NGUYỄN MINH HIẾU

Tuyển tập đề thi

CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH (2013-2023)

ĐỒNG HỚI 2023

Mục lục

Phần

I

ĐỀ THI

ĐỀ SỐ 1

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2022-2023

Phần I. TRẮC NGHIỆM (4,0 điểm)

Câu 1.1 Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với a, b, c, d là bốn số thực thỏa mãn $ac < 0$). Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 1.2 Cho hàm số $y = \dfrac{x - m + 2}{x + 1}$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

A. $m < -3$. **B.** $m \leqslant -3$. **C.** $m \leqslant 1$. **D.** $m < 1$.

Câu 1.3 Ở AFF Cup 2022 có 10 đội bóng tham dự được chia ngẫu nhiên làm hai bảng, mỗi bảng 5 đội. Biết rằng các đội bóng bình đẳng giống nhau. Số cách chia là

A. 405. **B.** 252. **C.** 30240. **D.** 60480.

Câu 1.4 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 1.5 Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Biết $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và a, b, c là ba số thực thỏa mãn $ab > 0$. Hàm số đó đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; +\infty)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 0)$. **D.** $(-2; 2)$.

Câu 1.6 Theo thống kê, xác suất thành công một lần sút penalty của Messi là $\dfrac{2}{3}$. Messi lần lượt sút 5 lần penalty một cách độc lập. Xác suất để Messi sút thành công ít nhất một lần trong 5 lần đó bằng

A. $\dfrac{242}{243}$. **B.** $\dfrac{1}{243}$. **C.** $\dfrac{2}{243}$. **D.** $\dfrac{241}{243}$.

Câu 1.7 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$. Với a, b là hai số thực dương và thỏa mãn $a < b$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; b]$ bằng

A. $f(b)$. **B.** $f(a)$. **C.** $\dfrac{f(a) + f(b)}{2}$. **D.** $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Câu 1.8 Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	-5 $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 1.9 Số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(x + \dfrac{8}{x^3}\right)^8$ là

A. 1800. **B.** 1729. **C.** 1792. **D.** 1700.

Câu 1.10 Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau:

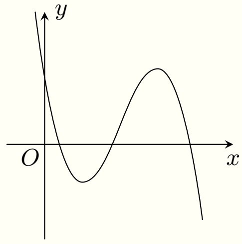
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-6	$\nearrow$	2

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 3$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 1.11 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đạo hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.



Câu 1.12 Trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{3x+4}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 1.13 Tập xác định của hàm số $y = \left(x^2 - x - 2\right)^{-3} + \left(4 - x^2\right)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$. **B.** $\mathscr{D} = [-2; -1]$.
C. $\mathscr{D} = (-2; 2) \setminus \{-1\}$. **D.** $\mathscr{D} = (-2; 2] \setminus \{-1\}$.

Câu 1.14 Cho hàm số mũ $y = (2m-1)^x$ (với m là tham số). Số giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2023; 2023)$ để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ bằng

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 0. **D.** 2023.

Câu 1.15 Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a b = 6$, $\log_c b = 3$. Giá trị của $\log_a c$ bằng

A. 2. **B.** 9. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 3.

Câu 1.16 Cho các số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a(bc) = 2$, $\log_b(ca) = 4$. Giá trị của $\log_c(ab)$ bằng

A. $\dfrac{8}{7}$. **B.** $\dfrac{7}{6}$. **C.** $\dfrac{10}{9}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Câu 1.17 Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + 1\right)$ có tập giá trị là

A. $(-\infty; 0]$. **B.** $[1; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $[0; +\infty)$.

Câu 1.18 Giả sử A, B là hai điểm phân biệt trên đồ thị của hàm số $y = \log_3(5x-3)$ sao cho A là trung điểm của đoạn OB (O là gốc tọa độ). Khi đó, AB có độ dài bằng

A. $\dfrac{\sqrt{65}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{23}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{61}}{5}$.

Câu 1.19 Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, $SA = 4$ cm, $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm và $CA = 8$ cm. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 24 cm^3. **B.** 32 cm^3. **C.** 40 cm^3. **D.** 192 cm^3.

Câu 1.20 Cho hình chóp $S.ABC$ có SAB và ABC là hai tam giác đều cạnh a và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a bằng

A. $\dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 1.21 Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng a là

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\sqrt{3}a^3$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 1.22 Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $AC' = 3a$ và $AA' = 2a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ theo a bằng

A. $\dfrac{5\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{5a^3}{3}$. **C.** $5\sqrt{3}a^3$. **D.** $5a^3$.

Câu 1.23 Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh 2 cm, cạnh bên bằng 3 cm và hợp với mặt đáy góc $60°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $6\ \text{cm}^3$. **B.** $3\ \text{cm}^3$. **C.** $6\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **D.** $\dfrac{9}{2}\ \text{cm}^3$.

Câu 1.24 Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$, góc giữa đường sinh và mặt đáy bằng $45°$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $8\sqrt{2}\pi a^3$. **B.** $3\sqrt{2}\pi a^3$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **D.** $2\sqrt{2}\pi a^3$.

Câu 1.25 Mặt phẳng đi qua trục hình trụ và cắt hình trụ theo thiết diện là một hình vuông cạnh bằng $2a$. Thể tích khối trụ tương ứng bằng

A. $\dfrac{\pi a^3}{2}$. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $4\pi a^3$.

Câu 1.26 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy. Thể tích khối nón có đường tròn đáy nội tiếp tam giác SAB và đỉnh nằm trên mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{\pi a^3}{54}$. **B.** $\dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{36}$. **D.** $\dfrac{2\pi a^3}{21}$.

Câu 1.27 Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 2023\pi)$ của phương trình $\tan^2 x = 2022^{\cos 2x}$ bằng

A. 4045. **B.** 2022. **C.** 4046. **D.** 2023.

Câu 1.28 Cho hai số thực dương a, b và hàm số $f(x) = \log_{2022}[(2023 + ax)(2023 + bx)]$ thỏa mãn $f'(1) = \dfrac{1}{\ln 2022}$. Giá trị của ab bằng

A. 2023. **B.** 2023^2. **C.** $\dfrac{1}{2023^2}$. **D.** $\dfrac{1}{2023}$.

Câu 1.29 Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. Giá trị của $f^{(2022)}(0)$ (với $f^{(2022)}(0)$ là đạo hàm cấp 2022 của hàm số tại điểm $x = 0$) bằng

A. $-\dfrac{2022!}{2}$. **B.** 0. **C.** $2022!$. **D.** $-2022!$.

Câu 1.30 Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Điểm M bất kỳ nằm trong tứ diện $ABCD$. Gọi k là tổng khoảng cách từ điểm M đến 4 mặt của tứ diện $ABCD$. Giá trị của k bằng

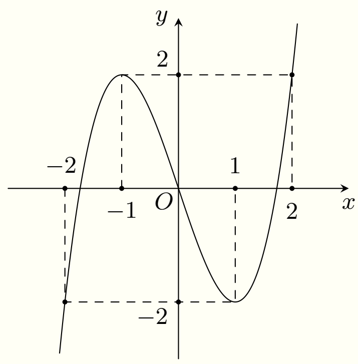
A. $k = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $k = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $k = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $k = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 1.31 Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}a^3$. **C.** $2\sqrt{6}a^3$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 1.32 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Số nghiệm phân biệt của phương trình $f(f(x)) - f(x) = 0$ bằng

A. 9. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5.



Câu 1.33 Cho hàm số $f(x) = (x-2021)(x-2022)(x-2023)$ có đồ thị (C). Biết trên (C) tồn tại một điểm $M(x_0; y_0)$ mà có duy nhất một tiếp tuyến của (C) đi qua. Giá trị của $x_0 + y_0$ bằng

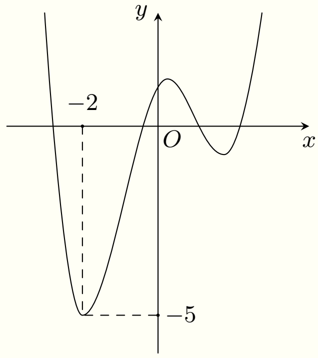
A. 6066. **B.** 2023. **C.** 2021. **D.** 2022.

Câu 1.34 Cho ba số thực $x = 2022^{2023}$, $y = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 2022^{2022}$, $z = 2023^{2^{11}}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $z < x < y$. **B.** $x < z < y$. **C.** $y < x < z$. **D.** $z < y < x$.

Câu 1.35 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) + x^{2022} + 4 \cdot x^{2021} + 4 \cdot x^{2020} + x^2 + 4x + 2023$ bằng

A. 2014. **B.** 2023. **C.** 2019. **D.** 2021.



Câu 1.36 Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có đồ thị (C_m) (với m là tham số). Biết luôn có một giá trị $m = m_0$ để tiếp tuyến d của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất. Lúc đó, giá trị m_0 thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 1.37 Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài đường cao bằng $3a$ và diện tích đáy bằng $6a^2$. Trên các đoạn thẳng AB', AC', BC' lần lượt lấy các điểm M, N, P thỏa mãn $MB' = 2MA$, $NC' = 2NA$, $PC' = 2PB$. Thể tích (theo a) của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $\dfrac{9a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{40a^3}{9}$. **C.** $\dfrac{52a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{67a^3}{9}$.

Câu 1.38 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = 2022^{f(x)} - 2023^{f(x)}$ bằng

A. 5. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 1.39 Một biển số xe ô tô của tỉnh Quảng Bình có dạng $73A - abc.de$ (trong đó a, b, c, d, e là các chữ số không đồng thời bằng 0). Chọn ngẫu nhiên một biển số. Gọi biển số "cấp số cộng" là biển số mà ba chữ số a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Xác suất để biển số được chọn là một biển số "cấp số cộng" bằng

A. $\dfrac{2000}{99\,999}$. **B.** $\dfrac{4000}{99\,999}$. **C.** $\dfrac{2999}{99\,999}$. **D.** $\dfrac{4999}{99\,999}$.

Câu 1.40 Cho hàm số $y = 2022^{x^2-2x+1-2|x-m|} - \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$ có đồ thị (C_m) (với m là tham số). Gọi $(a;b)\setminus\{c\}$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}; a < c < b$) là tập hợp các giá trị của m để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 8.

Phần II. TỰ LUẬN (6,0 điểm)

Câu 1.41 (1,0 điểm) Cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 1.42 (1,0 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx - 3m + 4$ có đồ thị (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị A và B sao cho hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1; -\dfrac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

Câu 1.43 (1,0 điểm) Cho phương trình $\log_3^2 x - (m+1)\sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình trên có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$.

Câu 1.44 (1,0 điểm) Cho ba số thực x, y, x lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\log_y^3 x}{\log_y z + \log_z x} + \frac{\log_z^3 y}{\log_z x + \log_x y} + \frac{\log_x^3 z}{\log_x y + \log_y z}.$$

Câu 1.45 (2,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA = SB = SC = AB = 2a$, $BC = 3a$.

a) Giả sử $\widehat{ABC} = 60^\circ$, hãy tìm thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

b) Tìm tất cả các giá trị của SD theo a để tích $SD \cdot AC$ đạt giá trị lớn nhất.

——— Hết ———

ĐỀ SỐ 2

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2021-2022

Câu 2.1 (1,0 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = (x-18)\sqrt{x^2+16}$$

trên đoạn $[0;3]$.

Câu 2.2 (1,0 điểm) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số

$$y = x^4 - (m+1)x^2 + 2022$$

có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có ba góc nhọn.

Câu 2.3 (1,0 điểm) Giải phương trình:

$$\log_3\sqrt{x^2-x+1} + \log_{\frac{1}{3}}(1-2x) + 2x = 1 - \sqrt{x^2-x+1}.$$

Câu 2.4 (1,0 điểm) Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp A. Tính xác suất để chọn được một số sao cho số đó chia hết cho 7 và có chữ số hàng đơn vị bằng 1.

Câu 2.5 (1,0 điểm) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1}\cdot\frac{\ln x}{x}$$

thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{3}$. Hãy tính $[F(\mathrm{e})]^2$.

Câu 2.6 (1,0 điểm) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S)\colon (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$$

và hai điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc mặt cầu (S). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MB$.

Câu 2.7 (3,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = b$, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SA sao cho $AM = x$ $(0 < x < 2a)$.

a) Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MBC) theo a, b và x.

b) Tìm x theo a để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau.

c) Trong trường hợp $ABCD$ là hình vuông cạnh a gọi K là điểm di động trên CD, H là hình chiếu của S lên BK. Tìm vị trí của điểm K trên CD để thể tích khối chóp $S.ABH$ là lớn nhất.

Câu 2.8 (1,0 điểm) Cho các số thực dương a, b với $a < b$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{b+a} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{ab+1}{2ab}.$$

——— Hết ———

ĐỀ SỐ 3

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2020-2021

Câu 3.1 (1,0 điểm) Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là các giao điểm của (C) với các trục tọa độ. Tìm trên (C) các điểm M có tọa độ nguyên sao cho tam giác MAB có diện tích bằng 8.

Câu 3.2 (1,0 điểm) Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \left|\frac{1}{12}\sin 3x + \cos^2 x - \frac{1}{4}\sin x - m\right|$$

bằng 1.

Câu 3.3 (1,0 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\sqrt[3]{\log u_{19} - \log u_1} + \sqrt{\log u_{19} - \log u_1 + 3} = 3$$

và $u_{n+1} = u_n + 2$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm n sao cho $\left(\sqrt{2}\right)^{u_n} = 4^{2020}$.

Câu 3.4 (1,0 điểm) Cho $f(x) = \dfrac{2020^x}{2020^x + \sqrt{2020}}$. Tính tổng:

$$S = f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \cdots + f\left(\frac{2020}{2021}\right).$$

Câu 3.5 (1,0 điểm) Cho đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2020}$ nội tiếp trong đường tròn (O). Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh bất kỳ của đa giác đều. Tính xác suất để nhận được một tam giác tù.

Câu 3.6 (2,0 điểm) Chứng minh rằng:

$$\left(\mathrm{C}_{2020}^{1}\right)^2 + \left(2\mathrm{C}_{2020}^{2}\right)^2 + \left(3\mathrm{C}_{2020}^{3}\right)^2 + \cdots + \left(2020\mathrm{C}_{2020}^{2020}\right)^2 = 2020^2 \cdot \mathrm{C}_{4038}^{2019}.$$

Câu 3.7 (3,0 điểm) Cho tứ diện $ABCD$ và hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $2AM = BM$, $2CN = AN$. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm M, N và song song với cạnh AD, cắt các cạnh BD và CD lần lượt tại K và L.

a) Gọi V là thể tích của khối tứ diện $ABCD$. Tính thể tích khối đa diện $BCMNLK$ theo V;

b) Giả sử tứ diện $ABCD$ có $BC = x$ $\left(0 < x < \sqrt{3}\right)$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3.8 (1,0 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1, ta luôn có

$$\ln\frac{n+1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log_2\frac{n+1}{2}.$$

——— Hết ———

ĐỀ SỐ 4

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2019-2020

Câu 4.1 (1,0 điểm) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\sin x + \cos x + 1}{\sqrt{2 + \sin 2x}}$.

Câu 4.2 (1,0 điểm) Cho hàm số $y = \dfrac{x}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(-1;1)$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng $d\colon y = mx - m - 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4.3 (1,0 điểm) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2019^x}$. Tính tỉ số $\dfrac{P}{Q}$, với

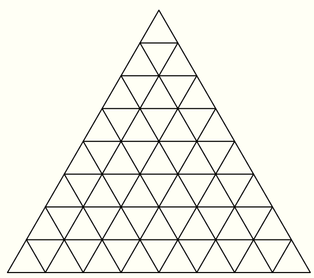
$$P = f'(1) + 2f'(2) + \cdots + 2019f'(2019)$$

và

$$Q = f'(-1) + 2f'(-2) + \cdots + 2019f'(-2019).$$

Câu 4.4 (1,0 điểm) Giải phương trình $\log_2\left[3\log_2(3x-1) - 1\right] = x$.

Câu 4.5 (1,0 điểm) Cho tam giác đều ABC cạnh 8 cm. Chia tam giác này thành 64 tam giác đều cạnh 1 cm bởi các đường thẳng song song với các cạnh tam giác ABC (như hình vẽ). Gọi S là tập hợp các đỉnh của các tam giác cạnh 1 cm. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh thuộc S. Tính xác suất sao cho 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của hình bình hành nằm trong miền trong của tam giác ABC và có cạnh chứa các cạnh của các tam giác cạnh 1 cm ở trên.



Câu 4.6 (1,0 điểm) Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương và thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + \cdots + u_{2020} & = & 4(u_1 + u_2 + \cdots + u_{1010}) \\ \log_3^2 u_3 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14} & = & 2. \end{cases}$$

Câu 4.7 (3,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Một mặt phẳng (α) qua CD cắt SA, SB lần lượt tại M, N. Đặt $AM = x$, với $0 < x < a$.

a) Tứ giác $MNCD$ là hình gì? Tính diện tích tứ giác $MNCD$ theo a và x.

b) Xác định x để thể tích khối chóp $S.MNCD$ bằng $\dfrac{2}{9}$ lần thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Câu 4.8 (1,0 điểm)

a) Cho các số thực phân biệt $a, b > 1$. Chứng minh rằng: $\log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b)$.

b) Cho các số thực $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 1$, $(n \geqslant 2)$. Chứng minh rằng:

$$\log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) + \cdots + \log_{a_{n-1}}\left(\log_{a_{n-1}} a_n\right) + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) > 0.$$

——— Hết ———

ĐỀ SỐ 5

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2018-2019

Câu 5.1 (1,0 điểm) Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ có đồ thị là đường cong (C) và điểm $I\left(-\dfrac{5}{6}; \dfrac{5}{4}\right)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua I và cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho I là trung điểm của MN.

Câu 5.2 (1,0 điểm) Cho hàm số $y = x + \left|x^2 - 2x + m\right|$, với m là tham số. Tìm m để hàm số có cực đại.

Câu 5.3 (1,0 điểm) Giải phương trình sau trên tập số thực $\mathbb{R}$:

$$x^3 - 7x^2 + 9x + 12 = (x-3)\left(x - 2 + 5\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-3} - 1\right).$$

Câu 5.4 (1,0 điểm) Cho sáu thẻ, mỗi thẻ ghi một trong các số của tập $E = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$ (các thẻ khác nhau ghi các số khác nhau). Rút ngẫu nhiên ba thẻ, tính xác suất để rút được ba thẻ ghi ba số là số đo ba cạnh của một tam giác có góc tù.

Câu 5.5 (2,0 điểm) Cho tích phân $I(t) = \displaystyle\int_0^t (x \sin x)^2 \,\mathrm{d}x$.

a) Tính $I(t)$ khi $t = \pi$;

b) Chứng minh rằng $I(t) + I(-t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Câu 5.6 (3,0 điểm) Cho khối tứ diện $SABC$ và hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SB sao cho $\dfrac{SM}{MA} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{SN}{NB} = 2$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm M, N và song song với đường thẳng SC.

a) Trong trường hợp $SABC$ là tứ diện đều cạnh a, xác định và tính theo a diện tích thiết diện của khối tứ diện $SABC$ với mặt phẳng (P).

b) Trong trường hợp bất kì, mặt phẳng (P) chia tứ diện $SABC$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Câu 5.7 (1,0 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 1$, ta luôn có

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2).$$

——— Hết ———

ĐỀ SỐ 6

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2017-2018

Câu 6.1 (2,0 điểm) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C)\colon y = \dfrac{x}{x-1}$, biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

Câu 6.2 (2,0 điểm) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn:

$$x^3 + x + \log_2 \frac{x}{y} = 8y^3 + 2y + 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = -x^3 + x^2 + 4y^4 + y^2 - 2xy^2 + 2xy + 4.$$

Câu 6.3 (1,0 điểm) Cho $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln^n x \,\mathrm{d}x$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, chứng minh rằng

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n.$$

Câu 6.4 (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) \,\mathrm{d}x$.

Câu 6.5 (3,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Giả sử (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, K và luôn cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, N (M, N không trùng S).

a) Chứng minh rằng $\dfrac{SB}{SM} + \dfrac{SD}{SN} = 3$.

b) Gọi V_1 và V theo thứ tự là thể tích của khối chóp $S.AMKN$ và $S.ABCD$. Xác định vị trí của mặt phẳng (P) để tỷ số $\dfrac{V_1}{V}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6.6 (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực không âm, thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{c^2+1} + \frac{c^2}{a^2+1} \geqslant \frac{3}{2}.$$

——— Hết ———

ĐỀ SỐ 7

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2016-2017

Câu 7.1 (2,0 điểm) Tìm tất cả các giá trị của tham số m $(m \neq 0)$ để đường thẳng $d\colon y = 3(x-m)$ cắt đồ thị hàm số $(H)\colon y = \dfrac{3x-2m}{mx+1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Câu 7.2 (1,0 điểm) Giải phương trình:

$$\log_{2017}\frac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5} = x^2+3x+2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Câu 7.3 (1,0 điểm) Cho 2017 số $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2017}$ thuộc khoảng $\left(\frac{1}{4};1\right)$. Chứng minh rằng:

$$\log_{a_1}\left(a_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{a_2}\left(a_3-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\log_{a_{2016}}\left(a_{2017}-\frac{1}{4}\right)+\log_{a_{2017}}\left(a_1-\frac{1}{4}\right) \geqslant 4034.$$

Câu 7.4 (1,0 điểm) Chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2017}}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Câu 7.5 (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[\frac{(2017+\cos x)^{2017+\sin x}}{(2017+\sin x)^{2017}}\right]\mathrm{d}x$.

Câu 7.6 (3,0 điểm) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Trên AA', BB' lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $AM = \dfrac{3a}{4}$, $BN = \dfrac{a}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, C và Q là giao điểm của DD' với mặt phẳng (P).

a) Thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi (P) là hình gì? Tính diện tích của thiết diện đó.

b) Tính khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng (P) theo a.

c) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và $C'D'$. Tính bán kính mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, C, E, F theo a.

Câu 7.7 (1,0 điểm) Cho a,b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}.$$

——— Hết ———

ĐỀ SỐ 8

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2015-2016

Câu 8.1 (2,0 điểm) Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm M đến các đường tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 8.2 (1,0 điểm) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 8.3 (1,0 điểm) Hai đội A và B thi đấu trận chung kết bóng chuyền nữ chào mừng ngày 08-03 (trận chung kết tối đa 5 hiệp). Đội nào thắng trước 3 hiệp thì thắng trận. Xác suất để đội A thắng mỗi hiệp là $0{,}4$ (không có hòa). Tính xác suất để đội A thắng trận chung kết.

Câu 8.4 (2,0 điểm)

a) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-\pi; \pi]$. Chứng minh rằng:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sin^2 x + 3}\,\mathrm{d}x$.

Câu 8.5 (3,0 điểm) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, $AB = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Lấy M là điểm bất kỳ trên cạnh AB sao cho $MB = x$ $(0 \leqslant x < a)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và $(P) \perp B'C$.

a) Xác định thiết diện của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi (P);

b) Tìm x để diện tích thiết diện đạt giá trị lớn nhất;

c) Mặt phẳng (P) chia lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai phần. Tính thể tích khối đa diện chứa các đỉnh A và C theo a và x. Tìm vị trí điểm M để thể tích khối đa diện đó đạt giá trị lớn nhất.

Câu 8.6 (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{3 + ab + bc + ca} + \frac{\sqrt{abc}}{6} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leqslant 1.$$

——— Hết ———

ĐỀ SỐ 9

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2014-2015

Câu 9.1 (2,0 điểm) Cho hàm số $y = \dfrac{mx-1}{x+m}$ có đồ thị (Cm). Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc đồ thị (Cm), tiếp tuyến của (Cm) tại M cắt các tiệm cận tại A, B. Tìm m để diện tích tam giác IAB bằng 2015, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Câu 9.2 (1,0 điểm) Giải phương trình:

$$2\sqrt{3^x-2}+\sqrt[4]{9^x-4}=\sqrt{3^x+2}.$$

Câu 9.3 (1,0 điểm) Cho

$$C_{2n+1}^{n+1}+C_{2n+1}^{n+2}+C_{2n+1}^{n+3}+\cdots+C_{2n+1}^{2n}+C_{2n+1}^{2n+1}=2^{20},$$

biết số hạng thứ 3 trong khai triển

$$P(x)=\left(\sqrt[4]{x^{\log_2 x-3}}+\sqrt{2^{-x\log_2\frac{x}{8}}}\right)^n \quad (n\in\mathbb{N})$$

bằng 45. Tìm x.

Câu 9.4 (1,0 điểm) Tính tích phân: $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x.$

Câu 9.5 (1,0 điểm) Cho $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x \quad (n\in\mathbb{N})$, chứng minh rằng $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$.

Câu 9.6 (3,0 điểm) Trong không gian cho hai tia Ax và By chéo nhau và nhận AB làm đoạn vuông góc chung với $AB=3a$. Các điểm M, N lần lượt di động trên Ax và By (M không trùng với A và N không trùng với B) sao cho $AM+BN=MN$. Gọi Az là tia song song và cùng chiều với tia By, P là hình chiếu vuông góc của N trên tia Az, O là trung điểm AB, H là hình chiếu vuông góc của O trên MN.

a) Hãy tính thể tích tứ diện $ABMP$ trong trường hợp $AM=a$, $MN=5a$;

b) Chứng minh rằng H nằm trên một đường tròn cố định;

c) Chứng minh thể tích tứ diện $ABMN$ không đổi.

Câu 9.7 (1,0 điểm) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3+c^3-1=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a^2+b^2+c^2.$$

——— Hết ———

ĐỀ SỐ 10

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2013-2014

Câu 10.1 (2,0 điểm) Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt các tiệm cận tại A, B sao cho chu vi tam giác IAB bằng $4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Câu 10.2 (2,0 điểm) Giải phương trình:

$$3^{\sqrt{x^2+1}} + 2|x| = 3^{x+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Câu 10.3 (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-\alpha;\alpha]$ với $\alpha > 0$, thì:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

b) Tính tích phân sau:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^3 x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Câu 10.4 (2,5 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a $(a > 0)$, $SA = a$, $SA \perp (ABCD)$. M là điểm trên AC và đặt $AM = x$ $\left(0 < x < \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. Một mặt phẳng (P) đi qua M song song với BD và SA.

a) Dựng thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) và tính diện tích của thiết diện theo a và x;

b) Khi thiết diện có diện tích đạt giá trị lớn nhất thì hình thiết diện chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Câu 10.5 (1,5 điểm)

a) Chứng minh rằng với hai số thực không âm a, b ta có:

$$\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \geqslant 1 + \sqrt{1+a+b}.$$

b) Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+2y} + \sqrt{1+2z} = 5.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = 2x^3 + y^3 + z^3.$$

——— Hết ———

Phần II

LỜI GIẢI

ĐỀ SỐ 1

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2022-2023

Câu 1.1. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $ac < 0$ nên y' có 2 nghiệm phân biệt. Vậy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.
Chọn phương án **A.** □

Câu 1.2. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có

$$y' = \frac{1-(-m+2)}{(x+1)^2} = \frac{m-1}{(x+1)^2}.$$

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Chọn phương án **D.** □

Câu 1.3. Chọn 5 đội bóng vào bảng thứ nhất có C_{10}^5 cách. Chọn 5 đội bóng vào bảng thứ hai có C_5^5 cách. Vậy số cách chia bảng là

$$\mathrm{C}_{10}^5 \cdot \mathrm{C}_5^5 = 252 \quad (\text{cách}).$$

Chọn phương án **B.** □

Câu 1.4. Nhận thấy $f'(x)$ có 2 nghiệm bội lẻ là $x=-1$ và $x=3$ nên hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị.
Chọn phương án **A.** □

Câu 1.5. Vì $ab > 0$ nên hàm số có 1 điểm cực trị $x=0$. Vì $f(x) \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hệ số $a < 0$. Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
Chọn phương án **C.** □

Câu 1.6. Gọi A_i với $i = \overline{1,5}$ là biến cố: "Messi sút penalty thành công lần thứ i", ta có

$$\mathrm{P}\left(A_i\right) = \frac{2}{3}; \quad \mathrm{P}\left(\overline{A_i}\right) = \frac{1}{3}.$$

Gọi B là biến cố: "Messi sút penalty thành công ít nhất một lần", ta có

$$\overline{B} = \overline{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5}.$$

Vì các lần sút là độc lập nên

$$\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{A_1}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{A_2}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{A_3}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{A_4}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{A_5}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}.$$

Vậy xác suất cần tìm là

$$\mathrm{P}(B) = 1 - \frac{1}{243} = \frac{242}{243}.$$

Chọn phương án **A.** □

Câu 1.7. Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên và vì $0 < a < b$ nên suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$, do đó $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$.

Chọn phương án **A.** □

Câu 1.8. Từ bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$ và tiệm cận ngang $y = 3$.
Chọn phương án **B.** □

Câu 1.9. Ta có
$$\left(x + \frac{8}{x^3}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k \cdot x^{8-k} \cdot \left(\frac{8}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k \cdot x^{8-4k} \cdot 8^k.$$

Số hạng không chứa x khi
$$8 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 2.$$

Vậy số hạng không chứa x là
$$\mathrm{C}_8^2 \cdot 8^2 = 1792.$$

Chọn phương án **C.** □

Câu 1.10. Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(x) = 3$ có 2 nghiệm thực phân biệt.
Chọn phương án **B.** □

Câu 1.11. Số điểm cực đại bằng số lần đạo hàm đổi dấu từ dương qua âm. Từ đồ thị của $f'(x)$, suy ra hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực đại.
Chọn phương án **C.** □

Câu 1.12. Giả sử $(x_0; y_0)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{3x+4}$ có tọa độ nguyên, ta có
$$3y_0 = \frac{6x_0 - 3}{3x_0 + 4} = 2 - \frac{11}{3x_0 + 4}.$$

Vì $y_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3y_0 \in \mathbb{Z}$ nên $\dfrac{11}{3x_0+4} \in \mathbb{Z}$, hay $3x_0 + 4$ là ước nguyên của 11. Từ đó suy ra
$$\left[\begin{array}{l} 3x_0 + 4 = 11 \\ 3x_0 + 4 = -11 \\ 3x_0 + 4 = 1 \\ 3x_0 + 4 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{7}{3} \quad \text{(loại)} \\ x_0 = -5 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = -\dfrac{5}{3} \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{3x+4}$ có 2 điểm có tọa độ nguyên là $(x;y) = (-5;1)$ và $(x;y) = (-1;3)$.
Chọn phương án **C.** □

Câu 1.13. Điều kiện xác định
$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \neq 0 \\ 4 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1; x \neq 2 \\ -2 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ -2 < x < 2. \end{cases}$$

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = (-2;2) \setminus \{-1\}$.
Chọn phương án **C.** □

Câu 1.14. Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$0<2m-1<1\Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<1.$$

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **C.** □

Câu 1.15. Ta có

$$\log_a c=\log_a b\cdot\log_b c=6\cdot\frac{1}{3}=2.$$

Chọn phương án **A.** □

Câu 1.16. Đặt $x=\log_a b$, $y=\log_b c$, ta có

$$\begin{cases}\log_a b+\log_a c=2\\ \log_b c+\log_b a=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+xy=2 & (1)\\ y+\dfrac{1}{x}=4. & (2)\end{cases}$$

Từ (2), suy ra $y=4-\dfrac{1}{x}$, thay vào (1), ta có

$$x+4x-1=2\Leftrightarrow x=\frac{3}{5}\Rightarrow y=\frac{7}{3}.$$

Vậy

$$\log_c(ab)=\log_c a+\log_c b=\frac{1}{xy}+\frac{1}{y}=\frac{5}{7}+\frac{3}{7}=\frac{8}{7}.$$

Chọn phương án **A.** □

Câu 1.17. Vì $x^2+1\geqslant 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)\leqslant\log_{\frac{1}{2}}1=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vậy tập giá trị của hàm số đã cho là $(-\infty;0]$.
Chọn phương án **A.** □

Câu 1.18. Giả sử $A\left(x_1;\log_3(5x-1-3)\right)$, $B\left(x_2;\log_3(5x_2-3)\right)$, với $\dfrac{3}{5}<x_1<x_2$. Vì A là trung điểm của OB nên ta có

$$\begin{cases}x_2=2x_1\\ \log_3(5x_2-3)=2\log_3(5x_1-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=2x_1 & (1)\\ 5x_2-3=(5x_1-3)^2 & (2)\end{cases}$$

Thay (1) vào (2), ta có

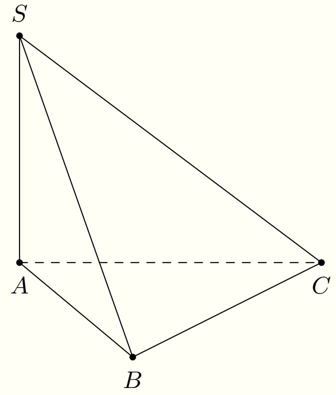
$$10x_1-3=25x_1^2-30x_1+9\Leftrightarrow 25x_1^2-40x_1+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{6}{5}\\ x_1=\dfrac{2}{5}\quad\text{(loại)}.\end{array}\right.$$

Với $x_1=\dfrac{6}{5}$, ta có

$$A\left(\frac{6}{5};1\right),\quad B\left(\frac{12}{5};2\right)\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{61}}{5}.$$

Chọn phương án **D.** □

Câu 1.19.



Nhận thấy $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A, do đó

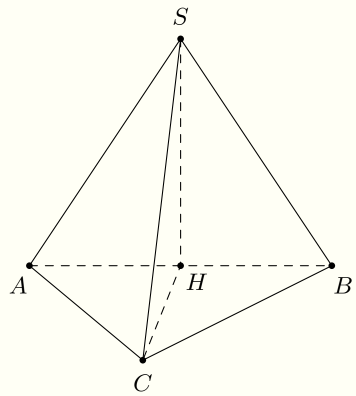
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 24 \ \left(\mathrm{cm}^2\right).$$

Vậy thể tích khối chóp đã cho là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 4 = 32 \ \left(\mathrm{cm}^3\right).$$

Chọn phương án **B.** □

Câu 1.20.

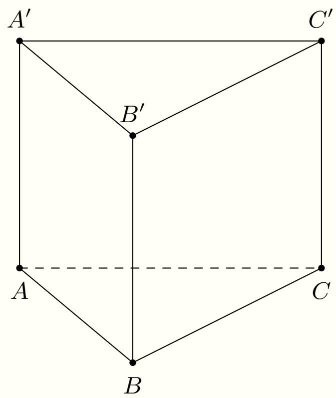


Diện tích đáy ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Gọi H là trung điểm AB, ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $SH \perp AB$. Lại có $(SAB) \perp (CAB)$ nên $SH \perp (ABC)$. Vậy thể tích khối chóp đã cho là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{8}.$$

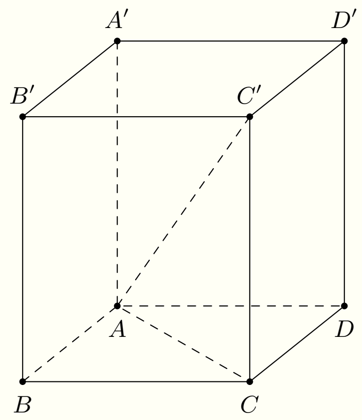
Chọn phương án **C.** □

Câu 1.21.



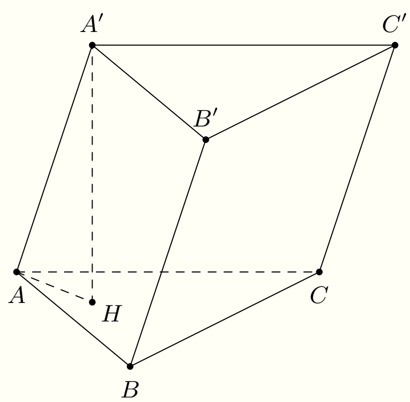
Diện tích đáy lăng trụ là
$$B = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$$
Thể tích của khối lăng trụ là
$$V = Bh = a^2\sqrt{3} \cdot a = a^3\sqrt{3}.$$
Chọn phương án **B.** □

Câu 1.22.



Ta có
$$AC = \sqrt{AC'^2 - CC'^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}.$$
Vì $ABCD$ là hình vuông nên
$$AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$
Diện tích đáy $ABCD$ là
$$S_{ABCD} = AB^2 = \frac{5}{2}a^2.$$
Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là
$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = \frac{5}{2}a^2 \cdot 2a = 5a^3.$$
Chọn phương án **D.** □

Câu 1.23.



Diện tích đáy ABC là
$$S_{\triangle ABC} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\ \left(\text{cm}^2\right).$$

Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABC), theo giả thiết ta có $\widehat{A'AH} = 60^\circ$. Do đó

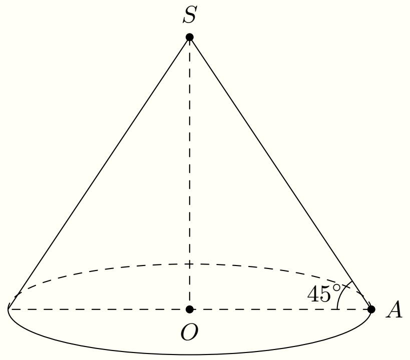
$$AH = AA' \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AH = \sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}\ \left(\text{cm}^3\right).$$

Chọn phương án **D.** □

Câu 1.24.



Theo giả thiết, ta có

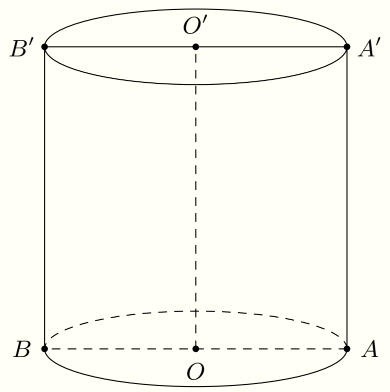
$$\ell = 2a; \quad h = \ell \cdot sin 45^\circ = a\sqrt{2}; \quad r = \ell \cdot \cos 45^\circ = a\sqrt{2}.$$

Vậy thể tích của khối nón đã cho là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$$

Chọn phương án **C.** □

Câu 1.25.



Theo giả thiết, ta có

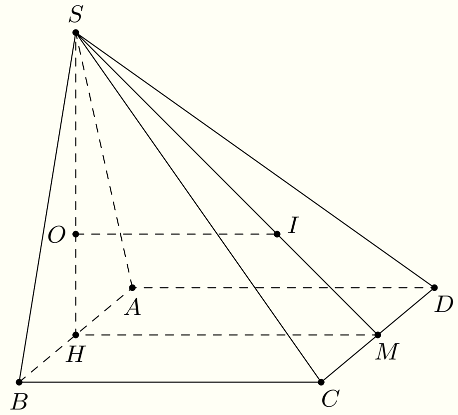
$$h = \ell = 2a; \quad r = \frac{2a}{2} = a.$$

Vậy thể tích của khối trụ đã cho là

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3.$$

Chọn phương án **B.** □

Câu 1.26.



Gọi H là trung điểm của AB, ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi O là trọng tâm của tam giác SAB, suy ra O tâm đáy của khối nón. Bán kính đáy của khối nón là $r = \dfrac{1}{3}SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Gọi M là trung điểm CD, suy ra $HM \perp AB \Rightarrow HM \perp (SAB)$. Gọi I là điểm trên SM sao cho $SI = 2IM$, ta có $OI \perp HM \Rightarrow OI \perp (SAB)$, do đó I là đỉnh của hình nón. Chiều cao của hình nón là $IO = \dfrac{2}{3}MH = \dfrac{2a}{3}$. Vậy thể tích khối nón cần tìm là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \cdot \frac{2a}{3} = \frac{\pi a^3}{54}.$$

Chọn phương án **A.** □

Câu 1.27. Điều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. Khi đó ta có phương trình tương đương

$$\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 2022^{\cos 2x} \Leftrightarrow \frac{2}{1+\cos 2x} = 1 + 2022^{\cos 2x}.$$

Đặt $\cos 2x = t$, với $t \in (-1;1]$, phương trình trở thành

$$\frac{2}{1+t} = 1 + 2022^t. \Leftrightarrow 1 + 2022^t - \frac{2}{1+t} = 0. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 1 + 2022^t - \dfrac{2}{1+t} = 0$ trên $(-1;1]$, ta có

$$f'(t) = 2022^t \ln 2022 + \frac{2}{(1+t)^2} > 0,\ \forall t \in (-1;1].$$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $(-1;1]$. Lại có $f(0) = 0$, do đó (1) có nghiệm duy nhất $t = 0$. Với $t = 0$, ta có

$$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{(thỏa mãn)}.$$

Khi đó

$$x \in (0; 2023\pi) \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < 2023\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{8902}{2}.$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên

$$k \in \{0; 1; \ldots; 4045\}.$$

Vậy có phương trình đã cho có 4046 nghiệm thuộc khoảng $(0; 2023\pi)$.
Chọn phương án **C.** □

Câu 1.28. Ta có

$$f'(x) = \frac{2abx + 2023(a+b)}{(2023+ax)(2023+bx)\ln 2022}.$$

Suy ra

$$f'(1) = \frac{2ab + 2023(a+b)}{(2023+a)(2023+b)\ln 2022}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} f'(1) = \frac{1}{\ln 2022} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2ab + 2023(a+b)}{(2023+a)(2023+b)\ln 2022} = \frac{1}{\ln 2022} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2ab + 2023(a+b)}{(2023+a)(2023+b)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2ab + 2023(a+b) = 2023^2 + 2023(a+b) + ab \\ &\Leftrightarrow \quad ab = 2023^2. \end{aligned}$$

Chọn phương án **B.** □

Câu 1.29. Ta có

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Xét $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ và $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$, ta có

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(-1)\cdot 1}{(x-1)^2} \\ g''(x) &= \frac{(-1)^2\cdot 1\cdot 2}{(x-1)^3} = \frac{(-1)^2\cdot 2!}{(x-1)^3} \\ g'''(x) &= \frac{(-1)^3\cdot 2!\cdot 3}{(x-1)^4} = \frac{(-1)^3\cdot 3!}{(x-1)^4} \\ &\dots \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$g^{(2022)}(x) = \frac{(-1)^{2022}\cdot 2022!}{(x-1)^{2023}}.$$

Tương tự

$$h^{(2022)}(x) = \frac{(-1)^{2022}\cdot 2022!}{(x+1)^{2023}}.$$

Do đó

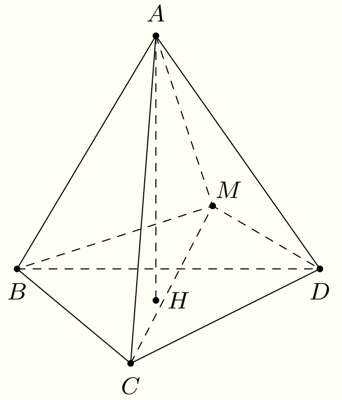
$$f^{(2022)}(x) = \frac{(-1)^{2022}\cdot 2022!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{2023}} - \frac{1}{(x+1)^{2023}}\right].$$

Vậy

$$f^{(2022)}(0) = \frac{(-1)^{2022}\cdot 2022!}{2}\left[\frac{1}{(0-1)^{2023}} - \frac{1}{(0+1)^{2023}}\right] = -2022!.$$

Chọn phương án **D.** □

Câu 1.30.



Gọi H là trọng tâm tam giác BCD, ta có AH là chiều cao của tứ diện $ABCD$ và

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ta có

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot AH. \quad (1)$$

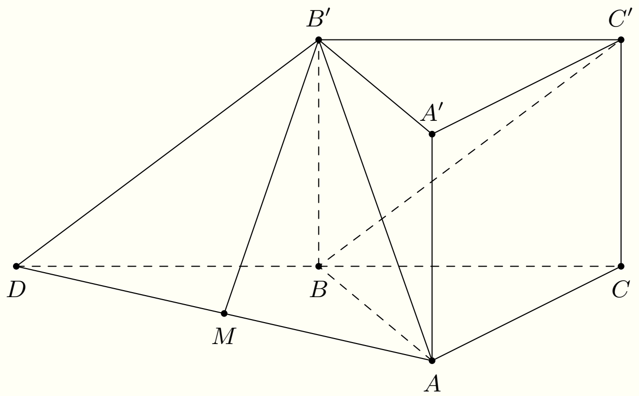
Mặt khác

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= V_{M.ABC} + V_{M.ACD} + V_{M.ABD} + V_{M.BCD} \\ &= \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \left[\mathrm{d}(M,(ABC)) + \mathrm{d}(M,(ACD)) + \mathrm{d}(M,(ABD)) + \mathrm{d}(M,(BCD)) \right] \\ &= \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot k. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra $k = AH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn phương án **A.** □

Câu 1.31.



Diện tích đáy ABC là

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$$

Gọi D là điểm đối xứng với C qua B, ta có $BA = BC = BD$, suy ra tam giác ACD vuông tại A, do đó

$$AD = \sqrt{DC^2 - AC^2} = \sqrt{(4a)^2 - (2a)^2} = 2a\sqrt{3}.$$

Vì $DB' \parallel BC'$, nên suy ra

$$\widehat{(AB', DB')} = \widehat{(AB', BC')} = 60^\circ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{AB'D} = 60^\circ \\ \widehat{AB'D} = 120^\circ. \end{array}\right.$$

Ta có $DB' = BC' = AB'$, suy ra tam giác $AB'D$ cân tại B'.

TH1: $\widehat{AB'D} = 60^\circ$, suy ra tam giác $AB'D$ đều nên $AB' = AD = 2a\sqrt{3}$. Khi đó

$$BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = \sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2 - (2a)^2} = 2a\sqrt{2}.$$

Suy ra thể tích của khối lăng trụ đã cho là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot BB' = a^2\sqrt{3} \cdot 2a\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{6}.$$

TH2: $\widehat{AB'D} = 120^\circ$, suy ra $\widehat{DAB'} = 30^\circ$. Gọi M trung điểm AD, ta có $AM = a\sqrt{3}$, suy ra

$$AB' = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 2a = AB \quad \text{(vô lý)}.$$

Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V_{ABC.A'B'C'} = 2a^3\sqrt{6}$.
Chọn phương án **C.** □

Câu 1.32. Từ đồ thị, suy ra

$$f\left(f(x)\right) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(f(x)\right) = f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2. \end{array}\right.$$

Lại từ đồ thị suy ra

- $f(x) = -2$ có 2 nghiệm $x = -2$, $x = 1$.
- $f(x) = 0$ có 3 nghiệm $x = 0$, $x = a \in (-2; -1)$, $x = b \in (1; 2)$.
- $f(x) = 2$ có 2 nghiệm $x = -1$, $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt.
Chọn phương án **B.** □

Câu 1.33. Vì $f(x)$ là hàm số bậc ba nên điểm trên (C) mà có duy nhất một tiếp tuyến của (C) đi qua chính là tâm đối xứng của (C). Ta có

$$f'(x) = (x - 2021)(x - 2022) + (x - 2021)(x - 2023) + (x - 2022)(x - 2023).$$

Suy ra

$$f''(x) = x - 2021 + x - 2022 + x - 2021 + x - 2023 + x - 2022 + x - 2023 = 6x - 12132.$$

Suy ra

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2022 \Rightarrow y = 0.$$

Do đó $M(2022; 0)$. Vậy $x_0 + y_0 = 2022$.
Chọn phương án **D.** □

Câu 1.34. Ta có $2^{11} = 2048 > 2023$ và $2023 > 2022$ nên

$$2023^{2^{11}} > 2022^{2023}, \quad \text{hay } z > x.$$

Lại có

$$2022^{2023} = 2022^{2022} \cdot 2022 = 2022^{2022} + 2022^{2022} + \cdots + 2022^{2022}.$$

Do đó

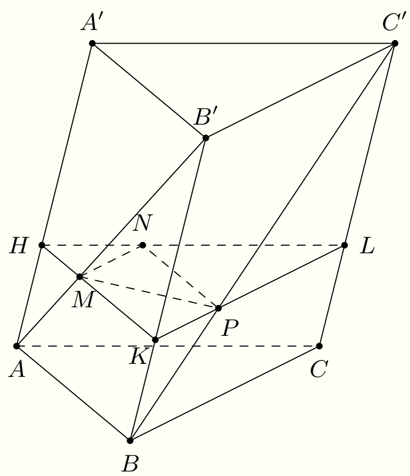
$$2022^{2022} > 1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 2022^{2022}, \quad \text{hay } x > y.$$

Vậy $y < x < z$.
Chọn phương án **C.** □

Câu 1.35. Từ đồ thị suy ra
$$f(x) \geqslant f(-2) \Leftrightarrow f(x) \geqslant -5, \forall x \in \mathbb{R}.$$
Đặt $h(x) = x^{2022} + 4 \cdot x^{2021} + 4 \cdot x^{2020} + x^2 + 4x + 2023$, ta có
$$\begin{aligned} h(x) &= \left(x^2+4x+4\right)x^{2020} + x^2 + 4x + 4 + 2019 \\ &= (x+2)^2 x^{2020} + (x+2)^2 + 2019 \\ &\geqslant 2019. \end{aligned}$$
Do đó
$$g(x) = f(x) + h(x) \geqslant -5 + 2019 = 2014.$$
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = -2$.
Chọn phương án **A.** □

Câu 1.36. Đường tròn (C) có tâm $I(0;1)$. Ta có
$$y' = 4x^3 - 4mx; \quad y'(1) = 4 - 4m; \quad y(1) = 1 - m.$$
Do đó phương trình tiếp tuyến d là
$$d\colon y = (4-4m)(x-1) + 1 - m = (4-m)x + 3m - 3,$$
hay
$$d\colon (4-m)x - y + 3m - 3 = 0.$$
Khi đó
$$\mathrm{d}(I,d) = \frac{|3m-4|}{\sqrt{(4-m)^2+1}} = \frac{\left|\frac{3}{4}(4m-4) + 1\cdot(-1)\right|}{\sqrt{(4-m)^2+1}} \leqslant \frac{\sqrt{\left(\frac{9}{16}+1\right)\left[(4m-4)^2+1\right]}}{\sqrt{(4-m)^2+1}} = \frac{5}{4}.$$
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi
$$\frac{4m-4}{1} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow m = \frac{13}{16}.$$
Vậy d cắt (C) theo dây cung nhỏ nhất khi $\mathrm{d}(I,d)$ lớn nhất bằng $\frac{5}{4}$ khi $m = \frac{13}{16} \in (0;1)$.
Chọn phương án **A.** □

Câu 1.37.



Ta có
$$V_{ABC.A'B'C'} = B \cdot h = 6a^2 \cdot 3a = 18a^3.$$
Gọi H, K, L lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $HA' = 2HA$, $KB' = 2KB$, $LC' = 2LC$, khi đó $(HKL) \parallel (ABC)$ và $M, N, P \in (HKL)$. Đặt $V = V_{ABC.HKL}$, ta có
$$V = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot 18a^3 = 6a^3.$$
Ta có
$$\begin{aligned} V_{A.HMN} &= \frac{1}{3}\mathrm{d}(A,(HKL)) \cdot S_{\triangle HMN} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(A,(HKL)) \cdot \frac{1}{9}S_{\triangle HKL} = \frac{1}{27}V; \\ V_{B.KMP} &= \frac{1}{3}\mathrm{d}(B,(HKL)) \cdot S_{\triangle KMP} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(B,(HKL)) \cdot \frac{2}{9}S_{\triangle HKL} = \frac{2}{27}V; \\ V_{C.LNP} &= \frac{1}{3}\mathrm{d}(C,(HKL)) \cdot S_{\triangle LNP} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(C,(HKL)) \cdot \frac{4}{9}S_{\triangle HKL} = \frac{4}{27}V. \end{aligned}$$
Vậy
$$V_{ABCMNP} = V - (V_{A.HMN} + V_{B.KMP} + V_{C.LNP}) = V - \left(\frac{1}{27}V + \frac{2}{27}V + \frac{4}{27}V\right) = \frac{20}{27}V = \frac{40a^3}{9}.$$
Chọn phương án **B.** □

Câu 1.38. Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có
$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \cdot 2022^{f(x)} \cdot \ln 2022 - f'(x) \cdot 2023^{f(x)} \cdot \ln 2023 \\ &= f'(x)\left[2022^{f(x)} \cdot \ln 2022 - \cdot 2023^{f(x)} \cdot \ln 2023\right]. \end{aligned}$$
Do đó
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ 2022^{f(x)} \cdot \ln 2022 - \cdot 2023^{f(x)} \cdot \ln 2023 = 0. \quad (1) \end{array}\right.$$
Từ bảng biến thiên, suy ra
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$$
Lại có
$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2022^{f(x)} \cdot \ln 2022 = \cdot 2023^{f(x)} \cdot \ln 2023 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2022}{2023}\right)^{f(x)} = \log_{2022} 2023 \\ &\Leftrightarrow f(x) = \log_{\frac{2022}{2023}}(\log_{2022} 2023) \approx -0{,}13. \end{aligned}$$
Từ bảng biến thiên, suy ra (1) có 2 nghiệm $x_1 \in (0;2)$ và $x_2 \in (2;+\infty)$. Từ đó suy ra bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		x_1		2		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực đại.
Chọn phương án **C.** □

Câu 1.39. Số phần tử không gian mẫu là

$$\mathrm{n}(\Omega) = 10^5 - 1 = 99\,999.$$

Gọi A là biến cố: "Chọn được biển số mà ba chữ số a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng". Vì a, b, c lập thành cấp số cộng nên a và c cùng chẵn hoặc cùng lẻ và $b = \dfrac{a+c}{2}$. Do đó số phần tử biến cố A là

$$\mathrm{n}(A) = 10 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 - 1 = 4999.$$

Vậy xác suất cần tìm là

$$\mathrm{P}(A) = \frac{4999}{99\,999}.$$

Chọn phương án **D.** □

Câu 1.40. Phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} & 2022^{x^2-2x+1-2|x-m|} - \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2) = 0 \\ \Leftrightarrow\; & \frac{2022^{x^2-2x+3}}{2022^{2|x-m|+2}} = \frac{\ln\left(x^2-2x+3\right)}{\ln(2|x-m|+2)} \\ \Leftrightarrow\; & 2022^{x^2-2x+3} \cdot \ln\left(x^2-2x+3\right) = 2022^{2|x-m|+2} \cdot \ln(2|x-m|+2)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \ln t$ trên $[2; +\infty)$, ta có

$$f'(t) = 2^t \cdot \ln t \cdot \ln 2 + \frac{2^t}{t} > 0,\ \forall t \in [2; +\infty).$$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$, suy ra

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x-m| + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 = 2x - 2m \\ x^2 - 2x + 1 = 2m - 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - 4x + 2m + 1 = 0 & \text{(i)} \\ x^2 - 2m + 1 = 0. & \text{(ii)} \end{array}\right.$$

Giả sử x_0 là nghiệm chung của (i) và (ii), ta có

$$\left[\begin{array}{l} x_0^2 - 4x_0 + 2m + 1 = 0 \\ x_0^2 - 2m + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_0 = -m.$$

Đồ thi (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi (i) và (ii) có 2 nghiệm phân biệt khác $-m$, suy ra

$$\begin{cases} 4 - (2m+1) > 0 \\ 2m - 1 > 0 \\ m^2 - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{3}{2} \\ m > \dfrac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} < m < \dfrac{3}{2} \\ m \neq 1. \end{cases}$$

Do đó $m \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right) \setminus \{1\}$, suy ra $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$, $c = 1$. Vậy $a + b + c = 3$.
Chọn phương án **A.** □

Câu 1.41. Ta có

$$y' = -4x^3 + 2(2m-3)x = 2x(-2x^2 + 2m - 3).$$

Hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y' \leqslant 0,\ \forall x \in (1;2) &\Leftrightarrow -2x^2 + 2m - 3 \leqslant 0,\ \forall x \in (1;2) \\ &\Leftrightarrow 2m \leqslant 2x^2 + 3,\ \forall x \in (1;2) \\ &\Leftrightarrow m \leqslant \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $m \leqslant \dfrac{5}{2}$. □

Câu 1.42. Ta có

$$y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 12m = 3(x^2 - 2mx - 2x + 4m) = 3(x-2)(x-2m); \quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2m. \end{array}\right.$$

Với $m \neq 1$, đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị

$$A(2; 9m), \quad B\left(2m; -4m^3 + 12m^2 - 3m + 4\right).$$

Vì A, B, C nhận O làm trọng tâm nên ta có

$$\begin{cases} 2 + 2m - 1 = 0 \\ 9m - 4m^3 + 12m^2 - 3m + 4 - \dfrac{9}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $m = -\dfrac{1}{2}$. □

Câu 1.43. Đặt $\sqrt{\log_3^2 x + 1} = t$. Với $x \in \left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$, ta có $t \in [1; 2]$, phương trình trở thành

$$t^2 - (m+1)t - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - t - 2}{t + 2}.$$

Xét $f(t) = \dfrac{t^2 - t - 2}{t + 2}$ trên $[1; 2]$, ta có

$$f'(t) = \frac{t^2 + 4t}{(t+2)^2} > 0, \ \forall t \in [1; 2].$$

Do đó phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trên $[1; 2]$ khi và chỉ khi

$$f(1) \leqslant m \leqslant f(2) \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leqslant m \leqslant 0.$$

Vậy $-\dfrac{2}{3} \leqslant m \leqslant 0$. □

Câu 1.44. Đặt $\log_y x = a$, $\log_z y = b$, $\log_x z = c$. Vì $x, y, z > 1$ nên $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Khi đó

$$P = \frac{a^2}{\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}} + \frac{b^2}{\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}} + \frac{c^3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \frac{a^3bc}{b+c} + \frac{b^3ca}{c+a} + \frac{c^3ab}{a+b} = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}.$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}} + \frac{b^2}{\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}} + \frac{c^3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} \\ &= \frac{a^3bc}{b+c} + \frac{b^3ca}{c+a} + \frac{c^3ab}{a+b} \\ &= \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ dạng $Engel$, ta có

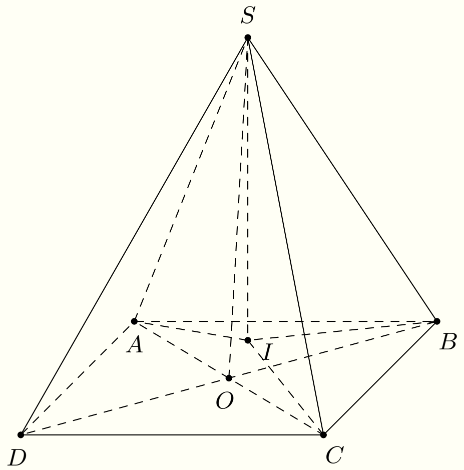
$$P \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2} \geqslant \frac{3\sqrt[3]{abc}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$a = b = c = 1 \Rightarrow x = y = z.$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{2}$ khi $x = y = z > 1$. □

Câu 1.45.



a) Ta có

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = 3a^2\sqrt{3}.$$

Trong tam giác ABC, ta có

$$AC = \sqrt{BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}} = a\sqrt{7}.$$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có

$$AI = \frac{AC}{2 \sin \widehat{ABC}} = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

Vì $IA = IB = IC$ và $SA = SB = SC$ nên $SI \perp (ABCD)$, suy ra

$$SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \frac{a\sqrt{15}}{3}.$$

Vậy thể thích khối chóp là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SI = a^3\sqrt{5}.$$

b) Đặt $SD = x > 0$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tam giác SAC có SO là trung tuyến nên

$$SO^2 = \frac{SA^2 + SC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = 4a^2 - \frac{AC^2}{4}. \tag{1}$$

Tam giác SBD có SO là trung tuyến nên

$$SO^2 = \frac{SB^2 + SD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} = \frac{4a^2 + x^2}{2} - \frac{BD^2}{4}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$4a^2 - \frac{AC^2}{4} = \frac{4a^2 + x^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \Leftrightarrow AC^2 = 8a^2 - 2x^2 + BD^2$$

$$\Leftrightarrow 2AC^2 = 8a^2 - 2x^2 + AC^2 + BD^2. \tag{3}$$

Bổ đề Cho hình bình hành $ABCD$. Khi đó

$$AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + BC^2\right). \tag{4}$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)^2 \\ &= 2\left(AB^2 + BC^2\right) + 2\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right) \\ &= 2\left(AB^2 + BC^2\right). \end{aligned}$$

Từ (3) và (4), suy ra

$$2AC^2 = 8a^2 - 2x^2 + 2\left(AB^2 + BC^2\right) \Leftrightarrow AC^2 = 17a^2 - x^2.$$

Vì $AC > 0$ nên

$$x < a\sqrt{17} \quad \text{và} \quad AC = \sqrt{17a^2 - x^2}.$$

Do đó

$$SD \cdot AC = x\sqrt{17a^2 - x^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$SD \cdot AC \leqslant \frac{x^2 + 17a^2 - x^2}{2} = \frac{17a^2}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$17a^2 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{34}}{2}.$$

Vậy $SD \cdot AC$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{17a^2}{2}$ khi $SD = \dfrac{a\sqrt{34}}{2}$.

□

ĐỀ SỐ 2

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2021-2022

Câu 2.1. Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0;3]$. Ta có

$$y' = \sqrt{x^2+16} + \frac{x\cdot(x-18)}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{2x^2-18x+16}{\sqrt{x^2+16}}.$$

Do đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2-18x+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in(0;3) \\ x=8\notin(0;3). \end{array}\right.$$

Lại có

$$y(0)=-72;\quad y(1)=-17\sqrt{17};\quad y(3)=-75.$$

Vậy

$$\min_{[0;3]} y = -75;\quad \max_{[0;3]} y = -17\sqrt{17}.$$

□

Câu 2.2. Ta có

$$y' = 4x^3 - 2(m+1)x = 2x(2x^2-m-1).$$

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$. Khi đó đồ thị hàm số đạt cực trị tại

$$A(0;2022),\quad B\left(\sqrt{\frac{m+1}{2}};2022-\frac{(m+1)^2}{4}\right),\quad C\left(-\sqrt{\frac{m+1}{2}};2022-\frac{(m+1)^2}{4}\right).$$

Suy ra

$$\overrightarrow{AB}\left(\sqrt{\frac{m+1}{2}};-\frac{(m+1)^2}{4}\right),\quad \overrightarrow{AC}\left(-\sqrt{\frac{m+1}{2}};-\frac{(m+1)^2}{4}\right).$$

Tam giác ABC luôn cân tại A. Do đó tam giác ABC nhọn khi và chỉ khi góc $\widehat{BAC}$ nhọn khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0 \Leftrightarrow -\frac{m+1}{2}+\frac{(m+1)^4}{16}>0 \Leftrightarrow (m+1)\left[(m+1)^3-8\right]>0.$$

Kết hợp điều kiện $m>-1$, ta được $(m+1)^3>8 \Leftrightarrow m>1$. Vậy $m>1$ là giá trị cần tìm. □

Câu 2.3. Điều kiện $x<\frac{1}{2}$. Khi đó ta có phương trình tương đương

$$\log_3\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=\log_3(1-2x)+(1-2x). \tag{1}$$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$, với $t>0$, ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0$, $\forall t>0$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)=f(1-2x)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}=1-2x\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}1-2x\geq 0\\ x^2-x+1=(1-2x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant\frac{1}{2}\\ x^2-x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$. □

Câu 2.4. Số các số tự nhiên có 5 chữ số là 90 000. Giả sử số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là $\overline{abcd1}$. Ta có

$$\overline{abcd1} = 10 \cdot \overline{abcd} + 1 = 3 \cdot \overline{abcd} + 7 \cdot \overline{abcd} + 1$$

chia hết cho 7 khi và chỉ khi $3 \cdot \overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7. Đặt

$$3 \cdot \overline{abcd} + 1 = 7h \Leftrightarrow \overline{abcd} = 2h + \frac{h-1}{3}.$$

Vì $\overline{abcd}$ nguyên nên $\dfrac{h-1}{3}$ nguyên khi và chỉ khi $h = 3t + 1$. Khi đó ta được

$$\begin{aligned} \overline{abcd} = 7t + 2 \quad &\Rightarrow \quad 1000 \leqslant 7t + 2 \leqslant 9999 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{998}{7} \leqslant t \leq \frac{9997}{7} \\ &\Leftrightarrow \quad t \in \{143,\ 144,\ \ldots,\ 1428\}. \end{aligned}$$

Suy ra số cách chọn ra t sao cho số $\overline{abcd1}$ chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là 1286. Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{1286}{90000} = \dfrac{643}{45000}$. □

Câu 2.5. Xét

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $\sqrt{\ln^2 x + 1} = t \Rightarrow \ln^2 x = t^2 - 1 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$, ta có

$$\int f(x)dx = \int \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + C.$$

Suy ra

$$F(x) = \frac{\sqrt{(\ln^2 x + 1)^3}}{3} + C.$$

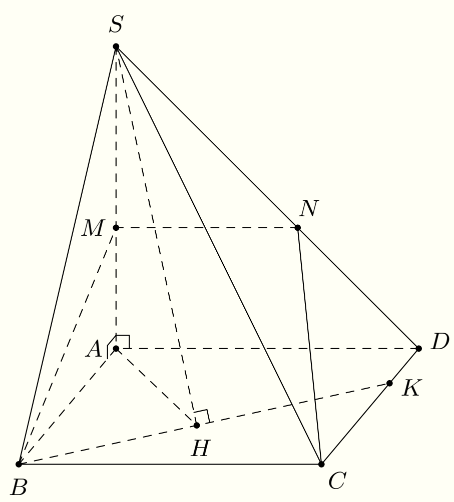
Do $F(1) = \dfrac{1}{3}$ nên $C = 0$. Vậy $[F(\mathrm{e})]^2 = \dfrac{8}{9}$. □

Câu 2.6. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;0)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$. Ta có $IA = 4\sqrt{2} = 2R = 2IM$; $IB = \sqrt{30} > R$ nên B nằm ngoài mặt cầu (S). Lấy điểm K sao cho $\overrightarrow{IK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{IA}$, suy ra $K(0;3;0)$. Ta có $IK = \dfrac{1}{2}R = \dfrac{1}{2}IM$ nên K nằm trong mặt cầu (S). Lại có $\dfrac{MA}{KM} = \dfrac{IA}{IM} = 2 \Leftrightarrow MA = 2MK$. Khi đó

$$MA + 2MB = 2MK + 2MB \geqslant 2BK = 6\sqrt{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $M = BK \cap (S)$ và M nằm giữa B, K. Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MB$ bằng $6\sqrt{2}$. □

Câu 2.7.



a) Vì $AD \parallel (MBC)$ nên qua M kẻ đường thẳng song song AD, cắt SD tại N, ta có $MNCB$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (MBC). Ta có $MN \parallel AD \Rightarrow MN \parallel BC$ và $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BM$, do đó thiết diện $MNCB$ là hình thang vuông tại B và M. Ta có

$$BM = \sqrt{BA^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Vì $MN \parallel AD$ nên

$$MN = \frac{SM \cdot AD}{SA} = \frac{(2a - x)b}{2a}.$$

Vậy diện tích thiết diện là

$$S_{MNCB} = \frac{1}{2}\left[\frac{2ab - bx}{2a} + b\right] \cdot \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{4ab - bx}{4a} \cdot \sqrt{a^2 + x^2}.$$

b) Gọi V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$ ta có

$$V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{2a^2 b}{3}.$$

Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.MNCB$ ta có

$$V_1 = V_{S.MBC} + V_{S.MNC}.$$

Mặt khác

$$\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM \cdot SB \cdot SC}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{SM}{SA} = \frac{2a - x}{2a}$$

mà $V_{S.ABC} = \dfrac{V}{2}$ nên $V_{S.MBC} = \dfrac{2a - x}{2a} \cdot \dfrac{V}{2} = \dfrac{(2a - x)ab}{6}$.

Lại có

$$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM \cdot SN \cdot SC}{SA \cdot SD \cdot SC} = \frac{SM \cdot SN}{SA \cdot SD} = \left(\frac{MN}{AD}\right)^2 = \left(\frac{2a - x}{2a}\right)^2$$

mà $V_{S.ACD} = \dfrac{V}{2} = \dfrac{a^2 b}{3}$ nên $V_{S.MNC} = \dfrac{(2a - x)^2}{4a^2} \cdot \dfrac{a^2 b}{3} = \dfrac{(2a - x)^2}{12} b$.

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$V_1 = \frac{V}{2} = \frac{a^2 b}{3} \Leftrightarrow \frac{(2a - x)ab}{6} + \frac{(2a - x)^2 b}{12} = \frac{a^2 b}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 6ax + 4a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (3 + \sqrt{5})a \text{ (loại)} \\ x = (3 - \sqrt{5})a \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$$

Vậy với $x = a\left(3 - \sqrt{5}\right)$ thì mặt phẳng (MBC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau.

c) Thể tích khối chóp $S.ABH$ là $V = \dfrac{1}{3} S_{ABH} \cdot SA$, mà SA không đổi nên thể tích V lớn nhất khi và chỉ khi $S_{\triangle ABH}$ lớn nhất.

Theo bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$a^2 = AB^2 = AH^2 + BH^2 \geqslant 2AH \cdot BH \Rightarrow S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} AH \cdot BH \leq \frac{a^2}{4}.$$

Suy ra $\max S_{\triangle ABH} = \dfrac{a^2}{4}$ đạt được khi $AH = BH$, hay tam giác ABH vuông cân tại H. Khi đó $K \equiv D$. Vậy khi $K \equiv D$ thì thể tích khối chóp $S.ABH$ đạt giá trị lớn nhất và thể tích lớn nhất đó là

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABH} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 2a = \frac{a^3}{6}.$$

□

Câu 2.8. Ta có

$$\frac{2}{b+a} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{ab+1}{2ab} \Leftrightarrow \frac{2(b-a)}{b+a} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right).$$

- Chứng minh $\frac{2(b-a)}{b+a} < \ln\frac{b}{a}$, với a, b là các số thực dương mà $a < b$. Thật vậy: Với số thực $a > 0$ tùy ý, xét hàm số

  $$f(x) = \ln\frac{x}{a} - \frac{2(x-a)}{x+a}$$

  xác định trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có

  $$f'(x) = \frac{(x-a)^2}{x(x+a)^2} \geqslant 0,\ \forall x > 0; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

  Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Vì $b > a$ nên $f(b) > f(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(b-a)}{b+a} < \ln\frac{b}{a}$.

- Chứng minh $\ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)$ với a, b là các số thực dương mà $a < b$. Thật vậy: Với số thực $a > 0$ tùy ý, xét hàm số

  $$g(x) = \frac{x-a}{2}\left(1+\frac{1}{ax}\right) - \ln\frac{x}{a}$$

  xác định trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có

  $$g'(x) = \frac{(x-1)^2}{2x^2} \geqslant 0, \forall x > 0; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

  Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Vì $b > a$ nên $g(b) > g(a) = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)$.

□

ĐỀ SỐ 3

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2020-2021

Câu 3.1. Giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành là $A(-2;0)$, với trục tung là $B(0;-2)$. Phương trình đường thẳng AB là $x+y+2=0$, $AB=2\sqrt{2}$. Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{x_0-1}\right)\in(C)$ với $x_0\neq 1$, ta có

$$\mathrm{d}(M;AB)=\frac{\left|x_0+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}+2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{|x_0^2+2x_0|}{\sqrt{2}|x_0-1|}.$$

Do đó

$$S_{MAB}=8\Leftrightarrow\frac{1}{2}AB\cdot\mathrm{d}(M;AB)=8\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{x_0^2+2x_0}{\sqrt{|x_0-1|}}=8.$$

Hay

$$|x_0^2+2x_0|=8|x_0-1|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0^2-6x_0+8=0\\x_0^2+10x_0-8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=4\\x_0=-5+\sqrt{33}\\x_0=-5-\sqrt{33}.\end{array}\right.$$

Kết hợp với $x_0\neq1$ và điểm M có tọa độ nguyên, ta có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M(2;4)$ và $M(4;2)$. □

Câu 3.2. Hàm số được viết lại như sau:

$$y=\left|\frac{3\sin x-4\sin^3x}{12}+1-\sin^2x-\frac{\sin x}{4}-m\right|=\left|\frac{\sin^3x}{3}+\sin^2x+m-1\right|.$$

Đặt $t=\sin x$, $t\in[-1;1]$, ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y=\left|\frac{1}{3}t^3+t^2+m-1\right|,\quad \text{với } t\in[-1;1].$$

Xét hàm số

$$g(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2+m-1,\quad textvi\ t\in[-1;1].$$

Ta có

$$g'(t)=t^2+2t;\quad g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\in[-1;1]\\t=-2\notin[-1;1].\end{array}\right.$$

Do đó

$$g(-1)=m-\frac{1}{3},\quad g(0)=m-1,\quad g(1)=m+\frac{1}{3}.$$

Lại có $m-1<m-\dfrac{1}{3}<m+\dfrac{1}{3}$. Vậy

$$\max_{x\in\mathbb{R}}y=\max_{[-1;1]}\left|\frac{1}{3}t^3+t^2+m-1\right|=\max\left\{|m-1|,\left|m+\frac{1}{3}\right|\right\}.$$

Đặt $A=\left\{|m-1|,\left|m+\dfrac{1}{3}\right|\right\}$.

TH1: $|m-1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A=\left\{1;\dfrac{7}{3}\right\} \\ A=\left\{1;\dfrac{1}{3}\right\} \end{array}\right.$. Trường hợp này chỉ có $m=0$ thỏa mãn.

TH2: $|m+\frac{1}{3}|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2}{3} \\ m=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A=\left\{1;\dfrac{1}{3}\right\} \\ A=\left\{1;\dfrac{7}{3}\right\} \end{array}\right.$. Trường hợp này chỉ có $m=\dfrac{2}{3}$ thỏa mãn.

Vậy các giá trị m cần tìm là $m \in \left\{0;\dfrac{2}{3}\right\}$. □

Câu 3.3. Điều kiện $u_1>0$, $u_{19}>0$, $\log u_{19}-\log u_1+3 \geqslant 0$. Đặt $a=\sqrt[3]{\log u_{19}-\log u_1}$, $b=\sqrt{\log u_{19}-\log u_1+3}$ với $b \geqslant 0$, suy ra $a^3-b^2=-3$. Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a^3-b^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a \\ (a-1)(a^2+6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{(thỏa mãn } b \geqslant 0).$$

Vì $u_{n+1}=u_n+2$ nên dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d=2$. Do đó $u_{19}=u_1+18d=u_1+36$. Với $a=1$, suy ra

$$\log u_{19}-\log u_1=1 \Leftrightarrow \log\frac{u_{19}}{u_1}=1 \Leftrightarrow u_{19}=10u_1 \Leftrightarrow u_1+36=10u_1 \Leftrightarrow u_1=4.$$

Số hạng tổng quát $u_n=u_1+(n-1)d=2n+2$. Do đó

$$\left(\sqrt{2}\right)^{u_n}=4^{2020} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{2n+2}=4^{2020} \Leftrightarrow n=4039.$$

Vậy $n=4039$. □

Câu 3.4. Ta có

$$f(1-x)=\frac{\sqrt{2020}}{2020^x+\sqrt{2020}} \Rightarrow f(x)+f(1-x)=1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} S &= f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2}{2021}\right)+\ldots+f\left(\frac{2020}{2021}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)+f\left(\frac{2}{2021}\right)+f\left(\frac{2019}{2021}\right)+\cdots+f\left(\frac{1010}{2021}\right)+f\left(\frac{1011}{2021}\right) \\ &= 1010. \end{aligned}$$

□

Câu 3.5. Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_{2020}^3$. Gọi A là biến cố: "Chọn được 3 đỉnh từ đa giác để tạo thành tam giác tù". Xét đường chéo A_1A_{1011} của đa giác đều là đường kính của đường tròn (O) ngoại tiếp đa giác đều, chia đường tròn làm thành hai phần, mỗi phần có 1009 điểm: từ A_2 đến A_{1010} và từ A_{1012} đến A_{2020}. Khi đó, mỗi tam giác có dạng $A_1A_iA_j$ là tam giác tù nếu A_i và A_j cùng nằm trong nửa đường tròn (O) đường kính A_1A_{1011}.

- Chọn nửa đường tròn có 2 cách chọn.
- Chọn hai điểm A_i, A_j tùy ý được lấy từ $A_2, A_3, \ldots, A_{1010}$ có C_{1010}^2 cách chọn.
- Giả sử A_i nằm giữa đỉnh A_1 và A_j thì tam giác $A_1A_iA_j$ tù tại đỉnh A_i. Khi cố định A_1 và hoán đổi vị trí A_i, A_j thì kết quả bị lặp lại hai lần.
- Có 2020 cách chọn đỉnh, suy ra $n(A)=\dfrac{2\cdot \mathrm{C}_{1009}^2\cdot 2020}{2}=2020\cdot\mathrm{C}_{1009}^2$.

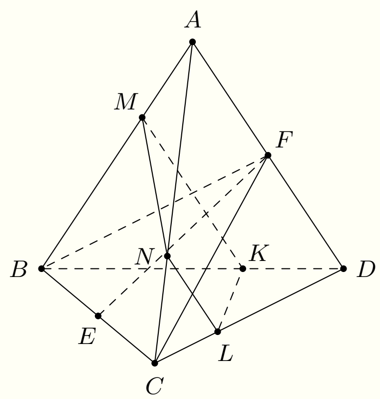
Vậy
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{2020\cdot \mathrm{C}_{1009}^{2}}{\mathrm{C}_{2020}^{3}}=\frac{504}{673}.$$

□

Câu 3.6. Đặt
$$S=\left(\mathrm{C}_{2020}^{1}\right)^2+\left(2\mathrm{C}_{2020}^{2}\right)^2+\left(3\mathrm{C}_{2020}^{3}\right)^2+\cdots+\left(2020\mathrm{C}_{2020}^{2020}\right)^2.$$
Ta có $k\mathrm{C}_n^k=n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ với $1\leqslant k\leqslant n$. Từ đó suy ra
$$\mathrm{C}_{2020}^{1}=2020\mathrm{C}_{2019}^{0};\ 2\mathrm{C}_{2020}^{2}=2020\mathrm{C}_{2019}^{1};\dots;2020\mathrm{C}_{2020}^{2020}=2020\mathrm{C}_{2019}^{2019}.$$
Do đó
$$S=2020^2\cdot\left[\left(\mathrm{C}_{2019}^{0}\right)^2+\left(\mathrm{C}_{2019}^{1}\right)^2+\left(\mathrm{C}_{2019}^{2}\right)^2+\cdots+\left(\mathrm{C}_{2019}^{2019}\right)^2\right].\tag{1}$$
Lại có, hệ số của x^{2019} trong khai triển đa thức $(1+x)^{2019}(x+1)^{2019}$ là
$$\left(\mathrm{C}_{2019}^{0}\right)^2+\left(\mathrm{C}_{2019}^{1}\right)^2+\left(\mathrm{C}_{2019}^{2}\right)^2+\ldots+\left(\mathrm{C}_{2019}^{2019}\right)^2.$$
Hệ số của x^{2019} trong khai triển đa thức $(1+x)^{4038}$ là C_{4038}^{2019}. Do đó
$$\left(\mathrm{C}_{2019}^{0}\right)^2+\left(\mathrm{C}_{2019}^{1}\right)^2+\left(\mathrm{C}_{2019}^{2}\right)^2+\ldots+\left(\mathrm{C}_{2019}^{2019}\right)^2=\mathrm{C}_{4038}^{2019}.\tag{2}$$
Từ (1) và (2), suy ra
$$\left(\mathrm{C}_{2020}^{1}\right)^2+\left(2\mathrm{C}_{2020}^{2}\right)^2+\left(\mathrm{C}_{2020}^{3}\right)^2+\cdots+\left(2020\mathrm{C}_{2020}^{2020}\right)^2=2020^2\cdot\mathrm{C}_{4038}^{2019}.$$

□

Câu 3.7.



a) Kẻ $MK\parallel AD$, $NL\parallel AD$ với $L\in CD$, $K\in BD$. Ta có
$$\frac{BM}{BA}=\frac{BK}{BD}=\frac{2}{3}\Rightarrow S_{\triangle BMK}=\frac{4}{9}S_{\triangle BAD}.$$
Và
$$\frac{\mathrm{d}(N;(ABD))}{\mathrm{d}(C;(ABD))}=\frac{NA}{CA}=\frac{2}{3}\Rightarrow \mathrm{d}(N;(ABD))=\frac{2}{3}\mathrm{d}(C;(ABD)).$$
Suy ra $V_{N.BMK}=\dfrac{8}{27}V$. Tương tự, ta có $\mathrm{d}(N,(BCD))=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A;(BCD))$. Lại có $\dfrac{DK}{DB}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{DL}{DC}=\dfrac{2}{3}$. Suy ra
$$S_{\triangle DKL}=\frac{2}{9}S_{\triangle DBC}\Rightarrow S_{BCLK}=\frac{7}{9}S_{\triangle BCD}.$$
Vậy
$$V_{BCMNLK}=V_{N.BMK}+V_{N.BCLK}=\frac{15}{27}V=\frac{5}{9}V.$$

b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD. Ta có $EF \perp BC$, $EF \perp AD$ và $AD \perp (FBC)$. Tam giác FBC cân tại F nên

$$EF^2 = BF^2 - \frac{BC^2}{4} = AB^2 - \frac{AD^2}{4} - \frac{BC^2}{4} = \frac{3-x^2}{4}.$$

Suy ra $EF = \dfrac{\sqrt{3-x^2}}{2}$. Do đó

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}AD \cdot S_{\triangle FBC} = \frac{1}{12} \cdot x \cdot \sqrt{3-x^2} \leqslant \frac{x^2+3-x^2}{24} = \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Vậy giá trị cần tìm là $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

□

Câu 3.8. Trước hết ta chứng minh $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} < \log_2 \dfrac{n+1}{2}$. Thật vậy, theo bất đẳng thức $AM - GM$ với $k \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\sqrt[k]{2} = \sqrt[k]{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1} < \frac{2+1+1+\cdots+1}{k} = \frac{k+1}{k} \quad \text{(dấu bằng không xảy ra)}.$$

Do đó

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \ldots \sqrt[n]{2} < \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \ldots \frac{n+1}{n}.$$

Suy ra

$$2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} < \frac{n+1}{2}.$$

Lấy lôgarit cơ số 2 hai vế, ta có

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \log_2 \frac{n+1}{2}. \tag{1}$$

Bây giờ ta chứng minh $\ln \dfrac{n+1}{2} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Ta cần sử dụng tính chất sau $\ln(x+1) < x$ với $x > 0$. Xét hàm số $f(x) = \ln(x+1) - x$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1} < 0$, với $x > 0$. Do đó, hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$, suy ra $f(x) < f(0) = 0$. Vậy $\ln(x+1) < x$ với $x > 0$.
Áp dụng bất đẳng thức trên, suy ra

$$\begin{aligned}
&\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}\\
&\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{3}\\
&\ldots\\
&\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Cộng theo vế, ta có

$$\begin{aligned}
&\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\\
\Leftrightarrow\ &\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\\
\Leftrightarrow\ &\ln\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\\
\Leftrightarrow\ &\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$\ln \frac{n+1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \log_2 \frac{n+1}{2}.$$

□

ĐỀ SỐ 4

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2019-2020

Câu 4.1. Đặt $\sin x + \cos x = t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$. Hàm số trở thành

$$y = \frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}} = f(t), \quad \text{với } t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right].$$

Ta có

$$f'(t) = \frac{1-t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Khi đó

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad f(1) = \sqrt{2}.$$

Vậy

$$\min y = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi; \quad \max y = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

□

Câu 4.2. Dễ thấy đường thẳng $d\colon y = mx - m - 1$ luôn đi qua điểm $I(1; -1)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận. Lại có $y' = \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0, \forall x \neq 1$ nên để đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N thì $m < 0$. Khi đó $I(1; -1)$ luôn là trung điểm của đoạn MN. Ta có

$$AM^2 + AN^2 = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right)^2 - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AI}^2 - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 32 - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}. \tag{1}$$

Xét trong tam giác AMN có

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos A = AM^2 + AM^2 - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}. \tag{2}$$

Trừ theo vế (1) và (2) được

$$AM^2 + AN^2 - MN^2 = 32 - (AM^2 + AN^2) \Leftrightarrow AM^2 + AN^2 = 16 + \frac{1}{2}MN^2.$$

Do đó $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MN đạt giá trị nhỏ nhất. Mà (C) là Hypebol nên khi d là đường phân giác của góc tạo bởi hai tiệm cận thì $m = -1$ và $d\colon y = -x$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(0; 0)$, $N(2; -2)$ và MN nhỏ nhất, ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 1.3 + (-1)(-3) = 6 > 0$, suy ra $AM^2 + AN^2 = 32 - 12 = 20$. Vậy $\min\left(AM^2 + AN^2\right) = 20$ khi và chỉ khi $m = -1$. □

Câu 4.3. Ta có

$$f'(x) = -\frac{2019^x \ln 2019}{(1+2019^x)^2} \Rightarrow f'(-x) = -\frac{2019^x \ln 2019}{(1+2019^x)^2} = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f'(x)$ là hàm số chẵn, suy ra $g(x) = -xf'(x)$ là hàm số lẻ. Khi đó $P = -\sum\limits_{k=1}^{2019} g(k)$ và $Q = \sum\limits_{k=1}^{2019} g(-k) = -\sum\limits_{k=1}^{2019} g(k) = P$. Vậy $\dfrac{P}{Q} = 1$. □

Câu 4.4. Điều kiện $x > \dfrac{1}{3}$. Đặt $\log_2(3x-1) = y$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 1 = 2^y & (1) \\ 3y - 1 = 2^x & (2) \end{cases}$. Trừ theo vế (1) và (2), ta có

$$3x - 3y = 2^y - 2^x \Leftrightarrow 3x + 2^x = 3y + 2^y. \qquad (3)$$

Xét $f(t) = 3t + 2^t$ trên $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$ có $f'(t) = 3 + 2^t \ln 2 > 0$, $\forall t \in \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$ nên $(3) \Leftrightarrow x = y$, suy ra

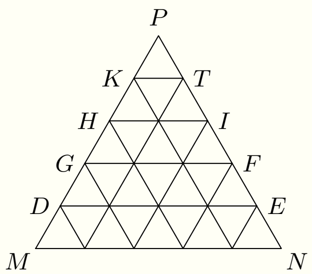
$$3x - 1 = 2^x. \qquad (4)$$

Xét $g(x) = 2^x - 3x + 1$ trên $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. Ta có

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - 3; \quad g''(x) = 2^x \ln^2 2 > 0, \ \forall x \in \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right).$$

Do đó (4) có nhiều nhất 2 nghiệm trên $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. Mặt khác $g(0) = g(3) = 0$ nên (4) có đúng hai nghiệm $x = 1$, $x = 3$. Vậy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $x = 1$, $x = 3$. □

Câu 4.5. Trên cạnh BC ta có 9 đỉnh của các tam giác đều cạnh 1 cm (kể cả B và C), trên đường thẳng tiếp theo song song BC (phía trên BC) ta có 8 đỉnh của các tam giác đều cạnh 1 cm,... cuối cùng đến A có 1 đỉnh của tam giác đều cạnh 1 cm. Suy ra $n(S) = 9 + 8 + 7 + \cdots + 2 + 1 = 45$. Do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{45}^4$. Theo yêu cầu: nếu có hình bình hành tạo thành từ 4 đỉnh trong S thì 4 đỉnh đó chỉ có thể thuộc tam giác đều cạnh 5 cm (tức là bỏ đi tất cả các đỉnh của các tam giác cạnh 1 cm nằm trên ba cạnh BC, CA, AB và cạnh có liên quan đến các đỉnh đó).



<u>TH1</u>: Các cạnh của hình bình hành nằm trên MN hoặc có đúng 1 đỉnh thuộc MN.

- Các hình bình hành có cạnh nằm trên MN và
  - Tạo bởi hai đoạn MN, DE: Ta cần chọn thêm 2 đường thẳng song song hoặc trùng với DM (hoặc song song trùng EN) thì tạo ra hình bình hành và mỗi trường hợp này có C_5^2 cách. Như vậy có: $\mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_5^2 = 20$ hình bình hành.
  - Tạo bởi hai đoạn MN, GF: Lặp lại lập luận trên ta có có: $\mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_4^2 = 12$ hình.
  - Tạo bởi hai đoạn MN, HI: Lặp lại lập luận trên ta có có: $\mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_3^2 = 6$ hình.
  - Tạo bởi hai đoạn MN, KT: Lặp lại lập luận trên ta có có: $\mathrm{C}_2^2 + \mathrm{C}_2^2 = 2$ hình.

  Vậy các hình bình hành có cạnh nằm trên MN có $20 + 12 + 6 + 2 = 40$ hình.
- Các hình bình hành có đúng 1 đỉnh thuộc MN
  - Đỉnh số 1 và số 4: đều có 4 hình bình hành
  - Đỉnh số 2 và số 3: đều có 3 hình bình hành.

  Vậy các hình bình hành có đúng 1 đỉnh thuộc MN có $2 \cdot (4 + 3) = 14$ hình.

Do đó trường hợp 1 ta có: $40 + 14 = 54$ hình.

<u>TH2</u>: Các cạnh hình bình hành nằm trên DE nhưng không thuộc MN hoặc có đúng 1 đỉnh thuộc DE. So với trường hợp 1 thì chỉ số tổ hợp giảm đi 1, ta làm tương tự và có:

$$\left(\mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_4^2\right) + \left(\mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_3^2\right) + \left(\mathrm{C}_2^2 + \mathrm{C}_2^2\right) + (3 + 3 + 2) = 28 \text{ hình}.$$

TH3: Các cạnh hình hành nằm trên GF nhưng không thuộc MN và DE hoặc có đúng 1 đỉnh thuộc GF. Tương tự ta có $\left(C_3^2 + C_3^2\right) + \left(C_2^2 + C_2^2\right) + (2+2) = 12$ hình.

TH4: Các cạnh hình hành nằm trên HI nhưng không thuộc MN, DE và GF hoặc có đúng 1 đỉnh thuộc HI. Ta có $\left(C_2^2 + C_2^2\right) + 1 = 3$ hình.

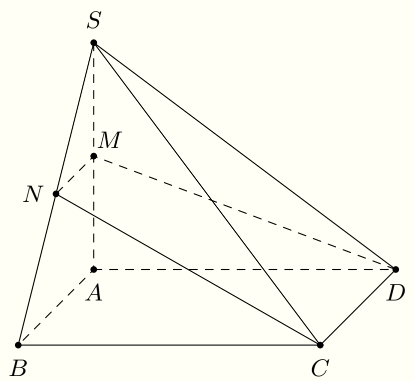
Số các hình bình hành trong bốn trường hợp là $54 + 28 + 12 + 3 = 97$ hình. Vậy xác suất cần tìm là
$$P = \frac{97}{C_{45}^4} = \frac{97}{148995}.$$

Nhận xét: Đề bài yêu cầu các đỉnh hình bình hành nằm trong miền trong của tam giác ABC nên số hình bình hành là tương đối nhỏ. Nếu các đỉnh hình hành không ngoài tam giác ABC thì sẽ nhiều hình hơn. □

Câu 4.6. Từ phương trình đầu của hệ ta có
$$\frac{2020\left(2u_1 + 2019d\right)}{2} = 4\cdot\frac{1010\left(2u_1 + 1009d\right)}{2} \Leftrightarrow 2u_1 + 2019d = 4u_1 + 2018d \Leftrightarrow d = 2u_1.$$
Từ đó suy ra $u_3 = 5u_1$, $u_5 = 9u_1$, $u_{14} = 27u_1$ thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta có
$$\left(\log_3 5 + \log_3 u_1\right)^2 + \left(\log_3 9 + \log_3 u_1\right)^2 + \left(\log_3 27 + \log_3 u_1\right)^2 = 2.$$
Đặt $\log_3 u_1 = t$, $\log_3 5 = a$, ta có phương trình
$$(a+t)^2 + (2+t)^2 + (3+t)^2 = 2 \Leftrightarrow 3t^2 + 2(a+5)t + 11 + a^2 = 0. \quad (1)$$
Vì $\Delta' = -2a^2 + 10a - 8 > 0$ nên (1) có 2 nghiệm phân biệt $t = \dfrac{-(a+5) \pm \sqrt{-2a^2 + 10a - 8}}{3}$.

Từ đó suy ra $u_1 = 3^{\frac{-(a+5)\pm\sqrt{-2a^2+10a-8}}{3}}$. Vậy $d = 2\cdot 3^{\frac{-(a+5)\pm\sqrt{-2a^2+10a-8}}{3}}$, với $a = \log_3 5$. □

Câu 4.7.



a) Ta có $AB \parallel CD$, suy ra $(SAB) \cap (\alpha) = MM \parallel CD$, do đó $MNCD$ là hình thang. Lại có $CD \perp AD$ và $CD \perp SA$ nên
$$CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp DM.$$
Suy ra $MNCD$ là hình thang vuông tại D và M. Tam giác MAD vuông tại A nên
$$DM = \sqrt{MA^2 + AD^2} = \sqrt{x^2 + a^2}.$$
Lại có $MN \parallel AB$ nên
$$\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} \Rightarrow MN = \frac{SM \cdot AB}{SA} = a - x.$$
Vậy diện tích tứ giác $MNCD$ là
$$S_{MNCD} = \frac{(CD + MN)\cdot DM}{2} = \frac{(2a - x)\sqrt{x^2 + a^2}}{2}.$$

b) Ta có
$$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} = \left(\frac{a-x}{a}\right)^2 \Rightarrow V_{S.MNC} = \frac{1}{2}\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 V_{S.ABCD}.$$
Lại có
$$\frac{V_{S.MDC}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SD}{SD} \cdot \frac{SC}{SC} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow V_{S.MDC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a-x}{a} V_{S.ABCD}.$$
Do đó
$$V_{MNCD} = V_{S.MNC} + V_{S.MDC} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 + \frac{a-x}{a}\right] V_{S.ABCD}.$$
Từ giả thiết, suy ra
$$\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 + \frac{a-x}{a} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{a-x}{a} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}.$$
Vậy với $x = \frac{2a}{3}$ thì thể tích khối chóp $S.MNCD$ bằng $\frac{2}{9}$ lần thể tích khối chóp $S.ABCD$.

□

Câu 4.8.

a) Đặt $\log_a b = t > 0$, $t \neq 1$, ta có $b = a^t$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành
$$\log_a t > \log_{a^t} t \Leftrightarrow (t-1)\log_a t > 0. \tag{1}$$

- Nếu $t > 1$ thì $t - 1 > 0$ và $\log_a t > 0$, suy ra (1) đúng.
- Nếu $0 < t < 1$ thì $t - 1 < 0$ và $\log_a t < 0$, suy ra (1) đúng.

Vậy ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

b) Áp dụng bất đẳng thức trong câu a), ta có:
$$\begin{aligned} & \log_{a_1}\left(\log_{a_1} a_2\right) + \log_{a_2}\left(\log_{a_2} a_3\right) > \log_{a_2}\left(\log_{a_1} a_2\right) + \log_{a_2}\left(\log_{a_2} a_3\right) \\ \Leftrightarrow\ & \log_{a_1}\left(\log_{a_1} a_2\right) + \log_{a_2}\left(\log_{a_2} a_3\right) > \log_{a_2}\left(\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3\right) = \log_{a_2}\left(\log_{a_1} a_3\right). \end{aligned}$$
Lặp lại lần nữa:
$$\begin{aligned} & \log_{a_2}\left(\log_{a_1} a_3\right) + \log_{a_3}\left(\log_{a_3} a_4\right) > \log_{a_3}\left(\log_{a_1} a_3\right) + \log_{a_3}\left(\log_{a_3} a_4\right) \\ \Leftrightarrow\ & \log_{a_2}\left(\log_{a_1} a_3\right) + \log_{a_3}\left(\log_{a_3} a_4\right) > \log_{a_3}\left(\log_{a_1} a_3 \cdot \log_{a_3} a_4\right) = \log_{a_3}\left(\log_{a_1} a_4\right). \end{aligned}$$
Cứ tiếp tục lặp lại như thế ta lần lượt thay được cơ số ngoài cùng của lôgarit và số lấy lôgarit trong cùng (chú ý mỗi lần thay thì cơ số a_1 không đổi), ký hiệu vế trái là P, cuối cùng ta có:
$$P > \log_{a_n}\left(\log_{a_1} a_n\right) + \log_{a_n}\left(\log_{a_n} a_1\right) = \log_{a_n}\left(\log_{a_1} a_n \cdot \log_{a_n} a_1\right) = \log_{a_n}\left(\log_{a_1} a_1\right) = 0.$$
Ta có điều phải chứng minh.

□

ĐỀ SỐ 5

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2018-2019

Câu 5.1.

TH1: Đường thẳng d song song với trục Oy. Khi đó d cắt (C) nhiều nhất tại một điểm nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: Đường thẳng d không song song với trục Oy. Khi đó d có phương trình dạng

$$y = k\left(x + \frac{5}{6}\right) + \frac{5}{4}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$\frac{1}{x} = k\left(x + \frac{5}{6}\right) + \frac{5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 12kx^2 + (10k + 15)x - 12 = 0. \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M, N khi và chỉ khi

$$\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = 100k^2 + 876k + 225 > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Vì M, N, I thẳng hàng nên I là trung điểm của MN khi và chỉ khi

$$\frac{x_M + x_N}{2} = x_I \Leftrightarrow -\frac{10k + 15}{24k} = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}\ (\text{thỏa mãn } (1)).$$

Vậy đường thẳng d có phương trình $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$ hay $3x - 2y + 5 = 0$.

□

Câu 5.2. Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x + m$ trên $\mathbb{R}$ có $\Delta' = 1 - m$.

TH1: $1 - m \leqslant 0 \Leftrightarrow m \geqslant 1$, ta có $f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó hàm số trở thành

$$y = x + x^2 - 2x + m = x^2 - x + m$$

có đồ thị là một parabol quay bề lõm lên trên nên không có cực đại.

TH2: $1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$, khi đó $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1 - \sqrt{1 - m}$, $x_2 = 1 + \sqrt{1 - m}$. Hàm số trở thành

$$y = \begin{cases} x^2 - x + m & \text{khi} \quad x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ -x^2 + 3x - m & \text{khi} \quad x \in (x_1; x_2). \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$y' = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi} \quad x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ -2x + 3 & \text{khi} \quad x \in (x_1; x_2). \end{cases}$$

Ta xét ba khả năng sau:

KN1: $x_1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 - m} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{4} \Rightarrow x_2 = \dfrac{3}{2}$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$+$	
y		$\searrow$	CT	$\nearrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số không có cực đại.

<u>KN2</u>: $x_1 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-m} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow m > \frac{3}{4} \Rightarrow x_2 < \frac{3}{2}$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		x_1		x_2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$+$		$+$		$+$	
y		$\searrow$	CT	$\nearrow$						$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số không có cực đại.

<u>KN3</u>: $x_1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-m} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow m < \frac{3}{4} \Rightarrow x_2 > \frac{3}{2}$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		x_2		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$+$		$-$		$+$	
y		$\searrow$	CT	$\nearrow$			CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{3}{2}$.

Vậy với $m < \frac{3}{4}$ thì hàm số đã cho có cực đại. □

Câu 5.3. Điều kiện $x \geqslant 3$, ta có phương trình tương đương

$$(x-4)\left(x^2-3x-3\right) = \frac{(x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)(x-4)}{\sqrt{x-3}+1}.$$

Hay

$$\left[\begin{array}{l} x = 4 \text{ (thỏa mãn)} \\ x^2-3x-3 = \dfrac{(x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x-3}+1} = 0. \quad (1) \end{array}\right.$$

Vì $x = 3$ không phải nghiệm của (1), nên ta có

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow \frac{x^2-3x-3}{x-3} = \frac{x-2+5\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-4)^2+5(x-4)+1}{x-4+1} = \frac{x-3+5\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}+1}. \quad (2) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2+5t+1}{t+1}$ trên $(-1;+\infty)$ có $f'(t) = 1 + \frac{3}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in (-1;+\infty)$.
Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$. Do đó

$$(2) \Leftrightarrow f(x-4) = f\left(\sqrt{x-3}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x-3 = x^2-8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 4$ và $x = \dfrac{9+\sqrt{5}}{2}$. □

Câu 5.4. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_6^3 = 20$. Gọi A là biến cố "Rút được 3 thẻ ghi 3 số là số đo 3 cạnh của một tam giác có góc tù". Gọi số ghi trên ba thẻ rút được là a, b, c. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a > b > c$. Khi đó a, b, c là số đo 3 cạnh của một tam giác có góc tù khi và chỉ khi $\begin{cases} a < b + c & (1) \\ a^2 > b^2 + c^2. & (2) \end{cases}$

Từ (1) và $a > b > c$, suy ra $a \geqslant 4$. Ta có các trường hợp sau:

<u>TH1</u>: $a = 4$, ta có $\begin{cases} c < b < 4 \\ b + c > 4 \\ b^2 + c^2 < 16 \end{cases}$, do đó chỉ có bộ $(b; c) = (3; 2)$ thỏa mãn.

<u>TH2</u>: $a = 6$, ta có $\begin{cases} c < b < 6 \\ b + c > 6 \\ b^2 + c^2 < 36 \end{cases}$, do đó chỉ có bộ $(b; c) = (4; 3)$ thỏa mãn.

<u>TH3</u>: $a = 8$, ta có $\begin{cases} c < b < 8 \\ b + c > 8 \\ b^2 + c^2 < 64 \end{cases}$, do đó chỉ có 2 bộ $(b; c) = (6; 4)$ và $(b; c) = (6; 3)$ thỏa mãn.

Từ đó suy ra $n(A) = 4$. Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{5}$. □

Câu 5.5.

a) Ta có

$$I(\pi) = \int_0^\pi (x \sin x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 (1 - \cos 2x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} I_1.$$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ \mathrm{d}v = (1 - \cos 2x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \\ v = x - \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$, ta có

$$I_1 = x^2 \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x(2x - \sin 2x) \, \mathrm{d}x = \pi^3 - I_2.$$

Lại đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = (2x - \sin 2x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = x^2 + \dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned} I_2 &= x\left(x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(2x^2 + \cos 2x\right) \mathrm{d}x \\ &= \pi^3 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi \\ &= \pi^3 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{3} \\ &= \frac{2\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $I(\pi) = \dfrac{1}{2}\left(\pi^3 - \dfrac{2\pi^3}{3} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi^3}{6} - \dfrac{\pi}{4}$.

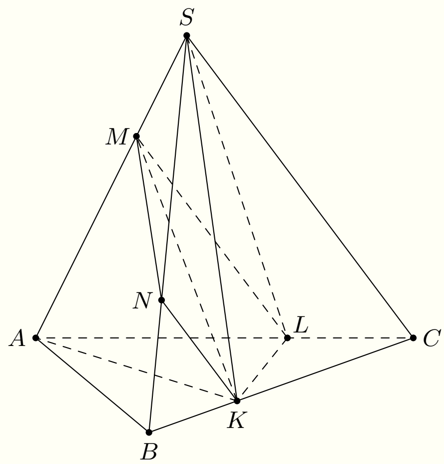
b) Ta có $I(-t) = \int\limits_0^{-t} (x\sin x)^2\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = -x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 0$, $x = -t \Rightarrow u = t$, ta có

$$I(-t) = -\int\limits_0^{t} (-u\sin(-u))^2\,\mathrm{d}u = -\int\limits_0^{t} (u\sin u)^2\,\mathrm{d}u = -I(t).$$

Do đó $I(t) + I(-t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

□

Câu 5.6.



a) Mặt phẳng (P) đi qua M, N và song song với SC cắt (SAC) và (SBC) theo các giao tuyến ML, NK đôi một song song với SC $(L \in AC,\ K \in BC)$. Khi đó thiết diện của khối tứ diện $SABC$ với mặt phẳng (P) là hình thang $MNKL$ đáy ML, KN. Vì tứ diện $SABC$ đều nên $MNKL$ là hình thang cân. Ta có $ML = \dfrac{2a}{3}$, $KN = \dfrac{a}{3}$. Trong tam giác SMN có

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{SM^2 + SN^2 - 2SM \cdot SN \cdot \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{4a^2}{9} - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên ML, ta có $MH = \dfrac{a}{6}$. Trong tam giác MNH vuông tại H có

$$NH = \sqrt{MN^2 - MH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{11}}{6}.$$

Vậy diện tích thiết diện là

$$S_{MNKL} = \frac{1}{2}NH \cdot (NK + ML) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{6}\left(\frac{a}{3} + \frac{2a}{3}\right) = \frac{a^2\sqrt{11}}{12}.$$

b) Ta có $\dfrac{CL}{CA} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{CK}{CB} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{2}{3}$. Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối đa diện $SABC$, $SCMNKL$, $ABMNKL$. Ta có $V_1 = V_{SKLC} + V_{SLKM} + V_{SKMN}$. Lại có

- $\dfrac{V_{SKLC}}{V} = \dfrac{V_{CSKL}}{V} = \dfrac{CL}{CK} \cdot \dfrac{CK}{CB} = \dfrac{2}{9}$. (1)
- $\dfrac{V_{SKLM}}{V_{SKLA}} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{V_{SKLA}}{V} = \dfrac{S_{ALK}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ALK} \cdot S_{AKC}}{S_{AKC} \cdot S_{ABC}} = \dfrac{AL}{AC} \cdot \dfrac{CK}{CB} = \dfrac{4}{9}$, suy ra $\dfrac{V_{SKLM}}{V} = \dfrac{4}{27}$. (2)

➤ $\dfrac{V_{SMNK}}{V_{SABK}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{2}{9}$ và $\dfrac{V_{SABK}}{V} = \dfrac{S_{ABK}}{S_{ABC}} = \dfrac{BK}{BC} = \dfrac{1}{3}$, suy ra $\dfrac{V_{SMNK}}{V} = \dfrac{2}{27}$. (3)

Từ (1), (2) và (3), ta có

$$\frac{V_1}{V} = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow V_1 = \frac{4}{9}V.$$

Do đó $V_2 = V - V_1 = V - \dfrac{4}{9}V = \dfrac{5}{9}V$. Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{5}$.

□

Câu 5.7. Ta có

$$\begin{aligned} \log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2) &\Leftrightarrow \log_n(n+1) - 1 > \log_{n+1}(n+2) - 1 \\ &\Leftrightarrow \log_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \log_{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Với mọi số nguyên dương $n > 1$, ta có $\log_n(n+1) > 1$, do đó

$$\log_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log_n(n+1) \cdot \log_{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) > \log_{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) > \log_{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □

ĐỀ SỐ 6

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2017-2018

Câu 6.1. Đồ thị (C) có tâm đối xứng $I(1;1)$. Lấy $M\left(x_0;\dfrac{x_0}{x_0-1}\right)\in(C)$, $x_0\neq 1$, ta có tiếp tuyến tại M là

$$y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0}{x_0-1}\Leftrightarrow x+(x_0-1)^2y-x_0^2=0.$$

Khi đó

$$\mathrm{d}(I,\mathrm{TT})=\frac{|1+(x_0-1)^2-x_0^2|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\frac{2|x_0-1|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\frac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{(x_0-1)^2}+(x_0-1)^2}}.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\frac{1}{(x_0-1)^2}+(x_0-1)^2\geqslant 2\Rightarrow \mathrm{d}(I,\mathrm{TT})\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{1}{(x_0-1)^2}=(x_0-1)^2\Leftrightarrow (x_0-1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2.\end{array}\right.$$

Với $x_0=0$, ta có phương trình tiếp tuyến $y=-x$. Với $x_0=2$, ta có phương trình tiếp tuyến $y=-x+4$. □

Câu 6.2. Ta có

$$x^3+x+\log_2\frac{x}{y}=8y^3+2y+1\Leftrightarrow x^3+x+\log_2 x=(2y)^3+2y+\log_2(2y). \qquad (1)$$

Xét $f(t)=t^3+t+\log_2 t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=3t^2+1+\dfrac{1}{t\ln 2}>0$, $\forall t\in(0;+\infty)$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó $(1)\Leftrightarrow x=2y$. Khi đó

$$P=-8y^3+4y^2+4y^4+y^2-4y^3+4y^2+4=4y^4-12y^3+9y^2+4.$$

Ta có

$$P'=16y^3-36y^2+18y;\quad P'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\y=\dfrac{3}{4}\\y=\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

y	0		$\frac{3}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
P'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
P	4	$\nearrow$	$\frac{337}{64}$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 khi và chỉ khi $x = 3$, $y = \dfrac{3}{2}$. □

Câu 6.3. Ta có $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln^{n+1} x\,\mathrm{d}x$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Đặt $\begin{cases} u = \ln^{n+1} x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = (n+1)\dfrac{1}{x}\ln^n x\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$, ta có

$$I_{n+1} = x\ln^{n+1} x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} (n+1)\ln^n x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (n+1)I_n.$$

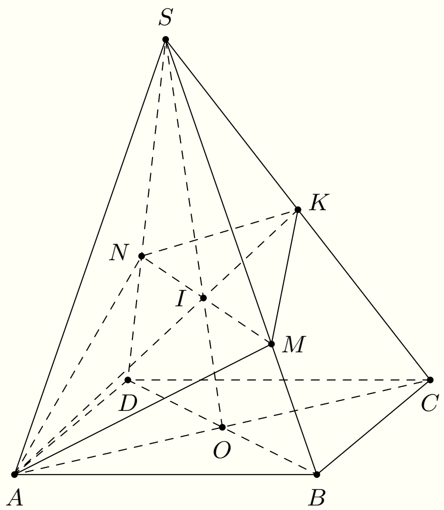
□

Câu 6.4. Đặt $u = \dfrac{\pi}{4} - x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow u = 0$, ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\right]\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u}\right)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1 + \tan u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,\mathrm{d}u - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $I = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{4}\ln 2 = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$. □

Câu 6.5.



a) Gọi $O = AC \cap BD$ và $I = SO \cap AK$. Trong (SBD), qua I kẻ đường thẳng cắt SB, SD lần lượt tại M và N. Đặt $V = V_{S.ABCD}$, ta có

$$V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = V_{BAD} = V_{BCD} = \frac{1}{2}V.$$

Ta có

$$\frac{V_{S.AMK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SM}{SB} \Rightarrow V_{S.AMK} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot V.$$

Tương tự, ta có

$$V_{S.ANK} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot V, \quad V_{S.MAN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot V, \quad V_{S.MKN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot V.$$

Ta lại có

$$V_{S.AMKN} = V_{S.AMK} + V_{S.ANK} = V_{S.MAN} + V_{S.MKN}.$$

Do đó

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{SM}{SB}\cdot V+\frac{1}{4}\cdot\frac{SN}{SD}\cdot V=\frac{3}{4}\cdot\frac{SM}{SB}\cdot\frac{SN}{SD}\cdot V\Leftrightarrow\frac{SM}{SB}+\frac{SN}{SD}=3\cdot\frac{SM}{SB}\cdot\frac{SN}{SD}. \qquad (1)$$

Chia cả hai vế của (1) cho $\frac{SM}{SB}\cdot\frac{SN}{SD}$, ta có $\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=3$ (đpcm).

b) Đặt $\frac{SM}{SB}=x$, $\frac{SN}{SD}=y$ $(0<x\leqslant 1)$. Theo câu a), ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3\Leftrightarrow x+y=3xy\Leftrightarrow y=\frac{x}{3x-1}.$$

Vì $y>0$ nên $3x-1>0$, khi đó vì $y\leqslant 1$ nên

$$\frac{x}{3x-1}\leqslant 1\Leftrightarrow x\leqslant 3x-1\Leftrightarrow x\geqslant\frac{1}{2}.$$

Theo câu a), ta có

$$\frac{V_1}{V}=\frac{3}{4}xy=\frac{3}{4}\frac{x^2}{3x-1}.$$

Xét $f(x)=\frac{x^2}{3x-1}$ trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$ có

$$f'(x)=\frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2};\quad f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

Do đó $\frac{V_1}{V}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{8}$ khi và chỉ khi $x=\frac{1}{2}$ hoặc $x=1$. Khi đó $P\equiv(ABK)$ hoặc $(P)\equiv(ADK)$.

□

Câu 6.6. Trước hết, ta có các bất đẳng thức cơ bản sau:

$$\begin{aligned}&(a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geqslant 3;\\&(a^2+b^2+c^2)^2\geqslant 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2);\\&\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}+\frac{c^2}{p}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{m+n+p},\ \forall m,n,p>0.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}S&=\frac{a^4}{a^2(b^2+1)}+\frac{b^4}{b^2(c^2+1)}+\frac{c^4}{c^2(a^2+1)}\\&\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2}\\&\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2+a^2+b^2+c^2}\end{aligned}$$

$$\geqslant \quad \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2+3}.$$

Xét $f(t)=\dfrac{3t}{t+3}$ trên $[3;+\infty)$ có

$$f'(t)=\frac{9}{(t+3)^2}>0,\ \forall t\in[3;+\infty).$$

Do đó $S \geqslant f(t) \geqslant f(3)=\dfrac{3}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. $\square$

ĐỀ SỐ 7

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2016-2017

Câu 7.1. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (H) là

$$\frac{3x-2m}{mx+1} = 3(x-m) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{1}{m} \\ 3x^2 - 3mx - 1 = 0. \end{cases}$$

Xét $f(x) = 3x^2 - 3mx - 1$ có

$$\Delta = 9m^2 + 12 > 0,\ \forall m \neq 0; \quad f\left(-\frac{1}{m}\right) = \frac{3}{m^2} + 2 \neq 0,\ \forall m \neq 0.$$

Do đó với $m \neq 0$ thì d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt

$$A(x_1; 3x_1 - 3m),\ B(x_2; 3x_2 - 3m),$$

trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của $f(x)$ nên $x_1 + x_2 = m$, $x_1x_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Ta có $\mathrm{d}(O, \Delta) = \dfrac{|3m|}{\sqrt{10}}$. Lại có

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (3x_2 - 3x_1)^2} = \sqrt{10\left[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2\right]} = \sqrt{10m^2 + \frac{40}{3}}.$$

Suy ra

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\mathrm{d}(O,\Delta)\cdot AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{|3m|}{\sqrt{10}}\cdot\sqrt{10m^2 + \frac{40}{3}} = \frac{\sqrt{3}|m|}{2}\cdot\sqrt{3m^2+4}.$$

Theo giả thiết, ta có

$$\frac{\sqrt{3}|m|}{2}\cdot\sqrt{3m^2+4} = \frac{\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow 3m^4 + 4m^2 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

□

Câu 7.2. Dễ thấy

$$x^2 + x + 3 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}; \quad 2x^2 + 4x + 5 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$\log_{2017}(x^2+x+3) + x^2 + x + 3 = \log_{2017}(2x^2+4x+5) + 2x^2 + 4x + 5. \qquad (1)$$

Xét $f(t) = \log_{2017} t + t$ trên $(0; +\infty)$ có

$$f'(t) = \frac{1}{t\ln 2017} + 1 > 0,\ \forall t \in (0; +\infty).$$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, do đó

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 2x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x = -1$, $x = -2$. □

Câu 7.3. Đặt

$$M=\log_{a_1}\left(a_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{a_2}\left(a_3-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\log_{a_{2016}}\left(a_{2017}-\frac{1}{4}\right)+\log_{a_{2017}}\left(a_1-\frac{1}{4}\right).$$

Nhận xét rằng

$$\forall i=\overline{1;2017},\ \frac{1}{4}<a_i<1\Rightarrow 0<a_i-\frac{1}{4}<\frac{3}{4}.$$

Lại có

$$\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0\Leftrightarrow a_i^2\geqslant a_i-\frac{1}{4}.$$

Do đó

$$M\geqslant \log_{a_1}a_2^2+\log_{a_2}a_3^2+\cdots+\log_{a_{2017}}a_1^2=2\left(\log_{a_1}a_2+\log_{a_2}a_3+\cdots+\log_{a_{2017}}a_1\right).$$

Vì $\log_{a_1}a_2, \log_{a_2}a_3,\ldots,\log_{a_{2017}}a_1$ là các số dương nên theo bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$M\geqslant 2\cdot 2017\sqrt[2017]{\log_{a_1}a_2\cdot\log_{a_2}a_3\cdots\log_{a_{2017}}a_1}=4034.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1=a_2=\cdots=a_{2017}=\frac{1}{2}.$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □

Câu 7.4. Với mọi $x\in\left[0;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, ta có

$$1\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^{2017}}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Do đó

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}1\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2017}}}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

- Ta có $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}1\,\mathrm{d}x=x\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Đặt $x=\sin t,\ t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$, ta có

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,\mathrm{d}t=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}.$$

Vậy

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2017}}}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □

Câu 7.5. Ta có

$$\ln\left[\frac{(2017+\cos x)^{2017+\sin x}}{(2017+\sin x)^{2017}}\right] = (2017+\sin x)\ln(2017+\cos x) - 2017\ln(2017+\sin x).$$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= 2017\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2017+\cos x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ln(2017+\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad -2017\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2017+\sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= I_1 + I_2 - I_3. \end{aligned}$$

Xét $I_1 = 2017\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2017+\cos x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$, ta có

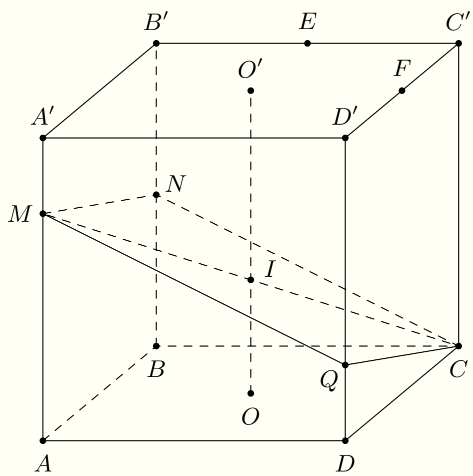
$$I_1 = 2017\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[2017+\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right]\,\mathrm{d}u = 2017\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2017+\sin u)\,\mathrm{d}u = I_3.$$

Xét $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ln(2017+\cos x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = -\ln(2017+\cos x) \\ \mathrm{d}v = -\sin x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\sin x}{2017+\cos x}\mathrm{d}x \\ v = 2017+\cos x \end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned} I_2 &= -(2017+\cos x)\ln(2017+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2017+\cos x)\frac{\sin x}{2017+\cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= -2017\ln 2017 + 2018\ln 2018 + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2018\ln 2018 - 2017\ln 2017 - 1. \end{aligned}$$

Vậy $I = I_1 + I_2 - I_3 = I_2 = 2018\ln 2018 - 2017\ln 2017 - 1.$ □

Câu 7.6.



a) Dễ thấy $MNCQ$ là thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi (P). Ta có $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$ và $(P) \cap (ABB'A') = MN$, $(P) \cap (CDD'C') = CQ$ nên $MN \parallel CQ$. Tương tự ta có $MQ \parallel NC$, do đó $MNCQ$ là hình bình hành.
Ta có

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{17}}{4}, \\ NC &= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \\ MC &= \sqrt{2a^2 + \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{41}}{4}. \end{aligned}$$

Xét tam giác MNC, đặt $p = \dfrac{MN + MP + NC}{2}$, áp dụng công thức **Heron**, ta có

$$S_{\triangle MNC} = \sqrt{p(p - MN)(p - MC)(p - NC)} = \frac{a^2\sqrt{21}}{8}.$$

Vậy diện tích thiết diện là

$$S_{MNCQ} = 2S_{\triangle MNC} = \frac{a^2\sqrt{21}}{4}.$$

b) Ta có

$$V_{B'.MNCQ} = \frac{1}{3}S_{MNCQ} \cdot \mathrm{d}(B', (MNCQ)).$$

Do đó

$$\mathrm{d}(B', (MNCQ)) = \frac{3V_{B'.MNCQ}}{S_{MNCQ}}.$$

Lại có

$$V_{B'.MNCQ} = V_{B'.MNQ} + V_{B'.CNQ} = V_{Q.B'MN} + V_{Q.B'CN}.$$

Trong đó

$$\begin{aligned} V_{Q.B'MN} &= \frac{1}{3}S_{\triangle MB'N} \cdot \mathrm{d}(B, (B'MN)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^3}{12}, \\ V_{Q.B'CN} &= \frac{1}{3}S_{\triangle CB'N} \cdot \mathrm{d}(Q, (B'CN)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^3}{12}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$V_{B'.MNCQ} = \frac{a^3}{12} + \frac{a^3}{12} = \frac{a^3}{6}.$$

Vậy

$$\mathrm{d}(B', (MNCQ)) = \frac{3 \cdot \dfrac{a^3}{6}}{\dfrac{a^2\sqrt{21}}{4}} = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

c) Gọi $O = AC \cap BD$, $O' = A'C' \cap B'D'$ và I là tâm mặt cầu (S). Ta có $(ACC'A')$ là mặt phẳng trung trực của EF, suy ra $I \in (ACC'A')$. Lại có $BDD'B'$ là mặt phẳng trung trực của AC, suy ra $I \in (BDD'B')$. Do đó $I \in (ACC'A') \cap (BDD'B') = OO'$. Đặt $IO = x$, ta có

$$IO' = a - x; \quad IA = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{2}}; \quad IE = \sqrt{(a - x)^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Vì I là tâm (S) nên

$$IA = IE \Leftrightarrow x^2 + \frac{a^2}{2} = (a - x)^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3a}{8}.$$

Vậy bán kính mặt cầu (S) là

$$R = IA = \sqrt{\frac{9a^2}{64} + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{41}}{8}.$$

□

Câu 7.7. Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$, ta có

$$(a+b+c+2)^2 \leqslant 4\left(a^2+b^2+c^2+4\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c+2) \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2+4}.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$3(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \leqslant (3a+3b)\frac{a+b+4c}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{4(a+b+c)}{2}\right]^2 = 2(a+b+c)^2.$$

Từ các bất đẳng thức trên, suy ra

$$T \leqslant \frac{8}{a+b+c+2} - \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Xét $f(t) = \dfrac{8}{t+2} - \dfrac{27}{2t^2}$ trên $(0;+\infty)$, ta có

$$f'(t) = -\frac{8}{(t+2)^2} + \frac{27}{t^3}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow 8t^3 = 27(t+2)^2 \Leftrightarrow t = 6.$$

Bảng biến thiên

x	0		6		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{5}{8}$	↘	0

Từ bảng biến thiên, suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(6) = \dfrac{5}{8}$. Vậy $\max T = \dfrac{5}{8}$ khi $a = b = c = 2$. □

ĐỀ SỐ 8

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2015-2016

Câu 8.1. Đồ thị (C) có đường tiệm cận ngang $y-1=0$ và đường tiệm cận đứng $x+1=0$.
Lấy $M\left(x_0;\dfrac{x_0-3}{x_0+1}\right)\in(C)$, $(x_0\neq -1)$, ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(M,\text{TCN})+\mathrm{d}(M,\text{TCĐ}) &= \left|\frac{x_0-3}{x_0+1}-1\right|+|x_0+1|=\frac{4}{|x_0+1|}+|x_0+1|\\ &\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{|x_0+1|}\cdot|x_0+1|}=4 \quad (\text{do bất đẳng thức } AM-GM).\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{4}{|x_0+1|}=|x_0+1|\Leftrightarrow |x_0+1|=2\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}x_0&=1\\x_0&=-3\end{aligned}\right. (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy với $M(1;-1)$ hoặc $M(-3;3)$ thì $\mathrm{d}(M,\text{TCN})+\mathrm{d}(M,\text{TCĐ})$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2. □

Câu 8.2. Trừ theo vế các phương trình trong hệ, ta có

$$x+\sqrt{x^2-2x+2}+3^{x-1}=y+\sqrt{y^2-2y+2}+3^{y-1}. \qquad (1)$$

Xét $f(t)=t+\sqrt{t^2-2t+2}+3^{t-1}$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned}f'(t) &= 1+\frac{t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}+3^{t-1}\ln 3=\frac{\sqrt{t^2-2t+2}+t-1}{\sqrt{t^2-2t+1}}+3^{t-1}\ln 3\\ &> \frac{|t-1|+t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}+3^{t-1}\ln 3>0,\ \forall t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(1)\Leftrightarrow x=y$, thay vào phương trình thứ nhất được

$$\begin{aligned}x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{x-1}+1 &\Leftrightarrow x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}=3^{x-1}\\ &\Leftrightarrow \ln\left(x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}\right)=(x-1)\ln 3\\ &\Leftrightarrow \ln\left(x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}\right)-(x-1)\ln 3=0. \qquad (2)\end{aligned}$$

Xét $g(t)=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)-t\ln 3$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$$g'(t)=\frac{1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}-\ln 3=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}-\ln 3\leqslant 1-\ln 3<0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Do đó $g(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $g(t)$ có nhiều nhất một nghiệm trên $\mathbb{R}$. Lại có $g(0)=0$ nên $g(t)$ có nghiệm duy nhất $t=0$, hay (2) có nghiệm duy nhất $x=1$. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$. □

Câu 8.3. Gọi X là biến cố đội A thắng mỗi hiệp, ta có

$$\mathrm{P}(X)=0{,}4\Rightarrow \mathrm{P}\left(\overline{X}\right)=0{,}6.$$

Đội A có thể thắng trận chung kết sau ba hiệp, bốn hiệp hoặc năm hiệp.

TH1: Đội A thắng trận chung kết sau ba hiệp. Khi đó cả ba hiệp đội A đều thắng. Do đó xác suất trong trường hợp này là

$$\mathrm{P}_1 = [\mathrm{P}(X)]^3 = (0{,}4)^3.$$

TH2: Đội A thắng trận chung kết sau bốn hiệp. Khi đó trong ba hiệp đầu, đội A thắng hai hiệp thua một hiệp và hiệp cuối đội A thắng. Do đó xác suất trong trường hợp này là

$$\mathrm{P}_2 = \mathrm{C}_3^2 \cdot [\mathrm{P}(X)]^2 \cdot \mathrm{P}\left(\overline{X}\right) \cdot \mathrm{P}(X) = \mathrm{C}_3^2 \cdot (0{,}4)^3 \cdot 0{,}6.$$

TH3: Đội A thắng trận chung kết sau năm hiệp. Khi đó trong bốn hiệp đầu, đội A thắng hai hiệp thua hai hiệp và hiệp cuối đội A thắng. Do đó xác suất trong trường hợp này là

$$\mathrm{P}_3 = \mathrm{C}_4^2 \cdot [\mathrm{P}(X)]^2 \cdot \left[\mathrm{P}\left(\overline{X}\right)\right]^2 \cdot \mathrm{P}(X) = \mathrm{C}_4^2 \cdot (0{,}4)^3 \cdot (0{,}6)^2.$$

Vậy xác suất để đội A thắng trận chung kết là

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3 = (0{,}4)^3 + \mathrm{C}_3^2 \cdot (0{,}4)^3 \cdot 0{,}6 + \mathrm{C}_4^2 \cdot (0{,}4)^3 \cdot (0{,}6)^2 = \frac{992}{3125}.$$

□

Câu 8.4.

a) Đặt $x = \pi - t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \pi$, $x = \pi \Rightarrow t = 0$, ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x f(\sin x)\,\mathrm{d}x &= \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t))(-\mathrm{d}t) \\
&= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \pi f(\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi t f(\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi x f(\sin x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\displaystyle\int_0^\pi x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

b) Hàm số $f(x) = \dfrac{x\sin x}{\sin^2 x + 3}$ liên tục trên $[-\pi;\pi]$, do đó theo câu a), ta có

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sin^2 x + 3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

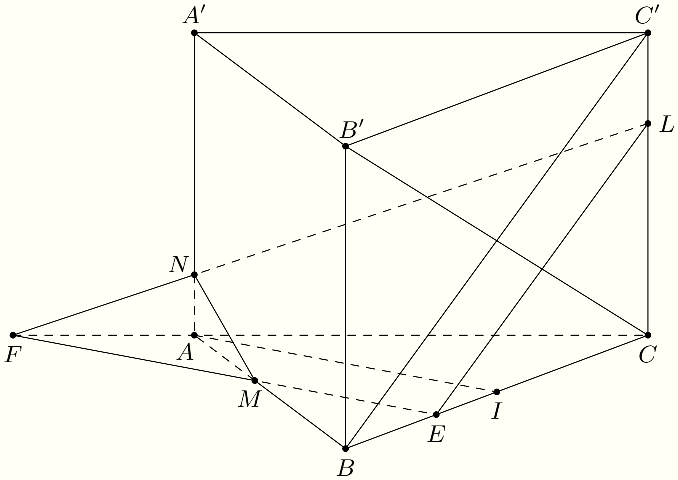
Đặt $u = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 1$, $x = \pi \Rightarrow u = -1$, ta có

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{4 - u^2}(-\mathrm{d}u) = -\frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{(u-2)(u+2)}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{8}\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{u+2} - \frac{1}{u-2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{8}\left(\ln|u+2| - \ln|u-2|\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{8}(\ln 3 + \ln 3) = \frac{\pi}{4}\ln 3.
\end{aligned}$$

Vậy $I = \dfrac{\pi}{4}\ln 3$.

□

Câu 8.5.



a) Gọi I trung điểm BC, ta có

$$\begin{cases} AI \perp BC \\ AI \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp B'C.$$

Mặt khác $(P) \perp B'C$ và $AI \not\subset (P)$ nên $AI \parallel (P)$. Trong (ABC), qua M dựng đường thẳng song song AI cắt BC, AC lần lượt tại E và F, ta có $EF \subset (P)$. Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2} = BB'$, suy ra $BCC'B'$ là hình vuông nên $BC' \perp B'C$, do đó $BC' \parallel (P)$. Trong $(BCC'B')$, qua E dựng đường thẳng song song BC' cắt CC' tại L, ta có $L \in (P)$. Trong $(ACC'A')$ nối FL cắt AA' tại N, ta có $N \in (P)$. Vậy $MNLE$ là thiết diện của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ cắt bởi (P).

b) Ta có $ME \perp (BCC'B')$, nên gọi φ là góc giữa (P) và (ABC), ta có $\varphi = \widehat{LEC} = 45^\circ$. Dễ thấy $MACE$ là hình chiếu của $MNLE$ trên (ABC). Do đó

$$S_{MNLE} = \frac{S_{MACE}}{\cos\varphi} = \sqrt{2}S_{MACE}.$$

Ta lại có

$$S_{MACE} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BME} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}x^2.$$

Do đó

$$S_{MNLE} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}a^2,\ \forall x \in [0; a).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$. Vậy với $x = 0$ thì S_{MNLE} đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$.

c) Các tam giác EFC, CEL, AMF vuông cân nên suy ra

$$EF = EC = LC = a\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}};\ AF = AM = a - x; FC = AC + AF = 2a - x.$$

Lại có $AN \parallel LC$ nên $AN = \dfrac{FA}{FC} \cdot LC = \dfrac{a}{\sqrt{2}} - \dfrac{x}{\sqrt{2}}$. Do đó

$$\begin{aligned} V_{AMNCEL} &= V_{L.EFC} - V_{N.AMF} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{d}(L,(ABC)) \cdot S_{\triangle EFC} - \frac{1}{2}\mathrm{d}(N,(ABC)) \cdot S_{\triangle AMF} \\ &= \frac{1}{3}LC \cdot \frac{1}{2}EF \cdot EC - \frac{1}{3}NA \cdot \frac{1}{2}AM \cdot AF \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{24}\left[(2a-x)^3 - 2(a-x)^3\right].$$

Xét $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{24}\left[(2a-x)^3 - 2(a-x)^3\right]$ trên $[0;a)$, ta có

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[2(a-x)^2 - (2a-x)^2\right] = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(x^2 - 2a^2\right) < 0, \forall x \in [0;a).$$

Do đó $f(x) \leqslant f(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}a^3$, khi đó $M \equiv B$. Vậy $V_{AMNCEL} = \frac{\sqrt{2}}{24}\left[(2a-x)^3 - 2(a-x)^3\right]$ và khi $M \equiv B$ thì V_{AMNCEL} đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

□

Câu 8.6. Đặt

$$P = \frac{2}{3+ab+bc+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{6} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx), \forall x,y,z \in \mathbb{R},$$

ta có

$$(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c) = 9abc.$$

Suy ra

$$ab+bc+ca \geqslant 3\sqrt{abc}.$$

Lại có

$$\begin{aligned}(1+a)(1+b)(1+c) &= 1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc \\ &\geqslant 1+3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{(abc)^2}+abc \\ &\geqslant \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3, \forall a,b,c>0.\end{aligned}$$

Khi đó

$$P \leqslant \frac{2}{3\left(1+\sqrt{abc}\right)} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}} + \frac{\sqrt{abc}}{6}.$$

Đặt $\sqrt[6]{abc} = t$, suy ra $\sqrt[3]{abc} = t^2$, $\sqrt{abc} = t^3$. Vì $a,b,c > 0$ nên $0 < abc \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1$, suy ra $0 < t \leqslant 1$. Xét $f(t) = \frac{2}{3\left(1+t^3\right)} + \frac{t^2}{1+t^2} + \frac{t^3}{6}$ trên $(0;1]$, ta có

$$f'(t) = \frac{2t(t-1)\left(t^5-1\right)}{\left(1+t^3\right)^2\left(1+t^2\right)^2} + \frac{t^2}{2} > 0, \forall t \in (0;1].$$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $(0;1]$ nên $f(t) \leqslant f(1) = 1$, suy ra $P \leqslant 1$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □

ĐỀ SỐ 9

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2014-2015

Câu 9.1. Đồ thị (Cm) có đường tiệm cận đứng $x = -m$ và tiệm cận ngang $y = m$. Suy ra giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(-m; m)$. Lấy $M\left(x_0; \dfrac{mx_0 - 1}{x_0 + m}\right) \in (Cm)$, $(x_0 \neq -m)$, ta có

$$y' = \frac{m^2+1}{(x+m)^2} \Rightarrow y'(x_0) = \frac{m^2+1}{(x_0+m)^2}.$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y = \frac{m^2+1}{(x_0+m)^2}(x - x_0) + \frac{mx_0 - 1}{x_0 + m}.$$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại

$$A\left(-m; m - \frac{2m^2+2}{x_0+m}\right),\ B\left(2x_0 + m; m\right).$$

Khi đó

$$IA = \frac{2(m^2+1)}{|x_0+m|},\ IB = 2|x_0+m| \Rightarrow S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = 2(m^2+1).$$

Theo giả thiết, ta có

$$S_{\triangle IAB} = 2015 \Leftrightarrow 2(m^2+1) = 2015 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\frac{2013}{2}}.$$

Vậy $m = \pm\sqrt{\dfrac{2013}{2}}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Câu 9.2. Đặt $\sqrt[4]{3^x - 2} = u$, $\sqrt[4]{3^x + 2} = v$ $(u \geqslant 0; v > 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 2u^2 + uv = v^2 &\Leftrightarrow u^2 - v^2 + u^2 + uv = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u+v) + u(u+v) = 0 \\ &\Leftrightarrow (u+v)(2u - v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u = -v & \text{(loại)} \\ 2u = v. & \end{array}\right. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$2\sqrt[4]{3^x - 2} = \sqrt[4]{3^x + 2} \Leftrightarrow 16(3^x - 2) = 3^x + 2 \Leftrightarrow 3^x = \frac{34}{15} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{34}{15}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \log_3 \dfrac{6}{5}$. □

Câu 9.3. Xét khai triển

$$(1+x)^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 x + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}.$$

Cho $x = 1$, ta có

$$2^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}. \quad (1)$$

Vì $\mathrm{C}_{2n+1}^0 = \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}$, $\mathrm{C}_{2n+1}^1 = \mathrm{C}_{2n+1}^{2n}, \ldots, \mathrm{C}_{2n+1}^n = \mathrm{C}_{2n+1}^{n+1}$ nên từ (1), suy ra

$$2^{2n+1} = 2\left(C_{2n+1}^{n+1} + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1}\right) \Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2 \cdot 2^{20} \Leftrightarrow n = 10.$$

Khi đó

$$P(x)=\left(\sqrt[4]{x^{\log_2 x-3}}+\sqrt{2^{-x\log_2\frac{x}{8}}}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^{k}\left(\sqrt[4]{x^{\log_2 x-3}}\right)^{10-k}\left(\sqrt{2^{-x\log_2\frac{x}{8}}}\right)^{k}.$$

Số hạng thứ ba tương ứng với $k=2$, khi đó ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_{10}^{2}\left(\sqrt[4]{x^{\log_2 x-3}}\right)^{8}\left(\sqrt{2^{-x\log_2\frac{x}{8}}}\right)^{2}=45 \quad&\Leftrightarrow\quad x^{2(\log_2 x-3)}\cdot 2^{-x\log_2\frac{x}{8}}=1\\
&\Leftrightarrow\quad x^{2(\log_2 x-3)}=2^{x(\log_2 x-3)}\\
&\Leftrightarrow\quad 2(\log_2 x-3)\log_2 x=x(\log_2 x-3)\\
&\Leftrightarrow\quad (\log_2 x-3)(2\log_2 x-x)=0\\
&\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=8\\ 2\log_2 x-x=0.\quad (2)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Xét $f(x)=2\log_2 x-x$ trên $(0;+\infty)$ có

$$f'(x)=\frac{2}{x\ln 2}-1;\quad f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{\ln 2}.$$

Suy ra $f(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm trên $(0;+\infty)$. Mặt khác $f(2)=f(4)=0$, do đó $f(x)=0$, hay (2) có đúng hai nghiệm $x=2$, $x=4$. Vậy $x=2$, $x=4$, $x=8$. □

Câu 9.4. Xét $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$, ta có

$$J=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}}(-\,\mathrm{d}t)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\sin t}+\sqrt{\cos t}}\,\mathrm{d}t=I.$$

Lại có

$$I+J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

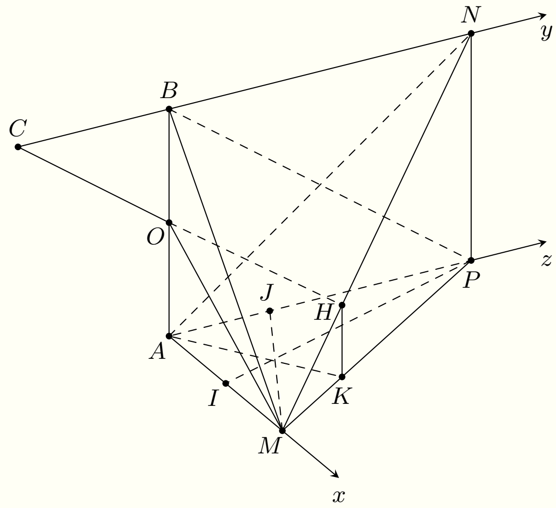
Vậy $I=\frac{\pi}{4}$. □

Câu 9.5. Ta có $I_{n+2}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\sin^{n+1}x\\ \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=(n+1)\cos x\sin^n x\,\mathrm{d}x\\ v=-\cos x\end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned}
I_{n+2}&=\left(-\cos x\sin^{n+1}x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^n x\,\mathrm{d}x\\
&=(n+1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^n x\,\mathrm{d}x\\
&=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$. □

Câu 9.6.



a) Ta có $AB \perp By$ và $By \parallel Az$ nên $AB \perp Az$, suy ra $AB \perp (AMP)$. Vì $AM + BN = MN$ nên $BN = MN - AM = 4a$. Mặt khác $ABNP$ là hình chữ nhật nên $AP = BN = 4a$, $NP = AB = 3a$. Tam giác MNP vuông tại P nên

$$MP = \sqrt{MN^2 - NP^2} = 4a = AP.$$

Gọi I trung điểm AM, suy ra $PI \perp AM$, do đó

$$PI = \sqrt{AP^2 - AI^2} = \frac{3a\sqrt{7}}{2}.$$

Khi đó diện tích tam giác AMP là

$$S_{\triangle AMP} = \frac{1}{2}AM \cdot PI = \frac{3a^2\sqrt{7}}{4}.$$

Vậy thể tích khối tứ diện $ABMN$ là

$$V_{ABMN} = \frac{1}{2}BA \cdot S_{\triangle AMP} = \frac{3a^3\sqrt{7}}{4}.$$

b) Đặt $AM = m$, $BN = n$. Trên tia đối của tia By lấy điểm C sao cho $BC = m$, ta có

$$\triangle OBC = \triangle OAM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow OC = OM.$$

Từ đó suy ra

$$\triangle ONC = \triangle ONM \text{ (c.c.c)} \Rightarrow OB = OH \Rightarrow OH = \frac{1}{2}AB.$$

Do đó $\triangle AHB$ vuông tại H hay $\widehat{AHB} = 90^\circ$. Lại có $\triangle OBC = \triangle OHN \Rightarrow MH = BC = m$, suy ra $HN = n$. Gọi K là hình chiếu của H trên MP, ta có $HK \parallel NP$, do đó

$$\frac{MK}{KP} = \frac{MH}{HN} = \frac{m}{n} = \frac{AM}{BN} = \frac{AM}{AP}.$$

Suy ra AK là đường phân giác trong của góc $\widehat{MAP}$ nên AK cố định. Do đó mặt phẳng (ABK) cố định và H thuộc mặt phẳng này. Từ đó suy ra H thuộc đường tròn cố định đường kính AB và nằm trên (ABK).

c) Đặt $\widehat{xAz} = \alpha$ không đổi. Tam giác MNP có

$$MP^2 = MN^2 - NP^2 = (m+n)^2 - 9a^2. \tag{1}$$

Tam giác AMP có

$$MP^2 = AM^2 + AP^2 - 2AM \cdot AP \cos\alpha = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta có

$$(m+n)^2 - 9a^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha \Leftrightarrow 2mn(1+\cos\alpha) = 9a^2 \Leftrightarrow mn = \frac{9a^2}{2(1+\cos\alpha)}.$$

Gọi J là hình chiếu của M trên AP, ta có $MJ \perp (ABN)$ và $MJ = AM\sin\alpha = m\sin\alpha$. Diện tích tam giác ABN là $S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2}AB \cdot BN = \frac{3}{2}an$. Khi đó

$$V_{ABMN} = \frac{1}{3}MJ \cdot S_{\triangle ABN} = \frac{1}{3} \cdot m\sin\alpha \cdot \frac{3}{2}an = \frac{1}{2}amn\sin\alpha = \frac{9a^3\sin\alpha}{4(1+\cos\alpha)}.$$

Vậy V_{ABMN} không đổi.

□

Câu 9.7. Từ điều kiện $a^3 + b^3 + c^3 - 1 = 3abc$, ta có

$$1 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right),$$

suy ra $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \neq 0$.
Lại có

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geqslant 0, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

nên

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0 \Rightarrow a + b + c > 0.$$

Do đó

$$P = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{a+b+c} + ab + bc + ca. \tag{1}$$

Đặt $a + b + c = x > 0$, ta có

$$x^2 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = P + 2(ab+bc+ca).$$

Từ đó suy ra

$$ab + bc + ca = \frac{x^2 - P}{2}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$P = \frac{1}{x} + \frac{x^2 - P}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^3}{2} + \frac{2}{3x}.$$

Xét $f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{2}{3x}$ trên $(0; +\infty)$, ta có

$$f'(x) = \frac{2x}{3} - \frac{2}{3x^2} = \frac{2}{3x^2}(x^3 - 1); \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$. Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi và chỉ khi $(a; b; c)$ là các hoán vị của bộ $(1; 0; 0)$. □

ĐỀ SỐ 10

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2013-2014

Câu 10.1. Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và đường tiệm cận ngang $y = 2$. Suy ra giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(1;2)$. Lấy $M\left(x_0; \dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right) \in (C)$, $(x_0 \neq 1)$, ta có $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(x_0) = \dfrac{-3}{(x_0-1)^2}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1}.$$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại

$$A\left(1; \frac{2x_0+4}{x_0-1}\right),\ B\left(2x_0-1;2\right).$$

Ta có

$$IA = \frac{6}{|x_0-1|},\ IB = 2|x_0-1|,\ AB = \sqrt{\frac{36}{(x_0-1)^2} + 4(x_0-1)^2}.$$

Suy ra chu vi tam giác IAB là

$$IA + IB + AB = \frac{6}{|x_0-1|} + 2|x_0-1| + \sqrt{\frac{36}{(x_0-1)^2} + 4(x_0-1)^2} \geqslant 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{6}{|x_0-1|} = 2|x_0-1| \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = 1 \pm \sqrt{3} \quad \text{(thỏa mãn)}.$$

Vậy với $M\left(1+\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(1-\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}\right)$ thì chu vi $\triangle IAB$ bằng $4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$. □

Câu 10.2. Ta xét hai trường hợp sau:

TH1: $x < 0$, ta có $3^{\sqrt{x^2+1}} + 2|x| > 3 > 3^{x+1}$, do đó phương trình đã cho không có nghiệm trên $(0;+\infty)$.

TH2: $x \geqslant 0$, ta có phương trình tương đương

$$3^{\sqrt{x^2+1}} - \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 = 3^{x+1} - (x+1)^2. \qquad (1)$$

Xét $f(t) = 3^t - t^2$ trên $[1;+\infty)$, ta có

$$f'(t) = 3^t \ln 3 - 2t; \quad f''(t) = 3^t \ln^2 3 - 2 \geqslant 3\ln^2 3 - 2 > 0,\ \forall t \in [1;+\infty).$$

Do đó $f'(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên

$$f'(t) \geqslant f'(1) = 3\ln 3 - 2 > 0,\ \forall t \in [1;+\infty).$$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = x+1 \Leftrightarrow x^2+1 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$. □

Câu 10.3.

a) Với $a > 0$, $a \neq 1$, ta có

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-\alpha}^{0} \frac{f(x)}{a^x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Xét $\int\limits_{-\alpha}^{0} \frac{f(x)}{a^x+1}\,\mathrm{d}x$, đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Đổi cận $x = -\alpha \Rightarrow x = \alpha$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, ta có

$$\int_{-\alpha}^{0} \frac{f(x)}{a^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{0} \frac{f(-t)}{a^{-t}+1}(-\,\mathrm{d}t) = \int_{0}^{\alpha} \frac{a^t f(t)}{a^t+1}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\alpha} \frac{a^x f(x)}{a^x+1}\,\mathrm{d}x.$$

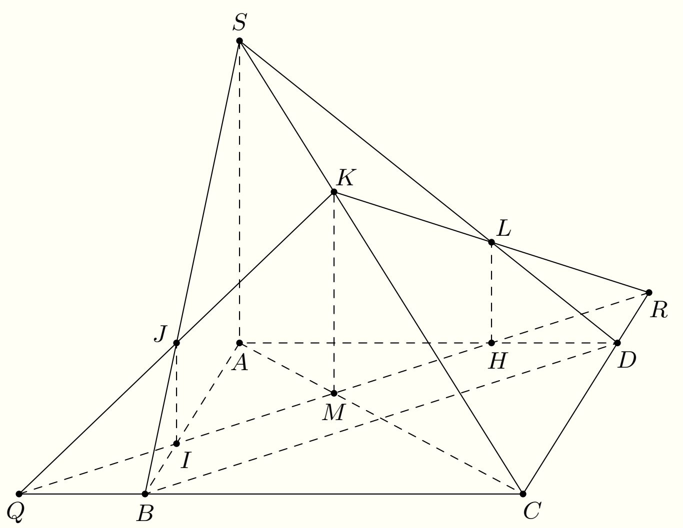
Do đó

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\alpha} \frac{a^x f(x)}{a^x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\alpha} \frac{(a^x+1)f(x)}{a^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ta có đẳng thức cần chứng minh.

□

Câu 10.4.



a) Trong $(ABCD)$, qua M kẻ đường thẳng song song BD cắt AB, AD, BC, DC lần lượt tại I, H, Q, R, ta có $QR = (P) \cap (ABCD)$. Trong (SAC), kẻ đường thẳng song song SA cắt SC tại K, ta có $K \in (P)$. Trong (SBC), nối KQ cắt SB tại J, ta có $J \in (P)$. Trong (SDC), nối KR cắt SD tại L, ta có $L \in (P)$. Do đó $HIJKL$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P). Ta có $MK \parallel SA$ nên

$$MK = \frac{MC \cdot SA}{AC} = \frac{(a\sqrt{2}-x)a}{a\sqrt{2}} = a - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Tam giác AMI vuông cân tại M nên $IM = AM = x$, $AI = x\sqrt{2}$. Tam giác SAB vuông cân tại A và $IJ \parallel SA$, suy ra $IJ = IB = a - x\sqrt{2}$. Vì vai trò của B và D như nhau nên

$$S_{HIJKL} = 2S_{MIJK} = (MK + IJ)IM = \left(a - \frac{x}{\sqrt{2}} + a - x\sqrt{2}\right)x = 2ax - \frac{3x^2\sqrt{2}}{2}.$$

b) Xét $f(x) = 2ax - \dfrac{3x^2\sqrt{2}}{2}$ trên $\left(0; \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, ta có

$$f'(x) = 2a - 3x\sqrt{2}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{a\sqrt{2}}{3}$		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	$\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

Từ bảng biến thiên, suy ra S_{HIJKL} đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$ khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Đặt $V = V_{S.ABCD}$ và $V_1 = V_{BCDHIJKL}$ và V_2 là thể tích khối còn lại. Ta có $AM = \dfrac{1}{3}AC$, suy ra

$$IB = \frac{1}{3}IA, QC = \frac{4}{3}BC, HD = \frac{1}{3}HA, RC = \frac{4}{3}DC, MK = \frac{2}{3}SA, IJ = HL = \frac{1}{3}SA.$$

Do đó

$$\begin{aligned} V_{K.QCR} &= \frac{1}{3}KM \cdot \frac{1}{2}CQ \cdot CR = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}SA \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}CB \cdot \frac{4}{3}CD = \frac{16}{27}V \\ V_{J.QIB} &= \frac{1}{3} \cdot JI \cdot \frac{1}{2}BI \cdot BQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}SA \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}AD \cdot \frac{1}{3}AD = \frac{1}{54}V. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$V_1 = V_{K.QCR} - 2V_{J.QIB} = \frac{16}{27}V - 2 \cdot \frac{1}{54}V = \frac{5}{9}V \Rightarrow V_2 - V - V_1 = \frac{4}{9}V.$$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{4}$.

□

Câu 10.5.

a) Ta có bất đẳng thức tương đương

$$\begin{aligned} & 2 + a + b + 2\sqrt{(1+a)(1+b)} \geqslant 2 + a + b + 2\sqrt{1+a+b} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(1+a)(1+b)} \geqslant \sqrt{1+a+b} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{1+a+b+ab} \geqslant \sqrt{1+a+b} \quad (\text{đúng } \forall a, b \geqslant 0). \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $b = 0$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a), ta có

$$\begin{aligned} 5 = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+2y} + \sqrt{1+2z} &\geqslant 1 + \sqrt{1+x^2+2y} + \sqrt{1+2z} \\ &\geqslant 2 + \sqrt{1+x^2+2y+2z}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\sqrt{1+x^2+2y+2z} \leqslant 3 \Leftrightarrow x^2+2y+2z \leqslant 8 \Leftrightarrow y+z \leqslant 4-\frac{x^2}{2}.$$

Khi đó

$$M \leqslant 2x^3+(y+z)^3 \leqslant 2x^3+\left(4-\frac{x^2}{2}\right)^3.$$

Xét $f(x)=2x^3+\left(4-\frac{x^2}{2}\right)^3$ trên $\left[0;2\sqrt{2}\right]$, ta có

$$f'(x)=6x^2-3x\left(4-\frac{x^2}{2}\right)^2=\frac{3}{4}x(x-2)\left[x(12-x^2)+2(16-x^2)\right].$$

Với $x \in \left[0;2\sqrt{2}\right]$, ta có

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$$

Khi đó $f(0)=64$, $f(2)=24$, $f(2\sqrt{2})=32\sqrt{2}$, suy ra $\max\limits_{[0;2\sqrt{2}]} f(x)=f(0)=64$. Vậy M đạt giá trị lớn nhất bằng 64 khi $x=y=0$, $z=4$ hoặc $x=z=0$, $y=4$.

$\square$