tại điểm Q. Trên tia đối của tia BA lấy điểm S, SC cắt (O) tại điểm thứ hai là M, AM cắt CD tại I.

a) Chứng minh : tứ giác $QBMI$ nội tiếp. $\Delta SMA \backsim \Delta SBC$.

b) Gọi H là giao điểm của MA và BC, K là giao điểm của $MD; AB$.Chứng minh: $KH // CD$ và $OK.OS = R^2$

c) Cho $MAB = 20°; MSA = 40°$, tính $S_{quat}CBDO;\ R = 6cm$

Hướng dẫn



a) Chứng minh : tứ giác $QBMI$ nội tiếp. $\Delta SMA \backsim \Delta SBC$.

Xét $(O;R)$, đường kính $AB \perp CD = \{Q\}$ (gt) $IQB = 90°$ (liên hệ giữa đường kính và dây cung)

Xét $(O;R)$, đường kính $AB,\ M \in (O) \Rightarrow AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $QIMB: IQM + IMB = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc ở vị trí đối diện nhau $\Rightarrow$ tứ giác $QIMB$ nội tiếp đường tròn.

* $\Delta SMA \backsim \Delta SBC$

Xét $(O): MCB = MAB = \dfrac{sd\,MB}{2}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn MB)

Xét ΔSMA và ΔSBC:

$MCB = MAB\ (cmt)$

CSB chung

$\Rightarrow \Delta SMA \backsim \Delta SBC$ (g.g)

b) Chứng minh : $KH // CD$ và $OK.OS = R^2$

Xét $(O;R)$, đường kính $AB \perp CD = \{Q\}$ (gt) $\Rightarrow sd\,AC = sd\,AD$ (liên hệ giữa dây và cung)

$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau) hay $\widehat{HMK} = \widehat{HBK}$

Xét tứ giác $HKBM$ có $\widehat{HMK} = \widehat{HBK}$ (cmt) mà 2 góc ở 2 đỉnh liên tiếp cùng chắn cung HK

$\Rightarrow tgHMBK$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HMB} + \widehat{HKB} = 180°$ mà $\widehat{HMB} = 90° \Rightarrow \widehat{HKB} = 90°$

$\Rightarrow HK \perp OB$

Mà $CD \perp AB(gt) \Rightarrow HK // CD$ (từ vuông góc đến song song)

Nối $O; M$, kẻ tiếp tuyến $Mx, Mx \cap AB = \{P\}$

Ta có $\widehat{CMx} = \widehat{SMP}$ (2 góc đối đỉnh)

Vì $CD // HK(cmt) \Rightarrow \widehat{CDM} = \widehat{HKM}$ (2 góc đồng vị)

Xét $(O): \widehat{CDM} = \widehat{CMx}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung CM)

Suy ra $\widehat{HKM} = \widehat{PMS} \Rightarrow \widehat{HKM} + 90° = \widehat{PMS} + 90°$

$\Rightarrow \widehat{HKM} + \widehat{QKH} = \widehat{PMS} + \widehat{OMP} \Rightarrow \widehat{OKM} = \widehat{KMS}$

Xét ΔOKM và ΔOMS :

$\widehat{OKM} = \widehat{OMS}$ (cmt)

$\widehat{MOS}$ chung

$\Rightarrow \Delta OKM \backsim \Delta OMS$ (g.g) $\Rightarrow OS.OK = OM^2 = R^2$

c) Cho $\widehat{MAB} = 20°; \widehat{MSA} = 40°$, tính $S_{quat}CBDO$; $R = 6cm$

Xét $(O): \widehat{MCB} = \widehat{MAB} = 20°$ (2 góc nội tiếp cùng chắn MB)

XÉT ΔCBS : $\widehat{CBS} = \widehat{BCS} + \widehat{S} = 20° + 40° = 60°$ (tính chất góc ngoài tam giác)

$\Rightarrow \Delta CBO$ đều $\Rightarrow \widehat{COB} = 60° \Rightarrow \widehat{COD} = 120°$

$$\Rightarrow S_{quat}CBD = \frac{\pi R^2 n}{360^0} = \frac{\pi.36.120}{360} = 108.\pi \approx 339,12(dvdt)$$

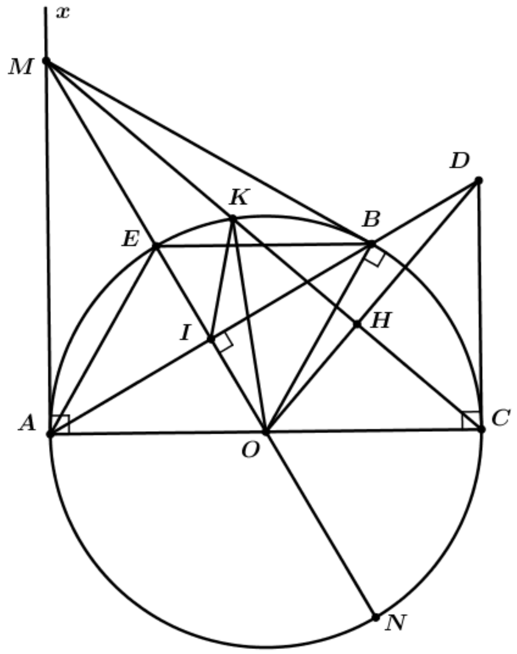
Câu 22.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O,R) đường kính AC cố định. Kẻ tiếp tuyến Ax với (O). Trên Ax lấy điểm M sao cho $OM = 2R$. Qua M kẻ tiếp tuyến MB với (O), tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại D, OM cắt AB tại I, cắt cung nhỏ AB tại E. Gọi K là giao điểm của MC với (O).

a) Chứng minh: Tứ giác $AMBO$ nội tiếp và tích $IO.IM = \frac{AB^2}{4}$.

b) Chứng minh: $AOBE$ là hình thoi và $\widehat{MIK} = \widehat{ACM}$.

c) Chứng minh: $OD \perp MC$ và cho $R = 6cm$, tính $S_{quat}AOK$.

Hướng dẫn



a) Xét tứ giác $AMBO$ có:

MA là tiếp tuyến của (O) tại

$A \Rightarrow MA \perp OA \Rightarrow OAM = 90°$.

MB là tiếp tuyến của (O) tại

$B \Rightarrow MB \perp OB \Rightarrow OBM = 90°$.

Xét tứ giác $AMBO$ có $OAM + OBM = 180°$ mà hai góc ở hai đỉnh đối nhau. Vậy tứ giác $AMBO$ nội tiếp.

* Ta có: MA, MB lần lượt là tiếp tuyến của (O) từ M. Khi

đó : OM là tia phân giác của các góc AOB

Mà ΔABO cân tại O $\Rightarrow MO \perp AB$ và I là trung điểm của AB

Xét tam giác vuông AMO tại A có : AI là đường cao nên áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta được :

$IO.IM = AI^2$

Lại có $AI = \frac{AB}{2} \Rightarrow IO.IM = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Leftrightarrow IO.IM = \frac{AB^2}{4}$

Vậy $IO.IM = \frac{AB^2}{4}$

b) Xét tam giác vuông AOM có :

$OE = R, OM = 2R \Rightarrow E$ là trung điểm của OM $\Rightarrow AE = EO = R$

Xét tam giác vuông BOM có :

$OE = R, OM = 2R \Rightarrow E$ là trung điểm của OM $\Rightarrow BE = EO = R$

Vậy tứ giác $AOBE$ có: $AO = OB = BE = EA = R$.

Vậy $AOBE$ là hình thoi.

* Gọi N là giao điểm còn lại của đường thẳng MO và (O), khi đó $EKCN$ nội tiếp

$\Rightarrow MK.MC = ME.MN = ME.(ME + EN) = R.(R + 2R) = 3R^2$

Lại có: $MI.MO = \frac{3}{2}R.2R = 3R^2$

$\Rightarrow MK.MC = MO.MI \Rightarrow \frac{MK}{MO} = \frac{MI}{MC}$

Xét ΔMIK & ΔMCO có:

M chung

$\frac{MK}{MO}=\frac{MI}{MC}$

$\Rightarrow \Delta MIK \backsim \Delta MCO\left(c.g.c\right) \Rightarrow MIK = MCO = MCA$. Vậy $MIK = ACM$

c) Gọi H là giao điểm của OD và MC

Xét tam giác $\Delta MAO \,\&\, \Delta ACD$:

$MAO = ACD = 90°$

$AMO = CAD = 30°$

$\Rightarrow \Delta MAO \backsim \Delta ACD\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{MA}{AC}=\frac{OC}{CD} \Rightarrow \frac{MA}{OC}=\frac{AC}{CD}$

Xét $\Delta MAC \,\&\, \Delta OCD$

$MAC = OCD = 90°$

$\frac{MA}{OC}=\frac{AC}{CD}$

$\Delta MAC \backsim \Delta OCD\left(c.g.c\right) \Rightarrow MCA = ODC = 90° - DOC$

$\Rightarrow MCA + DOC = 90° \Rightarrow OHC = 90°$. Vậy $OD \perp MC$.

Các em tự tính diện tích hình quạt.

Câu 23.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AC cố định. Kẻ tiếp tuyến Ax với (O), Trên Ax lấy điểm M sao cho $OM = 2R$. Qua M kẻ tiếp tuyến MB với (O),tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại D,OM cắt AB tại I,cắt cung nhỏ AB tại E. Gọi K là giao điểm của MC với (O)

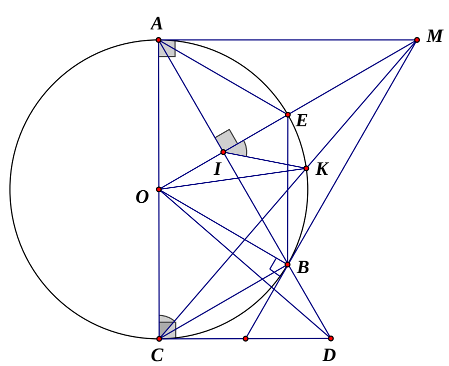
a) Chứng minh: Tứ giác $OICD$ nội tiếp và tích $AB.AD$ không đổi

b) Chứng minh: Tứ giác $AOBE$ là hình thoi và $MIK = OCM$

c) Cho $R = 6cm$ tính độ dài cung nhỏ AK và chứng minh $OD \perp MC$

Hướng dẫn

a) Chứng minh: Tứ giác OIDC nội tiếp và tích AB.AD không đổi.



Ta có: $OCD = 90^0$ (CD là tiếp tuyến) (1)

* Có ΔAOB cân tại O và OM là pg của AOB

(Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

$\Rightarrow AB \perp OM \Rightarrow OID = 90^0$ (2)

Suy ra:Tứ giác OIDC nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180^0)

Ta có: ΔDCA vuông tại C

BC là đường cao của ΔDCA (CBA góc nội tiếp chắn nữa đường tròn)

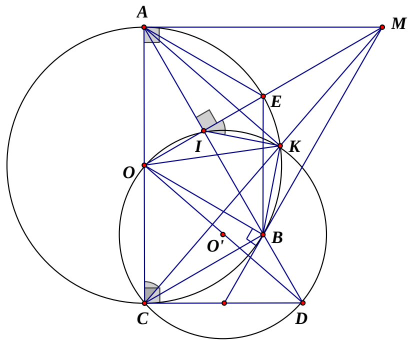
$\Rightarrow CA^2 = AB.AD$ (hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông)

Độ dài cạnh AC không đổi $\Rightarrow AB.AD$ không đổi.

b) Chứng minh: Tứ giác AOBE là hình thoi và $MIK = OCM$.

Ta có: $OE = EM = \dfrac{OM}{2}$ (vì OM = 2R)

$\Rightarrow OA = OE = AE$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền) (1)



Mà $AE = EB$ (vì sđ $AE =$ sđ EB sđ) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: Tứ giác AOBE là hình thoi. (đpcm)

Ta có: $AM^2 = MI.MO$ (hệ thức lượng trong tam giác)

$MB^2 = MK.MC$ (vì $\Delta MKB \backsim \Delta MBC(g-g)$)

$MA = MB$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

Suy ra:

$MI.MO = MK.MC \Rightarrow \dfrac{MI}{MC} = \dfrac{MK}{MO}$ và IMK chung

$\Rightarrow \Delta MIK \backsim \Delta MCO(cgc) \Rightarrow MIK = MCO$

c) Cho R = 6cm tính độ dài cung nhỏ AK và chứng minh $OD \perp MC$.

Ta có: $AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}cm$

Ta có: $CM = \sqrt{AC^2 + AM^2} = \sqrt{12^2 + (6\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{7}cm$

$\Rightarrow \sin ACM = \dfrac{AM}{CM} \Rightarrow ACM = 41^0 \Rightarrow AOK = 82^0$

$l_{AK} = \dfrac{3,14.6.82^0}{180^0} = 8,58(cm)$

Ta có: Tứ giác $OCKI$ và OIDC nội tiếp (CM ở a)

Suy ra: O, I, K, D, C cùng thuộc đường tròn tâm (O')

OD là đường kính $(OID = OCD = 90^0)$

Ta có: (O) và (O') có CK là dây chung mà OD là đường nối tâm

Suy ra: $OD \perp CK$ (đpcm)

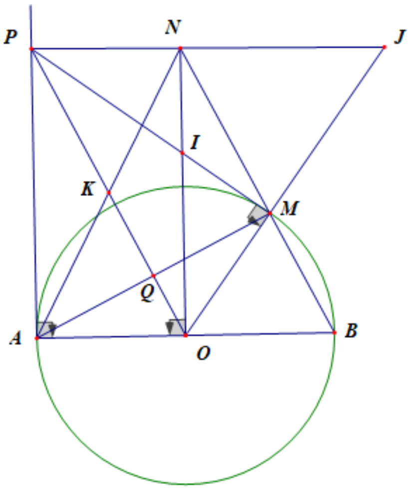
Câu 24.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$, đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax, sao cho $AP > R$. Từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O) tại M. Gọi OP cắt MA tại Q. Đường vuông góc với AB tại O cắt BM tại N

a) Chứng minh tứ giác $APMO$ nội tiếp và chứng minh $OA^2 = OP.OQ$.

b) Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành và gọi PM cắt ON tại I. Chứng minh ΔPOI cân.

c) Gọi PN cắt OM tại J, AN cắt OP tại K. Chứng minh ba điểm I; J; K thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) Xét tứ giác $APMO$ có:

$PAO + PMO = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà hai góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $APMO$ nội tiếp

+) Xét (O) có tiếp tuyến tại A và tiếp tuyến tại M cắt nhau tại P

$$\Rightarrow \begin{cases} PM = PA \\ PO\,\text{là tia phân giác cua}\,APO \end{cases}$$

Xét ΔPAM có $PM = PA$ nên ΔPAM cân

Có $PO\,\text{là tia phân giác cua}\,APO \Rightarrow PO$ đồng thời là đường cao

$\Rightarrow PO \perp AM$ mà $PO \cap AM = \{Q\}$

$\Rightarrow PQ \perp AM$ hay $AQ \perp PM$

Xét ΔAPO vuông tại A có đường cao AQ

Áp dụng hệ thức liên quan đến đường cao $\Rightarrow OA^2 = OP.OQ$ (đpcm)

b) Xét (O) có AMB là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow AMB = 90^0 \Rightarrow AM \perp MB$

Mà $AM \perp PO(cmt) \Rightarrow PO // MB$ hay $PO // NB \Rightarrow AOP = OBN$ (so le trong)

Xét ΔAPO và ΔONB có:

$AO = OB (= R)$

$PAO = NOB (= 90^0)$

$AOP = OBN\,(cmt)$

$\Rightarrow \Delta APO = \Delta ONB (g.c.g) \Rightarrow PO = NB$ (hai cạnh tương ứng)

Xét tứ giác $OBNP$ có:

$$\left.\begin{array}{l} PO // NB \\ PO = NB \end{array}\right\} \Rightarrow OBNP\ \text{là hình bình hành}$$

Vì $OBNP$ là hình bình hành $\Rightarrow PN // OB$

Mà $ON \perp OB \Rightarrow ON \perp PN \Rightarrow PNO = 90^0$

Xét tứ giác $PNMO$ có: $PNO = PMO = 90^0$

Mà hai góc ở vị trí kề nhau cùng nhìn cạnh PO dưới hai góc bằng nhau.

$\Rightarrow$ Tứ giác $PNMO$ nội tiếp $\Rightarrow PON = PMN$ (hai góc nội tiếp cùng nhìn cạnh PN)

Mà $PMN = MPO\ (\text{vì } NM\ //\ OP)$

$\Rightarrow PON = MPO$ hay $POI = IPO \Rightarrow \Delta OPI$ cân tại I (đpcm)

c) Xét tứ giác $APNO$ có:

$PAO = AON = PNO = 90^0$

Tứ giác $APNO$ là hình chữ nhật

Mà $PO \cap AN = \{K\}$ $\Rightarrow K$ là trung điểm của PO

Xét ΔOPI cân tại I

Có K là trung điểm của PO$\Rightarrow IK$ là đường trung tuyến

$\Rightarrow IK$ đồng thời là đường cao $\Rightarrow IK \perp PO$ $\quad (1)$

Xét ΔJPO có

$$\left.\begin{array}{l} ON \perp PJ \\ PM \perp OJ \\ ON \cap PM = \{I\} \end{array}\right\} \Rightarrow I \text{ là trực tâm của } \Delta JPO \Rightarrow JI \perp PO \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm $I;\ J;\ K$ thẳng hàng

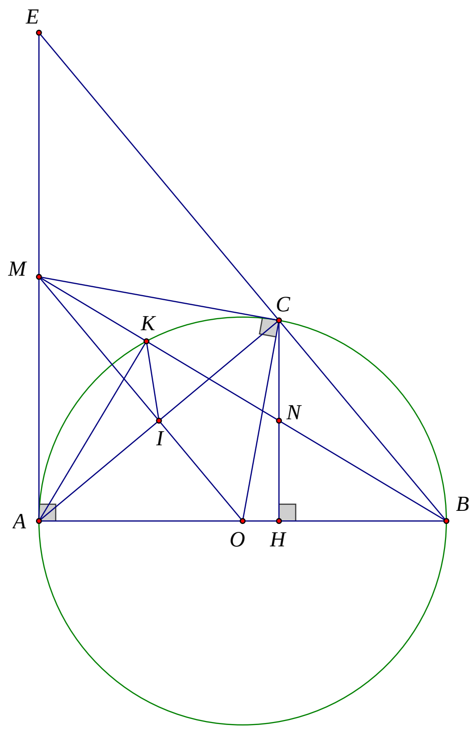
Câu 25.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A lấy điểm M (M khác A). Từ M vẽ tiếp tuyến thứ hai MC với (O) (C là tiếp điểm). Kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$), MB cắt (O) tại điểm thứ hai là K và cắt CH tại N. Gọi I là giao điểm của MO với AC

a) Chứng minh rằng tứ giác $AMCO, AKNH$ là tứ giác nội tiếp;

b) Chứng minh $AM^2 = MK.MB = MO.MI$; $KAC = OMB$

c) Cho $OMC = 30°$, $R = 6\ cm$. Tính $S_{quat} BOC$; N là trung điểm của CH.

Hướng dẫn



a) + Xét (O) có MA là tiếp tuyến của (O) tại A (gt)

$\Rightarrow MA \perp AB$ hay $MAO = 90°$

MC là tiếp tuyến của (O) tại C (gt) $\Rightarrow MC \perp CO$ hay

$MCO = 90°$

Xét tứ giác $MAOC$ có: $MAO + MCO = 90° + 90° = 180°$

Mà MAO, MCO là hai góc đối nhau

$\Rightarrow$tứ giác $MAOC$ là tứ giác nội tiếp (đpcm).

+ Nối A với K.

Xét đường tròn (O) có ΔAKB nội tiếp (O) đường kính AB

$\Rightarrow \Delta AKB \perp K$ hay $AKB = 90°$ (t/c)

Xét tứ giác $AKNH$ có $AKN + AHN = 90° + 90° = 180°$. Mà AKN, AHN là hai góc đối nhau

$\Rightarrow$Tứ giác $AKNH$ nội tiếp (đpcm).

b) + Theo câu (a) ta có $\Delta AKB \perp K$ nên $AK \perp KB$ tại K hay $AK \perp MB$ (do $K \in MB$)

$\Rightarrow AK$ là đường cao trong ΔMAB.

+ Xét ΔMAB vuông tại A có AK là đường cao (cmt)

$\Rightarrow MA^2 = MK.MB$ (hệ thức cạnh và đường cao trong tam giác vuông). (1)

+ Ta có MA, MC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) lần lượt tại A, C (gt)

$\Rightarrow MA = MC$ (t/c)

Mà $OA = OC$ ($A, C \in (O)$)

$\Rightarrow MO$ là đường trung trực của AC (t/c) $\Rightarrow MO \perp AC$ tại I, khi đó AI là đường cao của ΔMAO

+ Xét ΔMAO vuông tại A có AI là đường cao (cmt)

$\Rightarrow MA^2 = MO.MI$ (hệ thức cạnh và đường cao trong tam giác vuông). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MA^2 = MK.MB = MO.MI$ (đpcm)

+ Xét tứ giác $MAIK$ có $MKA = MIA = 90°$

Mà MKA, MIA cùng chắn cung MA

$\Rightarrow$Tứ giác $MAIK$ nội tiếp (dhnb)$\Rightarrow IAK = IMK$ (2 góc cùng chắn cung IK)

hay $KAC = OMB$ (đpcm).

c) + Có tứ giác $MAOC$ nội tiếp (cm câu (a))

$\Rightarrow OAC = OMC$ (2 góc cùng chắn cung OC), mà $MOC = 30°$ (gt) $OAC = 30°$

+ Ta có ΔOBC cân tại O (vì $OC = OB$),mà $OBC = 60° \Rightarrow \Delta OBC$ đều$\Rightarrow BOC = 60°$ hay $n = 60°$

Khi đó ta có $S_{quat\ BOC} = \dfrac{\pi R^2 n}{360°} = \dfrac{\pi.6^2.60°}{360°} = 6\pi \approx 113,04\ (cm^2)$

+ Kéo dài BC cắt AM tại E.Khi đó $\Delta ACE \perp C$ ($E \in BC$)

Mà $MA = MC$ (cmt) $\Rightarrow MAC = MCA$ (t/c)

Lại có, $MAC + MEC = 90°$ (vì $\Delta EAC \perp C$)

$MCA + MCE = ACE = 90°$

$\Rightarrow MCE = MEC \Rightarrow \Delta MCE$ cân tại M $\Rightarrow MC = ME$, mà $MA = MC$ (cmt) nên $MA = ME$ (3)

+ Xét ΔMAB có NH // AM (cùng vuông góc với AB)

Áp dụng hệ quả của định lý Talet ta có: $\dfrac{NH}{MA} = \dfrac{BN}{BM}$ (4)

+Tương tự trong ΔMBE có CN // ME ($E \in AM$, $N \in CH$)

Áp dụng hệ quả của định lý Talet ta có $\dfrac{CN}{ME} = \dfrac{BN}{BM}$ (5)

Từ (3) ,(4) và (5) suy ra $NH = CN$ hay N là trung điểm của CH (đpcm).

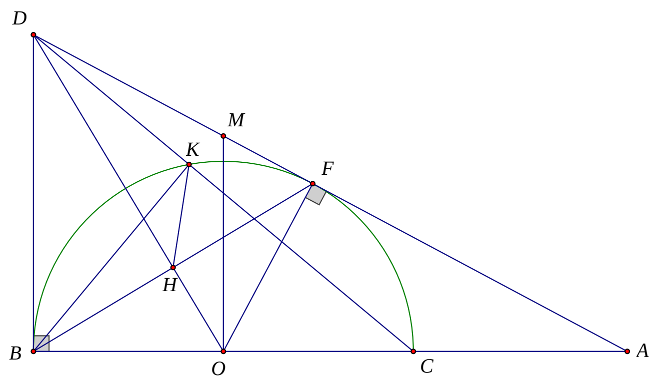
Câu 26.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Lấy điểm A trên tia đối của tia CB. Kẻ tiếp tuyến AF với nửa đường tròn (O) (F là tiếp điểm), tia AF cắt tia tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn (O) tại D (tia tiếp tuyến Bx nằm trong nửa mặt phẳng bờ BC chứa nửa đường tròn (O)). Gọi H là giao điểm của BF với DO; K là giao điểm thứ hai của DC với nửa đường tròn (O).

a) Chứng minh tứ giác $BDFO$ nội tiếp; $AO.AB = AF.AD$;

b) Chứng minh $BDH = BKH$; $DHK = DCO$;

c) Cho $KHF = 30^0, R = 15cm$. Tính $S_{quat}BOK$. Kẻ $OM \perp BC$ (M thuộc đoạn thẳng AD). Chứng minh $\dfrac{BD}{DM} - \dfrac{DM}{AM} = 1$

Hướng dẫn



a) Ta có: BD, AF lần lượt là tiếp tuyến của (O) tại B, F (gt)

$\Rightarrow BD \perp AB$, $OF \perp AD \Rightarrow DBO = 90°$, $OFD = 90°$

Xét tứ giác $BDFO$ có: $DBO + OFD = 180°$

Mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $BDFO$ nội tiếp (dhnb)

Xét ΔAOF và ΔADB có: $\begin{cases} BAD \ chung \\ OFA = OBD \end{cases}$

Vậy $\Delta AOF \backsim \Delta ADB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AO}{AD}$ (tsđd) $\Rightarrow AO.AB = AF.AD$

b) Ta có $DB = DF$ (DB và DF là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D)

$\Rightarrow D$ thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BF

Ta lại có: $OB = OF = R \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BF

$\Rightarrow OD$ là đường trung trực của đoạn thẳng BF $\Rightarrow OD \perp BF$ => $DHB = 90°$

Mặt khác ΔBKC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC nên $BKC = 90°$ hay $DKB = 90°$

+ Xét tứ giác $DKHB$ có: $DKB = DHB = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $DKHB$ là tứ giác nội tiếp (dhnb) $\Rightarrow BDH = BKH$.(hai góc cùng chắn cung BH)

*) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DKHB$ có:

DBH, DHK là góc nội tiếp chắn $DK \Rightarrow DBK = DHK$ (hq) (1)

+) Xét (O) có:

DBK là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn BK

BCK là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn BK

$\Rightarrow DBK = BCK$ (hq) (2)$\Rightarrow$Từ (1) và (2) suy ra $DHK = DCO$

c) Ta có $KHF = 30°$ => $KHD = 60° \Rightarrow KBD = 60° \Rightarrow KBO = 30°$

Xét ΔOBK có: $OB = OK = R \Rightarrow \Delta OBK$ cân tại O

$\Rightarrow KBO = BKO = 30°$ => $BOK = 120° \Rightarrow S_{quat}BOK = \dfrac{\pi Rn}{360} = \dfrac{\pi.15.120}{360} = 15,7$

*) $DB \perp BC$ (gt), $OM \perp BC$ (gt)

$\Rightarrow DB\ //\ OM$ (quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song)

Ta có: $BDO = ODF$ (DB và DF là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D)

$BDO = DOM$ ($DB\ //\ OM$)$\Rightarrow MDO = MOD \Rightarrow \Delta MDO$ cân tại M => $MD = MO$

Ta có: $DB\ //\ OM$ (cmt)

$$\frac{BD}{OM} = \frac{AD}{AM} \Rightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{AD}{AM} \Leftrightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{AM + MD}{AM} \Leftrightarrow \frac{BD}{DM} = 1 + \frac{DM}{AM} \Leftrightarrow \frac{BD}{DM} - \frac{DM}{AM} = 1$$

Câu 27.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Lấy điểm A trên tia đối của tia CB. Kẻ tiếp tuyến AF với nửa đường tròn (O) (F là tiếp điểm), tia AF cắt tia tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn (O) tại D (tia tiếp tuyến Bx nằm trong nửa mặt phẳng bờ BC chứa nửa đường tròn (O)). Gọi H là giao điểm của BF với DO; K là giao điểm thứ hai của DC với nửa đường tròn (O), I là trung điểm của CK.

a) Chứng minh tứ giác $BDIO$ nội tiếp; $OH.OD = \dfrac{BC^2}{4}$;

b) Chứng minh $DHK = BCD$. Kẻ $OM \perp BC$. Chứng minh $AM.DB - DM^2 = MD.AM$

c) Cho $KHF = 30^0, R = 15cm.$ Tính độ dài cung nhỏ BK.

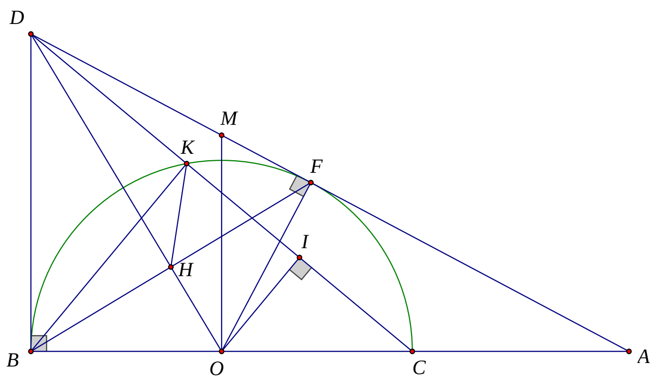
Hướng dẫn

*) Chứng minh tứ giác $BDIO$ nội tiếp

Xét (O), ta có $OI \perp KC$ (vì đường kính đi qua trung điểm của dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó) $\Rightarrow DIO = 90^0$

$Dx \perp BC$ (Dx là tiếp tuyến của (O))

$DBC = 90^0$



$\Rightarrow DBO + DIO = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$ tứ giác $BDIO$ nội tiếp (vì tổng 2 góc đối bằng $180°$) (đpcm).

*) Chứng minh $OH.OD = \dfrac{BC^2}{4}$

Ta có: $BD = DF$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow$ D thuộc đường trung trực của BF (1)

$OD = OF = R \Rightarrow$ O thuộc đường trung trực của BF (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ OD là đường trung trực của BF $\Rightarrow$ $DO \perp BF$

Xét ΔDBO $\left(DBO = 90^0; BH \perp OD\right)$, áp dụng hệ thức lương trong tam giác ta có: $OB^2 = OH.OD$ mà

$OB = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow OB^2 = \dfrac{BC^2}{4}$ $OH.OD = \dfrac{BC^2}{4}$ (đpcm)

b) Chứng minh $AM.DB - DM^2 = MD.AM$

Ta có: $BKC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BKD = 90°$

$DHB = 90°$ (vì $DO \perp BF$) $\Rightarrow BKD = BHD$

$\Rightarrow$ tứ giác $DKHB$ nội tiếp (vì có 2 đỉnh nhìn cạnh nối hai đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông)

$\Rightarrow DHK = DBK$ (góc nội tiếp chắn DK)

Ta lại có $DBK = BCD$ (cùng phụ với KBC) $\Rightarrow DHK = BCD$ (đpcm).

Ta có: $DM^2 + MD.AM = MD\left(DM + AM\right) = MD.DA$

Ta có: $BFC = BHO = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CF \perp BF$ mà $OD \perp BF$ (cmt)

$\Rightarrow CF \,//\, DO$ nên theo định lý Ta let ta có: $\dfrac{AD}{DF} = \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{AO}{OB}$ (vì $OC = OB$)

Ta lại có: $OM \perp BC; BD \perp BC \Rightarrow OM \,//\, BD$

$\Rightarrow \dfrac{AO}{BO} = \dfrac{AM}{DM} \Rightarrow \dfrac{AD}{DF} = \dfrac{AM}{DM} \Rightarrow \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AM}{DM}$ (vì $BD = DF$)

$\Rightarrow MD.DA = AM.DB \Rightarrow AM.DB = DM^2 + MD.AM \Rightarrow AM.DB - DM^2 = MD.AM$ (đpcm).

c) Ta có $DO \perp BF$ tại $O \Rightarrow DHK + KHF = 90°$ mà $KHF = 30° \Rightarrow DHK = 60°$

Ta có tứ giác $DBHK$ nội tiếp $\Rightarrow DBK = DHK = 60°$

Mà $DBK = \dfrac{sd\,BK}{2} \Rightarrow sd\,BK = 120°$

Độ dài cung $BK = \dfrac{BK.2\pi R}{360°} = \dfrac{120°.2\pi.15}{360°} = 10\pi$ (cm)

Vậy độ dài cung $BK = 10\pi$ (cm)

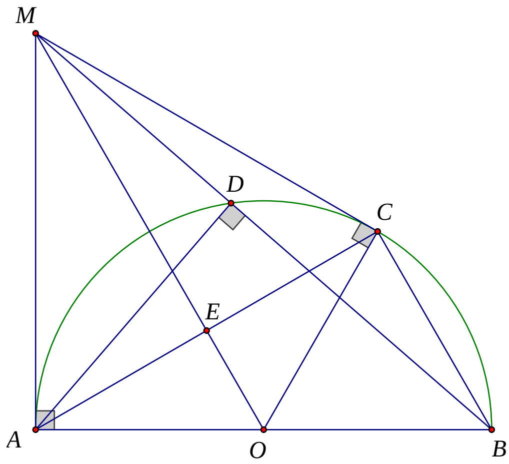
Câu 28.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$ và tiếp tuyến Ax cùng phía với với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax $\left(AM > AB\right)$ kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm) AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn $\left(O\right)$ tại D (D khác B).

a) Chứng minh: $AMCO$ nội tiếp một đường tròn; $MC^2 = ME.MO$

b) Chứng minh: $ADE = ACO$; $DOB = DEB$

c) Cho $\widehat{DEM}=30^0$. Tính S_{quat} AOD.

Hướng dẫn



a) Chứng minh: $AMCO$ nội tiếp một đường tròn

Ta có AM, CM là hai tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm O

$\Rightarrow AM\perp AO, MC\perp OC$ (tính chất)

$\Rightarrow \widehat{OAM}=\widehat{MCO}=90^0$

Xét $AMCO$ có: $\widehat{OAM}=\widehat{MCO}=90^0+90^0=180^0$ (mà hai góc ở vị trí đối nhau)

Vậy tứ giác $APNO$ nội tiếp đường tròn (dấu hiệu nhận biết)

*) Chứng minh: $MC^2=ME.MO$

+) Xét nửa (O) có AM, MC là hai tiếp tuyến cắt nhau

tại $M\Rightarrow OM$ là tia phân giác của $\widehat{AOC}$

mà ΔAOC cân tại O $(OC=OA=R)$

OM đồng thời là đường cao $OM\perp AC$ tại E

+) Xét ΔMCO vuông tại $C\left(\widehat{MCO}=90^0, cmt\right)$,đường cao CE, có:

$MC^2=ME.MO$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

b) *) Chứng minh: $\widehat{ADE}=\widehat{ACO}$

+) Theo câu a ta có: ΔAOC cân tại $O\Rightarrow \widehat{CAO}=\widehat{ACO}$ (tính chất) (1)

+) Xét (O) ta có: $\widehat{ADB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{ADM}=90^0$ (kề bù với $\widehat{ANB}$)

Xét $AMDC$ có: $\widehat{AEM}=\widehat{MDA}=90^0$ $\Rightarrow$ hai đỉnh $\Rightarrow D, E$ liên tiếp cùng nhìn cạnh AM dưới một góc vuông không đổi $\Rightarrow$tứ giác $AMDE$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{ADE}=\widehat{CAO}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ADE}=\widehat{ACO}$

*) Chứng minh: $\widehat{DOB}=\widehat{DEB}$

+) Xét ΔMAB vuông tại $A\left(\widehat{MCO}=90^0, cmt\right)$,đường cao AD, có:

$MA^2=MD.MB$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Mà : $MC^2=ME.MO$ (theo câu a) và $MA=MC$ (MA, MC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M)

$\Rightarrow MD.MB=ME.MO\Rightarrow \dfrac{MD}{MO}=\dfrac{ME}{MB}$

Xét ΔMDE và ΔMOB, có: ΔDME ; $\dfrac{MD}{MO}=\dfrac{ME}{MB}$

$\Rightarrow \Delta MDE \backsim \Delta MOB$ (c.g.c) $\Rightarrow MDE = MOB$ (hai góc tương ứng)

Mà $MDE + EDB = 180^0$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow EDB + MOB = 180^0$ hay $EDB + EOB = 180^0$ mà hai góc ở vị trí đối nhau

Vậy tứ giác $DEOB$ nội tiếp đường tròn (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow DOB = DEB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

c) Cho $DEM = 30^0$. Tính $S_{\text{qu¹t}}\ AOD$.

Theo câu trên ta có: tứ giác $AMDE$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow AEM = DAM = 30^0$

$\Rightarrow DAO = 90^0 - 30^0 = 60^0$ (phụ với $DAM = 30^0$)

Lại có ΔAOD cân tại $O\left(OA = OD = R\right) \Rightarrow DOA = 180^0 - 60^0.2 = 60^0$

$$\Rightarrow S_{quatAOD} = \frac{\pi R^2.n}{360^0} = \frac{\pi.12^2.60^0}{360^0} = 24\pi \text{ (đơn vị diện tích)}$$

Câu 29.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên tia Ax lấy điểm M sao cho $AM > AB$, MB cắt đường tròn (O) tại N $(N \neq B)$. Qua trung điểm P của đoạn AM dựng đường thẳng vuông góc với AM cắt BM tại Q. OQ cắt AN tại E.

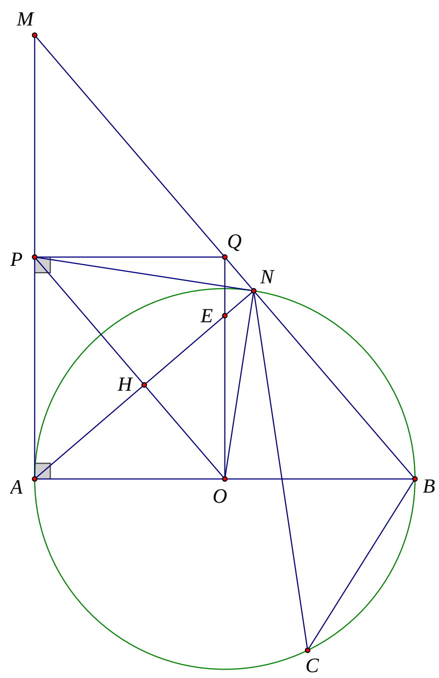
a) Chứng minh PN là tiếp tuyến của đường tròn (O), tứ giác $APNO$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh tứ giác $APQN$ nội tiếp đường tròn và $OE.OQ = \dfrac{AB^2}{4}$

c) Gọi C là điểm trên cung lớn NB của đường tròn (O) $(C \neq N; C \neq B)$. Chứng minh: $BCN = OQN$;

Cho $AMB = 30^0, R = 12cm$. Tính $S_{quatAON}$

Hướng dẫn



a) Chứng minh PN là tiếp tuyến của đường tròn (O),

Xét (O) ta có: $ANB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow ANM = 90^0$ (kề bù với ANB)

$\Rightarrow \Delta ANM$ vuông tại N có NP là trung tuyến (P là Trung điểm của AM ,gt)

$\Rightarrow NP = PA = PM = \dfrac{AM}{2}$ (tính chất)

Xét ΔAPO và ΔNPO:

$PA = NP; OA = ON\,(= R)$; OP : cạnh chung

$\Rightarrow \Delta APO = \Delta NOP$ (c.c.c) $\Rightarrow APO = ANO = 90^0$

$\Rightarrow ON \perp NP$ tại N mà $N \in (O)$

Vậy PN là tiếp tuyến của đường tròn (O)

*) Chứng minh tứ giác $APNO$ nội tiếp đường tròn.

Xét $APNO$ có: $PAO + PNO = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Vậy tứ giác $APNO$ nội tiếp đường tròn (dấu hiệu nhận biết)

b) *) Chứng minh tứ giác $APQN$ nội tiếp đường tròn.

+) Xét ΔAMB có:

P là trung điểm của AM ; $PQ // AB(\perp AB)$ $\Rightarrow Q$ là trung điểm của MB

Mà O là trung điểm của $AB \Rightarrow QO$ là đường trung bình

$\Rightarrow QO // AM \Rightarrow OQ \perp AB \Rightarrow AOQ = 90^0 \Rightarrow APOQO$ là hình chữ nhật

Vậy tứ giác $APQN$ nội tiếp đường tròn.

*) Chứng minh: $OE.OQ = \dfrac{AB^2}{4}$

Gọi $\{H\} = AN \cap PO$

+) Xét (O) có AP, PN là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $P \Rightarrow OP$ là tia phân giác của APN

mà ΔAON cân tại O , OP đồng thời là đường cao $OP \perp AN$ tại H

+) Xét ΔAOP vuông tại A ,đường cao AH , có: $AO^2 = OH.OP = \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{AB^2}{4}$ $\quad (1)$

+) Lại có $\Delta OHE \backsim OQP(g.g) \Rightarrow \dfrac{OH}{OQ} = \dfrac{OE}{OP} \Rightarrow OH.OP = OE.OQ \quad (2)$

Từ (1) và(2) ta có: $OE.OQ = \dfrac{AB^2}{4}$

c) Chứng minh: $BCN = OQN$;

Ta có:

+) Tứ giác $APNO$ nội tiếp đường tròn (chứng minh trên)

+) Tứ giác $APQN$ nội tiếp đường tròn (chứng minh trên)

$\Rightarrow A, P, Q, N, O$ cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow OAN = OQN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ON) hay $BAN = OQN$ (3)

Lại có: Trong (O): $BAN = BCN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BN) (4)

Từ (3) và (4) ta có: $BCN = OQN$

*) Tính $S_{quatAON}$

Xét ΔAMB vuông tại A có: $AMB + ABM = 90^0 \Rightarrow ABM = 90^0 - 30^0 = 60^0$

Xét ΔANB vuông tại N có: $NAB + ABN = 90^0 \Rightarrow ABM = 90^0 - 60^0 = 30^0$

Xét ΔAON cân tại O có: $AON = 180^0 - 2OAN = 180^0 - 2.30^0 = 120^0$

$\Rightarrow S_{quatAON}=\dfrac{\pi R^2.n}{360^0}=\dfrac{\pi.12^2.120^0}{360^0}=48\pi$ (đơn vị diện tích)

Câu 30.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O), từ điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B,C là các tiếp điểm) , OA cắt BC tại E.

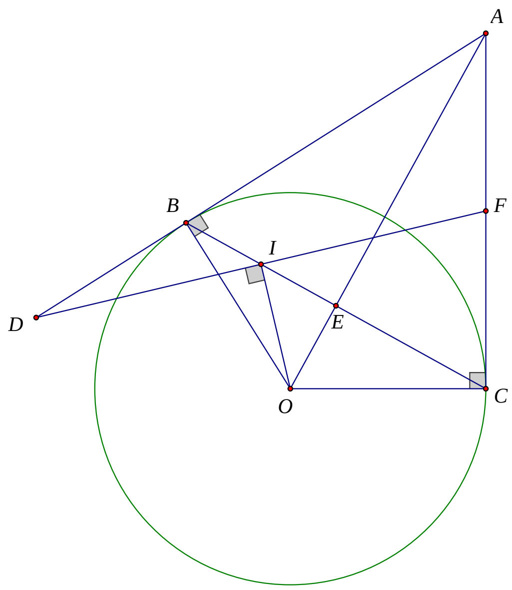
1. Chứng minh:tứ giác $ABOC$ nội tiếp và $BC\perp OA$.

2. Chứng minh: $OB^2=OE.OA; BA.BE=AE.BO$.

3. Gọi I là trung điểm của BE, đường thẳng qua I và vuông góc với OI cắt các tia AB,AC theo thứ tự tại D và F. Chứng minh I là trung điểm của FD.

4. Chứng minh: F là trung điểm của AC .

Hướng dẫn



1) Xét (O) có AB và AC lần lượt là tiếp tuyến của (O) tại B và C (gt)

$\Rightarrow \begin{cases} ABO=90^0 \\ ACO=90^0 \end{cases}$ (t.c.vg)

Xét tứ giác $ABOC$ có : $ABO+ACO=180°\Longrightarrow ABOC$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

Có AB ; AC lần lượt là tiếp tuyến của (O) tại B và C (gt)

$\Rightarrow AB = AC$ (t.c 2 tiếp tuyến giao nhau) ; mà

$OC=OB\ (=R)$ (t.c điểm thuộc đ.tròn)

$\Longrightarrow OA$ là trung trực của BC (tập hợp điểm cách đều 2 mút đoạn thẳng)

$\Longrightarrow OA\perp BC$

2) Xét ΔOBA ($ABO=90°$) có $OA\perp BC$ tại E (cmt)

$\Rightarrow OB^2=OE.OA$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Có $ABO=90°$ (cmt) $\Rightarrow EBO+ABE=90°$

Có $AO\perp BC$ tại E (cmt) $\Rightarrow BEO=90°$ (t.c vg) $\Rightarrow \Delta OEB$ vuông tại E (đ.n)

$\Rightarrow EBO+BOE=90°$ (T.C 2 góc nhọn trong Δ vuông). Mà $EBO+ABE=90°$ (cmt)

$\Rightarrow ABE=BOE$

Xét ΔOBE $\left(E=90°\right)$ và ΔBAE $\left(E=90°\right)$ có: $ABE=BOE$

$\Rightarrow \Delta OBE\backsim\Delta BAE$ (g.g)$\Rightarrow \dfrac{OB}{BA}=\dfrac{BE}{AE}$(cạnh tỉ lệ)$\Rightarrow BA.BE=AE.BO$ (đ.p.cm)

3) Có $OI\perp FD$ tại I (gt) $\Rightarrow DIO=FIO=90°$ (t.c vgoc)

Có $OB\perp AB$ tại B (cmt) mà $D\in AB$ (gt) $\Rightarrow OB\in AD$ tại B $\Rightarrow DBO=90°$ (t.c vg)

Có $OC \perp AC$ tại C (cmt) $\Rightarrow$ $OCA = 90^\circ$ (t.c vg) , mà $F \in AC$ (gt) $\Rightarrow$ $OCF = 90^\circ$

Có $DBO = DIO = 90^\circ$ (cmt)

$\Rightarrow B$ và I cùng thuộc đường tròn đ.kính OD (cung chứa góc 90°)

Xét đường tròn đường kính OD có $IDO = IBO$ (2 gnt cùng chắn cung OI) (1)

Có: $FIO = OCF = 90^\circ$ (cmt)$\Rightarrow$ C và I cùng thuộc đường tròn đ.kính OF (cung chứa góc 90°)

Xét đường tròn đường kính OF có $OFI = OCI$ (2 gnt cùng chắn cung OI) (2)

Có $OB = OC$ (cmt) $\Rightarrow$ ΔOBC cân tại O (đ.n) $\Rightarrow OBI = OCI$ (t.c Δ cân) (3)

Từ (1) (2) và (3) $\Rightarrow ODI = OFI$ (bắc cầu) $\Rightarrow \Delta ODF$ cân tại O (dhnb)

Có $OI \perp DF$ tại I (gt) $\Rightarrow OI$ là đường cao của ΔODF cân tại O (đ.n)

$\Rightarrow$ OI là trung tuyến ΔODF (t.c tam giác cân)

$\Rightarrow I$ là trung điểm của DF (t.c trung tuyến)

4) Có I là trung điểm DF (cmt) $\Rightarrow ID = IF$ (t.c trung điểm)

Có I là trung điểm của BE (gt) $\Rightarrow IB = IE$ (t.c trung điểm)

Có OA là trung trực của BC (cmt) mà $OA \cap BC = E$ (gt)

$\Rightarrow$ E là trung điểm của BC (t.c trung trực)

- Xét ΔDBI và ΔFEI có: $\begin{cases} ID = IF \ (cmt) \\ BID = EIF \ (đđ) \\ IB = IE \ (cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta DBI = \Delta FEI$ (c.g.c)

$\Rightarrow BDI = EFI$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow BD//EF$ (dhnb 2 đt song song) , mà thẳng D ; B ; A thẳng hàng

$\Rightarrow$ $EF//AB$

- Xét ΔABC có :

$\left.\begin{array}{r} E \text{ là trung diem cua } \mathrm{BC} \ (cmt) \\ AB//EF \ (cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow$ F là trung điểm của AC (đ.lý đường TB)

Câu 31.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O), gọi I là trung điểm của dây AB. Qua I kẻ đường kính MN (M thuộc cung nhỏ AB), P là điểm bất kì trên tia đối của tia BA sao cho góc ANP khác $90°$. Nối PN cắt (O) tại E, ME cắt AB tại D.

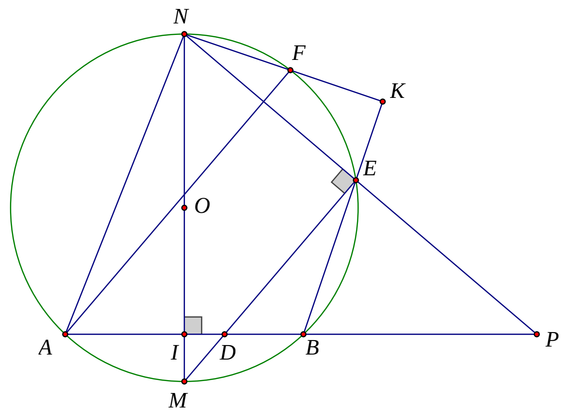
a) Chứng minh các điểm D, I, N, E cùng thuộc 1 đường tròn

b) Chứng minh : $MD.ME = MI.MN$

c) Qua A kẻ đường thẳng song song với ME, đường thẳng đó cắt (O) tại F. Chứng minh BE vuông góc NF.

d) Tìm vị trí của P để D là trung điểm BI

Hướng dẫn



a) Xét đường tròn (O):

Đường kính MN đi qua I là trung điểm dây AB

$\Rightarrow NM \perp AB$ (liên hệ đường kính và dây) $\Rightarrow NID = 90°$

$NEM = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $NEDI$: $NID + NEM = 180° \Rightarrow$ Tứ giác $NEDI$ nội tiếp

$\Rightarrow$ 4 điểm D, I, N, E cùng thuộc 1 đường tròn

b) Xét ΔMID và ΔMEN

$MID = MEN = 90°$

IMD chung $\Rightarrow \Delta MID \backsim \Delta MEN\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{MI}{ME} = \dfrac{MD}{MN} \Rightarrow MI.MN = MD.ME$

c/ Gọi K là giao điểm của NF và BE

Có : I là trung điểm dây AB, MN là đường kính

$\Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung $AB \Rightarrow ANM = MEB$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

Có $AF // ME \Rightarrow AM = FE \Rightarrow ANM = FNE$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

Mà $MEB = ANM \Rightarrow MEB = FNE$

mà $NEM = 90° \Rightarrow NEK + MEB = 90° \Rightarrow NEK + FNE = 90° \Rightarrow NKE = 90° \Rightarrow NF \perp BE$

d/ Ta có: $\Delta MID \backsim \Delta PIN(g-g) \Rightarrow \dfrac{ID}{IM} = \dfrac{IN}{IP} \Rightarrow ID.IP = IM.IN$

$\Delta IMB \backsim \Delta IBN(g-g) \Rightarrow \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IB}{IN} \Rightarrow IB^2 = IM.IN \Rightarrow ID.IP = IB^2$

D là trung điểm $IB \Leftrightarrow ID = \dfrac{IB}{2} \Leftrightarrow IB = \dfrac{IP}{2} \Leftrightarrow$ B là trung điểm $IP \Leftrightarrow P$ đối xứng với I qua B

Câu 32.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Các tiếp tuyến với đường tròn kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn tại B và C. Gọi H là giao điểm của AO và BC, kẻ đường kính BD của đường tròn (O), hạ $CM \perp BD$ tại M. Tia AO cắt (O) tại E, F.

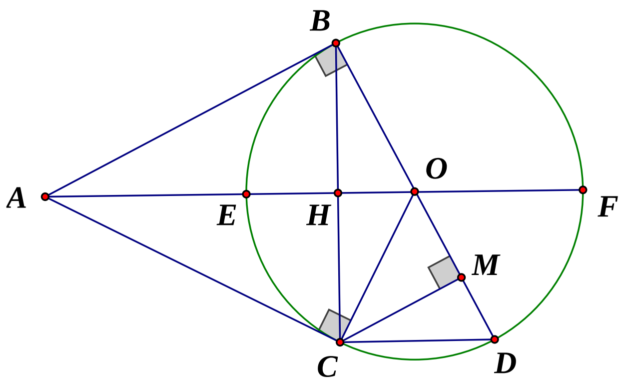
a) Chứng minh: Tứ giác $ABOC$ nội tiếp và $\Delta CMD \backsim \Delta ACO$

b) Chứng minh: BF là phân giác ngoài đỉnh B của ΔABH và $AF.HE = AE.HF$

c) Gọi AD cắt CM tại K. Chứng minh: K là trung điểm của CM và cho $DCM = 30°$, $AH = 4$ cm. Tính $S_{\Delta BOC}$.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: Tứ giác $ABOC$ nội tiếp và $\Delta CMD \backsim \Delta ACO$



* Có: AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) suy ra $\begin{cases} AB \perp BO \\ AC \perp CO \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ABO = 90° \\ ACO = 90° \end{cases}$

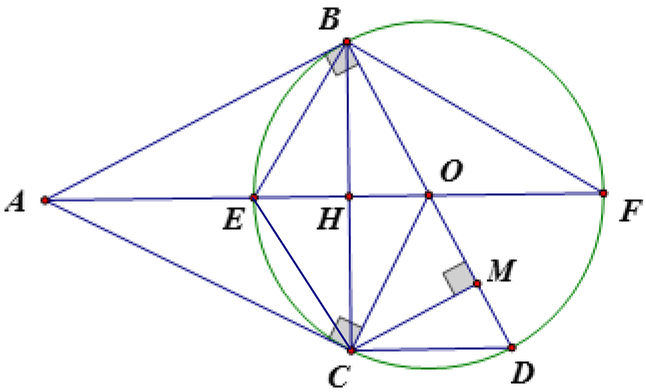
Xét tứ giác $ABOC$ có $ABO + ACO = 90° + 90° = 180°$ nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

* Có: $\begin{cases} AOC = \dfrac{1}{2} BOC = \dfrac{1}{2} \text{sd}\, BC \\ CDM = CDB = \dfrac{1}{2} \text{sd}\, BC \end{cases} \Rightarrow AOC = CDM$

Xét ΔCMD và ΔACO có: $AOC = CDM$ (cmt) và $ACO = CMD (= 90°)$

Suy ra $\Delta CMD \backsim \Delta ACO$ (g-g)

b) * Chứng minh: BF là phân giác ngoài đỉnh B của ΔABH



Có: $ABE = BCE$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BE) (1)

Có: AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow AB = AC$; $OB = OC\ (= R)$

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC mà $E \in OA \Rightarrow EB = EC$

$\Rightarrow \Delta EBC$ cân tại $E \Rightarrow BCE = CBE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ABE = CBE$ $\Rightarrow$ BE là tia phân giác của góc B trong ΔABH

mà EF là đường kính của đường tròn $(O) \Rightarrow EBF = 90° \Rightarrow BF \perp BE$

$\Rightarrow BF$ là phân giác ngoài đỉnh B của ΔABH

* *Chứng minh* $AF.HE = AE.HF$

Xét ΔABO vuông tại B đường cao BH (vì AO là đường trung trực của BC), áp dụng hệ thức lượng có:

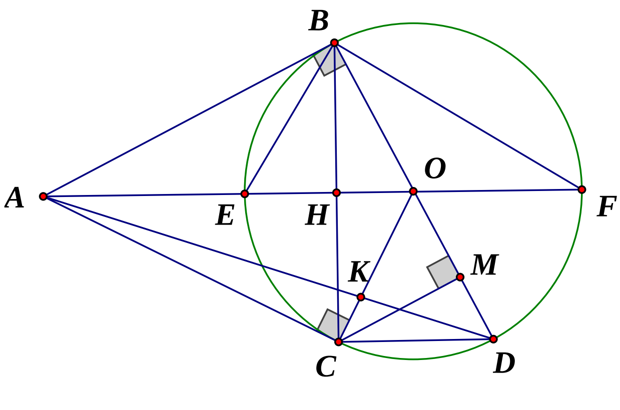
$OB^2 = OH.OA \Rightarrow R^2 = OH.(AE + EO) \Rightarrow R^2 = OH.(AE + R)$ (*)

Ta có: $AF.HE = AE.HF \Leftrightarrow (AE + EF).(OE - OH) = AE.(OF + OH)$

$\Leftrightarrow (AE + 2R).(R - OH) = AE.(R + OH) \Leftrightarrow AE.R - AE.OH + 2R^2 - 2R.OH = AE.R + AE.OH$

$2R^2 = 2R.OH + 2AE.OH \Leftrightarrow R^2 = OH(AE + R)$ (đúng theo (*))

c) Tính $S_{\Delta BOC}$.



Có: $\Delta CMD \backsim \Delta ACO$ (chứng minh câu a) $OAC = DCM = 30°$

Xét ΔACH vuông tại H có:

$CH = AH.\tan OAH = AH.\tan HAC = 4.\tan 30° = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = 2CH = \frac{8}{\sqrt{3}}$

Xét ΔACO vuông tại C đường cao CH, áp dụng hệ thức lượng có:

$CH^2 = AH.OH \Rightarrow OH = \frac{CH^2}{AH} = \frac{16}{3.4} = \frac{4}{3}$

Suy ra: $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}OH.BC = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$ (đvdt)

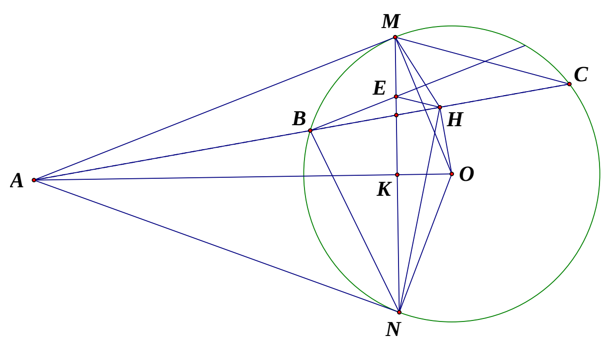
Câu 33.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt B, C (O không thuộc (d), B nằm giữa A và C, AC cắt OM). Gọi H là trung điểm của BC, AO cắt MN tại K.

a) Chứng minh:5 điểm A, M, H, O, N cùng thuộc một đường tròn và $OA.OK = R^2$

b) Chứng minh: HA là phân giác của MHN ; lấy điểm E trên MN sao cho $BE//AM$. Chứng minh $HE//CM$.

c) $Cho\ AHM = 60^0, R = 6\,cm$. Tính $S_{\text{quat}}\ MON$.

Hướng dẫn



a) Ta có $AMO = ANO = 90°$ (tính chất tiếp tuyến của đường tròn)

Xét tứ giác $AMNO$ có $AMO + ANO = 180°$ nên $AMNO$ nội tiếp đường tròn đường kính AO (1)

Vì H là trung điểm BC nên $OH \perp BC \Rightarrow AHO = 90°$

Xét tứ giác $ANOH$ có $AHO + ANO = 180° \Rightarrow$ $ANOH$ nội tiếp đường tròn đường kính AO (2)

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm A, M, H, O, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO .

Có $\begin{cases} AM = AN \\ OM = ON (= R) \end{cases}$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra AO là trung trực của $MN \Rightarrow AO \perp MN$. Xét tam giác AMO vuông tại M có MK là đường cao, áp dụng hệ thức lượng ta được $OK.OA = OM^2 = R^2$ (đpcm)

b) Xét đường tròn đường kính OA đi qua 5 điểm A, M, H, O, N có.

$MHA = MOA$ (góc nội tiếp chắn cung MA)

$NHA = NOA$ (góc nội tiếp chắn cung NA)

Mà $MOA = NOA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Do đó $NHA = MHA$ hay HA là phân giác của MHN

- Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ có $AMN = AHN$ (góc nội tiếp chắn cung AN)

Mà $AMN = BEN$ (đồng vị) suy ra $BEN = BHN$ nên tứ giác $BEHN$ nội tiếp.

Suy ra $EHB = ENB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

Lại có $ENB = MCB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

Nên $EHB = MCB$ Mà hai góc này đồng vị với nhau do đó $HE // CM$.

c) Từ $AHM = 60° \Rightarrow AOM = 60° \Rightarrow MON = 120°$

Áp dụng công thức tính diện tích hình quạt ta được: $S_{quat\,OMN} = \dfrac{\pi.R^2.120}{360} = \dfrac{3,14.36}{3} = 37,68$ (cm^2)

Vậy diện tích hình quạt là 37,68 (cm^2)

Câu 34.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm)

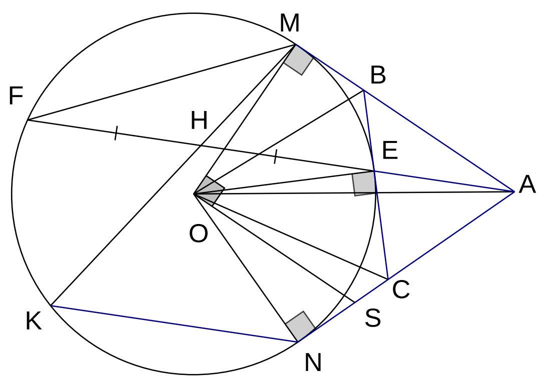
vẽ cát tuyến AEF không đi qua điểm O, H là trung điểm EF. Tiếp tuyến tại E cắt AM tại B, cắt AN tại C.

a) Chứng minh các điểm A, M, H, O, N cùng thuộc một đường tròn và tính chu vi ΔABC theo AM.

b) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt AN tại S. Chứng minh $SO = SA$ và gọi K là giao điểm của MH với (O). Chứng minh $NK // AF$.

c) Chứng minh: $AE.AF = AM^2$

Hướng dẫn



a) Ta có: $AM \perp OM$ (Do AM là tiếp tuyến của đường tròn (O)) $\Rightarrow \Delta AMO$ vuông tại M

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính OA (1)

$AN \perp ON$ (Do AN là tiếp tuyến của đường tròn (O)) $\Rightarrow \Delta ANO$ vuông tại N

$\Rightarrow N$ thuộc đường tròn đường kính OA (2)

H là trung điểm của dây cung EF nên $OH \perp EF$ (mối liên hệ giữa bán kính và dây cung

$\Rightarrow OH \perp HA \Rightarrow \Delta OAH$ vuông tại H.

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính OA (3)

Từ (1),(2) và (3) suy ra O, A, H, M, N cùng thuộc đường tròn đường kính OA.

Ta có CN là tiếp tuyến của đường tròn (O); CE là tiếp tuyến đường tròn (O) nên $CE = CN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Chứng minh tương tự ta có $BE = BM$.

Chu vi tam giác ABC là: $AB + AC + BC = AM + AN - CN - BM + BE + CE = AM + AN = 2AM$

b) Ta có: $NOA + AOS = 90°(gt)$; $NAO + NOA = 90°$ $\Rightarrow NAO = \text{AOS}$

mà $NAO = OAC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow AOS = SAO$

$\Rightarrow \Delta SAO$ cân tại $S \Rightarrow SO = SA$

+) Xét tam giác OMN có $OM = ON$. Suy ra tam giác OMN cân tại O.

$\Rightarrow OMN = ONM$

Ta có:

$OMA = OMN + AMN = 90°$

$ONA = ONM + ANM = 90°$

$\Rightarrow AMN = ANM$

Xét đường tròn (O), ta thấy ANM là góc giữa tiếp tuyến AN và dây cung MN.

MKN là góc nội tiếp chắn cung MN.

Suy ra góc $MKN = ANM$ (cùng chắn cung MN) (*)

+) Ta có: $FHK = AHM$ (hai góc đối đỉnh)

Lại có: O, A, H, M, N cùng thuộc đường tròn đường kính OA.

Nên $AHM = ANM$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Suy ra, $FHK = AHM = ANM$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $MKN = FHK$

Suy ra $KN // FE$ (đpcm).

c)Xét đường tròn (O), ta thấy góc AME là góc tạo bởi tiếp tuyến AM và dây cung ME.

EFM là góc nội tiếp chắn cung ME.

$\Rightarrow EFM = AME$

Xét ΔAME và ΔAFM có:

Góc A chung.

$EFM = AME$ (cmt)

Suy ra $\Delta AME \backsim \Delta AFM\left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{AE}{AM} = \dfrac{AM}{AF} \Rightarrow AE.AF = AM^2$ (đpcm).

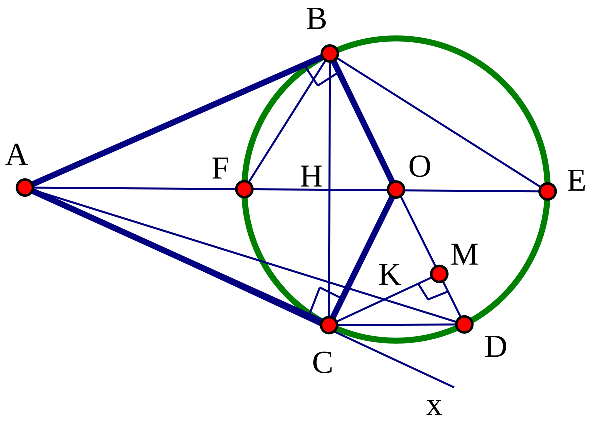
Câu 35.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $\left(O\right)$ và điểm A nằm ngoài $\left(O\right)$. Từ A kẻ các tiếp tuyến của $\left(O\right)$ tại B, C. Gọi H là giao điểm của OA và BC, kẻ đường kính BD của $\left(O\right)$, hạ $CM \perp BD$ tại M. Tia AO cắt (O) tại E, F.

a) Chứng minh tứ giác $CHOM$ nội tiếp và $\Delta AHB \backsim \Delta CMD$

b) Chứng minh : BF là phân giác ABH và $A F.HE = AE.HF$

c) Gọi A D cắt CM tại K. Chứng minh K là trung điểm của CM và cho $AB = 2\text{R} = 10cm$. Tính S giới hạn bới cung BC và đoạn AB, AC

Hướng dẫn



a) Xét (O) có AB, AC là hai tiếp tuyến (gt)

$\Rightarrow AB = AC$ (t/ c hai tiếp tuyến) $\Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC

Có OA = OB , nên O thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow$ AO là đường trung trực của BC

$\Rightarrow OA \perp BC$ $\Rightarrow CHO = BHA = 90^0$

$CM \perp BC$ (gt) $\Rightarrow CMO = 90^0$

+) Xét tứ giác HOMC có $CMO = CHO = 90^0$

= > Xét tứ giác HOMC nội tiếp (vì có tổng 2 góc đối $CMO + CHO = 180^0$)

*) Xét (O) có $ABC = BDC$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến cùng chắn cung BC)

Hay $ABH = MDC$ $\left(H \in BC; M \in BD\right)$

Xét ΔAHB và ΔCMD có :

$$\left.\begin{matrix} ABH = MDC \quad (cmt) \\ CMD = BHA = 90^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta AHB \backsim \Delta CMD\left(g.g\right)$$

b) Xét (O) $OA \perp BC$ (cmt) , mà $OA \cap (O) = \left\{F\right\} \Rightarrow$ F là trung điểm của cung BC $\Rightarrow FB = FC$

Xét (O) có $ABF = \dfrac{1}{2}\text{sd}FB$ (Góc tạo bởi tiếp tuyến AB và dây BF)

$CBF = \frac{1}{2}\text{sd}FC$ (góc nội tiếp chắn cung FC), mà $FB = FC$ (cmt)

$\Rightarrow ABF = CBF \Rightarrow$ BF là phân giác của góc BAH

+) Xét ΔABH có BF là phân giác của $B \Rightarrow \frac{FA}{FH} = \frac{AB}{AH}(tc)$ (1)

Có $BE \perp BF \Rightarrow$ BE là phân giác ngoài tại đỉnh B của ΔABH $\Rightarrow \frac{EA}{EH} = \frac{AB}{AH}(tc)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{FA}{FH} = \frac{EA}{EH} \Rightarrow FA.EH = FH.AE$

c) Gọi $AD \cap BC = \{N\}$

Chứng minh CB là phân giác của góc ACM hay CN là phân giác của góc ACK

Xét ΔACK có CN là phân giác của góc ACK $\Rightarrow \frac{NK}{AN} = \frac{CK}{AC}$ (3)

Có $CN \perp CD \Rightarrow$ CD là phân giác ngoài của ΔACK tại đỉnh C $\Rightarrow \frac{DK}{DN} = \frac{CK}{AC}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{NK}{AN} = \frac{DK}{DN}$ (5)

Có $\Delta DMK \backsim \Delta DBA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{KM}{AB} = \frac{DK}{DA}$ (6)

$\Delta CKN \backsim \Delta BAN(g.g) \Rightarrow \frac{KC}{AB} = \frac{NK}{NA}$ (7)

Từ (5); (6) và (7) $\Rightarrow \frac{KM}{AB} = \frac{CK}{AB} \Rightarrow KM = KC$ => K là trung điểm của CM

3) Xét ΔOBC vuông ở B có BF là đường cao

Ta có $OB^2 = OF.OC \Rightarrow OF = \frac{OB^2}{OC} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2} \Rightarrow CF = CO - OF = 2R - \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$

$\Rightarrow AB = 2AF = 2.\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = R\sqrt{3}$

Tứ giác OACB có $OC \perp AB$ nên $S_{OACB} = \frac{1}{2}AB.OC = R^2\sqrt{3}$

Xét ΔOAF vuông ở F có $\sin AOF = \frac{AF}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AOF = 60^o \Rightarrow AOB = 120^o$

Ta có $S_{quat\ OAB} = \frac{\pi R^2 120^o}{360^o} = \frac{\pi R^2}{3}$

Vậy diện tích của ΔABC nằm ngoài đường tròn (O;R) là

$$S_{OACB} - S_{quat\ OAB} = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = R^2\frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$$ (đvdt).

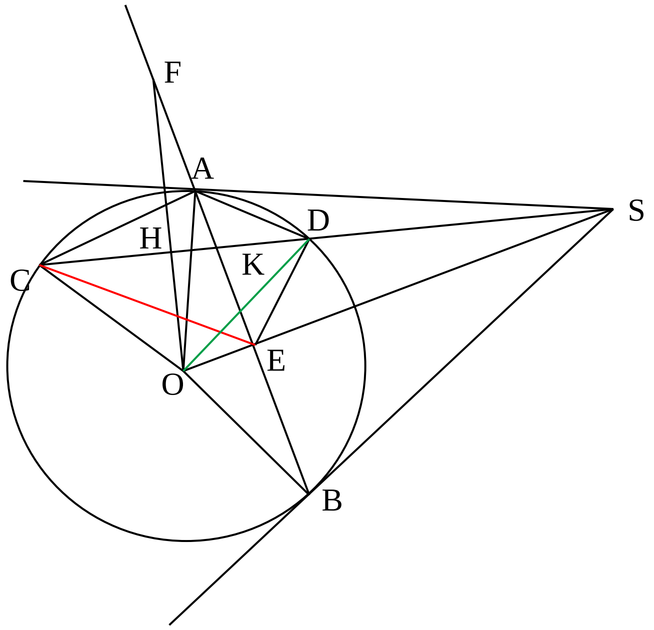
Câu 36.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ và dây CD cố định. Gọi H là trung điểm của CD. Gọi S là một điểm trên tia đối của tia DC. Qua S kẻ hai tiếp tuyến $SA,\ SB$ tới (O) (với CD cắt bán kính OA). Đường thẳng AB cắt $SO,\ OH$ tại $E,\ F$.

a) Chứng minh: Tứ giác $SBOH$ nội tiếp và $OE.OS = R^2$

b) Chứng minh: $SE.SO = SC.SD$ và $\widehat{DEC} = \widehat{DOC}$

c) Chứng minh:Khi S di chuyển trên tia đối của DC thì AB luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn



a) Vì SB là tiếp tuyến của (O) nên $SB \perp OB \Rightarrow \widehat{OBS} = 90^0$

Vì H là trung điểm CD suy ra $OH \perp CD \Rightarrow \widehat{OHD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OHS} = 90^0$

Xét tứ giác SBOH có $\widehat{OHS} + \widehat{OBS} = 180^0$ và $\widehat{OHS},\ \widehat{OBS}$ đối nhau nên tứ giác SBOH nội tiếp .

Vì SA,SB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại S của (O) nên suy ra $AB \perp OS$ tại E

Xét tam giác OBS vuông tại B,đường cao BE có $OE.OS = OB^2$ (Hệ thức lượng)

Hay $OE.OS = R^2$

b) Xét tam giác SAD và SCA có góc S chung, $\widehat{SAD} = \widehat{SCA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AD) suy ra $\Delta SAD \backsim \Delta SCA$ (g-g)

suy ra $\dfrac{SA}{SC} = \dfrac{SD}{SA} \Rightarrow SC.SD = SA^2$ (1)

Xét tam giác OBS vuông tại B,đường cao BE có $SE.SO = SB^2$ (Hệ thức lượng) mà $SA = SB(t/c)$

Suy ra $SE.SO = SA^2$ (2)

Từ (1),(2) suy ra $SE.SO = SC.SD$

+Từ $SE.SO = SC.SD \Rightarrow \dfrac{SE}{SC} = \dfrac{SD}{SO}$

Xét tam giác SDE và SOC có góc S chung và $\frac{SE}{SC}=\frac{SD}{SO}$ (cmt) suy ra $\Delta SDE \backsim \Delta SOC$ (c-g-c)

Suy ra $SED = SCO$

Xét tứ giác $DEOC$ có $SED = SCO$ và SED , SCO là 2 góc ở vị trí góc trong bằng góc ngoài tại đỉnh đối nên tứ giác $DEOC$ nội tiếp suy ra $DEC = DOC$ (2góc nội tiếp cùng chắn 1 cung)

c) Vì $\Delta OEF \backsim \Delta OHS$ (g-g) nên $\frac{OE}{OH}=\frac{OF}{OS} \Rightarrow OH.OF = OE.OS = R^2$ không đổi. mà O,H cố định suy ra F cố định và thuộc AB.

Vậy khi S thay đổi thì AB luôn đi qua điểm cố định là F.

Câu 37.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) và một dây BC cố định không đi qua O. Trên tia đối của tia BC lấy một điểm A bất kì. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN tới (O) (M, N là các tiếp điểm). MN cắt các đường thẳng AO và BC lần lượt ở H và K. Gọi I là trung điểm của BC.

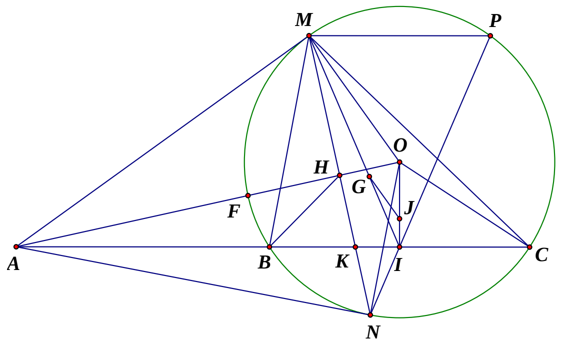
a) Chứng minh $AH.AO = AB.AC = AM^2$

b) Chứng minh tứ giác $BHOC$ nội tiếp

c) Vẽ dây MP song song với BC. Chứng minh N, I, P thẳng hàng.

d) Khi A di động trên tia đối của tia BC, chứng minh trọng tâm tam giác MBC chạy trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn



a) * Xét (O) có:

+) AM, AN là tiếp tuyến của (O) (gt)

$\Rightarrow OM \perp AM$; $ON \perp AN$; $AM = AN$.

Nên $AMO = ANO = 90^0$.

+) $AMB = ACM$ (Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn cung MB)

* $AM = AN$ (cmt) nên A thuộc đường trung trực của MN.

$OM = ON$ (Bán kính của (O)) nên O thuộc đường trung trực của MN.

Do đó AO là đường trung trực của $MN \Rightarrow AO \perp MN$ tại H.

* Xét ΔAMO vuông tại M có $MH \perp AO$ tại H có $AM^2 = AH.AO$ (Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông) (1).

* Xét ΔAMB và ΔACM có:

MAB chung ; $AMB = ACM$

Nên $\Delta AMB \backsim \Delta ACM$ (gg)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AC}{AM}$ (Các cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow AM^2 = AB.AC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $AH.AO = AB.AC = AM^2$

b) Ta có $AH.AO = AB.AC$ (cmt)

Nên $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{AO}$

Xét ΔABH và ΔAOC có

OAC chung

$\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{AO}$ (cmt)

Nên $\Delta ABH \backsim \Delta AOC$ (cgc) $\Rightarrow AHB = ACO$ (hai góc tương ứng)

Mà $AHB + BHO = 180^0$ (Hai góc kề bù)

Nên $BCO + BHO = 180^0$

Xét tứ giác $BHOC$ có:

$BCO + BHO = 180^0$

Mà BCO và BHO là hai góc đối nhau

Nên tứ giác $BHOC$ là tứ giác nội tiếp (dhnb).

c) Xét (O):

BC là dây cung

I là trung điểm của BC

OI là một phần đường kính

Nên $OI \perp BC$ tại $I \Rightarrow OIA = 90^0$

Mặt khác: $ANO = 90^0$ (AN là tiếp tuyến của (O) tại N)

Xét tứ giác $AOIN$ có:

$AIO = ANO = 90^0$

Mà N, I là hai đỉnh kề nhau

Nên tứ giác $AOIN$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AOIN$ có:

$AON = AIN$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn AN)

Xét (O) có:

$MPN = \frac{1}{2}$ sđ MN (Góc nội tiếp chắn MN)

AON = sđ $FN = \frac{1}{2}$ sđ MN

$\Rightarrow MPN = AON$

Mà $AON = AIN$ do đó $MPN = AIN$

Lại có $MP // BC$, I là trung điểm của BC.

$\Rightarrow MPI + PIA = 180^0$

Nên $AIN + AIP = 180^0$ do đó N, I, P thẳng hàng.

d) Gọi G là trọng tâm của $\Delta MBC \Rightarrow IG = \frac{1}{3} IM \Rightarrow \frac{IG}{IM} = \frac{1}{3}$

Trên OI lấy điểm J sao cho $\frac{IJ}{OI} = \frac{1}{3}$

Ta có BC cố định nên trung điểm I cố định, O cố định và $\frac{IJ}{OI} = \frac{1}{3}$ nên J cố định.

Xét ΔIMO có: $\frac{IG}{IM} = \frac{IJ}{IO}\left(= \frac{1}{3}\right)$

Nên $JG // MO$ (Định lý Talet đảo)

Từ đó ta có $\frac{GJ}{MO} = \frac{IJ}{IO} = \frac{1}{3}$

Mà MO là bán kính R của đường tròn (O) $\Rightarrow GJ = \frac{1}{3} R$ (không đổi)

Vậy khi A di động trên tia đối của tia BC thì trọng tâm G của tam giác MBC thuộc đường tròn tâm J bán kính $\frac{R}{3}$ cố định.

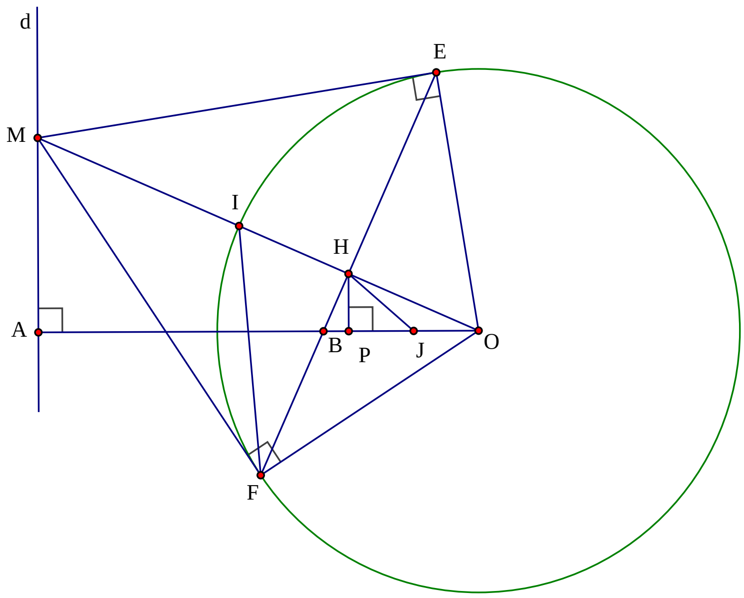
Câu 38.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ và điểm A cố định nằm ngoài (O). Vẽ đường thẳng $d \perp OA$ tại A. Trên d lấy điểm M. Qua M kẻ hai tiếp tuyến ME, MF. FE cắt OA tại B.

a) Chứng minh: 5 điểm M, E, O, F, A cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi EF cắt OM tại H. Chứng minh $OM \perp EF$ và $OA.OB = OH.OM$.

c) Gọi MO cắt (O) tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMEF và tìm vị trí điểm M để diện tích ΔBHO lớn nhất.

Hướng dẫn



a) Vì ME là tiếp tuyến của (O) tại E

$\Rightarrow ME \perp OE$ (tính chất tiếp tuyến của đường tròn) $\Rightarrow MEO = 90^\circ$

Tương tự, $MFO = 90^\circ$

Xét tứ giác $MEOF$ có $MEO + MFO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $MEOF$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow$ 4 điểm M, E, O, F cùng thuộc một đường tròn (1)

Vì $d \perp OA \Rightarrow MAO = 90^\circ$

Xét tứ giác $AMEO$ có $MEO + MAO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác $AMEO$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow$ 4 điểm A, M, E, O cùng thuộc một đường tròn (2)

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm M, E, O, F, A cùng thuộc một đường tròn.

b) Vì ME, MF là lần lượt là tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow ME = MF$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow M$ nằm trên đường trung trực của EF

Vì $OE = OF = R$ nên O nằm trên đường trung trực của EF

$\Rightarrow MO$ là đường trung trực của $EF \Rightarrow MO \perp EF$

Vì $MO \perp EF$ tại H $\Rightarrow OHB = 90^\circ$

Xét ΔOAM và ΔOHB có

$OAM = OHB (= 90^\circ)$

MOA chung

Do đó $\Delta OAM \backsim \Delta OHB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OA}{OH}=\frac{OM}{OB}$ (các cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow OA.OB=OM.OH$.

c) Vì ME, MF là lần lượt là tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow MO$ là tia phân giác của EMF (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Vì $I \in MO$ nên MI là tia phân giác của EMF (3)

Vì $I \in MO$ và MO là đường trung trực của EF nên $IE = IF$

Xét ΔIEF có $IE = IF$

$\Rightarrow \Delta IEF$ cân tại O $\Rightarrow IEF = IFE$ (tính chất tam giác cân)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MEOF$ có $IEF = MFI$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn IF)

Do đó $IFE = MFI \left(= IEF\right)$

$\Rightarrow FI$ là tia phân giác của MFE (4)

Từ (3) và (4) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMEF .

Kẻ $HP \perp OB$, gọi J là trung điểm của OB

Ta có $S_{BHO} = \frac{1}{2}OB.HP$

Ta có: $OA.OB = OM.OH$.

Mà $OM.OH = OF^2$

Do đó $OA.OB = OF^2$ không đổi $\Rightarrow$ OB không đổi

Vì OB không đổi nên S_{BHO} lớn nhất khi HP lớn nhất

Mà $HP \le HJ$

Dấu "=" xảy ra $P \equiv J$

Khi đó HJ là đường cao, đồng thời là đường trung tuyến

$\Rightarrow \Delta OHB$ vuông cân tại H $\Rightarrow HOB = 45°$ $\Rightarrow MOA = 45°$

Xét ΔMOA vuông tại A có $MOA = 45° \Rightarrow \Delta MOA$ vuông cân tại A $\Rightarrow MA = AO$

Vậy S_{BHO} lớn nhất khi $MA = AO$.

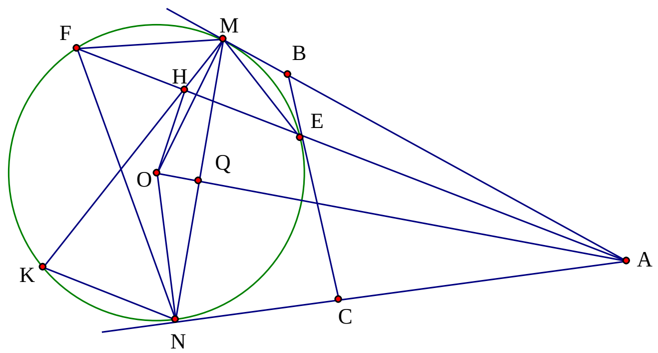
Câu 39.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến AM, AN với (O) $(M, N \in (O))$, MN cắt AO tại Q.

a) Chứng minh:Tứ giác $AMON$ nội tiếp và $OQ.OA = R^2$

b) Vẽ cát tuyến AEF không đi qua điểm O. Kẻ $NK // AF$ cắt (O) tại K, MK cắt FE tại H. Chứng minh $AE.AF = AM^2$ và $HE = HF$.

c) Tiếp tuyến tại E của (O) cắt AM tại B, AN tại C. Giả sử A và (O) cố định, cát tuyến AEF thay đổi. Chứng minh chu vi ΔABC không đổi. Tính giá trị không đổi ấy theo AM.

Hướng dẫn



a) Ta có $OM \perp AM$ (Theo tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow OMA = 90^0$

$ON \perp AN$ (Theo tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow ONA = 90^0$

Tứ giác AMON có $OMA + ONA = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên tứ giác AMON nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

Ta có $OM = ON$ (Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow$ O thuộc đường trung trực của MN

$AM = AN$ (Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow$ A thuộc đường trung trực của MN

$\Rightarrow$OA là đường trung trực của MN$\Rightarrow OA \perp MN$

ΔOMA vuông tại M có $MQ \perp OA$ theo hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có

$OM^2 = OA.OQ \Rightarrow OA.OQ = R^2$

b) Xét ΔAME và ΔAFM có : MAE chung; $AFM = AME$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung ME)

$\Rightarrow \Delta AME$ đồng dạng ΔAFM $\Rightarrow \dfrac{AM}{AF} = \dfrac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE.AF$

Do KN//AF$\Rightarrow AHM = MKN$ (Hai góc đồng vị)

mà $MKN = \dfrac{1}{2}MON$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung MN) $\Rightarrow AHM = \dfrac{1}{2}MON$ (1)

Ta có tia OA là phân giác của MON (Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow AOM = \dfrac{1}{2}MON$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AHM = AOM$

Tứ giác AMHN có $AHM = AOM$ nên tứ giác AMHN nội tiếp (theo quỹ tích cung chứa góc)

$\Rightarrow OHA = OMA$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OA)

mà $OMA = 90^0 \Rightarrow OHA = 90^0 \Rightarrow OH \perp$ EF

Xét (O) có $OH \perp EF \Rightarrow$ H là trung điểm của EF (quan hệ giữa đường kính và dây) $\Rightarrow HE = HF$

c) Ta có $AM = AN$; $BM = BE$; $CN = CE$ (theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Chu vi tam giác ABC :

$AB + AC + BC = AB + AC + BE + EC = AB + AC + BM + CN$

$= (AB + BM) + (AC + CN) = AM + AN = 2AM$

Do A và (O) cố định nên M cố định $\Rightarrow$ đoạn thẳng AM có giá trị không đổi $\Rightarrow 2AM$ không đổi nên chu vi tam giác ABC có giá trị không đổi.

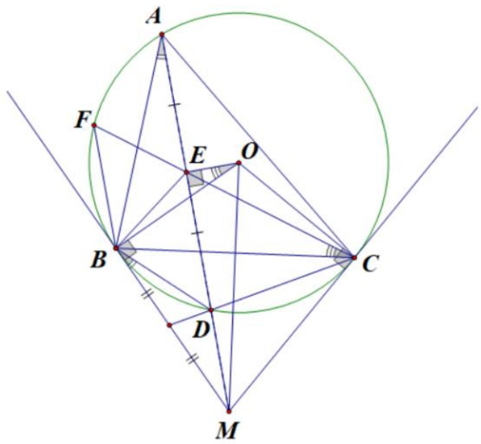
Câu 40.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn O ($AB < AC$). Hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M, AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. E là trung điểm của đoạn AD. EC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F .

a) Chứng minh:Tứ giác OEBM nội tiếp đường tròn và $MB^2 = MA.MD = MO.MH$

b) Chứng minh: $BCE = BOE; BF // AM$

c) Giả sử CD cắt MB tại trung điểm MB . Chứng minh $AB // MC$.

Hướng dẫn



a. Vì E là trung điểm của AD

Suy ra $OE \perp AD$ (liên hệ giữa đường kính và dây)

Lại có $OBM = 90°$ (vì BM là tiếp tuyến của (O))

Xét tứ giác $OEBM$ có

$OEM = OBM = 90°$

Mà E và B là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn OM một góc không đổi

Suy ra tứ giác $OEBM$ nội tiếp đường tròn đường kính OM

Xét ΔABM và ΔBDM có:

$BAD = DBM$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BD)

BMD chung

$$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta BDM\,(g.g) \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MB} \Leftrightarrow MB^2 = MA.MD$$

b. Vì $OCM = 90°$ (CM là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính OM

Mà tứ giác $OEBM$ nội tiếp đường tròn đường kính OM

$\Rightarrow EBCO$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính OM

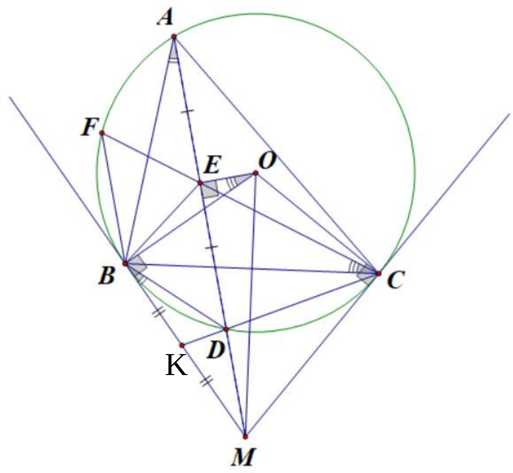
$\Rightarrow BCE = BOE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

Ta có $FCB = \frac{1}{2} Sđ FB = \frac{1}{2}\left(Sđ AB - Sđ AF\right)$ (góc nội tiếp chắn cung FB)

$BMA = \frac{1}{2}\left(Sđ AB - Sđ BD\right)$ (góc có đỉnh bên ngoài đường tròn (O))

Mà $FCB = BMA$ (tứ giác EBMC nội tiếp đường tròn đường kính OM)

$\Rightarrow AF = BD \Rightarrow ABF = BAD$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằ



Mà hai góc này ở vị trí so le trong

$\Rightarrow BF // AD$

c.

Xét ΔBKD và ΔCKB

BKC chung

$BCD = DBK$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cun

$\Rightarrow \Delta BKD \backsim \Delta CKB(g.g) \Rightarrow \dfrac{BK}{CK} = \dfrac{KD}{BK} \Rightarrow BK^2 = KD.KC$

Mà $BK = KM \Rightarrow KM^2 = KD.KC \Rightarrow \dfrac{KM}{KD} = \dfrac{KC}{KM}$

Xét ΔKMD và ΔKCM có

$\dfrac{KM}{KD} = \dfrac{KC}{KM}$

DKM chung

$\Rightarrow \Delta KMD \backsim \Delta KCM\ (c.g.c) \Rightarrow KMD = KCM$ (hai góc tương ứng)

Mà $KCM = DAC$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn DC)

$\Rightarrow KMD = DAC$. Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow BM // AC$

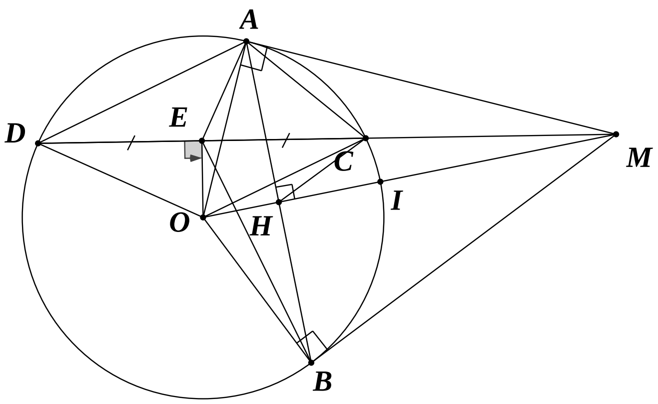
Câu 41.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O. Vẽ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm) . Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D), OM cắt AB và (O) lần lượt tại H và I. Gọi E là trung điểm của DC .

a) Chứng minh:Tứ giác $MAOB, ABOE$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $MC.MD = MA^2$ và $MHC = MDO$

c) Chứng minh: $OH.OM + MC.MD = MO^2$

Hướng dẫn



a) Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow MA \perp OA; MB \perp OB.$ (T/C tiếp tuyến). $\Rightarrow MAO = MBO = 90^o.$

Xét tứ giác MAOB có:

$MAO + MBO = 180^o.$

MAO và MBO là hai góc đối nhau.

$\Rightarrow$ Tứ giác $MAOB$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính OM (Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).(1)

Xét (O) có: OE là một phần của đường kính

CD là dây cung; E là trung điểm của CD (gt)

$\Rightarrow OE \perp CD$ (Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung).

$\Rightarrow OEC = 90^o \Rightarrow OEM = 90^o (M \in CD).$

Xét tứ giác OEMB có:

$OEM + OBM = 180^o$

OEM và OBM là hai góc đối nhau.

$\Rightarrow$ Tứ giác $OEMB$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính OM (Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).(2)

(1);(2) $\Rightarrow$ Năm điểm $M; A; B; E; O$ đều nằm trên đường tròn đường kính OM .

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABOE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính OM (Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

b) Xét ΔMAC và ΔMDA có:

AMD *chung*

$\widehat{MDA} = \widehat{MAC}$. (cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \Delta MAC \backsim \Delta MDA(g-g) \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA}$ (Các cạnh tương ứng) $\Leftrightarrow MC.MD = MA^2$ (3)

Ta có: $OA = OB\left(=R\right)$

$MA = MB$ (T/C hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow$ MO là đường trung trực của AB (T/C đường trung trực của đoạn thẳng)

$\Rightarrow MO \perp AB\left(H \in AB; H \in MO\right) \Rightarrow AH \perp OM$.

Xét ΔOAM có: AH là đường cao $\left(AH \perp OM\right)$

$\Rightarrow MA^2 = MH.MO$ (hệ thức lượng trong tam giác).(4)

(3); (4) $\Rightarrow MC.MD = MH.MO \Leftrightarrow \frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}$.

Xét ΔMCH và ΔMOD có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{DMO}\ chung \\ \frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}\left(cmt\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MCH \backsim \Delta MOD(c.g.c) \Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}.$$

Xét ΔOAM có: AH là đường cao $\left(AH \perp OM\right)$; $\widehat{MAO} = 90^o\left(cmt\right)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} OA^2 = OH.OM.\left(HTL\right) \\ OA^2 + AM^2 = MO^2\left(pytago\right) \end{cases}$$

Ta có: $\left.\begin{array}{l} OA^2 = OH.OM.\left(cmt\right) \\ OA^2 + AM^2 = MO^2\left(cmt\right) \\ MC.MD = MA^2\left(cmt\right) \end{array}\right\} \Rightarrow OH.OM + MC.MD = MO^2$.

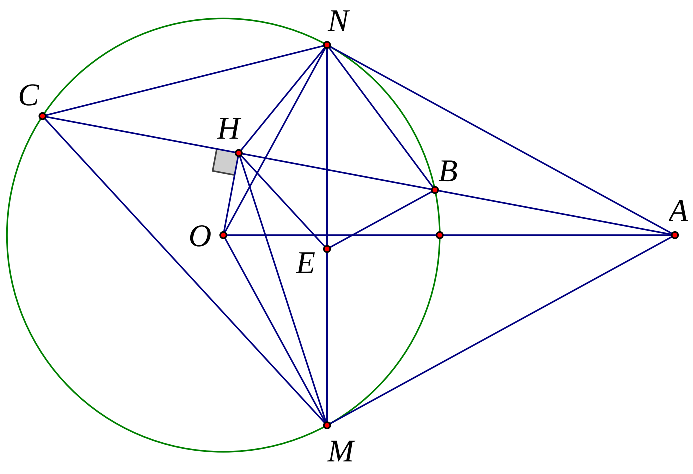
Câu 42.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn $\left(O\right)$ kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm) . Đường thẳng $\left(d\right)$ đi qua A cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại hai điểm phân biệt B, C, (O không thuộc $\left(d\right)$, B nằm giữa A và C, AC cắt OM). Gọi H là trung điểm BC.

a) Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp ; $AB.AC = AN^2$.

b) Chứng minh : HA là phân giác của góc $\widehat{MHN}$; lấy điểm E trên MN sao cho $HE//CM$. Chứng minh $BE//AM$.

c) Cho $\widehat{AHM} = 60^0$. Tính diện tích giới hạn bởi cung MN và AM, AN

Hướng dẫn



a) Xét tứ giác $AMON$ có $AMO = ANO = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến)

nên $AMO + ANO = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau của tứ giác $AMON$ nên tứ giác $AMON$ nội tiếp đường tròn . (1)

+ Xét ΔANB và ΔACN có A chung, $ANB = ACN\left(=\frac{1}{2}sd\,NB\right)$

Suy ra $\Delta ANB \backsim \Delta ACN\left(g-g\right) \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AN} \Rightarrow AB.AC = AN^2$ (đpcm) .

b) Xét ΔAOM và ΔAON có: $\begin{cases} AM = AN \\ OM = ON = R \Rightarrow \Delta AOM = \Delta AON\left(c.c.c\right) \Rightarrow NOA = MOA \\ OA \text{ chung} \end{cases}$.

Vì H là trung điểm $BC \Rightarrow OH \perp BC$ (quan hệ đường kính – dây cung).

Xét tứ giác $AHOM$ có $AHO + AMO = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $AHOM$ nội tiếp đường tròn. (2)

Từ (1)(2) suy ra 5 điểm A, M, O, H, N cùng nằm trên một đường tròn.

$\Rightarrow NHA = NOA$ (góc nội tiếp cùng chắn cung NA)

$MHA = MOA$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MA)

Mà $NOA = MOA\left(cmt\right) \Rightarrow NHA = MHA \Rightarrow AH$ là phân giác của góc MHN .

+ Ta có: $EHB = MCB$ (hai góc đồng vị) mà $MCB = ENB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MB)

$\Rightarrow EHB = ENB \Rightarrow$ tứ giác $EHNB$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow HNE = HBE$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HE)

Mà $HNE = HAM$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HM)

$\Rightarrow HBE = HAM$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $EB // MA$.

c) Ta có: $AOM = AON = AHM = 60^0$ nên $MON = 120^0$.

Diện tích giới hạn bởi cung MN , AM, AN là: $S = \frac{\pi.R^2.120^0}{180^0} = \frac{2\pi R^2}{3}$

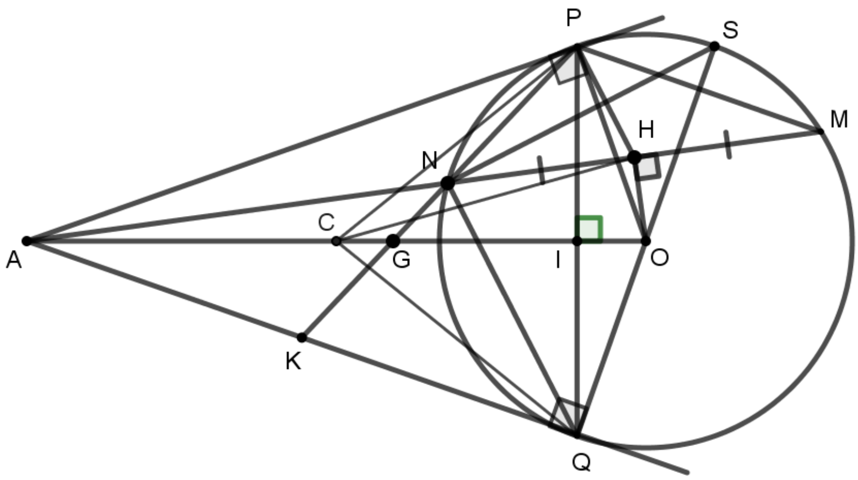
Câu 43.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) và một điểm A sao cho $OA = 3R$. Qua A kẻ tiếp tuyến AP và AQ của đường tròn (O), với P và Q là 2 tiếp điểm. Lấy M thuộc đường tròn (O) sao cho PM song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và đường tròn (O). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K, H là trung điểm của MN.

1. Chứng minh: tứ giác $OHPQ$ nội tiếp và $AP^2 = AN.AM$

2. Chứng minh: $QK^2 = KN.KP$ và $AK = KQ$

3. Kẻ đường kính QS của đường tròn (O). Chứng minh tia NS là tia phân giác của góc PNM và gọi G là giao điểm thứ 2 của đường thẳng AO và PK. Tính AG theo bán kính R.

Hướng dẫn



1.***Chứng minh: tứ giác** $OHPQ$ **nội tiếp**

Vì AP, AQ là hai tiếp tuyến của đường tròn (O), nên: $\widehat{APO} = \widehat{AQO} = 90°$

Xét tứ giác $APOQ$, có: $\widehat{APO} + \widehat{AQO} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $APOQ$ nội tiếp (tổng hai góc đối bằng $180°$).

Gọi C là trung điểm của cạnh AO.

Xét ΔAPO vuông tại P, có PC là đường trung tuyến

$\Rightarrow \Delta APO$ nội tiếp đường tròn đường kính OA

Tương tự, ΔAQO nội tiếp đường tròn đường kính OA

Suy ra, tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $APOQ$ là trung điểm của cạnh OA

Gọi C là trung điểm của OA

Khi đó, $CA = CP = CO = CQ$ (vì tứ giác $APOQ$ nội tiếp) (1)

Mặt khác, $HM = HN$ (gt) nên $OH \perp MN$ (liên hệ giữa đường kính và dây)

$\Rightarrow \widehat{AHO} = 90°$

Xét ΔAHO vuông tại H, có HC là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền OA

Nên: $CH = CA = CO\left(= \dfrac{1}{2}OA\right)$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $CO = CH = CP = CQ$

Suy ra tứ giác $OHPQ$ nội tiếp đường tròn tâm C

*** Chứng minh:** $AP^2 = AN.AM$

Xét ΔAPN và ΔAMP, có:

PAM là góc chung

$PMA = APN$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến AP và dây cung PN cùng chắn PN)

$\Rightarrow \Delta APN \backsim \Delta AMP$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{AN}{AP} \Rightarrow AP^2 = AN.AM$ (đpcm)

2. ***Chứng minh:** $QK^2 = KN.KP$

Xét ΔQKN và ΔPKQ, có:

PKQ là góc chung

$KPQ = KQN$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến AQ và dây cung QN cùng chắn QN)

$\Rightarrow \Delta QKN \backsim \Delta PKQ$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{QK}{PK} = \dfrac{KN}{KQ} \Rightarrow QK^2 = KN.KP$ (đpcm) (3)

*** Chứng minh:** $AK = KQ$

Ta có: $AK = KQ$ (cmt)

PM // AQ $\Rightarrow PMA = KAN$ (so le trong) $\Rightarrow APN = KAN$

Xét ΔKAN và ΔKPA, có:

AKP là góc chung

$APN = KAN$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta KAN \backsim \Delta KPA$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{KA}{KP} = \dfrac{KN}{KA} \Rightarrow KA^2 = KN.KP$ (4)

Từ (3) và (4), suy ra: $KQ^2 = AK^2$ hay $AK = KQ$ (đpcm)

3. ***Chứng minh tia NS là tia phân giác của góc** PNM

Vì AQ là tiếp tuyến của (O), đường kính QS nên $AQ \perp QS$

Mà AQ // PM nên $QS \perp PM$

$\Rightarrow S$ là điểm chính giữa của PM (liên hệ giữa đường kính và dây)

$\Rightarrow PS = SM \quad \Rightarrow PNS = MNS$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow NS$ là tia phân giác của góc PNM

*** Tính AG theo bán kính R.**

Gọi $I = OA \cap PQ$

Áp dụng hệ thức cạnh và đường cao vào ΔAQO vuông tại Q, có:

$$OQ^2 = OI.OA \Rightarrow OI = \frac{OQ^2}{OA} = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R$$

Mặt khác, $AI = OA - OI = 3R - \frac{1}{3}R = \frac{8}{3}R$

Ta có: $AP = AQ$ (hai tiếp tuyến của đường tròn (O))

$OP = OQ$ (bán kính của đường tròn (O))

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của đoạn thẳng PQ $\Rightarrow IP = IQ$

Xét ΔAPQ, có PK và AI là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của $\Delta APQ \Rightarrow AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}.\frac{8}{3}R = \frac{16}{9}R$

Câu 44.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H .Gọi E' là điểm đối xứng H qua AC , F' là điểmđốixứng H qua AB .Chứng minh:

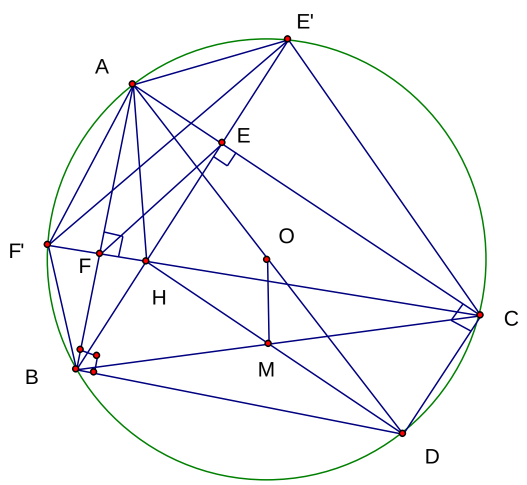
a)Tứ giác $BCE'F'$nội tiếp đường tròn(O)

b) Năm điểm A, F', B, C, E'cùng thuộc một đường tròn.

c) AO và EF vuông góc nhau.

d) Khi A chạy trên(O) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi.

Hướng dẫn



a) Vì F' đối xứng với H qua AC $\Rightarrow$ AB là đường trung trực của $F'H$ (định nghĩa)

$\Rightarrow BF' = BH$ (tính chất) $\Rightarrow \Delta F'BH$ cân tại B $\Rightarrow$ $BF'H = BHF'$(1)

Chứng minh tương tự: $CE'H = CHE'$(2)

Mà $F'HB = CHE'$ (đối dỉnh) (3)

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow$ $CE'H = BF'H$, mà hai đỉnh E', F' kề nhau cùng nhìn đoạn BC

$\Rightarrow$ tứ giác $BCE'F'$ nội tiếp đường tròn (O) (dhnb)

b) Xét ΔACF vuông tại A có $\text{FAC} + \text{ACF} = 90^0$

Xét ΔHCE vuông tại A có $HCE + CHE = 90^0$

$\Rightarrow FAC = CHE$ mà $CE'H = CHE'$(cmt) ; $CE'H = BF'H$ (cmt)

$\Rightarrow BAC = BF'C = BE'C \Rightarrow$ F', A, E' cùng thuộc cung chứa góc trên đoạn BC

$\Rightarrow$ Năm điểm A, F', B, C, E' cùng thuộc một đường tròn (O)

Cách 2 : Chứng minh tứ giác $BF'AC$ và tứ giác $BAE'C$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ tứ giác $BCE'F'$ nội tiếp đường tròn (O)

c) Vì $\Delta BF'H$ cân tại B (cmt), BF là đường trung trực (cmt) $\Rightarrow$ BF là phân giác của $F'BH$

$\Rightarrow F'BF = HBF$ $\Rightarrow$ cung AF' = cung AE' (tính chất)

$\Rightarrow$ $AF' = AE'$ (định lí)

$\Rightarrow$ điểm A thuộc đường trung trực của $F'E'$ (4)

Ta có năm điểm A, F', B, C, E' cùng thuộc một đường tròn (O) (cmt) $\Rightarrow$ $OF' = OE'$

$\Rightarrow O F' = OE'$ (bán kính) $\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của $F'E'$ (5)

Từ (4), (5) $\Rightarrow OA$ là đường trung trực của $F'E'$ $\Rightarrow F'E' \perp OA$

Xét $\Delta F'HE'$ có :

F là trung điểm của $F'H$ (gt) ; E là trung điểm HE' (gt) $\Rightarrow$ EF là đường trung bình của $\Delta F'HE'$ (định nghĩa) $\Rightarrow$ $F'E' // FE$ (tính chất) ; $F'E' \perp OA$ (cmt) $\Rightarrow$ $FE \perp OA$ (định lí)

d) Kẻ đường kính AD của (O) , M là trung điểm của BC

Xét (O) có $ABD = 90^0$; $ACD = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AB \perp BD; AC \perp CD$ mà $AB \perp CF; AC \perp BE$(gt) $\Rightarrow$ BH // DC ; BD // CH (định lí)

$\Rightarrow$Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành (dhnb) $\Rightarrow$ M là trung điểm của HD (tính chất)

Xét ΔAHD có : M là trung điểm của HD (cmt) ; O là trung điểm AD (cách vẽ)

$\Rightarrow OM$ là đường trung bình của ΔAHD $\Rightarrow$ $AH = 2OM$ (tính chất)

Mà OM không đổi $\Rightarrow$ AH không đổi

Xét tứ giác $AFHE$ có : $AFH + AEH = 180^0$ $\Rightarrow$ tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH (dhnb) $\Rightarrow$ ΔAEF nội tiếp đường tròn đường kính AH , mà AH không đổi (cmt)

$\Rightarrow$Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAEF không đổi khi A di chuyển trên (O).

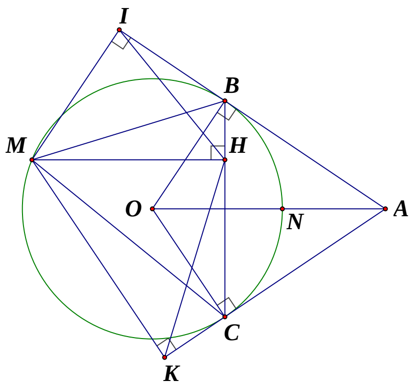
Câu 45.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Các tiếp tuyến với đường tròn kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn tại B, C. Gọi M là điểm thuộc cung lớn BC. Từ M kẻ $MH \perp BC,$ $MK \perp CA, MI \perp AB.$

a) Chứng minh: Tứ giác $MIBH$ nội tiếp và $MIH = MHK$.

b) Chứng minh: $MI.MK = MH^2$.

c) Cho $AB = 2R$. Tính diện tích giới hạn bởi cung nhỏ BC và cạnh AC, AB.

Hướng dẫn



a) Xét tứ giác $MIBH$ có:

$MIB + MHB = 90^o + 90^o = 180^o$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $MIBH$ nội tiếp (dhnb)$\Rightarrow MIH = MBC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MH) (1)

Chứng minh tương tự, ta có: Tứ giác $MKCH$ nội tiếp.

$\Rightarrow MHK = MCK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MK) 2)

Lại có $MBC = MCK$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung MC của (O)) (3)

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow MIH = MHK$

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có: $MHI = MKH$.

Xét ΔMIH và ΔMHK có: $MIH = MHK\,(cmt); MHI = MKH\,(cmt)$

$\Rightarrow \Delta MIH \backsim \Delta MHK\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{MI}{MH} = \dfrac{MH}{MK} \Rightarrow MI.MK = MH^2$.

c) Vì ΔOAB vuông tại B (gt) $\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}OB.AB = \dfrac{1}{2}.R.2R = R^2$ (đvdt)

Gọi N là giao điểm của OA với (O)

Vì ΔOAB vuông tại $B \Rightarrow \tan AOB = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{2R}{R} = 2 \Rightarrow AOB \approx 63^o \Rightarrow sd\,BN \approx 63^o$

Suy ra diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi cung nhỏ BN và 2 bán kính OB, ON là:

$$\frac{\pi R^2.63}{360} = \frac{7\pi R^2}{40} \text{ (đvdt)}$$

Do đó diện tích giới hạn bởi cung nhỏ BC và cạnh AC, AB là: $2.\left(R^2 - \dfrac{7\pi R^2}{40}\right) = \dfrac{(40-7\pi)R^2}{20}$ (đvdt)

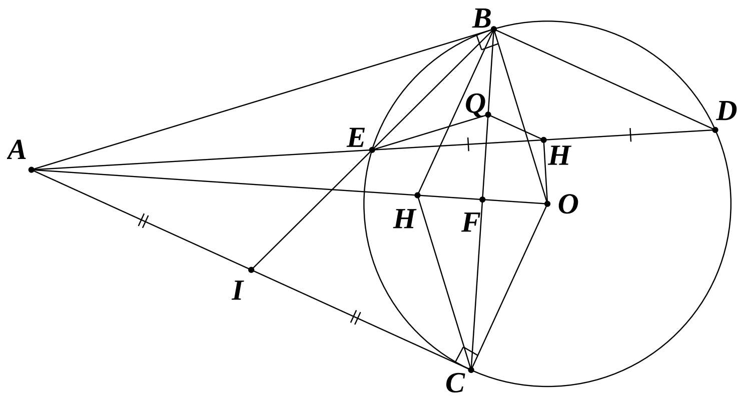
Câu 46.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Từ một điểm A nằm ngoài (O) kẻ tiếp tuyến AB, AC với (O), $(B, C \in (O))$. Gọi I là trung điểm AC. IB cắt (O) tại E, tia AE cắt (O) tại D, H là trung điểm ED.

a) Cm: 5 điểm A, B, H, O, C cùng thuộc 1 đường tròn và $IC^2 = IE.IB$

b) Cm: $BD//AC$ và qua H kẻ đường thẳng song song BD cắt BC tại Q. Chứng minh $BAD = QED$

c) Khi điểm B và (O) cố định tìm quỹ tích trực tâm H' của tam giác ABC

Hướng dẫn



a) Xét (O) có:

OH là một phần đường kính.

H là trung điểm của dây ED.

Do đó $OH \perp ED$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây của đường tròn) hay $AHO = 90^0$

$\Rightarrow$ điểm H thuộc đường tròn đường kính AO (1)

Do AB, AC là 2 tiếp tuyến của đường tròn (O), $(B, C \in (O))$ hay $ABO = ACO = 90^0$

$\Rightarrow$ 2 điểm B, C thuộc đường tròn đường kính AO (2)

Từ $(1)\&(2) \Rightarrow$ 3 điểm H, B, C cùng thuộc đường tròn đường kính AO

Do đó 5 điểm $A, B, H, O, C \in 1$ đường tròn

Xét (O) ta có: $ICE = EBC \left(= \frac{1}{2} \text{sd} EC \right)$

Xét $\Delta IE \& \Delta ICB$ có: $\left.\begin{matrix} BIC \text{ chung} \\ ICE = EBC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta IEC \backsim \Delta ICB \quad (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{IE}{IC} = \frac{IC}{IB} \Rightarrow IC^2 = IE.IB \quad (\text{ dpcm})$$

b) Do I là trung điểm của AC nên $IC^2 = IE.IB \Rightarrow IA^2 = IE.IB \Leftrightarrow \frac{IA}{IE} = \frac{IB}{IA}$

Xét ΔIAB và ΔIEA ta có:

$$\left.\begin{matrix} \frac{IA}{IE} = \frac{IB}{IA} \\ AIB \ chung \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta IAB \backsim \Delta IEA (c.g.c) \Rightarrow IBA = IAE \quad \Leftrightarrow \quad EBA = CAD$$

mà $EBA = BDE \ (= \frac{1}{2} \text{sd} BE)$

do đó $IAE = BDE$

Mà 2 góc ở vi trí so le trong nên BD//AC.

do $HQ//BD \Rightarrow EHQ = D = ECQ \Rightarrow$ tứ giác $EQHC$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow HEQ = HCQ = BAD\left(=\frac{1}{2}sd\,BH\right)$$

hay $BAD = QED$

c) Do H' là trực tâm của $\Delta ABC \Rightarrow BH' \perp AC,\ CH' \perp AB, OC \perp AC,\ OB \perp AB$

$\Rightarrow \begin{cases} BH'//OC \\ CH'//OB \\ OB = OC = R \end{cases}$ nên tứ giác $BH'CO$ là hình thoi $\Rightarrow BH' = CO = R$

$H' \in (B;R)$ cố định. Vậy H' thuộc một đường tròn cố định.

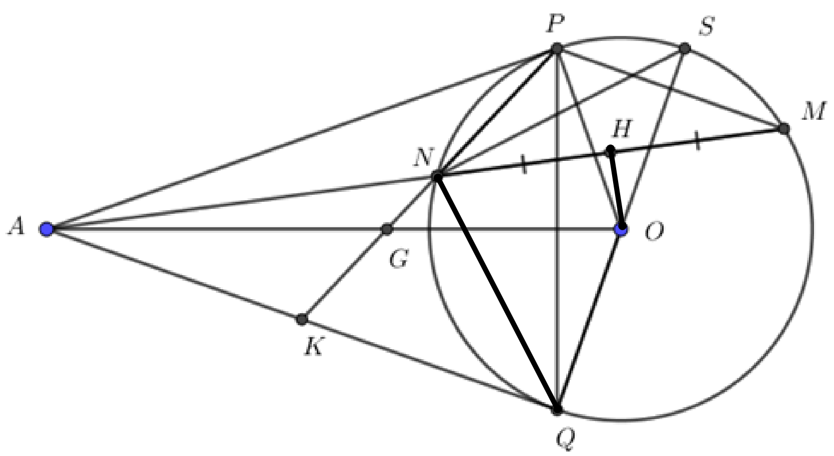
Câu 47.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) và một điểm A sao cho $OA = 3R$. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AP và AQ của đường tròn (O), với P và Q là hai tiếp điểm. Lấy M thuộc đường tròn (O) sao cho $PM//AQ$. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và đường tròn (O). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K, gọi H là trung điểm MN.

a) Chứng minh năm điểm A, P, O, Q, H thuộc một đường tròn; $KQ^2 = KN.KP$.

b) Chứng minh $AK = KQ$ và kẻ đường kính QS của đường tròn (O). Chứng minh tia NS là tia phân giác của PNM.

c) Cho $R = 6cm$. Tính $S_{quat}POQ$. Gọi G là giao điểm của hai đường thẳng AO và PK. Tính độ dài đoạn thẳng AG.

Hướng dẫn



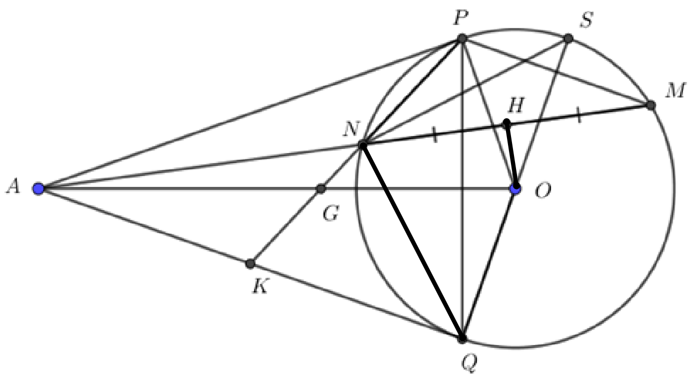
a) Do AP, AQ lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn $(O)(P, Q$ là các tiếp điểm) nên $APO = AQO = 90°$ suy ra P, Q thuộc đường tròn đường kính $AO.(1)$

Mặt khác H là trung điểm của dây MN nên $OHA = 90°$ suy ra H thuộc đường tròn đường kính $AO.(2)$

* Từ (1) ; (2) suy ra A, P, H, O, Q thuộc đường tròn đường kính $AO.$

* Ta có $\Delta KQN \backsim \Delta KPQ(g.g)$ (K chung và $KQN = KPN$)

nên $\dfrac{KQ}{KN} = \dfrac{KP}{KQ}$, hay $KQ^2 = KN.KP.(3)$



b) Ta có $APN = PMN$

hơn nữa $PMN = MAK$ (so le trong) do đó $APN = MAK$.

Vậy nên $\Delta AKN \backsim \Delta PKA(g.g)$ hay ta được $\dfrac{AK}{KN} = \dfrac{PK}{AK} \Rightarrow AK^2 = PK.KN.(4)$

Từ (3) (4) suy ra $AK^2 = AQ^2$ hay $AK = AQ$ kết hợp với K thuộc AQ ta được K là trung điểm $AQ.$

Ta có $AQ \perp QS$

mà $AQ // PM$ nên $QS \perp PM$ hơn nữa QS là đường kính nên QS đi qua điểm chính giữa cung PM do đó S là điểm chính giữa PM.

Kéo theo $PNS = SNM$ suy ra NS là tia phân giác PNM.

c) Xét tam giác vuông APO có $\cos AOP = \dfrac{PO}{AO} = \dfrac{R}{3R} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow AOP \approx 70{,}53°$

Do đó $POQ = 141{,}16°$. Vậy diện tích hình quạt cần tìm là: $S_{quat}POQ = \dfrac{\pi R^2.141{,}16°}{360} \approx 44{,}35(cm^2)$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AQO ta được

$QO^2 = OH.OA \Rightarrow OH = \dfrac{R^2}{3R} = \dfrac{R}{3}$.

Do vậy $AH = \dfrac{8R}{3}$. Dễ thấy G là trọng tâm tam giác APQ nên $AG = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{16}{9}R.$

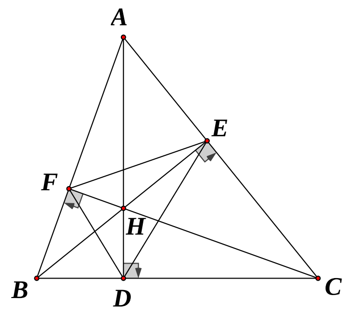
Bài 48. Cho ΔABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh:

a) Tứ giác $AEHF$; $BDHF$; $CDHE$; $BCEF$; $ABDE$; $ACDF$ nội tiếp

b) $AE.AC = AF.AB$; $BD.BC = BF.BA$; $CD.CB = CE.CA$; $HA.HD = HB.HE$

c) EH là phân giác FED; FH là phân giác EFD; DH là phân giác FDE

Hướng dẫn



a) +) Xét tứ giác $AEHF$ có:

$AFH + AEH = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà 2 góc ở vị trí đối nhau nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp (dhnb).

+) Xét tứ giác $BDHF$ có:

$BFH + BDH = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà 2 góc ở vị trí đối nhau nên tứ giác $BDHF$ nội tiếp (dhnb).

+) Xét tứ giác $CDHE$ có:

$CEH + CDH = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà 2 góc ở vị trí đối nhau nên tứ giác $CDHE$ nội tiếp (dhnb).

+) Xét tứ giác $BCEF$ có:

$BFC = BEC = 90^0$

Mà F, E là 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh BC nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp (dhnb).

+) Xét tứ giác $ABDE$ có:

$BDA = BEA = 90^0$

Mà D, E là 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AB nên tứ giác $ABDE$ nội tiếp (dhnb).

+) Xét tứ giác $ACDF$ có: $CDA = CFA = 90^0$

Mà D, F là 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AC nên tứ giác $ACDF$ nội tiếp (dhnb).

b) +) Xét ΔAEB và ΔAFC có:

$AEB = AFC = 90^0$

BAC chung

$\Rightarrow \Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ (cạnh tương ứng) $\Rightarrow AE.AC = AF.AB$ (đpcm)

+) Xét ΔBFC và ΔBDA có:

$BFC = BDA = 90^0$

ABC chung

$\Rightarrow \Delta BFC \backsim \Delta BDA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BF}{BC} = \dfrac{BD}{BA}$ (cạnh tương ứng) $\Rightarrow BD.BC = BF.BA$ (đpcm)

+) Xét ΔCDA và ΔCEB có:

$CDA = CEB = 90^0$

ACB chung

$\Rightarrow \Delta CDA \backsim \Delta CEB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{CE}{CB}$ (cạnh tương ứng)

$\Rightarrow CD.CB = CE.CA$ (đpcm)

+) Xét ΔDHB và ΔEHA có:

$BDH = AEH = 90^0$

$BHD = AHE$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta DHB \backsim \Delta EHA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HD}{HE} = \dfrac{HB}{HA}$ (cạnh tương ứng) $\Rightarrow HA.HD = HB.HE$ (đpcm)

c) +) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ có: $HEF = HAF$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HF)

+) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDHE$ có: $HED = HCD$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

+) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ACDF$ có: $HAF = HCD$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FD

$\Rightarrow HEF = HED \Rightarrow EH$ là phân giác FED (đpcm)

+) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ có: $HFE = HAE$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HE)

+) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDHF$ có: $HFD = HBD$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

+) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABDE$ có: $HAE = HBD$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

$\Rightarrow HFE = HFD \Rightarrow FH$ là phân giác EFD (đpcm)

+) Xét ΔDEF có:

EH là phân giác FED

FH là phân giác EFD

$\Rightarrow DH$ là phân giác FDE

Bài 49. Cho (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc đường tròn (O) khác A và B. Tiếp tuyến của (O) tại A và M cắt nhau tại E. Vẽ MP vuông góc AB, MQ vuông góc AE.

a) Chứng minh $AEMO$ là tứ giác nội tiếp và $APMQ$ là hình chữ nhật.

b) Gọi I là trung điểm PQ. Chứng minh O, I, E thẳng hàng.

c) Gọi K là giao EB và MP. Chứng minh tam giác EAO đồng dạng tam giác MPB suy ra K là trung điểm MP.

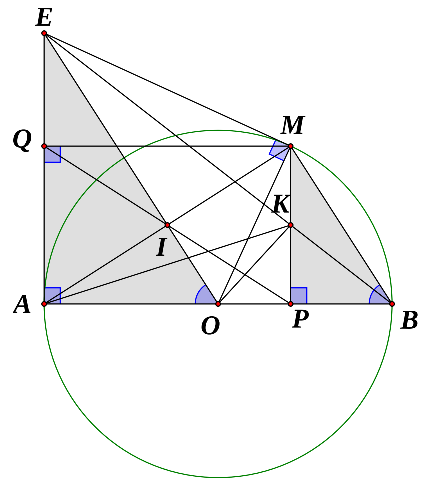
d) Đặt $AP = x$. Tính MP theo R và x, Tìm vị trí M trên (O) để $APMQ$ có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh AEMO là tứ giác nội tiếp và APMQ là hình chữ nhật.

Xét tứ giác AEMO có: $EAO + EMO = 90^0 + 90^0 = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác AEMO nội tiếp đường tròn.

Xét tứ giác APMQ có: $QAP = APM = MQA = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác APMQ là hình chữ nhật.



b) Gọi I là trung điểm PQ. Chứng minh $O,\ I,\ E$ thẳng hàng.

Vì $APMQ$ là hình chữ nhật mà I là trung điểm PQ nên I là trung điểm AM .

Ta có: $EA = EM$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau); $OA = OM = R$ nên OE là trung trực AM hay EO đi qua trung điểm I của AM . Vậy $E,\ O,\ I$ thẳng hàng.

c) Gọi K là giao EB và MP . Chứng minh tam giác EAO đồng dạng tam giác MPB suy ra K là trung điểm MP.

Ta có: IO là đường trung bình của tam giác ABM nên $OI // BM \Rightarrow EOA = MBP$ (đồng vị)

Xét tam giác EOA và MBP có: $\Rightarrow EAO = MPB = 90^0; EOA = MBP$

$$\Rightarrow \Delta EAO \backsim \Delta MPB(g.g) \Rightarrow \frac{PB}{AO} = \frac{MP}{EA} \Rightarrow MP = EA.\frac{PB}{AO} = 2EA.\frac{PB}{AB}$$

Mà $KP // EA \Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{KP}{EA} \Rightarrow MP = 2KP \Rightarrow$ K là trung điểm MP

d) Đặt $AP = x$. Tính MP theo R và x, Tìm vị trí M trên (O) để $APMQ$ có diện tích lớn nhất.

Ta có: $BP = 2R - x$

Tam giác AMB vuông tại M, có MP là đường cao nên $MP^2 = PA.PB = (2R - x).x$

$$\Rightarrow MP = \sqrt{(2R-x).x} \Rightarrow S_{APMQ} = AP.MP = x.\sqrt{(2R-x).x}$$

$$= x\sqrt{3}.\sqrt{\frac{x}{3}.(2R-x)} \le x\sqrt{3}.\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3} + 2R - x\right) = x\sqrt{3}.\left(R - \frac{x}{3}\right)$$

$$=3\sqrt{3}.\frac{x}{3}.\left(R-\frac{x}{3}\right)\le 3\sqrt{3}.\frac{1}{4}.\left(\frac{x}{3}+R-\frac{x}{3}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}.R^2$$

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases}\frac{x}{3}=2R-x\\ \frac{x}{3}=R-\frac{x}{3}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{3R}{2}$

Vậy diện tích $APMQ$ lớn nhất khi M thuộc đường tròn sao cho P là trung điểm OB.

Bài 50. Cho (O) và M nằm ngoài (O). MO cắt (O) tại E và F $(ME<MF)$ cát tuyến MAB và tiếp tuyến MC của (O), (C là tiếp điểm, A nằm giữa M và B, A và C nằm khác phía với đường thẳng MO)

a) Chứng minh $MA.MB = ME.MF$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng MO. Chứng minh tứ giác $AHOB$ nội tiếp.

c) Trên nửa mặt phẳng bờ OM chứa A, vẽ nửa đường tròn đường kính MF, nửa đường tròn này cắt tuyếp tuyến tại E của (O) ở K. Gọi S là giao điểm của CO và KF. Chứng minh MS vuông góc KC.

d) Gọi P và Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFS và ABS và T là trung điểm KS. Chứng minh P, Q, T thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Chứng minh $MA.MB = ME.MF$

Tứ giác $ABFE$ nội tiếp nên $\widehat{BFE}=\widehat{EAM}$

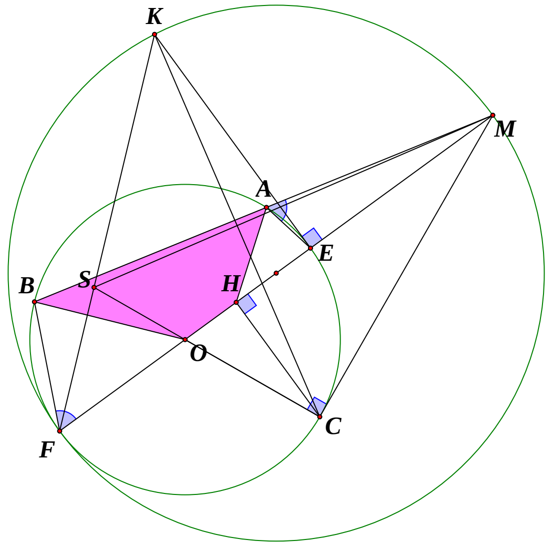
Xét tam giác MAE và MBF có: $\widehat{BFE}=\widehat{EAM};\hat{M}$ chung nên $\Delta MAE\backsim\Delta MFB(g.g)$

$$\Rightarrow\frac{MA}{MF}=\frac{ME}{MB}\Rightarrow MA.MB=ME.MF$$

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng MO. Chứng minh tứ giác $AHOB$ nội tiếp.

Ta có: $MC^2=MA.MB$ mà $MC^2=MH.MO\Rightarrow MH.MO=MA.MB\Rightarrow$ $AHOB$ nội tiếp đường tròn.

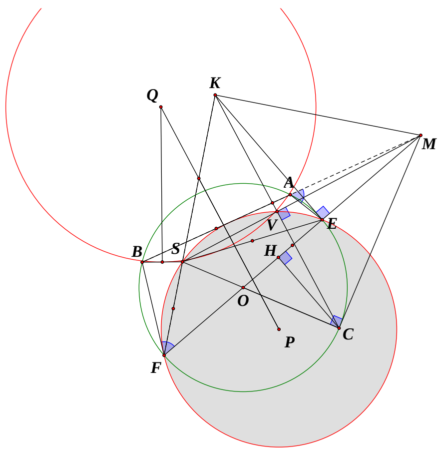
c) Trên nửa mặt phẳng bờ OM chứa A, vẽ nửa đường tròn đường kính MF, nửa đường tròn này cắt tuyếp tuyến tại E của (O) ở K. Gọi S là giao điểm của CO và KF. Chứng minh MS vuông góc KC.



Vì MF là đường kính nên $FKM = 90^0 \Rightarrow MKSC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow MK^2 = ME.MF = MC^2 \Rightarrow MK = MC$ nên MS là đường trung trực KC $\Rightarrow$MS vuông góc KC.

d) Gọi P và Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFS và ABS và T là trung điểm KS . Chứng minh P, Q , T thẳng hàng.



Gọi giao KC và MS là V .

Trong đường tròn (Q) ta có: $MA.MB = MV.MS$.

Trong đường tròn (P): $MV.MS = ME.MF$ nên PQ vuông góc MS và là đường trung trực VS (đường nối tâm hai đường tròn) nên PQ đi qua trung điểm KS . Vậy T, Q, P thẳng hàng.

Câu 51.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông tại A nội tiếp (O). Từ một điểm D trên cạnh BC kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại F và cắt tia đối của tia AB tại E. Gọi H là giao điểm của BF và CE, tia HD cắt (O) tại K.

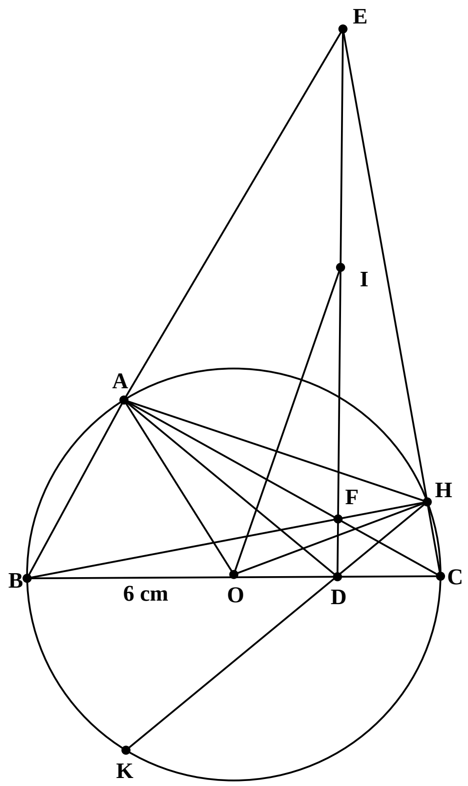
a) Chứng minh $H \in (O)$, tứ giác $AECD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $BF.BH = BD.BC; AK \perp BC$.

c) Cho $\widehat{AEF} = 30^0$, $R = 6\,\text{cm}$. Tính $S_{quat\,AOB}$ và chứng minh $BF.BH + CH.CE = BC^2$.

d) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh $OI \perp AH$.

Hướng dẫn



a) Chứng minh $H \in (O)$, tứ giác $AECD$ nội tiếp.

+) Xét ΔEBC có:

$CA \perp BE$ (Vì ΔABC vuông tại A) và $ED \perp BC$ (gt) mà $CA \cap ED = \{F\}$ nên F là giao điểm của 3 đường cao trong ΔEBC $\Rightarrow BF \perp EC$ tại H $\Rightarrow \widehat{BHC} = 90°$.

Xét $\left(O, \dfrac{BC}{2}\right)$ có $\widehat{BHC} = 90° \Rightarrow H \in (O)$.

+) Vì $CA \perp BE$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{CAE} = 90°$.

Vì $ED \perp BC$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{EDC} = 90°$.

Xét tứ giác $AECD$ có $\widehat{CAE} = \widehat{EDC} = 90°$ mà đỉnh A và D là hai đỉnh liền kề cùng nhìn cạnh EC nên $AECD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $BF.BH = BD.BC; AK \perp BC$.

Xét ΔBDF và ΔBHC có:

HBC là góc chung,

$BDF = BHC = 90^\circ$

từ đó ta có $\Delta BDF \backsim \Delta BHC$ (g – g).

$\Rightarrow \dfrac{BF}{BC} = \dfrac{BD}{BH} \Rightarrow BF.BH = BD.BC$. (đpcm) (1)

+) Xét $\left(O, \dfrac{BC}{2}\right)$ có $AHB = ACB = \dfrac{1}{2}$ sđ AB (Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Xét tứ giác $FHCD$ có $FHC = 90^\circ$ (Vì $BH \perp EC$ tại H).

$FDC = 90^\circ$ (Vì $ED \perp BC$ tại D)

$\Rightarrow FHC + FDC = 180^\circ$ mà FHD và FCD là hai góc đối nên tứ giác $FHCD$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow FHD = FCD = \dfrac{1}{2}$ sđ FD mà $AHB = ACB$ (cmt) nên $AHB = FHD \Rightarrow AHB = BHK$.

Mặt khác $AHB = \dfrac{1}{2}$ sđ AB, $BHK = \dfrac{1}{2}$ sđ BK.

Từ đó ta được $AB = BK \Rightarrow AB = BK$ (Liên hệ giữa cung và dây).

Xét $\left(O, \dfrac{BC}{2}\right)$ có $BKC = \dfrac{1}{2}$ sđ $BC = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \Delta BKC$ vuông tại K.

Xét ΔBKC và ΔBAC có:

$BKC = BAC = 90^\circ$,

BC là cạnh chung,

$BA = BK$ (cmt)

Từ đó ta được $\Delta BKC = \Delta BAC$ (Cạnh huyền - cạnh góc vuông) $\Rightarrow KC = AC$ mà $BA = BK$ nên BC là đường trung trực của AK $\Rightarrow AK \perp BC$. (đpcm)

c) Cho $AEF = 30^\circ$, $R = 6\,\text{cm}$. Tính $S_{quat\,AOB}$ và chứng minh $BF.BH + CH.CE = BC^2$.

Xét ΔEBD vuông tại D (vì $ED \perp BC = \{D\}$)

$\Rightarrow DEB + DBE = 90^\circ$ (2 góc nhọn phụ nhau) $\Rightarrow DBE = 90^\circ - DEB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow OBA = 60^\circ$.

Xét ΔOBA có $OA = OB (= R) \Rightarrow \Delta OBA$ cân tại O. Mà $OBA = 60^\circ$ nên ΔOBA đều $\Rightarrow AOB = 60^\circ$.

Xét $\left(O, \dfrac{BC}{2}\right)$ có sđ $AB = AOB$ (góc ở tâm bằng số đo cung bị chắn) $\Rightarrow$ sđ $AB = 60^\circ$.

$$S_{quat\,AOB} = \frac{\pi R^2.60}{360} = \frac{\pi.6^2.60}{360} = 6\pi\left(\text{cm}^2\right).$$

+) Xét ΔCDE và ΔCHB có:

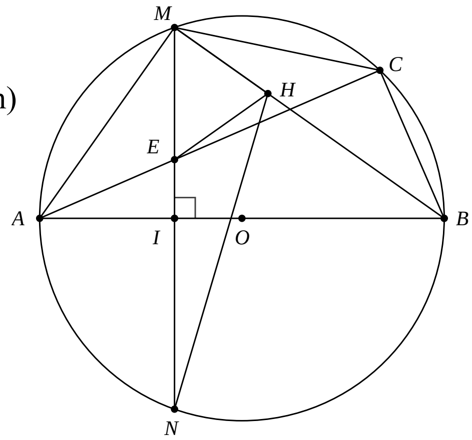
$\widehat{CED} = \widehat{CBH}$ (góc nt cùng chắn cung DH) và $\widehat{CDE} = \widehat{CHB} = 90° \Rightarrow \Delta CDE \sim \Delta CHB$c (g – g).

$\Rightarrow \dfrac{CD}{CH} = \dfrac{CE}{CB} \Rightarrow CD.CB = CH.CE$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$BF.BH + CH.CE = BD.BC + CD.BC = BC.(BD + CD) = BC^2$.(đpcm)

d) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh $OI \perp AH$.



Xét ΔEAF vuông tại A có I là trung điểm của EF nên AI là đường trung tuyến của ΔEAF.

$\Rightarrow AI = IE = IE = \dfrac{1}{2}EF$.

(3)

Xét ΔHEF vuông tại H có I là trung điểm của EF nên HI là đường trung tuyến của ΔHEF.

$\Rightarrow HI = IE = IF = \dfrac{1}{2}EF$. (4)

Từ (3) và (4) ta có $HI = AI$. (5)

Xét (O) có $OA = OH = R$ (6)

Từ (5) và (6) ta được OI là đường trung trực của AH. Vậy $OI \perp AH$. (đpcm)

Câu 52.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O), một đường kính AB cố định, trên đoạn OA lấy điểm I sao cho $AI = \dfrac{2}{3}.OA$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN (C không trùng M, N, B). Nối AC cắt MN tại E.

a) Chứng minh: Tứ giác $IECB$ nội tiếp và $AM^2 = AE.AC$.

b) Chứng minh: $AE.AC - AI.IB = AI^2$ và MA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC.

c) Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường trong ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: Tứ giác $IECB$ nội tiếp và $AM^2 = AE.AC$.

Ta có: $\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

$\widehat{BIE} = 90°$ (giả thiết).

$\Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{BIE} = 90° + 90° = 180°$.

Tứ giác $IECB$ có tổng hai góc đối nhau bằng $180°$ nên nội tiếp được đường tròn.

* Chứng minh $AM^2 = AE.AC$.

- Cách 1:

Xét ΔAIE và ΔACB có:

$\widehat{ACB} = \widehat{BIE}\left(=90^\circ\right)$;

Chung $\widehat{BAC}$.

Do đó $\Delta AIE \backsim \Delta ACB$ (g – g).

Suy ra: $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow AI.AB = AE.AC \quad (1)$

Lại có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M, có MI là đường cao

ta có $AM^2 = AI.AB \quad (2)$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Từ (1) và (2) suy ra: $AM^2 = AE.AC$ (đpcm).

- *Cách 2:*

Ta có: $AB \perp MN$ (giả thiết) $\Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$.

$\widehat{AME} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AN}$; $\widehat{ACM} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AM} \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{AME}$.

Suy ra: $\Delta AME \backsim \Delta ACM$ (g – g).

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE.AC$ (đpcm).

b) Chứng minh: $AE.AC - AI.IB = AI^2$ và MA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC.

Ta có: $MI^2 = AI.IB$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông AMB).

Mà: $AM^2 = AE.AC$ (cmt).

Do đó: $AE.AC - AI.IB = AM^2 - MI^2 = AI^2$ (định lý Pytago trong tam giác vuông AIM).

Gọi H là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC.

Ta có: $HM = HE \Rightarrow \Delta MHE$ cân tại H.

$\Rightarrow \widehat{HME} = \dfrac{180^\circ - \widehat{MHE}}{2} = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\widehat{MHE}$.

Lại có: $\widehat{MCE} = \dfrac{1}{2}\widehat{MHE}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung ME của đường tròn tâm H).

Do đó: $\widehat{HME} = 90^\circ - \widehat{MCE}$.

ΔBIM vuông tại I nên: $\widehat{BMI} = 90^\circ - \widehat{IBM}$.

Mà: $\widehat{MCE} = \widehat{IBM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MA}$ của đường tròn (O)).

Suy ra: $\widehat{HME} = \widehat{BME}$.

Do đó, tâm H của đường tròn ngoại tiếp ΔMEC nằm trên BM.

Mà: $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BM$ hay $AM \perp HM$.

Vậy MA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC (đpcm).

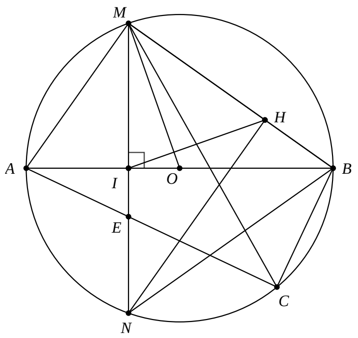
c) Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường trong ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Ta có: NH nhỏ nhất khi $NH \perp BM$.

Khi đó, tứ giác $IHBN$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow HBI = HNI$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HI)

$\Rightarrow \Delta MHN \backsim \Delta MIB\,(\text{g}-\text{g}) \Rightarrow \dfrac{MH}{MI} = \dfrac{MN}{MB} \Rightarrow MH.MB = MI.MN$.



Mà $MN = 2MI$ nên: $\Rightarrow MH.MB = 2MI^2$.

Xét tam giác vuông OIM, có:

$$MI^2 = MO^2 - OI^2 = R^2 - \left(\frac{1}{3}R\right)^2 = \frac{8R^2}{9}.$$

Xét tam giác vuông BIM, có:

$$MB^2 = MI^2 + IB^2 = \frac{8R^2}{9} + \left(\frac{4}{3}R\right)^2 = \frac{8R^2}{3} \Rightarrow MB = \frac{2\sqrt{6}R}{3}.$$

Do đó: $MH.\dfrac{2\sqrt{6}R}{3} = 2.\dfrac{8R^2}{9} \Rightarrow MH = \dfrac{8R}{3\sqrt{6}}$.

$\Rightarrow$ Điểm H thuộc tia MB sao cho $MH = \dfrac{8R}{3\sqrt{6}}$

Vì H là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC nên $MH = HC = \dfrac{8R}{3\sqrt{6}}$.

Vậy điểm C là giao điểm của đường tròn $(O;R)$ và đường tròn $\left(H;\dfrac{8R}{3\sqrt{6}}\right)$.

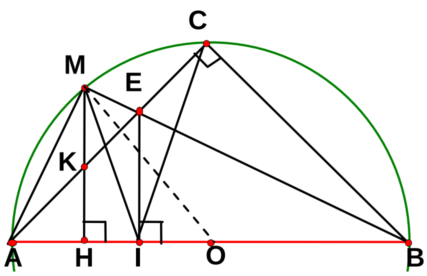
Câu 53.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa $(O;\,R)$ đường kính AB. C là điểm chính giữa cung AB. Điểm M thuộc cung AC. Hạ $MH \perp AB$ tại H, AC cắt MH tại K, MB cắt AC tại E, hạ $EI \perp AB$ tại I.

a) Chứng minh Tứ giác $AMEI$ nội tiếp và $AK.AC = AM^2$.

b) Chứng minh IE là phân giác MIC và E là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCI

c) Cho $R = 5cm$ tính $S = AE.AC + BE.BM$ và cho $ECI = 30^0$ tính $S_{quat\,MOB}$

Hướng dẫn



a) Chứng minh Tứ giác $AMEI$ nội tiếp và $AK.AC = AM^2$.

+ Ta có: $EI \perp AB(gt) \Rightarrow AIE = 90^0$

Ta có: $AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $AMEI$ có $AIE + AME = 90^0 + 90^0 = 180^0$ mà AIE và AME là hai góc đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $AMEI$ nội tiếp

+ Ta có: $MCA = ABM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Ta có: $ABM = AMH$ (cùng phụ với MAH)

$\Rightarrow MCA = AMH$

Xét ΔAMK và ΔACM có:

MCA chung

$AMK = MCA$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AMK \backsim \Delta ACM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AK}{AM}$ (2 cạnh tương ứng) $\Rightarrow AM^2 = AK.AC$ (đpcm)

b) Chứng minh IE là phân giác MIC và E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCI

+ Ta có: tứ giác $AMEI$ nội tiếp (cm a)

$\Rightarrow MAE = MIE$ (góc nội tiếp cùng chắn cung ME) (1)

Xét nửa đường tròn (O) có: $MAE = EBC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MC) (2)

Chứng minh Tứ giác $IECB$ nội tiếp

$\Rightarrow EIC = EBC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC) (3)

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow MIE = EIC \Rightarrow IE$ là phân giác MIC

+ Xét nửa đường tròn (O) có: $MCA = MBA$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Xét tứ giác $IECB$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow MBA = ACI$ (góc nội tiếp cùng chắn cung IE)

$\Rightarrow MCA = ACI \Rightarrow CE$ là phân giác MIC

Xét ΔMIC có: IE, CE là phân giác mà IE cắt CE tại E

$\Rightarrow E$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCI

c) Cho $R = 5cm$ tính $S = AE.AC + BE.BM$ và cho $ECI = 30^0$. Tính $S_{quat\ MOB}$

+ Chứng minh: $\Delta AIE \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AI}{AC} \Rightarrow AE.AC = AI.AB$ (4)

Chứng minh: $\Delta BIE \backsim \Delta BMA$ (g.g)

$\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{BI}{BM} \Rightarrow BE.BM = BI.BA$ (5)

Từ (4),(5) $\Rightarrow AE.AC + BE.BM = AI.AB + BI.BA$

$\Rightarrow S = (AI + BI)AB \Rightarrow S = AB^2$

$S=(2R)^2=4R^2=4.5^2=100$

+ Ta có: $ECI=EBC$ (cm b) $\Rightarrow EBI=30^0$

Xét ΔMOB có: $OM=OB\Rightarrow\Delta$MOB cân tại O

$\Rightarrow EBI=OMB=30^0$

$\Rightarrow MOB=180^0-2.30^0=120^0$

$$S_{quat\ MOB}=\frac{\pi R^2 n}{360}=\frac{\pi.5^2.120}{360}=75\pi(\text{cm}^2)$$

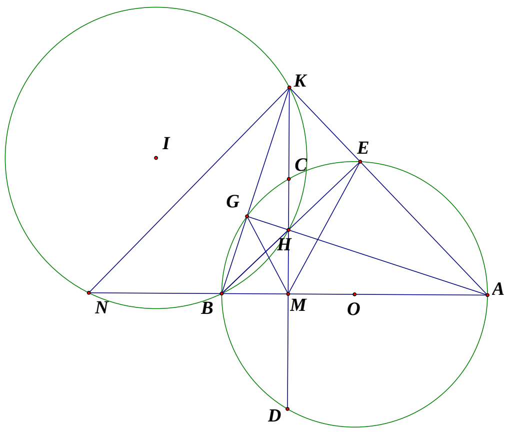
Câu 54.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ đường kính AB cố định. Gọi M là trung điểm đoạn OB. Dây $CD\perp AB$ tại M. Điểm E thuộc cung lớn $DC(E\neq A)$, AE cắt CD tại K, BE cắt CD tại H.

a)Chứng minh: Bốn điểm B,M,E,K thuộc một đường tròn và $AE.AK$ không đổi.

b)Gọi AH cắt BK tại G. Chứng minh $G\in(O)$ và MK phân giác EMG

c)Cho $R=6cm$ Tính $S_{quat\ BOC}$ và chứng minh khi E di chuyển trên cung lớn DC thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBHK thuộc một đường tròn (thẳng) cố định.

Hướng dẫn



a) Ta có: $BEK=BMK=90°\Rightarrow$ tứ giác $BMEK$ nội tiếp $\Rightarrow$ bốn điểm B,M,E,K thuộc một đường tròn.

Vì tứ giác $BMEK$ nội tiếp $\Rightarrow EMA=BKE$ (cùng bù với BME).

Xét ΔAME và ΔAKB có:

MAE chung

$EMA=BKE$

Vậy $\Delta AME\backsim\Delta AKB(g-g)\Rightarrow\dfrac{AM}{AK}=\dfrac{AE}{AB}\Rightarrow AE.AK=AM.AB$

Vì M là trung điểm đoạn $OB\Rightarrow OM=MB=\dfrac{R}{2};AM=\dfrac{3R}{2}$.

Vậy $AE.AK=AM.AB=\dfrac{3R}{2}.2R=3R^2$.

b)Trong ΔAKB có: $\begin{cases} KM \perp AB \\ BE \perp AK \end{cases} \Rightarrow H$ là trực tâm của ΔABK

$AG \perp BK \Rightarrow BGA = 90^\circ \Rightarrow G \in (O;R)$.

Tứ giác $BGHM$ có: $BGH + BMH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ $\Rightarrow BGHM$ nội tiếp

$\Rightarrow GBH = GMH$ (cùng chắn GH) (1)

Tứ giác $AMHE$ có: $AMH + AEH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ $\Rightarrow AMHE$ nội tiếp

$\Rightarrow EAH = EMH$ (cùng chắn HE) (2)

Trong (O): $EAH = GBH$ (cùng chắn GE) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow GMH = EMH \Rightarrow MK$ là phân giác EMG

c) Vì $CD \perp AB$ tại M $\Rightarrow MC = MD \Rightarrow BCOD$ là hình thoi

$\Rightarrow BC = OC = R \Rightarrow \Delta BOC$ đều $\Rightarrow BOC = 60^\circ$.

$$S_{quat} BOC = \frac{\pi.R^2.60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi.6^2}{6} = 6\pi(cm^2)$$

Gọi N là điểm đối xứng với A qua M. Vì A, M cố định nên N cố định.

Vì $KM \perp AN$ và $NM = MA \Rightarrow \Delta KNA$ cân $\Rightarrow NKM = AKM$

Mà $AKM = ABE$ (cùng phụ với BAK).$\Rightarrow NKM = ABE \Rightarrow NKHB$ nội tiếp .

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $NKHB$

$\Rightarrow IN = IB \Rightarrow I \in$ trung trực của NB cố định $\Rightarrow I$ thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 55.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa $(O;R)$ đường kính AB. Điểm M thuộc nửa (O). H là điểm chính giữa cung AM, tia BH cắt AM tại I, tiếp tuyến của (O) tại A cắt BH tại K, AH cắt BM tại E.

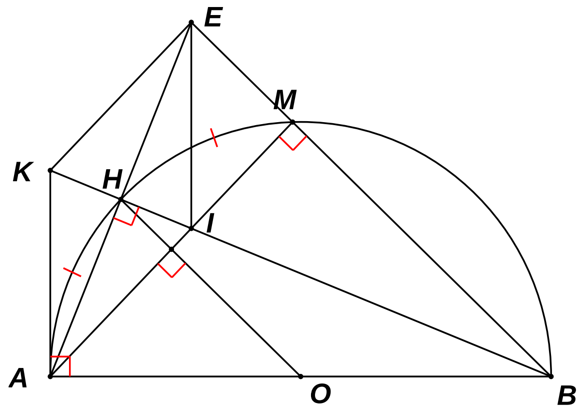
a) Chứng minh Tứ giác $IHEM$ nội tiếp và ΔABE cân.

b) Chứng minh $KH.KB = KE^2$ và tứ giác $AKEI$ là hình thoi.

c) Cho KE là tiếp tuyến của $(B;BA)$ và gọi AM cắt $(B;BA)$ tại N chứng minh tứ giác $BIEN$ nội tiếp.

Hướng dẫn

a) Chứng minh Tứ giác $IHEM$ nội tiếp và ΔABE cân.



Ta có $AHB = AMB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $EHI = EMI = 90°$.

Xét tứ giác $IHEM$, có: $EHI + EMI = 90° + 90° = 180°$

Suy ra tứ giác $IHEM$ nội tiếp (tổng hai góc đối bằng $180°$).

Ta có: $AIH = \dfrac{sd\ AH + sd\ MB}{2} = \dfrac{sd\ HM + sd\ MB}{2} = \dfrac{sd\ HB}{2} = HAB$.

Mà $AIH = AEM$ (góc ngoài bằng góc đối trong của tứ giác $IHEM$ nội tiếp).

Suy ra $BAE = BEA$.Suy ra ΔABE cân tại B.

b) Chứng minh $KH.KB = KE^2$ và tứ giác $AKEI$ là hình thoi.

Xét ΔABE cân tại B có BH là đường cao.

Suy ra BH cũng là đường trung trực của AE.

Mà $K \in BH$ nên $KA = KE$ (tính chất đường trung trực).

Xét tam giác KAB vuông tại A có BH là đường cao, khi đó: $KA^2 = KH.KB$ (hệ thức lượng).

Mà $KA = KE$ (chứng minh trên).

Suy ra $KE^2 = KH.KB$.

Ta có: $AKI = HAB$ (cùng phụ với HBA)

Mà $HAB = AIK$ (chứng minh trên)

Suy ra $AKI = AIK$.

Suy ra ΔAIK cân tại A, có AH là đường cao

Suy ra AH cùng là đường trung tuyến.

Suy ra H là trung điểm của KI.

Xét tứ giác $AKEI$ có:

H là trung điểm của KI (chứng minh trên)

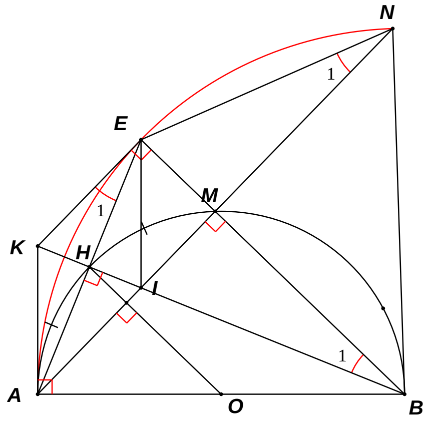
H là trung điểm của AE (chứng minh trên)

Suy ra $AKEI$ là hình bình hành (tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Mà $AE \perp KI$ tại H

Nên $AKEI$ là hình thoi (hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi).

c) Chứng minh tứ giác $BIEN$ nội tiếp.



Ta có $B_1 = E_1$ (cùng phụ với BKE).

Mà $E_1 = N_1$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và day cung bằng góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Suy ra $B_1 = N_1$.

Suy ra $BIEN$ nội tiếp (hai góc liên tiếp cùng nhìn một cạnh).

Câu 56.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$. Từ điểm S nằm ngoài đường tròn sao cho $SO = 2R$. Vẽ hai tiếp tuyến SA, SB (A, B là tiếp điểm). Vẽ cát tuyến SDE (D nằm giữa S và E), điểm O nằm trong góc ESB

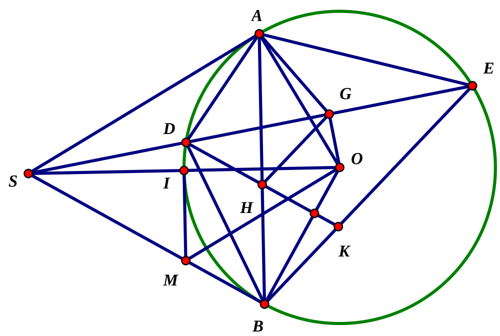
a) Chứng minh $SA^2 = SD.SE$.

b) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc OA cắt SB tại M. Gọi I là giao điểm của OS và đường tròn (O).

Chứng minh MI là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt AB tại H và EB tại K. Chứng minh H là trung điểm DK.

Hướng dẫn



a)Chứng minh $SA^2 = SD.SE$.

Ta có $\Delta SAD \backsim \Delta SEA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{SA}{SE} = \dfrac{SD}{SA} \Rightarrow SA^2 = SD.SE$

b) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc OA cắt SB tại M. Gọi I là giao điểm của OS và đường tròn (O).

Chứng minh MI là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ta có $ASO = MOS$ (so le), mà $ASO = MSO$ (do SO là phân giác của góc ASB).

$\Rightarrow MSO{=}MSO \Rightarrow \Delta MOS$ cân tại M, có MI là trung tuyến.

$\Rightarrow MI \perp OI$ tại I, mà OI là bán kính của đường tròn (O).

Suy ra MI tiếp xúc đường tròn (O) tại I

c) Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt AB tại H và EB tại K. Chứng minh H là trung điểm DK

Ta có $DK \perp OB$ tại L, mà $SB \perp OB \Rightarrow SB // DK$.

Gọi G là trung điểm DE

$\Rightarrow OG \perp DE$ tại G (bán kính qua trung điểm thì vuông góc với dây cung)

Có $SAO = SGO = SBO = 90° \Rightarrow S, A, G, O, B$ cùng thuộc đường tròn đường kính SO.

Có $AGS = ABS = \frac{1}{2} sđ AS$, mà $ABS = AHD$ (đồng vị do $SB // DK$)

Suy ra $AGS = AHD$. Suy ra tứ giác $ADHG$ nội tiếp.

Có $DGH = DAH = \frac{1}{2} sđ DH$, mà $DAH = DEB = \frac{1}{2} sđ BD$

Suy ra $DGH = DEB$, mà chúng có vị trí so le.

Suy ra $HG // KE$

ΔDEK có $HG // KE$, G là trung điểm DE. Suy ra HG là đường trung bình ΔDEK.

Suy ra H là trung điểm DK.

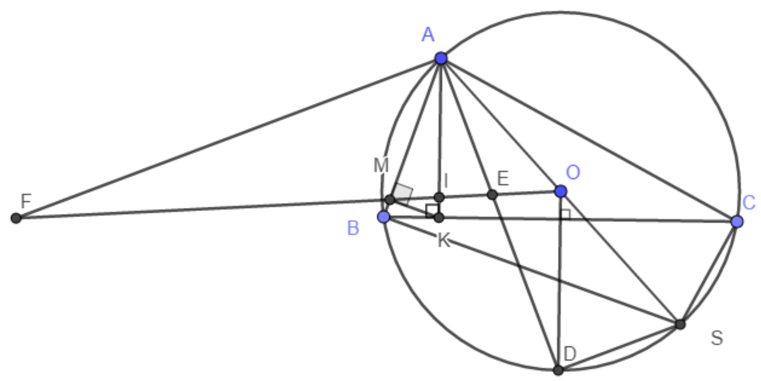
Câu 57.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác nhọn $ABC(AB < AC)$ nội tiếp $(O;R)$ đường kính AS. Vẽ $AK \perp BC$ tại K. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu K lên cạnh $AB,\ AC$.

a) Vẽ bán kính $OD \perp BC$. Chứng minh AD là tia phân giác góc KAO.

b) Qua A vẽ đường thẳng $d\ //\ DS$. Đường thẳng OM cắt $AD,\ AK$, d theo thứ tự tại $E,\ I,\ F$. Chứng minh rằng $EI.FO = EO.FI$

c) chứng minh rằng $\frac{AB.CS + AC.BS}{2BC} = R$

Hướng dẫn



a) Ta có $OD \perp BC$ với $D \in (O)$ nên D là điểm chính giữa cung BC, nên ta có $BAD = CAD$.

Tam giác ACS vuông tại C do nội tiếp (O) có AS là đường kính.

Lại có $\begin{cases} ABK = CSA = \frac{1}{s}\text{sd}AC \\ BAK + ABK = CAS + CSA(= 90^0) \end{cases} \Rightarrow CAS = BAK$

Lại xét $\begin{cases} BAD = CAD \\ CAS = BAK \\ BAK + KAD = CAS + SAD(= BAD = CAD) \end{cases} \Rightarrow KAD = SAD$

Vậy AD là tia phân giác góc KAO.

b) Xét tam giác ADS vuông tại D do nội tiếp (O) có AS là đường kính

Theo câu a) ta có AD là tia phân giác KAO. Mà $d // DS$ và $DS \perp AD$ nên AD⊥ (d). Khi đó AF chính là đường phân giác ngoài của góc KAO.

Xét đường thẳng AIO phân giác trong AD và phân giác ngoài AF cắt OM lần lượt tại E, F.

Khi đó ta có $\frac{FI}{FO} = \frac{EI}{EO} = \frac{AI}{AO} \Rightarrow FI.EO = FO.EI$

c) Xét tam giác ABC và tam giác AKS có $\begin{cases} ABS = AKC = 90^0 \\ ASB = ACK = \frac{1}{2}\text{sd}AB \end{cases}$ nên $\Delta ABS \backsim \Delta AKC$

Từ đó ta có: $\frac{BS}{AB} = \frac{KC}{AK}$.(1)

Chứng minh tương tự ta có $\Delta ABK \backsim \Delta ASC \Rightarrow \frac{\text{SC}}{AC} = \frac{KB}{KA}$(2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được

$$\frac{BS}{AB} + \frac{CS}{AC} = \frac{BC}{AK} \Leftrightarrow \frac{AB.CS + AC.BS}{AB.AC} = \frac{BC}{AK} \Leftrightarrow \frac{AB.CS + AC.BS}{2BC} = \frac{AB.AC}{2AK}$$

Ta cần chứng minh $\frac{AB.AC}{2AK} = R \Leftrightarrow AB.AC = AK.2\text{R} = AK.AS$

Mà ta đã có $\triangle ABS \backsim \triangle AKC \Rightarrow \dfrac{AB}{AS} = \dfrac{AK}{AC}$. Vậy $\dfrac{AB.CS + AC.BS}{2BC} = R$ (đpcm)

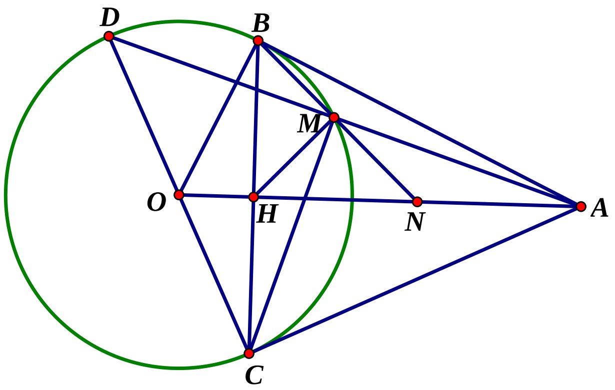
Câu 58.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB và AC của (O) (với B và C là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh: AO vuông góc với BC tại H.

b) Vẽ đường kính CD của (O); AD cắt (O) tại M (M không trùng D). Chứng minh: Tứ giác $AMHC$ nội tiếp.

c) BM cắt AO tại N. Chứng minh: N là trung điểm của AH.

Hướng dẫn



a) Chứng minh: AO vuông góc với BC tại H.

Ta có:

+) $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

+) $OB = OC = R$

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của đoạn BC

$\Rightarrow OA$ vuông góc với BC tại H.

b) Vẽ đường kính CD của (O); AD cắt (O) tại M (M không trùng D). Chứng minh: Tứ giác $AMHC$ nội tiếp.

Ta có: $DMC = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính DC) $\Rightarrow$ $CMA = 90°$

Xét tứ giác AMHC ta có: $CMA = CHA = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMHC nội tiếp (hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau)

c) BM cắt AO tại N. Chứng minh: N là trung điểm của AH.

Ta có: $ABN = BCM$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây với góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

Lại có: Tứ giác AMHC nội tiếp (cmt) nên $BCM = MAN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HM)

Suy ra $ABN = MAN$

Xét ΔABN và ΔMAN, có:

+) N chung

+) $\widehat{ABN} = \widehat{MAN}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABN \backsim \Delta MAN(g-g) \Rightarrow \dfrac{AN}{MN} = \dfrac{BN}{AN} \Rightarrow AN^2 = MN.BN(1)$

Ta có:

+) Tứ giác AMHC nội tiếp suy ra $\widehat{MHN} = \widehat{MCA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

+) $\widehat{MCA} = \widehat{CDM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây với góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

+) $\widehat{CDM} = \widehat{HBN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

Suy ra $\widehat{MHN} = \widehat{HBN}$

Xét ΔMHN và ΔHBN , ta có:

+) N chung

+) $\widehat{MHN} = \widehat{HBN}$

$\Rightarrow \Delta MHN \backsim \Delta HBN(g-g) \Rightarrow \dfrac{HN}{BN} = \dfrac{MN}{HN} \Rightarrow HN^2 = MN.BN(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AN = HN$ $\Rightarrow$ N là trung điểm của AH

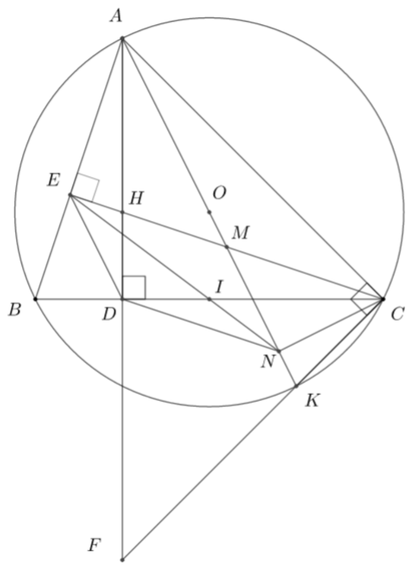
Câu 59.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao AD và CE cắt nhau tại H. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O).

a) Chứng minh $AB.AC = 2R.AD$ và $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.BC.CA}{4R}$.

b) Gọi M là giao điểm của AK và CE, F là giao điểm của CK và AD. Chứng minh tứ giác $BEHD$ nội tiếp và $AH.AF = AM.AK$.

c) Gọi I là trung điểm BC; EI cắt AK tại N. Chứng minh $EDNC$ là hình thang cân.

Hướng dẫn



a) Ta có $\widehat{ACK} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét ΔABD và ΔACK có

$\begin{cases} ABD = AKC \text{ (cung chan cung AC)} \\ ADB = ACK = 90^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta ABD$ đồng dạng với ΔAKC (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AB.AC = 2R.AD$ (đpcm).

b) Ta có AD là đường cao nên $HDB = 90^\circ$, tương tự ta cũng có $HEB = 90^\circ$ (do CE là đường cao)

$\Rightarrow HDB + HEB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

$\Rightarrow BEHD$ nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180°).

$\Rightarrow AHM + EBD = 180^\circ$ hay $AHM + ABC = 180^\circ$.

Mà $AKF + AKC = 180^\circ$ (2 góc kề bù) và $ABC = AKC$ (cùng chắn AC)

$\Rightarrow AHM = AKF$.

Xét ΔAHM và ΔAKF có

$\begin{cases} A \text{ chung} \\ AHM = AKF \text{ (cmt)} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta AHM$ đồng dạng với ΔAKF (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{AM}{AF} \Rightarrow AH.AF = AK.AM$.

c) Ta có ΔBEC vuông tại E, EI là trung tuyến $\Rightarrow EI = \dfrac{1}{2}BC = IC \Rightarrow \Delta EIC$ cân tại I.

Dễ chứng minh AEDC nội tiếp (1) $\Rightarrow I\hat{C}E = D\hat{A}E$

Mà $I\hat{C}E = I\hat{E}C$ (ΔIEC cân tại I) và $E\hat{A}D = N\hat{A}C$

$\Rightarrow I\hat{E}C = N\hat{A}C$ $\Rightarrow$ tứ giác AENC nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ 5 điểm A, E, D, N, C cùng thuộc một đường tròn.

Ta có $D\hat{N}I = E\hat{A}D = N\hat{A}C = I\hat{E}C$ $\Rightarrow EC // DN$

Suy ra $EDNC$ là hình thang.

Ta có $D\hat{E}C = D\hat{A}C = E\hat{A}N = N\hat{C}E$. Suy ra $EDNC$ là hình thang cân.

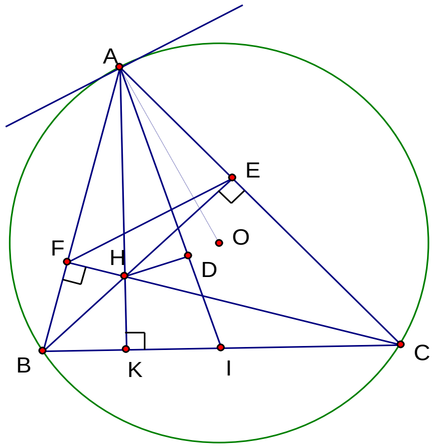
Câu 60.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có 3 góc nhọn nối tiếp đường tròn (O) ba đường cao AK; BE; CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm BC, vẽ $HD \perp AI (D \in AI)$

a)Chứng minh: Tứ giác $BFEC$ nội tiếp và năm điểm A, E, D, H, F cùng thuộc 1 đường tròn;

b)Chứng minh: $AD.AI = AH.AK$ và EF song song với tiếp tuyến tại A.

c)Giả sử đường tròn (O) cố định, B và C là 2 điểm cố định, điểm A di động trên cung lớn BC của (O).Chứng minh: Tích $ID.AI$ không phụ thuộc vào vị trí điểm A.

Hướng dẫn



a)Chứng minh: Tứ giác BFEC nội tiếp và năm điểm A, E, D, H, F cùng thuộc 1 đường tròn;

Xét tứ giác BFEC ta có :

$BFC = BEC = 90^o$ (do BE, CF là hai đường cao)

$\Rightarrow$ tứ giác BFEC nội tiếp

$AEH = ADH = AFH = 90^o$(do BE, CF là 2 đường cao và HD$\perp$AI)

$\Rightarrow$ A, E, D, H, F cùng nằm trên đường tròn đường kính AH

b)Chứng minh: $AD.AI = AH.AK$ và EF song song với tiếp tuyến tại A.

Xét hai ΔADH và ΔAKI ta có : $\begin{cases} A\,chung \\ ADH = AKI = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta ADH$ và ΔAKI đồng dạng

$\Rightarrow$ $AD.AI = AH.AK$

+ Kẻ tiếp tuyến Ax $\perp$OA

+ $xAB = ACB = \frac{1}{2}AB$ (góc tạo bởi tt dây cung và góc nội tiếp chắn dây)

Mà $AFE = ACB$ (Tứ giác BFEC nội tiếp)

$\Rightarrow xAB = AFE \Rightarrow$ (ở vị trí so le trong) nên $EF // Ax$

c)Giả sử đường tròn (O) cố định, B và C là 2 điểm cố định, điểm A di động trên cung lớn BC của (O).Chứng minh: Tích $ID.AI$ không phụ thuộc vào vị trí điểm A.

Ta có : $ADE = ACB$ (do bằng AFE)

$\Rightarrow$ tứ giác $CIDE$ nội tiếp

Nên $IDC = IEC$

Mặt khác : $IDC = ICA$ (do bằng IEC)

mà AIC chung nên $\Delta IDC \backsim \Delta ICA (g-g)$

Suy ra $IA.ID = IC^2 = \frac{BC^2}{4}$ không đổi Nên Tích $ID.AI$ không phụ thuộc vào vị trí điểm A.

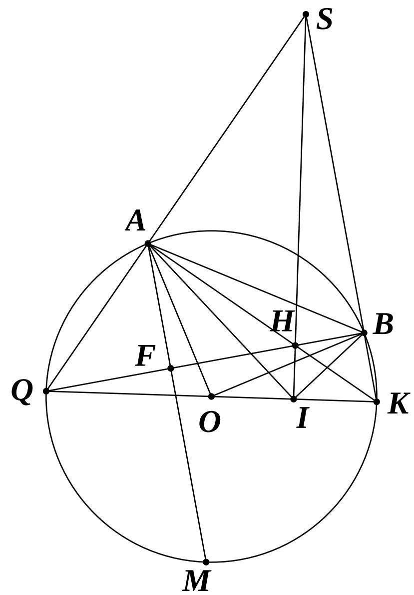
Câu 61.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ đường kính QK. Trên nửa đường tròn lấy hai điểm A, B theo thứ tự Q, A, B, K sao cho $AOB = 90^0$, QA cắt BK tại S, QB cắt AK tại H, SH cắt QK tại I, $AF \perp QB$ tại F cắt (O) tại M.

a)Chứng minh: Tứ giác $SAHB$ nội tiếp và $SA.SQ = SB.SK$.

b)Chứng minh: $AIB = 90^0$ và $MB \perp AK$

c) Gọi N là trung điểm SH. Chứng minh $ON \perp AB$ và $SH = 2R$

Hướng dẫn



a) $QAK = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow KAS = 90^0$

$QBK = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow QBS = 90^0$

Xét tứ giác $SAHB$ có: $HAS + HBS = 90^0 + 90^0 = 180^0$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau

Nên tứ giác $SAHB$ nội tiếp .

Xét ΔSAK và ΔSBQ, ta có:

ASB chung

$SAK = SBQ = 90^0$

Vậy ΔSAK đồng dạng ΔSBQ

Suy ra : $SA.SQ = SB.SK$

ΔSQK có H là trực tâm. $\Rightarrow SI \perp QK$.

Tứ giác $HIKB$ nội tiếp $\Rightarrow HKI = HBI$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Tứ giác $SAHB$ nội tiếp $\Rightarrow ASH = ABH$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Tứ giác $SAIK$ nội tiếp $\Rightarrow ASH = HKI$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Từ đó suy ra : $ABI = 2.AKO$

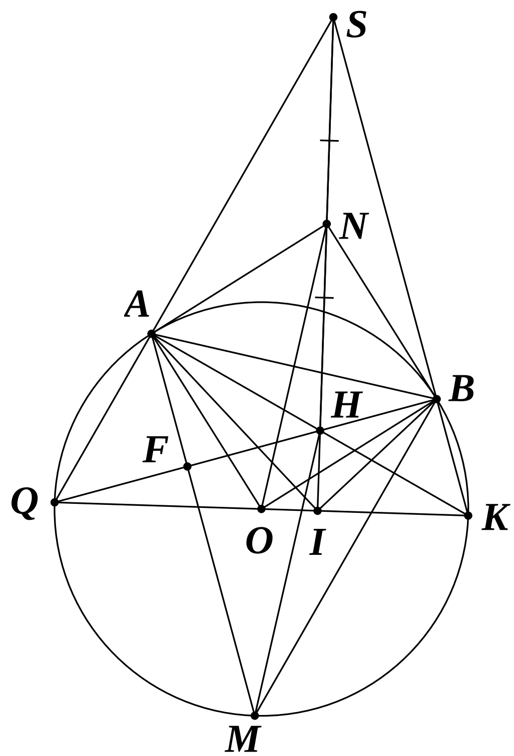
Mà ΔAOK cân tại $O \Rightarrow AOQ = 2.AKO$ (góc ngoài của tam giác)

Vậy $ABI = AOQ$. Suy ra tứ giác $AOIB$ nội tiếp $\Rightarrow AOB = AIB = 90^0$

Có $AQB = AMB = 90^0 : 2 = 45^0$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

ΔMFB vuông có $AMB = 45^0 \Rightarrow \Delta MFB$ vuông cân.

$\Rightarrow FMB = FBM = AQF \qquad \Rightarrow AQ // BM \Rightarrow MB \perp AK$



Có tứ giác $SQIB$ nội tiếp $\Rightarrow BQI = ISB$

ΔBNS cân $\Rightarrow NBS = ISB$

Vậy $NBS = BQI$

Tứ giác $QABK$ nội tiếp $\Rightarrow AQO = ABS$

Từ đó , $AQF = ABN = 45^0$

ΔAOB vuông cân $OBA = 45^0$

Vậy $OBN = 90^0$

Chứng minh tương tự: $OAN = 90^0$

Tứ giác $OANB$ là hình vuông .

Suy ra $ON \perp AB$ và $OA = AN = \dfrac{1}{2}SH \Rightarrow SH = 2R$

Câu 62.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O đường kính AD. Trên nửa đường tròn lấy điểm B,C theo thứ tự A,B,C,D và $BOC = 90^0$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE.

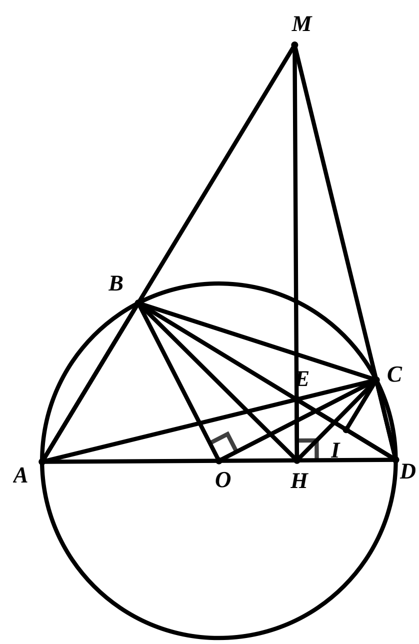
a) Chứng minh Tứ giác $ABEH$ nội tiếp, và HE là phân giác BHC.

b)Chứng minh $AE.AC + DE.DB = AD^2$ và năm điểm B,C,I,O,H cùng thuộc một đường tròn

c)Chứng minh AB, DC, HE đồng quy, gọi điểm đồng quy tại M. Tính ME theo R.

d)Tìm quỹ tích điểm E khi B,C di chuyển trên nửa đường tròn sao cho góc $BOC = 90^0$

Hướng dẫn



a) Xét (O) đường kính AD có:

$B \in (O)(GT) \Rightarrow ABD = 90°$ *hay* $ABE = 90°$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Mặt khác

$EH \perp AD(GT) \Rightarrow AHE = 90°$

$\Rightarrow ABE + AHE = 90° + 90° = 180°$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau.

Vậy tứ giác $ABEH$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

Ta có $\widehat{ACD}=90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa (O))

Nên $\widehat{ECD}+\widehat{EHD}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác EHDC là tứ giác nội tiếp(DHNB)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABEH$ có:

$\widehat{BAE}=\widehat{BHE}$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$) hay $\widehat{BAC}=\widehat{BHE}$

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $HECD$ có:

$\widehat{EHC}=\widehat{EDC}$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$) hay $\widehat{EHC}=\widehat{BDC}$

Xét (O) có:

$\widehat{BAC}=\widehat{BDC}$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$)

Do đó $\widehat{BHE}=\widehat{EHC}$

Mà tia HE nằm giữa hai tia HB và HC

Nên tia HE là tia phân giác của $\widehat{BHC}$ (TC)

b) Ta có :

$\Delta AHE \sim \Delta ACD(G.G) \Rightarrow \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AH}{AC} \Leftrightarrow AE.AC=AH.AD$

$\Delta DHE \sim \Delta DBA(G.G) \Rightarrow \dfrac{DE}{AD}=\dfrac{DH}{DB} \Leftrightarrow DE.DB=AD.DH$

$\Rightarrow AE.AC+DE.DB=AH.AD+AD.DH=AD.(AH+HD)=AD^2$

Ta có: $\widehat{ADC}=\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BC}$ (Góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BC}$)

$\Rightarrow \widehat{BAC}+\widehat{BDC}=$sđ$\overset{\frown}{BC}$

Mà $\widehat{BOC}=90^\circ$ (GT), $\widehat{BOC}$ là góc ở tâm chắn $\overset{\frown}{BC}$ nên sđ$\overset{\frown}{BC}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAC}+\widehat{BDC}=90^\circ$

$\widehat{BAC}=\widehat{BHE}\,(CMT)$

$\widehat{BDC}=\widehat{EHC}\,(CMT)$

$\Rightarrow \widehat{BHE}+\widehat{EHC}=90^\circ \Rightarrow \widehat{BHC}=90^\circ\,(1)$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BHE}+\widehat{EHC}=90^\circ\\ \widehat{BHE}=\widehat{EHC}\,(cmt)\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BHE}=\widehat{EHC}=45^\circ$$

$EHC = EDC\left(CMT\right) \Rightarrow EDC = 45^\circ$

$ECD = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ECD$ vuông cân tại C

Mà I trung điểm của DE (GT)

Nên CI vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao của ΔECD

$\Rightarrow EIC = 90^\circ\, hay\, BIC = 90^\circ\left(2\right)$

Mà $BOC = 90^\circ\left(GT\right)\left(3\right)$

Từ (1),(2),(3) ta có 3 đỉnh O, H, I cùng nhìn BC dưới 1 góc bằng 90°

Nên 5 điểm B, O, H, I, C cùng thuộc một đường tròn.

c) Gỉa sử AB và CD cắt nhau tại M

Xét ΔAMD có:

AC là đường cao ứng với cạnh MD ($ACD = 90^\circ$)

DB là đường cao ứng với cạnh MA ($ABD = 90^\circ$)

Mà AC cắt DB tại E (GT)

Do đó E là trực tâm của ΔAMD (tính chất 3 đường cao)

$\Rightarrow ME \perp AD$

Mà $EH \perp AD\left(GT\right)$

Nên M, E, H thẳng hang

Vậy AB, DC, HE đồng quy, gọi điểm đồng quy tại M

Ta có : $\text{BAC} = \frac{1}{2}$ sđ BC mà sđ $\text{BC} = 90^\circ\left(\text{CMT}\right) \Rightarrow \text{BAC} = 45^\circ$ hay $\text{MAC} = 45^\circ$

Xét ΔAMC có $\text{ACM} = 90^\circ\left(\text{cmt}\right)$ mà $\text{MAC} = 45^\circ\left(\text{CMT}\right)$ nên ΔAMC vuông cân tại C(DHNB)

$\Rightarrow \text{CM} = \text{CA}\left(\text{TC}\right) \Rightarrow \text{CM}^2 = \text{CA}^2$

ΔECD vuông cân tại C(CMT)

$\Rightarrow \text{EC} = \text{CD} \Rightarrow \text{EC}^2 = \text{CD}^2$

$\Rightarrow \text{CM}^2 + \text{EC}^2 = \text{AC}^2 + \text{CD}^2$

Xét ΔMEC vuông tại M nên $\text{ME}^2 = \text{MC}^2 + \text{EC}^2$ (Định lí Pytago)

Xét ΔACD vuông tại C nên $\text{AD}^2 = \text{AC}^2 + \text{CD}^2$ (Định lí Pytago)

Do đó $\text{ME}^2 = \text{AD}^2 \Rightarrow \text{ME} = \text{AD} = 2\text{R}$

d) Xét $\left(\text{O}\right)$ có:

$CAD = \frac{1}{2}$ sđ CD (Góc nộ tiếp chắn CD)

$BDA = \frac{1}{2}$ sđ AB (Góc nội tiếp chắn AB)

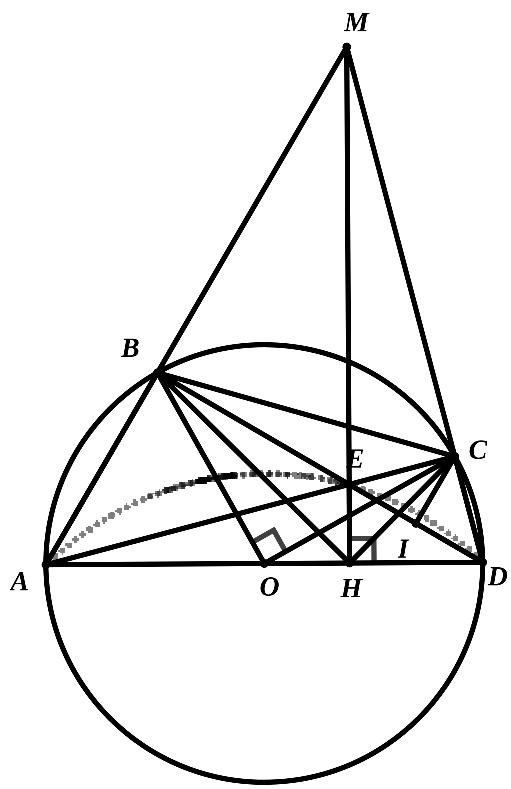
$\Rightarrow BDA + CAD = \frac{1}{2}$(sđ AB + sđ CD) $= = \frac{1}{2}(180°$ - sđ $BC) = \frac{1}{2}\left(180° - 90°\right) = 45°$

hay $EDA + EAD = 45°$

Xét $\Delta AED: EDA + EAD = 45°\left(CMT\right) \Rightarrow AED = 135°$ (Định lí tổng ba góc của một tam giác)

Do đó điểm E luôn nhìn cạnh AD dưới 1 góc không đổi bằng $135°$

Vậy quĩ tích điểm E là cung chứa góc $135°$ dựng trên cạnh AD.



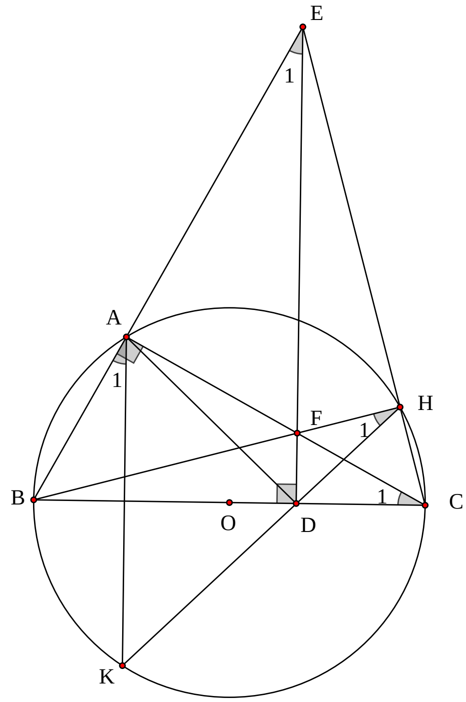
Câu 63.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông tại A nội tiếp (O) đường kính BC. Từ một điểm D trên đoạn OC kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại F và cắt tia đối của tia AB tại E. Gọi H là giao điểm của BF và CE tia HD cắt (O) tại K. Chứng minh:

a) Tứ giác $AFHE$ nội tiếp; $CF.CA = CH.CE$

b) $AK \perp BC$; $BF.BH + CH.CE = BC^2$

c) Cho $AEF = 30^0, R = 6cm$ tính $S_{quat} AOB$ và gọi I là trung điểm EF. Chứng minh OA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔAHE.

Hướng dẫn



a) Ta có ΔABC vuông tại A nên $BAC = 90^0 \Rightarrow EAF = 90^0$.

Xét ΔBEC có :

$ED \perp BC$; $CA \perp BE$

$CA; DE$ cắt nhau tại F

$\Rightarrow F$ là trực tâm của ΔBEC $\Rightarrow BH \perp EC \Rightarrow FHE = 90^0$

Xét tứ giác $AEHF$ có : $FAE + FHE = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác $AEHF$ nội tiếp

Xét ΔCFH và ΔCEA có :

$FHC = CAE$ $(= 90^0)$

FCH chung

$\Rightarrow \Delta CFH \backsim \Delta CEA (g.g) \Rightarrow \dfrac{CF}{CE} = \dfrac{CH}{CA} \Rightarrow CF.CA = CH.CE$ (Đpcm)

b) Xét tứ giác $AECD$ ta có: $EAC = EDC\ (= 90^0)$

Mà A, D là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh EC $\Rightarrow$ tứ giác $AECD$ nội tiếp.

$\Rightarrow E_1 = C_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AD) (1)

Xét tứ giác $DFHC$ ta có:

$FDC + FHC = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà $FDC; FHC$ là hai góc đối nhau $\Rightarrow$ tứ giác $DFHC$ nội tiếp.

$\Rightarrow H_1 = C_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn FD) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow H_1 = E_1$

Xét đường tròn (O) ta có :

$H_1 = A_1$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BK)

Mà $H_1 = E_1 \Rightarrow A_1 = E_1$, mà $A_1; E_1$ là hai góc đồng vị

$\Rightarrow AK // ED$. Ta có : $ED \perp BC \Rightarrow AK \perp BC$ (ĐPCM)

Xét ΔBFD và ΔBCH ta có :

FBD chung

$BDF = BHC (= 90^0)$

$\Rightarrow \Delta BFD \backsim \Delta BCH$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BF}{BC} = \dfrac{BD}{BH} \Rightarrow BF.BH = BC.BD$ (3)

Xét ΔCHB và ΔCDE ta có :

DCE chung

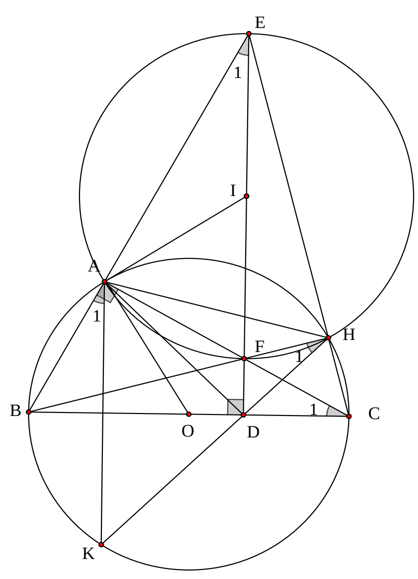
$BHC = CDE (= 90^0)$

$\Rightarrow \Delta CHB \backsim \Delta CDE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CH}{CD} = \dfrac{CB}{CE} \Rightarrow CH.CE = BC.CD$ (4)

Từ (3) và (4), ta có : $BF.BH + CH.CE = BC.BD + BC.CD = BC.(BD + DC) = BC.BC = BC^2$

Vậy $BF.BH + CH.CE = BC^2$



c) Ta có $AEF = 30^0 \Rightarrow E_1 = 30^0$

Mà $E_1 = C_1 \Rightarrow C_1 = 30^0$

Xét đường tròn (O) ta có : C_1 là góc nội tiếp chắn AB

$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$sđ AB $\Rightarrow$ sđ $AB = 2C_1 = 2.30^0 = 60^0$

$S_{quat}AOB = \frac{\pi R^2.n}{360^0} = \frac{\pi.6^2.60^0}{360^0} = 6\pi(cm^2)$

Ta có $EAF = 90^0$ $\Rightarrow A$ thuộc đường tròn đường kính EF

Ta có $EHF = 90^0 \Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính EF

$\Rightarrow A$ và H thuộc đường tròn đường kính EF

$\Rightarrow \Delta AHE$ nội tiếp đường tròn đường kính EF

Ta có I là trung điểm EF $\Rightarrow I$ là tâm của đường tròn đường kính EF

Ta có: $OA = OC \Rightarrow \Delta OAC$ cân tại $O \Rightarrow OAC = OCA$ (5)

Xét ΔEAF vuông tại A ta có AI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền EF

$\Rightarrow AI = IE = IF = \frac{EF}{2} \Rightarrow \Delta IAF$ cân tại $I \Rightarrow IAF = IFA$

Ta có $IFA = CFD$ (đối đỉnh), mà $IAF = IFA \Rightarrow IAF = CFD$ (6)

Ta có $OCA + CFD = 90^0$ (7)

Từ (5), (6); (7) $\Rightarrow IAF + OAF = 90^0 \Rightarrow OAI = 90^0 \Rightarrow OA \perp IA$

Mà $A \in$ đường tròn ngoại tiếp ΔAHE.

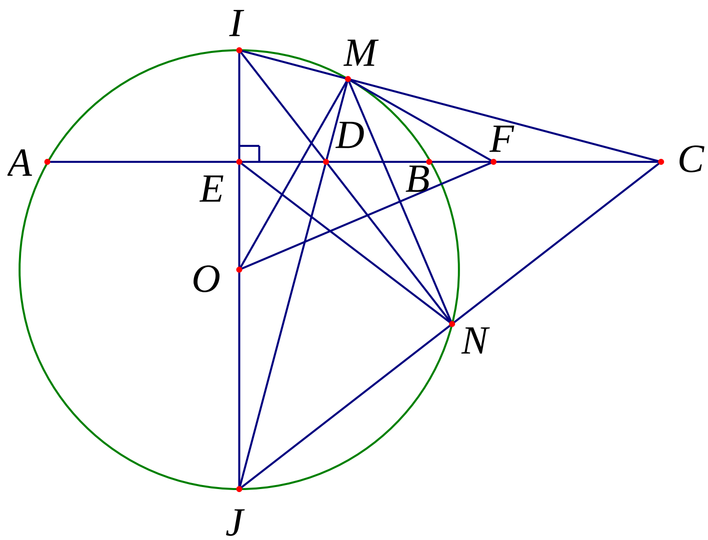
$\Rightarrow$ OA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔAHE (đpcm).

Câu 64.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Trên một đường thẳng lấy ba điểm A, B, C cố định theo thứ tự ấy. Gọi (O) là đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn luôn đi qua A và B. Vẽ đường kính IJ vuông góc với AB ; E là giao điểm của IJ và AB. Gọi M và N theo thứ tự là giao điểm CI và CJ với (O). ($M \neq I, N \neq J$). Chứng minh:

a) IN, JM và CE đồng quy (gọi đồng quy tại D) và tứ giác $MDNC$ nội tiếp.

b) Gọi F là trung điểm của CD. Chứng minh: $OF \perp MN$ và ND là phân giác ENM.

c) Chứng minh FM là tiếp tuyến của (O) và $EA.EB = EC.ED$.



a) <u>Chứng minh</u> IN, JM và CE đồng quy (gọi đồng quy tại D) và tứ giác $MDNC$ nội tiếp.

* Xét (O) có IJ là đường kính (gt)

$\Rightarrow IMJ = INJ = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow IN \perp JC;\ JM \perp IC$

$\Rightarrow IN,\ JM$ là đường cao của tam giác IJC

Lại có CE cũng là đường cao của tam giác IJC (vì $CE \perp IJ$)

Do đó IN, JM, CE đồng quy (tại D) (tính chất ba đường cao).

* Xét tứ giác $MDNC$ có:

$DMC = 90^0$ (kề bù với IMJ)

$DNC = 90^0$ (kề bù với INJ)

Do đó $DMC + DNC = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$Tứ giác $MDNC$ nội tiếp (dhnb).

b) <u>Chứng minh</u>: $OF \perp MN$ và ND là phân giác ENM.

* Có M, N thuộc (O) $\Rightarrow$ $OM = ON$ (1)

Tứ giác $MDNC$ nội tiếp đường tròn đường kính CD (cmt), F là trung điểm CD (gt) $\Rightarrow$ $FM = FN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra OF là đường trung trực của MN (t/c)

$\Rightarrow$ $OF \perp MN$ (đpcm)

* Có $IEC = INC = 90^0$ (cmt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $IENC$ nội tiếp đường tròn.

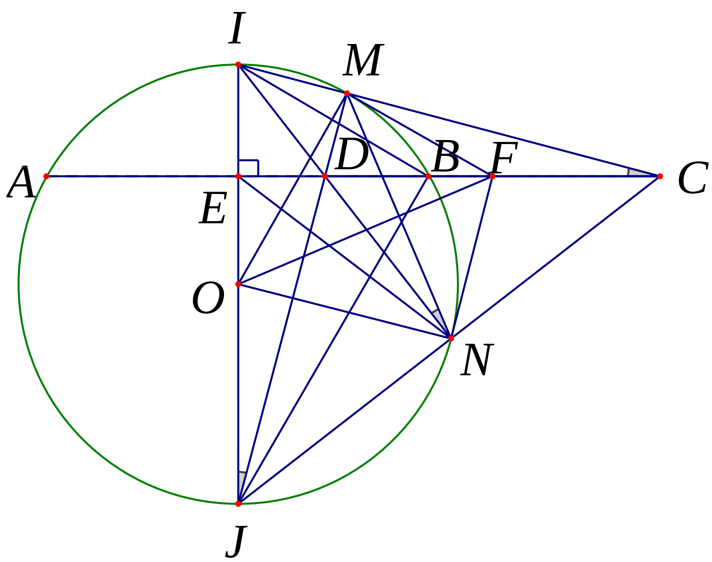
$\Rightarrow ICE = INE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IE)

Lại có tứ giác $MDNC$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow ICE = MND$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MD)

Do đó: $INE = MND$ hay ND là phân giác của MNE (đpcm).

c) Chứng minh FM là tiếp tuyến của (O) và $EA.EB = EC.ED$.



* Tam giác JED vuông tại E $\Rightarrow EJD + EDJ = 90^0$

Mà $EJD = OMD$ (do tam giác OMD cân tại M)

$EDJ = MDF$ (hai góc đối đỉnh)

$MDF = DMF$ (do $FM = FD$ $\Rightarrow$tam giác MFD cân tại F)

Do đó $OMJ + JMF = 90^0$ Hay $OM \perp MF \Rightarrow MF$ là tiếp tuyến của (O) (đpcm)

* Có B thuộc đường tròn đường kính IJ

$\Rightarrow \Delta IBJ$ vuông tại B, lại có BE là đường cao$\Rightarrow BE^2 = EI.EJ$ (hệ thức)

Mà $BE = EA$ (E là trung điểm AB)$\Rightarrow BE.AE = EI.EJ$ (1)

Xét ΔIED và ΔCEJ có

$IED = JEC = 90^0$

$EID = ECJ$ (cùng phụ với EJC)

Do đó $\Delta IED \backsim \Delta CEJ$ (g.g)$\Rightarrow \dfrac{IE}{CE} = \dfrac{ED}{EJ} \Rightarrow DE.CE = EI.EJ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE.AE = DE.CE$ (đpcm)

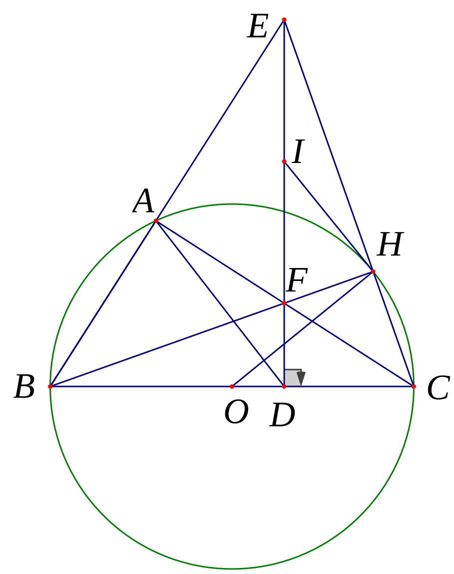
Câu 65.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông tại A nội tiếp (O). Từ một điểm D trên đoạn thẳng OC kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại F và cắt tia đối của tia AB tại E . Gọi H là giao điểm của BF và CE. Chứng minh:

a) Tứ giác $AECD$ nội tiếp và $BF.BH = BD.BC$.

b) Gọi I là trung điểm của EF . Chứng minh IH là tiếp tuyến (O) và $BF.BH + CH.CE = BC^2$.

c) Khi D di chuyển trên BC thì H di chuyển trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn



a) Tứ giác $AECD$ nội tiếp và $BF.BH = BD.BC$.

* Có ΔABC vuông tại A nội tiếp (O) (gt) $\Rightarrow EAC = 90^0$ (kề bù với góc BAC)

$ED \perp BC$ tại D (gt) $\Rightarrow EDC = 90^0$

Do đó Tứ giác AECD nội tiếp (có 2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn cạnh EC dưới một góc vuông)

* Xét ΔBEC có CA và ED là hai đường cao cắt nhau tại F

$\Rightarrow BF$ là đường cao thứ ba của ΔBEC (t/c)

Mà H là giao điểm của BF và CE (gt)$\Rightarrow BF \perp EC$ hay ΔBHC vuông tại H.

Xét ΔBDF và ΔBHC có:

$$\begin{cases} B \ \ chung \\ BDF = BHC = 90^0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta BDF \sim \Delta BHC$ (g.g)$\Rightarrow \dfrac{BD}{BH} = \dfrac{BF}{BC}$ (đ/n) $\Rightarrow BF.BH = BD.BC$ (đpcm)

b) Chứng minh IH là tiếp tuyến và $BF.BH + CH.CE = BC^2$.

* Có I là trung điểm của EF (gt), mà tam giác ΔEHF vuông tại H (cmt)

$\Rightarrow HI = IE = IF$ (t/c đường trung tuyến)

$\Rightarrow \Delta IFH$ cân tại I. $\Rightarrow IFH = IHF$

Mà $IFH = DFB$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow IHF = DFB$ (1)

Có ΔBOH cân tại O $\Rightarrow OBH = OHB$ (2)

Mà $OBH + DFB = 90^0$ (3) (ΔBDF vuông tại D)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow IHF + OHB = 90^0 \Rightarrow OH \perp HI$

Mà H thuộc (O) (vì $BHC = 90^0$ (cmt)) $\Rightarrow IH$ là tiếp tuyến của (O) (đpcm)

* C/m được $\Delta EDC \sim \Delta BHC$ (có góc C chung và $EDC = BHC = 90^0$)

$$\Rightarrow \frac{EC}{BC} = \frac{CD}{HC} \Rightarrow EC.HC = CD.CB$$

Có $BF.BH = BD.BC$ (cmt) $\Rightarrow BF.BH + CH.CE = BC^2$ (đpcm).

c) Khi D di chuyển trên BC thì H di chuyển trên một đường tròn cố định.

Vì H thuộc (O) (cmt), mà (O) không đổi nên H luôn thuộc một đường tròn cố định.

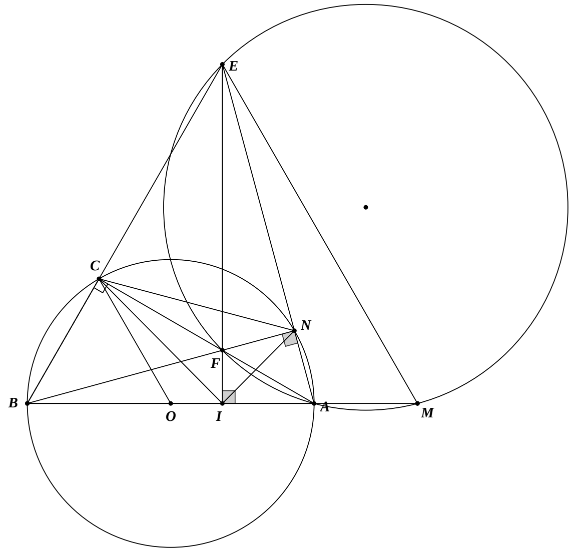
Câu 66.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông ở C nội tiếp (O) đường kính AB và $BC < CA$. Lấy điểm I trên đoạn AB sao cho $IB > IA$. Kẻ đường thẳng d đi qua I và vuông góc với AB, d cắt AC ở F và cắt BC ở E, AE cắt FB tại N. Chứng minh:

a) Tứ giác $FCEN$ nội tiếp và $\Delta IBE \backsim \Delta IFA$

b) $IE.IF = IA.IB$ và NF là phân giác CNI

c) F là tâm đường tròn nội tiếp ΔICN và gọi M là điểm đối xứng với B qua I, cho A, I, B cố định sao cho $ACB = 90^0$. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔFAE chạy trên một đường cố định.

Hướng dẫn



a) Tứ giác $FCEN$ nội tiếp và $\Delta IBE \backsim \Delta IFA$

Xét ΔABE có $AC \perp BE$ (vì ΔABC vuông tại C)

$EI \perp AB$ (vì $d \perp AB$ tại I)

$EI \cap AC = F$

Suy ra : F là trực tâm của $\Delta ABE \Rightarrow BF \perp AE$ tại $N \Rightarrow ANF = 90^0$

Xét tứ giác $FCEN$ có $FCE + FNE = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow FCEN$ nội tiếp (đpcm)

Vì tứ giác $FCEN$ nội tiếp nên $CEF = CNF$ (2 góc nội tiếp cùng chắn CF)

mà $CNF = BAF$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BC)

Do đó $CEF = BAF$ hay $BEI = IAF$

Xét ΔIBE và ΔIFA có: $BIE = FIA \quad = 90^0$

$BEI = IAF$ (cmt)

Vậy $\Delta IBE \backsim \Delta IFA$ (đpcm)

b) $IE.IF = IA.IB$ và NF là phân giác CNI

Vì ΔIBE ” ΔIFA (cmt) suy ra $\dfrac{IE}{IA} = \dfrac{IB}{IF} \Leftrightarrow IE.IF = IA.IB$ (đpcm)

Vì tứ giác $ABCN$ nội tiếp (O) nên $BAC = BNC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BC)

Xét tứ giác $ANFI$ có $ANF + AIF = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Suy ra tứ giác $ANFI$ nội tiếp nên $IAF = FNI$ (2 góc nội tiếp cùng chắn FI)

Suy ra: $FNI = BNC$ hay $BNI = BNC$. Do đó NF là phân giác CNI (đpcm)

c) F là tâm đường tròn nội tiếp ΔICN và gọi M là điểm đối xứng với B qua I, cho A, I, B cố định sao cho $ACB = 90^0$. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔFAE chạy trên một đường cố định.

Xét tứ giác $BCFI$ có $BCF + BIF = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Suy ra tứ giác $BCFI$ nội tiếp nên $CBF = FIC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn FC)

mà $NAF = FIN$ (2 góc nội tiếp cùng chắn FN) và $CBN = NAC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn NC)

suy ra $NIF = FIC$. Do đó IF là tia phân giác của CIN

Xét ΔICN có NF là phân giác CNI (cmt)

IF là tia phân giác của CIN (cmt)

$NF \cap IF = F$

Do đó F là tâm đường tròn nội tiếp ΔICN (đpcm)

Xét ΔBEM có EI là đường trung tuyến đồng thời là đường cao nên ΔBEM cân tại E

Suy ra $BME = MBE$ mà $MBE = CFE$ (góc ngoài bằng đối góc trong của tứ giác $BCFI$ nội tiếp)

nên $BME = CFE$

Xét tứ giác $AMEF$ có $BME = CFE$ hay $AME = CFE$ nên tứ giác $AMEF$ nội tiếp đường tròn.

Do đó tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $AMEF$ nằm trên đường trung trực của AM.

Do A, I, B cố định và M là điểm đối xứng với B qua I nên M cố định $\Rightarrow AM$ cố định $\Rightarrow$ đường trung trực của AM cố định.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔFAE chạy trên một đường cố định là trung trực của AM.

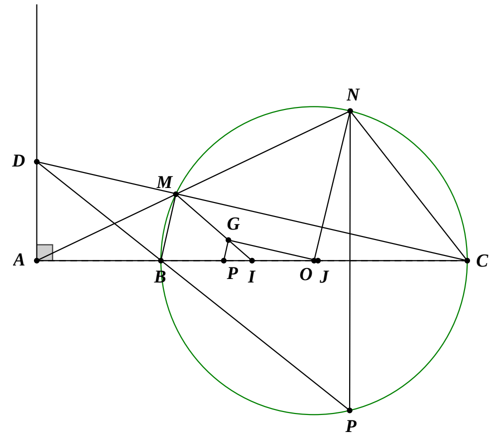
Câu 67.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy và một đường thẳng d vuông góc với AC tại A. Vẽ đường tròn đường kính BC vẽ cát tuyến AMN của (O). Tia CM cắt d tại D. Tia DB cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Chứng minh:

a) Tứ giác $ABMD$ nội tiếp và tích $CM.CD$ không phụ thuộc vào vị trí M

b) Chứng minh: $NP \perp AC$ và cho $ADB = 40^0, R = 5cm$. Tính $S_{quat} NOC$

c) Trọng tâm G của ΔMAC chạy trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn



a) Tứ giác $ABMD$ nội tiếp và tích $CM.CD$ không phụ thuộc vào vị trí M

Xét ΔBMC có $M \in (O)$ và BC là đường kính nên $BMC = 90^0 \Rightarrow BMD = 90^0$

Xét tứ giác $ABMD$ có $BMD + BAD = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Do đó tứ giác $ABMD$ nội tiếp (đpcm)

Xét ΔBCM và ΔDCA có: ACD chung

$DAC = BMC (= 90^0)$

Suy ra ΔBCM” ΔDCA (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{CM}{CA} \Leftrightarrow DC.CM = BC.CA$$

Vì A, B, C cố định nên $BC.CA$ không đổi do đó $DC.CM$ không đổi (đpcm).

b) Chứng minh: $NP \perp AC$ và cho $ADB = 40^0, R = 5cm$. Tính $S_{quat} NOC$

Có tứ giác $BMNP$ nội tiếp đường tròn (O) nên $MNP = MBD$ (góc ngoài bằng đối góc trong)

mà $MBD = MAD$ (2 góc nội tiếp cùng chắn DM)

suy ra $MNP = MAD$ mà 2 góc ở vị trí so le trong nên $NP \,//\, AD$

Lại có $AD \perp AC$ (gt) nên $NP \perp AC$ (đpcm)

Ta có $ADB = AMB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AB)

mà $AMB = BCN$ (góc ngoài bằng đối góc trong)

Suy ra $BCN = ADB$. Vì $ADB = 40^0$ nên $BCN = 40^0$ hay $OCN = 40^0$

Xét ΔOCN có $OC = ON$ nên ΔOCN cân tại $O \Rightarrow OCN = ONC = 40^0$

$\Rightarrow CON = 180^0 - 2.40^0 = 100^0$.

Diện tích hình quạt CON là: $S_{CON} = \dfrac{\pi.R^2.n}{360^0} = \dfrac{\pi.5^2.100^0}{360^0} \approx 21{,}8\ cm^2$

c) Trọng tâm G của ΔMAC chạy trên một đường tròn cố định.

Gọi I là trung điểm AC. Vì A,C cố định nên I cố định.

Từ trọng tâm G của ΔMAC kẻ $GP\,//\,MB$ nên P cố định, kẻ $GJ\,//\,MC$ nên J cố định.

Vì $GP\,//\,MB$, $GJ\,//\,MC$ và điểm I, J cố định nên G di động trên đường tròn đường kính PJ cố định.

Vậy trọng tâm G của ΔMAC chạy trên một đường tròn cố định.

Câu 68.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đoạn thẳng AC kẻ đường thẳng $d\perp AC$ tại A, trên AC lấy điểm M, dựng (O) đường kính MC, kẻ cát tuyến AEF, tia CE cắt d tại B. Tia BM cắt (O) tại D. Đường thẳng AD cắt (O) tại S. Chứng minh:

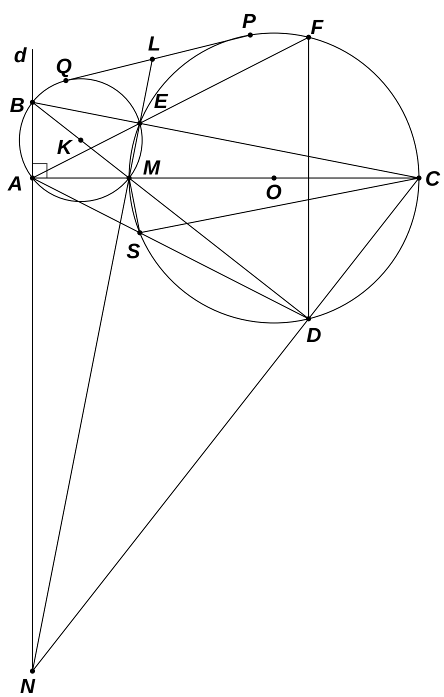
a) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp, CA là phân giác SCB.

b) AB; EM; CD đồng quy và $FD\perp AC$.

c) Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE và $CM.CA=CE.CB$.

d) Vẽ (K) đường kính MB ngoại tiếp tứ giác $ABEM$. Kẻ tiếp tuyến chung của (O) và (K) tại P và Q. Chứng minh ME đi qua trung điểm PQ.

Hướng dẫn



a) $D\in\left(O;\dfrac{MC}{2}\right)\Rightarrow MDC=90^\circ\Rightarrow BDC=90^\circ$

Tứ giác $ABCD$ có $BDC=BAC=90^\circ\Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Tứ giác $MCDS$ nội tiếp $\Rightarrow SCM=SDM\Rightarrow SCA=ADB$.

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow ADB = ACB \Rightarrow ACB = SCA \Rightarrow CA$ là phân giác của góc SCB.

b) Gọi N là giao điểm của BA và CD.

Ta có $CA \perp BA \Rightarrow CA \perp BN$

$BD \perp CD$ (do $BDC = 90°$) $\Rightarrow BD \perp CN$.

Xét ΔNBC có: $CA \perp BN$; $BD \perp CN$ mà CA và BD cắt nhau tại M nên M là trực tâm của ΔNBC.

$\Rightarrow NM$ là đường cao của $\Delta NBC \Rightarrow NM \perp BC$ (1).

$E \in \left(O; \dfrac{MB}{2}\right) \Rightarrow MEB = 90° \Rightarrow ME \perp EB \Rightarrow ME \perp BC$ (2).

Áp dụng tiên đề Ơclit từ (1) và (2) suy ra N; M; E thẳng hàng.

Suy ra AB; EM; CD đồng quy.

Ta có: $FDC = FEC$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn FC)

Mà $FEC = BEA$ (hai góc đối đỉnh).

Tứ giác $ABEM$ có $BEM + BAM = 180^0 \Rightarrow ABEM$ nội tiếp $\Rightarrow AEB = AMB$.

Tứ giác $MAND$ có $MAN + MDN = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow MAND$ nội tiếp

$\Rightarrow BMA = BND = BNC \Rightarrow BEA = BNC \Rightarrow FDC = BNC \Rightarrow FD // BN$ (hai góc đồng vị)

Mà $BN \perp AC \Rightarrow FD \perp AC$.

c) Theo câu a) tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow NAD = DCB$

Tứ giác $AECN$ có: $NEC = CAN = 90° \Rightarrow AECN$ nội tiếp

$\Rightarrow BAE = ECN = DCB$

$\Rightarrow BAE = NAD$

$\Rightarrow MAE = MAD \Rightarrow AM$ là đường phân giác trong ΔADE.

Tương tự EM cũng là đường phân giác trong ΔADE suy ra M là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE.

Tứ giác $ABEM$ nội tiếp (câu b) $\Rightarrow CM.CA = CE.CB$ (tính chất cát tuyến).

d) Gọi L là giao điểm của ME và PQ

Ta có $LQ^2 = LE.LM$ (tính chất cát tuyến và tiếp tuyến)

$LP^2 = LE.LM$ (tính chất cát tuyến và tiếp tuyến)

$\Rightarrow LQ^2 = LP^2 \Rightarrow LQ = LP$

$\Rightarrow ME$ đi qua trung điểm L của PQ

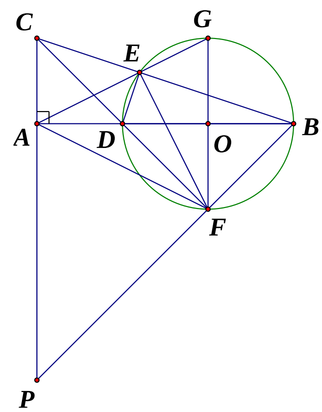
Câu 69.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 3AC$. Trên cạnh AB lấy một điểm D sao cho $DB = 2DA$. Vẽ (O) đường kính BD cắt BC tại E. Đường thẳng CD; AE cắt (O) tại F, G. Chứng minh:

a)Tứ giác $ADEC$; $AFBC$ nội tiếp.

b) $\Delta ABC \backsim \Delta EBD$ và $AC \,//\, FG$

c) AC; DE; BF đồng quy và D là tâm đường tròn nội tiếp ΔAEF

Hướng dẫn



a) $E \in \left(O; \dfrac{BD}{2}\right) \Rightarrow BED = 90^0 \Rightarrow DEC = 90^0$.

Tứ giác $ACED$ có $DAC + DEC = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow ACED$ nội tiếp.

$F \in \left(O; \dfrac{BD}{2}\right) \Rightarrow BFD = 90^0 \Rightarrow BFC = 90^0$.

Tứ giác $AFBC$ có $BFC = BAC\ (= 90^0) \Rightarrow AFBC$ nội tiếp.

b) ΔABC và ΔEBD có:

ABC chung, $BAC = BED = 90^0$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta EBD (g.g)$

Ta có $BFG = BEG$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Mà $BEG = AEC$ (đối đỉnh) $\Rightarrow BFG = AEC$

$ADEC$ nội tiếp$\Rightarrow AEC = ADC \Rightarrow BFG = ADC$

$\Rightarrow 90^0 - BFG = 90^0 - ADC \Rightarrow GFD = ACD \Rightarrow AC//FG$ (Hai góc sole trong).

c) Gọi P là giao điểm của AC và BF.

Ta có $BA \perp AC \Rightarrow BA \perp CP$

$CF \perp BF \Rightarrow CF \perp BP$

ΔBCP có $BA \perp CP$; $CF \perp BP$. Mà AB; CF cắt nhau tại D nên D là trực tâm của ΔBCP

$\Rightarrow PD \perp BC$ (1).

$DEC = 90^0 \Rightarrow DE \perp BC$ (2)

Áp dụng tiên đề Ơclit từ (1) và (2) suy ra P; D; E thẳng hàng $\Rightarrow AC$; BF; DE đồng quy tại một điểm.

Tứ giác $AEBP$ có $PAB = PEB = 90^0 \Rightarrow AEBP$ nội tiếp $\Rightarrow CAE = EBP = CBP$.

Lại có $AFBC$ nội tiếp (câu a) $\Rightarrow PAF = FBC = PBC$

$\Rightarrow PAF = EAC \Rightarrow FAD = EAD \Rightarrow AD$ là phân giác EAF

Tương tự FD là phân giác của AFE của ΔAEF suy ra D là tâm đường tròn nội tiếp ΔAEF.

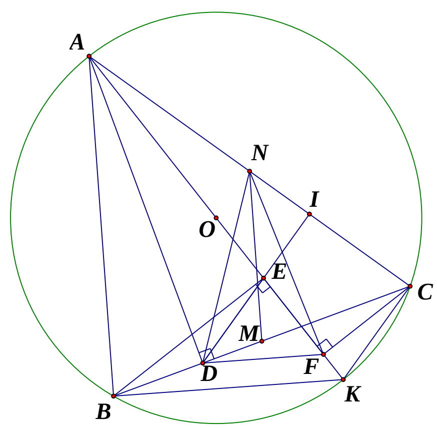
Bài 70. Cho ΔABC nhọn nội tiếp (O). Kẻ đường cao AD và đường kính AK. Hạ BE và CF cùng vuông góc với AK.

a) Chứng minh tứ giác $ACFD$ nội tiếp và $DE//CK$.

b) Chứng minh $AC^2 = AF.AK$ và $OCA = BAD$.

c) Tính $S_{quat}OKC$ biết $ABC = 60^o$ và $R = 4cm$ và cho BC cố định, A chuyển động sao cho ΔABC nhọn. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF không đổi.

Hướng dẫn



a) Có $AD \perp BC$ (gt) $\Rightarrow ADC = 90^o$, $CF \perp AK$ (gt) $\Rightarrow AFC = 90^o$

$\Rightarrow ADC = AFC = 90^o$, mà hai góc này thuộc hai đỉnh D, F kề nhau cùng nhìn AC dưới một góc 90^o không đổi nên tứ giác $ACFD$ nội tiếp.

* Kéo dài DE cắt AC ở I

Chứng minh tương tự như trên ta có tứ giác $AEBD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB

$\Rightarrow ABE = ADE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AE)

$AKB = ABE$ (cùng phụ với BAE)

$ACB = AKB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Từ đó suy ra: $\widehat{ACB}=\widehat{ADE}$, mà $\widehat{ADE}+\widehat{EDC}=90^o \Rightarrow \widehat{ACB}+\widehat{EDC}=90^o$

$\Rightarrow \Delta DIC$ vuông tại $I \Rightarrow DE\perp AC$ tại I (1)

Mặt khác $\widehat{ACK}=90^o$ (góc nội tiếp chăn nửa đường tròn) $\Rightarrow CK\perp AC$ tại C (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $DE//CK$

b) Xét ΔAFC và ΔACK có:

$\widehat{A}$: chung, $\widehat{AFC}=\widehat{ACK}$

$\Rightarrow \Delta AFC\sim\Delta ACK$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AF}{AC}=\dfrac{AC}{AK}$ (tỉ số đồng dạng) $\Rightarrow AC^2=AF.AK$ (đpcm)

* Có: $\begin{cases}\widehat{AKC}+\widehat{KAC}=90^o\\ \widehat{ABD}+\widehat{BAD}=90^o\\ \widehat{ABD}=\widehat{AKC}(cmt)\end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{BAD}=\widehat{KAC}$ (3)

Ta lại có: ΔOAC cân tại $O(OA=OC)$ nên: $\widehat{OCA}=\widehat{OAC}$ hay $\widehat{OCA}=\widehat{KAC}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{BAD}=\widehat{OCA}$.

c) Vì $\widehat{ABC}=60^o$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AOC}=120^o$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung)

Mà $\widehat{AOC}+\widehat{COK}=180^o$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{COK}=60^o$

$$\Rightarrow S_{quat}OKC=\frac{4^2.\pi.60^o}{360^o}=\frac{8\pi}{3}(cm^2)$$

* Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $BC,AC \Rightarrow MN$ là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow MN//AB$, mà $AB\perp BK(\widehat{ABK}=90^o)$ $\Rightarrow MN\perp BK$

Ta lại có: $\widehat{AKB}=\widehat{AFD}$ (vì cùng bằng $\widehat{ACB}$), mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $DF//BK$

Từ đó suy ra: $\Rightarrow MN\perp DF$

Trong hai tam giác vuông $\Delta ADC,\Delta AFC$ ta có: $DN=\dfrac{1}{2}AC, FN=\dfrac{1}{2}AC \Rightarrow DN=FN \Rightarrow \Delta DFN$ cân tại N

Mà $MN\perp DF$ (cmt) $\Rightarrow MN$ là đường trung trực của $DF \Rightarrow MD=MF$

Chứng minh tương tự có: $MD=ME$, từ đó suy ra M là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔDEF

Mà BC cố định nên M cố định.

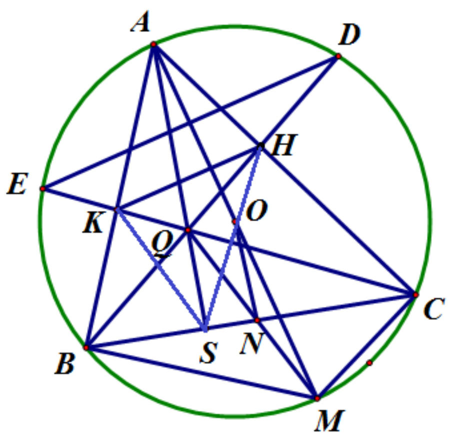
Câu 71.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC nhọn nội tiếp $(O;R)$ các đường cao BH, CK cắt nhau tại Q và cắt (O) tại D và E. AQ cắt BC tại S

a) Chứng minh tứ giác $BKHC$ nội tiếp và $DE//HK$.

b) Chứng minh $OA \perp HK$ và Q là tâm đường tròn nội tiếp ΔSHK.

c) ΔAOD cân và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAHK không đổi khi A chạy trên cung lớn BC thỏa mãn ΔABC nhọn.

Hướng dẫn



a)Chứng minh tứ giác $BKHC$ nội tiếp và $DE//HK$.

Xét tứ giác $BKHC$ có $BKC = BHC = 90^0 (BH \perp AC; CK \perp AB)$ mà K, H là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh BC => tứ giác $BKHC$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

Xét (O) có $EDB = ECB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BE) (1)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BKHC$ có $KHB = ECB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BK) (2)

Từ (1) và (2) => $EDB = KHB$ => $ED//KH$ (đồng vị)

b)Chứng minh $OA \perp HK$ và Q là tâm đường tròn nội tiếp ΔSHK.

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BKHC$ có $KBH = KCH$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KH) => $ABD = ACE$

Xét (O) có $ABD = ACE\,(cmt)$ => $cung\ AE = cung AD$

=> A là điểm chính giữa của cung ED nhỏ.

mà OA là một phần đường kính

=> $OA \perp ED$ (đ/l)

Mà ED//KH(cm câu a)

=> $OA \perp KH$ (đpcm)

Cho ΔABC có các đường cao BH, CK cắt nhau tại Q

=> Q là trực tâm ΔABC => $AQ \perp BC$ => $QSC = 90^0$

Xét tứ giác $QHCS$ có $QSC = QHC = 90^0$(cmt) mà S, H là hai đỉnh đối nhau

=> tứ giác $QHCS$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $QHCS$ có $QHS = QCS$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QS) => $BHS = ECB$ mà $KHB = ECB$ (cm câu a)

=> $KHB = BHS$ => HB là tia phân giác của KHS .(3)

Chứng minh tương tự KC là tia phân giác của HKS (4)

Từ (3) và (4) ; KC cắt HB tại Q => Q là tâm đường tròn nội tiếp ΔSKH.

c. ΔAOD có $OA = OD = R$ => ΔAOD cân.

Chứng minh tứ giác $AKQH$ là tứ giác nội tiếp (vì $AKQ = AHQ = 90^0$)

=> A, K, Q, H thuộc đường tròn đường kính AQ

=> đường tròn ngoại tiếp ΔAHK có bán kính là $\dfrac{AQ}{2}$

Kéo dài AO cắt (O) ở M

Xét (O) có $ACM = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $CM \perp AC$ mà $BH \perp AC(gt)$ => $BH // CM$ (5)

Chứng minh tương tự $BM // CK$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra tứ giác BMCQ là hình bình hành

Gọi N là giao điểm của BC và QM => N là trung điểm của BC và QM (t/c hbh).

Xét ΔAQM có O là trung điểm AM; N là trung điểm QM => ON là đường trung bình

=> $ON = \dfrac{AQ}{2}$ (t/c đường trung bình)

Có BC cố định, N là trung điểm BC nên N cố định

=> ON không đổi => $\dfrac{AQ}{2}$ không đổi

=> bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAHK không đổi khi A chạy trên cung lớn BC thỏa mãn ΔABC nhọn.

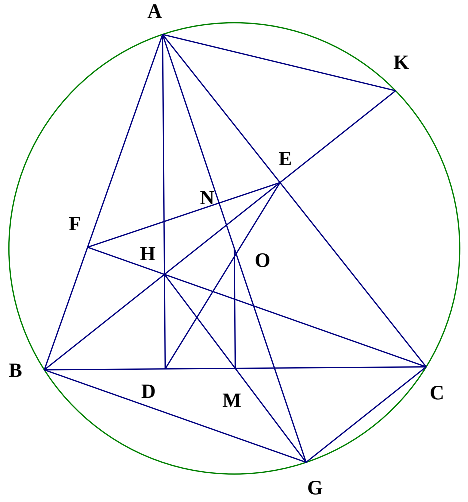
Câu 72.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho BC là dây cung cố định của đường tròn tâm O, bán kính R $(0 < BC < 2R)$. Gọi A là điểm di chuyển trên cung BC lớn sao cho ΔABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tai H ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$), đường thẳng BE cắt (O) tại K.

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp và $\Delta FHE \backsim \Delta BHC$

b) Chứng minh ΔAHK cân và EH là phân giác của FED

c) Chứng minh $AO \perp FE$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAEF không đổi khi A di chuyển trên cung BC lớn sao cho ΔABC nhọn

Hướng dẫn



a) Xét tứ giác $BFEC$ có

$BFC = BEC = 90^0$

Mà hai đỉnh F, E cùng nhìn cạnh BC

Suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$ có:

$FEB = FCB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FB)

Xét ΔFHE và ΔCHB có

$FHE = BHC$ (đối đỉnh)

$FEB = FCB$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta FHE \backsim \Delta CHB (g-g)$

b) Xét (O) có

$KAC = KBC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KC)

Có $CAD = CBE$ (cùng phụ với ACB)

$\Rightarrow KAE = HAE \Rightarrow AE$ là phân giác của KAH

Xét ΔAHK có AE là phân giác của, là đường cao

$\Rightarrow \Delta AHK$ cân tại A.

Xét tứ giác $EHDC$ có $HEC + HDC = 180^0$

Suy ra tứ giác $EHDC$ nội tiếp $\Rightarrow HEC = HDC$

Mà $FEB = FCB$ (cmt) $\Rightarrow FEB = DEB$

$\Rightarrow EH$ là phân giác của FED

c) Kẻ đường kính AG, gọi N là giao điểm của AG và FE

có tứ giác $BFEC$ nội tiếp

$\Rightarrow AEF = ABC$ (cùng bù với FEC)

Xét (O) có

$AGC = ABC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC) $\Rightarrow AEN = AGC$

Có $ACG = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow CAG + AGC = 90^0 \Rightarrow NAE + AEN = 90^0 \Rightarrow ANE = 90^0 \Rightarrow AO \perp FE$

Xét (O) có

$ACG = ABG = 90^0 \Rightarrow HB//CK, CH//BK$

$\Rightarrow$ tứ giác $BHCG$ là hình bình hành$\Rightarrow$ M là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ OM là đường trùn bình tam giác $AHG \Rightarrow$ $OM = \frac{1}{2}AH$

Tứ giác $AEHF$ nội tiếp vì có $AEH + AFH = 180^0$

$\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF nhận AH là đường kính

Mà $AH = 2OM$ (không đổi)

Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAEF không đổi khi A di chuyển trên cung BC lớn sao cho ΔABC nhọn.

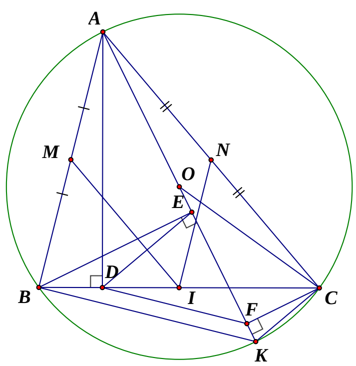
Câu 73.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC nhọn nội tiếp (O). Kẻ đường cao AD và đường kính AK. Hạ BE và CF cùng vuông góc AK, cho $ABC = 60^0$ và $R = 4cm$.

a) Chứng minh tứ giác $ACFD$ nội tiếp và $AB^2 = AE.AK$.

b) Chứng minh $DF//BK$ và tính $S_{quat}OKC$.

c) Cho BC cố định, A chuyển động. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF là một điểm cố định.

Hướng dẫn



a) + Xét tứ giác $ACFD$ ta có: $ADC = AFC = 90^\circ$ (vì AD là đường cao, $CF \perp AK$) mà hai đỉnh D, F là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn AC dưới một góc không đổi

Nên tứ giác $ACFD$ nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc)

+ Nối B với K. Suy ra $ABK = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

+ Xét ΔABE và ΔAKB có $\begin{cases} AEB = ABK = 90^\circ \\ BAK \text{ chung} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta AKB (g-g)$

$\Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2 = AK.AE$

b) + Vì tứ giác $ACFD$ nội tiếp nên $CDF = FAC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FC)

Mà $KBC = KAC\ hay\ KBC = FAC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KC trong (O))

Suy ra $CDF = KBC$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $DF // BK$ (DHNB)

+ Ta có: $ABC = AKC = 60^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC trong (O))

Mà ΔAKC vuông tại C (vì ACK là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O)

Suy ra $OAC = ACO = 30^\circ$ (vì ΔOAC cân tại O)

$\Rightarrow KOC = 2.OAC = 2.30^\circ = 60^\circ$ (Vì KOC là góc ngoài của ΔOAC)

$\Rightarrow S_{quat\,OKC} = \dfrac{\pi.R^2.n}{360} = \dfrac{\pi.16.60}{360} = \dfrac{8\pi}{3}(cm^2)$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB , AC. Gọi I là trung điểm BC .

Suy ra NI là đường trung bình của ΔBAC

$\Rightarrow NI // AB \Rightarrow NI \perp BK\,(do\,AB \perp BK) \Rightarrow NI \perp DF\,(do\,BK // DF)$

+ Vì tứ giác $ACFD$ nội tiếp đường tròn đướng kính AC mà N là trung điểm AC

Nên $ND = NF$ $\Rightarrow N \in$ đường trung trực của DF mà $NI \perp DF$ nên $I \in$ đường trung trực của $DF \Rightarrow ID = \text{IF}$ (1)

+ Ta có: $EDC = BAK$ (trong tứ giác $AEDB$ nội tiếp, góc ngoài tại đỉnh này bằng góc trong tại đỉnh đối diện)

mà $BCK = BAK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BK)

$\Rightarrow BCK = EDC \Rightarrow DE // KC \Rightarrow DE \perp AC\,(do\,CK \perp AC)$

$\Rightarrow DE \perp MI\,(do\,MI // AC)$

+ Một cách tương tự chứng minh được $MD = ME \Rightarrow M \in$ đường trung trực của DE mà $DE \perp MI \Rightarrow I \in$ đường trung trực của DE

$\Rightarrow ID = \text{IE}$ (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF mà I là trung điểm BC nên I là điểm cố định.

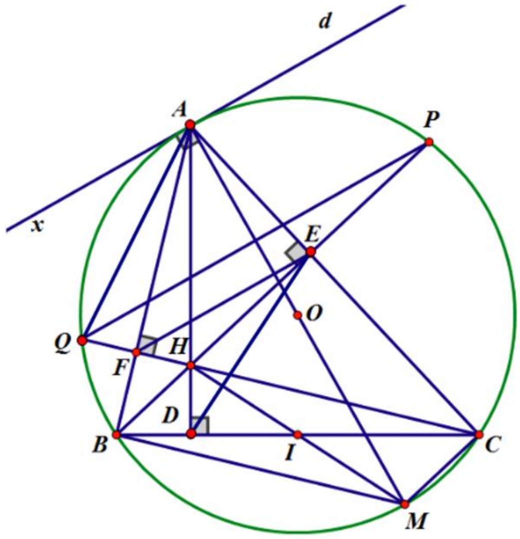
Câu 74.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho BC là dây cung cố định của đường tròn tâm O,bán kính R $(0 < BC < 2R)$. A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H (D thuộc BC, E thuộc CA, F thuộc AB).

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp và $AE.AC = AF.AB$.

b) Kẻ đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Chứng minh $d // EF$ và EH là phân giác của góc FED

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $AH = 2IO$; gọi BE, CF cắt (O) tại P, Q. Chứng minh $EF = \frac{1}{2}PQ$.

Hướng dẫn



a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp và $AE.AC = AF.AB$.

Nối Q với A, nối E với F, nối E với D

Ta có BE, CF là các đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} BE \perp AC \\ CF \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AEH = 90^\circ \\ AFH = 90^\circ \end{cases}$

Xét tứ giác $AEHF$ có $AEH + AFH = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

Xét ΔABE và ΔACF có $\begin{cases} A \ \ chung \\ AEB = AFC = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACF\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AF.AB$

Vậy tứ giác $AEHF$ nội tiếp và $AE.AC = AF.AB$.

b) Chứng minh $d \,//\, EF$ và EH là phân giác của góc FED

Theo ý a) ta có $AE.AC = AF.AB \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$

Kẻ đường kính AM

Xét ΔAEF và ΔABC có

$\left.\begin{array}{l} A \ \ chung \\ \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC\left(c.g.c\right) \Rightarrow AFE = ACB$ (cặp góc tương ứng) (1)

Ta có d là tiếp tuyến với đường tròn $\left(O\right)$ tại $A \Rightarrow BAx = \frac{1}{2} sđ\, AB$ (2)

Mà $ACB = AMB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB, suy ra $ACB = AMB = \frac{1}{2} sđ\, AB$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $ACB = BAx$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $AFE = BAx$, mặt khác hai góc $AFE; BAx$ ở vị trí so le trong. Suy ra $d // EF$.

Vậy $d // EF$.

- Ta có tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $HAF = HEF\,(5)$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HF)

- Xét tứ giác $HECD$ có $HDC + HEC = 180° \Rightarrow$ tứ giác $HECD$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $HED = HCD\,(6)$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HD), mà $HAF = HCD\,(7)$ (cùng phụ với góc ABC)

Từ (5), (6) và (7) suy ra $HEF = HED$, mặt khác tia EH nằm giữa hai tia EF và ED, từ đó ta

có EH là phân giác của góc FED.

Vậy EH là phân giác của góc FED.

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $AH = 2IO$; gọi BE, CF cắt (O) tại P, Q. Chứng minh $EF = \frac{1}{2}PQ$.

Kẻ đường kính AM, ta có $ACM = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow MC \perp AC$, mà $BE \perp AC$ (gt), từ đó suy ra $MC // BE$ (quan hệ từ vuông góc đến song song) $\Rightarrow MC // BH$

. Chứng minh tương tự ta có $MB // CH$.

Xét tứ giác $BHCM$ có

$\left.\begin{array}{l} MC // BH \\ MB // CH \end{array}\right\} \Rightarrow$ tứ giác $BHCM$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Suy ra hai đường chéo BC, HM cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, mặt khác ta có I là trung điểm của $BC \Rightarrow I$ là trung điểm của HM.

Xét ΔMAH có I, O lần lượt là trung điểm của hai cạnh HM và AM, suy ra OI là đường trung bình của $\Delta MAH \Rightarrow AH = 2IO$.

Vậy $AH = 2IO.$

+ Chứng minh $EF = \frac{1}{2}PQ$

Thật vậy, ta có $QAB = QCB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung QB), mà $QCB = BAD$ (cùng phụ với góc ABC), từ đó suy ra $QAB = BAD \Rightarrow AF$ là phân giác của góc QAH.

Xét ΔQAH có AF vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên ΔQAH cân tại $A \Rightarrow AF$ là trung tuyến, suy ra F là trung điểm của QH.

Chứng minh tương tự ta cũng có E là trung điểm của HP.

Xét ΔHPQ có F là trung điểm của QH, E là trung điểm của HP, suy ra EF là đường trung bình của $\Delta HPQ \Rightarrow EF = \frac{1}{2}PQ$.

Vậy $EF = \frac{1}{2}PQ.$

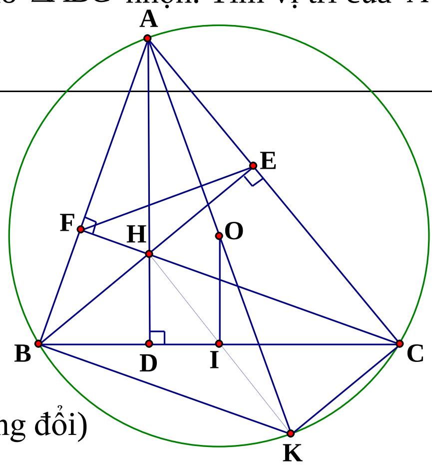
Câu 75.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp $(O; R)$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Kẻ đường kính AK. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp và ba điểm H, I, K thẳng hàng.

b) Chứng minh $DH.DA = DB.DC$ và cho $ABC = 45^0$, $R = 4cm$. Tính $S_{quat}KOC$.

c) Khi BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn. Tìm vị trí của A để diện tích ΔEAH lớn nhất.

Hướng dẫn



a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

$$\left.\begin{array}{l} BEC = 90^0 (gt) \\ BFC = 90^0 (gt) \end{array}\right\} \Rightarrow BEC = BFC$$

Suy ra tứ giác $BCEF$ nội tiếp

(có 2 đỉnh E và F kề nhau cùng nhìn BC dưới một góc không đổi)

Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Ta có : $ACK = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $KC \perp AC$

mà $BE \perp AC(gt)$ nên $KC // BE$ hay $KC // BH$ (1)

$ABK = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $AB \perp BK$

mà $CF \perp AB(gt)$ nên $BK // CF$ hay $BK // CH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác BHCK là hình bình hành

Mà I là trung điểm của BC (gt) nên I cũng là trung điểm của HK hay ba điểm H, I, K thẳng hàng.

b) Chứng minh $DH.DA = DB.DC$.

Xét ΔDHC và ΔDBA có

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{DCH} = \widehat{DAB}(\text{cùng phụ vói } \widehat{ABC}) \\ \widehat{CDH} = \widehat{ADB} = 90^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DHC \backsim \Delta DBA(g-g)$$

$$\Rightarrow \frac{DH}{DB} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow DH.DA = DB.DC$$

Tính $S_{quat}KOC$

Ta có : $\widehat{ABK} = 90^0$ mà $\widehat{ABC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{KBC} = 45^0$

Nên $\widehat{KOC} = 2\widehat{KBC}(t/c) \Rightarrow \widehat{KOC} = 2.45^0 = 90^0$

Suy ra $S_{quat}KOC = \dfrac{\pi.R^2.n}{360} = \dfrac{\pi.4^2.90}{360} = 4\pi$

c) Khi BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn. Tìm vị trí của A để diện tích ΔEAH lớn nhất .

Ta có : OI là đường trung bình của tam giác AKH $\Rightarrow OI = \dfrac{1}{2}AH$.

Mà O và BC cố định suy ra OI không đổi nên $AH = 2OI$ không đổi.

Ta có $S_{AEH} = \dfrac{1}{2}AE \cdot EH \le \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{AE^2 + EH^2}{2} = \dfrac{AH^2}{4} = \dfrac{4OI^2}{4} = OI^2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AE = EH \Leftrightarrow \Delta AEH$ vuông cân tại $E \Leftrightarrow \widehat{HAE} = 45^0 \Leftrightarrow \Delta DAC$ vuông cân tại $D \Leftrightarrow \widehat{DCA} = 45^0$ *hay* $\widehat{BCA} = 45^0$.

Vậy khi A thuộc cung lớn BC sao cho $\widehat{BCA} = 45^0$ thì S_{AEH} lớn nhất bằng OI^2.

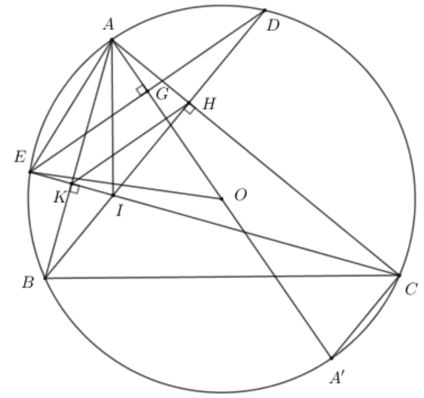
Câu 76.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC nhọn nội tiếp $(O;R)$ các đường cao BH, CK cắt (O) tại D, E.

a) Chứng minh 4 điểm B, H, C, K cùng thuộc một đường tròn và $AK.AB = AH.AC$.

b) Chứng minh $DE // HK$ và $OA \perp DE$.

c) Cho $\widehat{ABH} = 30°, R = 5\text{cm}$. Tính $S_{quat}AOE$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAHK không đổi khi A chạy trên cung lớn BC thỏa mãn ΔABC nhọn.

Hướng dẫn



a) Xét tứ giác $BKHC$ có:

$BKC = BHC = 90°$ và K, H là 2 đỉnh kề nhau.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BKHC$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow AKH = ACB$ (góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện).

Xét ΔAKH và ΔACB có:

$AKH = ACB$ (cmt) và A chung $\Rightarrow \Delta AKH \backsim \Delta ACB$ (g.g).

$\Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AK.AB = AH.AC$.

b)Xét (O) có: $DEC = DBC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DC).

Vì $BKHC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow HBC = HKC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HC)

$\Rightarrow DEC = HKC$ và chúng ở vị trí đồng vị nên $KH // DE$.

Kẻ đường kính AA', nối $A'C$.

Xét $\Delta A'AC$ có: $\Delta A'AC$ nội tiếp (O) và $A'A$ là đường kính nên $\Delta A'AC$ vuông tại C.

$\Rightarrow A'AC + AA'C = 90°$ (1).

Xét (O) có $AA'C = ABC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Mà $BKHC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow ABC = AHK$.

Do đó $AHK = AA'C$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A'AC + AHK = 90°$ nên $OA \perp KH$, mà $KH // DE$ (cmt)

$\Rightarrow OA \perp DE$.

c) $AOE = 2ACE$ (Hệ quả góc nội tiếp).

Vì tứ giác $BKHC$ nội tiếp nên $HCK = ABH = 30°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KH).

$\Rightarrow AOE = 2ABH = 60°$.

Diện tích hình quạt AOE là: $\frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi.5^2.60}{360} = \frac{25\pi}{6}$ (cm).

Gọi I là giao điểm của BH và CK.

Xét tứ giác $AKIH$ có $AKI + AHI = 90° + 90° = 180°$ và góc K và H là 2 góc đối.

$\Rightarrow$ tứ giác $AKIH$ nội tiếp đường tròn đường kính AI.

Để chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAKH không đổi ta đi chứng minh AI không đổi.

Tứ giác $AKIH$ nội tiếp nên $AIK = AHK$.

Tứ giác $BKHC$ nội tiếp nên $AHK = ABC$.

Xét (O) có $ABC = AEC$.

Do đó $AIK = AEC \Rightarrow \Delta AEI$ cân tại $A \Rightarrow AI = AE$ (3).

Xét (O) có $AED = ABD = 30°$ (hệ quả góc nội tiếp).

Mà $OA \perp DE$ (cmt) nên ΔAEG vuông tại G. Với G là giao điểm của OA và DE.

$\Rightarrow EAG = 60°$.

Xét ΔOAE cân tại O có góc $EAG = 60°$ nên ΔOAE đều nên $AE = OA = 5$ (cm) (4).

Từ (3) và (4) có $AI = 5$ (cm). Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAHK không đổi khi A chạy trên cung lớn BC.

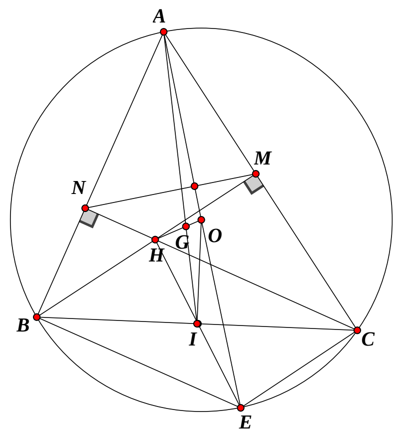
Câu 77.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC nhọn nội tiếp (O). Gọi BM, CN là các đường cao của ΔABC cắt nhau tại H. Gọi E là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC. Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp và tứ giác $BHCE$ là hình bình hành.

b) Chứng minh $OI = \frac{1}{2}AH$ và E nằm trên (O).

c) G là trọng tâm ΔABC và $AO \perp MN$.

Hướng dẫn



a) Tứ giác $AMHN$ có $ANH = AMH = 90^0$ (mà 2 góc ở vị trí đối đỉnh) => tứ giác AMHN nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

Xét tứ giác BHCE có I là trung điểm của BC, mặt khác E đối xứng với H qua I => I là trung điểm của HE => Tứ giác BHCE có 2 đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường => tứ giác BHCE là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết).

b) Xét Δ BOC có $OB = OC = R$ => Δ BOC cân tại O, ta có I là trung điểm của BC => OI là trung tuyến đồng thời là đường cao của Δ BOC => OI $\perp$ BC (1)

Xét ΔABC có H là giao của 2 đường cao BM và CN => AH là đường cao thứ 3 của Δ ABC => AH $\perp$ BC (2)

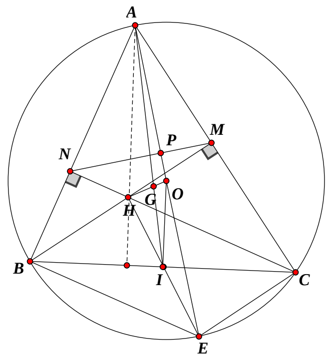
Từ (1) và (2) suy ra OI // AH, mặt khác I là trung điểm của BC => O là trung điểm của AE => OI = $\frac{AH}{2}$ và E thuộc đường tròn.

(Cách khác chứng minh O thuộc đường tròn: vì BHCE là hình bình hành => BE // CH , mà CH vuông góc với AB => EB vuông góc với AB, tam giác ABE có ABE =90 độ => suy ra AE là đường kính đường tròn tâm O => E thuộc đường tròn)

c) Gọi G' là trọng tâm Δ ABC. Ta sẽ chứng minh H, G’, O thẳng hàng

Ta có Δ ABC có AI là trung tuyến, G' là trọng tâm Δ ABC => G’ thuộc AI và AG’ = 2/3 AI. Xét Δ AHE là AI là trung tuyến, G’ thuộc AI và AG’ = 2/3 AI => G’ là trọng tâm Δ AHE => HO đi qua G’ => H, G’, O thẳng hàng.

Mặt khác HO cắt AI tại G => G trùng G’ => G là trọng tâm Δ ABC.



Gọi giao điểm của AO và MN là P.

Tứ giác ABEC nội tiếp đường tròn tâm O => ABC = AEC (1)(góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Xét tứ giác BNMC có BNC = BMC = 90^0 (2 góc cùng nhìn cạnh BC dưới 1 góc 90 độ) => BNMC nội tiếp được đường tròn. => NBC = AMP (2) (góc ngoài tứ giác nội tiếp bằng góc trong không kề với nó)

Từ (1) và (2) suy ra AEC = AMP (3)

Xét Δ APM và Δ AEC có A chung và AEC = AMP (3) => Δ APM $\backsim$ Δ AEC => APM = ACE = 90 (2 góc tương ứng) => AO $\perp$ MN

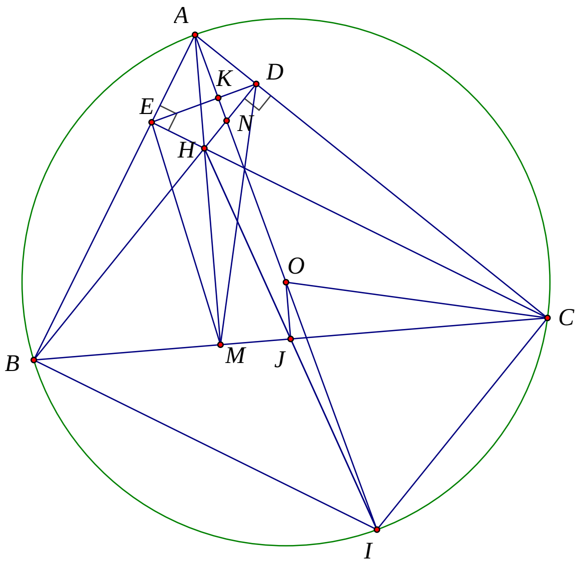
Câu 78.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác nhọn ΔABC $(AB < AC < BC)$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của hai đường cao BD và CE của tam giác ABC $(D \in AC, E \in AB)$. Chứng minh

a) Chứng minh tứ giác $AEHD$ nội tiếp trong một đường tròn và $HE.HC = HB.HD$.

b) Gọi AH cắt BC tại M. Chứng minh EH phân giác MED. Gọi J là trung điểm của BC, kẻ đường kính AI. Chứng minh ba điểm H, I, J thẳng hàng.

c) Cho góc $ABC = 60^0$. Tính $S_{quat} IOC$; Gọi K, N lần lượt là giao điểm của AI với ED và BD. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{DK^2} = \dfrac{1}{DA^2} + \dfrac{1}{DN^2}$.

Hướng dẫn



a) Xét tứ giác $AEHD$ có: $AEH = 90^0$, $ADH = 90^0$

$\Rightarrow AEH + ADH = 90^0 + 90^0 = 180^0$

mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow AEHD$ là tứ giác nội tiếp trong một đường tròn (dhnb)

Xét ΔBEH và ΔCDH có:

$EHB = CHD$ (hai góc đối đỉnh)

$BEH = CDH = 90^0$

$\Rightarrow \Delta BEH$ đồng dạng với ΔCDH (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HE}{HD} = \dfrac{HB}{HC}$ (các cạnh tương ứng)

$\Rightarrow HE.HC = HB.HD$

b) +) Ta có: $BD \perp AC$; $CE \perp AB$

$BD \cap CE = \{H\} \Rightarrow AH \perp BC$ tại M

$\Rightarrow$ Tứ giác $BEHM$ nội tiếp

$\Rightarrow E_1 = B_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HM)

mà $B_1 = CAM$ (cùng phụ C)

Mà $CAM = E_2 \Rightarrow E_1 = E_2$

$\Rightarrow EH$ là phân giác của MED

+) AI là đường kính $\Rightarrow \begin{cases} ACI = 90^0 \\ ABI = 90^0 \end{cases}$

Có $\begin{cases} BH \perp AC \\ CI \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH//CI\,(1)$

Lại có: $\begin{cases} CE \perp AB \\ BI \perp AB \end{cases} \Rightarrow BI//CE\,(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác $BHCI$ là hình bình hành (dhnb)

Mà J là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ J là trung điểm của HI

$\Rightarrow$ H , I , J thẳng hàng

c) Ta có: $ABC = \frac{1}{2}AOC$ (định lí góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn 1 cung)

$\Rightarrow AOC = 120^0 \Rightarrow COI = 60^0$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow S_{quat}IOC = \frac{R^2.\pi.60}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$

Ta có: $CAI = CBI$ (cùng chắn cung CI) (3)

$ADE = AHE$ (cùng chắn cung AF)

Mà $AHE = CHM$ (đối đỉnh)$\Rightarrow ADE = CHM$

$CBI = HCB$ (so le trong) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow CAI = HCB$

Mà $ADE = CHM$ (cmt)

$\Rightarrow CAI + ADE = HCB + CHM$

Mà $HCB + CHM = 90^0$ (ΔMHC vuông tại M)

$\Rightarrow CAI + ADE = 90^0 \Rightarrow \Delta ADK$ vuông tại $K \Rightarrow DK \perp AK$

Xét ΔADN vuông tại D có $DK \perp AN$

Áp dụng hệ thức lượng ta có: $\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DN^2}$ (đpcm)

Câu 79.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm (O). Hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H ($D \in BC, E \in AC$). Gọi F là giao điểm của tia CH với AB. Tia AO cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq A$).

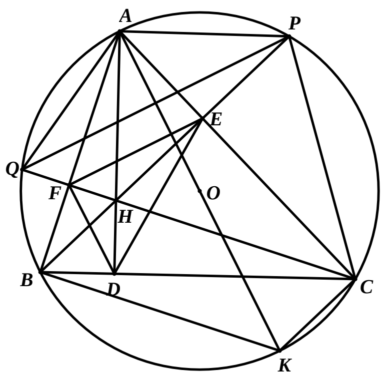
a) CM: Tứ giác $ABDE, BCEF$ nội tiếp đường tròn.

b) CM: Tứ giác $BHCK$ là hình bình hành và H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF.

c) Gọi BE, CF cắt (O) tại P, Q. Chứng minh $EF // PQ$ và ΔAPQ cân.

d) CM: $\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=1$.

Hướng dẫn



a) Vì ΔABC có hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H (gt) $\Rightarrow AD \perp BC, BE \perp AC$ (đn)

$\Rightarrow ADB = ADC = 90°,\ BEA = BEC = 90°$ (đn)

$\Rightarrow ADB = BEA\,(=90°)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn (hai góc bằng nhau cùng nhìn một cạnh) (đpcm).

Vì ΔABC có hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H (gt) $\Rightarrow H$ là trực tâm (đn)

$\Rightarrow CF$ là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow CF \perp AB$ (đn) $\Rightarrow BFC = AFC = 90°$

$\Rightarrow BFC = BEC\,(=90°)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (hai góc bằng nhau cùng nhìn một cạnh) (đpcm).

b) Vì tia AO cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq A$) $\Rightarrow AK$ là đường kính của đường tròn (O).

$\Rightarrow ABK = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AB \perp BK$ (đn)

Mà $CF \perp AB$ (cmt)

$\Rightarrow BK // CF \Rightarrow BK // CH$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow BH // CK$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHCK$ là hình bình hành (đpcm).

Vì $AFC = 90°, AEB = 90°$ (cmt) $\Rightarrow AFC + AEB = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn (dhnb)

$\Rightarrow FAH = FEH$ (hai góc nội tiếp cùng chắn FH)

Vì tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn (cmt)

$\Rightarrow FAH = BED$ (hai góc nội tiếp cùng chắn BD)

$\Rightarrow FEH = BED\left(= FAH\right)$ hay EH là tia phân giác của FED (đn).

CMTT: DH là tia phân giác của FDE.

$\Rightarrow H$ là giao của ba đường phân giác của ΔDEF.

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF (đpcm).

c) Vì tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (cmt)

$\Rightarrow FEB = FCB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn BF)

Xét đường tròn $\left(O\right)$: $QPB = FCB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn BQ)

$\Rightarrow FEB = QPB$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị.

$\Rightarrow EF \,//\, PQ$ (dhnb) (đpcm).

Xét đường tròn $\left(O\right)$: $APQ = ACQ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AQ)

$AQP = ABP$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AP)

Vì tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (cmt)

$\Rightarrow ABP = ACQ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn EF)

$\Rightarrow APQ = AQP$

$\Rightarrow \Delta APQ$ cân tại A (dhnb)(đpcm).

d) Ta có: $\dfrac{HD}{AD} = \dfrac{S_{BHC}}{S_{ABC}}; \dfrac{HE}{BE} = \dfrac{S_{AHC}}{S_{ABC}}; \dfrac{HF}{CF} = \dfrac{S_{ABH}}{S_{ABC}}$.

$\Rightarrow \dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF} = \dfrac{S_{BCH} + S_{ACH} + S_{ABH}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$ (đpcm).

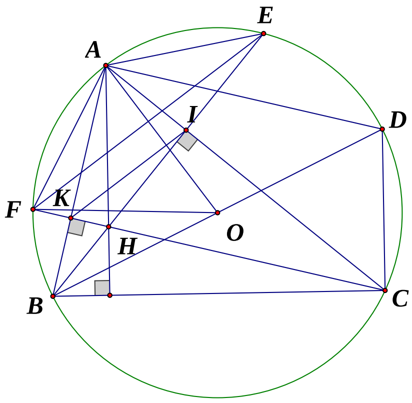
Câu 80.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BI, CK cắt nhau tại H và cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần lượt tại E, F. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh:

a) Tứ giác $BCIK$ nội tiếp và ΔAEF cân.

b) A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và $KI = \dfrac{1}{2}EF$

c) Kẻ đường kính BD. Chứng minh tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Và cho $CBD = 30^0, R = 6\,cm$. Tính diện tích hình quạt AOF. Chứng minh $EF \le 2AH$

Hướng dẫn



a) Do BI, CK là hai đường cao của tam giác ABC nên $BIC = BKC = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $BCIK$ nội tiếp.

Do tứ giác $BICK$ nội tiếp nên $KBI = KCI \Rightarrow ABE = ACF \Rightarrow AE = AF \Rightarrow AE = AF \Rightarrow \Delta AEF$ cân tại A

b) Tam giác ABC có hai đường cao BI, CK cắt nhau tại H nên H là trực tâm, suy ra $AH \perp BC$.

Xét (O) có $FAB = FCB$ mà $FCB = BAH$ (cùng phụ ABC), suy ra $FAK = HAK \Rightarrow \Delta AFH$ cân tại $A \Rightarrow AF = AH$, mà $AF = AE \Rightarrow AF = AE = AH \Rightarrow$ A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH.

Tam giác AFH cân tại A có AK là đường cao nên K là trung điểm của FH. Tương tự I là trung điểm của HE. Khi đó IK là đường trung bình của tam giác HEF nên $KI = \frac{1}{2}EF$.

c) Xét (O) có $BAD = BCD = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Có $AH \perp BC, DC \perp BC \Rightarrow AH // DC$ và $CH \perp AB, DA \perp AB \Rightarrow CH // DA$. Từ đó suy ra $ADCH$ là hình bình hành.

Xét (O) có $CAD = CBD = 30^0$. Do $CH // DA \Rightarrow HCA = CAD = 30^0 \Rightarrow AOF = 60^0$

Do đó $S_{quat\,AOF} = \dfrac{\pi.6^2.60^0}{360^0} = 6\pi\left(cm^2\right)$.

Có $AKH = AIH = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $AKHI$ nội tiếp đường tròn đường kính $AH \Rightarrow KI \le AH \Rightarrow \frac{1}{2}EF \le AH \Rightarrow EF \le 2AH\,(dpcm)$.

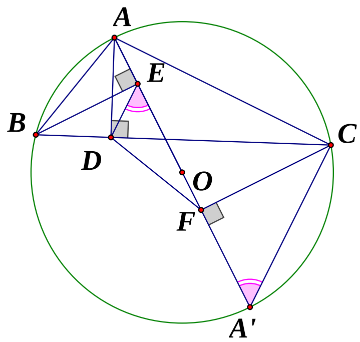
Câu 81.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O), dây cung BC (BC không là đường kính). Điểm A di chuyển trên cung nhỏ BC (A khác B và C, độ dài AB khác độ dài AC). Kẻ đường kính AA’ của đường tròn (O), D là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC. Hai điểm E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ B, C đến AA’.

a) Chứng minh 4 điểm A, F, D, C cùng thuộc một đường tròn và $\Delta FCA \sim \Delta DAB$

b) Chứng minh DE//CA’ và DE $\perp$ AC.

c) Cho $ACB = 30^0$. Tính $S_{quatBOA}$. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Hướng dẫn



a) Chứng minh 4 điểm A, F, D, C cùng thuộc một đường tròn và $\Delta FCA \sim \Delta DAB$

* AD $\perp$ BC $\Rightarrow$ $ADC = 90^0$

* CF$\perp$ AA’ $\Rightarrow$ $AFC = 90^0$

* Xét tứ giác ADFC, có:

$ADC = AFC = 90^0$. Mà góc $ADC; AFC$ ở hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AC.

$\Rightarrow$ Tứ giác ADFC là tứ giác nội tiếp.

* Chứng minh $ACF = CA'F$

* Ta có: $ABD = CA'F$ (Cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow ABD = CAF$

* Xét ΔFCA và ΔDAB, có

$ADB = CFA$

$ABD = CAF$

$\Rightarrow \Delta FCA \backsim \Delta DAB$

b) Chứng minh DE//CA’ và DE $\perp$ AC.

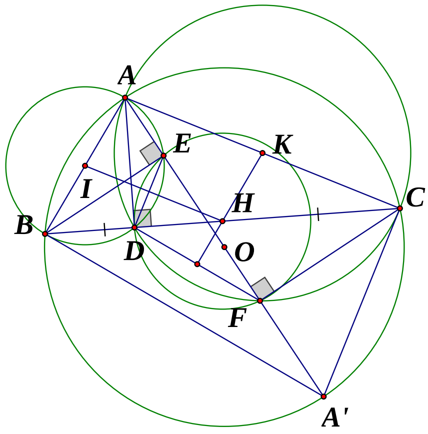
Tứ giác AEDB là tứ giác nội tiếp. $\Rightarrow$ $DEA' = ABD$

Mà: $ABD = CA'F$ $\Rightarrow DEA' = AA'C \Rightarrow$ DE//CA’ (So le trong)

* Ta có: CA' $\perp$ CA. $\Rightarrow$DE $\perp$ AC

c) Cho $ACB = 30^0$. Tính $S_{quatBOA}$. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

* Vì $ACB = 30^0 \Rightarrow AOB = 60^0 \Rightarrow S_{quatAOB} = \dfrac{\pi.R^2.60}{360} = \dfrac{\pi.R^2}{6}$



CMR Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

* Gọi I là trung điểm AB, K là trung điểm AC, H là trung điểm của BC.

* Ta có : Tứ giác AEDB là tứ giác nội tiếp nhận I là tâm $\Rightarrow$IE = ID

Tứ giác ADFC là tứ giác nội tiếp nhận K là tâm $\Rightarrow$KD = KF

* Xét tam giác ABC, có:

IH; HK là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow$HI // AC; HK // AB.

* Mà DE $\perp$ AC $\Rightarrow$DE $\perp$HI

Mặt khác: IE = ID (cmt) $\Rightarrow$ IH là trung trực DE (1)

* Tương tự: HK // AB

Mà : DF $\perp$AB $\Rightarrow$DF $\perp$ HK

Mặt khác: KD = KF (cmt) $\Rightarrow$HK là đường trung trực của DF (2)

* Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ H là giao điểm của hai đường trung trực 2 cạnh tam giác DEF $\Rightarrow$H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF

Mà: H là trung điểm BC cố định nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

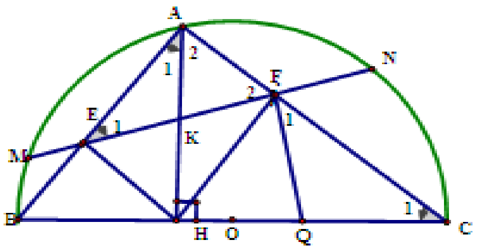
Câu 82.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC, Điểm A thuộc nửa $(O;R)$. kẻ $AH \perp BC$ tại H, $HE \perp AB$ tại E, $HF \perp AC$ tại F. Đường thẳng EF cắt $(O;R)$ tại $M;N$

a) Chứng minh rằng: Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật và tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $AE.AB = AF.AC$ và ΔAMN cân.

c) Gọi Q là trung điểm của HC. Chứng minh rằng $FE \perp FQ$.

Hướng dẫn



a) $EAF = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $AEHF$ có $EAF = AEH = AFH = 90^0$

Vậy tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật .

+) Gọi K là giao điểm của AH và EF

Suy ra $KA = KH = KE = KF$

$\Rightarrow \Delta AKE$ .cân tại $K \Rightarrow A_1 = E_1$

Mà $A_1 = C_1$ (cùng phụ với A_2)$\Rightarrow C_1 = E_1$

$\Rightarrow$Tứ giác $BEFC$ nội tiếp (Tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối của đỉnh đó)

b) ΔAHB vuông tại H có $HE \perp AB \Rightarrow AH^2 = AE.AB$

ΔAHC vuông tại H có $HF \perp AC \Rightarrow AH^2 = AF.AC$ $\Rightarrow AE.AB = AF.AC$

+) $E_1 = \dfrac{sd AN + sd BM}{2}$

$C_1 = \dfrac{sd AB}{2} = \dfrac{sd AM + sd BM}{2}$ mà $C_1 = E_1$

Nên $AM = AN \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A

c) ΔKAF cân tại K(Vì $KA = KF \Rightarrow A_2 = F_2$

Có FQ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông HFB

$\Rightarrow QF = QC = QH = \dfrac{HC}{2}$

$\Rightarrow \Delta QFC$ cân tại $Q \Rightarrow C_1 = F_1$

Lại có $A_2 = F_2$ mà $A_2 + C_1 = 90^0$

$\Rightarrow F_1 + F_2 = 90^0 \Rightarrow QFE = 90^0 \Rightarrow FE \perp FQ$

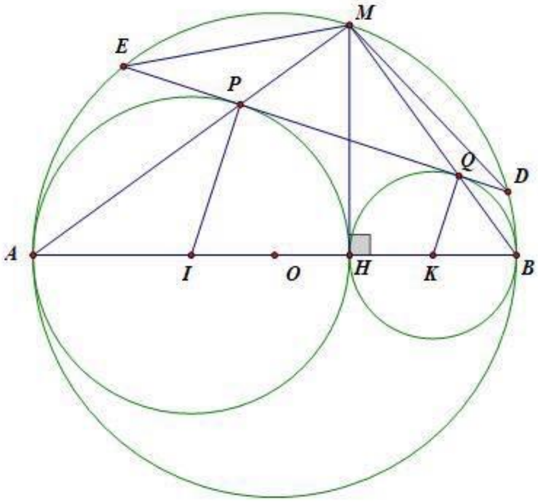
Câu 83.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔAMB vuông tại M . Hạ $MH \perp AB$, vẽ về phía M nửa đường tròn tâm (I) đường kính AH cắt MA tại P , và nửa đường tròn tâm (K) đường kính BH cắt MB tại Q .

a) chứng minh $MH = PQ$ và $MP.MA = MQ.MB$.

b) Chứng minh tứ giác $APQB$ nội tiếp và PQ là tiếp tuyến của (K).

c) vẽ (O) đường kính AB cắt PQ tại E và D . chứng minh ΔMED cân và xác định vị trí của M để chu vi, diện tích tứ giác $IPQK$ lớn nhất.

Hướng dẫn



a) xét đường tròn tâm (I) có : $APH = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

xét đường tròn tâm (K) có $HQB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

xét tứ giác $MPHQ$ có $PMQ = MPH = MQH = 90°$

$\Rightarrow$ tứ giác $MPHQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow PQ = MH$

Xét ΔAHM vuông tại H đường cao PH :

$AH^2 = MP.MA$ (hệ thức lượng)

Xét ΔBHM vuông tại H đường cao QH :

$AH^2 = MQ.MB$ (hệ thức lượng)

$\Rightarrow MP.MA = MQ.MB$.

b) Gọi $MH \cap PQ = \{F\}$ $\Rightarrow FP = FM = FQ = FH$ (tính chất hình chữ nhật)

$\Rightarrow \Delta FMP$ cân ở F $\Rightarrow FPM = FMP$

Ta có $PMF = MBH$ (cùng phụ MAH)

$\Rightarrow MPQ = MBA \Rightarrow MBA + APQ = 180°$

Xét tứ giác $APQB$ có :

$APQ + QBA = 180°$

Mà APQ, QBA là 2 góc ở vị trí đối nhau $\Rightarrow$ tứ giác $APQB$ nội tiếp .

Ta có $FH = FQ$ $\Rightarrow \Delta FHQ$ cân ở F $\Rightarrow FHQ = FQH$ (1)

Xét ΔHQB vuông ở Q , K là trung điểm HB $\Rightarrow KQ = KH = KB$

$\Rightarrow \Delta KHQ$ cân ở K $\Rightarrow KHQ = KQH$ (2)

Ta có $MHQ + KHQ = 90°$ (3)

Từ (1), (2) ,(3) $\Rightarrow PQH + KQH = 90°$ $\Rightarrow PQ \perp QK$

Xét đường tròn tâm (K) có KQ là bán kính :

$PQ \perp QK \Rightarrow$ PQ là tiếp tuyến của đường tròn (K).

c) ta có $OA = OM \Rightarrow \Delta OAM$ cân ở O $\Rightarrow OAM = OMA$

ta có $OAM + ABM = 90°$ $\Rightarrow QPM + AMO = 90° \Rightarrow OM \perp PQ$

ta có $OE = OD \Rightarrow \Delta OED$ cân ở O , $OM \perp PQ$

$\Rightarrow OM$ là trung trực ED

$\Rightarrow \Delta MED$ cân ở M

Ta có $\begin{cases} IP \perp PQ \\ QK \perp PQ \end{cases} \Rightarrow IP // QK$ $\Rightarrow$ tứ giác $IPQK$ là hình thang vuông.

Chu vi $IPQK = IP + IK + KQ + PQ = 2(IH + HK) + PQ = AB + PQ$

Ta có $PQ \le IK \Leftrightarrow PQ \le \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow PQ + AB \le \frac{3}{2}AB$

$\Rightarrow$ chu vi $IPQK \le \frac{3}{2}AB$

Vậy chu vi $IPQK$ lớn nhất $= \frac{3}{2}AB$ khi M là điểm chính giữa AB

$S_{IPQK} = \frac{1}{2}(IP + QK)PQ = \frac{1}{4}AB.PQ \le \frac{1}{8}AB^2$

Vậy giá trị lớn nhất $S_{IPQK} = \frac{1}{8}AB^2$ khi M là điểm chính giữa AB.

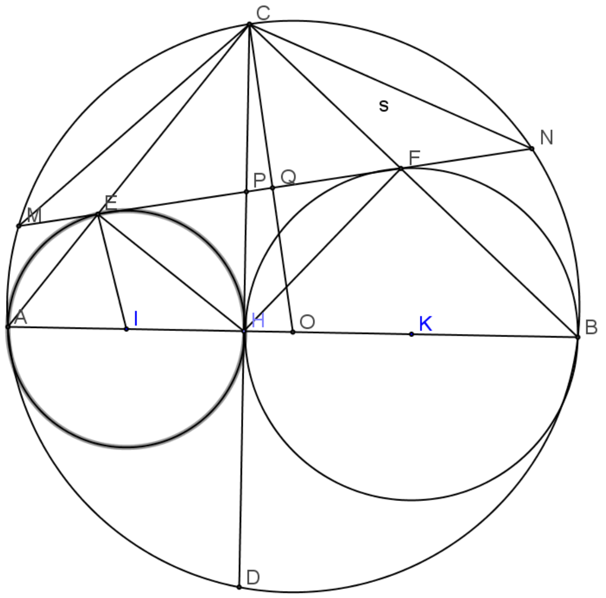
Câu 84.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ đường kính AB. Điểm $H \in OA$, kẻ dây $CD \perp AB$ tại H. Vẽ (I) đường kính AH và (K) đường kính BH. AC cắt (I) tại E, BC cắt (K) tại F. EF cắt (O) tại M và N.

a) Chứng minh:Tứ giác $HECF$ là hình chữ nhật và $CE.CA = CF.CB$

b) Chứng minh:Tứ giác $ABFE$ nội tiếp và EF là tiếp tuyến của (I)

c) Chứng minh: ΔCMN cân và tìm vị trí của H để diện tích tứ giác $CEHF$ lớn nhất.

Hướng dẫn



a)Ta có: $ACB = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$AEH = 90^o$; $HFB = 90^o$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow CEH = 90^o; HFC = 90^o$ mà $ECF = 90^o$

$\Rightarrow$Tứ giác $HECF$ là hình chữ nhật

ΔAHC vuông tại H có đường cao HE nên ta có $CH^2 = CE.CA$

ΔBHC vuông tại H có đường cao HF nên ta có $CH^2 = CF.CB$

$\Rightarrow CE.CA = CF.CB$

b)Do $CE.CA = CF.CB \Rightarrow \dfrac{CE}{CB} = \dfrac{CF}{CA}$ mà ACB chung $\Rightarrow \Delta CEF \backsim \Delta CBA$ (g.c.g)

$\Rightarrow CEF = CBA$

$\Rightarrow$Tứ giác $ABFE$ nội tiếp (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện)

Gọi P là giao điểm của HC và EF. Ta có $\Delta IEP = \Delta IHP$ (c.c.c)

$\Rightarrow IEP = IHP = 90^o \Rightarrow IE \perp EF$. Mà $E \in (I)$

$\Rightarrow$ EF là tiếp tuyến của (I)

c)Ta có: ΔOCB cân tại O nên $OCB = OBC$; ΔHPF cân tại P nên $PHE = PFH$

Mà $PHE = CBO$ ($= \dfrac{1}{2}$ sđ HF)

$\Rightarrow HPF = BOC \Rightarrow CPF = HOC$

Mà $HOC + HCO = 90^o$

$\Rightarrow CPF + HCO = 90^o \Rightarrow CQP = 90^o \Rightarrow OC \perp MN$

$\Rightarrow C$ là điểm chính giữa MN

$\Rightarrow CM = CN \Rightarrow \Delta CMN$ cân tại C

Hình chữ nhật *CEHF* có diện tích lớn nhất khi *CEHF* là hình vuông $\Leftrightarrow \Delta HEF$ vuông cân tại $H \Leftrightarrow HI = HK \Leftrightarrow H \equiv O$

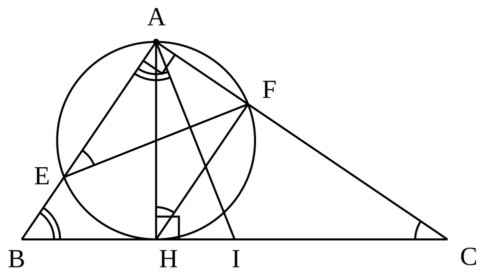
Câu 85.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn đường kính AH cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F. Đường thẳng qua A vuông góc với EF cắt BC tại I.

a) Chứng minh: $AEHF$ là hình chữ nhật và $AE \,.\, AB = AF \,.\, AC$

b) Chứng minh: Tứ giác $BEFC$ nội tiếp và $IB = IC$

c) Cho $ABH = 60^0$, $R = 3$cm, tính S_{quat} HOE và nếu diện tích ΔABC gấp đôi diện tích hình chữ nhật $AEHF$ thì ΔABC vuông cân.

Hướng dẫn



a) Xét (O) có

$$\left.\begin{array}{l} AEH = 90^0 \\ AFH = 90^0 \end{array}\right.$$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

mà $EAF = 90^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật

$+ AEF = AHF$ (góc nội tiếp chắn cung AF)

$+ AHF = ACH$ (cùng phụ AHF)

$\Rightarrow AEF = ACH \Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ACB$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AF}{AB} \Rightarrow AE \,.\, AB = AF \,.\, AC$

b) + Có $AEF = BCF \Rightarrow$ Tứ giác $BEFC$ nội tiếp (dhnb)

+Có $\begin{cases} EAI + AEF = 90^0 \\ AEF = ACB \\ ACB + ABC = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow ABC = BAI \Rightarrow \Delta ABI$ cân tại $I \Rightarrow AI = BI$ (1)

$+$ $ICA = IAC$ (cùng phụ $IAB = ABI$)

$\Rightarrow \Delta IAC$ cân $\Rightarrow IA = IC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IB = IC$

c) $ABC = 60^0 \Rightarrow BAO = 30^0 \Rightarrow EOH = 60^0$

$$S_{quat}HOE = \frac{\pi R^2.n}{360} = \frac{\pi . 3^2 . 60}{360} = \frac{3\pi}{2}\ (cm^2)$$

$S_{ABC} = 2.S_{AEHF} \Rightarrow S_{ABC} = 4.S_{AEF}$ mà $\Delta AEF \backsim \Delta ACB$

$$\Rightarrow \frac{S_{ACB}}{S_{AEF}} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{BC}{EF} = 2$$

mà $EF = AH$, $BC = 2 . AI \Rightarrow \frac{2.AI}{AH} = 2 \Rightarrow \frac{AI}{AH} = 1 \Rightarrow AI = AH$

$AH \le AI \Rightarrow H \equiv I \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

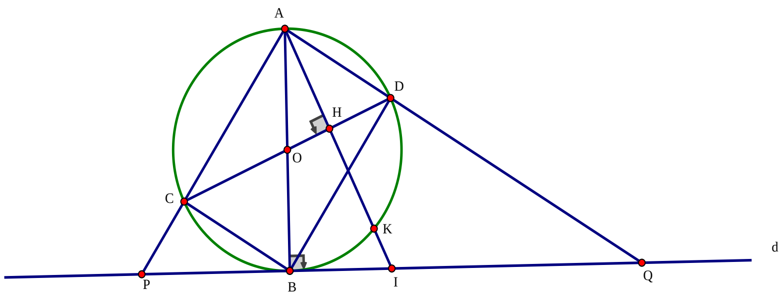
Câu 86.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ đường kính AB cố định, CD là đường kính di động. Gọi d là tiếp tuyến của $(O;R)$ tại B; đường thẳng $AC; AD$ cắt d lần lượt tại $P;Q$; AI là trung tuyến của $\triangle APQ$

a) Chứng minh: $ACBD$ là hình chữ nhật và tứ giác $CPQD$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $AD.AQ = AC.AP$ và $AI \perp CD$.

c) Cho $AQP = 30^0; R = 6\ cm$. Tính diện tích hình quạt AOD. Xác định vị trí của CD để diện tích tứ giác $CPQD$ bằng ba lần diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn



a)Ta có

$+ \triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $\triangle ABC$ vuông tại C suy ra $ACB = 90^0$

$+ \triangle ACD$ nội tiếp đường tròn đường kính CD nên $\triangle ACD$ vuông tại A suy ra $CAD = 90^0$

$+ \triangle ABD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $\triangle ABD$ vuông tại D suy ra $ADB = 90^0$

Xét tứ giác $ABCD$ có $ACB = CAD = ADB = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật

Vì tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $ACO = CAO \Rightarrow ACD = PAB$

Mà $PAB = AQP$ (cùng phụ với APQ) $\Rightarrow ACD = AQP \Rightarrow ACD = DQP \Rightarrow$ tứ giác $CPQD$ nội tiếp.

b)Áp dụng hệ thức cạnh và đường cao vào:

$+ \Delta ABQ$ vuông tại B, BD là đường cao có: $AB^2 = AD.AQ$

$+\Delta ABP$ vuông tại B, AC là đường cao có: $AB^2 = AC.AP$

Suy ra: $AD.AQ = AC.AP$

Xét ΔAIQ cân tại I nên $IAQ = IQA$ mà theo tính chất góc ngoài của tam giác thì

$AIB = IAQ + IQA \Rightarrow AIB = 2.IQA$

Xét ΔAOC cân tại O nên $OAC = OCA$ mà theo tính chất góc ngoài của tam giác thì

$AOD = OAC + OCA \Rightarrow AOD = 2.ACO$

Mà: $IQA = ACO$ nên $AIB = AOD$

Ta lại có:

$AIB + BAI = 90^0 \Rightarrow AOD + BAI = 90^0 \Rightarrow AOH + OAH = 90^0$

$\Rightarrow AHO = 90^0 \Rightarrow AI \perp OD$

c)Ta có $AOD = 2.AQP = 2.30^0 = 60^0$

Diện tích hình quạt tròn AOD là $S = \dfrac{\pi.6^2.60^0}{360^0} = 6\pi$

Ta có $S_{CPQD} = 3.S_{ABC} \Rightarrow S_{CPQD} = 3.S_{ACD} \Rightarrow S_{APQ} = 4.S_{ACD}$

Lại có $\triangle APQ \sim \triangle ADC\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{S_{ADC}}{S_{APQ}} = \left(\dfrac{DC}{PQ}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{DC}{PQ} = \dfrac{1}{2}$

Mà $\dfrac{S_{ACD}}{S_{APQ}} = \dfrac{\frac{1}{2}.AH.CD}{\frac{1}{2}.AB.PQ} = \dfrac{AH}{AB}.\dfrac{CD}{PQ} \Rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{AH}{AB}.\dfrac{1}{2} \Rightarrow AB = 2.AH \Rightarrow H \equiv O$

Mặt khác $CD \perp AH \Rightarrow CD \perp AO \Rightarrow CD \perp AB$

Vậy $CD \perp AB$ thì diện tích tứ giác $CPQD$ bằng ba lần diện tích tam giác ABC.

Câu 87.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông tại A $(AB > AC)$, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

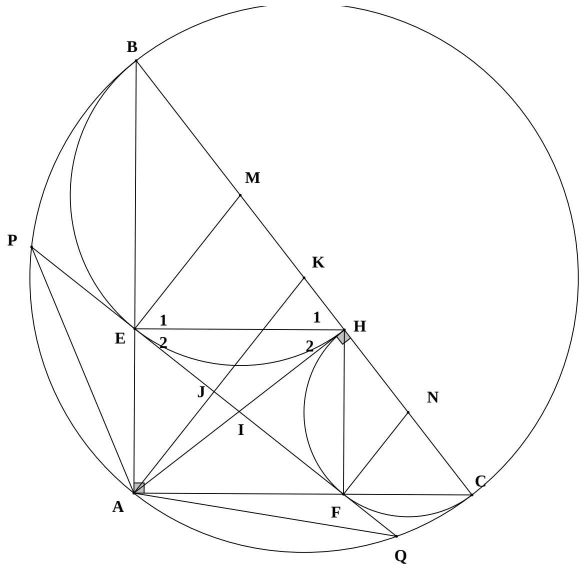
a) Chứng minh : $AH = EF$ và tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

b) Chứng minh : $AE.AB = AF.AC$ và EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

c) Vẽ (K) đường kính BC ngoại tiếp ΔABC, EF cắt (K) tại P,Q. Chứng minh ΔAPQ cân.

d) Chứng minh khi ΔABC thay đổi thỏa mãn là tam giác vuông và BC không đổi thì ΔABC thỏa mãn điều kiện gì để S_{BCEF} lớn nhất.

Hướng dẫn



a)+) Vì E thuộc nửa đường tròn đường kính BH

$\Rightarrow BEH = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow HEA = 90^\circ$ (góc kề bù).

+) Vì F thuộc nửa đường tròn đường kính HC

$\Rightarrow CFH = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow HFA = 90^\circ$ (góc kề bù).

Xét tứ giác $AEHF$ có : $EAF = HEA = HFA = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết) $\Rightarrow AH = EF$.

Gọi I là giao điểm của AH và EF .

Vì tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật nên : $IA = IE = IH = IF$

$\Rightarrow \Delta IAF$ là tam giác cân tại $I \Rightarrow IAF = IFA$

Mà $IAF + HAB = 90^\circ \Rightarrow IFA + HAB = 90^\circ$.

Lại có : $HAB + HBA = 90^\circ \Rightarrow IFA = HBA$

Mà $IFA + EFC = 180^\circ$ (hai góc kề bù)$\Rightarrow HBA + EFC = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau $\Rightarrow$ tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

b)Xét ΔAEF và ΔACB có :

A chung

$AFE = ABC$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AEF \ \# \ \Delta ACB\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AF}{AB} \Rightarrow AE.AB = AF.AC$

Gọi M, N lần lượt là tâm của hai nửa đường tròn đường kính BH và nửa đường tròn đường kính HC

.

Do $IE = IH$ (cmt) $\Rightarrow \Delta IEH$ cân tại $I \Rightarrow E_2 = H_2$

$ME = MH (= \dfrac{BH}{2}) \Rightarrow \Delta MEH$ cân tại $M \Rightarrow E_1 = H_1$

Mà $H_1 + H_2 = 90^\circ \Rightarrow E_1 + E_2 = 90^\circ \Rightarrow MEI = 90^\circ \Rightarrow ME \perp EF$

$\Rightarrow EF$ là tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm M đường kính BH .

Chứng minh tương tự ta có EF là tiếp tuyến của nửa đường tròn đường kính HC.

c)Gọi J là giao điểm của AK và PQ

Vì ΔAIF cân (cmt) $\Rightarrow AIF = 180^\circ - 2IFA$

Do K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên $KA = KB$

$\Rightarrow \Delta KAB$ cân tại K $\Rightarrow AKB = 180^\circ - 2ABC$

Mà $IFA = ABC$ (cmt) $\Rightarrow AIF = AKB \Rightarrow AIJ = AKH$.

Xét ΔAIJ và ΔAKH có :

A chung

$AIJ = AKH \Rightarrow \Delta AIJ \# \Delta AKH$ (g.g)

$\Rightarrow AJI = AHK = 90^\circ \Rightarrow AK \perp PQ$

Xét ΔKPQ có $KP = KQ \Rightarrow \Delta KPQ$ cân tại K

Lại có AK là đường cao (do $AK \perp PQ$)

$\Rightarrow AK$ đồng thời cũng là trung trực của PQ

$\Rightarrow AP = AQ \Rightarrow \Delta APQ$ cân tại A .

c)Ta có : $S_{BCEF} = S_{ABC} - S_{AEF}$

$$= S_{ABC} - \frac{AE^2}{AC^2}.S_{ABC} = S_{ABC} - \frac{AH^2}{BC^2}.S_{ABC} \text{ (do } \Delta EAH \# \Delta ACB \text{)}$$

$$= \frac{1}{2}.2R.AH - \frac{AH^2}{4R^2}.\frac{1}{2}.2R.AH = Rx - \frac{x^3}{4R}(x = AH \le R)$$

$$= Rx + \frac{R^2}{2} - \left(\frac{x^3}{4R} + \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4}\right) \le Rx + \frac{R^2}{2} - \frac{3xR}{4} = \frac{Rx}{4} + \frac{R^2}{2} \le \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{2} = \frac{3R^2}{4}$$

$$S_{\max} = \frac{3R^2}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $AH = R \Leftrightarrow H \equiv K \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A .

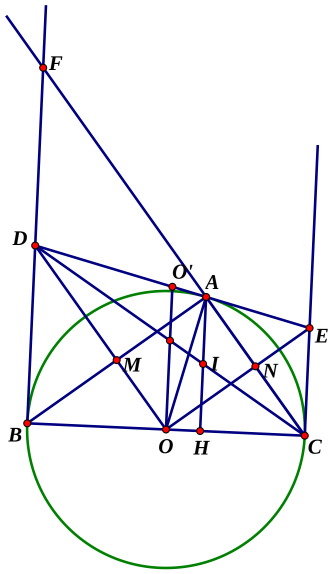
Bài 88. Cho tam giác ABC vuông tại A đường kính BC nội tiếp đường tròn (O), d là tiếp tuyến của (O) tại A . Các tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt d tại D, E .

a) Chứng minh tứ giác $AECO$ nội tiếp và $BD.EC = R^2$.

b) Kẻ đường cao AH , gọi AB cắt DO tại M , AC cắt EO tại N . Cm: $AHM = DOB$ và $MHN = 90^o$.

c) Tìm BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE và I là trung điểm của AH, (AH cắt DC tại I).

Hướng dẫn



a) Xét tứ giác $AECO$: $EAO = ECO = 90^o$ $\Rightarrow EAO + ECO = 180^o$ => tứ giác $AECO$ nội tiếp.

Dễ dàng chứng minh được ΔDOE vuông tại O , $OA \perp DE$ $\Rightarrow OA^2 = DA.EA$

Ta có: $BD = AD$, $CE = AE$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow BD.CE = DA.EA = AO^2 = R^2$.

b) Có $AB \perp DO$ tại M $\Rightarrow AMO = 90^o$ mà $\Rightarrow AHO = 90^o$

$\Rightarrow AMHO$ nội tiếp $\Rightarrow MHA = MOA$ mà $MOA = BOD$ $\Rightarrow MHA = BOD$.

* Ta có: $AMON$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MOA = MNA$ mà $MHA = MOA$ $\Rightarrow MHA = MNA$

$\Rightarrow MHNA$ nội tiếp, mà $MAN = 90^o \Rightarrow MHN = 180^o - 90^o = 90^o$ ..

c) Gọi O' là trung điểm của DE .

Ta có ΔDOE vuông tại O

Có OO' là đường trung tuyến$\Rightarrow O'O = O'D = O'E$ => OO' là bán kính

OO'là đường trung bình của hình thang $BDEC$ $\Rightarrow OO' // BD$ mà $BD \perp BC \Rightarrow OO' \perp BC$ $\Rightarrow BC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O').

* Gọi F là giao điểm của BD và AC .

Ta có $DA = DB \Rightarrow \Delta DAB$ cân tại D $\Rightarrow DAB = DBA$

Mà $\left.\begin{matrix} DAB + DAF = 90^o \\ DBA + DFA = 90^o \end{matrix}\right\} \Rightarrow DAF = DFA$

$\Rightarrow \Delta FAD$ cân tại D $\Rightarrow DF = DA$ mà $DA = DB \Rightarrow DF = DB$

Mặt khác, $AH \cap DC = \{I\}; AH // BF$

$\Rightarrow \dfrac{AI}{DF} = \dfrac{CI}{CD}; \dfrac{CI}{CD} = \dfrac{IH}{DB}$ mà $DF = DB \Rightarrow AI = AH$ hay I là trung điểm của AH .

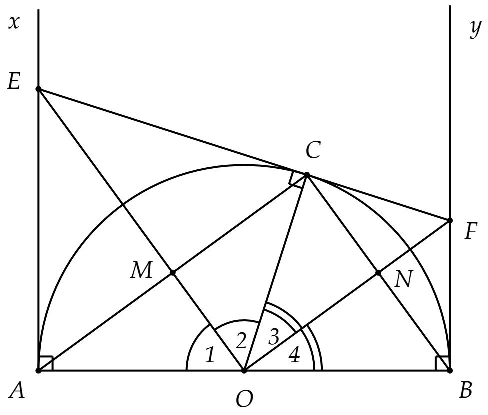
Bài 89. Cho nửa (O) đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax, By. Từ C là một điểm bất kỳ trên nửa đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt Ax, By tại E, F. Gọi M là giao điểm OE với AC, N là giao điểm OF với BC.

a) Chứng minh tứ giác $AECO$ nội tiếp và tích $AE.BF$ không đổi.

b) Chứng minh $AC \perp EO$ và tứ giác $MCNO$ là hình chữ nhật.

c) Gọi D là giao điểm AF và BE. Chứng minh $CD \perp AB$ và khi C di chuyển trên (O) thì trung điểm I của MN di chuyển trên đường nào?

Hướng dẫn



a) Chứng minh tứ giác $AECO$ nội tiếp và tích $AE.BF$ không đổi.

+) Ta có: $OAE = 90^o$ (Ax là tiếp tuyến của (O))

$OCE = 90^o$ (CE là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow OAE + OCE = 180^o$ mà A và C là hai đỉnh đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AECO$ nội tiếp

+) Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

Ta có: $O_1 = O_2$; $O_3 = O_4$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

mà $O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 180^o$

$\Rightarrow 2O_2 + 2O_3 = 180^o \Leftrightarrow 2\left(O_2 + O_3\right) = 180^o \Rightarrow EOF = 90^o$

Xét ΔEOF vuông tại O $\left(EOF = 90^o\right)$ có $OC \perp EF$ (EF là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow CE.CF = OC^2$ (hệ thức giữa cạnh và đường cao

mà $AE = CE$; $BF = CF$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow AE.BF = OC^2 = R^2$ (không đổi)

b) Chứng minh $AC \perp EO$ và tứ giác $MCNO$ là hình chữ nhật.

+) Ta có: $AE = CE$ (chứng minh trên); $OA = OC\ (= R)$

$\Rightarrow OE$ là đường trung trực của AC $\Rightarrow AC \perp EO$

Chứng minh tương tự, $BC \perp OF$

+) Xét tứ giác $MCNO$ có:

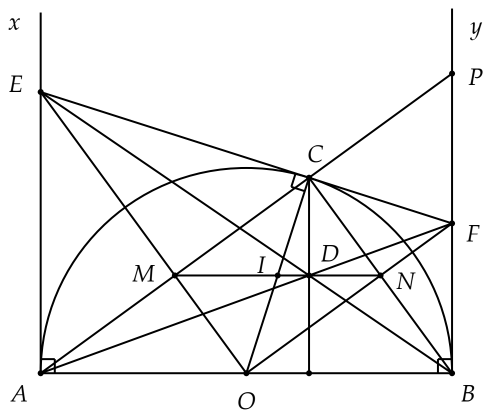
$MOF = 90^o\ \left(EOF = 90^o\right)$

$OMC = 90^o\ (AC \perp OE)$

$ONC = 90^o\ (BC \perp OF)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MCNO$ là hình chữ nhật.

c) Gọi D là giao điểm AF và BE. Chứng minh $CD \perp AB$ và khi C di chuyển trên (O) thì trung điểm I của MN di chuyển trên đường nào?



+) Ta có: $AE // BF\ (Ax // By)$ $\Rightarrow \dfrac{AD}{DF} = \dfrac{AE}{BF}$ (hệ quả định lí Ta-lét)

mà $AE = CE$; $BF = CF$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{DF} = \dfrac{CE}{CF} \Rightarrow CD // AE$ (định lí Ta-lét đảo)

mà $AE \perp AB$ (Ax là tiếp tuyến của (O)) $\Rightarrow CD \perp AB$

+) Ta có tứ giác $MCNO$ là hình chữ nhật (chứng minh câu b)

mà I là trung điểm của MN (gt)

$\Rightarrow I$ là trung điểm OC (tính chất hai đường chéo hình chữ nhật)

$\Rightarrow OI = \dfrac{1}{2}OC = \dfrac{1}{2}R$

$\Rightarrow I$ thuộc nửa đường tròn tâm O bán kính $\dfrac{1}{2}R$ khi C di chuyển trên nửa (O)

Bài 90. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax, By. Từ C là một điểm bất kì trên nửa đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt Ax, By tại E, F.

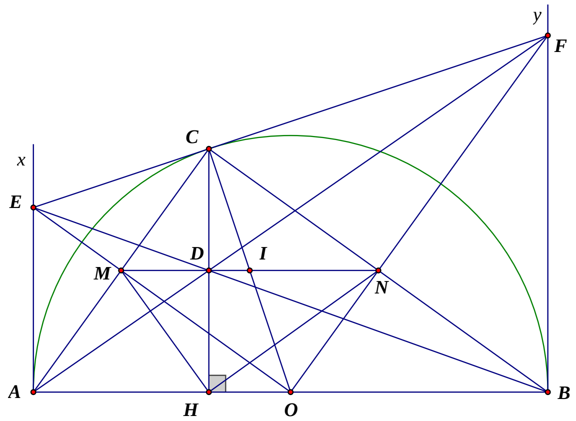
a) Chứng minh tứ giác $AECO$ nội tiếp và tích $AE \cdot BF = R^2$.

b) Gọi M là giao điểm OE với AC, N là giao điểm OF với BC, kẻ $CH \perp AB$ tại H. Chứng minh ΔAMH cân và $HM \perp HN$.

c) Gọi D là giao điểm của AF và CH. Chứng minh ba điểm E, D, B thẳng hàng.

d) Khi C di chuyển trên (O) thì trung điểm I của MN di chuyển trên đường nào?

Hướng dẫn



a) AE là tiếp tuyến của (O) nên $AE \perp OA \Leftrightarrow OAE = 90°$.

EC là tiếp tuyến của (O) nên $OCE = 90°$.

Tứ giác $OAEC$ có $OAE + OCE = 90° + 90° = 180°$ suy ra $OAEC$ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta có $OBFC$ nội tiếp.

$\Rightarrow CFB = AOC$ (tính chất của tứ giác nội tiếp). (1)

Lại có EA, EC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại E của (O), $\Rightarrow OE$ là tia phân giác của AOC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow EOA = \frac{1}{2} AOC$. (2)

FC, FB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại F của (O) nên FO là tia phân giác của CFB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow OFB = \frac{1}{2} CFB$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$EOA = OFB.$

Xét ΔOAE và ΔFBO có

$EOA = OFB$ (chứng minh trên)

$OAE = FBO = 90°$.

$\Rightarrow \Delta OAE \backsim \Delta FBO$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OA}{FB} = \dfrac{AE}{BO}$ (hai cặp cạnh tương ứng) $\Leftrightarrow OA \cdot OB = BF \cdot AE \Leftrightarrow BF \cdot AE = R^2$.

b) EA, EC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại E của (O) $\Rightarrow EA = EC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) suy ra E thuộc trung trực của AC.

Mặt khác $OA = OC = R$ nên O thuộc trung trực của AC.

Mà O khác E nên OE là trung trực của AC, suy ra OE đi qua trung điểm của AC và $OE \perp AC$.

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AC.

ΔAHC vuông tại H có M là trung điểm của AC, suy ra $HM = HA = HC = \dfrac{1}{2}AC$.

$\Rightarrow \Delta MHA$ cân tại H.

Chứng minh tương tự ta có N là trung điểm của BC và $NB = NC = NH = \dfrac{1}{2}BC$.

Xét ΔMCN và ΔMHN có

$MC = MH = \dfrac{1}{2}AC$ (chứng minh trên)

MN chung

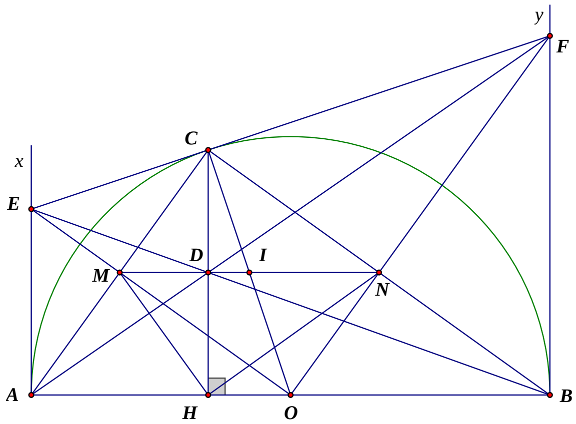
$NC = NH = \dfrac{1}{2}BC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MCN = \Delta MHN$ (c.c.c).

$\Rightarrow MCN = MHN$ (hai góc tương ứng).

Mà $C \in (O)$ đường kính AB nên $ACB = 90^\circ$ hay $MCN = 90^\circ$.

$\Rightarrow MHN = 90^\circ \Leftrightarrow MH \perp HN$ (điều phải chứng minh).



c) Áp dụng hệ quả của định lý Ta let cho ΔAFB với $DH \parallel BF$ ta có

$\dfrac{AD}{AF} = \dfrac{DH}{FB}$. (4)

Áp dụng hệ quả của định lý Ta let cho ΔFAE với $CD \parallel EA$ ta có

$\dfrac{CD}{EA} = \dfrac{FC}{FE}$ và $\dfrac{EC}{EF} = \dfrac{AD}{AF}$ (5)

Mà $FC = FB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $EA = EC$ nên

$\dfrac{CD}{EC} = \dfrac{FB}{FE} \Leftrightarrow \dfrac{CD}{FB} = \dfrac{EC}{EF}$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\dfrac{CD}{FB} = \dfrac{AD}{AF}$. (7)

Từ (4) và (7) suy ra $\dfrac{DH}{FB} = \dfrac{CD}{FB}\left(= \dfrac{AD}{AF}\right) \Leftrightarrow DH = CD.$

Suy ra D là trung điểm của CH .

Tương tự gọi D' là giao của BE và CH ta cũng chứng minh được D' là trung điểm của CH .

$\Rightarrow D \equiv D'$ hay B , E , D thẳng hàng.

d) M là trung điểm của AC (chứng minh trên).

Mà O là trung điểm của AB , suy ra OM là đường trung bình trong ΔACB .

$$\Rightarrow MO \,||\, CB \Leftrightarrow OM \perp AC \Leftrightarrow OMC = 90°.$$

Tương tự ta có $ONC = 90°$.

Xét tứ giác $OMCN$ có $OMC = MCN = ONC = 90°$ suy ra $OMCN$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow OC$ và MN cắt nhau tại I là trung điểm mỗi đường $\Rightarrow OI = \dfrac{1}{2}OC = \dfrac{1}{2}R$.

Vậy khi C di chuyển trên nửa đường tròn (O) thì I di chuyển trên nửa đường tròn $\left(O; \dfrac{1}{2}R\right)$.

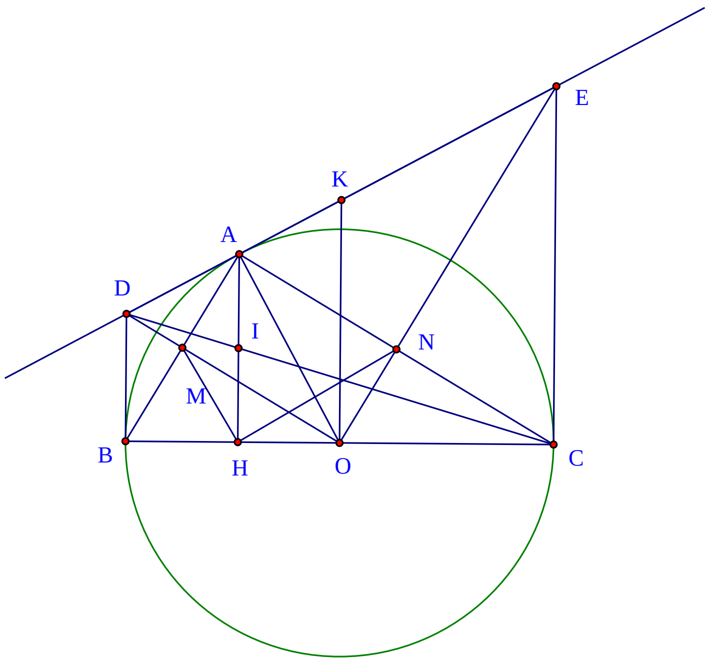
Câu 91.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác vuông ABC, vuông tại A đường kính BC nội tiếp (O), d là tiếp tuyến của (O) tại A. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt d tại D và E, AB cắt DO tại M, AC cắt EO tại N.

a) Chứng minh: Tứ giác $ADBO$ nội tiếp và $AMO = MOE = 90^o$

b) Kẻ đường cao AH. Chứng minh $AHN = EOC$ và $MHN = 90^o$.

c) Chứng minh: BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE và I là trung điểm của AH (AH cắt DC tại I)

Hướng dẫn



a) + Xét (O) có: AD, BD là tiếp tuyến

$\Rightarrow AD = BD$, OD là tia phân giác của AOB, $DA \perp AO$, $BD \perp OB$

+ Xét (O) có: AE, CE là tiếp tuyến

$\Rightarrow AE = EC$, OE là tia phân giác của AOC, $AE \perp AO$; $OC \perp CE$.

+ Xét tứ giác $ADBO$ có: $OAD + OBD = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADBO$ nội tiếp

+ Có: $AD = BD$; $OA = OB$ nên AB là trung trực của $OD \Rightarrow AMO = 90^0$.

+ Có: OD là tia phân giác của AOB, OE là tia phân giác của AOC, mà AOB và AOC là 2 góc kề bù

$\Rightarrow$ $DOE = 90°$ hay $MOE = 90^o$

$\Rightarrow AMO = MOE = 90^o$

b) + Có: $AE = EC$; $OA = OC$ nên AC là trung trực của $OE \Rightarrow AN = NC; ONC = 90^0$.

+ Xét ΔAHC vuông tại H có HN là đường trung tuyến nên $AN = NC = HN$.

$\Rightarrow$ ΔNHC cân tại $N \Rightarrow NHC = NCH$.

Mà $AHN + NHC = 90^0$

$NCH + EOC = 90^0$

$\Rightarrow AHN = EOC$

+ Xét ΔAHB vuông tại H có HM là đường trung tuyến nên $AM = MH = BM$.

+ Xét ΔAMN và ΔHMN , có:

$AM = HM$

$AN = HN$

MN chung

Nên $\Delta AMN = \Delta HMN\left(c.c.c\right) \Rightarrow MAN = MHN$ mà $MAN = 90^0\left(gt\right) \Rightarrow MHN = 90^o$.

c) Gọi K là trung điểm của DE nên K là tâm đường tròn đường kính DE .

+ Xét ΔDOE có $DOE = 90^0$, OK là đường trung tuyến nên $OK = DK = EK \Rightarrow O$ thuộc đường tròn đường kính DE (1).

+ Ta có $BD//CE$ (do $BD \perp BC$; $CE \perp BC$) $\Rightarrow DBCE$ là hình thang

Mà $O; K$ lần lượt là trung điểm của $BC; DE$.

$\Rightarrow OK \perp BC$ tại O (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE

Giả sử BE cắt DC tại I' .

Vì $BD//CE \Rightarrow \dfrac{BD}{CE} = \dfrac{DI'}{CI'}\left(3\right)$

Vì $AI//EC$ (do $AH//EC$) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DI}{CI}\left(4\right)$

Mà $BD = AD; AE = EC\left(5\right)$

Từ (3); (4); (5) $\Rightarrow \dfrac{DI'}{I'C} = \dfrac{DI}{CI}$

Mà $I; I'$ cùng thuộc BC nên I trùng với I' . Do đó $B; I; E$ thẳng hàng

Ta có: $IH//EC \Rightarrow \dfrac{IH}{EC} = \dfrac{BI}{BE}$

$IA//EC \Rightarrow \dfrac{IA}{EC} = \dfrac{DI}{DC}$

Mà $\dfrac{IE}{BI} = \dfrac{IC}{ID} \Rightarrow \dfrac{IE}{BI} + 1 = \dfrac{IC}{ID} + 1 \Rightarrow \dfrac{EB}{BI} = \dfrac{DC}{ID} \Rightarrow \dfrac{BI}{BE} = \dfrac{DI}{DC}$

Vậy $\dfrac{IH}{EC} = \dfrac{IA}{EC} \Rightarrow IH = IA \Rightarrow I$ là trung điểm của AH .

Câu 92.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn $\left(O \right)$ đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax, By. Từ M là một điểm bất kì trên nửa đường tròn $\left(O \right)$ vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt Ax, By. Tại C, D cắt nhau tại N.

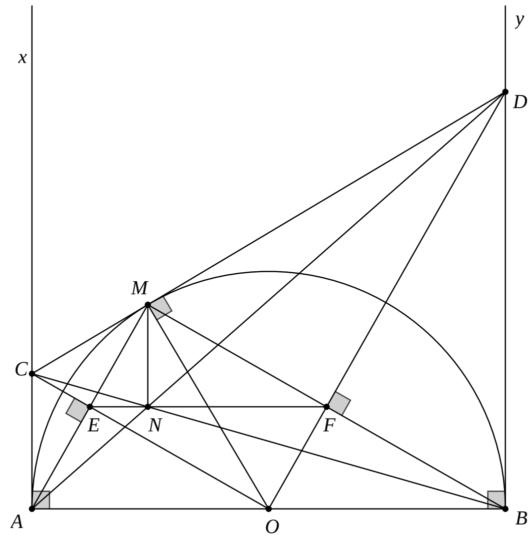
a) Chứng minh: Tứ giác $ACMO$ nội tiếp và $AC.BD = R^2$.

b) Gọi E là giao điểm OC với AM, F là giao điểm OD với BM. Chứng minh: $OE.OC = OF.OD$ và tứ giác $CDFE$ nội tiếp.

c) Chứng minh: $MN//AC$ và cho $OFE = 60°$, $R = 6cm$, tính $S_{quatAOM}$?

d) Điểm M nằm ở vị trí nào trên nửa đường tròn $\left(O \right)$ thì $AC + BD$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn



a)

+ Xét $\left(O \right)$ có: CA, CM là tiếp tuyến

$\Rightarrow CA = CM$, OC là tia phân giác của AOM, $CA \perp AO$, $CM \perp MO$

+ Xét $\left(O \right)$ có: DB, DM là tiếp tuyến

$\Rightarrow DM = DB$, OD là tia phân giác của BOM, $DB \perp BO$

+ Xét tứ giác $ACMO$ có:

$OAC + OMC = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ACMO$ nội tiếp

+ Có: OC là tia phân giác của AOM, OD là tia phân giác của BOM, AOM và BOM là 2 góc kề bù

$\Rightarrow COD = 90°$

$\Rightarrow AOC + BOD = 90°$

Mà $BDO + BOD = 90°$

$\Rightarrow AOC = BDO$

+ Chứng minh $\Delta CAO\# \Delta OBD\left(g.g \right)$

$$\Rightarrow \frac{CA}{OB} = \frac{AO}{BD} \Rightarrow AC.BD = AO.BO = R^2$$

b) + Có $OA = OM$, $CA = CM$ $\Rightarrow OC$ là đường trung trực của AM $\Rightarrow OC \perp AM$

+ Chứng minh tương tự có $OD \perp BM$

+ Xét ΔOMC vuông tại M có $ME \perp OC \Rightarrow OM^2 = OC.OE$

+ Xét ΔOMD vuông tại M có $MF \perp OD \Rightarrow OM^2 = OF.OD$

$\Rightarrow OE.OC = OF.OD \Rightarrow \dfrac{OE}{OD} = \dfrac{OF}{OC}$

+ Chứng minh $\Delta OEF \# \Delta ODC (c.g.c) \Rightarrow OEF = ODC$

+ Xét tứ giác $CDFE$ có: $OEF = ODC$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CDFE$ nội tiếp.

c) + Xét ΔNCA có $AC // BD$ (cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AN}{DN}$

Mà $CA = CM$, $DB = DM$

$\Rightarrow \dfrac{CM}{DM} = \dfrac{AN}{DN}$

+ Xét ΔDCA có $\dfrac{CM}{DM} = \dfrac{AN}{DN} \Rightarrow MN // AC$

+ Xét tứ giác $FMEO$ có $MEO + MFO = 180° \Rightarrow$ tứ giác $FMEO$ nội tiếp

$\Rightarrow OFE = OME \Rightarrow OME = 60°$

Mà ΔOAM cân tại O

$\Rightarrow \Delta OAM$ đều

$\Rightarrow MOA = 60°$

$S_{quatAOM} = \pi.6^2.\dfrac{60}{360} \approx 18,84 (cm^2)$

d) + Có $AC + BD = CM + MD = CD$

+ Có $AC // BD$

Mà $AB \perp AC,\ AB \perp BD$

$\Rightarrow CD \geq AB$

$\Rightarrow AC + BD \geq AB$ không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow CD \perp AC$ mà $CD \perp OM$

$\Rightarrow OM \perp AC$ mà $AC \perp AB$

$\Rightarrow OM \perp AB \Rightarrow M$ là điểm chính giữa của AB.

Câu 93.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $1/2(O;R)$, đường kính AB và một điểm M bất kì $\in 1/2(O;R)$ (M khác A và B). Kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với $1/2(O;R)$. Qua M kẻ tiếp tuyến thứ ba với $1/2(O;R)$ cắt Ax và By tại C và D, OC cắt AM tại E, OD cắt BM tại F, $AC = 4cm; BD = 9cm$.

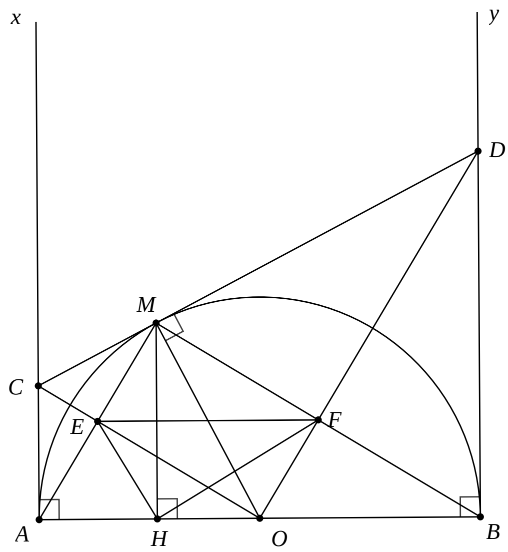
a) Chứng minh: tứ giác $ACMO$ nội tiếp và $AC.BD = R^2$.

b) Tính $EF; sinMBA$.

c) Kẻ $MH \perp AB$ tại H chứng minh ΔEHA cân và $EHF = 90°$.

d) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $ACDB$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn



a) Chứng minh: tứ giác $ACMO$ nội tiếp và $AC.BD = R^2$.

+) Có Ax và CD lần lượt là tiếp tuyến của $1/2(O;R)$ tại A và M (GT)

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax \perp AB = \{A\} \\ CD \perp OM = \{M\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CAO = 90° \\ CMO = 90° \end{cases} \Rightarrow CAO + CMO = 180° \Rightarrow \text{tứ giác } ACMO \text{ nội tiếp.}$$

+) Có $By;CD$ lần lượt là tiếp tuyến của $1/2(O;R)$ tại B và M mà By cắt CD tại D

$$\Rightarrow \begin{cases} DB = DM \\ OBM = MBD \end{cases}.$$

Có $Ax;CD$ lần lượt là tiếp tuyến của $1/2(O;R)$ tại A và M mà Ax cắt CD tại C

$$\Rightarrow \begin{cases} CA = CM \\ AOC = COM \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AC.BD = CM.DM \\ COM + MOB = AOC + OBM = \dfrac{180°}{2} = 90° \end{cases}$$

Xét ΔCOD vuông tại O , OM là đường cao

$\Rightarrow CM.DM = OM^2 \Rightarrow AC.BD = R^2$

b) Tính $EF; sinMBA$.

Có $AC = 4cm; BD = 9cm \Rightarrow R = 6cm$

Có $\begin{cases} CA = CM \\ OA = OM \end{cases} \Rightarrow CO$ là đường trung trực của AM

Mà $AM \cap CO = \{E\} \Rightarrow E$ là trung điểm của AM

Có $\begin{cases} DB = DM \\ OB = OM \end{cases} \Rightarrow DO$ là đường trung trực của BM

Mà $BM \cap DO = \{F\} \Rightarrow F$ là trung điểm của BM

ΔAMB có $E; F$ lần lượt là trung điểm của $AM; BM$

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của $\Delta ABM \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AB \Rightarrow EF = R = 6cm$

Có ΔACO vuông tại $A \Rightarrow CO^2 = AC^2 + AO^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow CO = 2\sqrt{13}$

Có $\sin MBA = \sin AOC = \frac{AC}{AO} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

c) Kẻ $MH \perp AB$ tại H chứng minh ΔEHA cân và $EHF = 90°$.

Có ΔAHM vuông tại H và HE là đường trung tuyến (E là trung điểm của AM)

$\Rightarrow HE = AE = EM = \frac{AM}{2} \Rightarrow \Delta AHE$ cân tại E.

Có $HE = EM \Rightarrow \Delta HEM$ cân tại $E \Rightarrow EHM = EMH$

Có ΔBHM vuông tại H và HF là đường trung tuyến (F là trung điểm của BM)

$\Rightarrow HF = MF = FB = \frac{BM}{2} \Rightarrow \Delta BHF$ cân tại $F \Rightarrow FHM = FMH$.

$\Rightarrow EHM + FHM = EMH + FMH \Rightarrow EHF = EMF = 90°$

d) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $ACDB$ nhỏ nhất.

Có $Ax; By$ lần lượt là tiếp tuyến của $1/2(O;R)$ tại $A; B$ và $C \in Ax; D \in By$

$\Rightarrow CA \perp AB; DB \perp AB \Rightarrow CA // DB \Rightarrow$ tứ giác $ACDB$ là hình thang vuông

$\Rightarrow S_{ACDB} = \frac{(AC + BD)AB}{2}$

Có $AC + BD \geq 2\sqrt{AC.BD} \Rightarrow (AC + BD)^2 \geq 4AC.BD \geq 4R^2 \Rightarrow AC + BD \geq 2R$

$S_{ACDB} \geq \frac{2R.2R}{2} = 2R^2$

Dấu bằng xảy ra khi $AC = BD$

Vậy diện tích tứ giác $ACDB$ nhỏ nhất bằng $2R^2$ khi M là điểm chính giữa $1/2(O;R)$.

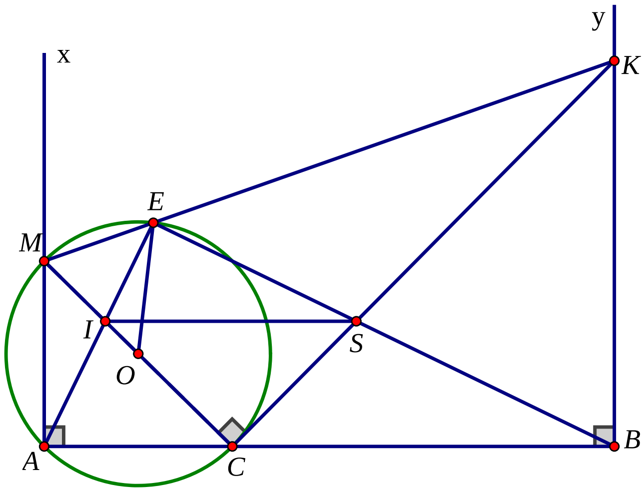
Câu 94.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đoạn thẳng AB và một điểm C thuộc đoạn thẳng đó (C khác A, B). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm M cố định. Kẻ tia $Cz \perp CM \equiv C$, tia Cz cắt By tại K. Vẽ đường tròn $(O;R)$ đường kính MC cắt MK tại E.

a) Chứng minh tứ giác $CEKB$ nội tiếp và $AM.BK = AC.BC$.

b) Chứng minh ΔAEB vuông. AE cắt MC tại I. BE cắt CK tại S. Chứng minh $IS//AB$.

c) Cho A, B, M cố định, tìm vị trí của C để diện tích tứ giác $ABKM$ lớn nhất.

Hướng dẫn



a)+ Ta có $E \in (O)$, đường kính MC nên $MEC = 90^0 \Rightarrow CEK = 90^0$ (1)

Lại có $By \perp AB$ nên $CBK = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CEB + CBK = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Tứ giác $ECBK$ có hai góc đối diện bù nhau nên tứ giác nội tiếp.

+ Ta có $ACM = 180^0 - 90^0 - KCB = 90^0 - KCB$; $CKB = 90^0 - KCB$ nên $MCA = CKB$

Xét ΔAMC và ΔBCK có:

$$\left.\begin{array}{l} A = B = 90^0 \\ MCA = CKB \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta BCK \text{ (g-g)}$$

suy ra $\dfrac{AM}{BC} = \dfrac{AC}{BK} \Rightarrow AM.BK = AC.BC$.

b)+ Ta có $MEC = 90^0$ (cmt), lại có $MAC = 90^O$ (Do $Ax \perp AB$) nên tứ giác $AMEC$ là tứ giác nội tiếp (hai góc đối bù nhau).

Xét đường tròn $(AMEC)$: $MEA = MCA$ (cùng chắn cung AM) (3)

Xét đường tròn $(ECKB)$: $BEK = BCK$ (cùng chắn cung BK) (4)

Có $MCA + BCK = 180^0 - MCK = 180^0 - 90^0 = 90^0$ (5)

Từ (3)(4)(5) suy ra $MEA + BEK = 90^0 \Rightarrow AEB = 180^0 - (MEA + BEK) = 180^0 - 90^0 = 90^0$.

Vậy AEB vuông.

+ Xét tứ giác $IESC$: $IES + ICS = AEB + MCK = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên tứ giác nội tiếp

Xét đường tròn $(IESC)$: $EIS = ECS$ (cùng chắn cung ES) (6)

Có $ECS = EMC$ (cùng phụ CKE) (7)

Xét đường tròn $(AMEC)$: $EMC = EAC$ (cùng chắn cung EC) (8)

Từ (6)(7)(8) suy ra $EIS = EAC$ mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $IS // AB$.

c) Ta có $\Delta AMC \backsim \Delta BCK$ (g-g) suy ra $\dfrac{AM}{BC} = \dfrac{AC}{BK}$

$\Rightarrow AM.BK = AC.BC \le \dfrac{(AC+BC)^2}{4} = \dfrac{AB^2}{4}$

$\Rightarrow BK \le \dfrac{AB^2}{4.AM}$

$\Rightarrow BK \max = \dfrac{AB^2}{4AM}$ khi $AC = CB \Leftrightarrow C$ là trung điểm của AB.

$Ax \perp AB, By \perp AB \Rightarrow Ax // By \Rightarrow AM // BK$

$\Rightarrow$Tứ giác $ABKM$ là hình thang với hai đáy là AM, BK, đường cao $AB.$

$\Rightarrow S_{ABKM} = \dfrac{(AM+BK)AB}{2}$

A, B, M cố định nên AM, AB không đổi

S_{ABKM} max $\Leftrightarrow BK$ max $\Leftrightarrow C$ là trung điểm của AB.

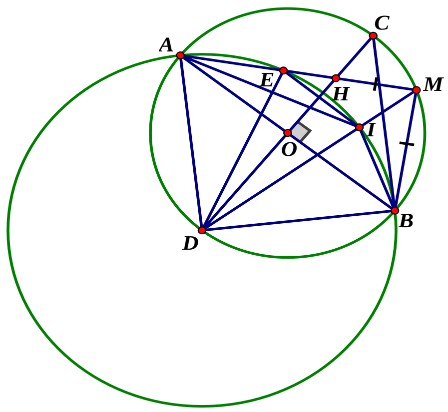
Câu 95.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau, M là điểm bất kỳ trên BC. Trên tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MB$, MA cắt OC ở H.

a) Cm: tứ giác $OHMB$ nội tiếp, $\triangle MDE = \triangle MDB$.

b) Cm: D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB. Gọi đường tròn $(D;DA)$ cắt đoạn thẳng MD tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$. Khi AM đi qua trung điểm của BC. Tính tỉ số $MA:MB$. Suy ra số đo MAB.

c) Tính theo R chu vi và diện tích phần chung của hai hình tròn $(O;R)$ và $(D;DA)$.

Hướng dẫn



a)Cm: tứ giác $OHMB$ nội tiếp, $\triangle MDE = \triangle MDB$.

Chứng minh : $HOB + HMB = 90^0 + 90^0 = 180^0$. Suy ra $OHMB$ nội tiếp

Vì hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau (gt)

Suy ra: $AD = BD = AC = BC$

Suy ra: $AMD = BMD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

Chứng minh được $\triangle MDE = \triangle MDB$ (c.g.c)

b) Cm: D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$. Khi AM đi qua trung điểm của BC. Tính tỉ số $MA:MB$. Suy ra số đo MAB.

Vì $\triangle MDE = \triangle MDB$ (cmt). Suy ra: $DE = DB$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $DA = DB$ (mt) . Suy ra $DA = DB$

$\rightarrow AD = DB = DE$. Suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB.

*)Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

Vì $AMD = BMD$ suy ra: MD là tia phân giác cuả AMB .Mà đường tròn $(D;DA)$ cắt đoạn thẳng MD tại I . Hay MI là tia phân giác của AMB (*)

Nên chứng minh được $\Delta MEI = \Delta MBI$ (c.g.c). Suy ra: $MEI = MBI$ (1)

Xét tam giác AEB có: $MEI = EAI + EIA$ (tính chất góc ngoài tam giác)

Mà: $EAI = \frac{1}{2}$ sđ EI (Tính chất góc nôi tiếp) và $EIA = \frac{1}{2}$ sđ EA (Tính chất góc nôi tiếp)

Suy ra: $MEI = \frac{1}{2}$ sđ AI . Mà $ABI = \frac{1}{2}$ sđ AI suy ra: $MEI = ABI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $ABI = MBI$. Suy ra: BI là tia phân giác của ABM (**)

Từ (*) và (**) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

Vì AM là đường trung tuyến của $\triangle ABC$ (gt) và CO là đường trung tuyến của $\triangle ABC$. Mà AM và CO cắt nhau tại H . Suy ra H là trọng tâm của $\triangle ABC$.

$\rightarrow \frac{HO}{OC} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{HO}{OA} = \frac{1}{3}$ Vì $OA = OC = R$

Xét ΔAOH vuông tại O và ΔAMB vuông tại M

Ta có: $\tan HAO = \frac{OH}{OA} = \tan MAB = \frac{MB}{MA} = \frac{1}{3}$. Suy ra: $\frac{MA}{MB} = 3$. Tính được $MAB = 18^0 26'$

c) Tính được $DA = R\sqrt{2} \rightarrow DA = R\sqrt{2}$ là bán kính của $(D;DA)$

Chu vi phần hình tròn được tạo bởi hai hình tròn $(O;R)$ và $(D;DA)$ là:

$$\frac{\Pi R.180}{180} + \frac{\Pi R\sqrt{2}.90}{180} = \frac{3\Pi R\sqrt{2}}{2}$$

Diện tích hình quạt tròn tạo bởi bán kính DA, DB là: $\dfrac{\Pi\left(R\sqrt{2}\right)^2.90}{360} = \dfrac{\Pi R^2}{2}$

Diện tích ΔADB là: $\dfrac{DO.AB}{2} = R.2R = 2R^2$

Diện tích hình viên phân tạo bởi bán kính DA, DB là: $\dfrac{\Pi R^2}{2} - R^2 = \dfrac{(\Pi - 2)R^2}{2s}$

Diện tích phần chung của hai hình tròn $(O;R)$ và $(D;DA)$ là :

$$\frac{\Pi R^2.180}{360} + \frac{(\Pi - 2)R^2}{2} = (\Pi - 1)R^2$$

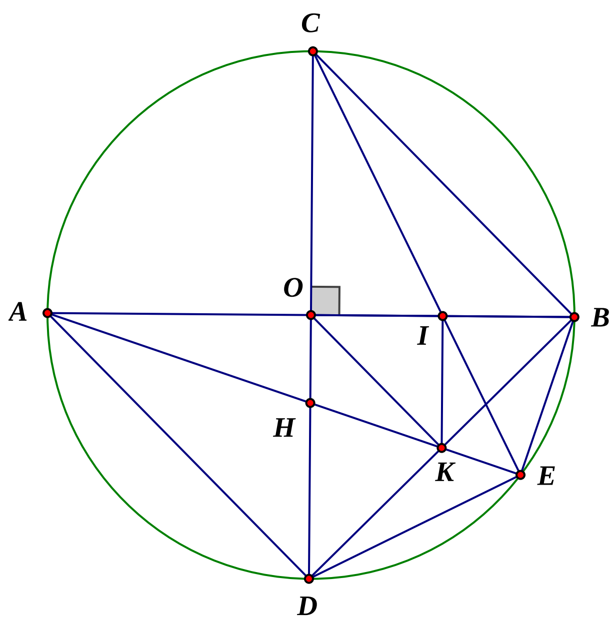
Câu 96.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm của OB, nối CI cắt đường tròn (O) tại E, nối AE cắt CD tại H, BD cắt AE tại K.

a) Chứng minh tứ giác $BOHE$ nội tiếp và $AH.AE = 2R^2$.

b) Tính $\tan BAE$ và chứng minh $OK \perp BD$.

c) Chứng minh tứ giác $OKEC$ nội tiếp và tinh $S_{quat\, DOE}$.

Hướng dẫn



a) Chứng minh tứ giác $BOHE$ nội tiếp và $AH.AE = 2R^2$.

Ta có $AEB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $HEB = 90°$.

$HOB = 90°$ (vì $AB \perp CD$).

Do đó $HEB + HOB = 180° \Rightarrow$ tứ giác $BOHE$ nội tiếp.

Xét ΔAOH và ΔAEB có A chung; $AOH = AEB = 90° \Rightarrow \Delta AOH \backsim \Delta AEB$ (g - g).

$$\Rightarrow \frac{AO}{AE} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AE.AH = AO.AB = 2R^2.$$

b) Tính $\tan BAE$ **và chứng minh** $OK \perp BD$**.**

Ta có $AEC = \frac{1}{2}.AOC$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow AEC = \frac{1}{2}.90° = 45°$.

$BEC = \frac{1}{2}.BOC = \frac{1}{2}.90°$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung CB)

Vậy $AEC = BEC \Rightarrow EC$ là đường phân giác của góc AEB.

$\Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{IB}{IA} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{3R}{2}} = \frac{1}{3}$ (tính chất đường phân giác).

Xét ΔEAB vuông tại E ta có $\tan BAE = \frac{EB}{EA} = \frac{1}{3}$.

Xét ΔAOH vuông tại O có $\tan OAH = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{OH}{R} = \frac{1}{3} \Rightarrow OH = \frac{1}{3}R$.

Xét ΔADB có DO là đường trung tuyến và $\frac{OH}{OD} = \frac{\frac{1}{3}R}{R} = \frac{1}{3} \Rightarrow H$ là trọng tâm ΔADB, mà $AH \cap BD = K \Rightarrow K$ là trung điểm của $BD \Rightarrow OK \perp BD$ (tính chất đường kính và dây cung).

c) Chứng minh tứ giác $OKEC$ **nội tiếp và tinh** $S_{quat\,DOE}$**.**

Ta có ΔOBD vuông cân tại O có K là trung điểm của $BD \Rightarrow OK$ là phân giác của BOD

$\Rightarrow DOK = \frac{1}{2}.DOB = \frac{1}{2}.90° = 45°$.

Mà $KEC = 45°$ (Chứng minh trên). Do đó $KEC = DOK = 45° \Rightarrow$ tứ giác $OKEC$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

Ta có $\tan BAE = \frac{1}{3} \Rightarrow BAE \approx 18,43°$

Ta có $DOE = 2.DAE = 2.\left(45° - BAE\right) \approx 2.\left(45° - 18,43°\right) = 53,14°$.

$S_{quat\,DOE} \approx \frac{53,14}{360}.\pi.R^2 \approx \frac{3\pi}{20}R^2$

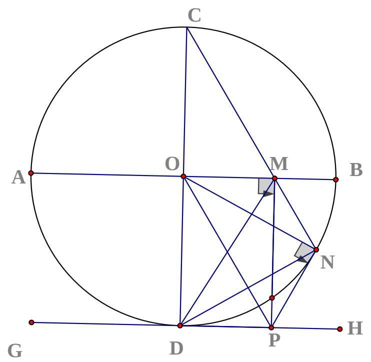
Câu 97.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ có hai đường kính $AB \perp CD$. Trên đoạn AB lấy điểm M khác O. Đường thẳng CM cắt (O) tại điểm thứ hai N .Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến N của (O) tại P

a) CMR: Tứ giác $OMNP$ nội tiếp và $CM.CN = 2R^2$

b) CMR: Tứ giác $CMPO$ là hình bình hành và PD là tiếp tuyến của (O)

c) CMR: Khi M di chuyển trên AB thì P chạy trên một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn



a) CMR: Tứ giác $OMNP$ nội tiếp và $CM.\,CN = 2R^2$

Ta có: NP là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $ONP = 90°$

$MP \perp AB$ tại M nên $OMP = 90°$

Xét tứ giác $OMNP$ có $ONP = OMP\,(= 90°)$ mà 2 đỉnh liên tiếp

Nên tứ giác $OMNP$ nội tiếp.

* Chứng minh: $CM.\,CN = 2R^2$

Xét (O) có $OND = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔCOM và ΔCND có C chung; $COM = CND = 90°$

Nên $\Delta COM \backsim \Delta CND\ (g.g)$

Ta có: $\dfrac{CO}{CN} = \dfrac{CM}{CD} \Rightarrow CN.CM = CO.CD$ Mà $CN = R$; $CD = 2R$

Do đó: $CM.\,CN = 2R^2$ (đpcm)

b) CMR: Tứ giác $CMPO$ là hình bình hành và PD là tiếp tuyến của (O)

Do tứ giác $OMNP$ nội tiếp nên $ONM = OPM$ (góc nội tiếp cùng chắn cung OM)

Mặt khác có: ΔOCN cân tại O nên $OCN = ONC$ (tính chất)

Nên $OPM = OCN$ mà $OPM + MOP = 90°$; $OCN + OMC = 90°$

Do đó: $MOP = OMC$ mà 2 góc ở vị trí so le trong nên $OP//CM$

Xét tứ giác $CMPO$ có: $OP//CM$ (cmt); $OC//PM\,(\perp AB)$

Nên tứ giác $CMPO$ là hình bình hành.

Ta có: $OP//CN$ nên $PON = ONC$ (so le trong)

Có $\widehat{POD} = \widehat{OCN}$ (đồng vị)

Mà $\widehat{ONC} = \widehat{OCN}$ (cmt)

Nên $\widehat{PON} = \widehat{POD}$

Dễ dàng chứng minh được $\Delta DOP = \Delta NOP\ (c.g.c)$

Do đó: $\widehat{ODP} = \widehat{ONP}$ mà $\widehat{ONP} = 90°$ Nên $\widehat{ODP} = 90°$

Vậy PD là tiếp tuyến của (O)

c) CMR: Khi M di chuyển trên AB thì P chạy trên một đường thẳng cố định.

Xét tứ giác $ODPM$ ta có: $\widehat{DOM} = \widehat{ODP} = \widehat{OMP} = 90°$

Nên tứ giác $ODPM$ là hình chữ nhật.

Gọi d là đường thẳng đi qua D và vuông góc với OD nên d cố định và $P \in d$

Khi $M \equiv A$ thì $P \equiv G$ với G là hình chiếu của A trên d

Khi $M \equiv B$ thì $P \equiv H$ với H là hình chiếu của B trên d

Vậy M di chuyển trên AB thì P chạy trên đoạn GH cố định.

Câu 98.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ có hai đường kính $AB \perp CD$. Gọi I là trung điểm OB, CI cắt (O) tại E,

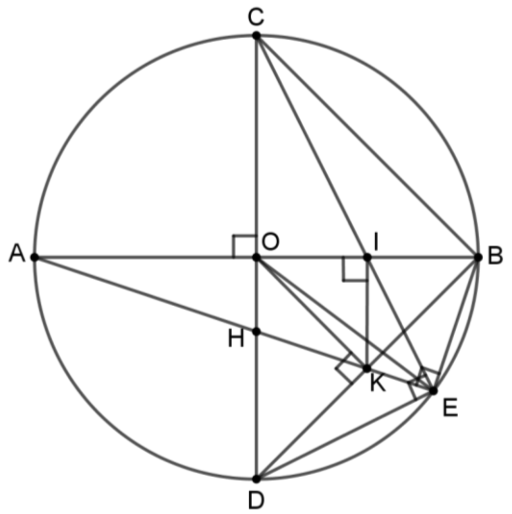
AE cắt CD tại H, BD cắt AE tại K.

a) Chứng minh tứ giác $DOIE$ nội tiếp và $CI.CE = 2R^2$.

b) Tính tỉ số $\dfrac{EB}{EA}$ và chứng minh $KD = KB$.

c) Chứng minh $\widehat{OKH} = \widehat{DCE}$ và tính $S_{quat}DOE$.

Hướng dẫn



a) Vì CD là đường kính $(O) \Rightarrow \widehat{CED} = 90^0$

Xét tứ giác $DOIE$ có:

$IED + IOD = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $DOIE$ nội tiếp đường tròn.

Xét ΔCED và ΔCOI có

DCE chung

$CED = COI\left(= 90^0\right)$

$\Rightarrow \Delta CED = \Delta COI$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CI}{CD} = \dfrac{CO}{CE} \Rightarrow CI.CE = CO.CD = R.2R = 2R^2$ (đpcm)

b) Vì $AB \perp CD$ $\Rightarrow$sđ $AC =$ sđ $AD \Rightarrow AEC = ABD \Rightarrow KEI = IBK$

Xét tứ giác $EBIK$ có $KEI = IBK$ (cmt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $EBIK$ nội tiếp đường tròn (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow KIB + KEB = 180^0$ (tổng hai góc đối trong tứ giác nội tiếp)

Vì AB là đường kính $(O) \Rightarrow AEB = 90^0$

$\Rightarrow KIB = 90^0 \Rightarrow KI \perp OB$

Mà $OD \perp OB \Rightarrow KI // OD$

Mà I là trung điểm OB (giả thiết)

$\Rightarrow IK$ là đường trung bình của ΔBOD

$\Rightarrow IK = \dfrac{1}{2}OD = \dfrac{1}{2}R$

Có $AI = AO + OI = R + \dfrac{1}{2}R = \dfrac{3}{2}R$

Xét ΔAIK và ΔAEB có:

BAE chung

$AIK = AEB\left(= 90^0\right)$

$\Rightarrow \Delta AIK = \Delta AEB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{EB}{IK} = \dfrac{EA}{IA} \Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{IK}{IA} = \dfrac{\frac{1}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \dfrac{1}{3}$

Vì IK là đường trung bình của ΔBOD (cmt)

$\Rightarrow K$ là trung điểm BD

$\Rightarrow KD = KB$

c) Xét ΔOBD cân tại O có K là trung điểm BD

$\Rightarrow OK \perp BD \Rightarrow OKB = 90^0$

Có $AKO + OKB + BKE = AKE$

$\Rightarrow AKO + 90^0 + BKE = 180^0 \Rightarrow AKO + BKE = 90^0$

Xét ΔKEB vuông tại E có

$KBE + BKE = 90^0$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

Mà $AKO + BKE = 90^0 \Rightarrow AKO = KBE$ (cùng phụ với BKE)

Xét (O) có $DCE = DBE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn DE)

$\Rightarrow AKO = DCE$ (đpcm)

Xét ΔAEB vuông tại E có $\tan ABE = \dfrac{EA}{EB} = 3 \Rightarrow ABE \approx 71^0 565'$

Xét ΔOEB cân tại $O \Rightarrow OBE = OEB$

Có $BOE + OBE + OEB = 180^0$

$\Rightarrow BOE + 2OBE = 180^0 \Rightarrow BOE = 180^0 - 2OBE \Rightarrow BOE \approx 36^0 87'$

Có $BOE + DOE = DOB$

$\Rightarrow DOE = DOB - BOE \approx 90^0 - 36^0 87' \approx 53^0 13'$

$\Rightarrow S_{quat} DOE \approx \dfrac{\pi.R^2.53,13}{360} \approx 0,15\pi.R^2$

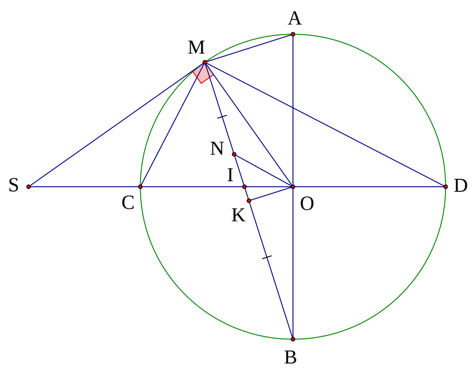
Câu 99.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O), hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. M là một điểm trên cung nhỏ AC. Tiếp tuyến của (O) tại M cắt tia DC tại S. Gọi I là giao điểm của CD và BM.

a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ nội tiếp; $MSD = 2MBA$

b) Chứng minh $SM^2 = SC.SD$. Tia phân giác COM cắt BM tại N chứng minh $\dfrac{NI}{NM} = \tan MBO$

c) Gọi K là trung điểm của MB. Khi M di chuyển trên cung nhỏ AC thì K di chuyển trên đường nào?

Hướng dẫn



a) Vì $AB \perp CD\ (gt) \Rightarrow AOI = 90^0$

Ta có: $AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Hay $AMI = 90^0$

Xét tứ giác $AMIO$ có: $AOI + AMI = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMIO nội tiếp (tổng 2 góc đối diện bằng 180^0)

- Vì MSD là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn (O)

$$\Rightarrow MSD = \frac{sđ\,MD - sđ\,MC}{2} = \frac{sđ\,AD + sđ\,MA - sđ\,MC}{2} \quad (1)$$

Vì hai đường kính $AB,\ CD$ vuông góc với nhau $\Rightarrow AC = AD$ (2)

Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow MSD = \frac{sđ\,AC + sđ\,MA - sđ\,MC}{2} = \frac{sđ\,MC + sđ\,MA + sđ\,MA - sđ\,MC}{2} = \frac{2sđ\,MA}{2} = sđ\,MA$$

Mà $MBA = \frac{1}{2}sđ\,MA$ (góc nội tiếp chắn MA)

$\Rightarrow MSD = 2MBA$

b) Xét ΔSMC và ΔSDM có:

MSD chung

$SMC = SDM \ \left(= \frac{1}{2}sđ\,MC\right)$

$$\Rightarrow \Delta SMC \sim \Delta SDM\ (g.g) \ \Rightarrow \frac{SM}{SD} = \frac{SC}{SM} \Rightarrow SM^2 = SC.SD$$

Vì ON là tia phân giác của IOM

$$\Rightarrow \frac{NI}{NM} = \frac{OI}{OM} \text{ mà } OM = OB = R \ \Rightarrow \frac{NI}{NM} = \frac{OI}{OB} \quad (3)$$

Xét ΔIOB vuông tại O, ta có: $\tan IBO = \frac{OI}{OB}$ hay $\tan MBO = \frac{OI}{OB}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{NI}{NM} = \tan MBO$

c) Ta có: $OK \perp MB\ (gt) \ \Rightarrow OKB = 90^0$

$\Rightarrow K$ thuộc đường tròn đường kính OB.

Ta thấy khi M trùng A thì K trùng O, M trùng C thì K là trung điểm của BC.

Gọi J là trung điểm của BC

Khi đó, khi M chuyển động trên cung nhỏ AC của đường tròn (O) thì K chuyển động trên cung nhỏ OJ của đường tròn đường kính OB.

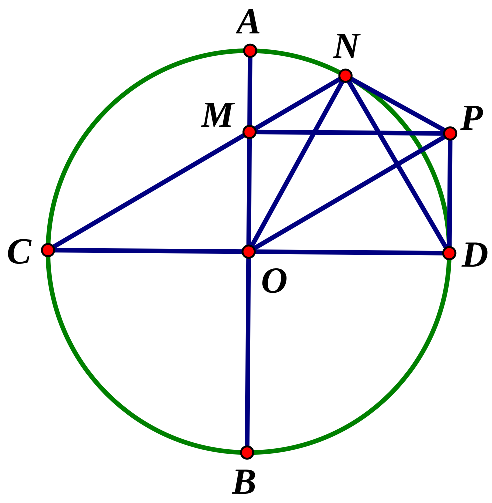
Câu 100.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ có hai đường kính $AB;CD$ vuông góc với nhau. Trên đoạn AB lấy điểm M (khác O). Đường thẳng CM cắt (O) tại điểm thứ hai N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của (O) ở P.

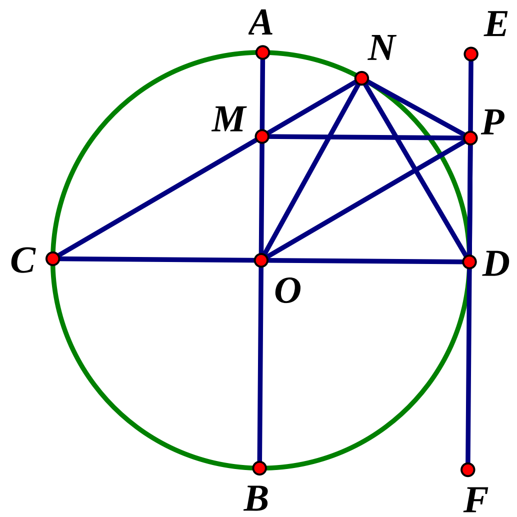
a) Tứ giác $OMND$ nội tiếp và tích $CM.CN=\dfrac{CD^2}{2}$.

b) $OP//MN$ và PD là tiếp tuyến của (O).

c) Khi M di chuyển trên AB thì P chạy trên một đoạn thẳng cố định.

Hướng dẫn





a) N thuộc đường tròn đường kính CD $\Rightarrow$ $MND=90^0$

$AB\perp CD \Rightarrow$ $MOD=90^0$

$\Rightarrow$ $MND+MOD=180^0$ $\Rightarrow$ tứ giác $MNDO$ nội tiếp

ΔCMO đồng dạng ΔCDN (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CM}{CD}=\dfrac{CO}{CN}$ $\Rightarrow CM.CN=\dfrac{CD^2}{2}$

b) NP là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow$ $PNO=PMO=90^0$ $\Rightarrow$ tứ giác $MNPO$ nội tiếp

$\Rightarrow$ $C=MNO=MPO=POD$ $\Rightarrow$ $OP//MN$

$\Rightarrow$ $NOP=MNO=MPO=POD$

$\Rightarrow$ $\Delta NPO=\Delta DPO$ (cgc) $\Rightarrow$ $PDO=PNO=90^0$ $\Rightarrow$ $PD\perp OD$ $\Rightarrow$ PD là tiếp tuyến của (O)

c) $OMP=MOD=PDO=90^0$ $\Rightarrow$ tứ giác $MPDO$ là hifh chữ nhật

$\Rightarrow$ Khi M di chuyển trên AB thì P chạy trên một đoạn thẳng EF đi qua D và vuông góc với CD với tứ giác $AEFB$ là hình chữ nhật

Câu 101.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. M là một điểm trên cung nhỏ AC. Tiếp tuyến của (O) tại M cắt tia DC tại S. Gọi I là giao điểm của CD và BM.

a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ nội tiếp và $MIC = MDB$.

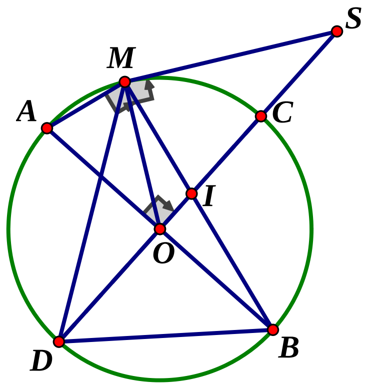
b) Chứng minh $MSD = 2MBA$ và MD là phân giác AMB.

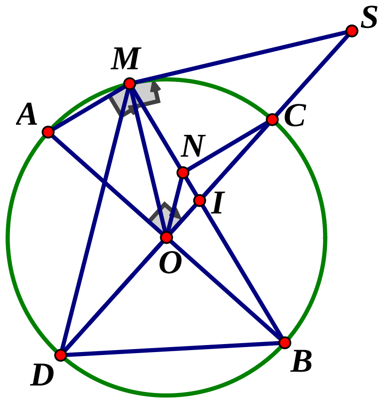
c) Chứng minh $IM.IB = IC.ID$; $SM^2 = SC.SD$.

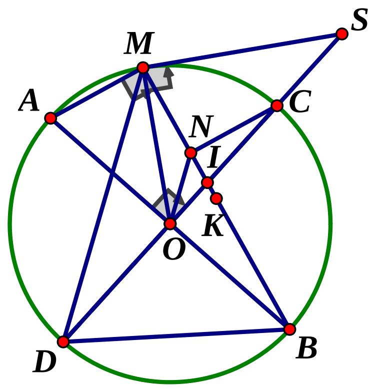
d) Tia phân giác COM cắt BM tại N. Chứng minh $\frac{NI}{NM} = \tan MBO$ và $CN \perp BM$.

e) Gọi K là trung điểm MB. Khi M di chuyển trên cung nhỏ AC thì K di chuyển trên đường nào? Và xác định vị trí của M trên cung nhỏ AC sao cho $AM = \frac{3}{5}MB$.

Hướng dẫn







a)+) Ta có: $AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$AB \to \ AMI + AOI = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$Tứ giác $AMIO$ nội tiếp (tứ giác có tổng 2 góc bằng 180^0)

+) $MIC = \frac{1}{2}\left(sđ\,MC + sđ\,BD\right)$(góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

$MDB = MDC + CDB = \frac{1}{2}\left(sđ\,MC + sđ\,BC\right)$

Mà $BD = BC$ (vì $AB \perp CD$) $\Rightarrow MCI = MDB$.

b)+) $MSD = \frac{1}{2}\left(sđ\,MD - sđ\,MC\right)$(góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn);

$MBA = \frac{1}{2}$sđ MA

Lại có $MD = MA + AD$ Mà $AD = AC$ (vì $AB \perp CD$) $\to MD = MA + AC$

$\Rightarrow MSD = \frac{1}{2}\left(sđ\,MA + sđ\,AC - sđ\,MC\right) = \frac{1}{2}\left(sđ\,MA + sđ\,MA\right) =$ sđ MA $\Rightarrow MSD = 2MBA$

+) Ta có: $AMD = \frac{1}{2}$Sđ AD; $BMD = \frac{1}{2}$Sđ DB mà $AD = DB$

$\Rightarrow AMD = BMD$ hay MD là phân giác AMB.

c) Ta có $MCD = MBD = \frac{1}{2}$sđ MD (góc nội tiếp cùng chắn MD)

Xét ΔMIC và ΔBID có

$MIC = BID$ (đối đỉnh)

$MCI = IBD$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MIC \sim \Delta DIB(g.g) \Rightarrow \frac{MI}{DI} = \frac{IC}{IB} \Rightarrow MI.IB = ID.IC$

+) $SMC = MDC = \frac{1}{2}$sđ MC (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp chắn MC)

Xét ΔSMC và ΔSMD có:

S chung

$SMC = MDC(cmt)$

$\Rightarrow \Delta SMC \backsim \Delta SDM(g.g) \Rightarrow \frac{SM}{SD} = \frac{SC}{SM} \Rightarrow SM^2 = SC.SD$.

d) +) $\frac{NI}{NM} = \frac{OI}{OM}$ (tính chất phân giác)

$\tan MBA = \frac{OI}{OB} = \frac{OI}{OM} = \frac{NI}{NM}$

+) $\Delta OCN = \Delta OMN(c.g.c) \Rightarrow OCN = OMN = NBO$

$OCN = NBO \Rightarrow$ Tứ giác $OBCN$ nội tiếp

$\Rightarrow CNB = COB = 90^0$ hay $CN \perp BM$

e) OK là đường trung bình $\Delta AMB \Rightarrow OK//AM \Rightarrow OKB = 90^0$

K di chuyển trên đường tròn đường kính OB

Giới hạn: Vì $ABM < 45^0 \Rightarrow K$ nằm trên cung tròn $\frac{1}{4}$ như hình

+) Ta có: $MA = \frac{3}{5}MB$

$\triangle ABM \sim \triangle IBO(g-g) \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{OI}{OB} = \frac{3}{5} \Rightarrow OI = \frac{3}{5}OB = \frac{3}{5}R$

Trong đoạn OC lấy $OI = \frac{3}{5}R$ Kẻ tia BI cắt cung AC tại M.

Câu 102.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ có đường kính BC, A là điểm chính giữa cung BC, gọi M là trung điểm của

BO, kẻ $ME \perp AB$ tại E, kẻ $MF \perp AC$ tại F. Kẻ tiếp tuyến của (O) tại A cắt MF tại K.

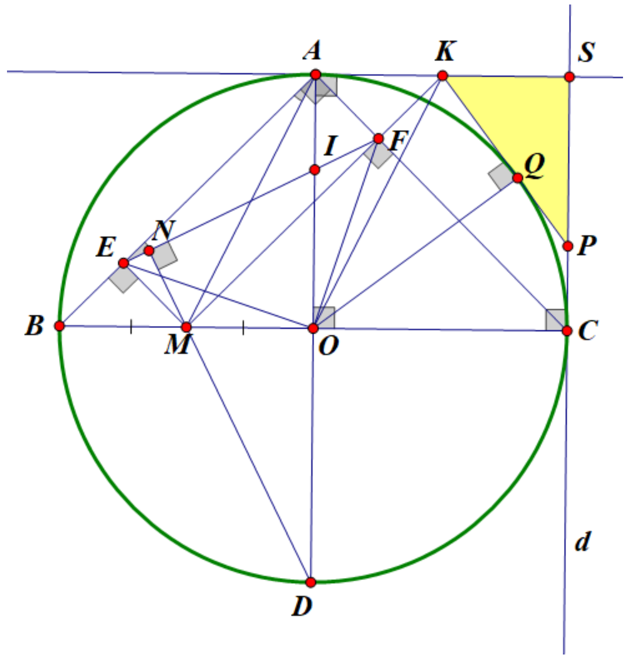
a)Chứng minh năm điểm A, E, M, O, F thuộc một đường tròn và $BE.BA = BO.BM$.

b)Chứng minh $ME = KF$ và gọi đường thẳng d là tiếp tuyến tại C của (O). AK cắt d tại S , từ K kẻ tiếp tuyến với (O) tại Q cắt d tại P. Tính chu vi ΔSKP theo R.

c) +Tính diện tích giới hạn bởi (O) và SA, SC biết $R = 6cm$.

+Chứng minh khi M di chuyển trên BC thì MN luôn đi qua một điểm cố định với $MN \perp EF$ tại N.

Hướng dẫn



a) +)Ta có $BAC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$ tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật, nên 4 điểm A, E, M, F nằm trên đường tròn đường kính EF

$\rightarrow$ AF = EM

+)A là điểm chính giữa BC

$\rightarrow AO \perp BC \rightarrow \triangle AOB, \triangle AOC$ vuôngcântạiO $\rightarrow ABO = OAC = ACO = 45^0$

$\Rightarrow$Các tam giác BEM, ABO, AKF vuông cân.

Nên : $\Delta OFA = \Delta OEB(c.g.c) \Rightarrow BOE = FOA$

$\Rightarrow FOE = FOA + EOA = EOA + BOE = AOB = 90°$

$\Rightarrow (O)$ thuộc đường tròn đường kính EF

Vậy 5 điểm A, E, M, O, F thuộc một đường tròn đường kính EF.

+) ΔBEM $\backsim \Delta BOA \Rightarrow \dfrac{BE}{BO} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow BE.BA = BO.BM$.

b) $ME = AF, AF = FK \Rightarrow ME = KF$.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow KQ = AK, QP = PC$.

Ta có: Tứ giác ASCO là hình vuông $\Rightarrow SA = SC = AO = OC = R$

Chu vi tam giác

$SKP = KS + SP + KP = KS + SP + KQ + QP = KS + AK + SP + PC = AS + SC = 2R$

c)+) Gọi diện tích giới hạn bởi đường tròn (O) và SA, SC là S.

$$S = S_{AOCS} - S_{cungAOC} = S_{AOCS} - \frac{1}{4}S_{(O)} = R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2 = 36 - 9\pi$$

+) Gọi giao điểm của AO với EF là I, giao của AO với đường tròn (O) là D $\rightarrow$ D cố định

Giả sử DM cắt EF tại N’

Ta có: T.giác AEMF nội tiếp $\rightarrow AEI = MAE$ (góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau),

$EAI = ABM$ ($\triangle ABO$ cân tại O)

$\rightarrow \Delta AIE \backsim \Delta BMA (g.g) \Rightarrow AMB = AIE \Rightarrow AMO = OIE \Rightarrow OMD = OIE \Rightarrow OMD = DIN'$

$\Rightarrow DIN' + IDN' = OMD + ODM = 90° \Rightarrow DN' \perp$ EF hay MN' $\perp$ EF

Mà $MN \perp EF$ Nên N$\equiv$N’ $\Rightarrow$N,M,D thẳng hằng, hay MN luôn đi qua một điểm cố định là D

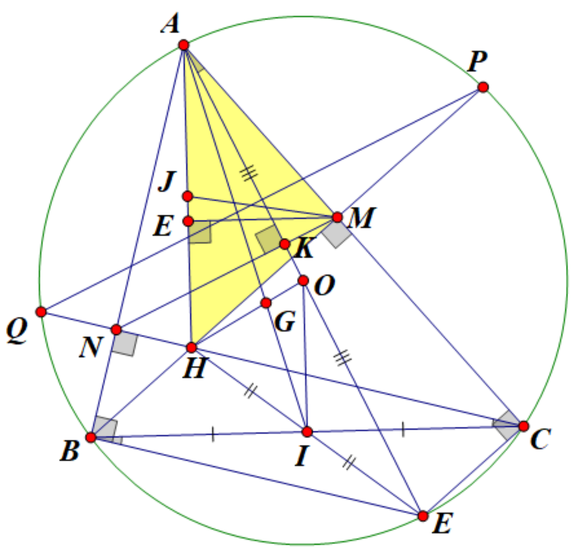
Câu 103.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC nội tiếp (O). Gọi BM, CN là các đường cao của ΔABC tại H. Kẻ đường kính AE, gọi I là trung điểm của BC, G là giao điểm của AI và OH.

a) Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp và tứ giác $BHCE$ là hình bình hành.

b) Chứng minh $AO \perp MN$ và G là trọng tâm ΔABC.

c) Gọi BM ; CN cắt (O) tại P ; Q. Chứng minh $PQ // MN$ và tìm vị trí của A để diện tích tam giác AMH lớn nhất.

Hướng dẫn



a) Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp

Ta có: $BNC = BMC = 90^0$ (BM, CN là các đường cao)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCMN$ nội tiếp đường tròn đường kính BC (dhnb).

+)Chứng minh tứ giác $BHCE$ là hình bình hành.

Ta có: $BE \perp AB$ (AE là đường kính)

$NC \perp AB$ (NC là đường cao)

$\Rightarrow BE//NC$ (t/c từ vuông góc đến song song)

hay $BE//CH$ (1)

Chứng minh tương tự $CE//BM$ hay $CE//BH$ (2)

Từ (1) (2) suy ra tứ giác $BHCE$ là hình bình hành (dhnb).

b) Chứng minh $MN \perp AO$

Gọi K là giao điểm của MN và AE.

+ Ta có: $EBC = EAC$ (góc nội tiếp cùng chắn CE)

mà $EBC = NCB$ (sole trong)

$\Rightarrow EAC = NCB$.

+ Ta có: $AMN = NBC$ (t/c góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow AMN + EAC = NBC + NCB = 90^0$ (ΔNBC vuông tại N)

$\Rightarrow AMK + KAM = 90^0 \Rightarrow AKM = 90^0 \Rightarrow MN \perp AE$ hay $MN \perp AO$ (đpcm)

+)Chứng minh G **là trọng tâm của tam giác** ABC

Xét hình bình hành $BHCE$ có I là trung điểm của BC (gt)

$\Rightarrow I$ là trung điểm của HE (t/c đường chéo hbh)

mà O là trung điểm của AE (AE là đường kính của (O) $\Rightarrow$OI là đường TB của $\triangle AHE \rightarrow AH = 2OI$

$OH \cap AI = G \rightarrow$G là trọng tâm của $\triangle AHE$

$\Rightarrow \dfrac{AG}{AI} = \dfrac{2}{3}$, mà G thuộc trung tuyến AI của tam giác ABC (gt)

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác ABC (tính chất ba đường trung tuyến của tam giác).

c) Chứng minh $PQ//MN$

+ Xét đường tròn tâm O: $PQC = PBC$ (góc nội tiếp cùng chắn PC)

+ Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BNMC$: $PBC = MNC$ (góc nội tiếp cùng chắn MC)

$\Rightarrow PQC = MNC$ mà chúng ở vị trí sole trong

$\Rightarrow PQ//MN$ (dhnb).

+ Tìm vị trí của A để diện tích tam giác AMH lớn nhất.

+ Kẻ đường cao ME của tam giác AMH.

Ta có: $S_{AMH} = \dfrac{1}{2} AH.ME$ mà $AH = 2OI$ (cmt)

Vì I là trung điểm của BC (gt) nên $OI \perp BC$ cố định (t/c đường kính và dây cung). Do đó OI không đổi.

$\Rightarrow AH$ không đổi.

$\Rightarrow$ Diện tích của tam giác AMH lớn nhất khi đường cao ME lớn nhất.

+ Gọi J là trung điểm của AH.

Vì tam giác vuông MAH vuông tại H: $MJ = \dfrac{1}{2} AH$ không đổi.

mà $ME \le MJ$

$\Rightarrow$ ME lớn nhất bằng MJ không đổi khi $E \equiv J$. Khi đó tam giác MAH vuông cân tại M.

$\Rightarrow HAM = 45^0$ mà $AH \perp BC$ (H là trực tâm của ΔABC) $\Rightarrow$ $ACB = 45^0$.

Vậy S_{AMH} lớn nhất $\Leftrightarrow$ $ACB = 45^0$.

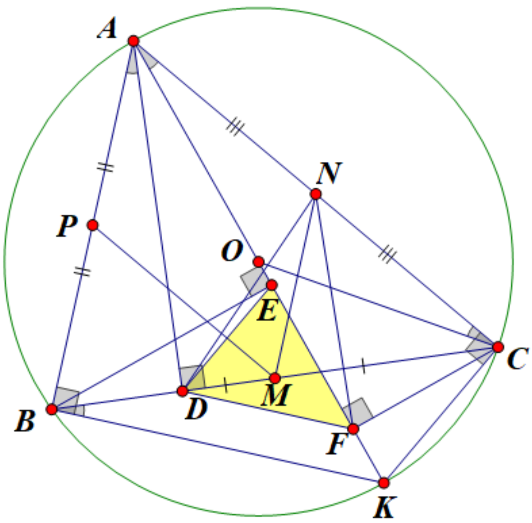
Câu 104.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O).Kẻ đường cao AD và đường kính AK .Hạ BE và CF cùng vuông góc với AK

a) Chứng minh rằng $ABDE$ nội tiếp và $DF//BK$

b) Chứng minh rằng $OCA = BAD$ và $AB^2 = AE.AK$

c) Tính $S_{quat}OKC$ biết $ABC = 60^0$ và $R = 4cm$ và chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cố định khi BC cố định , A chuyển động trên $\frac{1}{2}(O)$ thỏa mãn tam giác ABC nhọn

Hướng dẫn



a) Chứng minh rằng $ABDE$ nội tiếp và $DF//BK$

Ta có AD là đường cao $ADB = 90^0$ và $BE \perp AK$ nên $AEB = 90^0$ mà E và D là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AB dưới 1 góc vuông $\Rightarrow ABDE$ nội tiếp

Cmtt ta có $\Rightarrow ADFC$ nội tiếp $\Rightarrow CAK = CDF$ và $CAK = CBK$ ($ABKC$ nội tiếp)

$\Rightarrow CDF = CBK$ mà 2 góc ở vị trí đồng vị => $DF//BK$

b) Chứng minh rằng $OCA = BAD$ và $AB^2 = AE.AK$

Xét tam giác ABK có AK là đường kính => tam giác ABK vuông tại B

ta có $OCA = OAC$ (vì tam giác OAC cân tại O)

mà $CAK = OAC = CBK$ ($ABKC$ nội tiếp)

ta lại có $ABD + CBK = 90^0$ (tam giác ABK vuông tại B) và $ABD + BAD = 90^0$ (tam giác ABD vuông tại D) $\Rightarrow CBK = BAD \Rightarrow OCA = BAD$.

Xét ABK vuông tại B có $BE \perp AK$ $\Rightarrow AB^2 = AE.AK$ (hệ thức về đường cao và cạnh trong tam giác vuông).

c) Tính $S_{quat}OKC$ biết $ABC = 60^0$ và $R = 4cm$ và chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cố định khi BC cố định , A chuyển động trên $\frac{1}{2}(O)$ thỏa mãn tam giác ABC nhọn.

Ta có $ABC = 60^0 \Rightarrow KBC = 30^0 \Rightarrow KAC = 30^0 \Rightarrow KOC = 60^0$ (quan hệ góc nội tiếp và góc ở tâm) $\Rightarrow$

$S_{quat}OKC = \frac{4^2.\pi.60^0}{360^0} = \frac{8\pi}{3}(dvdt)$

Gọi $M;N;P$ lần lượt là trung điểm của $BC;AC;AB \Rightarrow MN//AB$ mà $AB \perp BK \Rightarrow MN \perp BK$

Mà $BK//DF \Rightarrow MN \perp DF$ (1)

Xét ΔADC vuông tại D có N là trung điểm $\Rightarrow DN = \frac{1}{2}AC$

Xét ΔAFC vuông tại F có N là trung điểm $\Rightarrow FN = \frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow DN = FN$ (2) từ (1) và (2) $\Rightarrow MN$ là đường trung trực của $DF \Rightarrow MD = MF$ (3)

Cmtt ta có MP là đường trung trực của $DE \Rightarrow MD = ME$ (4)

Từ (3) và (4) ta có M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF mà M là TĐ của BC và BC cố định

$\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cố định khi BC cố định , A chuyển động trên $\frac{1}{2}(O)$ thỏa mãn tam giác ABC nhọn.

Câu 105.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các đường cao BE,CF cắt nhau tại H, cắt đường tròn $(O;R)$ lần lượt tại M và N.

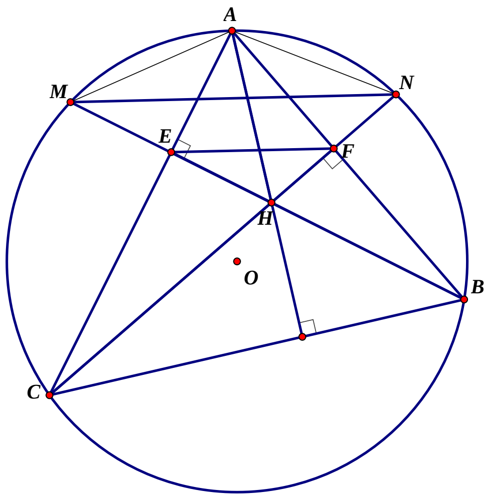
a. Chứng minh AE.AC=AF.AB

b. Chứng minh MN song song với EF

c. Chứng minh $\frac{MH}{AH} < 2$

d. Cho BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Chứng minh diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi.

Hướng dẫn



a.Xét ΔACF và ΔABE có $\begin{cases} AEB=AFC=90^0 \\ A \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta ACF \backsim \Delta ABE (g.g)$

$\rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} \rightarrow AE.AC = AF.AB$

b. Xét tứ giác EFBC có $CEB=CFB=90^0$ (2 góc cùng nhìn cạnh BC) $\Rightarrow$□EFBC nội tiếp

$\Rightarrow EBC=EFC$ (cung chan EC)(1); $MBC=MNC$(2)(goc noi tiep cung chan cung MC)

Từ (1), (2) $\Rightarrow EFC = MNC \Rightarrow EF // MN$

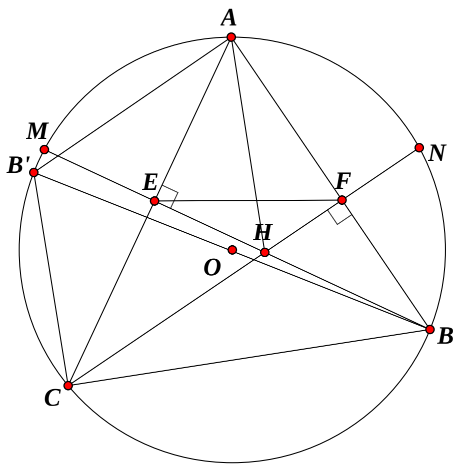
c. Ta có: $AEH = HFA = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp

$\Rightarrow EAH = HFE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn EH)

Mà $HFE = MNC, MNC = MAC$ (MANC nội tiếp (O)) $\Rightarrow MAE = EAH$

$\Rightarrow$Tam giác AMH cân tại A (do AE vừa là phân giác vừa là đường cao)

$\Rightarrow MH = 2EH \Rightarrow EH = \dfrac{MH}{2} < AH \Rightarrow \dfrac{MH}{AH} < 2$



d. kẻ đường kính BB’.$\Rightarrow B'CB = 90^0 \Rightarrow B'C \perp BC$, mà $AH \perp BC$ (H là trực tâm $\triangle ABC$) $\Rightarrow B'C // AH$

$B'AB = 90^0 \Rightarrow B'A \perp AB$, mà $CH \perp AB(gt) \Rightarrow B'A // CH$

$\Rightarrow$ $AHCB'$ là hình bình hành $\Rightarrow AH = CB'$

Tam giác CBB' vuông tại C có $BB' = 2R,\ BC$ không đổi suy ra CB' không đổi suy ra AH không đổi.

Ta có $AEHF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AH, suy ra AH là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF suy ra diện tích đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi. (đpcm)

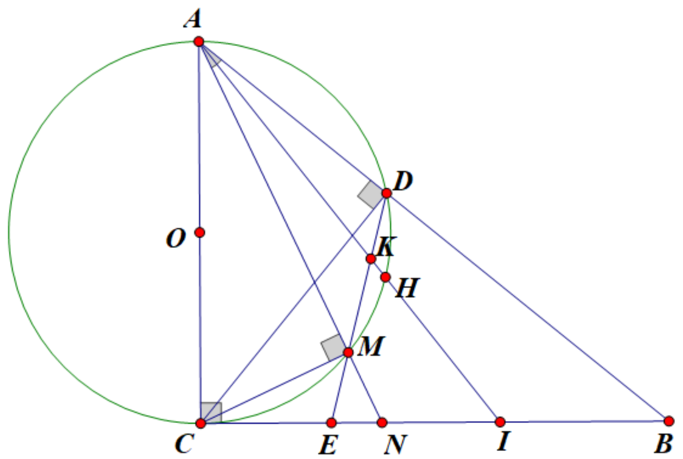
Câu 106.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC vuông tại C. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AC cắt AB tại D. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ CD. Nối AM cắt BC tại N. Nối DM cắt BC tại E. Tia phân giác của MAD cắt BC tại I, cắt MD tại K.

a. Chứng minh: BDMN là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh tam giác EIK cân

c. Chứng minh $MN.AB = MC.NB$

Hướng dẫn



a. Chứng minh: BDMN là tứ giác nội tiếp.

+ Ta có: $ADC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\rightarrow$ $MDB + MDC = 90^0$

Mà $CAM + ANC = 90^0, CAM = MDC$ (góc nt cùng chắn CM)

$\Rightarrow MDB = ANC$

+ Xét tứ giác $BDMN$ có: $MDB = ANC$ mà ANC là góc ngoài tại đỉnh N , N là đỉnh đối diện với đỉnh D

$\Rightarrow BDMN$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

b. Chứng minh tam giác EIK cân

Gọi $\{H\} = AI \cap (O)$

+ Xét đường tròn (O) có:

$MAH = HAD \Rightarrow HM = DH$

MKH là góc có đỉnh bên trong đường tròn chắn $AD,\ MK \Rightarrow MKH = \frac{1}{2}\left(sd\,AD + sd\,HM\right)$

AIC là góc có đỉnh bên ngoài đường tròn chắn $AC,\ HC \Rightarrow AIC = \frac{1}{2}\left(sd\,AC - sd\,HC\right)$

$\Rightarrow AIC = \frac{1}{2} sd\,AH = \frac{1}{2}\left(sd\,AD + sd\,DH\right) = \frac{1}{2}\left(sd\,AD + sd\,HM\right)$

$\Rightarrow MKH = AIC$

$\Rightarrow\ \Delta EKI$ cân tại E

c. Chứng minh $MN.AB = MC.NB$

+ Ta có: $\Delta MNC \sim \Delta CNA(g.g) \Rightarrow \frac{MN}{MC} = \frac{CN}{CA}$

+ Xét (O) có: $MC = MD \Rightarrow CAM = MAD$

+ Xét ΔCAB có AN là tia phân giác của $CAB \Rightarrow \frac{BN}{BA} = \frac{CN}{CA}$

$\Rightarrow \frac{MN}{MC} = \frac{BN}{BA}\left(= \frac{CN}{CA}\right) \Rightarrow MN.BA = MC.BN$ (đpcm)

Câu 107.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) có đường kính AB=2R và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B,C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt tia BE tại điểm F.

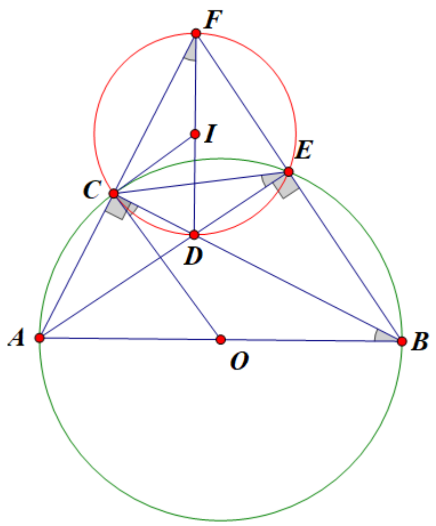
a) Chứng minh FCDE là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh DA.DE = DB. DC

c) Chứng minh $CFD = OCB$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCDE, chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Cho biết $DF = R$. Chứng minh $\tan AFB = 2$

Hướng dẫn



a) Ta có: $ACB = AEB = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow FCD + FED = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác FCDE nội tiếp đường tròn.

b)Xét (O) có: $CEA = CBA$ (góc nt cùng chắn AC) $\Rightarrow \triangle DCE \sim \triangle DAB(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{DC}{DE}=\dfrac{DA}{DB}\Rightarrow DA.DE=DB.DC$

c)+Ta có: tứ giác FCDE nt đường tròn (I) $\Rightarrow CFD=CED, CED=CBA(cmt)$

$\vartriangle OBC$ cân tại O $\Rightarrow CBA=OCB\Rightarrow OCB=CFD(dfcm)$

+ (I) có: $CFD=CDO\Rightarrow$CO là tiếp tuyến của đường tròn (I) (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung CD

d/ Cho biết $DF=R$. Chứng minh $\tan AFB=2$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta CDF\backsim\Delta CAB\Rightarrow \dfrac{CB}{CF}=\dfrac{AB}{DF}=\dfrac{2R}{R}=2\\ \tan AFB=\dfrac{CB}{CF}(\Delta CFB)\end{array}\right\}\Rightarrow \tan AFB=2$$

Câu 108.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$. B và C là hai điểm thuộc đường tròn sao cho $BOC=120^0$. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại A. Gọi M là điểm tùy ý trên cung nhỏ BC (M khác B và C). Tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt AB và AC lần lượt tại E và tại F.

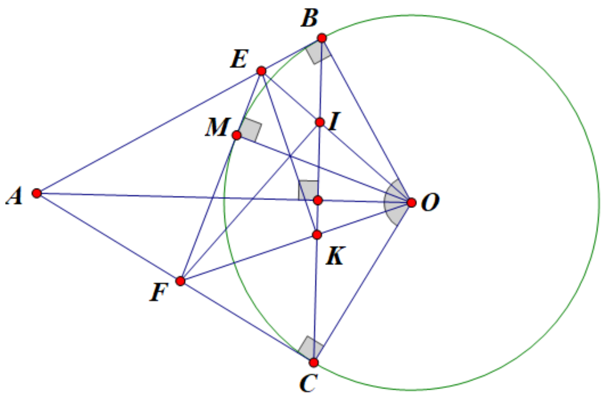
a) Chứng minh ΔABC là tam giác đều

b) Tính theo R chu vi ΔAEF

c) Gọi I và K lần lượt là giao điểm của OE và OF với BC. Chứng minh EK, OM, FI cùng đi qua 1 điểm

d) Tính tỉ số $\dfrac{EF}{IK}$

Hướng dẫn



a) Vì AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $ABC=ACB=\dfrac{1}{2}BOC=60^0$

Do đó ΔABC là tam giác đều.

b) Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có $EB=EM$, $FC=FM$, $AC=AB$ nên chu vi tam giác ΔAEF là:

$AF+AE+EF\ =AF+AE+(EM+MF)=AE+EB+AF+FC=AC+AB=2AC$.

Cũng theo tính chất tiếp tuyến ta có: $COA = BOA = 60^0; OC \perp AC$.

Do đó: $AC = OC.\tan 60^0 = R\sqrt{3}$. Vậy chu vi tam giác $AEF = 2R\sqrt{3}$

c) Có OE là phân giác của MOB, OF là phân giác của MOC suy ra

$$EOF = EOM + MOF = \frac{1}{2}(BOM + MOC) = \frac{1}{2}BOC = 60^0.$$

Mặt khác $BCA = CBA = 60^0$ (câu a), $IOF = ICF = 60^0, EOK = EBK = 60^0$, suy ra COIF và BOKE là tứ giác nội tiếp. Do đó $OIF = 180^0 - OCF = 90^0; OKE = 180^0 - OBE = 90^0$ nên $EIF = EKF = 90^0$.

Theo tính chất tiếp tuyến $OM \perp EF$. Vậy OM, EK, FI là 3 đường cao của tam giác OEF nên chúng đồng quy tại 1 điểm

d) Tứ giác EIKF có $EIF = EKF = 90^0$ (CMT) nên EIKF là tứ giác nội tiếp, suy ra $OIK = OFE$,

lại có EOF chung nên $\Delta OIK \sim \Delta OFE (g-g)$.

Do đó $\frac{IK}{EF} = \frac{OK}{OE} = \cos EOK = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$. Vậy $\frac{EF}{IK} = 2$

Câu 109.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AH, cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

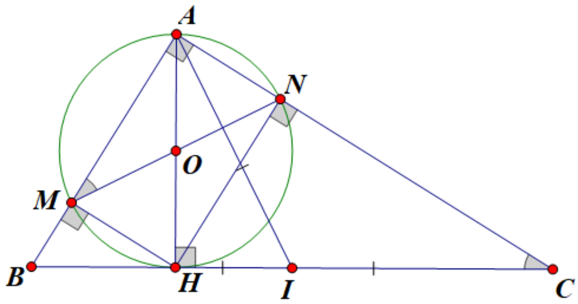
a) Ba điểm M, O, N thẳng hàng

b) $BMNC$ là tứ giác nội tiếp

c) $AI \perp MN$

d) $BM.BA + CN.CA \geq 2AH$

Hướng dẫn



a) Vì $MAN = 90^0$ ($\triangle ABC \perp$ tại A) nên MN là đường kính của đường tròn (O). Do đó ba điểm M, O, N thẳng hàng

b) Có $ACB = BAH$ (cùng phụ với HAC). Mà $OA = OM = R$ nên $\triangle OAM$ cân tại O $\Rightarrow OMA = OAM$

Do đó $AMO = ACB \Rightarrow$ tứ giác BMNC là tứ giác nội tiếp.(tc góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

c) ΔABC vuông tại A có I là TĐ của cạnh huyền BC nên $IA = IB =$ IC $\Rightarrow \triangle IAB$ cân tại I $\Rightarrow ABC = IAB$

mà $AMO = ACB$ (cmt), mà $ABC + ACB = 90^0$, suy ra $AMO + IAB = 90^0$. Do đó $AI \perp MN$

d) Có $AMH = ANH = 90^0$ (góc nt chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow MH \perp AB, NH \perp AC \Rightarrow BM.BA = BH^2$;

$CN.CA = CH^2$; $BH.CH = AH^2$

$\Rightarrow BM.BA + CN.CA = BH^2 + CH^2 \geq 2BH.CH = 2AH(dpcm)$

Câu 110.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính BC, Gọi A là điểm chính giữa cung BC. Điểm M thuộc đoạn BC. Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AC$, $MN \perp EF$ tại N

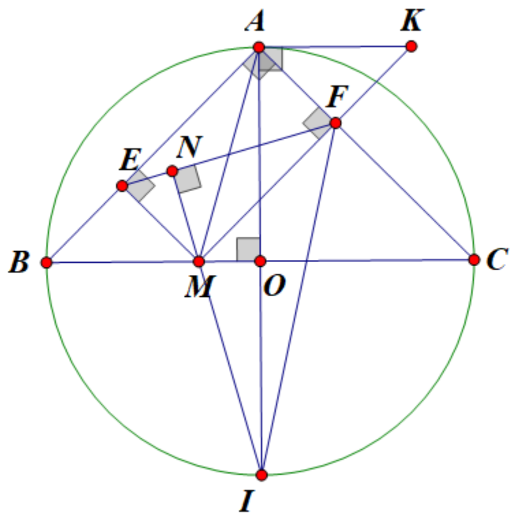
a) Chứng minh năm điểm A, E, O, M, F thuộc một đường tròn

b) Chứng minh $BE . BA = BO. BM$

c)Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại A cắt MF tại K . Chứng minh $BE = KF$

d) Khi M di chuyển trên BC , chứng minh rằng MN luôn đi qua 1 điểm cố định

Hướng dẫn



a) Vì A là điểm chính giữa $BC \Rightarrow AB = AC \Rightarrow OA \perp BC$, có $MEA = MFA = MOA = 90^0$ nên 5 điểm A, E, O, M, F thuộc đường tròn đường kính AM

b) $\Delta BEM \backsim \Delta BOA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BE}{BO} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow BE.BA = BO.BM$

c) ΔABC vuông cân tại A nên $ABC = 45^0$. Mà AK là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) nên $KAC = ABC = 45^0$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn AC) . Do đó các ΔBEM và ΔFAK vuông cân $\Rightarrow BE = ME$ và $AF = FK$.

Mặt khác $BAC = 90^0$ (góc nt chắn nửa đtr) $\rightarrow$ $MEAF$ là hình chữ nhật nên $ME = AF$. Từ đó suy ra $BE = KF$.

d)+ Vẽ đường kính AI, . Ta có $AI \perp BC \Rightarrow CMI + MIO = 90^0$, Mà $MIO = MAO$ ($\triangle MAI$ cân do có MO là đường cao đồng thời là đường trung tuyến) $\Rightarrow CMI = 90^0 - MAO$ (1)

+ MF//AB (cùng $\perp AC$) $\Rightarrow FMC = ABO \Rightarrow FMC = BAO$ ($\triangle ABO$ vuông cân tại O) (2)

+ $MN \perp$ EF $\Rightarrow NMF = 90^0 - MFE$, lại có t.giác AEMF nội tiếp $\Rightarrow MFE = BAM$ (góc nt cùng chắn EM)

$\Rightarrow NMF = 90^0 - BAM$ (3)

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow NMF + FMC + CMI = 180^0 + FMC - (BAM + MAO) = 180^0 + FMC - BAO = 180^0$

Vậy N, M, I thẳng hàng , Mà I cố định do A cố định

Vậy MN luôn đi qua điểm cố định I là điểm chính giữa cung BC không chứa điểm A

Câu 111.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn (O,R) đường kính $AB,$ bán kính $OC\perp AB$. Điểm E thuộc đoạn OC. Nối AE cắt nửa đường tròn tại M. Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt OC tại D, BM cắt OC tại K .

a) ΔDME là tam giác cân.

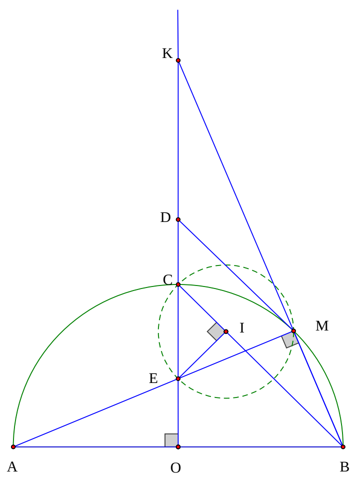
b) Chứng minh $BM.BK$ không đổi khi E di chuyển trên OC.

c) Tìm vị trí của điểm E để $MA=2MB.$

d) Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔCME.

CMR: khi E chuyển động trên OC thì I luôn thuộc 1 đường thẳng cố định.

Hướng dẫn



a) $BMA=BOE=90^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác $BMEO$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow ABM=MED$.

Mà $ABM=DMA$(góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn AM)

$\Rightarrow DMA=MED\Rightarrow \Delta DME$ cân tại D.

b) $\Delta BOK\sim \Delta BMA\ (g.g)\Rightarrow \dfrac{BO}{MB}=\dfrac{BK}{BA}$ $\Rightarrow BM.BK=BO.BA=2R^2$ không đổi.

c) $\tan MAB=\dfrac{MB}{MA}=\dfrac{OE}{OA}$

$MA=2MB\Leftrightarrow \dfrac{OE}{OA}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow OE=\dfrac{OA}{2}=\dfrac{R}{2}\Leftrightarrow E$ là trung điểm của OC.

d) Có $CMA=\dfrac{1}{2}COA=45^0$,Mà $CMA=\dfrac{1}{2}CIE=45^0\Rightarrow CIE=90^0$

Lại có $\mathrm{IC}=\mathrm{IE}=\mathrm{r}\Rightarrow \Delta\mathrm{ICE}$ vuông cân tại $\mathrm{I}\Rightarrow \mathrm{ECI}=45^0$ (1)

Theo giả thiết: $\mathrm{OC}\perp\mathrm{OB},\mathrm{OC}=\mathrm{OB}=\mathrm{R}\Rightarrow$ $\Delta\mathrm{CAB}$ vuông cân tại O $\Rightarrow \mathrm{OCI}=\mathrm{COB}\Rightarrow \mathrm{C,I,B}$ thẳng hàng

$\Rightarrow \mathrm{OCB}=45^0$ (2)

Từ (1) và (2) $\mathrm{OCI}=\mathrm{OCB}\Rightarrow \overline{\mathrm{C,I,B}}$ $\Rightarrow \mathrm{I}\in\mathrm{BC}$ cố định.

Câu 112.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O,R). Kẻ đường cao AD và đường kính AK. Hạ BE và CF cùng vuông góc với AK.

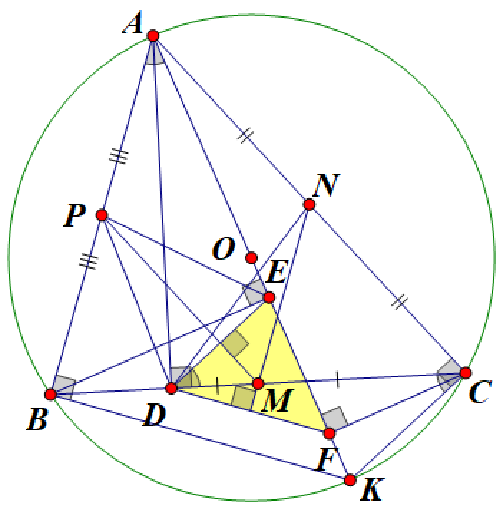
a)Chứng minh $ABDE$ và $ACFD$ là tứ giác nội tiếp

b)Chứng minh $DF//BK$

c)Cho $ABC=60^0, R=4cm$. Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi OC, OK và cung nhỏ CK.

d) Cho BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF là một điểm cố định

Hướng dẫn



a) $ADB = AEB = 90^0; ADC = AFC = 90^0$ nên các tứ giác $ABDE$ và $ACFD$ là tứ giác nội tiếp

b)Tứ giác $ADFC$ nội tiếp $\Rightarrow CDF = CAF$. Mà $CAF = CBK$ (t.giácABKC nội tiếp)

$\Rightarrow CBK = CDF \Rightarrow DF//BK$

c) $CBA = 60^0 \Rightarrow AOC = 120^0 \Rightarrow COK = 60^0 \Rightarrow S_q = \dfrac{60.\pi.4^2}{360} = \dfrac{8\pi}{3}\left(cm^3\right)$

d)+ Gọi M, N ,P lần lượt là trung điểm của BC và AC, $\Rightarrow MN//AB$ (MN là đường trung bình $\triangle$ABC)

mà $ABK = 90^0$ (chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AB \perp BK \Rightarrow MN \perp BK$. Mà $BK//DF \Rightarrow MN \perp DF$. Các $\Delta ADC, \Delta AFC$ vuông tại D và F có chung cạnh huyền AC, N là TĐ AC$\Rightarrow ND = NF$

$\Rightarrow \triangle$DNF cân tại N có MN là đường cao $\Rightarrow$ MN là đường trung trực của DF $\Rightarrow MD = MF$ (1)

+ Tương tự : Tứ giác ABDE nội tiếp $\Rightarrow$ BAK = EDC (t.c góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

Mà BAK = BCK (góc nt cùng chắn BK) $\Rightarrow$ EDC = BCK , 2 góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow$ DE / /CK

Lại có: ACK $= 90^0$ (góc nt chắn nửa đtr) $\rightarrow$ CK $\perp$ AC $\Rightarrow$ DE $\perp$ AC, Mà AC / /MP (MP là đường TB)

$\Rightarrow$ MP $\perp$ DE

Các $\triangle$AEB,$\triangle$ADB $\perp$ tại E và D có chung cạnh huyền AB, P là TĐ AB $\Rightarrow$ DP = EP $\Rightarrow\triangle$DEP cân tại P, có MP là đường cao $\Rightarrow$MP là đường trung trực của DE$\Rightarrow$ MD = ME (2)

Từ (1) và (2)$\Rightarrow$ $MD = ME \Rightarrow MF$ nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF . Vì BC cố định nên M cố định.

Câu 113.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn $(O;R)$, đường kính BC và điểm A thuộc nửa đường tròn đó. Dựng về phía ngoài ΔABC hai nửa đường tròn; nửa đường tròn tâm I, đường kính AB; nửa đường tròn tâm K, đường kính AC. Một đường thẳng d thay đổi qua A cắt nửa đường tròn (I) và (K) tương ứng tại M và N.

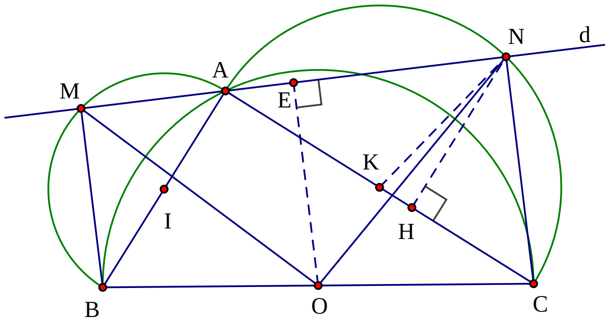
a) Tứ giác $MNCB$ là hình gì?

b) Chứng minh $AM.AN = MB.NC$

c) Chứng minh ΔOMN là tam giác cân

d) Xác định vị trí của đường thẳng d để S_{BMNC} lớn nhất.

Hướng dẫn



a) AMB, ANC là hai góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow AMB = ANC = 90° \Rightarrow BM \perp MN, CN \perp MN \Rightarrow BM // NC \Rightarrow$ Tứ giác $MNCB$ là hình thang vuông

b) Vì $BAC = 90°$ (góc nt chắn nửa đtr) và $\Rightarrow AMB = ANC = 90°$ nên $MAB = NCA$ (cùng phụ NAC)

$\Rightarrow \Delta MAB \backsim \Delta NCA (g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{NC} = \dfrac{MB}{NA} \Rightarrow AM.AN = MB.NC$

c) Gọi E là trung điểm MN $\Rightarrow OE$ là đường trung bình của hình thang $BMNC$ $\Rightarrow OE//MB//NC$

$\Rightarrow OE \perp MN \Rightarrow OMN$ cân tại O.

d) Vì ΔABC cố định $\Rightarrow S_{ABC}$ không đổi. Do đó S_{BMNC} max $\Leftrightarrow (S_{MBA} + S_{NAC})$ max

Vì $\Delta MAB \backsim \Delta NCA$ với tỉ số $k = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow S_{MAB} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 .S_{NCA}$ 2Q

$S_{MBA} + S_{NAC} = \left(1 + \dfrac{AB^2}{AC^2}\right).S_{ANC} \Leftrightarrow S_{ANC}$ max

Hạ $NH \perp AC$, K là TĐ AC, ta có: $NH \le NK = \dfrac{1}{2}AC$, dấu "=" xảy ra khi $H \equiv K \Rightarrow \triangle NAC$ vuông cân tại

$N \Rightarrow NCA = 45^0$, mà AC không đổi nên S_{BMNC} lớn nhất khi d tạo với AC một góc 45^0

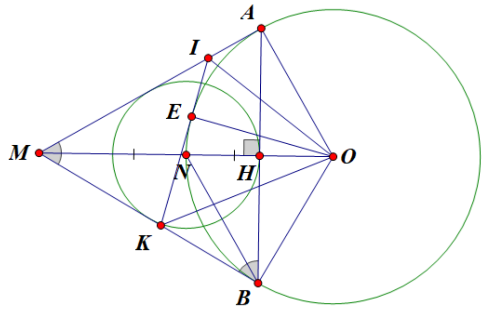
Câu 114.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$, M là điểm nằm ngoài đường tròn sao cho $OM = 2R$. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn. Gọi E là điểm thuộc cung nhỏ AB. Tiếp tuyến của đường tròn tại E cắt MA, MB lần lượt tại I và K.

a) Tính số đo AMB và IOK

b) Tính chu vi tam giác MIK theo R

c) Tính bán kính r đường tròn nội tiếp tam giác MAB theo R.

Hướng dẫn



a) Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau thì $OA \perp MA$ và $OMA = OMB$

Ta có $\sin OMA = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow OMA = 30^\circ$ nên $AMB = 60^\circ$ và $AOM = 60^\circ$

Mà OM là phân giác của $AOB \Rightarrow AOB = 120^\circ$

Tương tự OI là phân giác của AOE; OK là phân giác của BOE

$\Rightarrow IOK = IOE + EOK = \dfrac{1}{2}(AOE + EOB) = \dfrac{1}{2}AOB = 60^\circ$

b) Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau, tac có: $IE = IA; KE = KB; MA = MB$. Do đó chu vi ΔMIK bằng:

$$MI + IK + KMM = MI + (IE + EK) + KM = MA + MB = 2MA$$

Xét tam giác AMO vuông tại A ta có: $MA = OM.\cos 30^\circ = R\sqrt{3}$

Vậy chu vi ΔMIK bằng $2R\sqrt{3}$

c) OM cắt AB tại $H \Rightarrow \mathrm{MH} \perp \mathrm{AB}$, OM cắt cung nhỏ AB tại N.

Ta có: MB là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow \mathrm{MBN} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BON}$, $\mathrm{NBA} = \dfrac{1}{2}\mathrm{NOA}$ (góc nt và góc ở tâm cùng chắn AN)

Mà $\mathrm{BON} = \mathrm{NOA} \Rightarrow \mathrm{MBN} = \mathrm{NBA} \Rightarrow$ NB là tia phân giác MBA

Lại có MN là tia phân giác BMA , $\mathrm{MN} \cap \mathrm{NB} = \mathrm{N}$ nên N là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB, do đó $r = NH$

ΔOBN có $BON = 60^\circ$ và $OB = ON$ nên là tam giác đều

Có $BH \perp ON$ nên $NH = HO = \dfrac{R}{2}$. Vậy $r = \dfrac{R}{2}$.

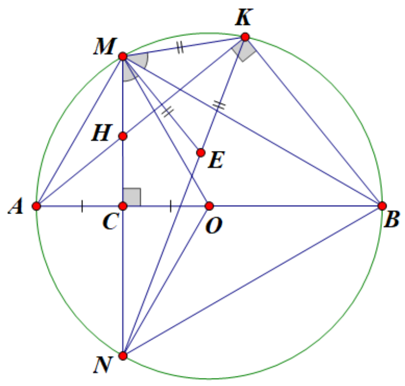
Câu 115.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK và MN.

a/ Chứng minh BCHK là tứ giác nội tiếp.

b/ Tính tích $AH.AK$ theo R

c/ Xác định vị trí của điểm K để tổng $\left(KM+KN+KB\right)$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Hướng dẫn



a) Do AB là đường kính nên $\widehat{AKB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Theo giải thiết $MN\perp AB$ tại C $\Rightarrow \widehat{HCB}=90^0$

Suy ra tứ giác HCBK có $\widehat{HKB}=\widehat{HCB}=90^0$ nên là tứ giác nội tiếp.

b) Xét ΔAHC và ΔABK có $\widehat{HCA}=\widehat{AKB}=90^0$, $\widehat{KAB}$ chung

$\Rightarrow \Delta AHC$ đồng dạng ΔABK (g.g)$\Rightarrow \dfrac{AH}{AB}=\dfrac{AC}{AK}$

$\Rightarrow AH.AK=AC.AB=\dfrac{R}{2}.2R=R^2$ (Do C là trung điểm OA)

Vậy $AH.AK = R^2$

c) ΔOMN cân tại O có OC là đường cao$\Rightarrow$OC là đường trung tuyến, đồng thời là đường phân giác $\widehat{MON}$.

Lại có: $\cos \widehat{MOC}=\dfrac{OC}{OM}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \widehat{MOC}=60^0\Rightarrow \widehat{MON}=120^0$

ΔBMN có: BC là đường cao, BC cũng là đường trung tuyến, $\widehat{MBN}=\dfrac{1}{2}\widehat{MON}=60^0$ (góc nt và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{MN}$) $\Rightarrow$ ΔBMN đều. $\Rightarrow MN=MB\,(1)$

Lấy điểm E trên đoạn KN sao cho $KE=KM$

.Dễ thấy $\widehat{MKN}=\widehat{MBN}=60^0$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MN)$\Rightarrow$ ΔMKE đều$\Rightarrow ME=MK(2)$

Ta có: $\widehat{NMB}=\widehat{EMK}=60^0\Rightarrow$ $\widehat{EMN}=\widehat{KMB}$ ($=60^0$- $\widehat{EMB}$) (3)

Từ (1),(2),(3)$\Rightarrow$ $\Delta MEN=\Delta MKB$ (c.g.c)$\Rightarrow EN=KB$ (2 cạnh tương ứng)

$\Rightarrow KM+KB+KN=KE+EN+KN=2KN$

Nên $(KM+KB+KN)_{\max}\Leftrightarrow KN_{\max}$

Lại có $KN\le 2R$ .Dấu "=" xảy ra$\Leftrightarrow$ K, N, O thẳng hàng.

Vậy GTLN của $(KM+KN+KB)=4R$ khi và chỉ khi K là giao điểm của NO với cung $MB_{nhỏ}$.

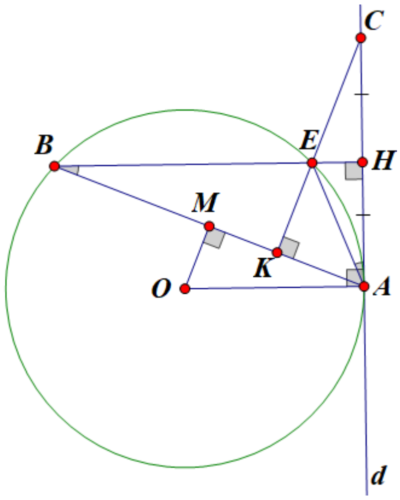
Câu 116.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên đường thẳng d lấy điểm H không trùng với điểm A và AH < R. Qua H kẻ một đường thẳng vuông góc với d, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B (E nằm giữa B và H).

a) Chứng minh $ABE = EAH$ và $\Delta ABH \backsim \Delta EAH$.

b) Lấy C trên d sao cho sao cho H là trung điểm của đoạn AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh: Tứ giác AHEK nội tiếp.

c) Xác định H để $AB = R\sqrt{3}$

Hướng dẫn



a) Ta có: $ABE = EAH$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AE)

$\Rightarrow \Delta ABH \backsim \Delta EAH$ (g.g) ($ABE = EAH$ và góc H chung)

b)+ $\Delta CEH \backsim \Delta CAK$ (g.g)$\Rightarrow CKA = CHE = 90^0 \Rightarrow CKA + EAH = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác AHEK nội tiếp.

c) Xác định H để $AB = R\sqrt{3}$

+ Từ O kẻ OM vuông góc với AB tại M $\Rightarrow$ M là trung điểm $AB \Rightarrow AM = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

+ ΔOMA vuông tại M có $\cos MAO = \dfrac{AM}{OA} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} : R = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MAO = 30^0 \Rightarrow BAH = 60^0$

Vậy H thuộc d sao cho $BH \perp d$ và $BAH = 60^0$.

Câu 117.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến $AB,\ AC$ với đường tròn ($B,\ C$ là các tiếp điểm)

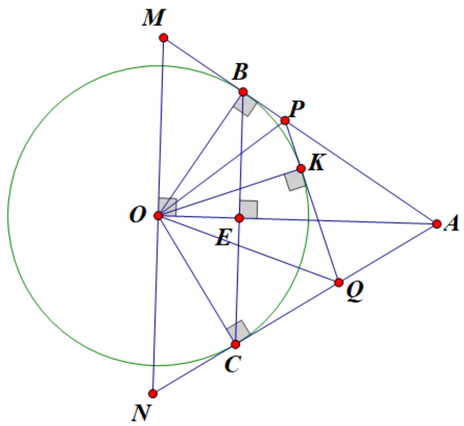
a/ Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp

b/ Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE.OA = R^2$

c/ Trên cung nhỏ BC của đường tròn $(O;R)$ lấy điểm K bất kì (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của đường tròn $(O;R)$ cắt $AB,\ AC$ theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K di chuyển trên cung nhỏ BC

d/ Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại các điểm M, N. Chứng minh $PM+QN \ge MN$

Hướng dẫn



a) Xét tứ giác $ABOC$ có

$ABO+ACO=90^0+90^0=180^0$,Mà hai góc ở vị trí đối nhau $\Rightarrow$Tứ giác $ABOC$ nội tiếp

b) Xét (O) có tiếp tuyến tại B và tiếp tuyến tại C cắt nhau ở A nên

$$\Rightarrow \begin{cases} AB=AC \\ AO \text{ là tia phân giác cua góc BAC} \end{cases}$$

Vì $E \in AO \Rightarrow AE$ là tia phân giác cua góc BAC

Xét ΔABC có $AB=AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

Lại có AE là tia phân giác cua góc BAC

Suy ra AE đồng thời là đường cao $\Rightarrow AE \perp BC$ *hay* $AO \perp BC$

Xét $\triangle$ABO vuông tại B ta có: $\mathrm{OE.OA}=\mathrm{OB}^2=\mathrm{R}^2$ (HTL)

c) Xét (O)

Có tiếp tuyến tại K và tiếp tuyến tại B cắt nhau tại P $\Rightarrow PK=PB$

Có tiếp tuyến tại K và tiếp tuyến tại C cắt nhau tại Q$\Rightarrow QK=QC$

Ta có :

$$P_{\Delta APQ}=AP+PQ+AQ=AP+PK+KQ+AQ=\left(AP+PB\right)+\left(QC+AQ\right)=AB+AC=2AB$$

Mà AB không đổi $\Rightarrow P_{\Delta APQ}$ không đổi (đpcm)

d) Chứng minh được $\Delta MOP \backsim \Delta NQO\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{MP}{ON}=\dfrac{OM}{QN} \Rightarrow PM.QN=OM.ON=\dfrac{MN^2}{4}$

Theo BĐT Cosi ta có

$PM+QN \ge 2\sqrt{PM.QN} \Rightarrow \left(PM+QN\right)^2 \ge 4PM.QN$

$\Rightarrow \left(PM+QN\right)^2 \ge 4.\dfrac{MN^2}{4} \Rightarrow \left(PM+QN\right)^2 \ge MN^2$

$\Rightarrow PM+QN \ge MN$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow PM = QN$

Câu 118.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B, C).Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt BE tại điểm F.

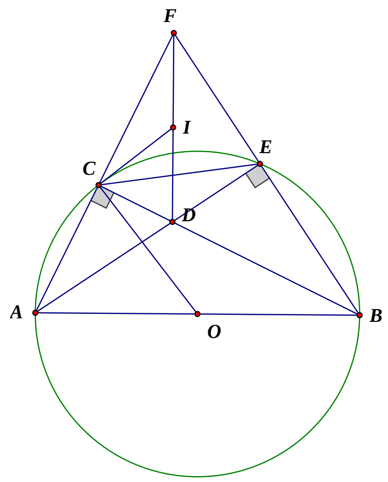
a) Chứng minh: $FCDE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh: $DA.DE = DB.DC$

c) Chứng minh: $CFD = OCB$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. Chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) Cho biết $DF = R$. Chứng minh $\tan AFB = 2$

Hướng dẫn



a) Chứng minh: $FCDE$ là tứ giác nội tiếp

$ACB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $BCF = 90^0$

$AEB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $AEF = 90^0$

Tứ giác $FCDE$ có: $BCF + AEF = 180^0$

Mà hai góc này là hai góc đối

$\Rightarrow FCDE$ là tứ giác nội tiếp (d.h.n.b)

b) Chứng minh: $DA.DE = DB.DC$

ΔACD đồng dạng ΔBED (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DE} \Rightarrow DA.DE = DB.DC$$

c) Chứng minh: $CFD = OCB$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. Chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

* $FCDE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow CFD = CED$ (góc nội tiếp chắn CD)

$CED = CBA$ (góc nội tiếp chắn AC)

$\Rightarrow CFD = OCB$

* I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$ $\Rightarrow I$ trung điểm FD

$\Rightarrow CI = ID \Rightarrow \Delta CID$ cân tại I $\Rightarrow ICD = IDC$

* OC = OB = R $\Rightarrow \Delta COB$ cân tại O $\Rightarrow OCB = OBC$

$CFD = OCB$ (cnt) $\Rightarrow CFD = OBC\left(= OCB\right)$

* $\Delta CDF : DCF = 90^0 \Rightarrow CDF + DFC = 90^0$ (hệ quả định lí tổng ba góc)

$\Rightarrow ICD + OCB = 90^0 \Rightarrow OCI = 90^0 \Rightarrow IC$ là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$

d) Cho biết $DF = R$. Chứng minh $\tan AFB = 2$

ΔCDF đồng dạng ΔCAB (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DF}{AB} = \dfrac{CF}{CB} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$

Xét ΔCFB vuông tại C: $\tan CFB = \dfrac{CB}{CF} = 2$

Câu 119.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai điểm A và B. Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M và N.

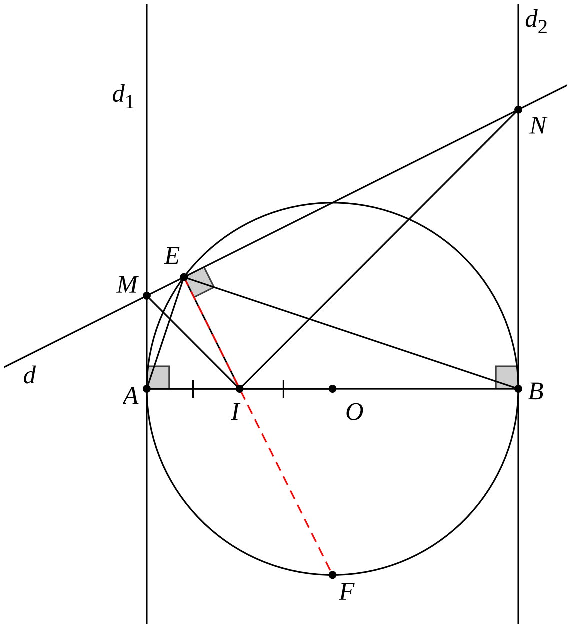
a) Chứng minh: Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $ENI = EBI$ và $MIN = 90°$.

c) Chứng minh: $AM.BN = AI.BI$.

d) Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn (O). Hãy tính diện tích của ΔMIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) Chứng minh: Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $AMEI$ có $MAI + MEI = 180°$ mà A và E là hai đỉnh đối diện

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $ENI = EBI$ và $MIN = 90°$.

+ Chứng minh tương tự câu a có: Tứ giác $BNEI$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ $ENI = EBI$ (hai góc nội tiếp cùng chắn EI)

+ Chứng minh ΔEAB vuông tại E có $EAI + EBI = 90°$

Mà $ENI = EBI$ và $EMI = EAI$ (Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow EMI + ENI = 90° \Rightarrow MIN = 90°$

c) Chứng minh: $AM.BN = AI.BI$.

+ Có: $\left.\begin{array}{l} MIA + NIB = 90° \\ INB + NIB = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow MIA = INB$

$$\Rightarrow \Delta MAI \sim \Delta IBN\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{AM}{BI} = \frac{AI}{BN} \Rightarrow AM.BN = AI.BI$$

d) Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn $\left(O\right)$. Hãy tính diện tích của ΔMIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

+ Xét đường tròn $\left(O\right)$ có: F là điểm chính giữa của AB

$$\Rightarrow AF = BF \Rightarrow AEF = BEF = \frac{1}{2}AEB = 45°$$

+ Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ $AMI = AEI$ $\Rightarrow$ $AMI = 45°$

+ ΔAMI vuông tại A $\Rightarrow$ $MI = \dfrac{AI}{\sin MAI} = \dfrac{\frac{R}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

+ Tương tự có $NI = \dfrac{BI}{\sin BNI} = \dfrac{\frac{3}{2}R}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{3R\sqrt{2}}{2}$

+ ΔMIN vuông tại I $\Rightarrow$ $S_{MIN} = \dfrac{MI.NI}{2} = \dfrac{\frac{R\sqrt{2}}{2}.\frac{3R\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{3R^2}{4}$

Câu 120.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB, M là điểm bất kì trên cung nhỏ AC (M khác A, C), BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

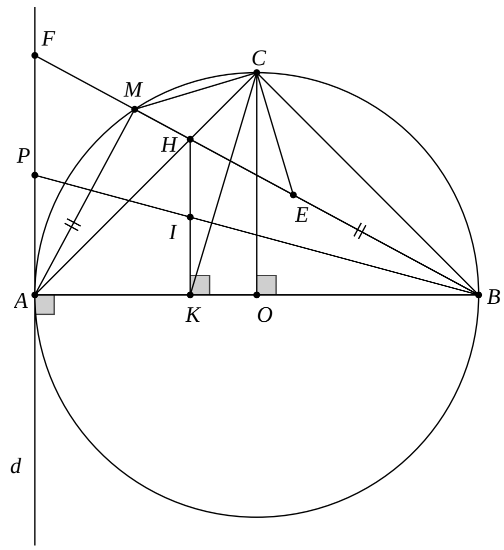
a) Chứng minh: Tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp,

b) Chứng minh: $ACM = ACK$.

c) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh: ΔECM là tam giác vuông tại C.

d) Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A. Cho P là một điểm nằm trên d sao cho P nằm cùng phía với C đối với đường thẳng AB và $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh: đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

Hướng dẫn



a) Chứng minh: Tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

+ Có $ACB = 90°$ (góc nt chắn nửa đtr)

+ Xét tứ giác $CBKH$ có: $HKB + HCB = 180°$ (do $HKB = 90°$, $HCB = 90°$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $ACM = ACK$.

+ Xét (O) có $MCA = MBA$ (góc nt cùng chắn cung MA)

+ Tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ $HCK = HBK$ (góc nt cùng chắn cung HK)

$\Rightarrow$ $ACM = ACK\left(= MBA\right)$

c) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh: ΔECM là tam giác vuông tại C.

+ Xét (O) có $MAC = MBC$ (góc nt cùng chắn cung MC)

+ Xét (O) có $CO \perp AB \Rightarrow CA = CB \Rightarrow CA = CB$

+ Chứng minh $\Delta CBE = \Delta CAM\,(c.g.c) \Rightarrow BCE = ACM$

Mà $BCE + ECH = ACB = 90°$

$\Rightarrow$ $ACM + ECH = 90° \Rightarrow MCE = 90°$

$\Rightarrow$ ΔECM là tam giác vuông tại C.

d) Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A. Cho P là một điểm nằm trên d sao cho P nằm cùng phía với C đối với đường thẳng AB và $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh: đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

+ Gọi $\{F\} = BM \cap d$ và $\{I\} = BP \cap HK$

+ $\dfrac{AP.MB}{MA} = R \Rightarrow AP.MB = MA.R \Rightarrow AP = \dfrac{MA.R}{MB}$

+ Chứng minh $\Delta BMA \backsim \Delta BAF\,(g.g) \Rightarrow AF = \dfrac{MA.AB}{MB} \Rightarrow AF = 2.\dfrac{MA.R}{MB} = 2.AP$

$\Rightarrow$ P là trung điểm của AF.

+ Chứng minh $HK//AF$

+ Có:

$$\left.\begin{array}{l} HI//FP \Rightarrow \dfrac{HI}{FP} = \dfrac{BI}{BP} \\ IK//PA \Rightarrow \dfrac{KI}{AP} = \dfrac{BI}{BP} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{HI}{FP} = \dfrac{KI}{AP} \text{ mà } FP = AP \Rightarrow HI = KI$$

$\Rightarrow$ I là trung điểm của HK

$\Rightarrow$ đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK

Câu 121.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì trên cung KB (M khác K, M khác B). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai N.

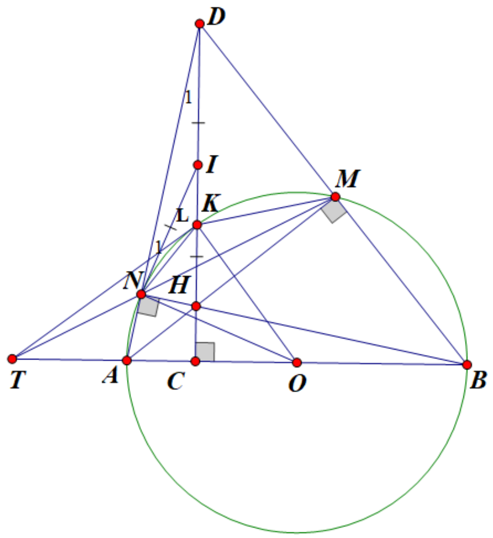
a) Chứng minh tứ giác $ACMD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $CA.CB = CH.CD$.

c) Chứng minh: ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn đi qua trung điểm của DH.

d) Khi M di động trên cung KB, chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn



a) Ta có $ANB = AMB = 90°$ (góc chắn nửa đường tròn).

Do đó, tứ giác $ACMD$ nội tiếp vì có $ACD = AMD = 90°$ (dhnb).

b) Ta có $HAB = CDB$ (cùng phụ với CBD). Do đó $\triangle CAH \sim \triangle CDB(g.g)$ suy ra

$$\frac{CA}{CH} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow CA.CB = CH.CD.$$

c) Dễ thấy H là trực tâm $\triangle ABD$. Hơn nữa $AN \perp BH$ tại N suy ra A, N, D thẳng hàng.

Gọi I là trung điểm của HD. Ta sẽ chứng minh $IN \perp NO$.

Vì I là trung điểm của HD, kết hợp với $HND = 90°$ suy ra $NI = ID = IH$.

Do vậy $N_1 = D_1$. Mặt khác $OAN = ONA$ nên $ONI = ONB + BNI = OBN + CHB = 90°$.

Hay $IN \perp NO$ tại $N, (N \in (O))$ suy ra IN là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

d) Gọi MN giao với AB tại T. Kẻ TL là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

$\Rightarrow TLN = LMN$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nt cùng chắn cung LN), T chung

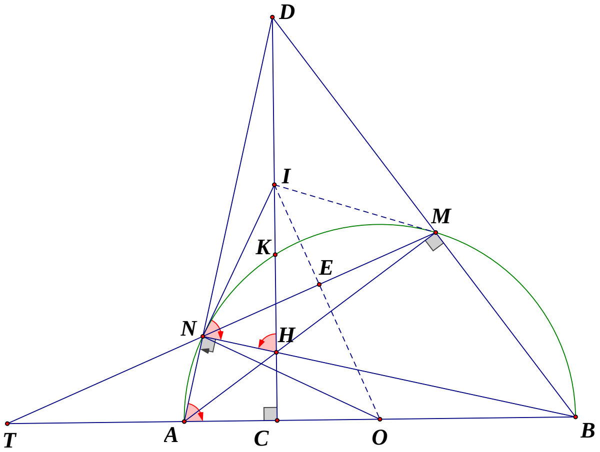
$\Rightarrow \triangle TLN \sim \triangle TML(g-g) \Rightarrow \dfrac{TL}{TM} = \dfrac{TN}{TL} \Rightarrow TL^2 = TM.TN.$ (1)

Ta có $IN \perp NO$ nên tương tự $IM \perp MO.$ Kết hợp với $OC \perp IC$ nên năm điểm I, N, C, O, M thuộc đường tròn đường kính $IO. \Rightarrow NMC = NOC$ (góc nt cùng chắn NC)

Suy ra $\triangle TNO \sim \triangle TCM(g.g) \Rightarrow TN.TM = TC.TO.$ (2)

Từ (1) (2) ta được $TC.TO = TL^2 \Rightarrow \dfrac{TN}{TC} = \dfrac{TO}{TM} \Rightarrow \triangle TCL \sim \triangle TLO(\text{c.g.c}) \Rightarrow LC \perp TO$ (hơn nữa L thuộc nửa đường tròn (O)) nên $L \equiv K.$ Do vậy T là giao điểm của tiếp tuyến tại K và AB nên T cố định.

Cách 2:



a) Ta có $ANB = AMB = 90°$ (góc chắn nửa đường tròn).

Do đó, tứ giác $ACMD$ nội tiếp vì có $ACD = AMD = 90°$ (dhnb).

b) Ta có $HAB = CDB$ (cùng phụ với CBD). Do đó $\triangle CAH \sim \triangle CDB(g.g)$ suy ra

$\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CH}{CB} \Rightarrow CA.CB = CH.CD.$

c) Dễ thấy H là trực tâm $\triangle ABD.$ Hơn nữa $AN \perp BH$ tại N suy ra A, N, D thẳng hàng.

Gọi I là giao điểm của tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn với DH. Ta chứng minh I là trung điểm của DH.

Ta có $NAB = INB$ (góc nt và góc tạo bởi tia tt và dây cung cùng chắn NB của (O))=> $NAC = INH$

Lại có $NAC = NHI$ (cùng phụ với ADC). Do đó $NHI = INH$ => ΔINH cân tại I $\Rightarrow IN = IH$

Mặt khác $DNI + INH = NDI + NHI = 90^0; NHI = INH$ => $DNI = NDI$ => ΔDNI cân tại I => $ID = IN$

Do đó $IH = ID$ => I là trung điểm của DH.

d) Ta có I là trung điểm của DH => $IN = IM$ ($= \dfrac{1}{2}DH$) mà $OM = ON$ => OI là đường trung trực của MN $\Rightarrow OI \perp MN$ tại E

ΔINO vuông tại N có $NE \perp IO => OE.OI = ON^2 = OA^2$ (1)

Gọi giao điểm của MN với đường thẳng BA là T.

Ta có $\Delta OET \sim \Delta OCI(g.g) \Rightarrow \dfrac{OE}{OC} = \dfrac{OT}{OI} => OT.OC = OE.OI$ (2)

Từ (1) (2) ta được $OT.OC = OA^2 => OT = \dfrac{OA^2}{OC}$.

Mà O, A. C cố định nên OT không đổi => T cố định.

Vậy khi M chuyển động trên cung KB thì đường thẳng MN luôn đi qua điểm T cố định.

Câu 122.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt lại các điểm H và K.

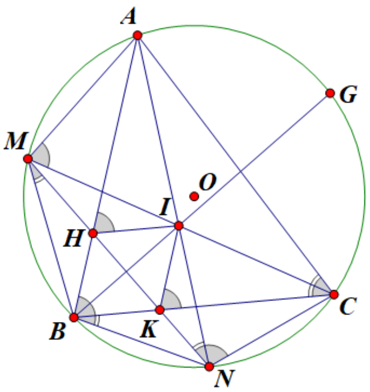
a) Chứng minh: 4 điểm C, N, K, I cùng thuộc 1 đường tròn.

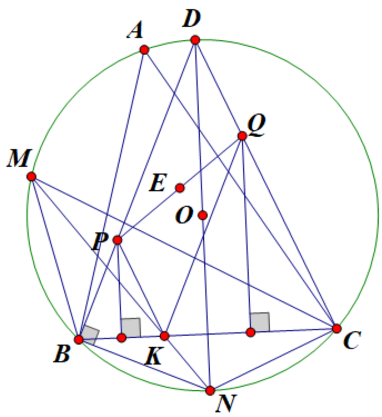
b) Chứng minh: $NB^2 = NK.NM$

c) Chứng minh tứ giác BHIK là hình thoi.

d) Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Hướng dẫn





a) Chứng minh: 4 điểm C, N, K, I cùng thuộc 1 đường tròn.

Vì M là điểm chính giữa cung nhỏ AB của (O) (giả thiết)

Suy ra $AM = MB \Rightarrow ANM = BCM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)$\Rightarrow KIN = KCI$

Mà C và N là hai đỉnh kề nhau.

$\Rightarrow$ IKNC là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow$ 4 điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $NB^2 = NK.NM$

Vì ABNC là tứ giác nội tiếp nên $NBC = NAC$ (góc nt cùng chắn NC)

Vì N là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) nên $NB = NC$

$\Rightarrow NBC = NMB$ (góc nt chắn 2 cung bằng nhau) hay $NBK = NMB$

Xét ΔNBK và ΔNMB có:

$NBK = NMB$ (chứng minh trên)

MNB chung

$\Rightarrow \Delta NBK$ đồng dạng với ΔNMB (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{NB}{NM} = \dfrac{NK}{NB} \Rightarrow NB^2 = NM.NK$

c) Chứng minh tứ giác BHIK là hình thoi

Tứ giác IKNC nội tiếp suy ra $IKC = INC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn IC)

Xét (O): $ABC = ANC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AC)

Suy ra: $ABC = IKC$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị.

Suy ra IK // HB (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

BI cắt (O) tại G.

CM, AN lần lượt là đường phân giác của ACB; BAC (do M, N là điểm chính giữa AB; BC)

Suy ra I là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ABC nên G là điểm chính giữa AC và BI là phân giác ABC.

Tứ giác AHMI nội tiếp do $HAI = HMI$ (do $BAN = NMC$ hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Suy ra $AHI = AMI$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AI)

Xét (O): $ABC = AMC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AC)

Suy ra: $ABC = AHI$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị. Suy ra HI // BK (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

Xét tứ giác BHIK

IK // HB (chứng minh trên)

HI // BK (chứng minh trên)

Suy ra tứ giác BHIK là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành)

Mà BI là phân giác HBK (chứng minh trên)

Suy ra tứ giác BHIK là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi).

d) Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Vì $NBK = BMK$ nên ta có BN là tiếp tuyến tại B của đường tròn (P) ngoại tiếp ΔMBK

$\Rightarrow BN \perp BP$

Mà $BN \perp BD$ do $DBN = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra B, P, D thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có: C, Q, D thẳng hàng.

ΔPBK cân tại P (vì PB = PK = bán kính)

ΔDBC cân tại D (vì NB = NC do N là điểm chính giữa cung BC; ND là đường kính)

ΔPBK và ΔDBC là 2 tam giác cân có chung góc ở đáy nên góc ở đỉnh của chúng bằng nhau

$\Rightarrow BPK = BDC$

$\Rightarrow PK // DC$

$\Rightarrow PK // DQ$

Chứng minh tương tự ta có DB // QK

Vậy DPKQ là hình bình hành.

$\Rightarrow$ DK đi qua trung điểm PQ là E.

$\Rightarrow$ D, E, K thẳng hàng.

Câu 123.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường thẳng d và đường tròn $(O;R)$ không có điểm chung. Hạ $OH \perp d$ tại H. Điểm M thuộc d. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn $(O;R)$. Nối AB cắt OH, OM lần lượt tại K và I.

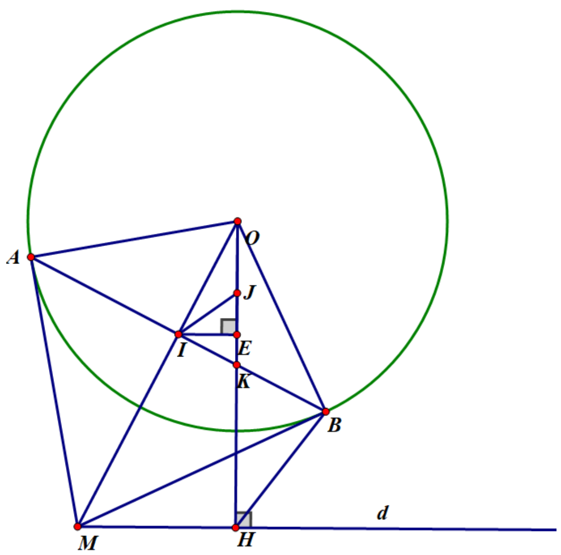
a) Chứng minh 5 điểm M, H, O, A, B thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh OK.OH = OI.OM

c) Chứng minh khi M di chuyển trên d thì đường thẳng AB đi qua một điểm cố định.

d) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác OIK đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn



a) Xét (O) có MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn; A, B là tiếp điểm

$\Rightarrow$Suy ra MA$\perp$ AO tại A; MB$\perp$OB tại B. Lại có OH$\perp d = H \Rightarrow OAM = OBM = OHM = 90^0$

$\Rightarrow$5 điểm M, H, O, A, B cùng thuộc 1 đường tròn. đường kính OM.

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, suy ra MA = MB; mà OA = OB. Suy ra OM là đường trung trực của đoạn thẳng AB, suy ra OM$\perp$AB tại I.

Xét ΔOIK và ΔOHM có:

O là góc chung

$OIK = OHM = 90^0$

$\Rightarrow \Delta$ OIK đồng dạng với Δ OHM (g – g)

$\Rightarrow \frac{OI}{OH} = \frac{OK}{OM} \Rightarrow OI.OM = OH.OK$

c) Xét Δ OBM vuông tại B, áp dụng hệ thức lượng ta có:

$$OI.OM = OB^2 = R^2 \Rightarrow OH.OK = R^2 \Rightarrow OK = \frac{R^2}{OH}$$

Do O, H cố định, suy ra K cố định, suy ra AB luôn đi qua điểm K cố định khi M di chuyển trên đường thẳng d.

d) Kẻ IE $\perp$ OK; Lấy J là trung điểm của OK.

Ta có $S_{\Delta OIK} = \frac{1}{2} OK.IE$

Mà OK không đổi suy ra $S_{\Delta OIK}$ lớn nhất khi và chỉ khi IE lớn nhất.

Mà IE $\leq$ IJ. Dấu "=" xảy ra khi E $\equiv$ J

Khi đó Δ OIK vuông cân tại I, suy ra $IOK = 45^0$, suy ra Δ HMO vuông cân tại H $\Leftrightarrow$ HM = HO.

Vậy $S_{\Delta OIK}$ max $\Leftrightarrow$ HM = HO.

Câu 124.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến AO. Về phía ngoài tam giác vẽ hai nửa đường tròn, nửa đường tròn tâm I đường kính AB và nửa đường tròn tâm K đường kính AC. Một đường thẳng d qua A cắt các nửa đường tròn tâm I và tâm K lần lượt tại M và N.

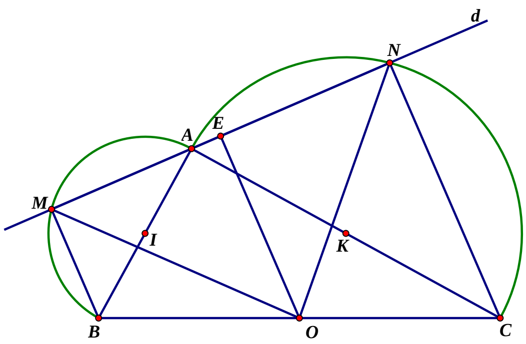
a) Tứ giác MNCB là hình gì?

b) Chứng minh: $AM.AN = MB.NC$

c) Chứng minh tam giác OMN cân.

d) Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích tứ giác BMNC lớn nhất.

Hướng dẫn



a) +Ta có: $BMA = ANC = 90^0$ (góc nt chắn nửa đtr) $\Rightarrow MB \perp MN$, $NC \perp MN$

$\Rightarrow MB // NC, BMN = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác MNCB là hình thang vuông

b) $MAB + BAC + NAC = 180^0 \Rightarrow MAB + NAC = 90^0$

+Vì tam giác ANC vuông tại N nên ta có:

$$ACN + NAC = 90^0 \Rightarrow MAB = ACN \Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta NCA(gg) \Rightarrow \frac{\text{AM}}{\text{NC}} = \frac{\text{MB}}{\text{AN}} \Rightarrow AM.AN = MB.NC$$

c) Gọi E là trung điểm của MN suy ra OE là đường trung bình của hình thang MNCB (ĐN)

$\Rightarrow OE // MB // NC \Rightarrow OE \perp MN$

Xét tam giác OMN có: OE là đường trung tuyến (vì E là trung điểm của MN) vừa là đường cao $(OE \perp MN) \Rightarrow$ tam giác OMN cân tại O.

d) * vì $\Delta MAB \sim \Delta NCA \Rightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{NCA}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \Rightarrow S_{MAB} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 .S_{NCA}$

* $S_{MNCB} = S_{MAB} + S_{ABC} + S_{NCA} = S_{ABC} + \left[1 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2\right].S_{NCA}$

$\Rightarrow S_{MNCB}$ max $\Leftrightarrow S_{NCA}$ max; $S_{NCA} = \frac{1}{2}AN.NC$

$AN.NC \le \frac{AN^2 + NC^2}{2}$ $(BĐT\ \cos i) \Leftrightarrow AN.NC \le \frac{AC^2}{2}$

$"=" \Leftrightarrow AN = NC \Leftrightarrow \Delta NCA$ vuông cân tại C $\Leftrightarrow NAC = 45^0$

Vậy khi đường thẳng d tạo với AC một góc 45^0 thì diện tích tứ giác BMNC lớn nhất.

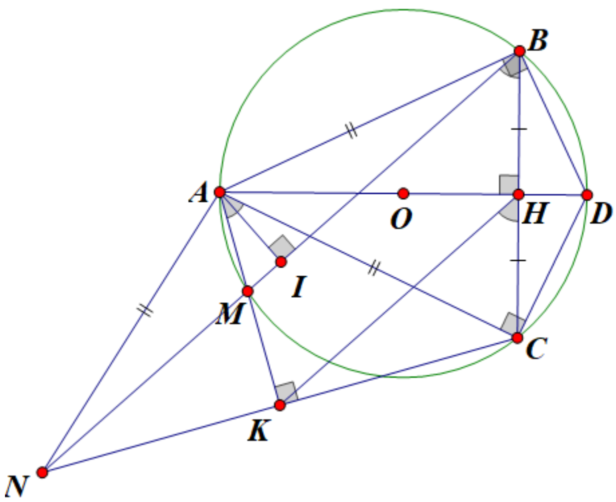
Câu 125.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn đường kính AD. Gọi H là điểm thuộc đoạn OD. Kẻ dây $BC \perp AD$ tại H. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ AC, kẻ $CK \perp AM$ tại K. Đường thẳng BM cắt CK tại N.

a) Chứng minh $AH.AD = AB^2$.

b) Chứng minh tam giác CAN cân tại A.

c) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác ABN lớn nhất.

Hướng dẫn



a) Chứng minh $AH.AD = AB^2$.

Tam giác ABD nội tiếp đường tròn có AD là đường kính nên vuông tại B.

Vì BH là đường cao của tam giác ABD vuông tại B nên ta có hệ thức lượng $AH.AD = AB^2$.

b) Chứng minh $\triangle CAN$ cân tại A.

Tứ giác $AKCH$ nội tiếp (do $AKC + AHC = 180°$) suy ra $KHC = KAC$ mà $KAC = MBC$ (góc nt cùng chắn cung MC) nên $KHC = MBC$.

$KHC = MBC$ mà hai góc này là hai góc đồng vị nên $HK // BM$. Lại có H là trung điểm của BC ($AD \perp BC = H$) nên K là trung điểm của NC.

Tam giác CAN có AK vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên cân tại A.

c) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác ABN lớn nhất.

Ta có: $AB = AC = AN$ nên tam giác ABN cân tại A. Gọi I là trung điểm BN

$\Rightarrow \begin{cases} AI \perp BN \Rightarrow AIB = 90^0 \\ S_{\triangle ABN} = 2S_{\triangle ABI} \end{cases}$ $\Rightarrow I$ di chuyển trên đường tròn đường kính AB.

S_{ABI} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\Leftrightarrow$ I nằm chính giữa cung AB trên đường tròn đường kính $AB \Leftrightarrow \Delta ABI$ cân tại I $\Leftrightarrow ABI = 45° \Leftrightarrow AOM = 90° \Leftrightarrow$ M nằm chính giữa cung AD.

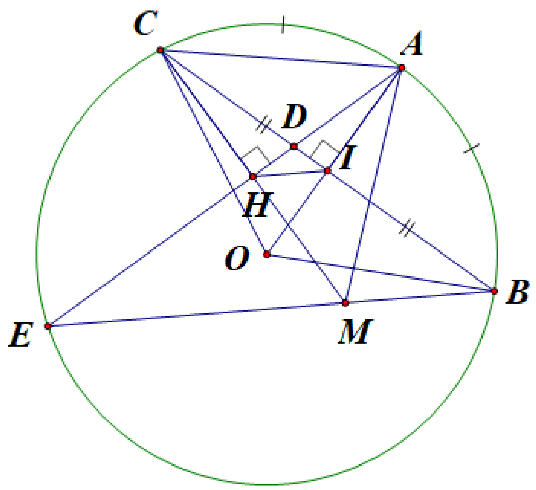
Câu 126.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ với dây BC cố định (BC không đi qua O). Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Điểm E thuộc cung lớn BC. Nối AE cắt BC tại D. Gọi I là trung điểm của BC. Hạ $CH \perp AE$ tại H, nối BE cắt CH tại M.

a) Chứng minh 4 điểm A,I,H,C thuộc một đường tròn.

b) Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tính AC.

c) Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác MAC lớn nhất.

Hướng dẫn



a) Chứng minh 4 điểm A,I,H,C thuộc một đường tròn

+Ta có: I là TĐ BC , A là điểm chính giữa $BC \Rightarrow \begin{cases} \overline{O,I,A} \\ OA \perp BC = \{I\} \end{cases}$ (liên hệ giữa đường kính và dây cung)

Lại có: $CM \perp AE = \{H\} \Rightarrow CHA = CIA = 90^0$

Vậy 4 điểm A,I,H,C thuộc một đường tròn (đpcm).

b) Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tính AC.

- Xét ΔCIO vuông tại I. AD định lý Phytagos:

$$CO^2 = CI^2 + OI^2 \Rightarrow OI^2 = CO^2 - CI^2 \Rightarrow OI^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow OI = \frac{R}{2}.$$

-Có: $OI + AI = AO(=R) \Rightarrow AI = AO - OI = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}. = \frac{OA}{2} \Rightarrow$ I là TĐ OA

+ $\triangle COA$ có IC là đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên cân tại C $\Rightarrow AC = OC = R$

c) Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác MAC lớn nhất.

- Chứng minh $ACI = AHI$ (Vì tứ giác ACHI nội tiếp đường tròn – cm ý a.) (1)

- Mà $ACI = AEB$ (Vì tứ giác ACEB nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AEB = AHI$ mà 2 góc nà yở vị trí đồng vị $\Rightarrow HI \; // \; EM$

Lại có:

$$\left.\begin{matrix} HI \; // \; MB \; (HI // EB) \\ CI = IB \; (gt) \end{matrix}\right\} \Rightarrow CH = HM$$ (HI là đường trung bình trong tam giác.)

Mà:

$$\left.\begin{matrix} AH \perp CM \;\; (gt) \\ CH = HM \;\; (cmt) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta CAM$$ cân tại A.

-Diện tích $S_{\Delta CAM} = 2.S_{\Delta CAH} = 2.\frac{1}{2}.CH.AH \le \frac{CH^2 + AH^2}{2} = \frac{CA^2}{2}$ (CA không thay đổi do BC cố định)

- Diện tích ΔCAM lớn nhất là: $\max S_{\Delta CAM} = \frac{CA^2}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $CH = AH$.

- Khi đó ΔCAH vuông cân tại H. $\left(HAC = HCA = 45^0 \right)$

- Vậy vị trí điểm E nằm trên đường tròn tâm O, bán kính R. Sao cho $CAE = 45^0$.

Câu 127.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với đường tròn (B, C, M , N cùng thuộc đường tròn và AM < AN). Gọi E là trung điểm của dây MN, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn.

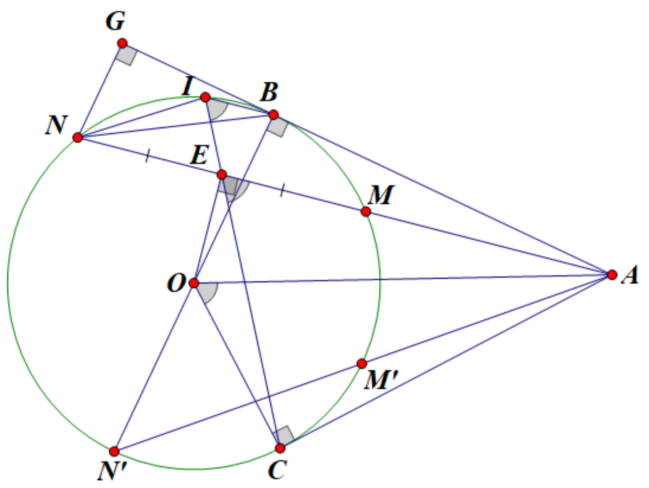
a) Chứng minh bốn điểm A, O, E, C cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh góc AOC bằng góc BIC

c) Chứng minh BI song song với MN

d) Xác định vị trí cuả cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

Hướng dẫn



a) Xét (O) có:

OE là một phần đường kính, MN dây không di qua tâm,OE $\cap$ MN tại trung điểm E

$\Rightarrow$ OE $\perp$ MN tại E (định lý) $\Rightarrow AEO = 90^0$

Xét (O) có AC là tiếp tuyến tại tiếp điểm C (gt) $\Rightarrow ACO = 90^0$

Xét tứ giác AEOC có: $AEO + ACO = 180^0$ mà hai góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$Tứ giác AEOC nội tiếp được một đường tròn (dhnb)

$\Rightarrow$4 điểm A, O, E, C cùng thuộc một đường tròn

b) Xét (O) có: AB, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A (tiếp điểm B, C)

$\Rightarrow AOB = AOC = \frac{1}{2}BOC$ (t/c) **(1)**

BOC là góc ở tâm chắn cung BC; CIB là góc nội tiếp chắn cung BC

$\Rightarrow CIB = \frac{1}{2}BOC$ (t/c) **(2)**

Từ (1) và (2) suy ra: $CIB = AOC$ (b/c)

c) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEOC có:

$AEC = AOC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC) mà $CIB = AOC$ (cmt)

$\Rightarrow AEC = BIC$ mà hai này góc ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow$BI // NM (dhnb)

d) Vẽ NG $\perp$ AB kéo dài tại G; BN' là đường kính.

Ta có: $S_{ABN} = S_{AIN}$ (vì BI // MN) = $\frac{1}{2}NG.AB$

S_{AIN} max $\Leftrightarrow$ S_{ABN} max $\Leftrightarrow$NG max, mà NG $\leq$ BN mà BN$\leq$BN'.

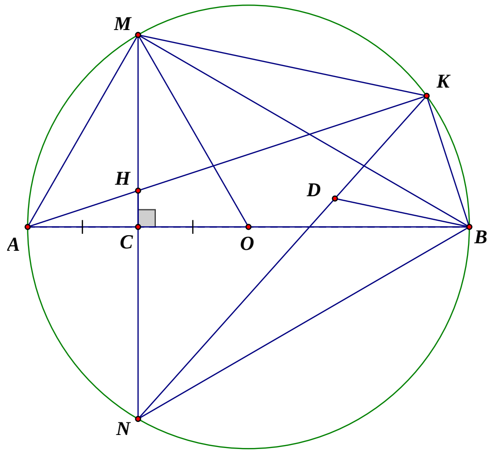
NG max G ≡ B hay NB⊥AB, $OB \perp AB \Rightarrow$ B, O, N thẳng hàng (Minh họa N ≡N’, M ≡M’)

Vậy S_{AIN} lớn nhất khi cát tuyến AMN có vị trí điểm N sao cho B, O, N thẳng hàng.

Bài 128. Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB* = *2R*, *C* là trung điểm của *OA* và dây *MN* vuông góc với *OA* tại *C*. Gọi *K* là điểm tùy ý trên cung nhỏ *BM*, *H* là giao điểm của *AK* và *MN*.

1. Chứng minh tứ giác *BCHK* nội tiếp.
2. Tính tích $AH.AK$ theo *R*.
3. Xác định vị trí của điểm *K* để tổng (*KM* + *KN* + *KB*) đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó?

Hướng dẫn



1. Chứng minh tứ giác $BCHK$ nội tiếp.

$MN \perp AC$

$AKB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow HCB = 90°$

Xét tứ giác $BCHK$ có:

$HCB + AKB = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCHK$ nội tiếp.

2. Tính $AH.AK$ theo *R*.

Xét tam giác ΔACH và ΔAKB có:

$$\left.\begin{array}{l} ACH = AKB = 90° \\ A\ \ chung \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACH \sim \Delta AKB\,(g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AK} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH.AK = AC.AB$$

Mà $AC = \frac{1}{4}R$ và $AB = 2R \Rightarrow AH.AK = \frac{R^2}{2}$.

3. Xác định vị trí của K để $(KM + KN + KB)$ max

* Chứng minh ΔBMN đều*:*

ΔAOM cân tại *M* (*MC* vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến)

Mà $OA = OM = R \Rightarrow \Delta AOM$ đều $\Rightarrow MOA = 60^\circ$

ΔMBN cân tại B vì $\begin{cases} MC = CN \\ BC \perp MN \end{cases}$

$\Rightarrow CM = CN$

Mặt khác: $MBA = \dfrac{1}{2} MOA = 30^\circ$ (góc nội tiếp chắn cung MA) $\Rightarrow MBN = 60^\circ$

ΔMBN cân tại B lại có $MBN = 60^\circ$ nên ΔMBN là tam giác đều

* Chứng minh $KM + KB = KN$

Trên cạnh NK lấy điểm D sao cho $KD = KB$.

$\Rightarrow \Delta KDB$ là tam giác cân mà $NKB = \dfrac{1}{2}$ sđ $NB = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta KDB$ là tam giác đều $\Rightarrow KB = BD$.

Ta có: $DMB = KMB$ (góc nội tiếp chắn cung AB)

$BDN = 120^\circ$ (kề bù với KBD trong ΔKDB đều)

$MKB = 120^\circ$ (góc nội tiếp chắn cung 240°)

$\Rightarrow MBK = DBN$ (tổng các góc trong tam giác bằng 180°)

Xét ΔBDN và ΔBKM có:

$$\left.\begin{array}{l} BK = BD\ (cmt) \\ BDN = BKM\ (cmt) \\ MB = MN \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BDN = \Delta BKN\ (c.g.c)$$

$\Rightarrow ND = MK$ (2 cạnh tương ứng)

$\Rightarrow KM + KN + KB = 2KN$

$\Rightarrow (KM + KN + KB)\max = 4\text{R}$ khi KN là đường kính $\Rightarrow K, O, N$ thẳng hàng

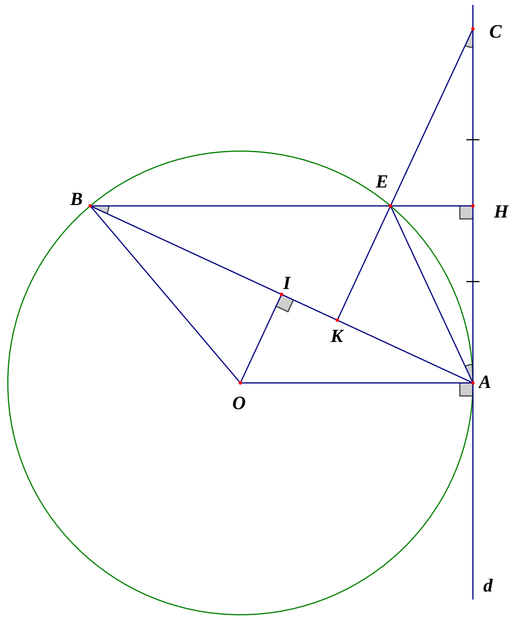
$\Rightarrow K$ là điểm chính giữa cung BM.

Vậy với K là điểm chính giữa cung BM thì $(KM + KN + KB)$ đạt giá trị max bằng $4R$.

Bài 129. Cho đường tròn $(O;R)$ tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên d lấy điểm H không trùng với điểm A và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B (E nằm giữa B và H).

1. Chứng minh $ABE = EAH$ và $\Delta ABH \sim \Delta EAH$.
2. Lấy điểm C trên d sao cho H là trung điểm của đoạn thẳng AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
3. Xác định vị trí điểm H để $AB = R\sqrt{3}$.

Hướng dẫn



1. Chứng minh: $ABE = EAH$

$ABE = \dfrac{1}{2}$ sđ EA (t/c góc nội tiếp)

$HAE = \dfrac{1}{2}$ sđ EA (t/c góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow ABE = HAE$

Xét ΔABH và ΔEAH có:

$$\left.\begin{array}{l} AHB = 90^\circ \\ ABE = HAE\ (cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \ \#\ \Delta EAH\ (g.g)$$

2. Xét $\Delta HEC = \Delta HEA\,(c.g.c)$

$\Rightarrow ACE = CAE$ mà $CAE = ABE$ (cmt)

$\Rightarrow ACE = ABE$

Mặt khác: $ABE + CAK = 90^\circ$

$\Rightarrow ACE + CAK = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại K

Xét tứ giác $AHEK$ có: $EHK = AKE = 90^\circ$

$\Rightarrow EHK + AKE = 180^\circ$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AHEK$ nội tiếp.

3. Hạ $OI \perp AB \Rightarrow AI = IB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔAOI vuông tại I có $\cos OAI = \dfrac{AI}{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OAI = 30^\circ \Rightarrow BAH = 60^\circ$

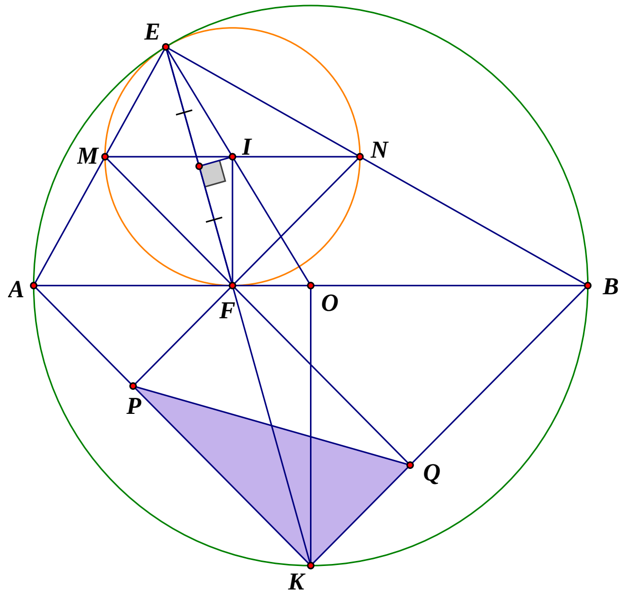
ΔAHB vuông tại H có: $\widehat{BAH}=60^\circ \Rightarrow \cos\ \widehat{BAH}=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{AH}{R\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow AH=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Vậy cần lấy điểm H sao cho độ dài $AH=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ thì $AB=R\sqrt{3}$

Bài 130. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB=2R$ và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ 2 là K

1. Chứng minh $\Delta KAF \sim \Delta KEA$.
2. Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE, chứng minh đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.
3. Chứng minh $MN // AB$, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I).
4. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác KPQ theo R khi E chuyển động trên đường tròn (O), với P là giao điểm của NF và AK; Q là giao điểm của MF và BK.

Hướng dẫn



1. Chứng minh $\triangle KAF \sim \triangle KEA$

$\widehat{KAB}=\widehat{KEB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KB}$)

Xét ΔKAF và ΔKEA có:

$\left.\begin{array}{l} \widehat{KAB}=\widehat{AEK}(cmt) \\ \widehat{K}\ chung \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta KAF \# \ \Delta AEK(g.g)$

2. * Đường tròn $(I;IE)$ và đường tròn $(O;OE)$

I,O,E thẳng hàng $\Leftrightarrow IE+IO=OE$

$\Rightarrow IO=OE-IE$

Vậy $(I;IE)$ và $(O;OE)$ tiếp xúc trong tại E.

* Chứng minh $(I;IE)$ tiếp xúc với AB tại F

Dễ dàng chứng minh: ΔEIF cân tại I ($I \in$ trung trực của EF)

ΔEOK cân tại $O \Rightarrow EFI = EKO\ (= OEF)$

mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow IF//OK$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng //)

Có : $AK = KB\ (AEK = KEB) \Rightarrow AK = KB$

$\Rightarrow \Delta AKB$ cân tại K

$\Rightarrow OK \perp AB$

Vì $\left.\begin{matrix} OK \perp AB \\ OK//IF \end{matrix}\right\} \Rightarrow IF \perp AB$

$\Rightarrow (I;IE)$ tiếp xúc với AB tại F.

3. $AEB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$MEN = 90^\circ$ mà MEN là góc nội tiếp đường tròn $(I;IE)$

$\Rightarrow MN$ là đường kính $(I;IE)$

$\Rightarrow \Delta EIN$ cân tại I

Lại có: ΔEOB cân tại $O \Rightarrow INE = OBE$ mà 2 góc này vị trí đồng vị

$\Rightarrow MN//AB$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng //).

4. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔKPQ theo R khi E chuyển động trên (O)

$MFE = MNE$ (góc nội tiếp (I) cùng chắn cung ME)

$AKE = ABE$ (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung AE)

Mà $MNE = ABE\ (cmt) \Rightarrow MFE = AKE$, hai góc này lại ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow MQ//AK$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng //)

Chứng minh tương tự: $NP//BK$

Tứ giác $PFQK$ có: $MQ//AK$

$NP//BK$

$PKQ = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$ Tứ giác $PFQK$ là hình chữ nhật

Ta có: $MFA = QFB$ (đối đỉnh) ở

$KAB = KBA$ (ΔAKB cân) mà $MFA = KAB \Rightarrow \Delta FQB$ vuông cân tại Q.

Chu vi $\Delta KPQ = KP + PQ + KQ$

Mà $PK = FQ$, PQ = FK ($PFQK$ là hình chữ nhật) và $FQ = QB$ (ΔBFQ cân tại Q)

$\Rightarrow P_{KPQ} = QB + QK + FK = KB + FK$

Mặt khác: ΔAKB cân tại $K \Rightarrow K$ là điểm chính giữa cung AB

$FK \geq FO$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

$\Rightarrow KB + FK \geq KB + FO$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow FK = FO \Rightarrow$ E là điểm chính giữa cung AB $\Rightarrow EO = R$

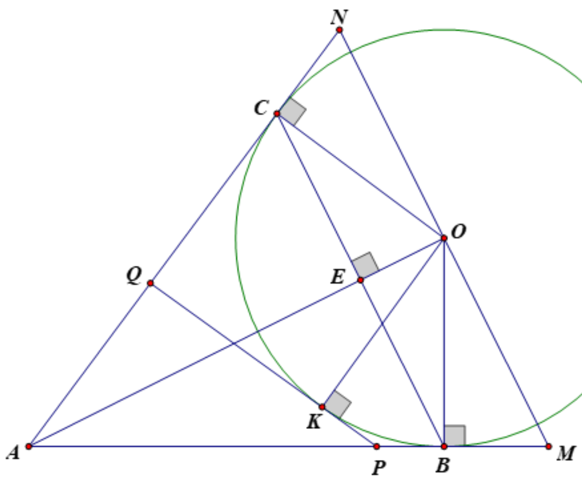
Áp dụng định lý Pi-ta-go trong $\triangle KOB$ tính được $BK = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Chu vi ΔKPQ nhỏ nhất $= R + R\sqrt{2} = R(\sqrt{2} + 1)$.

Câu 131.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

1. Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE.OA = R^2$.
3. Trên cung nhỏ BC của $(O; R)$ lấy điểm K bất kì (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của $(O;\ R)$ cắt AB, AC theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.
4. Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại M, N. Chứng minh $PM + QN \geq MN$.

Hướng dẫn



1. Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $ABOC$ có:

$ABO = 90^o$ (tính chất tiếp tuyến)

$ACO = 90^o$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow ABO + ACO = 90^o + 90^o = 180^o$

Mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

2. $AB = AC$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Mà AO là tia phân giác BAC (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

nên AO là đường cao của ΔABC hay $AO \perp BC$.

Xét ΔABO vuông ở B có BE là đường cao, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông $\Rightarrow OB^2 = OE.OA$, mà

$OB = R \Rightarrow R^2 = OE.OA$.

3. $PK = PB$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm).

$KQ = QC$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm).

Xét chu vi $\Delta APQ = AP + AQ + QP = AP + AQ + PK + KQ = AP + PK + AQ + QC$

$= AB + AC = 2AB$.

Mà *(O)* cố định, điểm *A* cố định nên *AB* không thay đổi.

4. Có: $AO \perp MN, ACB = ABC \Rightarrow \begin{cases} QNO = PMO \\ NO = OM \\ NOQ = POM \end{cases}$

$$\Delta OMP \#\ \Delta QNO \Rightarrow \frac{MP}{ON} = \frac{OM}{QN} \Rightarrow MP.QN = ON.OM = \frac{MN^2}{4} \Rightarrow MN^2 = 4MP.QN$$

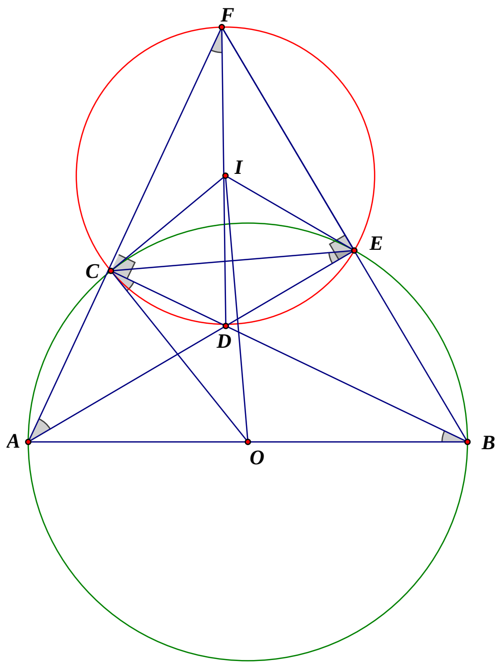
$MN = 2\sqrt{MP.QN} \le MP + NQ$ (Theo bất đẳng thức Cô-si)

Hay $MP + NQ \ge MN$ (đpcm).

Câu 132.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (*O*) có đường kính *AB* = *2R* và điểm *C* thuộc đường tròn đó (*C* khác *A*, *B*). Lấy điểm *D* thuộc dây *BC* (*D* khác *B*, *C*). Tia *AD* cắt cung nhỏ *BC* tại điểm *E*, tia *AC* cắt *BE* tại điểm *F*.

1. Chứng minh *FCDE* là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $DA.DE = DB.DC$.
3. Chứng minh $CFD = OCB$. Gọi *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác *FCDE*. Chứng minh *IC* là tiếp tuyến của đường tròn (*O*).
4. Cho biết *DF* = *R*, chứng minh $\tan AFB = 2$.

Hướng dẫn



1. Chứng minh *FCDE* là tứ giác nội tiếp.

$ACE = AEB = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác *FCDE* có :

$FCD + FDE = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau nên $\Rightarrow$ Tứ giác $FCDE$ là tứ giác nội tiếp

2. Chứng minh $DA.DE = DB.DC$

Xét ΔACD và ΔBED có:

$$\left.\begin{array}{l} ACD = BED = 90^o \\ ADC = BDE\ (đ.đ) \end{array}\right\} \Delta ACD \,\#\, \Delta BED(g.g)$$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BD}{ED} \Rightarrow AD.ED = CD.BD$ (đpcm).

3. Vì tứ giác $FCDE$ là tứ giác nội tiếp (I) nên

$CFD = CEA$ (góc nội tiếp (I) cùng chắn cung CD)

Mà $CED = CBA$ (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung CA)

$\Rightarrow CFD = CBA$

Lại có ΔOCB cân tại O nên $CBA = OCB$

$\Rightarrow CFD = OCB\ \ (1)$

ΔICF cân tại I: $CFD = ICF\ \ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ICF = OCB$

Ta có: $ICF + ICB = 90^o$ (vì DIC là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow OCB + BCI = 90^o$

$\Rightarrow OC \perp CI \Rightarrow IC$ là tiếp tuyến của (O).

4. Ta có 2 tam giác vuông $\Delta ICO \,\#\, \Delta FEA(g.g)$

$CAE = \dfrac{1}{2} COE = COI$ (góc nội tiếp chắn CE) $\Rightarrow CIO = AFB$

Mà $\tan CIO = \dfrac{CO}{CI} = \dfrac{R}{\frac{R}{2}} = 2$

$\Rightarrow \tan AFB = \tan CIO = 2.$

Câu 133.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. Gọi d_1 và d_2 là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai điểm A và B. Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M, N.

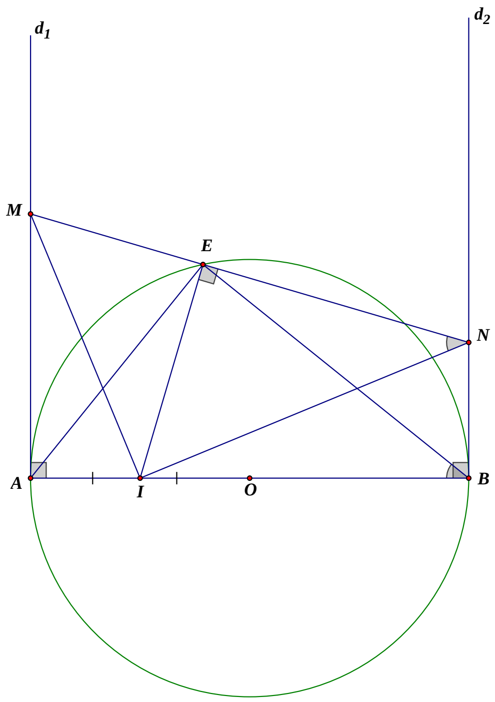
1. Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

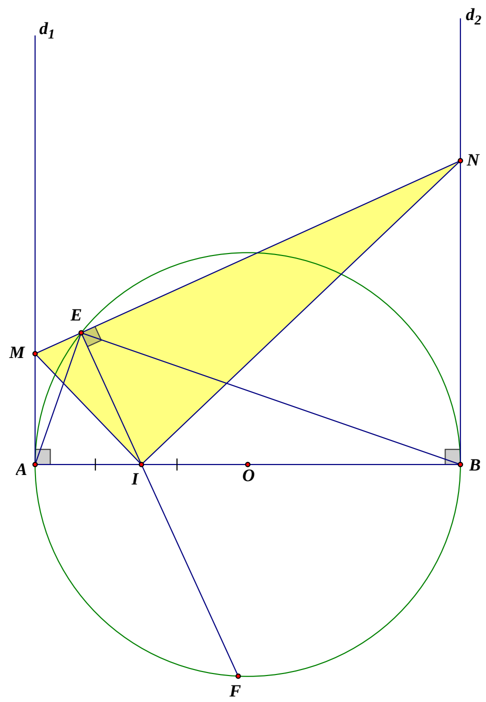
2. Chứng minh $ENI = EBI$ và $MIN = 90^o$.

3. Chứng minh $AM.BN = AI.BI$.

4. Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn (O). Hãy tính diện tích của tam giác MIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Hướng dẫn





1. Chứng minh $AMEI$ nội tiếp.

Xét tứ giác $AMEI$ có:

$MAI + MEI = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMEI$ nội tiếp.

2. * Chứng minh $ENI = EBI$.

Xét tứ giác $ENBI$ có:

$IEN + IBN = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $ENBI$ nội tiếp

$\Rightarrow$ $ENI = EBI$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EI)

* Chứng minh $MIN = 90°$

Tứ giác $ENBI$ nội tiếp nên $ENI = EBI$, EMAI nội tiếp nên $EMI = EAI$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EI)

Lại có: $AEB = 90° \Rightarrow EAI + EBI = 90°$

$$\Rightarrow EMI + ENI = 90° \Rightarrow \Delta MNI \text{ vuông tại } I. \text{Vậy } MIN = 90°.$$

3. Chứng minh $AM.BN = AI.BI$

Xét ΔAMI và ΔBNI có: $MAI = NBI = 90°$

$$AIM = BNI \text{ (cùng phụ với góc } BIN \text{)}$$

$$\Rightarrow \Delta AMI \# \Delta BIN\ (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AI} = \frac{BI}{BN} \Rightarrow AM.BN = AI.BI.$$

4. Khi E, I, F thẳng hàng $AEF = \frac{1}{2}$ sđ $AF = 45°$

$AMI = AEI = 45°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AI)

$\Rightarrow \Delta MAI$ vuông cân tại A.

$\Rightarrow AM = AI = \frac{R}{2} \Rightarrow MI = \sqrt{AM^2 + AI^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ (Định lí Pi-ta-go).

Chứng minh tương tự: ΔBIN vuông cân tại B

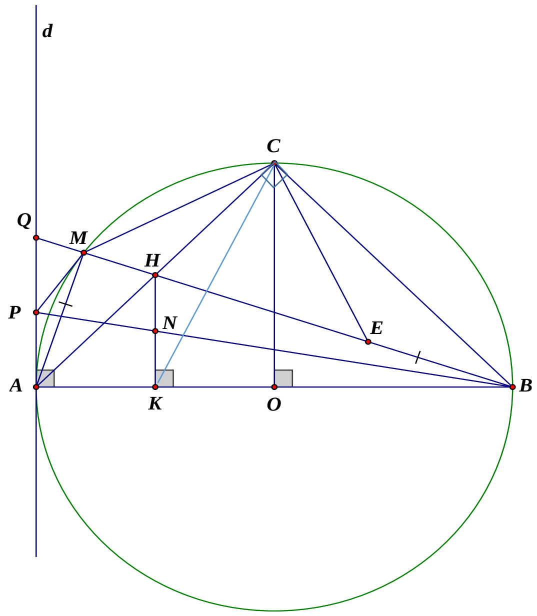
$\Rightarrow BI = BN = \frac{3R}{4} \Rightarrow IN = \sqrt{BI^2 + BN^2} = \sqrt{\frac{9R^2}{16} + \frac{9R^2}{16}} = \frac{3R\sqrt{2}}{2}$ $S_{MIN} = \frac{1}{2} MI.NI = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3R\sqrt{2}}{2} = \frac{3R^2}{4}$

(đơn vị diện tích).

Câu 134.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (*O; R*), đường kính *AB*. Bán kính *CO* vuông góc với *AB*, *M* là điểm bất kì trên cung nhỏ *AC* (*M* khác *A* và *C*), *BM* cắt *AC* tại *H*. Gọi *K* là hình chiếu của *H* trên *AB*.

1. Chứng minh tứ giác *CBKH* là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $ACM = ACK$
3. Trên đoạn thẳng *BM* lấy điểm *E* sao cho *BE* = *AM*. Chứng minh tam giác *ECM* là tam giác vuông cân tại *C*.
4. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (*O*) tại điểm *A*. Cho *P* là một điểm nằm trên d sao cho hai điểm *P*, *C* nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* và $\frac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng *PB* đi qua trung điểm của đoạn thẳng *HK*.

Hướng dẫn



1. Chứng minh tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp:

Xét tứ giác $CBKH$ ta có:

$BKH = 90^0$

$HCB = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BKH + HCB = 180^o$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $CBKH$ nội tiếp.

2. Chứng minh $ACM = ACK$

Tứ giác $CBKH$ nội tiếp nên: $HCK = HBK$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HK)

Tứ giác $MCBA$ nội tiếp (O) nên: $MCA = HKB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MA)

$\Rightarrow HCK = MCA$

$\Rightarrow ACM = ACK$ (Đpcm).

3. Chứng minh ΔECM vuông cân tại C .

Vì $CO \perp AB$ nên CO là đường trung trực của $AB \Rightarrow CA = CB$

Xét ΔAMC và ΔBEC có:

$MAC = MBC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

$MA = BE$ (gt)

$CA = CB$(cmt)

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta BEC (c.g.c) \Rightarrow MCA = ECB$ (2 góc tương ứng) và $CM = CE$ (2 cạnh tương ứng)

Mặt khác: $ECB + EAC = BCA = 90^o$

$\Rightarrow MCA + ECA = 90^o$

Xét ΔEMC có:

$\left.\begin{array}{l} MCE = 90^o \\ CM = CE \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ECM$ vuông cân tại C (Đpcm).

4. Chứng minh PB đi qua trung điểm của HK

Theo đề bài: $\dfrac{AP.MB}{MA} = R \Leftrightarrow \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{R}{MB} = \dfrac{BO}{BM}$

Mà $PAM = \dfrac{1}{2} sđ\, AM$ (t/c góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$MBA = \dfrac{1}{2} sđ\, AM$ (t/c góc nội tiếp chắn cung AM)

$\Rightarrow PAM = MBA \Rightarrow \Delta PAM \# \Delta OMB (c.g.c)$ (Hệ quả)

$\Rightarrow \dfrac{PA}{PM} = \dfrac{OB}{OM} = 1 \Rightarrow PA = PM$

Vậy cần lấy điểm $P \in d$ sao cho $PA = PM$ (1)

Gọi N là giao điểm của PB và HK, Q là giao điểm của BM với d

Xét ΔQMA vuông tại M có: $PA = PM \Rightarrow \Delta PMA$ cân tại $P \Rightarrow PAM = PMA$

$PMA + PMQ = 90^o$

$PAM + PQM = 90^o$

$\Rightarrow PMQ = PQM \Rightarrow \Delta PMQ$ cân tại P $\Rightarrow PM = PQ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow PM = PA = PQ.$

Vì $AQ \,//\, HK$ (cùng vuông góc AB) nên:

$\dfrac{NK}{PA} = \dfrac{BN}{BP}$ (Định lí Ta-let trong ΔABP)

$\dfrac{BN}{BP} = \dfrac{NH}{PQ}$ (Định lí Ta-let trong ΔPBQ)

$\Rightarrow \dfrac{NK}{PA} = \dfrac{NH}{PQ}$ mà $PA = PQ (cmt) \Rightarrow NK = NH$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của HK .

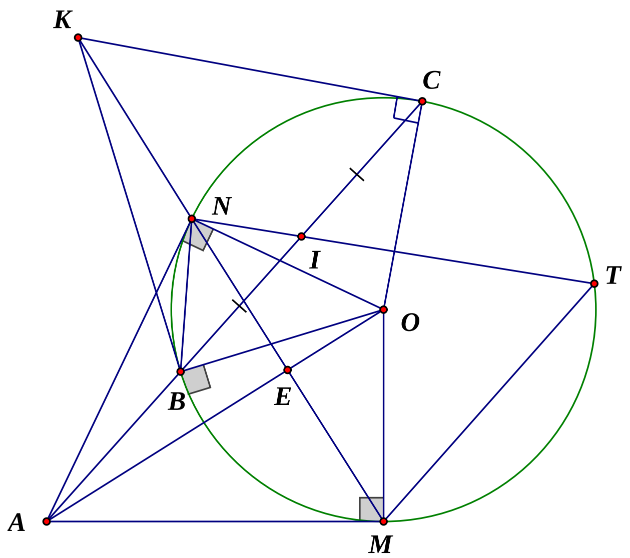
Vậy với $P \in d$ mà $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$ thì PB đi qua trung điểm của HK .

Câu 135.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C ($AB < AC$, d không đi qua tâm O)

1. Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.
2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC.$ Tính độ dài đoạn thẳng BC khi AB = 4cm, AN = 6cm.
3. Gọi I là trung điểm BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh: $MT \,//\, AC$.

4. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Hướng dẫn



1. Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.

Ta có $AM \perp OM$ (AM là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow OMA = 90^o$

$AN \perp ON$ (AN là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow ONA = 90^o$

Xét tứ giác $AMON$ có:

$OMA + ONA = 90^o + 90^o = 180^o$

mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $AMON$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC.$ Tính độ dài đoạn thẳng BC khi AB = 4cm; AN = 6cm.

Xét (O): $ANB = BCN$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BN).

Xét ΔANB và ΔACN :

CAN chung

$ANB = BCN$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ANB \# \ \Delta ACN$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AN}$ (tính chất hai tam giác đồng dạng).

$\Rightarrow AN^2 = AB.AC$ (Đpcm).

* Tính độ dài đoạn thẳng BC khi AB = 4cm; AN = 6cm.

Ta có $AN^2 = AB.AC$ (cmt) mà AB = 4cm, AN = 6cm nên: $4.AC = 6^2 \Leftrightarrow AC = 9$ (cm) mà $AB + BC = AC$ nên $BC = 5$ cm.

3. Chứng minh $MT // AC$.

Xét (O): I là trung điểm của dây BC

$\Rightarrow OI \perp BC$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

Tứ giác $IOAN$ nội tiếp vì $ANO = AIO = 90^0$

$\Rightarrow AIN = AON$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AN) mà hai góc cùng nhìn cạnh AO **(1)**

AM, AN là hai tiếp tuyến (O) cắt nhau tại A.

$\Rightarrow OA$ là phân giác MON (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow AON = \dfrac{1}{2}MON$

Mà $MTN = \dfrac{1}{2}MON$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung MN).

$\Rightarrow MTN = AON$ **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** ta có: $MTN = AIN$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow MT // AC$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song).

4. Hai tiếp tuyến (O) tại B và C cắt nhau ở K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi thỏa mãn điều kiện đề bài.

* MN cắt OA tại E.

Ta chứng minh được $MN \perp OA \Rightarrow EM \perp OA$

Ta chứng minh được $OI.OK = OE.\ OA\ (= OB^2 = OM^2 = R^2)$

Từ đó chứng minh được $\Delta OEK \#\ \Delta OIA$ (c.g.c)

$\Rightarrow OEK = OIA = 90^o$

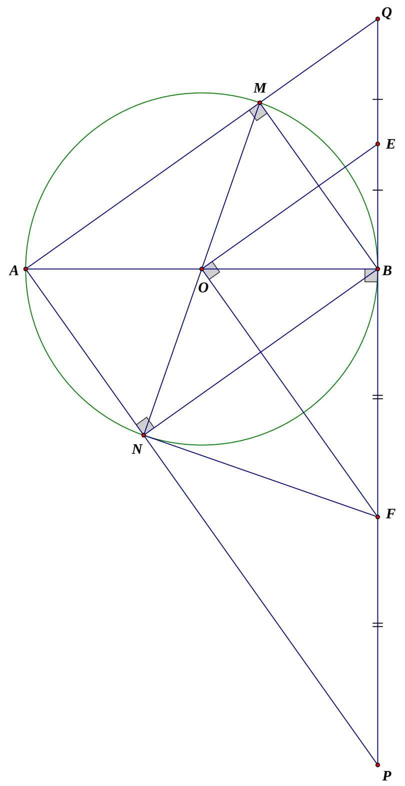
$\Rightarrow EK \perp OA$ mà $EM \perp OA \Rightarrow EM$ trùng EK.

K thuộc MN cố định (đpcm).

Câu 136.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;\ R)$ đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn $(O;\ R)$. (M khác A, M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn $(O;\ R)$ tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

1. Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.
2. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.
3. Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại F. Chứng minh F là trung điểm của BP và $ME // NF$
4. Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn



-

1. Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

Ta có $AMB = MBN = BNA = NAM = 90^o$ (4 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AMBN$ là hình chữ nhật.

2. Ta có $ANM = ABM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

$ABM = MQB$ (2 góc cùng phụ với góc QBM)

$\Rightarrow ANM = MQB$

Mà $ANM + MNP = 180^o \Rightarrow MQB + MNP = 180^o$; hai góc này lại ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow MNPQ$ là tứ giác nội tiếp.

3. * Chứng minh F là trung điểm của BP.

E là trung điểm của BQ, O là trung điểm của AB

$\Rightarrow OE$ là đường trung bình của ΔABQ

$\Rightarrow OE // AQ$ (tính chất đường trung bình của tam giác)

Mà $OE \perp OF$; $AQ \perp AP$

$\Rightarrow OF // AP$

Lại có O là trung điểm của $AB \Rightarrow OF$ là đường trung bình của ΔABP .

$\Rightarrow F$ là trung điểm của BP.

* Chứng minh $ME // NF$

ΔNPB vuông tại N, có F là trung điểm của cạnh $BP \Rightarrow NF = BF = FB = \frac{1}{2}BP$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền)

Xét ΔONF và ΔOBF có:

$$\left.\begin{array}{l} ON = OB = R \\ OF\ chung \\ FN = FB\ (cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ONF = \Delta OBF\ (c.c.c)$$

$\Rightarrow ONF = OBF = 90^o$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow ON \perp NF$

Chứng minh tương tự ta có $OM \perp ME$ $\Rightarrow ME // NF$ (cùng vuông góc với MN).

4. $S_{PNMQ} = S_{\vartriangle APQ} - S_{\vartriangle AMN} = \dfrac{1}{2}AB.PQ - \dfrac{1}{2}AN.AM = R.PQ - \dfrac{1}{2}AM.AN$

AD HTL trong $\vartriangle APQ \perp$ tại A có: $AB^2 = BP.BQ$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $PB + BQ \geq 2\sqrt{PB.QB} = 2\sqrt{(2R)^2} = 4R$

Ta có: $AM.AN \leq \dfrac{AM^2 + AN^2}{2} = \dfrac{MN^2}{2} = 2R^2$

$2S_{MNPQ} \geq 2R.4R - 2R^2 = 6R^2 \Rightarrow S_{MNPQ} \geq 3R^2$

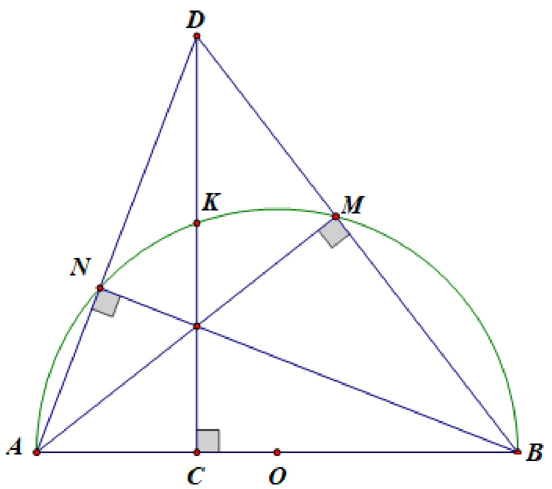
Dấu bằng xảy ra khi $AM = AN$ và $PQ = BP$. Hay MN vuông góc với AB.

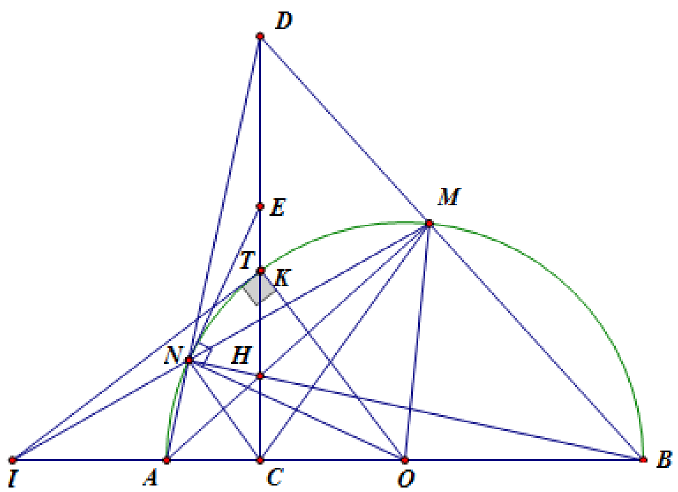
Vậy để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất thì đường kính MN vuông góc với đường kính AB.

Câu 137.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cung KB (M khác K, M khác B). Đường thẳng CK cắt đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là N.

1. Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $CA.CB = CH.CD$.
3. Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua trung điểm của DH.
4. Khi M di động trên cung KB, chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn





1. Vì $ACD = AMD = 90^o$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh *DA* (nên *M*, *C* thuộc đường tròn đường kính *AD*). Vậy tứ giác $ACMD$ nội tiếp.

2.Chứng minh $CA.CB = CH.CD$

Xét ΔCAH và ΔCDB có: $ACH = DCB = 90^o$ (1)

Mặt khác $CAH = CDB$ (cùng phụ với góc CBM) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta CAH \# \ \Delta CDB\,(g.g)$

$\Rightarrow CA.CB = CH.CD$ (Đpcm).

3 .* Chứng minh *A*, *N*, *D* thẳng hàng

Vì *AM* và *DC* là đường cao của tam giác *ABD* nên *H* là trực tâm ΔABD

$\Rightarrow AD \perp BH;\ AN \perp BH$

Nên *A*, *N*, *D* thẳng hàng

* Gọi *E* là giao điểm của *CK* và tiếp tuyến tại *N*.

Ta có: $BN \perp DN, ON \perp EN$

$\Rightarrow DNE = BNO$ mà $BNO = OBN, OBN = EDN$

$\Rightarrow DNE = EDN \Rightarrow \Delta DEN$ cân tại $E \Rightarrow ED = EN$ (3)

Ta có: $ENH = 90^o - END = 90^o - NDH = EHN$

$\Rightarrow \Delta HEN$ cân tại $E \Rightarrow EH = EN$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow E$ là trung điểm của *HD* (Đpcm).

1. Chứng minh *MN* luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi *I* là giao điểm của *MN* và *AB*, kẻ *IT* là tiếp tuyến của nửa đường tròn với *T* là tiếp điểm $\vartriangle INT \sim ITM\,(g-g) \Rightarrow IN.IM = IT^2$ (5)

Mặt khác: $EM \perp OM$ (vì $\Delta ENO = \Delta EMO$ và $EN \perp ON$)

$\Rightarrow N, C, O, M$ cùng thuộc 1 đường tròn $\Rightarrow IN.IM = IO.IC$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow IC.IO = IT^2$

$\Rightarrow \Delta ICT \# \ \Delta ITO \Rightarrow CT \perp IO \Rightarrow T \equiv K$

$\Rightarrow I$ là giao điểm của tiếp tuyến tại *K* của nửa đường tròn và đường thẳng *AB*

$\Rightarrow I$ cố định (Đpcm).

Câu 138.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (*O*) và một điểm *A* nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến *AB* với đường tròn (*O*) (*B* là tiếp điểm) và đường kính *BC*. Trên đoạn thẳng *CO* lấy điểm *I* (*I* khác *C*, *I* khác *O*). Đường thẳng *IA* cắt (*O*) tại hai điểm *D* và *E* (*D* nằm giữa *A* và *E*). Gọi *H* là trung điểm của đoạn thẳng *DE*.

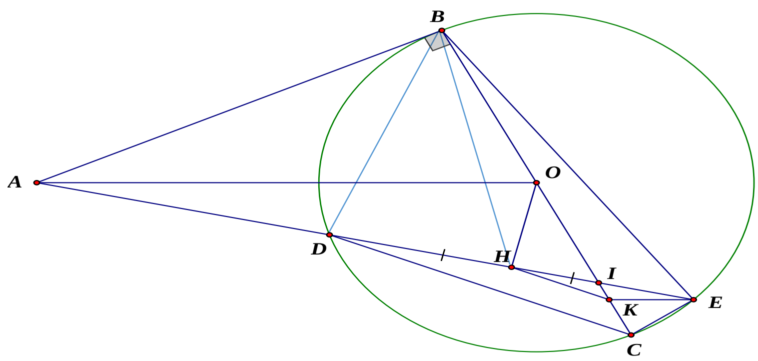
1. Chứng minh bốn điểm *A*, *B*, *O*, *H* cùng nằm trên một đường tròn.

2. Chứng minh $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{BE}$.

3. Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh: $HK//DC$.

4. Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật

Hướng dẫn



1. Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh được $ABO=90^o$

Chứng minh được $AHO=90^\circ$

$\Rightarrow$Tứ giác $ABOH$ nội tiếp

Suy ra bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên đường tròn đường kính AO.

2. Chứng minh $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{BE}$

Chứng minh được $ABD=AEB$

Xét ΔABD và ΔAEB có: EAB chung

Chứng minh được $\Delta ABD\#\ \Delta AEB\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{BE}$ (Đpcm).

3. Chứng minh $KH // DC$

Tứ giác $ABOH$ nội tiếp $\Rightarrow OBH=OAH$ mà $OAH=HEK$ (do EK//AO)

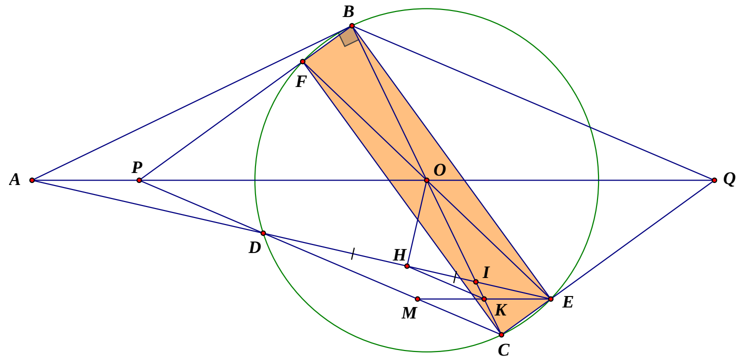
$\Rightarrow HBK=HEK$.

Suy ra tứ giác $BHKE$ nội tiếp

Chứng minh được $BKH=BCD$ (cùng bằng BEH)

Kết luận $HK // DC$.

4. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.



Gọi giao điểm tia CE và tia AO là Q, tia EK và CD cắt nhau tại điểm M

Xét ΔEDM có $HK // DM$ và H là trung điểm của đoạn DE, suy ra K là trung điểm của đoạn thẳng ME.

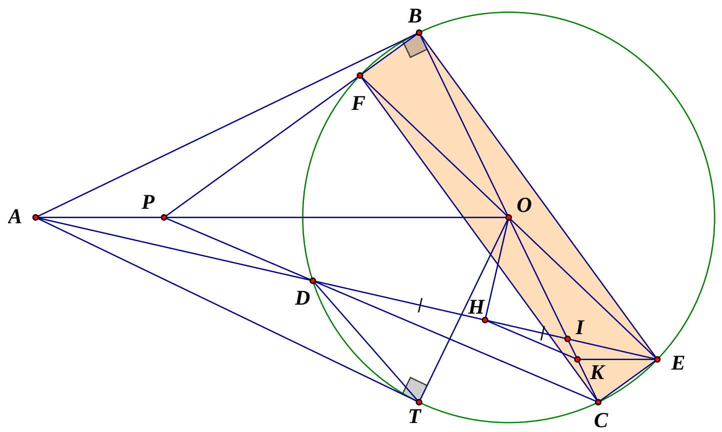
Có $ME // PQ \Rightarrow \dfrac{KE}{OQ} = \dfrac{MK}{OP}$ (cùng bằng $\dfrac{CK}{CO}$) suy ra O là trung điểm của đoạn PQ

Có: $OP = OQ; OB = OC$. Suy ra tứ giác $BPCQ$ là hình bình hành. Suy ra $CE // BF$.

Chứng minh được $\Delta COE = \Delta BOF$ (g.c.g) $\Rightarrow OE = OF$

Mà $OB = OC = OE \Rightarrow OB = OC = OE = OF$ Suy ra tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.

Cách 2:



Kẻ tiếp tuyến AT với (O), chứng minh $APDT$ nội tiếp $(PAT + PDT = 180°)$

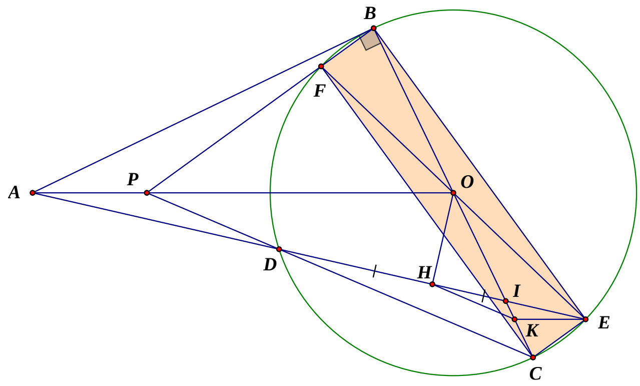
$\Rightarrow ATP = ADP$, mà $ADP = CDE, CDE = CBE \Rightarrow ATP = CBE$ (1), chứng minh $\Delta TAP = \Delta BAP$ (g.c.g)

$\Rightarrow ATP = ABP$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ABP = EBC$

Dẫn đến $EBF = 90° \Rightarrow EF$ là đường kính $\Rightarrow BECF$ là hình chữ nhật (Đpcm).

Cách 3:



Chứng minh $\Delta EHB \backsim \Delta COP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EB}{CP} = \dfrac{EH}{CO} = \dfrac{ED}{CB}$

$\Rightarrow \Delta EDB \backsim \Delta CBP$

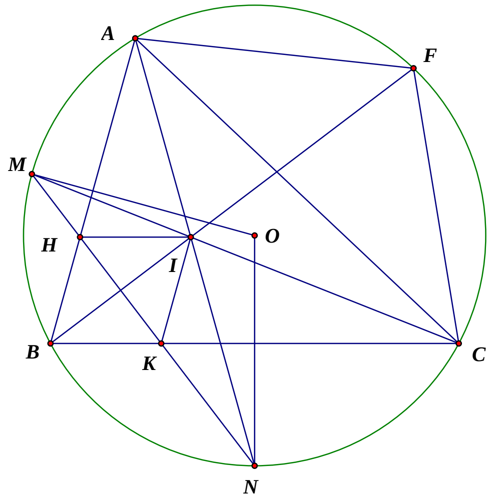
$\Rightarrow EDP = CBP$

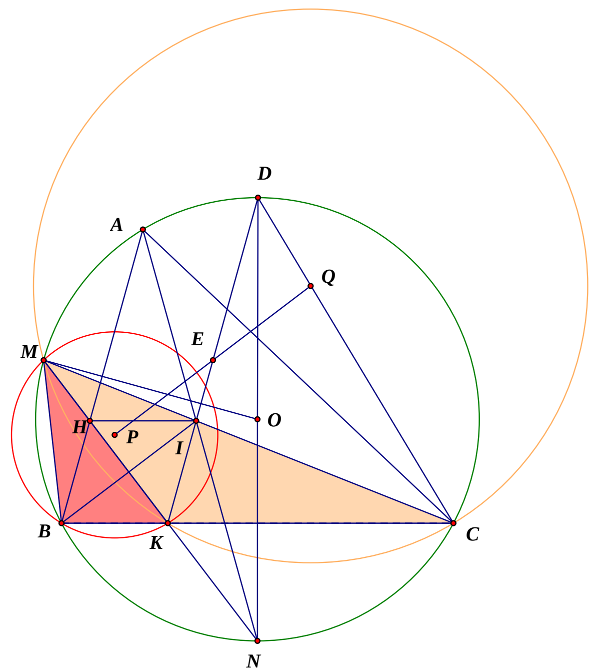
$EDB + CDE = 90°$, $CDE = EBC \Rightarrow EBP = 90° \Rightarrow BECF$ là hình chữ nhật (Đpcm).

Câu 139.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I thuộc cùng một đường tròn..
2. Chứng minh $NB^2 = NK.\text{NM}$.
3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
4. Gọi P và Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Hướng dẫn





1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I thuộc cùng một đường tròn.

Ta có: $MCB = ANM$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

$\Rightarrow ICK = INK$

Mà hai góc này ở cùng nhìn cạnh IK trong tứ giác $IKNC$ từ hai đỉnh kề nhau

$\Rightarrow IKNC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow C, N, K, I$ thuộc cùng một đường tròn.

2. Chứng minh $NB^2 = NK.\mathrm{NM}$.

$BMN = NBC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau).

Xét ΔNBK và ΔNMB có:

MNB chung

$BMN = NBC$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta NBK \# \ \Delta NMB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{NB}{NK} = \dfrac{NM}{NB} \Rightarrow NB^2 = NK.NM$ (đpcm).

3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi

Nối BI cắt đường tròn (O) tại $F \Rightarrow AF = FC$

Ta có $BMH = HMI$ (vì cùng nhìn cung $BN = NC$)

$MBI = \dfrac{1}{2}\left(sđ\,MA + sđ\,AF\right)$ (góc nội tiếp chắn MF)

$MIB = \dfrac{1}{2}\left(sđ\,MB + sđ\,FC\right)$ (góc có đỉnh bên trong đường tròn)

Mà $MA = MC; AF = CF$ nên $MBI = MIB$

$\Rightarrow \Delta BMI$ cân tại M có MN là phân giác

$\Rightarrow MN$ là đường trung trực của BI.

$\Rightarrow HK \perp BI$, $BH = HI$, $BK = KI$ (1)

Mặt khác $HBF = FBC$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung $AF = FC$)

$\Rightarrow \Delta BHK$ có BF là phân giác cũng là đường cao

$\Rightarrow \Delta BHK$ cân tại $B \Rightarrow BH = BK$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $BHIK$ là hình thoi.

4. Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng

$QCK = 90^o - CMK$

$\Rightarrow QCK = 90^o - CBN$

$\Rightarrow QCK = 90^o - BCN$

$\Rightarrow CQ \perp CN$ nên C, D, Q thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có D, B, P thẳng hàng.

Lại có $CKQ = 90^o - CMK$

$\Rightarrow KBP = 90^o - BMK$

Mà $CMK = BMK$ nên $CKQ = KBP$

Hay KQ // DP.

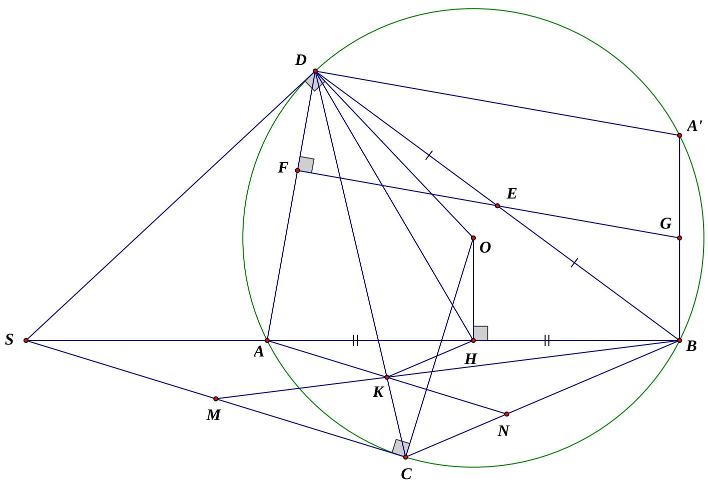
Tương tự KP // DQ

Nên $KPDQ$ là hình bình hành. Hình bình hành $KPDQ$ có hai đường chéo KD và PQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Nên D, E, K thẳng hàng (Đpcm).

Câu 140.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O; R)$ với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy S là một điểm bất kì trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC, SD với đường tròn $(O; R)$ sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

1. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO.
2. Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo CSD.
3. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng SC, cắt đoạn thẳng CD tại điểm K. Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng SC.
4. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD và F là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AD. Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Hướng dẫn



1. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO.

SD, SC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$

$\Rightarrow OD \perp SD, OC \perp SC$

$\Rightarrow D, C$ thuộc đường tròn đường kính SO (1)

Mặt khác H là trung điểm của AB

$\Rightarrow OH \perp AB \Rightarrow SHO = 90^o$

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn

đường kính SO (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow C, D, H, O, S$ cùng thuộc đường tròn đường kính SO.

2. Tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và số đo góc CSD.

Xét ΔSDO có:

$SO^2 = SD^2 + DO^2$

$\Rightarrow SD^2 = SO^2 - DO^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

$\Rightarrow SD = R\sqrt{3}$

Ta có: $\sin DSO = \dfrac{DO}{SO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow DSO = 30^o \Rightarrow CSD = 60^o$.

3. Vì S, D, O, H cùng thuộc một đường tròn nên $SHOD$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow AHD = SOD = \dfrac{1}{2}COD$ (góc nội tiếp cùng chắn SD) (3)

Lại có: $AKD = SCD$ (đồng vị) nên $AKD = \dfrac{1}{2}sđ\ CD = \dfrac{1}{2}COD$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AHD = AKD \Rightarrow ADHK$ nội tiếp.

Gọi M là giao điểm của BK và SC.

Gọi N là giao điểm của AK và BC.

Ta có: $KHA = CBS$ vì $KHA = ADK$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AK)

$ADK = CBS$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AC)

$\Rightarrow HK // BC$ mà H là trung điểm AB nên K là trung điểm của AN. Suy ra $AK = KN$.

Có: $\dfrac{AK}{SM} = \dfrac{KN}{CM} = \dfrac{BK}{BM}$ mà $AK = KN$ nên $SM = CM$ nên M là trung điểm của SC.

4. Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Kẻ đường kính AA' của đường tròn tâm O.

Ta có $ADA' = 90^o \Rightarrow DA' \perp DA$ mà $EF \perp DA \Rightarrow EF // DA'$.

Kéo dài EF cắt BA' tại G.

$EG // DA', E$ là trung điểm của BD nên G là trung điểm của BA'.

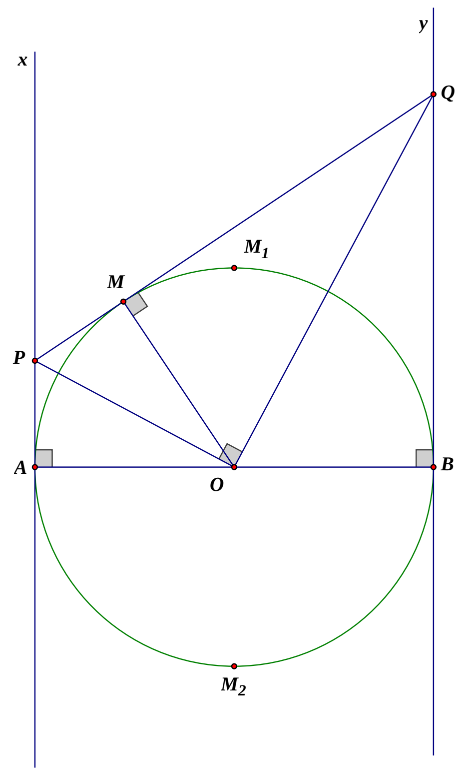
AA' là đường kính đường tròn tâm O nên A' cố định $\Rightarrow BA'$ cố định. Vậy G cố định.

Mà $AFG = 90^o \Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AG cố định (đpcm).

Câu 141.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn. M là một điểm trên đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại P, Q.

1. Chứng minh rằng: Tứ giác $APMO$ nội tiếp.
2. Chứng minh rằng: $AP + BQ = PQ$.
3. Chứng minh rằng: $AP.BQ = AO^2$.
4. Khi điểm M di động trên đường tròn (O), tìm các vị trí của điểm M sao cho diện tích tứ giác $APQB$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn



1. Xét tứ giác *APMQ*, ta có $OAP = OMP = 90^o$ (vì *PA, PM* là tiếp tuyến của (*O*))

Vậy tứ giác *APMO* nội tiếp.

2. Ta có: *AP* = *MP* (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

BQ = *MQ* (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

$\Rightarrow AP + BQ = MP + MQ = PQ\left(Đpcm\right)$.

3. Ta có *OP* là phân giác *AOM* (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

OQ là phân giác *BOM* (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

Mà $AOM + BOM = 180^o$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow POQ = 90^o$

Xét ΔPOQ có: $POQ = 90^o$ (cmt)

$OM \perp PQ$ (PQ là tiếp tuyến của (O) tại M)

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔPOQ vuông tại O có đường cao OM

$\Rightarrow MP.MQ = OM^2$ (hệ thức lượng)

Lại có $MP = AP; MQ = BQ$ (cmt); $OM = OA$ (bán kính)

Do đó $AP.BQ = AO^2\left(Đpcm\right)$.

4. Tứ giác $APQB$ có: $AP//BQ\left(AP \perp AB; BQ \perp AB\right)$, nên tứ giác $APQB$ là hình thang vuông.

$$\Rightarrow S_{APQB} = \frac{\left(AP + BQ\right).AB}{2} = \frac{PQ.AB}{2}$$

Mà AB không đổi nên S_{APQB} đạt GTNN $\Leftrightarrow PQ$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow PQ = AB \Leftrightarrow PQ//AB \Leftrightarrow OM \perp AB$

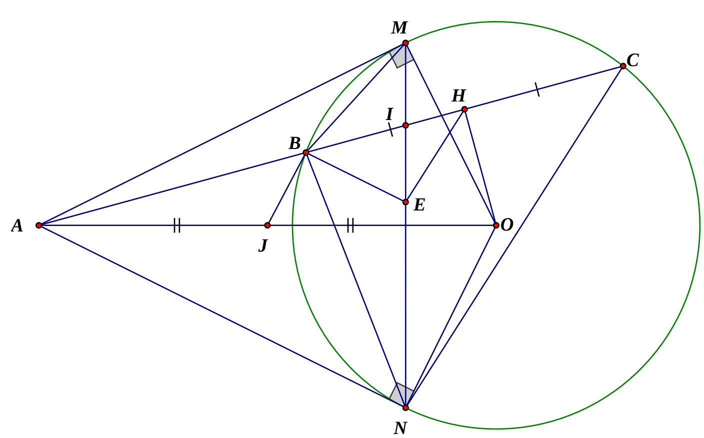
$\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa AB

Tức M trùng M_1 hoặc M_2 thì S_{APQB} đạt GTNN là $\dfrac{AB^2}{2}$.

Câu 142.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với các đường tròn $(O)\left(M, N \in (O)\right)$. Qua A vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C phân biệt (B nằm giữa A, C). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC.

1. Chứng minh tứ giác $ANHM$ nội tiếp được trong đường tròn.
2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$.
3. Đường thẳng qua B song song với AN cắt đoạn thẳng MN tại E. Chứng minh $EH//NC$.

Hướng dẫn



1. Vì AN, AM là tiếp tuyến của (O) nên $ANO = AMO = 90^o$

$\Rightarrow A; M; O; N \in$ đường tròn đường kính AO

Gọi J là trung điểm của AO

Vì H là trung điểm của BC nên $OH \perp BC \Rightarrow AHO = 90^o$

$\Rightarrow H, O \in$ đường tròn đường kính AO

Suy ra A, O, M, N, H thuộc đường tròn tâm J đường kính AO

Suy ra $AMHN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2. Có $ANB = ACN$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung BN và góc nội tiếp chắn BN)

Xét ΔANB và ΔACN có:

$ANB = ACN$ (cmt)

BAN chung

$\Rightarrow \Delta ANB \,\#\, \Delta ACN\,(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AN} \Rightarrow AN^2 = AB.AC.$$

3. Gọi I là giao điểm của MN và AC

Ta có MN là trục đẳng phương của đường tròn (J) và (O).

$I \in MN$ nên phương trình tích của I đối với (J) và (O) bằng nhau.

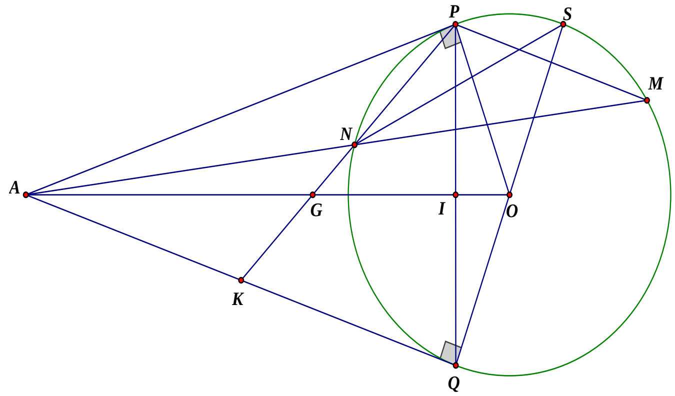
$$\Rightarrow IA.IH = IB.IC \Rightarrow \frac{IB}{IA} = \frac{IH}{IC}$$

Vì $BE\,//\,AN$ nên $\dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IE}{AN} \Rightarrow \dfrac{IE}{IN} = \dfrac{IH}{IC} \Rightarrow EH\,//\,NC.$

Câu 143.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm A sao cho $OA = 3R.$ Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AP và AQ với đường tròn $(O; R)$ (P, Q là 2 tiếp điểm). Lấy M thuộc đường tròn $(O; R)$ sao cho PM song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với đường tròn $(O; R)$. Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1. Chứng minh tứ giác $APOQ$ là tứ giác nội tiếp và $KA^2 = KN.KP$
2. Kẻ đường kính QS của đường tròn $(O; R)$. Chứng minh NS là tia phân giác của PNM.
3. Gọi G là giao điểm của 2 đường thẳng AO và PK. Tính đội dài đoạn thẳng AG theo bán kính R.

Hướng dẫn



1. Ta có: $APO = AQO = 90^o$

Trong tứ giác $APOQ$ có tổng hai góc đối bằng 180^0

Suy ra tứ giác $APOQ$ nội tiếp đường tròn

$PM\ //\ AQ \Rightarrow PMN = KAN$ (so le trong)

Mà $PMN = APK$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung PN và góc nội tiếp chắn PN)

$\Rightarrow KAN = APK$

Xét ΔKAN và ΔKPA có:

K chung

$KAN = KPA$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta KAN\#\ \Delta KPA\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{KA}{KP} = \dfrac{KN}{KA} \Rightarrow KA^2 = KN.KP\left(Đpcm\right).$

2. Ta có: $AQ \perp QS$ (AQ là tiếp tuyến của (O) ở Q)

Mà $PM\ //\ AQ$ (giả thiết) nên $PM \perp QS$

Đường kính $QS \perp PM$ nên QS đi qua điểm chính giữa PM nhỏ

$sđ\,PS = sđ\,SM \Rightarrow PNS = SNM$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Hay NS là tia phân giác PNM $\left(Đpcm\right)$.

3. Gọi H là giao điểm của PQ và AO

$\Rightarrow AH \perp PQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AOQ ta có:

$$OQ^2 = OH.OA \Rightarrow OH = \frac{OQ^2}{OA} = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R$$

$\Rightarrow AH = OA - OH = 3R - \dfrac{1}{3}R = \dfrac{8}{3}R$

$KPQ = \dfrac{1}{2}sđ\,NQ$ (góc nội tiếp chắn NQ)

$NQK = \dfrac{1}{2}sđ\,NQ$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung NQ)

$\Rightarrow NQK = KPQ$

Xét ΔKNQ và ΔKQP có:

$NQK = KPQ$ (cmt)

K chung

$\Rightarrow \Delta KNQ \# \Delta KQP\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{KN}{KQ} = \dfrac{KQ}{KP} \Rightarrow KQ^2 = KN.KP$

Mà $AK^2 = NK.KP$ nên $AK = KQ$

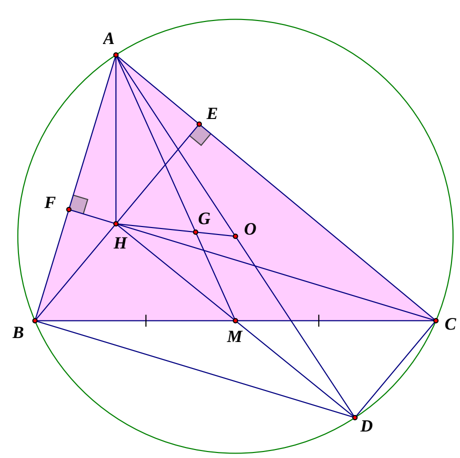
Vậy ΔAPQ có các trung tuyến AH và PK cắt nhau ở G nên G là trọng tâm

$\Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{8}{3}R = \dfrac{16}{9}R.$

Câu 144.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Tia AO cắt đường tròn (O) tại D.

1. Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn;
2. Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành;
3. Gọi M là trung điểm của BC, tia AM cắt HO tại G. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác BAC.

Hướng dẫn



1. Xét tứ giác $BCEF$ có $BFC = BEC = 90^0$ (cùng nhìn cạnh BC)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

2. Ta có: $ACD = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow DC \perp AC$

Mà $HE \perp AC$; suy ra $BH // DC$ (1)

Chứng minh tương tự: $CH // BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BDCD$ là hình bình hành.

3. Ta có M là trung điểm của BC suy ra M trung điểm HD.

Do đó AM, HO là các đường trung tuyến của $\Delta AHD \Rightarrow G$ là trọng tâm của ΔAHD

$$\Rightarrow \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$$

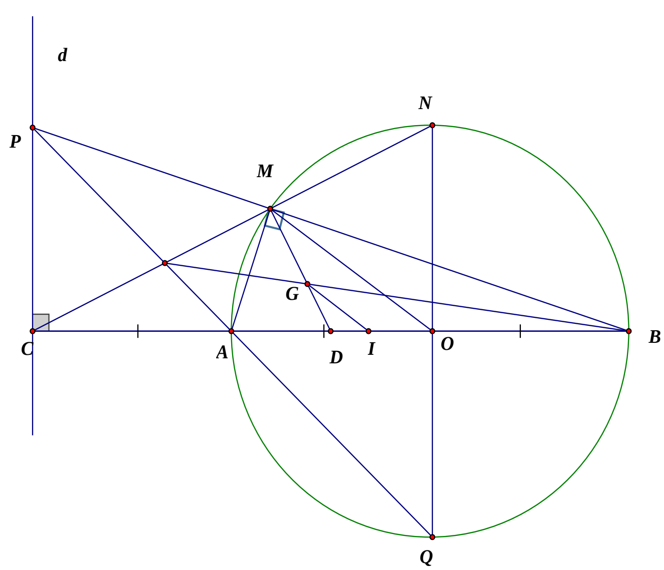
Xét tam giác ABC có M trung điểm của BC và $\dfrac{GM}{AM} = \dfrac{1}{3}$

Suy ra G là trọng tâm của ΔABC.

Câu 145.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C sao cho $AC = R.$ Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với $CA.$ Lấy điểm M bất kì trên (O) không trùng với $A, B.$ Tia BM cắt đường thẳng d tại $P.$ Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là $N,$ tia PA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q.

1. Chứng minh tứ giác $ACPM$ là tứ giác nội tiếp;
2. Tính $BM.BP$ theo $R.$
3. Chứng minh hai đường thẳng PC và NQ song song;
4. Chứng minh trọng tâm G của tam giác CMB luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi trên (O).

Hướng dẫn



1. Ta có AB là đường kính của $(O), M \in (O) \Rightarrow AMB$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow AMB = 90^o \Rightarrow AMP = 90^o$.

Mặt khác

$ACP = 90^o\,(gt) \Rightarrow AMP + ACP = 180^o$ mà hai góc ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $ACPM$ nội tiếp đường tròn.

2. Xét ΔBAM và ΔBPC có:

$AMB = BCP = 90^o$

MBA chung

$\Rightarrow \Delta BAM \# \Delta BPC\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BA}{BP}$

$\Rightarrow BM.BP = BA.BC = 2R.3R = 6R^2$.

3. Ta có:

$AMNQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MNQ = PAM$ (góc trong tại một đỉnh và góc ngoài tại đỉnh đối diện) (1)

$AMPC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow PCM = PAM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn PM) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MNQ = PCM$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow PC // NQ$.

4. Gọi D là trung điểm của $BC \Rightarrow D$ là điểm cố định

Qua G kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại I

G là trọng tâm ΔBCM nên $G \in MD$ và $MG = \dfrac{2}{3}MD$ (tính chất trọng tâm trong tam giác)

Do $GI // MO$

Áp dụng định lý Ta-lét cho ΔDMO ta có $I \in DO$ và $\dfrac{OI}{OD} = \dfrac{MG}{MD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow OI = \dfrac{2}{3}OD$

Mà O, D là hai điểm cố định nên I cố định

Do $GI // MO$ nên theo định lý Ta-lét ta có: $\dfrac{GI}{MO} = \dfrac{DG}{DM} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IG = \dfrac{1}{3}MO = \dfrac{R}{3}$

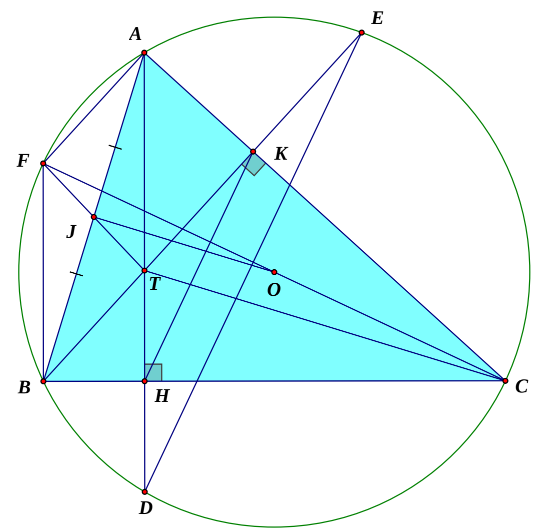
$\Rightarrow G$ luôn cách điểm I cố định một khoảng $\dfrac{R}{3}$ không đổi.

$\Rightarrow$ Khi M di động, điểm G luôn nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $\dfrac{R}{3}$.

Câu 146.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có ba góc nội tiếp đường tròn (O), bán kính R. Hạ đường cao AH, BK của tam giác. Các tia AH, BK lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là D, E.

1. Chứng minh tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.
2. Chứng minh. $HK // DE$.
3. Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên (O) sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK không đổi.

Hướng dẫn



1. Tứ giác $ABHK$ có $AKB = AHB = 90^o$, mà hai góc cùng nhìn cạnh AB

Suy ra tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn đường kính AB.

2. Theo câu trên tứ giác $ABHK$ nội tiếp (J) với J là trung điểm của AB

Nên $BAH = BKH$ (hai góc nội tiếp cùng chắn BH của (J))

Mà $BAH = BAD$ (A, H, K thẳng hàng)

$BAD = BED$ (hai góc cùng chắn BD của (O))

Suy ra $BKH = BED$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $HK // DE$.

3. Gọi T là giao điểm của hai đường cao AH và BK

Tứ giác $CHTK$ có $CHT = CKT = 90^o$

Suy ra tứ giác $CHTK$ nội tiếp đường tròn đường kính CT

Do đó CT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔCHK (*)

Gọi F là giao điểm của CO với (O) hay CF là đường kính của (O)

Ta có: $CAF = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow FA \perp CA$

Mà $BK \perp CA$ (gt)

Nên $BK // FA$ hay $BT // FA$ (1)

Ta có: $\widehat{CBF} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow FB \perp CB$

Mà $AH \perp CB$ (gt)

Nên $AH // FB$ hay $AT // FB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác $AFBT$ là hình bình hành (hai cặp cạnh đối song song)

Do J là trung điểm của đường chéo AB

Nên J cũng là trung điểm của đường chéo FT (tính chất đường chéo hình bình hành)

Xét ΔCTF có O là trung điểm của FC, J là trung điểm của FT

Nên OJ là đường trung bình của ΔCTF

$\Rightarrow OJ = \dfrac{1}{2} CT$ (**)

Từ (*) và (**) ta có độ dài của OJ bằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK

Mà độ dài của OJ là khoảng cách từ tâm O đến dây AB (J là trung điểm của dây AB)

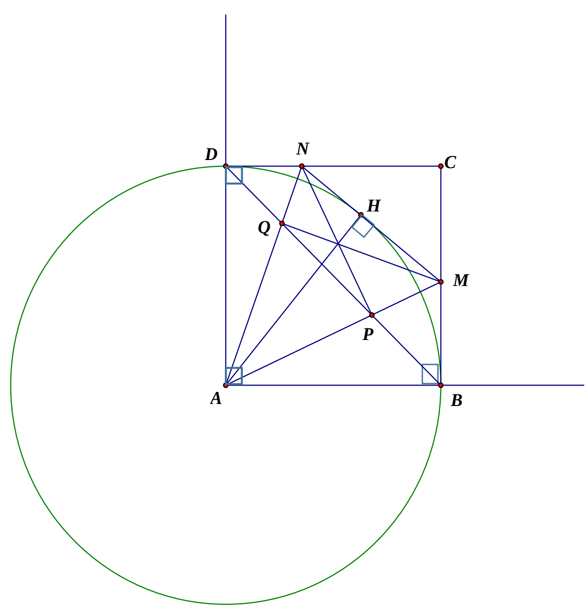
Do (O) và dây AB cố định nên độ dài OJ không đổi.

Vậy độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK không đổi.

Câu 147.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $\widehat{xAy} = 90^o$, vẽ đường tròn tâm A bán kính R. Đường tròn này cắt Ax, Ay thứ tự tại B và D. Các tiếp tuyến với đường tròn (A) kẻ từ B và D cắt nhau tại C.

1. Tứ giác $ABCD$ là hình gì? Chứng minh?
2. Trên BC lấy điểm M tùy ý (M khác B và C) kẻ tiếp tuyến MH với đường tròn (A), (H là tiếp điểm). MH cắt CD tại N. Chứng minh rằng $\widehat{MAN} = 45^0$.
3. $P; Q$ thứ tự là giao điểm của AM; AN với BD. Chứng minh rằng $MQ; NP$ là các đường cao của ΔAMN.

Hướng dẫn



1. Theo tính chất tiếp tuyến ta có:

$CBA = ADC = 90^o$

Xét tứ giác $ABCD$ có:

$$\begin{cases} BAD = 90^o \\ CBA = ADC = 90^o\left(cmt\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Ta có $AB = AC = R$ nên $ABCD$ là hình vuông.

2. Xét ΔADN vuông và ΔAHN vuông có:

$$\begin{cases} AN\ chung \\ AD = AH = R \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ADN = \Delta AHN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow DAN = HAN$

Tương tự: $DAN + HAN + HAM + BAM = xAy = 90^o$

$\Rightarrow 2.HAN + 2.HAM = 90^o$

$\Rightarrow HAN + HAM = 45^o$

$\Rightarrow MAN = 45^o$.

3. Xét ΔBCD vuông có: $BC = CD = R$

$\Rightarrow \Delta BCD$ vuông cân tại $C \Rightarrow CBD = 45^o$

Ta có A, B là hai đỉnh cùng nhìn QM một góc 45^o

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABMQ$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow AQM + ABM = 180^o$

$\Rightarrow AQM = 180^o - ABM = 180^o - 90^o = 90^o$

$\Rightarrow MQ \perp AN \Rightarrow MQ$ là đường cao của ΔAMN (đpcm)

Tương tự $ADNP$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow NP \perp AM \Rightarrow NP$ là đường cao trong ΔAMN

Vậy MQ, NP là các đường cao trong ΔAMN (đpcm)

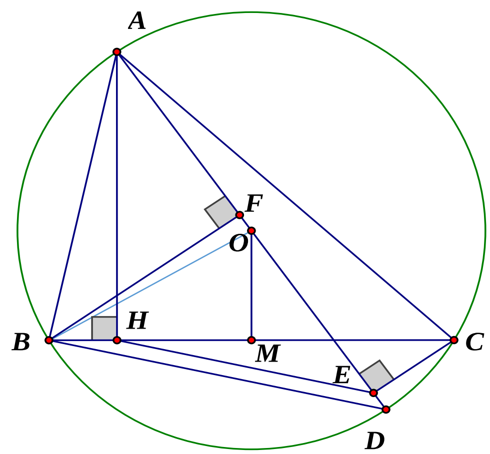
Câu 148.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $\Delta ABC\left(AB < AC\right)$ có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $\left(O;R\right)$. Vẽ đường cao AH của $\Delta ABC,$ đường kính AD của đường tròn. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C và B xuống đường thẳng AD. M là trung điểm của BC.

1. Chứng minh các tứ giác $ABHF$ và $BMFO$ nội tiếp.

2. Chứng minh $HE//BD$.

3. Chứng minh $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$ (S_{ABC} là diện tích ΔABC).

Hướng dẫn



1. Theo đề bài ta có: $AHB = BFA = 90^o$ mà 2 góc cùng nhìn cạnh AB

Vậy tứ giác $ABHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AB.

Có M là trung điểm là BC mà BC là dây cung nên $OM \perp BC$

Khi đó $BFO = BMO = 90^o$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

Vậy tứ giác $BMOF$ nội tiếp đường tròn đường kính OB.

2. Theo đề bài: $AEC = AHC = 90^o \Rightarrow ACEH$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra: $CHE = CAE = \dfrac{1}{2}CE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn EC)

Lại có: $CAE = CAD = CBD = \dfrac{1}{2}CD$ (2 góc nội tiếp cùng chắn DC)

Nên $CHE = CBD$ mà chúng ở vị trí đồng vị suy ra: $HE//BD$.

3. Ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}BC.AB.\sin ABC\ \left(AH = AB.\sin ABC\right)$

Mặt khác trong ΔABC có: $ABD = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $AB = AD.\sin ADB = 2R\sin ACB$ ($ADB = ACB$ vì hai góc nội tiếp cùng chắn AB)

Tương tự ta có: $\begin{cases} AC = 2R.\sin ABC \\ BC = 2R.\sin BAC \end{cases}$

Ta có: $AB.AC.BC = 8R^3.\sin ACB.\sin ABC.\sin BAC\ (1)$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AB.\sin ABC = \frac{1}{2}.2R.\sin BAC.2R.\sin ACB.\sin CBA = 2R^2.\sin BAC.\sin ACB.\sin CBA(2)$$

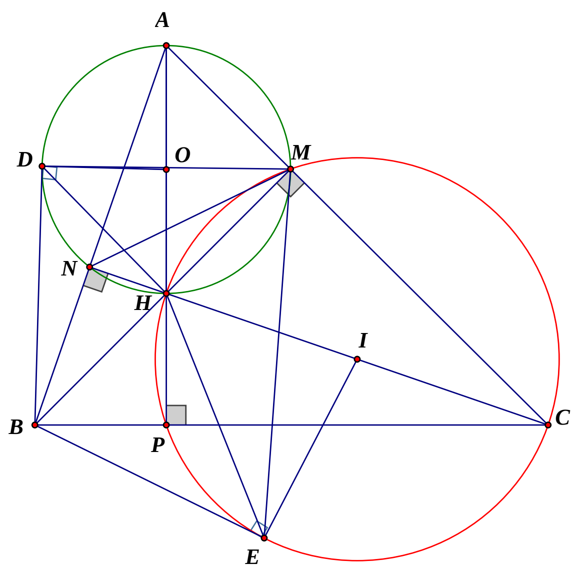
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{AB.BA.CA} = \dfrac{1}{4R}$

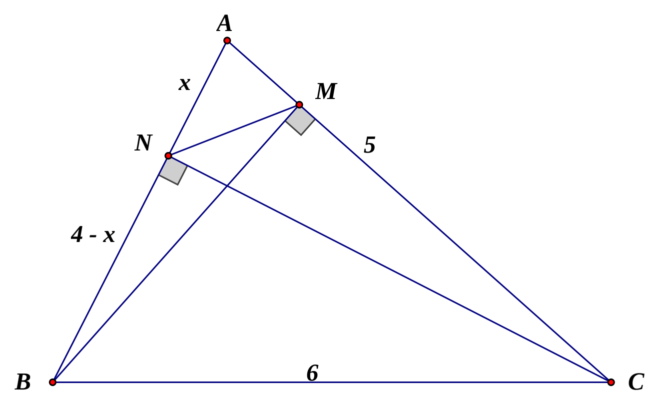
Vậy $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$.

Câu 149.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ ba đường cao AP, BM, CN của ΔABC cắt nhau tại H.

1. Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp.
2. Chứng minh $\Delta ANM \backsim \Delta ACB$.
3. Kẻ tiếp tuyến BD với đường tròn đường kính AH (D là tiếp điểm) kẻ tiếp tuyến BE với đường tròn đường kính CH (E là tiếp điểm). Chứng minh $BD = BE$.
4. Giả sử AB = 4cm; AC = 5cm; BC = 6cm. Tính MN.

Hướng dẫn





1. Ta có: $BMC = BNC = 90^o$

Mà hai đỉnh M, N cùng nhìn $BC \Rightarrow$ Tứ giác $BCMN$ nội tiếp đường tròn.

2. Xét ΔANM và ΔACB có:

A chung

$ANM = ACB$ (cùng bù với BNM)

Suy ra $\Rightarrow \Delta ANM \# \Delta ACB$ (g.g).

3. Gọi O là tâm đường tròn đường kính AH

Gọi I là tâm đường tròn đườn kính CH

Xét ΔBDH và ΔBMD có:

B chung

$BDH = BMD$ (cùng phụ với MDH)

Suy ra: $\Delta BDH \# \ \Delta BMD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BD}{BM} = \dfrac{BH}{BD} \Rightarrow BD^2 = BM.BH$ (1)

Ta có: $EMC = EHC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn EC)

Mà $HME + EMC = 90^o$ (gt) $\Rightarrow HME + EHI = 90^o$

Lại có $IHE = HEI$ do ΔHIE cân tại I

$\Rightarrow HME + HEI = 90^o$

Xét ΔBHE và ΔBEM có:

HBE chung

$BEH = BME$ (cùng phụ với HEI)

Suy ra: $\Delta BHE \# \ \Delta BEM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BH}{BE} = \dfrac{BE}{BM} \Rightarrow BE^2 = BM.BH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BE = BD.$

4. Đặt $AN = x;\ NB = 4 - x\ (0 < x < 4)$

Áp dụng định lý Pi-ta-go ta có:

$CN^2 = AC^2 - AN^2$

Mà $CN^2 = BC^2 - BN^2$

$\Rightarrow AC^2 - AN^2 = BC^2 - BN^2 \Leftrightarrow 5^2 - x^2 = 6^2 - (4 - x)^2$

$\Leftrightarrow 25 - x^2 = 36 - 16 + 8x - x^2 \Leftrightarrow 25 - 36 + 16 = 8x \Leftrightarrow 8x = 5 \Leftrightarrow x = 0,625$

Vậy $AN = 0,625$

Lại có: $\Delta ANM \# \ \Delta ACB$ (cmt)

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

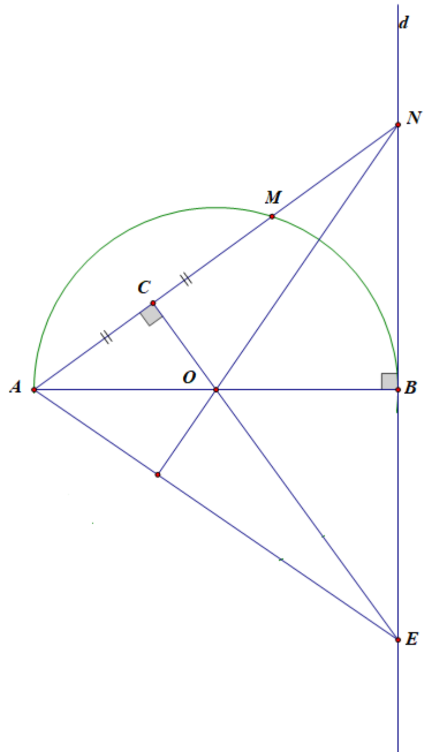
$\Rightarrow MN = \dfrac{AN.BC}{AC} = \dfrac{0,625.6}{5} = 0,75$ (cm).

Câu 150.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn O đường kính $AB = 2R$. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn $(M$ khác A và $B)$. C là trung điểm của dây cung AM. Đường thẳng d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại B. Tia AM cắt d tại điểm N. Đường thẳng OC cắt d tại E.

1. Chứng minh: tứ giác $OCNB$ nội tiếp.

2. Chứng minh: $AC.AN = AO.AB$.
3. Chứng minh: NO vuông góc với AE.
4. Tìm vị trí điểm M sao cho $(2.AM + AN)$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn



1. Theo tính chất dây cung ta có: $OC \perp AM \Rightarrow OCN = 90^o$

BN là tiếp tuyến của *(O)* tại $B \Rightarrow OB \perp BN \Rightarrow OBN = 90^o$

Xét tứ giác $OCNB$ có tổng góc đối: $OCN + OBN = 90^o + 90^o = 180^o$

Do đó tứ giác $OCNB$ nội tiếp.

2. Xét ΔACO và ΔABN có:

CAO chung

$ACO = ABN = 90^o$

Suy ra $\Rightarrow \Delta ACO \# \ \Delta ABN\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AO}{AN}$

Do đó: $AC.AN = AO.AB$ (đpcm).

3. Theo chứng minh trên ta có:

$OC \perp AM \Rightarrow EC \perp AN \Rightarrow EC$ là đường cao của ΔANE (1)

$OB \perp BN \Rightarrow AB \perp NE \Rightarrow AB$ là đường cao của ΔAME (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow O$ là trực tâm của ΔANE (vì O là gia điểm của AB và EC)

$\Rightarrow NO$ là đường cao thứ ba của ΔANE

Suy ra $NO \perp AE$ (đpcm).

4. Ta có: $2.AM + AN = 4AC + AN$ (vì C là trung điểm của AM)

$4AC.AN = 4AO.AB = 4R.2R = 8R^2$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có:

$4AC + AN \geq 2\sqrt{2AC.AN} = 2.\sqrt{8R^2} = 4\sqrt{2}R$

Suy ra tổng $2.AM + AN$ nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}R$ khi $4AC = AN$

$\Rightarrow AN = 2AM \Rightarrow M$ là trung điểm của AN

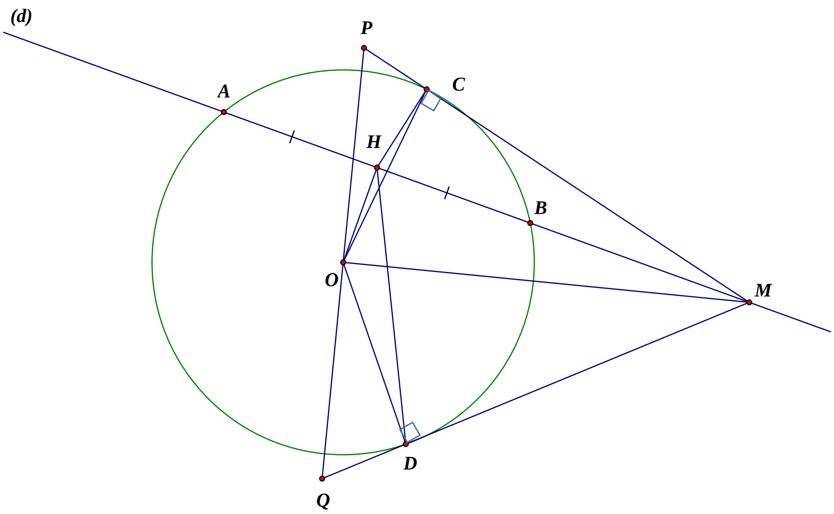
Khi đó ΔABN vuông tại B có BM là đường trung tuyến nên $AM = MB \Rightarrow AM = BM$

Vậy với M là điểm chính giữa của nửa đường tròn đường kính AB thì $2AM + AN$ nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}R$.

Câu 151.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O bán kính R và đường thẳng (d) không đi qua O, cắt đường tròn (O) tại 2 điểm A, B. Lấy điểm M bất kỳ trên tia đối BA, qua M kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm).

1. Chứng minh tứ giác $MCOD$ nội tiếp đường tròn.
2. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh HM là phân giác của CHD.
3. Đường thẳng đi qua O và vuông góc với MO cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P, Q. Tìm vị trí của điểm M trên (d) sao cho diện tích ΔMPQ nhỏ nhất.

Hướng dẫn



1. Xét tứ giác $MCOD$ có:

$MC \perp OD \Rightarrow OCM = 90^o$; $MD \perp OD \Rightarrow ODM = 90^o$

Suy ra tứ giác $MCOD$ nội tiếp đường tròn.

2. Ta có H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH \perp AB \Rightarrow MHO = 90^o \Rightarrow H$ thuộc đường kính MO

$\Rightarrow$ 5 điểm $D; M; C; H; O$ cùng thuộc đường tròn đường kính MO

$\Rightarrow DHM = DOM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MD)

$CHM = COM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

Lại có $DOM = COM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow DHM = CHM \Rightarrow HM$ là phân giác CHD.

3. Ta có: $S_{MPQ} = 2S_{MOP} = OC.MP = R.(MC + CP) \geq 2R\sqrt{CM.CP}$

Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMP ta có:

$CM.CP = OC^2 = R^2$ không đổi $\Rightarrow S_{MPQ} \geq 2R^2$

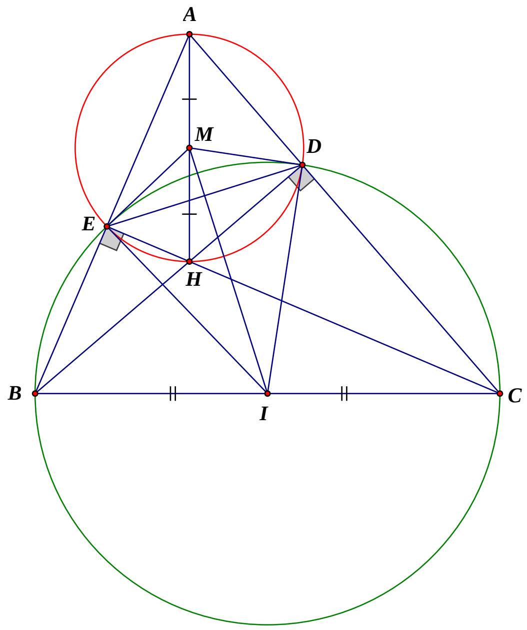
Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow CM = CP = R\sqrt{2}$. Khi đó M là giao điểm *(d)* với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$.

Vậy M là giao điểm của *(d)* với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$ thì diện tích ΔMRT nhỏ nhất.

Câu 152.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có ba góc đều nhọn, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc AC; E thuộc AB).

1. Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp được trong một đường tròn;
2. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của AH và BC. Chứng minh MI vuông góc với ED.

Hướng dẫn



1. Tứ giác $ADHE$ có: $AD \perp DH\left(gt\right)$; $AE \perp EH\ \left(gt\right)$

Nên $AEH = ADH = 90^o$

Do đó: $AEH + ADH = 180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối diện

Vậy tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn.

2. Tứ giác $BEDC$ có:

$BEC = BDC = 90^o$ (gt) nên cùng nội tiếp đường tròn tâm I đường kính BC (1)

Tương tự: Tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn tâm M đường kính AH và E, D là giao điểm của I và đường tròn

Dễ dàng chứng minh $\Delta EMI = \Delta DMI\ \left(c.c.c\right)$

$\Rightarrow MI$ là phân giác DME

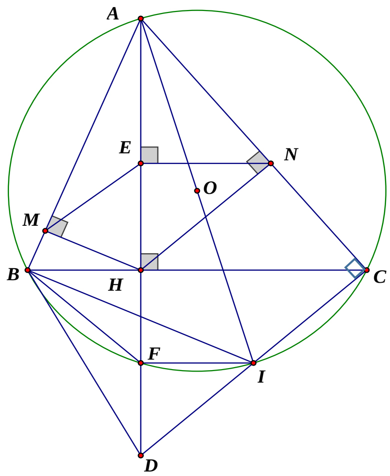
Mà ΔDMI cân tại $M\ \left(MD = ME\right)$

$\Rightarrow MI \perp DE\ \left(Đpcm\right)$.

Câu 153.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có ba góc đều nhọn $\left(AB < AC\right)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, kẻ đường cao AH. Gọi M, N là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Kẻ NE vuông góc với AH. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường tròn tại I và cắt tia AH tại D. Tia AH cắt đường tròn tại F .

1. Chứng minh $ABC + ACB = BIC$ và tứ giác $DENC$ nội tiếp được trong một đường tròn.
2. Chứng minh hệ thức $AM.AB = AN.AC$ và tứ giác $BFIC$ là hình thang cân.
3. Chứng minh: tứ giác $BMED$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Hướng dẫn



1. Vì $ABIC$ là tứ giác nội tiếp nên: $ABC = AIC; ACB = AIB$

$\Rightarrow ABC + ACB = AIC + AIB = BIC$

Vì $NE \perp AD; NC \perp CD$ nên s $NED = NCD = 90^o$

$\Rightarrow NED + NCD = 180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $DENC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông AHB và AHC có:

$AM.AB = AH^2; AN.AC = AH^2 \Rightarrow AM.AB = AN.AC$

Có $IAC = 90^o - AIC;\ BAF = 90^o - ABH;\ AIC = ABH \Rightarrow IAC = BAF$

Suy ra số đo hai cung IC và BF bằng nhau $\Rightarrow IC = BF$

Mặt khác vì $ABFI$ và $ABIC$ nội tiếp nên $BAF = BIF;\ IAC = IBC;\ BIF = IBC$

Suy ra $IF // BC \Rightarrow BCIF$ là hình thang

Vì $BAF = CAI \Rightarrow BAI = CAF$

$\Rightarrow FC = BI \Rightarrow FC = BI$

Hình thang $BCIF$ có $FC = BI \Rightarrow BCIF$ là hình thang cân.

3. Có $\Delta AEN \# \ AGD(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow AE.AD = AN.AC = AM.AB \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AD}$$

Xét ΔAME và ΔADB có:

$\frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AD}$ (cmt); MAE chung

Suy ra $\Delta AME\# \ ADB(c.g.c)$

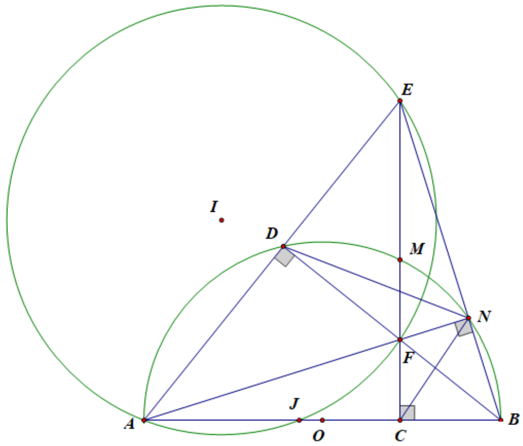
$\Rightarrow AME = ADB \Rightarrow BME + ADB = 180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối diện

Suy ra $BMED$ nội tiếp đường tròn.

Câu 154.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Dựng đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C, cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M. Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F, tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E. Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

1. Chứng minh: $AD.AE = AC.AB$.
2. Chứng minh: Ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp ΔCDN.
3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF. Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB.

Hướng dẫn



1. Có $ADB = ANB = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔADB và ΔACE có:

$ADB = ACE = 90^o$

EAC chung

$\Rightarrow \Delta ADB\# \ \Delta ACE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AD.AE = AC.AB \ (Đpcm)$$

2. Có $AN \perp EB$; $EC \perp AB$, EC giao AN tại F nên F là trực tâm của $\Delta AEB \Rightarrow BF \perp EA$

Mà $BD \perp EA \Rightarrow B, D, F$ thẳng hàng

Tứ giác $ADFC$ có hai góc đối bằng 90^o nên tứ giác $ADFC$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $DCF = DAF$ (hai góc nội tiếp cùng chắn DF)

Tương tự ta có: $NCF = NBF$ (hai góc nội tiếp cùng chắn NF)

Mà $DAF = NBF$ (cùng phụ với AEB) $\Rightarrow DCF = NCF$

Suy ra CF là phân giác DCN

Tương tự cùng có DF là phân giác NDC

Vậy F là tâm đường tròn nội tiếp ΔDCN

3. Gọi J là giao điểm của (I) với đoạn AB

Có $FAC = CEB = 90^o - ABE \Rightarrow \Delta FAC \# \Delta BEC\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{FC}{BC} = \dfrac{AC}{EC} \Rightarrow CF.CE = BC.AC \qquad (1)$

Vì $AEFJ$ là tứ giác nội tiếp nên $FJC = FEA = 180^o - AJF$

$\Rightarrow \Delta CFJ \# \Delta CAE\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{CF}{CA} = \dfrac{CJ}{CE} \Rightarrow CF.CE = CA.CJ \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BC.AC = CA.CJ \Rightarrow BC = CJ \Rightarrow C$ là trung điểm của BJ (vì $J \neq B$)

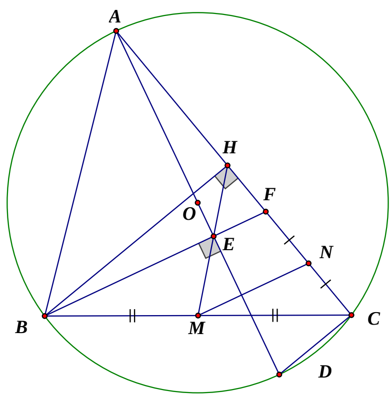
Suy ra J là điểm cố định

Có $IA = IJ$ nên I luôn thuộc đường trung trực của AJ là đường thẳng cố định.

Câu 155.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC nhọn $\left(AB < AC\right)$ nội tiếp (O), vẽ đường kính AD. Đường thẳng đi qua B vuông góc với AD tại E và cắt AC tại F. Gọi H là hình chiếu của B trên AC và M là trung điểm của BC.

1. Chứng minh $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $MHC + BAD = 90^o$.
3. Chứng minh $\dfrac{HC}{HF} + 1 = \dfrac{BC}{HE}$.

Hướng dẫn



1. Có $ACD = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì $BE \perp AD$ nên $FED = 90^o \Rightarrow FED + FCD = 180^o$ mà hai góc ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.

2. Vì M là trung điểm cạnh huyền BC của tam giác vuông BHC nên

$MH = MC = MB \Rightarrow \Delta MHC$ cân tại M (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$\Rightarrow MHC = MCH$

Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên:

$BAD = BCD \Rightarrow BAD + MHC = BCD + MCH = DCH = 90^o$.

3. Vì $BE \perp AE, BH \perp AH$ nên $BEA = BHA = 90^o \Rightarrow ABEH$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow BAE = BHE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn BE)

Mà theo ý 2 ta có: $BAE = 90^o - MHC = BHM \Rightarrow BHE = BHM$

Suy ra H, E, M thẳng hàng.

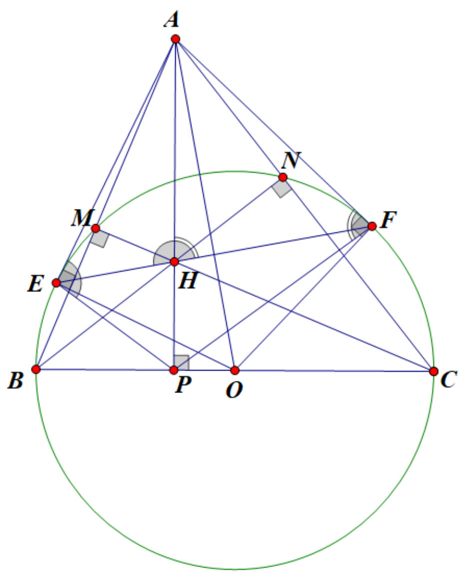
Gọi N là trung điểm của FC. $\Rightarrow NM$ là đường trung bình của ΔBFC $\Rightarrow MN // BF$ nên ta có:

$$\frac{BC}{HE} = \frac{2HM}{HE} = \frac{2HN}{HF} = \frac{2(HF + FN)}{HF} = \frac{2HF + FC}{HF} = \frac{HF + HC}{HF} = 1 + \frac{HC}{HF} \text{ (đpcm).}$$

Câu 156.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC nhọn. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm $M, N\ (M \neq B, N \neq C)$. Gọi H là giao điểm của BN và CM; P là giao điểm của AH và BC.

1. Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp được trong một đường tròn.
2. Chứng minh $BM.BA = BP.BC$.
3. Trong trường hợp đặc biệt khi ΔABC đều cạnh bằng $2a$. Tính chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ theo a.
4. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AE và AF của đường tròn tâm O đường kính BC (E, F là các tiếp điểm). Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Hướng dẫn



1. Ta có: $AMH = 90^o$; $ANH = 90^o$ nên M và N cùng thuộc đường tròn đường kính AH

Vậy tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn.

2. Tứ giác $AMPC$ có $APC = 90^0$ (do H là trực tâm của ΔABC) và $AMC = 90^o$

$\Rightarrow \Delta BMC \# \ \Delta BPA(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BP} = \dfrac{BC}{BA}\cdot$ Từ đó suy ra $BM.BA = BP.BC.$

3. Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ có đường kính AH

ΔABC đều nên trực tâm H cũng là trọng tâm

$\Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}\cdot AP = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ bằng: $\pi.AH = \dfrac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$

Vậy chu vi đường tròn ngoại tiếp tức giác $AMHN$ bằng $\dfrac{2\pi a\sqrt{3}}{3}\cdot$

4. Ta có: $AH.AP = AM.AB = AE^2 \Rightarrow \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AE}{AP}$

Xét ΔAHE và ΔAEP có:

$\dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AE}{AP}$ (cmt); EAP chung

Nên $\Delta AHE \# \ \Delta AEP$ (c.g.c). Suy ra $AHE = AEP \ \ (1)$

Tương tự ta có: $AHF = AFP \ \ (2)$

Mặt khác: Tứ giác $AFOP$ và $AEOF$ nội tiếp đường tròn đường kính AO nên năm điểm A, E, P, O, F cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

Suy ra tứ giác $AEPF$ nội tiếp đường tròn nên: $AEP + AFP = 180^o \ \ (3)$

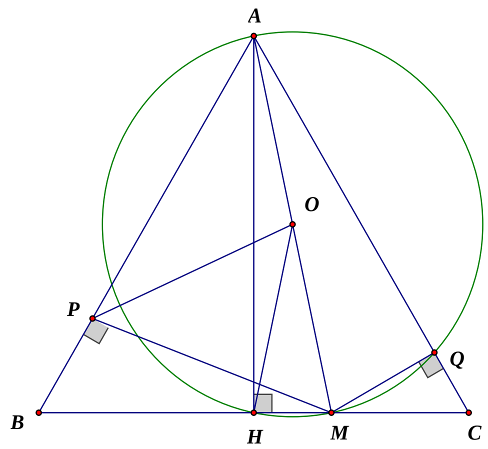
Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow AHE + AHF = AEP + AFP = 180^o \Rightarrow EHF = 180^o$

Vậy ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Câu 157.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC đều có đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng với B, C, H). Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC.

1. Chứng minh tứ giác $APMQ$ nội tiếp được đường tròn và xác định tâm O của đường tròn này.
2. Chứng minh $OH \perp PQ.$
3. Chứng minh $MP + MQ = AH$.

Hướng dẫn



1. Xét tứ giác $APMQ$ có: $APM = AQM = 90^o$ (gt)

$\Rightarrow APM + AQM = 180^o \Rightarrow$ Tứ giác $APMQ$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AM

Gọi O là trung điểm của AM

$\Rightarrow$ tứ giác $APMQ$ nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính AM.

2. Ta có: $AHM = 90^o$ (gt) $\Rightarrow AHM$ nội tiếp chắn $\frac{1}{2}$ đường tròn đường kính AM

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn (O)

Ta có: $HPQ = HAC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn HQ)

$HQP = HAB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn HP)

Mà $HAC = HAB$ (ΔABC đều nên AH vừa là đường cao vừa là đường phân giác)

$\Rightarrow HPQ = HQP \Rightarrow \Delta HPQ$ cân tại $H \Rightarrow HP = HQ$ (1)

Mà $OP = OQ$ (do $P, Q \in (O)$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH$ là đường trung trực của $PQ \Rightarrow OH \perp PQ$.

3. $S_{MAC} = \frac{1}{2} MQ.AC = \frac{1}{2} MQ.BC$

Ta có: $S_{MAB} = \frac{1}{2}.MP.AB = \frac{1}{2}.MP.BC$ (do $AB = BC$)

$S_{MAC} = \frac{1}{2} MQ.AC = \frac{1}{2} MQ.BC$ (do $AC = BC$)

$S_{ABC} = \frac{1}{2}.AH.BC$ (do $AC = BC$)

$S_{MAB} + S_{MAC} = S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.MP.BC + \frac{1}{2}.MQ.BC = \frac{1}{2}.AH.BC \Leftrightarrow MP + MQ = AH$ (đpcm).

Câu 158.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) có bán kính $R = 3$ cm. Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại D .

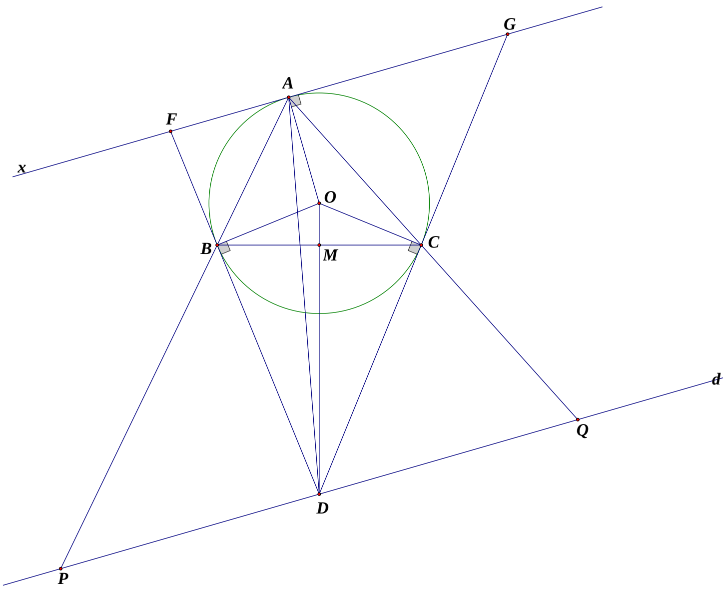
1. Chứng minh tứ giác $OBDC$ nội tiếp đường tròn;

2. Gọi M là giao điểm của BC và $OD.$ Biết $OD = 5$(cm). Tính diện tích ΔBCD

3. Kẻ đường thẳng d đi qua D và song song với đường tiếp tuyến với (O) tại A, d cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại $P, Q.$ Chứng minh $AB.AP = AQ.AC.$

4. Chứng minh $PAD = MAC.$

Hướng dẫn



1. Do DB, DC là các tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow OBD = OCD = 90^o$

$\Rightarrow OBD + OCD = 90^o + 90^o = 180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$Tứ giác $OBDC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Áp dụng định lý Pi-ta-go vào ΔOBD vuông tại B

$\Rightarrow DB = \sqrt{OD^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(cm)$

Ta có: $OB = OC = R, BD = DC$ (2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow O; D$ thuộc trung trực $BC \Rightarrow OD$ là trung trực $BC \Rightarrow OD \perp BC$

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔOBD vuông, ta có:

$$DM.DO = BD^2 \Rightarrow DM = \frac{BD^2}{DO} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5}(cm)$$

$$BM.OD = OB.BD \Rightarrow BM = \frac{OB.BD}{OD} = \frac{3.4}{5} = \frac{12}{5}(cm)$$

Vậy $S_{DBC} = \frac{1}{2}DM.BC = DM.BM = \frac{16}{5}.\frac{12}{5} = 7,68(cm^2)$

3. Ta có: $APQ = BAx$ (2 góc so le trong do $Ax // PQ$)

Mà $xAB = ACB$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và cung AB và góc nội tiếp chắn AB)

$\Rightarrow APQ = ACB$

Xét ΔABC và ΔAQP có:

PAQ chung; $APQ = ACB$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABC \# \ \Delta AQP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AQ} = \dfrac{AC}{AP} \Rightarrow AB.AP = AC.AQ.$

4. Kéo dài *BD* cắt tiếp tuyến đi qua *A* của đường tròn *(O)* tại *F*

Ta có: $DBP = ABF$ (đối đỉnh)

Mà $ABF = ACB$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung, góc nội tiếp chắn AB)

$ACB = APD$ (do $\Delta ABC \# \ \Delta AQP$)

$\Rightarrow DBP = APD = BPD \Rightarrow \Delta DBP$ cân tại $D \Rightarrow DB = DP$

Tương tự kéo dàu *DC* cắt tiếp tuyến đi qua *A* của đường tròn (*O*) tại *G*

Ta chứng minh $DCQ = ACG = ABC = DQC \Rightarrow \Delta DCQ$ cân tại D

Lại có $DB = DC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow DP = DQ \Rightarrow D$ là trung điểm PQ

Ta có: $\Delta ABC \# \ \Delta AQP$ (cmt) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AQ} = \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{BC}{PQ} = \dfrac{2MC}{2PD} \Rightarrow \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{MC}{PD}$

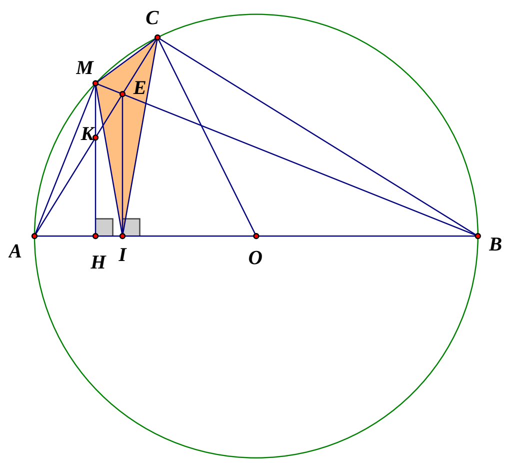
Xét ΔAMC và ΔADP có:

$ACM = APD$ ($ACB = APQ$ - cmt); $\dfrac{AC}{AP} = \dfrac{MC}{PD} \Rightarrow \Delta AMC \# \ \Delta ADP$ (c.g.c) $\Rightarrow PAD = MAC$ (đpcm).

Câu 159.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn (*O*) đường kính *AB* = 2*R*. Điểm *C* cố định trên nửa đường tròn. Điểm *M* thuộc cung *AC* ($M \neq A$; C) . Hạ $MH \perp AB$ tại *H*. Nối *MB* cắt *CA* tại *E*. Hạ $EI \perp AB$ tại *I*. Gọi *K* là giao điểm của *AC* và *MH*. Chứng minh:

1. *BHKC* và *AMEI* là các tứ giác nội tiếp.
2. $AK.AC = AM^2$.
3. $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm *M*.
4. Khi *M* chuyển động trên cung *AC* thì đường tròn ngoại tiếp tam giác *IMC* đi qua hai điểm cố định.

Hướng dẫn



1. Chứng minh tứ giác tứ giác *BHKC* và *AMEI* là tứ giác nội tiếp

$AMB = KCB = 90^o$ (2 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $BHKC$ có: $KHB + KCB = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHKC$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $AMEI$ có: $AMB + EIA = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

2. Xét ΔAHK và ΔACB có:

$AHK = ACK = 90^o$

CAB chung

$\Rightarrow \Delta AHK \# \ \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AK}{AB} \Rightarrow AH.AB = AC.AK \quad (1)$

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔAMB vuông tại M, có MH là đường cao, ta có:

$AH.AB = AM^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\Rightarrow AK.AC = AM^2 \left(Đpcm \right)$

3. Xét ΔAEI và ΔABC có:

$AIE = ACB = 90^o$

CAB chung

$\Rightarrow \Delta AEI \# \ \Delta ABC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AI} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AB.AI \quad (3)$

Xét ΔBEI và ΔBAM có:

$BIE = BMA = 90^o$

ABM chung

$\Rightarrow \Delta BEI \# \ \Delta BAM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BE}{BI} = \dfrac{BA}{BM} \Rightarrow BE.BM = BI.BA \quad (4)$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AE.AC + BE.BM = AB(AI + BI)$

$\Rightarrow AE.AC + BE.BM = AB^2 = 4R^2$

Vậy $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vào M.

4. Khi M chuyển động trên cung AC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định.

Tứ giác $BCEI$ có:

$BCE + EIB = 90^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau $\Rightarrow$ tứ giác $BCEI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow EIC = EBC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EC).

Từ câu 1, ta có tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow EIM = EAM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung ME).

Mà $EBC = EAM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

$MIC = EIC + EIM = 2.EAM = MOC$ mà 2 đỉnh cùng nhìn cạnh MC

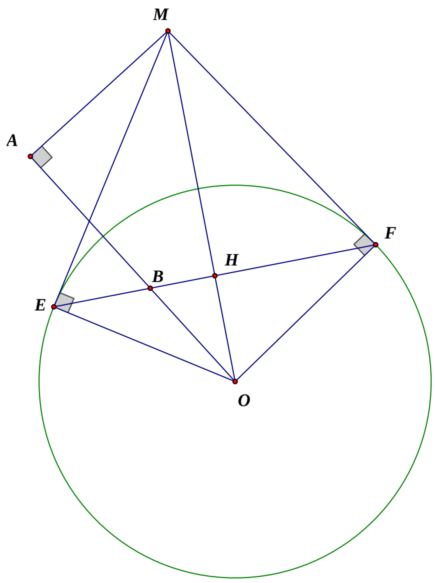
$\Rightarrow M, C, I, O$ thuộc cùng 1 đường tròn

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định O và C.

Câu 160.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn($O; R$)và điểm A cố định ở ngoài đường tròn. Vẽ đường thẳng $d \perp OA$ tại A. Trên d lấy điểm M. Qua M kẻ 2 tiếp tuyến ME, MF tới đường tròn (O). Nối EF cắt OM tại H, cắt OA tại B.

1. Chứng minh $ABHM$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $OA.OB = OH.OM = R^2$.
3. Chứng minh tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác MEF thuộc một đường tròn cố định khi M di chuyển trên d.
4. Tìm vị trí của M để diện tích ΔHBO lớn nhất.

Hướng dẫn



1. Chứng minh $ABHM$ là tứ giác nội tiếp.

Có $ME = MF$ và MO là phân giác của EMF nên $MO \perp EF$ tại H. Mà $MA \perp OA \Rightarrow MABH$ là tứ giác nội tiếp.

2. $\Delta OHB \# \Delta OAM \Rightarrow OB.OA = OH.OM$

ΔEMO vuông tại $E \Rightarrow OH.OM = OE^2 = R^2$.

3. Có $I \in MO; EI$ là phân giác MEH.

Mà $MEI + IEO = 90^o$

$IEH + OIE = 90^o \Rightarrow OIE = IEO$

$\Rightarrow \Delta OIE$ cân tại $O \Rightarrow OI = OE = R \Rightarrow I \in (O; R)$.

4. Vì $OB.OA = R^2 \Rightarrow OA = \dfrac{R^2}{OA} \Rightarrow B$ cố định.

$OHB = 90^o \Rightarrow H \in$ đường tròn đường kính OB.

Gọi K là trung điểm $OB \Rightarrow KB = KO = HK$.

Hạ $HN \perp OB$

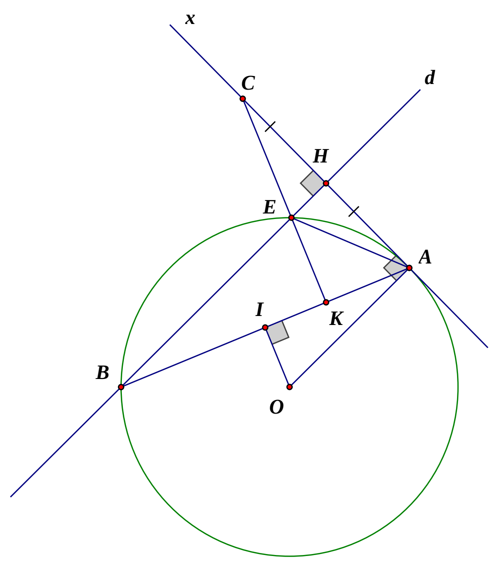
S_{HBO} max $\Leftrightarrow HN$ max. Mà $HN \leq HK$. Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv K$.

Vậy S_{HBO} max $\Leftrightarrow \Delta HBO$ vuông cân tại $H \Leftrightarrow MO$ tạo với OA một góc 45^o.

Câu 161.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ($O; R$) và điểm A thuộc đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên Ax lấy điểm H sao cho $AH < R$. Dựng đường thẳng $d \perp Ax$ tại H. Đường thẳng d cắt đường tròn tại E và B (E nằm giữa H và B).

1. Chứng minh $\Delta ABH \backsim \Delta AEH$
2. Lấy điểm C thuộc Ax sao cho H là trung điểm AC. Nối CE cắt AB tại K. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
3. Tìm vị trí của H trên Ax sao cho $AB = R\sqrt{3}$.

Hướng dẫn



1. Chứng minh $\Delta ABH \backsim \Delta AEH$

Ta có: $EAH = \dfrac{1}{2}$ sđ AE (t/c góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$ABE = \dfrac{1}{2}$ sđ AE (góc nội tiếp chắn cung AE)

Xét ΔAHB và ΔEAH có:

$EAH = ABE\ (cmt)$

AHB chung

$\Rightarrow \Delta ABH \backsim \Delta AEH\left(g-g\right)$

2. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp

Ta có: $\left.\begin{matrix} EH \perp AC \\ AH = HC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta EAC$ cân tại E

$\Rightarrow ECH = EAC \Rightarrow KCA = ABH$

Mà $\widehat{ABH}+\widehat{BAH}=90^o$

$\Rightarrow \widehat{KCA}+\widehat{BAH}=90^o$

$\Rightarrow \widehat{CKA}=90^o$

Xét tứ giác $AHEK$ có:

$\widehat{AKE}+\widehat{EHA}=90^o+90^o=180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối diện

$\Rightarrow AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

3. Tìm vị trí của H trên Ax sao cho $AB=R\sqrt{3}$

Kẻ $OI\perp AB$ tại I

$\Rightarrow AI=IB=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\widehat{OAI}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \widehat{OAI}=30^o\Rightarrow \widehat{BAC}=60^o$

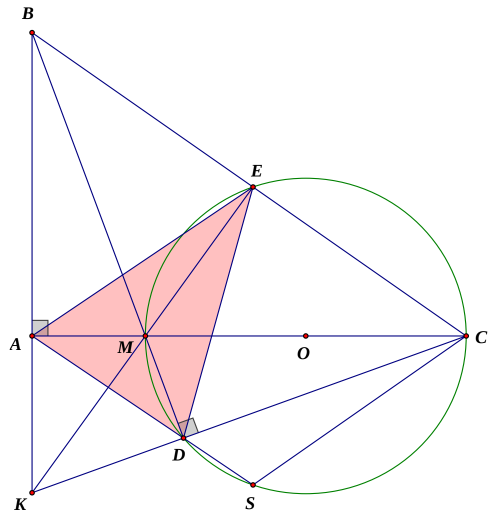
$\Rightarrow AH=AB.\cos 60^o=R\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Vậy cần lấy điểm H trên Ax sao cho $AH=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ thì $AB=R\sqrt{3}.$

Câu 162.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy 1 điểm M, dựng đường tròn tâm (O) có đường kính MC. Đường thẳng BM cắt đường tròn tâm (O) tại D, đường thẳng AD cắt đường tròn tâm (O) tại S

1. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và CA là tia phân giác của góc BCS.
2. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
3. Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Hướng dẫn



1. Ta có $BAC = 90^o$ (giả thiết)

$MDC = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

A, D nhìn BC dưới góc 90^o nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow ADB = ACB$ (cùng chắn cung AB). (1)

Ta có tứ giác $DMCS$ nội tiếp $\Rightarrow ADB = ACS$ (cùng bù với MDS). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BCA = ACS \Rightarrow CA$

là phân giác BCS .

2. Giả sử BA cắt CD tại K. Ta có $BD \perp CK, CA \perp BK$.

$\Rightarrow M$ là trực tâm ΔKBC. Mặt khác $MEC = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow K, M, E$ thẳng hàng hay BA, EM, CD đồng quy tại K.

3. Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow DAC = DBC$ (cùng chắn cung DC). (3)

Mặt khác tứ giác $BAME$ nội tiếp $\Rightarrow MAE = MBE$ (cùng chắn cung ME). (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow DAM = MAE$ hay AM là tia phân giác của DAE.

Chứng minh tương tự ta có: $ADM = MDE$ hay DM là tia phân giác ADE.

Vậy M là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE.

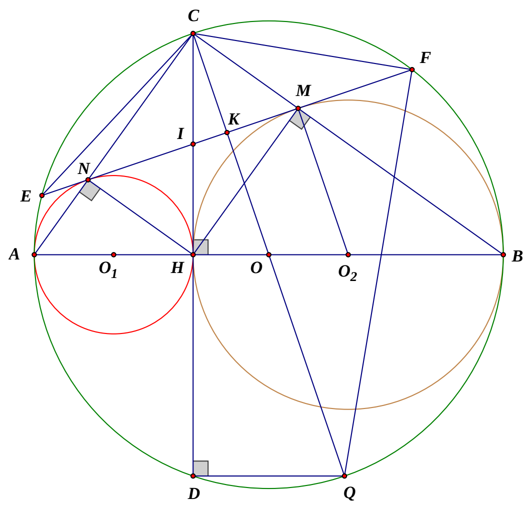
* **Lưu ý**: *Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy, một phương pháp thường dùng là chứng minh ba đường thẳng ấy hoặc là ba đường cao, hoặc là ba đường trung tuyến, hoặc là ba đường phân giác của một tam giác.*

Câu 163.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB. Điểm H thuộc đoạn OA. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AH và đường tròn (O_2) đường kính

BH. Nối AC cắt đường tròn (O_1) tại N. Nối BC cắt đường tròn (O_2) tại M. Đường thẳng MN cắt đường tròn $(O;R)$ tại E và F.

1. Chứng minh $CMHN$ là hình chữ nhật.
2. Cho $AH = 4$ cm, $BH = 9$ cm. Tính MN.
3. Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).
4. Chứng minh $CE = CF = CH$.

Hướng dẫn



1. Chứng minh $CMHN$ là hình chữ nhật:

Ta có: $AMH = ACB = HNB = 90^o$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow MCN = CMH = CNH = 90^o$

$\Rightarrow CMHN$ là hình chữ nhật.

2. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ACB:

$CH^2 = AH.HB = 4.9 = 36$

Suy ra $CH = 6 \Rightarrow MN = 6$ (cm).

3. Gọi I là giao điểm của CH và MN. Theo tính chất hình chữ nhật:

$IM = IN = IC = IH \Rightarrow \Delta IMH$ cân tại I $\Rightarrow IMH = IHM$

Lại có: $O_2M = O_2H \Rightarrow O_2MH = O_2HM$

$\Rightarrow O_2MI = O_2HI = 90^o$.

Chứng minh tương tự: $O_1NI = 90^o$

Do đó MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2).

4. OC cắt MN tại K, cắt $(O;\ R)$ tại $Q \Rightarrow CDQ = CFQ = 90^o$.

Có $OC = OB = R \Rightarrow OCB = OBC$

Mà $O_2M = O_2B = R_2 \Rightarrow O_2MB = OBN \Rightarrow O_2MB = OCB$

$\Rightarrow O_2M\,//\,OC \Rightarrow OC \perp MN$ tại K.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $FCQ: CF^2 = CK.CQ$ (1)

Có $\Delta CKI \# \ \Delta CDQ\,(g.g) \Rightarrow CK.CQ = CI.CD \quad (2)$

Mà $OH \perp CD \Rightarrow HC = HD$

Do đó $CI.CD = \dfrac{1}{2}CH.2CH = CH^2$ (3)

Từ (1); (2) và (3) $\Rightarrow CF^2 = CH^2 \Rightarrow CF = CH$

Có $OK \perp EF \Rightarrow KE = KF \Rightarrow \Delta CEF$ cân tại $C \Rightarrow CE = CF$.

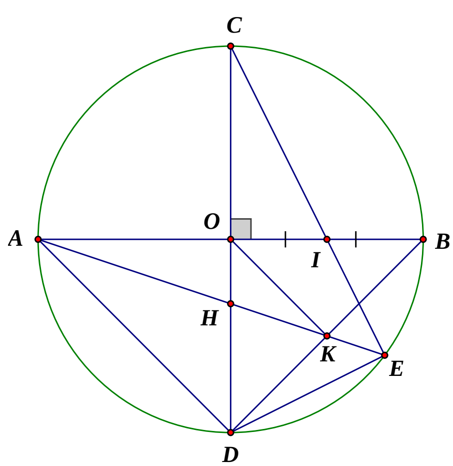
Vậy $CE = CF = CH$.

Câu 164.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính vuông góc AB và CD.

Gọi I là trung điểm của OB. Tia CI cắt đường tròn $(O; R)$ tại E. Nối AE cắt CD tại H; nối BD cắt AE tại K.

1. Chứng minh tứ giác $OIED$ nội tiếp.
2. Chứng minh $AH.AE = 2R^2$.
3. Tính $\tan BAE$.
4. Chứng minh OK vuông góc với BD.

Hướng dẫn



1. Ta có CD là đường kính của đường tròn (O; R) nên $CED = 90^o$

Theo giả thiết $BOD = 90^o$

Do đó: $IED + IOD = 180^o$

Suy ra tứ giác *OIED* là tứ giác nội tiếp.

2. $\Delta AOH \,\#\, \Delta AEB\,(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AO}{AE} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AE.AH = AO.AB = 2R^2$$

3. Ta có: $BEC = \frac{1}{2}BOC = 45^o$

$$AEC = \frac{1}{2}AOC = 45^o$$

Suy ra *EI* là phân giác AEB

Do đó $\Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{IB}{IA} = \frac{1}{3}$

Vậy $\tan BAE = \frac{BE}{AE} = \frac{1}{3}$

4. Xét ΔOHA vuông tại O, ta có $OH = OA.\tan OAH = \frac{OA}{3} = \frac{OD}{3}$ vì vậy *H* là trọng tâm của tam giác *DAB*.

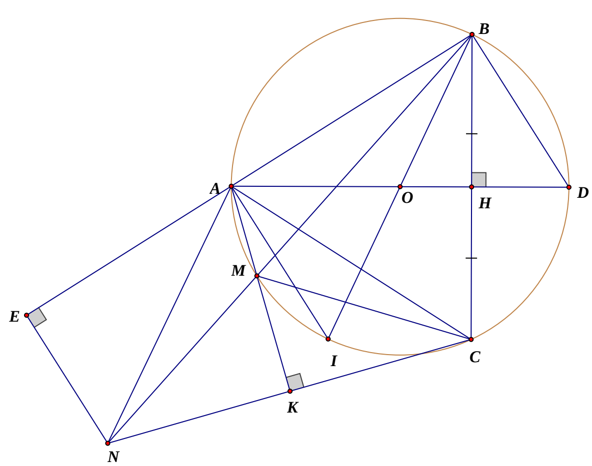
Do đó *AK* là đường trung tuyến của tam giác *DAB*.

Suy ra *KB* = *KD*. Vì vậy $OK \perp DB$ (quan hệ đường kính – dây cung).

Câu 165.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm *O*, bán kính *R*, đường kính *AD*. Điểm *H* thuộc đoạn *OD*. Kẻ dây $BC \perp AD$ tại *H*. Lấy điểm *M* thuộc cung nhỏ *AC*, kẻ $CK \perp AM$ tại *K*. Đường thẳng *BM* cắt *CK* tại *N*.

1. Chứng minh $AH.AD = AB^2$.
2. Chứng minh tam giác *CAN* cân tại *A*.
3. Giả sử *H* là trung điểm của *OD*. Tính *R* theo thể tích hình nón có bán kính đáy là *HD*, đường cao *BH*.
4. Tìm vị trí của *M* để diện tích tam giác *ABN* lớn nhất.

Hướng dẫn



1. Tam giác ABD vuông tại $B, BH \perp AD$ nên $AH.AD = AB^2$.

2. Do $AH \perp BC \Rightarrow HB = HC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A do đó $ABC = ACB$.

Mà $ACB = AMB$ nên $ABC = AMB$

$\Rightarrow ABC = KMN$ (1)

Tứ giác $ABCM$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ nên $ABC = KMC$ (cùng bù với AMC) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KMN = KMC$.

Lại có $MK \perp CN$ (giả thiết) $\Rightarrow \Delta MCN$ cân tại $M \Rightarrow KC = KN$.

Tam giác CAN có $AK \perp CN$ và $KC = KN$ nên ΔACN cân tại A.

3. Khi $OH = HD$, tam giác BOD cân tại $B \Rightarrow BO = BD$, mà $OB = OD = R$ nên tam giác OBD đều

$$\Rightarrow BOH = 60^o \Rightarrow BH = OB.\sin 60^o = \frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot$$

Thể tích hình nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi.r^2.h$

Trong đó: $r = HD = \dfrac{R}{2}, h = BH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi\cdot\dfrac{R^2}{4}\cdot\dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{2}\cdot$

4. Hạ $NE \perp AB$. Vì AB không đổi nên S_{ABN} lớn nhất khi NE lớn nhất.

Ta có: $AN = AC$ không đổi.

Mà $NE \le NA$, dấu bằng xảy ra khi $E \equiv A$. Lấy I đối xứng với B qua O. Khi $E \equiv A$ thì $NAB = 90^o$ do đó NA đi qua I.

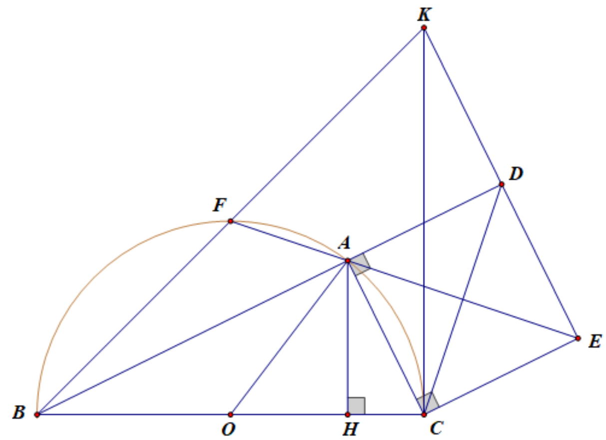
Mặt khác AM là phân giác của NAC nên M là điểm chính giữa của cung nhỏ IC.

Vậy điểm M cần tìm là điểm chính giữa cung nhỏ IC.

Câu 166.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC. Điểm A thuộc nửa đường tròn $\left(AC \le AB\right)$. Dựng về phía ngoài ΔABC một hình vuông $ACED$. Tia EA cắt nửa đường tròn tại F. Nối BF cắt ED tại K.

1. Chứng minh rằng 4 điểm B, C, D, K thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $AB = EK$.
3. Cho $ABC = 30^o; BC = 10cm$. Tính diện tích hình viên phần giới hạn bởi dây AC và cung nhỏ AC.
4. Tìm vị trí điểm A để chu vi tam giác ΔABC lớn nhất.

Hướng dẫn



1. $ACED$ là hình vuông $\Rightarrow CAE = CDE = 45^o$

Tứ giác $BCAF$ nội tiếp đường tròn $(O) \Rightarrow FBC = CAE$

(cùng bù với góc CAF)

$\Rightarrow FBC = CDE \Rightarrow FBC + CDK = 180^o$

$\Rightarrow BCDK$ là tứ giác nội tiếp.

2. Có: $BAC = 90^o = CEK$.

Mà tứ giác $BCDK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow ABC = CKD \Rightarrow ACB = ECK$.

Lại có: $AC = CE$ (cạnh hình vuông)

Suy ra $\Delta ABC = \Delta EKC$ (cạnh góc vuông – góc nhọn) $\Rightarrow AB = EK$

3. Vì $ABC = 30^o$ nên $AOC = 60^o$, do đó tam giác OAC là tam giác đều.

Kẻ $AH \perp BC$, ta có $AH = OA.\sin 60^o = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Gọi diện tích hình viên phân là S, ta có: $S = S_{quat\,AOC} - S_{AOC}$

$$S = \frac{60^o}{360^o}.\pi.R^2 - \frac{1}{2}OC.AH$$

$$= \frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4} = R^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{25(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}\ (cm^2).$$

4. Chu vi ΔABC lớn nhất $\Leftrightarrow AB + AC$ lớn nhất. Áp dụng BĐT $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

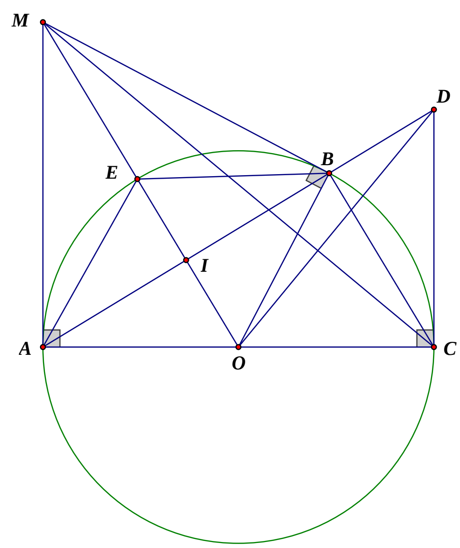
Ta có: $(AB + AC)^2 \leq 2(AB^2 + AC^2) = 2BC^2 = 8R^2 \Rightarrow AB + AC \leq 2\sqrt{2}R.$

Dấu "=" xảy ra khi $AB = AC \Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính BC.

Câu 167.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn ($O;R$) đường kính AC cố định. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn tại A. Lấy M thuộc Ax, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn tại B (B khác A). Tiếp tuyến của đường tròn tại C cắt AB tại D. Nối OM cắt AB tại I, cắt cung nhỏ AB tại E.

1. Chứng minh $OIDC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh tích $AB.AD$ không đổi khi M di chuyển trên Ax.
3. Tìm vị trí điểm M trên Ax để $AOBE$ là hình thoi.
4. Chứng minh $OD \perp MC$.

Hướng dẫn



1. Có $MA = MB; OA = OB = R$ nên OM là trung trực của AB nên $OI \perp AB$ và $IA = IB$

Lại có $OC \perp CD$ nên $OID + OCD = 180^o \Rightarrow OIDC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Có $ABC = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Mà ΔACD vuông tại C nên $AB.AD = AC^2$ không đổi.

3. $AOBE$ là hình thoi $\Leftrightarrow AE = EB = BO = OA \Leftrightarrow \Delta AOE$ đều $\Leftrightarrow AOE = 60^o$

ΔAOM vuông tại A nên $AM = OA.\tan 60^o = R\sqrt{3}$.

4. $AMO = BAC$ (cùng phụ với MAB), $MAO = OCD = 90^o$

Nên $\Delta AMO \# \Delta CAD(g.g) \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AO}{CD}$

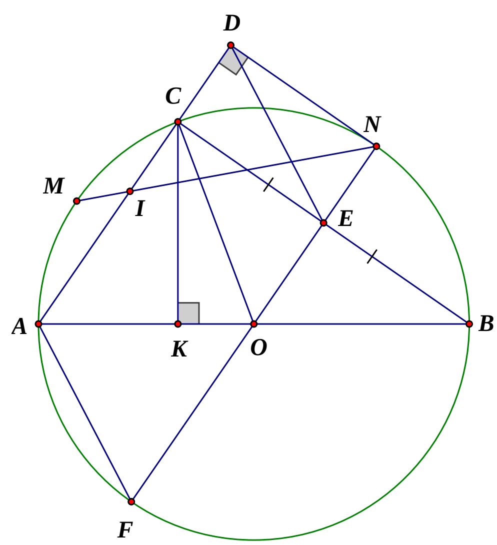
Mà $OA = OC = R$, suy ra $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{OC}{CD} \Rightarrow \tan MCA = \tan ODC$

$\Rightarrow MCA = ODC \Rightarrow ODC + MCD = 90^o$. Do đó $OD \perp MC$.

Câu 168.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn. Gọi M và N là điểm chính giữa các cung nhỏ AC và BC. Nối MN cắt AC tại I. Hạ $ND \perp AC$. Gọi E là trung điểm BC. Dựng hình bình hành $ADEF$.

1. Tính MIC.
2. Chứng minh DN là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.
3. Chứng minh rằng F thuộc đường tròn $(O;R)$.
4. Cho $CAB = 30^o; R = 30cm.$ Tính thể tích hình tạo thành khi cho ΔABC quay một vòng quanh AB.

Hướng dẫn



1. $MIA = \dfrac{1}{2}(sđ\,MA + sđ\,CN) = \dfrac{1}{4}sđ\,AB = 45^o \Rightarrow MIC = 135^o$

2. Có: $NC = NB \Rightarrow ON \perp BC$ tại E.

Lại có: $ACB = 90^o \Rightarrow DCE = 90^o$.

Mà $ND \perp CD\ (gt) \Rightarrow CEND$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow DN \perp ON$ tại $N \Rightarrow DN$ là tiếp tuyến của (O).

3. Theo tính chất hình chữ nhật ta có: $EDC = NCD$

Mà $EDC = F \Rightarrow F = DNC \Rightarrow F + ACN = 180^o. ON \,//\, AC$ (cùng $\perp CB$)

$\Rightarrow N, E, O, F$ thẳng hàng. Suy ra $ACNF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow F \in (O)$

4. Hạ $CK \perp AB.$ Tam giác ABC có $A = 30^o, C = 90^o$ nên $B = 60^o$

Do đó, ΔOBC là tam giác đều $\Rightarrow BK = KO = \dfrac{R}{2};\ BC = R;\ CK = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\cdot$

Khi quay ΔABC một vòng quanh AB có hai hình nón tạo thành: hình nón đỉnh A, và hình nón đỉnh B cùng có tâm hình tròn đáy là K, bán kính CK.

Gọi thể tích tạo thành là V, ta có:

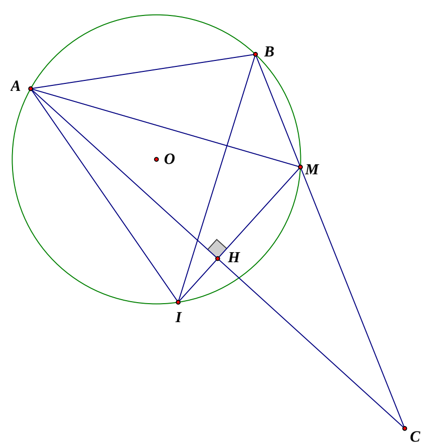
$$V = \frac{1}{3}\pi.CK^2.AK + \frac{1}{3}\pi.CK^2.BK = \frac{1}{3}\pi.CK^2(AK + BK)$$

$$= \frac{1}{3}\pi.CK^2.AB = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3R^2}{4} \cdot 2R = \frac{\pi R^3}{2} = 500\pi\ (cm^3)$$

Câu 169.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ với dây AB cố định. Gọi I là điểm chính giữa cung lớn AB. Điểm M thuộc cung nhỏ IB. Hạ $AH \perp IM; AH$ cắt BM tại C.

1. Chứng minh ΔIAB và ΔMAC là tam giác cân.
2. Chứng minh C thuộc một đường tròn cố định khi M chuyển động trên cung nhỏ IB.
3. Tìm vị trí của M để chu vi ΔMAC lớn nhất.

Hướng dẫn



1. Vì $IA = IB \Rightarrow IA = IB \Rightarrow \Delta IAB$ cân tại I.

Tứ giác $ABMI$ nội tiếp $\Rightarrow IAB = IMC$ (cùng bù với IMB)

Ta có: $IAB = IBA; IBA = IMA; IAB = IMC \Rightarrow IMA = IMC$

Lại có: $MH \perp AC \Rightarrow \Delta MAC$ cân tại M.

2. Từ chứng minh trên $\Rightarrow MI$ là đường trung trực của AC

$\Rightarrow IC = IA$ không đổi $\Rightarrow C$ thuộc đường tròn $(I;\, IA)$

3. Chu vi $\Delta MAC = MA + MC + AC = 2(MA + AH)$

Có $HMA = IBA$ (không đổi và $IBA < 90^o$)

Đặt $HMA = IAB = \alpha$. Ta có: $AH = MA.\sin\alpha$

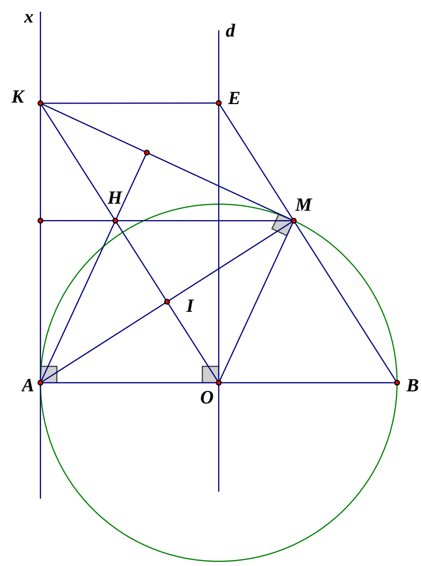
Vậy chu vi $\Delta MAC = 2MA(1 + \sin\alpha)$

Chu vi ΔMAC lớn nhất khi MA lớn nhất $\Leftrightarrow A, O, M$ thẳng hàng.

Câu 170.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên Ax lấy điểm $K\left(AK \geq R\right)$. Qua K kẻ tiếp tuyến KM với đường tròn (O). Đường thẳng $d \perp AB$ tại O, d cắt MB tại E.

1. Chứng minh $KAOM$ là tứ giác nội tiếp;
2. OK cắt AM tại I. Chứng minh $OI.OK$ không đổi khi K chuyển động trên Ax;
3. Chứng minh $KAOE$ là hình chữ nhật;
4. Gọi H là trực tâm của ΔKMA. Chứng minh rằng khi K chuyển động trên Ax thì H thuộc một đường tròn cố định.

Hướng dẫn



1. $KAO = KMO = 90^o \Rightarrow KAOM$ nội tiếp.
2. Theo tính chất tiếp tuyến: $KA = KM$

KO là phân giác của $AKM \Rightarrow KO \perp AM$ tại I

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác vuông AOK ta có

$OI.OK = OA^2 = R^2$

3. Có $OK \ // BM$ (cùng $\perp AM$) $\Rightarrow KOA = EBO$.

Mà $OA = OB = R$; $KAO = EOB = 90^o$

$\Rightarrow \Delta AKO = \Delta OEB$ ($c.g.c$)

$\Rightarrow AK = OE$, mà $AK \ // OE$, $KAO = 90^o$

$\Rightarrow AKEO$ là hình chữ nhật.

4. H là trực tâm của $\Delta KMA \Rightarrow AH \perp KM$, $MH \perp KA \Rightarrow AH // OM$, $MH // OA$.

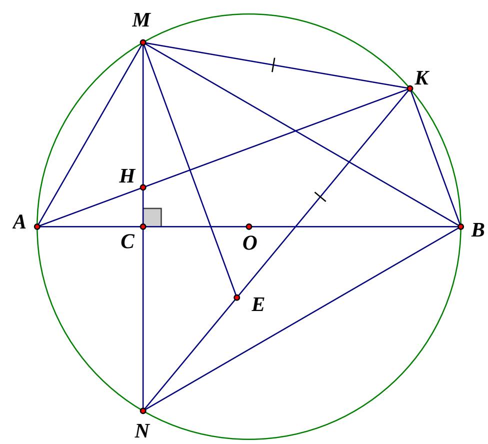
Do đó $AOMH$ là hình bình hành $\Rightarrow AH = OM = R$.

Vậy H thuộc đường tròn $(A; R)$.

Câu 171.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) đường kính $AB=2R$. Gọi C là trung điểm của OA. Dây $MN\perp AB$ tại C. Trên cung MB nhỏ lấy điểm K. Nối AK cắt NM tại H.

1. Chứng minh $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh tích $AH.AK$ không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ MB.
3. Chứng minh ΔBMN là tam giác đều.
4. Tìm vị trí điểm K để tổng $KM+KN+KB$ lớn nhất.

Hướng dẫn



1. Có $BKA=90^o$; $MCB=90^o \Rightarrow HCB+HKB=180^o$ nên tứ giác $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

2. $\Delta ACH\,\#\,\Delta AKB(g.g)\Rightarrow \dfrac{AC}{AK}=\dfrac{AH}{AB}\Rightarrow AH.AK=AB.AC=R^2$

3. Vì $OC\perp MN\Rightarrow CM=CN\Rightarrow \Delta BMN$ cân tại B.

ΔMAB vuông tại M $\Rightarrow AM^2=AC.AB=R^2$

$\Rightarrow AM=R.$ Do đó $\sin MBA=\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow MAB=30^o$

Mà $MCB=NCB$ (tính chất tam giác cân) $\Rightarrow MNB=60^o$

Do đó ΔMNB là tam giác đều.

4. Trên KN lấy E sao cho $KE=KM$

Vì tam giác BMN đều nên $MBN=60^o\Rightarrow MKN=60^o\Rightarrow \Delta KME$ đều.

Do đó $ME=MK$ và $KME=60^o$.

Lại có: $MB=MN$ và $KMB=EMN$ (cùng cộng với $BME=60^o$)

$\Rightarrow \Delta KMB=\Delta EMN\ (c.g.c)\Rightarrow KB=EN.$

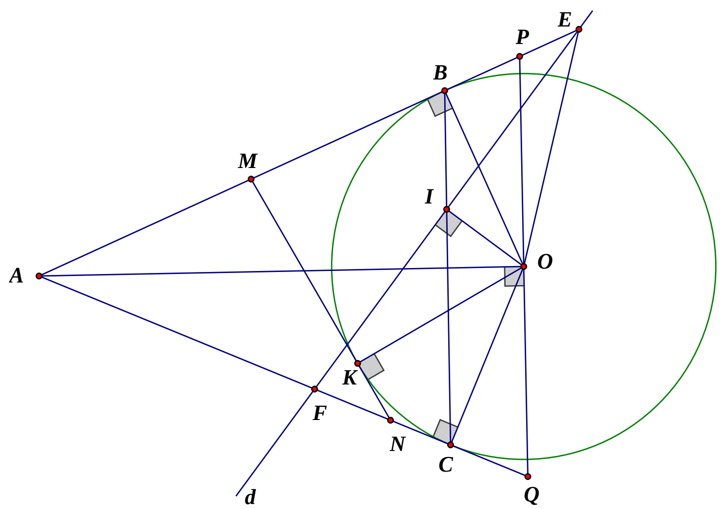
Từ đó $KM+KB=KN\Rightarrow S=KM+KN+KB=2KN$

S lớn nhất $\Leftrightarrow KN$ lớn nhất $\Leftrightarrow K, O, N$ thẳng hàng.

Câu 172.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A ở ngoài đường tròn. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B và C là 2 tiếp điểm). I là một điểm thuộc đoạn BC $(IB < IC)$. Kẻ đường thẳng $d \perp OI$ tại I. Đường thẳng d cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

1. Chứng minh $OIBE$ và $OIFC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh I là trung điểm EF.
3. K là một điểm trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại K cắt AB; AC tại M và N. Tính chu vi ΔAMN nếu $OA = 2R$.
4. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB, AC tại P và Q. Tìm vị trí của A để S_{APQ} nhỏ nhất.

Hướng dẫn



1. Có $OB \perp AB, OC \perp AC$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow OIE = OBE = 90^o \Rightarrow OIBE$ nội tiếp

$OIF + OCF = 180^o \Rightarrow OIFC$

nội tiếp.

2. Tứ giác $OIBE$ nội tiếp $\Rightarrow OEI = OBI$. Tương tự $OFI = OCI$. Mà $OB = OC = R$

$\Rightarrow OBI = OCI \Rightarrow OEI = OFI$

$\Rightarrow \Delta OEF$ cân tại O. Mà $OI \perp EF \Rightarrow IE = IF$ (Đpcm)

3. Có $MK = MB,\ NK = NC$

Suy ra chu vi $\Delta AMN = AC + AB = 2AC = 2\sqrt{AO^2 - OC^2} = 2\sqrt{3R^2} = 2R\sqrt{3}$

4. Có AO là phân giác của PAQ, $PQ \perp AO \Rightarrow \Delta APQ$ cân tại $A \Rightarrow S_{APQ} = 2S_{AOQ}$

$S_{APQ} = AQ.OC$ mà $OC = R$ không đổi, do đó S_{APQ} nhỏ nhất $\Leftrightarrow AQ$ nhỏ nhất.

ΔOAQ vuông tại O $\Rightarrow AC.CQ = OC^2 = R^2$.

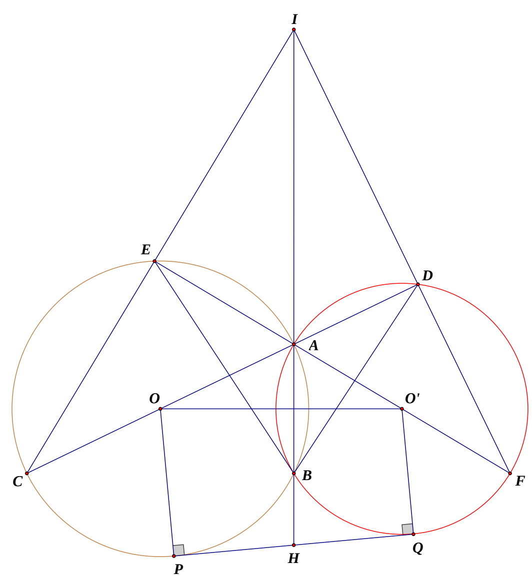
Mà $AQ = AC + CQ \geq 2\sqrt{AC.CQ} = 2R$, dấu "=" xảy ra khi $AC = CQ$

S_{APQ} min $\Leftrightarrow AC = CQ \Leftrightarrow \Delta OQA$ vuông cân tại $O \Leftrightarrow A = 45^o \Leftrightarrow OA = R\sqrt{2}$

Câu 173.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt. Đường thẳng OA cắt $(O);(O')$ lần lượt tại điểm thứ hai C, D. Đường thẳng $O'A$ cắt $(O);(O')$ lần lượt tại điểm thứ hai E, F.

1. Chứng minh 3 đường thẳng AB, CE và DF đồng quy tại một điểm I.
2. Chứng minh tứ giác $BEIF$ nội tiếp được trong một đường tròn.
3. Cho PQ là tiếp tuyến chung của (O) và (O') $(P \in (O), Q \in (O'))$. Chứng minh đường thẳng AB đi qua trung điểm của đoạn thẳng PQ.

Hướng dẫn



1. Ta có: $ABC = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$ABF = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên *B, C, F* thẳng hàng.

Có *AB; CE* và *DF* là 3 đường cao của ΔACF nên chúng đồng quy.

2. Do $IEF = IBF = 90^o$ suy ra *BEIF* nội tiếp đường tròn.
3. Gọi *H* là giao điểm của *AB* và *PQ*

Ta chứng minh được $\Delta AHP \# \Delta PHB \Rightarrow \dfrac{HP}{HB} = \dfrac{HA}{HP} \Rightarrow HP^2 = HA.HB$

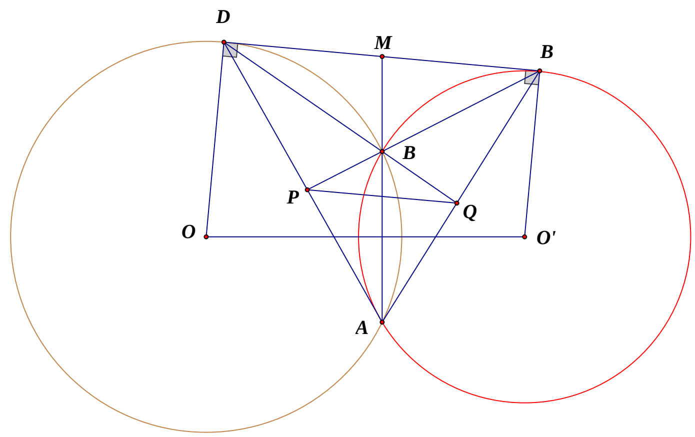
Tương tự, $HQ^2 = HA.HB$

Vậy $HP = HQ$ hay H là trung điểm của PQ.

Câu 174.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ với $R > R'$ cắt nhau tại A và B. Kẻ tiếp tuyến chung DE của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$ sao cho B gần tiếp tuyến đó hơn so với A.

1. Chứng minh rằng $DAB = BDE$.
2. Tia AB cắt DE tại M. Chứng minh M là trung điểm của DE.
3. Đường thẳng EB cắt DA tại P, đường thẳng DB cắt AE tại Q. Chứng minh rằng PQ song song với AB.

Hướng dẫn



1. Ta có $DAB = \dfrac{1}{2}$ sđ DB (góc nội tiếp)

$BDE = \dfrac{1}{2}$ sđ DB (góc giữa tiếp tuyến và dây cung).

Suy ra $DAB = BDE$.

2. Xét ΔDMB và ΔAMD có:

DMA chung,

$DAM = BDM$

Nên ΔDMB # ΔAMD (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{MA}{MD}$ hay $MD^2 = MA.MB$.

Tương tự ta cũng có: ΔEMB # $\Delta AME \Rightarrow \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{MA}{ME}$ hay $ME^2 = MA.MB$.

Từ đó: $MD = ME$ hay M là trung điểm của DE.

3. Ta có $DAB = BDM$, $EAB = BEM$

$\Rightarrow PAQ + PBQ = DAB + EAB + PBQ = BDM + BEM + DBE = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $APBQ$ nội tiếp $\Rightarrow PQB = PAB$.

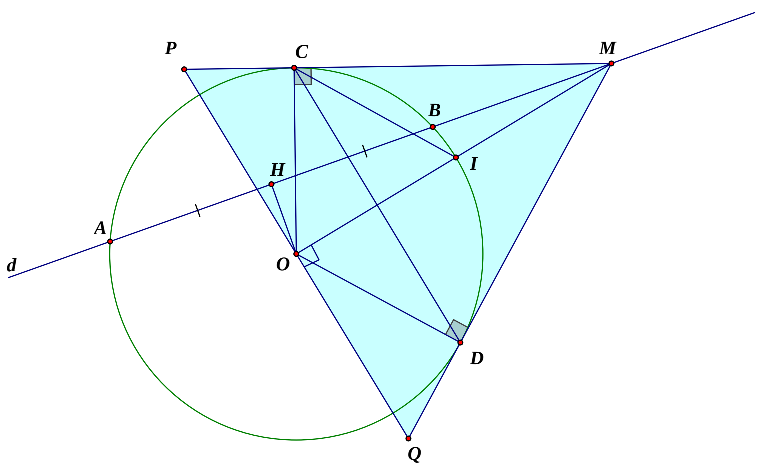
Kết hợp với $PAB = BDM$ suy ra $PQB = BDM$.

Hai góc này ở vị trí so le trong nên PQ song song với AB.

Câu 175.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường trong $(O;R)$ và đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB ;

1. Chứng minh rằng các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
2. Đoạn OM cắt đường tròn tại I. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.
3. Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD thứ tự tại P và Q. Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

Hướng dẫn



1. Vì H là trung điểm của AB nên $OH \perp AB$ hay $OHM = 90^o$.

Theo tính chất của tiếp tuyến ta lại có $OD \perp DM$ hay $ODM = 90^o$.

Suy ra các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2. Theo tính chất tiếp tuyến, ta có $MC = MD \Rightarrow \Delta MCD$ cân tại M

$\Rightarrow MI$ là một đường phân giác của CMD.

Mặt khác I là điểm chính giữa cung nhỏ CD nên $DCI = \frac{1}{2}$ sđ $DI = \frac{1}{2}$ sđ $CI = MCI$

$\Rightarrow$ CI là phân giác của MCD. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCD.

3. Ta có ΔMPQ cân ở M, có MO là đường cao nên diện tích của nó được tính:

$$S = 2S_{OQM} = 2.\frac{1}{2}.OD.QM = R(MD + DQ).$$

Từ đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $MD + DQ$ nhỏ nhất.

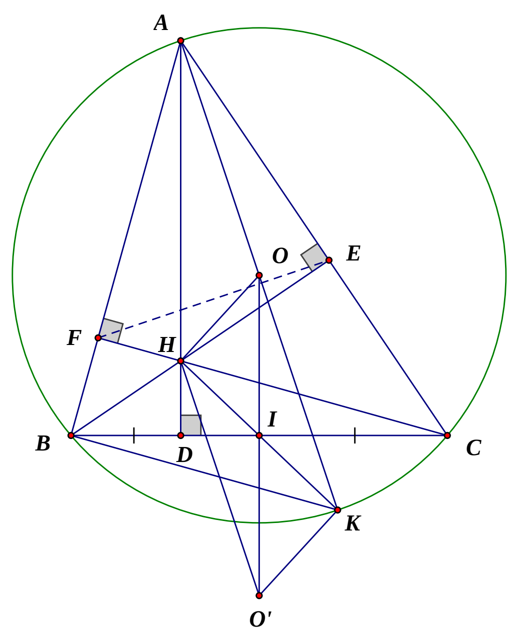
Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMQ ta có $DM.DQ = OD^2 = R^2$ không đổi nên $MD + DQ$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $DM = DQ = R$.

Khi đó $OM = R\sqrt{2}$ hay M là giao điểm của d với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$.

Câu 176.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Ba đường cao $AD; BE; CF$ cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm BC, vẽ đường kính AK.

1. Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.
2. Chứng minh $DA.DH = DB.DC$.
3. Cho $BAC = 60^0; S_{ABC} = 20cm^2$. Tính S_{ABC}.
4. Cho BC cố định; A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh điểm H luôn thuộc một đường tròn cố định.

Hướng dẫn



1. Vì B và C thuộc đường tròn đường kính AK: $ABK = ACK = 90^o$

Do đó $BH // CK$ và $CH // BK \Rightarrow BHCK$ là hình bình hành

Mà I là trung điểm BC nên I là trung điểm của HK

Suy ra $H; I; K$ thẳng hàng.

2. Ta có $HBD = DAC$ (cùng phụ với ACB) nên $\Delta DBH \# \Delta DAC\,(g.g)$

Suy ra $\dfrac{DB}{DA}=\dfrac{HD}{DC}\Rightarrow DB.DC=DA.DH$.

3. Vì $AEB=AFC=90^o\Rightarrow \Delta AEB\#\ \Delta AFC\left(g.g\right)$

Suy ra $\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AB}{AC}$; BAC chung

$\Rightarrow \Delta AEF\#\ \Delta ABC\left(c.g.c\right)$

Do đó $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{AE}{AF}\right)^2$

Mà $\dfrac{AE}{AB}=\cos BAC=\cos 60^o=\dfrac{1}{2}$

Suy ra $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow S_{ABC}=4S_{AEF}=80cm^2$.

4. Lấy *O'* đối xứng với *O* qua *I* suy ra *O'* cố định.

Ta có $IH=IK;OK=OA=R$ nên *OI* là đường trung bình của ΔKHA

Do đó $OI//AH$ và $OI=\dfrac{1}{2}AH$

Suy ra $OO'//AH$, $OO'=AH$ nên $OO'HA$ là hình bình hành

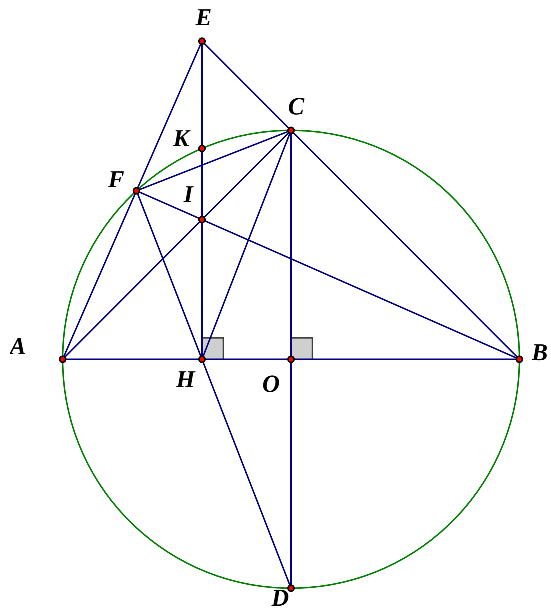
Do đó $O'H=OA=R$ (không đổi)

Vậy *H* thuộc đường tròn (*O';R*) cố định.

Câu 177.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (*O; R*) có hai đường kính vuông góc là *AB* và *CD*. Lấy *K* thuộc cung nhỏ *AC*, kẻ $KH\perp AB$ tại *H*. Nối *AC* cắt *HK* tại *I*, tia *BC* cắt *HK* tại *E*; nối *AE* cắt đường tròn (*O;R*) tại *F*.

1. Chứng minh *BHFE* là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh *EC.EB* = *EF.EA*.
3. Cho *H* là trung điểm *OA*. Tính theo *R* diện tích ΔCEF.
4. Cho *K* di chuyển trên cung nhỏ *AC*. Chứng minh đường thẳng *FH* luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn



1. Do F thuộc đường tròn đường kính AB nên $AFB = 90^o$

Suy ra $BFE = BHE = 90^o \Rightarrow BHFE$ là tứ giác nội tiếp.

2. Có $ECA = EFB = 90^o; AEC$ chung

Nên $\Delta ECA \# \ \Delta EFB(g.g) \Rightarrow \dfrac{EC}{EF} = \dfrac{EA}{EB} \Rightarrow EC.EB = EA.EF.$

3. Từ chứng minh trên suy ra AC, BF, EH là 3 đường cao của ΔEAB nên chúng cắt nhau tại I.

Do đó $\dfrac{EC}{EF} = \dfrac{EA}{EB}$ và AEB chung nên $\Delta ECF \# \ \Delta EAB$ (cạnh – góc – cạnh)

$$\frac{S_{ECF}}{S_{EAB}} = \left(\frac{EC}{EA}\right)^2 \ (1)$$

Vì $OB = OC = R$ nên ΔOBC vuông cân tại $O \Rightarrow OBC = 45^o$.

Do đó ΔHBE vuông cân tại $H \Rightarrow EH = HB = \dfrac{3R}{2}$.

Mà $AH = \dfrac{R}{2}$ nên $AE^2 = AH^2 + HE^2 = \dfrac{R^2}{4} + \dfrac{9R^2}{4} = \dfrac{10R^2}{4} \Rightarrow AE = \dfrac{R\sqrt{10}}{2}$

Tương tự $BE^2 = HB^2 + HE^2 = \dfrac{9R^2}{2} \Rightarrow BE = \dfrac{3R}{\sqrt{2}}$

Lại có: $OC // EH$ (cùng $\perp AB$) nên $\dfrac{EC}{EB} = \dfrac{HO}{HB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow EC = \dfrac{1}{3}EB = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \left(\frac{EC}{EA}\right)^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{ECF} = \frac{1}{5}S_{EAB} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot EH \cdot AB = \frac{3R^2}{10}$$

4. Các tứ giác $BEFH$ và $AHCE$ nội tiếp nên $AEB = CHB; AEB = AHF \Rightarrow AHF = CHB$

Suy ra $AHF = DHB$.

Có $HO \perp OC, OC = OD$ nên ΔHCD cân tại H nên $AHF = DHB$

Do đó $AHF = DHB$ mà $AHF + FHB = 180^o \Rightarrow DHB + FHB = 180^o$

Suy ra *F; H; D* thẳng hàng. Suy ra *FH* đi qua *D* cố định.

Bài 178. [Bà Rịa – Vũng Tàu 2015 – 2016]

Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài (O). Dựng cát tuyến AMN không đi qua O, M nằm giữa A và N. Dựng hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B,C là hai tiếp điểm và C thuộc cung nhỏ MN). Gọi I là trung điểm của MN.

a) Chứng minh tứ giác OI nội tiếp.

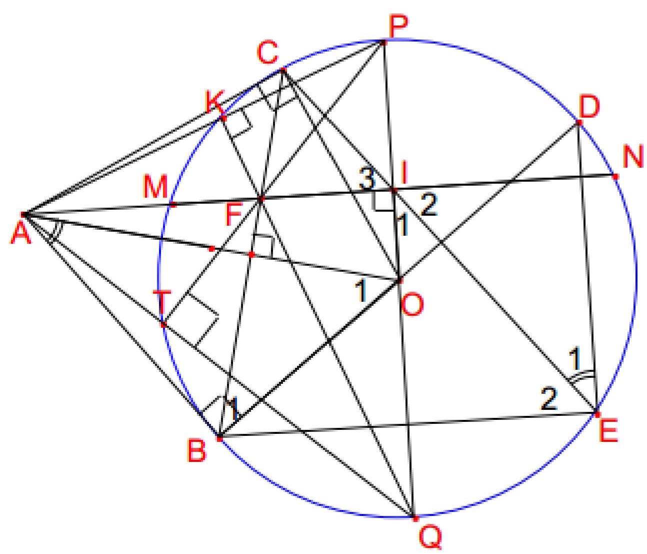
b) Hai tia BO và CI lần lượt cắt (O) tại D và E (D khác B, E khác C). Chứng minh góc CED = góc BAO.

c) Chứng minh OI vuông góc với BE

d) Đường thẳng OI cắt đường tròn tại P và Q (I thuộc OP); MN cắt BC tại F; T là giao điểm thứ hai của PF và (O). Chứng minh ba điểm A; T; Q thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác OI nội tiếp.



+ Ta có ABO = 90^o (tctt)

AIO = 90 (IM = IN)

+ Suy ra ABO + AIO = 180^0 nên tứ giác ABOI nội tiếp đường tròn đường kính AO.

b) Chứng minh CED = BAO

+ Vì AB; AC là hai tiếp tuyến của (O) nên AO $\perp$ BC

+ Ta có: $E_1 = B_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD của đường tròn (O))

BAO = B_1 (cùng phụ O_1)

Suy ra E_1 = BAO hay CED = BAO

c) Chứng minh OI vuông góc với BE

+ Ta có : E2 = ABC (cùng chắn cung BC); ABC = I_3 (A,B,O,I,C cùng thuộc đường tròn đường kính AO);

I3 = I2 (đđ)

Suy ra E2 = I2. Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên MN // BE .

+ Ta lại có MN $\perp$ OI (IM = IN) nên OI $\perp$ BE

d) Chứng minh ba điểm A; T; Q thẳng hàng.

+ Gọi K là giao điểm OF và AP

+ Ta có QKP = 90^o (góc nt chắn nửa đường tròn) nên QK $\perp$ AP

+ Trong tam giác APQ có hai đường cao AI và QK cắt nhau tại F nên F là trực tâm.

Suy ra PF là đường cao thứ 3 của tam giác APQ nên PF $\perp$ QA (1)

+ Ta lại có QTP = 90^o (góc nt chắn nửa đường tròn) nên PF $\perp$ QT (2)

Từ (1);(2) suy ra QA $\equiv$QT. Do đó 3 điểm A; T; Q thẳng hàng.

Bài 179. **[Bắc Giang 2014 – 2015]**

Cho đường tròn (O;R) có đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C sao cho AC = R. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với CA. Lấy điểm M bất kì trên (O) không trùng với A, B. Tia BM cắt đường thẳng d tại P. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N, tia PA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q.

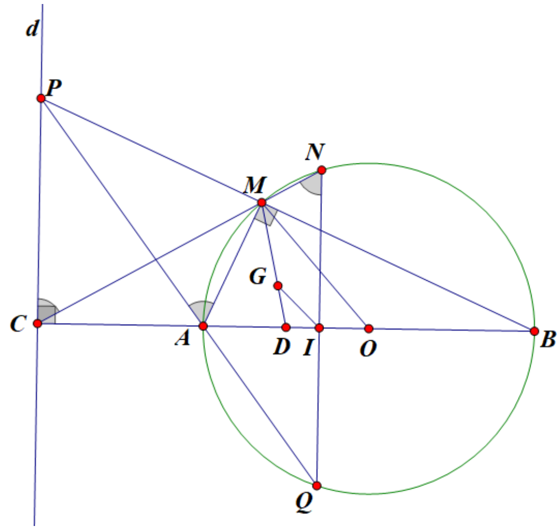
a) Chứng minh tứ giác ACPM là tứ giác nội tiếp.

b) Tình BM.BP theo R

c) Chứng minh hai đường thẳng PC và NQ song song.

d) Chứng minh trọng tâm G của tam giác CMB luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi trên (O).

Hướng dẫn



a) Ta có AB là đường kính của (O), M ∈ (O) ⇒ góc AMB là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

=> AMB = 90^o => AMP = 90^o

Mặt khác ACP = 90^o (gt) => AMP + ACP = 180^o

Suy ra tứ giác ACPM nội tiếp đường tròn.

b) Xét 2 tam giác BAM và BPC ta có:

$$\begin{cases} AMB = BCP = 90^o \\ MBA(chung) \end{cases} \Rightarrow \Delta BAM \sim \Delta BPC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BA}{BP} \Rightarrow BM.BP = BA.BC = 2R.3R = 6R^2$$

c) Ta có:

AMNQ là tứ giác nội tiếp ⇒ MNQ = PAM (góc trong tại một đỉnh và góc ngoài tại đỉnh đối diện) (1)

AMPC là tứ giác nội tiếp ⇒ PCM = PAM (hai góc nội tiếp cùng chắn cung PM) (2)

Từ (1) và (2) ⇒ MNQ = PCM

Hai góc ở vị trí so le trong bằng nhau ⇒ PC // NQ.

d) Gọi D là trung điểm BC, là điểm cố định. Qua G kẻ đường thẳng song song MO cắt AB tại I.

*G là trọng tâm tam giác BCM nên G ∈ đoạn MD và MG = $\frac{2}{3}MD$ (tính chất trọng tâm)

Do GI // MO nên theo định lí Ta–lét cho tam giác DMO ta có I ∈ đoạn DO và $\frac{OI}{OD} = \frac{MG}{MD} = \frac{2}{3} \Rightarrow OI = \frac{2}{3}OD.$

Mà O, D là hai điểm cố định nên I cố định.

*Do GI // MO nên theo định lí Ta–lét ta có $\frac{GI}{MO} = \frac{DG}{DM} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG = \frac{1}{3}MO = \frac{R}{3}.$

⇒ G luôn cách điểm I cố định một khoảng $\frac{R}{3}$ không đổi.

$\Rightarrow$ Khi M di động, điểm G luôn nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $\frac{R}{3}$

Bài 180. **[Bắc Giang 2015 – 2016]**

Trên đường tròn (O) có đường kính AB = 2R, lấy một điểm C sao cho AC = R và lấy điểm D bất kỳ trên cung nhỏ BC (điểm D không trùng với B và C). Gọi E là giao điểm của AD và BC. Đường thẳng đi qua điểm E và vuông góc với đường thẳng AB tại điểm H cắt tia AC tại điểm F. Điểm M là trung điểm của đoạn EF.

a) Chứng minh tứ giác BHCF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: HA.HB = HE. HF

c) Chứng minh CM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Xác định vị trí của điểm D để chu vi của tứ giác ABDC lớn nhất.

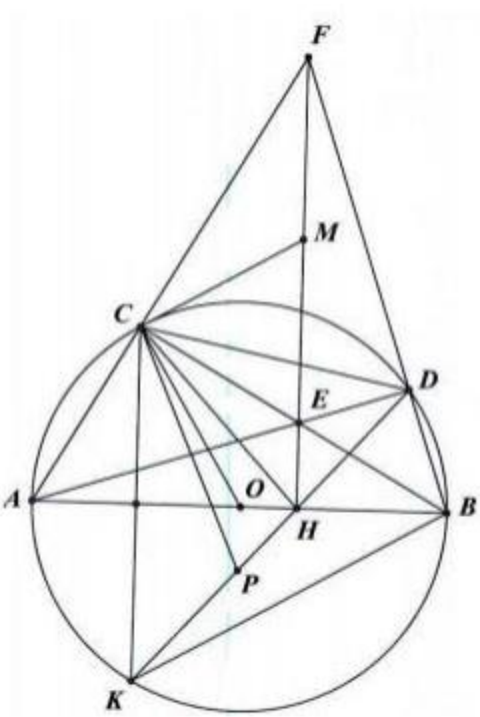
Hướng dẫn

a) Ta có: $BHF = 90^o$ (giả thiết) (1).

$BCA = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

Suy ra $BCF = 90^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác BHCF nội tiếp một đường tròn (vì có hai đỉnh H, C kề nhau cùng nhìn BF dưới một góc vuông).



b) Xét tam giác vuông BHE và FHA có $BEH = CAB$ (cùng phụ với góc CBA).

Suy ra hai tam giác BHE và FHA đồng dạng.

Từ đó ta có $\frac{HB}{HF} = \frac{HE}{HA}$ ⇔ HA. HB = HE. HF

c) Tam giác vuông ECF vuông tại C có CM là đường trung tuyến

Nên CM = ME suy ra CME là tam giác cân, suy ra $MCE = MEC$ (3)

$MCO = MCE + ECO = MEC + CBO$ (do (3) và tam giác COB cân tại O).

= $BEH + CBO = 90^o$

Vậy CM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Lấy điểm K đối xứng với điểm C qua AB. Suy ra điểm K cố định trên (O)

Lấy điểm P trên đoạn DK sao cho DP = DC.

Khẳng định tam giác OAC đều => tam giác CBK đều => tam giác CDP đều.

Xét hai tam giác CKP và CBD có:

CP = CD ; CK = CB và $KCP = BCD$ (cùng bằng 60^o - PCB)

Từ đó, ΔCKP = ΔCBD (c.g.c) suy ra PK = BD.

Chu vi tứ giác ABDC bằng:

AB + BD + DC + CA = 3R + BD + DC = 3R + PK + PD = 3R + KD

Chu vi tứ giác lớn nhất khi KD lớn nhất => KD là đường kính của đường tròn (O; R).

Kết luận D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

Câu 181.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Bắc Ninh – 2015 – 2016]**

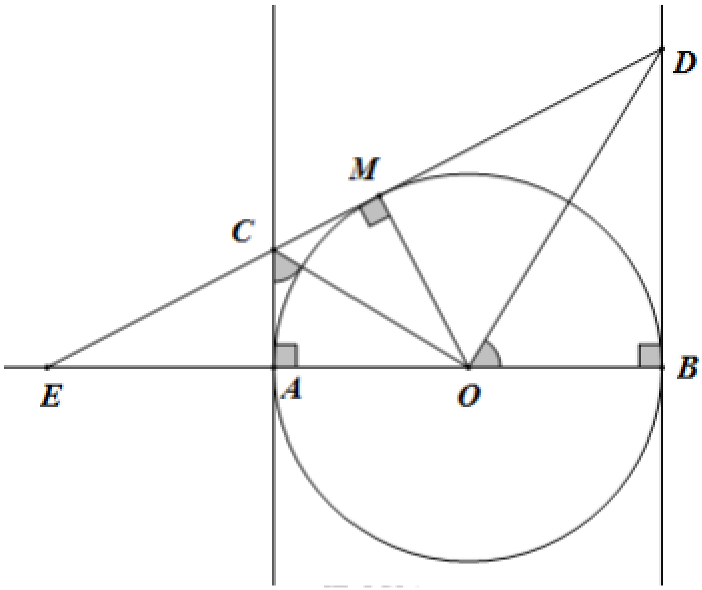
Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E (khác với điểm A). Tiếp tuyến kẻ từ điểm E cắt các tiếp tuyến kẻ từ điểm A và B của nửa đường tròn (O) lần lượt tại C và D. Gọi M là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ điểm E.

a) Chứng minh rằng tứ giác ACMO nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $\frac{DM}{DE}=\frac{CM}{CE}$

c) Chứng minh rằng khi điểm E thay đổi trên tia đối của tia AB, tích AC.BD không đổi.

Hướng dẫn



a) Chứng minh rằng tứ giác ACMO nội tiếp được trong một đường tròn.

Vì AC là tiếp tuyến của (O) nên OA ⊥ AC => OAC = 90^o

Vì MC là tiếp tuyến của (O) nên OM ⊥ MC => OMC = 90^o

=> OAC + OMC = 180^o. Suy ra OACM là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng $\frac{DM}{DE}=\frac{CM}{CE}$

Xét hai tam giác vuông OAC và OMC có

$\begin{cases} OA=OM=R \\ chung\_OC \end{cases} \Rightarrow \Delta OAC=\Delta OMC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

⇒ CA = CM $\Rightarrow \frac{CM}{CE}=\frac{CA}{CE}$. Tương tự ta có $\frac{DM}{DE}=\frac{DB}{DE}$

Mà AC // BD (cùng vuông góc AB) nên $\frac{CA}{DB}=\frac{CE}{DE}\Rightarrow\frac{CA}{CE}=\frac{DB}{DE}\Rightarrow\frac{CM}{CE}=\frac{DM}{DE}$

c) Chứng minh rằng khi điểm E thay đổi trên tia đối của tia AB, tích AC.BD không đổi.

Vì $\Delta OAC=\Delta OMC\Rightarrow AOC=MOC\Rightarrow AOC=\frac{1}{2}AOM$

Tương tự: $BOD=\frac{1}{2}BOM$

Suy ra $AOC + BOD = \frac{1}{2}(AOM + BOM) = 90^o$

Mà $AOC + ACO = 90^o \Rightarrow ACO = BOD$

$\Rightarrow \Delta AOC \sim \Delta BDO(g.g) \Rightarrow \frac{AO}{BD} = \frac{AC}{BO} \Rightarrow AC.BD = AO.BO = R^2$ (không đổi, đpcm)

Câu 182.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Quảng Ninh – 2016]**

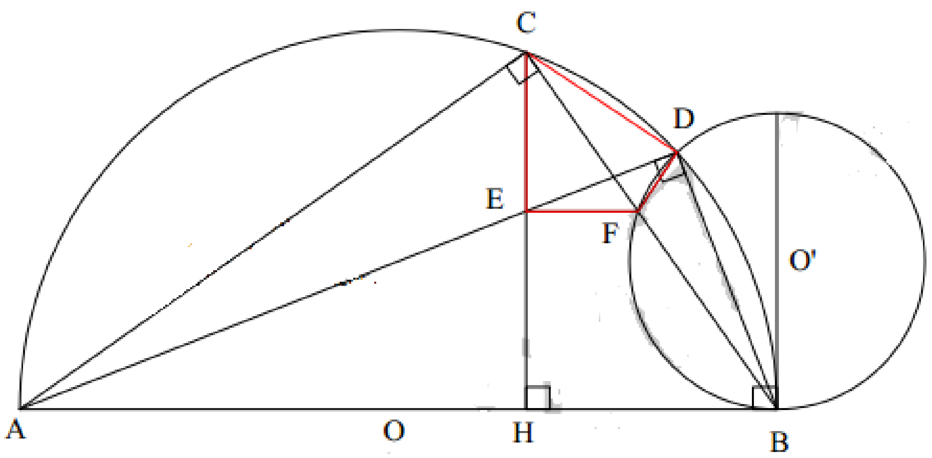
Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, trên nửa đường tròn lấy điểm C (C không trùng với A, B). Gọi H là hình chiếu của C trên đường thẳng AB. Trên cung CB lấy điểm D (D khác C, B), Hai đường thẳng AD và CH cắt nhau tại E.

a) Chứng minh tứ giác BDEH nội tiếp

b) Chứng minh $AC^2 = AE.AD$

c) Gọi (O’) là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với AB tại B. Đường tròn (O’) cắt CB tại F khác B. Chứng minh EF // AB.

Hướng dẫn



a) Chứng minh tứ giác BDEH nội tiếp

Xét (O) ta có: $ABD = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $EDB = 90^o$

GT => $CHB = 90^o$ hay $EHB = 90^o$

Xét tứ giác BDEH có $EDB + EHB = 180^o$

mà EDB, EHB hai góc đối

$\Rightarrow$ tứ giác BDEH nội tiếp (đpcm).

b) Chứng minh $AC^2 = AE.AD$

Xét Δ AEH và Δ ABD có:

A chung

$AHE = ADB = 90^o$

$\Rightarrow \Delta AEH \sim \Delta ABD(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AH}{AD} \Rightarrow AE.AD = AH.AB$ (1)

$ACB = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét Δ vuông AEH có CH là đường cao

Ta có : $AC^2 = AH.AB$ (hệ thức lượng trong Δ vuông) (2)

(1), (2) => $AC^2 = AE.AD$ (đpcm)

c) Gọi (O') là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với AB tại B.

Đường tròn (O') cắt CB tại F khác B. Chứng minh EF // AB.

Ta có: $ABC = BDF$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$BDF + FDA = 90^o$

$\Rightarrow ABC + FDA = 90^o$

Mặt khác $ABC = ACH$ (vì cùng phụ với góc HCB)

$\Rightarrow ACH + FDA = 90^o$

Lại có $ACH + HCB = 90^o$

$\Rightarrow HCB = FDA$ hay $ECF = FDE$

Xét tứ giác ECDF có $ECF = FDE$

mà C, D là hai đỉnh liên tiếp

⇒ tứ giác ECDF nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$DEF = DCF$ hay $DEF = DCB$ (góc nội tiếp do cùng chắn cung FD)

mà $DCB = DAB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DB)

$\Rightarrow DEF = DAB$

Hai góc ở vị trí đồng vị ⇒ EF//AB (đpcm)

Câu 183.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Yên Bái – 2016 – 2017]**

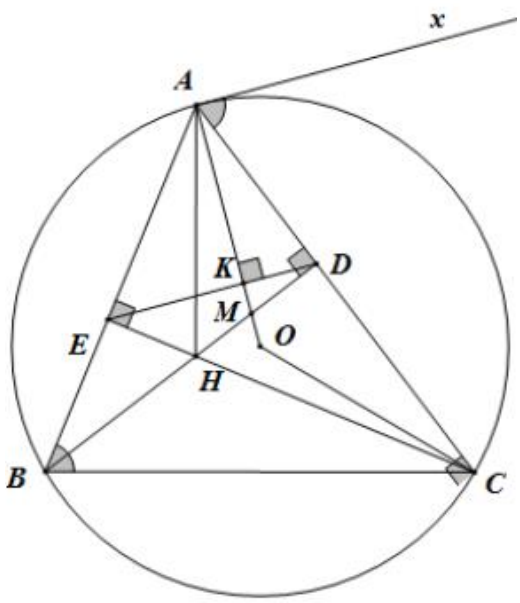
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là giao điểm hai đường cao BD và CE của tam giác ABC (D ∈ AC, E ∈ AB)

a) Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp trong một đường tròn.

b) Đường thẳng AO cắt ED và BD lần lượt tại K và M. Chứng minh AK.AM = AD^2

c) Chứng minh BAH = OAC

Hướng dẫn



a) Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp trong một đường tròn.

Vì HE ⊥ AB, HD ⊥ AC nên HEA = HAD = 90° => HEA + HAD = 180°

Suy ra ADHE là tứ giác nội tiếp

b) Đường thẳng AO cắt ED và BD lần lượt tại K và M. Chứng minh AK.AM = AD^2

Trong nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, vẽ tia tiếp tuyến Ax với đường tròn (O)

Có CAx = CBA . Vì BEC = BDC = 90° nên BEDC là tứ giác nội tiếp => CBA = ADE

=> CAx = ADE => Ax // DE, mà Ax ⊥ OA nên OA ⊥ DE

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ADM, ta có AK.AM = AD^2

c) Chứng minh BAH = OAC

Có KDM = KAD (=90° – KDA). (1)

Vì ADHE là tứ giác nội tiếp nên KDM = EAH (2)

Từ (1) và (2) => OAC = BAH

Câu 184.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Yên Bái – 2016 – 2017]**

Từ những miếng tôn phẳng hình chữ nhật có chiều dài 1,5 dm và chiều rộng 1,4 dm. Người ta tạo nên mặt xung quanh của những chiếc hộp hình trụ. Trong hai cách làm, hỏi cách nào thì được chiếc hộp có thể tích lớn hơn.

Hướng dẫn

Cách 1: Chu vi đáy hình trụ là 1,5 dm, chiều cao hình trụ là h_1 = 1,4 dm.

Hình trụ này có bán kính đáy $r_1 = \dfrac{1,5}{2\pi} = \dfrac{3}{4\pi}(dm)$, diện tích đáy

$$S_1 = \pi r_1^2 = \pi.\left(\dfrac{3}{4\pi}\right)^2 = \dfrac{9}{16\pi}(dm^2)$$

thể tích $V_1 = S_1h_1 = \dfrac{9}{16\pi}.1,4 = \dfrac{63}{80\pi}(dm^3)$

Cách 2: Chu vi đáy hình trụ là 1,4 dm, chiều cao hình trụ là h_2 = 1,5 dm.

Hình trụ này có

$r_2=\frac{1,4}{2\pi}=\frac{7}{10\pi}(dm);S_2=\pi r_2^2=\pi.\left(\frac{7}{10\pi}\right)^2=\frac{49}{100\pi}(dm^2);V_2=S_2h_2=\frac{49}{100\pi}.1,5=\frac{147}{200\pi}(dm^3)$

Ta có $V_1 > V_2$ nên cách 1 sẽ cho hình trụ có thể tích lớn hơn.

Câu 185.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Bến Tre 2015 – 2016]**

Cho nửa đường tròn (O;R), đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O; R), vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Gọi M là điểm bất kì trên cung AB (M ≠ A; M ≠ B). Tiếp tuyến tại M với nửa đường tròn (O; R) cắt Ax, By lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh tứ giác ACMO nội tiếp.

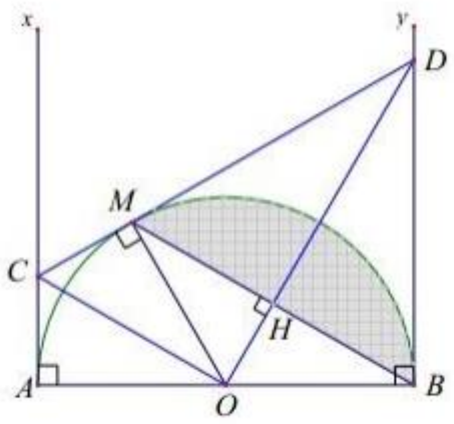
b) Chứng minh tam giác COD vuông.

c) Chứng minh: AC. BD = R^2

d) Trong trường hợp AM = R. Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây MB và cung MB của nửa đường tròn (O; R) theo R.

Hướng dẫn

a) Hình vẽ



Ax là tiếp tuyến tại A => Ax ⊥ AB => $OAC=90^o$

CD là tiếp tuyến tại M => CD ⊥ OM=> $OMC=90^o$

$=> OAC+OMC=90^o+90^o=180^o$

Vậy: Tứ giác ACMO nội tiếp được đường tròn.

b) Nửa (O; R) có:

Hai tiếp tuyến CA, CM cắt nhau tại C => OC là phân giác của AOM (1)

Hai tiếp tuyến DB, DM cắt nhau tại D => OD là phân giác của MOB (2)

$AOM+MOB$=180°(kề bù)

Từ (1), (2) và (3)=> $COD=90^o$ => Δ COD vuông tại O

c) ΔCOD vuông tại O có OM ⊥ CD

=> OM^2 = MC. MD (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Mà: OM = R; MC = AC; MD = BD (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Nên: $OM^2 = MC.MD \Rightarrow R^2 = AC.BD$ Vậy $AC.BD = R^2$

d) Khi AM = R => Δ OAM đều => $\widehat{AOM} = 60^o$ => $\widehat{MOB} = 120^o$

=> sđ cung MB = 120^0 => $n^0 = 120^0$

Gọi Sq là diện tích hình quạt chắn cung nhỏ BC, ta có: Sq = $\frac{\pi R^2 n}{360}$

$S_q = \frac{\pi R^2.120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$

Ta có: OB = OM = R và DB = DM (cmt) => OD là đường trung trực của MB

=> OD ⊥ MB tại H và HB =HM= $\frac{1}{2}BM$

OD là phân giác của $\widehat{MOB} \Rightarrow \widehat{HOM} = \frac{1}{2}\widehat{MOB} = 60^o$

Δ HOM vuông tại H nên:

OH = OM.cos $\widehat{HOM}$ = R.cos $60^O = \frac{1}{2}R$

HM = OM.sin $\widehat{HOM}$ = R. sin$60^O = R\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⇔ BM=R$\sqrt{3}$

=> $S_{OBM} = \frac{1}{2}BM.OH = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}R.R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

Gọi S là diện tích hình viên phân cần tìm, ta có: S = Sq - S_{OBM}

$S = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12}$ (đvtt)

Câu 186.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Bình Định 2014 – 2015]**

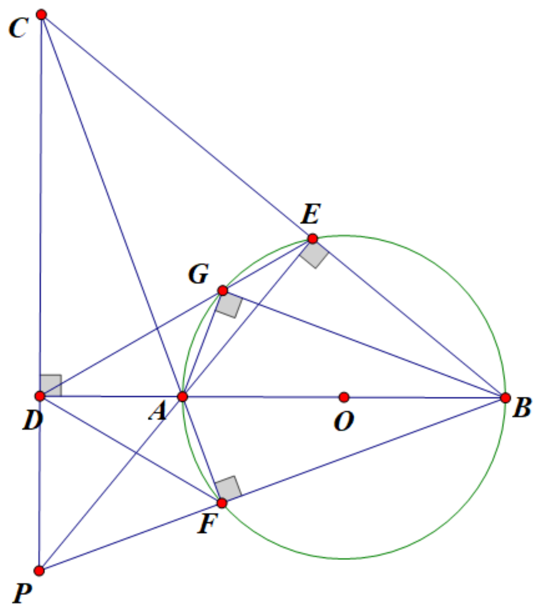
Cho đường tròn tâm O đường kính AB, trên cùng một nửa đường tròn (O) lấy hai điểm G và E (theo thứ tự A, G, E, B) sao cho tia EG cắt tia BA tại D. Đường thẳng vuông góc với BD tại D cắt BE tại C, đường thẳng CA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F.

a) Chứng minh tứ giác DFBC nội tiếp.

b) Chứng minh BF = BG

c) Chứng minh: $\frac{DA}{BA} = \frac{DG.DE}{BE.BC}$

Hướng dẫn



a) Chứng minh tứ giác DFBC nội tiếp

Ta có:CDB=90^O (giả thiết)

CFB=90^O(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=>D và F cùng nhìn đoạn BC cố định dưới 1 góc 90^0, nên tứ giác DFBC nội tiếp.

b) Chứng minh BF = BG

Gọi P là giao điểm của CD và BF

Ta có: A là trực tâm của tam giác CPB

=> $PA \perp CB$

Mà $AE \perp CB$ (vì góc AEB là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=>P, A, E thẳng hang

D và E cùng nhìn đoạn PB cố định dưới 1 góc 90^0

=>Tứ giác PDEB nội tiếp.

=>DEP=DBP=$\frac{1}{2}$ sđ PD(vì EDPB nội tiếp chứng minh trên)

Mà DEP=GBA=$\frac{1}{2}$ sđ GA

=>DBP = GBA

Ta lại có: AGB = AFB = 90^0 (vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

AB là cạnh chung

=>Δ AGB=Δ AFB (cạnh huyền – góc nhọn)

=>BG=BF

c) Chứng minh: $\frac{DA}{BA} = \frac{DG.DE}{BE.BC}$

Ta có ADC=90^0(GT)

CEA=90^o(C/M trên)

=>ADC+CEA=180^O

=>DAEC nội tiếp

=>BE.BC=BA.BD(vì ΔBED đồng dạng ΔBAC)

=>DA.BE.BC=DA.BA.BD

=> $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{DA.DB}{BE.BC}$

Mà DA.DB=DG.DE(Vì ΔDGB đồng dạng ΔDAE)

Nên $\dfrac{DA}{BA}=\dfrac{DG.DE}{BE.BC}$

Câu 187.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Bình Định 2015 - 2016]**

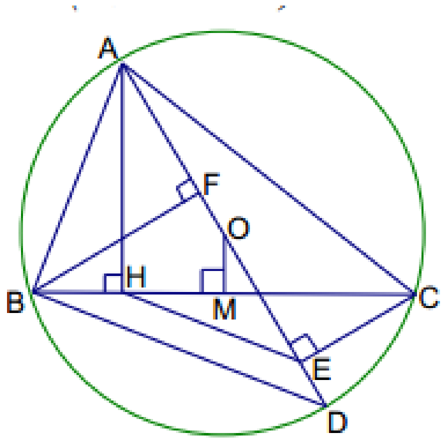
Cho tam giác ABC (AB <AC) có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O; R). Vẽ đường cao AH của tam giác ABC, đường kính AD của đường tròn. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C và B xuống đường thẳng AD. M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh các tứ giác ABHF và BMFO nội tiếp.

b) Chứng minh HE // BD.

c) Chứng minh: $S_{ABC}=\dfrac{AB.AC.BC}{4R}$ (S_{ABC} là diện tích tam giác ABC)

Hướng dẫn



a) Chứng minh các tứ giác ABHF và BMFO nội tiếp.

- Dễ chứng minh AHB= BFA=90^o=> H và F thuộc đường tròn đường kính AB (quỹ tích cung chứa góc) Vậy tứ giác ABHF nội tiếp đường tròn đường kính AB - M là trung điểm của BC (gt), suy ra: OM $\perp$ BC khi đó: BFO=BMO=90^o□nên M, F thuộc đường tròn đường kính OB(quỹ tích cung chứa góc)Vậy tứ giác BMOF nội tiếp đường tròn đường kính OB

b) Chứng minh HE // BD.

Dễ chứng minh tứ giác ACEH nội tiếp đường tròn đường kính AC, suy ra: CHE=CAE(= $\dfrac{1}{2}$ sđ CE)

Lại có: CAE=CAD=CBD(= $\dfrac{1}{2}$ sđ CD)

nên CHE=CBD và chúng ở vị trí so le trong suy ra: HE // BD

c) Chứng minh: $S_{ABC}=\dfrac{AB.AC.BC}{4R}$ (S_{ABC} là diện tích tam giác ABC)

Ta có: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}$BC.AH=$\dfrac{1}{2}$BC.AB.sinABC

Mặt khác: trong tam giác ABD có: ABD= 90^{O}(nội tiếp chắn nửa đường tròn)

nên AB=ADsinD=2Rsin ACB

Tương tự cũng có : AC=2Rsin ABC và BC=2Rsin BAC

Khi đó AB.AC.BC=8R^3.sin BAC.sin CBA.sin ACB (1)

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}$BC.AB.sin ABC=$\dfrac{1}{2}$.2R.sinBAC.2R.sin ACB.sin CBA=2R^2 sinBAC. sin ACB.sin CBA(2)

Từ (1) và (2) => $\dfrac{S_{ABC}}{AB.BC.CA}=\dfrac{1}{4R}$

Vậy $S_{ABC}=\dfrac{AB.AC.BC}{4R}$

Câu 188.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Bình Dương – 2016 – 2017]**

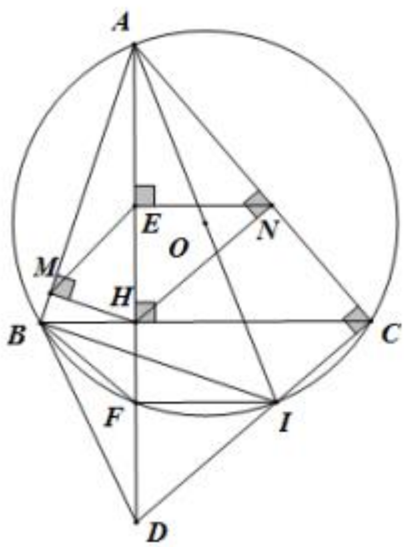
Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn (AB < AC) nội tiếp trong đường tròn tâm O, kẻ đường cao AH. Gọi M, N là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Kẻ NE vuông góc với AH. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường tròn tại I và cắt tia AH tại D. Tia AH cắt đường tròn tại F.

a) Chứng minh ABC= *ACB* =*BIC* và tứ giác DENC nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh hệ thức AM.AB = AN.AC và tứ giác BFIC là hình thang cân

c) Chứng minh: tứ giác BMED nội tiếp được trong một đường tròn.

Hướng dẫn



a) Vì ABIC là tứ giác nội tiếp nên *ABC =AIC; ACB =AIB =>ABC +ACB= AIB AIC= BIC*

Vì NE ⊥ AD, NC ⊥ CD nên *NED =NCD=90°=> NED+ NCD* =180°

Suy ra tứ giác DENC là tứ giác nội tiếp

b) + Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông AHB và AHC có

AM. AB = AH^2 ; AN. AC = AH^2 ⇒ AM. AB = AN. AC

+ Có IAC=90^0 - AIC; BAF=90^0 –ABH; AIC= ABH =>IAC=BAF

Suy ra số đo hai cung IC và BF bằng nhau ⇒ IC = BF.

Mặt khác vì ABFI và ABIC nội tiếp nên BAF= BIF; IAC =IBC;BIF= IBC

Suy ra IF // BC ⇒ BCIF là hình thang có hai cạnh bên bằng nhau

Mà IF < BC nên BCIF là hình thang cân

c) Có ΔAEN đồng dạng ΔACD(g.g)

$$=> \frac{AE}{AC} = \frac{AN}{AD} => AE.AD = AN.AC = AM.AB$$

$$<=> \frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AD}$$

Xét Δ AME và Δ ADB có

$$\begin{cases} \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AM}{AD} \\ Chung\ MAE \end{cases} => \text{tam giác AME đồng dạng với tam giác ADB(c.g.c)}$$

=>AME=ADB=>BME+ADB=180^O

Suy ra BMED nội tiếp đường tròn.

Câu 189.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Bình Dương – 2015 – 2016]**

Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của cạnh AC. Đường tròn đường kính MC cắt BC tại N. Đường thẳng BM cắt đường tròn đường kính MC tại D.

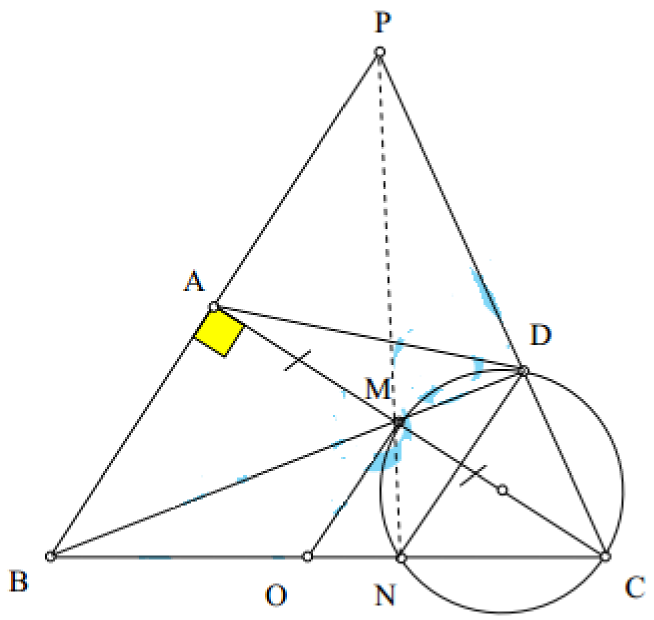
a) Chứng minh tứ giác BADC nội tiếp. Xác định tâm O của đường tròn đó.

b) Chứng minh DB là phân giác của góc ADN.

c) Chứng minh OM là tiếp tuyến của đường tròn đường kính MC.

d) BA và CD kéo dài cắt nhau tại P. Chứng minh ba điểm P, M, N thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) BAC=BDC=90^o (gt)

Nên tứ giác BADC nội tiếp đường tròn tâm O là trung điểm của BC.

b) ADB= BDN(= ACB)

(hai góc nội tiếp cùng chắn một cung trong các đường tròn ngoại tiếp tứ giác BADC, NMDC) nên DB là phân giác góc AND.

c) OM ⊥ AC (OM là đường trung bình tamgiác ABC)

Nên suy ra MO là tiếp tuyến đường tròn đường kính MC.

d) MN ⊥ BC (góc MNC nội tiếp nửa đường tròn đường kính MC)

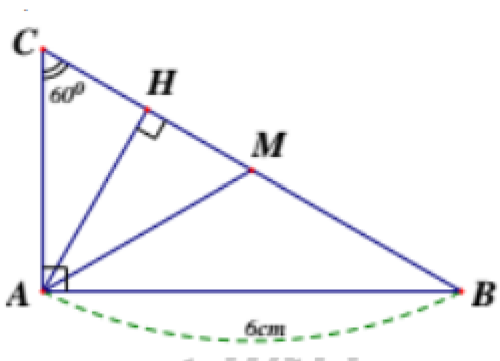
PM ⊥ BC (M là trực tâm tam giác PBC)

Suy ra P, M, N thẳng hàng.

Câu 190.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Bình Phước – 2014 – 2015]**

Cho tam giác ABC vuông tại A, có cạnh AB = 6cm, $C = 60^0$. Hãy tính các cạnh còn lại và đường cao, đường trung tuyến hạ từ A của tam giác ABC.

Hướng dẫn



Tam giác ABC vuông tại A nên :

+ B + C = 90^0 =>B = 30^0

+ AC = AB.tanB = $6.\tan 30^0 = 6.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}(cm)$

$$+BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}(cm)$$

$$+AB.AC = BH.\text{AH} \Rightarrow \text{AH} = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{6.2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 3(cm)$$

$$+AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(cm)$$

Câu 191.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Bình Phước – 2014 – 2015]**

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O;R), các tiếp tuyến tại B và C với đường tròn (O;R) cắt nhau tại E, AE cắt (O;R) tại D (khác điểm A).

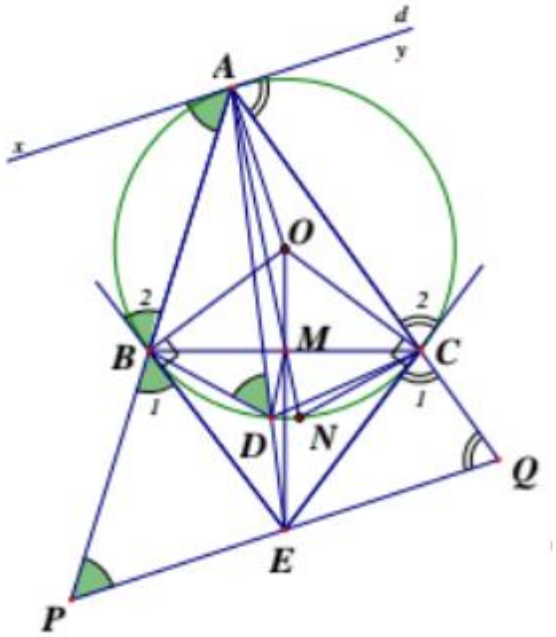
a) Chứng minh tứ giác OBEC nội tiếp đường tròn .

b) Từ E kẻ đường thẳng d song song với tiếp tuyến tại A của (O;R), d cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh AB.AP = AD.AE

c) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh EP = EQ và $PAE = MAC$

d) Chứng minh AM.MD = $\frac{BC^2}{4}$

Hướng dẫn



a) (O) có :

- BE là tiếp tuyến tại B=>BE$\perp$OB=>OBE =90^O (1)

- CE là tiếp tuyến tại C=> CE$\perp$OB=>OCE=90^O (2)

Từ (1), (2) tứ giác OBEC nội tiếp đường tròn đường kính OE

b) (O) có:

- $ADB = BAx$ (cùng chắn cung AB) (1)

- PQ // d$\Rightarrow$ $APE = BAx$ (so le trong) (2)

Từ (1),(2) góc $ADB = APE$ ADB = APE

$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEP(g-g)$

=> $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AP}$ => $AB.AP = AD.AE$(DPCM)

c) (O) có:

Góc $BAx = B_2$ (cùng chắn AB)

Góc $B_1 = B_2$ (đối đỉnh)

=> $BAx = B_1$

Mà góc $BAx = APE$ (cmt) => $B_1 = APE$ =>tam giác BEP cân tại E =>EB=EP(1)

(O) có: $CAy = C_2$ (cùng chắn AC); $C_1 = C_2$ (đối nhau) => $CAy = C_1$

PQ // d=> $CAy = AQE$ (so le trong)

=> $C_1 = AQE$ =>tam giác CEQ cân tại E =>EQ=EC (2)

Hai tiếp tuyến EB và EC cắt nhau tại E=>EB=EC (3)

Từ (1)(2)(3)=>EP=EQ(đpcm)

d) Tam giác ABC và tam giác AQP có:

$ACB = APQ$ (cùng bằng BAx) và PAQ chung=>Tam giác ABC với tam giác AQP đồng dạng (g.g)

$$=> \frac{AC}{AP} = \frac{BC}{PQ} = \frac{2.MC}{2.PE} = \frac{MC}{PE} => \frac{PE}{CM} = \frac{PA}{CA}$$

Tam giác AEP và tam giác AMC có:

$\frac{PE}{CM} = \frac{PA}{CA}$ (cmt)

$APE = ACM$ (cùng bằng BAx)

=>Tam giác AEP đồng dạng với tam giác AMC (c.g.c)=> $PAE = MAC$ (đpcm)

d) Gọi N là giao điểm của tia AM và (O) ta có:

$BAN = BCN$ (cùng chắn BN)

$AMB = NMC$ (đối đỉnh) =>tam giác AMB đồng dạng CMN (g.g)

$$=> \frac{AM}{CM} = \frac{MB}{MN} => AM.MN = MB.MC = \frac{BC}{2}.\frac{BC}{2} = \frac{BC^2}{4} (*)$$

(O) có: Góc $PAE = MAC$ (cmt)=>góc $BAD = NAC$

Góc BAD nội tiếp chắn cung BD

Góc NAC nội tiếp chắn cung CN

=>BD=CN

Tam giác EBC cân tại E góc $EBM = ECM \to EBD + DBM = ECN + NCM$

Mà $EBD = ECN$ (chắn 2 cung bằng nhau) $\Rightarrow DBM = NCM$

=> $\triangle$BDM= $\triangle$CNM

=>MD=MN(**)

Từ (*) và (**) => AM.MD = $\frac{BC^2}{4}$ (đpcm)

Câu 192.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Bình Thuận 2015 – 2016]**

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R, D là một điểm tùy ý trên nửa đường tròn (D khác A và D khác B) . Các tiếp tuyến với nửa đường tròn (O) tại A và D cắt nhau tại C, BC cắt nửa đường tròn (O) tại điểm thứ hai l E. Kẻ DF vuông góc với AB tại F.

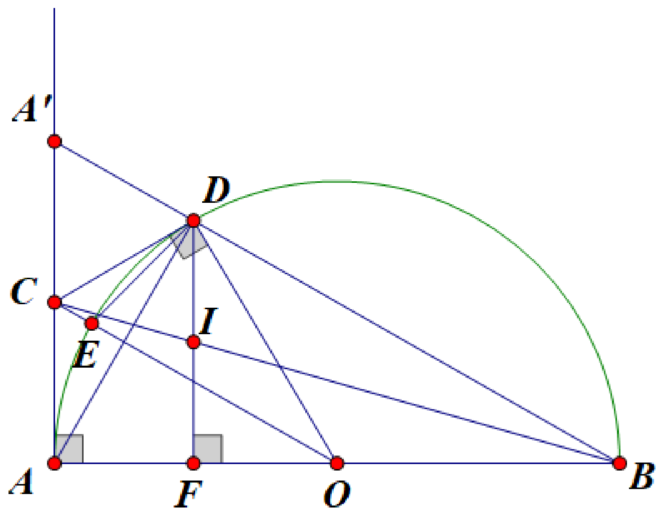
a) Chứng minh : Tam giác OACD nội tiếp.

b) Chứng minh:CD^2 = CE.CB

c) Chứng minh:Đường thẳng BC đi qua trung điểm của DF.

d) Gải sử OC = 2R , tính diện tích phần tam giác ACD nằm ngoại nửa đường tròn (O) theo R.

Hướng dẫn



a) Xét tam giác OACD có:

$CAO = CDO = 90^0 \Rightarrow CAO + CDO = 180^0$ (DC,CA là tiếp tuyến)

=>Tứ giác OACD nội tiếp

b) Xét tam giác CDE và tam giác CBD có:

DCE chung và $CDE = CBD(= \frac{1}{2} sd\,DE)$

=> Xét tam giác CDE đồng dạng với tam giác CBD (g.g)

$=> \frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CD} => CD^2 = CE.CB$

c) Tia BD cắt Ax tại A’ .

Gọi I l giao điểm của Bc v DF. Ta có ADB= 90^o (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> ADA'=90^o, suy ra ΔADA’ vuông tại D.

Lại có CD = CA (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau).

nên suy ra đ ợc CD = C A’, do đó CA = A’C (1).

Mặt khác ta có DF // AA’ (cùng vuông góc với AB) nên theo định l Ta-lét thì $\frac{ID}{CA'} = \frac{IF}{CA} (= \frac{BI}{BC})(2)$

Từ (1) và (2) suy ra ID = IF Vậy BC đi qua trung điểm của DF.

d) Tính cosCOD=$\frac{OD}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow COD = 60^o$

$\Rightarrow AOD = 120^o$

$S_{quat} = \frac{\pi.R.120}{360} = \frac{\pi R}{3} (\text{dvdt})$

Tính CD =R$\sqrt{3}$

$S_{\Delta OCD} = \frac{1}{2} CD.DO = \frac{1}{2} R\sqrt{3}.R = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2 (dvdt)$

$S_{OACD} = 2S_{\Delta OCD} = \sqrt{3}R^2 (dvdt)$

Diện tích phần tam giác ACD nằm ngoài nửa đường tròn (O)

$S_{OACD} - S_{quat} = \sqrt{3}R^2 - \frac{\pi R}{3} (\text{dvdt})$

Câu 193.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Cà Mau 2014 – 2015]**

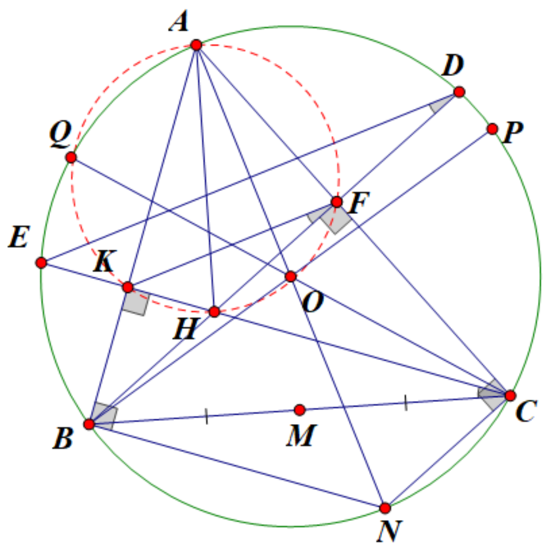
Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O). Các đường cao BF, CK của tam giác ABC lần lượt cắt (O) tại D, E.

a) Chứng minh: Tứ giác BCFK là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: DE // FK

c) Gọi P, Q lần lượt là điểm đối xứng với B, C qua O. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AFK có bán kính không đổi khi A thay đổi trên cung nhỏ PQ (không trùng với các điểm P, Q)

Hướng dẫn



a) Chứng minh BCFK nội tiếp

$BKC = BFC = 90^o$ (CK ⊥ AB và BF ⊥ AC) => BCFK nội tiếp

b) Chứng minh DE // FK

$\widehat{BDE} = \widehat{BCE}$ (cùng chắn cung EB của (O))

$\widehat{BCE} = \widehat{BFK}$ (cùng chắn cung BK của (BCFK))

$=> \widehat{BDE} = \widehat{BFK} => DE//FK$

c) Bán kính đường tròn (AFK) không đổi khi A di động trên cung PQ

Kẻ đường kính AN và lấy điểm M là trung điểm của BC.

$\widehat{ACN} = \widehat{ABN} = 90^o$ =>NC ⊥ AC và NB ⊥ AB mà BH ⊥ AC và CH ⊥ AB

=>NC // BH và NB // CH => BHCN hình bình hành => M là trung điểm HN

Vì OA = ON => OM là đường trung bình Δ AHN => OM = $\frac{AH}{2}$ và OM // AH

Gọi I là trung điểm AH. Ta có $\widehat{AKH} = \widehat{AFH} = 90^o$

=>AKHF nội tiếp đường tròn đường kính AH

=>I là tâm và AI là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tứ giác AKHF hay của ΔAFK.

Vì BC, (O) cố định => M cố định => OM cố định => $AI = \frac{AH}{2} = OM$ cố định

=> đường tròn ngoại tiếp của Δ AFK có bán kính AI = OM cố định.

Vậy khi A di động trên cung nhỏ PQ (không trùng với P, Q) thì đường tròn ngoại tiếp Δ AFK có bán kính không đổi.

Câu 194.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Cần Thơ 2016 – 2017]**

Cho Δ ABC có ba góc nhọn. AB < AC và nội tiếp đường tròn (O;R). Gọi H là chân đường cao từ đỉnh A của Δ ABC và M là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O;R) cắt đường thẳng BC tại N.

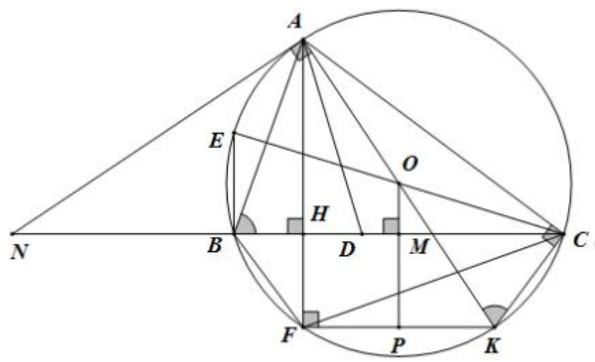
a) Chứng minh tứ gíác ANMO nội tiếp

b) Gọi K là giao điểm thứ hai cảu đường thẳng AO với đường tròn (O;R). Chứng minh AB.AC = AK.AH

c) Dựng đường phân giác AD của Δ ABC (D thuộc cạnh BC). Chứng minh Δ NAD cân

d) Giả sử $\widehat{BAC}=60^o$, $\widehat{OAH}=30°$. Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng AH với đường tròn (O;R). Tính theo R diện tích của tứ giác BFKC.

Hướng dẫn



a) Vì AN là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{OAN} = 90°$

Vì M là trung điểm dây BC của (O) nên OM ⊥ BC ⇒ OMN=90°=>OAN+OMN = 180°

Suy ra ANMO là tứ giác nội tiếp

b) Vì AK là đường kính của (O), C ∈ (O) nên ACK =90°

=>ACK=OHB=90°

Mặt khác vì ABKC là tứ giác nội tiếp nên

AKC=ABH=>tam giác AKC đồng dạng với tam giác ABH (g.g)

$=> \frac{AK}{AB}=\frac{AC}{AH} => AK.AH = AB.AC$

c) Ta có NAB=ACB=>NAD=NAB+BAD=ACB+BAD

Theo công thức góc ngoài ta có NDA=DAC+ACB

Vì AD là phân giác của góc A nên BAD=DAC=>NAD=NDA

Suy ra Δ AND cân tại N

d) Có AF ⊥ FK mà AF ⊥ BC ⇒ BC // FK ⇒ BCKF là hình thang

Gọi P là trung điểm FK ⇒ OP ⊥ FK ⇒ OP ⊥ BC ⇒ O, M, P thẳng hàng

Gọi E là điểm đối xứng với C qua O ⇒ Δ EBC vuông tại B và BEC=BAC=60°

=>EB=EC.cos60=R

BC=EC.sin60=R$\sqrt{3} => OM=\frac{EB}{2}=\frac{R}{2}$

Có Δ AFK vuông tại F và

FAK=30=>FK=AK.sin30=R

AF=AK.cos30= R$\sqrt{3} => OP=\frac{AF}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$

MP=OP-OM=$\frac{R(\sqrt{3}-1)}{2}$

Diện tích hình thang BCKF là

$$S_{BCKF}=\frac{1}{2}MP.(BC+KF)=\frac{1}{2}.\frac{R(\sqrt{3}-1)}{2}(R\sqrt{3}+R)=R^2.\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{4}=\frac{R^2}{2}(dvdt)$$

Câu 195.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Đà Nẵng 2016 – 2017]**

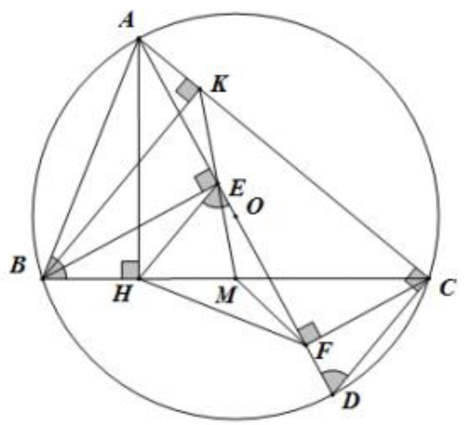
Cho Δ ABC nhọn có AB < AC và nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính AD. Gọi AH là đường cao của Δ ABC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AD tại E

a) Chứng minh ABHE là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh hai đường thẳng HE và AC vuông góc với nhau

c) Gọi F là hình chiếu vuông góc của điểm C lên đường thẳng AD và M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh rằng M là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ HEF.

Hướng dẫn



a) Vì AH ⊥ BC, BE ⊥ AD nên góc AHB = góc AEB = 90^o

Suy ra tứ giác ABHE là tứ giác nội tiếp

b) Vì góc ACD là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên góc ACD = 90^o ⇒ AC ⊥ CD (1)

Vì ABHE là tứ giác nội tiếp nên góc ABH = góc HED (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện)

Vì ABDC là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) nên góc ABC = góc ADC (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC), hay góc ABH = góc EDC

Suy ra góc HED = góc EDC ⇒ EH // DC(2)

Từ (1) và (2) ⇒ HE ⊥ AC

c) Vẽ BK ⊥ AC tại K

Ta có góc AKB = góc AEB = 90^o nên AKEB là tứ giác nội tiếp

Suy ra góc BKE = góc BAE (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BE) = góc BAD(3)

Vì ABDC là tứ giác nội tiếp nên góc BAD = góc BCD (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BD)(4)

Vì AK // CD (cùng ⊥ AC) nên góc BCD = góc KBM (đồng vị)(5)

Vì M là trung điểm cạnh huyền BC của tam giác vuông BKC nên MK = MB = MC ⇒ Δ MKB cân tại M ⇒ góc KBM = góc BKM (6)

Từ (3), (4), (5), (6) có góc BKE = góc BKM ⇒ K, E, M thẳng hang

Mà HE // BK (cùng ⊥ AC) nên $\frac{ME}{MH} = \frac{MK}{MB} = 1$=>ME = MH

Chứng minh tương tự ta có MF = MH

Suy ra ME = MF = MH ⇒ M là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ HEF (đpcm).

Câu 196.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Đà Nẵng 2014 – 2015]**

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH (H thuộc BC). Vẽ đường tròn (C) có tâm C, bán kính CA. Đường thẳng AH cắt đường tròn (C) tại điểm thứ hai là D.

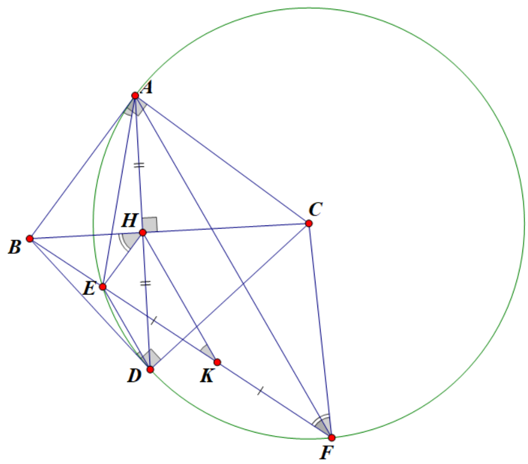
1. Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn (C).

2. Trên cung nhỏ AD của đường tròn (C) lấy điểm E sao cho HE song song với AB. Đường thẳng BE cắt đường tròn (C) tại điểm thứ hai là F. Gọi K là trung điểm của EF. Chứng minh rằng:

a) BA^2 = BE.BF và BHE=BFC

b) Ba đường thẳng AF, ED và HK song song với nhau từng đôi một.

Hướng dẫn



1. Ta có $BAC = 90^0$ nên BA là tiếp tuyến với (C).

BC $\perp$ AD nên H là trung điểm AD. $BDC = BAC = 90^0$ nên BD cũng là tiếp tuyến với (C)

2.

a) Trong tam giác vuông ABC ta có AB^2 =BH.BC(1)

Xét hai tam giác đồng dạng ABE và FBA

vì có B chung và $BAE = BFA$(cùng chắn cung AE)

suy ra $\dfrac{AB}{FB} = \dfrac{BE}{BA} \Rightarrow AB^2 = BE.FB(2)$

Từ (1) và (2) ta có BH.BC = BE.FB

Từ BE.BF= BH.BC => $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BH}{BF}$

2 tam giác BEH và BCF đồng dạng vì có góc B chung và $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BH}{BF} \Rightarrow BHE = BFC$

b) Ta có:

$HAC = EHB = BFC$, do AB //EH. suy ra $DAF = DAC - FAC = DFC - CFA = BFA$

$\Rightarrow DAF = BAE$, 2 góc này chắn các cung AE,DF nên hai cung này bằng nhau

Gọi giao điểm của AF và EH là N. Ta có 2 tam giác HED và HNA bằng nhau

(vì góc H đối đỉnh, HD = HA, EDH=HDN (do AD // AF)

Suy ra HE = HN, nên H là trung điểm của EN. Suy ra HK là đường trung bình của tam giác EAF.

Vậy HK // AF. Vậy ED // HK // AF.

Câu 197.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Đà Nẵng 2015 – 2016]**

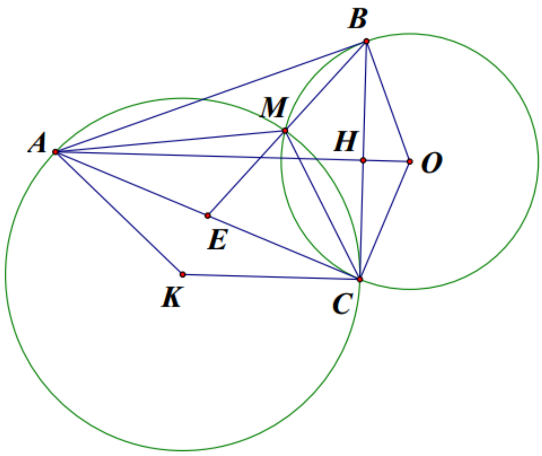
Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm)

a) Chứng minh rằng ABOC là tứ giác nội tiếp.

b) Cho bán kính đường tròn (O) bằng 3cm, độ dài đoạn thẳng OA bằng 5cm. Tính độ dài đoạn thẳng BC.

c) Gọi (K) là đường tròn qua A và tiếp xúc với đường thẳng BC tại C. Đường tròn (K) và đường tròn (O) cắt nhau tại điểm thứ hai là M. Chứng minh rằng đường thẳng BM đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC.

Hướng dẫn



a) - Có AB $\perp$ OB (t/c tiếp tuyến) $\Rightarrow$ $ABO = 90^0$- Có AC $\perp$ OC (t/c tiếp tuyến) $\Rightarrow$ $ACO = 90^0$

- Xét tứ giác ABOC có $ABO + ACO = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên nội tiếp được trong đường tròn.

b) - AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên AO là đường trung trực của BC.

Gọi H là giao điểm của AO và BC, ta có BC = 2BH.

- ΔABO vuông tại B có BH là đường cao nên $OB^2 = OH.AO$

$$\Rightarrow OH = \frac{OB^2}{AO} = \frac{9}{5}cm$$

- ΔOBH vuông tại H $\Rightarrow$ $BH^2 = OB^2 - OH^2 \Rightarrow BH = \frac{12}{5}cm$

Vậy $BC = 2BH = \frac{24}{5}cm$

c)- Gọi E là giao điểm của BM và AC.

- ΔEMC và ΔECB có $MEC = CEB$ và $MCE = EBC$ (Góc nt và góc tạo bởi tia tiếp tuyến CA cùng chắn cung MC của đường tròn (O))

$\Rightarrow$ ΔEMC ∽ ΔECB (g-g) $\Rightarrow$ $EC^2 = EM.EB$ (*)

- ΔEMA và ΔEAB có $MEA = AEB$ (a) và :

+ Có $MAE = MCB$ (3) (Góc nt và góc tạo bởi tia tiếp tuyến CB cùng chắn cung MC của đường tròn (K))

+ Có $MCB = ABE$ (4) (Góc nt và góc tạo bởi tia tiếp tuyến BA cùng chắn cung MB của đường tròn (O))

+ Từ (3) và (4) $\Rightarrow MAE = ABE$(b)

- Từ (a) và (b) $\Rightarrow$ ΔEMA ∽ ΔEAB (g-g) $\Rightarrow$ $EA^2 = EM.EB$ (**)

- Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ $EC^2 = EA^2 \Rightarrow EC = EA$. Vậy BM đi qua trung điểm E của AC.

Câu 198.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Đak Lak 2013 – 2014]**

Cho đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn. M là một điểm trên đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại P, Q

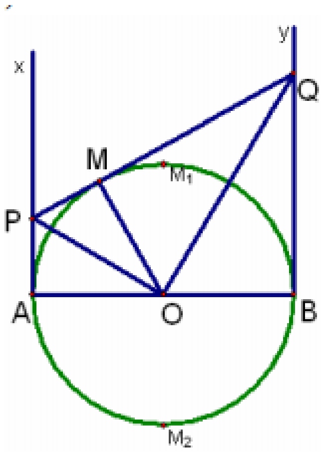
a) Chứng minh rằng: tứ giác APMO nội tiếp

b) Chứng minh rằng : AP + BQ = PQ

c) Chứng minh rằng : AP.BQ=AO^2

d) Khi điểm M di động trên đường tròn (O), tìm các vị trí của điểm M sao cho diện tích tứ giác APQB nhỏ nhất

Hướng dẫn



a) Xét tứ giác APMQ, ta có:

$OAP = OMP = 90^o$ (vì PA, PM là tiếp tuyến của (O))

Vậy tứ giác APMO nội tiếp.

b) Ta có AP = MP (AP, MP là tiếp tuyến của (O))

BQ = MQ (BQ, MQ là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow$ AP+BQ=MP+MQ=PQ

c) Ta có OP là phân giác AOM (AP, MP là tiếp tuyến của (O))

OQ là phân giác góc BOM (BQ, MQ là tiếp tuyến của (O))

Mà góc AOM +góc BOM =180^0 (hai góc kề bù) $\Rightarrow = POQ$=90^o

Xét ΔPOQ, ta có: $POQ = 90^0$ (cmt), $OM \perp PQ$ (PQ là tiếp tuyến của (O) tại M)

$\Rightarrow$ MP.MQ=OM^2 (hệ thức lượng)

Lại có MP=AP;MQ=BQ (cmt), OM=AO (bán kính)

Do đó AP.BQ=AO^2

d) Tứ giác APQB có: AP//BQ(AP$\perp$AB,BQ$\perp$AB), nên tứ giác APQB là hình thang vuông

=> $S_{APQB} = \dfrac{(AP + BQ)AB}{2} = \dfrac{PQ.AB}{2}$

Mà AB không đổi nên S_{APQB} đạt GTNN

$\Leftrightarrow$PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$PQ=AB$\Leftrightarrow$PQ//AB$\Leftrightarrow$OM vuông AB

⇔M là điểm chính giữa cung AB.Tức là M trùng M_1 hoặc M trùng M_2 (hình vẽ) thì S_{APQB} đạt GTNN là $\frac{AB^2}{2}$

Câu 199.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Đồng Nai 2013 – 2014]**

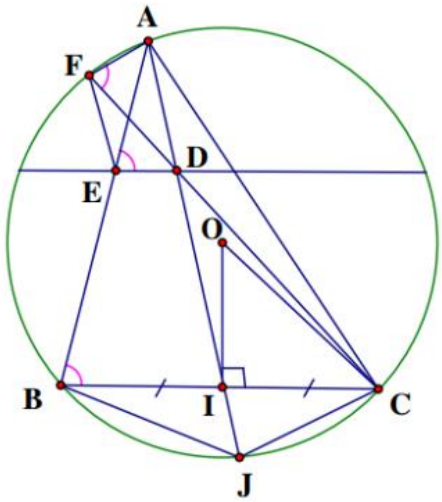
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), bán kính R , BC=a, với a và R là các số thực dương. Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Các góc CAB,ABC,BCA đều là góc nhọn.

a) Tính OI theo a và R.

b) Lấy điểm D thuộc đoạn AI , với D khác A, D khác I. Vẽ đường thẳng qua D song song với BC cắt cạnh AB tại điểm E. Gọi F là giao điểm của tia CD và đường tròn (O), với F khác C. Chứng minh tứ giác ADEF là tứ giác nột tiếp đường tròn.

c) Gọi J là giao điểm của tia AI và đường tròn (O) , với J khác A. Chứng minh rằng AB.BJ=AC.CJ

Hướng dẫn



a) Tính OI theo a và R.

Ta có: I là trung điểm của BC (gt)

Nên IB=IC=$\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$ và OI $\perp$ BC(lên hệ đường kính và dây)

Xét tam giác OIC vuông tại I

Áp dụng định lý Pytago tính được $OI=\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2}$

b) Chứng minh tứ giác ADEF là tứ giác nột tiếp đường tròn.

Ta có: $ABC = AED$ (đồng vị)

Mà $ABC = AFC$ (cùng nội tiếp chắn cung AC)

=> $AED = AFC$ hay $AED = AFD$

Tứ giác ADEF có $AED = AFD$ (cmt)

Nên tứ giác ADEF nội tiếp đường tròn

(E, F cùng nhìn AD dưới 2 góc bằng nhau)

c) Chứng minh rằng AB.BJ=AC.CJ

Chứng minh: tam giác AIC đồng dạng với tam giác BIJ(g-g)

$=> \frac{AI}{BI} = \frac{AC}{BJ}$ (1)

Chứng minh:tam giác AIB đồng dạng với tam giác CIJ(g-g)

$=> \frac{AI}{CI} = \frac{AB}{CJ}$ (2)

Mà BI=CI(I là trung điểm BC)(3)

Từ (1);(2);(3) => $\frac{AB}{CJ} = \frac{AC}{BJ} => AB.BJ = AC.CJ$

Câu 200.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hà Nam 2014 – 2015]**

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và AB > AC. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Đường cao AH của tam giác ABC cắt đường tròn (O; R) tại điểm thứ hai là D. Kẻ DM vuông góc với AB tại M.

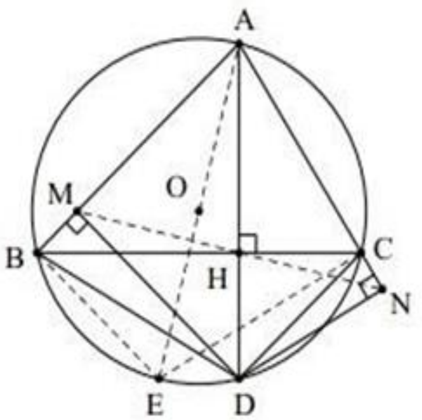
a) Chứng minh tứ giác BDHM nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh DA là tia phân giác của MDC

c) Gọi N là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng AC, chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

d) Chứng minh $AB^2 + AC^2 + CD^2 + BD^2 = 8R^2$

Hướng dẫn



a) $AD \perp BC$; $DM \perp AB$ (giả thiết)

$=> DHB = DMB = 90^0$ .Hay 4 điểm B, D, H, M nằm trên đường tròn đường kính

Nên tứ giác BDHM nội tiếp đường tròn đường kính BD

b) Tứ giác BDHM nên $MDH = MBH$

$ADC = ABC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

$MDA = ADC$ hay DA là tia phân giác của MDC

c) Chứng minh tương tự câu a ta có tứ giác DHCN nội tiếp => $DHN = DCN$

Mà $DCN = ABD$ (vì ABDC là tứ giác nội tiếp)

Tứ giác BDHM nội tiếp

$=> ABD + DHM = 180^o$

$=> DHN + DHM = 180^o$

Hay ba điểm M, H, N thẳng hàng.

d) Kẻ đường kính AE

Ta có $AEB = ACB => BAE = DAC => cung$ BE=cung CD=>BE=CD

Tương tự EC = BD

Áp dụng định lí Pi ta go ta có:

$AB^2 + AC^2 + CD^2 + BD^2 = AB^2 + BE^2 + AC^2 + CE^2$

$= AE^2 + AE^2 = 4R^2 + 4R^2 = 8R^2$

Câu 201.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hà Nội 2016 – 2017]**

Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C, I khác O). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE.

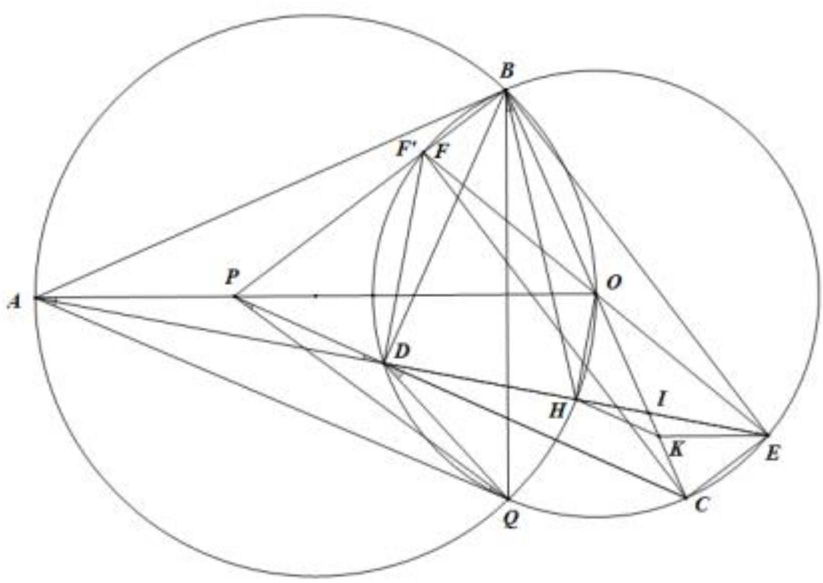
a) Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{BE}$.

c) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh $HK//DC$.

d) Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.

Hướng dẫn



a) Vì AB là tiếp tuyến của (O) nên $AB\perp BO \Rightarrow ABO=90^0$

Vì H là trung điểm của dây DE của (O) nên $OH\perp DE \Rightarrow AHO=90^0$

Suy ra $ABO+AHO=180^0 \Rightarrow AHOB$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra bốn điểm A, H, O, B nằm trên cùng một đường tròn.

b) Có $ABD=AEB$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BD)

Xét ΔABD và ΔAEB có chung BAE, $ABD=AEB$ nên

$\Delta ABD\backsim\Delta AEB$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{EB}$

c) Vì $ABOH$ là tứ giác nội tiếp nên $OAH=OBH$

Vì $EK//AO$ nên $OAH=HEK$

Suy ra $OBH=HEK \Rightarrow BHKE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow KHE=KBE$

Vì $BDCE$ là tứ giác nội tiếp nên $KBE = CDE$

Suy ra $KHE = CDE \Rightarrow KH//CD$

d) Gọi F' là giao điểm của BP và đường tròn (O).

Gọi AQ là tiếp tuyến thứ 2 của (O)

Vì $BDQC$ là tứ giác nội tiếp nên $QDC = QBC$ (1)

Vì $ABOQ$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO nên $QBC = QAO$ (2)

Từ (1), (2) $QDC = OAQ \Rightarrow APDQ$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow PDA = PQA$ (3)

Có $PDA = EDC = EBC$ (4)

Ta có $\Delta ABP = \Delta AQP$ (c.g.c) $\Rightarrow PQA = PBA$ (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow PBA = EBC$

Suy ra $PBE = ABC = 90^0 \Rightarrow F'BE = 90^0 \Rightarrow F'E$ là đường kính của (O)

$\Rightarrow F' \in OE \Rightarrow F' \equiv F$

Vì $FBEC$ là tứ giác nội tiếp nên $FCE = 180^0 - FBE = 90^0$

Tứ giác $FBEC$ có $FCE = FBE = BEC = 90^0$ nên là hình chữ nhật.

Câu 202.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hà Nội 2014 – 2015]**

Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn $(O;R)$ (M khác A, M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

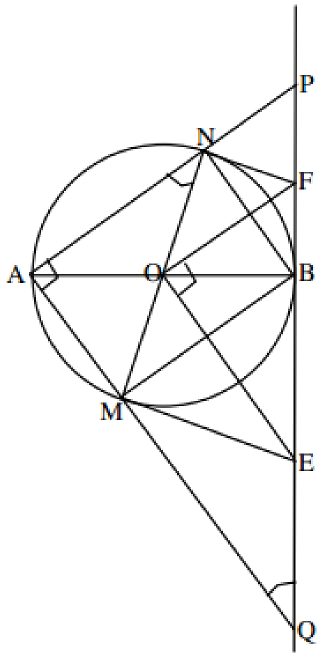
a) Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại điểm F. Chứng minh F là trung điểm của BP và $ME // NF$.

d) Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn



c) OE là đường trung bình của ΔABQ.

OF // AP nên OF là đường trung bình của ΔABP

Suy ra F là trung điểm của BP.

Mà $AP \perp AQ$ nên $OE \perp OF$.

Xét tam giác vuông NPB có F là trung điểm của cạnh huyền BP.

Xét $\Delta NOF = \Delta OFB$ (c-c-c) nên $ONF = 90^0$

Tương tự ta có $OME = 90^0$ nên ME // NF vì cùng vuông góc với MN

d) $2S_{MNPQ} = 2S_{APQ} - 2S_{AMN} = 2R.PQ - AM.AN = 2R(PB + BQ) - AM.AN$

$\Delta ABP \backsim \Delta QBA$ suy ra $\dfrac{AB}{QB} = \dfrac{BP}{BA} \Rightarrow AB^2 = BP.BQ$

Nên áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có $PB + BQ \geq 2\sqrt{PB.BQ} = 2\sqrt{(2R)^2} = 4R$

Ta có:

$$AM.AN \leq \frac{AM^2 + AN^2}{2} = \frac{MN^2}{2} = 2R^2$$

Do đó, $2S_{MNPQ} \geq 2R.4R - 2R^2 = 6R^2 \Rightarrow S_{MNPQ} \geq 3R^2$

Dấu bằng xảy ra khi $AM = AN$ và $PQ = BP$ hay $MN \perp AB$.

Câu 203.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hà Nội 2015 – 2016]**

Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì trên cung KB (M khác K, M khác B). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai N.

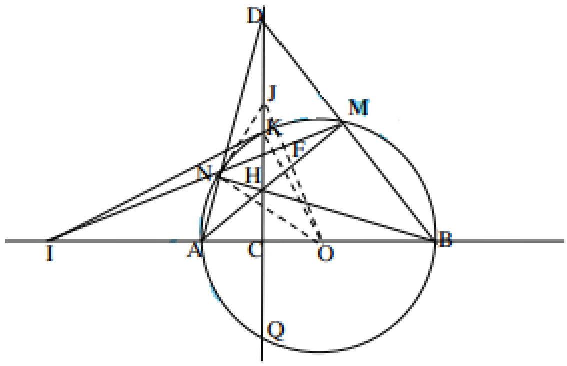
a) Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $CA.CB = CH.CD$.

c) Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn đi qua trung điểm của DH.

d) Khi M di động trên cung KB, chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn



a) Tứ giác $ACMD$ có $ACD = AMD = 90^0$. Nên tứ giác $ACMD$ nội tiếp

b) Xét 2 tam giác vuông : $\Delta ACH \backsim \Delta DCB$

(Do có $CDB = MAB$ (góc có cạnh thẳng góc))

Nên ta có: $\dfrac{CA}{CH} = \dfrac{CD}{CB} \Rightarrow CA.CB = CH.CD$.

c) Do H là trực tâm của ΔABD

Vì có 2 chiều cao DC và AM giao nhau tại H, nên $AD \perp BN$

Hơn nữa $ANB = 90^0$ vì chắn nửa đường tròn đường kính AB.

Nên A, N, D thẳng hàng.

Gọi tiếp tuyến tại N cắt CD tại J ta chứng minh $JND = NDJ$.

Ta có $JND = NBA$ cùng chắn AN.

Ta có $NDJ = NBA$ góc có cạnh thẳng góc

$\Rightarrow JND = NDJ$. Vậy trong tam giác vuông ΔDNH có J là trung điểm của HD.

d) Gọi $I = MN \cap AB$.

CK cắt đường tròn tâm O tại điểm Q.

Khi đó JM, JN là tiếp tuyến của đường tròn tâm O.

Gọi $F = MN \cap JO$. Ta có $KFOQ$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ FI là phân giác KFQ.

Ta có: $KFQ = KOQ \Rightarrow KFI = FOI$

$\Rightarrow$ tứ giác $KFOI$ nội tiếp

$\Rightarrow IKO = 90^0 \Rightarrow IK$ là tiếp tuyến đường tròn tâm O

Vậy MN đi qua điểm cố định I (với IK là tiếp tuyến của đường tròn tâm O).

Câu 204.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hà Tĩnh 2013 – 2014]**

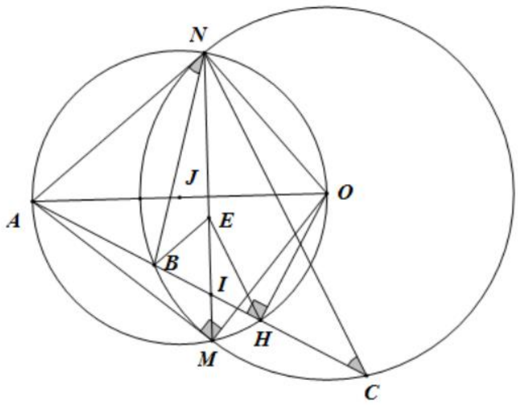
Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với các đường tròn (O) ($M, N \in (O)$). Qua A vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C phân biệt (B nằm giữa A, C). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC.

a) Chứng minh tứ giác $ANHM$ nội tiếp được trong đường tròn.

b) Chứng minh $AN^2 = AB.AC$.

c) Đường thẳng qua B song song với AN cắt đoạn thẳng MN tại E. Chứng minh $EH \;//\; NC$.

Hướng dẫn



a) Vì AN, AM là tiếp tuyến của (O) nên $ANO = AMO = 90^0$. Gọi J là trung điểm AO.

Vì H là trung điểm dây BC nên $OH \perp BC \Rightarrow AHO = 90^0$

Suy ra A, O, M, N, H thuộc đường tròn tâm J đường kính AO

Suy ra $AMHN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (J)

b) Có $ANB = ACN$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta ANB \backsim \Delta CAN$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AN} \Rightarrow AN^2 = AB.AC$$

c) Gọi $I = MN \cap AC$.

Ta có MN là trục đẳng phương của hai đường tròn (J) và (O), $I \in MN$ nên phương tích của I đối với (J) và (O) bằng nhau $\Rightarrow IA.IH = IB.IC \Rightarrow \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IH}{IC}$

Vì $BE \;//\; AN$ nên $\dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IE}{IN} \Rightarrow \dfrac{IE}{IN} = \dfrac{IH}{IC} \Rightarrow EH \,//\, NC$.

Câu 205.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hà Tĩnh 2015 – 2016]**

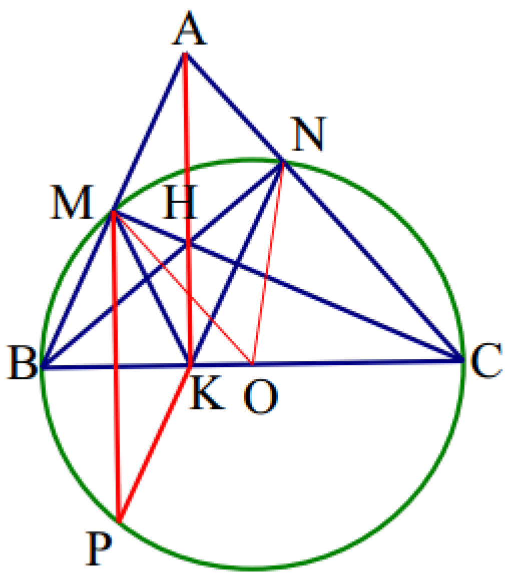
Cho tam giác nhọn ABC, đường tròn đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Gọi H là giao điểm của BN và CM.

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Gọi K là giao điểm của đường thẳng BC với đường thẳng AH. Chứng minh $\Delta\, BHK$ đồng dạng Δ ACK.

c) Chứng minh: $KM + KN \le BC$. Dấu “ =” xảy ra khi nào?

Hướng dẫn



a) Theo giả thiết ta có $BMC = BNC = 90^0$ (Do cùng chắn một nữa đường tròn)

$\Rightarrow AMH = ANH = 90^0$

$\Rightarrow$Tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn.

b) Vì $BN \perp AC$, $CM \perp AB \Rightarrow H$ là trực tâm ΔABC.

$\Rightarrow AK \perp BC \Rightarrow AKB = ANB = 90^0 \Rightarrow$Tứ giác $ABKN$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow KAC = NBC$ (cùng chắn KN)

Xét ΔBHK và ΔACK có:

$HBK = KAC$, $HKB = AKC = 90^0$

$\Rightarrow \Delta BHK \backsim \Delta ACK$ (g-g)

c) Từ M kẻ đường vuông góc với BC cắt đường tròn tại $P \Rightarrow BC$ là trung trung trực của MP (tính chất đối xứng của đường tròn) $\Rightarrow DK = KI$

Ta có các tứ giác $ABKN$, $BMHK$ nội tiếp$\Rightarrow ABN = AKN = HKM$

$\Rightarrow MKB = NKC$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

Mặt khác BC là trung trực của MP nên $MKB = BKP \Rightarrow BKP = NKC$

$\Rightarrow$3 điểm P, K, N thẳng hàng suy ra $KM + KN = KP + KN = PN \le BC$ (do PN là dây còn BC là đường kính).

Dấu "=" xảy ra khi K trùng O, khi đó ΔABC cân tại A.

Câu 206.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hà Nội 2013 – 2014]**

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C ($AB < AC$, d không đi qua tâm O).

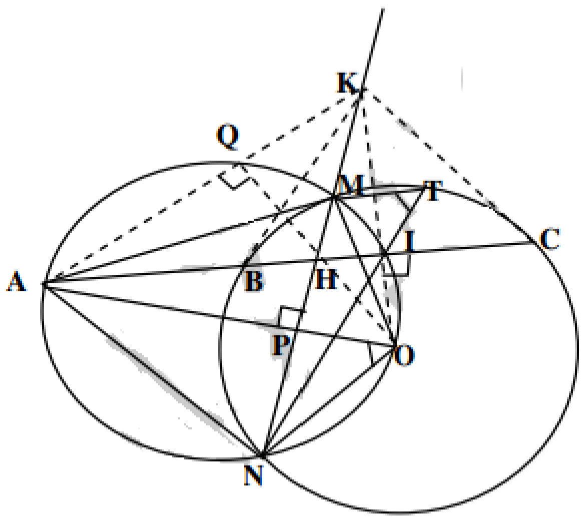
a) Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4cm, AN = 6cm$.

c) Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh $MT // AC$

d) Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài.

Hướng dẫn



a) Xét tứ giác $AMON$ có hai góc đối

$ANO = 90^0$; $AMO = 90^0$ nên là tứ giác nội tiếp

b) $\Delta ABM \backsim \Delta AMC$ nên ta có $AB.AC = AM^2 = AN^2 = 6^2 = 36$

$\Rightarrow AC = \dfrac{6^2}{AB} = \dfrac{6^2}{4} = 9(cm)$ $\Rightarrow BC = AC - AB = 9 - 4 = 5(cm)$

c) $MTN = \dfrac{1}{2}MON = AON$ (cùng chắn MN trong đường tròn (O)), và $AIN = AON$))

(do 3 điểm N, I, M cùng nằm trên đường tròn đường kính AO và cùng chắn cung 90^0)

Vậy $AIN = MTI = TIC$ nên $MT // AC$ do có 2 góc so le bằng nhau.

d) Xét ΔAKO có $AI \perp KO$.

Hạ $OQ \perp AK$. Gọi $H = OQ \cap AI$ và AI thì H là trực tâm của ΔAKO, nên KMH vuông góc với AO.

Vì MHN vuông góc với AO nên đường thẳng $KMHN$ vuông góc với AO, nên KM vuông góc với AO. Vậy K nằm trên đường thẳng cố định MN khi BC di chuyển.

Cách giải khác: Ta có $KB^2 = KC^2 = KI.KO$. Nên K nằm trên trục đẳng phương của 2 đường tròn tâm O và đường tròn đường kính AO. Vậy K nằm trên đường thẳng MN là trục đẳng phương của 2 đường tròn trên.

Câu 207.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hà Tĩnh 2016 – 2017 đề 2]**

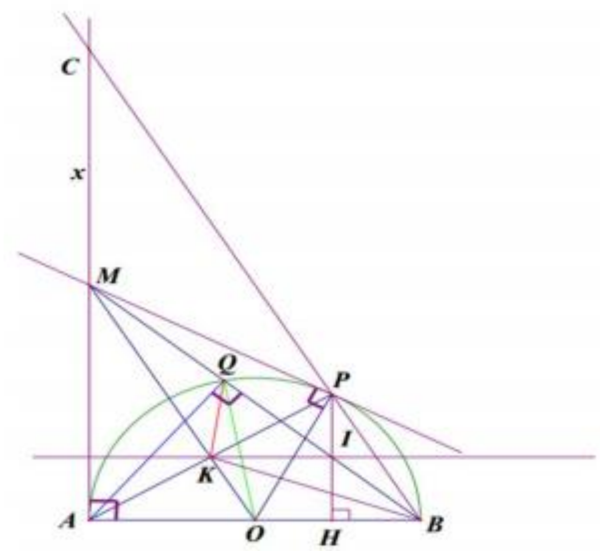
Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB, kẻ tia Ax vuông góc với AB. Từ điểm M trên tại Ax kẻ tiếp tuyến MP với nửa đường tròn (P là tiếp điểm khác A). Đoạn AP cắt OM tại K, MB cắt nửa đường tròn tại Q (Q khác B).

a) Chứng minh $AMPO, AMQK$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh hai tam giác MQO và MKB đồng dạng.

c) Gọi H là hình chiếu của P trên AB, I là giao điểm của MB và PH. Chứng minh: KI vuông góc với AM.

Hướng dẫn



a) Ta có Ax và MP là hai tiếp tuyến của nửa đường tròn nên $MAO = MPO = 90^0$ do đó tứ giác $AMPO$ nội tiếp.

Ta có:

$$\begin{cases} MA = MP \\ OA = OP = R \Rightarrow OM \text{ là trung trực của đoạn } AP \\ O \neq M \end{cases}$$

$\Rightarrow AKM = 90^0$ (1)

Lại có: $APB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow MQA = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AKM = MQA = 90^o$ cùng nhìn AM nên tứ giác $AMQK$ nội tiếp.

b) Ta có: $ABQ = MAQ$ (cùng chắn AQ của nửa đường tròn)

Mà $MAQ = MKQ$ (do tứ giác $MQKA$ nội tiếp – câu a))

$\Rightarrow ABQ = MKQ \Rightarrow$ tứ giác $QKOB$ nội tiếp $\Rightarrow KOQ = QBK$ (cùng chắn KQ)

Xét ΔMQO và ΔMKB có BMK chung; $KOQ = QBK$ (CM trên) nên $\Delta MQO \backsim \Delta MKB$.

c) ***Cách 1:***

BP cắt tia Ax tại C, ta có MO song song BC (vì cùng vuông góc với AP) mà $AO = OB$ nên $AM = MC$

Lại có PH song song với AC nên theo định lý Ta lét ta có: $\dfrac{IP}{MC} = \dfrac{IB}{BM} = \dfrac{IH}{AM} \Rightarrow IP = IH$

Từ đó dễ thấy KI là đường trung bình của ΔAPH, do đó $KI // AB \Rightarrow KI \perp AM$

Cách 2:

Ta có IQK phụ với KQA; IPK phụ với PAH; mà $PAH = AMK$ (cùng phụ với MAK)

Nhưng $AMK = AQK$ (do tứ giác $MQKA$ nội tiếp-câu b). Do đó $KQI = IPK$

$\Rightarrow$ tứ giác $KQPI$ nội tiếp $\Rightarrow QPK = QIK$ (cùng chắn cung KQ) mà $QPK = QBA \Rightarrow QBA = QIK$

$\Rightarrow KI // AB$ (có cặp góc đồng vị bằng nhau) $\Rightarrow KI \perp AM$.

Câu 208.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hải Dương 2016 – 2017]**

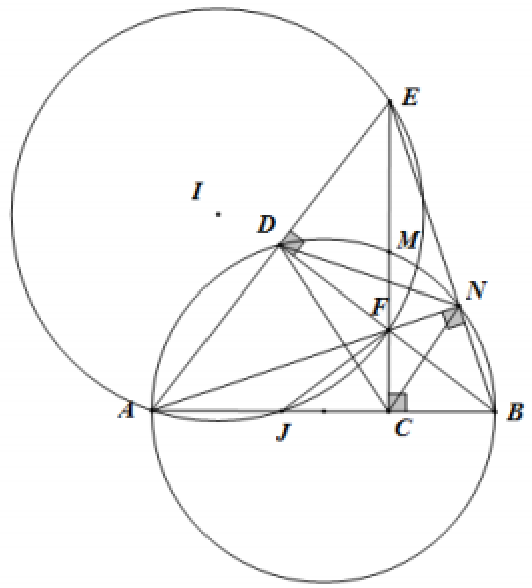
Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Dựng đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C, cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M. Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F, tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E. Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

a) Chứng minh $AD.AE = AC.AB$

b) Chứng minh: Ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp ΔCDN

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF. Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB.

Hướng dẫn



a) Có $ADB = \ ANB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta ACE$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AE} \Rightarrow AD.AE = AC.AB$

b) + Có $AN \perp EB,\ EC \perp AB$, $EC \cap AN = F$ nên F là trực tâm của ΔAEB

$\Rightarrow BF \perp EA$

Mà $BD \perp EA \Rightarrow B,\ D,\ F$ thẳng hang

+ Tứ giác $ADFC$ có hai góc đối bằng 90^0 nên là tứ giác nội tiếp, suy ra $DCF = DAF$

Tương tự ta có: $NCF = NBF$

Mà $DAF = NBF$ (cùng phụ với AEB) $\Rightarrow DCF = NCF$

Suy ra CF là phân giác của DCN

Tương tự ta cũng có DF là phân giác của NDC

Vậy F là tâm đường tròn nội tiếp ΔDCN

c) Gọi J là giao của (I) với đoạn AB.

Có $FAC = CEB\left(=90^0 - ABE\right) \Rightarrow \Delta FAC \backsim \Delta BEC$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{FC}{BC} = \dfrac{AC}{EC} \Rightarrow CF.CE = BC.AC$

Vì $AEFJ$ là tứ giác nội tiếp nên $FJC = FEA\left(=180^0 - AJF\right)$

$\Rightarrow \Delta CFJ \backsim \Delta CAE$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{CF}{CA} = \dfrac{CJ}{CE} \Rightarrow CF.CE = CA.CJ$

Suy ra $BC.AC = CA.CJ \Rightarrow BC = CJ \ \Rightarrow C$ là trung điểm BJ (vì $J \neq B$)

Suy ra J là điểm cố định

Có $IA = IJ$ nên I luôn thuộc đường trung trực của AJ là đường cố định.

Câu 209.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hải Dương 2015 – 2016]**

Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi không trùng với AB. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt các đường thẳng BC và BD lần lượt tại E và F. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE và AF.

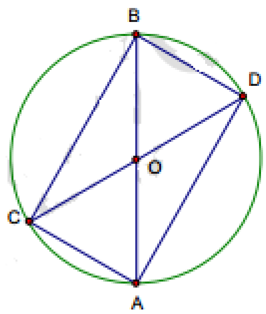
a) Chứng minh $ACBD$ là hình chữ nhật.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác BPQ. Chứng minh H là trung điểm của OA.

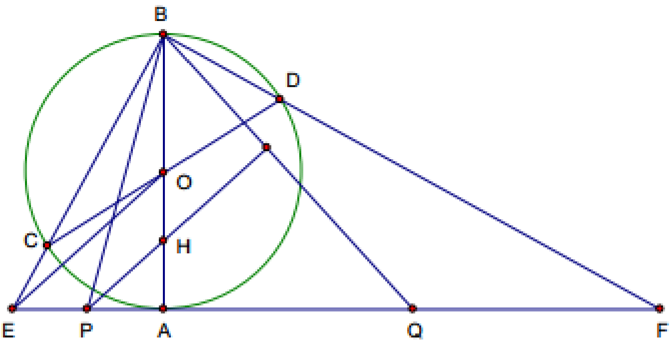
c) Xác định vị trí của đường kính CD để tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh $ACDB$ là hình chữ nhật



Hình vẽ ý 1



Hình vẽ ý 2 và 3

$ACB = ADB = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$CAD = CBD = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra Chứng minh $ACDB$ là hình chữ nhật

b) Chứng minh H là trung điểm của OA

Tam giác BEF vuông tại B có đường cao BA nên $AB^2 = AE.AF$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{AE}{2OA} = \frac{AB}{2AQ} \Rightarrow \frac{AE}{OA} = \frac{AB}{AQ}$$

$EAO = BAQ = 90^0 \Rightarrow \Delta AEO \backsim \Delta ABQ$

$\Rightarrow AEO = ABQ$. Mặt khác $HPF = ABQ$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) nên $AEO = HPF$. Hai góc này ở vị trí đồng vị lên $PH//OE$

P là trung điểm của EA $\Rightarrow$ H là trung điểm của OA

c) Xác định vị trí của CD để tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất

Ta có: $S_{\Delta BPQ} = \dfrac{AB.PQ}{2} = R.PQ = R(AP + AQ) = \dfrac{R}{2}(\text{AE} + AF)$

$\geq \dfrac{R}{2}.2\sqrt{AE.\text{AF}}$

$= R.\sqrt{AB^2} = R.AB = 2R^2$

$S_{\Delta BPQ} = 2R^2 \Leftrightarrow AE = \text{AF}$

$\Leftrightarrow$ tam giác BEF vuông cân tại $B \Leftrightarrow$ tam giác BCD vuông cân tại $B \Rightarrow CD \perp AB$

Vậy $S_{\Delta BPQ}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $2R^2$ khi CD vuông AB

Câu 210.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hải Phòng 2013 – 2014]**

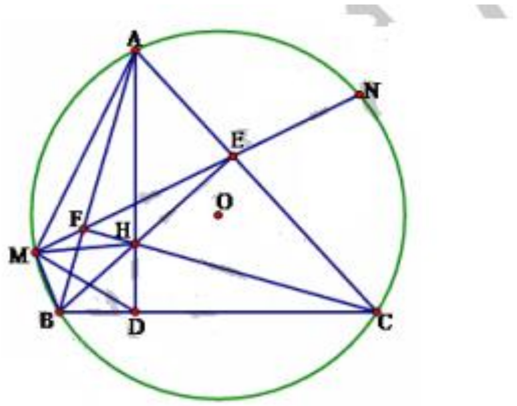
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao $AD,\ BE,\ CF$ cắt nhau tại H ($D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$)

a) Chứng minh các tứ giác $BDHF,\ BFEC$ nội tiếp.

b) Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại M và N (F nằm giữa M và E). Chứng minh $AM = AN$.

c) Chứng minh AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MHD.

Hướng dẫn



a**) Chứng minh các tứ giác BDHF, BFEC nội tiếp.**

+) Xét tứ giác $BDHF$ có:

$BFH = 90^0$ (CF là đường cao của ΔABC)

$HDB = 90^0$ (AD là đường cao của ΔABC)

$\Rightarrow BFH + HDB = 180^0$

Mà BFH và HDB là 2 góc đối nhau $\Rightarrow$ tứ giác $BDHF$ nội tiếp

Ta có:

$BFC = 90^0$ (CF là đường cao của ΔABC)

$BEC = 90^0$ (BE là đường cao của ΔABC)

Suy ra bốn điểm $B,\ F,\ E,\ C$ cùng thuộc đường tròn đường kính BC

Hay tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AM = AN$.

Vì tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow$ $AFN = ACB$ (cùng bù với BFE)

Mà $CAN = \frac{1}{2} sđ\, AB = \frac{1}{2} sđ\, MB + sđ\, AM$ (tính chất góc nội tiếp trong (O))

$AFN = \frac{1}{2} sđ\, AN + sđ\, MB$ (tính chất góc có đỉnh bên trong đường (O))

$\Rightarrow$ $AM = AN$

c) Chứng minh AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MHD

Xét ΔAMF và ΔABM có:

MAB chung

$AMF = ABM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $AM = AN$ trong (O))

Do đó $\Delta AMF \backsim \Delta ABM$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AF}{AM} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AM^2 = AF.AB$ (1)

Xét ΔAFH và ΔADB có:

BAD chung

$AFH = ADB = 90^0$ (CF và AD là các đường cao của ΔABC)

Do đó $\Delta AFH \backsim \Delta ADB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AF}{AH} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AM.AD = AF.AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AM^2 = AH.AD \Rightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AD}$

Xét ΔAHM và ΔAMD có:

MAD chung

$\frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AD}$ (CM trên)

Do đó $\Delta AHM \backsim \Delta AMD$ (c.g.c)

$\Rightarrow AMH = ADM$ (3)

Vẽ đường thẳng xy là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMHD tại M.

Ta có: $xMH = ADM$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và góc nội tiếp) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $xMH = AMH$

Hay MA trùng với tia Mx

Suy ra AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMHD.

Câu 211.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hải Phòng 2016 – 2017]**

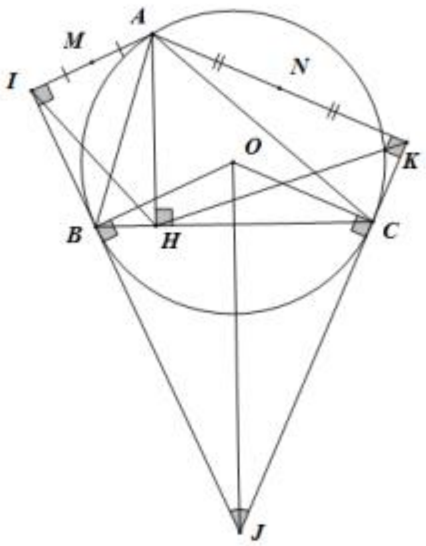
Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Kẻ $AH \perp BC$ tại H. Gọi I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O).

a) Chứng minh tứ giác $AHCK$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $AHK = ABC$ và $AH^2 = AI.AK$

c) Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AI và AK. Chứng minh rằng: Nếu $AH = AM + AN$ thì ba điểm A, O, H thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) Vì $AH \perp HC$, $AK \perp KC$ nên $AHC = AKC = 90^0 \Rightarrow AHC + AKC = 180^0$

Suy ra $AHCK$ là tứ giác nội tiếp

b) Vì $AHCK$ là tứ giác nội tiếp nên $AHK = ACK$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AK)

Mặt khác $ABC = ACK$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn AC của (O))

Suy ra $AHK = ABC$. (1)

Vì $AHB = AIB = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên $AHBI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow ABH = AIH$ hay $ABC = AIH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AHK = AIH$ (3)

Chứng minh tương tự, ta có $AHI = AKH$ (4)

Từ (3) và (4) có $\Delta AIH \sim \Delta AHK$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AI}{AH} = \frac{AH}{AK} \Rightarrow AH^2 = AI.AK \text{ (đpcm)}$$

c) Vì M, N là trung điểm của AI, AK nên

$AH = AM + AN = \frac{AI}{2} + \frac{AK}{2} = \frac{AI + AK}{2} \Rightarrow AH^2 = \frac{(AI + AK)^2}{4}$

Kết hợp với ý b, ta có

$\frac{(AI + AK)^2}{4} = AI.AK \Leftrightarrow (AI + AK)^2 = 4.AI.AK$

$\Leftrightarrow (AI - AK)^2 = 0$

$\Leftrightarrow AI = AK$

Gọi J là giao điểm của 2 tiếp tuyến tại $B,\ C$ của (O). Có $\Delta OBJ = \Delta OCJ$ (cạnh huyền–cạnh góc vuông)

$\Rightarrow JO$ là phân giác của BJC và $JB = JC$

Suy ra OJ là đường trung trực của BC $\Rightarrow OJ \perp BC$

Vì $AI = AK,\ AI \perp IJ,\ AK \perp KJ$ nên A thuộc đường phân giác của IJK $\Rightarrow A \in OJ$

Suy ra $AO \perp BC$, mà $AH \perp BC$ nên $A,\ O,\ H$ thẳng hàng.

Câu 212.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hải Phòng 2014 – 2015]**

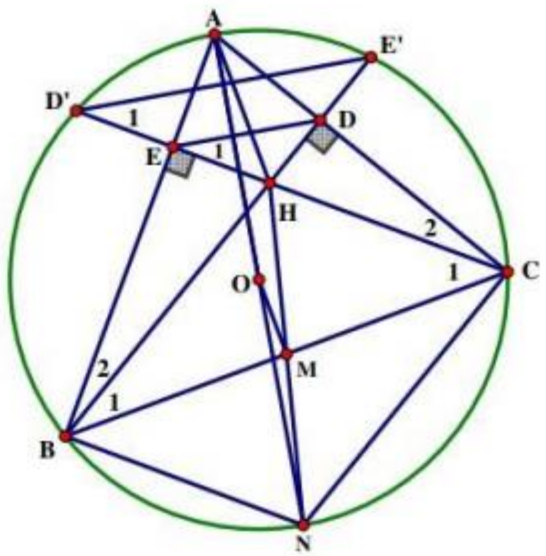
Cho đường tròn (O) cố định và tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BD và CE cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt ở D' và E'

a) Chứng minh rằng tứ giác $BEDC$ là tứ giác nội tiếp và $DE\ //\ D'E'$

b) Chứng minh rằng OA vuông góc với DE

c) Cho các điểm B và C cố định. Chứng minh rằng khi A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE không đổi.

Hướng dẫn



a) * Có BD và CE là các đường cao của ΔABC $\Rightarrow$ $BD \perp AC,\ CE \perp AB$

$\Rightarrow BDC = 90^0; BEC = 90^0$

+ Tứ giác $BEDC$ có $BDC = 90^0; BEC = 90^0$ mà 2 góc này cùng chắn cạnh BC $\Rightarrow$ tứ giác $BEDC$ nội tiếp (điều phải chứng minh)

* Tứ giác $BEDC$ nội tiếp $\Rightarrow E_1 = B_1 = \dfrac{sd\ DC}{2}$ (1)

* Xét đường tròn (O) có $B_1 = D'_1 = \dfrac{sd\ E'C}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow D'_1 = E_1$ mà đây là 2 góc đồng vị $\Rightarrow$ $DE\ //\ D'E'$ (điều phải chứng minh)

b) * Tứ giác $BEDC$ nội tiếp $\Rightarrow B_2 = C_2 = \dfrac{sd\ ED}{2}$

* Trong đường tròn (O) có $\Rightarrow B_2 = C_2 \Rightarrow AE' = AD' \Rightarrow A$ là điểm chính giữa $D'E'$ $\Rightarrow AO$ đi qua trung điểm của $D'E'$

$\Rightarrow AO \perp D'E'$, mà $DE\ //\ D'E' \Rightarrow OA \perp DE$ (đpcm)

c) * Ta có tứ giác $AEHD$ có $AEH = ADH = 90^o \Rightarrow AH$ là đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHD$ $\Rightarrow AH$ đồng thời là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔADE

$\Rightarrow \dfrac{AH}{2}$ là bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔADE.

* Vẽ đường kính AN của đường tròn (O) $\Rightarrow NCA = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow NC \perp AC \Rightarrow NC\ //\ BD$

* Chứng minh tương tự có $BN\ //\ CE \Rightarrow$ Tứ giác $BHCN$ là hình bình hành.

* Gọi M là giao điểm của BC và HN $\Rightarrow M$ là trung điểm HN $\Rightarrow AH = 2.OM$

Mặt khác M là trung điểm của BC nên $OM \perp BC$; OM là khoảng cách từ O đến BC, mà BC cố định, O cố định nên OM không đổi.

$\Rightarrow AH$ không đổi.

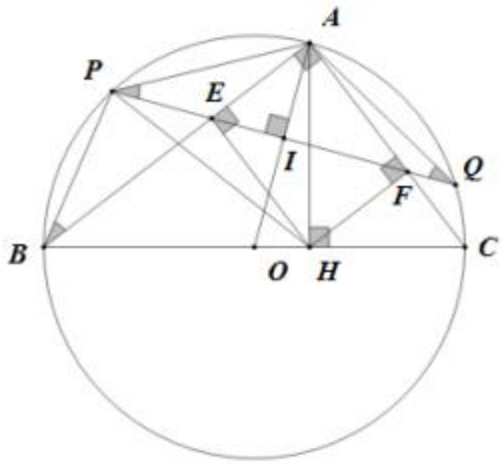
Câu 213.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hòa Bình 2015 – 2016]**

Cho đường tròn tâm O, đường kính BC. Lấy một điểm A trên đường tròn (O) sao cho $AB > AC$ (A khác C). Từ A vẽ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Từ H vẽ HE vuông góc với AB và HF vuông góc với AC (E thuộc AB, F thuộc AC)

a) Chứng minh rằng $AEHF$ là hình chữ nhật và $OA \perp EF$

b) Tia FE cắt đường tròn (O) tại P. Chứng minh rằng ΔAPH cân

Hướng dẫn



a) Có $BAC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì $HE \perp AB,\ HF \perp AC$ nên $AEH = AFH = 90^0$

Tứ giác $AEHF$ có 3 góc vuông nên nó là hình chữ nhật

Gọi I là giao OA và EF. Vì ΔOAB cân ở O nên $EAI = ABO$ (1)

$AEHF$ là hình chữ nhật nên nó nội tiếp đường tròn $\Rightarrow AEI = AHF$ (2)

Vì $AE \ // \ HF$ (cùng $\perp AC$) nên $AHF = EAH = 90^0 - \ ABO$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow EAI + \ AEI = 90^0 \Rightarrow \ \Delta AEI$ vuông tại I $\Rightarrow OA \perp EF$

b) Gọi Q là giao của tia EF với (O). Vì $OA \perp PQ$ nên A là điểm chính giữa cung PQ

$\Rightarrow \ \Delta APQ$ cân tại A $\Rightarrow APQ = AQP$

Vì $APBQ$ là tứ giác nội tiếp nên $ABP = AQP$

Suy ra $ABP = APQ = APE \ \Rightarrow \Delta ABP \sim \Delta APE$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{AP}{AE} \Rightarrow AP^2 = AE.AB$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHB có $AH^2 = \ AE.\,AB$

$\Rightarrow AP^2 = \ AH^2 \Rightarrow AP \ = \ AH \ \Rightarrow \ \Delta APH$ cân ở A.

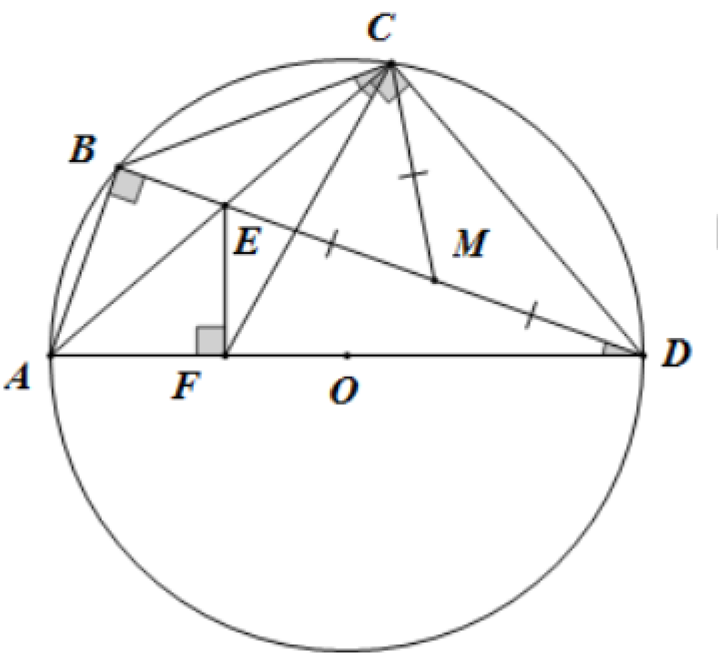
Câu 214.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hòa Bình 2014 – 2015]**

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Kẻ EF vuông góc với AD ($F \in AD$)

a) Chứng minh rằng tia CA là phân giác của BCF.

b) Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng: $CM.DB = DF.DO$

Hướng dẫn



a) Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên $BCA = BDA$ (1)

Có $ACD = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow$ $ECD + EFD = 180^0$

Suy ra $ECDF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ $ECF = EDF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $BCA = FCA$

$\Rightarrow CA$ là phân giác của BCF

b) Vì ΔCED vuông tại C nên $CM = ME = MD \Rightarrow 2CM = DE$

$\Delta DEF \sim \Delta DAB \Rightarrow \dfrac{DE}{DA} = \dfrac{DF}{DB} \Rightarrow DE.DB = DA.DF \Rightarrow 2CM.\mathrm{DB} = 2\,\mathrm{DO}.\mathrm{DF} \Rightarrow \mathrm{CM}.\mathrm{DB} = \mathrm{DO}.\mathrm{DF}$.

Câu 215.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hưng Yên 2016 – 2017]**

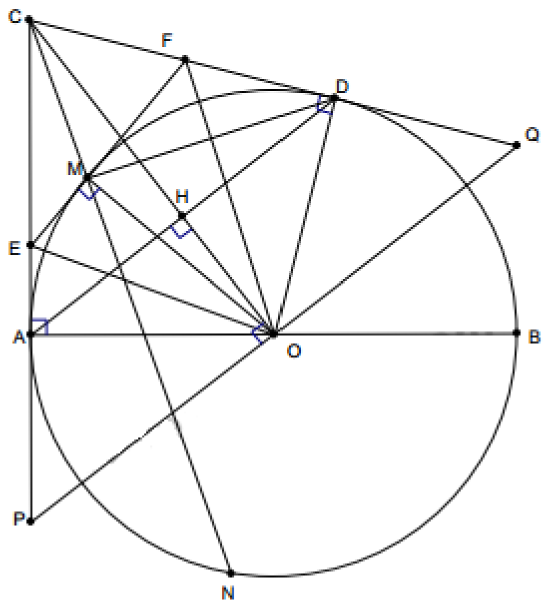
Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến tại A của đường tròn lấy điểm C sao cho C khác A. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD (D là tiếp điểm) và cát tuyến CMN (M nằm giữa N và C) với đường tròn. Gọi H là giao điểm CO và AD.

a) Chứng minh các điểm C, A, O, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $CH.CO = CM.CN$.

c) Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt CA, CD thứ tự tại E, F. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt CA, CD thứ tự tại P, Q. Chứng minh $PE + QF \geq PQ$.

Hướng dẫn



a) Vì CA, CD là tiếp tuyến của (O) (gt)

Nên $CAO = CDO$ $= 90^0$ (theo tính chất tiếp tuyến)

Suy ra 4 điểm C, A, O, D cùng thuộc 1 đường tròn. (điều phải chứng minh).

Cách 2: có $CAO = CDO$ $= 90^0$ nên góc $CAO + CDO = 180^0$

Suy ra 4 điểm C, A, O, D cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh được ΔCOD vuông tại A có đường cao DH nên

$CH.CO = CD^2$ (1)

Ta chứng minh được ΔCMD đồng dạng với ΔCDN

Nên có $CM.CN = CD^2$ (2)

(1) và (2) ta có đpcm.

c) Ta có $OFQ =$ MDO (cùng phụ với FDM)

$MDA = AOE = \frac{1}{2} sd\, AM$ (1)

Tứ giác $AODC$ nội tiếp $\Rightarrow$ $ADO =$ ACO (Cùng chắn cung AO)

Mà $ACO = AOP$ (cùng phụ với góc P) $\Rightarrow ADO = APO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $POE = MDO = OFQ$ (3)

ΔCPQ cân tại C $\Rightarrow P = Q$ (4)

Từ (3) và (4) ta có ΔPOE đồng dạng với ΔQFO

$\Rightarrow \frac{PO}{QF} = \frac{PE}{QO} \Leftrightarrow QF.PE = OP.\text{OQ} = \text{OP}^2$

Theo Cô-si có $QF + PE \geq 2\sqrt{QF.PE} = 2\sqrt{OP^2} = 2.OP = PQ$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $QF = PE$ (Tức là M là giao điểm của OC và (O)).

Câu 216.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hưng Yên 2014 – 2015]**

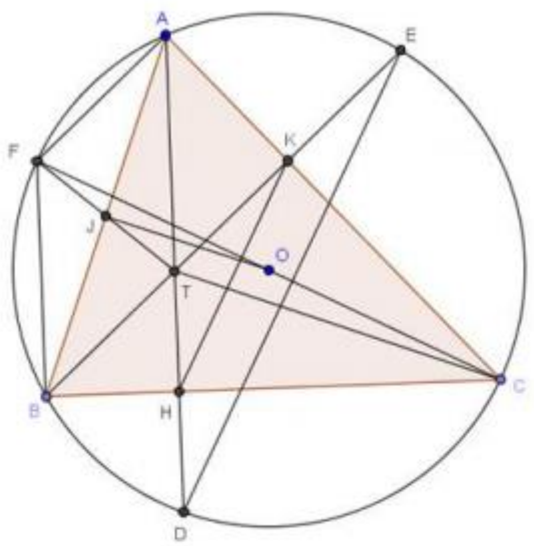
Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Hạ các đường cao AH, BK của tam giác. Các tia AH, BK lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là D, E.

a) Chứng minh tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.

b) Chứng minh: $HK // DE$.

c) Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên (O) sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CHK không đổi.

Hướng dẫn



a) Tứ giác $ABHK$ có $AKB = AHB = 900$.

Suy ra Tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn đường kính AB.Tâm O' của đường tròn này là trung điểm của AB.

b) Theo câu a) Tứ giác $ABHK$ nội tiếp (J) với J là trung điểm của AB

Nên $BAH = BKH$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BH của (J))

Mà $BAH = BAD$ (A, H, D thẳng hàng)

$BAD = BED$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD của (O))

Suy ra $BKH = BED$. Hai góc này ở vị trí đồng vị nên HK song song DE.

c)-Gọi T là giao của hai đường cao AH và BK.

Dễ chứng minh được tứ giác $CHTK$ nội tiếp đường tròn đường kính CT.

(do $CHT = CKT = 90^0$).

Do đó CT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔCHK. (*)

- Gọi F là giao của CO với (O) hay CF là đường kính của (O).

Ta có $CAF = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow FA \perp CA$

Mà $BK \perp CA$ (gt). Nên $BK // FA$ hay $BT // FA$ (1)

Ta có $CBF = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow FB \perp CB$

Mà $AH \perp CB$ (gt). Nên $AH // FB$ hay $AT // FB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác $AFBT$ là hình bình hành (hai cặp cạnh đối song song)

Do J là trung điểm của đường chéo AB

Nên J cũng là trung điểm của đường chéo FT (tính chất về đường chéo hbh).

Xét ΔCTF có O là trung điểm của FC, J là trung điểm của FT

Nên OJ là đường trung bình $OJ = \frac{1}{2}CT$ (**)

Từ (*) và (**) ta có độ dài của OJ bằng độ dài bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔCHK.

Mà độ dài của OJ là khoảng cách từ tâm O đến dây AB (J là trung điểm của dây AB). Do (O) và dây AB cố định nên độ dài của OJ không đổi.

Vậy độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK không đổi.

Câu 217.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Hưng Yên 2015 – 2016]**

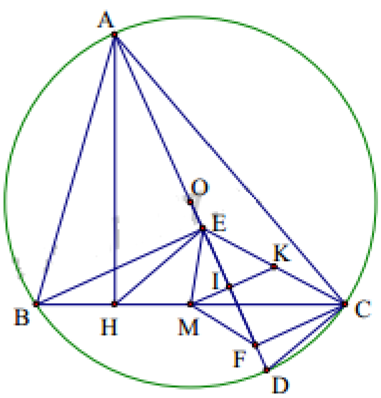
Cho ΔABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O và $AB < AC$. Vẽ đường kính AD của đường tròn (O). Kẻ BE và CF vuông góc với AD (E, F thuộc AD). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC)

a) Chứng minh bốn điểm A, B, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh HE song song với CD.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $ME = MF$.

Hướng dẫn



a) Theo bài có $AEB = AHB = 90^0$.

Suy ra bốn điểm A, B, H, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Tứ giác ABH nội tiếp đường tròn $\Rightarrow BAE = EHC$ (1)

Mặt khác, $BCD = BAE$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BD)(2)

Từ (1) và (2) suy ra $BCD = EHC$

$\Rightarrow HE // CD$

c) Gọi K là trung điểm của EC, I là giao điểm của MK với ED.

Khi đó MK là đường trung bình của ΔBCE

$\Rightarrow MK // BE$ mà $BE \perp AD$ (gt)

$\Rightarrow MK \perp AD$ hay $MK \perp EF$ (3)

Lại có $CF \perp AD$ (gt) $\Rightarrow MK // CF$ hay $KI // CF$.

ΔECF có $KI // CF$, $KE = KC$ nên $IE = IF$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra MK là đường trung trực của EF

$\Rightarrow ME = MF$

Câu 218.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Khánh Hòa 2015 – 2016]**

Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$. Hai đường tròn $(B;BA)$ và $(C;CA)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là D. Vẽ đường thẳng a bất kì qua D cắt đường tròn (B) tại M và cắt đường tròn (C) tại N (D nằm giữa M và N). Tiếp tuyến tại M của đường tròn (B) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (C) cắt nhau tại E.

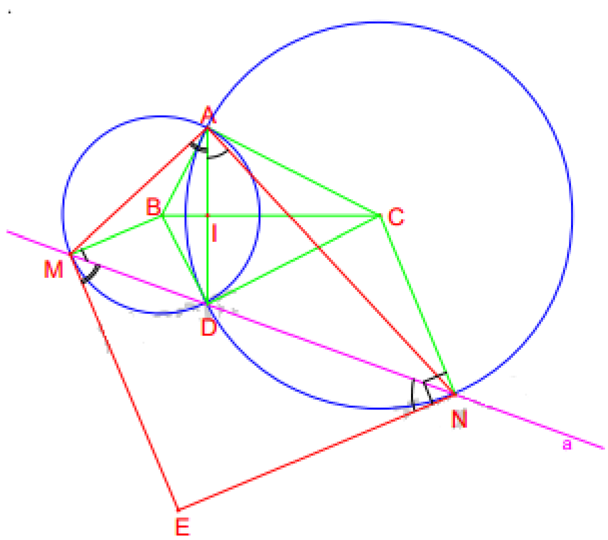
a) Chứng minh BC là tia phân giác của ABD.

b) Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh: $AD^2 = 4BI.CI$.

c) Chứng minh bốn điểm A, M, E, N cùng thuộc một đường tròn.

d) Chứng minh rằng số đo MEN không phụ thuộc vị trí của đường thẳng a.

Hướng dẫn



a) C/m: $\Delta ABC = \Delta DBC$ (ccc) $\Rightarrow ABC = DBC$ hay BC là phân giác của ABD.

b) Ta có: $AB = BD = R_{(B)}$

$CA = CD = R_{(C)}$

Suy ra: BC là trung trực của AD hay $BC \perp AD \Rightarrow AI \perp BC$.

Ta lại có: $BC \perp AD$ tại $I \Rightarrow IA = ID$ (định lí)

Xét ΔABC vuông tại A (gt) có:

AI vuông góc BC, suy ra: $AI^2 = BI.CI$ hay: $\dfrac{AD^2}{4} = BI.CI \Rightarrow AD^2 = 4BI.CI$

c) Ta có: $DME = DAM$ (hệ quả t/c góc tạo bởi tia tuyến và dây cung)

$DNE = DAN$ (hệ quả t/c góc tạo bởi tia tuyến và dây cung)

Suy ra: $DME + DNE = DAM + DAN$.

Trong ΔMNE có: $MEN + EMN + ENM = 180^0$, suy ra: $MEN + DAM + DAN = 180^0$

Hay: $MEN + MAN = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác $AMEN$ nội tiếp.

d) Trong ΔAMN có: $MAN + AMN + ANM = 180^0$, mà: $MEN + MAN = 180^0$

suy ra: $MEN = AMN + ANM$

Ta lại có: $AND = ACB = \dfrac{1}{2}ACD, AMD = ABC = \dfrac{1}{2}ABD$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Mà: ΔABC vuông tại A nên: $MEN = 90^0$ (không đổi)

Vậy số đo MEN không phụ thuộc vào đường thẳng a.

Câu 219.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Kiên Giang 2015 – 2016]**

Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$) ba đường cao AP, BM, CN của ΔABC cắt nhau tại H.

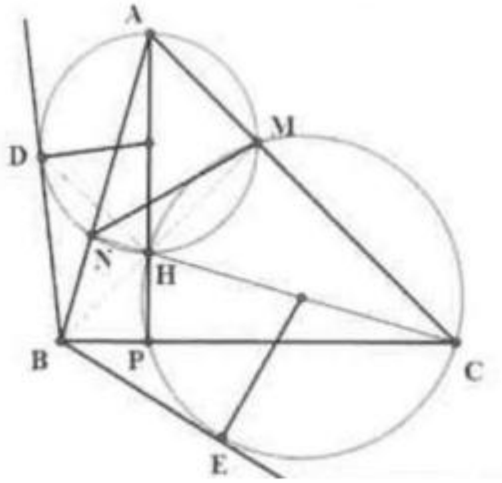
a) Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp

b) Chứng minh ΔANM đồng dạng với ΔACB

c) Kẻ tiếp tuyến BD với đường tròn đường kính AH (D là tiếp điểm) kẻ tiếp tuyến BE với đường tròn đường kính CH (E là tiếp điểm). Chứng minh $BD = BE$.

d) Giả sử $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm. Tính MN.

Hướng dẫn



a) Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp

Ta có $BMC = BNC = 90^O$

$\Rightarrow$ M và N cùng nhìn BC dưới một góc không đổi bằng 90^0.

$\Rightarrow$ tứ giác $BCMN$ nội tiếp đường tròn

b) Chứng minh ΔANM đồng dạng với ΔACB

Xét ΔANM và ΔACB có:

Góc A chung

$ANM = ACB$ (cùng bù với BNM)

=> ΔANM đồng dạng với ΔACB

c) Kẻ tiếp tuyến BD với đường tròn đường kính AH (D là tiếp điểm) kẻ tiếp tuyến BE với đường tròn đường kính CH (E là tiếp điểm). Chứng minh $BD = BE$.

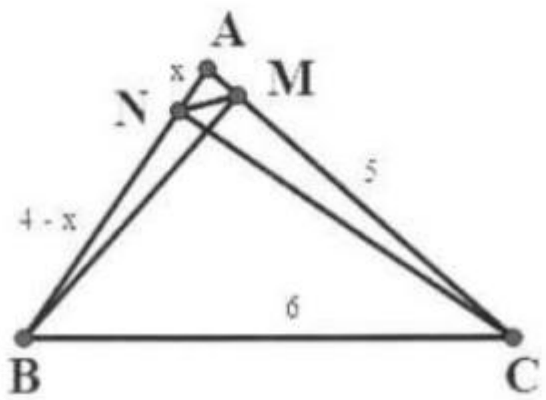
+ Chứng minh ΔBDH đồng dạng với ΔBMD (góc – góc)

$\Rightarrow$ $BD^2 = BH.BM$

+ Tương tự ta chứng minh được $BE^2 = BH.BM$

$\Rightarrow$ BD = BE

d) Giả sử $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm. Tính MN



Đặt $AN = x \Rightarrow NB = 4 - x$ (điều kiện $0 < x < 4$)

Áp dụng định lý Pythago ta có:

$CN^2 = AC^2 - AN^2 = BC^2 - BN^2 \Leftrightarrow 5^2 - x^2 = 6^2 - (4-x)^2 \Leftrightarrow x = 0,625$ (tmdk)

Vậy $AN = 0,625$

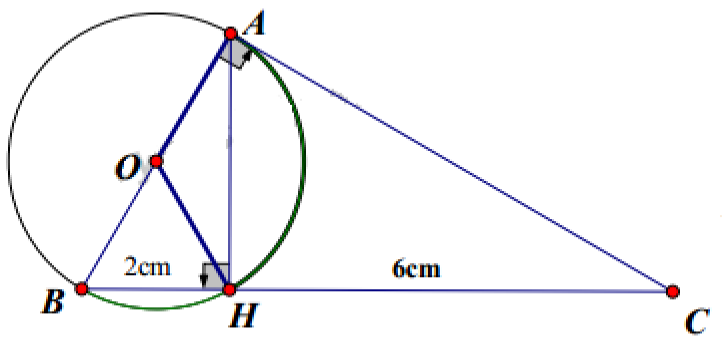
ΔANM đồng dạng với ΔACB (cmt)

$$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow MN = \frac{AN.BC}{AC} = \frac{0,625.6}{5} = 0,75(cm)$$

Câu 220.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Kon Tum -2014 – 2015].**

Cho ΔABC vuông tại A và đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AB. Biết $BH = 2cm$, $HC = 6cm$. Tính diện tích hình quạt AOH (ứng với cung nhỏ AH).

Hướng dẫn



$$AB^2 = HB.BC = (HB+HC)HB = (2+6)^2 = 16 \Rightarrow AB = 4(cm) \Rightarrow OA = 2(cm)$$

$$\cos ABH = \frac{HB}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow ABH = 60^0$$

$$\Rightarrow AOH = 2.ABH = 120^0$$

$$S_{quat\ \text{AOH}} = \frac{OA^2.\pi.120^o}{360^o} = \frac{4\pi}{3}(cm^2)$$

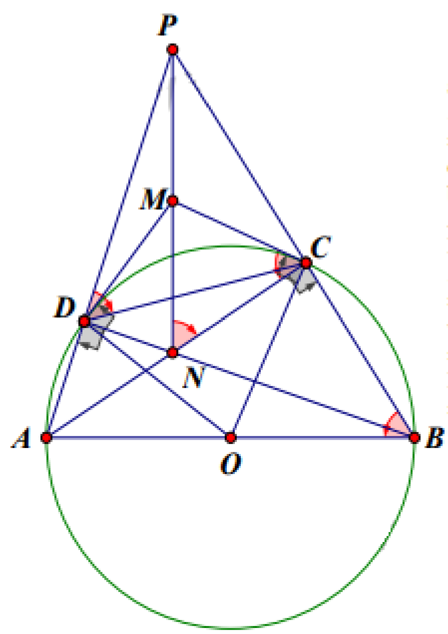
Câu 221.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Kon Tum 2014 – 2015]**

Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Từ A và B vẽ hai dây cung AC và BD của đường tròn (O) cắt nhau tại N bên trong đường tròn (C, D nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB). Hai tiếp tuyến Cx và Dy của đường tròn (O) cắt nhau tại M. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC.

a) Chứng minh tứ giác $DNCP$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh ba điểm P, M, N thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) $DNCP$ nội tiếp

$ACB = ADB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$ $AC \perp PB$ và BD vuông góc $PA \Rightarrow$ $PAN = PCN$ $= 90°$ $\Rightarrow$ Tứ giác DNCP nội tiếp đường tròn đường kính PN.

b) P, M, N thẳng hàng.

A, D, C, B cùng thuộc $(O) \Rightarrow$ tứ giác $ADCB$ nội tiếp $\Rightarrow$ $OBC = PDC$

Mà $PDC = MNC$ (cùng chắn cung PC của đường tròn $(DNCP)$)

$OCB = OBC$ (ΔOCB cân tại O) và $MCN = OCB$ (cùng phụ OCN)

$\Rightarrow$ $MNC = MCN$ $\Rightarrow$ ΔMCN cân tại $M \Rightarrow MN = MC$.

vì $MD = MC$ (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)$\Rightarrow MN = MC = MD$.

$\Rightarrow$ ΔDCN nội tiếp đường tròn tâm M.

Mặt khác ΔDCN nội tiếp đường đường kính PN (vì tứ giác $DNCP$ nội tiếp)

$\Rightarrow M$ là trung điểm $PN \Rightarrow$ Vậy P, M, N thẳng hàng (đpcm)

Câu 222.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Lạng Sơn 2013 – 2014]**

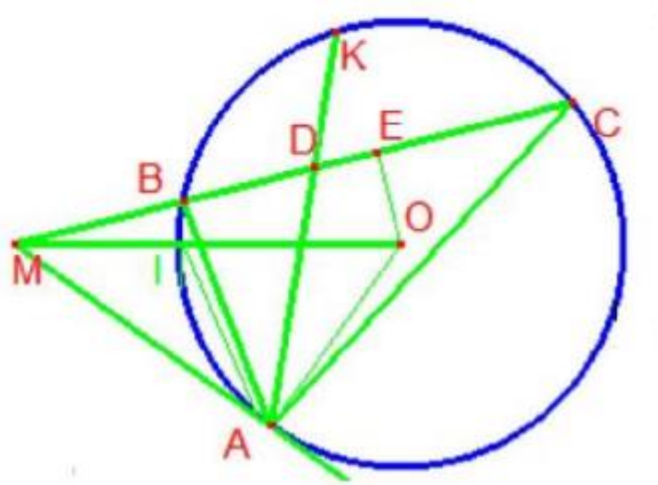
Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài đường tròn đó. Qua điểm M kẻ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC (B nằm giữa M và C). Gọi E là trung điểm của dây BC.

a) Chứng minh: $MAOE$ là tứ giác nội tiếp.

b) MO cắt đường tròn tại I (I nằm giữa M và O). Tính $AMI + 2MAI$

c) Tia phân giác BAC cắt dây BC tại D. Chứng minh: $MD^2 = MB.MC$

Hướng dẫn



a) Chứng minh $MAOE$ là tứ giác nội tiếp.

Do E là trung điểm của dây cung BC nên $OEM = 90^o$ (quan hệ giữa đường kính và dây cung)

Do MA là tiếp tuyến nên $OAM = 90^0$,tứ giác $MAOE$ có $OEM + OAM = 180^o$ nên nội tiếp đường tròn.

b) Tính $AMI + 2MAI$

Ta có: $2MAI = AOI$ (cùng chắn cung AI)

$OAM + AMO = 90^o$ (do ΔMAO vuông tại A)

$\Rightarrow AMI + 2MAI = 90^o$

c) Chứng minh $MD^2 = MB.MC$

Do ΔMAB đồng dạng với ΔMCA (g.g) nên $MA^2 = MB.MC$

Gọi K là giao điểm của phân giác AD với đường tròn (O)

Có $MDA = \frac{1}{2}(\text{sd}KC + sd\,BA) = \frac{1}{2}(\text{sd}KB + sd\,BA) = \frac{1}{2}\text{sd}\,KA$

(vì AD là phân giác BAC nên cung $KB = KC$)

Mặt khác: $MAD = \frac{1}{2}sd\,KA$ (Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Nên ΔMAD cân: $MA = MD$

Vậy $MD^2 = MB.MC$ (đpcm)

Câu 223.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Lạng Sơn 2014 – 2015]**

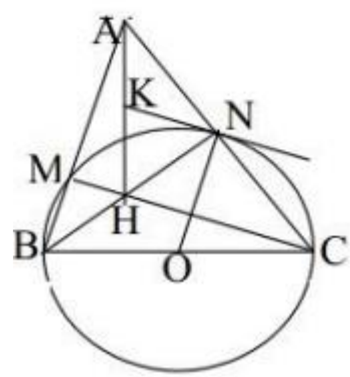
Cho ΔABC nhọn. Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Gọi H là giao điểm của BN và CM, K là trung điểm của AH.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $AM.AB = AN.AC$.

c) Chứng minh KN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Hướng dẫn



a) Có $BMC = 90^o$ (Nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AMH = 90^o$

Có $BNC = 90^0$ (Nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow ANH = 90^0$ (Do kề bù)

Vậy $AMH + ANH = 1800$ nên tứ giác $AMHN$ nội tiếp.

b) Xét ΔAMC và ΔANB có $AMC = ACB = 90^0$ (chứng minh ý a)

Có góc A chung nên ΔAMC đồng dạng ΔANB (g.g)

$\Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow AM.AB = AN.AC$

c) Có H là trực tâm của ΔABC $\Rightarrow AH$ vuông góc BC

$\Rightarrow CAH + ACB = 90^o$ (1)

KN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông NHA

$\Rightarrow KNA = KAN$ (2)

$\Delta\ ONC$ cân tại O nên $ONC = OCN$ (3)

Từ 1, 2, 3 ta có: $KAN + ONC = 90^0$

$\Rightarrow KNO = 90^o$ hay KN là tiếp tuyến của đường tròn tâm O.

Câu 224.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Lạng Sơn 2015 – 2016]**

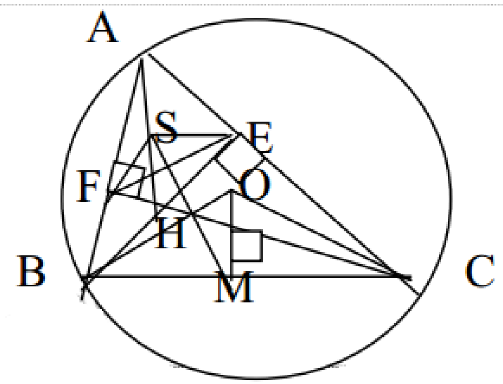
Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O và có ba góc nhọn. Kẻ cac đường cao BE; CF (Điểm E trên AC, điểm F trên AB) gọi H là giao điểm của BE với CF

a) Chứng minh rằng các tứ giác $AFHE$ và $BFEC$ nội tiếp

b) Gọi S là trung điểm AH. Chứng minh rằng $ESF = BOC$ và ΔESC và ΔBOC đồng dạng.

c) Kẻ OM vuông góc với BC (M nằm trên BC) Chứng minh rằng SM vuông góc với EF

Hướng dẫn



a) Xét tứ giác $AFHE$ có $AEH = 90^0$; $AFH = 90^0$

$\Rightarrow AFH + AEH = 180^0$ nên tứ giác $AFHE$ nội tiếp

Xét tứ giác $BFEC$ có $BFC = 90^0$ nên F thuộc đường trong đường kính BC.

$BEC = 90^0$ nên E thuộc đường tròn đường kính BC.

Vậy 4 điểm B, C, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC hay $BFEC$ nội tiếp.

b) Ta có tứ giác AFHE nội tiếp (ý a) , suy ra $ESF = 2EAF$ (cùng chắn cung EHF)

Mà $BOC = 2\ EAF$ trong đường tròn tâm O nên $ESF = BOC$.

Xét ΔESF và ΔBOC có $ESF = BOC$ (chứng minh trên)

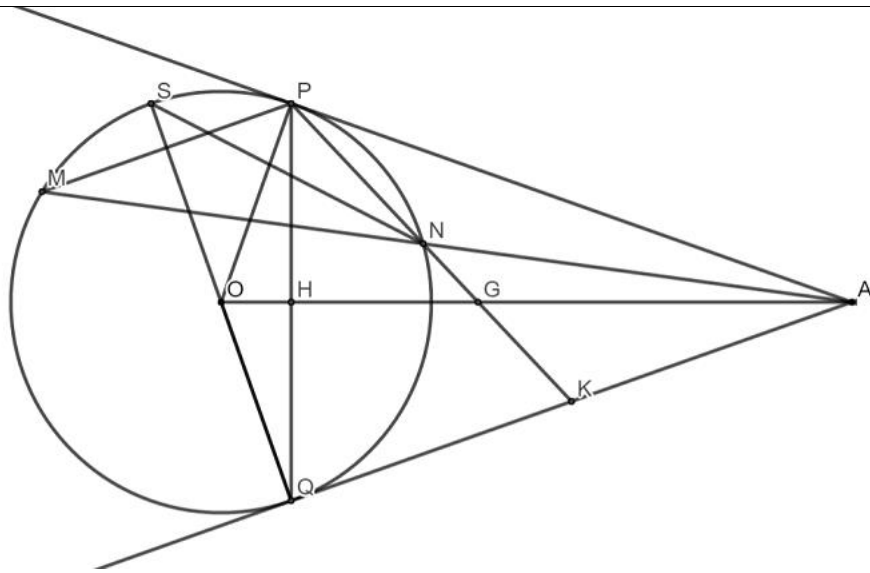
Câu 225.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Lào Cai 2013 – 2014]**

Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm A sao cho OA=3R. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AP và AQ với đường tròn $(O;R)$ với P, Q là 2 tiếp điểm. Lấy M thuộc đường tròn $(O;R)$ sao cho PM song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với đường tròn $(O;R)$. Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

a) Chứng minh tứ giác $APOQ$ là tứ giác nội tiếp và $KA^2 = KN.KP$

b) Kẻ đường kính QS của đường tròn $(O;R)$. Chứng minh NS là tia phân giác của góc PNM

c) Gọi G là giao điểm của 2 đường thẳng AO và PK. Tính độ dài đoạn thẳng AG theo bán kính R.



Hướng dẫn

a. tứ giác $APOQ$ có tổng hai góc đối bằng 180^0. Ta có $PM // AQ$ suy ra

$PMN = KAN$ (So le trong)

$PMN = APK$ (cùng chắn cung PN)

$\Rightarrow KAN = APK$

ΔKAN và ΔKPA có K chung

$KAN = KPA$ nên hai tam giác đồng dạng $(g-g)$

$$\frac{KA}{KP} = \frac{KN}{KA} \Rightarrow KA^2 = KN.KP$$

b) $PM // AQ$ mà $SQ \perp AQ$ (t/c tiếp tuyến) nên $SQ \perp PM$ suy ra $PS = SM$

Nên $PNS = SNM$ hay NS là tia phân giác của góc PNM

c) Gọi H là giao điểm của PQ với AO

G là trọng tâm của ΔAPQ nên $AG = \dfrac{2}{3}AH$

mà $OP^2 = OA.OH$ nên $OH = \dfrac{OP^2}{OA} = \dfrac{R^2}{3R} = \dfrac{R}{3}$ nên $AH = 3R - \dfrac{R}{3} = \dfrac{8R}{3}$

do đó $AG = \dfrac{2}{3}.\dfrac{8R}{3} = \dfrac{16R}{9}$.

Câu 226.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Long An 2013 – 2014]**

Bài 1: Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 3cm$, $BC = 5cm$, AH là chiều cao của ΔABC. Tính độ dài AC và AH.

Bài 2: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Ba đường cao AE, BF, CG cắt nhau tại H (với E thuộc BC, F thuộc AC, G thuộc AB).

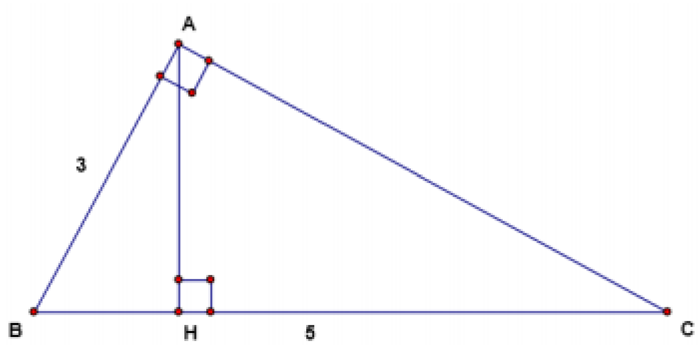
a) Chứng minh các tứ giác $AFHG$ và $BGFC$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Gọi I và M lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $AFHG$ và $BGFC$. Chứng minh MG là tiếp tuyến của đường tròn tâm I.

c) Gọi D là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn tâm O. Chứng minh: $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2$

Hướng dẫn

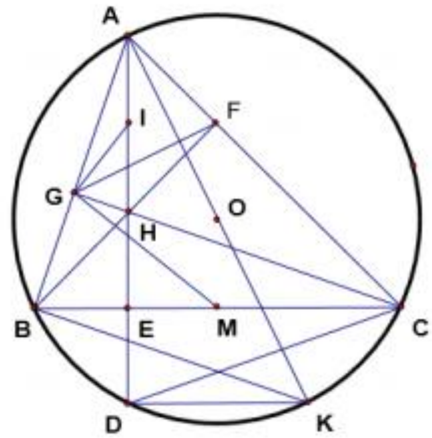
Bài 1



$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 16 \Rightarrow AC = 4(cm)$

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \dfrac{12}{5}(cm)$

Bài 2



a) Chứng minh tứ giác $AFHG$ và $BGFC$ nội tiếp.

Ta có:

$AGH = 90^o (gt)$

$AFH = 90^o (gt)$

$AGH + AFH = 180^o$

$\Rightarrow AFHG$ là tứ giác nội tiếp

Ta có: $BGC = BFC = 90^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BGFC$ nội tiếp (Vì tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0)

b) Gọi I và M lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AFHG và BGFC. Chứng minh MG là tiếp tuyến của đường tròn tâm (I).

$IGA = IAG$ (ΔIAG cân tại I) (1)

$GBM = BGM$ (ΔMGB cân tại M) (2)

$IAG + GBM = 90^o$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow IGA + BGM = 90^o$

$\Rightarrow IGM = 90^o \Rightarrow MG \perp IG \Rightarrow MG$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm I

c) Gọi D là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn tâm O. Chứng minh: $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2$

Kẻ đường kính AK của đường tròn tâm O

$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = AB^2 + DC^2$ (4)

ΔABK vuông tại B

$\Rightarrow AB^2 + BK^2 = AK^2 = 4R^2$ (5)

Tứ giác $BCKD$ là hình thang (BC song song DK do cùng vuông góc với AD) (6)

Tứ giác $BCKD$ nội tiếp đường tròn (O) (7)

Từ (6), (7) $\Rightarrow BCKD$ là hình thang cân.

$\Rightarrow DC = BK$ (8)

Từ (4), (5), (8) $\Rightarrow EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2$

Câu 227.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Long An 2014 – 2015]**

Bài 1: Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao ($H \in BC$) có $AH = 6\text{cm}$; $HC = 8\text{cm}$. Tính độ dài AC, BC và AB.

Bài 2: Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm S nằm ngoài đường tròn (O). Từ S kẻ hai tiếp tuyến SA và SB với đường tròn (O). (A và B là hai tiếp điểm)

a) Chứng minh tứ giác $SAOB$ nội tiếp và SO vuông góc AB.

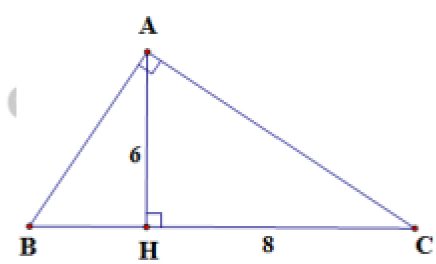
b) Vẽ đường thẳng a đi qua S và cắt (O) tại hai điểm M và N (với a không đi qua tâm O, M nằm giữa S và N). Gọi H là giao điểm của SO và AB; I là trung điểmcủa MN. Hai đường thẳng OI và AB cắt nhau tại E.

+) Chứng minh: $OI.OE = R^2$

+) Cho $SO = 2R$ và $MN = R\sqrt{3}$. Hãy tính SM theo R.

Hướng dẫn

Bài 1.



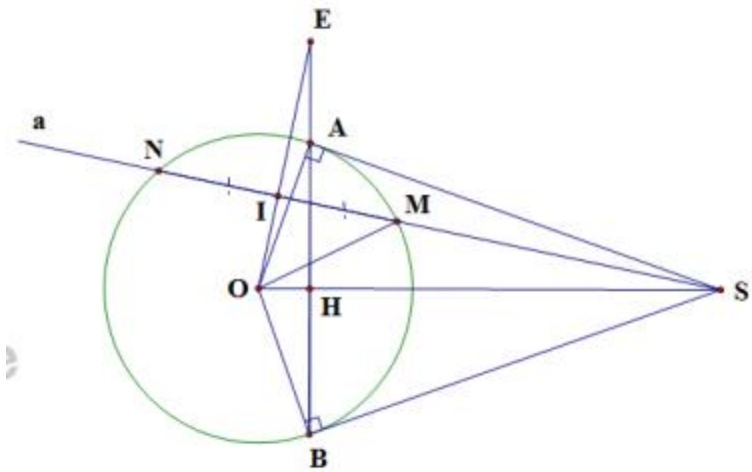
Ta có: $AC^2 = AH^2 + HC^2$

$\Rightarrow AC^2 = 100 \Rightarrow AC = 10(cm)$

Mà $AC^2 = BC.HC \Rightarrow BC = \dfrac{CA^2}{HC} = 12,5(cm)$

$AB.AC = AH.BC \Rightarrow AB = \dfrac{AH.BC}{AC} = 7,5(\text{cm})$

Bài 2



a) Chứng minh tứ giác $SAOB$ nội tiếp và SO vuông góc AB.

Chứng minh tứ giác $SAOB$ nội tiếp. (0,5)

SA và SB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow SAO = SBO = 90^o$

$\Rightarrow SAO + SBO = 180^o$

$\Rightarrow$Tứ giác $SAOB$ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh SO vuông góc AB. (0,5)

SA và SB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) $O \Rightarrow SA = SB$

Mà $OA = OB = R$

$\Rightarrow SO$ là đường trung trực AB

$\Rightarrow SO$ vuông AB

b)

+) Chứng minh: $\mathbf{OI = OE = R^2}$ (1,0)

ΔAOI vuông tại A có AH là đường cao

$\Rightarrow OA^2 = OH.OS = R^2$ (1)

I là trung điểm MN ,MN không qua $O \Rightarrow OI$ vuông MN

Xét ΔOHE vuông tại H và ΔOIS vuông tại I có:

EOH chung

$\Delta\ OHE \backsim \Delta OIS(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{OE}{OS} = \dfrac{OH}{OI} \Rightarrow OI.OE = OH.OS(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $OI.OE = R^2$

+) Cho $SO = 2R$ và $MN = R\sqrt{3}$. Hãy tính SM theo R.

ΔOIM vuông tại I $\Rightarrow OI=\sqrt{OM^2-IM^2}=\dfrac{R}{2}$

ΔOIS vuông tại I $\Rightarrow SI=\sqrt{SO^2-OI^2}=\sqrt{4R^2-\dfrac{R^2}{4}}=\dfrac{R\sqrt{15}}{2}$

$SM=SI-IM=\dfrac{R\sqrt{15}}{2}-\dfrac{R\sqrt{3}}{2}=\dfrac{R}{2}(\sqrt{15}-\sqrt{3})$

Câu 228.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Long An 2015 – 2016]**

Bài 1: Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao ($H\in BC$) có $BC=10\text{cm}$, $AC=8\text{cm}$. Tính độ dài AB, BH và số đo góc C (số đo góc C làm tròn đến độ).

Bài 2: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm C trên đường thẳng AB sao cho B nằm giữa A, C. Kẻ tiếp tuyến CK với nửa đường tròn tâm O (K là tiếp điểm), tia CK cắt tia tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn tâm O tại D (tia tiếp tuyến Ax nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn tâm O).

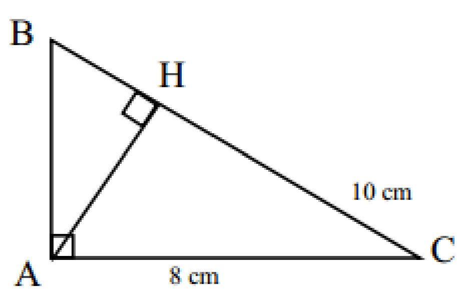
a) Chứng minh tứ giác $AOKD$ là tứ giác nội tiếp. Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AOKD$.

b) Chứng minh: $CO.CA=CK^2+CK.DK$

c) Kẻ $ON\perp AB$ thuộc đoạn thẳng CD). Chứng minh $\dfrac{AD}{DN}-\dfrac{DN}{CN}=1$

Hướng dẫn

Bài 1:



*** Tính** AB **:**

Áp dụng định lí py-ta-go vào tam giác vuông ABC:

$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow AB^2=BC^2-AC^2=10^2-8^2=36$

Vậy $AB=\sqrt{36}=6(cm)$

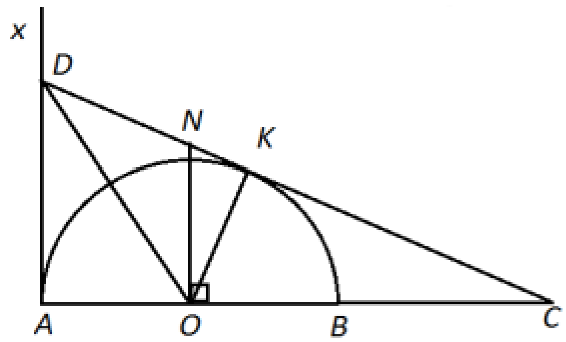
*** Tính** BH **:** Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông ABC**:**

$AB^2=BC.BH\Rightarrow BC=\dfrac{AB^2}{BC}=\dfrac{6^2}{10}=3,6(cm)$

*** Tính C :**

$$\sin\ C = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} \Rightarrow C \approx 37^o$$

Bài 2:



a) Chứng minh tứ giác $AOKD$ là tứ giác nội tiếp. Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AOKD$.

AD là tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm O $\Rightarrow DAO = 90^O$

CK là tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm O $\Rightarrow DKO = 90^o$

Xét tứ giác $AOKD$, ta có:

$DAO + DKO = 180^o$

Vậy tứ giác $AOKD$ là tứ giác nội tiếp.

Tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AOKD$ là trung điểm của đoạn DO.

b) Chứng minh: $\mathbf{CO.CA = CK^2 + CK.DK}$

Xét ΔCOK và ΔCDA có: $CKO = CAD = 90^0$ (gt)

Góc C chung

$\Delta COK \backsim \Delta CDA$ $(g-g)$

$$\Rightarrow \frac{CO}{CD} = \frac{CK}{CA} \Rightarrow CO.CA = CK.CD$$

$$\Rightarrow CO.CA = CK.(CK + DK) = CK^2 + CK, DK$$

c) Kẻ $ON \perp AB$ (N thuộc đoạn thẳng CD). Chứng minh: $\dfrac{AD}{DN} - \dfrac{DN}{CN} = 1$

Ta có: $ON // DA$ (cùng vuông góc với AB)

Góc $ADO = DON$ (so le trong)

Mặt khác góc $ADO = ODN$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Vậy $DON = ODN \Rightarrow \Delta DON$ cân tại N $\Rightarrow NO = ND$

ΔCAD có $ON // AD$ nên $\Delta CAD \backsim \Delta CON \Rightarrow \dfrac{CD}{CN} = \dfrac{AD}{ON}$

$\dfrac{CN + DN}{CN} = \dfrac{AD}{DN}$ (Do DN=ON) $\Rightarrow 1 + \dfrac{DN}{CN} = \dfrac{AD}{DN} \Rightarrow \dfrac{AD}{DN} - \dfrac{DN}{CN} = 1$

(đpcm)

Câu 229.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Nam Định 2013 – 2014]**

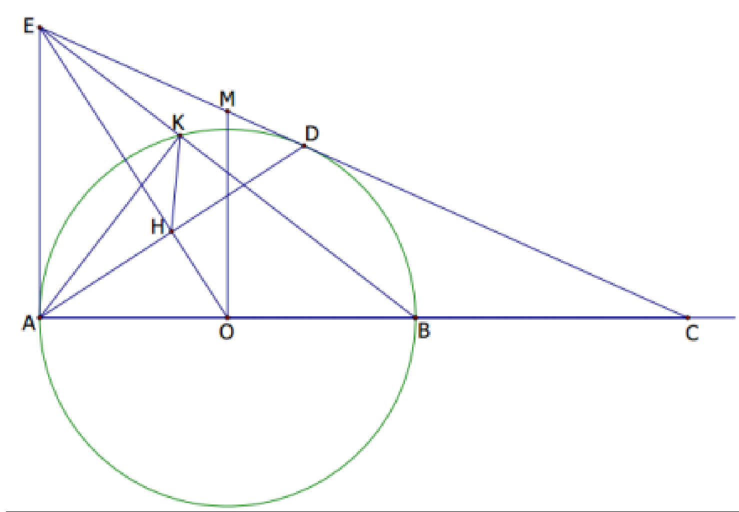
Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C (C không trùng với B). Kẻ tiếp tuyến CD với đường tròn (O) (D là tiếp điểm), tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng CD tại E. Gọi H là giao điểm của AD và OE, K là giao điểm của BE với đường tròn (O) (K không trùng với B).

a) Chứng minh: $AE^2 = EK.\mathrm{EB}$.

b) Chứng minh 4 điểm B, O, H, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt CE tại M. Chứng minh $\dfrac{AE}{EM} - \dfrac{EM}{CM} = 1$

Hướng dẫn



a) Chứng minh $AE^2 = EK.EB$

+Chỉ ra ΔAEB vuông tại A (gt AE là tiếp tuyến của (O))

+Chỉ ra $AKB = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

suy ra AK là đường cao của tam giác vuông AEB.

+Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông AEB ta có: $AE^2 = EK.EB$

b) Chứng minh 4 điểm B, O, H, K cùng thuộc một đường $tr?n$.

+Chỉ ra tứ giác $AHKE$ nội tiếp:

Ta có: EO là đường trung trực của đoạn thẳng AD (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Nên ta có: EO vuông góc với AD nên $EHA = 90^o$

Ta lại có $EKA = 90^o$

Nên suy ra tứ giác $AHKE$ nội tiếp $\Rightarrow EHK = EAK$

+Chỉ ra góc $EBA = EAK$ (do cùng phụ với AEB)

+Suy ra tứ giác $BOHK$ nội tiếp suy ra 4 điểm B, O, H, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt CE tại M. Chứng minh $\frac{AE}{EM} - \frac{EM}{CM} = 1$

+Chỉ ra ΔOEM cân tại M: do có góc $EOM = MEO$ (vì cùng bằng AEO)

suy ra $ME = MO$.

+Có OM và AE cùng vuông góc với AB nên $OM // AE$, áp dụng định lý Ta-lét trong ΔCEA ta có: $\frac{CE}{CM} = \frac{AE}{OM}$

Ta có: $\frac{CE}{CM} = \frac{AE}{OM} \Rightarrow \frac{CE - CM}{CM} = \frac{AE - OM}{OM} \Rightarrow \frac{EM}{CM} = \frac{AE}{OM} - 1 \Rightarrow \frac{AE}{OM} - \frac{EM}{CM} = 1$

Mà $ME = MO$ nên suy ra $\frac{AE}{EM} - \frac{EM}{CM} = 1$

Câu 230.(Thầy Nguyễn Chí Thành) **[Nam Định 2015 – 2016]**

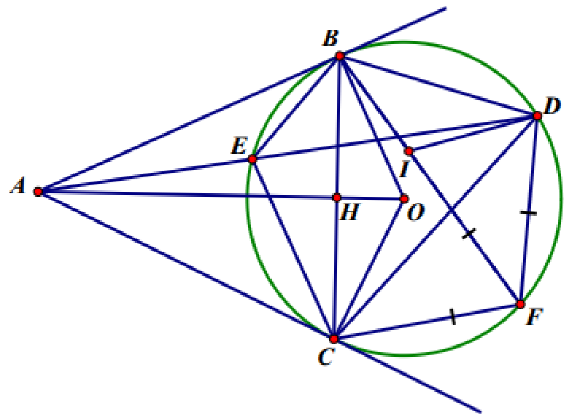
Cho đường tròn tâm O, điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AED tới (O) (B, C là các tiếp điểm; E nằm giữa A và D). Gọi H là giao điểm của AO và BC.

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AB^2 = AE.AD$ và AE .AD= AH . AO

c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔBCD. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp ΔICD thuộc (O).

Hướng dẫn



a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp

+ Ta có AB là tiếp tuyến của (O)$\Rightarrow AB \perp OB \Rightarrow ABO = 90^o$

+ Ta có AC là tiếp tuyến của (O)$\Rightarrow AC \perp OC \Rightarrow ACO = 90^o$

$\Rightarrow ABO + ACO = 90^o + 90^o = 180^o$

+ Vậy tứ giác $ABOC$ là một tứ giác nội tiếp (vì có tổng 2 góc đối bằng 180^0)

b) Chứng minh $\mathbf{AB^2 = AE.AD}$ và $AE.AD = AH.AO$

+ Ta có góc $ABE = ADB$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn cung EB của (O))

+ Xét $\Delta\ ABE$ và $\Delta\ ADB$ có: BAE chung và góc $ABE = ADB \Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta\ ADC$ (g. g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE (1)$

+ Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên suy ra $AB = AC$ và AO là tia phân giác của BAC.

Suy ra $\Delta\ ABC$ cân tại A có AO là đường phân giác đồng thời là đường cao $\Rightarrow OA \perp BC$.

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông ABO ta có $AB^2 = AH.AO$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB^2 = AE.AD$ và $AE.AD = AH.AO$. (đpcm)

b) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp ΔICD thuộc (O)

+ Gọi F là giao điểm thứ 2 của tia BI với đường tròn (O). Suy ra góc $CBF = DBF \Rightarrow CF = DF$ (theo hệ quả của góc nôi tiếp: 2 góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau). $\Rightarrow FC = FD$ (3)

+ Ta có FID là góc ngoài tại đỉnh I của $\Delta\ BID$. Suy ra góc $FID = FBD + BDI$

Mà góc $BDI = IDC$ (vì ID là tia phân giác của BDC); góc $FBD = FBC$ (vì IB là tia phân giác của DBC)

Góc $FBC = FDC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CF của (O)).

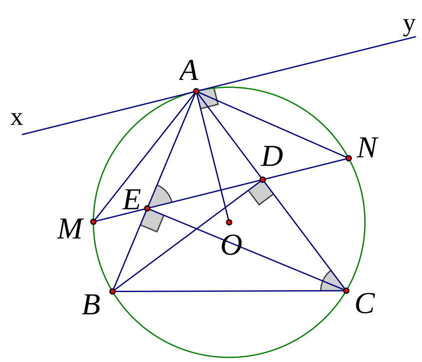
+ Suy ra góc $FID = IDC + CDF + FDI \Rightarrow \Delta\ IDF$ cân tại F $\Rightarrow$ $FD = FI$. (4)

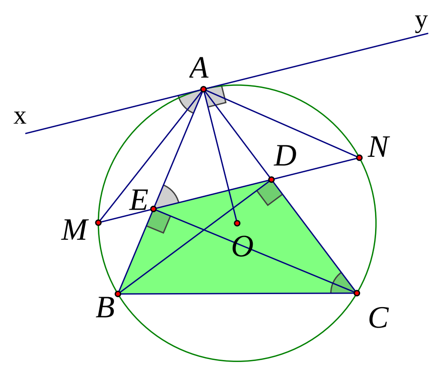
+ Từ (3) và (4) suy ra $FD = FI = FC$. Suy ra F là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔICD (đpcm).

Câu 231.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có các đường cao BD và CE. Đường thẳng DE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại hai điểm M và N.

1. Chứng minh: $BEDC$ nội tiếp.
2. Chứng minh: góc $DEA = ACB$.
3. Chứng minh: DE // với tiếp tuyến tai A của đường tròn ngoại tiếp tam giác.
4. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.Chứng minh: OA là phân giác của góc MAN.
5. Chứng tỏ: $AM^2 = AE.AB$.

Hướng dẫn





1) Chỉ ra $BEC = BDE = 90^0$

2) Chỉ ra $DEA = ACB$ (cùng phụ BED)

3) Gọi tiếp tuyến tại A của (O) là đường thẳng xy.

Do xy.là tiếp tuyến, AB là dây cung nên $xAB = \frac{1}{2}sđ\,AB = ACB = AED \Rightarrow xy//DE$.

4) Chứng minh OA là phân giác của MAN.

Do $xy//DE \Rightarrow xy//MN$ mà $OA \perp xy \Rightarrow OA \perp MN \Rightarrow OA$ là đường trung trực của MN.(Đường kính vuông góc với một dây)$\Rightarrow \Delta AMN$ cân ở $A \Rightarrow AO$ là phân giác của góc MAN.

5) Chứng minh : $AM^2 = AE.AB$.

Do ΔAMN cân ở $A \Rightarrow AM = AN \Rightarrow AM = AN \Rightarrow MBA = AMN$ (Góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$$\Rightarrow \Delta MAE \backsim \Delta BAM\,(g.g) \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{AE}{MA} \Rightarrow AM^2 = AE.AB$$

Câu 232.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) đường kính AC. Trên đoạn OC lấy điểm B và vẽ đường tròn tâm O', đường kính BC. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Từ M vẽ dây cung $DE \perp AB$; DC cắt đường tròn tâm O' tại I.

1) Tứ giác $ADBE$ là hình gì?

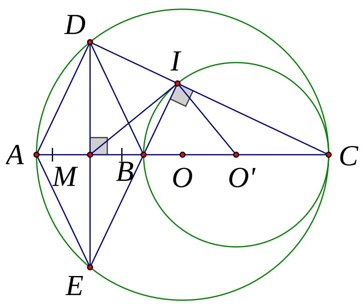
2) Chứng minh $DMBI$ nội tiếp.

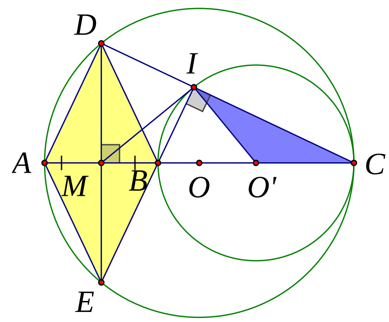
3) Chứng minh $B; I; E$ thẳng hàng và $MI = MD$.

4) Chứng minh $MC.DB = MI.DC$

5) Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O').

Hướng dẫn





1) Ta có: $MA = MB, AB \perp DE \Rightarrow DM = ME \Rightarrow ADBE$ là hình bình hành.

Mà $BD = BE$ (AB là đường trung trực của DE) nên $ADBE$ là hình thoi.

2) Chứng minh $DMBI$ nội tiếp .

Ta có: BC là đường kính, $I \in (O') \Rightarrow BID = 90^0$ mà góc $DMB = 90^0$ (gt)

$\Rightarrow BID + DMB = 180^0 \Rightarrow$ $DMBI$ nội tiếp

3) Chứng minh $B; I; E$ thẳng hàng .

Do $AEBD$ là hình thoi $BE // AD$ mà $AD \perp DC$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BE \perp DC$.

Mặt khác $BI \perp DC \Rightarrow B, E, I$ thẳng hàng.

• Chứng minh $MI = MD$:

Do M là trung điểm DE mà ΔEID vuông ở I nên MI là đường trung tuyến của tam giác vuông DEI suy ra $MI = MD$.

4) Chứng minh $MC.DB = MI.DC$.

Xét ΔMCI và ΔDCB có: góc C chung; $BDI = IMB$ (cùng chắn cung MI do $DMBI$ nội tiếp)

Nên $\Delta MCI \backsim \Delta DCB (g.g) \Rightarrow MC.DB = MI.DC$

5) Chứng minh MI là tiế tuyếp của (O') .

Ta có $\Delta O'IC$ cân nên $O; IC = O'CI$ mà tứ giác $MBID$ nội tiếp nên $MIB = MDB$ (cùng chắ cung MB)

ΔBDE cân ở $B \Rightarrow MDB = MEB$.

Do tứ giác $MECI$ nội tiếp $\Rightarrow MEB = MCI$ (cùng chắ cung MI)

Từ đó suy ra góc $O'IC = MIB \Rightarrow MIB + BIO' = O'IC + BIO' = 90^0$

Vậy $MI \perp O'I$ tại I nên MI là tiếp tuyến của (O').

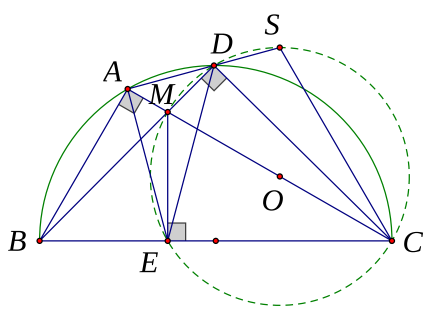
Câu 233.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có góc $A = 90^0$. Trên AC lấy điểm M sao cho $AM < MC$. Vẽ đường tròn tâm O đường kính CM; đường thẳng BM cắt (O) tại D; AD kéo dài cắt (O) tại S.

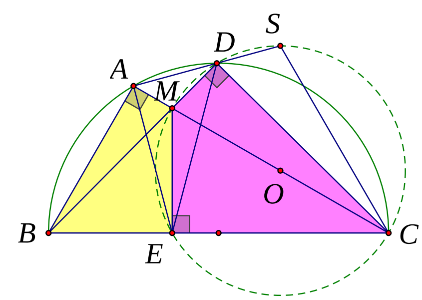
1) Chứng minh $BADC$ nội tiếp.

2) BC cắt (O) ở E. Chứng minh ME là phân giác của góc AED.

3) Chứng minh CA là phân giác của góc BCS.

Hướng dẫn





1) Chứng minh $BADC$ nội tiếp:

Chỉ ra $BAC = BDC = 90^0$.

2) Chứng minh ME là phân giác của góc AED.

• Chỉ ra $AMEB$ nội tiếp.

Góc $ABM = AEM$ (cùng chắn cung AM)

Góc $ABM = ACD$ (Cùng chắn cung MD)

Góc $ACD = DEM$ (Cùng chắn cung MD) nên $AEM = MED$

3) Chứng minh CA là phân giác của góc BCS.

Góc $ACB = ADB$ (Cùng chắn cung AB)

Góc $ADB = DMS + DSM$ (góc ngoài ΔDMS)

Mà góc $DSM = DCM$ (Cùng chắn cung MD); $DMS = DCS$ (Cùng chắn cung DS)

$\Rightarrow MDS + DSM = SDC + DCM = SCA \Rightarrow ADB = SCA$ (đpcm)

Câu 234.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có góc $A = 90^0$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM > MC$. Dựng đường tròn tâm O đường kính MC ; đường tròn này cắt BC tại E. Đường thẳng BM cắt (O) tại D và đường thẳng AD cắt (O) tại S.

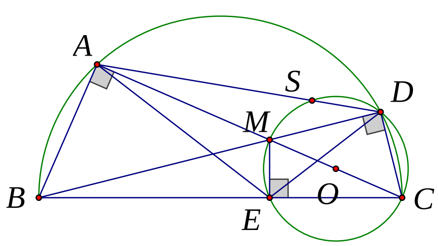
1) Chứng minh $ADCB$ nội tiếp.

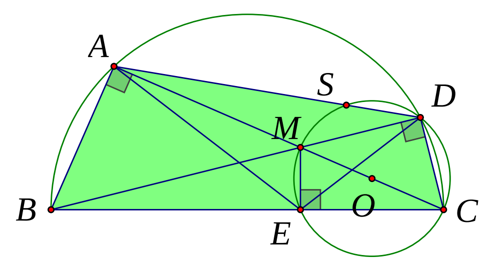
2) Chứng minh ME là phân giác của góc AED.

3) Chứng minh góc $ASM = ACD$.

5) Chứng minh ba đường thẳng $BA; EM; CD$ đồng quy.

Hướng dẫn





1) Chứng minh $ADCB$ nội tiếp: Chỉ ra $MDC = BDC = 90^0$

2) Chứng minh ME là phân giác của góc AED.

Ta có: $ABD = ACD$ (Cùng chắn cung AD)

- Do $MECD$ nội tiếp nên $MCD = MED$ (Cùng chắn cung MD)
- Do MC là đường kính ; $E \in (O) \Rightarrow MEC = 90^0 = MEB$

$\Rightarrow ABEM$ nội tiếp nên $MEA = ABD \Rightarrow$ $MEA = MED$ (đpcm).

3) Chứng minh góc $ASM = ACD$.

Ta có $ASM = SMD + SDM$ (Góc ngoài ΔSMD)

Mà góc $SMD = SCD$ (Cùng chắn cung SD) và Góc $SDM = SCM$ (Cùng chắn cung SM)

$\Rightarrow SMD + SDM = SCD + SCM = MCD$. Vậy góc $ASM = ACD$.

4) Chứng minh $AB; ME; CD$ đồng quy.

Gọi giao điểm $AB; CD$ là K. Ta chứng minh 3 điểm $K; M; E$ thẳng hàng.

- Do $CA \perp AB$ (gt); $BD \perp DC$ (cmt) và AC cắt BD ở $M \Rightarrow M$ là trực tâm của tam giác KBC

$\Rightarrow KM$ là đường cao thứ 3 nên $KM \perp BC$. Mà $ME \perp BC$ (cm$t$) nên $K; M; E$ thẳng hàng (đpcm).

Câu 235.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có 3 góc nhọn và $AB < AC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Kẻ đường cao AD đường kính AA'. Gọi E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ B và C xuống đường kính AA'.

1) Chứng minh $AEDB$ nội tiếp.

2) Chứng minh $DB.A'A = AD.A'C$.

3) Chứng minh $DE \perp AC$.

4) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh $MD = ME = MF$.

Hướng dẫn

1) Chứng minh $AEDB$ nội tiếp: Chỉ ra $AEB = ADB = 90^0$.

2) Chứng minh $DB.A'A = AD.A'C$.

Chỉ ra $\Delta DBA \backsim \Delta A'CA$ (góc $ABC = AA'C$) nên $DB.A'A = AD.A'C$.

3) Chứng minh $DE \perp AC$.

Do $ABDE$ nội tiếp nên góc $EDC = BAE$ (Cùng bù với góc BDE). Mà góc $BAE = BCA'$ (cùng chắn cung BA') suy ra góc $CDE = DCA' \Rightarrow DE // A'C$. Mà góc $ACA' = 90^0 \Rightarrow DE \perp AC$

4) Chứng minh $MD = ME = MF$.

• Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow N$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABDE$. Do $M; N$ là trung điểm $BC, AC \Rightarrow MN // AC$ (Tính chất đường trung bình)

Do $DE \perp AC \Rightarrow MN \perp DE$ (Đường kính đi qua trung điểm một dây…)

$\Rightarrow MN$ là đường trung trực của $DE \Rightarrow ME = MD$.

• Gọi I là trung điểm $AC \Rightarrow MI // AB$ (tính chất đường trung bình)

$\Rightarrow A'BC = A'AC$ (Cùng chắn cung A’C).

Do $ADFC$ nội tiếp $\Rightarrow FAC = FDC$ (Cùng chắn cung FC)

$\Rightarrow A'BC = FDC \Rightarrow DF // BA'$ mà $ABA' = 90^0 \Rightarrow MI \perp DF$.

Đường kính $MI \perp DF \Rightarrow MI$ là đường trung trực của $DF \Rightarrow MD = MF$.

Vậy $MD = ME = MF$.

Câu 236.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC. Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến BC và AC. P là trung điểm $AB; Q$ là trung điểm FE.

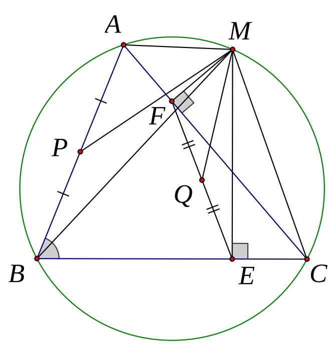
1) Chứng minh $MFEC$ nội tiếp.

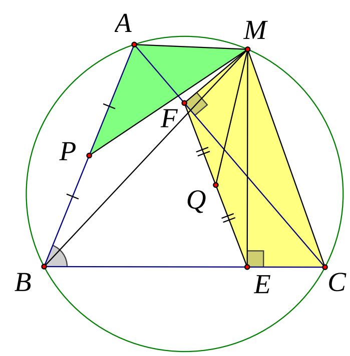
2) Chứng minh $BM.EF = BA.EM$.

3) Chứng minh $\Delta AMP \backsim \Delta FMQ$.

4) Chứng minh $PQM = 90^0$.

Hướng dẫn





1) Chứng minh $MFEC$ nội tiếp: Chỉ ra $MFC = MEC = 90^0$

2) Chứng minh $BM.EF = BA.EM$.

Ta có góc $ABM = ACM$ (Vì cùng chắn cung AM)

Do $MFEC$ nội tiếp nên góc $ACM = FEM$ (Cùng chắn cung FM).

$\Rightarrow$Góc $ABM = FEM$. (1)

Ta lại có góc $AMB = ACB$ (Cùng chắn cung AB).

Do $MFEC$ nội tiếp nên góc $FME = FCM$ (Cùng chắn cung FE) .$\Rightarrow$Góc $AMB = FME$.(2)

Từ (1)và(2) suy ra $\Delta EFM \backsim \Delta ABM\,(g.g) \Rightarrow BM.EF = BA.EM$.

3) Chứng minh $\Delta AMP \backsim \Delta FMQ$.

Ta có $\Delta EFM \backsim \Delta ABM$ (theo c/m trên) $\Rightarrow \dfrac{AB}{FE} = \dfrac{AM}{MF}$ mà $AM = 2AP; FE = 2FQ$ (gt)

$\Rightarrow \dfrac{2AP}{2FQ} = \dfrac{AM}{MF} \Rightarrow \dfrac{AP}{FQ} = \dfrac{AM}{FM}$ và góc $PAM = MFQ$ (suy ra từ $\Delta EFM \backsim \Delta ABM$)

Suy ra $\Delta AMP \backsim \Delta FMQ\,(c.g.c)$

4) Chứng minh góc $PQM = 90^0$.

Do góc $AMP = FMQ \Rightarrow PMQ = AMF$ nên $\Delta PQM \backsim \Delta AFM \Rightarrow MQP = AFM = 90^0$

Câu 237.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) đường kính BC, điểm A nằm trên cung BC.Trên tia AC lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Dựng hình vuông $ABED$; AE cắt (O) tại điểm thứ hai F . Tiếp tuyến tại B cắt đường thẳng DE tại G .

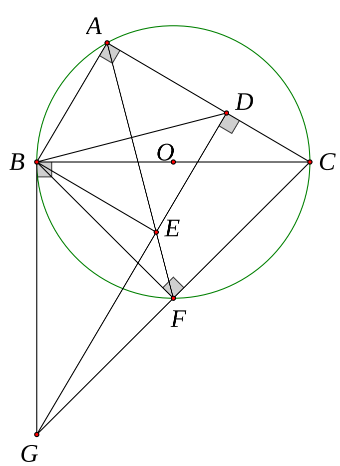
1) Chứng minh $BGDC$ nội tiếp. Xác định tâm I của đường tròn này.

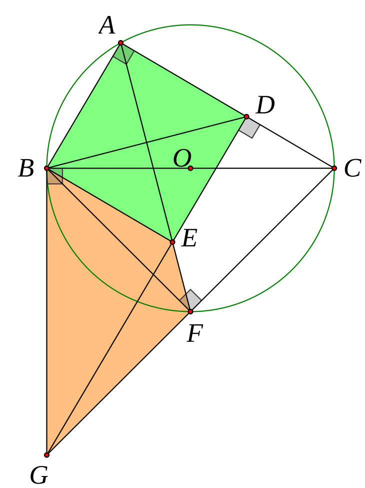
2) Chứng minh ΔBFC vuông cân và F là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

3) Chứng minh $GEFB$ nội tiếp.

4) Chứng minh $C; F; G$ thẳng hàng và G cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.Có nhận xét gì về I và F .

Hướng dẫn





1) Chứng minh $BGDC$ nội tiếp

Chỉ ra $GBC = GDC = 90^0$. Tâm I là trung điểm GC .

2) Chứng minh ΔBFC vuông cân

Góc $BCF = FAB$ (Cùng chắn cung BF) mà góc $FAB = 45^0$ (tính chất hình vuông)

Nên $BCF = 45^0$. Vì BC là đường kính nên $BFC = 90^0 \Rightarrow \Delta BFC$ vuông cân tại F .

• Chứng minh F là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD:

Ta chứng minh F cách đều các đỉnh $B; C; D$.

Do ΔBFC vuông cân nên $BC = FC$.

Xét hai tam giác FEB và FED có: EF chung; góc $BEF = FED = 45^0$; $BE = ED$ (hai cạnh của hình vuông $ABED$) $\Rightarrow \Delta BFE = \Delta EFD \Rightarrow BF = FD = DF$

3) Chứng minh $GEFB$ nội tiếp.

Do ΔBFC vuông cân ở F $\Rightarrow$ Cung $BF = FC = 90^0$ $\Rightarrow GBF = 45^0$ (Góc giữa tiếp tuyến BG và dây BF)

Mà góc $FED = 45^0$ (tính chất hình vuông)$\Rightarrow$Góc $FED = GBF = 45^0$.

Ta lại có góc $FED + FEG = 180^0 \Rightarrow GBF + FEG = 180^0 \Rightarrow$ $GEFB$ nội tiếp.

4) Chứng minh $C;F;G$ thẳng hàng

Do $GEFB$ nội tiếp $\Rightarrow BFG = BEG = 90^0$. Do ΔBFG vuông cân ở F nên $BFC = 90^0$

$\Rightarrow BFG + CFB = 180^0 \Rightarrow F,G,C$ thẳng hàng.

+ Do $GBC = GDC = 90^0$ $\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BGDC$ là $F \Rightarrow G$ nằn trên đường tròn ngoại tiếp ΔBCD

+ Dễ dàng chứng minh được $I \equiv F$.

Câu 238.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong (O). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn cắt nhau tại D. Từ D kẻ đường thẳng song song với AB, đường này cắt đường tròn ở E và F ,cắt AC ở I (E nằm trên cung nhỏ BC).

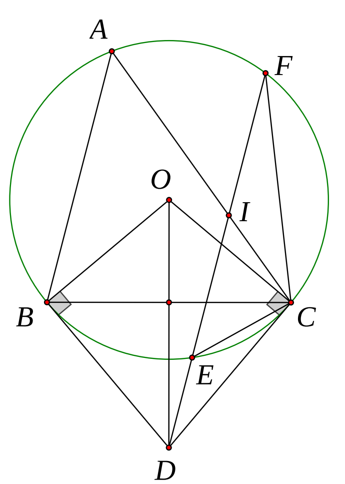
1) Chứng minh $BDCO$ nội tiếp.

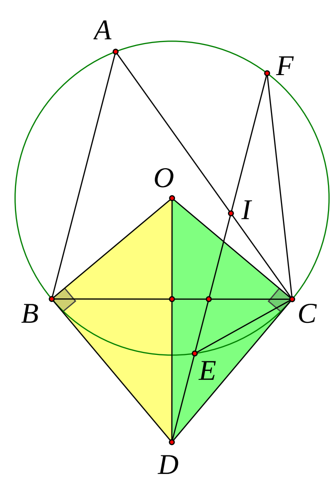
2) Chứng minh $DC^2 = DE.DF$.

3) Chứng minh $DOIC$ nội tiếp.

4) Chứng minh I là trung điểm FE.

Hướng dẫn





1) Chứng minh $BDCO$ nội tiếp: Chỉ ra $DBO = DCO = 90^0$

2) Chứng minh $DC^2 = DE.DF$:

Xét hai tam giác DEC và ΔDCF có:

Góc D chung;

$ECD=\frac{1}{2}sd\,EC$ (Góc giữa tiếp tuyến và một dây)

$EFC=\frac{1}{2}sd\,EC$ (Góc nội tiếp) $\Rightarrow ECD=DFC\Rightarrow \Delta DCE\backsim \Delta DFC\Rightarrow DC^2=DE.DF$

3) Chứng minh $DOIC$ nội tiếp.

Ta có: $BAC=\frac{1}{2}sd\,BC$ (Góc nội tiếp) (1)

$BOC=sd\,BC$ (Góc ở tâm); $OB=OC;DB=DC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau);

OD chung $\Rightarrow \Delta BOD=\Delta COD\Rightarrow BOD=COD$

$\Rightarrow DOC=\frac{1}{2}sd\,BC$ (2)

Từ (1)và (2) $\Rightarrow DOC=BAC$.

Do $DF//AB\Rightarrow BAC=DIC$ (Đồng vị) $\Rightarrow DOC=DIC$ $\Rightarrow DOIC$ nội tiếp.

4) Chứng minh I là trung điểm FE.

Do $DOIC$ nội tiếp $\Rightarrow$ góc $OID=OCD$ (cùng chắn cung OD)

Mà $OCD=90^0$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow OID=90^0\Rightarrow OI\perp ID\Rightarrow OI\perp FE$.

Bán kính OI vuông góc với dây cung $EF\Rightarrow I$ là trung điểm EF.

Câu 239.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O), dây cung AB. Từ điểm M bất kỳ trên cung $AB(M\ne A$ và $M\ne B)$,kẻ dây cung MN vuông góc với AB tại H. Gọi MQ là đường cao của ΔMAN.

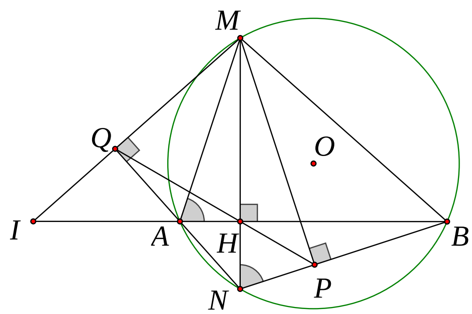
1) Chứng minh 4 điểm $A;M;H;Q$ cùng nằm trên một đường tròn.

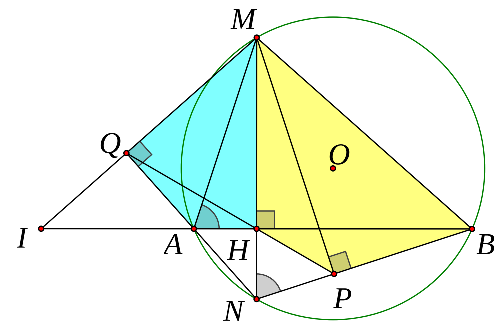
2) Chứng minh $NQ.NA=NH.NM$

3) Chứng minh MN là phân giác của góc BMQ.

4) Hạ đoạn thẳng MP vuông góc với BN. Xác định vị trí của M trên cung AB để $MQ.AN+MP.BN$ có giác trị lớn nhất.

Hướng dẫn





1) Chứng minh 4 điểm $A; M; H; Q$ cùng nằm trên một đường $tr?n$.

- Chỉ ra $AQM + AHM = 180^0$

2) Chứng minh $NQ.NA = NH.NM$: Chỉ ra $\Delta NQM \backsim \Delta NAH\left(g.g\right) \Rightarrow NQ.NA = NH.NM$

3) Chứng minh MN là phân giác của góc BMQ.

- Cách 1: Gọi giao điểm MQ và AB là I. Chứng minh tam giác MIB cân ở M
- Cách 2: Góc $QMN = NAH$ (Cùng phụ với góc ANH)

  Góc $NAH = NMB$ (Cùng chắn cung NB) (đpcm)

4) Xác định vị trí của M trên cung AB để $MQ.AN + MP.BN$ có giác trị lớn nhất.

Ta có :

$$2S_{\Delta MAN} = MQ.AN \ ; \ 2S_{\Delta MBN} = MP.BN$$

Suy ra $2S_{\Delta MAN} + 2S_{\Delta MBN} = MQ.AN + MP.BN$

Ta lại có: $2S_{DMAN} + 2S_{\Delta MBN} = 2(S_{\Delta MAN} + S_{\Delta MBN}) = 2S_{AMBN} = 2\dfrac{AB.MN}{2} = AB.\text{MN}$

Vậy: $MQ.AN + MP.BN = AB.MN$

Mà AB không đổi nên tích $AB.MN$ lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ là đường kính

$\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB .

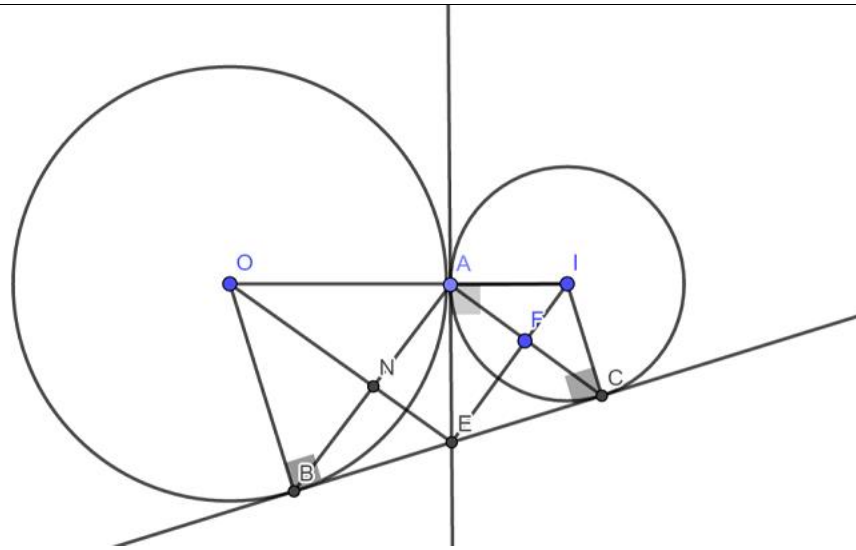
Câu 240.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $\left(O;R\right)$ và $\left(I;r\right)$ tiếp xúc ngoài tại A $\left(R > r\right)$. Dựng tiếp tuyến chung ngoài BC, B nằm trên đường tròn tâm O và C nằm trên đường tròn tâm $\left(I\right)$. Tiếp tuyến BC cắt tiếp tuyến tại A của hai đường tròn ở E .

1) Chứng minh ΔABC vuông ở A .

2) OE cắt AB ở N ; IE cắt AC tại F . Chứng minh $N; E; F; A$ cùng nằm trên một đường tròn .

3) Chứng tỏ : $BC^2 = 4.Rr$

4) Tính diện tích tứ giác $BCIO$ theo $R;r$.



Hướng dẫn

1) Chứng minh ΔABC vuông ở A:

Do BE và AE là hai tiếp tuyến cắt nhau nên $AE = BE$.

Tương tự $AE = EC \Rightarrow AE = EB = EC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông ở A .

2) Chứng minh $N;E;F;A$ cùng nằm trên một đường tròn .

-Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì EO là phân giác của tam giác cân AEB

Nên EO là đường trung trực của $AB \Rightarrow OE \perp AB$ hay góc $ENA = 90^0$

Tương tự góc $EFA = 90^0 \Rightarrow ENA + EFA = 180^0$ mà đây là 2 góc đối nhau nên tứ giác $ANEF$ nội tiếp, suy ra 4 điểm $N;E;F;A$ cùng nằm trên một đường tròn

3) Chứng tỏ : $BC^2 = 4.Rr$

Ta có tứ giác $FANE$ có 3 góc vuông (cmt) $\Rightarrow FANE$ là hình vuông $\Rightarrow \Delta OEI$ vuông ở E và $EA \perp OI$ (tính chất tiếp tuyến). Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có:

$AH^2 = OA.AI$ (bình phương đường cao bằng tích hai hình chiếu)

Mà $AH = \frac{BC}{2}$ và $OA = R; AI = r \Rightarrow \frac{BC^2}{4} = R.r \Rightarrow BC^2 = Rr$.

4) $S_{BCIO} = ?$

Ta có $BCIO$ là hình thang vuông $\Rightarrow S_{BCIO} = \frac{OB + IC}{2}.BC \Rightarrow S \frac{(r+R)\sqrt{rR}}{2}$

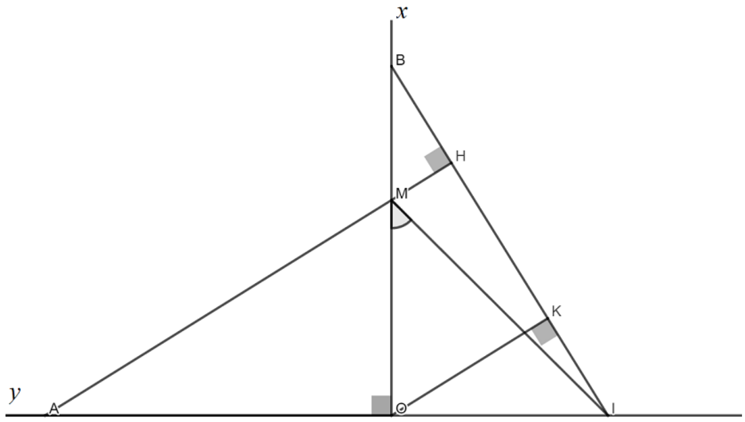
Câu 241.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Trên hai cạnh góc vuông xOy lấy hai điểm A và B sao cho $OA = OB$. Một đường thẳng qua A cắt OB tại M (M nằm trên đoạn OB). Từ B hạ đường vuông góc với AM tại H, cắt AO kéo dài tại I.

1) Chứng minh $OMHI$ nội tiếp.

2) Tính góc OMI.

3) Từ O vẽ đường vuông góc với BI tại K. Chứng minh $OK = KH$.

4) Tìm tập hợp các điểm K khi M thay đổi trên OB.



Hướng dẫn

1) Chứng minh $OMHI$ nội tiếp.

Sử dụng tổng hai góc đối.

2) Tính góc OMI.

Do $OB \perp AI; AH \perp AB$ (gt) và $OB \cap AH = \{M\}$

Nên M là trực tâm của tam giác ABI.

$\Rightarrow IM$ là đường cao nên $MI \perp AB$.

$\Rightarrow OIM = ABO$ (Góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Mà ΔOAB vuông có $OA = OB \Rightarrow \Delta OAB$ vuông cân ở O.

$\Rightarrow OBA = 45^0 \Rightarrow OMI = 45^0$

3) Chứng minh $OK = KH$.

Ta có $OHK = HOB + HBO$ (góc ngoài ΔOHB)

Do $AOHB$ nội tiếp (vì góc $AOB = AHB = 90^0$)

$\Rightarrow$Góc $HOB = HAB$ (Cùng chắn cung HB) và $OBH = OAH$ (cùng chắn cung OH)

$\Rightarrow OHK = HAB + HAO = OAB = 45^0$.

$\Rightarrow \Delta OKH$ vuông cân ở $K \Rightarrow OH = OK$.

4) Tìm tập hợp các điểm K khi M thay đổi trên OB.

Do $OK \perp KB \Rightarrow OKB = 90^0; OB$ không đổi khi M di động $\Rightarrow K$ nằm trên đường tròn đường kính OB

Khi $M \equiv O$ thì $K \equiv O$ Khi $M \equiv B$ thì K là điểm chính giữa cung AB .Vậy quỹ tích điểm K là $\frac{1}{4}$ đường tròn đường kính OB .

Câu 242.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) đường kính AB và dây CD vuông góc với AB tại F . Trên cung BC lấy điểm M . Nối A với M cắt CD tại E .

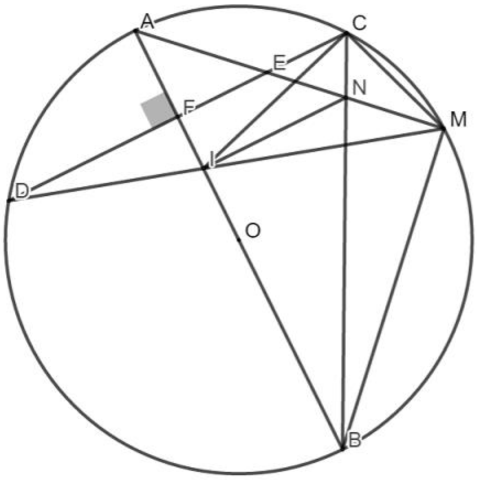
1) Chứng minh AM là phân giác của góc CMD .

2) Chứng minh $EFBM$ nội tiếp.

3) Chứng minh: $AC^2 = AE.AM$.

4) Gọi giao điểm CB với AM là $N; MD$ với AB là I . Chứng minh $NI//CD.$

5) Chứng minh N là tâm đường tròn nội tiếp ΔCIM .



Hướng dẫn

1) Chứng minh AM là phân giác của góc CMD .

Do $AB \perp CD \Rightarrow AB$ là phân giác của tam giác cân $COD \Rightarrow COA = AOD$.

Các góc ở tâm AOC và AOD bằng nhau nên các cung bị chắn bằng nhau

$\Rightarrow$ cung $AC = AD$ $\Rightarrow$ các góc nội tiếp chắn các cung này bằng nhau. Vậy $CMA = AMD$.

2) Chứng minh $EFBM$ nội tiếp.

Ta có $AMB = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$EFB = 90^0$ (Do $AB \perp EF$)

$\Rightarrow AMB + EFB = 180^0$ (đpcm)

3) Chứng minh: $AC^2 = AE.AM$.

Chứng minh $\Delta ACE \backsim \Delta AMC$ (A chung;góc $ACD = AMD$ cùng chắn cung AD và $AMD = CMA$ (cmt)

$\Rightarrow ACE = AMC$).

4) Chứng minh $NI//CD.$

Do cung $AC = AD \Rightarrow CBA = AMD$ (Góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau) hay $NMI = NBI \Rightarrow M$ và B cùng làm với hai đầu đoạn thẳng NI những góc bằng nhau $\Rightarrow MNIB$ nội tiếp

$\Rightarrow NMB + NIM = 180^0$ mà $NMB = 90^0$ (cmt)$\Rightarrow NIB = 90^0$ hay $NI \perp AB$.

Mà $CD \perp AB$ (gt)$\Rightarrow NI // CD$.

5) Chứng tỏ N là tâm đường tròn nội tiếp ΔICM .

Ta phải chứng minh N là giao điểm 3 đường phân giác của ΔCIM .

- Theo cmt ta có MN là phân giác của CMI
- Do $MNIB$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow NIM = NBM$ (cùng chắn cung MN)

Góc $MBC = MAC$ (cùng chắn cung CM)

Ta lạ có $CAN = 90^0$ (góc nội tiếp $ACB = 90^0$); $NIA = 90^0$ (vì $NIB = 90^0$)

$\Rightarrow ACNI$ nội tiếp $\Rightarrow CAN = CIN$ (cùng chắn cung CN) $\Rightarrow CIN = NIM \Rightarrow IN$ là phân giác CIM .

Vậy N là tâm đường tròn nội tiếp ΔCIM .

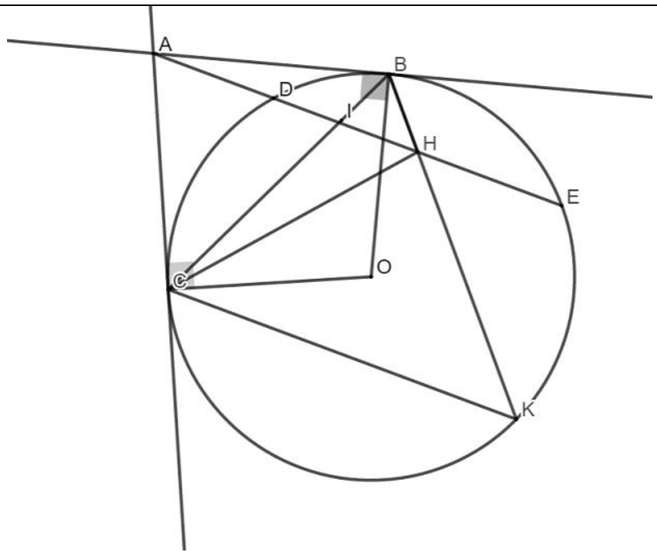
Câu 243.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến $AB; AC$ và cát tuyến ADE . Gọi H là trung điểm DE .

1) Chứng minh $A; B; H; O; C$ cùng nằm trên 1 đường tròn.

2) Chứng minh HA là phân giác của góc BHC .

3) Gọi I là giao điểm của BC và DE . Chứng minh $AB^2 = AI.AH$.

4) BH cắt (O) ở K . Chứng minh $AE // CK$.



Hướng dẫn

1) Chứng minh: $A; B; O; C; H$ cùng nằm trên một đường tròn:

H là trung điểm $EB \Rightarrow OH \perp ED$ (đường kính đi qua trung điểm của dây …)$\Rightarrow AHO = 90^0$.

Mà $OBA = OCA = 90^0$ (Tính chất tiếp tuyến)$\Rightarrow A; B; O; H; C$ cùng nằm trên đường tròn đường kính OA.

2) Chứng minh HA là phân giác của góc BHC .

Do $AB;AC$ là 2 tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow \begin{cases} BAO = OAC \\ AB = AC \end{cases}$.

$\Rightarrow$ cung $AB = AC$ (hai dây bằng nhau của đường tròn đường kính OA)

mà $BHA = BOA$ (Cùng chắn cung AB) và $COA = CHA$ (cùng chắn cung AC) mà cung $AB = AC$

$\Rightarrow COA = BOH \Rightarrow CHA = AHB$ (đpcm)

3) Xét hai tam giác ABH và AIB có:

Góc A chung, $CBA = BHA$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow \Delta ABH \backsim \Delta AIB$. đpcm.

4) Chứng minh $AE//CK$.

Do góc $BHA = BCA$ (cùng chắn cung AB) và sđ $BKC = \frac{1}{2}$ Sđ BC (góc nội tiếp)

Sđ $BCA = \frac{1}{2}$ sđ BC (góc giữa tiếp tuyến và 1 dây cung)

$\Rightarrow BHA = BKC \Rightarrow CK//AB$

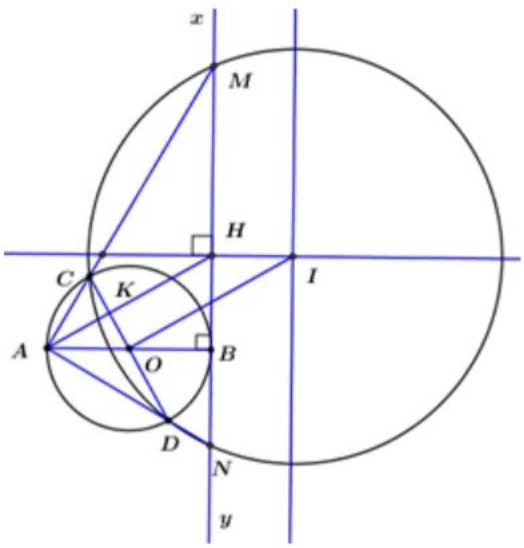
Câu 244.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) đường kính $AB = 2R$; xy là tiếp tuyến với (O) tại B. CD là 1 đường kính bất kỳ. Gọi giao điểm của $AC;AD$ với xy theo thứ tự là $M;N$.

1) Chứng minh $MCDN$ nội tiếp.

2) Chứng minh $AC.AM = AD.AN$.

3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MCDN$ và H là trung điểm MN . Chứng minh rằng $AOIH$ là hình bình hành.

4) Khi đường kính CD quay xung quanh điểm O thì I di động trên đường nào?



Hướng dẫn

1) Chứng minh $MCDN$ nội tiếp:

ΔAOC cân ở $O \Rightarrow OCA = CAO$; góc $CAO = ANB$ (cùng phụ với góc AMB)

$\Rightarrow$góc $ACD = ANM$.

Mà góc $ACD + DCM = 180^0$ $\Rightarrow DCM + DNM = 180^0 \Rightarrow DCMB$ nội tiếp.

2) Chứng minh: $AC.AM = AD.AN$

Chỉ ra $\Delta ACD \backsim \Delta ANM$.

3) Chứng minh $AOIH$ là hình bình hành.

Xác định** I **:

I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MCDN \Rightarrow I$ là giao điểm dường trung trực của CD và $MN \Rightarrow IH \perp MN$, $IO \perp CD$. Do $AB \perp MN; IH \perp MN \Rightarrow AO // IH$.

Vậy cách dựng I: Từ O dựng đường vuông góc với CD.Từ trung điểm H của MN dựng đường vuông góc với MN.Hai đường này cách nhau ở I.

• Do H là trung điểm $MN \Rightarrow AH$ là trung tuyến của tam giác vuông $AMN \Rightarrow ANM = NAH$.

Mà $ANM = BAM = ACD$ (cmt) $\Rightarrow DAH = ACD$

Gọi K là giao điểm AH và DO do $ADC + ACD = 90^0 \Rightarrow DAK + ADK = 90^0$ hay ΔAKD vuông ở $K \Rightarrow AH \perp CD$ mà $OI \perp CD \Rightarrow OI // AH$. Vậy $AHIO$ là hình bình hành.

4) Quỹ tích điểm I:

Do $AOIH$ là hình bình hành $\Rightarrow IH = AO = R$ không đổi $\Rightarrow CD$ quay xung quanh O thì I nằm trên đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng R.

Câu 245.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi D là 1 điểm trên cung nhỏ BC. Kẻ $DE; DF; DG$ lần lượt vuông góc với các cạnh $AB; BC; AC$. Gọi H là hình chiếu của D lên tiếp tuyến Ax của (O).

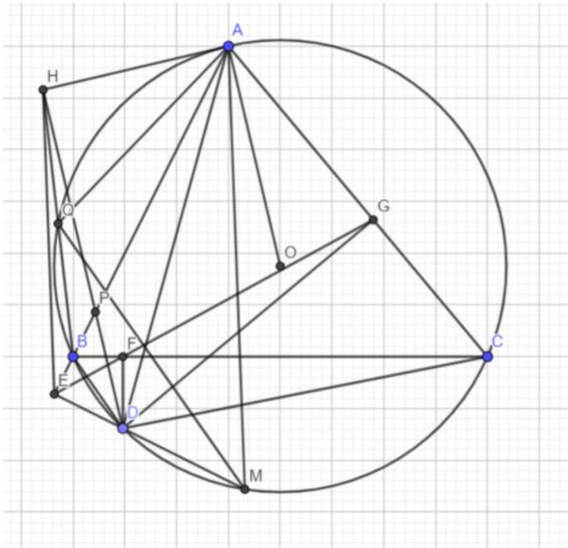
1) Chứng minh $AHED$ nội tiếp.

2) Gọi giao điểm của AH với HB và với (O) là P và $Q; ED$ cắt (O) tại M. Chứng minh $HA.DP = PA.DE$

3) Chứng minh $QM = AB$.

4) Chứng minh $DE.DG = DF.DH$.

5) Chứng minh $E; F; G$ thẳng hàng. (đường thẳng Sim sơn)



Hướng dẫn

1) Chứng minh $AHED$ nội tiếp (Sử dụng hai điểm $H;E$ cùng làm hành với hai đầu đoạn thẳng AD)

2) Chứng minh $HA.DP = PA.DE$:

Xét hai tam giác vuông đồng dạng: HAP và EPD (Có $HPA = EPD$ đối đỉnh)

3) Chứng minh $QM = AB$:

Do $\Delta HPA \backsim \Delta EDP \Rightarrow HAB = HDM$

Mà sđ $HAB = \frac{1}{2}$ sđ AB ;

Sđ $HDM = \frac{1}{2}$ sđ QM $\Rightarrow$ cung $AM = QM$ $\Rightarrow AB = QM$

4) Chưng minh: $DE.DG = DF.DH$.

Xét hai tam giác DEH và DFG có:

Do $EHAD$ nội tiếp $\Rightarrow HAE = HDE$ (cùng chắn cung HE) (1)

Và $EHD = EAD$ (cùng chắn cung ED) (2)

Vì $F = G = 90^0 \Rightarrow DFGC$ nội tiếp $\Rightarrow FDG = FCG$ (cùng chắn cung FG) (3)

$FGD = FCD$ (cùng chắn cung FD) (4)

Nhưng $FCG = BCA = HAB$ (5). Từ (1)(3)(5) $\Rightarrow EDH = FDG$ (6).

Từ (2);(4) và $BCD = BAD$ (cùng chắn cung BD) $\Rightarrow EHD = FGD$ (7)

Từ (6)và (7) $\Rightarrow \Delta EDH \backsim \Delta FDG \Rightarrow \frac{ED}{DF} = \frac{DH}{DG}$. (đpcm)

5) Chứng minh: $E;F;G$ thẳng hàng:

Ta có $BFE = BDE$ (cmt)và $GFC = CDG$ (cmt)

Do $ABCD$ nộ tiếp $\Rightarrow BAC + BMC = 180^0$.

Do $GDEA$ nội tiếp $\Rightarrow EDG + EAG = 180^0$ $\Rightarrow EDG = BDC$ mà $EDG = EDB + BDG$ và

$BCD = BDG + CDG$ $\Rightarrow EDB = CDG \Rightarrow GFC = BEF \Rightarrow E;F;G$ thẳng hàng.

Câu 246.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có $A = 90^0$, $AB < AC$. Gọi I là trung điểm BC. Qua I kẻ $IK \perp BC$ (K nằm trên BC). Trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $MA = AK$.

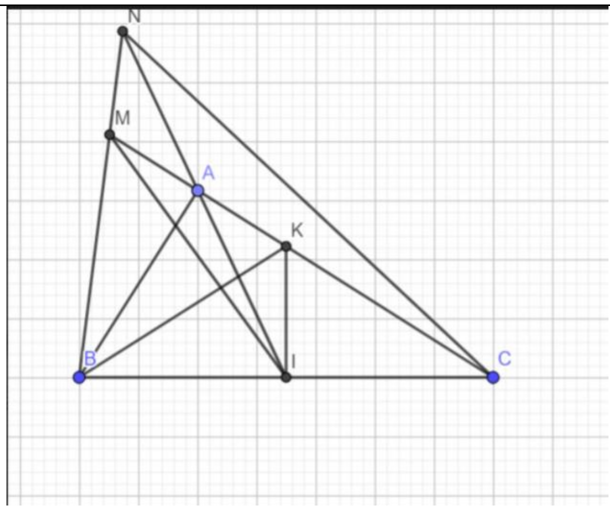
1) Chứng minh $ABIK$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O.

2) Chứng minh góc $BMC = 2.ACB$.

3) Chứng tỏ $BC^2 = 2AC.KC$

4) AI kéo dài cắt đường thẳng BM tại N. Chứng minh $AC = BN$.

5) Chứng minh $NMIC$ nội tiếp.



Hướng dẫn

1) Chứng minh $ABIK$ nội tiếp: HS tự làm.

2) Chứng minh $BMC = 2ACB$

do $AB \perp MK$ và $MA = AK$ (gt) $\Rightarrow \Delta BMK$ cân ở $B \Rightarrow BMA = AKB$

Mà $AKB = KBC + KCB$ (Góc ngoài tam giác KBC).

Do I là trung điểm BC và $KI \perp BC$ (gt) $\Rightarrow \Delta KBC$ cân ở K.

$\Rightarrow KBC = KCB$ Vậy $BMC = 2ACB$

3) Chứng minh: $BC^2 = 2AC.KC$

Xét 2 tam giác vuông ACB và ICK có góc C chung $\Rightarrow \Delta ACB \backsim \Delta ICK$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{IC} = \dfrac{CB}{CK} \Rightarrow IC = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow \dfrac{AC}{\dfrac{BC}{2}} = \dfrac{BC}{CK} \Leftrightarrow BC^2 = 2AC.KC$. (đpcm)

4) Chứng minh $AC = BN$

Do $AIB = IAC + ICA$ (Góc ngoài ΔIAC) và ΔIAC cân ở I $\Rightarrow IAC = ICA \Rightarrow AIB = 2IAC$ (1).

Ta lạ có $BKM = BMK$ và $BKM = AIB$ (tứ giác $AKIB$ nội tiếp và đây là hai góc cùng chắn cung AB)

$\Rightarrow AIB = BMK$ (2) mà $BMK = MNA + MAN$ (góc ngoài tam giác MNA)

Do ΔMNA cân ở M(gt) $\Rightarrow MAN = MNA \Rightarrow BMK = 2MNA$ (3)

Từ(1);(2);(3) $\Rightarrow IAC = MNA$ và $MAN = IAC$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \ldots$

5) Chứng minh $NMIC$ nội tiếp:

do $MNA = ACI$ hay $MNI = MCI \Rightarrow$ hai điểm $N;C$ ....

Câu 247.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) đường kính AB cố định, điểm C di động trên nửa đường tròn. Tia phân giác của ACB cắt (O) tại M. Gọi $H;K$ là hình chiếu của M lên AC và BC.

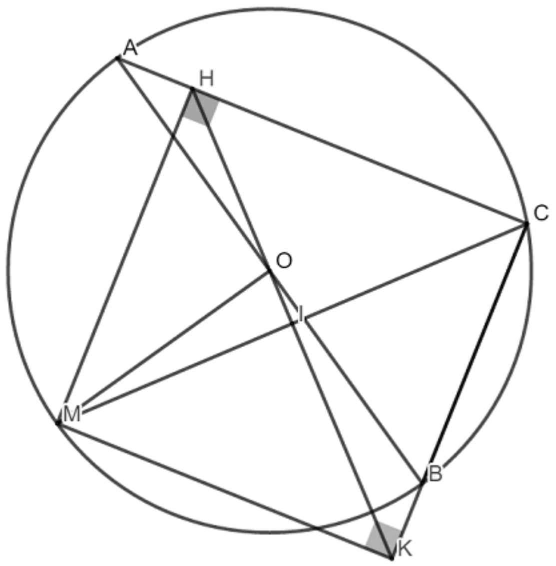
1) Chứng minh $MOBK$ nội tiếp.

2) Chứng minh tứ giác $CKMH$ là hình vuông.

3) Chứng minh $H;O;K$ thẳng hàng.

4) Gọi giao điểm HK và CM là I. Khi C di động trên nửa đường tròn thì I chạy trên đường nào?

Hướng dẫn



1) Chứng minh: $BOMK$ nội tiếp:

Ta có $BCA = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

CM là tia phân giác của góc $BCA \Rightarrow ACM = MCB = 45^0$.

$\Rightarrow$ cung $AM = MB = 90^0$.

$\Rightarrow$ dây $AM = MB$ có O là trung điểm $AB \Rightarrow OM \perp AB$ hay góc $BOM = BKM = 90^0$

$\Rightarrow BOMK$ nội tiếp.

2) Chứng minh $CHMK$ là hình vuông:

Do tam giác vuông HCM có 1 góc bằng 45^0 nên ΔCHM vuông cân ở $H \Rightarrow HC = HM$, tương tự $CK = MK$. Do $C = H = K = 90^0$ $\Rightarrow CHMK$ là hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau

$\Rightarrow CHMK$ là hình vuông.

3) Chứng minh H,O,K thẳng hàng

Gọi I là giao điểm HK và MC. Do $MHCK$ là hình vuông $\Rightarrow HK \perp MC$ tại trung điểm I của MC. Do I là trung điểm $MC \Rightarrow OI \perp MC$ (Đường kính đi qua trung điểm một dây…)

Vậy $HI \perp MC; OI \perp MC$ và $KI \perp MC \Rightarrow H; O; I$ thẳng hàng.

4) Do góc $OIM = 90^0; OM$ cố định $\Rightarrow I$ nằm trên đường tròn đường kính OM.

- Giới hạn: Khi $C \equiv B \Rightarrow I \equiv Q$; Khi $C \equiv A \Rightarrow I \equiv P$.

Vậy khi C di động trên nửa đường tròn (O) thì I chạy trên cung tròn PHQ của đường tròn đường kính OM.

Câu 248.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 2a$, chiều rộng $BC = a$. Kẻ tia phân giác của góc ACD, từ A hạ AH vuông góc với đường phân giác nói trên.

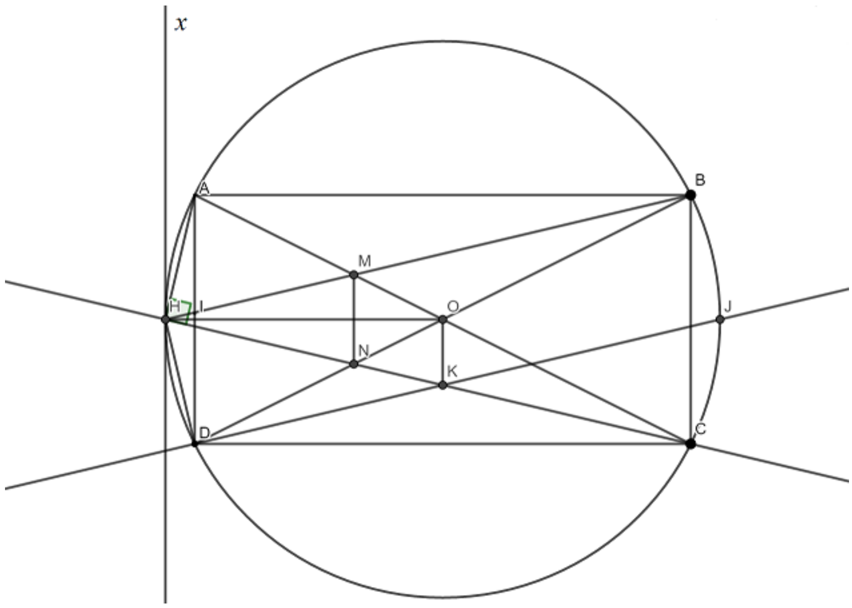
1) Chứng minh $AHDC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O mà ta phải định rõ tâm và bán kính theo a.

2) HB cắt AD tại I và cắt AC tại M; HC cắt DB tại N. Chứng tỏ $HB = HC$ và $AB.AC = BH.BI$.

3) Chứng tỏ MN song song với tiếp tuyến tại H của (O)

4) Từ D kẻ đường thẳng song song với BH; đường này cắt HC ở K và cắt (O) ở J. Chứng minh $HOKD$ nội tiếp.

Hướng dẫn



1) HS tự làm.

2) Xét hai ΔHCA và ΔABI có $A = H = 90^0$ và $ABH = ACH$ (Cùng chắn cung AH)

$\Rightarrow \Delta HCA \backsim \Delta ABI \Rightarrow \dfrac{HC}{AB} = \dfrac{AC}{BI}$ mà $HB = HC \Rightarrow$ đpcm

3) Gọi tiếp tuyến tại H của (O) là Hx.

+ Do $AH = HD; AO = HO = DO \Rightarrow \Delta AHO = \Delta HOD \Rightarrow AOH = HOD$

Mà ΔAOD cân ở $O \Rightarrow OH \perp AD$ và $OH \perp Hx$ (tính chất tiếp tuyến) nên $AD // Hx$ (1)

+ Do cung $AH = HD \Rightarrow ABH = ACH = HBD \Rightarrow HBD = ACH$ hay $MBN = MCN$ hay 2 điểm $B;C$ cùng làm với hai đầu đoạn MN những góc bằng nhau $\Rightarrow MNCB$ nội tiếp

$\Rightarrow NMC = NBC$ (cùng chắn cung NC) mà $DBC = DAC$ (cùng chắn cung DC) $\Rightarrow NMC = DAC$

$\Rightarrow MN // DA$ (2). Từ(1)và (2)$\Rightarrow MN // Hx$.

4) Chứng minh $HOKD$ nội tiếp:

Do $DJ // BH \Rightarrow HBD = BDJ$ (so le)$\Rightarrow$ cung $BJ = HD = AH = \dfrac{AD}{2}$ mà cung $AD = BC$

$\Rightarrow$ cung $BJ = JC \Rightarrow H; O; J$ thẳng hàng.

HJ là đường kính $\Rightarrow HDJ = 90^0$. Góc $HJD = ACH$ (cùng chắn 2 cung bằng nhau)

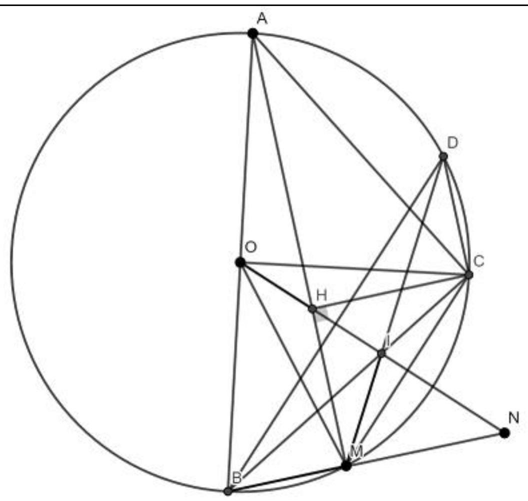
$\Rightarrow OJK = OCK \Rightarrow CJ$ cùng làm vớ hai đầu đoạn OK những góc bằng nhau

$\Rightarrow OKCJ$ nội tiếp $\Rightarrow KOC = KJC$ (cùng chắn cung KC); $KJC = DAC$ (cùng chắn cung DC)

$\Rightarrow KOC = DAC \Rightarrow OK // AD$ mà $AD \perp HJ \Rightarrow OK \perp HO \Rightarrow HDKC$ nội tiếp.

Câu 249.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, bán kính $OC \perp AB$. Gọi M là 1 điểm trên cung BC. Kẻ đường cao CH của tam giác ACM.

1. Chứng minh $AOHC$ nội tiếp.
2. Chứng tỏ ΔCHM vuông cân và OH là phân giác của góc COM.
3. Gọi giao điểm của OH với BC là I. MI cắt (O) tại D. Chứng minh rằng: $CDBM$ là hình thang cân.
4. BM cắt OH tại N. Chứng minh ΔBNI và ΔAMC đồng dạng,từ đó suy ra: $BN.MC = IN.MA$.



Hướng dẫn

1. Chứng minh $AOHC$ nội tiếp: HS tự chứng minh.

2. Chứng minh ΔCHM vuông cân:

Do $OC \perp AB$ trại trung điểm O$\Rightarrow$ cung $AC = CB = 90^0$.

Ta lại có:

Sđ $CMA = \frac{1}{2}$ sđ $AC = 45^0 \Rightarrow \Delta CHM$ vuông cân ở M.

+ Chứng minh OH là phân giác của góc COM :

Do ΔCHM vuông cân ở $H \Rightarrow CH = HM$; $CO = OB$ (bán kính); OH chung

$\Rightarrow \Delta CHO = \Delta HOM \Rightarrow COH = HOM$.(đpcm)

3. Chứng minh: $CDBM$ là hình thang cân:

Do ΔOCM cân ở O có OH là phân giác $\Rightarrow OH$ là đường trung trực của CM mà $I \in OH \Rightarrow \Delta ICM$ cân ở $I \Rightarrow ICM = IMC$ mà $ICM = MDB$ (cùng chắn cung BM)

$\Rightarrow IMC = IDB$ hay $CM // DB$.

Do ΔIDB cân ở $I \Rightarrow IDB = IBD$ và $MBC = MDC$ (cùng chắn cung CM) nên $CDB = MBD \Rightarrow CDBM$ là hình thang cân.

4. Chứng minh ΔBNI và ΔAMC đồng dạng:

Do OH là đường trung trực của CM và $N \in OH \Rightarrow CN = NM$.

Do $AMB = 90^0 \Rightarrow HMB = 90^0$ hay $NM \perp AM$ mà $CH \perp AM \Rightarrow CH // NM$.

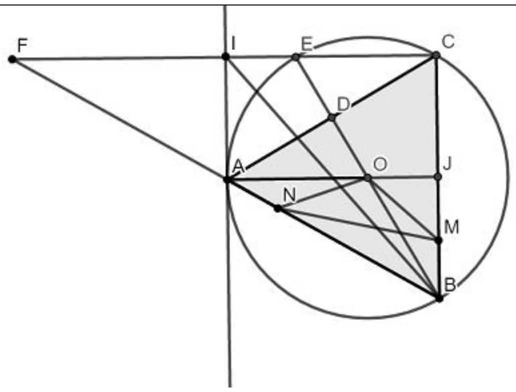
$CMH = 45^o \Rightarrow NHM = 45^o \Rightarrow \Delta MNH$ vuông cân ở M

Vậy $CHMN$ là hình vuông $\Rightarrow INB = CMA = 45^o$ + Do $CMBD$ là thang cân $\Rightarrow CD = BM \Rightarrow$ cung $CD = BM$ mà cung $AC = CB \Rightarrow$cung $AD = CM$ nên $CAM = CBM$ (cùng chắn cung CM)

$\Rightarrow \Delta INB = \Delta CMA$. (đpcm)

Câu 250.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong $(O;R)$.Trên cạnh AB và AC lấy hai điểm $M;N$ sao cho $BM = AN$.

1. Chứng tỏ ΔOMN cân.
2. Chứng minh: $OMAN$ nội tiếp.
3. BO kéo dài cắt AC tại D và cắt (O) ở E. Chứng minh $BC^2 + DC^2 = 3R^2$.
4. Đường thẳng CE và AB cắt nhau ở F. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt FC tại I; AO kéo dài cắt BC tại J. Chứng minh BI đi qua trung điểm của AJ.



Hướng dẫn

1. Chứng minh ΔOMN cân:

Do ΔABC là tam giác đều nội tiếp trong $(O) \Rightarrow AO$ và BO là phân giác của ΔABC

$\Rightarrow OAN = OBM = 30^o$; $OA = OB = R$ và $BM = AN$ (gt) $\Rightarrow \Delta OMB = \Delta ONA$

$\Rightarrow OM = ON \Rightarrow \Delta OMN$ cân ở O.

2. Chứng minh $OMAN$ nội tiếp:

do $\Delta OBM = \Delta ONA$ (cmt) $\Rightarrow BMO = ANO$

mà $BMO + AMO = 180^0 \Rightarrow ANO + AMO = 180^0 \Rightarrow AMON$ nội tiếp.

3. Chứng minh $BC^2 + DC^2 = 3R^2$.

Do BO là phân giác của Δ đều $\Rightarrow BO \perp AC$ hay ΔBOD vuông ở D.

Áp dụng hệ thức Pitago ta có:

$BC^2 = DB^2 + CD^2 = (BO + OD)^2 + CD^2 = BO^2 + 2.OB.OD + OD^2 + CD^2$ (1)

Mà $OB = R$, ΔAOC cân ở O có $OAC = 30^o$.

$\Rightarrow AOC = 120^o \Rightarrow AOE = 60^o \Rightarrow \Delta AOE$ là tam giác đều có $AD \perp OE \Rightarrow OD = ED = \frac{R}{2}$

Áp dụng Pitago ta có: $OD^2 = OC^2 - CD^2 = R^2 - CD^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC^2 = R^2 + 2.R.\frac{R}{2} + CD^2 - CD^2 = 3R^2$.

4. Gọi K là giao điểm của BI với AJ.

Ta có $BCE = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) có $B = 60^o \Rightarrow BFC = 30^o$.

$\Rightarrow BC = \frac{1}{2}BF$ mà $AB = BC = AB = AF$. Do $AO \perp AI$ (tính chất tiếp tuyến) và $AJ \perp BC \Rightarrow AI//BC$

có A là trung điểm $BF \Rightarrow I$ là trung điểm CF. Hay $FI = IC$.

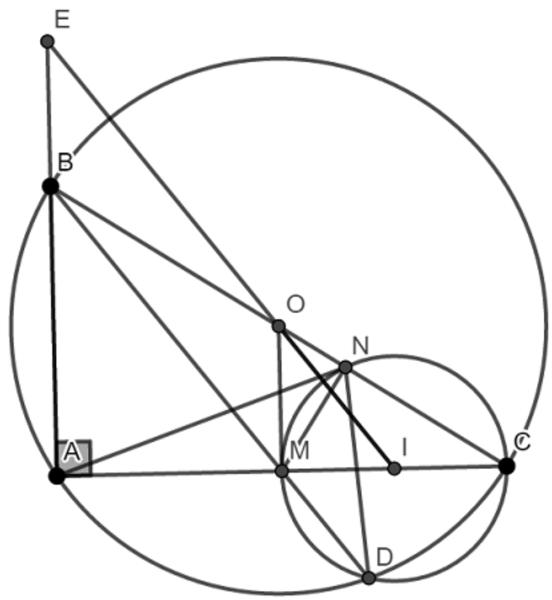
Do $AK//FI$. Áp dụng hệ quả Talét trong ΔBFI có: $\frac{AK}{EI} = \frac{BK}{BI}$

Do $KJ//CI$. Áp dụng hệ quả Talét trong ΔBIC có: $\frac{KJ}{CJ} = \frac{BK}{BI}$

$\frac{AK}{FI} = \frac{KJ}{CI}$. Mà $FI = CI \Rightarrow AK = KJ$. (đpcm)

Câu 251.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông tại A, nội tiếp trong đường tròn tâm (O). Gọi M là trung điểm cạnh AC. Đường tròn tâm I đường kính MC cắt cạnh BC ở N và cắt (O) tại D.

1. Chứng minh $ABNM$ nội tiếp và $CN.AB = AC.MN$.
2. Chứng tỏ B, M, D thẳng hàng và OM là tiếp tuyến của (I).
3. Tia IO cắt đường thẳng AB tại E. Chứng minh $BMOE$ là hình bình hành.
4. Chứng minh NM là phân giác của góc AND.



Hướng dẫn

1. Chứng minh $ABNM$ nội tiếp: (dùng tổng hai góc đối)

Chứng minh: $CN.AB = AC.MN$.

Chứng minh hai tam giác vuông ABC và NMC đồng dạng.

2. Chứng minh $B; M; D$ thẳng hàng.

Ta có $MDC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm I) hay $MD \perp DC$.

$BDC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O)

Hay $BD \perp DC$. Qua điểm D có hai đường thẳng BD và DM cùng vuông góc với $DC \Rightarrow B; M; D$ thẳng hàng.

+ Chứng minh OM là tiếp tuyến của (I):

Ta có MO là đường trung bình của ΔABC (vì $M; O$ là trung điểm của $AC; BC$ -gt)

$\Rightarrow MO // AB$ mà $AB \perp AC$ (gt) $\Rightarrow MO \perp AC \Rightarrow MO \perp IC, M \in (I) \Rightarrow MO$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm I.

3. Chứng minh $BMOE$ là hình bình hành:

$MO//AB \Rightarrow MO//BE$. Mà I là trung điểm $MC;O$ là trung điểm $BC \Rightarrow OI$ là đường trung bình của $\Delta MBC \Rightarrow OI//BM$ hay $OE//BM \Rightarrow BMOE$ là hình bình hành.

4. Chứng minh MN là phân giác của góc AND :

Do $ABNM$ nội tiếp $\Rightarrow MBA = MNA$ (cùng chắn cung AM)

$MBA = ACD$ (cùng chắn cung AD)

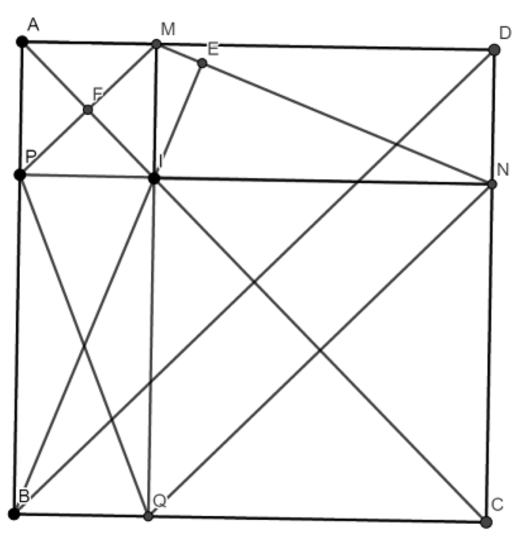
Do $MNCD$ nội tiếp $\Rightarrow ACD = MND$ (cùng chắn cung MD)

$\Rightarrow ANM = MND \Rightarrow$ đpcm.

Câu 252.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi I là điểm bất kỳ trên đường chéo AC . Qua I kẻ các đường thẳng song song với $AB;BC$,các đường này cắt $AB;BC;CD;DA$ lần lượt ở $P;Q;N;M$.

1. Chứng minh $INCQ$ là hình vuông.
2. Chứng tỏ $NQ//DB$.
3. BI kéo dài cắt MN tại $E;MP$ cắt AC tại F . Chứng minh $MFIN$ nội tiếp được trong đường tròn. Xác định tâm.
4. Chứng tỏ $MPQN$ nội tiếp. Tính diện tích của nó theo a .
5. Chứng minh $MFIE$ nội tiếp.

Hướng dẫn



1. Chứng minh $INCQ$ là hình vuông:

$MI//AP//BN$ (gt) $\Rightarrow MI = AP = BN \Rightarrow NC = IQ = PD$

ΔNIC vuông ở N có $ICN = 45^o$ (Tính chất đường chéo hình vuông)

$\Rightarrow \Delta NIC$ vuông cân ở N $\Rightarrow INCQ$ là hình vuông.

2. Chứng minh: $NQ//DB$.

Do $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow DB \perp AC$

Do $IQCN$ là hình vuông $\Rightarrow NQ \perp IC$

Hay $NQ \perp AC \Rightarrow NQ//DB$.

3. Chứng minh $MFIN$ nội tiếp:

Do $MP \perp AI$ (tính chất hình vuông) $\Rightarrow MFI = 90^0; MIN = 90^0$ (gt)

$\Rightarrow$ hai điểm $F; I$ cùng làm với hai đầu đoạn $MN \Rightarrow MFIN$ nội tiếp.

Tâm của đường tròn này là giao điểm hai đường chéo hình chữ nhật $MFIN$.

4. Chứng minh $MPQN$ nội tiếp:

Do $NQ//PM \Rightarrow MNQP$ là hình thang, có $PN = MQ \Rightarrow MNQP$ là thang cân.

Dễ dàng chứng minh thang cân nội tiếp.

Tính $S_{MNQP} = S_{MIP} + S_{MNI} + S_{NIQ} + S_{PIQ} = \frac{1}{2}S_{AMIP} + \frac{1}{2}S_{MDNI} + \frac{1}{2}S_{NIQC} + \frac{1}{2}S_{PIQB} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}a^2$

5. Chứng minh $MFIE$ nội tiếp:

Chỉ ra các tam giác vuông $\Delta BPI = \Delta IMN$ (do $PI = IM; PB = IN; P = \hat{I} = 90^0$).

$\Rightarrow PIB = IMN$ mà $PBI = EIN$ (đối đỉnh) $\Rightarrow IMN = EIN$

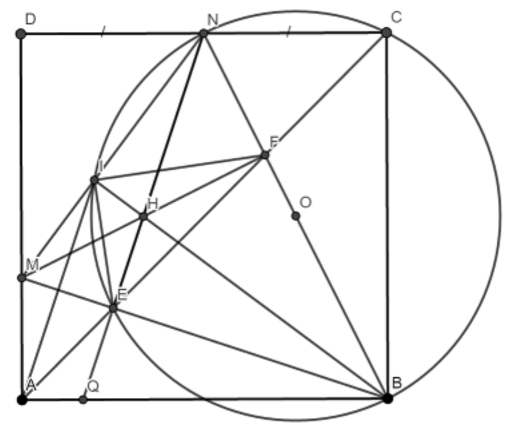
Ta lại có $IMN + ENI = 90^0 \Rightarrow EIN + ENI = 90^0 \Rightarrow IEN = 90^0$

mà $MFI = 90^0 \Rightarrow IEM + MFI = 180^0 \Rightarrow FMEI$ nội tiếp.

Câu 253.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho hình vuông $ABCD$, N là trung điểm $DC; BN$ cắt AC tại F, Vẽ đường tròn tâm O đường kính BN. (O) cắt AC tại E. BE kéo dài cắt AD ở $M; MN$ cắt (O) tại I.

1. Chứng minh $MDNE$ nội tiếp.
2. Chứng tỏ ΔBEN vuông cân.
3. Chứng minh MF đi qua trực tâm H của ΔBMN.
4. Chứng minh $BI = BC$ và ΔIEF vuông.
5. C/m: BM là đường trung trực của QH (H là trực tâm tam giác BMN; NE cắt AB tại Q) và $MQBN$ là thang cân.

Hướng dẫn



1. Chứng minh $MDNE$ nội tiếp.

Ta có $NEB = 90^0$ (góc nt chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow MEN = 90^0; MDN = 90^0$ (t/c hình vuông)

$\Rightarrow MEN + MDN = 180^0$. đpcm

2. Chứng minh ΔBEN vuông cân:

Ta có: ΔNEB vuông (cmt)

Do $CBNE$ nội tiếp

$\Rightarrow ENB = BCE$ (cùng chắn cung BE) mà $BCE = 45^o$ (t/c hình vuông) $\Rightarrow ENB = 45^o$ (đpcm).

3. Chứng minh MF đi qua trực tâm H của ΔBMN.

Ta có $BIN = 90^0$ (góc nt chắn nửa đtròn)

$\Rightarrow BI \perp MN$. Mà $EN \perp BM$ (cmt) $\Rightarrow$ BI và EN là hai đường cao của ΔBMN $\Rightarrow$ Giao điểm của EN và BI là trực tâm H. Ta phải chứng minh $M; H; F$ thẳng hàng.

Do H là trực tâm $\Delta BMN \Rightarrow MH \perp BN$ (1)

$MAF = 45^o$ (t/c hình vuông); $MBF = 45^o$ (cmt)

$\Rightarrow MAF = MBF = 45^o \Rightarrow MABF$ nội tiếp $\Rightarrow MAB + MFB = 180^0$ mà $MAB = 90^0\left(gt\right) \Rightarrow MFB = 90^0$ hay $MF \perp BM$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M; H; F$ thẳng hàng.

4. Chứng minh $BI = BC$:

Xét 2 Δ vuông BCN và ΔBIN có cạnh huyền BN chung; $NBC = NEC$ (cùng chắn cung NC).

Do $MEN = MFN = 90^0 \Rightarrow MEFN$ nội tiếp $\Rightarrow NEC = FMN$ (cùng chắn cung FN);

$FMN = IBN$ (cùng phụ với góc INB) $\Rightarrow IBN = NBC \Rightarrow \Delta BCN = \Delta BIN \Rightarrow BC = BI$.

*Chứng minh ΔIEF vuông:

Ta có $EIB = ECB$ (cùng chắn cung EB) và $ECB = 45^o \Rightarrow EIB = 45^o$ (1)

Do $HIN + HFN = 180^0 \Rightarrow IHFN$ nội tiếp $\Rightarrow HIF = HNF$ (cùng chắn cung HF)

mà $HNF = 45^o$ (do ΔEBN vuông cân) $\Rightarrow HIF = 45^o$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EIF = 90^0$ $\Rightarrow$ đpcm

5. Chứng minh BM là đường trung trực của QH:

Do $AI = BC = AB$ (gt và cmt) $\Rightarrow \Delta ABI$ cân ở B. Hai Δ vuông ABM và ΔBIM có cạnh huyền BM chung; $AB = BI \Rightarrow \Delta ABM = \Delta BIM \Rightarrow ABM = MBI; \Delta ABI$ cân ở B có BM là phân giác $\Rightarrow$ BM là đường trung trực của QH.

*Chứng minh $MQBN$ là thang cân:

Tứ giác $AMEQ$ có $A + QEN = 180^0$ (do $EN \perp BM$ theo cmt)

$\Rightarrow AMEQ$ nội tiếp $\Rightarrow MAE = MQE$ (cùng chắn cung ME) mà $MAE = 45^o$ và $ENB = 45^o$ (cmt)

$\Rightarrow MQN = BNQ = 45^o \Rightarrow MQ // BN$.

Ta lại có $MBI = ENI$ (cùng chắn cung EN) và $MBI = ABM$ và $IBN = NBC$ (cmt)

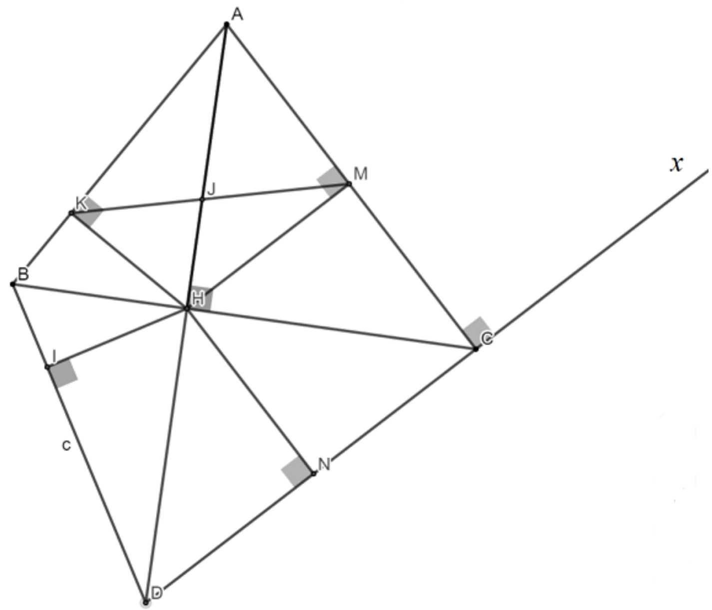
$\Rightarrow QBN = ABM + MBN = ABM + 45^o$ (vì $MBN = 45^o$) $\Rightarrow MNB = MNE + ENB = MBI + 45^o$

$\Rightarrow MNB = QBN \Rightarrow MQBN$ là thang cân.

Câu 254.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có 3 góc nhọn $(AB < AC)$.Vẽ đường cao AH. Từ H kẻ $HK; HM$ lần lượt vuông góc với $AB; AC$.Gọi J là giao điểm của AH và MK.

1. Chứng minh $AMHK$ nội tiếp.
2. Chứng minh $JA.JH = JK.JM$.
3. Từ C kẻ tia $Cx \perp AC$ và Cx cắt AH kéo dài ở D. Vẽ $HI; HN$ lần lượt vuông góc với DB và DC.

   Chứng minh rằng: $HKM = HCN$
4. Chứng minh $M; N; I; K$ cùng nằm trên một đường tròn.



Hướng dẫn

1. Chứng minh $AMHK$ nội tiếp: Dùng tổng hai góc đối.

2. Chứng minh: $JA.JH = JK.JM$.

Xét hai tam giác: ΔJAM và ΔJHK có: $AJM = KJH$ (đối đỉnh).

Do $AKHM$ nội tiếp $\Rightarrow HAM = HKM$ (cùng chắn cung HM)

$\Rightarrow \Delta JAM \backsim \Delta JKH \Rightarrow JA.JH = JK.JM$. (đpcm)

3. Chứng minh $HKM = HCN$

vì $AKHM$ nội tiếp $\Rightarrow HKM = HAM$ (cùng chắn cung HM)

Mà $HAM = MHC$ (cùng phụ với góc ACH).

Do $HMC = MCN = CNH = 90^0$ (gt) $\Rightarrow MCNH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MH//CN$ hay

$MHC = HCN \Rightarrow HKM = HCN$.

4. Chứng minh: $M;N;I;K$ cùng nằm trên một đường tròn.

✦Do $BKHI$ nội tiếp $\Rightarrow BKI = BHI$ (cùng chắn cung BI); $BHI = IDH$ (cùng phụ với góc IBH)

✦Do $IHND$ nội tiếp $\Rightarrow IDH = INH$ (cùng chắn cung IH) $\Rightarrow BKI = HNI$

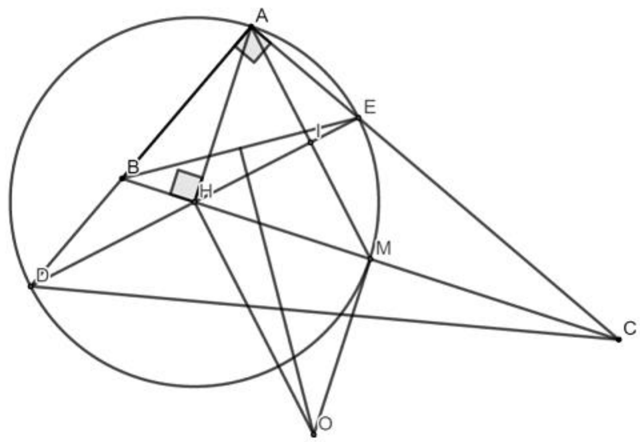
✦Do $AKHM$ nội tiếp $\Rightarrow AKM = AHM$ (cùng chắn cung AM); $AHM = MCH$ (cùng phụ với HAM)

✦Do $HMCN$ nội tiếp $\Rightarrow MCH = MNH$ (cùng chắn cung MH) $\Rightarrow AKM = MNH$

mà $BKI + AKM + MKI = 180^0 \Rightarrow HNI + MNH + MKI = 180^0$ hay $IKM + MNI = 180^0 \Rightarrow M;N;I;K$ cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 255.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông tại A. Đường cao AH. Đường tròn tâm H ,bán kính HA cắt đường thẳng AB tại D và cắt AC tại E; Trung tuyến AM của ΔABC cắt DE tại I.

1. Chứng minh $D; H; E$ thẳng hàng.
2. Chứng minh $BDCE$ nội tiếp.Xác định tâm O của đường tròn này.
3. Chứng minh $AM \perp DE$.
4. Chứng minh $AHOM$ là hình bình hành.



Hướng dẫn

1. Chứng minh $D; H; E$ thẳng hàng:

Do $DAE = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm H) $\Rightarrow DE$ là đường kính $\Rightarrow D; E; H$ thẳng hàng.

2. Chứng minh $BDCE$ nội tiếp:

ΔHAD cân ở H(vì $HD = HA =$ bán kính của đt tâm H) $\Rightarrow HAD = HAD$ mà $HAD = HCA$ (Cùng phụ với HAB)

$\Rightarrow BDE = BCE \Rightarrow$ Hai điểm $D; C$ cùng làm với hai đầu đoạn thẳng BE

✦Xác định tâm O:

O là giao điểm hai đường trung trực của BE và BC.

3. Chứng minh: $AM \perp DE$:

Do M là trung điểm $BC \Rightarrow AM = MC = MB = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow MAC = MCA$

mà $ABE = ACB$ (cmt) $\Rightarrow MAC = ADE$.

Ta lại có: $ADE + AED = 90^0$ (vì $A = 90^0$) $\Rightarrow CAM + AED = 90^0 \Rightarrow AIE = 90^0$. Vậy $AM \perp ED$.

4. Chứng minh $AHOM$ là hình bình hành:

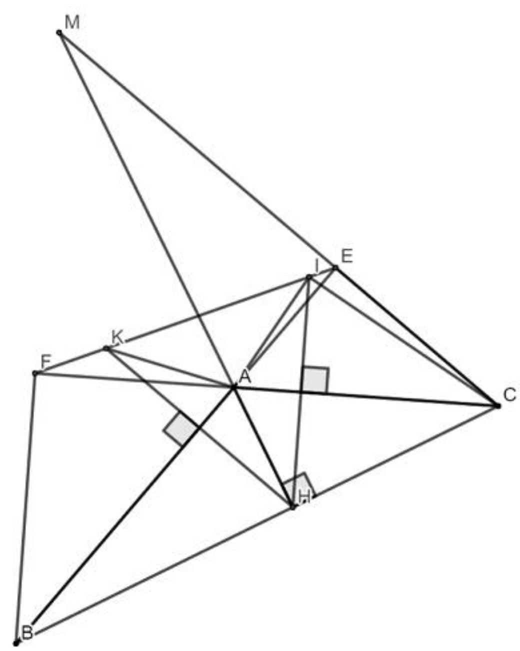
Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp $BECD \Rightarrow OM$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow OM // AH$.

Do H là trung điểm DE (DE là đường kính của đường tròn tâm H) $\Rightarrow OH \perp DE$ mà $AM \perp DE \Rightarrow AM // OH \Rightarrow AHOM$ là hình bình hành.

Câu 256.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có 2 góc nhọn, đường cao AH. Gọi K là điểm đối xứng của H qua AB; I là điểm đối xứng của H qua AC. $E;F$ là giao điểm của KI với AB và AC.

1. Chứng minh $AICH$ nội tiếp.
2. Chứng minh $AI = AK$.
3. Chứng minh các điểm: $A;E;H;C;I$ cùng nằm trên một đường tròn.
4. Chứng minh $CE;BF$ là các đường cao của ΔABC.
5. Chứng tỏ giao điểm 3 đường phân giác của ΔHFE chính là trực tâm của ΔABC.

Hướng dẫn



1. Chứng minh $AICH$ nội tiếp.

+ Do I đối xứng với H qua $AC \Rightarrow AC$ là trung trực của $HI \Rightarrow AI = AH$ và $HC = IC; AC$ chung

$\Rightarrow \Delta AHC = \Delta AIC$ (c.c.c)

$\Rightarrow AHC = AIC$ mà $AHC = 90^0$ (gt) $\Rightarrow AIC = 90^0$

$\Rightarrow AIC + AHC = 180^0 \Rightarrow AICH$ nội tiếp.

2. Chứng minh $AI = AK$:

Theo chứng minh trên ta có: $AI = AH$. Do K đối xứng với H qua AB nên AB là đường trung trực của $KH \Rightarrow AH = AK \Rightarrow AI = AK\left(= AH\right)$

3. Chứng minh $A;E;H;C;I$ cùng nằm trên một đường tròn:

Do $E \in AB$ và AB là trung trực của $KH \Rightarrow EK = EH; EA$ chung;

$AH = AK \Rightarrow \Delta AKE = \Delta AHE \Rightarrow AKE = EHA$ mà ΔAKI cân ở A (theo c/m trên $AK = AI$)

$\Rightarrow AKI = AIK \Rightarrow EHA = AIE \Rightarrow$ hai điểm I và K cung làm với hai đầu đoạn AE …

$\Rightarrow A; E; H; I$ cùng nằm trên một đường tròn ký hiệu là (C)

Theo cmt thì $A; I; CV; H$ cùng nằm trên đường tròn $\left(C'\right) \Rightarrow (C)$ và $\left(C'\right)$ trùng nhau vì có chung 3 điểm

$A; H; I$ không thẳng hàng)

4. Chứng minh: $CE; BF$ là đường cao của ΔABC.

Do $AEHCI$ cùng nằm trên một đường tròn có $AIC = 90^0 \Rightarrow AC$ là đường kính $\Rightarrow AEC = 90^0$

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Hay CE là đường cao của ΔABC.

Chứng minh tương tự ta có BF là đường cao…

5. Gọi M là giao điểm AH và EC .Ta chứng minh M là giao điểm 3 đường phân giác của ΔHFE.

$EBHM$ nội tiếp $\Rightarrow MHE = MBE$ (cùng chắn cung EM)

$BEFC$ nội tiếp $\Rightarrow FBE = ECF$ (Cùng chắn cung EF)

$HMFC$ nội tiếp $\Rightarrow FCM = FMH$ (cùng chắn cung MF)

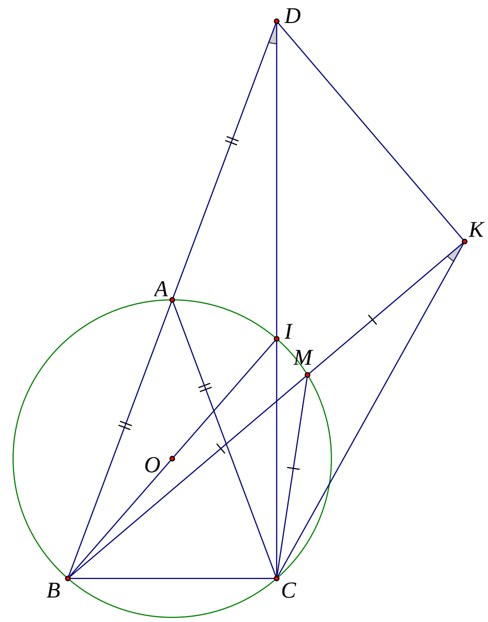
$\Rightarrow EHM = MHF$ $\Rightarrow$HA là pg…

Chứng minh tương tự có EC là phân giác của ΔHFE (đpcm).

Câu 257.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC cân tại A nội tiếp trong (O). Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC .Trên tia đối tia MB lấy $MK = MC$ và trên tia BA lấy $AD = AC$.

1. Chứng minh: $BAC = 2.BKC$
2. Chứng minh $BCKD$ nội tiếp. Xác định tâm của đường tròn này.
3. Gọi giao điểm của DC với (O) là I . Chứng minh $B; O; I$ thẳng hàng.
4. Chứng minh $DI = BI$.

Hướng dẫn



1. Chứng minh $BAC = 2.BKC$:

$BAC = BMC$ (cùng chắn cung BC)

$BMC = MKC + MCK$ (góc ngoài ΔMKC)

Mà $MK = MC$ (gt) $\Rightarrow \Delta MKC$ cân ở $M \Rightarrow MKC = MCK$

$\Rightarrow BMC = 2.BKC \Rightarrow BAC = 2.BKC$.

2. Chứng minh $BCKD$ nội tiếp:

Ta có $BAC = ADC + ACD$ (góc ngoài ΔADC) mà

$AD = AC$ (gt) $\Rightarrow \Delta ADC$ cân ở $A \Rightarrow ADC = ACD \Rightarrow BAC = 2.BDC$

Nhưng ta lại có: $BAC = 2.BKC$ (cmt) $\Rightarrow BDC = BKC \Rightarrow BCKD$ nội tiếp.

+ Xác định tâm:

Do $AB = AC = AD \Rightarrow A$ là trung điểm $BD \Rightarrow$ trung tuyến $CA = \dfrac{1}{2}BD \Rightarrow \Delta BCD$ vuông ở C .

Do $BCKD$ nội tiếp $\Rightarrow DKB = DCB$ (cùng chắn cung BD) . Mà $BCD = 90^0 \Rightarrow BKD = 90^0 \Rightarrow DBKD$ vuông ở K có trung tuyến $KA \Rightarrow KA = \dfrac{1}{2}BD \Rightarrow AD = AB = AC = AK \Rightarrow A$ là tâm đường tròn…

3. Chứng minh $B;O;I$ thẳng hàng:

Do góc $BCI = 90^0$,mà $B;C;I \in (O) \Rightarrow BI$ là đường kính $\Rightarrow B;O;I$ thẳng hàng.

4. Chứng minh $BI = DI$

+ Cách 1: Ta có $BAI = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $AI \perp DB$, có A là trung điểm $\Rightarrow AI$ là đường trung trực của $BD \Rightarrow \Delta IBD$ cân ở $I \Rightarrow ID = BI$

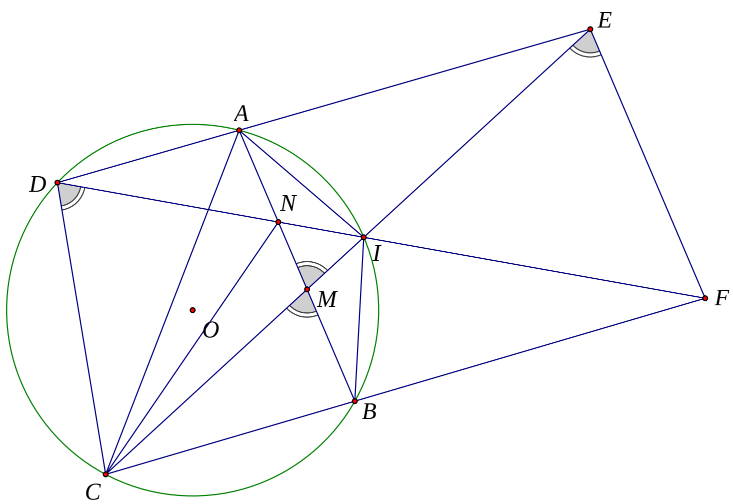
+ Cách 2: $ACI = ABI$ (cùng chắn cung AI) ΔADC cân ở $D \Rightarrow ACI = ADI$

$\Rightarrow BDC = ACD \Rightarrow IDB = IBD \Rightarrow DBID$ cân ở I (đpcm).

Câu 258.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong (O). Gọi I là điểm chính giữa cung AB (Cung AB không chứa điểm $C;D$). IC và ID cắt AB ở $M;N$.

1. Chứng minh $D;M;N;C$ cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh $MA.MB = MI.MC$
3. DI kéo dài cắt đường thẳng BC ở F ;đường thẳng IC cắt đường thẳng AD ở E. Chứng minh: $EF//AB$.
4. Chứng minh: $IA^2 = IN.ID$.

Hướng dẫn



1. Chứng minh $D;M;N;C$ cùng nằm trên một đường tròn.

$$sd\,IMB = \frac{1}{2}sd\left(IB + AD\right)$$

$$sd\,NCD = \frac{1}{2}sd\,DI$$

Mà cung $IB = IA \Rightarrow IMB = NCD \Rightarrow IMB = NCD$.

Ta lại có $IMN + DMN = 180^0$

$\Rightarrow NCD + DMN = 180^0 \Rightarrow MNCD$ nội tiếp.

2. Chứng minh $MA.MB = MI.MC$

Xét ΔMBC và ΔMAI có:

$IAB = ICB$ (cùng chắn cung BI)

$IMA = BMC$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \Delta MAI \backsim \Delta MCB$ $\Rightarrow$đpcm.

3. Chứng minh $EF // AB$:

Do $IDA = ICB$ (cùng chắn hai cung hai cung bằng nhau $IA = IB$) hay $EDF = ECF$

$\Rightarrow$ hai điểm D và C cùng làm với hai đầu đoạn EF… $\Rightarrow EDCF$ nội tiếp

$\Rightarrow EFD = ECD$ (cùng chắn cung ED),mà $ECD = IMN$ (cmt)$\Rightarrow EFD = FMN \Rightarrow EF // AB$.

4. Chứng minh: $IA^2 = IN.ID$.

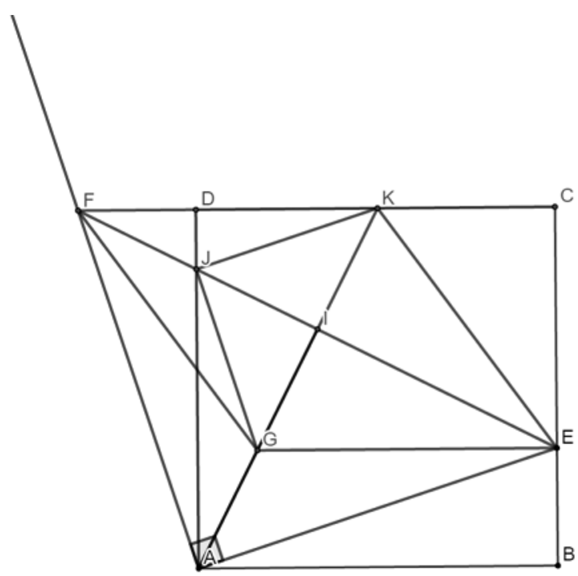
Ta có: $\Delta AIN \backsim \Delta DIA$ vì: góc I chung; $IAN = IDA$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow$đpcm.

Câu 259.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh BC lấy điểm E. Dựng tia $Ax \perp AE$, Ax cắt cạnh CD kéo dài tại F. Kẻ trung tuyến AI của ΔAEF, AI kéo dài cắt CD tại K. Qua E dựng đường thẳng song song với AB ,cắt AI tại G.

1. Chứng minh $AECF$ nội tiếp.
2. Chứng minh: $AF^2 = KF.CF$
3. Chứng minh: $EGFK$ là hình thoi.
4. Chứng minh: khi E di động trên BC thì $EK = BE + DK$ và chu vi ΔCKE có giá trị không đổi.
5. Gọi giao điểm của EF với AD là J. Chứng minh: $GJ \perp JK$.

Hướng dẫn



1. Chứng minh $AECF$ nội tiếp

Ta có: $FAE = DCE = 90^0$ (gt) ....$\Rightarrow AECF$ nội tiếp

2. Chứng minh: $AF^2 = KF.CF$.

Do $AECF$ nội tiếp $\Rightarrow DCA = FEA$ (cung chắn cung AF). Mà $DCA = 45^o$

(Tính chất hình vuông)

$\Rightarrow FEA = 45^o \Rightarrow \Delta FAE$ vuông cân ở A có $FI = IE \Rightarrow AI \perp FE \Rightarrow FAK = 45^o$.

$\Rightarrow FKA = ACF = 45^o$ .Và KFA chung $\Rightarrow \Delta FKA \backsim \Delta FCA \Rightarrow \dfrac{FA}{FC} = \dfrac{FK}{FA} \Rightarrow$ đpcm.

3. Chứng minh: $EGFK$ là hình thoi.

-Do AK là đường trung trực của $FE \Rightarrow \Delta GFE$ cân ở G

$\Rightarrow GFE = GEF$. Mà $GE // CF$ (cùng vuông góc với AD) $\Rightarrow GEF = EFK$ (so le)

$\Rightarrow GFI = IFK \Rightarrow FI$ là đường trung trực của $GK \Rightarrow GI = IK$,mà $IF = IE \Rightarrow GFKE$ là hình thoi.

4. Chứng minh $EK = BE + DK$:

Tam giác ADF và ΔABE có $AD = AB; AF = AE$.(ΔAEF vuông cân)

$\Rightarrow \Delta ADF = \Delta ABE \Rightarrow BE = DF$ mà $FD + DK = FK$ và $FK = KE$ (hình thoi) $\Rightarrow KE = BE + DK$

✦C/m chu vi tam giác CKE không đổi:

Gọi chu vi là $C = KC + EC + KE = KC + EC + BE + DK = \left(KC + DK\right) + \left(BE + EC\right) = 2BC$ không đổi.

5. Chứng minh $IJ \perp JK$:

Do $JIK = JDK = 90^0 \Rightarrow IJDK$ nội tiếp $\Rightarrow JIK = IDK$ (cùng chắn cung IK), $IDK = 45^o$ (t/c hình vuông)

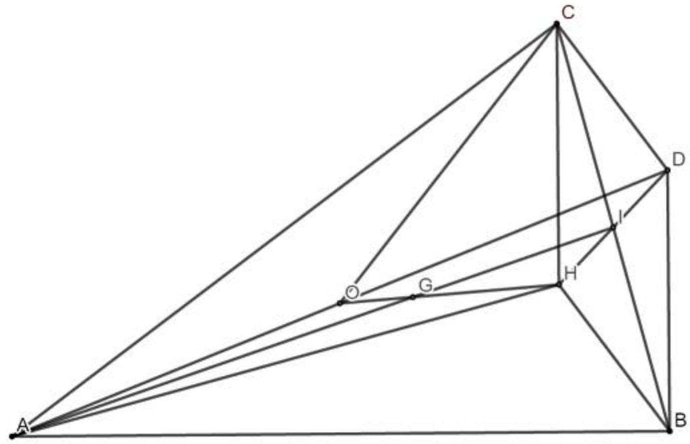
$\Rightarrow JIK = 45^o \Rightarrow \Delta JIK$ vuông vân ở $I \Rightarrow JI = IK$,mà $IK = GI$

$\Rightarrow JI = IK = GI = \dfrac{1}{2}GK \Rightarrow \Delta GJK$ vuông ở J hay $GJ \perp JK$.

Câu 260.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC. Gọi H là trực tâm của tam giác. Dựng hình bình hành $BHCD$. Gọi I là giao điểm của HD và BC.

1. Chứng minh: $ABDC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, nêu cách dựng tâm O.
2. So sánh BAH và OAC.
3. CH cắt OD tại E. Chứng minh $AB.AE = AH.AC$.
4. Gọi giao điểm của AI và OH là G. Chứng minh G là trọng tâm của ΔABC.

Hướng dẫn



1. Chứng minh: $ABDC$ nội tiếp:

Gọi các đường cao của ΔABC là $AN; BM; CN$.

•Do $AQH + HMA = 180^0 \Rightarrow AQHM$ nội tiếp $\Rightarrow BAC + QHM = 180^0$

mà $QHM = BHC$ (đối đỉnh)

$BHC = CDB$ (2 góc đối của hình bình hành)

$\Rightarrow BAC + CDB = 180^0 \Rightarrow ABDC$ nội tiếp.

•Cách xác định tâm O:

Do $CD//BH$ (t/c hình bình hành)

Và $BH \perp AC \Rightarrow CD \perp AC$ hay $ACD = 90^0$,mà $A; D; C$ nằm trên đường tròn

$\Rightarrow AD$ là đường kính. Vậy O là trung điểm AD.

2. So sánh BAH và OAC:

$BAN = QCB$ (cùng phụ với ABC) mà $CH//BD$ (do $BHCD$ là hình bình hành) $\Rightarrow QCB = CBD$ (so le);

$CBD = DAC$ (cùng chắn cung CD) $\Rightarrow BAH = OAC$.

3. Chứng minh: $AB.AE = AH.AC$:

Xét hai tam giác ABH và ACE có $EAC = HCB$ (cmt); $ACE = HBA$ (cùng phụ với BAC)

$\Rightarrow \Delta ABH \backsim \Delta ACE \Rightarrow$ đpcm.

4. Chứng minh: G là trọng tâm của ΔABC, ta phải chứng minh G là giao điểm ba đường trung tuyến hay

$GJ = \frac{1}{3}AI$. Do $IB = IC \Rightarrow OI \perp BC$ mà $AH \perp BC \Rightarrow OI//AH$ .Theo định lý TaLét trong ΔAGH

$\Rightarrow \frac{OI}{AH} = \frac{GI}{AG}$. Do I là trung để $HD \Rightarrow O$ là trung để $AD \Rightarrow \frac{OI}{AH} = \frac{1}{2}$ (T/c đường trung bình)

$\Rightarrow \frac{OI}{AH} = \frac{GI}{AG} = \frac{1}{2} \Rightarrow GI = \frac{1}{2}AI$. Hay $GJ = \frac{1}{3}AI \Rightarrow G$ là trọng tâm của ΔABC.

Câu 261.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) và cung $AB = 90^0$. C là một điểm tuỳ ý trên cung lớn AB. Các đường cao $AI; BK; CJ$ của ΔABC cắt nhau ở H. BK cắt (O) ở $N; AH$ cắt (O) tại M. BM và AN gặp nhau ở D.

1) Chứng minh: $B; K; C; J$ cùng nằm trên một đường tròn.

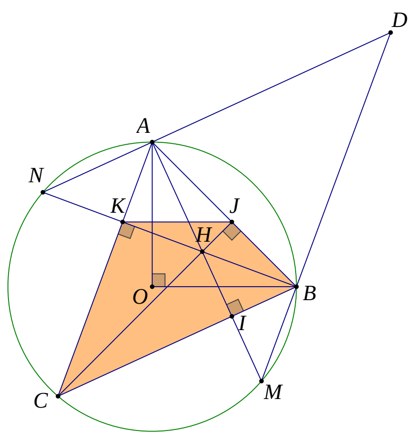
2) Chứng minh: $BI.KC = HI.KB$.

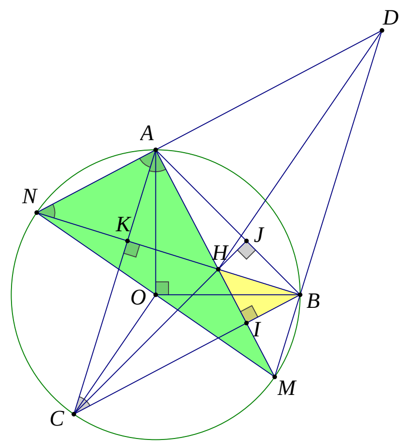
3) Chứng minh: MN là đường kính của (O).

4) Chứng minh $ACBD$ là hình bình hành.

5) Chứng minh: $OC // DH$.

Hướng dẫn





1) Xét tứ giác $BJKC$ có $CJB = CKB = 90^0 \left(gt\right)$ mà đây là hai góc có đỉnh kề nhau, cùng nhìn cạnh BC suy ra tứ giác $BJKC$ nội tiếp.

2) Chỉ ra ΔBIH đồng dạng ΔBKC (g.g) nên $BI.KC = HI.KB$.

3) Chỉ ra $ANB = 45^0$ (góc nt chắn cung AB) mà $NKA = 90^0 \Rightarrow NAK = 45^0$.

Tương tự: $ACB = 45^0, AIC = 90^0 \Rightarrow CAM = 45^0 \Rightarrow MAN = MAC + CAN = 90^0 \Rightarrow MN$ là đường kính của $\left(O\right)$.

4) Chỉ ra $AD // CB$ (cùng vuông góc AM), $AC // BD$ (cùng vuông BN).

5) Ta có: $COM = 2.CAM = 90^0 \Rightarrow OC \perp MN$.

Xét tam giác NHD có: $\begin{cases} AM \perp ND \\ DM \perp NH \end{cases} \Rightarrow M$ là trực tâm tam giác nên $DH \perp MN \Rightarrow DH // OC$ (cùng vuông góc MN)

Câu 262.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi N là một điểm bất kỳ trên CD sao cho $CN < ND$. Vẽ đường tròn tâm O đườn kính BN. (O) cắt AC tại $F; BF$ cắt AD tại $M; BN$ cắt AC tại E.

1) Chứng minh ΔBFN vuông cân.

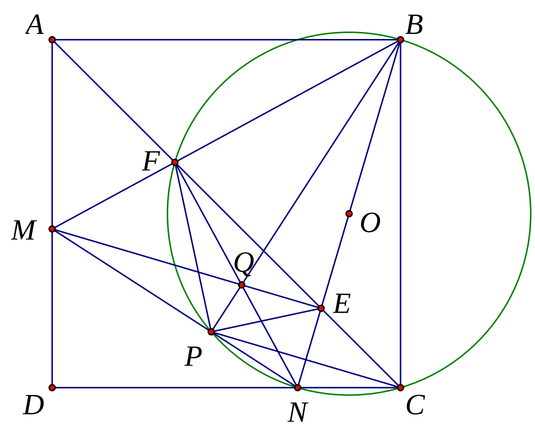
2) Chứng minh: $MEBA$ nội tiếp.

3) Gọi giao điểm của ME và NF là Q. MN cắt (O) ở P. Chứng minh $B; Q; P$ thẳng hàng.

Chứng tỏ $ME // PC$ và $BP = BC$.

4) Chứng minh ΔFPE là tam giác vuông.

Hướng dẫn



1) Chỉ ra BN là đường kính của $(O) \Rightarrow BFN = 90^0$.

Chỉ ra tứ giác $BFNC$ nội tiếp nên $FNB = FCB = 45^0$ (tính chất hình vuông).

Suy ra ΔFNB vuông cân.

2) Chứng minh $MEBA$ nội tiếp

Chỉ ra $MAE = MBE = 45^0$.

3) Chứng minh $B; Q; P$ thẳng hàng.

Do $MABE$ nt $\Rightarrow MAB + NEB = 180^0$ mà $MAB = 90^0$ (t/c hình vuông) $\Rightarrow MEB = 90^0$ hay $ME \perp BN$.

Theo chứng minh trên: $NF \perp BM \Rightarrow Q$ là trực tâm của $\Delta BMN \Rightarrow BQ \perp MN$ (1)

$\Rightarrow$Ta lại có BPN là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn hay $BP \perp MN$ (2).

Từ (1) và (2)$\Rightarrow$ B; Q; P thẳng hàng.

+ Chứng minh: $MF // PC$.

Do $MFN = MEN = 90^0 \Rightarrow MFEN$ nội tiếp $\Rightarrow FNM = FEM$ (cùng chắn cung MF)

Mà $FNP = FNM = FCD$ (cùng chắn cung PF của (O))

$\Rightarrow FEM = FCP \Rightarrow ME//CP$

+ Chứng minh: $BP = BC$:

Do $ME//CP$ và $ME \perp BN \Rightarrow CP \perp BN$.Đường kính MN vuông góc với dây CP $\Rightarrow$ BN là đường trung trực của CP hay ΔBCP cân ở $B \Rightarrow BC = BP$.

4) Chứng minh ΔFPE vuông:

•Do $FPNB$ nội tiếp $\Rightarrow FPB = FNB = 45^o$ (cm$t$)

•Dễ dàng cm được $QENP$ nội tiếp (Hai góc đối tổng bằng 180^0) $\Rightarrow QPE = QNE = 45^o \Rightarrow$ đpcm.

Câu 263.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Trên đường tròn tâm O lần lượt lấy bốn điểm $A; B; C; D$ sao cho $AB = DB;$ AB và CD cắt nhau ở E. BC cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) ở $Q; DB$ cắt AC tại K.

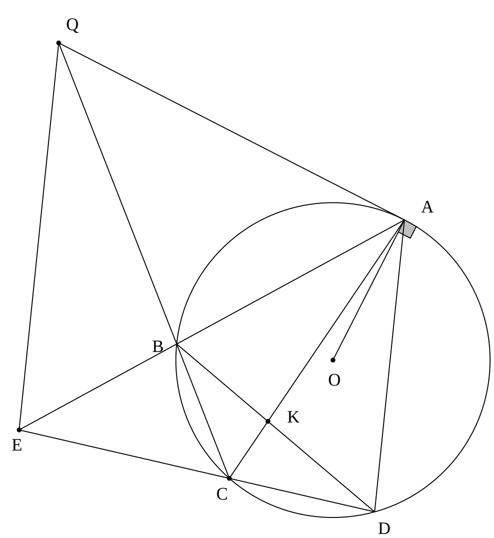
1) Chứng minh CB là phân giác của góc ACE.

2) Chứng minh: $AQEC$ nội tiếp.

3) Chứng minh: $KA.KC = KB.KD$

4) Chứng minh: $QE//AD$.

Hướng dẫn



1/ C/m CB là phân giác của góc ACE :

Do $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow BCD + BAD = 2v$

Mà $BCE + BCD = 2v \Rightarrow BCE = BAD$.

Do $AB = AC$ (gt) $\Rightarrow \Delta BAD$ cân ở B $\Rightarrow BAD = BDA$.

Ta lại có $BDA = BCA$ (Cùng chắn AB)$\Rightarrow BCE = BCA$

$\Rightarrow$ đpcm.

2/C/m $AQEC$ nội tiếp:

Ta có sđ $QAB = \frac{1}{2}$ Sđ AB (góc giữa tiếp tuyến và một dây)

Sđ ADB = sđ $\frac{1}{2}AB$

$\Rightarrow QAB = ADB = BCE$ (cmt) $\Rightarrow QAE = QCE$ $\Rightarrow$hai điểm A và C cùng làm với hai đầu đoạn $QE \Rightarrow$đpcm

3/C/m: $KA.KC = KB.KD$.

C/m $\Delta KAB \backsim \Delta KDC$.

4/C/m: $QE // AD$:

Do $AQEC$ nt$\Rightarrow QEA = QCA$ (cùng chắn QA) mà $QCA = BAD$ (cmt) $\Rightarrow QEA = EAD$

$\Rightarrow QE // AD$.

Câu 264.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) và tiếp tuyến Ax. Trên Ax lấy hai điểm B và C sao cho $AB = BC$. Kẻ cát tuyến BEF với đường tròn. CE và CF cắt (O) lần lượt ở M và N. Dựng hình bình hành $AECD$.

1) Chứng minh: D nằm trên đường thẳng BF .

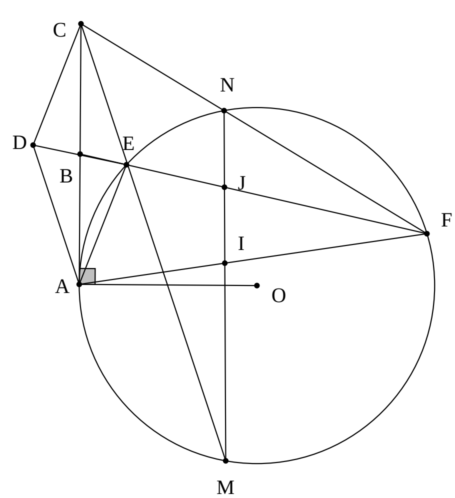
2) Chứng minh: $ADCF$ nội tiếp.

3) Chứng minh: $CF.CN = CE.CM$.

4) Chứng minh: $MN // AC$.

5) Gọi giao điểm của AF với MN là I. Chứng minh: DF đi qua trung điểm của NI .

Hướng dẫn



1) Chứng minh: D nằm trên đường thẳng BF .

Do $ADCE$ là hình bình hành $\Rightarrow$ DE và AC là hai đường chéo.

Do B là trung điểm của AC $\Rightarrow$ B cũng là trung điểm DE hay $D;B;E$ thẳng hàng.

Mà $B;E;F$ thẳng hàng $\Rightarrow$ D nằm trên BF .

2) Chứng minh $ADCF$ nội tiếp:

Do $ADCE$ là hình bình hành $\Rightarrow DCA = CAE$ (so le)

Sđ$CAE = \frac{1}{2} sd\, AE$ (góc giữa tt và một dây) mà $EFA = \frac{1}{2} sd\, AE$

$\Rightarrow$ $CAE = EFA \Rightarrow DFA = DCA$

$\Rightarrow$ hai điểm F và C cùng làm với 2 đầu đoạn AD …..⇒đpcm

3) Chứng minh: $CF.CN = CE.CM$. Ta chứng minh $\Delta CEF \backsim \Delta CNM$.

4) Chứng minh: $MN // AC$.

Do $ADCF$ nội tiếp $\Rightarrow$ $DAC = DFC$ (cùng chắn CD).

Mà $ADCE$ là hình bình hành $\Rightarrow$ $DAC = ACE$ (so le trong), ta lại có $CFD = NME$ (cùng chắn EN)

$\Rightarrow ACM = CMN \Rightarrow AC // MN$.

5) Chứng minh: DF đi qua trung điểm của NI :

Gọi giao điểm của NI với FE là J

Do $NI // AC$ (vì $MN // AB$)

$\Rightarrow NJ // CB$,theo hệquả Talét $\Rightarrow \frac{JF}{FB} = \frac{NJ}{BC}$

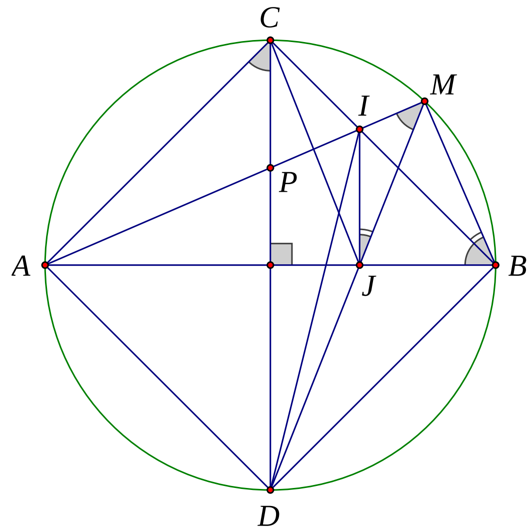
Tương tự : $IJ // AB$ $\Rightarrow$ $\frac{JF}{FB} = \frac{JI}{AB}$

$\frac{JI}{AB} = \frac{NJ}{BC}$ Mà $AB = BC$ (gt)$\Rightarrow$ $JI = NJ$ $\Rightarrow$ đpcm.

Câu 265.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ và đường kính $AB;CD$ vuông góc với nhau.Gọi M là một điểm trên cung nhỏ CB .

1. C/m: $ACBD$ là hình vuông.
2. AM cắt $CD;CB$ lần lượt ở P và I .Gọi J là giao điểm của DM và AB .C/m $IB.IC = IA.IM$.
3. Chứng tỏ $IJ // PD$ và IJ là phân giác của góc CJM .
4. Tính diện tích ΔAID theo R .

Hướng dẫn



1/C/m: $ACBD$ là hình vuông:

Vì O là trung điểm của $AB; CD$ nên $ACBD$ là hình bình hành.

Mà $AC = BD$ (đường kính) và $AC \perp DB$ (gt)$\Rightarrow$hình bình hành $ACBD$ là hình vuông.

2/C/m: $IB.IC = IA.IM$

Xét hai ΔIAC và ΔIBM có $CIA = MIB$ (đ đ)

$IAC = IBM$ (cùng chắn CM)

$\Rightarrow \Delta IAC \backsim \Delta IBM$ (đpcm).

3/•Chứng minh $IJ // PD$.

Do $ACBD$ là hình vuông$\Rightarrow$ $CBO = 45^\circ$.

Và $AC = CB = BD = DA$.

$\Rightarrow AMD = DMB = 45^\circ$

$\Rightarrow IMJ = IBJ = 45^\circ \Rightarrow M$ và B cùng làm với hai đầu đoạn IJ …$\Rightarrow MBJI$ nội tiếp.

$\Rightarrow IJB + IMB = 2v$ mà $IMB = 1v$ $\Rightarrow$ $IJB = 1v$ hay $IJ \perp AB$ .Mà $PD \perp AB$ (gt)$\Rightarrow IJ // PD$

• Chứng minh IJ là phân giác của CJM :

Vì $IJ \perp AB$ hay $AJI = 1v$ và $ACI = 1v$ (tính chất hình vuông)$\Rightarrow ACIJ$ nội tiếp

$\Rightarrow$ $IJC = IAC$ (cùng chắn CI) mà $IAC = IBM$ (cùng chắn CM)$\Rightarrow IJC = IBM$

-Vì $MBJI$ nội tiếp $\Rightarrow MBI = MJI$ (cùng chắn IM)

$\Rightarrow IJC = IJM$ $\Rightarrow$đpcm.

4/Tính diện tích ΔAID theo R :

Do $CB//AD$ (tính chất hình vuông) có $I \in CB \Rightarrow$ khoảng cách từ I đến AD chính bằng CA .Ta lại có

ΔIAD và ΔCAD chung đáy và đường cao bằng nhau. $\Rightarrow S_{IAD} = S_{CAD}$ .Mà $S_{ACD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$

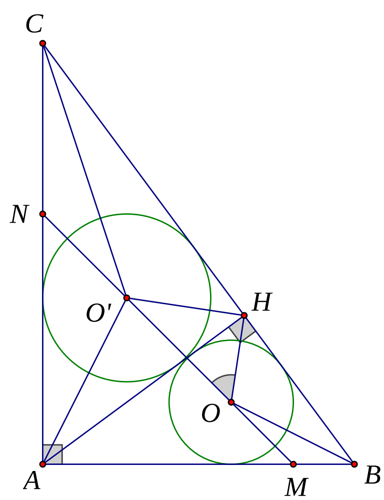
$\Rightarrow S_{IAD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$. Lại có $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AB.CD$ (diện tích có 2 đường chéo vuông góc)

$\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}2R.2R = 2R^2 \Rightarrow S_{IAD} = R^2$.

Câu 266.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC ($A = 90^\circ$).Kẻ $AH \perp BC$ .Gọi O và O' là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AHB và AHC .Đường thẳng OO' cắt cạnh $AB; AC$ tại $M; N$.

1. C/m: $\Delta OHO'$ là tam giác vuông.
2. C/m: $HB.HO' = HA.HO$ C/m: $\Delta HOO' \backsim \Delta HBA$.
3. C/m:Các tứ giác $BMHO$; $HO'NC$ nội tiếp.
4. C/m ΔAMN vuông cân.

Hướng dẫn



1/C/m: $\Delta OHO'$ vuông:

Do $AHB = 90^\circ$ và O là tâm đường tròn nội tiếp ΔAHB $\Rightarrow O$ là giao để ba đường phân giác của tam giác$\Rightarrow$

$AHO = OHB = 45^\circ$.

Tương tự $AHO' = O'HC = 45^\circ$.

$\Rightarrow O'HO = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$.

hay $\Delta O'HO$ vuông ở H .

2/C/m: $HB.HO' = HA.HO$

Do ΔABC vuông ở A và $AH \perp BC$ $\Rightarrow ABH = CAH$ (cùng phụ với góc C) mà $OB; O'A$ lần lượt là phân giác của hai góc trên$\Rightarrow OBH = O'AH$ và $OHB = O'HA = 45^\circ$.

$\Rightarrow \Delta HBO \backsim \Delta HAO' \Rightarrow \dfrac{HB}{HA} = \dfrac{OH}{O'H}$ (1) $\Rightarrow$đcm.

3/c/m $\Delta HOO' \backsim \Delta HBA$.

Từ(1)$\Rightarrow \dfrac{HB}{HA} = \dfrac{HO}{HO'} \Rightarrow \dfrac{HO'}{HA} = \dfrac{HO}{HB}$ (Tính chất tỉ lệ thức). Các cặp cạnh HO và HO' của $\Delta HOO'$ tỉ lệ với các cặp cạnh của ΔHBA và góc xen giữa $BHA = O'HO = 90^\circ \Rightarrow \Delta HOO' \backsim \Delta HBA$.

4/C/m:• $BMOH$ nt:Do $\Delta HOO' \backsim \Delta HBA \Rightarrow O'OH = ABH$ mà $O'OH + MOH = 180^\circ \Rightarrow MBH + MOH = 180^\circ$ $\Rightarrow$đcm.

•C/m $NCHO'$ nội tiếp: $\Delta HOO' \backsim \Delta HBA$ (cmt) và hai tam giác vuông HBA và HAC có góc nhọn $ABH = HAC$ (cùng phụ với ABC) nên $\Delta HBA \backsim \Delta HAC \Rightarrow \Delta HOO' \backsim \Delta HAC \Rightarrow OO'H = ACH$.

Mà $OO'H + NO'H = 180^\circ \Rightarrow NCH + NO'H = 180^\circ \Rightarrow$đcm.

5/C/m ΔAMN vuông cân: Do $OMBH$ nt$\Rightarrow OMB + OHB = 180^\circ$ mà $AMO + OMB = 180^\circ \Rightarrow AMO = OHB$ mà $OHB = 45^\circ \Rightarrow AMO = 45^\circ$. Do ΔAMN vuông ở A có $AMO = 45^\circ \Rightarrow \Delta AMN$ vuông cân ở A.

Câu 267.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn O, đường kính $AB = 2R$, gọi I là trung điểm AO. Qua I dựng đường thẳng vuông góc với AB, đường này cắt nửa đường tròn ở K. Trên IK lấy điểm C, AC cắt (O) tại M; MB cắt đường thẳng IK tại D. Gọi giao điểm của IK với tiếp tuyến tại M là N.

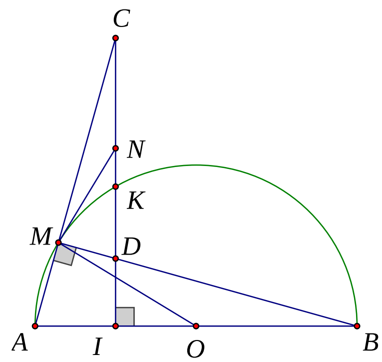
1. Chứng minh: $AIDM$ nội tiếp.
2. Chứng minh $CM.CA = CI.CD$.
3. Chứng minh $ND = NC$.
4. CB cắt AD tại E. Chứng minh E nằm trên đường tròn (O) và C là tâm đường tròn nội tiếp ΔEIM.
5. Giả sử D là trung điểm IK. Tính CD theo R.

Hướng dẫn

1. Chứng minh: $AIDM$ nội tiếp.

Chỉ ra AB là đường kính nên $AMD = 90^0 \Rightarrow AMD + AID = 180^0$.

2. Chứng minh $CM.CA = CI.CD$.



Chỉ ra $\Delta MCD \backsim \Delta ICA\left(g-g\right) \Rightarrow CM.CA = CI.CD$.

3. Chứng minh $ND = NC$.

Ta có: $NMD = A = \frac{1}{2} sd\, MB$ mà $\Delta MCD \backsim \Delta ICA \Rightarrow A = MDN \Rightarrow NMD = NDM \Rightarrow \Delta MND$ cân tại $N \Rightarrow NM = ND$.

Vì $\begin{cases} NMC + NMD = 90^0\left(gt\right) \\ NCM + NDM = 90^0\left(gt\right) \\ NMD = NDM\left(cmt\right) \end{cases} \Rightarrow NMC = NCM \Rightarrow \Delta MNC$ cân tại $N \Rightarrow NM = NC$.

Vậy $ND = NC$

4. CB cắt AD tại E. Chứng minh E nằm trên đường tròn (O) và D là tâm đường tròn nội tiếp ΔEIM.

Trong ΔACB có D là trực tâm tam giác, suy ra $AD \perp CB \Rightarrow AEB = 90^0 \Rightarrow E$ nằm trên nửa đường tròn (O).

+ Chứng minh D là tâm đường tròn nội tiếp ΔEMI. Ta phải chứng minh D là giao điểm 3 đường phân giác của ΔEMI .

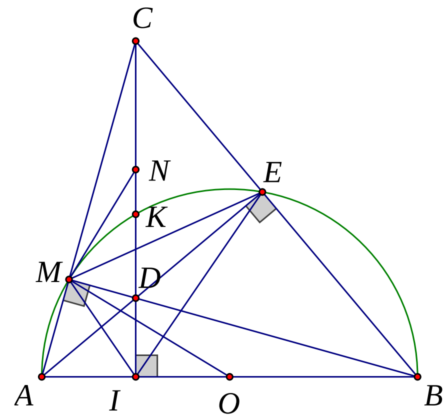
Ta có: $MED = MBA\left(= \frac{1}{2} sd\, MA\right)$ mà tứ giác $BEDI$ nội tiếp nên $MBA = IED\left(= \frac{1}{2} sd\, DI\right)$

Suy ra $MED = DEI \Rightarrow ED$ là phân giác góc MEI.

Chứng minh tương tự: $\begin{cases} DME = DAB\left(= \frac{1}{2} sd\, BE\right) \\ DAB = DMI\left(= \frac{1}{2} sd\, DI\right) \end{cases} \Rightarrow DME = DMI \Rightarrow MD$ là phân giác góc EMI.

Vậy D là tâm đường tròn nội tiếp ΔEMI.

5. Giả sử D là trung điểm IK. Tính CD theo R.



Do KI là trung trực của $AO \Rightarrow \Delta AKO$ cân ở $K \Rightarrow KA = KO$ mà $KO = AO = R$ (bán kính)

$\Rightarrow \Delta AKO$ là tam giác đều $\Rightarrow KI = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow DI = KD = \dfrac{KI}{2} = \dfrac{R.\sqrt{3}}{4}$

Áp dụng PiTaGo trong tam giác vuông ACI có:

$$AC = \sqrt{CI^2 + AI^2} = \sqrt{\frac{3R^2}{16} + \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{7}}{4}$$

$\Rightarrow$ ΔCIA đồng dạng ΔBMA (hai tam giác vuông có CAI chung)

$$\Rightarrow \frac{CA}{BA} = \frac{IA}{MA} \Rightarrow MA = \frac{AB.AI}{AC} = 2R.\frac{R}{2} : \frac{R\sqrt{7}}{4} = \frac{4R\sqrt{7}}{7}$$

$$\Rightarrow MC = AM - AC = \frac{9R\sqrt{7}}{28}$$

áp dụng hệ thức câu 2 $\Rightarrow CD = \dfrac{3R\sqrt{3}}{4}$.

Câu 268.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC. Gọi P là một điểm nằm trong tam giác sao cho góc $PBA = PAC$. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống $AB; AC$.

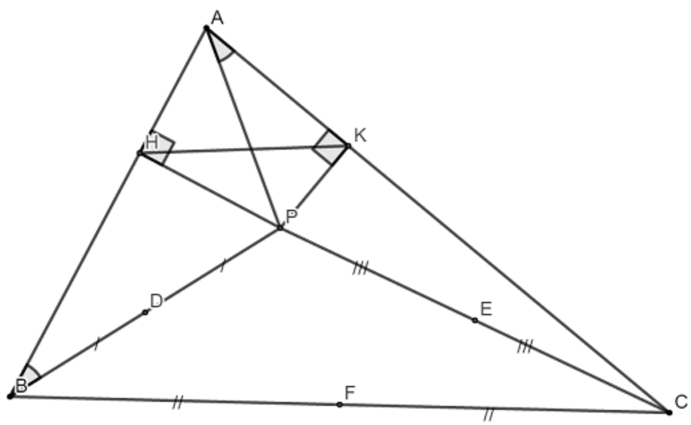
1. Chứng minh $AHPK$ nội tiếp.

2. Chứng minh $HB.KP = HP.KC$.

3. Gọi $D; E; F$ lần lượt là trung điểm của $PB; PC; BC$. Chứng minh: $HD = EF$; $DF = EK$

4. Chứng minh đường trung trực của HK đi qua F.

Hướng dẫn



1. Chứng minh $AHPK$ nội tiếp (HS tự CM)

2. Chứng minh $HB.KP = HP.KC$.

C/m hai Δ vuông HPB và KPC đồng dạng.

3. Gọi $D; E; F$ lần lượt là trung điểm của $PB; PC; BC$. Chứng minh: $HD = EF$; $DF = EK$

+ Chứng minh $HD = FE$:

Do $FE // DO$ và $DF // EP$ (FE và FD là đường trung bình của ΔPBC)

DPEF là hình bình hành $\Rightarrow$ $DP = FE$.

Do D là trung điểm của BP $\Rightarrow$ DH là trung tuyến của Δ vuông HBP

$\Rightarrow$ $HD = DP$ $\Rightarrow$ $DH = FE$

+ Chứng minh tương tự có: $DF = EK$.

4/C/m đường trung trực của HK đi qua F.

Ta phải C/m EF là đường trung trực của HK. Hay cần c/m $FK = FH$.

Do $HD = DP + DB$ $\Rightarrow$ $HDP = 2 \quad ABP$ (góc ngoài tam giác cân ABP)

Tương tự $KEP = 2 \quad ACP$

Mà $ABP = ACD$ (gt)

$\Rightarrow$ $HDP = KEP$ (1)

Do $PEFD$ là hình bình hành (cmt) $\Rightarrow$ $PDF = PEF$ (2)

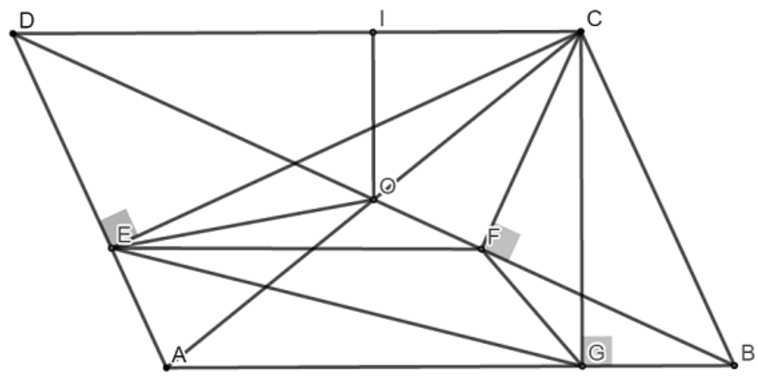
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $HDF = KEF$ mà $HD = FE$; $KE = DF$ $\Rightarrow$ $\Delta DHF \backsim \Delta EFK$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $FK = FH$

$\Rightarrow$ đpcm.

Câu 269.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho hình bình hành $ABCD$ ($DAB > 90^0$). Từ C kẻ CE; CF; CG lần lượt vuông góc với AD; DB; AB.

1. C/m $DEFC$ nội tiếp.
2. C/m: $CF^2 = EF.GF$.
3. Gọi O là giao điểm AC và DB.Kẻ $OI \perp CD$. Chứng minh rằng: OI đi qua trung điểm của AG.
4. Chứng tỏ $EOFG$ nội tiếp.

Hướng dẫn



1/Chứng minh $DEFC$ nội tiếp: (Sử dụng hai điểm E; F cùng làm với hai đầu đoạn thẳng CD).

2/Chứng minh: $CF^2 = EF.GF$.

Xét ΔECF và ΔCGF có:

-Do $DEFC$ nt$\Rightarrow$ $FCE = FDE$ (Cùng chắn cung FE); $FDE = FBC$ (so le).

Do $GBCF$ nt (tự chứng minh) $\Rightarrow$ $FBC = FGC$ (cùng chắn cung FC)

$\Rightarrow$ $FGC = FCE$.

-Do $GBCF$ nt $\Rightarrow$ $GBF = GCF$ (cùng chắn cùngG) mà $GBF = FDC$ (so le).

Do $DEFC$ nội tiếp $\Rightarrow$ $FDC = FCE$ (cùng chắn cung CF)

$\Rightarrow$ $FCG = FEC$ $\Rightarrow$ $\Delta ECF \backsim \Delta CGF \Rightarrow$ đpcm.

3/Chứng minh O đi qua trung điểm AG. Gọi giao điểm của đường tròn tâm O đường kính AC là J

Do $AG//CJ$ và $CG \perp AG$ $\Rightarrow$ $AGCJ$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow$ $AG = CJ$. Vì $OI \perp CJ$ nên I là trung điểm CJ (đường kính $\perp$ với 1 dây…)

$\Rightarrow$ đpcm.

4/Chứng minh $EOFG$ nội tiếp:

- Do $CEA = AGC = 1v$ $\Rightarrow$ $AGCE$ nt trong (O) $\Rightarrow$ $AOG = 2GCE$ (Góc nt bằng nửa góc ở tâm cùng chắn 1 cung; Và $EAG + GCE = 2v$ (2 góc đối của tứ giác nt).

Mà $ADG + ADC = 2v$ (Hai góc đối của hbh)

$\Rightarrow EOG = 2ADC$ (1)

• Do $DEFC$ nt $\Rightarrow EFD = ECD$ (cùng chắn cung DE); $ECD = 90^0 - EDC$ (2 góc nhọn của Δ vuông EDC) (*);

Do $GBCF$ nt $\Rightarrow GFB = GBC$ (cùng chắn cung GB); $BCG = 90^0 - GBC$ (**).

Từ(*) và (**) $\Rightarrow EFD + GFB = 90^0 - EDC + 90^0 - GBC = 180^0 - 2ADC$

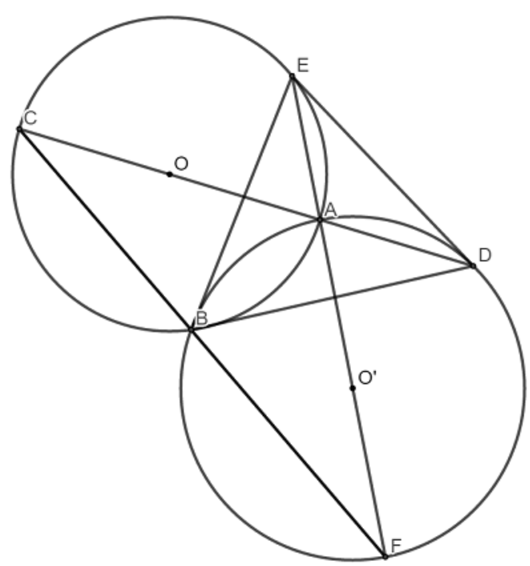
mà $EFG = 180^0 - \left(EFD + GFB\right) = 180^0 - 180^0 + 2ADC = 2ADC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EOG = EFG \Rightarrow$ Tứ giác $EOFG$ nội tiếp.

Câu 270.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Các đường thẳng AO cắt (O), (O') lần lượt ở C và D; đường thẳng AO' cắt (O) và (O') lần lượt ở E và F.

1. Chứng minh: C; B; F thẳng hàng.
2. Chứng minh $CDEF$ nội tiếp.
3. Chứng tỏ $DA.FE = DC.EA$
4. Chứng minh A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BDE.
5. Tìm điều kiện để DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O); (O').

Hướng dẫn



1/Chứng minh: C; B; F thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{ABF} = 1v$; $\widehat{ABC} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow$ $\widehat{ABC} + \widehat{ABF} = 2v$ $\Rightarrow$ C; B; F thẳng hàng.

2/Chứng minh $CDEF$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{AEF} = \widehat{ADC}$ =1v $\Rightarrow$ E; D cùng làm với hai đầu đoạn CF …

$\Rightarrow$ đpcm.

3/Chứng minh $DA.FE = DC.EA$.

Xét hai tam giác vuông DAC và EAF có $\widehat{DAC} = \widehat{EAF}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow$ $\Delta DAC \backsim \Delta EAF$ $\Rightarrow$ đpcm.

4/Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBDE.

Ta phải chứng minh A là giao điểm 3 đường phân giác của ΔDBE. **(Xem các bài trước)**

5/Để DE là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn cần điều kiện là:

Nếu DE là tiếp tuyến chung thì $OD \perp DE$ và $O'E$ vuông góc DE.

Vì $OA = OD$ $\Rightarrow$ ΔAOD cân ở O $\Rightarrow$ $\widehat{ODA} = \widehat{OAD}$.

Tương tự tam giác $O'AE$ cân ở O' $\Rightarrow$ $\widehat{OAE} = \widehat{O'EA}$.

Mà góc $\widehat{O'AE} = \widehat{OAD}$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow$ $\widehat{O'DO} = \widehat{O'EO}$ $\Rightarrow$ D và E cùng làm với hai đầu đoạn thẳng OO' những góc bằng nhau $\Rightarrow$ Tứ giác $ODEO'$ nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{ODE} + \widehat{EO'O} = 2v$.

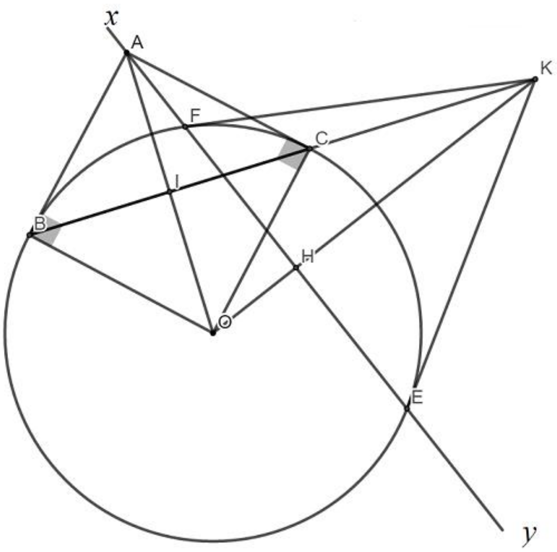
Vì DE là tiếp tuyến của (O) và (O') $\Rightarrow$ $\widehat{ODE} = \widehat{O'ED} = 1v$ $\Rightarrow$ $\widehat{EO'O} = 1v$ $\Rightarrow$ Tứ giác $ODEO'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ $DA = AO' = OA = AE$ (tính chất hcn) hay $OA = O'A$.

Vậy để DE là tt chung của hai đường tròn thì hai đường tròn có bán kính bằng nhau.(Hai đường tròn bằng nhau)

Câu 261.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$. Một cát tuyến xy cắt (O) ở E và F. Trên xy lấy điểm A nằm ngoài đoạn EF, vẽ 2 tiếp tuyến AB và AC với (O). Gọi H là trung điểm EF.

1. Chứng tỏ 5 điểm: A; B; C; H; O cùng nằm trên một đường tròn.
2. Đường thẳng BC cắt OA ở I và cắt đường thẳng OH ở K. C/m: $OI.OA = OH.OK = R^2$.
3. Khi A di động trên xy thì I di động trên đường nào?
4. C/m KE và KF là hai tiếp tuyến của (O).

Hướng dẫn



1/ C/m: A; B; C; H; O cùng nằm trên một đường tròn:

Ta có $ABO = ACO$ (tính chất tiếp tuyến).Vì H là trung điểm dây FE nên $OH \perp FE$ (đường kính đi qua trung điểm 1 dây) hay kính AO.

$OHA = 90^0 \Rightarrow$ 5 điểm A; B; O; C; H cùng nằm trên đường tròn đường kính AO.

2/C/m: $OI.OA = OH.OK = R^2$.

•Do ΔABO vuông ở B có BI là đường cao. Áp dung hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$OB^2 = OI.OA$; mà $OB = R \Rightarrow OI.OA = R^2$. (1)

•Xét hai tam giác vuông OHA và OIK có IOH chung $\Rightarrow \Delta AHO \backsim \Delta KIO \Rightarrow \dfrac{OA}{OK} = \dfrac{OH}{OI}$

$\Rightarrow OI.OA = OH.OK$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm.

4/ Chứng minh KE và KF là hai tt của đường tròn (O).

-Xét ΔEKO và ΔEHO. Do $OH.OK = R^2 = OE^2 \Rightarrow \dfrac{OH}{OE} = \dfrac{OE}{OK}$ và EOH chung

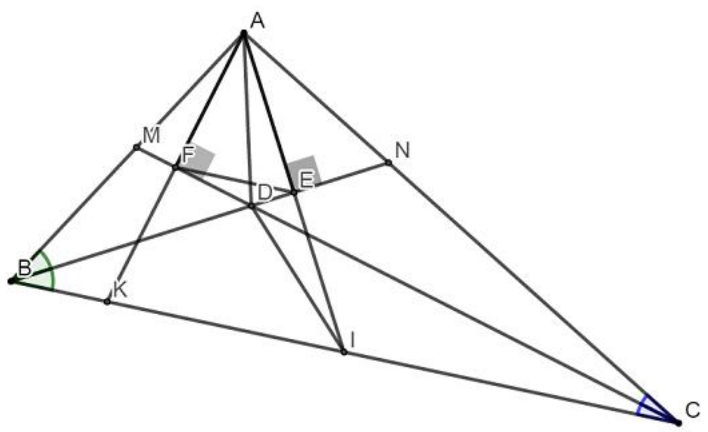
$\Rightarrow \Delta EOK \backsim \Delta HOE$ (c.g.c) $\Rightarrow OEK = OHE$ mà $OHE = 90^0 \Rightarrow OEK = 90^0$

hay $OE \perp EK$ để E nằm trên (O) $\Rightarrow$ EK là tt của (O)

Câu 262.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ có hai đường phân giác CM, BN cắt nhau ở D. Qua A kẻ AE và AF lần lượt vuông góc với BN và CM. Các đường thẳng AE và AF cắt BC ở I; K.

1. C/m $AFDE$ nội tiếp.
2. C/m: $AB.NC = BN.AB$
3. C/m FE song song BC
4. Chứng tỏ $ADIC$ nội tiếp. Chú ý bài toán vẫn đúng khi $AB > AC$

Hướng dẫn



1/C/m $AFDE$ nội tiếp. (Hs tự c/m)

2/C/m: $AB.NC = BN.AB$

Do D là giao điểm các đường phân giác BN và CM của $\Delta ABN \Rightarrow \dfrac{BD}{DN} = \dfrac{AB}{AN}(1)$

Do CD là phân giác của ΔCBN $\Rightarrow \dfrac{BD}{DN} = \dfrac{BC}{CN}(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{BC}{CN} = \dfrac{AB}{AN} \Rightarrow$ đpcm

3) C/m $FE // BC$

Do BE là phân giác của ΔABI và $BE \perp AI$ $\Rightarrow$ BE là đường trung trực của AI. Tương tự CF là phân giác của ΔACK và $CF \perp AK$ $\Rightarrow$ CF là đường trung trực của AK $\Rightarrow$ E là F lần lượt là trung điểm của AI và AK $\Rightarrow$ FE là đường trung bình của ΔAKI $\Rightarrow FE // KI$ hay $EF // BC$.

4/C/m $ADIC$ nt.

Do $AEDF$ nt $\Rightarrow$ $DAE = DFE$ (cùng chắn cung DE)

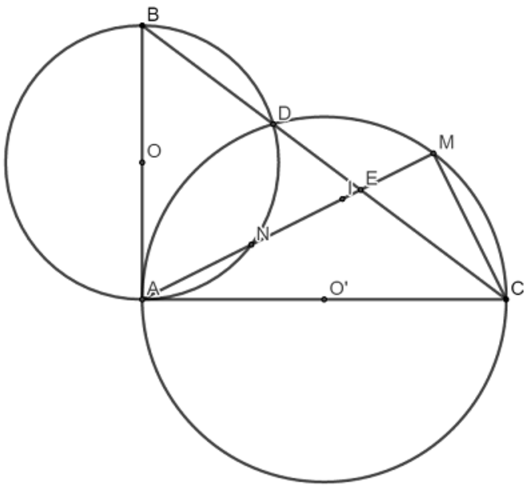
Do $FE // BC$ $\Rightarrow$ $EFD = DCI$ (so le)

$DAI = DCI$ $\Rightarrow$ Tứ giác $ADIC$ nội tiếp

Câu 263.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC ($BAC = 90^0$); $AB = 15$; $AC = 20$ (cùng đơn vị đo độ dài). Dựng đường tròn tâm O đường kính AB và (O’) đường kính AC. Hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại điểm thứ hai D.

1. Chứng tỏ D nằm trên BC.
2. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ DC. AM cắt DC ở E và cắt (O) ở N. C/m $DE.AC = AE.MC$
3. C/m $AN = NE$ và O; N; O’ thẳng hàng.
4. Gọi I là trung điểm MN. C/m $OIO' = 90^0$.
5. Tính diện tích ΔAMC.

Hướng dẫn



1/Chứng tỏ: D nằm trên đường thẳng BC: Do $ADB = 90^0$; $ADC = 90^0$ (góc nt chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow ADB + ADC = 180^0 \Rightarrow D;\ B;\ C$ thẳng hàng.

-Tính DB: Theo PiTaGo trong tam giác vuông ABC có: $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC có: $AD.BC = AB.AC \Rightarrow AD = 20.15 : 25 = 12$

2/C/m: $DE.AC = AE.MC$.

Xét ΔADE và ΔAMC. Có $ADE = 90^0$ (cmt) và $AMC = 90^0$ (góc nt chắn nửa đường tròn).

Do cung $MC = DB$ (gt) $\Rightarrow DAE = MAC$ (2 góc nt chắn 2 cung bằng nhau)

$\Rightarrow \Delta DAE \backsim \Delta MAC \Rightarrow \dfrac{DA}{MA} = \dfrac{DE}{MC} = \dfrac{AE}{AC}$ (1) $\Rightarrow$ĐPCM.

3/C/m: $AN = NE$.

Do BA vuông góc AO' (ΔABC vuông ở A) $\Rightarrow BA$ là tt của $(O') \Rightarrow sđ\, AE = \dfrac{1}{2} sđ\, AM$

$Sđ\, ED = \dfrac{1}{2} sđ\left(MC + AD\right)$ mà $MC = DM \Rightarrow MC + AD = AM$

$\Rightarrow AED = BAC \Rightarrow \Delta BAE$ cân ở B mà $BM \perp AE \Rightarrow NA = NE$.

•C/m O; N; O' thẳng hàng.

ON là đường trung bình của ΔABE $\Rightarrow ON // BE$ và OO' song song BE

$\Rightarrow$ O; N; O' thẳng hàng.

4/Do OO' song song BC và cung $MC = MD$ $\Rightarrow$ $O'M$ vuông góc BC $\Rightarrow$ $O'M$ vuông góc OO'

$\Rightarrow$ tam giác $NO'M$ vuông ở O' có $O'I$ là trung tuyến $\Rightarrow$ $\Delta INO'$ cân ở I $\Rightarrow$ $IO'M = INO'$

mà $INO' = ONA$ (hai góc đối đỉnh)

ΔOAN cân ở O $\Rightarrow$ $ONA = OAN$ $\Rightarrow$ $OAI = IO'O$ $\Rightarrow$ Tứ giác $OAO'I$ nt

$\Rightarrow OAO' + OIO' = 180^0$ mà $OAO' = 90^0$ $\Rightarrow$ $OIO' = 90^0$.

5/ Tính diện tích tam giác AMC.

Ta có $S_{AMC} = \frac{1}{2}AM.MC$.

Ta có $BD = \frac{AB^2}{BC} = 9 \Rightarrow$ $DC = 16$.

Ta lạ có $DA^2 = CD.BD = 16.9 \Rightarrow$ $AD = 12$; $BE = AB = 15 \Rightarrow$ $DE = 15 - 9 = 6$

$\Rightarrow$ $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = 6\sqrt{5}$

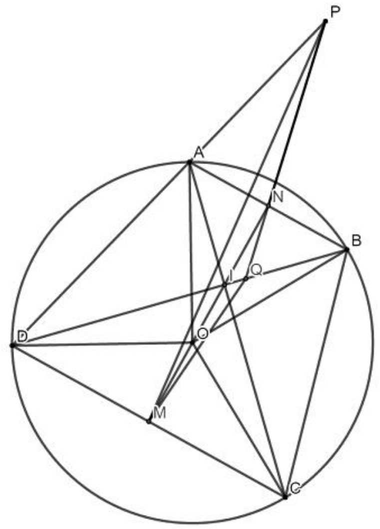
Từ 1) tính AM; MC rồi tính S.

Câu 264.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Trên $(O;R)$ ta lần lượt đặt theo một chiều kể từ điểm A một

$AB = 60^0$; $BC = 90^0$ và $CD = 120^0$.

1. C/m $ABCD$ là hình thang cân.
2. Chứng tỏ $AC \perp DB$.
3. Tính các cạnh và các đường chéo của $ABCD$.
4. Gọi M; N là trung điểm các cạnh DC và AB. Trên DA kéo dài về phía A lấy điểm P; PN cắt DB tại Q. C/m MN là phân giác của PMQ.

Hướng dẫn



1/C/m: $ABCD$ là hình thang cân.

Do $BC = 90^0 \Rightarrow BAC = 45^0$ (góc nt bằng nửa cung bị chắn).

Do $AB = 60^0$; $BC = 90^0$; $CD = 120^0$

$\Rightarrow AD = 90^0 \Rightarrow ACD = 45^0 \Rightarrow BAC = ACD = 45^0 \Rightarrow AB//CD$.

Vì $DAB = 150^0$. $ABC = 150^0 \Rightarrow BCD = CDA \Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ là thang cân.

2/C/m $AC \perp DB$.

Gọi I là giao điểm của AC và BD.

$sđ\, AID = \dfrac{1}{2} sđ \left(AD + BC\right) = 90^o \Rightarrow AC \perp DB$.

3/Do $AB = 60^0 \Rightarrow AOB = 60^0 \Rightarrow$ tam giác AOB là tam giác đều $\Rightarrow AB = \mathrm{R}$.

Do $BC = 90^0 \Rightarrow BOC = 90^o \Rightarrow \Delta BOC$ vuông cân ở $O \Rightarrow BC = AD = R\sqrt{2}$

Do $CD = 120^0 \Rightarrow DOC = 120^0$. Kẻ $OK \perp CD \Rightarrow DOK = 60^0 \Rightarrow \sin 60^0 = \dfrac{DK}{OD} \Rightarrow DK = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow CD = 2DK = R\sqrt{3}$.

-Tính AC: Do ΔAIB vuông cân ở $I \Rightarrow 2IC^2 = AB^2 \Rightarrow IA = \dfrac{\sqrt{2}}{2} AB$ suy ra $IA = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Tương tự $IC = \dfrac{R\sqrt{6}}{2}$. Ta có AC = $DB = IA + IC = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} + \dfrac{R\sqrt{6}}{2} = \dfrac{(1+\sqrt{3})R\sqrt{2}}{2}$

4/ PN cắt CD tại E; MQ cắt AB tại I; PM cắt AB tại J.

•Do $JN // ME \Rightarrow \dfrac{JN}{ME} = \dfrac{PN}{PE}$

Do $AN // DE \Rightarrow \dfrac{AN}{DE} = \dfrac{PN}{PE} \Rightarrow \dfrac{AN}{DE} = \dfrac{JN}{ME}$

•Do $NI // ME \Rightarrow \dfrac{NI}{ME} = \dfrac{NQ}{QE}$

$NB//ME \quad \Rightarrow \dfrac{NB}{DE} = \dfrac{NQ}{QE} \Rightarrow \dfrac{NI}{ME} = \dfrac{NB}{DE}$

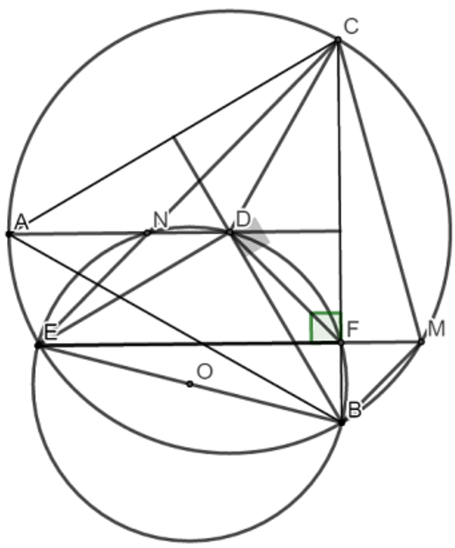
Vì $NB = NA \Rightarrow \dfrac{JN}{ME} = \dfrac{NI}{ME}$

$\Rightarrow NI = NJ$. Mà $MN \perp AB$ (tc thang cân) $\Rightarrow \Delta JMI$ cân ở $M \Rightarrow MN$ là phân giác…

Câu 265.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Gọi D là giao điểm hai đường phân giác góc A và góc B của ΔABC. Từ D dựng tia Dx vuông góc với DB. Trên Dx lấy điểm E sao cho $ED = DB$ (D và E nằm hai phía của đường thẳng AB). Từ E kẻ $EF \perp BC$. Gọi O là trung điểm EB.

1. C/m $AEBC$ và $EDFB$ nội tiếp,xác định tâm và bán kính của các đường tròn ngoại tiếp các tứ giác trên theo a.
2. Kéo dài FE về phía F cắt (D) tại M. EC cắt (O) ở N. C/m $EBMC$ là thang cân. Tính diện tích.
3. C/m EC là phân giác của DCA.
4. C/m FD là đường trung trực của MB.
5. Chứng tỏ $A; D; N$ thẳng hàng.
6. Tính diện tích phần mặt trăng được tạo bởi cung nhỏ EB của hai đường tròn.

Hướng dẫn



1/Do tam giác ABC là tam giác đều có D là giao điểm 2 đường phân giác góc A và B

$\Rightarrow BD = DA = DC$ mà $DB = DE \Rightarrow A;\ B;\ E;\ C$ cách đều $D \Rightarrow AEBC$ nt trong (D).

Tính DB.

Áp dụng công thức tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều ta có:

$$DB = \frac{AB}{2\text{Sin}\dfrac{180^o}{n}} = \frac{AB}{2\sin 60^o} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Do $EDB = EFB = 90^0 \Rightarrow EDFB$ nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính EB.

Theo Pytago trong tam giác vuông EDB có:

$$EB^2 = 2ED^2 = 2.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

$$\Rightarrow EB = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

2/ C/m $EBMC$ là thang cân.

$EDB = 90^0$ là góc ở tâm (D) chắn cung $EB \Rightarrow EB = 90^0 \Rightarrow ECN = 45^0 \Rightarrow \Delta EFC$ vuông cân ở F

$\Rightarrow FEC = 45^0 \Rightarrow MBC = 45^0$ $(= MEC = 45^0)$

$\Rightarrow EFC = CBM = 45^0 \Rightarrow BM // EC$. Ta có ΔFBM vuông cân ở F

$\Rightarrow BC = EM \Rightarrow EBMC$ là thang cân.

Do $EBMC$ là thang cân có hai đường chéo vuông góc $\Rightarrow S_{EBMC} = \frac{1}{2}BC.EM$ $(BC = EM = a)$

$\Rightarrow S_{EBMC} = \frac{1}{2}a^2$.

3/C/m EC là phân giác của DCA:

Ta có $ACB = 60^0$; $ECB = 45^0 \Rightarrow ACE = 15^0$.

Do BD; DC là phân giác của tam giác đều $ABC \Rightarrow DCB = ACD = 30^0$ và $ECA = 15^0$

$\Rightarrow ECD = 15^0 \Rightarrow ECA = ECD$

$\Rightarrow EC$ là phân giác của ECA.

4/C/m FD là đường trung trực của MB:

Do $BED = BEF + FED = 45^0$ và $FEC = FED + DEC = 45^0$

$\Rightarrow BEF = DEC$ và $DEC = DCE = 15^0$. Mà $BEF = BDF$ (cùng chắn cung BF) và $NED = NBD$ (cùng chắn cung ND) $\Rightarrow NBD = BDF \Rightarrow BN // DF$ mà $BN \perp EC$ (góc nt chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow DF$ vuông góc EC. Do $DC // BM$ (vì $BMCE$ là hình thang cân)

$\Rightarrow DF \perp BM$ nhưng ΔBFM vuông cân ở F

$\Rightarrow FD$ là đường trung trực của MB.

5/C/m: A; N; D thẳng hàng: Ta có $BND = BED = 45^0$ (cùng chắn cung DB)

và $ENB = 90^0$ (cmt); ENA là góc ngoài ΔANC

$\Rightarrow ENA = NAC + CAN = 45^0$

$\Rightarrow ENA + ENB + BND = 180^0$

$\Rightarrow A$; N; D thẳng hàng.

6/ Gọi diện tích mặt trăng cần tính là: **S**.

Ta có: $\mathbf{S} = S_{nua\ (O)} - S_{viên\ phân\ EDB}$

- $S_{(O)} = \pi.OE^2 = \pi.\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \dfrac{a^2\pi}{6} \Rightarrow S_{\frac{1}{2}}(O) = \dfrac{a^2\pi}{12}$

- $S_{quat\ EBD} = \dfrac{\pi \times BD^2.90^0}{360^0} = \dfrac{\pi}{4} \times \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \dfrac{a^2\pi}{12}$

- $S_{\Delta EBD} = \dfrac{1}{2}DB^2 = \dfrac{a^2}{6}$

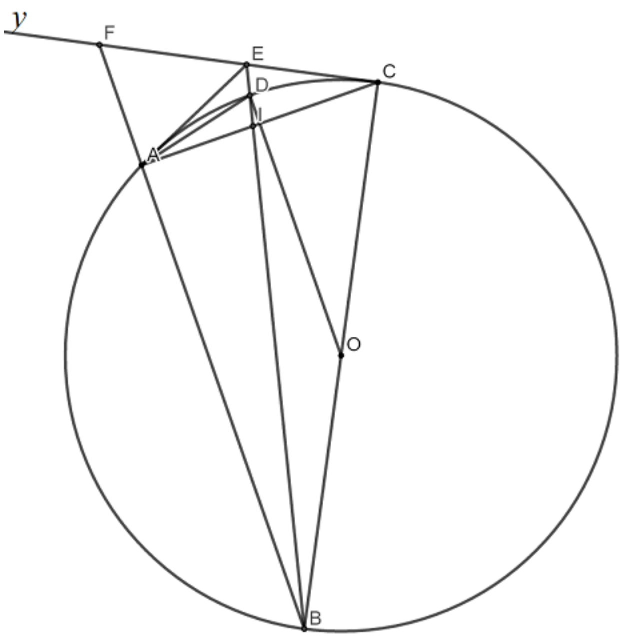
- $S_{viên\ phân} = S_{quat\ EBD} - S_{\Delta EDB} = \dfrac{a^2\pi}{12} - \dfrac{a^2}{6} = \dfrac{a^2(\pi - 2)}{12}$

- $\mathbf{S} = \dfrac{a^2\pi}{12} - \dfrac{a^2(\pi-2)}{12} = \dfrac{a^2}{6}$.

Câu 266.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC. Gọi a là một điểm bất kỳ trên nửa đường tròn; BA kéo dài cắt tiếp tuyến Cy ở F. Gọi D là điểm chính giữa cung AC; DB kéo dài cắt tiếp tuyến Cy tại E.

1. C/m BD là phân giác của ABC và $OD // AB$.
2. C/m $ADEF$ nội tiếp.
3. Gọi I là giao điểm BD và AC. Chứng tỏ $CI = CE$ và $IA.IC = ID.IB$.
4. C/m $AFD = AED$.

Hướng dẫn



1/* C/m BD là phân giác của ABC.

Do cung $AD = DC(gt)$ $\Rightarrow$ $ABD = DBC$ (hai góc nt chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow$ BD là phân giác của ABC.

*Do cung $AD = DC$ $\Rightarrow$ $AOD = DOC$ (2 cung bằng nhau thì hai góc ở tâm bằng nhau).

Hay OD là phân giác của tam giác cân AOC $\Rightarrow OD \perp AC$.

Vì BAC là góc nt chắn nửa đường tròn $\Rightarrow BA \perp AC$.

$\Rightarrow OD // BA$

2/C/m $ADEF$ nội tiếp:

Do $ADB = ACB$ (cùng chắn cung AB)

Do $ACB = BFC$ (cùng phụ với ABC)

$\Rightarrow ADB = AFE$

Mà $ADB + ADE = 180^0$ $\Rightarrow$ $AFE + ADE = 180^0 \Rightarrow$ $ADEF$ nội tiếp.

3/C/m: * $CI = CE$:

Ta có: $sđ\ DCA = \frac{1}{2} sđ\ AD$ (góc nt chắn cung AD)

$Sđ\ ECD = \frac{1}{2} sđ DC$ (góc giữa tt và 1 dây)

Mà cung $AD = DC$ $\Rightarrow$ $DCA = ECD$ hay CD là phân giác của ΔICE.

Nhưng $CD \perp DB$ (góc nt chắn nửa đt)

$\Rightarrow$ CD vừa là đường cao,vừa là phân giác của ΔICE

$\Rightarrow$ ΔICE cân ở C $\Rightarrow$ $IC = CE$.

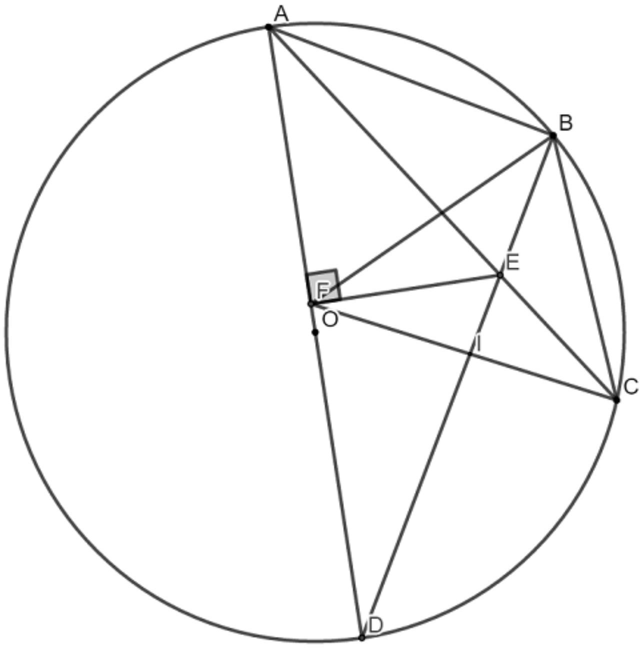
*C/m $\Delta IAD \backsim \Delta IBC$ (có $DAC = DBC$ cùng chắn cung DC)

4/ Tự c/m:

Câu 267.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đtròn (O); đường kính AD. Trên nửa đường tròn lấy hai điểm B và C sao cho cung $AB < AC$. AC cắt BD ở E. Kẻ $EF \perp AD$ tại F.

1. C/m: $ABEF$ nt.
2. Chứng tỏ $DE.DB = DF.DA$.
3. C/m: E là tâm đường tròn nội tiếp ΔFBC.
4. Gọi I là giao điểm BD với CF .C/m $BI^2 = BF.BC - IF.IC$

Hướng dẫn



1/Sử dụng tổng hai góc đối.

2/c/m: $DE.DB = DF.DA$

Xét hai tam giác vuông BDA và FDE có góc D chung.

$\Rightarrow \Delta BDA \backsim \Delta FDE$ (đpcm).

3/C/m E là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔFBC: HS tự cm.

4/ C/m: $BI^2 = BF.BC - IF.IC$

Gọi M là trung điểm ED.

*C/m: $BCMF$ nội tiếp: Vì FM là trung tuyến của tam giác vuông FED

$\Rightarrow FM = EM = MD = \frac{1}{2}ED$

$\Rightarrow \Delta FEM$; ΔMFD cân ở M $\Rightarrow MFD = MDF$

và $EMF = MFD + MDF = 2\ MDF$ (góc ngoài ΔMFD)

Vì CA là phân giác của $BCF \Rightarrow 2ACF = BCF$.

Theo cmt thì $MDF = ACF$

$\Rightarrow BMF = BCF \Rightarrow BCMF$ nội tiếp.

*Ta có $\Delta BFM \backsim \Delta BIC$ vì $FBM = CBI$ (BD là phân giác của FBC -cmt) và $BMF = BCI$ (cmt) $\Rightarrow$

$\frac{BF}{BI} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow BF.BC = BM.BI$ ❶

* $\Delta IFM \backsim \Delta IBC$ vì $BIC = FIM$ (đối đỉnh).

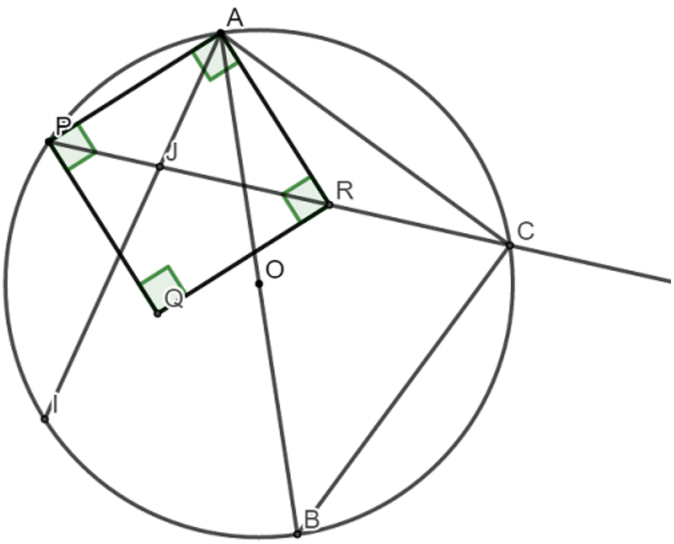
Do $BCMF$ nội tiếp $\Rightarrow CFM = CBM$ (cùng chắn cung CM) $\Rightarrow \frac{IB}{FI} = \frac{IC}{IM} \Rightarrow IC.IF = IM.IB$ ❷

Lấ ❶ trừ ❷ vếtheo vế $\Rightarrow BF.BC - IF.IC = BM.IB - IM.IB = IB.(BM - IM) = BI.BI = BI^2$.

Câu 268.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) đường kính AB; P là một điểm di động trên cung AB sao cho $PA < PB$. Dựng hình vuông $APQR$ vào phía trong đường tròn. Tia PR cắt (O) tại C.

1. C/m ΔACB vuông cân.
2. Vẽ phân giác AI của PAB (I nằm trên (O); AI cắt PC tại J. C/m 4 điểm J; A; Q; B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng tỏ: $CI.QJ = CJ.QP$.

Hướng dẫn



1/ C/m ΔABC vuông cân:

Ta có $ACB = 90^0$ (góc nt chắn nửa đt) và $APB = 90^0$;

Do $APQR$ là hvuông có PC là đường chéo $\Rightarrow$ PC là phân giác của APB $\Rightarrow$ $AC = CB$

$\Rightarrow$ dây $AC = CB$ $\Rightarrow$ ΔABC vuông cân.

2/C/m $JANQ$ nội tiếp:

Vì $APJ = JPQ = 45^0$ (t/c hv); PJ chung; $AP = PQ$ $\Rightarrow$ $\Delta PAJ = \Delta QPJ$

$\Rightarrow$ $PAJ = PQJ$ mà $JAB = PAJ$ và $PQJ + JQB = 180^0$

$\Rightarrow$ $JAB + JQB = 180^0$ $\Rightarrow$ $JQBA$ nt.

3/C/m: $CI.QJ = CJ.QP$.

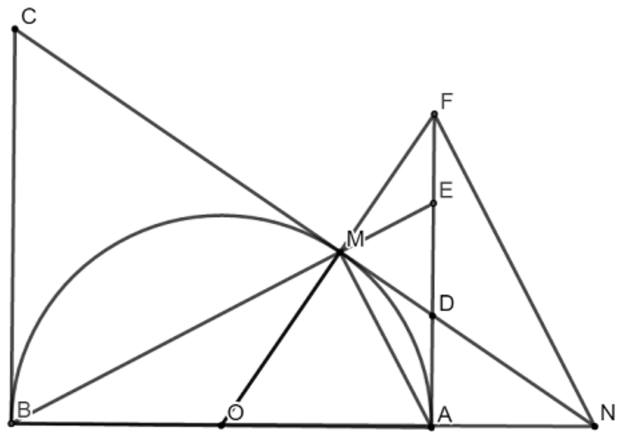
Ta cần chứng minh $\Delta CIJ \backsim \Delta QPJ$ vì $AIC = APC$ (cùng chắn cung AC) và $APC = JPQ = 45^o \Rightarrow$ $JIC = QPJ$

Hơn nữa $PCI = IAP$ (cùng chắn cung PI); $IAP = PQJ$ (cmt) $\Rightarrow$ $PQJ = ICJ$.

Câu 269.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa (O) đường kính $AB = 2R$. Trên nửa đường tròn lấy điểm M sao cho cung $AM < MB$. Tiếp tuyến với nửa đường tròn tại M cắ tt Ax và By lần lượt ở D và C.

1. Chứng tỏ $ADMO$ nội tiếp.
2. Chứng tỏ $AD.BC = R^2$.
3. Đường thẳng DC cắt đường thẳng AB tại N; MO cắt Ax ở F; MB cắt Ax ở E. Chứng minh: $AMFN$ là hình thang cân.
4. Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn để $DE = EF$.

Hướng dẫn



1/C/m $ADMO$ nt: Sử dụng tổng hai góc đối.

2/C/m: $AD.BC = R^2$.

✱C/m: ΔDOC vuông ở O: Theo tính chất hai tt cắt nhau ta có $ADO = MDO$

$\Rightarrow MOD = DOA$.

Tương tự $MOC = COB$. Mà : $MOD + DOA + MOC + COB = 180^0$

$\Rightarrow AOD + COB = DOM + MOC = 90^0$ hay $DOC = 90^0$.

✱Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông DOC có OM là đường cao ta có: $DM.MC = OM^2$.

Mà $DM = AD$; $MC = CB$ (t/c hai tt cắt nhau) và $OM = R \Rightarrow$đpcm.

3/Do $AD = MD$ (t/c hai tt cắt nhau) và $ADO = ODM \Rightarrow OD$ là đường trung trực của AM hay $DO \perp AM$.

Vì $FA \perp ON$; $NM \perp FO$ (t/c tt) và FA cắt MN tại D

$\Rightarrow D$ là trực tâm của $\Delta FNO \Rightarrow DO \perp FN$. Vậy $AM // FN$.

Vì ΔOAM cân ở $O \Rightarrow OAM = OMA$. Do $AM // FN \Rightarrow FNO = MAO$ và $AMO = NFO \Rightarrow$

$FNO = NFO$

Vậy $FNAM$ là thang cân.

4/Do $DE = FE$ nên EM là trung tuyến của tam giác vuông FDM $\Rightarrow$ $ED = EM$ (1)

Vì $DMA = DAM$ và $DMA + EMD = 90^0$; $DAM + DEM = 90^0$

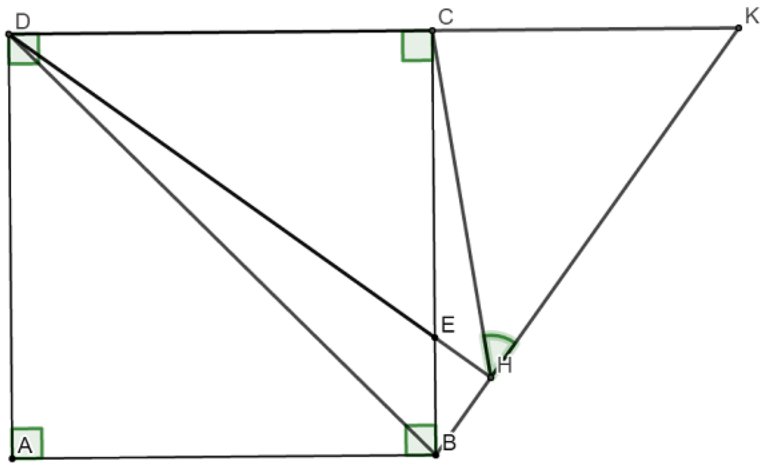
$\Rightarrow$ $EDM = DEM$ hay ΔEDM cân ở D hay $DM = DE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ΔEDM là tam giác đều $\Rightarrow$ $ODM = 60^0 \Rightarrow$ $AOM = 60^0$. Vậy M nằm ở vị trí sao cho cung $AM = \frac{1}{3}$ nửa đường tròn.

Câu 270.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho hình vuông $ABCD$, E là một điểm thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K.

1. Chứng minh: $BHCD$ nt.
2. Tính CHK.
3. C/m $KC.KD = KH.KB$.
4. Khi E di động trên BC thì H di động trên đường nào?

Hướng dẫn



1/ C/m $BHCD$ nt (Sử dụng H và C cùng làm với hai đầu đoạn thẳng DB)

2/Tính CHK:

Do $BDCE$ nt $\Rightarrow$ $DBC = DHK$ (cùng chắn cung DC) mà $DBC = 45^0$ (tính chất hình vuông)

$\Rightarrow$ $DHC = 45^0$ mà $DHK = 90^0$ (gt) $\Rightarrow$ $CHK = 45^0$.

3/C/m $KC.KD = KH.KB$.

Chứng minh hai tam giác vuông

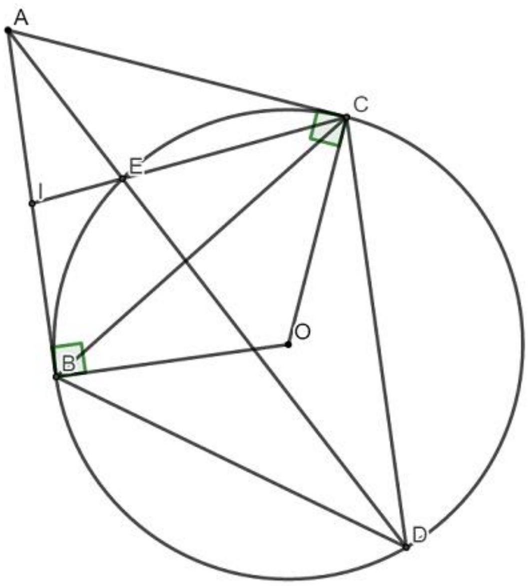
ΔKCB và ΔKHD đồng dạng.

4/Do $BHD = 90^0$ không đổi $\Rightarrow$ E di chuyển trên BC thì H di chuyển trên đường tròn đường kính DB.

Câu 281.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O), từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tt AB và AC với đường tròn. Kẻ dây CD song song AB. Nối AD cắt đường tròn (O) tại E.

1. Chứng minh $ABOC$ nội tiếp.
2. Chứng tỏ $AB^2 = AE.AD$.
3. C/m góc $\mathrm{AOC} = \mathrm{ACB}$ và tam giác BDC cân.
4. CE kéo dài cắt AB ở I. Chứng minh $IA = IB$.

Hướng dẫn



1/C/m: $ABOC$ nt. (HS tự c/m)

2/C/m: $AB^2 = AE.AD$. Chứng minh $\Delta ADB \backsim \Delta ABE$, vì có E chung.

$\text{sđABE} = \frac{1}{2}\text{sđBE}$ (góc giữ tt và 1 dây)

$\text{sđBDE} = \frac{1}{2}\text{sđBE}$ (góc nt chắn BE)

3/C/m $\mathrm{AOC} = \mathrm{ACB}$

* Do $ABOC$ nt $\Rightarrow$ $\mathrm{AOC} = \mathrm{ABC}$ (Cùng chắn cung AC); vì $AC = AB$ (t/c 2 tt cắt nhau)

$\Rightarrow$ ΔABC cân ở A $\Rightarrow \mathrm{ABC} = \mathrm{ACB} \Rightarrow \mathrm{AOC} = \mathrm{ACB}$

* $\text{sđACB} = \frac{1}{2}\text{sđBEC}$ (góc giữ tt và 1 dây); $sđ\,BDC = \frac{1}{2} sđ\,BEC$ (góc nt)

$\Rightarrow$ $\mathrm{BDC} = \mathrm{ACB}$ mà $\mathrm{ABC} = \mathrm{BDC}$ (Do CD song song AB) $\Rightarrow$ $\mathrm{BDC} = \mathrm{BCD}$ $\Rightarrow$ ΔBDC cân ở B.

4/ Ta có $\hat{\mathrm{I}}$ chung; $\mathrm{IBE} = \mathrm{ECB}$ (góc giữ tt và 1 dây; góc nt chắn cung BE) $\Rightarrow$ $\Delta IBE \backsim \Delta ICB$ $\Rightarrow \frac{IE}{IB} = \frac{IB}{IC}$

$\Rightarrow IB^2 = IE.IC$ ❶

Xét tam giác IAE và tam giác ICA có $\hat{\mathrm{I}}$ chung; $sđ\,IAE = \frac{1}{2} sđ(DB - BE)$ mà tam giác BDC cân ở B

$\Rightarrow$ DB = BC $\Rightarrow$ $sđ\, IAE = sđ\left(BC - BE\right) = \frac{1}{2} sđ\, CE = sđ\, ECA$

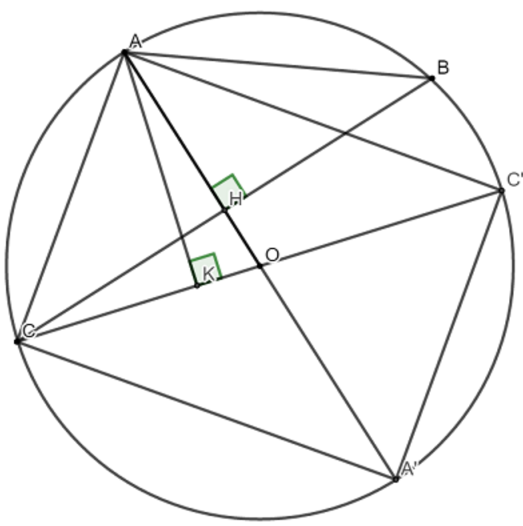
$\Rightarrow \Delta IAE \backsim \Delta ICA \Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{IE}{IA} \Rightarrow IA^2 = IE.IC$ ❷

Từ❶và❷$\Rightarrow$ $IA^2 = IB^2 \Rightarrow IA = IB$

Câu 282.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC $(AB = AC)$; $BC = 6$; Đường cao $AH = 4$ (cùng đơn vị độ dài), nội tiếp trong (O) đường kính AA'.

1. Tính bán kính của (O).
2. Kẻ đường kính CC'. Tứ giác $ACA'C'$ là hình gì?
3. Kẻ AK vuông góc CC'. C/m $AKHC$ là hình thang cân.
4. Quay tam giác ABC một vòng quanh trục AH. Tính diện tích xung quanh của hình được tạo ra.

Hướng dẫn



1/Tính OA.

Ta có $BC = 6$; đường cao $AH = 4 \Rightarrow AB = 5$; tam giác ABA' vuông ở B $\Rightarrow BH^2 = AH.A'H$.

$\Rightarrow A'H = \frac{BH^2}{AH} = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow AA' = AH + HA' = \frac{25}{4} \Rightarrow AO = \frac{25}{8}$.

2/ $ACA'C'$ là hình gì?

Do O là trung điểm AA' và CC' $\Rightarrow$ $ACA'C'$ là hình bình hành. Vì $AA' = CC'$ (Đường kính của đường tròn) $\Rightarrow$ $ACA'C'$ là hình chữ nhật.

3/ C/m: $AKHC$ là thang cân:

◆ ta có $AKC = AHC = 90^0$

$\Rightarrow$ $AKHC$ nội tiếp.$\Rightarrow$ $HKC = HAC$ (cùng chắn cung HC) mà ΔOAC cân ở O $\Rightarrow$ $OAC = OCA$ $\Rightarrow$ $HKC = HCA$ $\Rightarrow HK // AC$ $\Rightarrow$ $AKHC$ là hình thang.

◆ Ta lại có: $KAH = KCH$ (cùng chắn cung KH) $\Rightarrow$ $KAO + OAC = KCH + OCA$ $\Rightarrow$Hình thang $AKHC$ có hai góc ở đáy bằng nhau.Vậy $AKHC$ là thang cân.

4/ Khi Quay ΔABC quanh trục AH thì hình được sinh ra là hình nón. Trong đó BH là bán kính đáy; AB là đường sinh; AH là đường cao hình nón.

$$S_{xp} = \frac{1}{2}p.d = \frac{1}{2}.2\pi.BH.AB = 15\pi$$

$$V = \frac{1}{3}.B.h = \frac{1}{3}\pi.BH^2.AH = 12\pi$$

Câu 283.(Thầy Nguyễn Chí Thành)

Cho (O) và hai đường kính AB; CD vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm OA. Qua I vẽ dây MQ vuông góc OA ($M \in AC, Q \in AD$). Đường thẳng vuông góc với MQ tại M cắt (O) tại P.

1. C/m: a/ $PMIO$ là thang vuông.

b/ P; Q; O thẳng hàng.

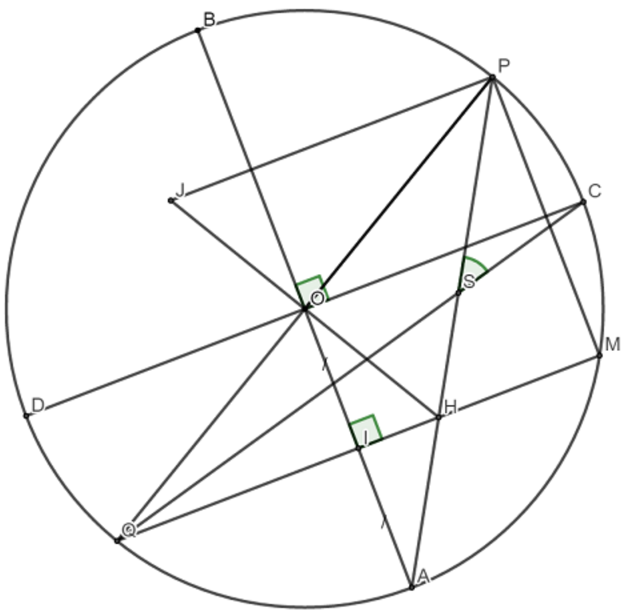
Gọi S là Giao điểm của AP với CQ. Tính Góc CSP.

Gọi H là giao điểm của AP với MQ. Cmr:

a/ $MH.MQ = MP^2$.

b/ MP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác QHP.

Hướng dẫn



1/ a/ C/m $MPOI$ là thang vuông.

Vì $OI \perp MI$; $CO \perp IO$ (gt)

$\Rightarrow CO // MI$ mà $MP \perp CO$ $\Rightarrow MP \perp MI$ $\Rightarrow MP // OI$ $\Rightarrow$ $MPOI$ là thang vuông.

b/ C/m: P; Q; O thẳng hàng:

Do $MPOI$ là thang vuông $\Rightarrow$ $IMP = 90^0$ hay $QMP = 90^0$ (QP là đường kính của (O)) $\Rightarrow$ Q; O; P thẳng hàng.

2/ Tính CSP:

Ta có

$sđ CSP = \frac{1}{2} sđ\left(AQ + CP\right)$ (góc có đỉnh nằm trong đường tròn) mà cung $CP = CM$

và $CM = QD \Rightarrow CP = QD \Rightarrow sđ CSP = \frac{1}{2} sđ\left(AQ + CP\right) = \frac{1}{2} sđ\left(AQ + QD\right) = \frac{1}{2} sđ AD = 45^0$.

Vậy $CSP = 45^0$.

3/ a/ Xét hai tam giác vuông: MPQ và MHP có:

Vì ΔAOM cân ở O; I là trung điểm AO; $MI \perp AO$

$\Rightarrow$ ΔMAO là tam giác cân ở M

$\Rightarrow$ ΔAMO là tam giác đều

$\Rightarrow$ $AM = 60^0$ và $MC = CP = 30^0$ $\Rightarrow$ cung $MP = 60^0 \Rightarrow$ cung $AM = MP$ $\Rightarrow$ $MPH = MQP$ (góc nt chắn hai cung bằng nhau.) $\Rightarrow$ $\Delta MHP \backsim \Delta MQP$ $\Rightarrow$ đpcm.

b/ C/m MP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔQHP.

Gọi J là tâm đròn ngoại tiếp ΔQHP.

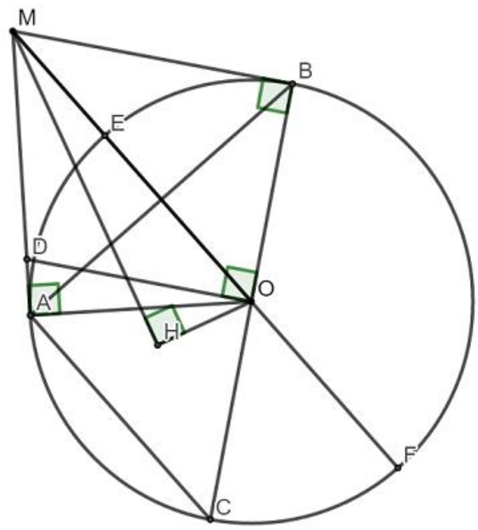
Do cung $AQ = MP = 60^0 \Rightarrow$ ΔHQP cân ở H và $QHP = 120^0 \Rightarrow$ J nằm trên đường thẳng HO

$\Rightarrow$ ΔHPJ là tam giác đều mà $HPM = 30^0$ $\Rightarrow$ $MPH + HPJ = MPJ = 90^0$ hay $JP \perp MP$ tại P nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔHPQ $\Rightarrow$ đpcm.

Câu 284.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ và một cát tuyến d không đi qua tâm O. Từ một điểm M trên d và ở ngoài (O) ta kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đườmg tròn; BO kéo dài cắt (O) tại điểm thứ hai là C. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống d. Đường thẳng vuông góc với BC tại O cắt AM tại D.

1. C/m A; O; H; M; B cùng nằm trên 1 đường tròn.
2. C/m $AC // MO$ và $MD = OD$.
3. Đường thẳng OM cắt (O) tại E và F. Chứng tỏ $MA^2 = ME.MF$
4. Xác định vị trí của điểm M trên d để ΔMAB là tam giác đều.Tính diện tích phần tạo bởi hai tt với đường tròn trong trường hợp này.

Hướng dẫn



1/Chứng minh $OBM = OAM = OHM = 90^0$

2/◆ C/m $AC//OM$.

Do MA và MB là hai tt cắt nhau $\Rightarrow$ $BOM = OMB$ và $MA = MB$ $\Rightarrow$ MO là đường trung trực của AB $\Rightarrow$ $MO \perp AB$.

Mà $BAC = 90^0$ (góc nt chắn nửa đtròn) $\Rightarrow CA \perp AB$. Vậy $AC//MO$.

◆C/m $MD = OD$. Do $OD//MB$ (cùng vuông góc CB) $\Rightarrow$ $DOM = OMB$ (so le)

mà $OMB = OMD$ (cmt) $\Rightarrow$ $DOM = DMO$ $\Rightarrow$ ΔDOM cân ở D $\Rightarrow$ đpcm.

3/C/m: $MA^2 = ME.MF$: Xét ΔAEM và ΔMAF có M chung.

$Sđ\,EAM = \dfrac{1}{2} Sđ\,AE$ (góc giữa tt và 1 dây)

$Sđ\,AFM = \dfrac{1}{2} Sđ\,AE$ (góc nt chắn cung AE) $\Rightarrow$ $EAM = AFM$ $\Rightarrow$ $\Delta MAE \backsim \Delta MFA \Rightarrow$ đpcm.

4/◆Vì ΔAMB là tam giác đều $\Rightarrow$ $OMA = 30^0$; $OM = 2OA = 2OB = 2R$

◆Gọi diện tích cần tính là S.

Ta có $S = S_{OAMB} - S_{Quat\,AOB}$

Ta có $AB = AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = R\sqrt{3} \Rightarrow S_{AMBO} = \dfrac{1}{2}.BA.OM = \dfrac{1}{2}.2R.R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$

$$S_{Quat} = \frac{\pi R^2.120}{360} = \frac{\pi R^2}{3} \Rightarrow S = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{\left(3\sqrt{3} - \pi\right)R^2}{3}.$$

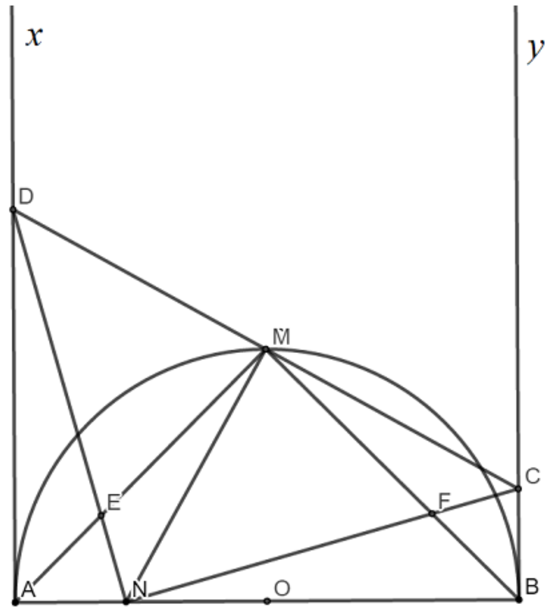
Câu 285.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa (O) đường kính AB, vẽ các tiếp tuyến Ax và By cùng phía với nửa đường tròn. Gọi M là để chính giữa cung AB và N là một điểm bất kỳ trên đoạn AO. Đường thẳng vuông góc với MN tại M lần lượt cắt Ax và By ở D và C.

1. C/m $AMN = BMC$.
2. C/m $\Delta ANM = \Delta BMC$.

3. DN cắt AM tại E và CN cắt MB ở F . C/m $FE \perp Ax$.

4. Chứng tỏ M cũng là trung điểm DC .

Hướng dẫn



1/C/m $AMN = BMC$.

Ta có $AMB = 90^0$ (Góc nt chắn nửa đường tròn) và do $NM \perp DC \Rightarrow NMC = 90^0$

Vậy $AMB = AMN + NMB = NMB + BMC = 90^0 \Rightarrow AMN = BMA$.

2/C/m $\Delta ANM = \Delta BCM$:

Do cung $AM = MB = 90^0 \Rightarrow$ dây $AM = MB$ và $MAN = MBA$ =45^0.

(ΔAMB vuông cân ở M) $\Rightarrow MAN = MBC$ =45^0.

Theo cm*t* thì $CMB = AMN \Rightarrow (ANM = (BCM$ (g.c.g)

3/C/m $EF \perp Ax$.

Do $ADMN$ nt $\Rightarrow AMN = AND$ (cùng chắn cung AN)

Do $MNBC$ nt $\Rightarrow BMC = CNB$ (cùng chắn cung CB)

$\Rightarrow AND = CNB$

Mà $AMN = BMC$ (chứng minh câu 1)

Ta lại có $AND + DNA = 90^0 \Rightarrow CNB + DNA = 90^0 \Rightarrow ENC = 90^0$ mà $EMF = 90^0 \Rightarrow EMFN$ nội tiếp

$\Rightarrow EMN = EFN$ (cùng chắn cung NE) $\Rightarrow EFN = FNB$

$\Rightarrow EF // AB$ mà $AB \perp Ax$, $EF \perp Ax$.

4/C/m M cũng là trung điểm DC.

Ta có $NCM = MBN = 45^0$ (cùng chắn cung MN) .

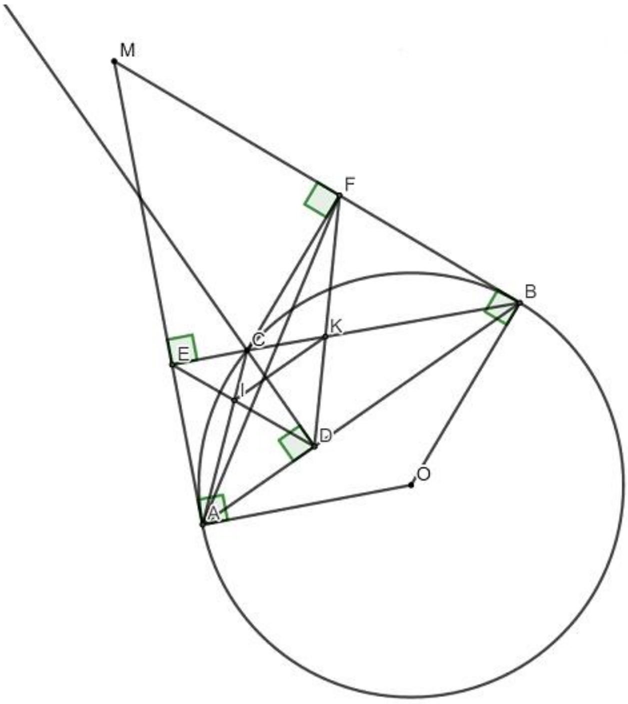
$\Rightarrow \Delta NMC$ vuông cân ở M $\Rightarrow MN = NC$. Và ΔNDC vuông cân ở N $\Rightarrow$ $NDM = 45o$.

$\Rightarrow \Delta MND$ vuông cân ở M $\Rightarrow$ $MD = MN \Rightarrow$ $MC = DM \Rightarrow$ đpcm.

Câu 286.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Từ một điểm M nằm ngoài (O) kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn. Trên cung nhỏ AB lấy điểm C và kẻ $CD \perp AB; CE \perp MA; CF \perp MB$. Gọi I và K là giao điểm của AC với DE và của BC với DF.

1. C/m $AECD$ nt.
2. C/m: $CD^2 = CE.CF$.
3. Cmr: Tia đối của tia CD là phân giác của FCE.
4. C/m $IK // AB$.

Hướng dẫn



1/C/m: $AECD$ nt: (dùng phương pháp tổng hai góc đối)

2/C/m: $CD^2 = CE.CF$.

Xét ΔCDF và ΔCDE có:

-Do $AECD$ nt $\Rightarrow$ $CED = CAD$ (cùng chắn cung CD)

-Do $BFCD$ nt $\Rightarrow$ $CDF = CBF$ (cùng chắn cung CF)

Mà $sđ CAD = \frac{1}{2} sđ BC$ (góc nt chắn cung BC)

Và $sđ CBF = \frac{1}{2} sđ BC$ (góc giữa tt và 1 dây) $\Rightarrow$ $FDC = DEC$ ❶

Do $AECD$ nt và $BFCD$ nt $\Rightarrow$ $DCE + DAE = DCF + DBF = 180^0$.

Mà $MBD = DAM$ (t/c hai tt cắt nhau) $\Rightarrow$ $DCF = DCE$ ❷.

Từ ❶và ❷$\Rightarrow$ $\Delta CDF \backsim \Delta CED$ $\Rightarrow$đcm.

3/Gọi tia đối của tia CD là Cx, ta có $xCF = 180^0 - FCD$ và

$xCF = 180^0 - ECD$. Mà theo cmt có: $FCD = ECD$ $\Rightarrow$ $xCF = xCE$ $\Rightarrow$ đpcm.

4/C/m: IK song song AB.

Ta có $CBF = FDC = DAC$ (cmt)

Do $ADCE$ nt $\Rightarrow$ $CDE = CAE$ (cùng chắn cung CE)

$ABC = CAE$ (góc nt và góc giữ tt…cùng chắn 1 cung) $\Rightarrow$ $CBA = CDI$.

Trong ΔCBA có $BCA + CBA + CAD = 180^0$ hay $KCI + KDI = 180^0$.

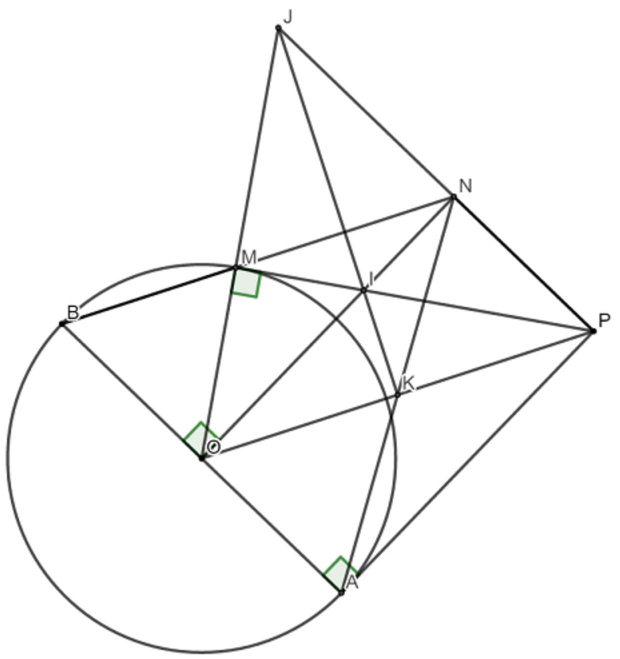
$\Rightarrow$ Tứ giác $DKCI$ nội tiếp

$\Rightarrow$ $KDC = KIC$ (cùng chắn cung CK) $\Rightarrow$ $KIC = BAC$ $\Rightarrow$ KI song song AB.

Câu 287.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;$ R) đường kính AB, Kẻ tiếp tuyến Ax và trên Ax lấy để P sao cho $P > R$. Từ P kẻ tiếp tuyến PM với đường tròn.

1. C/m $BM // OP$.
2. Đường vuông góc với AB tạo O cắt tia BM tại N. C/m $OBPN$ là hình bình hành.
3. AN cắt OP tại K; PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau ở J. C/m I; J; K thẳng hàng.

Hướng dẫn



1/ C/m: $BM // OP$.

Ta có $MB \perp AM$ (Góc nt chắn nửa đtròn) và $OP \perp AM$ (t/c hai tt cắt nhau)

$\Rightarrow MB // OP$.

2/ C/m: $OBNP$ là hình bình hành:

Xét ΔAPO và ΔOBN có góc $A = O = 90^0$; $OA = OB$ (bán kính) và do $NB // AP$ $\Rightarrow$ $POA = NBO$ (đồng vị $\Rightarrow$ $\Delta APO = \Delta ONB$ $\Rightarrow$ $PO = BN$. Mà $OP // NB$ (cm$t$) $\Rightarrow$ $OBNP$ là hình bình hành.

3/ C/m: I; J; K thẳng hàng.

Ta có: $PM \perp OJ$ và $PN // OB$ (do $OBNP$ là hbhành) mà $ON \perp AB$

$\Rightarrow ON \perp OJ$ $\Rightarrow$ I là trực tâm của ΔOPJ $\Rightarrow IJ \perp OP$.

-Vì $PNOA$ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ P; N; O; A; M cùng nằm trên đường tròn tâm K.

Mà $MN // OP$ $\Rightarrow$ $MNOP$ là thang cân

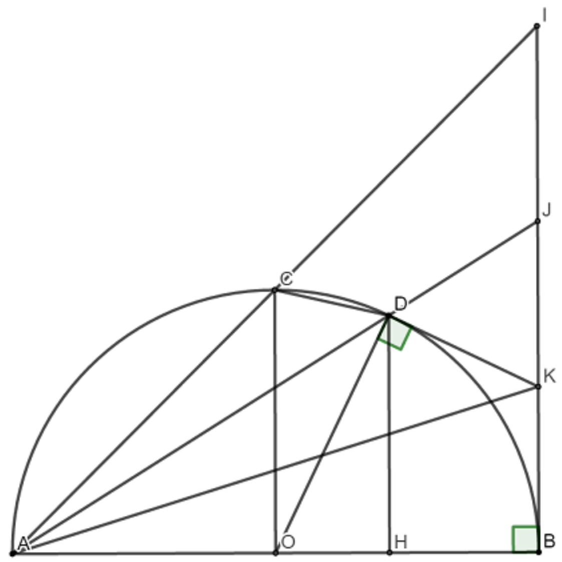
$\Rightarrow$ $NPO = MOP$, ta lại có $NOM = MPN$ (cùng chắn cung NM) $\Rightarrow$ IPO=IOP

$\Rightarrow$ ΔIPO cân ở I. Và $KP = KO$ $\Rightarrow$ IK vuông góc PO. Vậy K; I; J thẳng hàng.

Câu 288.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB; đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt nửa đường tròn tại C. Kẻ tiếp tuyến Bt với đường tròn. AC cắt tiếp tuyến Bt tại I.

1. C/m ΔABI vuông cân
2. Lấy D là 1 điểm trên cung BC, gọi J là giao điểm của AD với Bt. CM $AC.AI = AD.AJ$.
3. C/m $JDCI$ nội tiếp.
4. Tiếp tuyến tại D của nửa đường tròn cắt Bt tại K. Hạ $DH \perp AB$. Cmr: AK đi qua trung điểm của DH.

Hướng dẫn



1/C/m ΔABI vuông cân (Có nhiều cách-sau đây chỉ C/m 1 cách):

-Ta có $ACB = 90^0$ (góc nt chắn nửa đtròn) $\Rightarrow$ ΔABC vuông ở C.

Vì $OC \perp AB$ tại trung điểm O $\Rightarrow$ $AOC = COB = 90^0$

$\Rightarrow$ $AC = CB = 90^0$. $\Rightarrow$ $CAB = 45^0$. (góc nt bằng nửa số đo cung bị chắn)

ΔABC vuông cân ở C. Mà $Bt \perp AB$ có $CAB = 45^0 \Rightarrow \Delta ABI$ vuông cân ở B.

2/C/m: $AC.AI = AD.AJ$.

Xét ΔACD và ΔAIJ có góc A chung $sđ CDA = \frac{1}{2} sđ AC = 45^0$.

Mà ΔABI vuông cân ở $B \Rightarrow AIB = 45^0 \Rightarrow CDA = AIB \Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta AIJ \Rightarrow$ đpcm

3/ Do $CDA = CIJ$ (cmt) và $CDA + CDJ = 180^0 \Rightarrow CDJ + CIJ = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CDJI$ nội tiếp.

4/Gọi giao điểm của AK và DH là N . Ta phải C/m: $NH = ND$

-Ta có: $ADB = 90^0$ và $DK = KB$ (t/c hai tt cắt nhau) $\Rightarrow KDB = KBD$.

Mà $KBD + DJK = 90^0$ và $KDB + KDJ = 90^0 \Rightarrow KJD = JDK$

$\Rightarrow$ ΔKDJ cân ở $K \Rightarrow KJ = KD \Rightarrow KB = KJ$.

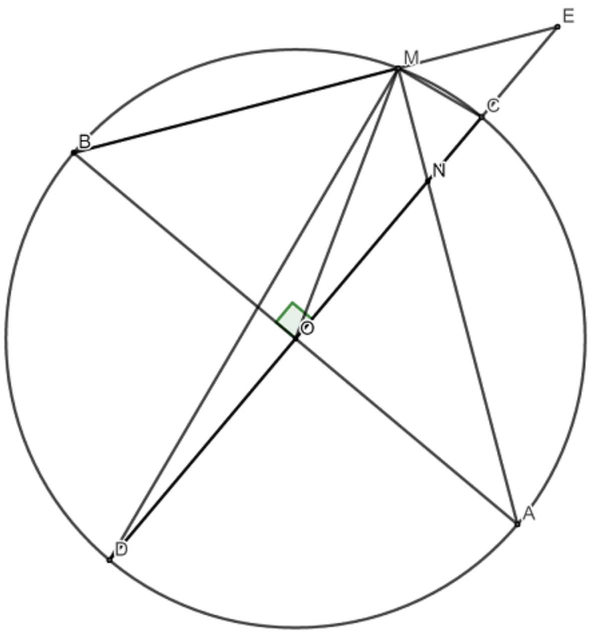
-Do $DH \perp AB$ và $JB \perp AB$ (gt) $\Rightarrow DH // JB$. Áp dụng hệ quả Ta lét trong ΔAKJ và ΔAKB ta có:

$\frac{DN}{JK} = \frac{AN}{AK}; \frac{NH}{KB} = \frac{AN}{AK} \Rightarrow \frac{DN}{JK} = \frac{NH}{KB}$ mà $JK = KB \Rightarrow DN = NH$.

Câu 289.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) và hai đường kính $AB;\ CD$ vuông góc với nhau. Trên OC lấy điểm N; đường thẳng AN cắt đường tròn ở M .

1. Chứng minh: $NMBO$ nội tiếp.
2. CD và đường thẳng MB cắt nhau ở E. Chứng minh CM và MD là phân giác của góc trong và góc ngoài AMB
3. C/m hệ thức: $AM.DN = AC.DM$
4. Nếu $ON = NM$. Chứng minh ΔMOB là tam giác đều.

Hướng dẫn



1/C/m $NMBO$ nội tiếp: Sử dụng tổng hai góc đối.

2/C/m CM và MD là phân giác của góc trong và góc ngoài AMB.

-Do AB vuông góc CD tại trung điểm O của AB và CD $\Rightarrow$ Cung $AD = DB = CB = AC = 90^0$.

$\Rightarrow$ $sđ\, AMD = sđ\, AD = 45^0$.

$sđ\, DMB = sđ\ DB = 45^0 \Rightarrow AMD = DMB = 45^0$.

Tương tự $CAM = 45^0 \Rightarrow EMC = CMA = 45^0$.

Vậy CM và MD là phân giác của góc trong và góc ngoài AMB.

3/ C/m: $AM.DN = AC.DM$.

Xét ΔACM và ΔNMD có $CMA = NMD = 45^0$. (cmt)

Và $CAM = NDM$ (cùng chắn cung CM) $\Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta DMN$ $\Rightarrow$đcm.

4/ Khi $ON = NM$ ta c/m ΔMOB là tam giác đều.

Do $MN = ON \Rightarrow \Delta NMO$ cân ở N $\Rightarrow NMO = NOM$.

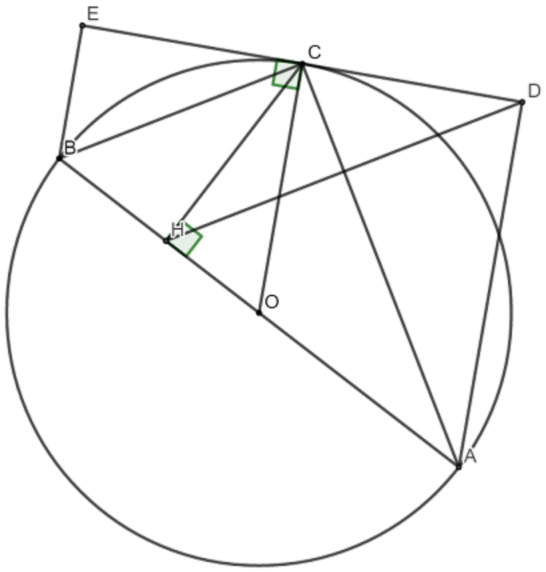
Ta lạ có: $NMO + OMB = 90^0$ và $NOM + MOB = 90^0$ $\Rightarrow OMB = MOB$.

Mà $OMB = OBM$ $\Rightarrow OMB = MOB = OBM$ $\Rightarrow \Delta MOB$ là tam giác đều.

Câu 290.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) đường kính AB và d là tiếp tuyến của đường tròn tại C. Gọi $D;\ E$ theo thứ tự là hình chiếu của A và B lên đường thẳng d.

1. C/m: $CD = CE$.
2. Cmr: $AD + BE = AB$.
3. Vẽ đường cao CH của ΔABC.Chứng minh $AH = AD$ và $BH = BE$.
4. Chứng tỏ: $CH^2 = AD.BE$.
5. Chứng minh: $DH // CB$.

Hướng dẫn



1/ C/m: $CD = CE$.

Do $AD \perp d$; $OC \perp d$; $BE \perp d$ $\Rightarrow AD // OC // BE$.

Mà $OH = OB$

$\Rightarrow$ OC là đường trung bình của hình thang $ABED$ $\Rightarrow$ $CD = CE$.

2/C/m $AD + BE = AB$.

Theo tính chất đường trung bình

của hình thang ta có: $OC = \dfrac{BE + AD}{2} \Rightarrow BE + AD = 2.OC = AB$.

3/C/m $BH = BE$. Ta có:

$sđ\,BCE = \dfrac{1}{2} sđ\,CB$ (Góc giữa tt và một dây)

$sđ\,CAB = \dfrac{1}{2} sđ\,CB$ (góc nt) $\Rightarrow$ $ECB = CAB$; ΔACB cuông ở C

$\Rightarrow$ $HCB = HCA$

$\Rightarrow$ $HCB = BCE$ $\Rightarrow$ $\Delta HCB = \Delta ECB$ $(ch - gn)$ $\Rightarrow$ $HB = BE$.

-C/m tương tự có $AH = AD$.

4/C/m: $CH^2 = AD.BE$.

ΔACB có $C = 90^0$ và CH là đường cao $\Rightarrow$ $CH^2 = AH.HB$. Mà $AH = AD$; $BH = BE$

$\Rightarrow$ $CH^2 = AD.BE$.

5/C/m $DH // CB$.

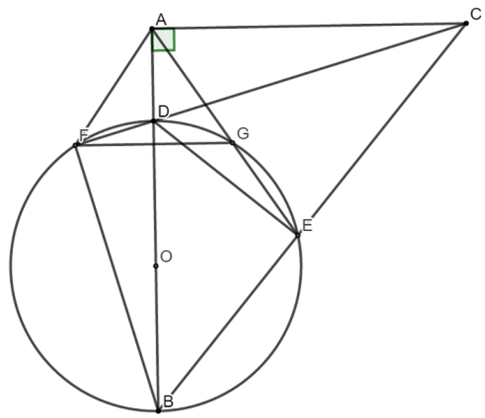
Do $ADCH$ nội tiếp $\Rightarrow$ $CDH = CAH$ (cùng chắn cung CH) mà $CAH = ECB$ (cmt)

$\Rightarrow$ $CDH = ECB$ $\Rightarrow DH // CB$.

Câu 291.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có: $A = 90^0$. D là một điểm nằm trên cạnh AB. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD; AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai F và G.

1. C/m $CAFB$ nội tiếp.
2. C/m $AB.ED = AC.EB$.
3. Chứng tỏ $AC // FG$.
4. Chứng minh rằng AC; DE; BF đồng quy.

Hướng dẫn



1/C/m $CAFB$ nội tiếp (Sử dụng hai điểm A; F cùng làm với hai đầu đoạn thẳng BC)

2/C/m ΔABC và ΔEBD đồng dạng.

3/C/m $AC // FG$:

Do $ADEC$ nội tiếp $\Rightarrow$ $ACD = AED$ (Cùng chắn cung AD).

Mà $DFG = DEG$ (cùng chắn cung GD) $\Rightarrow$ $ACF = CFG$

$\Rightarrow AC // FG$.

4/C/m AC; ED; FB đồng quy:

AC và FB kéo dài cắt nhau tại K. Ta phải c/m K; D; E thẳng hàng. $BA \perp CK$ và $CF \perp KB$; $AB \cap CF = D$

$\Rightarrow$ D là trực tâm của ΔKBC

$\Rightarrow KD \perp CB$. Mà $DE \perp CB$ (góc nt chắn nửa đường tròn)

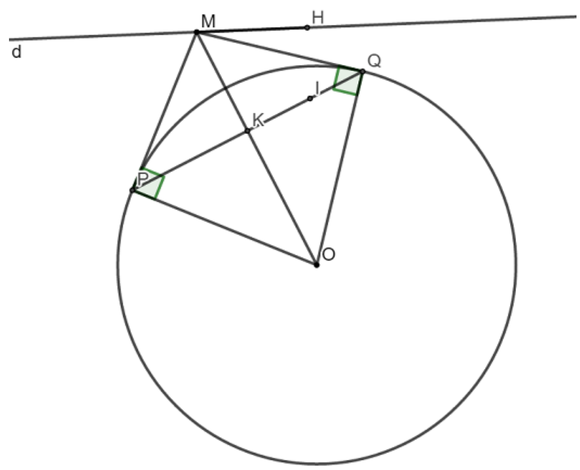
$\Rightarrow$ Qua điểm D có hai đường thẳng cùng vuông góc với BC.

$\Rightarrow$ Ba điểm K; D; E thẳng hàng. (đpcm)

Câu 292.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ và một đường thẳng d cố định không cắt (O). M là điểm di động trên d. Từ M kẻ tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn. Hạ $OH \perp d$ tại H và dây cung PQ cắt OH tại I; cắt OM tại K.

1. C/m: $MHIK$ nội tiếp.
2. 2/C/m $OJ.OH = OK.OM = R^2$.
3. CMR khi M di động trên d thì vị trí của I luôn cố định.

Hướng dẫn



1/C/m $MHIK$ nội tiếp. (Sử dụng tổng hai góc đối)

2/C/m: $OJ.OH = OK.OM = R^2$.

-Xét ΔOIM và ΔOHK có O chung.

Do $HIKM$ nội tiếp $\Rightarrow IHK = IMK$ (cùng chắn cung IK) $\Rightarrow \Delta OHK \backsim \Delta OMI$

$\Rightarrow \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{OK}{OI} \Rightarrow OH.OI = OK.OM$ ❶

ΔOPM vuông ở P có đường cao PK.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có: $OP^2 = OK.OM$ ❷.

Từ❶và ❷$\Rightarrow$đcm.

4/Theo cm câu 2 ta có $OI = \dfrac{R^2}{OH}$ mà R là bán kính nên không đổi.

d cố định nên OH không đổi $\Rightarrow OI$ không đổi. Mà O cố định $\Rightarrow I$ cố định.

Câu 293.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác vuông ABC $(A = 1v)$ và $AB < AC$. Kẻ đường cao AH. Trên tia đối của tia HB lấy $HD = HB$ rồi từ C vẽ đường thẳng $CE \perp AD$ tại E.

1. C/m $AHEC$ nội tiếp.

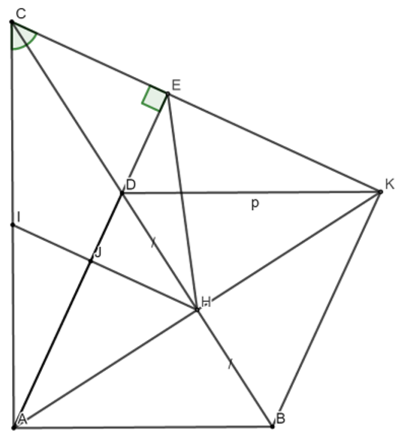
2. Chứng tỏ CB là phân giác của ACE và ΔAHE cân.

3. C/m $HE^2 = HD.HC$.

4. Gọ I là trung điểm AC. HI cắt AE tại J. Chứng minh: $DC.HJ = 2IJ.BH$.

5. EC kéo dài cắt AH ở K. CMR $AB // DK$ và tứ giác $ABKD$ là hình thoi.

Hướng dẫn



1/C/m $AHEC$ nt (hs tự làm)

2/C/m CB là phân giác của ACE

Do $AH \perp DB$ và $BH = HD \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác cân ở A

$\Rightarrow BAH = HAD$ mà $BAH = HCA$ (cùng phụ với góc B).

Do $AHEC$ nt $\Rightarrow HAD = HCE$ (cùng chắn cung HE) $\Rightarrow ACB = BCE$ (ðcm

-C/m ΔHAE cân: Do $HAD = ACH$ (cmt) và $AEH = ACH$ (cùng chắn cung AH) $\Rightarrow HAE = AEH \Rightarrow$ ΔAHE cân ở H.

3/C/m: $HE^2 = HD.HC$. Xét ΔHED và ΔHEC có góc H chung.

Do $AHEC$ nt $\Rightarrow DEH = ACH$ (cùng chắn cung AH) mà $ACH = HCE$ (cmt)

$\Rightarrow DEH = HCE \Rightarrow \Delta HED \backsim \Delta HCE$ (đpcm).

4/C/m $DC.HJ = 2IJ.BH$:

✷Do HI là trung tuyến của tam giác vuông $AHC \Rightarrow HI = IC \Rightarrow \Delta IHC$ cân ở I

$\Rightarrow IHC = ICH$.

Mà $ICH = HCE$ (cmt) $\Rightarrow IHC = HCE \Rightarrow HI // EC$.

Mà I là trung điểm của $AC \Rightarrow JI$ là đường trung bình của ΔAEC

$\Rightarrow JI = \frac{1}{2}EC$.

✷Xét ΔHJD và ΔEDC có:

-Do $HJ // EC$ và $EC \perp AE$

$\Rightarrow HJ \perp JD \Rightarrow HJD = DEC = 90^0$ và $HDJ = EDC$

$\Rightarrow \Delta JDH \backsim \Delta EDC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{JH}{EC} = \dfrac{HD}{DC}$

$\Rightarrow JH.DC = EC.HD$ mà $HD = HB$ và $EC = 2JI$ (đpcm)

5/Do $AE \perp KC$ và $CH \perp AK$; AE và CH cắt nhau tại D

$\Rightarrow D$ là trực tâm của $\Delta ACK \Rightarrow KD \perp AC$ mà $AB \perp AC$ (gt)

$\Rightarrow KD // AB$

-Do $CH \perp AK$ và CH là phân giác của ΔCAK (cmt)

$\Rightarrow \Delta ACK$ cân ở C và $AH = KH$;

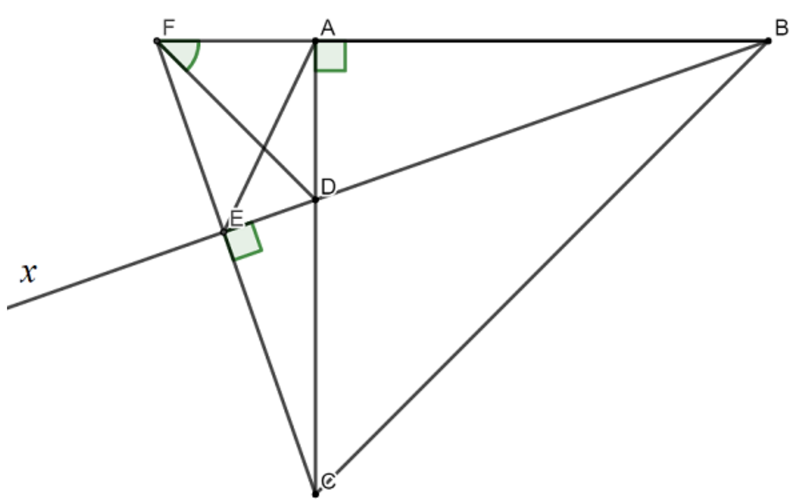
Ta lại có $BH = HD$ (gt), mà H là giao điểm 2 đường chéo của tứ giác $ABKD$

$\Rightarrow ABKD$ là hình bình hành. Nhưng $DB \perp AK \Rightarrow ABKD$ là hình thoi.

Câu 294.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông cân ở A. Trong góc B, kẻ tia Bx cắt AC tại D, kẻ CE vuông góc Bx tại E. Hai đường thẳng AB và CE cắt nhau ở F.

1. C/m $FD \perp BC$, tính BFD
2. C/m $ADEF$ nội tiếp.
3. Chứng tỏ EA là phân giác của DEF
4. Nếu Bx quay xung quanh điểm B thì E di động trên đường nào?

Hướng dẫn



1/ C/m: $FD \perp BC$: Do $BEC = 90^0$; $BAC = 90^0$ (góc nt chắn nửa đtròn).

Hay $BE \perp FC$; và $CA \perp FB$.

Ta lại có BE cắt CA tại D $\Rightarrow$ D là trực tâm của ΔFBC

$\Rightarrow FD \perp BC$.

Tính BFD: Vì $FD \perp BC$ và $BE \perp FC$ nên $BFD = ECB$ (Góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Mà $ECB = ACB$ (cùng chắn cung AB) mà $ACB = 45^0$ $\Rightarrow$ $BFD = 45^0$

2/C/m: $ADEF$ nội tiếp: Sử dụng tổng hai góc đối.

3/C/m EA là phân giác của DEF.

Ta có $AEB = ACB$ (cùng chắn cung AB). Mà $ACB = 45^0$ (ΔABC vuông cân ở A)

$\Rightarrow$ $AEB = 45^0$. Mà $DEF = 90^0$ $\Rightarrow$ $FEA = AED = 45^0$ $\Rightarrow$ EA là phân giác…

4/Nêu Bx quay xung quanh B :

-Ta có $BEC = 90^0$; BC cố định.

-Khi Bx quay xung quanh B. Thì E di chuyển trên đường tròn đường kính BC.

-Giới hạn: Khi $Bx \equiv BC$ Thì $E \equiv C$;Khi $Bx \equiv AB$ thì $E \equiv A$. Vậy E chạy trên cung phần tư AC của đường tròn đường kính BC.

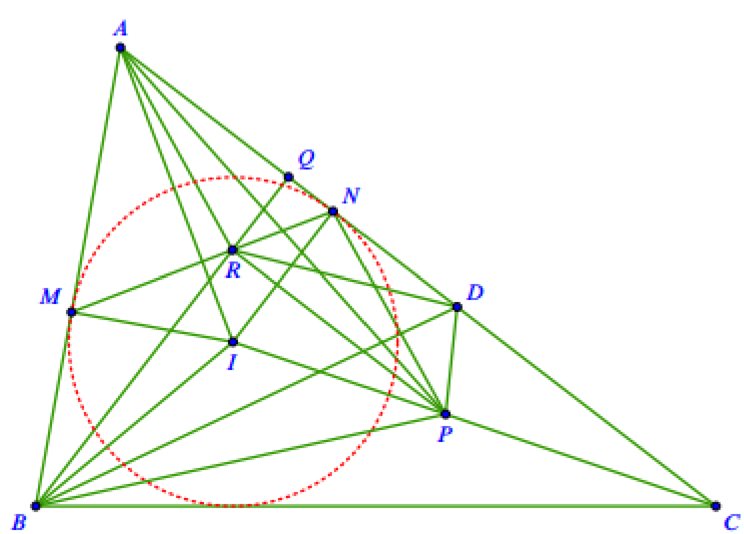
Câu 295.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < BC)$, ngoại tiếp đường tròn tâm I. Hình chiếu của điểm I lên các cạnh AB, AC theo thứ tự là M, N và hình chiếu vuông góc của điểm B lên cạnh AC là Q. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Q, P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD và R là giao điểm của hai đường thẳng MN, BQ.

1) Chứng minh các tam giác BMR và BIP đồng dạng.

2) Chứng minh đường thẳng PR song song với đường thẳng AC.

3) Chứng minh đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng AP.

Hướng dẫn



a) Do AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $AM = AN$, suy ra tam giác AMN cân tại A.

Từ đó

$$BMR = 180^0 - AMN = 180^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - BAC\right) = 90^0 + \frac{1}{2}BAC$$

Mặt khác, ta cũng có

$$BIC = 180^0 - IBC - ICB = 180^0 - \frac{1}{2}(ABC + BCA) = 90^0 + \frac{1}{2}BAC$$

Do đó: $BMR = BIC$. (1)

Do $QA = QD$ và $BQ \perp AD$ nên tam giác ABD cân tại B. Từ đó $ABR = DBR = 90^0 - BAC$

Suy ra: $BRM = 180^0 - BMR - MBR = 180^0 - \left(90^0 + \frac{1}{2}BAC\right) - \left(90^0 - BAC\right) = \frac{1}{2}BAC$

Mặt khác, ta cũng có (chú ý rằng $C,\ P,\ \mathrm{I}$ thẳng hàng)

$$BPI = PBC + PCB = \frac{1}{2}DBC + DCB = \frac{1}{2}ADB = \frac{1}{2}BAC$$

Do đó $BRM = BPI$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $\Delta BMR''\Delta BIP(g.g)$

b) Do $\Delta BMR''\Delta BIP$ (theo câu a) nên ta có $\frac{BM}{BR} = \frac{BI}{BP}$ (3)

và $MBR = IBP$ (4)

Từ (4), ta suy ra $MBR + RBI = IBP + RBI$ hay $MBI = RBP$. (5)

Từ (3) và (5), ta suy ra $\Delta BMI''\Delta BRP$ (c-g-c). Do đó $BRP = BMI = 90^0$. Suy ra $RP \perp RQ$. Mặt khác, ta cũng có $BQ \perp AC$ nên $PR // AC$.

c) Ta có: $RND = 180^0 - ANM = 180^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - BAC\right) = 90^0 + \frac{1}{2}BAC$

Lại có:

$$PDN = ADB + BDP = ADB + \frac{1}{2}BDC = ADB + \frac{1}{2}\left(180^0 - ADB\right) = 90^0 + \frac{1}{2}ADB = 90^0 + \frac{1}{2}BAC$$

Do đó $RND = PDN$.

Mặt khác, theo chứng minh câu **b**), ta có $PR // DN$ nên tự giác $DNRP$ là hình thang. Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra tứ giác $DNRP$ là hình thang cân. Từ đó $NPR = DRP = RDN$ (6)

Tam giác RAD có RQ vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên cân tại R.

Suy ra : $RDN = RAN$ (7).

Từ (6) và (7), ta có $RPN = RAN$. Lại có $NRP = RNA$ (so le trong).

Do đó $RNP = 180^0 - NRP - RPN = 180^0 - RNA - RAN = NRA$

Mà hai góc RNP và NRA ở vị trí so le trong nên $RA // PN$. Tứ giác $ARPN$ có $PR //$ AN và $RA // PN$ nên là hình bình hành. Suy ra hai đường chéo RN và AP cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy MN đi qua trung điểm của AP.

Câu 296.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O đường kính Trên đường tròn (O) lấy điểm C (C không trùng với A, B và $CA > CB$). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) taij A , tại C cắt nhau ở điểm D , kẻ CH vuông góc với AB (H thuộc AB), DO cắt AC tại E .

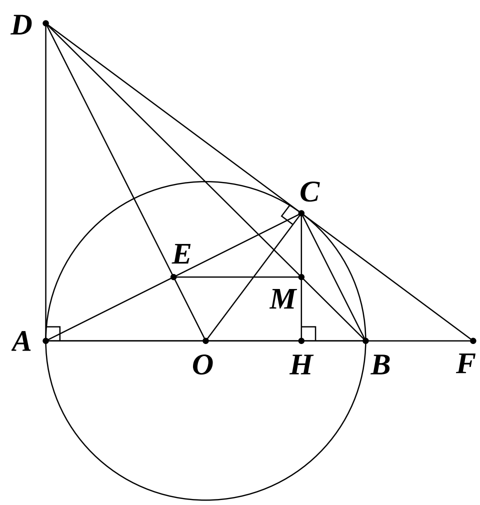
a) Chứng minh tứ giác $OECH$ nội tiếp.

b) Đường thẳng CD cắt đường thẳng AB tại F . Chứng minh: $2BCF + CFB = 90°$.

c) Chứng minh: $AF.BH = AH.BF$.

d) BD cắt CH tại M . Chứng minh: $EM // AB$.

Hướng dẫn



a) ΔOAC cân tại O (vì $OA = OC$) mà OD là phân giác của AOC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên OD cũng là đường cao $\Rightarrow$ $OD \perp AC \Rightarrow OEC = 90°$

Tứ giác $OECH$ có : $OEC + OHC = 90° + 90° = 180°$ $\Rightarrow OECH$ nội tiếp.

b) Ta có : $BAC = BCF$ (1) (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn BC)

Mặt khác : $BCA = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BAC + ABC = 90°$

ΔCHB vuông tại H $\Rightarrow BCH + ABC = 90°$. Suy ra $BAC = BCH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BCF = BCH\left(= BAC\right) \Rightarrow \ HCF = 2BCF$

Vì ΔHCF vuông tại H nên : $HCF + CFB = 90° \Rightarrow 2BCF + CFB = 90°$ (đpcm)

c) Theo câu b) $BCF = BCH \ \Rightarrow \ CB$ là phân giác của HCF . Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có : $\dfrac{BH}{BF} = \dfrac{CH}{CF}$ (3)

Vì $CA \perp CB \Rightarrow CA$ là phân giác của góc ngoài tại đỉnh C của ΔCHF , theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có: $\dfrac{AH}{AF} = \dfrac{CH}{CF}$ (3)

Từ (3) và (4) ta có : $\dfrac{BH}{BF} = \dfrac{AH}{AF} \Rightarrow AF.BH = AH.BF$ (đpcm)

d) Ta có : $BC//OD$ (cùng vuông góc với AC)$\Rightarrow CBH = DOA$ (hai góc đồng vị)

Xét ΔCBH và ΔDOA có : $H = A = 90°$; $CBH = DOA$ (theo trên)

Suy ra : $\Delta CBH \backsim \Delta DOA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BH}{AO} = \dfrac{CH}{DA}$ thay $AO = \dfrac{AB}{2}$ vào ta được : $\dfrac{2BH}{AB} = \dfrac{CH}{DA}$ (5)

Vì $MH//DA$ (cùng vuông góc với AB) nên theo hệ quả định lí Talet ta có:

$\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{MH}{DA} \Rightarrow \dfrac{2BH}{AB} = \dfrac{2MH}{DA}$ (6)

Từ (5) và (6) ta có : $\dfrac{CH}{DA} = \dfrac{2MH}{DA} \Rightarrow CH = 2MH$. Suy ra M là trung điểm của CH

Vì AC là một dây của $\left(O\right)$, $OD \perp AC$ tại $E \Rightarrow E$ là trung điểm của AC

Suy ra EM là đường trung bình của $\Delta ACH \Rightarrow EM//AH \Rightarrow EM//AB$ (đpcm).

Câu 297.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $\left(O\right)$ đường kính AC .Trên bán kính OC lấy điểm B tùy ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB . Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB . Nối CD, kẻ BI vuông góc với CD. Chứng minh rằng:

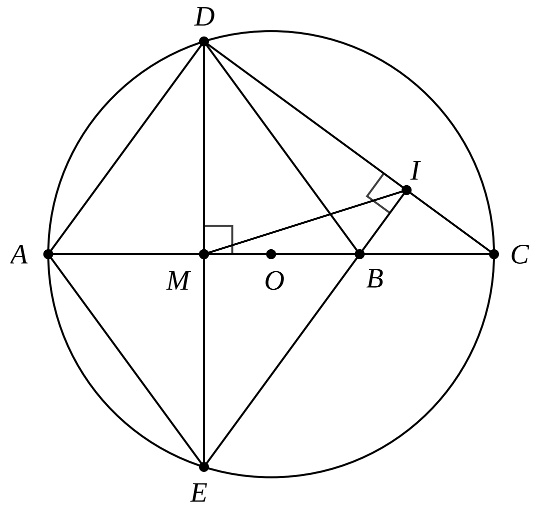
a) Tứ giác $BMDI$ nội tiếp.

b) Tứ giác $ADBE$ là hình gì? Vì sao?

c) $MI^2 = MB.MC$.

d) Chứng minh I , B , E thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) Ta có: $DE \perp AC$ (giả thiết);

$BI \perp CD$ (giả thiết).

Suy ra: $BMD = 90^\circ$ và $BID = 90^\circ$.

Do đó: $BMD + BID = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Tứ giác $BMDI$ có tổng số đo hai góc đối bằng 180° nên $BMDI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có:

M là trung điểm của đoạn AB (giả thiết).

$AC \perp DE$ (giả thiết)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của dây cung DE (đường kính vuông góc với dây không đi qua tâm).

Tứ giác $ADBE$ có hai đường chéo AB và DE cắt nhau tại M nên tứ giác $ADBE$ là hình bình hành.

Lại có: $AB \perp DE$ (giả thiết).

Suy ra: $ADBE$ là hình thoi.

c) Ta có: ΔDIE vuông tại I, có IM là trung tuyến ứng với cạnh huyền DE.

Do đó: $MI = DM \left(= \frac{1}{2} DE \right)$.

Lại có: $ADC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \Delta ADC$ vuông tại D.

$\Rightarrow DM^2 = MA.MC$ (hệ thức giữa đường cao và hình chiếu).

Mà: $MA = MB$ (giả thiết);

Suy ra: $DM^2 = MB.MC$.

Lại có: $MI = DM$ (chứng minh trên).

Do đó: $MI^2 = MB.MC$ (đpcm).

d) Ta có: $ADC = 90^\circ$ (chứng minh ở ý c) $\Rightarrow$ $AD \perp DC$.

Mà: $BI \perp DC$ (giả thiết).

Suy ra: $BI // AD$. (1)

Lại có: Tứ giác $ADBE$ là hình thoi (chứng minh ở ý b) $\Rightarrow$ $EB // AD$. (2)

Từ (1) và (2), ta thấy qua điểm B có hai đường thẳng là EB và BI cùng song song với AD

Suy ra hai đường thẳng là EB và BI trùng nhau (theo tiên đề Ơclit).

Do đó I, B, E thẳng hàng (đpcm).

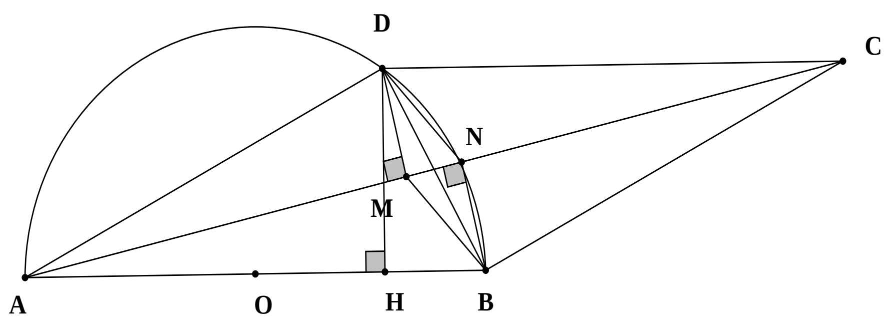
Câu 298.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn đường kính AB . Lấy điểm D tùy ý trên nửa đường tròn ($D \neq A$ và $D \neq B$). Dựng hình bình hành $ABCD$ .Từ D kẻ DM vuông góc AC tại M và từ B kẻ BN vuông góc với đường thẳng AC tại N .

a) Chứng minh bốn điểm D, M, B, C nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $AD.ND = BN.DC$

c) Tìm vị trí D trên nửa đường tròn sao cho $BN.AC$ lớn nhất.

Hướng dẫn



a)Vì D thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $ADB = 90^\circ$

Lại có $AD // BC$ (vì $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow DBC = ADB = 90^\circ$ (hai góc so le trong)

Xét tứ giác $MBCD$ có : $DBC = DMC = 90^\circ$

DBC, DMC là hai góc có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh CD

$\Rightarrow MBCD$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ Bốn điểm D, M, B, C nằm trên một đường tròn.

b)Xét tứ giác $ABND$ có : $ADB = ANB = 90^\circ$

ADB, ANB là hai góc có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AB

$\Rightarrow ABND$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow DNB + DAB = 180^\circ$

Mà $CDA + DAB = 180^\circ$ $\Rightarrow DNB = CDA$

Xét ΔDAC và ΔNBD có :

$DNB = CDA$ (cmt)

$DAC = NBD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DN)

$\Rightarrow \Delta DAC \# \Delta NBD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DA}{NB} = \dfrac{DC}{ND}$ $\Rightarrow DA.ND = DC.NB$.

c) Kẻ $DH \perp AB$

Ta có : $BN.AC = 2.S_{\Delta ABC} = S_{ABCD} = DH.AB$

$BN.AC$ lớn nhất $\Leftrightarrow DH.AB$ lớn nhất $\Leftrightarrow DH$ lớn nhất.

Ta có : $DH \le DO$ (với O là tâm đường tròn đường kính AB)

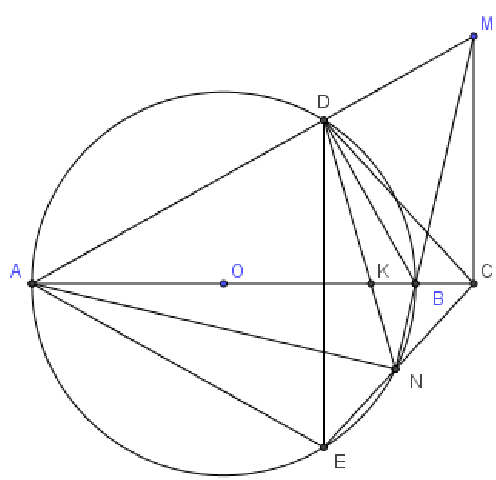
$\Rightarrow DH$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $DH = DO$ $\Leftrightarrow H \equiv O$ $\Leftrightarrow D$ là điểm chính giữa của AB .

Câu 299.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Điểm M nằm ngoài đường tròn sao cho C là hình chiếu của M trên tia AB có $AC > AB$. $MA;\ MB$ cắt đường tròn lần lượt ở D và N, CN cắt đường tròn tại E, DN cắt AB tại K. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AMCN$ nội tiếp b) $BMC = BDN$

c) $DE \perp AB$ d) $AC.BK = BC.AK$

Hướng dẫn



a) Ta có:

$MCA = 90^o$ (gt)

$MNA = BNA = 90^o$ vì AB là đường kính

Suy ra $MCA = MNA = 90^o$ hay tứ giác $AMCN$ nội tiếp

b) Do tứ giác $AMCN$ nội tiếp đường tròn nên $BMC = CAN$ mặt khác $CAN = BDN$ vì cùng chắn cung BN .

Vậy $BMC = BDN$

c) Ta có:

$ECA = NMA$ (cùng chắn cung AN)

$NED = NAD$ (cùng chắn cung ND)

Suy ra $ECA + NED = NAM + NMA = 90^o$. Vậy $DE \perp AB$

d) Ta có $MCB = MDB = 90^0$ nên tứ giác $CMDB$ nội tiếp suy ra $CMB = CDB$ mà $CDB = CAN = BDN$ nên $BDC = BDK$ hay BD là phân giác trong của KDC.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong của ΔKDC ta có: $\dfrac{DK}{DC} = \dfrac{BK}{BC}$ (1)

Mặt khác $BD \perp AD$ nên AD là phân giác ngoài của KDC suy ra $\dfrac{DK}{DC} = \dfrac{AK}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{BK}{BC}$ hay $AK.BC = BK.AC$.

Câu 300.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A, B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F; tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K. Chứng minh rằng:

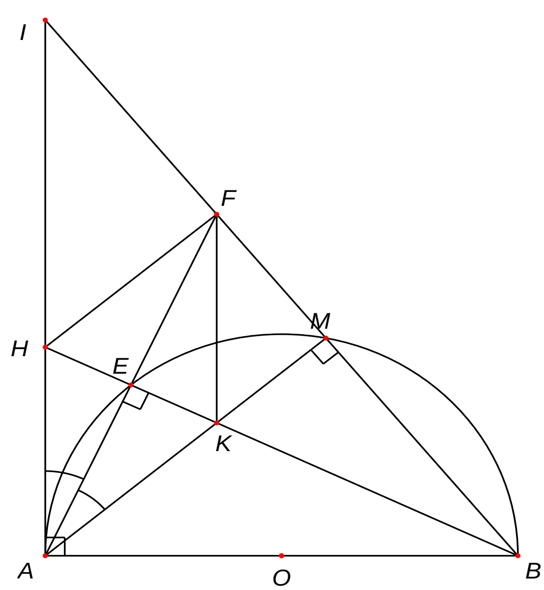
1) Tứ giác $EFMK$ là tứ giác nội tiếp

2) $AI^2 = IM.IB$

3) ΔBAF là tam giác cân và tứ giác $AKFH$ là hình thoi

4) Xác định vị trí M để tứ giác $AKFI$ nội tiếp được một đường tròn

Hướng dẫn



1) Ta có $AMB = AEB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn ½ đường tròn)

Suy ra tứ giác $EFMK$ có $FEK = FMK = 90^0$ nên tứ giác $EFMK$ nội tiếp

2)

+) Xét ΔAIB và ΔMIA có

$\hat{I}$ chung

$IAB = IMA = 90^0$ (gt)

Suy ra ΔAIB ~ ΔMIA

Suy ra $\frac{IA}{IB} = \frac{IM}{IA} \Leftrightarrow AI^2 = IM.IB$ (đpcm)

3) Ta có: $HAE = EAM$ (gt) mà $HAE = ABE$ và $EAM = EBM$

Suy ra $ABE = EBM$. Vậy BE vừa là đường cao vừa là đường phân giác góc B nên ΔBAF cân ở B

+) Theo chứng minh trên E là trung điểm AF. Hơn nữa ΔHAK có AE vừa là phân giác vừa là đường cao nên ΔHAK cân tại A. Suy ra $AH = AK$ và E là trung điểm HK

Vậy tứ giác $AKFH$ là hình thoi

4) Ta có tứ giác $AKFI$ là hình thang (lí giải vì sao chứ ta chưa có trong đề)

Để tứ giác $AKFI$ nội tiếp thì nó phải là hình thang cân

Tức là: $MIA = IAM$

Mà ΔAMI vuông ở M nên ΔAME phải là tam giác vuông cân suy ra $MIA = IAM = 45^0$

hay M là điểm chính giữa của cung AB

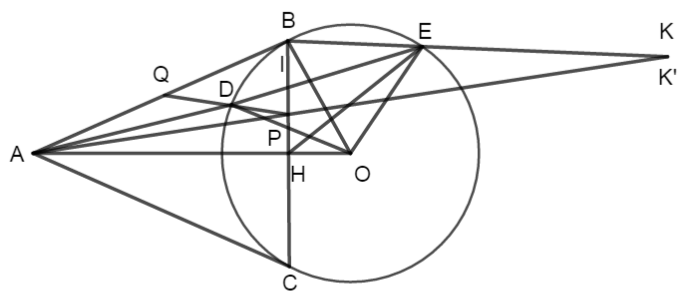
Vậy M là điểm chính giữa cung AB thì tứ giác $AKFI$ nội tiếp một đường tròn

Câu 301.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm) và một cát tuyến ADE của (O) sao cho ADE nằm giữa hai tia AO và AB; $D, E \in (O)$. Đường thẳng qua D và song song với BE cắt BC, AB lần lượt tại P, Q

1) gọi H là giao điểm của BC với OA. Chứng minh $OEDH$ là tứ giác nội tiếp

2) gọi K là điểm đối xứng của B qua E. chứng minh ba điểm A, P, K thẳng hàng.

Hướng dẫn



1) Chứng minh $OEDH$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có: $AB = AC$ ($AB; AC$ là hai tiếp tuyến của (O)), $OB = OC$ (bán kính)

Nên OA là trung trực của BC

Xét $\Delta AOB: ABO = 90^0$ (AB là tiếp tuyến của (O)), $BH \perp OA$(OA là trung trực của BC)

$\Rightarrow AB^2 = AH.AO \qquad (a)$

Xét ΔABD và ΔAEB: $ABD = AED = \frac{1}{2} sd\, BD$ (góc nội tiếp bởi tia tiếp tuyến và dây)

BAD (góc chung), vậy ΔABD đồng dạng ΔAEB (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE\,(b)$

Từ (a) và (b) suy ra $\Rightarrow AH.AO = AD.AE \Rightarrow \frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AO}$

Xét ΔAHD và ΔAEO: $\frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AO}(cmt), HAD(chung)$. Vậy ΔAHD đồng dạng ΔAEO (c.g.c)

$\Rightarrow AHD = AEO$. Do đó tứ giác $OEDH$ là tứ giác nội tiếp (đpcm)

2) chứng minh ba điểm A, P, K thẳng hàng

ta có: ΔODE cân tại O (do $OD = OE$) $\Rightarrow EDO = AEO$ mà $AHD = AEO(cmt) \Rightarrow EDO = AHD$

Lại có $EDO = EHO$ (tứ giác $OEDH$ nội tiếp)

$\Rightarrow AHD = EHO \Rightarrow 90^0 - AHD = 90^0 - EHO \Rightarrow BHA - ADH = BHO - EHO \Rightarrow BHD = BHE$

Nên HB là phân giác trong của ΔDHE, mà $HA \perp HB\left(cmt\right)$ nên HA là phân giác ngoài của $\Delta DHE \Rightarrow \frac{HD}{HE}=\frac{ID}{IE}=\frac{AD}{AE}\left(c\right)$ (I là giao điểm của HB và DE)

$\Delta DIP, DP//BE\left(gt\right) \Rightarrow \frac{DP}{BE}=\frac{ID}{IE}\left(d\right)$(hệ quả ta lét)

$\Delta ABE, DQ//BE\left(gt\right) \Rightarrow \frac{DQ}{BE}=\frac{AD}{AE}\left(e\right)$(hệ quả ta lét)

Từ (c), (d), (e) $\Rightarrow \frac{DP}{BE}=\frac{DQ}{BE} \Rightarrow DP=DQ$

Gọi K' là giao điểm của AP và BE. $\Delta AEK', DP//EK'\left(gt\right) \Rightarrow \frac{DP}{EK'}=\frac{AD}{AE}\left(f\right)$

Từ (e); (f) $\Rightarrow \frac{DQ}{BE}=\frac{DP}{EK'}$ mà $DP=DQ\left(cmt\right) \Rightarrow BE=EK'$

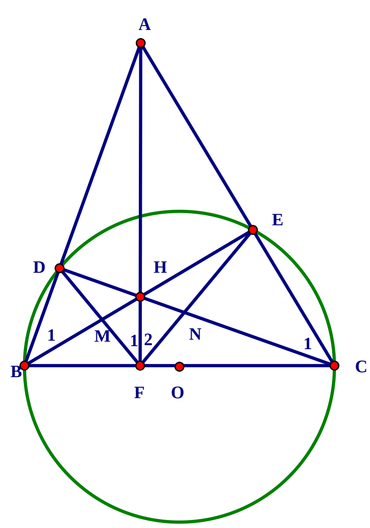
Mặt khác $BE=EK\left(gt\right) \Rightarrow K' \equiv K$. Vậy A, P, K thẳng hàng $(dp$cm)

Câu 302.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E ($D \neq B, E \neq C$). BE cắt CD tại H. Kéo dài AH cắt BC tại F.

1.Chứng minh các tứ giác $ADHF$ và $BDHF$ là tứ giác nội tiếp.

2.Các đoạn thẳng BH và DF cắt nhau tại M, CH và EF cắt nhau tại N. Biết rằng tứ giác $HMFN$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo BAC.

Hướng dẫn



1) Chứng minh các tứ giác $ADHE$ và $BDHF$ là tứ giác nội tiếp (Tự làm)

2) Các đoạn thẳng BH và DF cắt nhau tại M, CH và EF cắt nhau tại N. Biết rằng tứ giác $HMFN$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo BAC.

$BAC + DHE = MFN + BHC = 180°$ (tứ giác $ADHE$; $HMFN$ nội tiếp)

Mà $\widehat{DHE} = \widehat{BHC}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{MFN} = \widehat{F_1} + \widehat{F_2}$

Lại có $\widehat{F_1} = \widehat{B_1}; \widehat{F_2} = \widehat{C_1}; \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (tứ giác $BHDF$; $CEHF$; $BCED$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{F_2} = \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$

Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{F_1} + \widehat{F_2} = 2\widehat{B_1}$, mặt khác $\widehat{B_1} = 90° - \widehat{BAC}$ (ΔABE, $\widehat{AEB} = 90°$)

$\widehat{BAC} = 2\widehat{B_1} = 2\left(90° - \widehat{BAC}\right) \Rightarrow 3\widehat{BAC} = 180° \Rightarrow \widehat{BAC} = 60°$

Câu 303.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) có tâm O. Dây cung AB cố định không phải đường kính. Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Trên cung nhỏ AB lấy hai điểm C, E sao cho góc $\widehat{CIA}$ và $\widehat{EIB}$ là các góc nhọn. CI cắt đường tròn (O) tại điểm D khác C. EI cắt đường tròn (O) tại điểm F khác E. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C và D cắt nhau tại M ; các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E và F cắt nhau tại N. Nối OM cắt CD tại P và ON cắt EF tại Q. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $PQNM$ nội tiếp. **2)** MN song song AB.

Hướng dẫn

1) Ta có: $OC = OD$ (bán kính), $MC = MD$ (MC, MD là hai tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow OM$ là trung trực của $CD \Rightarrow OM \perp DP$.

Xét ΔODM : $\widehat{ODM} = 90°$ (MD là tiếp tuyến của (O) tại D), $OM \perp DP$ (cmt)

$\Rightarrow OD^2 = OP.OM$ (a)

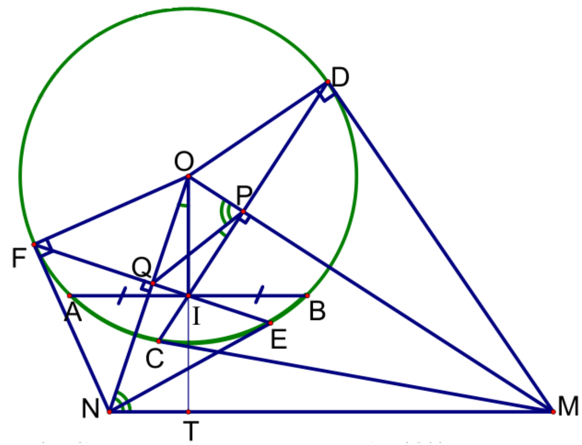
Chứng minh tương tự ta có: $OF^2 = OQ.ON$ (b). Lại có $OD = OF$ (bán kính)

Từ a), b), c) $\Rightarrow OP.OM = OQ.ON \Rightarrow \dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{ON}{OM}$

Xét ΔOPQ và ΔONM có: $\widehat{O}$ (góc chung); $\dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{ON}{OM}$ (cmt)

Vậy $\Delta OPQ \backsim \Delta ONM$ $(c-g-c) \Rightarrow \widehat{OPQ} = \widehat{ONM} \Rightarrow$ tứ giác $PQNM$ nội tiếp.

2) Tứ giác $OPIQ$ có: $\widehat{OPI} = \widehat{OQI} = 90°$ (theo câu a)



Vậy tứ giác $OPIQ$ nội tiếp $\Rightarrow QOI = QPI$ (góc nội tiếp chắn cung QI)

Lại có $ONM = OPQ$ (cmt) $\Rightarrow QOI + ONM = QPI + OPQ = OPI = 90^\circ$ (do $OM \perp DP$)

$\Rightarrow \Delta ONT$ vuông tại T (T là giao điểm của OI và MN)

$\Rightarrow OI \perp MN$, mặt khác $OI \perp AB$ (vì $IA = IB = \dfrac{1}{2}AB$ (gt)). Vậy $AB // MN$.

Câu 304.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) đường kính BC, dây AD vuông góc BC tại H. Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi $(I), (K)$ theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, tam giác HCF.

a) Xác định vị trí tương đối của các đường tròn: (I) và (O); (K) và (O); (I) và (K).

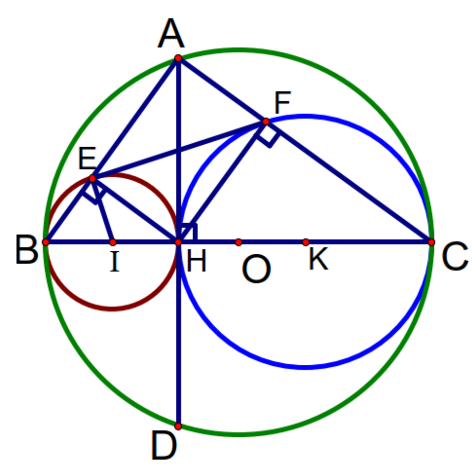
b) Tứ giác $AEHF$ hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh: $AE.AB = AF.AC$

d) Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của (I) và (K)

e) Xác định vị trí điểm H để EF có độ dài lớn nhất.

Hướng dẫn



a) $\Delta BEH, \widehat{BEH}=90^\circ \Rightarrow \Delta BEH$ nội tiếp đường tròn đường kính $BH \Rightarrow I$ là trung điểm BH,

Do đó $OI = OB - IB$ nên (I) và (O) tiếp xúc trong.

$\Delta CFH, \widehat{CFH}=90^\circ \Rightarrow \Delta CFH$ nội tiếp đường tròn đường kính $CH \Rightarrow K$ là trung điểm CH, do đó $OK = OC - KC$ nên (K) và (O) tiếp xúc trong.

Lại có: $IK = IH + KH$ nên (I) và (K) tiếp xúc ngoài.

b) Tứ giác $AEHF$: $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ (gt); \widehat{EAF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Vậy tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật.

c) Ta có: $\Delta AHB, \widehat{AHB} = 90^\circ, HE \perp AB \Rightarrow AH^2 = AE.AB$ (a)

$\Delta AHC, \widehat{AHC} = 90^\circ, HF \perp AC \Rightarrow AH^2 = AF.AC$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra $AE.AB = AF.AC$ (đpcm)

d) Ta có: $\widehat{FEH} = \widehat{AHE}$ (vì tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật)

$\widehat{IEH} = \widehat{IHE}$ (vì ΔIHE cân tại I)

$\widehat{FEI} = \widehat{FEH} + +\widehat{IEH} = \widehat{AHE} + \widehat{IHE} = \widehat{AHB} = 90^\circ (AD \perp BC)$ suy ra EF là tiếp tuyến của (I) tại E.

Chứng minh tương tự có EF là tiếp tuyến của (K) tại F. Vậy EF là tiếp tuyến chung của (I) và (K) (đpcm)

e) Vì $EF = AH$ (do $AEHF$ là hình chữ nhật) nên EF lớn nhất $\Leftrightarrow AH$ lớn nhất. Mà $AH = \frac{1}{2} AD (do\, BC \perp AD)$ nên AH lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ là đường kính của (O) $\Leftrightarrow H \equiv 0$. Vậy khi $H \equiv 0$ thì EF lớn nhất bằng bán kính của (O).

Câu 305.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = a$. Gọi D là trung điểm của BC, E là một điểm di động trên đoạn thẳng AD. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của E lên các cạnh AB, AC. Kẻ HI vuông góc với DK (với $I \in DK$). Đường thẳng DK cắt đường thẳng vuông góc với AB tại B ở F.

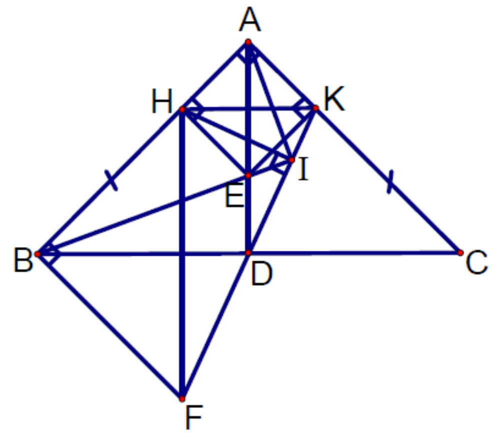
a) Chứng minh rằng năm điểm A, H, E, I, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính số đo góc HIB.

c) Chứng minh rằng ba điểm B, E, I thẳng hàng.

d) Tìm vị trí của E trên AD để diện tích ΔABI lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo a

Hướng dẫn



a)+Chứng minh $AHEK$ là hình vuông.

Ta có $AHEK$ là hình chữ nhật có đường chéo AE là đường phân giác nên $AHEK$ là hình vuông. Do đó A, H, E, K thuộc đường tròn đường kính HK.

Lại có góc HIK bằng $90°$ nên I thuộc đường tròn đường kính HK.

Do đó, A, H, E, K, I cùng thuộc đường tròn đường kính HK.

b) Xét hai tam giác BDF và CDK

Ta có $BDF = CDK$ (đối đỉnh)

$DB = DC$ (D là trung điểm BC)

$FBD = KCD$ (do $FB // AC$ và đây là hai góc so le trong)

Do đó $\Delta BDF = \Delta CDK\ (g.c.g)$. Suy ra $BF = CK$.

Lại có $BH = AB - AH = AC - AK = CK \Rightarrow BF = BH$

Mà $BF \perp AB$ nên tam giác BHF vuông cân tại B. Do đó $HFB = 45°$.

Tứ giác $BHIF$ có $HIF = HBF = 90°$ nên tức giác $BHIF$ nội tiếp đường tròn.

Do đó $HIB = HFB = 45°$.

c) Ta có $HAE = 45°$ (do tứ giác $AHEK$ là hình vuông). Vì A, H, E, K, I thuộc đường tròn đường kính HK (câu a)

Suy ra $HIE = HAE = 45°$. Mặt khác $HIB = 45°(cmt)$. Do đó tia IB trùng tia IE. Suy ra B, E, I thẳng hàng.

d) Tam giác ABI vuông tại I nên $S_{ABI} = \frac{1}{2}AI.BI \le \frac{1}{2}.\frac{AI^2 + BI^2}{2} = \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{4}a^2$.

Đẳng thức xảy ra khi $AI = BI \Leftrightarrow I \equiv D \Leftrightarrow E \equiv D$.

Vậy diện tích tam giác lớn nhất là $\frac{1}{4}a^2$ khi chỉ khi $E \equiv D$.

Câu 306.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ba điểm A,B,C cố định, thẳng hàng, B nằm giữa A,C. Vẽ đường tròn $(O;R)$ sao cho $(O;R)$ luôn nhận BC làm dây cung $(BC<2R)$. Từ A kẻ các tiếp tuyến AF và AE đến $(O;R)$, (F nằm trong nửa mặt phẳng bờ là AO có chứa dây BC). Gọi I là trung điểm của dây BC, EF cắt dây BC tại N và cắt AO tại K. Chứng minh

a) $AF^2 = AB.AC$

b) 5 điểm A,E,O,I,F cùng thuộc 1 đường tròn.

c) Khi đường tròn $(O;R)$ thay đổi thì đường tròn ngoại tiếp ΔKOI luôn đi qua một điểm cố định

Hướng dẫn

a) Xét ΔACF và ΔAFB có

$CAF = BAF$ (góc chung)

$ACF = AFB$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BF)

Vậy $\Delta ACF \backsim \Delta AFB \Rightarrow \dfrac{FA}{AC} = \dfrac{AB}{FA} \Rightarrow FA^2 = AB.AC$

b) Xét $(O;R)$ có các tiếp tuyến AF và AE

$\Rightarrow AEO = AFO = 90^0$

$\Rightarrow F;E$ cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

Lại có xét $(O;R)$ có I là trung điểm của dây BC

$\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow OIA = 90^0$

$\Rightarrow I$ cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

Vậy 5 điểm A,E,O,I,F cùng thuộc 1 đường tròn.

c) Vì B,C cố định và I cố định nên đường tròn ngoại tiếp ΔKOI luôn đi qua một điểm cố định I khi đường tròn $(O;R)$ thay đổi

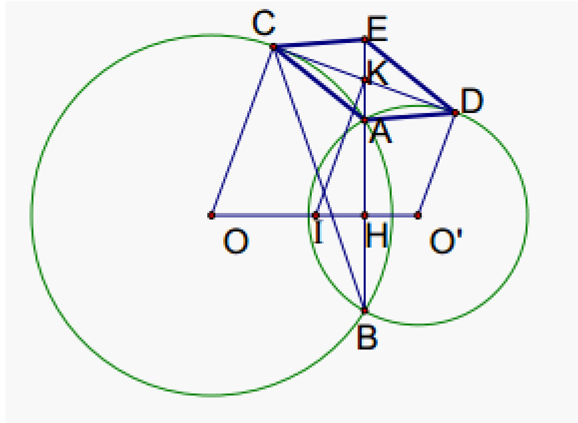
Câu 307.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ cắt nhau tại A và B $(R>r)$. Hai điểm O và O' nằm khác phía đối với đường thẳng AB. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài CD cắt đường thẳng AB tại K $(C\in(O))$ và $(D\in(O'))$.

a) Chứng minh $KC^2 = KA.KB$

b) Đường thẳng qua C song song với AD cắt đường thẳng qua D song song với AC tại E. Chứng minh K là trung điểm của AE

c) Chứng minh $BE < R + r$

Hướng dẫn



a) Chứng minh $KC^2 = KA.KB$

ΔACK và ΔCBK có: $AKC = CKB$ (góc chung), $ACK = CBK$ (góc nội tiếp và góc …)

Vậy $\Delta ACK \sim \Delta CBK \Rightarrow \dfrac{KC}{KA} = \dfrac{KB}{KC} \Rightarrow KC^2 = KA.KB$

b) Chứng minh K là trung điểm của AE

Chứng minh tương tự câu a) có $KD^2 = KA.KB \Rightarrow KC^2 = KD^2 \Rightarrow KC = KD = \dfrac{1}{2}CD(a)$

Tứ giác $ACED$ có: $AD//CE, AC//DE(gt)$ nên tứ giác $ACED$ là hình bình hành

Suy ra AE và CD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (b)

Từ a) và b) $\Rightarrow K$ là trung điểm của AE

c) Chứng minh $BE < R + r$

Gọi I là trung điểm $O'O$, K là trung điểm CD(theo trên) $\Rightarrow IK$ là đường trung bình hình thang $CDO'O \Rightarrow 2KI = OC + O'D = R + r(1)$

Gọi H là giao điểm của AB và $O'O$

$\Rightarrow AH \perp OO', AB = 2AH$ ((O) và (O') cắt nhau tại A và B)

Vì $AE = 2AK$ (câu b), $AB = 2AH \Rightarrow BE = 2(AK + AH) = 2KH$ (2)

Mặt khác ΔKHI vuông tại H $(AH \perp OO') \Rightarrow KH < KI \Rightarrow 2KH < 2KI$ (3)

Từ 1), 2), 3) $\Rightarrow BE < R + r$

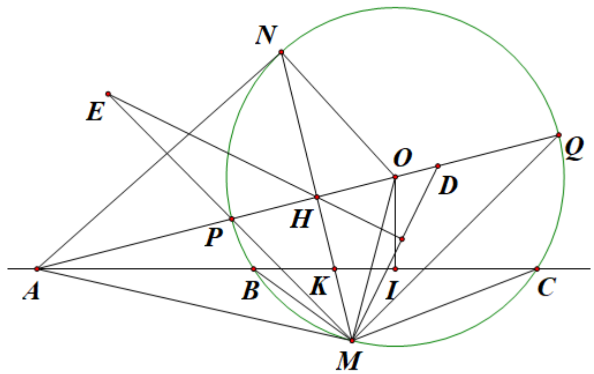
Câu 308.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C $(O \notin d)$. Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với (O) tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh 5 điểm O, M, A, N, I cùng nằm trên một đường tròn.

b) BC cắt MN tại K. AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O). Chứng minh điểm K là điểm cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

c) Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

Hướng dẫn



a) Ta có: $AMO = ANO = 90°$ (AM, AN là các tiếp tuyến của (O))

$AIO = 90°$ (vì $IB = IC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow OI \perp BC$).

Do đó các tam giác: $\Delta AMO, \Delta ANO, \Delta AIO$ nội tiếp đường tròn đường kính OA. Vậy 5 điểm O, M, A, N, I cùng nằm trên một đường tròn đường kính OA.

b) Xét ΔAMC và ΔABM có: A (góc chung), $ACM = AMB$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn cung MB của (O)).

Do đó $\Delta AMC \backsim \Delta ABM \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow AM^2 = AB.AC\,(a)$.

Xét ΔAHK và ΔAIO có: A (góc chung), $AHK = AIO = 90°$ (AM, AN là tiếp tuyến của (O) nên $OA \perp MN$).

Do đó $\Delta AHK \backsim \Delta AIO \Rightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{AO}{AI} \Rightarrow AK = \frac{AH.AO}{AI}(b)$.

ΔAMO có: $AMO = 90°$, $MH \perp OA \Rightarrow AH.AO = AM^2\,(c)$.

Từ $(a),(b),(c) \Rightarrow AK = \frac{AB.AC}{AI}$.

Vì A, B, C cố định nên I cố định và AB, AC, AI không đổi.

$\Rightarrow AK$ không đổi. Mặt khác A cố định, $K \in d \Rightarrow K$ là điểm cố định khi (O) thay đổi.

c) Ta có: $EMH + HMQ = PMQ = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Và $MQD + HMQ = 90^\circ$ (ΔHMQ vuông tại H). Suy ra $EMH = MQD\,(d)$.

Lại có: $QMD + DME = PMQ = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Và $MEH + DME = 90^\circ$ ($EH \perp MD$). Suy ra $MEH = QMD\,(e)$.

Từ $(d),(e) \Rightarrow \Delta EMH \backsim \Delta MQD \Rightarrow \dfrac{ME}{MQ} = \dfrac{MH}{DQ}\,(1)$.

Mặt khác: $\Delta MHP \backsim \Delta QHM\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MH}{HQ} = \dfrac{MH}{2DQ}\,(2)$ (vì $HQ = 2DQ$ (gt))

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{ME}{2MQ} \Rightarrow MP = \dfrac{1}{2}ME$.

Vậy P là trung điểm của ME.

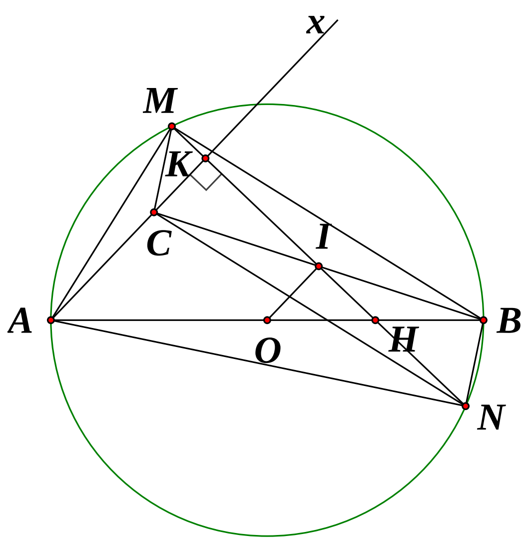
Câu 309.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Một dây cung MN quay xung quanh trung điểm H của OB. Gọi I là trung điểm của MN. Từ A kẻ tia $\mathrm{Ax} \perp MN$, cắt MN tại K. Tia BI cắt Ax tại C.

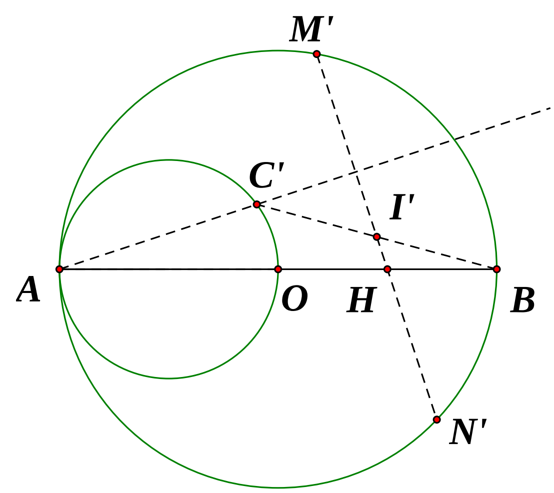
a) Chứng minh $\mathrm{OI} \perp MN$, từ đó suy ra tứ giác $CMBN$ là hình bình hành.

b) Chứng minh C là trực tâm ta giác AMN.

c) Khi MN quay xung quanh H thì C di động trên đường nào?

Hướng dẫn





a) Xét đường tròn (O) có MN là dây cung không đi qua tâm

I là trung điểm của MN

Xét ΔABC có O là trung điểm của AB

$OI // AC$ (cùng $\perp MN$)

$\Rightarrow I$ là trung điểm của BC

Tứ giác $CMBN$ có I là trung điểm của MN, I là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ Tứ giác $CMBN$ là hình bình hành.

b) Xét đường tròn (O) có $ANB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Hay $BN \perp AN$ mà $BN // MC$ ($CMBN$ là hình bình hành) $\Rightarrow MC \perp AN$

Mặt khác $AC \perp MN$ (gt) $\Rightarrow C$ là trực tâm của ΔAMN

c) $\Delta BOC: HB = HO = \dfrac{OB}{2}, IB = IO = \dfrac{BC}{2}$ nên HI là đường trung bình của $\Delta BOC \Rightarrow HI // OC$

hay $MN // OC$ mà $MN \perp \text{Ax} \Rightarrow OC \perp \text{Ax}$ hay $ACO = 90°$

Vì AO cố định $\Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính AO

Phần đảo: Lấy điểm C' bất kỳ thuộc đường tròn đường kính AO, gọi I' là trung điểm của BC', đường thẳng HI' cắt đường tròn (O) lần lượt tại M' và N'

$\Delta BOC'$ có H là trung điểm của OB, I' là trung điểm của BC'

$\Rightarrow HI'$ là đường trung bình của $\Delta BOC'$

$\Rightarrow HI' // \text{OC}'$

Xét đường tròn đường kính OA có $AC'O = 90°$ (góc nội tiếp chứn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AC' \perp \text{OC}'$ mà $HI' // \text{OC}'$ $\Rightarrow AC' \perp HI'$ hay $\Rightarrow AC' \perp M'N'$

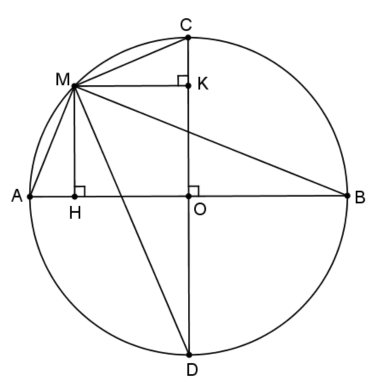
Câu 310.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$. Hai đường kính cố định của (O) là AB và CD vuông góc với nhau. M là một điểm thuộc cung nhỏ AC của (O). K và H lần lượt là hình chiếu của M trên CD và AB.

a) Tính $\sin^2 MBA + \sin^2 MAB + \sin^2 MCD + \sin^2 MDC$

b) Chứng minh $OK^2 = AH.(2R - AH)$

c) Tìm vị trí điểm M để giá trị của $P = MA.MB.MC.MD$ lớn nhất.

Hướng dẫn



a) Tính $\sin^2 MBA + \sin^2 MAB + \sin^2 MCD + \sin^2 MDC$

Ta có: $AMB = CMD = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow MBA + MAB = MCD + MDC = 90°$

$\Rightarrow \sin MBA = \cos MBA, \sin MDC = \cos MCD$

Do đó:

$$\sin^2 MBA + \sin^2 MAB + \sin^2 MCD + \sin^2 MDC$$
$$= \left(\sin^2 MBA + \cos^2 MBA\right) + \left(\sin^2 MCD + \cos^2 MCD\right) = 2$$

b) Chứng minh $OK^2 = AH.(2R - AH)$

$\Delta AMB, AMB = 90°, MH \perp AB$

$\Rightarrow MH^2 = AH.BH = AH.(AB - AH) = AH.(2R - AH)\ (a)$

Mặt khác tứ giác $OHMK$ có $O = K = H = 90°$ (gt) nên tứ giác $OHMK$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow MH = OK\ (b)$.

Từ (a), (b) $\Rightarrow OK^2 = AH(2R - AH)$ (đpcm)

c) Tìm vị trí điểm M để giá trị của $P = MA.MB.MC.MD$ lớn nhất.

$\Delta AMB, AMB = 90°, MH \perp AB \Rightarrow MA.MB = AB.MH = 2R.MH$

$\Delta CMD, CMD = 90°, MK \perp CD \Rightarrow MC.MD = CD.MK = 2R.MK$

Do đó $P = MA.MB.MC.MD = 4R^2.MH.MK$

Lại có $MH.MK \le \dfrac{MH^2 + MK^2}{2} = \dfrac{HK^2}{2} = \dfrac{OM^2}{2} = \dfrac{R^2}{2}$

Nên $P = 4R^2.MH.MK \le 4R^2.\dfrac{R^2}{2} = 2R^4$. Đẳng thức xảy ra khi $MH = MK \Leftrightarrow$ tứ giác $OHMK$ là hình vuông $\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ AC.

Câu 311.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho AB đường kính của $(O;R)$. C là một điểm thay đổi trên đường tròn C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O;R)$ tại M, MB cắt CH tại K.

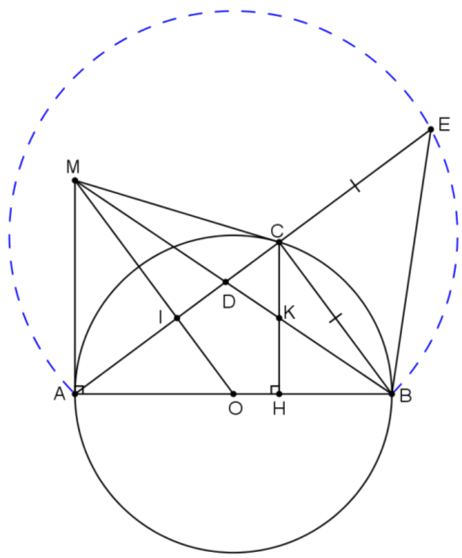
a) Chứng minh 4 điểm C,H,O,I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của $(O;R)$

c) Chứng minh K là trung điểm của CH

d) Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

Hướng dẫn



a) Chứng minh 4 điểm C,H,O,I cùng thuộc một đường tròn.

Ta có $IA = IC = \frac{1}{2}AC$ (gt)

$\Rightarrow OI \perp AC \Rightarrow OIC = 90°$

$\Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính OC

Lại có $OHC = 90°(CH \perp AB) \Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính OC (đpcm)

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của $(O;R)$

$OM \perp AC(OI \perp AC), IA = IC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow OM$ là trung trực AC

$\Rightarrow \Delta OCM = \Delta OAM\ (c.c.c)$

$\Rightarrow OCM = OAM = 90°$ (AM là tiếp tuyến (O))

$\Rightarrow MC \perp OC \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của (O)

c) Chứng minh K là trung điểm của CH

Gọi D là giao điểm của MB và AC.

$ACM = ABC = \frac{1}{2} sd\, AC$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến, dây cùng chắn cung AC của (O))

Lại có $ACB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $ACH = ABC$ (cùng phụ với BAC)

$\Rightarrow ACM = ACH \Rightarrow CD$ là phân giác MCK của ΔMCK

Mặt khác $CB \perp CD\left(ACB = 90°\right) \Rightarrow CB$ là phân giác ngoài của ΔMCK

Do đó ta có $\frac{KD}{MD} = \frac{KB}{MB}$ (a)

Xét $\Delta ABM, KH // AM\,(CH \perp AB, AM \perp AB) \Rightarrow \frac{KB}{MB} = \frac{KH}{AM}$ (b)

Xét $\Delta ADM, CK // AM\,(CH \perp AB, AM \perp AB) \Rightarrow \frac{KD}{MD} = \frac{KC}{AM} (c)$

Từ (a), (b), (c) $\Rightarrow \frac{KH}{AM} = \frac{KC}{AM} \Rightarrow KH = KC$ (đpcm)

d) Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $CE = BC$

Khi đó $P_{ABC} = AB + AC + BC = 2R + AC + CE = 2R + AE$ nên P_{ABC} đạt max $\Leftrightarrow AE$ đạt max

ΔBCE vuông cân tại $C \Rightarrow AEB = 45°$

Vì AB cố định nên E thuộc cung chứa góc $45°$ dựng trên đoạn thẳng AB, do đó AE đạt max $\Leftrightarrow AE$ là đường kính của cung chứa góc $45°$ dựng trên đoạn thẳng AB

$\Leftrightarrow ABE = 90° \Leftrightarrow ABC = 45° \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O)

Khi đó ΔABE vuông cân tại E, nên $AE = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}R$

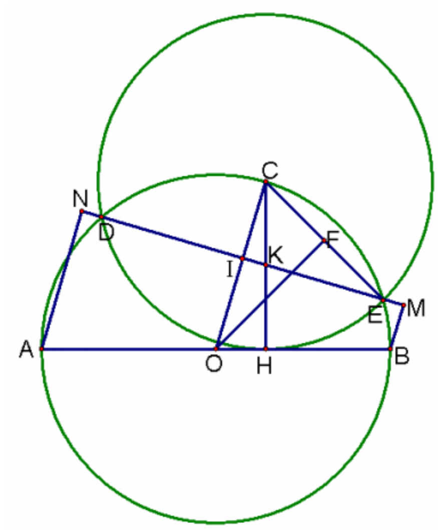
Vậy chu vi tam giác ABC đạt GTLN là $2\left(\sqrt{2}+1\right)R$ khi C là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O).

Câu 312.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ một điểm C thuộc đường tròn (O) kẻ CH vuông góc với AB (C khác A, B; H thuộc AB. Đường tròn tâm C bán kính CH cắt đường tròn (O) tại D và E.

a) Kẻ AN, BM vuông góc với đường thẳng DE (N, M trên đường thẳng DE). Chứng minh rằng $DN = EM$.

b) Chứng minh DE đi qua trung điểm của CH.

Hướng dẫn



a) Gọi I là giao điểm của (O) và (C). Vì (O) và (C) cắt nhau tại D, E nên OC là trung trực của DE

$\Rightarrow OC \perp DE$ và $ID = IE = \dfrac{1}{2}DE$.

Xét tứ giác $ABMN$ ta có:

$AN // OI // BM$ $(AN \perp DE;\ OC \perp DE;\ BM \perp DE)$.

$OA = OB = \dfrac{1}{2}AB$

$\Rightarrow IN = IM = \dfrac{1}{2}MN$ mà $ID = IE = \dfrac{1}{2}DE$ (theo trên)

Do đó $DN = IN - ID = IM - IE = EM$: ĐPCM.

b) Gọi K là giao điểm của DE và CH, F là trung điểm của $CE \Rightarrow OF \perp CE$ (Liên hệ đường kính và dây cung).

Ta có $\Delta CIK \backsim \Delta CHO \Rightarrow \dfrac{CI}{CH} = \dfrac{CK}{CO} \Rightarrow CI.CO = CH.CK$ (a).

$\Delta COF \backsim \Delta CEI \Rightarrow \dfrac{CO}{CE} = \dfrac{CF}{CI} \Rightarrow CI.CO = CE.CF = \dfrac{1}{2}CE^2 = \dfrac{1}{2}CH^2$ (b).

Từ (a; b) Suy ra $CH.CK = \dfrac{1}{2}CH^2 \Rightarrow CH = 2CK$.

Vậy K là trung điểm của CH, tức DE đi qua trung điểm của CH (ĐPCM).

Câu 313.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho hai đường tròn (O,R) và (O',r) tiếp xúc ngoài tại B. Tiếp tuyến chung ngoài AD cắt đường nối tâm tại M, $A \in (O), D \in (O')$. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại B cắt AD tại P. Gọi H là hình chiếu của A lên BC, E là giao điểm của PC và AH, C là điểm đối xứng với B qua O.

a) Chứng minh $EH = EA$.

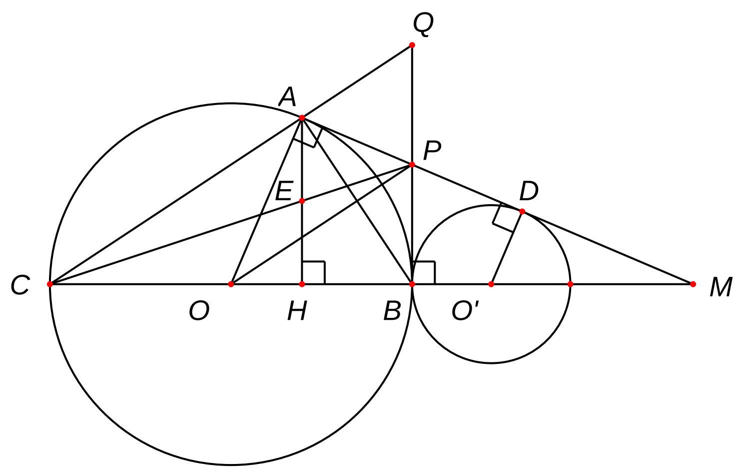
b) Tính AH theo R và $OP = d$.

c) Tính AD theo R và r.

d) Giả sử $AD = DM = 4cm$, tính R và r.

e) Gọi $(O_1; R_1)$ tiếp xúc ngoài với AD đồng thời tiếp xúc ngoài với (O, R) và (O, r). Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$.

Hướng dẫn



a) Theo giả thiết $OA = OB = R$, (1)

+ Vì PA, PB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O, R) nên $PA = PB$, (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra OP là đường trung trực của đoạn AB, $(2a)$.

Ta có ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O, suy ra $CA \perp AB$, $(2b)$.

Từ $(2a),(2b)$ suy ra $CA // OP$.

+ Gọi giao điểm của CA và BP là Q.

Xét ΔCBQ có O là trung điểm của CB, $CA // OP$. Do đó $BP = PQ = \frac{1}{2}BQ$, $(2c)$

Theo giả thiết BQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn nên $BQ \perp CB$; $AH \perp CB$, (theo giả thiết). Do vậy $BQ // AH$.

+ Xét ΔQCB có $CE // QP$, suy ra $\frac{CE}{CP} = \frac{AE}{QP}$, (định lý Talet) $(3a)$.

+ Xét ΔCPB có $EH // PB$, suy ra $\dfrac{CE}{CP}=\dfrac{EH}{PB}$, (định lý Talet) $(3b)$.

Từ $(3a),(3b)$ ta có $\dfrac{AE}{QP}=\dfrac{EH}{PB}$, kết hợp $(2c)$ suy ra $AE=EH$.

b) Cho $OP=d$, tính AH theo R.

Xét ΔCBQ có $AH//QB \Rightarrow \dfrac{AH}{QB}=\dfrac{CA}{CQ}\Rightarrow AH=\dfrac{CA.QB}{CQ}$. Tính CA, QB, CQ.

+ Xét $\Delta CBQ: OP$ là đường trung bình (vì $BP=PQ=\dfrac{1}{2}BQ$, $OB=OC=\dfrac{1}{2}CB$)

$\Rightarrow CQ=2OP=2d$.

+ ΔCBQ vuông tại B: theo a) $CA\perp AB\Rightarrow BC^2=CA.CQ \Rightarrow CA=\dfrac{BC^2}{CQ}=\dfrac{2R^2}{d}$.

+ ΔOBP vuông tại B: $PB^2=OP^2-OB^2\Rightarrow PB=\sqrt{d^2-R^2}\Rightarrow QB=2BP=2\sqrt{d^2-R^2}$.

Vậy

c) Tính AD theo R và r.

Ta có: $APB+DPB=180°$

Theo a) $PA=PB$, OP là đường trung trực của AB, suy ra OP là tia phân giác của góc APB

$\Rightarrow APB=2OPB$

Tương tự PO' là tia phân giác góc $DPB \Rightarrow DPB=2O'PB$.

Do đó: $APB+DPB=180°\Rightarrow 2OPB+2O'PB=180°\Rightarrow OPO'=90°$.

$\Delta OPO'$ vuông tại P có $PB\perp OO' \Rightarrow PB^2=OB.O'B=R.r\Rightarrow PB=\sqrt{R.r}$.

Mà $AD=AP+PD=PB+PB=2PB$ (vì $PA=PB, PB=PD$).

Nên $AD=2PB=2\sqrt{R.r}$.

d) Giả sử $AD=DM=4cm$, tính R và r.

Theo c) $AD=2\sqrt{R.r}$, mà $AD=4cm$ suy ra $2\sqrt{R.r}=4\Rightarrow R.r=4$, $(4a)$

Xét ΔMOA có $O'D//OA$ suy ra $\dfrac{O'D}{OA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{r}{R}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow R=2r$, $(4b)$.

Từ $(4a),(4b)$ suy ra $2r^2=4\Rightarrow r=\sqrt{2}cm; R=2\sqrt{2}cm$.

e) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{R_1}}=\dfrac{1}{\sqrt{R}}+\dfrac{1}{\sqrt{r}}$, ($(O_1;R_1)$ tiếp xúc ngoài với AD đồng thời tiếp xúc ngoài với (O,R) và (O,r)).

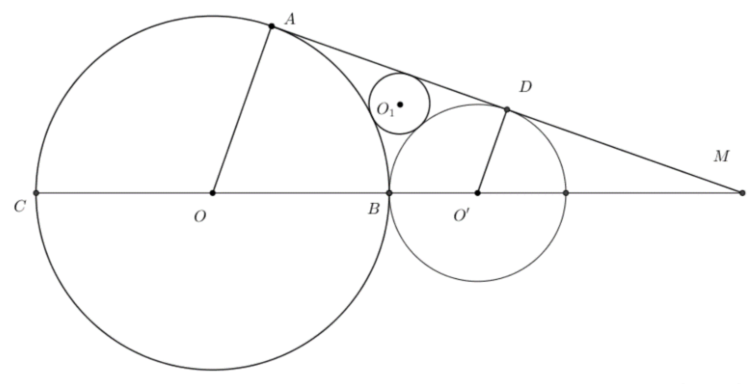
Theo c) Hai đường tròn (O,R) tiếp xúc ngoài với (O',r) ta có: $AD=2\sqrt{R.r}$, $(5a)$.

Chứng minh tương tự, áp dụng cho đường tròn (O,R) tiếp xúc ngoài với (O_1,R_1) ta có: $AP=\sqrt{R.R_1}$, $(5b)$.

Tương tự với đường tròn (O,R_1) tiếp xúc ngoài với (O',r), ta có: $PD=\sqrt{R_1.r}$, $(5c)$.

Từ $(5a),(5b),(5c)\Rightarrow AD=AP+PD$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{R.r}=2\sqrt{R.R_1}+2\sqrt{R_1.r}$



$\Leftrightarrow \sqrt{R.r}=\sqrt{R_1}.\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right)$

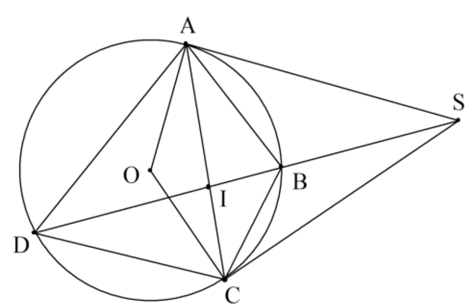
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1}}=\frac{\sqrt{R}+\sqrt{r}}{\sqrt{R.r}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Bài 314. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Đường thẳng BD và các tiếp tuyến với (O) tại A, C đồng qui tại S. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

a) $AB.DC=AD.BC$ b) $\dfrac{SB}{SD}=\dfrac{IB}{ID}=\dfrac{AB.CB}{AD.CD}$

Hướng dẫn



a) $\Delta SAB\sim\Delta SDA$ nên: $\dfrac{SA}{SD}=\dfrac{AB}{DA}=\dfrac{SB}{SA}$ (1)

$\Delta SCB\sim\Delta SDC$ nên: $\dfrac{SC}{SD}=\dfrac{CB}{DC}=\dfrac{SB}{SC}$ (2)

Do $SA=SB$ và từ (1) và (2): $\dfrac{AB}{DA}=\dfrac{BC}{DC}\Rightarrow AB.DC=AD.BC$

b) Từ (1) và (2): $\dfrac{SB}{SD}=\dfrac{SB.SC}{SD.SA}=\dfrac{AB.CB}{AD.CD}$.

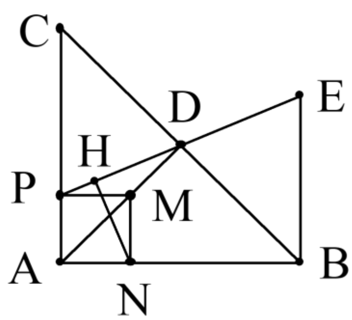
Tương tự phần a) Từ $\Delta IAB \sim \Delta IDC$ và $\Delta ICB \sim \Delta IDA \Rightarrow \dfrac{IB}{ID} = \dfrac{AB.CB}{AD.CD} \Rightarrow$ đpcm

Bài 315. Cho ΔABC vuông cân ở A. AD là trung tuyến thuộc cạnh huyền, M là một điểm thay đổi trên đoạn AD. Gọi N, P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M xuống AB và AC. H là hình chiếu vuông góc của N xuống đường thẳng PD.

a) Xác định vị trí của N để $\Delta\, AHB$ có diện tích lớn nhất.

b) CmR: Khi M thay đổi, HN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn



a) Kẻ BE // AC cắt PD tại E $\Rightarrow$ $BE = PC = BN$ $\Rightarrow$ $NEB = NHB = 45°$.

Mặt khác: $AHN = APN = 45°$ $\Rightarrow$ $AHB = 90°$, HN là phân giác của AHB.

$\Rightarrow S_{AHB}^2 = \dfrac{1}{4}AH^2.BH^2 \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{AH^2 + BH^2}{2}\right)^2 = \dfrac{AB^4}{16}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $AH = BH$ $\Leftrightarrow$ $H \equiv D \equiv M$.

b) HN luôn đi qua điểm chính giữa của nửa đường tròn đường kính AB (HN là phân giác AHB).

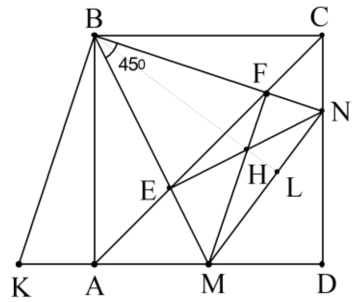
Bài 316. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Một góc $\text{xBy} = 45°$ quay xung quanh B sao cho Bx cắt cạnh AD tại M, By cắt cạnh CD ở N (M, N không trùng với D). Gọi E, F tương ứng là giao điểm của BM, CN với AC.

a) CmR: các tứ giác $ABFM$, $BCNE$, $MEFN$ nội tiếp.

b) CmR: MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định và chu vi ΔMND không đổi.

c) Tìm vị trí của M, N và nêu cách dựng các điểm đó để ΔMND có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn



a) $FBM = FAM = 45° \Rightarrow ABFM$ nội tiếp. Tương tự: $BCNE$ nội tiếp.

$\Rightarrow\ BEN + BCN = 180° \Rightarrow BEN = 90°$. Tương tự: $MFN = 90° \Rightarrow\ dp$cm

b) Lấy điểm K trên tia đối của tia AD sao cho $AK = CN$:

$\Rightarrow\ BK = CN$ và $KBM = KBA + ABM = NBC + ABM$

$$= 90° - NBM = 45° = NBM$$

$\Rightarrow\ \Delta KMB = \Delta NBM$ (c.g.c)$\Rightarrow\ BA = BL\ \Rightarrow\ MN$ tiếp xúc với (B , a)

Lại có: $\Delta KBM = \Delta NMB\ \Rightarrow\ KM = MN$. Từ đó, suy ra :

$P_{\Delta MND} = MN + ND + MD = KA + AM + MD + DN = CD + ND + MD + MA = 2a.$

c)Có: $MD + ND + MN = 2a \Rightarrow\ MD + ND + \sqrt{MD^2 + ND^2} = 2a$

$$\Rightarrow 4a^2 = \left(MD + ND + \sqrt{MD^2 + ND^2}\right)^2 \geq \left(MD + ND + \frac{MD + ND}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (MD + ND)^2$$

$$\geq 4\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 .MD.ND \text{ Mà: } MD\,.\,ND = 2S_{MND} \Rightarrow\ S_{MND}\ \leq \frac{a^2}{2\left(\sqrt{2}+1\right)^2}.$$

Dấu "$=$" xảy ra $\Rightarrow\ MD = ND\ \Rightarrow\ MBA = NBC = 22,5°$

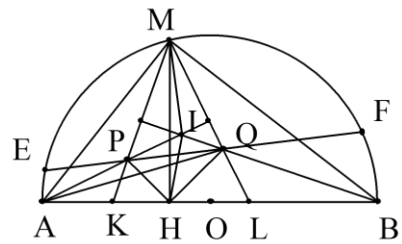
Bài 317. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, M là một điểm bất kì trên nửa đường tròn (M khác A và B) . Hạ $MH \perp AB$ tại H . Gọi P , Q , I lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác MAH , MBH , AMB .

a) Chứng minh điểm I là trực tâm của $\Delta\, MPQ$

b) Tìm quĩ tích điểm I khi điểm M di động trên nửa đường tròn

c) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn để chu vi $\Delta\, PHQ$ lớn nhất

Hướng dẫn



a) Dễ thấy: A, P, I thẳng hàng và B, Q, I thẳng hàng.

Gọi $K \equiv MP \cap AB$: $KMB = KMH + BMH$, $MKB = KMA + MAB$

Mặt khác: $KMH = KMA$ và $BMH = MAB$

Suy ra: ΔBMK cân tại B có BI là phân giác $\Rightarrow BI \perp MK$

Tương tự: $L \equiv AB \cap MQ \Rightarrow \Delta$AML cân $\Rightarrow AI \perp ML \Rightarrow dp$cm

b) Thuận: $AIB = 180° - \dfrac{MAB + MBA}{2} = 180° - 45° = 135°$

Vậy điểm I thuộc cung chứa góc $135°$ vẽ trên đoạn AB (thuộc cùng một nửa mặt phẳng chứa M)

Đảo lại: Giả sử I' là điểm bất kì thuộc cung chứa góc $\Rightarrow$ Kẻ $I'N \perp AB$, vẽ $(I', I'N)$ kẻ hai tiếp tuyến AA' và BB' với $(I', I'N)$ gọi M' là giao của AA' và BB'. Ta cần chứng minh $M' \in (O)$ hay $AM'B = 90°$.

Ta có: $AIB = 135° \Rightarrow IBA + IAB = 45° \Rightarrow M'AB + M'BA = 90° \Rightarrow AM'B = 90°$.

c) Ta có: $PMH = QBH$ (Góc có cạnh t/ư vuông góc). $PHM = QHB = 45°$

$\Rightarrow \Delta MPH \sim \Delta BQH$ (g.g)nên: $\dfrac{PH}{QH} = \dfrac{MH}{HB} = tg\,MBA = \dfrac{MA}{MB} \Rightarrow \dfrac{PH}{QH} = \dfrac{MA}{MB}$.

Lại có: $AMB = PHQ = 90° \Rightarrow \Delta HPQ \sim \Delta MAB$ (c.g.c). Ta có: $HQP = MBA \Rightarrow MBA + HQF = 180°$

$\Rightarrow BHQF$ nội tiếp. Từ đó suy ra: $MFE = QHB = 45°$

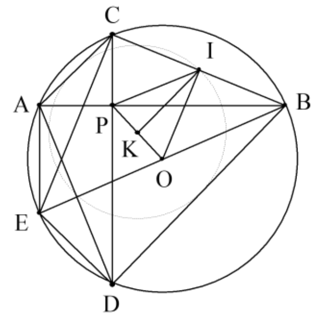
ΔMEF cân tại M nên: $ME = MF$. $\Delta MQF = \Delta MQH$ (c.g.c) nên: $MF = MH$ và $QF = QH$.

Tương tự: $PH = PE \Rightarrow C_{PQH} = PH + QH + QP = EP + PQ + QF = EF = \sqrt{2}MF = \sqrt{2}MH$

Vậy: C_{PQH} lớn nhất $\Rightarrow$ MH lớn nhất $\Rightarrow$ $H \equiv O$. Khi đó: M là điểm chính giữa nửa đường tròn (O)

Bài 318. Cho đường tròn $(O;R)$ và P là một điểm nằm bên trong đường tròn. Qua P vẽ hai dây AB và CD vuông góc với nhau. Chứng minh rằng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không đổi

Hướng dẫn



Kẻ đường kính BE. Ta có $AE//CD \Rightarrow AC = DE$. Áp dụng ĐL

Pitago cho $\Delta v.BED$: $BD^2 + DE^2 = BD^2 + AC^2 = BE^2 = 4R^2$

Suy ra: $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = AC^2 + BD^2 = 4R^2 = Const$

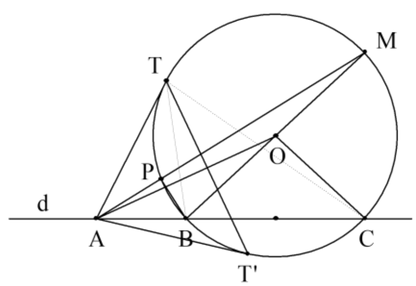
Bài 319. Cho ba điểm A, B, C theo thứ tự nằm trên một đường thẳng d sao cho $AB = 2$, $BC = 4$. Một đường tròn di động (O) có tâm O và đi qua B, C. Gọi AT, AT' là hai tiếp tuyến kẻ từ A đến (O), với T, T' là hai tiếp điểm.

a) Tìm quĩ tích các điểm T và T'

b) Vẽ đường kính MB của (O). Gọi $P \equiv AM \cap (O)$. Chứng minh: $AM.AP = AO^2 - OC^2$

c) Tìm quĩ tích các điểm M và P

Hướng dẫn



a) Thuận: Ta chứng minh $T'A^2 = AT^2 = AB.AC = (2\sqrt{3})^2$

Suy ra: T và T' thuộc đường tròn $(A;\ 2\sqrt{3})$

Đảo: Lấy một điểm T_1 bất kì thuộc $(A;\ 2\sqrt{3})$. Qua T_1 vẽ một đường

thẳng vuông góc với AT_1 cắt trung trực của BC tại O'.

Ta cần chứng minh AT_1 là tiếp tuyến của $(O';O'B)$: Kẻ tiếp tuyến AT_2

Ta có: $AT_2{}^2 = AB.AC = AT_1^2 => O'T_1 = O'T_2 => OT_1$ là bán kính (O').

Suy ra: AT_1 là tiếp tuyến của (O').

b) Ta có: $AT^2 = AM.AP$. Mà $AT^2 = OA^2 - OT^2$ hay: $AT^2 = OA^2 - OC^2 \Rightarrow AM.AP = OA^2 - OB^2$

c) Quĩ tích M :

Thuận: ΔBCM vuông tại $C \Rightarrow CM \perp d \Rightarrow M$ thuộc đường thẳng c vuông góc với d tại C

Đảo: Giả sử M' thuộc đường thẳng c qua trung điểm I của BC kẻ một đường thẳng vuông góc với d giao với MB tại O_1 .Vẽ đường tròn $(O_1;O_1B)$. Ta cần chứng minh M thuộc $(O_1;O_1B)$.

Ta có: $OI//BC \Rightarrow OI$ là đường trung bình của $\Delta BMC \Rightarrow OB = OM \Rightarrow M \in (O1\ ;O_1B)$.

* Quĩ tích P :

Thuận: Ta có: $APB = 90° \Rightarrow P$ thuộc đường tròn đường kính AB

Đảo: Lấy một điểm P' bất kì trên đường tròn đường kính AB. Qua C vẽ một đường thẳng vuông góc với d giao với AP tại M . Gọi O_2 là giao của đường trung trực BC với BM, vẽ $(O_2;O_2B)$ ta cần chứng minh: P và M thuộc $(O_2;O_2B)$: OI là đường trung bình của ΔBMC nên $OM = OB \Rightarrow M$ thuộc đường tròn.

Ta có: $BPM = 90°$ nên P thuộc đường tròn đường kính BM hay: $OP = OB$.

Bài 320. Cho hai đường tròn (O,R) và $\left(O',\frac{R}{2}\right)$ tiếp xúc ngoài tại A. Trên đường tròn (O) lấy điểm B sao cho $AB = R$ và điểm M trên cung lớn AB. Tia MA cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai là N. Qua N kẻ đường thẳng song song với AB cắt đường thẳng MN tại Q và cắt đường tròn (O') tại P.

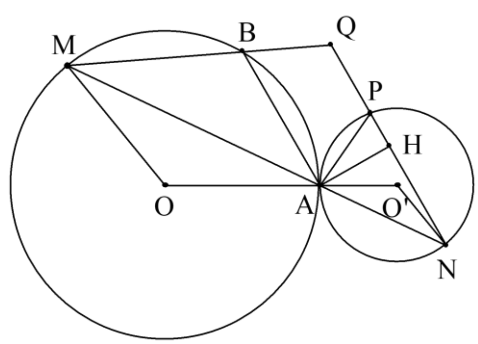
a) Chứng minh $\Delta OAM \sim \Delta O'AN$.

b) Chứng minh độ dài đoạn NQ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

c) Tứ giác $ABQP$ là hình gì? tại sao?

d) Xác định vị trí điểm M để diện tích tứ giác $ABQN$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó theo R.

Hướng dẫn



a) Dễ dàng chứng minh được $\Delta OAM \sim \Delta O'AN$.

b) Từ a) suy ra: $\frac{MA}{NA} = \frac{OA}{O'A}$.

$$\Rightarrow \frac{MA}{MA+NA} = \frac{MA}{MN} = \frac{OA}{OA+O'A} = \frac{2}{3}$$

Mặt khác: $AB \,//\, NQ \Rightarrow \dfrac{AB}{NQ} = \dfrac{MA}{MN}$.

Hay: $\dfrac{R}{NQ} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow NQ = \dfrac{3R}{2} = c\text{onst}$.

c) Dễ thấy: $ABQP$ là hình thang vì $AB \,//\, NQ$.

Ta có: $ABQ = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\left(MB + AB\right) = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\, AM = \dfrac{1}{2} AOM = \dfrac{1}{2} AO'M = APN$

Mà: $\text{APN} = \text{PAB}(so \text{ le trong}) \Rightarrow ABQ = BAP \Rightarrow ABQP$ là hình thang cân.

d) Kẻ $AH \perp QN$. Ta có: $S = S_{ABQN} = \dfrac{1}{2}\left(AB + QN\right).AH = \left(1,5R + R\right).AH = 2,5R.AH$

Do đó:

$S \max \Leftrightarrow AH$ max. Mà $AH \le AN \Leftrightarrow H \equiv N \Leftrightarrow AN \perp NQ \Leftrightarrow AN \perp AB$ tại $A \Leftrightarrow MAB = 90^0 \Leftrightarrow$ M là điểm đối xứng của điểm B qua điểm O.

Khi đó, ΔAMB vuông tại A, ta có: $AM^2 = MB^2 - AB^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow AM = R\sqrt{3}$.

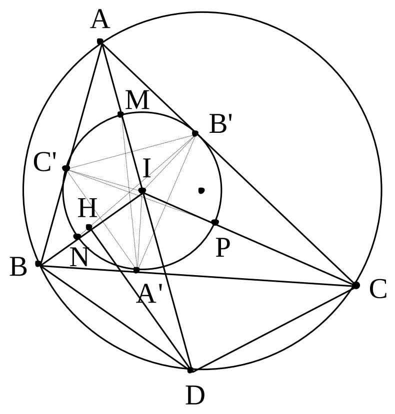
Mặt khác: Do $\dfrac{AM}{MN} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow AN = \dfrac{1}{2} AM = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Vậy: Max $S_{ANQB} = \dfrac{5R}{4}.\dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}R^2}{8}$

Câu 321.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(I;R)$ nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm A', B', C'.

a) Gọi các giao điểm của (I) với các đoạn IA, IB, IC lần lượt là M, N, P. Chứng minh rằng các đường thẳng $A'M, B'N, C'P$ đồng qui.

b) AI kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại D (khác A). chứng minh rằng: $\dfrac{IB.IC}{ID} = 2R$.

Hướng dẫn



a) Chứng minh: $A'M, B'N, C'P$ là ba phân giác của $\Delta A'B'C'$.

b) Gọi H là trung điểm của BI. Ta có: $DBC = CAD = \dfrac{1}{2}A$

$DIB = \dfrac{1}{2}(A+B)$. Mặt khác: $DBI = \dfrac{1}{2}B + DBC = \dfrac{1}{2}(B+A)$

Suy ra: $DBI = DIB \Rightarrow \Delta DBI$ cân tại D $\Rightarrow DH$ là phân giác D

$\Rightarrow HDI = \dfrac{1}{2}D = \dfrac{1}{2}C = ACI \Rightarrow \Delta HDI \sim \Delta A'CI$. Suy ra:

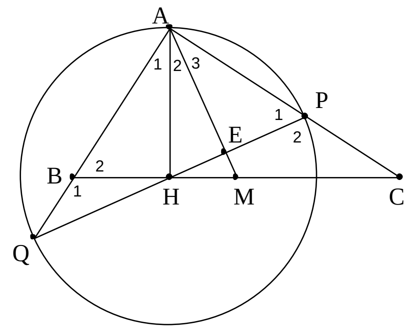
$$\frac{ID}{IC} = \frac{IH}{IA'} = \frac{2IH}{2IA'} = \frac{IB}{2IA'} \Rightarrow IB.IC = ID.2IA' = ID.2R \Rightarrow \frac{IB.IC}{ID} = 2R$$

Câu 322.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông ở A $(AC > AB)$ hạ $AH \perp BC$ tại H. Đường tròn (H, HA) cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P và Q $(P, Q \neq A)$.

a) Chứng minh P, H, Q thẳng hàng và tứ giác $BPCQ$ nội tiếp

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh: $AM \perp PQ$

Hướng dẫn



a) $\widehat{PAQ} = 90°$, PQ là đường kính (A, HA)

$\Rightarrow$ Ba điểm P, H, Q thẳng hàng.

ΔAHQ cân tại H: $\widehat{A_1} = \widehat{Q}$ mà $\widehat{C} = \widehat{A_1}$ (Cùng phụ với $\widehat{CAH}$)

Nên: $\widehat{C} = \widehat{Q} \Rightarrow BPCQ$ nội tiếp.

b) ΔMAB cân $\Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{BAM} = \widehat{Q} + \widehat{H_1}$, $\widehat{P_1} = \widehat{C} + \widehat{H_2}$.

Mà $\widehat{C} = \widehat{Q}$, $\widehat{H_1} = \widehat{H_2} \Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{P_1} = \widehat{BAM}$

Do đó: $\widehat{P_1} + \widehat{A_3} = \widehat{MAB} + \widehat{A_3} = 90° \Rightarrow \widehat{AEP} = 90°$

Vậy: $PQ \perp AM$ tại E.

Câu 323.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính BC và một điểm A trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng có bờ BC chứa điểm A dựng hai đường tròn đường kính HB và HC, chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F.

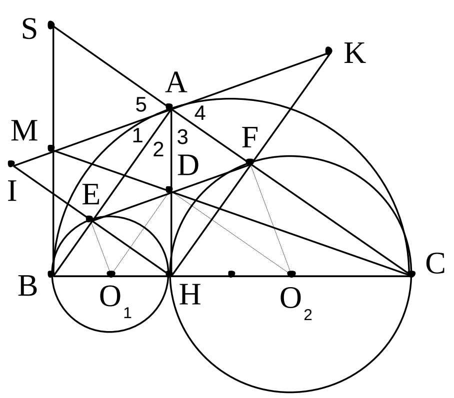
a) Chứng minh $AE \,.\, AB = AF \,.\, AC$.

b) Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn đường kính HB và HC

c) Gọi I và K lần lượt là hai điểm đối xứng với H qua AB và AC. Chứng minh ba điểm I, A, K thẳng hàng.

d) Đường thẳng IK cắt tiếp tuyến kẻ từ B của nửa đường tròn (O) tại M. Chứng minh MC, AH, EF đồng qui.

Hướng dẫn



a) ΔBEH có trung tuyến $O'E$ ứng với cạnh BH bằng $\frac{1}{2}BH$ nên ΔBEH vuông tại E.

Suy ra: $HE \perp AB$.

Tương tự: $HF \perp AC$.

Áp dụng hệ thức lượng với hai tam giác vuông AHB và AHC,

ta có: $AH^2 = AE.\ AB$, $AH^2 = AF\ .\ AC$. Suy ra: $AE\ .\ AB = AF\ .\ AC$.

b) Tứ giác $AFEH$ là hình chữ nhật vì có ba góc vuông.

Gọi D là giao điểm của AE và EF, ta có: $DA = DH = DE = DF$.

$\Delta O_1ED = \Delta O_1HD$ (c.c.c). Suy ra: $O_1ED = O_1HD = 90°$.

Do đó: $EF \perp O'E$ tại E nên: EF là tiếp tuyến của đường tròn (O_1).

Tương tự: EF là tiếp tuyến $(O_2) \Rightarrow EF$ là tiếp tuyến chung

c) Theo tính chất đối xứng ta có: $A_1 = A_2$, $A_3 = A_4$

$\Rightarrow IAH + HAK = 2(A_1 + A_2) = 2.BAC = 180^0 \Rightarrow$ Ba điểm I, A, K thẳng hàng.

d) SB // $AH \Rightarrow SBA = A_2$(So le) $= A_1 \Rightarrow \Delta$MBA cân tại $A \Rightarrow MA = MB$

Mặt khác: $MBA + S = 90^0$ mà $A_1 = A_5$ và $MBA = A_1 \Rightarrow S = A_5 \Rightarrow \Delta MAB$ cân tại $A \Rightarrow MA = MS$

Suy ra: $MA = MS$. Giả sử MC cắt AH tại D'. Theo ĐL Ta lét: $\frac{AD'}{MS} = \frac{CD'}{CM} = \frac{HD'}{MB}$ mà $MS = MB$ nên:

$AD' = D'H \Rightarrow D'H = D'A$ mặt khác: $DH = DA \Rightarrow D \equiv D'$.

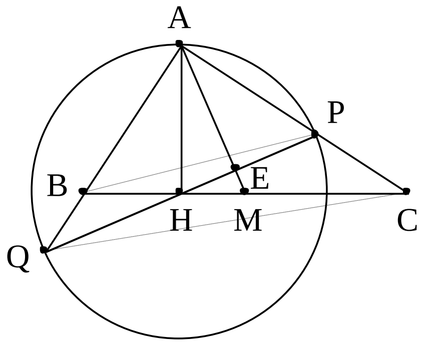
Vậy: AH, EF, MC đồng qui tại tại D.

Câu 324.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC vuông ở A $(AC > AB)$ đường cao AH. Đường tròn $(H;\ HA)$ cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P và Q (P, Q khác A).

a) Chứng minh: P, H, Q thẳng hàng. Tứ giác $BPCQ$ nội tiếp

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh: $AM \perp PQ$.

Hướng dẫn



a) PQ là đường kính đường tròn tâm A bán kính HA.

$\Rightarrow$ Ba điểm P, H, Q thẳng hàng.

Ta có: $HQA = HAQ$ (ΔAHQ cân)

Lại có: $ACB = HAQ$ $(= 90^0 - CAH)$

$\Rightarrow$ $ACB = AQB \Rightarrow$ $BPCQ$ nội tiếp.

b) $APQ = AHP$ (ΔAHP cân), $CAM = ACM$ mà $ACM = AQP$

Suy ra: $APQ + CAM = APQ + AQP = 90^0 \Rightarrow$ $AEH = 90^0$. Vậy: $AM \perp PQ$.

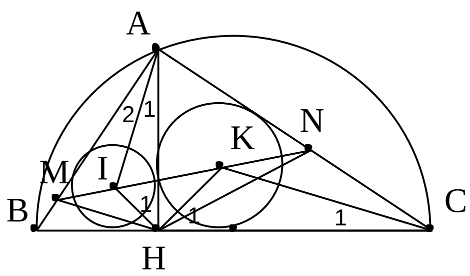
Câu 325.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho A là một điểm bất kì trên nửa đường tròn đường kính BC ($A \neq B$, C). Hạ $AH \perp BC$ tại H. Gọi I, K lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp ΔAHB và ΔAHC. Đường thẳng IK cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh:

a) $\Delta AIH \sim \Delta CKH$ và $\Delta HIK \sim \Delta ABC$

b) ΔMAN là tam giác cân

c) Xác định vị trí của điểm A để chu vi của đường tròn ngoại tiếp ΔMHN đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn



a) Dễ thấy: $H_1 = H_2$ $(= 45°)$ và $A_1 = C_1 \left(= \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}BAH \right) \Rightarrow \Delta AIH \sim \Delta CKH\,(g.g)$

Suy ra: $\frac{HI}{HK} = \frac{CH}{AH}$, $\frac{AH}{CH} = tgC = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{HI}{HK} = \frac{AB}{AC}$

Lại có: $IHK = BAC = 90°$ Suy ra: $\Delta HIK \sim \Delta ABC\,(c.g.c)$

b) $\Delta HIK \sim \Delta ABC \Rightarrow C = HKI \Rightarrow NCH + NKH = 180°$

$\Rightarrow$ $NCHK$ nội tiếp. Do đó: $ANM = KHC = 45°$.

Vậy: ΔAMN vuông cân tại A.

c) $\Delta AKH = \Delta AKN\,(g.c.g) \Rightarrow AN = AH = AM \Rightarrow A$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHMN.

Do đó: $C_{HMN} = 2\pi AH \Rightarrow C_{HMN}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ AH lớn nhất mà: $AH \leq OA$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AN = OA \Leftrightarrow H \equiv O$. Khi đó A là điểm chính giữa của nửa (O) và $C_{HMN} = 2R$.

Câu 326.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Gọi M là một điểm di động trên đoạn OB $\left(M \neq O, B\right)$. Tia CM cắt BD tại P và đường tròn tại N $\left(N \neq C\right)$. Gọi Q là giao điểm của AN và CD

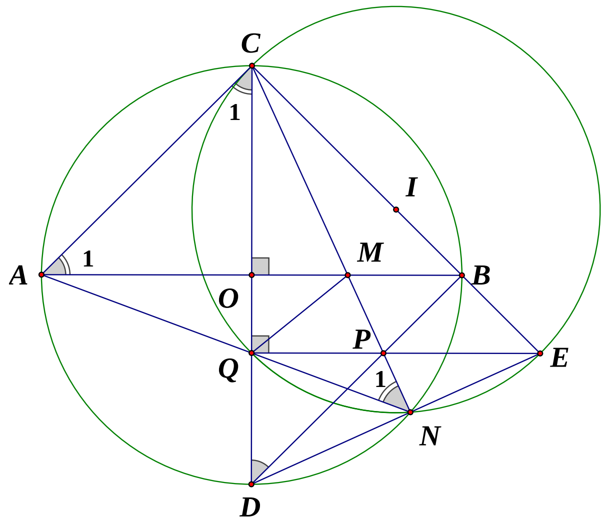
1) Chứng minh tứ giác $DQPN$ nội tiếp và $PQ // AB$

2) Chứng minh $\Delta ACQ \backsim \Delta MAC$ và diện tích tứ giác $ACMQ$ không đổi khi M thay đổi trên OB

3) Chứng minh $\dfrac{CQ}{AM} = \left(\dfrac{CN}{AN}\right)^2$

4) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CQN luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi M thay đổi trên OB

Hướng dẫn



1) Xét $\left(O\right)$: $AB \perp CD\left(gt\right) \Rightarrow AOC = COD = BOD = AOD = 90^0$

$\Rightarrow AC = BC = BD = AD$ (Vì các góc ở tâm bằng nhau chắn các cung bằng nhau)

$\Rightarrow ANC = CDB$ (Vì hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

hay $QNP = QDP$

Xét tứ giác $DQPN$ có: $QNP = QDP$ (cmt)

$\Rightarrow$ Hai đỉnh kề nhau D, N cùng nhìn cạnh PQ dưới 1 góc bằng nhau.

$\Rightarrow$ tứ giác $DQPN$ nội tiếp (DHNB).

$\Rightarrow QPD = QND$ (Vì là hai góc nội tiếp cùng chắn QD)

mà $AND = ABD$ (Vì là hai góc nội tiếp cũng chắn AD)

$\Rightarrow QPD = ABD$. Mà hai góc QPD, ABD ở vị trí đồng vị $\Rightarrow PQ \perp CD$

Mà: $AB \perp CD \Rightarrow$ $PQ // AB$ (đpcm)

2) Xét $\left(O\right)$:

$AMC = \frac{1}{2}\left(sdAC + sdBN\right)$ (Vì là góc có đỉnh nằm trong đường tròn chắn AC, BN)

$CAQ = CAN = \frac{1}{2}sdCN = \frac{1}{2}\left(sdBC + sdBN\right)$ (vì là 2 góc nội tiếp chắn cung CN)

Mà $AC = BC$ (cmt) . Suy ra: $CAQ = AMC$

Xét ΔAOC có: $OA = OC = R$ (gt) $\Rightarrow \Delta AOC$ cân tại O $\Rightarrow A_1 = C_1$

Xét ΔACQ và ΔMAC có: $C_1 = A_1$, $CAQ = AMC\left(cmt\right)$ $\Rightarrow \Delta ACQ \backsim \Delta MAC\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{CQ}{AC} \Rightarrow AM.CQ = AC^2 = const$

Xét tứ giác $ACMQ$ có: $CQ \perp AM\left(gt\right)$ $\Rightarrow S_{ACMQ} = \frac{1}{2}AM.CQ$

Mà $\Delta ACQ \backsim \Delta MAC\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{CQ}{AC} \Rightarrow AM.CQ = AC^2 = const$ $\Rightarrow S_{ACMQ}$ không đổi.

Vậy diện tích tứ giác $ACMQ$ không đổi khi M thay đổi trên OB.

3) Xét $\left(O\right)$: $AC = AD\left(cmt\right) \Rightarrow C_1 = N_1$ (vì hai góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

Xét ΔACQ và ΔANC có: CAN chung, $C_1 = N_1$ (cmt) $\Rightarrow \Delta ACQ \backsim \Delta ANC\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \frac{CQ}{NC} = \frac{AC}{AN} \Rightarrow \frac{CQ}{AC} = \frac{CN}{AN}$

Mà: $\frac{AC}{AM} = \frac{CQ}{AC}$ (câu b) $\Rightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{CQ}{AC} = \frac{CN}{AN} = k$

Suy ra: $\frac{AC}{AM}.\frac{CQ}{AC} = \frac{CQ}{AM} = k^2 = \left(\frac{CN}{AN}\right)^2$ (đpcm)

4) Kẻ CB và DN kéo dài cắt nhau tại E.

Xét $\left(O\right)$: $CBD = CND = 90°$ (Vì là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \begin{cases} DB \perp CE \\ CN \perp DE \end{cases}$.

Mà $CN \cap DB = P \Rightarrow P$ là trực tâm tam giác CDE $\Rightarrow PE \perp CD$

Lại có: $PQ \perp CD$ $\Rightarrow$ *E*, *P*, *Q* thẳng hàng.

$\Rightarrow CQE = CNE = 90^0$

$\Rightarrow$ *Q*, *N* cùng nhìn cạnh *CE* dưới 1 góc vuông.

$\Rightarrow Q, N$ cùng thuộc đường tròn tâm *I*, đường kính *CE*. (Với I là trung điểm CE)

Hay $\left(I\right)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác *CQN*

Do $I \in CE$ hay $I \in CB$ cố định nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CQN luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi M thay đổi trên đoạn OB.

Câu 327.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính BC, A là điểm chính giữa cung BC. M là một điểm nằm trên đoạn OB. E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A; E; M; O cùng nằm trên một đường tròn.

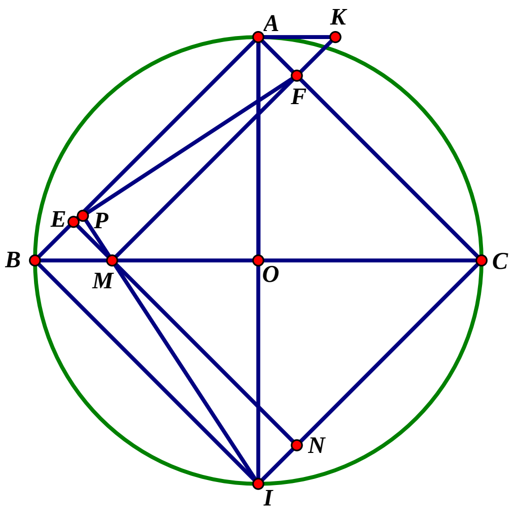
b) Khi điểm M trên đoạn BC sao cho $BM = \frac{1}{3}BO$, chứng minh rằng $BE.BA = \frac{1}{3}R^2$

c) Đường thẳng MF cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) tại điểm K.

d) Chứng minh rằng $BE = FK$.

e) Khi M di chuyển trên đoạn BC. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M, vuông góc với... luôn đi qua một điểm cố định

Hướng dẫn



a) Chứng minh $AOB = 90°$

Tứ giác $AEMO$ có $MEA + MOA = 90° + 90° = 180°$ Tứ giác $AEMO$ nội tiếp (dhnb) nên A, E, M, O cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh ΔBEM đồng dạng với $\Delta BAC\,(g.g)$

$$\Rightarrow BE.BA = BM.BO \Rightarrow BM.BO = \frac{1}{3}R^2$$

c) Chứng minh tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow ME = AF$

Chứng minh ΔBEM vuông cân tại $E \Rightarrow BE = EM$

Chứng minh ΔAFK vuông cân tại $F \Rightarrow AF = FK$

Chứng minh $BE = FK$

d) AO cắt (O) tại I nên I là điểm chính giữa cung AB nên I cố định.

EM cắt CI tại N. Đường thẳng qua M vuông góc với EF tại P.

Chứng minh tứ giác $BENI$ là hình chữ nhật nên $BE = IN = EM$.

Chứng minh tứ giác $MNCF$ là hình vuông nên $MN = MF$.

$\Rightarrow \Delta MEF = \Delta NIM\,(c.g.c) \Rightarrow EFM = NMI$

Mà tổng số đo ba góc trong tam giác MPF bằng $180°$

$\Rightarrow PMI = PMF + FMN + NMI = PMF + 90° + PFM = 180°$

Nên P; M; I thẳng hàng hay đường thẳng qua M vuông góc với EF luôn đi qua điểm I cố định.

Câu 328.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và AH là đường cao của tam giác ABC. Gọi M, N thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC

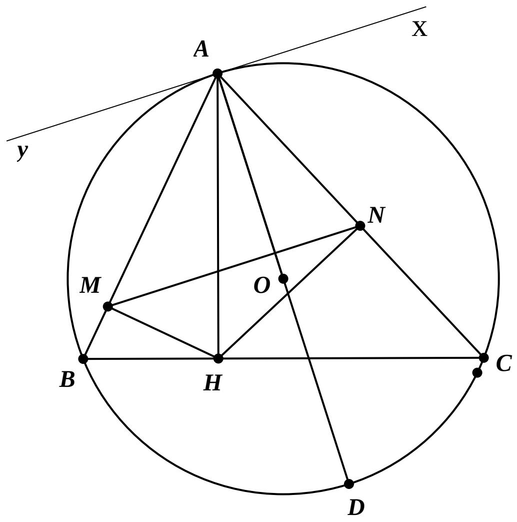
1) Chứng minh tứ giác $AMHN$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $ABC = ANM$

3) Chứng minh OA vuông góc với MN

4) Cho biết $AH = R\sqrt{2}$. Chứng minh M, O, N thẳng hàng.

Hướng dẫn



1) - Giải thích $AMH = ANH = 90°$

-Tính tổng $AMH + ANH = 180°$

- KL : $AMHN$ là tứ giác nội tiếp

2) **Cách 1:**

cm $ANM = MHA$ (do tg $AMHN$ nội tiếp)

$\Rightarrow ABC = AHM$ (cùng phụ với MHB)$\Rightarrow ABC = ANM$

Cách 2: Cm $AM.AB = AN.AC\left(= AH^2\right)$

$\Rightarrow \Delta ANM \sim \Delta ABC(c.g.c) \Rightarrow ABC = ANM$

(cho điểm tương ứng như cách 1)

3) **Cách 1:** Kẻ đường kính AD

$DAC = DBC$ (góc nt chắn cung DC)

$ABC = ANM$ (cmt)

Có $DBC + ABC = 90^\circ$ (góc nt chắn nửa đtr)

$\Rightarrow ANM + DAC = 90^\circ \Rightarrow AO \perp MN$

Cách 2: Kẻ tiếp tuyến xAy của (O)

c/m: $xAC = ABC$ (góc nt, góc tạo bởi tt và dây cùng chắn cung AC)

$ABC = ANM$ (cmt)

Vậy $xAC = ANM$, ở vị trí slt

$\Rightarrow MN // xy$ mà $AO \perp xy$ (do xAy là TT của (O)) $\Rightarrow AO \perp MN$

(cho điểm tương ứng như cách 1)

4) Có $AN.AC = AH^2 = 2R^2 = AO.AC$

$\Rightarrow AN.AC = AO.AC$

$\Rightarrow \Delta AON \sim \Delta ADC (c.g.c)$

$\Rightarrow AON = ADC = 90^\circ$

CMTT : $AOM = ADB = 90^\circ$

Vậy $AOM + AON = 180^\circ \Rightarrow$ O, M, N thẳng hàng.

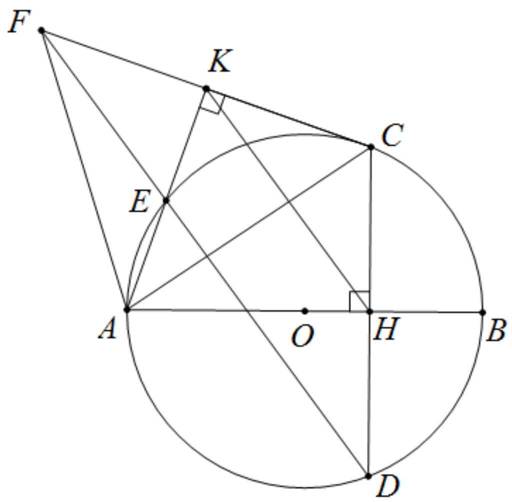
Câu 329.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi H là điểm nằm giữa O và B. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Trên cung nhỏ AC lấy điểm E bất kỳ (E khác A và C). Kẻ CK vuông góc với AE tại K. Đường thẳng DE cắt CK tại F.

1) Chứng minh tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh KH song song với ED và tam giác ACF là tam giác cân.

3) Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác ADF lớn nhất.

Hướng dẫn



a) Vì $CK \perp AK$ nên $AKC = 90^\circ$. $CH \perp AB$ tại H nên $AHC = 90^\circ$. Tứ giác $AHCK$ có:

$AHC + AKC = 180°$ nên $ACHK$ là tứ giác nội tiếp.

(Tổng 2 góc đối bằng $180°$).

b) Từ $CHAK$ là tứ giác nội tiếp ta suy ra $CHK = CAK = CAE$ (góc nội tiếp cùng chắn cung KC).

Lại có $ADCE$ nội tiếp nên $CAE = CDE$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC).

Từ đó suy ra $CHK = CDE \Rightarrow HK // DE$.

Do $HK // DF$, mà H là trung điểm CD (Được suy ra từ quan hệ vuông góc của đường kính AB với dây CD tại H).

Suy ra HK là đường trung bình của tam giác CDF, dẫn đến K là trung điểm FC. Tam giác AFC có AK là đường cao đồng thời cũng là trung tuyến nên CAF là tam giác cân tại K.

c) Tam giác FAC cân tại A nên $AF = AC$.

Dễ thấy tam giác ACD cân tại A nên $AC = AD$ từ đó suy ra $AF = AD$ hay tam giác AFD cân tại A, hạ $DI \perp AF$.

Ta có $S_{AFD} = \frac{1}{2}DI.AF = \frac{1}{2}DI.AC$ do AC không đổi nên S_{AFD} lớn nhất khi và chỉ khi DI lớn nhất,

Trong tam giác vuông AID ta có:

$ID \le AD = AC \; hay \; S_{AFD} = \frac{1}{2}DI.AF = \frac{1}{2}DI.AC \le \frac{AC^2}{2}$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I \equiv A$ khi đó

$DAF = 90°$ dẫn đến tam giác ADF vuông cân tại A, suy ra $EBA = EDA = 45°$ hay E là điểm chính giữa cung AB.

Câu 330.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

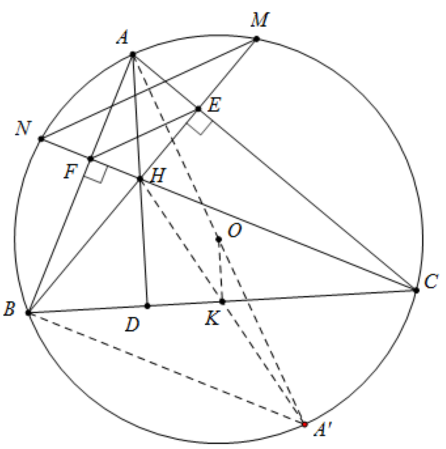
1) Chứng minh tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $AF.AB = AE.AC$

3) BE và CF lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là M và N. Chứng minh EF // MN

4) Giả sử B và C cố định; A thay đổi. Tìm vị trí của A sao cho tam giác AEH có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn



1) Chứng minh được tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC

2) Chứng minh được ΔAHF đồng dạng với ΔABD

$\Rightarrow AF.AB = AH.AD\,(1)$

Chứng minh ΔAEH đồng dạng với ΔADC

$\Rightarrow AE.AC = AH.AD\,(2)$

(1) và (2) suy ra $AF.AB = AE.AC$

(Hoặc chứng minh ΔAEF đồng dạng với ΔABC)

3)+Chứng minh được $MAC = CAD$ hay $MAE = EAH$ suy ra AE là trung trực của HM, suy ra E là trung điểm của HM

+ Tương tự chứng minh được F là trung điểm của HN

Suy ra $FE \,//\, MN$ (đường trung bình)

(Hoặc có thể chứng minh $FCB = FEB = NMB$)

4) $4S_{\Delta AEH} = 2AE.EH \le AE^2 + EH^2 = AH^2$

Chứng minh $AH = 2OK$, OK không đổi.

Lập luận, kết luận được $S_{\Delta AEH}$ lớn nhất khi $AE = EH$ hay $HAE = 45° \Rightarrow ACB = 45°$ suy ra vị trí A

Câu 331.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) đường kính $AB = 2R$, xy là tiếp tuyến với (O) tại B. CD là một đường kính bất kỳ $\left(AC < CB\right)$. Gọi giao điểm của AC, AD với xy theo thứ tự là M và N.

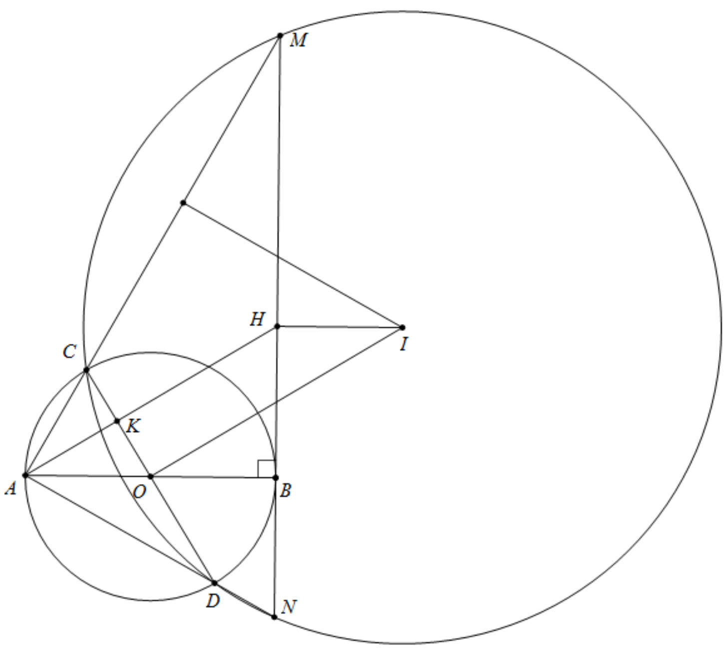
1) Chứng minh rằng tứ giác $MCDN$ nội tiếp.

2) Chứng minh $AC.AM = AD.AN$

3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MCDN$ và H là trung điểm của MN. Chứng minh rằng tứ giác $AOIH$ là hình bình hành. Khi đường kính CD quay xung quanh điểm O thì I di động trên đường nào?

4) Khi góc AHB bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ tạo thành khi hình bình hành $AHIO$ quay quanh cạnh AH theo R.

Hướng dẫn



1) CM ΔAOC cân ở O $\Rightarrow CAO = OCA$

mà $CAO = ANB$ (cùng phụ với AMB) $\Rightarrow ACD = ANM$

Ta có: $ACD + DCM = 180° \Rightarrow DCM + ANM = 180°$

Chứng minh $DCMN$ nội tiếp

2) ΔACD và ΔANM có:

$$\left.\begin{array}{l} MAN : chung \\ ACD = ANM\,(cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta ANM \text{ (g - g)}$$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AD}{AM}$ (cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow AC.AM = AD.AN$

3) Xác định I : I là tâm đườn tròn ngoại tiếp tứ giác $MCDN$

$\Rightarrow I$ là giao điểm của đường trung trực của CD và trung trực của MN

$\Rightarrow IH \perp MN$ và $IO \perp CD$

Do $AB \perp MN; IH \perp MN \Rightarrow AO \,//\, IH$

Do H là trung điểm MN $\Rightarrow AH$ là trung điể mcủa tam giác vuông AMN

$\Rightarrow ANM = NAH$

Mà $ANM = BAM = ACD(cmt) \Rightarrow DAH = ACD$

Gọi K là giao điểm của AH và DO

do $ADC + ACD = 1v \Rightarrow DAK + ADK = 90°$ hay ΔAKD vuông ở K

$\Rightarrow AH \perp CD$ mà $OI \perp CD \Rightarrow OI \,//\, AH$

Vậy $AHIO$ là hình bình hành

Do $AOIH$ là hình bình hành $\Rightarrow IH = AO = R$ không đổi

$\Rightarrow CD$ quay xung quanh O thì I nằm trên đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng R.

4) Xét ΔABH vuông tại B, $AHB = 60^0$

$$\Rightarrow AH = 2R\sin 60^0 = \frac{4R\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{xqtru} = 2\pi\frac{R}{2}AH = 2\pi\frac{R}{2}.\frac{4R\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}\pi R^2}{3}$$

Câu 332.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho điểm M cố định nằm bên ngoài đường tròn $(O;R)$. Qua M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (với A, B là các tiếp điểm). Gọi C là điểm bất kì trên cung nhỏ AB của đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB, MA, MB.

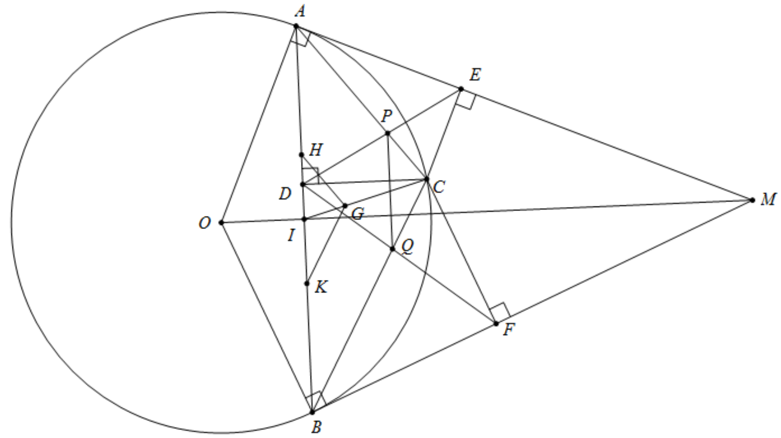
1) Chứng minh bốn điểm A, D, C, E cùng thuộc một đường tròn.

2) AC cắt DE tại P; BC cắt DF tại Q. Chứng minh $\Delta PAE \sim \Delta PDC$ suy ra $PA.PC = PD.PE$

3) Chứng minh $AB \,//\, PQ$

4) Khi điểm C di động trên cung nhỏ AB của đường tròn (O) thì trọng tâm G của tam giác ABC di chuyển trên đường nào?

Hướng dẫn



1) Xét tứ giác $ADCE$:

$CDA + CEA = 180°$

Mà CDA và CEA là hai góc đối nhau

Suy ra tứ giác $ADCE$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

Vậy 4 điểm A, D, C, E cùng thuộc một đường tròn

2) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADCE$:

$CAE = CDE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EC)

Xét ΔPAE và ΔPDC

$APE = DPC$ (hai góc đối đỉnh)

$CAE = CDE$ (cm$t$)

$\Rightarrow \Delta PAE \sim \Delta PDC$ (g - g)

$\Rightarrow \dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PE}{PC}$ (định nghĩa hai tam giác đồng dạng)

$\Rightarrow PA.PC = PD.PE$ (đpcm)

3) Chứng minh $PDC = ABC\left(= CAE\right); QDC = CAB\left(= CBF\right)$

Suy ra $PDQ + PCQ = CAB + CBA + PCQ = 180°$

Chứng minh được tứ giác $CPDQ$ nội tiếp

Suy ra $CPQ = CAB\left(= CDQ\right)$ Mà hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow AB$ // PQ

4) OM cắt AB tại I . dựng trọng tâm G; lấy H, K thuốc AI và BI sao cho $AH = \dfrac{2}{3}AI; BK = \dfrac{2}{3} = BI$

$\Rightarrow H, K$ cố định

$\dfrac{AH}{AI} = \dfrac{CG}{CI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GH$ // CA; tương tự GK // CB

Suy ra $\widehat{HGK} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$.

Mà H, K cố định

Suy ra G thuộc 1 cung chứa góc α dựng trên đoạn HK (thuộc nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm M).

Câu 333.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) có dây cung CD cố định. Gọi M là điểm nằm chính giữa cung nhỏ CD

Đường kính MN của đường tròn (O) cắt dây CD tại I. Lấy điểm E bất kỳ trên cung lớn CD.

(E khác C,D,N); ME cắt CD tại K. Các đường thẳng NE và CD cắt nhau tại P.

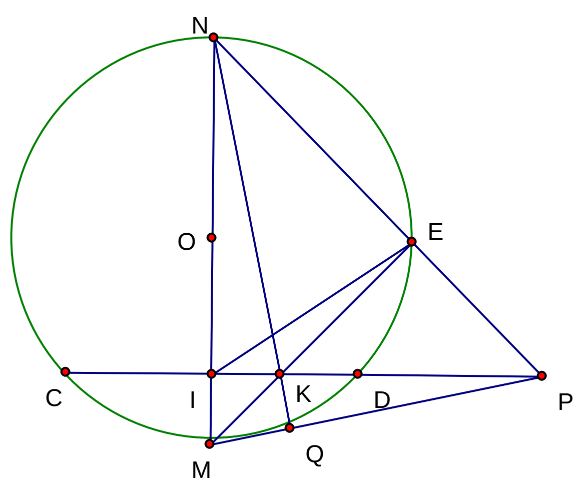
a) Chứng minh rằng:Tứ giác $IKEN$ nội tiếp

b) Chứng minh: $EI.MN = NK.ME$

c) NK cắt MP tại Q. Chứng minh: IK là phân giác của $\widehat{EIQ}$

d) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với EN cắt đường thẳng DE tại H. Chứng minh khi E di động trên cung lớn CD (E khác C, D, N) thì H luôn chạy trên một đường cố định.

Hướng dẫn



a) Xét đường tròn (O) có đường kính MN, M là điểm chính giữa cung nhỏ CD (gt) nên MN vuông góc với CD tại trung điểm I của CD. Do đó: $\widehat{MID} = 90°$

Ta có $E \in \left(O;\frac{1}{2}MN\right) \Rightarrow \widehat{MEN} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $IKEN$ có: $\widehat{MID} + \widehat{MEN} = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $IKEN$ nội tiếp. (theo dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

b) Tứ giác $IKEN$ nội tiếp (cmt) nên $\widehat{MEI} = \widehat{MNK}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IK)

Xét ΔMEI và ΔMNK có:

$$\left.\begin{matrix} MEI = MNK(cmt) \\ EMI chung \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta MEI \sim \Delta MNK(g.g) \Rightarrow \frac{EI}{NK} = \frac{ME}{MN} \Rightarrow EI.MN = NK.ME$$

c) Xét ΔMNP có 2 đường cao ME và PI cắt nhau tại K nên K là trực tâm ΔMNP

Do đó NK vuông góc với MP tại Q. Từ đó suy ra $NQP = 90°$

Xét tứ giác $NIQP$ có: $NIP = NQP = 90°$ mà 2 góc này cùng nhìn NP do đó tứ giác $NIQP$ nội tiếp.

Suy ra $QNP = QIP$ (vì cùng chắn cung PQ) (1)

Tứ giác $IKEN$ nội tiếp (cm a) nên $QNP = EIK$ (cùng chắn cung EK) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $QIP = EIK$. Do đó IK là phân giác của EIQ.

d) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với EN cắt đường thẳng DE tại H. Chứng minh khi E di động trên cung lớn CD (E khác C, D, N) thì H luôn chạy trên một đường cố định.

Ta có: $\left.\begin{matrix} ME \perp NP \\ CH \perp NP \end{matrix}\right\} \Rightarrow ME // CH \Rightarrow \left\{\begin{matrix} DEM = DHC(dv) \\ MEC = ECH(slt) \end{matrix}\right.$

Mà $DEM = MEC$ (2 góc nt chắn 2 $cung = nhau$)

$\Rightarrow EHC = ECH$

$\Rightarrow \Delta EHC$ cân tại E

$\Rightarrow EN$ là trung trực của CH

Xét ΔDCH có: IN là trung trực của CD (dễ dãng cm) $\Rightarrow NC = ND$

EN là trung trực của CH (cmt) $\Rightarrow NC = NH$

$\Rightarrow$N là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDCH

$\Rightarrow H \in (N; NC)$

Mà N, C cố định => H thuộc đường tròn cố định khi E chạy trên CD

Câu 334.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$; C là điểm bất kì nằm trên nửa đường tròn sao cho C khác A và $AC < CB$. Điểm D thuộc cung nhỏ BC sao cho $COD = 90°$. Gọi E là giao điểm của AD và BC, F là giao điểm của AC và BD.

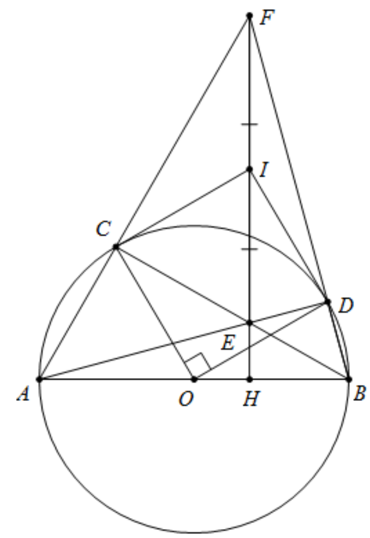
1) Chứng minh $CEDF$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $FC.FA = FD.FB$

3) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O)

4) Hỏi khi C thay đổi thỏa mãn điều kiện bài toán, E thuộc đường tròn cố định nào?

Hướng dẫn



1) Ta có: $ACB = ADB = 90°$

$\Rightarrow FCE = FDE = 90°$

Tứ giác $CEDF$ có: $\Rightarrow FCE + FDE = 180°$. KL

2) Xét ΔFCB và ΔFDA có $FCB = FDA = 90°$ và CFB chung

$\Rightarrow \Delta FCB \sim \Delta FDA$ (g - g)

$\Rightarrow \dfrac{FC}{FD} = \dfrac{FB}{FA} \Rightarrow FC.FA = FD = FB$

3) ΔOCA cân tại O nên $ICF = IFC$

ΔICF cân tại I nên $OAC = OCA$

Từ đó $ICF + OCA = IFC + OAC = 90°$ Vì ΔHAF vuông tại H (do E là trực tâm ΔFAB)

$\Rightarrow ICO = 90° \Rightarrow IC \perp OC$

Kết hợp với $C \in (O)$ suy ra IC tiếp xúc với (O)

4) Gọi T là điểm chính giữa của cung AB không chứa C (T cố định)

$IETO$ là hình bình hành (Vì IE song song và bằng OT)

$\Rightarrow TE = OI = R\sqrt{2}$ (Vì $ICOD$ là hình vuông cạnh E)

Vậy E thuộc $\left(T; R\sqrt{2}\right)$

Câu 335.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 3R$. Qua A, kẻ các tiếp tuyến AP, AQ với đường tròn (O) (P, Q là các tiếp điểm). Qua P kẻ đường thẳng song song với AQ cắt (O) tại M. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và (O). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

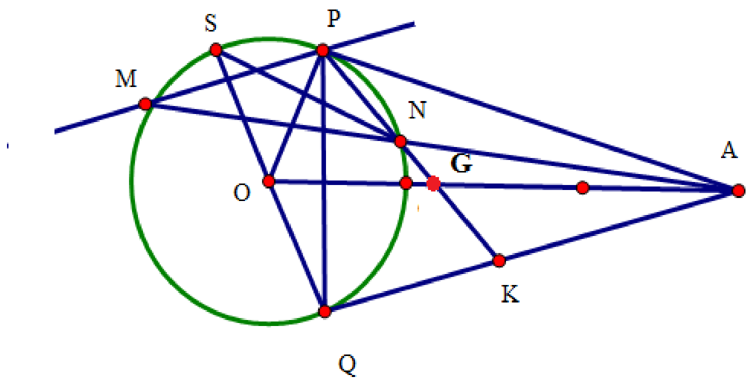
1) Chứng minh tứ giác $APOQ$ nội tiếp

2) Chứng minh $KA^2 = KN.KP$

3) Kẻ đường kính QS của (O). Chứng minh tia NS là tia phân giác của góc PNM.

4) Gọi G là giao điểm của hai đường thẳng AO và PK. Tính độ dài đoạn thẳng AG theo R.

Hướng dẫn



1) Ta có $\begin{cases} AP \perp OP \\ AQ \perp OQ \end{cases} \Rightarrow APO = AQO = 90^\circ$

Tứ giác $APOQ$ có $APO + AQO = 180^\circ$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau.

Suy ra Tứ giác $APOQ$ nội tiếp

2) Vì $AQ // PM$ nên góc $PMA =$ QAN (so le trong)

Mà $PAM = APN$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung PN)

NÊN $QAN = APN$

XÉT Δ KAN và ΔKPA có

Góc AKP chung

$QAN = APN$

$\Rightarrow \Delta KAN \sim \Delta KPA (gg)$

Nên $\dfrac{KA}{KP} = \dfrac{KN}{KA} \Rightarrow KA^2 = KN.KP$

3) Ta có $PM // AQ$ mà SQ vuông góc với AQ nên $SQ \perp PM$.

Suy ra S là điểm chính giữa $PM \Rightarrow SM = SQ$

$\Rightarrow PNS = SNM$ hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung băng nhau

Nên NS là tia phân giác của góc PNM .

4) Ta có $KA^2 = KN.KP$

Chứng minh $\Delta KNQ \sim \Delta KPQ(gg) \Rightarrow KQ^2 = KN.KP$

Suy ra: $KA = KQ$ nên K là trung điểm của AQ .

Chứng minh H là trung điểm của PQ .

Xét tam giác APQ có hai đường trung tuyến PK, AH cắt nhau tại $G \Rightarrow G$ là trọng tâm

$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AH = \frac{16}{9}R$

Câu 336.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB vuông góc với dây cung MN tại H (H nằm giữa O và B). Trên tia MN lấy điểm C nằm ngoài đường tròn $(O;\ R)$ sao cho đoạn thẳng AC cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm K khác A, hai dây MN và BK cắt nhau ở E.

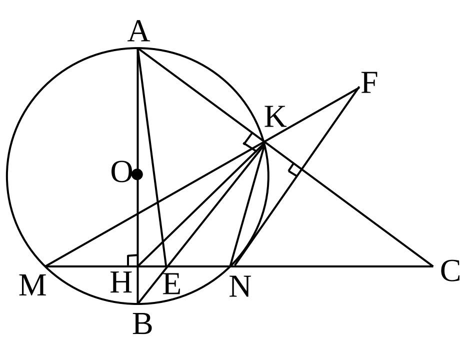
a) Chứng minh rằng $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

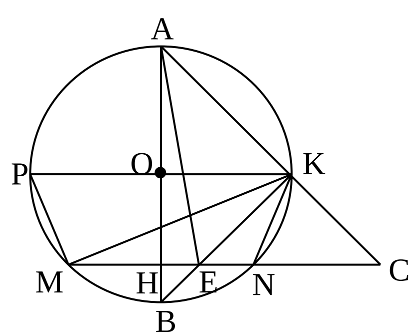
b) Chứng minh $CA.\ CK = CE.\ CH$

c) Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia MK tại F. Chứng minh ΔNFK cân.

d) Giả sử $KE = KC$. Chứng minh $OK\ //\ MN$

Hướng dẫn





a) Ta có: $AHE = 90°$ (theo giả thiết $AB \perp MN$)

$AKE = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AHE + AKE = 180°$. Vậy tứ giác AHEK là tứ giác nội tiếp. (Tổng hai góc đối bằng $180°$)

b) Xét hai tam giác CAE và CHK :

+ Có góc C *chung*

+ $EAC = EHK$ (góc nội tiếp cùng chắn cùng EK)

Suy ra $\Delta CAE \backsim \Delta CHA$ (g – g)

Suy ra $CA.\ CK = CE\ .\ CH$

Hoặc cm $\Delta CKE \backsim \Delta CHA$ (g –g)

c) Do đường kính AB vuông góc MN nên B là điểm chính giữa cung MN

Suy ra $MKB = NKB$ (1)

Lại có BK // NF (vì cùng vuông góc với AC) nên $\begin{cases} NKB = KNF (2) \\ MKB = MFN (3) \end{cases}$

Từ (1), (2), (3) suy ra $MFN = KNF \Leftrightarrow KFN = KNF$. Vậy ΔKNF cân tại K.

d) Ta có $AKB = 90° \Rightarrow BKC = 90° \Rightarrow \Delta KEC$ vuông tại K.

Theo giả thiết ta lại có $KE = KC$ nên tam giác KEC vuông cân tại K

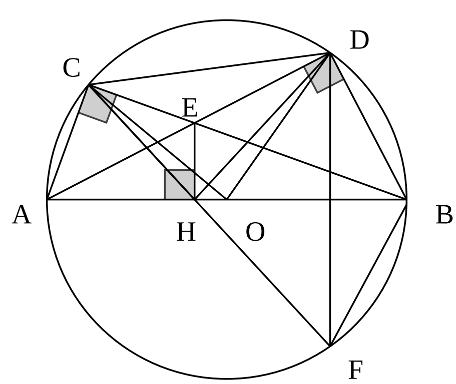
$$BEH = KEC = 45° \Rightarrow OBK = 45°$$

Mặt khác vì tam giác OBK cân tại O (do $OB = OK = R$) nên suy ra tam giác OBK vuông cân tại O dẫn đến OK // MN (cùng vuông góc với AB)

Câu 337.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AB sao cho $AC < BC$; E là một điểm thuộc đoạn BC (E khác B và C). Tia AE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Kẻ EH vuông góc với AB tại H.

1) Chứng minh tứ giác $ACEH$ là tứ giác nội tiếp.
2) Tia CH cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng EH // DF.
3) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ΔCHO đi qua điểm D.
4) Gọi I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm F trên các đường thẳng CA và CB. Chứng minh rằng AB, DF, IK cùng đi qua một điểm.

Hướng dẫn



$ACE = 90°; AHE = 90°$

$ACE + AHE = 180^\circ$

Hai góc này ở vị trí đối nhau, suy ra $ACEH$ là tứ giác nội tiếp

Tia CH cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh $EH//DF$

$AEH = ACH$

$ADE = ACF$

Suy ra $AEH = ADF$

Hai góc này ở vị trí đồng vị, suy ra $EH//DF$

Chứng minh rằng: Điểm D thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔCHO

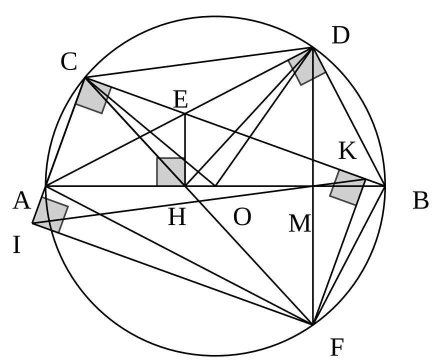
Chứng minh $HEDB$ là tgnt suy ra

Chứng minh $CHD = CHE + EHD = COD$

Chứng minh $CHOD$ nội tiếp

Suy ra D thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔCHO

Gọi I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D trên các đường thẳng CA và CB. Chứng minh rằng AB, DF, IK cùng đi qua một điểm.



Gọi giao điểm của DF và AB là M

Tứ giác $AIFM$ nội tiếp suy ra $IMF = IAF$

Tứ giác $ACBF$ nội tiếp suy ra $CBF = IAF$, suy ra $IMF = KBF$

Tứ giác $BKMF$ nội tiếp suy ra $KBF + KMF = 180^\circ$

Tức $IMF + KMF = 180^\circ$, suy ra đpcm

Câu 338.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$, đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC và AD là đường kính của (O). Chứng minh:

a) $BFEC$ là tứ giác nội tiếp

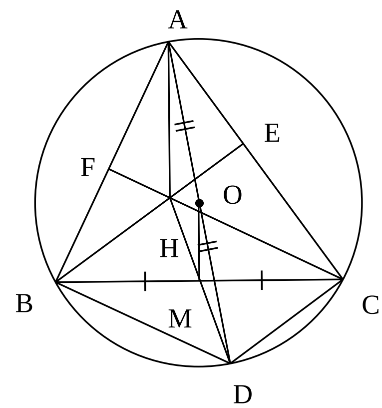
b) $AE.AC = AF.AB$.

c) H, M, D thẳng hàng

d) Cho (O) và điểm B, C cố định, A di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC luôn có ba góc nhọn. Chứng minh: đường tròn ngoại tiếp ΔAEF có bán kính không đổi.

Hướng dẫn

a) Tứ giác *BFEC* nội tiếp đường tròn (1,0 điểm)



+ Do BE, CF là đường cao của ΔABC (gt)

$\Rightarrow BE \perp AC$, $CF \perp AB$

Góc $BEC = BFC = 90°$

(không lý giải trừ 0,25)

E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC

Tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp (đpcm)

b) Chứng minh $AE.AC = AF.AB$ (1,0 điểm)

Ta có $BE \perp AC$, $CF \perp AB$ $\Rightarrow AEB = AFC = 90°$

Do $BFEC$ là tứ giác nội tiếp $FBE = FCE$ (hệ quả góc nội tiếp)

Xét ΔAEB và ΔAFC có: góc $AEB = AFC$; $FBE = FCE$,

ΔAEB đồng dạng ΔAFC (g.g)

$\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AF.AB$ (đpcm)

c) Chứng minh H, M, D thẳng hàng (1,0 điểm)

Do AD là đường kính của (O) (gt) $\Rightarrow ACD = 90°$ (hệ quả góc nội tiếp) $\Rightarrow DC \perp AC$

Lại có $BE \perp AC$ $(gt) \Rightarrow BE \mathbin{//} DC \Rightarrow BH \mathbin{//} DC$ (1)

Tương tự ta có: $HC \mathbin{//} BD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tứ giác $BHCD$ là hình bình hành

Do M là trung điểm của $BC \Rightarrow M$ là trung điểm của HD.

Vậy H, M, D thẳng hàng (đpcm)

d) Chứng minh: đường tròn ngoại tiếp ΔAEF có bán kính không đổi

+CM: $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH.

ΔAEF nội tiếp đường tròn có bán kính là $\dfrac{1}{2}AH$ (3)

+ Do O, M lần lượt là trung điểm của AD và HD

OM là đường trung bình của $\Delta AHD \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH$

Do (O) và B, C cố định $\Rightarrow O,\ M$ cố định $\Rightarrow OM$ không đổi $\Rightarrow \frac{1}{2}AH$ không đổi (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp ΔAEF có bán kính không đổi (đpcm)

Câu 339.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O), dây BC cố định. Trên cung lớn BC của (O), lấy điểm A ($A \neq B, A \neq C$). Hai tiếp tuyến qua B và C của (O) cắt nhau tại E.

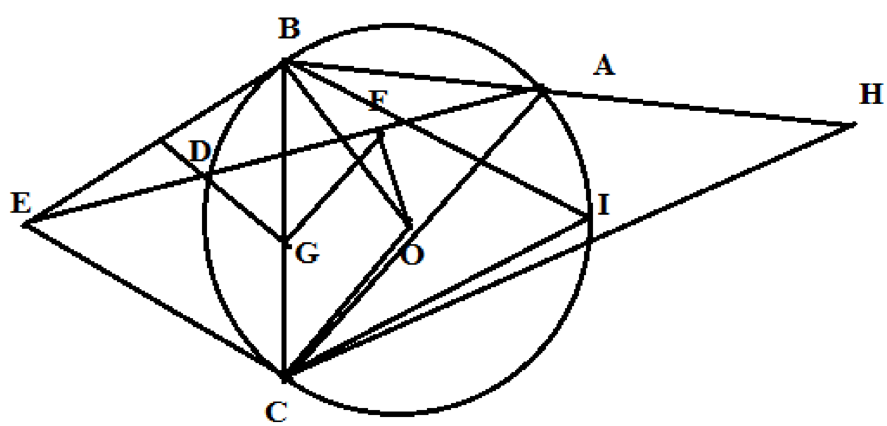
1) Chứng minh tứ giác $BOCE$ nội tiếp.

2) AE cắt (O) tại điểm thứ hai là D $(D \neq A)$. Chứng minh $EB^2 = ED.EA$.

3) Gọi F là trung điểm của AD. Đường thẳng qua D và song song với EC cắt BC tại G. Chứng minh FG song song với AC.

4) Trên tia đối của tia AB lấy điểm H sao cho $AH = AC$. Chứng minh khi điểm A thay đổi trên cung lớn BC thì điểm H di động trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn



1) Chứng minh: $OBE = OCE = 90°$

Xét tứ giác $BOCE$ có $OBE + OCE = 180°$ mà chúng là hai góc đối nhau

Suy ra tứ giác $BOCE$ nội tiếp

2) Chứng minh được $EBD = EAD$

Chứng minh $\Delta EBD \backsim \Delta EAB(g-g) \Rightarrow \frac{ED}{EB} = \frac{EB}{EA} \Rightarrow ED.EA = EB^2$.

3) Chứng minh F thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BOCE$ nên $BFE = BCE$

Chứng minh góc $BCE = BGD$.

Từ đó chứng minh $BGD = BFD$

Chứng minh tứ giác $BFGD$ nội tiếp suy ra $DFG = DBC$

Chứng minh $DBC = DAC$

Từ đó suy ra $DFG = DAC$, mà 2 góc ở vị trí đồng vị nên $GF // AC$

4)

Cách 1: Lấy I là điểm chính giữa cung lớn BC nên I cố định và $IBC = ICB$.

Chứng minh $IBC = ICB = IAC = IAH$

Chứng minh $\Delta ACI = \Delta AHI$ $(c-g-c) \Rightarrow IC = IH \Rightarrow H$ thuộc đường tròn (I, IC).

Cách 2:

ΔAHC cân tại A nên $BHC = \frac{1}{2} BAC = \frac{1}{4} sdBC = const$.

Suy ra H thuộc cung chứa góc $\frac{1}{4}$ sđ BC dựng trên BC

Câu 340.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C $(AC > R)$. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với CA. Lấy điểm M trên đường tròn (O) sao cho $AM = \frac{R}{2}$. Tia BM cắt đường thẳng d tại điểm P. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N, tia PA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q.

1) Chứng minh tứ giác $ACPM$ là tứ giác nội tiếp

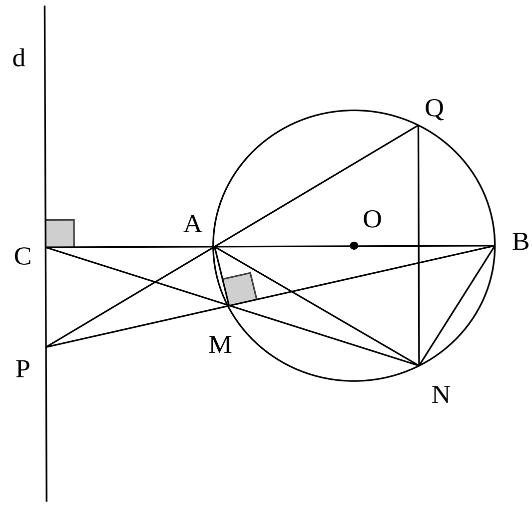
2) Chứng minh $NQ // PC$.

3) a) Tính thể tích của hình tạo thành khi quay tam giác MAB một vòng quanh AM theo R

b) Gọi H là giao điểm của QN và AB. Gọi E là giao điểm của MB và QN, tia AE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh $AE.AK + BE.BM = 4R^2$.

4) Chứng minh rằng ba điểm B, N và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NEK thẳng hàng.

Hướng dẫn



1) Chứng minh $ACP = AMB = 90°$. Từ đó chỉ ra $AMP = 90°$.

Ta có: $AMP + ACP = 180°$ Suy ra tứ giác ACPM nội tiếp

2) ***Chứng minh*** $NQ\ //\ PC$

Chứng minh được $CPA = AMC$ (1)

Chứng minh tứ giác AMNQ nội tiếp $\Rightarrow AMC = AQN$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AQN = APC \Rightarrow CP//QN$

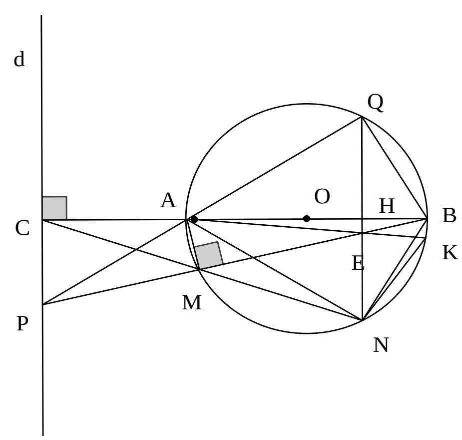
3a) ***Tính thể tích của hình tạo thành khi quay tam giác*** MAB ***một vòng quanh*** AM ***theo*** R

Sử dụng định lí Pitago trong ΔAMB vuông tại M tính $MB = \dfrac{\sqrt{15}}{2}R$ (đvđd)

Khi quay tam giác vuông AMB một vòng quanh cạnh AM ta được hình nón với đường cao $AM = h$, bán kính của đường tròn đáy là $BM = r$.

Thể tích của hình nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2.h = \dfrac{5\pi R^3}{8}$ (đvtt)

3b) ***Chứng minh*** $AE.AK + BE.BM = 4R^2$



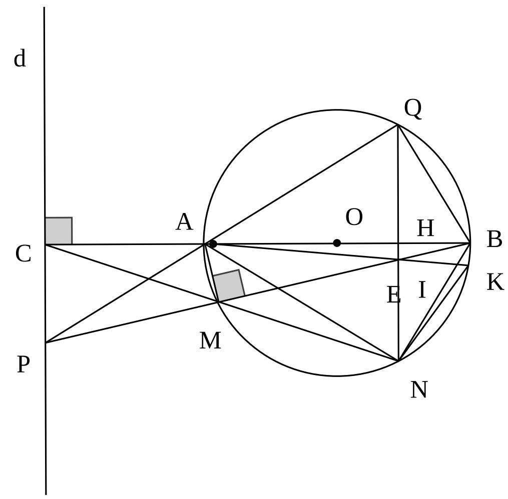
Chứng minh $QN \perp AB$ tại H

Chứng minh $\Delta AEH \backsim \Delta ABK$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AH}{AK}$ => $AE.AK = AB.AH$

Chứng minh $\Delta BEH \backsim \Delta BAM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BE}{BA} = \dfrac{BH}{BM} \Rightarrow BE.BM = AB.BH$

$\Rightarrow AE.AK + BE.BM = AB\left(AH + HB\right) = AB^2 = 4R^2$.

4) *Chứng minh rằng ba điểm B, N và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NEK thẳng hàng.*



Kẻ Nx là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác NKE tại N

(Nx thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng NE chứa điểm A) (3)

Chứng minh được $ENx = NKE$

Chứng minh được $NKE = ENA$

$ENx = ENA$(4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$Tia Nx là tia NA trùng nhau

$\Rightarrow$NA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác NEK tại tiếp điểm N.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NKE

$\Rightarrow$ $AN \perp NI$, mà $AN \perp BN$ $\Rightarrow$ N, I, B thẳng hàng

Câu 341.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$, dây MN cố định $(MN < 2R)$. Kẻ đường kính AB vuông góc với dây MN tại E. Lấy điểm C thuộc dây MN (C khác M, N, E), BC cắt đường tròn (O) tại điểm K (K khác B).

1) Chứng minh: Tứ giác $AKCE$ nội tiếp được một đường tròn.

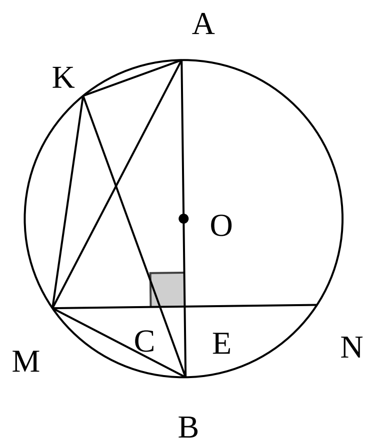
2) Chứng minh: $BM^2 = BK.BC$.

3) Gọi I là giao điểm của AK và MN; D là giao điểm của AC và BI.

a) Chứng minh: D thuộc $(O;R)$.

b) Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của ΔDEK.

4) Xác định vị trí điểm C trên dây MN để khoảng cách từ E đến tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMCK nhỏ nhất.



1) Xét (O) có: $AKB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có $AB \perp MN$ tại E (gt) $\Rightarrow AEM = BEM = 90°$

Xét tứ giác $AKCE$ có: $AKC + AEC = 90° + 90° = 180°$

Tứ giác $AKCE$ nội tiếp được một đường tròn (dhnb)

2) +) Xét (O) có:

$$\left.\begin{array}{l}\text{AB là đ/kính}\\ \text{MN là dây}\\ \text{AB} \perp \text{MN (gt)}\end{array}\right\} \Rightarrow B \text{ là điểm chính giữa } MN \Rightarrow BM = BN$$

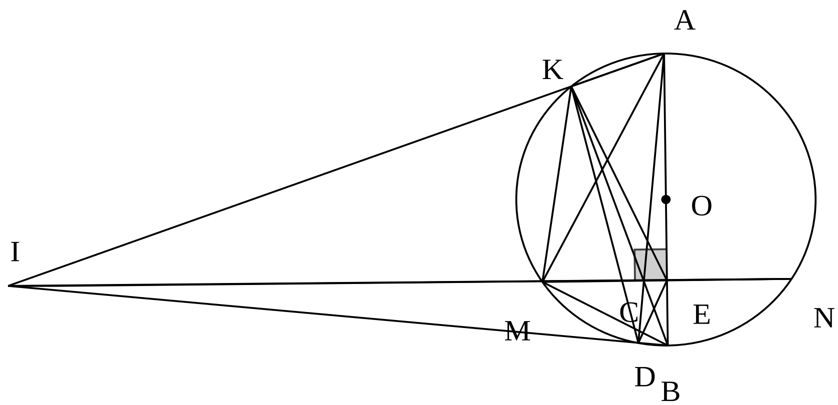
$\Rightarrow MKB = NMB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

+) Xét ΔBMC và ΔBKM có:

$$\left.\begin{array}{l}B: chung\\ MKB = CMB(cmt)\end{array}\right\} => \Delta BMC \backsim \Delta BKM\,(g.g)$$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BK} = \dfrac{BC}{BM}$

$\Rightarrow BM^2 = BK.BC$ (T/c TLT) (đpcm)



3) Xét ΔAIB có BK, IE là hai đường cao

Mà $BK \cap IE = \{C\}$ $\Rightarrow C$ là trực tâm của ΔAIB

$\Rightarrow AC$ là đường cao của ΔAIB

$\Rightarrow AC \perp IB$ hay $AD \perp IB \Rightarrow ADB = 90°$

$\Rightarrow D$ thuộc đường tròn đường kính AB

Hay D thuộc $(O;R)$.

+) Chứng minh tứ giác $BDCE$ nội tiếp

$\Rightarrow CBE = CDE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn CE)

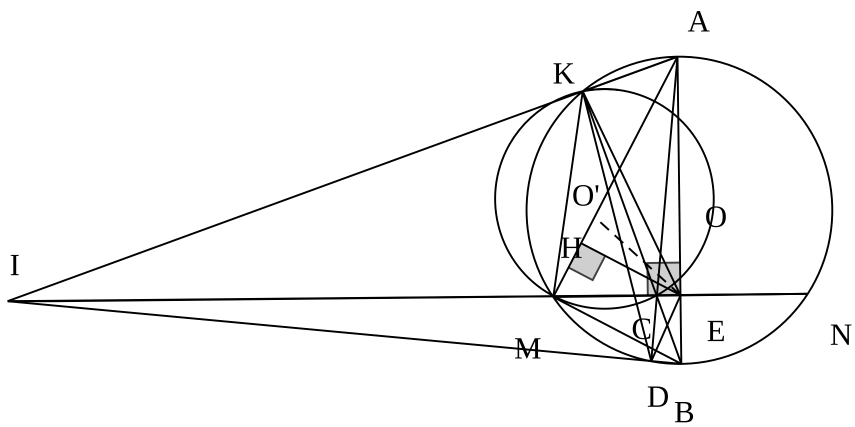
+) Chứng minh $KDA = KBA$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AK của (O))

$\Rightarrow KDC = CDE \Rightarrow DC$ là tia phân giác của KDE

+ Chứng minh tương tự: KC là phân giác của DKE ***(HS ghi chứng minh tương tự** GV **không trừ điểm)***

+ Chứng minh C là tâm đường tròn nội tiếp ΔDKE

Suy ra điểm C cách đều 3 cạnh của tam giác ΔDKE



4) +) Chứng minh được MB là tiếp tuyến của ΔMCK

+) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMCK

$\Rightarrow MB \perp MO'$ (1)

+) Xét (O) có $AMB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow O' \in AM$

Vì B, A, M cố định $\Rightarrow O'$ luôn thuộc đường thẳng cố định AM

+) Kẻ $EH \perp AM \Rightarrow H$ cố định (vì E cố định, AM cố định)

+) Xét $\Delta O'EH$ có $O'HE = 90^0$

$\Rightarrow O'E \geq HE$ (qhệ đường vuông góc, đường xiên)

$\Rightarrow \min O'E = HE \Leftrightarrow O' \equiv H$

Mà ta luôn có O' luôn thuộc đường trung trực của MC

$\Rightarrow O'C = O'M$

Vậy khoảng cách $O'E$ nhỏ nhất khi $O' \equiv H \Rightarrow C$ là giao điểm thứ hai của $(H;HM)$ với dây MN trong đó H là chân đường vuông góc của E trên AM

Câu 342.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O bán kính R, đường kính AB. Điểm H bất kì thuộc đoạn OB, H khác O và B. Dây CD vuông góc với AB tại H. Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn tại A. Nối CO, DO cắt đường thẳng d tại M và N. Các đường thẳng CM và DN cắt đường tròn (O) lần lượt tại E và F ($E \neq C$, $F \neq D$).

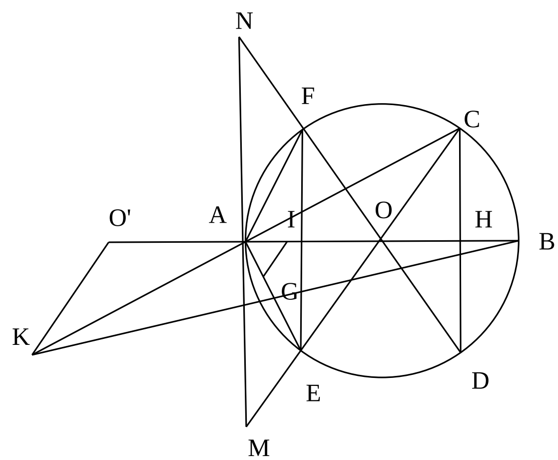
a) Chứng minh tứ giác $MNFE$ nội tiếp

b) Chứng minh $ME.MC = NF.ND$

c) Tìm vị trí của điểm H để tứ giác $AEOF$ là hình thoi.

d) Lấy điểm K đối xứng với C qua A. Gọi G là trọng tâm tam giác KAB. Chứng minh rằng khi H di chuyển trên đoạn OB thì điểm G thuộc một đường tròn cố định.

Hướng dẫn



a) Lập luận được $OA \perp MN$ nên $MN \ // \ CD$

$\Rightarrow DCM \ = CMN$

Lập luận được góc $DCM = \ DFE \Rightarrow CMN = DFE$

Suy luận được tứ giác $MNEF$ nội tiếp

b) Lập luận chứng minh được tam giác OMN cân tại $O \ \Rightarrow AM = \ AN$

Chứng minh được $\Delta NAF \backsim \Delta NDA \ (g.g)$,

suy được $NA^2 = \ NF.ND$

Chứng minh tương tự: $MA^2 = \ ME.MC$

Suy được: $ME.MC = NF.ND$

c) Lập luận: để $OEAF$ là hình thoi $\Leftrightarrow AE = AF = OE = OF = R$

Suy luận để được ΔOAE đều $\Leftrightarrow$ góc $AOE = 60°$ và góc $COH = 60°$

Lập luận được $OH = OC.\cos 60° = \dfrac{R}{2}$

Suy được H là trung điểm của OB

d) Lấy điểm O' đối xứng với O qua điểm A, suy ra O' cố định, $OA' = OA = R$. Vì O là trung điểm của AB nên suy ra được $G \in KO, \ OG = \dfrac{1}{3}OK$.

Chứng minh được $\Delta AOC \ = \Delta AO'K \Rightarrow O'K = OC = R$ không đổi

Kẻ $GI \ // \ O'K, \ (I \in OA)$. Áp dụng định lý Talet suy được

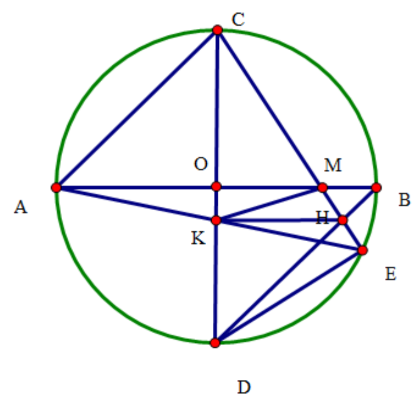
$\dfrac{OI}{OO'} = \dfrac{IG}{O'K} = \dfrac{OG}{OK} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow OI = \dfrac{2R}{3}; IG = \dfrac{R}{3}$ suy được điểm I cố định, IG không đổi

Lập luận được G thuộc đường tròn $\left(I; \dfrac{R}{3}\right)$ cố định

Câu 343.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn thẳng OB(M khác O và B). Tia CM cắt đường tròn $(O;R)$ tại E.

1. Chứng minh tứ giác OMED nội tiếp
2. Chứng minh $CM.CE = 2R^2$.
3. Gọi H là giao điểm của BD và CE, K là giao điểm của AE và CD. Chứng minh $HK \perp CD$
4. Chứng minh diện tích tứ giác ACMK không đổi khi M di động trên đoạn thẳng OB (M khác O và B)

Hướng dẫn



a) Chứng minh tứ giác OMED nội tiếp

Chứng minh được tứ giác $OMED$ có góc $MOD + MED = 180°$

Suy ra tứ giác $OMED$ nội tiếp

b) Chứng minh $\mathbf{CM.CE = 2R^2}$

Chứng minh được $\Delta COM \backsim \Delta CED\,(g-g)$

Suy ra $CM.CE = CO.CD = 2R^2$

c) Gọi H là giao điểm của BD và CE, K là giao điểm của AE và CD. Chứng minh $HK \perp CD$

Cminh được $KEH = KDH$

Suy ra được tứ giác KHED nội tiếp

Suy ra được $HK \perp CD$

d) *Chứng minh được* $\Delta CAK \backsim \Delta AMC\,(g-g)$

Suy ra được $AM.CK = AC^2 = 2R^2$

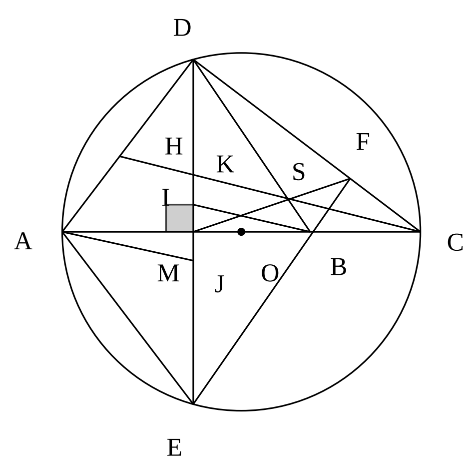
Chỉ ra được $S_{ACMK} = \frac{1}{2}AM.CK = R^2$ không đổi

Câu 344.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) với đường kính AC. Trên đoạn OC lấy điểm B. Gọi M là trung điểm AB, từ M kẻ dây DE vuông góc với AB. Từ B kẻ BF vuông góc với CD (F thuộc CD)

1. Chứng minh: tứ giác $BMDF$ nội tiếp
2. Chứng minh: $CB.CM = CF.CD$.
3. Chứng minh: tứ giác $ADBE$ là hình thoi và 3 điểm B, E, F thẳng hàng.
4. Gọi S là giao điểm của BD và MF, tia CS lần lượt cắt AD, DE tại H và K. Chứng minh: $\frac{DA}{DH} + \frac{DB}{DS} = \frac{DE}{DK}$

Hướng dẫn

Vẽ hình đúng đến câu a



1. Có $DMB = 90°$ (Do $DE \perp AB$)

Có $DFB = 90°$ (Do BF $\perp AB$)

Suy ra $DMB + DFB = 180°$

Suy ra: tứ giác $DMBF$ nội tiếp

2. Chứng minh: ΔCFB và ΔCMD đồng dạng

$\Rightarrow \frac{CF}{CM} = \frac{CB}{CD} \Rightarrow CF.CD = CM.CB$

3. Có $AM = MB$ (M là trung điểm AB)

Có $DE \perp AC \Rightarrow MD = ME$ (Liên hệ đk và dc)

Suy ra: $ADBE$ là hình bình hành ($DHNB$)

Mà $DE \perp AB$

Vậy $ADBE$ là hình thoi

4. Kẻ AJ // HK (J thuộc DE); BI // HK (J thuộc DE)

Chỉ ra được: $\frac{DA}{DH} = \frac{DJ}{DK}; \frac{DB}{DS} = \frac{DI}{DK}$ (Định lí Ta – let)

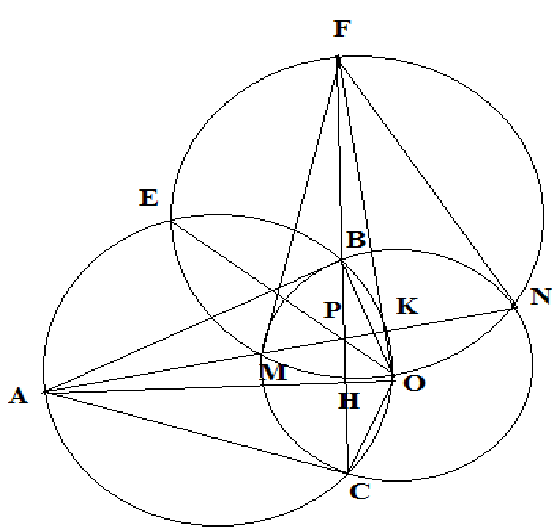
$\Rightarrow \frac{DA}{DH} + \frac{DB}{DS} = \frac{DI + DJ}{DK}$

Chứng minh được: $\mathrm{DI} = \mathrm{EJ}\left(\Delta \mathrm{AEJ} = \Delta \mathrm{BDI}\right) \Rightarrow \frac{DA}{DH} + \frac{DB}{DS} = \frac{EJ + DJ}{DK} = \frac{DE}{DK}$

Câu 345.(Thầy Nguyễn Chí Thành) cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. từ điểm A vẽ các tiếp tuyến AB ,AC với B ,C là tiếp điểm, và cát tuyến AMN với đường tròn (O). (với MN không đi qua tâm và $AM < AN$).

1. CHứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp
2. Chứng minh $AM.AN = AB^2$.
3. Tiếp tuyến tại N của (O) cắt đường thẳng BC tại điểm F. chứng minh đường thẳng FM là tiếp tuyến của $(O;R)$
4. Gọi P là giao điểm của dây BC và dây MN, E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNO và đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ (E khác O). Chứng minh P, E, O thẳng hàng

Hướng dẫn



Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp

AB là tiếp tuyến của (O) nên AB vuông góc với BO suy ra góc $ABO = 90°$

Lập luận tương tự có góc $AOC = 90°$

Vì $ABO + ACO = 180°$ nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp

Chứng minh $\mathbf{AM.AN = AB^2}$

Chứng minh được góc $ABM = ANB$

xét ΔABM và ΔANB có góc BAN chung, góc $ABM = ANB$

suy ra $\Delta ABM \backsim \Delta ANB$

Suy ra $AM.AN = AB^2$

chứng minh đường thẳng FM là tiếp tuyến của (O;R)

Chứng minh $AB^2 = AH.AO$ và $AM.AN = AB^2$ suy ra $AH.AO = AM.AN$

Chứng minh M, N, O, H cùng thuộc một đường tròn (I)

Mà $FNO = 90°$ nên FO là đường kính của (I)

Lập luận tương tự có FM là tiếp tuyến của (O).

Chứng minh K,D,E thẳng hàng

Chứng minh A, E, F thẳng hàng

Chứng minh EO,FH,AK là đường cao của tam giác OFA

Câu 346.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ cố định , dây AB cố định không đi qua tâm O. Qua trung điểm I của dây AB , kẻ đường kính PQ(P thuộc cung nhỏ AB), E là điểm bất kỳ trên cung nhỏ QB (E không trùng với B và Q), QE cắt AB tại M, PE cắt AB tại D.

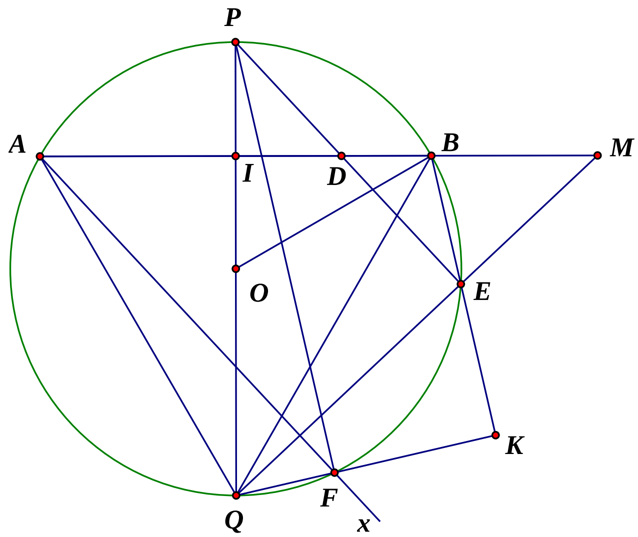
1) Chứng minh rằng tứ giác $DIQE$ nội tiếp

2) Chứng minh $ME.MQ = MD.MI$ từ đó chứng minh $MB.MA = MD.MI$

3) Kẻ $Ax // PE$, Ax cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh $BE \perp QF$

4) Gọi giao điểm của BE và QF là K. Tìm vị trí trên cung QB sao cho diện tích tứ giác $QABK$ có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo R biết dây $AB = R\sqrt{3}$

Hướng dẫn



a) Vì đường tròn (O) có đường kính PQ đi qua trung điểm của dây AB (AB không đi qua O) nên $PQ \perp AB$ tại $I \Rightarrow DIQ = 90^\circ$

Lại có: $PEQ = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) hay $DEQ = 90^\circ$

Xét tứ giác $DIQE$ có tổng số đo hai góc đối: $DIQ + DEQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên tứ giác $DIQE$ nội tiếp (đpcm)

b) Xét ΔMED và ΔMIQ có: M chung và $DEM = MIQ \left(=90^\circ\right)$

$\Rightarrow \Delta MED \backsim \Delta MIQ$ (c.g.c) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MI} = \dfrac{MD}{MQ} \Rightarrow ME.MQ = MD.MI$ (1).

Vì tứ giác $ABEQ$ nội tiếp đường tròn $(O;R) \Rightarrow MEB = MAQ$ (cùng bù với BEQ).

Lại có góc AMQ chung

$\Rightarrow \Delta MEB \backsim \Delta MAQ$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{ME} = \dfrac{MQ}{MB} \Rightarrow ME.MQ = MA.MB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $MA.MB = MD.MI$.

c) Vì đường tròn (O) có đường kính PQ đi qua trung điểm của dây AB nên P là điểm chính giữa $AB \Rightarrow$ $AFP = BEP$ (3) (hai góc nội tiếp chắn hai cung AP, BP bằng nhau)

Mặt khác: $PE // AF$ (do $PE // Ax$)

$\Rightarrow AFP = EPF$ (4) (sole trong)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow BEP = EPF$ mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow BE // PF$

Lại có: $PF \perp QF$ nên $BE \perp QF$ (đpcm).

d) Ta có: $AB = R\sqrt{3}$ mà I là trung điểm của AB nên $IB = R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng định lý Pi-ta-go vào các tam giác vuông $OIB; QIB$ vuông tại I ta được:

$$IO^2 = OB^2 - IB^2 = R^2 - \left(R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow IO = \frac{R}{2} \Rightarrow QI = \frac{3R}{2}$$

$$QB^2 = IQ^2 + IB^2 = \left(\frac{3R}{2}\right)^2 + \left(R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3R^2 \Rightarrow QB = R\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta QAB} = \frac{1}{2}QI \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R}{2} \cdot R\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

Do ΔBQK vuông tại K nên $S_{\Delta BKQ} = \dfrac{1}{2}KQ \cdot KB$ (5)

Ta lại có :

$$\left(KQ - KB\right)^2 \geq 0 \Rightarrow KQ^2 + KB^2 \geq 2KQ \cdot KB \Rightarrow \frac{1}{2}KQ \cdot KB \leq \frac{KQ^2 + KB^2}{4} = \frac{QB^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra : $S_{QABK} = S_{QAB} + S_{BKQ} \leq \dfrac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}R^2$

Dấu "=" xảy ra khi $KQ = KB$. Do đó, ΔBQK vuông cân tại K mà B, Q cố định nên K cố định.

Vị trí điểm E cần tìm là giao điểm của BK với đường tròn (O).

Vậy diện tích tứ giác $QABK$ lớn nhất bằng $\dfrac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}R^2$ khi E là giao điểm của BK với đường tròn (O) (trong đó K là đỉnh góc vuông của tam giác vuông cân BQK)

Câu 347.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ tiếp tuyến Bx với đường tròn (O). Trên tia Bx lấy điểm M. Vẽ tiếp tuyến MC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm)

a) Chứng minh $OM \perp BC$

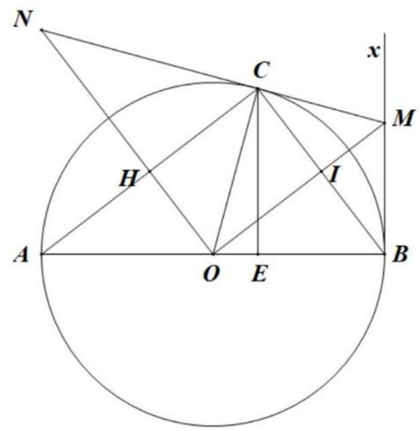
b) BC cắt OM tại I. Gọi H là trung điểm AC, tia OH cắt tia MC tại N. Chứng minh bốn điểm O, H, C, I cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh $AN.BM = \dfrac{AB^2}{4}$

d) Vẽ $CE \perp AB (E \in AB)$. Tìm vị trí của điểm M trên tia Bx để ΔOCE có chu vi lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh $OM \perp BC$



Xét (O) có:

Tiếp tuyến Bx cắt tiếp tuyến CM tại M (gt)

$\Rightarrow CM = BM$; OM là phân giác CMB và COB (t/c)

Xét ΔCMB có:

$CM = BM$ (cmt)

$\Rightarrow$ ΔCMB cân tại M (t/c)

Xét ΔCMB cân tại M có:

MO là phân giác CMB (t/c)

$\Rightarrow$ MO là đường trung trực của BC (t/c)

$\Rightarrow$ $OM \perp BC$ tại I và $IB = IC$ (đpcm)

b) BC cắt MO tại I. Gọi H là trung điểm AC, tia OH cắt tia MC tại N. Chứng minh bốn điểm O, H, C, I cùng nằm trên một đường tròn.

Xét (O) có:

H là trung điểm dây AC (gt)

=> $AOH = COH$ và $OH \perp AC$

Xét tứ giác $OHCI$ có:

$OHC = OIC = 90°$ (cmt)

=> O, H, C, I nằm trên đường tròn đường kính OC (đpcm)

c) Chứng minh $AN.BM = \dfrac{AB^2}{4}$

Xét ΔOAN và ΔOCN có:

ON chung

$AON = CON$ (cmt)

$OA = OC \quad (= R)$

$\Rightarrow \Delta OAN = \Delta OCN$ (c-g-c)

$\Rightarrow AN = NC$ (2 cạnh tương ứng)

Ta có $AON = CON$ (cmt)

$COM = BOM$ (cmt)

Mà $\mathrm{AON} + \mathrm{CON} + \mathrm{COM} + \mathrm{BOM} = 180°$ (gt)

$\Rightarrow CON + COM = 90°$

$\Rightarrow NOM = 90°$

Xét ΔNOM vuông tại O có đường cao OC:

$\Rightarrow OC^2 = CM.CN$

Mà $OC = \dfrac{AB}{2}$; $CM = MB$; $CN = NA$ (cmt)

$\Rightarrow AN.BM = \dfrac{AB^2}{4}$

d) Vẽ $CE \perp AB(\mathrm{E} \in \mathrm{AB})$. Tìm vị trí của điểm M trên tia Bx để ΔOCE có chu vi lớn nhất.

Chu vi $\Delta OCE = OC + CE + OE$

$= R + CE + OE$

Có $\underbrace{CE^2 + OE^2}_{OC^2} \geq 2CE.OE$

$\Rightarrow 2OC^2 \geq CE^2 + OE^2 + 2CE + OE$

$\Rightarrow 2R^2 \geq (\mathrm{CE} + \mathrm{OE})^2$

$\Rightarrow \sqrt{2R^2} \geq \sqrt{(\mathrm{CE} + \mathrm{OE})^2}$

Hay $CE + \mathrm{OE} \leq \mathrm{R}\sqrt{2}$

$\Rightarrow R + CE + OE \leq R + \mathrm{R}\sqrt{2}$

$\Rightarrow$Chu vi $\Delta OCE \leq R + \mathrm{R}\sqrt{2}$

Vậy chu vi tam giác đạt giá trị lớn nhất bằng $R + \mathrm{R}\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $CE = OE \Leftrightarrow COE = 45° \Leftrightarrow BOM = 22,5°$

Vậy $M \in Bx : BOM = 22,5°$

Câu 348.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O), Gọi I là trung điểm của dây AB. Qua I kẻ đường kính MN (M thuộc cung nhỏ AB), P là điểm bất kì trên tia đối của tia BA sao cho góc ANP khác $90°$. Nối PN cắt (O) tại E, ME cắt AB tại D.

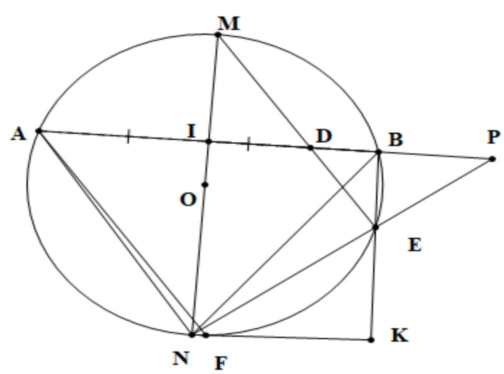
a) Chứng minh các điểm D, I, N, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $MD.ME = MI.MN$

c) Qua A kẻ đường thẳng song song với ME, đường thẳng đó cắt (O) tại F. Chứng minh $BE \perp NF$

d) Tìm vị trí của P để D là trung điểm của BI

Hướng dẫn



a) Xét (O) có: I là trung điểm của dây AB (gt) $\Rightarrow MN \perp AB$ tại I (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) $\Rightarrow NIB = 90°$

Ta lại có: $MEN = 90°$ (góc chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow DEN + DIN = 180°$, mà hai góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $DINE$ nội tiếp (dhnb)

Hay 4 điểm D, I, N, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Xét ΔMID và ΔMEN có :

+) M chung

+) $MID = MEN = 90°$

$\Rightarrow \Delta MID \sim \Delta MEN$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{MI}{ME} = \frac{MD}{MN} \Rightarrow MD.ME = MI.MN$$

c) Giả sử BE cắt NF tại K.

Ta có: $BNF = BAF$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF của (O))

$MDA = BAF$ (ha góc so le trong của AF // ME)

$DMI = EBN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung NE của (O))

$\Rightarrow BNF + EBN = MDA + DMI = MDI + DMI = 90°$

Hay $KNB + KBN = 90° \Rightarrow BE \perp NF$

d) Ta có:

*Tứ giác $ABEN$ nội tiếp đường tròn tâm O

Xét ΔPBN và ΔPEA có :

+) P chung

+) $PNB = PAE$ 9hai góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

$\Rightarrow \Delta PBN \sim \Delta PEA$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{PB}{PE} = \dfrac{PN}{PA} \Rightarrow PB.PA = PE.PN$

*Tứ giác $IDEN$ nội tiếp (cmt), chứng minh tương tự

$\Rightarrow PD.PI = PE.PN$

$\Rightarrow PB.PA = PE.PN = PD.PI$

$\Rightarrow PB.PA = PD.PI$

$\Leftrightarrow PB.(PB + AB) = \left(PB + \dfrac{AB}{4}\right).\left(PB + \dfrac{AB}{2}\right)$, (có $ID = DB \Rightarrow ID = DB = \dfrac{AB}{4}$)

$\Leftrightarrow PB^2 + PB.AB = PB^2 + \dfrac{3}{4}AB + \dfrac{1}{8}AB \Leftrightarrow PB = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow PB = BI$

$\Rightarrow$ Để D là trung điểm của IB thì điểm P nằm trên tia đối của BI và $PB = NI$

Câu 349.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Từ một điểm M nằm bên ngoài đường tròn tâm O vẽ các tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của đường tròn (O), tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AB tại D.

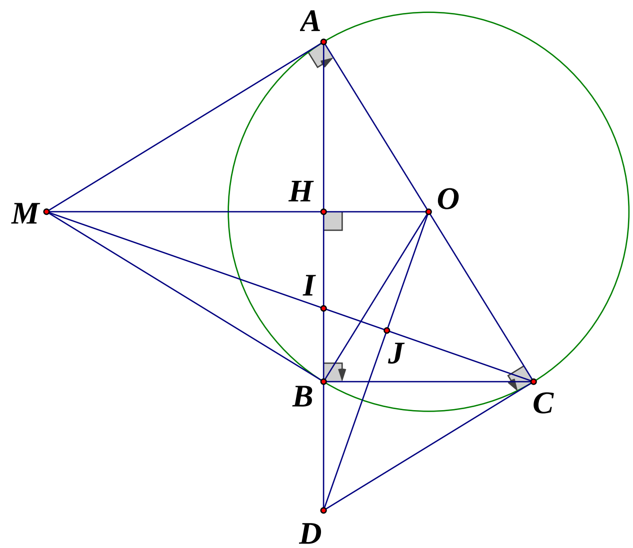
a) Chứng minh các điểm A, O, B, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $OM // BC$.

c) Gọi H là giao điểm của MO và AB. Chứng minh $AB \cdot AD = 4 \cdot OH \cdot OM$.

d) Cho MC cắt AB và OD lần lượt tại I và J. So sánh OI và HJ.

Hướng dẫn



a) Xét đường tròn (O) có MA, MB là hai tiếp tuyến tại A và B nên $MA \perp OA; MB \perp OB$

$\Rightarrow MAO = MBO = 90° \Rightarrow$ 4 điểm A, O, B, M cùng thuộc đường tròn đường kính MO

b) Xét đường tròn (O) có MA, MB là hai tiếp tuyến tại A và B => $MA = MB$ (t/c 2tt cắt nhau)

Lại có $OA = OB$

Suy ra M và O thuộc đường trung trực của AB => MO là đường trung trực của AB

=> $MO \perp AB$ (1)

Xét đường tròn (O) có $BAC = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BC \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OM \parallel BC$

c) Vì MO là đường trung trực của $AB \Rightarrow MO \perp AB$ tại H

ΔMAO vuông tại A có $AH \perp OM \Rightarrow OH.OM = OA^2$ (3)(Hệ thức lượng trong tg vuông)

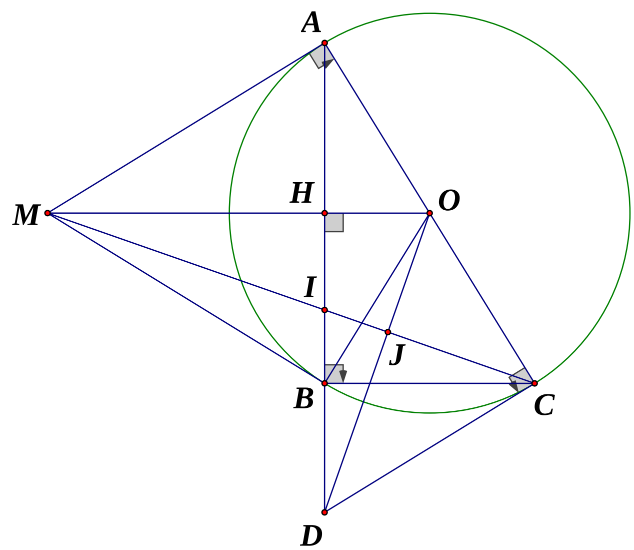
Vì CD là tiếp tuyến của (O) đường kính AC tại C $\Rightarrow AC \perp CD \Rightarrow$ ΔACD vuông tại C.

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$ (gg) => $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$ => $AB.AD = AC^2$ mà $AC = 2OA$ => $AB.AD = 4OA^2$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AB \cdot AD = 4 \cdot OH \cdot OM$

d) + **Chứng minh** $OMJ = HDO$

Xét ΔMBO và ΔCBD có:



$MBO = CBD = 90°$

$MOB = CDB$ (cùng $= MAB$)

$=> \Delta MBO \sim \Delta CBD(g.g) \Rightarrow \dfrac{MB}{CB} = \dfrac{OB}{DB} \Rightarrow \dfrac{MB}{OB} = \dfrac{BC}{BD}$ (5)

Mặt khác $MBC = OBD\,(= 90° + OBC)$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \Delta MBC \sim \Delta OBD(c.g.c) \Rightarrow BCM = BDO$

Mà $BCM = OMJ$ (Do $OM // BC$)

Nên $HDO = JMO$

Vì $OH.OM = OA^2$ (câu c) mà $OA = OC$ nên

$OH.OM = OC^2 \Rightarrow \dfrac{OH}{OC} = \dfrac{OC}{OM} \Rightarrow \Delta OHC \sim \Delta OCM\,(cgc) \Rightarrow OCH = OMC$ (7)

Xét tứ giác $OHDC$ có $OHD + OCD = 90° + 90° = 180°$ =>Tứ giác $OHDC$ nội tiếp

$\Rightarrow HDO = HCO$ (2 góc nội tiếp cùng chắn HO) (8)

Từ (7) và (8) suy ra $OMC = HDO \Rightarrow OMJ = HDO$

+ Do đó $\Delta HDO \sim \Delta JMO(g.g) \Rightarrow OHD = OJM \Rightarrow OJI = 90°$

Xét tứ giác $IHOJ$ có $IHO = OJI = 90° \Rightarrow$ 4 điểm I, H, O, J cùng nằm trên đường tròn đường kính $IO \Rightarrow HJ \le OI$ (trong đường tròn dây lớn nhất là đường kính)

Dấu "=" xảy ra khi HJ là đường kính $\Leftrightarrow HIJ = 90° \Leftrightarrow KO // KC \Leftrightarrow KAC$ là cát tuyến của đường tròn (trái với đề bài)

Vậy $HJ < OI$

Câu 350.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ đường kính AB và $(I;r)$ đường kính AC tiếp xúc ngoài tại A. $(R > r)$. Trung trực của BC cắt (O) tại D và E, cắt BC tại K. Gọi giao điểm của (I) với CE lần lượt là M và N. Chứng minh rằng

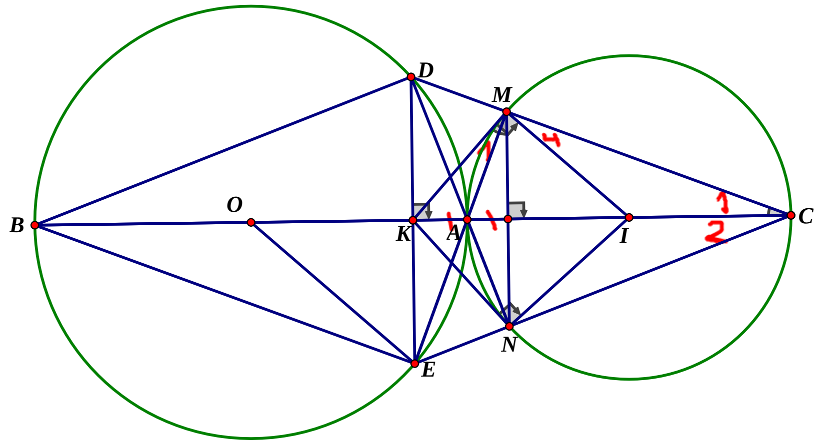
a) Tứ giác $BDCE$ là hình thoi.

b) Tứ giác $DMNE$ nội tiếp được một đường tròn.

c) KM và KN là các tiếp tuyến của $(I;r)$.

d) Xác định tỉ số $\dfrac{r}{R}$ để tứ giác $KMIN$ là hình vuông.

Hướng dẫn



a) -Ta có DE là đường trung trực của $BC \Rightarrow \begin{cases} DE \perp BC = \{K\} \\ KB = KC \end{cases}$

-Xét đg tròn $(O;R)$ có $\begin{cases} BA \perp DE = \{K\} \\ O \in BA \end{cases}$ Suy ra $KD = KE$

- Xét tứ giác $BDCE$ có $\begin{cases} KD = KE \\ KB = KC \end{cases}$

Nên $BDCE$ là hình bình hành

Lại có $DE \perp BC$

Do đó $BDEC$ là hình thoi.

b) Do $BDEC$ là hình thoi.

$\Rightarrow DCK = ECK \Rightarrow sd\,AM = sd\,AN$

Ta có $NMC + MCK = \dfrac{sd\,NC + sd\,AM}{2} = \dfrac{sd\,NC + sd\,AN}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$

$\Rightarrow MN \perp BC$

Lại có $DE \perp BC = \{K\}$

Suy ra MN // DE $\Rightarrow MNED$ là hình thang (1)

Mà $BDCE$ là hình thoi $\Rightarrow CD = CE$ $\Rightarrow \Delta DCE$ cân tại C

$$\Rightarrow BOE = MIC$$

$$BOE = 180° - 2OBE$$

$$MIC = 180° - 2MCI$$

$$Ma`OBE = MCI$$

$$\Rightarrow CDE = CED \quad (2)$$

Tư (1) và (2) suy ra $DMNE$ là hình thang cân

$DMNE$ là tứ giác nội tiếp.

c) Do $DMNE$ là hình thang cân nên giao hai đường chéo thuộc đường trung trực của hai đáy

+ C/m $EKMC$ là tứ giác nội tiếp ($EKC = EMC = 90°$) $\Rightarrow M_1 = C_2 = C_1 = M_4$

Mà $M_4 + AMI = 90°$

Nên $M_1 + AMI = 90° \Rightarrow KMI = 90° \Rightarrow KM \perp IM = \{M\}$

Lại có $M \in (I)$

Vậy KM là tiếp tuyến của (I)

Tương tự KN là tiếp tuyến của (I)

d) Giả sử $MINK$ là hình vuông nên $MI \; // \; NK$ và $\mathrm{MI} = \mathrm{NK}$. Có:

$BOE = 180° - 2OBE$

$MIC = 180° - 2MCI$

$Ma\grave{}OBE = MCI$

$\Rightarrow BOE = MIC$

$\Rightarrow EOI = MIO \Rightarrow \mathrm{OE}//\mathrm{MI}$

Suy ra $NK \; // \; OE$

+ Áp dụng hệ quả Talet ta có

$$\frac{KN}{OE} = \frac{CK}{CO} = \frac{CB}{2CO} \Rightarrow \frac{MI}{OE} = \frac{CB}{2CO} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{2r + 2R}{2(2r + R)} \Rightarrow R^2 = 2r^2 \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 351.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Lấy $M \in (O)$ sao cho góc $\widehat{ABM} < 45^\circ$. Vẽ dây cung $MN \perp AB$. Tia BM cắt NA tại P, Q là điểm đối xứng với P qua đường thẳng AB, gọi K là giao điểm của PQ với AB. Chứng minh:

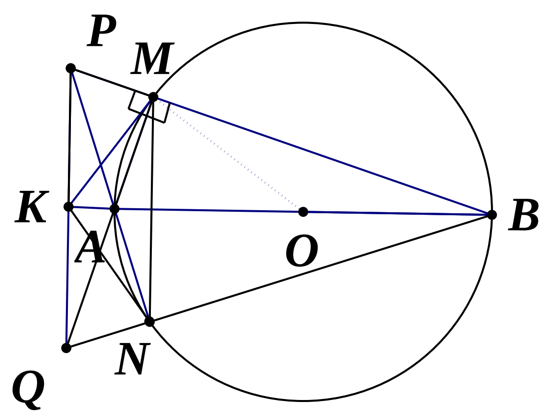
a)Tứ giác $AMPK$ là tứ giác nội tiếp.

b) ΔPKM cân.

c) KM là tiếp tuyến của (O).

d) Xác định M trên (O) để tứ giác $PKNM$ là hình thoi.

Hướng dẫn



a) Tứ giác $AMPK$ là tứ giác nội tiếp

* Ta có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{AMP} = 90^\circ$

* Ta có: P và Q đối xứng với nhau qua AB $(gt) \Rightarrow$ AB là đường trung trực của đoạn PQ

$\Rightarrow PQ \perp AB = \{K\} \Rightarrow \widehat{AKP} = 90^\circ$

* Xét tứ giác $AMPK$ có:

.) $\widehat{AMP} + \widehat{AKP} = 180^\circ$

.) $\widehat{AMP}$ và $\widehat{AKP}$ là hai góc ở hai đỉnh đối nhau

* Vậy tứ giác $AMPK$ là tứ giác nội tiếp

b. ΔPKM cân

Cách 1

* Ta có: ΔBMN cân tại $B \Rightarrow BA$ là tia phân giác của $\widehat{MBN}$

* Ta có: ΔBPQ cân tại $B \Rightarrow BA$ là tia phân giác của $\widehat{PBQ}$

* Mà 3 điểm P, M, B thẳng hàng, suy ra 3 điểm B, N, Q thẳng hàng $\Rightarrow$3 điểm A, M, Q thẳng hàng

*Ta có: ΔBMQ vuông tại M có MK là trung tuyến

$\Rightarrow MK = KP = KQ = \dfrac{1}{2}PQ$

$\Rightarrow \Delta\ PKM$ cân tại K

Cách 2 :

Tứ giác $KPMA$ nội tiếp (theo câu a) $\Rightarrow PMK = PAK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung PK)

Mà: $PAK = NAB$ (đối đỉnh); $NAB = MAB$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau là MB, NB)

$\Rightarrow PMK = MAB$

Lại có: $MAB = MPK$ (cùng phụ MBA)

$\Rightarrow PMK = KPM \Rightarrow \Delta PKM$ cân tại K

c. KM **là tiếp tuyến của đường tròn** (O)

* Ta có: ΔPKM cân tại K (cm$b$) $\Rightarrow KPM = KMP$ (1)

* Ta có: ΔOBM cân tại O (cm$b$) $\Rightarrow OBM = OMB$ (2)

* Ta có: $AKP = 90^\circ \Rightarrow \Delta PKB$ vuông tại K $\Rightarrow KPM + OBM = 90^\circ$ (3)

* Từ (1); (2); (3) có $KMP + OMB = 90^\circ \Rightarrow OMK = 90^\circ$

$\Rightarrow$ KM là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) Xác định M **trên** (O) **để tứ giác** $PKNM$ **là hình thoi**

* Giả sử tứ giác $PKNM$ là hình thoi thì $PK = KN = NM = PM$ $\Rightarrow \Delta PKM$ đều

$\Rightarrow KPM = 60^\circ \Rightarrow ABM = 30^\circ \Rightarrow AM = \dfrac{1}{2}AB$ $(TSLG)$

* Vậy điểm M trên (O) sao cho $AM = R$ thì tứ giác $PKNM$ là hình thoi

Câu 352.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB; M là điểm di động trên nửa đường tròn, kẻ MH vuông góc với AB tại H. Gọi P là điểm đối xứng với H qua AM, PH cắt AM tại I; gọi Q là điểm đối xứng của H qua BM, QH cắt BM tại J.

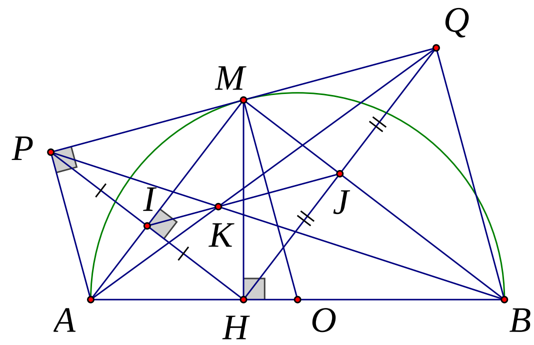
a) Chứng minh $MIHJ$ là hình chữ nhật và suy ra bốn điểm M, I, H, J cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $MI.MA = MJ.MB$.

c) Chứng minh PQ là tiếp tuyến của $(O;R)$.

d) Gọi giao điểm của AQ và BP là K. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) Ta có: $AMB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) (1)

Vì P và Q đối xứng nhau qua MA và MB nên $MIH = MJH = 90°$ (2)

Từ (1)(2) suy ra tứ giác $MIHJ$ là hình chữ nhật.

+ Vì tứ giác $MIHJ$ là hình chữ nhật nên bốn điểm M, I, H, J cùng nằm trên đường tròn đường kính MH .

b) Chỉ ra $\begin{cases} MI.MA = MH^2 \\ MJ.MB = MH^2 \end{cases}$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Từ đó suy ra $MI.MA = MJ.MB$.

c) Chỉ ra $\begin{cases} MP = MH \\ MQ = MH \\ PMI = HMI \\ HMJ = QMJ \end{cases}$ (tính chất đối xứng trục) nên $PM = MQ$

và $PMH + HMQ = 2\left(IMH + HMJ\right) = 2.90° = 180° \Rightarrow M$ là trung điểm PQ .

Chỉ ra tứ giác $APQB$ là hình thang vuông, có OM là đường trung bình nên $MO//BQ \Rightarrow MO \perp PQ \Rightarrow PQ$ là tiếp tuyến của nửa đường tròn $(O;R)$.

d) Chỉ ra $IJ//PQ$ (đường trung bình) (3)

Chỉ ra $AP//BQ \Rightarrow \dfrac{AK}{KQ} = \dfrac{AP}{QB} = \dfrac{AH}{HB}$ (4)

Mặt khác ΔAIH đồng dạng ΔHJB (HS tự chứng minh) nên $\dfrac{AH}{HB} = \dfrac{AI}{HJ} = \dfrac{AI}{IM}$ (5)

Từ (4)(5) suy ra $\dfrac{AK}{KQ} = \dfrac{AI}{IM} \Rightarrow IK//MQ \Rightarrow IK//PQ$ (6)

Từ (3)(6) suy ra I, K, J thẳng hàng.

Câu 353.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn (O,R) đường kính AB . Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn (O,R). Qua điểm M bất kỳ thuộc nửa đường tròn này kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt tại E và F. Nối AM cắt OE By tại P, nối BM cắt OF tại Q. Hạ MH vuông góc với AB tại H.

a) Chứng minh 5 điểm M,P,H,O,Q cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $\mathrm{AE.BF} = \mathrm{R}^2$

c) Gọi K là giao điểm của MH và BE. Chứng minh rằng $\mathrm{MK} = \mathrm{HK}$.

d) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta\mathrm{EOF}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{3} < \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}} < \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn

Chứng minh 5 điểm M,P,H,O,Q cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có EF, EA, FB lần lượt là các tiếp tuyến tại M, A, B của đường tròn (O) (gt)

$\Rightarrow$ $EM = EA$; $FB = FM$ (tính chất tiếp tuyến tuyến cắt nhau).

Xét $EM = EA$ và $OM = OA = R$

$\Rightarrow$ OE là đường trung trực của AM

$\Rightarrow OE \perp AM$ tại P và P là trung điểm của AM.

$\Rightarrow OPM = 90^o$

Xét $FM = FA$ và $OM = OB = R$

$\Rightarrow$ OF là đường trung trực của BM

$\Rightarrow OF \perp BM$ tại Q và Q là trung điểm của BM.

$\Rightarrow OQM = 90^o$

Ta có $MH \perp AB$ tại H (giả thiết)

$\Rightarrow OHM = 90^o$

Do đó: $OPM = OQM = OHM = 90^o$ hoặc P, Q, H cùng nhìn cạnh OM dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ P, Q, H cùng thuộc đường tròn đường kính OM.

$\Rightarrow$ 5 điểm M, P, O, Q, H cùng thuộc đường tròn đường kính OM. (đpcm)

Chứng minh rằng $\mathrm{AE.BF} = \mathrm{R}^2$

Ta có: OE là tia hân giác của AOM (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow AOE = MOE = \frac{AOM}{2}$

Ta có: OF là tia hân giác của BOM (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow BOF = MOF = \frac{BOM}{2}$

Mà $EOF = MOE + MOF = \dfrac{AOM + BOM}{2}$; $AOM + BOM = 180^o$ (hai góc kề bù).

$\Rightarrow EOF = 90^o$ hoặc ΔEOF vuông tại O.

Xét ΔEOF vuông tại O và $OM \perp EF$ tại M (*tính* chất tiếp tuyến).

$\Rightarrow OM^2 = EM.FM$ (hệ thức lượng)

Mà $EM = EA$; $FB = FM$ (tính chất tiếp tuyến tuyến cắt nhau); $OM = R$.

$\Rightarrow R^2 = AE.BF$ (đpcm)

Gọi K là giao điểm của MH và BE. Chứng minh rằng $MK = HK$.

Ta có: $AE \perp AB$ (*tính* chất tiếp tuyến); $BF \perp AB$ (tính chất tiếp tuyến); $MH \perp AB$ (giả thiết)

$\Rightarrow MH // AE // BF$ hoặc $MK // BF$; $HK // AE$

Xét MK//BF, có:

$\Delta KEM \backsim \Delta BEF$ (Định lý) $\Rightarrow \dfrac{MK}{BF} = \dfrac{EM}{EF} \Rightarrow \dfrac{MK}{EM} = \dfrac{BF}{EF} = \dfrac{FM}{EF}$ (do $BF = MF$)

$\dfrac{FM}{EF} = \dfrac{BK}{BE}$ (Định lý Ta - let)

Xét $KH // AE$, có:

$\Delta BKH \backsim \Delta BEA$ (Định lý) $\Rightarrow \dfrac{BK}{BE} = \dfrac{KH}{AE}$ (tính chất)

Do vậy $\dfrac{MK}{EM} = \dfrac{KH}{AE}$, mà $AE = EM$ suy ra $MK = KH$

Vì r là bán kính của đường tròn nội tiếp ΔEOF nên $S_{EOF} = \dfrac{1}{2} r\left(OE + OF + EF\right)$

Mà $S_{EOF} = \dfrac{1}{2} OM.EF = \dfrac{1}{2} R.EF$

$\Rightarrow r\left(OE + OF + EF\right) = R.EF \Leftrightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{EF}{OE + OF + EF}$

Theo $BĐT$ tam giác ta có

$EF < OE + OF \Leftrightarrow 2EF < OE + OF + EF$

$\Rightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{EF}{OE + OF + EF} < \dfrac{1}{2}$ (1)

Ta cũng có $EF > OE, EF > OF \Leftrightarrow 2EF > OE + OF$

$\Leftrightarrow 3EF > OE + OF + EF \Rightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{EF}{OE + OF + EF} > \dfrac{1}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{1}{3} < \dfrac{r}{R} < \dfrac{1}{2}$

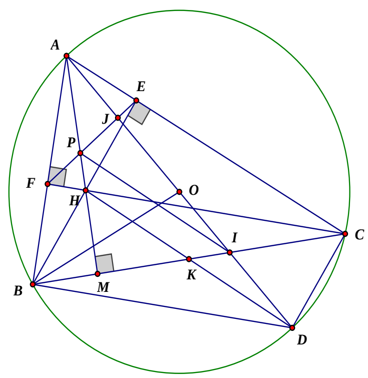
Câu 354.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $\left(AB < AC\right)$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H.

1) Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

3) Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm I, đường thẳng EF cắt đường thẳng AH tại điểm P. Chứng minh tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB và đường thẳng KH song song với đường thẳng IP.

Hướng dẫn



1) Ta có $BEC = BFC = 90^\circ$.

Do đó tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp (theo dấu hiệu: tứ giác có hai đỉnh kề nhau nhìn cạnh đối diện các góc bằng nhau là tứ giác nội tiếp).

2) Kẻ đường kính AOD, gọi $J = AO \cap FE$.

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $AFE = ACB$.

Mà $ACB = ADB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ AB của $\left(O\right)$).

Suy ra $AFE = AFJ = ADB$.

Do đó $FAJ + AFJ = BAD + ADB = 90^\circ$. Suy ra $AJF = 90^\circ$ hay $OA \perp FE$.

3) Ta có $APE = AIB$ (vì cùng phụ với góc PAJ).

Lại có tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $AEP = ABI$.

Do đó tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB (g . g).

+)

* Dễ dàng chứng minh được tứ giác $BDCH$ là hình bình hành, suy ra H, K, D thẳng hàng.

* Vì $BAI = PAE \Rightarrow PAF = EAJ$.

Do đó tam giác ACD đồng dạng với tam giác AFH (g . g), suy ra $\frac{AH}{AD} = \frac{AF}{AC} (1)$.

Tam giác AFP đồng dạng với tam giác ACI (g –.g) nên $\frac{AP}{AI} = \frac{AF}{AC} (2)$

* Từ $(1),(2)$ suy ra $\frac{AH}{AD} = \frac{AP}{AI} \Rightarrow \frac{AP}{AH} = \frac{AI}{AD} \Rightarrow IP//HD$ hay $IP//HK$.

Câu 355.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB chứa nửa đường tròn, kẻ tia Ax vuông góc với AB, trên đó lấy điểm C(C khác A). Kẻ tiếp tuyến CM tới đường tròn (M là tiếp điểm). Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt đường thẳng CM tại D.

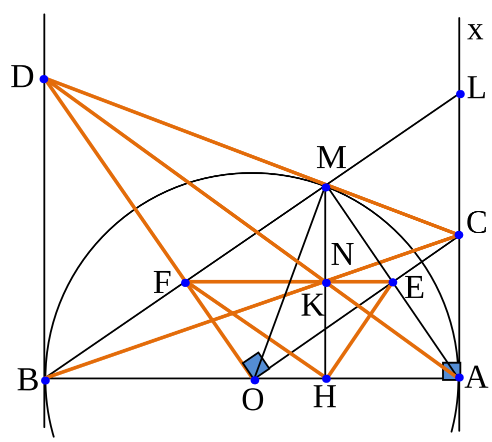
1) Chứng minh tứ giác $AOMC$ nội tiếp.

2) Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3) OC cắt MA tại E, OD cắt MB tại F, MH vuông góc AB (H thuộc AB). Chứng minh: $HE^2 + HF^2$ có giá trị không đổi khi C chuyển động trên tia Ax.

4) Chứng minh ba đường thẳng BC, EF và MH đồng quy.

Hướng dẫn



1) Ta có CD và CA lần lượt là tiếp tuyến tại A và M của đường tròn (O) (giả thiết).

$\Rightarrow AC \perp AO$ tại A ; $CD \perp OM$ tại M.

$\Rightarrow CAO = 90°; \quad CMO = 90°$

Xét tứ giác $AOMC$ có CAO ; CMO là hai góc đối và $CAO + CMO = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow$ tứ giác $AOMC$ nội tiếp.

2) Ta có: $\widehat{COM}+\widehat{MOD}=\widehat{COD}=90^\circ$ (vì $CO\perp OD$ tại O).

$\widehat{COA}+\widehat{COM}+\widehat{MOD}+\widehat{DOB}=180^\circ$. $\Rightarrow \widehat{COA}+\widehat{DOB}=180^\circ$.

Ta có OC là phân giác của $\widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow \widehat{COA}=\widehat{COM}$. $\Rightarrow \widehat{MOD}=\widehat{DOB}$.

Xét ΔMOD và ΔBOD có:

$OM=OB=R;\quad \widehat{MOD}=\widehat{DOB}$

OD chung

$\Rightarrow \Delta MOD=\Delta BOD(c.g.c)\Rightarrow \widehat{OMD}=\widehat{OBD}$ (cặp góc tương ứng).

Mà $\widehat{OMD}=90^\circ$ (vì $CD\perp OM$ tại M) $\Rightarrow \widehat{OBD}=90^\circ$ hay $OB\perp BD$ tại B.

Vậy BD là tiếp tuyến của đường tròn (O) (đpcm).

3) Chứng minh: HE^2+HF^2 có giá trị không đổi khi C chuyển động trên tia Ax.

ΔMOA cân tại O có OE là phân giác của $\widehat{AOM}$ (vì $E\in OC$).

$\Rightarrow$ OE cũng là đường trung tuyến của ΔMOA.

$\Rightarrow$ E là trung điểm của AM.

Ta có OD là phân giác của $\widehat{BOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Xét ΔMOB cân tại O có OF là phân giác của $\widehat{BOM}$ (vì $F\in OD$).

$\Rightarrow$ OF cũng là đường trung tuyến của ΔMOB

$\Rightarrow F$ là trung điểm của BM

ΔMAH vuông tại H có $HE=\dfrac{AM}{2}$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

ΔMBH vuông tại H có $HF=\dfrac{BM}{2}$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

ΔMAB vuông tại M có $AM^2+BM^2=AB^2=4R^2$ (định lý Pitago)

$\Rightarrow HE^2+HF^2=\dfrac{AM^2+BM^2}{4}=R^2$

Vậy HE^2+HF^2 có giá trị không đổi khi C chuyển động trên tia Ax

4) Ta có E, F lần lượt là trung điểm của cạnh MA, MB

$\Rightarrow$ EF là đường trung bình của ΔMAB

$\Rightarrow$ EF//AB

$\Rightarrow$ EK//AH ($K\in$ EF; $H\in AB$)

$\Rightarrow \dfrac{ME}{MA} = \dfrac{MK}{MH} = \dfrac{1}{2}$ (định lý talet)

$\Rightarrow$ EF giao với MH tại K là trung điểm của MH (*)

Gọi giao điểm của BC với MH là N; giao điểm của tia BM với tia Ax là L

ΔLAB có LB // CO (cùng $\perp$ AM) ; $AO = OB = R$

$\Rightarrow$ $CA = CL$ (1)

Ta có CA // NH (cùng $\perp$ AB)

$\Rightarrow \dfrac{CA}{NH} = \dfrac{BC}{BN}$ (hệ quả định lý talet) (2)

Lại có CL // MN

$\Rightarrow \dfrac{CL}{NM} = \dfrac{BC}{BN}$ (hệ quả định lý talet) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ NH = NM $\Rightarrow$N là trung điểm của MH $\Rightarrow$ N trùng với K

$\Rightarrow$BC đi qua trung điểm K của MH (**)

Từ (*), (**) $\Rightarrow$ Ba đường thẳng BC, EF và MH đồng quy

Câu 356.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Tia BD và tia CE cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N(M khác B, N khác C).

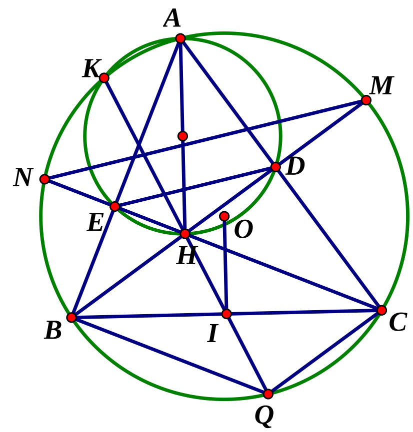
1) Chứng minh bốn điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh: $DE//MN$.

3) Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K (K khác A). Tia KH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q. Tứ giác $BHCQ$ là hình gì? Tại sao?

4) Gọi giao điểm của HQ và BC là I. Chứng minh $\dfrac{OI}{MN} > \dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn



1) Chứng minh bốn điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có BD và CE là các đường cao của tam giác ABC (giả thiết)

$\Rightarrow BD \perp AC$ tại D; $CE \perp AB$ tại E

$\Rightarrow BDC = 90^o$; $BEC = 90^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BEDC$ có hai đỉnh kề E và D cùng nhìn cạnh BC dưới một góc vuông. $\Rightarrow$ Tứ giác $BEDC$ nội tiếp.

$\Rightarrow$ 4 điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh: $DE // MN$.

Xét (O) ta có: $MNC = MBC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn MC)

Xét tứ giác nội tiếp $BEDC$ (cm$t$) có $DEC = MBC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn DC). Do đó:

$DEC = MNC$

Mà DEC ; MNC là hai góc đồng vị $\Rightarrow DE // MN$.

3) Tứ giác *BHCQ* là hình gì? Tại sao?

Xét đường tròn đường kính AH có: $AKH = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AKQ = 90°$ (K , H , Q thẳng hàng)

Mà AKQ là góc nội tiếp chắn cung AQ của đường tròn (O)

$\Rightarrow$ AQ là đường kính của đường tròn (O)

$\Rightarrow ACQ = ABQ = 90°$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow AC \perp QC$; $AB \perp QB$

Mà $BH \perp AC$; $CH \perp AB$ (tính chất trực tâm)

$\Rightarrow QB // CH$; $QC // BH$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHCQ$ là hình bình hành

4) Chứng minh $\dfrac{OI}{MN} > \dfrac{1}{4}$.

Tứ giác $BHCQ$ là hình bình hành (cmt)

$\Rightarrow HQ$ và BC cắt nhau tại I là trung điểm của chúng.

Mà O là trung điểm của đường kính AQ của đường tròn (O)

$\Rightarrow$ OI là đường trung bình của tam giác AQH

$\Rightarrow OI = \dfrac{AH}{2}$ (tính chất). (1)

Chứng minh được ΔAHM cân tại A nên đường cao AD cũng là đường trung tuyến (tính chất)

$\Rightarrow$ D là trung điểm của HM .

Chứng minh được ΔAHN cân tại A nên đường cao AE cũng là đường trung tuyến (tính chất)

$\Rightarrow$ E là trung điểm của HN .

Do đó MN là đường trung bình của ΔMHN

$\Rightarrow MN = 2ED$ (Tính chất) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{OI}{MN} = \dfrac{AH}{4ED}$

Mà trong đường tròn đường kính AH có ED là dây cung khác đường kính nên $AH > ED$

$\Rightarrow \dfrac{AH}{ED} > 1 \Rightarrow \dfrac{OI}{MN} > \dfrac{1}{4}$

Câu 357.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Gọi I là trung điểm của AO. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, kẻ hai tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O), lấy D thuộc Ax, E thuộc By sao cho góc $DIE = 90°$. Kẻ IF vuông góc với DE (F thuộc DE).

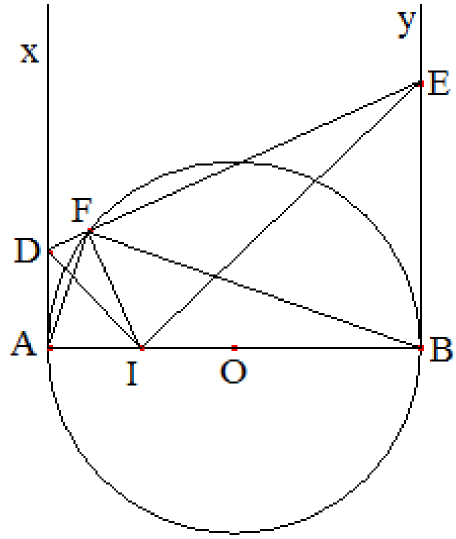
1) Chứng minh bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng $AD.BE = AI.IB = \dfrac{3R^2}{4}$.

3) Chứng minh điểm F thuộc đường tròn tâm O.

4) Xác định vị trí của D và E trên Ax, By để diện tích tam giác DIE nhỏ nhất.

Hướng dẫn



1) Chứng minh bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc một đường tròn.

Ta có Ax là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) (giả thiết); $D \in Ax$

$\Rightarrow AD \perp AB$ tại A $\Rightarrow IAD = 90^\circ$

Ta có $IF \perp DE$ tại F $\Rightarrow IFD = 90^\circ$

Cách 1:

$\Rightarrow$Tứ giác có hai đỉnh A và F cùng nhìn cạnh ID dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADFI$ nội tiếp đường tròn đường kính DI

$\Rightarrow$ bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc đường tròn đường kính DI .

Cách 2:

Xét tứ giác $IADF$ có IAD, IFD là hai góc đối và $IAD + IFD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADFI$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow$ bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc đường tròn

2) Chứng minh rằng $AD.BE = AI.IB = \dfrac{3R^2}{4}$.

Xét ΔADI và ΔBIE có

$DAI = IBE = 90^\circ$ (tính chất của tiếp tuyến)

$AID = BEI$ (cùng phụ với BIE do $DIE = 90^\circ$)

$\Rightarrow \Delta ADI \sim \Delta BIE \Rightarrow \dfrac{AD}{BI} = \dfrac{AI}{BE} \Rightarrow AD.BE = BI.AI$

Theo giả thiết lại có $AI = \dfrac{R}{2}; BI = \dfrac{3}{2}R \Rightarrow AD.BE = BI.AI = \dfrac{R}{2}.\dfrac{3R}{2} = \dfrac{3R^2}{4}$

Vậy $AD.BE = AI.IB = \dfrac{3R^2}{4}$

3) Chứng minh điểm F thuộc đường tròn tâm O.

Tứ giác $ADFI$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow DFA = DIA$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AD)

Tương tự chứng minh được tứ giác $BEFI$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow BFE = BIE$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn BE)

Vậy $DFA + BFE = DIA + BIE = 90°$ (Vì $DIE = 90°$)

$\Rightarrow AFB = 180° - (DFA + BFE) = 180° - 90° = 90°$

$\Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AB hay F thuộc đường tròn tâm O.

4) Xác định vị trí của D và E trên Ax, By để diện tích tam giác DIE nhỏ nhất.

Ta có $S_{DIE} = ID.IE \Rightarrow S_{DIE}{}^2 = ID^2.IE^2 = (AD^2 + AI^2)(BI^2 + BE^2)$

Áp dụng B Đ T cosi có: $AD^2 + AI^2 \geq 2AD.AI$; $BI^2 + BE^2 \geq 2BI.BE$

Và có $AD.BE = AI.IB = \dfrac{3R^2}{4}$ (cmt)

$$\Rightarrow S_{DIE}{}^2 \geq 2AD.AI.2BI.BE = 4\left(AI.BI\right)^2 = 4.\left(\frac{3R^2}{4}\right)^2 = \frac{9R^4}{4} \Rightarrow S_{DIE} \geq \frac{3R^2}{2}$$

Vậy Min $S_{DIE} = \dfrac{3R^2}{2}$ khi $AD = AI$; $BE = BI$

Vậy diện tích tam giác DIE nhỏ nhất khi D và E thuộc Ax, By sao cho $AD = AI$; $BE = BI$

Câu 358.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH, đường kính AM.

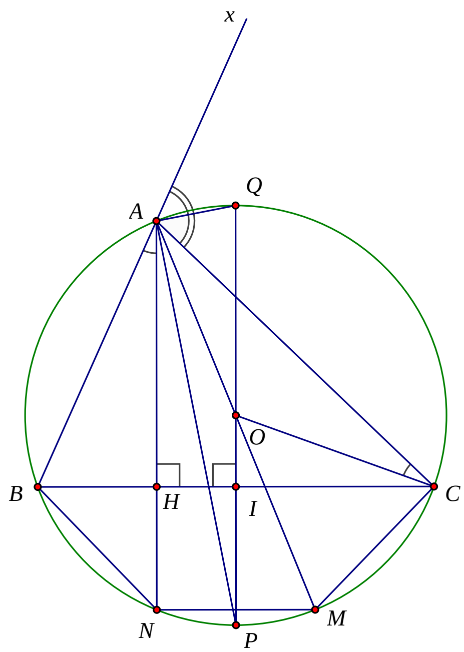
1) Tính ACM

2) Chứng minh: $AB.AC = AH.AM$ và $BAH = ACO$

3) Gọi N là giao điểm của AH với (O). Tứ giác $BCMN$ là hình gì ? Vì sao ?

4) Vẽ đường kính PQ vuông góc với BC (P thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh các tia AP, AQ lần lượt là các tia phân giác góc trong và góc ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC.

Hướng dẫn



1) Do AM là đường kính của (O) (gt) và C thuộc (O) (C khác A và M)

=> $ACM = 90°$ (góc nội tiêp chắn nửa đường tròn)

2) Xét ΔAHB và ΔACM có : $AH \perp BC(gt)$ => $AHB = 90°$ (1)

Ta lại có $ACM = 90°$ (theo câu a) => $ACM = AHB$ (2)

Xét (O) có $ABC = AMC$ (cùng chắn cung AC) (3)

Từ (2) và (3) => $\Delta AHB \backsim \Delta ACM$ (g-g)

=> $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{AM}$ => $AB.AC = AH.AM$ (đpcm)

$\Delta AHB \backsim \Delta ACM$ => $BAH = MAC$ (hai góc tương ứng) (4)

Ta lại có $OA = OC = R$ => ΔOAC cân tại O

=> $OAC = OCA$ (5)

Từ (4) và (5) => $BAH = ACO$ (đpcm)

3) Ta có $ACM = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow AN \perp NM$ (6)

$AH \perp BC$ (gt) => $AN \perp BC$ $(do\, H \in AN(gt))$ (7)

Từ (6) và (7) $\Rightarrow$ NM / /BC (t/c)

$\Rightarrow$ tứ giác $BCMN$ là hình thang (theo định nghĩa) (8)

Ta có : $AH \perp BC(gt) \Rightarrow NBH = 90° - ANB$ (9)

$ACM = 90° \Rightarrow BCM = 90° - ACB$ (10)

Xét (O) có : $ACB = BNA$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB) (11)

Từ (9), (10), (11) $\Rightarrow$ $NBH = BCM$ (12)

Từ (8) và (12) $\Rightarrow$ tứ giác $BCMN$ là hình thang cân (dhnb)

4) Gọi I là trung điểm của BC, có PQ là đường kính của (O) (gt) và $PQ \perp BC(gt)$

$\Rightarrow PQ \perp BC$ tại I (định lý).

$\Rightarrow$ PQ là đường trung trực $c?a$ đoạn BC.

$\Rightarrow PB = PC$ (tính chất điểm thuộc đường trung trực của đoạn thẳng).

$\Rightarrow$ $PB = PC$ (định lý).

$\Rightarrow BAP = CAP$ (hệ quả) (13)

$\Rightarrow$ AP là tia phân giác của BAC (đpcm).

Dựng Ax là tia đối của tia AB, có $PAQ = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

$\Rightarrow 90° = PAC + QAC$ (14)

Ta lại có: $xAQ + QAP + BAP = 180°$

$\Rightarrow xAQ + BAP = 90°$ (15)

Từ (13),(14),(15) $\Rightarrow$ $xAQ = QAC$

$\Rightarrow$ AQ là tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A của ΔABC (đpcm)

Bài 359. Cho $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ điểm C trên tia đối của tia AB kẻ các tiếp CD và CE với (O) với D, E nằm trên (O) và điểm E nằm trong đường tròn (O'). Các đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' tại M và N (M, N khác A). Đường thẳng DE cắt MN tại I.

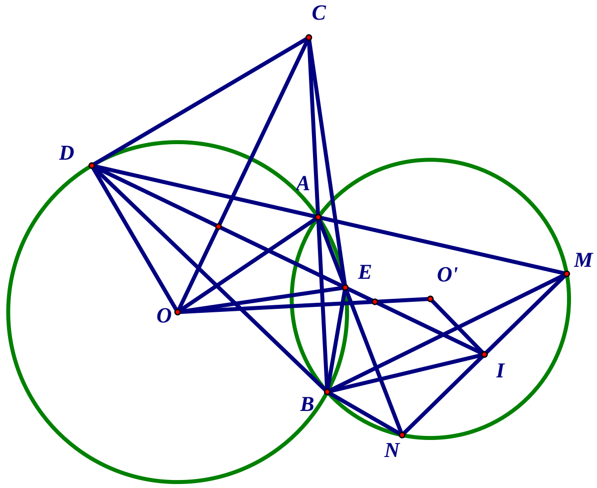
a).Chứng minh bốn điểm C,E,O,D nằm trên 1 đường tròn.

b).Chứng minh $EA.BC = EB.EC$.

c).Khi $OC = 2R$. Tính DOE và diện tích phần của hình tứ giác $OECD$ nằm ngoài (O).

d).Tính giá trị biểu thức $\sqrt{\dfrac{IM}{MN}} + \sqrt{\dfrac{IN}{MN}}$.

Hướng dẫn



a).Chứng minh bốn điểm C, E, O, D nằm trên 1 đường tròn.

Có CD, CE tiếp xúc đường tròn (O) lần lượt tại D, E nên $CDO = CEO = 90°$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $CDEO$ nội tiếp đường tròn đường kính OC.

b).Chứng minh $EA.BC = EB.EC$.

$\Delta EAB, \Delta CEB$ có $EBA = CBE$ (góc chung), $AEB = EBC = \frac{1}{2}$ *sđ* AE.

$\Rightarrow \Delta EAB \backsim \Delta CEB \Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow EA.BC = EB.EC$.

c).Khi $OC = 2R$. Tính DOE và diện tích phần của hình tứ giác $OECD$ nằm ngoài (O).

ΔOCD vuông tại D có $\sin OCD = \frac{OD}{OC} = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow OCD = 30°$, có $DCE = 2OCD = 60°$, mà $CD = CE$.

$\Rightarrow \Delta CDE$ đều . có $DOE + DCE = 180° \Rightarrow DOE = 120°$

Gọi S, S_1, S_2 lần lượt là diện tích cần tìm, diện tích tứ giác $CDOE$, diện tích hình quạt DOE thì:

$S = S_1 - S_2$

Có $S_1 = \frac{1}{2} OC.DE$, $DE = CD = OC.\cos 30° = R\sqrt{3}$, $OC = 2R \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}.2R.R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$.

Có $S_2 = \frac{120}{360}\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{3}$.

Suy ra $S = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{R^2}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$ (đvdt)

d).Tính giá trị biểu thức $\sqrt{\frac{IM}{MN}} + \sqrt{\frac{IN}{MN}}$.

Có $IDB = EAB = \frac{1}{2}sđ\,EB$, $EAB = BMI = \frac{1}{2}sđ\,BN \Rightarrow IDB = BMI$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BDMI$ nội tiếp đường tròn (do có hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh đối diện qua hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow BIN = BDM$.

Có tứ giác $ADBE$ nội tiếp nên $BEN = BDM$.

Suy ra $BIN = BEN$.

$\Rightarrow$Tứ giác $BEIN$ nội tiếp.

$\Delta IBN, \Delta DBA$ có $BIN = BDA$ (góc ngoài bằng góc đối trong của tứ giác nội tiếp $BDMI$).

Có $IBN = IEN = \frac{1}{2}sđ\,IN$, $IEN = AED$ (đối đỉnh), $AED = ABD = \frac{1}{2}sđ\,AD$.

$\Rightarrow IBN = ABD$, mà $BIN = BDA$.

$\Rightarrow \Delta IBN \backsim \Delta DBA \Rightarrow \frac{IN}{IB} = \frac{DA}{DB}$

$\Delta MIB, \Delta AEB$ có $BMI = BAE = \frac{1}{2}sđ\,BN$, có $BIM = BEA$ (lần lượt bù với hai góc bằng nhau).

$\Rightarrow \Delta MIB \backsim \Delta AEB \Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{EA}{EB}$

$\Delta CDA, \Delta CBD$ có $CDA = CBA = \frac{1}{2}sđ\,AD$, $DCA = BCD$ (góc chung).

$\Rightarrow \Delta CDA \backsim \Delta CBD \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{CD}{CB} = \frac{CA}{CD}$

Có $CD = CE$, nên $\frac{DA}{DB} = \frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CE}$, có $ACE = ECB$ (góc chung).

$\Rightarrow \Delta CAE \backsim \Delta CEB \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{EA}{EB}$, mà $\frac{IM}{IB} = \frac{EA}{EB}$.

$\Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{CE}{CB}$, có $\frac{IN}{IB} = \frac{DA}{DB}$, $\frac{DA}{DB} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{IN}{IB} \Rightarrow IM = IN = \frac{1}{2}MN$

Suy ra $\sqrt{\frac{IM}{MN}} + \sqrt{\frac{IN}{MN}} = \sqrt{2}$

Bài 360. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho $AP > R$, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

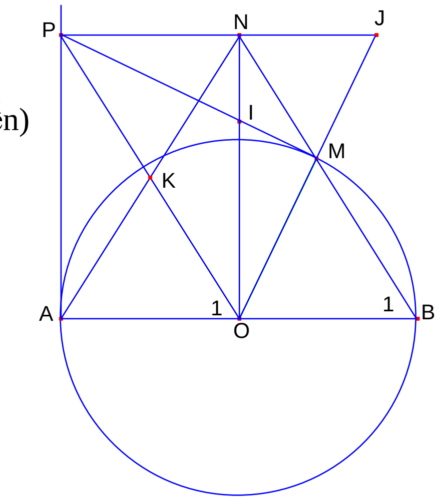
a) Chứng minh tứ giác $APMO$ nội tiếp một đường tròn.

b) Chứng minh $BM // OP$

c) Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

d) Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) Chứng minh tứ giác $APMO$ nội tiếp một đường tròn.

Ta có: $PAO = 90^\circ$ và $PMO = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến) nên $PAO + PMO = 180^\circ$

Suy ra: tứ giác $APMO$ nội tiếp một đường tròn.

b) Chứng minh $BM // OP$

Ta có: $OA = OM = R; PA = PM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

nên OP là trung trực của AM, suy ra: $OP \perp AM$

Mà $MB \perp AM$ (do $AMB = 90^\circ$ - góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên: $BM // OP$

c) Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

Δ vuông $APO = \Delta$ vuông ONB ($OA = OP = R$; $O_1 = B_1$ - đồng vị)

Suy ra: $BM = OP$ mà $BM // OP$ nên tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

d) Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Ta có: $JPO = POA$ (so le trong) và $POJ = POA$ (tính chất hai tiếp tuyến) nên $POJ = JPO$

Suy ra: ΔJPO cân tại J

Tứ giác $OAPN$ là hình chữ nhật (có ba góc vuông) nên có hai đường chéo OP và AN cắt nhau tại trung điểm K

ΔJPO cân tại J, có JK là trung tuyến nên cũng là đường cao hay $JK \perp OP$

Trong ΔJPO có: PM là đường cao thứ nhất, ON là đường cao thứ hai, hai đường này cắt nhau tại I nên đường cao thứ ba JK qua I

Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Câu 361.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ đường thẳng d không đi qua tâm O và cắt đường tròn tại hai điểm B và C phân biệt (B nằm giữa A và C). Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau ở M. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với OA, cắt OA tại H và cắt đường tròn tại hai điểm E và K (E nằm giữa M và K). Gọi I là giao điểm của BC và OM. Chứng minh rằng:

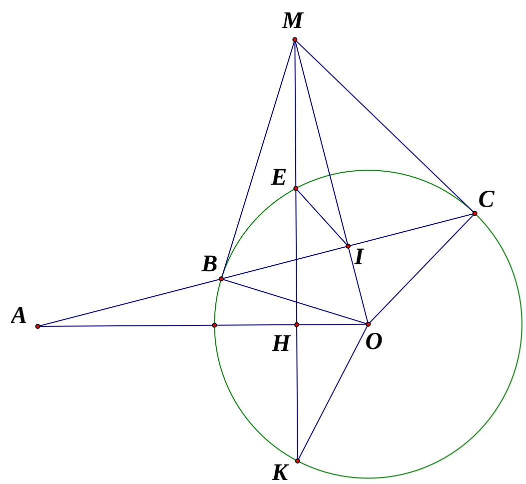
1) Tứ giác $OBMC$ nội tiếp.

2) BC vuông góc với OM và $MC^2 = MI.MO$.

3) $ME.MK = MI.MO$ và tứ giác $OIEK$ nội tiếp.

4) AE, AK là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

Hướng dẫn



1) Tứ giác $OBMC$ nội tiếp:

Tứ giác $OBMC$ có: $MBO + MCO = 180^\circ$. Mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $OBMC$ nội tiếp.

2) BC vuông góc với OM và $MC^2 = MI.MO$.

Xét (O) có MB, MC là hai tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại M

nên $MB = MC; OB = OC = R$

Suy ra OM là trung trực BC.

Suy ra $BC \perp OM$.

Xét ΔMCO vuông tại C có CI là đường cao suy ra: $MC^2 = MI.MO$ (hệ thức lượng).

3) $ME.MK = MI.MO$ và tứ giác $OIEK$ nội tiếp.

Ta chứng minh được: $ME.MK = MC^2$

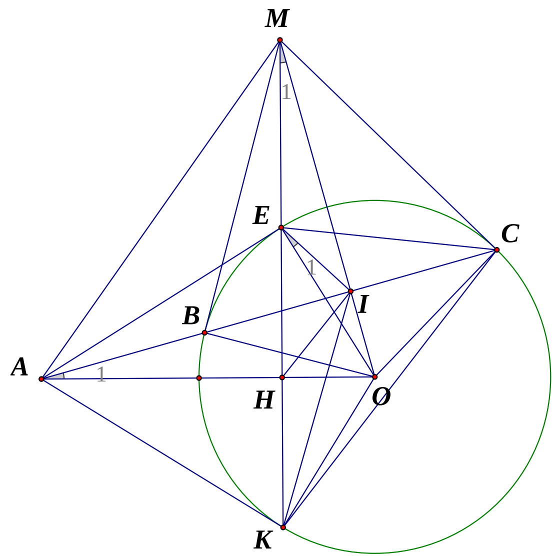
Mà $MC^2 = MI.MO$

Suy ra $ME.MK = MI.MO$

Suy ra : $\Delta MEI \backsim \Delta MOK\,(c.g.c) \Rightarrow MIE = MKO$

$\Rightarrow OIEK$ nội tiếp (dấu hiệu góc trong và góc ngoài tại đỉnh đối diện bằng nhau).

4) AE, AK là các tiếp tuyến của đường tròn (O).



+ Tứ giác $AMIH$ có $AIM = AHM = 90°$. Suy ra $AMHN$ nội tiếp.

$\Rightarrow A_1 = M_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn IH của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$) (1)

Ta có:

$OI.OM = OB^2 = OE^2 \Rightarrow \dfrac{OI}{OE} = \dfrac{OE}{OM}$

$\Rightarrow \Delta OIE \backsim \Delta OEM\,(c.g.c) \Rightarrow E_1 = M_1\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A_1 = E_1 \Rightarrow EIOA$ nội tiếp $\Rightarrow AEO = AIO = 90°$

$\Rightarrow AE$ là tiếp tuyến (O).

+ $EIOA$ nội tiếp $\Rightarrow EAO = EIM$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện bằng nhau).

Mà $EIM = EKO\,(cmt)$

$\Rightarrow EAO = EKO \Rightarrow AEOK$ nội tiếp

$\Rightarrow$ A, E, I, O, K cùng thuộc đường tròn

$\Rightarrow AIOK$ nội tiếp

$\Rightarrow AIO = AKO = 90°$

$\Rightarrow AK$ là tiếp tuyến (O).

Câu 362.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho $AP > R$. Từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

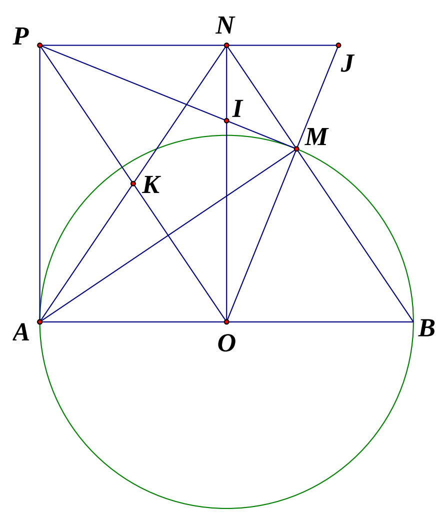
a) Chứng minh rằng 4 điểm $A,\ P,\ M,\ O$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $BM\,//\,OP$

c) Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành

d) Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I, PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh 3 điểm $I,\ J,\ K$ thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) Ta có $OAP = OMP = 90°$ (gt) $\Rightarrow OAP + OMP = 180° \Rightarrow A,\ P,\ M,\ O$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) Ta có $\begin{cases} PA = PM \\ OA = OM \end{cases} \Rightarrow OP \perp AM$, mà $MB \perp OM$ nên $OP\,//\,BM$ (1)

c) Ta có $\begin{cases} MOP = OBM \\ MOP + MPO = OBM + ONB = 90° \end{cases} \Rightarrow ONM = OPM \Rightarrow N,\ P,\ M,\ O$ cùng nằm trên một đường tròn. Do đó $A,\ P,\ M,\ O,\ N$ cùng nằm trên một đường tròn $\Rightarrow PAO = AON = APN = 90^0 \Rightarrow PN\,//\,AB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $OBNP$ là hình bình hành.

d) Ta có $PNOA$ là hình chữ nhật nên $KP = KO$

Xét đường tròn (K, KA) có $MN\,//\,PO \Rightarrow OPI = IOP \Rightarrow IP = IO$

Tương tự ta có $JP = JO$, vì vậy $I,\ J,\ K$ nằm trên đường trung trực đoạn MO. Vậy $I,\ J,\ K$ thẳng hàng.

Câu 363.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC nhọn $(AB > AC)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$, kẻ hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H.

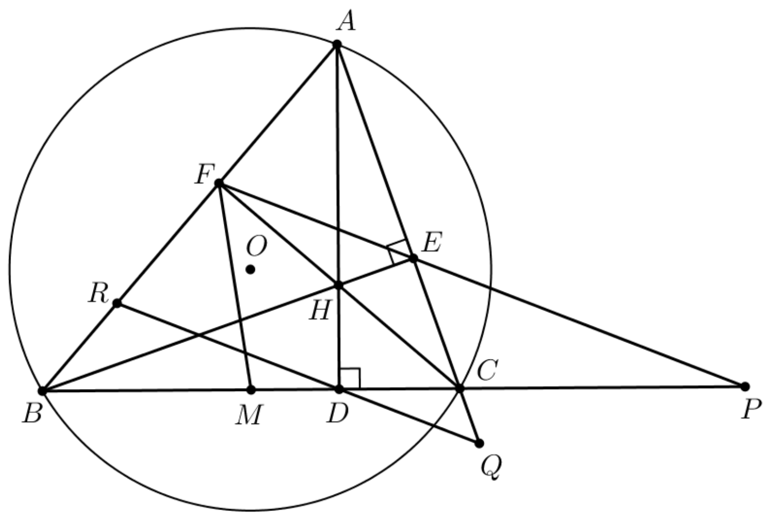
a) Chứng minh $CE.CA = CD.CB$. CB và CH vuông góc với AB tại F.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh tứ giác $EFMD$ nội tiếp.

c) Qua D vẽ đường thẳng song song với EF cắt AB tại R, cắt AC kéo dài tại Q. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua M.

d) Giả sử diện tích tam giác ABC bằng 1 (đvdt), $BAC = 30°$. Tính diện tích tứ giác $BCEF$.

Hướng dẫn



a) $\cos C = \dfrac{CE}{BC} = \dfrac{CD}{AC} \Rightarrow CE.CA = CD.CB$.

ΔABC có H là trực tâm $\Rightarrow CH$ là đường cao thứ ba $\Rightarrow CH \perp AB$.

b) $ABDE$ nội tiếp $\Rightarrow$ $ADE = BAE$

ΔMFC cân tại M $\Rightarrow MFC = MCF = BAD$.

Lại có: $EFH = HAE$

Suy ra: $BAE = HAE + BAD = EFH + MFC = MFE$.

Vậy $CDE = MFE$ $\Rightarrow$ tứ giác $EFMD$ nội tiếp.

c) $\Delta DQC \backsim \Delta DBR$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{RD}{DC} = \dfrac{BD}{DQ} \Rightarrow DR.DQ = DB.DC$ (1)

Ta có: $PD.PM = PE.PF = PC.PB \Rightarrow PM(MP - MD) = (PM - MC)(PM + MB)$

$\Rightarrow PM^2 - PM.MD = PM^2 - MB^2 \Rightarrow MB^2 - MD^2 = MD.PD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DR.DQ = DM.DP \Rightarrow$ tứ giác $RMQP$ nội tiếp, nghĩa là đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua M.

d) $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2 = \cos^2 A = \cos^2 30° = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{1}{4}$ (đvdt)

$\Rightarrow S_{BCEF} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (đvdt).

Câu 364.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O), A và B là các tiếp điểm. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng MB; C là giao điểm của AE và (O) (C khác A), H là giao điểm AB và MO.

1) Chứng minh 4 điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh: $EB^2 = EC.EA$.

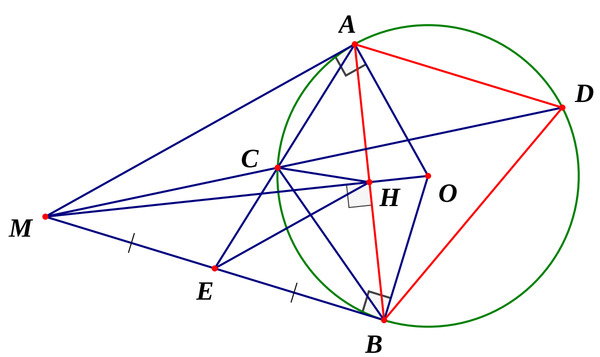
3) Chứng minh tứ giác $HCEB$ là tứ giác nội tiếp.

4) Gọi D là giao điểm của MC và (O) (D khác C). Chứng minh ΔABD Là tam giác cân.

Hướng dẫn

1) *Chứng minh 4 điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.*

Xét tứ giác $MAOB$ có:



$MAO + MBO = 90° + 90° = 180°$ và hai góc $MAO; MBO$ đối nhau

Suy ra tứ giác $MAOB$ nội tiếp trong một đường tròn.

2) *Chứng minh: $EB^2 = EC.EA$.*

Xét ΔEBC và ΔEAB có:

AEB là góc chung

$EBC = EAB$ (trong 1 đường tròn góc nội tiếp cùng chắn 1 cung)

$\Rightarrow \Delta EBC \sim \Delta EAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{EA}{EB} \Rightarrow EB^2 = EA.EC$

3) *Chứng minh tứ giác $HCEB$ là tứ giác nội tiếp* .

+ Chứng minh: $MO \perp AB$.

+ Vì ΔMHB vuông tại H và E là trung điểm của MB nên $HE = EM = EB = \frac{1}{2}MB \Rightarrow \Delta EHB$ cân tại E

$\Rightarrow EHB = EBH$.

+ Hơn nữa $\Delta EBC \sim \Delta EAB$ (cm trên) $\Rightarrow ECB = EBH$. Do đó $\Rightarrow ECB = EHB$.

+ Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa BE có $ECB = EHB$, do đó tứ giác $ECHB$ nội tiếp.

4) *Chứng minh ΔABD Là tam giác cân.*

Theo câu b ta có $EB^2 = EA.EC \Rightarrow EM^2 = EA.EC \Rightarrow \frac{EM}{EA} = \frac{EC}{EM}$.

+ Chứng minh: $\Delta EMA \sim \Delta ECM$ (c.g.c)

$\Rightarrow CME = MAE$ (1)

+ Ta có : $MAE = ADM$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $CME = ADM \Rightarrow AD//MB$.

+ Ta có:

$ADB = ECB$ mà $EBA = ECB$ (do $\Delta EBC \sim \Delta EAB$) nên $ADB = EBA$ (3)

VÌ $\mathrm{AD}//\mathrm{MB}$ nên $DAB = EBA$ (4)

Từ (3),(4) suy ra $DAB = ADB$.

Vậy ΔABD Là tam giác cân.

Câu 365.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Từ một điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MB, MD tới (O) (với B, D là các tiếp điểm). Qua M kẻ đường thẳng không đi qua O, cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A và C (với C nằm giữa A và M). Gọi E là trung điểm AC.

1) Chứng minh rằng: Năm điểm O, E, B, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

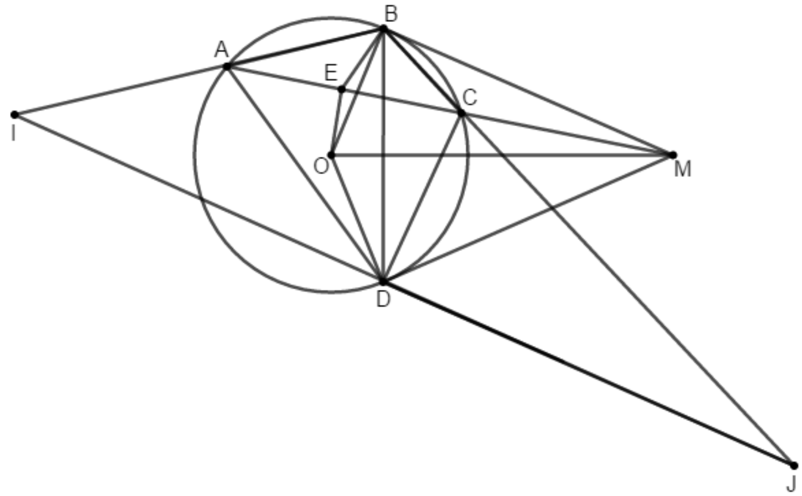
2) Chứng minh rằng: $BC.AD = AB.DC$.

3) Chứng minh rằng: Hai tam giác AEB và BCD đồng dạng.

4) Một đường thẳng qua D và song song với MB, cắt BA, BC lần lượt tại I và J.

Chứng minh rằng: $DI = DJ$.

Hướng dẫn



1) Chứng minh rằng: Năm điểm O, E, B, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có E là trung điểm AC nên $OE \perp AC$ (liên hệ giữa đường kính và dây cung)

MB, MD là hai tiếp tuyến của (O) nên $MB \perp OB$ và $MD \perp OD$.

Ta có các tam giác BOM vuông tại B, tam giác OEM vuông tại E, tam giác ODM vuông tại D, do đó năm điểm O, E, B, M, D cùng nằm trên một đường tròn đường kính OM

2) Chứng minh rằng: $BC.AD = AB.DC$.

Ta chứng minh được tam giác MAB đồng dạng với tam giác MBC (g – g), suy ra $\frac{MA}{MB} = \frac{AB}{BC}$.

Ta chứng minh được tam giác MAD đồng dạng với tam giác MDC (g – g), suy ra $\frac{MA}{MD} = \frac{AD}{DC}$.

Mà $MB = MD$ do tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau.

Nên $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Leftrightarrow AB.DC = AD.BC$.

3) Chứng minh rằng: Hai tam giác AEB và BCD đồng dạng.

Ta có $BEM = BDM = DBM$ (góc nội tiếp chắn cung DM và BM)

Mà $BAD = DBM$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BD)

Nên $BAD = BEM$

Suy ra $AEB = BCD$ (bù góc BEM và BAD)

Xét tam giác AEB và tam giác BCD, có

$EAB = BDC$ (góc nội tiếp chắn cung BC)

$AEB = BCD$ (cmt)

Suy ra tam giác AEB đồng dạng tam giác BCD.

4) Một đường thẳng qua D và song song với MB, cắt BA, BC lần lượt tại I và J.

Chứng minh rằng: $DI = DJ$.

Ta có $BAC = JBM$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BC)

Mà $JBM = BJI$ (so le trong và $BM // \text{JI}$)

Từ đó ta chứng minh được ΔABC đồng dạng với ΔJBI (g – g)

Suy ra $\dfrac{AC}{JI} = \dfrac{AB}{JB} \Leftrightarrow JI = \dfrac{AC.JB}{AB} = 2.\dfrac{AE.JB}{AB}$ (1)

Ta có $BDJ + DBM = 180^\circ$ (trong cùng phía và $BM // DJ$)

Mà $BEM = BDM$ (góc nội tiếp chắn cung BM)

Nên $BDJ + BEM = 180^\circ$.

Mặc khác $AEB + BEM = 180^\circ$.

Do đó $BDJ = AEB$. Từ đó ta chứng minh được ΔAEB đồng dạng tam giác ΔJDB.

Suy ra $\dfrac{AE}{DJ} = \dfrac{AB}{JB} \Leftrightarrow DJ = \dfrac{AE.JB}{AB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $JI = 2DJ$.

Vậy D là trung điểm JI hay $DI = DJ$.

Câu 366.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, điểm F cố định nằm trên tia đối của tia AB và C là điểm thay đổi trên đường tròn sao cho $AC < CB$. Nối FC cắt (O) tại điểm thứ hai D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại I, các đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E. Đường tròn đường kính BI cắt AB tại H. Chứng minh rằng:

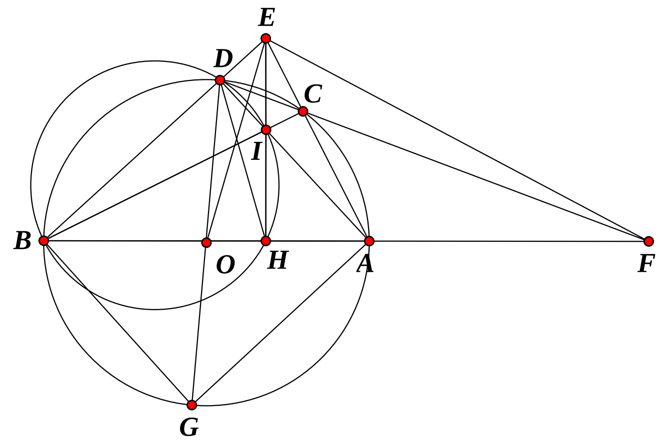
a) Tứ giác $ICED$ nội tiếp trong một đường tròn

b) Ba điểm H, I, E thẳng hàng

c) $FC.FD + AE.AC + BD.BE$ không phụ thuộc vào vị trí điểm C

d) Khi $OF = 3OA$. Tính tỉ số $\dfrac{OH}{OF}$.

Hướng dẫn



a) Tứ giác $ICED$ nội tiếp trong một đường tròn

Ta có:

$IDE = 90°$ (góc nội tiếp chắn cung nửa đường tròn)

$ICE = 90°$ (góc nội tiếp chắn cung nửa đường tròn)

nên $IDE + ICE = 180°$ suy ra $ICED$ nội tiếp trong một đường tròn(dấu hiệu nhận biết)

b) Ba điểm $H,\ I,\ E$ thẳng hàng

*Xét tam giác BEA có đường cao BC và AD cắt nhau tại I nên I là trực tâm hay $EI \perp AB$

*Ta có: $BHI = 90°$ (góc nội tiếp chắn cung nửa đường tròn) suy ra $IH \perp AB$

Vậy ba điểm $H,\ I,\ E$ thẳng hàng

c) $FC.FD + AE.AC + BD.BE$ không phụ thuộc vào vị trí điểm C

* $\Delta FCA \backsim \Delta FDA$ (g.g) suy ra $FC.FD = FA.FB$

* $\Delta ACB \backsim \Delta AHE$ (g.g) suy ra $AC.AE = AH.AB$

* $\Delta BDA \backsim \Delta BHE$ (g.g) Suy ra $BD.BE = BH.BA$

Từ đó suy ra: $FC.FD + AE.AC + BD.BE = FA.FB + AB^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm C.

d) Khi $OF = 3OA$. Tính tỉ số $\dfrac{OH}{OF}$.

Vì H, D thuộc đường tròn đường kính BI nên $DHB = DIB$

Kẻ đường kính DG thì $ADBG$ là hình chữ nhật nên $BD = AG$

do đó: $DIB = CDG$ nên $DHB = CDG$ hay $DHO = FDO$

Vậy $\Delta DHO\ \Delta FDO$ (g.g) nên $\dfrac{OH}{OD} = \dfrac{OD}{\text{OF}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow OH = \dfrac{1}{2}OA$

Mà $OF = 3OA$ nên $OH = \dfrac{1}{6}OF$

Câu 367.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho hình vuông $ABCD$, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng DE tại H, cắt đường thẳng DC ở K.

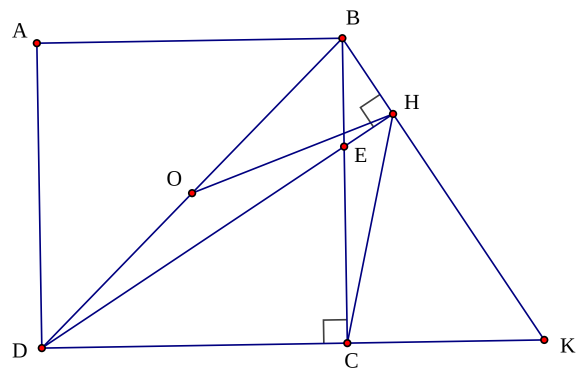
a) Chứng minh rằng $BHCD$ là tứ giác nội tiếp

b) Tính số đo CHK

c) Chứng minh hệ thức $KC.KD = KH.KB$

d) Khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên đường nào?

Hướng dẫn



a) Xét tứ giác $BHCD$ có $BHD = BCD\left(=90^\circ\right)$

mà H và C là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn cạnh BD

$\Rightarrow$ $BHCD$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

b) Vì $BHCD$ là tứ giác nội tiếp nên $CHK = BDC = 45^\circ$

c) Xét ΔKHC và ΔKDB có

BKD chung

$KHC = KDB\left(=45^\circ\right)$

Do đó $\Delta KHC \backsim \Delta KDB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KH}{KD} = \dfrac{KC}{KB}$ (các cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow KC.KD = KH.KB$

d) Gọi O là trung điểm của BD

Vì $BH \perp DE$ nên $BHD = 90^\circ$

Khi điểm E di chuyển trên BC thì $BHD = 90^\circ$ cố định

ΔBHD vuông tại H có HO là đường trung tuyến

$$\Rightarrow HO = \frac{1}{2}BD$$

$\Rightarrow$ H nằm trên đường tròn tâm O, đường kính BD.

Khi $E \equiv B$ thì $H \equiv B$, $E \equiv C$ thì $H \equiv C$

Vậy khi điểm E di chuyển trên BC thì H di chuyển trên $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm O, đường kính BD.

Câu 368.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đương tròn $(O;R)$.

Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh các tứ giác $CDHE$ và $BCEF$ nội tiếp được đường tròn.

b) Gọi I là trung điểm của BC. Lấy điểm K đối xứng với H qua I. Chứng minh AK là đường kính của đương tròn (O).

c) Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có $\tan B.\tan C = 3$ thì $OH // BC$.

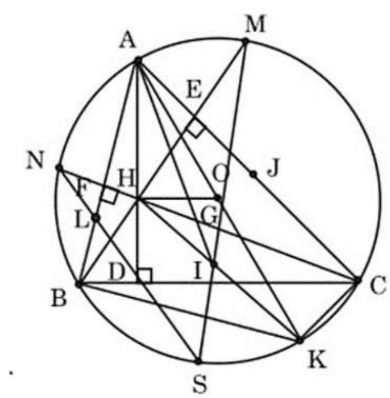
d) Các tia BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Lấy điểm S trên cung nhỏ BC, SM cắt AC ở J, SN cắt AB ở L. Chứng minh ba điểm H, J, L thẳng hàng.

Hướng dẫn

b) Do K là điểm đối xứng của H qua I và I là trung điểm của BC.

$\Rightarrow BHCK$ là hình bình hành.

$\Rightarrow CK // BH; CH // BK$



Lại có $AC \perp BH; AB \perp CH \Rightarrow ABK = ACK = 90°$

Vậy $ABKC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AK,

Mà ΔABC nội tiếp đường tròn (O).

$\Rightarrow AK,$ là đường kinh của đường tròn (O).

c) $\tan B.\tan C = 3 \Leftrightarrow \tan B.\tan BHD = 3 \Leftrightarrow \frac{AD}{BD}.\frac{BD}{HD} = 3 \Leftrightarrow \frac{AD}{HD} = 3$

Gọi G là giao điểm của AI và $HO \Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác ΔAHK.

$\Rightarrow \frac{AI}{AG} = 3$. Do đó $\frac{AD}{HD} = \frac{AI}{AG} \Rightarrow HG // DI \Rightarrow OH // BC$.

d) Dễ dàng thấy H, N đối xứng qua $AB \Rightarrow LHN = LNH = SAC$.

Tương tự: $JHM = JMH = SAB$

Vậy $LHN + NHM + JMH = SAC + NHM + SAB = BAC + NHM = 180°$

$\Rightarrow L, H, J$ thẳng hàng.

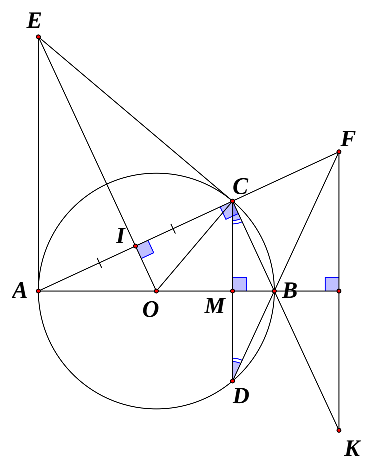
Bài 369. Cho (O) đường kính $AB = 6cm$. Trên OB lấy M sao cho $BM = 1cm$. Qua M vẽ dây CD của (O) vuông góc với AB.

1. Chứng minh tam giác ABC vuông và tính BC.

2. Đường thẳng qua O vuông góc AC cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở E. Chứng minh EC là tiếp tuyến của (O).

3. Gọi F là giao AC và BD, kẻ FH vuông AB, gọi K là giao CB và FH. Chứng minh ΔFBK cân.

Hướng dẫn



a) Vì AB là đường kính nên $ACB = 90°$ (góc nt chắn nửa đt)

Xét tam giác vuông ACB có CM là đường cao nên $BC^2 = BM.AB = 6 \Rightarrow BC = \sqrt{6}\,cm$

b) OE vuông góc với AC tại I nên I là trung điểm AC, suy ra OE là trung trực cạnh AC nên $OCE = OAE = 90° \Rightarrow$ EC là tiếp tuyến của (O).

c) Vì CD vuông góc với AB nên M là trung điểm CD, suy ra tam giác CBD cân tại B (có BM là trung trực) nên $CDB = DCB$ mà $DCB = CKF; CDB = DFK$ (hai góc sole trong) nên $\hat{K} = \hat{F}$ suy ra tam giác BKF cân tại B.

Bài 370. Cho $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax, $P \in Ax$ sao cho $AP > R$ từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O) tại M. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BM tại N. AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại J, PN cắt OM tại I. CM:

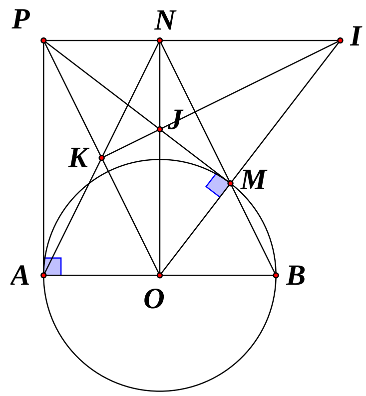
a) Tứ giác $APMO$ nội tiếp và $BM // OP$

b) Tứ giác $OBNP$ là hình bình hành

c) $PI = OI$; $PJ = OJ$

d) Ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) $PAO = PMO = 90^\circ$ Nên *APMO* nội tiếp.

$$\begin{cases} MBA + BAM = 90^\circ \\ POA + BAM = 90^\circ \end{cases}$$ Nên $POA = MBA$ Suy ra $MB // OP$

b) $\Delta NOB = \Delta PAO$ $(cgv - gnk)$ nên $PO = NB$ mà $PO // NP$ nên $OBNP$ là hình bình hành.

c) Theo câu b suy ra $AONB$ là hình chữ nhật.

$$\begin{cases} POM + OPM = 90^\circ \\ APO + OPN = 90^\circ \end{cases}$$ Mà $APO = OPM$ Suy ra $OPN = POM$

Nên ΔPOI cân tại I, suy ra $PO = OI$.

$$\begin{cases} APO = PON \\ APO = OPJ \end{cases}$$ Suy ra $PON = OPJ$

Nên ΔPOJ cân tại J, suy ra $PJ = OJ$.

d) J là trực tâm tam giác OPI nên IJ vuông góc OP tại trung điểm OP (1).

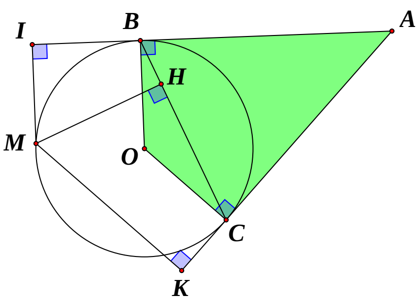
Vì $AONP$ là hình chữ nhật nên K là trung điểm OP (2)

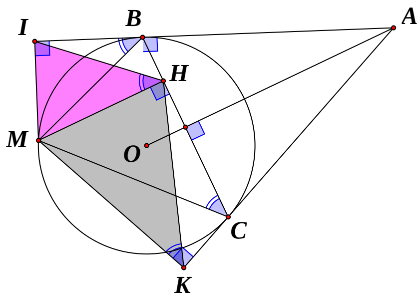
Từ (1)(2) suy ra I, J, K thẳng hàng.

Câu 371.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Các tiếp tuyến với đường tròn kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn tại B ,C. Gọi M là điểm tuỳ ý trên đường tròn khác B và C .Từ M kẻ $MH \perp BC, MK \perp CA, MI \perp AB$. CM :

a) Tứ giác $ABOC$, $MIBH$, $MKCH$ nội tiếp   b) $\Delta MIH \sim \Delta MHK$ c) $MI.MK = MH^2$

Hướng dẫn





b) IBM = IHM (cùng chắn cung MH)

IBM = BCM (cùng chắn cung MB)

BCM = HKM (cùng chắn cung MH) nên IHM = HKM (1)

Ta có: MIH = MBH (cùng chắn cung MH)

MBH = MCK (cùng chắn cung MC)

MCK = MHK (cùng chắn cung MK) nên MIH = MHK (2) .

Từ (1)(2) suy ra dpcm .

c) Tam giác MIH đồng dạng MHK nên $MH^2 = MI.MK$

Câu 372.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Từ một điểm A nằm ngoài (O) kẻ tiếp tuyến AM, AN với (O), ($M, N \in (O)$)

a) Từ O kẻ đường thẳng $\perp OM$ cắt AN tại S . Chứng minh: $SO = SA$

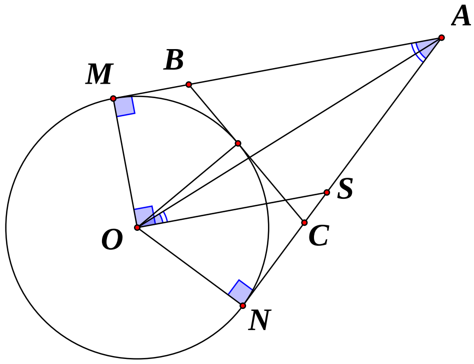
b) Trên cung nhỏ MN lấy điểm P khác M và N . Tiếp tuyến tại P cắt AM tại B , AN tại C .Giả sử A cố định, P là điểm chuyển động trên cung nhỏ MN . Chứng minh chu vi ΔABC không đổi ? Tính giá trị không đổi ấy?

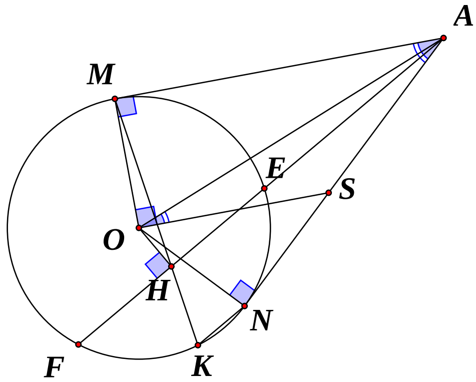
c) Vẽ cát tuyến AEF không đi qua điểm O ,H là trung điểm EF . Chứng minh các điểm A, M, H, O, N cùng thuộc một đường tròn

d) Chứng minh $AE.AF = AM^2$

e) Gọi K là giao điểm của MH với (O) .Chứng minh $NK // AF$.

Hướng dẫn





a) $MAO = NAO = SOA$

b) $CV = AB + BP + PC + AC = \left(AB + BM\right) + \left(NC + AC\right) = 2AM$

c) M, H, N cùng nhìn OA dưới 1 góc vuông nên A, M, H, N, O cùng nằm trên đường tròn đường kính AO.

d) Góc $AFM = AME = \frac{1}{2} sđAM \Rightarrow \Delta AME \backsim \Delta AFM\left(g.g\right) \Rightarrow AE.AF = AM^2$

e) Góc $MKN = MOA\left(= \frac{1}{2} sđMN\right)$ mà $MOA = MHA$ (tứ giác $MOHA$ nội tiếp)

nên $MKN = MHA = FHK$. Từ đó suy ra EF//KN.

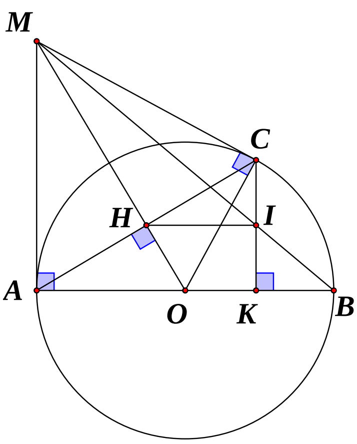
Câu 373.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ đường kính AB và dây AC không đi qua tâm, Gọi H là trung điểm AC.

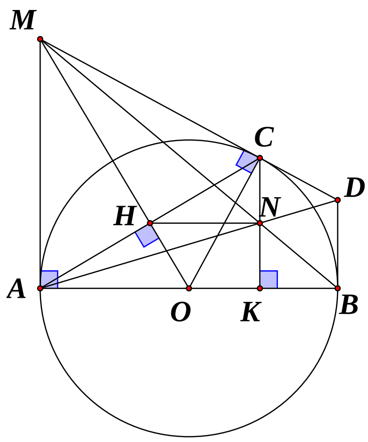
1. Tính số đo góc ACB và chứng minh OH//BC.
2. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt OH tại M. Chứng minh AM là tiếp tuyến (O).
3. Vẽ CK vuông góc AB tại K, gọi I là trung điểm CK, đặt $CAB = \alpha$.

Chứng minh $IK = R.\sin\alpha.\cos\alpha$.

4. Chứng minh M, I, B thẳng hàng.

Hướng dẫn





1. Vì AB là đường kính nên $\widehat{ACB} = 90°$ (góc nt chắn nửa đường tròn).

OH vuông góc AC (vì H là trung điểm AC) nên OH//BC (hoặc dùng tính chất đường trung bình)

2. Vì OM là trung trực AC nên $AM = MC$. Suy ra $\Delta MAO = \Delta MCO$ (c.c.c) nên $\widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90°$ suy ra AM là tiếp tuyến (O).

3. Ta có: $\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{BC}{AB}.\frac{AC}{AB} = \frac{AB.CK}{AB.AB} = \frac{CK}{2R}$ nên $R.\sin\alpha.\cos\alpha = CK:2 = IK$.

4. Từ B kẻ tiếp tuyến với (O) cắt CM tại D.

Gọi MB giao AD tại N. Vì $AM//BD$ nên: $\frac{AN}{ND} = \frac{AM}{DB} = \frac{MC}{CD}$ suy ra $\frac{AN}{ND} = \frac{MC}{CD}$ nên $CN//AM$ hay CN vuông góc AB nên N nằm trên CK.

Ta có: $\frac{NK}{MA} = \frac{KB}{AB} = \frac{ND}{AD} = \frac{NC}{AM} \Rightarrow \frac{NK}{MA} = \frac{NC}{AM} \Rightarrow NK = CN$ hay N là trung điểm CK $\Rightarrow N$ trùng I

Vậy M, I, B thẳng hàng.

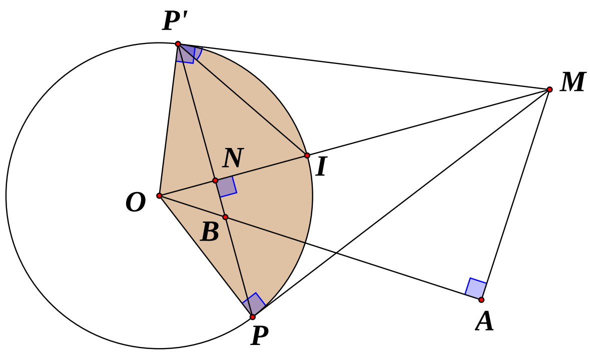
Câu 374.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn . Từ một điểm M chuyển động trên đường thẳng d vuông góc với OA tại A, vẽ các tiếp tuyến MP, MP' với đường tròn . Dây PP' cắt OM tại N, cắt OA tại B. Chứng minh :

a) Tứ giác $MPOP', MNBA$ nội tiếp b) $OA.OB = OM.ON$ không đổi

c) Khi điểm M di chuyển trên d thì tâm đường tròn nội tiếp $\Delta MPP'$ di chuyển trên đường nào ?

d) Cho $\widehat{PMP'} = 60°$ và $R = 8cm$ tính diện tích tứ giác $MPOP'$ và hình quạt POP'

Hướng dẫn



a) + Ta có $\widehat{MPO} = \widehat{MP'O} = 90° \Rightarrow \widehat{MPO} + \widehat{MP'O} = 180°$ mà đây là hai góc đối của tứ giác $MPOP'$ nên tứ giác $MPOP'$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $OP = OP'$ nên O nằm trên đường trung trực PP', $MP = MP'$ nên M nằm trên đường trung trực PP', suy ra OM là trung trực PP' nên PP' vuông góc OM

+ Xét tứ giác $MNBA$ có $\widehat{MNB} + \widehat{MAB} = 180°$ mà đây là hai góc đối của tứ giác $MNBA$ nên tứ giác $MNBA$ là tứ giác nội tiếp.

b)+Xét tam giác vuông ONB và tam giác vuông OAM có góc AOM chung

$\Delta ONB \backsim \Delta OAM\,(g.g) \;\; \Rightarrow \dfrac{OA}{ON}=\dfrac{OM}{OB} \Rightarrow \;\; OA.OB=OM.ON \;\; (1)$

+Xét tam giác vuông OMP ta có

$OP^2=OM.ON=\; R^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2)

Từ (1) và (2)⇒ $OA.OB=OM.ON=R^2$

c) Gọi I là giao OM với (O). Ta có: OM là phân giác của PMP'.

$IP'M=\frac{1}{2}sđP'I;IP'P=\frac{1}{2}sđIP$ mà $\text{IP}=\text{IP}'$ nên $IP'M=IP'P$

Suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MP'P.

Vậy tâm đường tròn nội tiếp tam giác MP'P chạy trên (O)

d) $MP'=\dfrac{OP'}{tan30^0}=8\sqrt{3}cm \Rightarrow S_{OPMP'}=OP'.P'M=64\sqrt{3}cm^2$

$S_{POP'}=\dfrac{\pi R^2.120^0}{360^0}\approx 67cm^2$

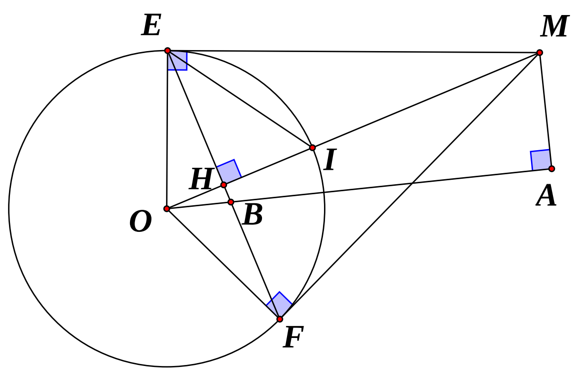
Câu 375.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ và điểm A cố định nằm ngoài (O). Vẽ đường thẳng $d\perp OA$ tại A. Trên d lấy điểm M. Qua M kẻ hai tiếp tuyến ME,MF. EF cắt OM tại H, cắt OA tại B. Chứng minh :

a) Tứ giác $ABHM$ nội tiếp b) $OA.OB=OH.OM=R^2$

c) Tâm của đường tròn nội tiếp ΔMEF thuộc một đường tròn cố định

d) Tìm vị trí của M để diện tích ΔBHO lớn nhất

Hướng dẫn



a) Ta có : $EM=EF$ nên M nằm trên trung trực EF

$OE=OF$ nên O nằm trên trung trực EF

Suy ra OM là trung trực EF nên MO vuông góc EF tại H.

Xét tứ giác $ABHM$ có : $BMH+BAH=180°$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $ABHM$ nội tiếp đường tròn

b) Vì $ABHM$ nội tiếp nên $OMA=OBH$ (cùng phụ góc HBA)

Suy ra $\Delta OBH \backsim \Delta OMA(g.g) \Rightarrow OA.OB = OH.OM$ (1)

Xét tam giác vuông OEM có EH là đường cao nên $OH.OM = OE^2 = R^2$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $OA.OB = OH.OM = R^2$

c) Gọi giao OM và (O) là I .

Ta có: $EMO = FMO$ (tc hai tt cắt nhau) (3)

$IEM = \frac{1}{2} sđEI;\ IEF = \frac{1}{2} sđIF$; mà cung $EI =$ cung FI nên $IEM = IEF$ (4)

Từ (3)(4) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MEF.

Vậy tâm đường tròn nội tiếp tam giác MEF luôn nằm trên (O) cố định.

d) theo b ta có: $OA.OB = R^2$ mà OA không đổi nên $OB = \frac{R^2}{OA}$ không đổi.

Trong tam giác vuông OHB có:

$$S_{OHB} = \frac{1}{2} OH.HB \le \frac{1}{2} . \left(\frac{OH + HB}{2} \right)^2 = \frac{(OH + HB)^2}{8} \le \frac{2(OH^2 + HB^2)}{8} = \frac{OB^2}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi $OH = HB$, suy ra tam giác OHB vuông cân tại H nên $MOA = 45°$

Vậy M trên d sao cho $MOA = 45°$

Câu 376.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O; R)$. Điểm A cố định nằm ngoài đường tròn kẻ đường thẳng (d) vuông góc OA. Từ điểm B bất kì trên d (B không trùng A) kẻ các tiếp tuyến BD, BC với (O) (D, C là tiếp điểm) Dây CD cắt OB tại N, cắt OA tại P.

1) Chứng minh tứ giác $OCBD$, $BNPA$ nội tiếp đường tròn

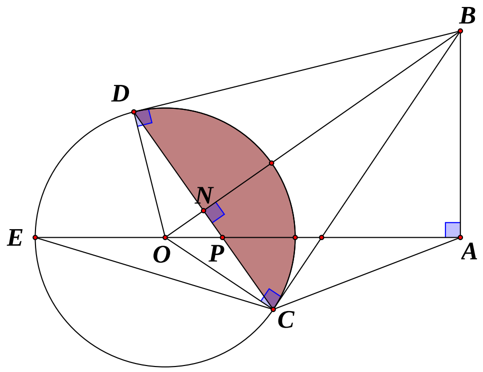
2) Chứng minh $OA.OP = OB.ON = R^2$

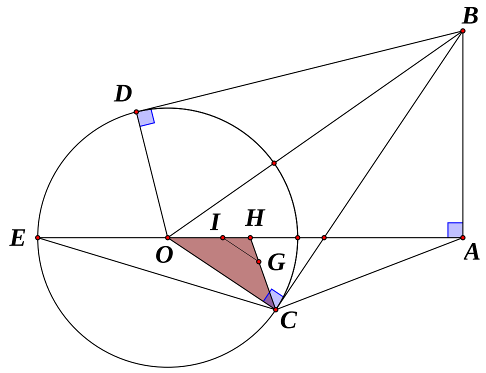
3) Cho góc $CBO = 30°$; $R = 6cm$. Tính diện tích $BCOD$ và diện tích hình quạt giới hạn bởi cung nhỏ DC và dây DC .

4) Gọi E là giao đường thẳng AO và (O) (O nằm giữa A, E). Khi B di chuyển trên đường thẳng d .

Chứng minh trọng tâm G của tam giác ACE thuộc một đường tròn cố định

Hướng dẫn





1) Xét tứ giác $OCBD$ có: $BDO = BCO = 90°$ (tc tiếp tuyến) nên $BDO + BCO = 180°$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $OCBD$ nội tiếp.

Ta có: $OC = OD$ nên O nằm trên đường trung trực DC (1)

$\mathrm{DB} = \mathrm{BC}$ (tc hai tiếp tuyến cắt nhau) nên B nằm trên đường trung trực DC (2)

Từ (1)(2) suy ra OB là trung trực DC nên BO vuông góc DC.

Xét tứ giác $BNPA$ có: $BNP + BAP = 180°$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $BNPA$ nội tiếp.

2) Xét tam giác OPN và OBA có: Góc O chung,

$$ONP = OAB = 90° \Rightarrow \Delta OPN \backsim \Delta OBA(g.g) \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{ON}{OP} \Rightarrow OA.OP = ON.OB \ (3)$$

Trong tam giác vuông BOD có DN là đường cao, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$ON.OB = OD^2 = R^2 \,(4)$

Từ (3)(4) suy ra $OA.OP = OB.ON = R^2$

3) Trong tam giác vuông OBC ta có: $BC = \dfrac{OC}{\tan CBO} = \dfrac{R}{\tan 30°} = R\sqrt{3} = 6\sqrt{3}cm$

$$S_{BCOD} = 2S_{BOC} = 2.\frac{1}{2}.OC.CB = 2.\frac{1}{2}.6.6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\,cm^2$$

Ta có: $CBO = 30° \Rightarrow CBD = 60° \Rightarrow COD = 120° \Rightarrow$ Diện tích hình quạt giới hạn bởi dây OD, OC và cung nhỏ DC là: $S_{OCD} = \dfrac{120.3,14.6^2}{360} = \dfrac{942}{25}cm^2$

Vì $DON = 60° \Rightarrow ON = \dfrac{R}{2} = 3cm \Rightarrow DN = 3\sqrt{3}\,cm \Rightarrow S_{\Delta ODC} = 2S_{\Delta ODN} = ON.ND = 9\sqrt{3}cm^2$

$\Rightarrow$ Diện tích hình giới hạn bởi cung nhỏ DC và dây CD là:

$$S = S_{ODC} - S_{ODC} = \frac{942}{25} - 9\sqrt{3}cm^2$$

4) Gọi E là giao đường thẳng AO và (O) (O nằm giữa A, E). Khi B di chuyển trên đường thẳng d. Chứng minh trọng tâm G của tam giác ACE thuộc một đường tròn cố định

A và O cố định nên E cố định, gọi H là trung điểm AB suy ra H cố định.

Gọi I là điểm nằm trên đoạn OH sao cho $HI = \frac{1}{2}HO \Rightarrow I$ cố định

t tam giác HOC có: $\frac{HI}{HO} = \frac{HG}{HC} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG // OC$ và $G = \frac{1}{3}OC = \frac{R}{3}$.

Mà I cố định nên G chạy trên $\left(I;\frac{R}{3}\right)$.

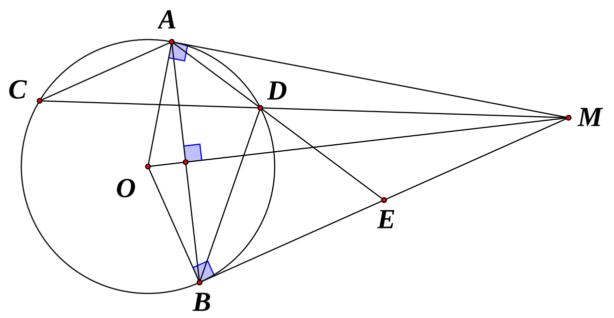
Câu 377.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho điểm M nằm bên ngoài đường tròn $(O;R)$. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn đó (A, B là hai tiếp điểm). Qua điểm A kẻ đường thẳng song song với MB cắt $(O;R)$ tại C. Nối MC cắt đường tròn $(O;R)$ tại D. Tia AD cắt MB tại E.

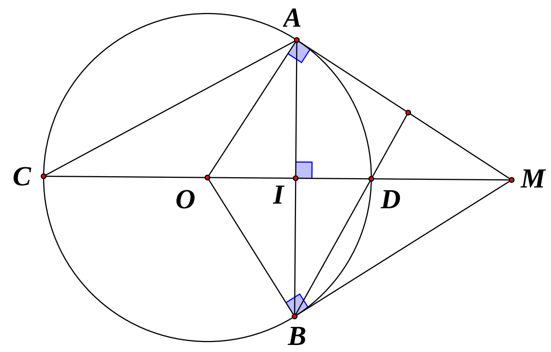
a) Chứng minh rằng $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $EM = EB$.

c) Xác định vị trí của điểm M để $BD \perp MA$.

Hướng dẫn





a) Ta có: $MAO = MBO = 90°$ (gt) suy ra $MAO + MBO = 180°$

mà đây là hai góc đối nhau của tứ giác $MAOB$ nên tứ giác $MAOB$ nội tiếp.

b) Xét tam giác EMD và EAM có: Góc E chung, $EMD = EAM$ (cùng bằng góc DCA)

nên $\Delta EMD \backsim \Delta EAM\,(g.g) \Rightarrow \frac{EM}{EA} = \frac{ED}{EM} \Rightarrow EM^2 = ED.EA$ (1)

Xét tam giác EBD và EAB có: Góc E chung, góc $EBD = EAB\left(= \frac{1}{2} sđBD\right)$

nên $\Delta EBD \backsim \Delta EAB\,(g.g) \Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow EB^2 = ED.EA$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $EB = EM$. Vậy E là trung điểm BM.

c) Khi BG vuông góc MA thì:

$MAB + DBA = 90° \Leftrightarrow MAD + DAB + DBA = 90° \Leftrightarrow DMB + DBM + DBA = 90°$ nên MD vuông góc AB

mà $AM = MB$ nên MC trùng với MO.

Khi đó $AOBD$ là hình thoi nên $OI = \dfrac{R}{2}$.

Trong tam giác vuông AOM có AI là đường cao nên:

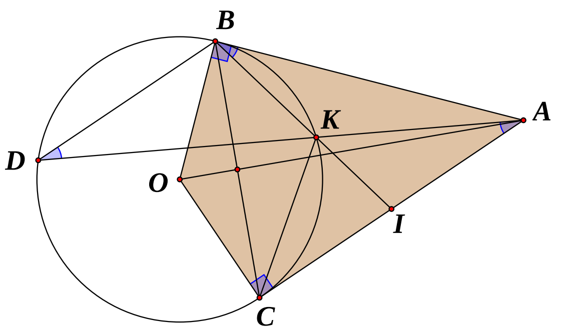
$$OA^2 = OI.OM \Rightarrow R^2 = \frac{R}{2}.MO \Rightarrow OM = 2R$$

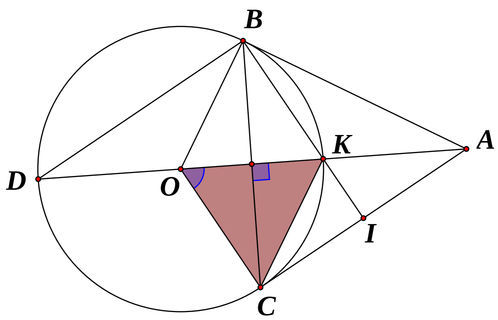
Vậy quỹ tích điểm M nằm trên $(O;2R)$.

Câu 378.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Từ điểm A bên ngoài đường tròn, ke 2 tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Từ điểm B, kẻ đường thẳng song song với AC, cắt đường tròn tại D (D khác B). Nối AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Nối BK cắt AC tại I.

1. Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh rằng $IC^2 = IK.IB$
3. Cho $BAC = 60°$. Chứng minh ba điểm A, O, D thẳng hàng.

Hướng dẫn





1) Vì AB và AC là tiếp tuyến của (O) nên $ABO = ACO = 90°$

Xét tứ giác $ABOC$ có: $ABO + ACO = 180°$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

2) Ta có: $IAD = KDB$ (sole trong) mà $KDB = KBA\left(= \dfrac{1}{2} sđBK\right)$ nên $IAK = KBA$

Xét tam giác IAK và IBA có: Góc I chung, $IAK = KBA$ nên $\Delta IAK \backsim \Delta IBA(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{IK}{IA} \Rightarrow IA^2 = IB.IK \quad (dpcm)$$

3) Vì $ABOC$ nội tiếp mà $\hat{A} = 60° \Rightarrow BOC = 120° \Rightarrow AOC = 60° \Rightarrow BCA = 60°$

$\Rightarrow DBC = 60°$ (sole trong) nên $DOC = 120°$ (góc ở tâm – góc nội tiếp).

Suy ra $AOC + COD = 180°$ nên A, O, D thẳng hàng.

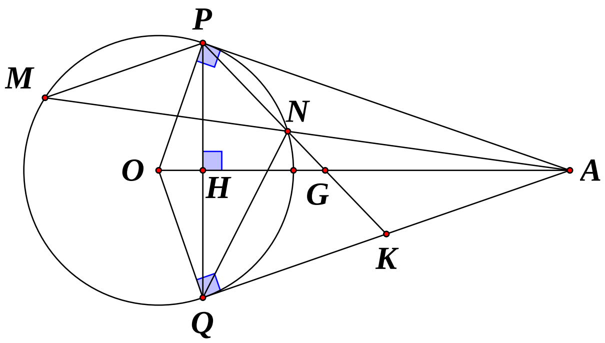
Câu 379.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn tâm O bán kính R. Điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 3R$. Từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AP và AQ với đường tròn (O) (P, Q là hai tiếp điểm). Từ điểm P kẻ đường thẳng song song với AQ, cắt đường tròn (O) tại M (M khác P).

Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và đường tròn (O). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

a) Chứng minh tứ giác $APOQ$ là tứ giác nội tiếp; b) Chứng minh $KA^2 = KN.KP$

c) Gọi G là giao điểm của hai đường thẳng AO và PK. Tính độ dài đoạn thẳng AG theo R.

Hướng dẫn



a) Vì AP và AQ là hai tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{APO} = \widehat{AQO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{APO} + \widehat{AQO} = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối của tứ giác $APOQ$ nên $APOQ$ nội tiếp đường tròn.

b) Ta có: $\widehat{NAK} = \widehat{NMP}$ (sole trong) mà $\widehat{NMP} = \widehat{NPA}\left(=\frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{PN}\right)$

nên $\widehat{NPA} = \widehat{NAK}$

Xét tam giác KAN và tam giác KPA có: Góc K chung; $\widehat{KAN} = \widehat{KPA}$

nên $\Delta KAN \backsim \Delta KPA (g.g) \Rightarrow \frac{KA}{KN} = \frac{KP}{KA} \Rightarrow KA^2 = KN.KP$

c) Tương tự các em chứng minh $\Delta KNQ \backsim \Delta KQP (g.g) \Rightarrow KQ^2 = KN.KP$

Suy ra $KQ = KA$ nên K là trung điểm QA.

Vì $OP = OQ$ nên O nằm trên trung trực PQ. Vì $AP = AQ$ nên A nằm trên trung trực PQ, suy ra OA là trung trực PQ nên G là trọng tâm của tam giác APQ.

Xét tam giác vuông APO có PH là đường cao nên

$$OP^2 = OH.OA \Rightarrow OH = \frac{R}{3} \Rightarrow AH = 3R - \frac{R}{3} = \frac{8R}{3}$$

Suy ra $AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}.\frac{8R}{3} = \frac{16R}{9}$

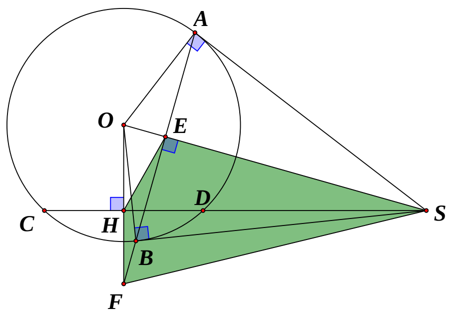
Câu 380.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ và dây CD cố định. Gọi H là trung điểm CD. Gọi S là một điểm trên tia đối của tia DC qua S kẻ hai tiếp tuyến SA, SB tới (O). Đường thẳng AB cắt SO, OH tại E và F, cho $R = 10cm$; $SD = 4cm$; $OH = 6cm$. CM :

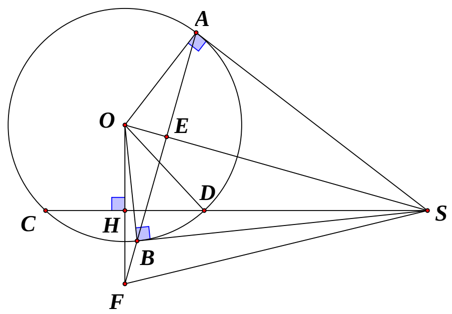
a) Tứ giác $SEHF$ nội tiếp b) Tích OE.OS không phụ thuộc vào vị trí điểm S

c) Tính CD và SA

d) Khi S di chuyển trên tia đối của DC thì AB luôn đi qua một điểm cố định

Hướng dẫn





a) Vì H là trung điểm DC nên $SHF = 90^0$. OS là trung trực AB nên $SEF = 90^0$

Xét tứ giác $SEHF$ có : $SEF = SHF = 90^0$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh SF nên $SEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) $OE.OS = AO^2 = R^2$.

c) Ta có : $OD = R = 10cm$; Pytago trong ΔDCH tính được $DH = 8cm$, suy ra $DC = 2DH = 16cm$.

Ta có : $SH = SD + DH = 12cm$; Pytago cho ΔSOH tính được $SO^2 = 180\ cm^2$.

Pytago cho tam giác SAO tính được $SA = 4\sqrt{5}cm$

d) Vì DC cố định nên H cố định hay OH không đổi.

$\Delta OEF \backsim \Delta OHS\left(g.g\right) \Rightarrow OH.OF = OE.OS = R^2 \Rightarrow OF = \dfrac{R^2}{OH}$ không đổi nên F cố định. Vậy AB luôn đi qua điểm F cố định.

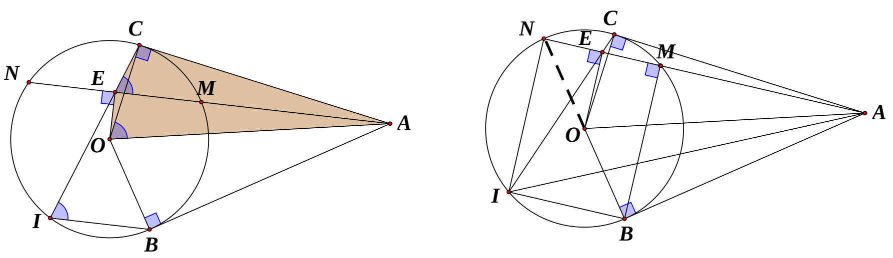
Câu 381.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với đường tròn (B, C, M, N thuộc đường tròn và $AM < AN$). Gọi E là trung điểm của dây MN, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn.

a.C/m : Bốn điểm A, O, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b. C/m : $AOC = BIC$ c.C/m : $BI // MN$

d. Xác định vị trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

Hướng dẫn



a) Vì E là trung điểm MN nên $OEA = 90°$; Ta có: $OEA = OCA = 90°$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh OA nên tứ giác $ACEO$ nội tiếp. Vậy A, O, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Vì A là giao của hai tiếp tuyến AC và AB nên $AOB = AOC = \frac{1}{2} sđBC$, mà $BIC = \frac{1}{2} sđBC$ (góc nt)

nên $AOC = BIC$ (đpcm)

c) Theo b ta có $AOC = AEC$ (góc nt chắn cung AC) suy ra $AEC = BIC$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $NM // BI$.

d) Vì $BI // NM$ nên $S_{AIN} = S_{ABN} = \frac{1}{2} h.AB$ (với h là khoảng cách từ N đến AB)

Suy ra $S_{AINmax} \Leftrightarrow h_{max} \Rightarrow h_{max} = 2R \Leftrightarrow NB$ là đường kính.

Vậy cát tuyến AMN thỏa mãn NB là đường kính thì diện tích ΔAIN lớn nhất.

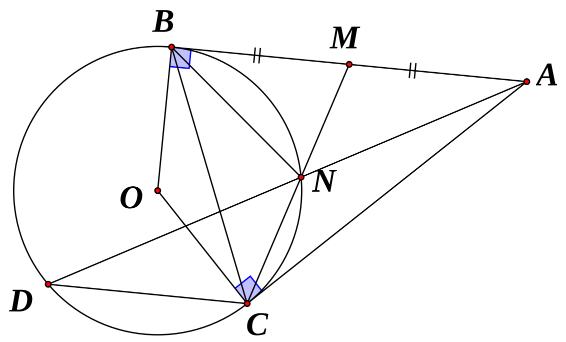
Câu 382.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho A nằm ngoài (O), từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B ,C là tiếp điểm). M là trung điểm AB, MC cắt (O) tại N .

a) Chứng minh $ABOC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $MB^2 = MN.MC$

c) Tia AN cắt (O) tại D . Chứng minh $MAN = ADC$

Hướng dẫn



a) Ta có: $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90°$ (tc tiếp tuyến).

Xét tứ giác $ABOC$ có: $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180°$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Xét tam giác MBN và tam giác MCB có: Góc M chung, góc $\widehat{MBN} = \widehat{MCB}\left(=\frac{1}{2}sđBN\right)$

nên $\Delta MBN \backsim \Delta MCB(g.g) \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{MN}{MB} \Rightarrow MB^2 = MC.MN$ (đpcm)

c) Theo b ta có: $MB^2 = MC.MN \Rightarrow MA^2 = MC.MN \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MN}{MA}$

Xét ΔMAN và ΔMCA có M chung; $\frac{MA}{MC} = \frac{MN}{MA}$

$\Rightarrow \Delta MAN \backsim \Delta MCA(c.g.c) \Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{MCA}$ (2 góc tương ứng)

mà $\widehat{MCA} = \widehat{ADC}\left(=\frac{1}{2}sđNC\right)$ nên $\widehat{ADC} = \widehat{MAN}$

Câu 383.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE tới đường tròn(B, C là hai tiếp điểm, D nằm giữa A và E). Gọi H là giao điểm của AO và BC.

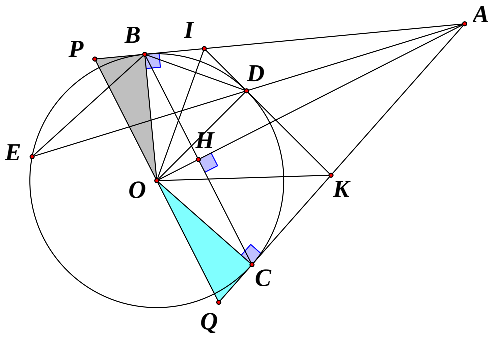
a) CMR: $ABOC$ là tứ giác nội tiếp

b) CMR: $AH.AO = AD.AE$

c) Tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) cắt AB, AC theo thứ tự tại I và K. Qua điểm O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt tia AB tại P và cắt tia AC tại Q. CMR: $IP + KQ \geq PQ$

d) Giả sử A và (O) cố định. Chứng minh chu vi của tam giác AIK không phụ thuộc vào vị trí điểm D. Nếu chu vi tam giác AIK là $20cm$ thì độ dài AB là bao nhiêu.

Hướng dẫn



a) Ta có: $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90°$ (tính chất tiếp tuyến)

Xét tứ giác $ABOC$ có: $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180°$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Tam giác ABO vuông tại B có đường cao BH nên áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $OA.AH = AB^2$ (1)

Xét tam giác ABD và AEB có: Góc A chung, góc $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}\left(=\frac{1}{2}sđBD\right)$

nên $\Delta ABD \backsim \Delta AEB(g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD.AE = AB^2$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $AO.AH = AD.AE$ (đpcm)

c) Ta có:

$IP + KQ \geq 2\sqrt{IP.KQ}$

Tam giác APQ cân tại A (vì AO là trung trực PQ) nên $OP = OQ$.

Để chứng minh $IP + KQ \geq PQ$ ta chứng minh $IP.KQ = OP^2$

Ta có: $\Delta BPO = \Delta CQO(ch.gn) \Rightarrow \widehat{BOP} = \widehat{COQ}$

Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$$\widehat{BOI} = \widehat{DOI}; \widehat{BOK} = \widehat{COK} \Rightarrow \widehat{BOP} + \widehat{BOI} + \widehat{DOK} = \widehat{IOD} + \widehat{KOQ} = 90°$$

hay $\widehat{POI} + \widehat{DOK} = 90°$ mà $\widehat{OKD} + \widehat{DOK} = 90° \Rightarrow \widehat{OKD} = \widehat{POI} \Rightarrow \widehat{POI} = \widehat{OKC}$

Xét ΔPOI và ΔQKO có : $\hat{P} = \hat{Q}; \widehat{POI} = \widehat{QKO} \Rightarrow \Delta POI \backsim \Delta QKO(g.g)$

$\Rightarrow \frac{PO}{QK} = \frac{PI}{OQ} \Rightarrow IP.KQ = OP^2$ mà $IP + KQ \geq 2\sqrt{IP.KQ} = 2OP = PQ.$

d) Các em chỉ ra chu vi bằng: $AI + ID + DK + KA = (AI + IB) + (CK + KA) = AB + AC = 2AB$.

Vì (O) và A cố định nên AB cố định, suy ra chu vi tam giác AIK không phụ thuộc vào D.

Chu vi bằng 20cm các em lập luận tính được $AB = 10cm$

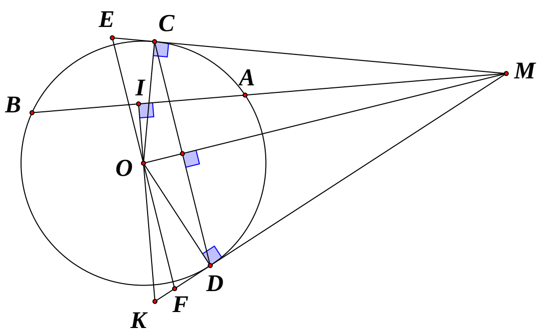
Câu 384.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ và đường thẳng d không đi qua tâm cắt (O) tại hai điểm A và B. Trên d lấy M sao cho A nằm giữa M và B. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MC. MD với (O) (C, D là các tiếp điểm).

a) Chứng minh $MCOD$ nội tiếp.

b) I là trung điểm AB, OI cắt MD tại K. Chứng minh $KD.KM = KO.KI$

c) Đường thẳng đi qua O song song CD cắt MC, MD tại E và F. Xác định vị trí M trên d sao cho diện tích tam giác MEF đạt $GTNN$.

Hướng dẫn



a) Ta có: $MOC = MDC = 90°$ (vì MC và MD là tiếp tuyến (O).

Xét tứ giác $MCOD$ có: $MCO + MDO = 180°$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $MCOD$ nội tiếp.

b) Vì O là trung điểm AB nên OI vuông góc AB (tính chất đường kính – dây cung)

Xét tam giác KDO và KIM có: Góc K chung, $KDO = KIM = 90°$

nên $\Delta KDO \backsim \Delta KIM\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{KD}{KO} = \dfrac{KI}{KM} \Rightarrow KD.KM = KO.KI$ $(dpcm)$

c) Ta có: OM là trung trực của CD mà EF//CD nên OM là trung trực EF.

$$\Rightarrow S_{MEF} = 2S_{MOF} = OD.MF = R\left(MD + DF\right) \geq R.2\sqrt{MD.DF} = R.2\sqrt{OD^2} = 2R^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $MD = DF = R$ mà $MA.MB = MD^2 = R^2$

Vậy M nằm trên d sao cho $MA.MB = R^2$ thì diện tích tam giác MEF nhỏ nhất.

Câu 385.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O. Vẽ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm), vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D). OM cắt AB và O lần lượt tại H và I. Chứng minh.

a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp.

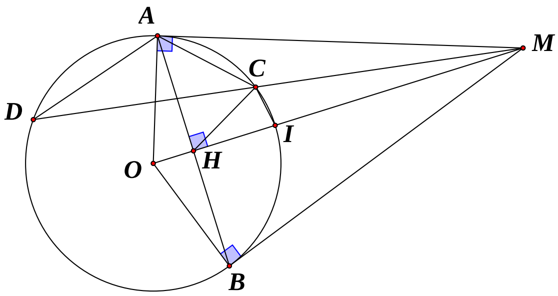
b) $MC.MD = MA^2$.

c) $OH.OM + MC.MD = MO^2$.

d) Chứng minh $DCHO$ nội tiếp.

e) CI là tia phân giác góc MCH.

Hướng dẫn



a) Ta có: $MAO = MBO = 90^\circ$ (t/c tiếp tuyến) $\Rightarrow MAO + MBO = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối của tứ giác $MAOB$ nên tứ giác $MAOB$ nội tiếp.

b) Ta có: $MAC = MDA\left(=\frac{1}{2}sđAC\right)$

Xét ΔMAC và ΔMDA có: $MAC = MDA$; góc M chung nên $\Delta MAC \backsim \Delta MDA(g.g)$

$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MC.MD = MA^2$

c) $OA = OB$ nên O nằm trên đường trung trực AB, $MA = MB$ nên M nằm trên đường trung trực AB, suy ra MO là trung trực AB nên OH vuông góc AH.

Tam giác MAO vuông tại A có AH là đường cao nên $OH.OM = OA^2$

$\Rightarrow OH.OM + MC.MD = OA^2 + MA^2 = OM^2\,(đpcm)$

d, Từ $MH.OM = MA^2$, $MC.MD = MA^2$ suy ra $MH.OM = MC.MD \Rightarrow \frac{MH}{MD} = \frac{MC}{MO}$ (*)

Trong ΔMHC và ΔMDO có $\frac{MH}{MD} = \frac{MC}{MO}$ và DMO chung nên $\Delta MHC \backsim \Delta MDO(c.g.c)$

$\Rightarrow MHC = MDO \Rightarrow$ Tứ giác $DCHO$ nội tiếp.

e) Theo d ta có:

$\Rightarrow \frac{MC}{CH} = \frac{MO}{OD} = \frac{MO}{OA}$ (1)

Ta lại có $MAI = IAH$ (góc nt cùng chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow$ AI là phân giác của góc MAH.

Theo t/c đường phân giác của tam giác, ta có: $\frac{MI}{IH} = \frac{MA}{AH}$ (2)

ΔMHA và ΔMAO có góc OMA chung và $MHA = MAO = 90^\circ$ nên $\Delta MHA \backsim \Delta MAO$ (g.g)

$\frac{MO}{OA} = \frac{MA}{MH} = \frac{MI}{IH}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{MC}{CH} = \frac{MI}{IH}$ suy ra CI là tia phân giác của góc MCH (đpcm)

Câu 386.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$. M tùy ý nằm ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến MB, MC với đường tròn, kẻ đường kính AB của đường tròn.

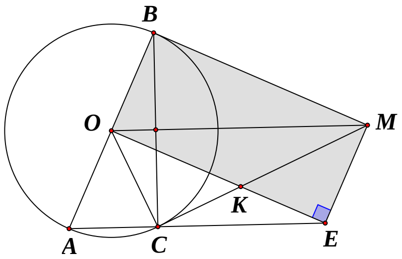
a) Chứng minh $AC//OM$

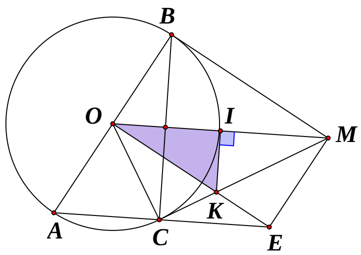
b) Kẻ đường thẳng qua O vuông góc AB cắt MC và AC tại K và E. Chứng minh $\Delta MOB = \Delta EAO$

c) Chứng minh độ dài ME không đổi

d) Khi M chuyển động trên $(O;2R)$ thì K chuyển động trên đường nào?

Hướng dẫn





a) Cùng vuông góc với BC.

b) Xét hai tam giác vuông ΔMOB và ΔEAO có $OA = OB$; $EAO = MOB$ (đồng vị)

Suy ra $\Delta MOB = \Delta EAO$ $(cgv - gnk)$

c) Theo b suy ra $OE = BM$ suy ra $BMEO$ là hình chữ nhật nên $ME = OB = R$ không đổi.

d) Ta có: $\mathrm{OM}//\mathrm{CE}$ (cmt) nên $OMEC$ là hình thang, mà $OE = BM$; $CM = BM$ nên $OE = CM$

Suy ra $OMEC$ là hình thang cân, suy ra K nằm trên trung trực OM.

Vì $OM = 2R$; $OB = R$ nên $MB = OE = R\sqrt{3}$

Gọi I là trung điểm OM, Tam giác OIK đồng dạng OEM nên:

$$\frac{OK}{OM} = \frac{OI}{OE} \Rightarrow OK = \frac{R.2R}{R\sqrt{3}} = \frac{2RR\sqrt{3}}{3}$$

Vậy K nằm trên đường tròn $\left(O;\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 387.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) và điểm A nằm ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM và AN. Đường thẳng d đi qua A cắt (O) tại B và C ($AB < AC$, d không qua tâm).

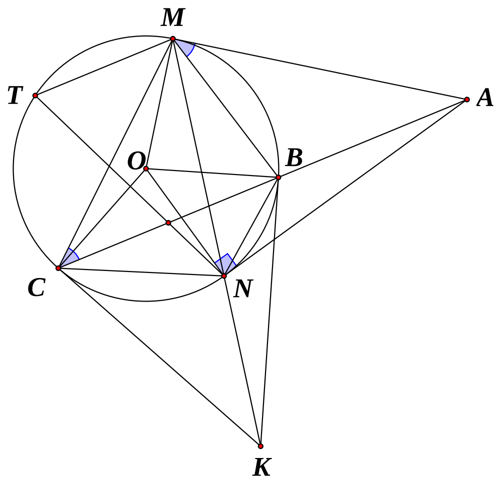
a) $AMON$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính BC cho $AB = 4cm, AN = 6cm$.

c) Gọi I là trung điểm BC, NI cắt (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh $MT//AC$.

d) Hai tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại K. Chứng minh K thuộc đường thẳng cố định.

Hướng dẫn



a) Có hai góc đối bằng 90°.

b) Tam giác ABN đồng dạng ANC (g.g). Thay số vào tính AC rồi suy ra BC.

c) $AOIN$ nội tiếp nên $AIN = AON$ mà $AON = MTN$ nên $AIN = MTN$

d) $\Delta KCO \backsim \Delta CIO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OC}{IO} = \dfrac{OK}{OC} \Rightarrow OC^2 = OI.OK$.

$$OI.OK = ON^2 \Rightarrow \frac{OI}{ON} = \frac{ON}{OK} \Rightarrow \Delta NKO \backsim \Delta INO \Rightarrow NKO = INO$$

$$OI.OK = OC^2 \Rightarrow OI.OK = OM^2 \Rightarrow \frac{OI}{OM} = \frac{OM}{OK} \Rightarrow \Delta MKO \backsim \Delta IMO \Rightarrow MKO = IMO$$

mà $IMO = INO$ nên $MKO = NKO$

suy ra K, M, N thẳng hàng $\Rightarrow K$ luôn nằm trên đường thẳng MN khi d thay đổi.

Câu 388.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với (O) (D nằm giữa A và E). Phân giác góc DBE cắt ED tại I.

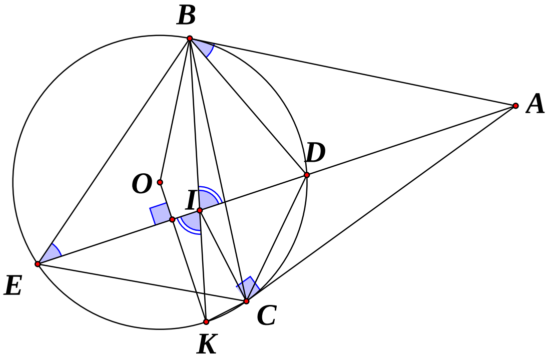
Chứng minh:

a) $\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{CD}{CE}$

b) Chứng minh $AI = AB = AC$.

c) Chứng minh CI là phân giác góc DCE.

Hướng dẫn



a) Ta có: $AEB = ABD\left(=\dfrac{1}{2}sdBD\right) \Rightarrow \Delta AEB \backsim \Delta ABD(g.g) \Rightarrow \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{AB}{AE}$ (1)

Tương tự: $\Rightarrow \Delta AEC \backsim \Delta ACD(g.g) \Rightarrow \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{AC}{AE}$ (2)

Từ (1) va (2) kết hợp với $AB = AC$ nên $\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{CD}{CE}$

b) Gọi IB cắt (O) tại K. Vì BK là phân giác góc EBD nên cung $EK = cung\ \ KD$.

Ta có: $BIA = EIK = \dfrac{1}{2}(sdEK + sdBD) = \dfrac{1}{2}(sdKD + BD) = \dfrac{1}{2}sdKB = IBA$ nên tam giác ABI cân tại A, suy ra $AI = AB$ mà $AB = AC$ (tc tiếp tuyến) nên $AC = AB = AI$.

c) Vì $\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{ID}{IE}$ (tính chất phân giác) nên $\Rightarrow \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{ID}{IE}$ $\Rightarrow$ IC là phân giác góc ACE.

Câu 389.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) và điểm M nằm ngoài (O), kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến $(MN < MP)$, gọi K là trung điểm NP.

1) Chứng minh M, A, K, O, B cùng thuộc đường tròn.

2) KM là phân giác AKB.

3) Gọi Q là giao điểm thứ 2 của BK với (O), chứng minh $QA//NP$.

4) Gọi H là giao điểm AB và MO, Chứng minh $MA^2 = MH.MO = MN.MP$.

5) Chứng minh 4 điểm N, H, O, P cùng thuộc đường tròn.

6) E là giao AB và KO, chứng minh $AB^2 = 4HE.HF$ (F là giao AB và NP)

7) Chứng minh $KEMH$ nội tiếp từ đó suy ra $OK.OE$ không đổi.

8) Gọi I là giao MO với (O). chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMAB.

9) Tìm vị trí NMP để tam giác MQP có diện tích lớn nhất.

10) Chứng minh KF và KE lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc AKB. Từ đó suy ra $AE.BF = AF.BE$.

11) Chứng minh khi cát tuyến MNP thay đổi thì trọng tâm G của tam giác NAP luôn chạy trên một đường tròn cố định.

12) Qua N kẻ đường thẳng song song MB cắt AB và PB tại X và Y. Chứng minh X là trung điểm NY.

13) Giả sử $MO = 2R$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi bán kính OA, OB và cung nhỏ BA.

14) Phân giác góc NAP cắt NP tại J. Chứng minh:

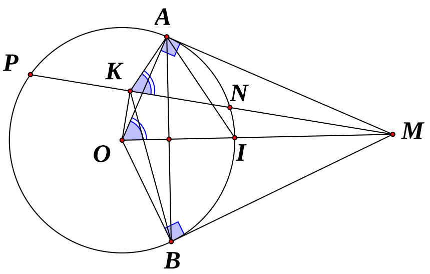
+ $\dfrac{AN}{AP} = \dfrac{BN}{BP}$ + $MA = MB = MJ$ + BJ là phân giác góc NBP.

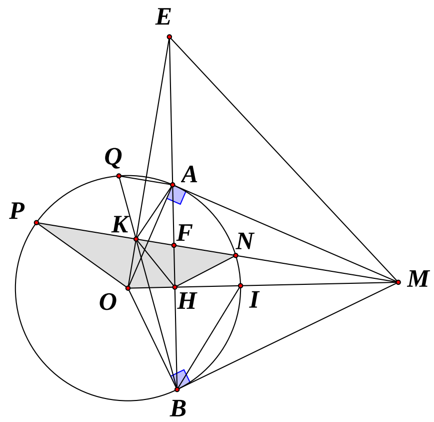
15) Từ A kẻ đường thẳng song song MO cắt (O) tại L. LM cắt (O) tại Z, AZ cắt OM tại U.

Chứng minh:

a) $MU^2 = UZ.UA$ và $UM = HU$ b) Chứng minh: $\dfrac{HB^2}{HZ^2} - \dfrac{LZ}{ZM} = 1$

Hướng dẫn





1) OK vuông NP (tc đường kính – dây cung) suy ra góc $MAO = MBO = MKO = 90°$.

Nội tiếp đường tròn đường kính OM.

2) $AKM = AOM$ (vì $AKOM$ nội tiếp) ; $MKB = MOB$ ($MKOB$ nội tiếp)

mà $KOA = KOB$ (hai tiếp tuyến cắt nhau) nên $KAM = MKB$

Cách khác: Vì tứ giác $AKBM$ nội tiếp mà $AM = MB$ (tc 2tt cắt nhau) nên cung $AM = cung\ MB$

Suy ra $KAM = MKB$ (góc nt chắn hai cung bằng nhau).

3) góc $AQK = \dfrac{1}{2} sđ\, AB = MOB = MKB$ nên $AQK = QKP$.

4) Trong tam giác vuông MAO có AH là đường cao suy ra $MA^2 = MH.MO$.

Trong tam giác MAN và MPA có góc M chung, góc $MAN = MPA$ ($= \dfrac{1}{2}$sđAN) nên tam giác MAN

đồng dạng MPA suy ra $MA^2 = MN.MP$.

5) Theo câu d suy ra $MH.MO = MN.MP$. Xét tam giác MHP và MNO có:

$MH.MO = MN.MP$ và góc M chung $\Rightarrow \Delta MHP \backsim \Delta MNO(c.g.c)$

$\Rightarrow MPH = MON \Rightarrow$ Tứ giác $NPOH$ nội tiếp nên 4 điểm N, H, O, P cùng thuộc đường tròn.

6) Ta có: $MH.HO = AH^2 = \frac{AB^2}{4}$ mà $MH.HO = HE.HF$ nên $HE.HF = \frac{AB^2}{4}$

7) Ta có: $EKM = EHM = 90^0 \Rightarrow OE.OK = OH.OM = R^2$

8) Xem các câu khác.

9) Tìm vị trí NMP để tam giác MQP có diện tích lớn nhất.

Vì QA//PM nên $S_{MQP} = S_{MAP} = \frac{1}{2}h.AM$ (h là khoảng cách từ P đến AM)

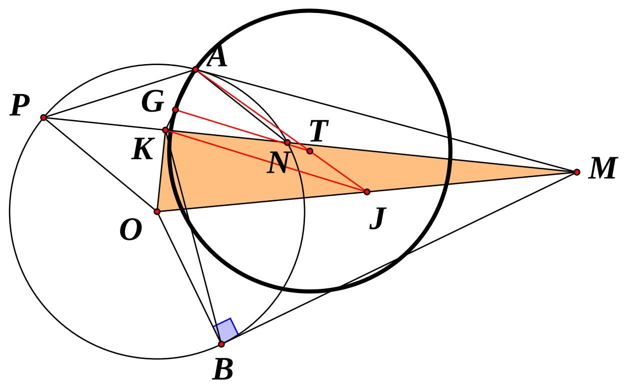
Suy ra $S_{MQPmax} \Leftrightarrow h_{max} \Rightarrow AP$ là đường kính của (O). Vậy MNP thỏa mãn AP là đường kính của (O) thì diện tích tam giác MQP lớn nhất.

10) Chứng minh KF và KE lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc AKB. Từ đó suy ra $AE.BF = AF.BE$

Chứng minh trên ta có: KF là phân giác trong góc AKB là KE vuông góc KF nên KE là phân giác ngoài góc AKB.

$\Rightarrow \frac{FA}{FB} = \frac{EA}{EB} \Rightarrow FA.EB = FB.EA$ (tính chất phân giác trong – phân giác ngoài)

11) Chứng minh khi cát tuyến MNP thay đổi thì trọng tâm G của tam giác NAP luôn chạy trên một đường tròn cố định.



Ta có: O, M, A, B cố định. Gọi J là trung điểm OM suy ra J cố định.

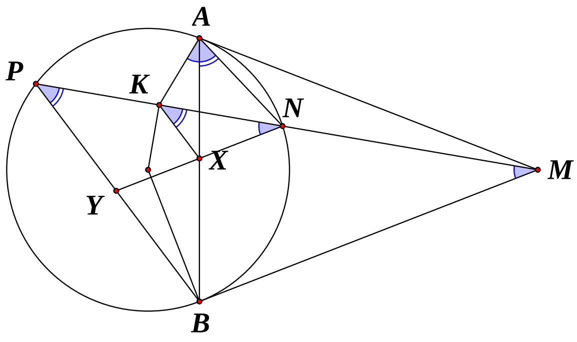
Gọi T là điểm trên AJ sao cho $AT = \frac{2}{3}AJ \Rightarrow T$ cố định.

G là trọng tâm tam giác APN nên $GA = \frac{2}{3}AK \Rightarrow GT // KJ$ và $GT = \frac{2}{3}KJ$

Tam giác MOK vuông nên $KJ = \frac{1}{2}OM$ không đổi suy ra $GT = \frac{1}{3}OM$

Vậy G nằm trên đường tròn tâm $\left(T; \frac{1}{3}OM\right)$

12)



Nối KX , Ta có: 5 điểm A, K, O, B, M cùng thuộc một đường tròn nên góc $KAB = KMB$ (góc nt cùng chắn cung KB)

mà $KMB = KNX$ (đồng vị) nên $KAX = KNX$ suy ra tứ giác $AKXN$ nội tiếp nên

$XKN = XAN$ mà $XAN = BPN$ (góc nt chắn cung NB) nên $BPN = XKN$

suy ra $\mathrm{KX}//\mathrm{PY}$ mà K là trung điểm PY nên X là trung điểm YN.

13) Giả sử $MO = 2R$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi bán kính OA, OB và cung nhỏ BA.

$$AOB = 120°; S = \frac{\pi R^2}{3}; l = \frac{2\pi r}{3}$$

14)

+ Chỉ ra $\frac{AN}{AP} = \frac{MA}{PM}; \frac{BN}{BP} = \frac{MB}{PM}$ mà $MA = MB$ nên $\frac{AN}{AP} = \frac{BN}{BP}$

+ $MA = MB$ (tc 2 tiếp tuyến cắt nhau). Gọi Z là giao AJ với (O).

Ta có: $NJA = \frac{1}{2}(sdPZ + sdAN) = \frac{1}{2}(sdZN + sdAN) = \frac{1}{2}sdZA = JAM$ (các em chú ý AJ là phân giác nên cung $PZ = cung\ ZN$) suy ra tam giác AMJ cân tại M nên $AM = MJ$.

Vậy $AM = BM = JM$.

+ Theo tính chất phân giác ta có: $\frac{PJ}{JN} = \frac{AP}{AN} = \frac{PB}{BN}$ nên BJ là phân giác góc NBP

Câu 390.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Qua A kẻ đường thẳng song song MO cắt (O) tại E. ME cắt (O) tại F. AF cắt MO tại N, H là giao điểm MO và AB.

a) Chứng minh $MAOB$ nội tiếp.

b) $NM^2 = NF.NA$ và $NM = NH$.

c) Chứng minh $\frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} = 1$

Hướng dẫn

a) $\mathrm{MAO} = \mathrm{MBO} = 90° \Rightarrow \mathrm{MAO} + \mathrm{MBO} = 180°$. Mà hai góc đối nhau nên tứ giác $MAOB$ nội tiếp

b) Chỉ ra $\Delta MNF \backsim \Delta ANM\left(g.g\right)$ suy ra $MN^2 = NF.NA$

Chỉ ra $\Delta NFH \backsim \Delta AFH\left(g.g\right)$ suy ra $NH^2 = NF.NA$

Vậy $MN^2 = NH^2$ suy ra $MN = NH$

Có $MA = MB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) và $OA = OB = R$

$\Rightarrow MO$ là đường trung trực của AB

$\Rightarrow AH \perp MO$ và $HA = HB$

ΔMAF và ΔMEA có: AME chung, $MAF = AEF$

$\Rightarrow \Delta$MAF $\backsim$ ΔMEA (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{ME} = \dfrac{MF}{MA} \Rightarrow MA^2 = MF.ME$

Áp dụng hệ thức lượng vào Δ vuông MAO, có: $MA^2 = MH$ .MO

Do đó: $ME.MF = MH.MO \Rightarrow \dfrac{ME}{MH} = \dfrac{MO}{MF}$

$\Rightarrow \Delta$MFH $\backsim$ ΔMOE (c.g.c) $\Rightarrow MHF = MEO$

Vì BAE là góc vuông nội tiếp (O) nên E, O, B thẳng hàng

$\Rightarrow FEB = FAB\left(= \dfrac{1}{2} sđEB\right)$

$\Rightarrow MHF = FAB \Rightarrow ANH + NHF = ANH + FAB = 90°$

Nên HF vuông góc NA.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông NHA, có: $NH^2 = NF\,.\,NA$

$\Rightarrow NM^2 = NH^2 \Rightarrow NM = NH$.

c) Chứng minh: $\dfrac{HB^2}{HF^2} - \dfrac{EF}{MF} = 1$.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông NHA, có: $HA^2 = FA$.NA và $HF^2 = FA$.FN. Mà $HA = HB$

$\Rightarrow \dfrac{HB^2}{HF^2} = \dfrac{HA^2}{HF^2} = \dfrac{FA.NA}{FA.FN} = \dfrac{NA}{NF}$

$\Rightarrow$ $HB2 = AF$. AN (vì $HA = HB$)

Vì AE // MN nên $\dfrac{EF}{MF} = \dfrac{FA}{NF}$ (hệ quả của định lí Ta-lét)

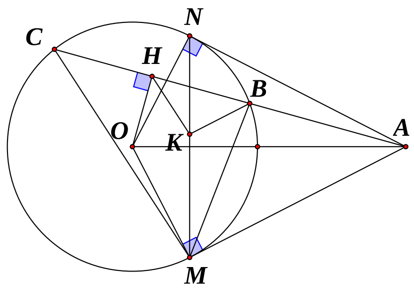
$\Rightarrow \dfrac{HB^2}{HF^2} - \dfrac{EF}{MF} = \dfrac{NA}{NF} - \dfrac{FA}{NF} = \dfrac{NF}{NF} = 1$

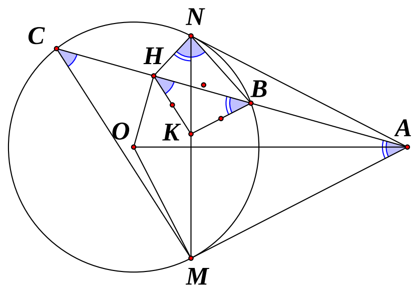
Câu 391.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho $(O;R)$ điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN và cát tuyến ABC đến (O) (M và O nằm cùng phía với cát tuyến ABC). Gọi H là trung điểm BC.

a) Chứng minh $AM^2 = AB.AC$ b) Chứng minh tứ giác $AMON$ và $ANHO$ là các tứ giác nội tiếp.

c) Qua H kẻ đường thẳng song song MC cắt MN tại K. Chứng minh BK // AM.

Hướng dẫn





a) Góc $ACM = AMB\left(=\frac{1}{2}sđBM\right) \Rightarrow \Delta AMB \backsim \Delta ACM \Rightarrow AM^2 = AB.AC$

b) Các em tự cm

c) $BHK = BCM = BNM$ nên tứ giác $BNHK$ nội tiếp suy ra $HNK = HBK$

Mặt khác 5 điểm A, N, H, O, M cùng thuộc một đường tròn (câu a) nên $HNK = HAM$ (góc nt cùng chắn cung HM) suy ra $HBK = HAM$ suy ra $KB//AM$.

Câu 392.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho tam giác ABC cân tại A, $A < 90°$. , một cung tròn BC nằm trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB, AC tại B và C. Trên cung BC lấy một điểm M rồi hạ đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, CA, BA. Gọi P là giao điểm của MB, IK và Q là giao điểm của MC, IH.

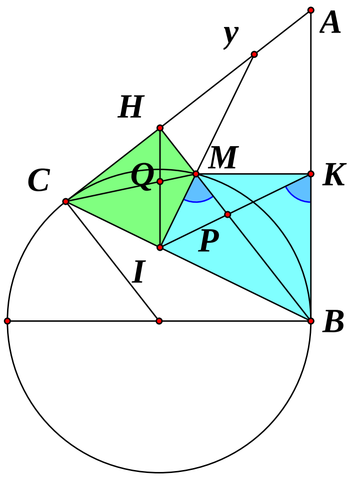
a) Chứng minh rằng các tứ giác $BIMK, CIMH$ nội tiếp được

b) Chứng minh tia đối của tia MI là phân giác của góc HMK

c) Chứng minh tứ giác $MPIQ$ nội tiếp được. Suy ra $PQ//BC$

d) Gọi (O_1) là đường tròn đi qua $M, P, K.(O_2)$ là đường tròn đi qua $M, Q, H; N$ là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2) và D là trung điểm của BC. Chứng minh M, N, D thẳng hàng.

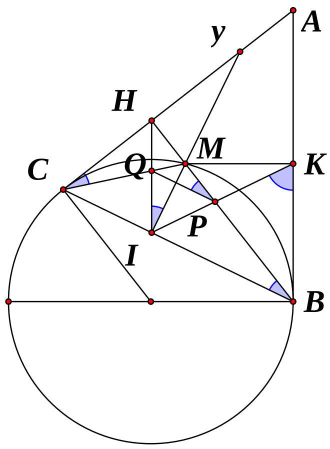
Hướng dẫn



a) Xét tứ giác $CHMI$ có: $CHM = CIM = 90^\circ\left(gt\right)$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $AHMI$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự: $BIMK$ nội tiếp.

b) Gọi tia tối tia MI là My, vì tứ giác $CHMI$ và $BIMK$ nội tiếp nên $ICH = HMy; IBK = KMy$ mà $ICH = IBK$ (Cùng chắn cung BC) nên $HMy = KMy$. Vậy My là phân giác góc HMK

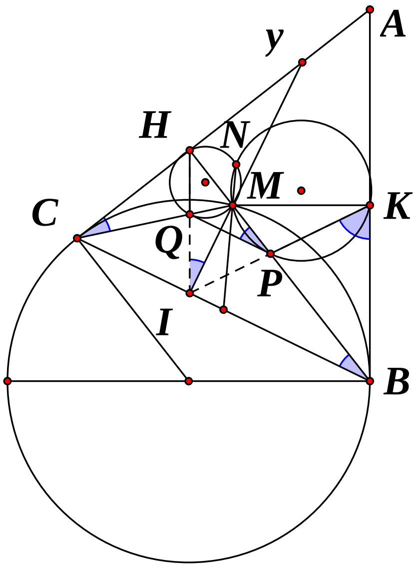


c) góc $PMQ = \frac{1}{2} sđ$ cung lớn BC,

mà $PIQ = PIM + MIQ = MBK + MCH = \frac{1}{2} sđBM + \frac{1}{2} sđMC = \frac{1}{2} sđ$ cung nhỏ BC nên

$PIQ + PMQ = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $PIQM$ nội tiếp.

Ta có: $QPM = QIM = MCH = MBC$ nên $QP // BC$.



d) Gọi E là giao điểm MN với PQ

ta có góc $MPQ = MBC = MKP$ (vì $MKBI$ nội tiếp)

$\Rightarrow EP$ là tiếp tuyến $(O1)$

$\Rightarrow \Delta EMP \sim \Delta EPN$ (g. g)

$\Rightarrow \frac{EM}{EP} = \frac{EP}{EN} \Rightarrow EP^2 = EM.EN$. Chứng minh tương tự $EQ^2 = EM.EN$

nên E là trung điểm PQ

gọi D' là giao điểm MN với BC $\Rightarrow \frac{EP}{D'B} = \frac{ME}{MD'} \Rightarrow D'B = D'C \Rightarrow D'$ trùng D $\Rightarrow$đpcm

Câu 393.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;r)$ và dây cung AB $(AB < 2r)$. Trên tia AB lấy điểm C sao cho $AC > AB$. Từ C kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn tại P, K. Gọi I là trung điểm AB.

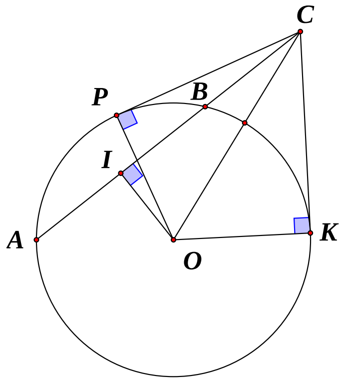
a) Chứng minh tứ giác $CPIK$ nội tiếp được trong đường tròn.

b) Chứng minh 2 tam giác ACP và PCB là đồng dạng. Từ đó suy ra: $CP^2 = CB.CA$.

c) Gọi H là trực tâm của tam giác CPK. Hãy tính PH theo r.

d) Giả sử $PA // CK$, chứng minh rằng tia đối của tia BK là tia phân giác của góc CBP

Hướng dẫn



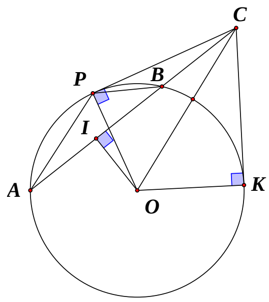
a) Vì PC và KC là tiếp tuyến của (O) nên $CPO = CKO = 90°$

mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $CPOK$ nội tiếp (1)

Vì I là trung điểm AB nên OI vuông góc AB (tc đường kính dây cung)

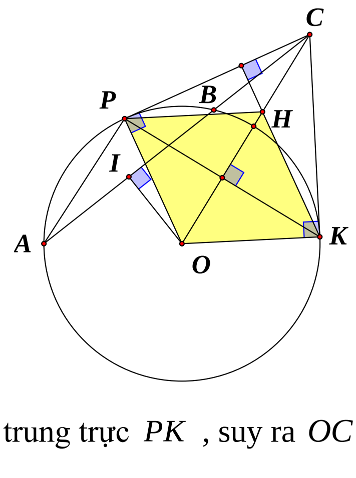
suy ra $OIC = OPC = 90° \Rightarrow$ tứ giác $OIPC$ nội tiếp (2)

Từ (1)(2) suy ra 5 điểm C, P, I, O, K cùng nằm trên một đường tròn nên C, P, I, K nội tiếp đường tròn.



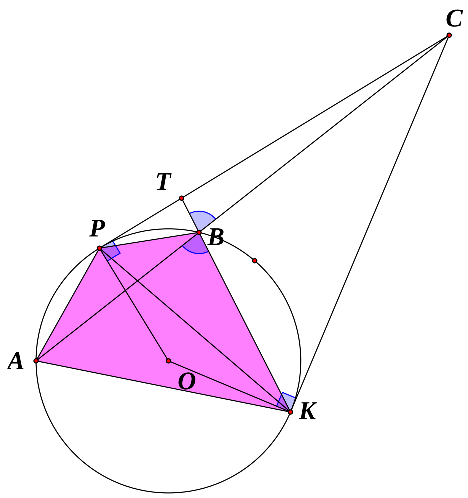
b) Xét ΔACP và ΔPCB có: góc C chung; $CAP = CPB\left(=\frac{1}{2}sđPB\right)$ nên $\Delta ACP \backsim \Delta PCB(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{CP}{CB} = \frac{AC}{PC} \Rightarrow PC^2 = AC.BC$$



c) Vì $OP = OK$; $CP = CK$ nên OC là trung trực PK , suy ra OC vuông góc PK .

Ta có: $KH//OP$ (cùng vuông góc CP); $PH//OK$ (cùng vuông CK) mà HO vuông góc PK nên tứ giác $PHKO$ là hình thoi, suy ra $PH = PO = r$.



d) Nếu $AP//KC$ thì $\Rightarrow APK = PKC \Rightarrow$ $PK = AK$, mà $TBC = ABK = \frac{1}{2}sđAK$

$PBT = PAK = \frac{1}{2}sđPK \Rightarrow PBT = TBC$ nên BT là phân giác PBC

Câu 394.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O;R), một dây CD có trung điểm là H. Trên tia đối của tia DC lấy một điểm S và qua S kẻ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng $SO; OH$ lần lượt tại E và F.

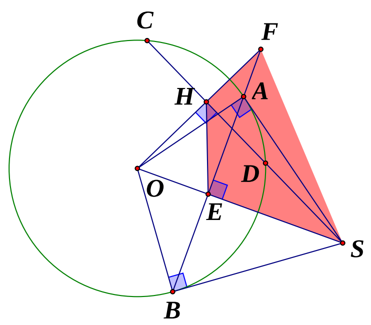
a/ Chứng minh tứ giác $SEHF$ nội tiếp.

b/Chứng minh $OE.OS = R^2$

c/ $OH.OF = OE.OS$.

d/ Khi S di động trên tia đối của tia DC hãy chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn



a) Vì H là trung điểm CD nên OH vuông góc CD, suy ra $OHS = SHF = 90°$ (1)

Vì $OA = OB = R$; $SA = SB$ (tc 2 tt cắt nhau(nên OS là đường trung trực AB, suy ra $SOF = 90°$ (2).

Từ (1)(2) suy ra tứ giác $SEHF$ nội tiếp.

b) $OE.OS = OA^2 = R^2$

c) Góc $OFE = OSH$ (cùng phụ EOF); $OHS = OEF = 90°$ nên $\Delta OEF \backsim \Delta OHS\,(g.g)$

Suy ra $\frac{OF}{OS}=\frac{OE}{OH}\Rightarrow OF.OH=OE.OS$

d) Vì CD cố định nên H cố định, suy ra OH không đổi.

Mà $OF=\frac{OE.OS}{OH}=\frac{R^2}{OH}$ không đổi nên F cố định. Vậy AB luôn đi qua điểm cố định F.

Câu 395.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O,R), vẽ tiếp tuyến MA, (A là tiếp điểm) Gọi E trung điểm AM, kẻ EI vuông góc OM tại I, AH vuông góc OM tại H. Qua M vẽ cát tuyến MBC có $MB<MC$ và tia MC nằm giữa tia MA và MO.Vẽ tiếp tuyến IK tới (O) với K là tiếp điểm. Chứng minh:

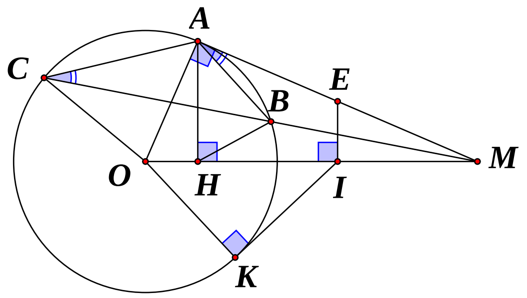
a) Chứng minh: $MA^2=MB.MC;MA^2=MH.MO$

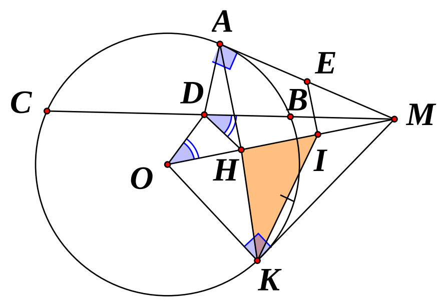
b) Chứng minh ΔMBH đồng dạng ΔMOC. Từ đó suy ra $BCOH$ nội tiếp.

c) Chứng minh góc $AHB = AHC$ và Tam giác MHK vuông tại K

d) Giả sử: $BC=3BM$, D là trung điểm MC. Chứng minh: MC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ODH

Hướng dẫn





a) $MCA=MAB\Rightarrow \Delta MAB\backsim\Delta MCA\Rightarrow MA^2=MB.MC$

Tam giác OAM vuông tại A có AH là đường cao nên $MA^2=MH.MO$

b) Từ A suy ra $MB.MC=MH.MO$, kết hợp góc C chung suy ra $\Delta MHB\backsim\Delta MCO(c.g.c)$

Suy ra $MCO=MHB\Rightarrow$ tứ giác $BCOH$ nội tiếp.

c) Tứ giác $BCOH$ nội tiếp nên $CHO=CBO=BCO=MHB$

mà $AHO=AHM=90^\circ\Rightarrow AHB=AHC$

Tam giác IKO vuông tại K nên:

$$OK^2+IK^2=OI^2=(IH+OH)^2=IH^2+OH^2+2IH.OH$$

$$=IH^2+OH^2+MH.OH=IH^2+OH^2+AH^2=IH^2+OA^2$$

Suy ra $IK=IH=IM$ nên tam giác MKH vuông tại K

d) Ta có $MA^2=MB.MC=MB.4MB$ nên $MA=2MB$.

Do $MC=4MB$ và D là trung điểm MC nên $MD=2MB$

Suy ra $MA = MD$. Ta có $MA^2 = MH.MO$ nên $MD^2 = MH.MO$ suy ra tam giác MHD đồng dạng tam giác MDO nên góc $MDH = MOD$ mà $MOH = \frac{1}{2}sdDH$ nên $MDH = \frac{1}{2}sdDH$

Vậy MD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ODH .

Câu 396.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với đường tròn(B, C, M, N thuộc đường tròn; $AM < AN$). Gọi I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn (E là trung điểm của MN).

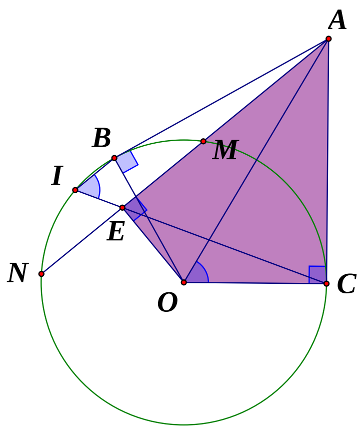
a) Chứng minh 4 điểm A, O, E, C cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh :góc $AOC = BIC$;

c) Chứng minh: $BI // MN$

d) Xác định vị trí cát tuyến AMN để diện tich tam giác AIN lớn nhất.

Hướng dẫn

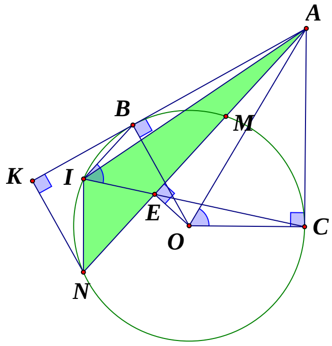


a) Vì E là trung điểm MN nên OE vuông góc AE, AC là tiếp tuyến (O) nên góc $ACO = 90°$

Xét tứ giác $AEOC$ có $OEA = OCA = 90°$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $AEOC$ nội tiếp đường tròn.

b) Góc $AOC = AOB = \frac{1}{2}sđBC; BIC = \frac{1}{2}sđBC \Rightarrow AOC = BIC$

c) tứ giác $AEOC$ nội tiếp nên $IEN = AEC = AOC$ mà $AOC = BIC \Rightarrow BIC = IEN$ mà hai góc này ở vị trí sole trong nên $BI // NM$.



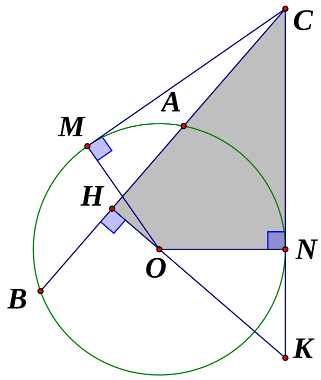
d) Gọi K là chân đường cao kẻ từ N xuống AB. Vì $BI//AN$ nên $S_{AIN}=S_{ABN}=\frac{1}{2}AB.NK$

Suy ra diện tích AIN lớn nhất khi NK lớn nhất, suy ra N,O,B thẳng hàng và $NK=2R$.

Câu 397.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn $(O;R)$, đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A,B. Từ một điểm C trên d(C nằm ngoài đường tròn), kẻ hai tiếp tuyến CM, CN tới đường tròn(M, N thuộc O). Gọi H là trung điểm của AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K.

1) C/m 4 điểm C,O,H,N thuộc một đường tròn
2) C/m: $KN.KC=KH.KO$
3) Đoạn thẳng CO cắt (O) tại I, chứng minh I cách đều CM, CN, MN.
4) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của điểm C trên d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.

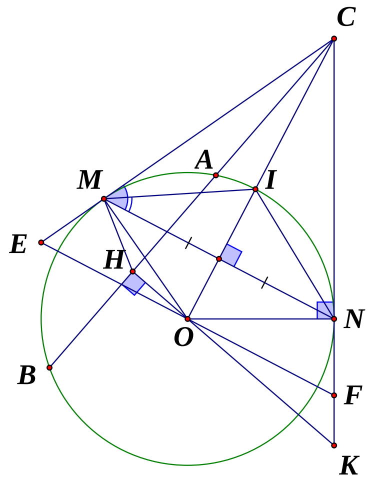
Hướng dẫn



1) Vì H là trung điểm AB nên OH vuông góc AB, $ONC=90^\circ$ (vì CN là tt)

Xét tứ giác $OHON$ có: $OHC+ONC=180^\circ$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $OHCN$ nội tiếp.
Vậy C,H,O,N cùng thuộc đường tròn.

2) Chỉ ra $\Delta KNO\backsim\Delta KHC(g.g)\Rightarrow\frac{KN}{KH}=\frac{KO}{KC}\Rightarrow KN.KC=KH.KO$ (đpcm)



3) Xét tam giác ANM có CO là phân giác góc MCN (tính chất 2tt cắt nhau)

và cung MI = cung IN mà $CMI = \frac{1}{2} sđMI; IMN = \frac{1}{2} sđIN$ nên $CMI = IMN$

Suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ANM .

Vậy I cách đều CM, CN và NM .

4) Tam giác CMN cân mà $EF // NM$ nên tam giác CEF cân tại C

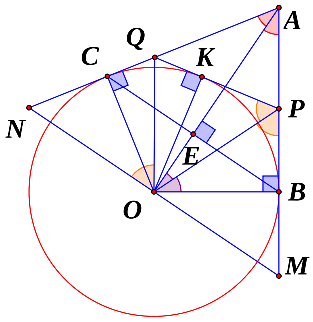
Suy ra $S_{CEF} = 2S_{COF} = ON.CF = R(FN + NC) \geq 2R.\sqrt{CN.NF} = 2R\sqrt{R^2} = 2R^2$

Dấu bằng xảy ra khi $NF = NC = R$, suy ra $OC = R\sqrt{2}$. Vậy C nằm trên $\left(O; R\sqrt{2}\right)$

Câu 398.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O, R) và điểm A nằm ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm)

1. Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE.OA = R^2$
3. Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O, R) lấy điểm K bất kỳ (K khác B ,C). Tiếp tuyến tại K của đường tròn (O ,R) cắt AB, AC theo thứ tự tại P, Q. Chứng minh tam gác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.
4. Đường thẳng qua O vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại M , N. Chứng minh rằng $PM + QN \geq MN$

Hướng dẫn



1. Xét tứ giác $ABOC$ có: $ABO = ACO = 90^\circ$ (AB, AC là tt) nên $\mathrm{ABO} + \mathrm{ACO} = 180^\circ$ suy ra tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

2. Tam giác ABC có $AC = AB$ (tc 2 tt cắt nhau) mà OA là phân giác góc A nên OA vuông góc BC.

Trong tam giác vuông ACO có AE là đường cao nên $OC^2 = OE.OA$ hay $OE.OA = R^2$.

3. Ta có: $\begin{cases} CQ = QK \\ KP = PB \end{cases}$ (tính chất hai tt cắt nhau)

Chu vi tam giác $APQ = AQ + QK + KP + PA = AQ + CQ + PB + AP = AC + AB = 2AB$ không đổi .

4. Tam giác ANM cân tại A(có phân giác là đường cao) nên $ANM = AMN$

$\hat{A} + 2AMO = 180^\circ$; $\hat{A} + BOC = 180^\circ$ hay $\hat{A} + 2QOP = 180^\circ$ suy ra $AMN = POQ$

$\Delta MOP \backsim \Delta NQO$ (g.g) nên $MP.QN = OM.ON = OM^2 = \dfrac{MN^2}{4}$ nên $MN^2 = 4MP.QN \le (MP + QN)^2$

nên $NM \le MP + QN$.

Câu 399.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho (O) và điểm A nằm ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với (O) (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng (d) đi qua A cắt (O) tại hai điểm B và C ($AB < AC$, d không đi qua tâm O)

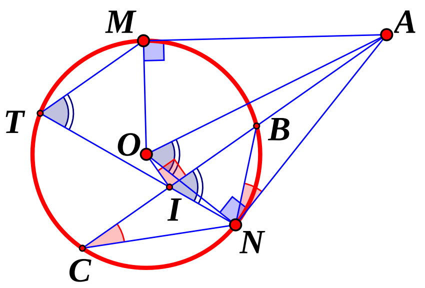
1. Chứng minh $AMON$ nội tiếp.

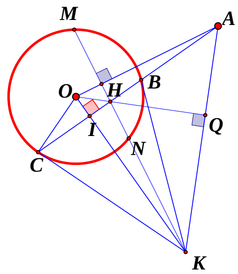
2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính BC biết $AB = 4cm$; $AN = 6cm$.

3. Gọi I là trung điểm BC, đường thẳng NI cắt (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh $MT // AC$.

4. Hai tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài.

Hướng dẫn





1. Ta có: $AMO = ANO = 90°$ (AM và AN là tt) suy ra $AMO + ANO = 180°$ mà đây là hai góc đối của tứ giác $AMON$ nên tứ giác $AMON$ nội tiếp.

2. Ta có: $BNA = NCA\left(=\frac{1}{2}sđBN\right)$ nên $\Delta ANB \backsim \Delta ACN$ (g.g) nên $AN^2 = AB.AC$

Thay $AB = 4cm;\ AN = 6cm$ vào $AN^2 = AB.AC$ suy ra $AC = 9$cm, suy ra $BC = 9 - 4 = 5cm$.

3. Ta có: $MTN = \frac{1}{2}sđMN = AON$ (1). Vì I là trung điểm BC nên OI vuông góc BC,

$OIA = ONA = 90°$ nên tứ giác $AOIN$ nội tiếp, suy ra $AON = AIN$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $MTN = AIN$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên MT//AC.

4. Xét tam giác AKO có AI vuông góc KO, kẻ OQ vuông góc AK, OQ giao AI tại H suy ra H là trực tâm tam giác AOK. Mà đường KHN vuông OA, KMN vuông góc OA nên K, N, H, M thẳng hàng. Suy ra K nằm trên đường thẳng cố định MN.

Câu 400.(Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C, O). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE

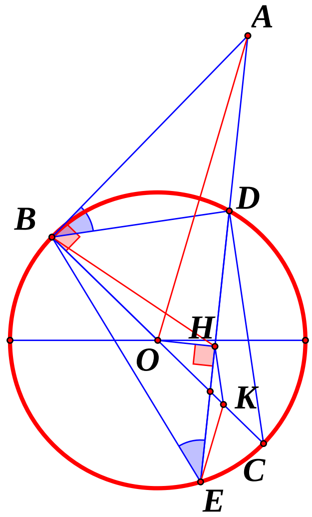
1) Chứng minh bốn điểm A, O, B, H cùng nằm trên một đường tròn.

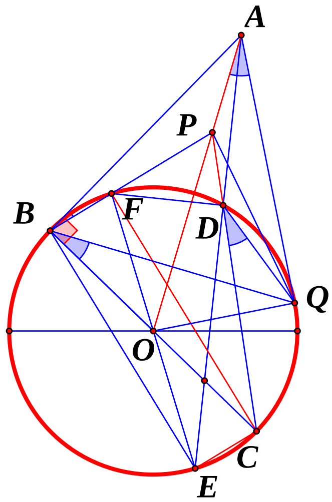
2) Chứng minh $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$

3) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO. d cắt BC tại điểm K. Chứng minh $HK \parallel DC$

4) Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F, Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.

Hướng dẫn





1. Ta có: $OBA = 90°$ (vì AB là tt của (O)).

$OHA = 90°$ (vì H là trung điểm dây CD) suy ra $OBA + OHA = 180°$ mà đây là hai góc đối của tứ giác $ABOH$ nên tứ giác $ABOH$ nội tiếp.

2. Xét tam giác ABE và ADB có: $\begin{cases} \hat{A} chung \\ ABD = AEB\left(= \dfrac{1}{2} sđBD \right) \end{cases}$ suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$ (g.g)

nên $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{BE}$

3. Tứ giác $ABOH$ nội tiếp nên $OAH = OBH$ (góc nt chắn cung OH)

mà $OAH = HEK$ (sole trong) nên $HEK = OBH$ suy ra tứ giác $BHKE$ nội tiếp.

Vì $BHKE$ nội tiếp nên $KHE = KBE$ (góc nt chắn cung EK) mà $KBE = EDC$ (góc nt chắn cung EC)

nên $EHK = EDC$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên HK//DC.

4. Kẻ tiếp tuyến AQ với (O) (Q khác B). Tam giác $ABP = AQP(c.g.c)$ nên $ABP = AQP$ (1)

Ta có: Tứ giác $ABOQ$ nội tiếp nên $OAQ = OBQ$ mà $OBQ = CDQ$ (góc nt chắn cung CD)

nên $OAQ = CDQ$ suy ra tứ giác $QDPA$ nội tiếp, nên $AQP = ADP = CDE = CBE$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $CBE = PBA$ mà $OBP + ABP = 90°$ nên $EBC + CBP = 90°$ suy ra F thuộc (O) nên BC và FE là đường kính của (O). Suy ra tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.